

Hướng tới VPhO 43

Câu lạc bộ vật lý xPhO

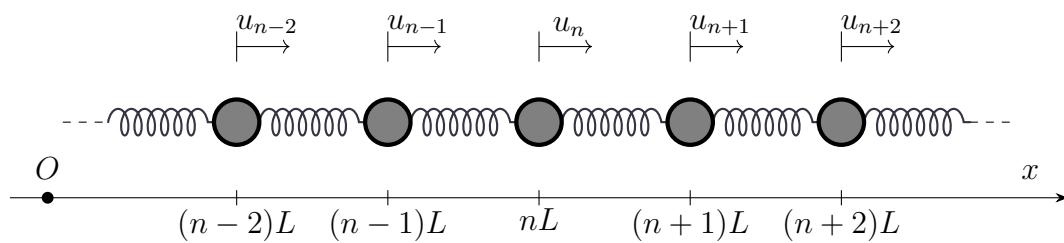
CÂU 1 (4 điểm)

Khối lượng âm...

Ở thế giới bình thường của chúng ta, khối lượng âm là điều không tưởng. Trong một số mô hình truyền sóng cơ học, khối lượng hiệu dụng của các thành phần trong mạng tinh thể nhân tạo có thể âm và đưa đến những tính chất thú vị. Một trong những mô hình đơn giản hóa và tiêu biểu của khối lượng hiệu dụng âm là mô hình "khối lượng trong khối lượng" (mass-in-mass model).

1. Mô hình mạng nguyên tử tinh thể và sóng đàn hồi.

Xét một mạng tinh thể một chiều gồm các hạt khối lượng m đặt cách đều nhau một khoảng L như hình 1. Xem như mỗi hạt "nguyên tử" trong mạng chỉ tương tác với hai hạt liền kề nó và tương tác này tương đương với một lò xo độ cứng k , độ dài tự nhiên L . Với hạt thứ n trong mạng tinh thể, vị trí cân bằng của hạt này là tại $x_n = nL$. Ta ký hiệu li độ của hạt thứ n này so với vị trí cân bằng là u_n .



Hình 1: Mô hình mạng tinh thể.

a, Chứng minh rằng, li độ và gia tốc của các hạt trong mạng tinh thể tuân theo phương trình sai phân sau:

$$\ddot{u}_n = -\frac{k}{m} (2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}).$$

b, Với một sóng kích thích có tần số cương bức ω tác động lên mạng tinh thể, chọn gốc tọa độ $n = 0$ và gốc thời gian $t = 0$ phù hợp, ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình sai phân trên có thể được tìm dưới dạng

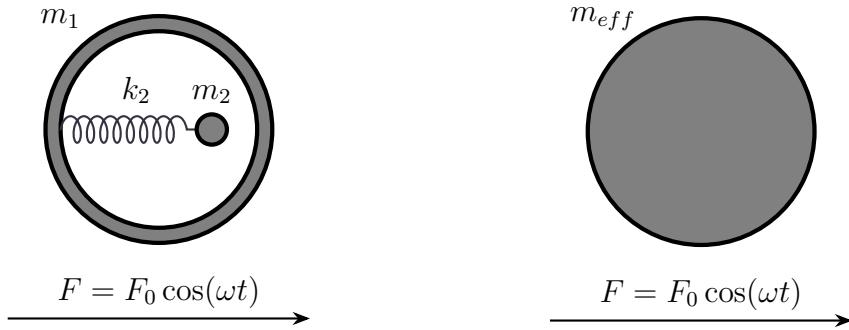
$$u_n = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x_n\right) \cos(\omega t),$$

trong đó A là biên độ và là một hằng số, v là vận tốc truyền sóng trong mạng tinh thể. Tìm vận tốc truyền sóng v theo ω , m , k và L trong mô hình này.

c, Chỉ ra rằng: Với L vô cùng bé so với các đại lượng khác cùng thứ nguyên, môi trường truyền sóng gần như liên tục, vận tốc truyền sóng sẽ không phụ thuộc vào ω . Xem rằng trung bình mỗi mạng tinh thể đọc trong vật liệu được mô tả như trên nằm trong một vùng diện tích ΔS trên mặt cắt ngang. Tìm vận tốc truyền sóng này theo khối lượng riêng ρ và suất Young E của vật liệu.

2. Mô hình "khối lượng trong khối lượng" và hiện tượng "khối lượng âm"

Để cải tiến mô hình mạng tinh thể và thu được những tính chất thú vị, ta thay thế "hạt nguyên tử" trên thành một hạt kiểu mới, gồm một hạt khối lượng m_1 nối với một hạt m_2 (với $m_2 < m_1$) bằng một lò xo có độ cứng k_2 như hình 2.



Hình 2: Một cơ hệ (hình bên trái) được tương đương như một hạt "nguyên tử" mới trong mạng tinh thể (hình bên phải).

Khảo sát độc lập một hạt mới này, ta xem lực mà các hạt khác xung quanh tác dụng lên hạt khối lượng m_1 như một lực cưỡng bức điều hòa F với tần số cưỡng bức ω . Do chịu ảnh hưởng bởi lực tác động trên, hạt m_1 bị cưỡng bức và dao động dưới tần số ω , li độ của m_1 khi đó có thể viết dưới dạng

$$u = -\frac{F}{m_{eff}\omega^2}.$$

Với m_{eff} được gọi là khối lượng hiệu dụng của cơ hệ. Xác định khối lượng hiệu dụng của hạt mới m_{eff} theo m_1 , m_2 , k_2 và ω . Với những giá trị nào của tần số ω thì khối lượng hiệu dụng m_{eff} âm?

Ghi chú: Trong bài toán này, ta xem như các lực ma sát và các tổn thất năng lượng là rất nhỏ để đưa vào tính toán, song nó vẫn tồn tại để các dao động tự do nhanh chóng bị tắt.

(Biên soạn bởi Log và $\tau\hbar\alpha\chi$)

Bài giải

1. a, Độ biến dạng lò xo bên trái hạt thứ n là $(u_n - u_{n-1})$ và độ biến dạng lò xo bên phải hạt thứ n là $(u_{n+1} - u_n)$. Như vậy phương trình lực - gia tốc trên hạt m là

$$m\ddot{u}_n = -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n).$$

Từ đây, ta tìm được phương trình sai phân

$$\ddot{u}_n = -\frac{k}{m}(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}). \quad (1)$$

- b, Thay nghiệm đề bài cho vào phương trình (1) và triết tiêu $A \cos(\omega t)$ ở hai vế ta được:

$$-\omega^2 \sin\left(\frac{\omega L}{v}n\right) = -\frac{k}{m} \left[2 \sin\left(\frac{\omega L}{v}n\right) - \sin\left(\frac{\omega L}{v}(n+1)\right) - \sin\left(\frac{\omega L}{v}(n-1)\right) \right].$$

Giải phương trình trên, ta có

$$v = \frac{\omega L}{\arccos\left[1 - \frac{m\omega^2}{2k}\right]}. \quad (2)$$

c, Với L rất nhỏ so với v/ω , từ (2), ta có $1 - \frac{m\omega^2}{2k} = \cos\left(\frac{\omega L}{v}\right) \approx 1 - \frac{\omega^2 L^2}{2v^2}$. Như vậy,

$$v = L\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Trong vật liệu ta đang xét tới, có thể thấy suất khối lượng riêng $\rho = m/(L\Delta S)$ và suất Young $E = k/\Delta S$. Thay các đại lượng trên vào phương trình (3), ta được:

$$v = L\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kL/\Delta S}{m/(L\Delta S)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4)$$

2. Gọi ly độ của m_2 là ξ . Phương trình lực gia tốc lên hai hạt lần lượt là:

*Hạt m_1 :

$$m_1\ddot{u} = -k_2(u - \xi) + F. \quad (5)$$

*Hạt m_2 :

$$m_2\ddot{\xi} = -k_2(\xi - u). \quad (6)$$

Ở chế độ xác lập cưỡng bức, gia tốc $\ddot{u} = -\omega^2u$ và $\ddot{\xi} = -\omega^2\xi$. Thay các gia tốc này vào phương trình (3) và (4), ta được

$$-m_1\omega^2u = -k_2(u - \xi) + F \quad (7)$$

và

$$-m_2\omega^2\xi = -k_2(\xi - u). \quad (8)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$u = \frac{F}{\left(m_1 + \frac{m_2}{1 - \frac{m_2\omega^2}{k_2}}\right)\omega^2}. \quad (9)$$

Và ta tìm được khối lượng hiệu dụng của mạch là

$$m_{eff} = m_1 + \frac{m_2}{1 - \frac{m_2\omega^2}{k_2}}. \quad (10)$$

Như vậy, khối lượng hiệu dụng m_{eff} sẽ âm khi tần số ω thỏa mãn

$$\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} < \omega < \sqrt{\frac{k_2}{m_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}. \quad (11)$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1a	Xác định độ biến dạng mỗi lò xo	0.25
	Viết phương trình lực gia tốc và dẫn ra phương trình sai phân (1)	0.25
1b	Thay các nghiệm đề bài cho vào biểu thức	0.25
	Tìm vận tốc v theo m, k, L và ω (2)	0.25
1c	Khai triển nhỏ hàm cos khi L nhỏ	0.25
	Chỉ ra với L nhỏ thì v không phụ thuộc vào ω (3)	0.25
	Xác định khối lượng riêng ρ suất Young E theo $m, k, L, \Delta S$	0.25
	Chứng minh $v = \sqrt{E/\rho}$ (4)	0.25
2	Viết phương trình lực gia tốc cho hạt 1 (5)	0.25
	Viết phương trình lực gia tốc cho hạt 2 (6)	0.25
	Thay các gia tốc ở chế độ xác lập vào, dẫn ra phương trình (7)	0.25
	Dẫn ra phương trình (8)	0.25
	Xác định biểu thức u theo F (9)	0.25
	Tìm được biểu thức của m_{eff} (10)	0.25
	Xác định giới hạn dưới để m_{eff} âm (11)	0.25
	Xác định giới hạn trên để m_{eff} âm (11)	0.25

Tài liệu

[1] Jean Marie Brebéc, P.F.I.E.V Sóng.

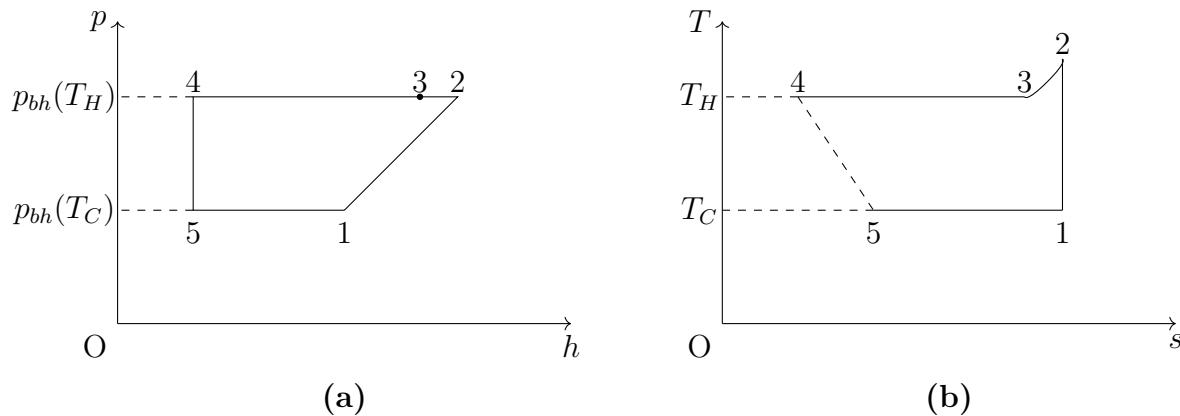
[2] H.H. Huang, C.T. Sun, G.L. Huang, *On the negative effective mass density in acoustic metamaterials*, International Journal of Engineering Science, Volume 47, Issue 4, 2009, Pages 610-617.

CÂU 2 (4 điểm)

Chu trình dưới tối hạn cho máy lạnh

Carbon dioxide (CO_2) đã từng được sử dụng phổ biến trong các loại máy lạnh và điều hòa vào cuối thế kỷ XIX và đầu thế kỷ XX, trước khi các loại khí ga làm lạnh tổng hợp được phát minh. Trong những năm trở lại đây, khi người ta quan tâm hơn về ảnh hưởng môi trường của các loại ga làm lạnh đang được sử dụng phổ biến, carbon dioxide đang trở lại như một lựa chọn tiềm năng với tác động môi trường thấp, không độc, rẻ và có sẵn, và với những đặc tính nhiệt động và thủy động học có lợi cho thiết kế các hệ thống điều hòa.

Chúng ta sẽ cùng khảo sát hoạt động của một hệ thống điều hòa thông dụng ở chế độ dưới bão hòa: Cho n mol của một loại khí ga thực hiện chu trình như được miêu tả trên đồ thị 1a và 1b, với h và s lần lượt là enthalpy và entropy riêng của 1 mol. Lưu ý: hình vẽ không theo tỉ lệ.



Hình 1: (a) Giản đồ $p - h$ của khí ga. (b) Giản đồ $T - s$ của khí ga.

Chu trình này được mô tả như sau:

- 1-2: Nén khí đoạn nhiệt
- 2-3: Làm mát đẳng áp
- 3-4: Ngưng tụ đẳng nhiệt
- 4-5: Giảm khí đột ngột (Quá trình Joule - Thompson)
- 5-1: Bay hơi đẳng nhiệt

Áp suất hơi bão hòa tại nhiệt độ T_H , T_C , enthalpy riêng của pha lỏng, nhiệt hóa hơi mol của pha lỏng coi như đã biết. Giả sử rằng ở thể hơi, khí ga này là một khí lý tưởng đa nguyên tử.

1. Tìm nhiệt độ T_2 theo T_C , $p_{bh}(T_C)$, $p_{bh}(T_H)$.
2. Tìm nhiệt lượng do ga tỏa ra trong quá trình 2-3 và 3-4.
3. Quá trình giãn khí là một quá trình xảy ra rất nhanh, khi đó ta có thể bỏ qua sự trao đổi nhiệt của ga với môi trường trong quá trình này. Thừa nhận rằng tổng enthalpy của ga không đổi trong quá trình này. Tìm tỉ lệ mol ga bị hóa hơi ở cuối quá trình 4-5.
4. Tìm nhiệt lượng khí ga thu vào trong quá trình 5-1.

5. Tìm công cần cung cấp cho ga để thực hiện một chu trình theo T_h , T_c , $p_{bh}(T_h)$, $p_{bh}(T_c)$, $h(T_h)$, $h(T_c)$.
6. Tìm hiệu suất của chu trình.
7. Áp dụng số cho CO₂ với $T_h = 20^\circ\text{C}$ và $T_c = 0^\circ\text{C}$, nhiệt hóa hơi $L = 16.5 \text{ kJ/mol}$. Vì sao chu trình này với ga CO₂ lại không được dùng cho điều hòa nhiệt độ tại nhà thông thường?.

Nhiệt độ (K)	Áp suất (MPa)	Mật độ mol (mol/l)	Nội năng (kJ/mol)	Enthalpy (J/mol · K)	Entropy (J/mol · K)
273.00	3.4713	21.094	8.6213	8.7859	43.953
275.00	3.6589	20.817	8.8266	9.0024	44.711
277.00	3.8539	20.530	9.0354	9.2231	45.476
279.00	4.0565	20.231	9.2481	9.4486	46.252
281.00	4.2670	19.919	9.4652	9.6794	47.038
283.00	4.4855	19.592	9.6873	9.9163	47.839
285.00	4.7123	19.247	9.9154	10.160	48.657
287.00	4.9478	18.881	10.150	10.412	49.496
289.00	5.2921	18.490	10.394	10.675	50.361
291.00	5.4457	18.069	10.648	10.949	51.259
293.00	5.7089	17.609	10.914	11.238	52.199
295.00	5.9822	17.100	11.197	11.547	53.196
297.00	6.2660	16.521	11.504	11.883	54.274
299.00	6.5611	15.837	11.845	12.260	55.476
301.00	6.8683	14.967	12.249	12.708	56.904

(Biên soạn bởi Yuki)

Bài giải

1. Quá trình đoạn nhiệt 1-2:

$$p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{const} \implies T_2 = T_C \left(\frac{p_{bh}(T_H)}{p_{bh}(T_C)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (1)$$

2. Nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình đẳng áp 2-3:

$$Q_{23} = nC_p(T_2 - T_H). \quad (2)$$

Nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình ngưng tụ 3-4 chính là ẩn nhiệt ngưng tụ của toàn bộ n mol ga:

$$Q_{34} = nL. \quad (3)$$

3. Trong quá trình giãn nở đột ngột, một phần ga bị hóa hơi, lấy đi enthalpy từ phần còn lại của ga và làm cho ga lạnh đi. Gọi n_{gas} là số mol ga hóa hơi trong quá trình giãn nở này.

Enthalpy tại trạng thái 4:

$$H_4 = n \cdot h(T_H). \quad (4)$$

Enthalpy tại trạng thái 5:

$$H_5 = n_{gas} \cdot L + n \cdot h(T_C). \quad (5)$$

Bảo toàn enthalpy:

$$H_4 = H_5 \implies \frac{n_{gas}}{n} = \frac{h(T_H) - h(T_C)}{L}. \quad (6)$$

4. Lượng nhiệt lượng ga thu vào trong quá trình bay hơi chính là ẩn nhiệt hóa hơi của phần ga còn lại:

$$Q_{51} = (n - n_{gas}) \cdot L. \quad (7)$$

5. Theo nguyên lý I nhiệt động lực học

$$Q_{in} + A_{gas} = Q_{out}. \quad (8)$$

Quá trình giãn nở và quá trình nén đoạn nhiệt không trao đổi nhiệt với môi trường nên

$$A = Q_{23} + Q_{34} - Q_{51} = nC_p(T_2 - T_H) + n[h(T_H) - h(T_C)]. \quad (9)$$

6. Hiệu năng của máy lạnh

$$\eta = \frac{Q_{in}}{A}. \quad (10)$$

7. Áp dụng số:

$$T_{23} = 337.36 \text{ K.}$$

$$Q_{23} = 1.47 \text{ kJ/mol.}$$

$$Q_{34} = 16.5 \text{ kJ/mol.}$$

$$Q_{51} = 14.05 \text{ kJ/mol.}$$

$$\implies A = 3.92 \text{ kJ/mol} \implies \eta = \frac{Q_{51}}{A} = 3.58.$$

Chu trình này không thể sử dụng cho điều hòa nhiệt độ tại nhà do nhiệt độ bên ngoài có thể vượt quá nhiệt độ tối hạn của carbon dioxide, khiến cho ga này không thể hóa lỏng/hóa hơi chỉ bằng phương pháp nén đẳng nhiệt. Để hoạt động tốt ở vùng nhiệt độ này người ta sử dụng chu trình gần tối hạn (transcritical cycle), đòi hỏi kết cấu máy khác với cấu hình đã nghiên cứu trong bài.

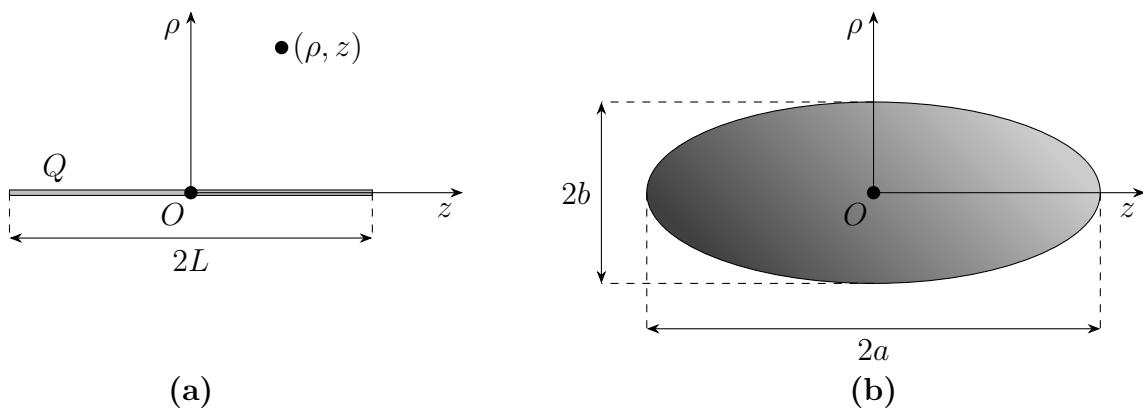
Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Tính nhiệt độ T_2 (1)	0.25
2	Tính nhiệt lượng ga tỏa trong quá trình 2-3 Q_{23} (2)	0.25
	Tính nhiệt lượng ga tỏa trong quá trình 3-4 Q_{34} (3)	0.25
3	Viết enthalpy tại trạng thái 4 và 5 (4) & (5)	0.25
	Áp dụng bảo toàn enthalpy và tính tỷ lệ mol ga hóa hơi (6)	0.50
4	Tính nhiệt lượng ga thu trong quá trình 5-1 (7)	0.50
5	Chỉ ra quá trình 2-3 và 4-5 không trao đổi nhiệt	0.25
	Tính công mà khí nhận được A (9)	0.50
6	Tính hiệu năng máy lạnh (10)	0.50
7	Thay số và tính toán	0.75

CÂU 3 (4 điểm)

Ellipsoid dẫn

1. Một dây thẳng tích điện đều có điện tích Q dài $2L$. Chọn hệ tọa độ trụ như hình 1.
 - Tính điện thế dây gây ra tại một điểm bất kỳ trong không gian không nằm trên sợi dây.
 - Viết phương trình mặt đẳng thế có điện thế ϕ gây ra bởi dây.
2. Một vật dẫn hình khối tạo bởi việc quay hình ellipse có bán trục lớn là a và bán trục nhỏ là b quanh trục chứa bán trục lớn của nó (hình 2).
 - Hãy tìm điện dung của khối ellipsoid tròn xoay này.
 - Tìm mật độ điện mặt σ của khối ellipsoid tròn xoay khi nó được tích điện tích Q .



Hình 1: (a) Thanh tích điện đều trong hệ tọa độ trụ. (b) Vật dẫn ellipsoid.

(Biên soạn bởi Log và Pect)

Bài giải

Để đơn giản, trong bài toán này, ta sẽ sử dụng hệ tọa độ Gauss với $4\pi\epsilon_0 = 1$.

1. a, Điện thế tại điểm (ρ, z) gây ra bởi sợi dây:

$$\phi = \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}} \frac{Q}{2L} dl = \frac{Q}{2L} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{z+L}{\rho} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{z-L}{\rho} \right) \right]. \quad (1)$$

- Từ đây, ta thu được phương trình mặt đẳng thế hình Ellipse tròn xoay $\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{b}\right)^2 = 1$ với hai bán trục của Ellipse lần lượt là $a = L \coth \left(\frac{L\phi}{Q} \right)$ và $b = \frac{L}{\sinh \left(\frac{L\phi}{Q} \right)}$.¹

¹Xem thêm các biến đổi chi tiết ở cuối lời giải.

2. a, Điện trường do một thanh thẳng có độ dài $2L = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ tích điện Q phân bố đều gây ra hoàn toàn mô tả chính xác điện trường vùng không gian bên ngoài ellipsoid dẫn trong bài toán. Thật vậy, nó thỏa mãn toàn bộ các phương trình về điện trường tinh, cũng như thỏa mãn điều kiện biên về mặt đẳng thế của vật dẫn. Thay $L = \sqrt{a^2 - b^2}$ vào kết quả phần 1. ta tìm được điện dung của ellipsoid dẫn

$$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\cosh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}. \quad (2)$$

- b, Mật độ điện mặt của vật dẫn bằng với độ lớn của vector cảm ứng điện trường tại bề mặt, hay cũng chính bằng vector cường độ điện trường trong trường hợp này

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi} |-\nabla\phi| = \frac{Q}{4\pi ab^2} \left(\frac{z^2}{a^4} + \frac{\rho^2}{b^4} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Các bước biến đổi chi tiết cho phần 1b.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{2L} \left[\sinh^{-1}\left(\frac{z+L}{\rho}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{z-L}{\rho}\right) \right]. \\ \Rightarrow \sinh^{-1}\left(\frac{z-L}{\rho}\right) + \frac{2L\phi}{Q} &= \sinh^{-1}\left(\frac{L+z}{\rho}\right) \\ \Rightarrow \sinh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{z-L}{\rho}\right)^2} + \cosh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) \frac{z-L}{\rho} &= \frac{z+L}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{z \left[1 - \cosh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) \right] + L \left[1 + \cosh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) \right]}{\rho} &= \sinh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{z-L}{\rho}\right)^2} \\ \Rightarrow \frac{\rho^2 \sinh^2\left(\frac{2L\phi}{Q}\right)}{2L^2 \left[1 + \cosh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) \right]} + \frac{z^2 \left[\cosh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) - 1 \right]}{L^2 \left[\cosh\left(\frac{2L\phi}{Q}\right) + 1 \right]} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\rho^2}{L^2} \sinh^2\left(\frac{L\phi}{Q}\right) + \frac{z^2}{L^2} \tanh^2\left(\frac{L\phi}{Q}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Một số cách làm khác để chứng minh mặt đẳng thế là ellipsoid:

+Cách 1: Định nghĩa quỹ tích

Từ hàm điện thế vô hướng xác định được ở phần 1, ta có thể viết lại:

$$\phi = \frac{Q}{2L} \ln \left[\frac{\sqrt{(L+z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(L-z)^2 + \rho^2} + 2L}{\sqrt{(L+z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(L-z)^2 + \rho^2} - 2L} \right]. \quad (4)$$

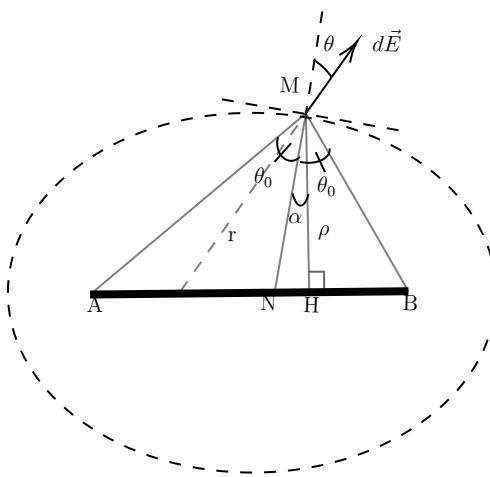
Tức là mặt đẳng thế thỏa mãn phương trình mặt:

$$\sqrt{(L+z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(L-z)^2 + \rho^2} = 2L \coth\left(\frac{L\phi}{Q}\right). \quad (5)$$

Đây là quỹ tích của mặt ellipsoid có hai tiêu điểm nằm tại hai đầu dây tích điện và bán trục lớn $a = L \coth \left(\frac{L\phi}{Q} \right)$. Tâm sai của ellipse này theo đó là $e = \coth \left(\frac{L\phi}{Q} \right)$, tức là bán trục nhỏ $b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{L}{\sinh \left(\frac{L\phi}{Q} \right)}$.

+Cách 2: Sử dụng tính chất phản chiếu của ellipse:

Xét một điểm M bất kỳ trong không gian nằm cách đường thẳng chứa dây tích điện một đoạn ρ , N là một điểm nằm trên dây tích điện AB sao cho MN là tia phân giác $\angle AMB$.



Với θ là góc hợp bởi đường nối từ một điểm trên dây và MN , vi phân độ dài một đoạn dây tích điện $dl = \rho d\theta / [\cos^2(\theta + \alpha)]$. Ta tính điện trường của thanh AB theo phương vuông góc MN .

$$dE_{\perp} = \frac{(Q/2L)dl}{r^2} \sin \theta = \frac{Q}{2L} \frac{\rho d\theta \sin \theta}{\cos^2(\theta + \alpha) r^2} = \frac{Q}{2L} \frac{\sin \theta d\theta}{\rho} \Rightarrow E_{\perp} = \frac{Q}{2L\rho} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin \theta d\theta = 0. \quad (6)$$

Như vậy, thành phần hình chiếu của điện trường lên phương vuông góc MN bằng 0, tức là điện trường tổng hợp tại M chỉ có thành phần dọc theo tia phân giác MN .

Do mặt đẳng thế vuông góc với điện trường nên mặt đẳng thế ở đây là một mặt có pháp tuyến chia đôi góc tạo bởi hai tia nối từ điểm đến hai đầu dây tích điện. Ta biết rằng có một bề mặt cho ta tính chất này đó là mặt ellipsoid tròn xoay có các tiêu điểm nằm ở các đầu dây tích điện [3]. Một cách không quá chặt chẽ, ta tin tưởng vào định lý duy nhất nghiệm của trường điện từ và trường hợp cụ thể mà ta tìm được chính là kết quả của bài toán.

Biểu diễn

Phần	Nội dung	Điểm
1a	Viết đúng thế năng do một đoạn dây dl gây ra	0.25
	Lấy đúng cận tích phân	0.25
	Tìm được nguyên hàm của biểu thức	0.25
	Tính được điện thế ϕ (1)	0.25
1b	Viết đúng dạng phương trình mặt đằng thế ellipsoid	0.50
	Tính được bán trục lớn a	0.25
	Tính được bán trục nhỏ b	0.25
2a	Tìm được độ dài ảnh điện dây theo hai bán trục	0.50
	Tìm được điện dung của ellipsoid dẫn (2)	0.50
2b	Viết phương trình điện trường theo điện thế	0.50
	Áp dụng định luật Gauss để tìm mật độ điện mặt (3)	0.50

Tài liệu

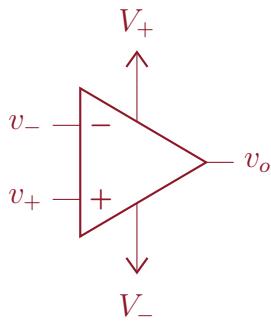
- [1] L.D. Landau, J.S. Bell, M.J. Kearsley, L.P. Pitaevskii, E.M. Lifshitz, and J.B. Sykes. *Electrodynamics of Continuous Media*. COURSE OF THEORETICAL PHYSICS. Elsevier Science, 2013.
- [2] W.R. Smythe. *Static and Dynamic Electricity*. International Series in Physics - McGraw-Hill. McGraw-Hill, 1939.
- [3] Stephan Berendonk. Proving the reflective property of an ellipse. *Mathematics Magazine*, 87(4):276–279, 2014.

CÂU 4 (4 điểm)

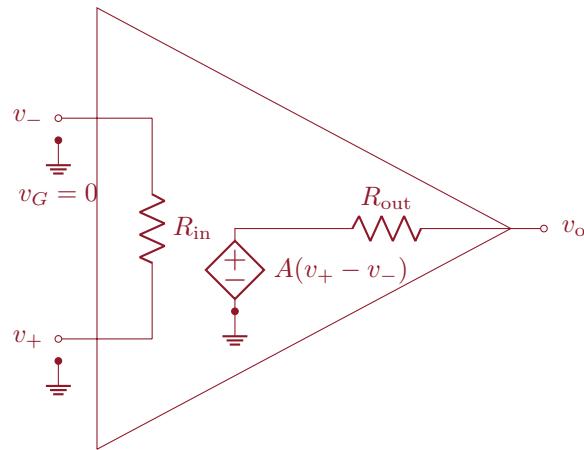
Khuếch đại thuật toán

Bộ khuếch đại thuật toán (Operational AMPlifier), hay còn gọi là OPAMP là một linh kiện điện tử dùng để thực hiện một số phép toán như cộng, trừ, nhân, chia, tích phân, đạo hàm,... khi nó kết hợp với các linh kiện bên ngoài.

Một OPAMP cơ bản có cấu tạo gồm 8 chân, nhưng trong khuôn khổ bài này, chúng ta chỉ xét một OPAMP như hình vẽ



(a) Ký hiệu OPAMP



(b) Mạch tương đương của OPAMP

Hình 1: OPAMP

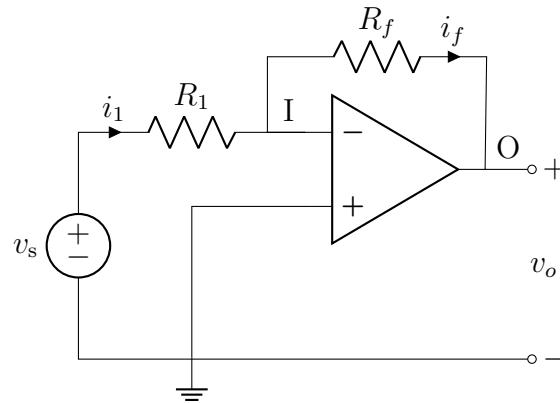
Trong đó hai chân V_+ và V_- dùng để cấp nguồn cho thiết bị, khi có hai điện thế v_+ và v_- được đặt lần lượt vào hai đầu vào không đảo ngược và đảo ngược thì ở đầu ra sẽ xuất hiện một điện thế v_o sao cho:

$$v_o = A(v_+ - v_-) , \quad (1)$$

trong đó A được gọi là "độ lợi vòng lặp hở" đặc trưng với từng loại OPAMP. Thiết bị này có thể được miêu tả bằng mô hình mạch điện b, trong đó ký hiệu của nguồn $A(v_+ - v_-)$ gọi là nguồn áp phụ thuộc, tức là độ lớn của nó phụ thuộc vào một đại lượng khác (ở đây là hiệu điện thế giữa hai đầu vào của OPAMP).

Trong thực tế, OPAMP thường được kết hợp với một số linh kiện ngoài như điện trở, tụ điện hoặc cuộn cảm để phản hồi giữa đầu ra và đầu vào, giúp cho chúng ta có thể điều chỉnh được độ lợi của OPAMP bằng cách điều chỉnh các thông số thiết bị ngoài.

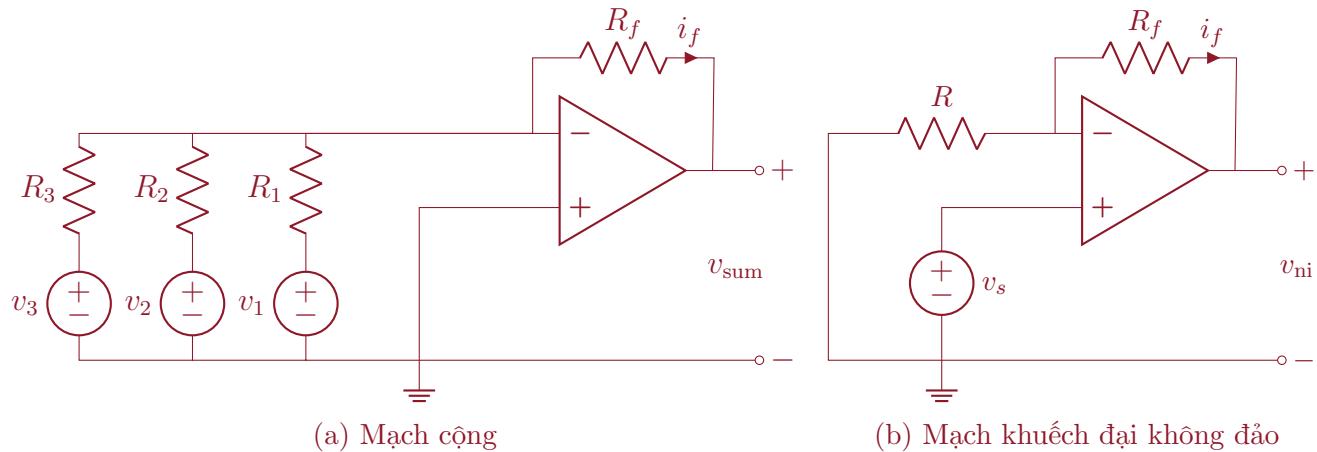
1. Tìm độ lợi vòng lặp đóng $\frac{v_o}{v_s}$ cho mạch dưới đây. Áp dụng với LM741 có độ lợi vòng lặp mở 2×10^5 , điện trở đầu vào $2M\Omega$ và điện trở đầu ra 50Ω và $R_f = 200\Omega$, $R_1 = 100\Omega$.



Tiếp theo đây, để cho đơn giản, ta coi các OPAMP là lý tưởng, nghĩa là điện trở đầu vào rất lớn, điện trở đầu ra rất nhỏ và độ lợi vòng lặp hở rất lớn. Khi đó $v_1 \approx v_2$ và dòng điện ở hai đầu vào OPAMP $i_- = i_+ = 0$.

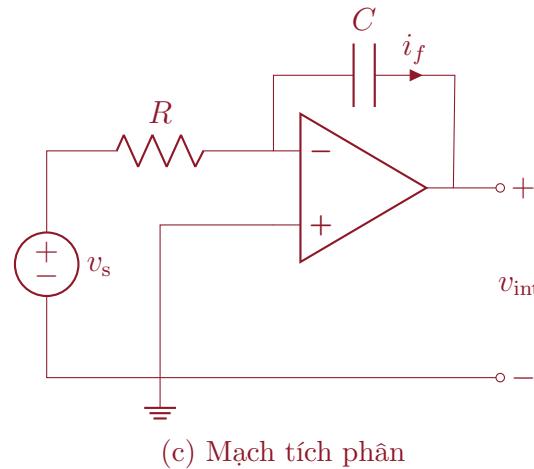
2. Tìm tỉ số $\frac{v_o}{v_s}$ với mạch trên khi OPAMP là lý tưởng.

Xét ba mạch OPAMP có dạng như hình vẽ:



(a) Mạch cộng

(b) Mạch khuếch đại không đảo



(c) Mạch tích phân

3. Tìm v_{sum} , v_{int} và v_{ni} ứng với ba mạch.

4. Từ các mạch trên, thiết lập mạch điện để giải phương trình vi phân sau:

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = d, \quad (2)$$

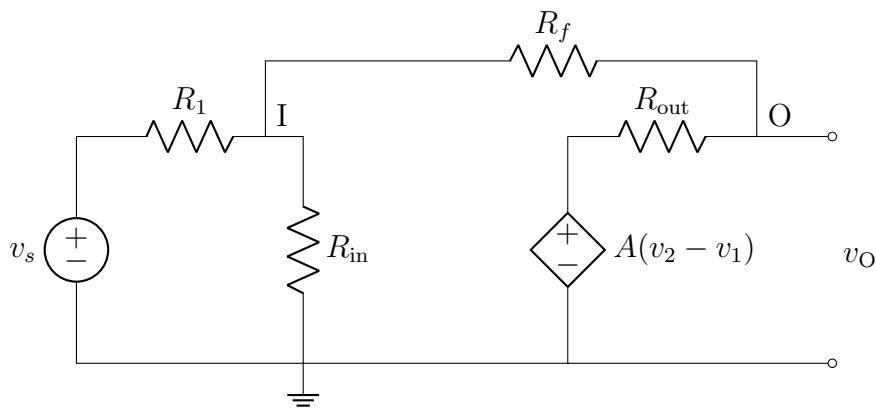
với điều kiện ban đầu $\dot{x}(0) = e$, $x(0) = f$.

5. Đề xuất một cách thiết kế để tạo ra một phần tử mạch điện có giá trị "điện trở âm" ($V_{in}/I_{in} < 0$) bằng các điện trở, OPAMP và nối đất.

(Biên soạn bởi Hiagari)

Bài giải

1. Ta có thể vẽ lại mạch tương đương như sau



Tại nút I, theo KCL ta có

$$\frac{v_s - v_I}{R_1} = \frac{v_I}{R_{in}} + \frac{v_I - v_O}{R_f}. \quad (1)$$

Tại nút O, theo KCL ta có

$$\frac{v_I - v_O}{R_f} = \frac{v_O - A(v_2 - v_1)}{R_{out}}. \quad (2)$$

Do đầu vào dương của OPAMP nối đất nên $v_2 = 0$. Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được

$$\frac{v_O}{v_s} = -\frac{AR_f R_{in} - R_{in} R_{out}}{R_1 R_f + R_1 R_{in} + AR_1 R_{in} + R_f R_{in} + R_1 R_{out} + R_{in} R_{out}} \approx -2. \quad (3)$$

2. Áp dụng các thông số của OPAMP lý tưởng $R_{in} \rightarrow \infty$, $R_{out} \rightarrow 0$ và $A \rightarrow \infty$, ta được

$$\frac{v_O}{v_s} = -\frac{R_f}{R_1}. \quad (4)$$

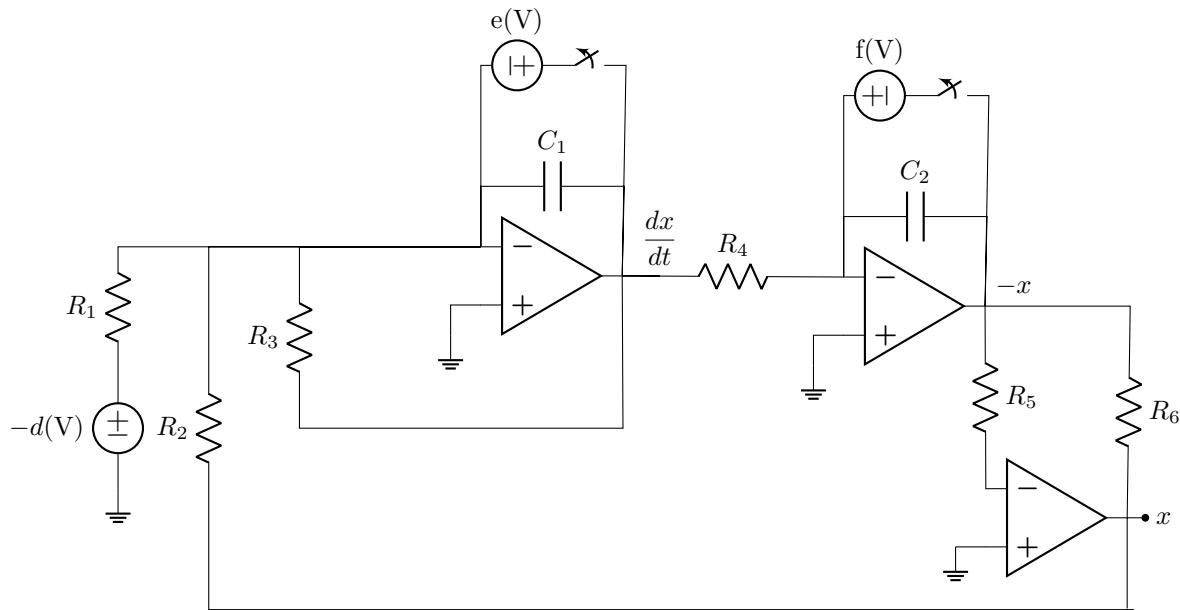
3. Phân tích mạch tương tự như ý 1, ta được

$$v_{\text{sum}} = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right), \quad (5)$$

$$v_{\text{int}} = -\frac{1}{RC} \int v_s dt. \quad (6)$$

$$v_{\text{ni}} = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) v_s \quad (7)$$

4. Bằng cách kết hợp 2 mạch tích phân và 1 mạch đảo. Ta được một cách mắc mạch như sau



Giải thích mạch

Xét phương trình vi phân ban đầu

$$\begin{aligned}
 & a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = d \\
 \implies & \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{a} \left(d - cx - b \frac{dx}{dt} \right) \\
 \implies & \frac{dx}{dt} = - \int_0^t \frac{1}{a} \left(-d + cx + b \frac{dx}{dt} \right) + \dot{x}(0).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Từ phương trình trên, để lấy được điện áp $\dot{x}(t)$, ta cần một mạch tích phân với đầu vào điện thế $-d$, điện thế $x(t)$ và điện thế $\dot{x}(t)$, cùng với một điện thế $\dot{x}(0) = e$ đặt vào đầu ra của OPAMP thứ nhất.

Tiếp theo, để có được $x(t)$

$$-x(t) = + \int_0^t \dot{x}(t) dt - x(0). \tag{9}$$

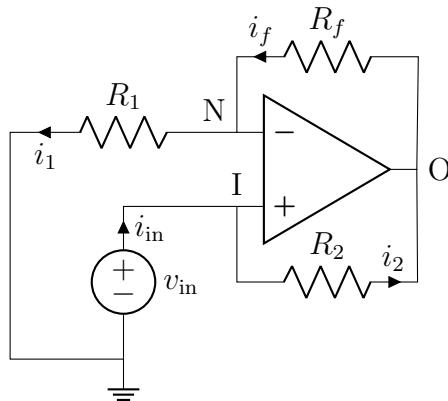
Do đó ta dùng một mạch tích phân nữa với đầu vào là điện thế $\dot{x}(t)$, ở đầu ra của mạch này, ta được điện thế $-x(t)$. Do $x(0) = f(V)$ nên ta cần đặt một điện thế có giá trị $-f(V)$ ở đầu ra của OPAMP thứ 2.

Cuối cùng, ta dùng một mạch đảo để đổi dấu điện áp đầu vào $-x(t)$.

Từ các phương trình, ta cần phải chọn các linh kiện thỏa mãn

$$R_1 C_1 = a, R_2 C_1 = \frac{a}{c}, R_3 C_1 = \frac{a}{b}, R_4 C_2 = 1, R_6 = R_5. \tag{10}$$

5. Đây là một cách mắc mạch phổ biến để tạo ra một "điện trở âm":



Do OPAMP lý tưởng nên $v_I = v_N = v_{in}$.

Tại N ta có

$$i_f = i_1 \implies \frac{v_O - v_{in}}{R_f} = \frac{v_{in}}{R_1} \implies v_O = v_{in}(1 + \frac{R_f}{R_1}). \quad (11)$$

Tại I ta có:

$$i_{in} = i_2 = \frac{v_{in} - v_O}{R_2}. \quad (12)$$

Từ 2 phương trình trên ta được

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = -\frac{R_1 R_2}{R_f}. \quad (13)$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Vẽ được mạch tương đương	0.50
	Viết các phương trình Krichhoff và giải ra được độ lợi	0.25
2	Dẫn ra được công thức độ lợi cho OPAMP lý tưởng	0.25
3	Giải được mạch khuếch đại không đảo	0.25
	Giải được mạch tích phân	0.50
	Giải được mạch cộng	0.25
4	Vẽ được mạch để giải phương trình vi phân	0.50
	Giải thích và biện luận đúng các tham số của mạch	0.50
5	Vẽ được mạch điện trở âm	0.50
	Biện luận và tính giá trị của điện trở	0.50

Tài liệu

[1] Yong-Kyu Lim, Problems and Solutions on Electromagnetism

[2] T.L. Floyd. Electronic Devices. Merrill's international series in electrical and electronics technology. Merrill, 1992.

CÂU 5 (4 điểm)

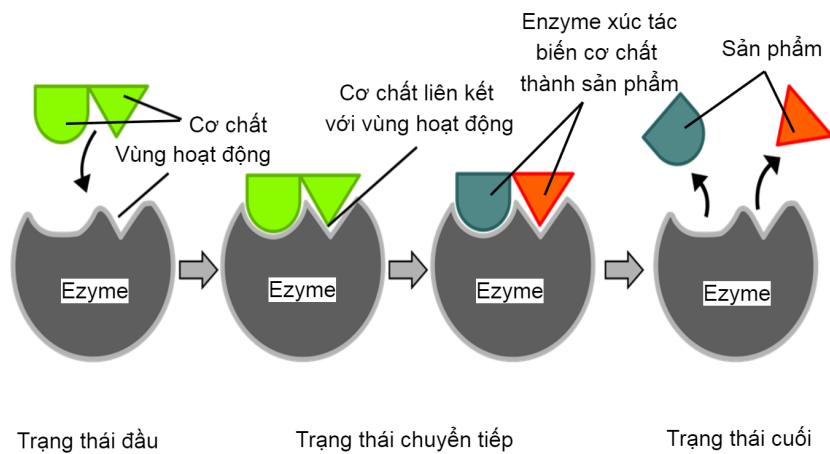
Enzyme cứng hay mềm?

Enzyme là các protein có tác dụng làm chất xúc tác chuyển hoá về mặt hoá học các phân tử liên kết với chúng. Enzyme không tạo ra phản ứng mới hoặc thay đổi chiều hướng của phản ứng hoá học, chúng chỉ thúc đẩy hoặc ức chế các quá trình tự phát. Đôi khi việc tăng tốc phản ứng của enzyme còn mạnh hơn gấp hàng triệu lần so với việc tăng tốc bởi các chất xúc tác hoá học mạnh nhất. Trong bài tập này, ta sẽ sử dụng các mô hình cơ học cổ điển đơn giản nhất để tư duy trực quan về tính chất của enzyme.

1. Enzyme cứng hay mềm?

Quá trình xúc tác của enzyme bao gồm ba trạng thái như sau (Hình 1):

- Trạng thái đầu:** Cơ chất (Substrate) di chuyển đến vùng hoạt động (active site) của enzyme và liên kết với enzyme để hình thành phức hệ enzyme - cơ chất.
- Trạng thái chuyển tiếp:** Enzyme xúc tác phản ứng biến đổi Cơ chất (Substrate) thành Sản phẩm (Product), tạo thành phức hệ enzyme - sản phẩm.
- Trạng thái cuối:** Enzyme thực hiện chức năng "nhả phổi tử", giải phóng Sản phẩm (Product) khỏi enzyme.

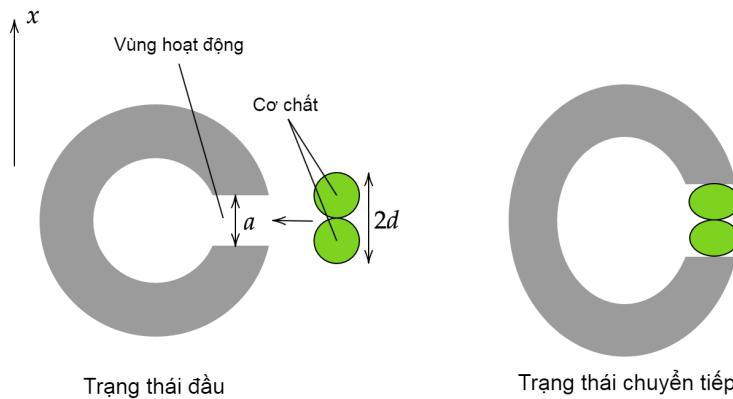


Hình 1: Các trạng thái của enzyme trong quá trình xúc tác.

Trong bài toán này, ta sẽ khảo sát tính chất của *abzyme* (*anti-body enzyme* hay *enzyme kháng thể*) trong trạng thái chuyển tiếp. Lý do ta chọn *abzyme* mà không phải *enzyme* tự nhiên là để đơn giản hoá các tương tác do *abzyme* không liên kết với cơ chất bằng liên kết cộng hoá trị. Ta xét mô hình cơ học đơn giản (Hình 2), giả sử hai phân tử (phải hình thành liên kết hoá học) - đại diện cho cơ chất - được kéo vào vùng hoạt động của *abzyme* (kẽ hở). Cơ chất được mô hình hoá như những quả bóng nhỏ có đường kính d và kẽ hở có độ rộng ban đầu là a ; để tạo điều kiện hình thành liên kết phức hệ enzyme - cơ chất, hệ này sẽ hấp thụ năng lượng để các quả bóng bị nén lại và kẽ hở mở rộng ra ($a < 2d$). Cả *abzyme* và cơ chất đều có tính đàn hồi và tuân theo định luật Hooke, hệ số đàn hồi của *abzyme* ở vùng hoạt động

là k_e , hệ số đàn hồi của cơ chất là k_s . Coi tất cả biến dạng chỉ đáng kể trên phương x và bỏ qua biến dạng theo các phương khác như trên hình và bỏ qua động năng của toàn hệ. Cho biết, một enzyme xúc tác càng hiệu quả sẽ tiêu tốn càng ít năng lượng cho việc biến dạng chính nó.

- a,** Xác định biểu thức năng lượng cần cung cấp cho abzyme và cơ chất.
- b,** Một enzyme hoạt động hiệu quả sẽ phải thật "cứng" hay thật "mềm"?



Hình 2: Mô hình cơ học đơn giản.

2. Bỏ qua động năng?

Trong phần trước ta đã bỏ qua hoàn toàn động năng của hệ, nói cách khác, ta coi hệ enzyme là tinh hoặc gần tinh, vậy trên thực tế điều này có đúng không? Giả sử enzyme có động năng, chẳng hạn động năng trong quá trình dao động. Xét một enzyme dao động theo phương x trong môi trường nhớt (chẳng hạn là nước hay màng), enzyme có khối lượng riêng là $\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$, để cho đơn giản, coi enzyme có các kích thước tuyến tính về bậc độ lớn với đường kính D của nó (tiết diện $S \sim D^2$, thể tích $V \sim D^3$) và $D \approx 4 \text{ nm}$. Enzyme chịu lực đàn hồi do biến dạng tuân theo định luật Hooke, lực đàn hồi có biểu thức là:

$$F_{\text{ela}} = -\frac{ES}{D}x.$$

Trong đó S là tiết diện và E là suất đàn hồi, $E \approx 10^{10} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Để cho đơn giản, chọn gốc thời gian tại $t = 0$, coi enzyme ở thời điểm $t = 0$ có vận tốc $v(0) = 0$ và li độ $x(0) = x_0$.

- a,** Giả sử bỏ qua ma sát nhớt tác dụng lên cấu trúc enzyme trong quá trình dao động, hãy xác định chu kỳ dao động T_0 của enzyme.
- b,** Trên thực tế, quá trình dao động của enzyme trong môi trường nhớt enzyme chịu thêm lực ma sát nhớt tuân theo định luật Stokes, có biểu thức là:

$$F_{\text{vis}} = -10\eta D \frac{dx}{dt}.$$

Trong đó η là độ nhớt của môi trường, $\eta \approx 0.01 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Viết biểu thức li độ phụ thuộc thời gian $x(t)$.
- Tại thời điểm $t = T_0$ và $t = 2T_0$, li độ x lần lượt bằng bao nhiêu lần li độ x_0 tại thời điểm ban đầu. Từ đó đưa ra nhận xét về sự thay đổi của hiện tượng khi tính đến ma sát nhớt.

(Biên soạn bởi Nhân viên phòng lab)

Bài giải

1. Enzyme cứng hay mềm ?

a, Giả sử abzyme biến dạng một lượng x_1 và cơ chất biến dạng một lượng x_2 . Từ trạng thái chuyển tiếp như hình vẽ trong đề bài, cơ chất liên kết với vùng hoạt động, do đó:

$$a + x_1 = 2d - x_2. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có định luật 3 Newton cho cân bằng lực ở vùng hoạt động:

$$k_e x_1 = k_s x_2. \quad (2)$$

Từ phương trình (1) và phương trình (2), ta suy ra x_1 và x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_s}{k_e + k_s} (2d - a), \\ x_2 &= \frac{k_e}{k_e + k_s} (2d - a). \end{aligned} \quad (3)$$

Năng lượng cung cấp cho enzyme gây ra biến dạng của enzyme là:

$$E_e = \frac{1}{2} k_e x_1^2 = \frac{k_e k_s^2}{2(k_e + k_s)^2} (2d - a)^2. \quad (4)$$

Năng lượng cung cấp cho cơ chất gây ra biến dạng của cơ chất là:

$$E_s = \frac{1}{2} k_s x_2^2 = \frac{k_s k_e^2}{2(k_e + k_s)^2} (2d - a)^2. \quad (5)$$

b, Lấy phương trình (4) chia cho phương trình (5), ta thu được liên hệ về năng lượng:

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{k_s}{k_e}. \quad (6)$$

Như ta đã biết, một enzyme xúc tác càng hiệu quả sẽ tiêu tốn càng ít năng lượng cho việc biến dạng chính nó, hay chính là $E_e \ll E_s$, tương đương với $k_e \gg k_s$. Do đó, một enzyme hoạt động hiệu quả sẽ phải thật "cứng" để phần lớn năng lượng được sử dụng vào biến dạng của cơ chất, từ đó thúc đẩy phản ứng hóa học.

Trong mô hình này, ta xét abzyme do abzyme chỉ dùng tương tác van der Waals, các enzyme tự nhiên sử dụng cả liên kết cộng hóa trị nên "cứng" hơn nhiều abzyme, do đó mà khả năng xúc tác phản ứng cũng mạnh hơn nhiều lần.

2. Bỏ qua động năng?

a, Phương trình động lực học:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_{\text{ela}} \\ \rho V \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{ES}{D}x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{E}{\rho D^2}x &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Đặt $\frac{E}{\rho D^2} = \omega_0^2$, phương trình (7) trở thành:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8)$$

Chu kỳ dao động của enzyme:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho D^2}{E}} = 2.51 \times 10^{-11} \text{ s.} \quad (9)$$

b, i. Ta có phương trình động lực học như sau:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_{\text{vis}} + F_{\text{ela}} \\ \rho V \frac{d^2x}{dt^2} &= -10\eta D \frac{dx}{dt} - \frac{ES}{D}x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{10\eta}{\rho D^2} \frac{dx}{dt} + \frac{E}{\rho D^2}x &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Đặt $\frac{10\eta}{\rho D^2} = 2\beta$, phương trình (10) trở thành:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (11)$$

Trong đó:

$$\beta = \frac{5\eta}{\rho D^2} = 3.125 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho D^2}} = 2.5 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}. \quad (12)$$

Phương trình vi phân (10) có nghiệm là:

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}. \quad (13)$$

Trong đó:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -1.25 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}, \quad (14)$$

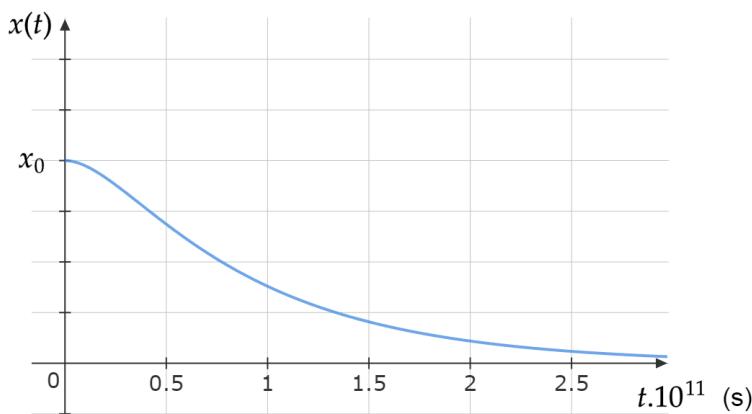
$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -5 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}. \quad (15)$$

Tại $t = 0$, $x(0) = x_0$ và $v(0) = x'(0) = 0$, suy ra $A = \frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{4}{3}x_0$ và $B = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\frac{1}{3}x_0$.

Nghiệm của phương trình vi phân (10) có thể viết lại thành:

$$x(t) = x_0 \left(\frac{4}{3}e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{3}e^{\lambda_2 t} \right). \quad (16)$$

Trong đó $\lambda_1 = -1.25 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ và $\lambda_2 = -5 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$.



Hình 3: Đồ thị $x(t)$.

ii. Tại $t = T_0$, tỉ lệ giữa li độ x và li độ x_0 ở thời điểm ban đầu:

$$N_1 = \frac{x(T_0)}{x_0} = \frac{4}{3}e^{\lambda_1 T_0} - \frac{1}{3}e^{\lambda_2 T_0} \approx 5.78 \times 10^{-2}. \quad (17)$$

Tại $t = 2T_0$, tỉ lệ giữa li độ x và li độ x_0 ở thời điểm ban đầu:

$$N_2 = \frac{x(2T_0)}{x_0} = \frac{4}{3}e^{2\lambda_1 T_0} - \frac{1}{3}e^{2\lambda_2 T_0} \approx 2.51 \times 10^{-3}. \quad (18)$$

Nhận xét: Ta thấy rằng động năng của enzyme bị phân tán và chuyển hóa thành nhiệt quá nhanh (thực tế là trước khi nó có thể được sử dụng trong quá trình xúc tác của enzyme). Quá trình dao động của enzyme hầu như không xảy ra hoặc bị tắt rất nhanh khi chúng ở trong nước (chưa kể đến môi trường nhót hơn như màng). Do đó trong quá trình xúc tác của enzyme, ta bỏ qua động năng và coi enzyme tinh hoắt gần tinh.

Qua bài tập này ta kết luận được hai tính chất rất đặc biệt của enzyme:

- A. *Năng lượng được cung cấp không phải để thay đổi cấu trúc enzyme mà phần lớn để đưa cơ chất vào enzyme và đưa nó vào trạng thái chuyển tiếp. Do đó vùng hoạt động của enzyme phải là cấu trúc cứng.*
- B. *Động năng không dùng trong quá trình xúc tác vì nó tiêu tán ra môi trường quá nhanh. Do đó có thể coi các mô hình là tĩnh hoặc gần tĩnh.*

Biểu điểm

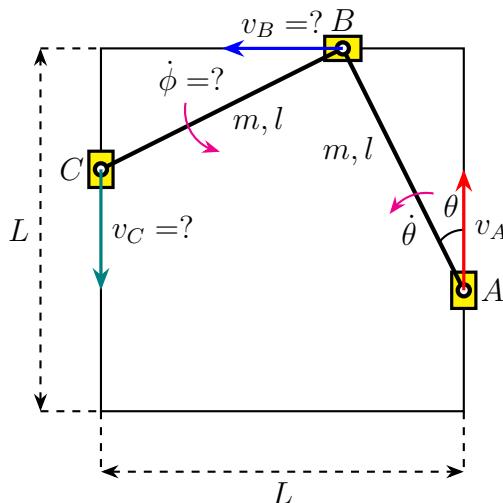
Phần	Nội dung	Điểm
1a	Viết biểu thức cho x_1 và x_2 theo k_e , k_s , d và a (3)	0.50
	Viết biểu thức cho E_e theo k_e , k_s , d và a (4)	0.25
	Viết biểu thức cho E_s theo k_e , k_s , d và a (5)	0.25
1b	Lập luận và kết luận	0.25
2a	Dẫn ra phương trình vi phân (8)	0.25
	Tính được chu kỳ dao động T (9)	0.25
2b.i	Dẫn ra phương trình vi phân (10)	0.25
	Viết biểu thức $x(t)$ và các hệ số (16)	1.25
2b.ii	Tính được tỉ lệ giữa li độ x và x_0 tại thời điểm $t = T_0$ (17)	0.25
	Tính được tỉ lệ giữa li độ x và x_0 tại thời điểm $t = 2T_0$ (18)	0.25
	Lập luận và kết luận	0.25

Tài liệu

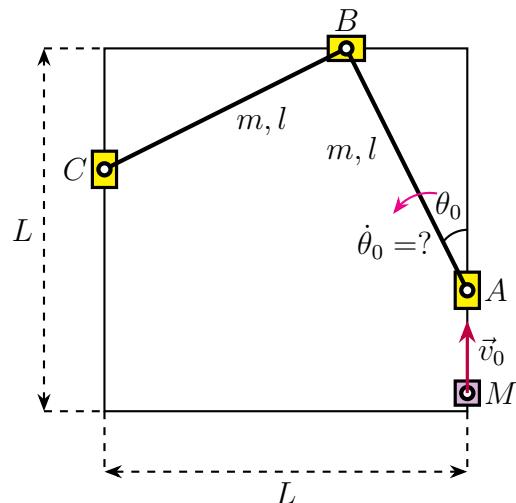
- [1] Jigar N. Bandaria, Samrat Dutta, Sarah E. Hill, Amnon Kohen, Christopher M. Cheatum (2008), *Fast Enzyme Dynamics at the Active Site of Formate Dehydrogenase*, Journal of the American Chemical Society, 130(1), 22–23.
- [2] Nguyễn Thé Toàn, Nguyễn Hoạ Mi (2021), *Giáo trình Vật lý Sinh học của Protein*, NXB DHQGHN.

CÂU 6 (4 điểm)

Có hai thanh thẳng đồng chất, cứng, khối lượng m , dài l được nối với nhau bằng một bản lề ở đầu thanh. Các đầu của hai thanh cứng này trượt không ma sát trên khung hình vuông, đặt cố định trong mặt phẳng nằm ngang, có độ dài cạnh là L (với $\frac{\sqrt{3}}{2}l < L < 2l$). Ta lần lượt gọi 3 điểm đầu các thanh là A , B , C (như hình 1a). Góc tạo bởi thanh AB và cạnh khung hình vuông có chứa đầu A là θ . Bỏ qua ma sát ở khung vuông, thanh trượt và các bản lề.



(a)



(b)

Hình 1: (a) Khung và các thanh cứng, con trượt. (b) Vật nhỏ va chạm với hệ thanh.

1. Khảo sát đặc tính động học của hệ:

- Tìm vận tốc của B , C và vận tốc góc của thanh BC theo θ và vận tốc góc $\dot{\theta}$ của thanh AB .
 - Tại một thời điểm A có vận tốc là v , gia tốc là a , góc $\theta = \theta_0$ thì vận tốc của B là bao nhiêu?
2. Tại thời điểm ban đầu $\theta = \theta_0$, các thanh đang đứng yên, một vật khối lượng M trượt không ma sát với vận tốc v_0 theo cạnh khung vuông chứa điểm A , đi tới và va chạm vào đầu A (như hình 1b). Xem rằng va chạm giữa vật M và các thanh là va chạm hoàn toàn đàn hồi, xảy ra trong thời gian rất ngắn. Tìm vận tốc góc thanh AB ngay sau khi va chạm theo m , M , L , l , v_0 và θ_0 .

(Biên soạn bởi Log)

Bài giải

- Ta đặt các biến và hệ tọa độ như hình vẽ.

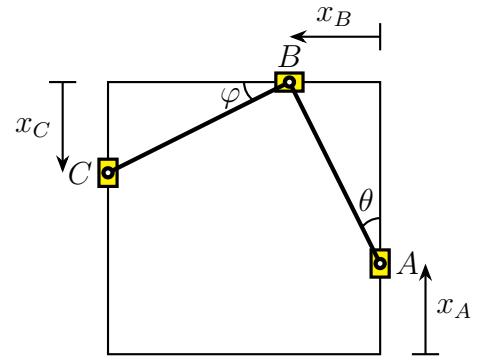
a, Các tọa độ và vận tốc lần lượt được biểu diễn theo θ và $\dot{\theta}$ dưới dạng:

$$x_A = L - l \cos \theta \Rightarrow v_A = \dot{\theta} l \sin \theta.$$

$$x_B = l \sin \theta \Rightarrow v_B = \dot{\theta} l \cos \theta.$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{L - l \sin \theta}{l} \right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta} \frac{l \cos \theta}{\sqrt{l^2 - (L - l \sin \theta)^2}}.$$

$$x_C = \sqrt{l^2 - (L - l \sin \theta)^2} \Rightarrow v_C = \dot{\theta} \frac{(L - l \sin \theta)l \cos \theta}{\sqrt{l^2 - (L - l \sin \theta)^2}}.$$



Hình 2: Hệ tọa độ.

b, Tại thời điểm $v_A = v$ và $a_A = a$, ta có thể tìm lại $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ theo các bước:

$$v = \dot{\theta}l \sin \theta \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{l \sin \theta}. \quad (1)$$

Đạo hàm $v = \dot{\theta}l \sin \theta$ theo thời gian, ta được

$$a = \ddot{\theta}l \sin \theta + \dot{\theta}^2 l \cos \theta = \ddot{\theta}l \sin \theta + \frac{v^2}{l} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{l \sin \theta} - \frac{v^2}{l^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}. \quad (2)$$

Đạo hàm biểu thức v_B ta tìm được ở phần a, theo thời gian

$$a_B = \ddot{\theta}l \cos \theta - \dot{\theta}^2 l \sin \theta. \quad (3)$$

Thế $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ từ phương trình trên vào, thay $\theta = \theta_0$, ta tìm được giá trị của B

$$a_B = \frac{1}{\tan \theta_0} a - \frac{v^2}{l \sin^3 \theta_0}. \quad (4)$$

2. Gọi v là vận tốc của vật M sau va chạm.

Trong một bài toán va chạm đàn hồi, ta sẽ cần phương trình liên quan đến bảo toàn động năng và các phương trình về xung lực. Đầu tiên, ta sẽ viết phương trình bảo toàn động năng của hệ trước và sau va chạm:

Khối tâm thanh AB quay tròn quanh gốc của khung vuông với vận tốc $\dot{\theta}$ và bán kính $l/2$. Do đó động năng thanh AB là

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m \left(\dot{\theta} \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}ml^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2. \quad (5)$$

Hoàn toàn tương tự, động năng thanh BC là

$$T_{BC} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \left[\frac{l^2 \cos^2 \theta}{l^2 - (L - l \sin \theta)^2} \right] \dot{\theta}^2. \quad (6)$$

Như vậy tổng động năng của hệ hai thanh AB và BC

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{1}{2} J(\theta) \dot{\theta}^2. \quad (7)$$

Với

$$J(\theta) = \frac{ml^2}{3} \left[1 + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{l^2 - (L - l \sin \theta)^2} \right]. \quad (8)$$

Do va chạm hoàn toàn đàn hồi nên động năng trước và sau va chạm bằng nhau

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} J(\theta_0) \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} M v^2. \quad (9)$$

Hay

$$J(\theta) \dot{\theta}^2 = M(v_0 - v)(v_0 + v). \quad (10)$$

Để xác định phương trình liên hệ còn lại giữa v và $\dot{\theta}$, ta cần tìm các phương trình về xung lực tác dụng hoặc bảo toàn một số động lượng suy rộng. Lời giải này sẽ giới thiệu 2 cách để giải quyết vấn đề trên:

Cách 1: Ta khảo sát ảnh hưởng của xung lực $X = M(v_0 - v)$, gây bởi vật khối lượng M lên thanh AB , trong khoảng thời gian vô cùng bé Δt như một lực $F = X/\Delta t$ không đổi.

Theo định lý động năng dạng vi phân

$$F dx_A = dT. \quad (11)$$

Ở đây, ta nhớ rằng $dx_A = l \sin \theta d\theta$, lấy vi phân động năng T theo θ , ta được

$$Fl \sin \theta = J(\theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2. \quad (12)$$

Lấy tổng 2 về theo thời gian Δt vô cùng ngắn mà θ thay đổi không đáng kể và có thể coi là luôn bằng θ_0 , khi đó số hạng thứ hai của vế trái $\frac{1}{2} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2$ có xuất hiện số hạng bé bậc 2 và có thể bỏ qua, ta thu được

$$Xl \sin \theta_0 = J(\theta_0) \dot{\theta}_0,$$

tức là

$$\frac{J(\theta) \dot{\theta}_0}{Ml \sin \theta_0} = (v_0 - v). \quad (13)$$

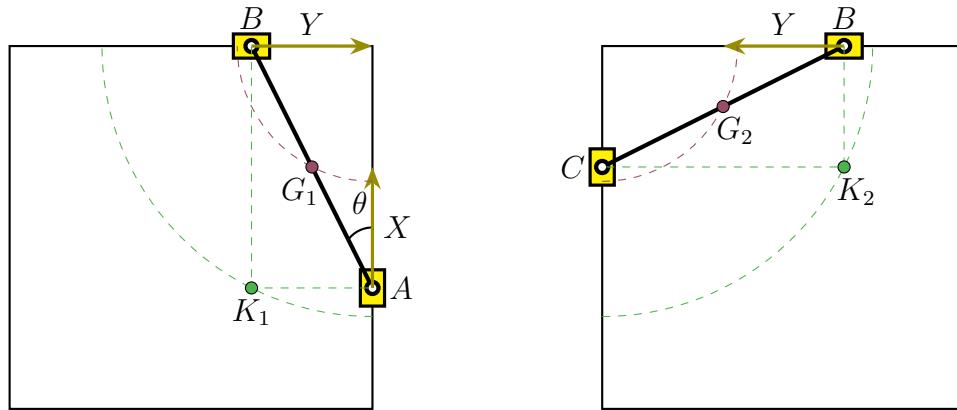
Chia hai vế của (10) cho (13), ta được

$$\dot{\theta}_0 l \sin \theta_0 = v + v_0. \quad (14)$$

Cộng (10) và (14), ta triệt tiêu được v và tìm được

$$\dot{\theta}_0 = \frac{2v_0}{l \sin \theta_0 + \frac{J(\theta_0)}{Ml \sin \theta_0}} = \frac{2v_0}{l \sin \theta_0} \left\{ 1 + \frac{m}{3M \sin^2 \theta_0} \left[1 + \frac{l^2 \cos^2 \theta_0}{l^2 - (L - l \sin \theta_0)^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Cách 2: Gọi xung lực tác dụng lên hai thanh từ bản lề là Y .



Hình 3: Sơ đồ vật thể tự do, quỹ đạo của khối tâm và tâm quay tức thời với từng vật.

Do khối tâm của thanh AB và thanh BC đều cách tâm quay tức thời một khoảng không đổi $l/2$ nên ta dễ dàng viết hai phương trình biến thiên momen động lượng tâm quay tức thời đối với từng thanh lần lượt là:

*Thanh BC :

$$\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi} = Yl \sin(\varphi). \quad (16)$$

*Thanh AB :

$$\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} = -Yl \cos(\theta) + Xl \sin(\theta). \quad (17)$$

Từ đó ta tìm lại được phương trình (13).

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1a	Tìm v_B	0.25
	Tìm $\dot{\phi}$	0.25
	Tìm v_c	0.50
1b	Viết $\dot{\theta}$ theo v (1)	0.25
	Liên hệ a theo $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ (2)	0.25
	Liên hệ a_B theo $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ (3)	0.25
	Tìm a_B theo a và v (4)	0.25
2	Tìm được động năng (8)	0.50
	Viết phương trình bảo toàn năng lượng lượng trước và sau va chạm (9)	0.50
	Viết được biểu thức biến thiên động lượng suy rộng (13)	0.50
	Tính $\dot{\theta}_0$ (15)	0.50

CÂU 7 (4 điểm)

Cân bằng bức xạ nhiệt của Trái Đất và hiệu ứng nhà kính

1, Trái Đất khi không có khí quyển

Coi rằng Trái Đất là một vật đen tuyệt đối, và giả sử nhiệt độ trên bề mặt Trái Đất được phân bố đều. Hãy ước tính nhiệt độ T_0 này, với giả sử rằng công suất bức xạ của Mặt Trời là $L = 3.85 \times 10^{26}$ W và khoảng cách từ Trái Đất đến mặt trời là $d_{S-E} = 1.50 \times 10^{11}$ m, hằng số Stefan Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$.

2, Mô hình đơn giản nhất của hiệu ứng nhà kính

Mô hình này gồm 2 phần:

- Một lớp khí quyển duy nhất cho truyền qua hoàn toàn bức xạ của Mặt Trời mà chỉ hấp thụ bức xạ do Trái Đất phát ra với hệ số $\varepsilon_a = 0.77$. Nguyên nhân của sự khác nhau của hệ số hấp thụ này là do bức xạ của bề mặt Trái Đất mạnh nhất ở dải hồng ngoại, nơi mà khí quyển hấp thụ gần như toàn bộ ánh sáng, trong khi đó khí quyển lại gần như không hấp thụ ánh sáng trong vùng khả kiến mà Mặt Trời phát xạ mạnh nhất. Biểu đồ mức độ hấp thụ ánh sáng ở các bước sóng khác nhau của khí quyển và lời giải thích có thể tìm thấy ở [đây](#).
- Bề mặt Trái Đất phản xạ bức xạ chiếu tới từ Mặt Trời với hệ số $\alpha = 0.28$ và hấp thụ hoàn toàn bức xạ của khí quyển phát ra.

Nhiệt độ trên bề mặt và của lớp khí quyển đó được phân bố đều. Công suất phát xạ của bề mặt Trái Đất và của lớp khí quyển tuân theo công thức $P = \sigma \varepsilon A T^4$, trong đó σ là hằng số Stefan - Boltzmann, A là diện tích bề mặt phát xạ và T là nhiệt độ bề mặt phát xạ. Đối với bề mặt Trái Đất, $\varepsilon = 1$ (phát xạ như vật đen tuyệt đối), còn đối với lớp khí quyển, $\varepsilon = \varepsilon_a$ (tức là hệ số hấp thụ bức xạ từ Trái Đất của lớp khí quyển bằng với hệ số phát xạ nhiệt ra khỏi lớp khí quyển). Tính nhiệt độ bề mặt Trái Đất T_s và nhiệt độ bề mặt lớp khí quyển T_a khi đạt trạng thái cân bằng nhiệt.

3, Khí nhà kính ảnh hưởng như thế nào tới nhiệt độ?

Giả sử do các hoạt động phát thải của con người làm tăng CO_2 trong khí quyển mà hệ số ε_a tăng một khoảng $\Delta \varepsilon_a$ nhỏ. Khi đó độ tăng nhiệt độ bề mặt Trái Đất khi đạt cân bằng nhiệt ΔT_s tuân theo mối quan hệ $\Delta T_s = k \Delta \varepsilon_a$. Biểu diễn k theo T_s, ε_a .

(Biên soạn bởi manhducnmd)

Bài giải

1. Công suất bức xạ trên một đơn vị diện tích tại khoảng cách d_{S-E} là:

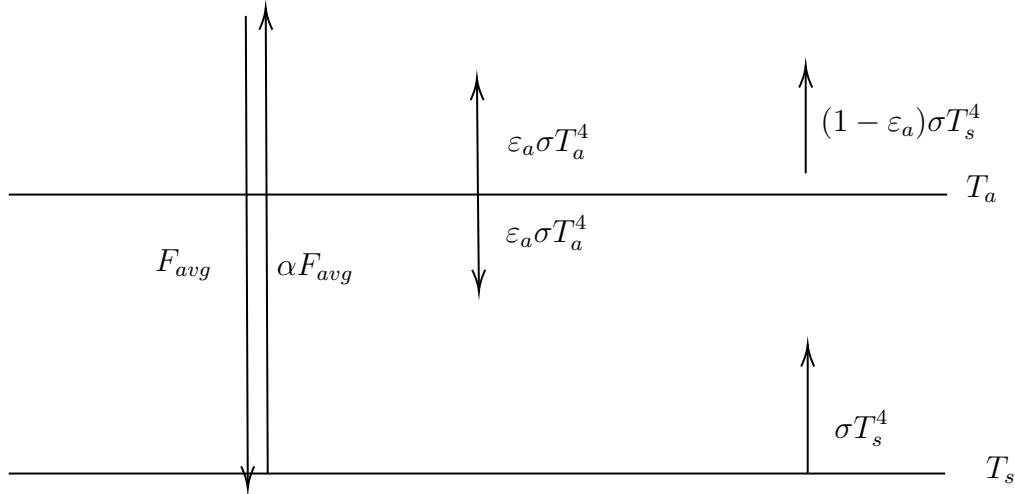
$$F = \frac{L}{4\pi d_{S-E}^2}. \quad (1)$$

Ta nhận thấy diện tích thu bức xạ hiệu dụng của Trái Đất là πR_e^2 và diện tích phát xạ là $4\pi R_e^2$ (R_e là bán kính Trái Đất). Áp dụng định luật Stefan-Boltzmann cho vật đen tuyệt đối và cân bằng nhiệt, ta thu được:

$$F \pi R_e^2 = \sigma 4\pi R_e^2 T_0^4 \Rightarrow T_0 = \sqrt[4]{\frac{F}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi\sigma d_{S-E}^2}} = 278.36 \text{ K}. \quad (2)$$

2. Công suất bức xạ từ Mặt Trời tới Trái Đất trung bình trên một đơn vị diện tích bề mặt Trái Đất là:

$$F_{avg} = F \frac{\pi R_e^2}{4\pi R_e^2} = \frac{F}{4} = \frac{L}{16\pi d_{S-E}^2}. \quad (3)$$



Hình 1: Sơ đồ nhận nhiệt và bức xạ của trái đất và khí quyển. [1]

Xét cân bằng nhiệt của lớp khí quyển, ta thu được phương trình đầu tiên:

$$2ε_aσT_a^4 = ε_aσT_s^4. \quad (4)$$

Xét cân bằng nhiệt của cả hệ mặt đất và khí quyển, ta thu được phương trình thứ hai:

$$F_{avg}(1 - α) = (1 - ε_a)σT_s^4 + ε_aσT_a^4. \quad (5)$$

Giải phương trình (4) và (5), ta thu được:

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{L(1 - α)}{8πσd_{S-E}^2(2 - ε_a)}} = 290 \text{ K}, \quad (6)$$

$$T_a = \sqrt[4]{\frac{L(1 - α)}{16πσd_{S-E}^2(2 - ε_a)}} = 243 \text{ K}. \quad (7)$$

3. Thay (4) xuống (5), ta được:

$$\frac{2F_{avg}(1 - α)}{σ} = (2 - ε_a)T_s^4. \quad (8)$$

Vì vế trái không đổi khi T_s, ε_a thay đổi, lấy ln rồi vi phân hai vế để vế trái bằng 0, ta thu được:

$$-\frac{Δε_a}{2 - ε_a} + \frac{4ΔT_s}{T_s} = 0 \Rightarrow ΔT_s = \frac{T_s}{4(2 - ε_a)}Δε_a, \quad (9)$$

cho nên

$$k = \frac{T_s}{4(2 - ε_a)}. \quad (10)$$

Nhận xét: Một điều thú vị có thể rút ra từ ý 2 là bề mặt Trái Đất hấp thụ lượng bức xạ từ khí quyển gần như tương đương so với bức xạ từ Mặt Trời!

Biểu điểm

1	Tính công suất bức xạ trên một đơn vị F (1)	0.50
	Áp dụng định luật Stefan-Boltzmann và tính nhiệt độ trái đất T_0 (2)	0.50
2	Viết phương trình cân bằng nhiệt đối với khí quyển (4)	0.75
	Viết phương trình cân bằng nhiệt đối với hệ trái đất và khí quyển (5)	0.75
	Giải hệ phương trình và tính nhiệt độ trái đất và khí quyển (6) & (7)	0.50
3	Viết biểu thức liên hệ giữa ε_a và T_S (8)	0.50
	Tính k (10)	0.50

Tài liệu

- [1] Jacob, D (1999). *Introduction to Atmospheric Chemistry*. Princeton University Press.
- [2] Randall, D.A. (2012). *Atmosphere, Clouds and Climate*. Princeton University Press.

CÂU 8 (4 điểm)

Độ tự cảm động năng và vật liệu siêu dẫn

1. Tự cảm động năng

Khi dòng điện chạy trong các tấm kim loại, các hạt điện tích có mang động năng nhất định. Ảnh hưởng của động năng này tới mô hình mạch điện giống như một cuộn cảm có độ tự cảm L_K , được gọi là thành phần tự cảm động năng. Xét một dòng các điện tích chạy dọc theo một tấm kim loại hình hộp chữ nhật có chiều dài l , tiết diện là A (Hình 1a). Biết rằng mật độ hạt mang điện (electron) trong tấm kim loại này là n , khối lượng của một hạt mang điện là m và điện tích của nó là e . Hãy tính độ tự cảm động năng của tấm kim loại này.

2. Độ sâu London

Thông thường, ta coi rằng không có từ trường trong vật siêu dẫn. Đây là một hệ quả của hiệu ứng Meissner, theo đó, khi từ trường đi vào lòng của một vật siêu dẫn, chúng sẽ bị suy hao đi rất nhanh do các lớp dòng điện cảm ứng gần bề mặt.

Để khảo sát hiện tượng này, ta xét một tấm vật liệu siêu dẫn một chiều chiếm toàn bộ không gian $x > 0$ trong hệ tọa độ. Biết rằng trong tấm vật liệu này có mật độ hạt mang điện tích là n , khối lượng mỗi hạt mang điện là m và điện tích của nó là e . Ban đầu, trong không gian không có từ trường. Sau đó, đặt một từ trường ngoài từ phía bên ngoài vật liệu hướng dọc theo chiều dương của trục Oz . Các lớp dòng điện cảm ứng chạy dọc theo chiều dương trục Oy sinh ra từ trường cản trở lại từ trường ngoài và làm cường độ từ trường từ trường bên trong vật dẫn giảm đi theo dạng $H(x) = H_0 \exp(-x/\lambda)$, trong đó λ được gọi là độ sâu London (Hình 1b). Hãy xác định độ sâu London λ theo n , m , e và hằng số từ μ_0 .

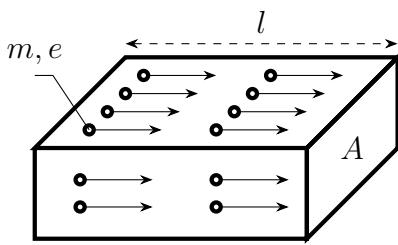
3. Độ tự cảm của trụ tròn siêu dẫn

Một ống trụ tròn siêu dẫn bán kính a dài l có độ sâu London λ (với $\lambda \ll a$) có dòng điện chạy dọc theo trục độ dài của ống (Hình 1c). Theo lý thuyết London, với một phép xấp xỉ phù hợp, ta có thể viết cường độ từ trường H và mật độ dòng J ở gần bề mặt theo dạng

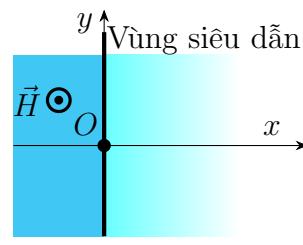
$$H(x) = H_0 \exp(-x/\lambda),$$

$$J(x) = (H_0/\lambda) \exp(-x/\lambda),$$

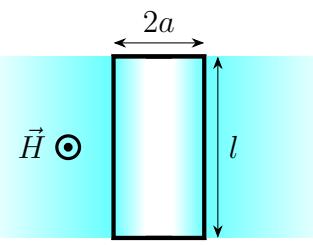
với $x = a - r$ là độ sâu từ phía bán kính của một điểm và $x \ll a$. Hãy tính độ tự cảm của ống siêu dẫn này.



(a)



(b)



(c)

Hình 1: (a) Khối vật liệu có các điện tích chạy qua. (b) Từ trường giảm dần khi đi vào vùng siêu dẫn. (c) Ống trụ siêu dẫn.

Bài giải

1. *Cách 1: Tính gián tiếp qua động năng*

Động năng của các hạt mang điện

$$K = \frac{1}{2}(nAl)mv^2. \quad (1)$$

Cường độ dòng điện $I = nevA$, tức là $v = \frac{I}{neA}$. Thay lại vào biểu thức động năng của dòng electron, ta được

$$K = \frac{1}{2} \frac{m}{ne^2} \frac{l}{A} I^2. \quad (2)$$

Như vậy, năng lượng này giống như năng lượng của một cuộn cảm có độ tự cảm

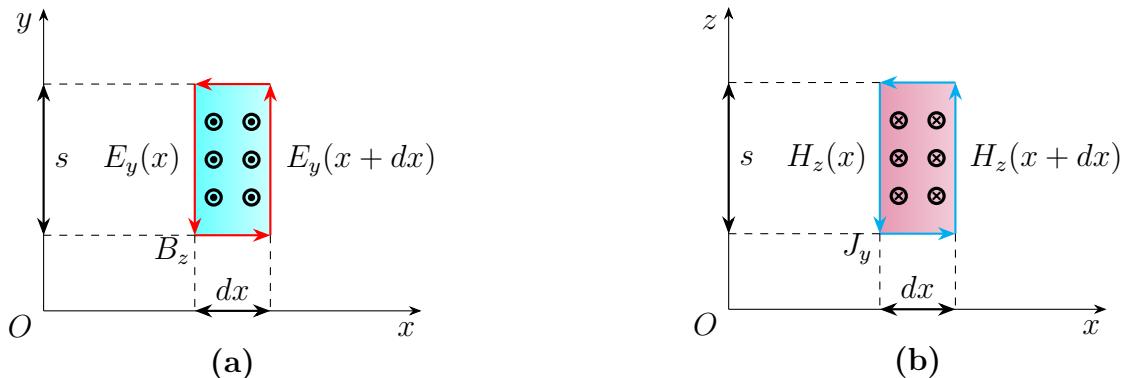
$$L_K = \frac{m}{ne^2} \frac{l}{A}. \quad (3)$$

Cách 2: Tính thông qua suất điện động cảm ứng

Thành phần ma trong phương trình định luật 2 Newton giống như một lực quán tính ngược chiều gia tốc của hạt và tương đương với một điện trường $E = -ma/e$ hay sức điện động cảm ứng $\mathcal{E} = -El = mal/e$. Ta nhớ rằng gia tốc a có thể biểu diễn theo đạo hàm của cường độ dòng điện theo thời gian qua biểu thức $a = (dI/dt)/(neA)$. Như vậy, suất điện động cảm ứng tương đương này giống như suất điện động cảm ứng của một cuộn cảm có độ tự cảm $L_K = (m/ne^2)l/A$.

2. Mật độ dòng điện có thể được biểu diễn là $J = nev$ hay $v = J/(ne)$. Trong quá trình từ trường tăng dần, xuất hiện điện trường cảm ứng E gia tốc cho các hạt điện tích

$$m \frac{dv}{dt} = eE \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} E. \quad (4)$$



Hình 2: (a) Định luật Faraday với mặt được chọn nằm trong mặt phẳng xOy . (b) Định luật Ampere đối với mặt được chọn nằm trong mặt phẳng xOz .

Định luật Faraday đối với một mặt hình hộp chữ nhật có chiều rộng là dx song song trục Ox và chiều dài s song song Oy lớn hơn nhiều chiều rộng dx

$$[E(x+dx) - E(x)] s = -\frac{\partial B}{\partial t} s dx \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5)$$

Đối với quá trình điện trường không biến đổi theo thời gian, định luật Ampere đối với một hình chữ nhật có độ dài s song song với Oz và lớn hơn nhiều chiều rộng dx cho ta biểu thức

$$-[H(x + dx) - H(x)]s = Jsdx \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = -J. \quad (6)$$

Từ các phương trình trên, ta thu được ²

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} H \right) = 0. \quad (7)$$

Do ban đầu chưa có từ trường nên

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} H = 0. \quad (8)$$

Nghiệm của phương trình này là $B = C_1 \exp(x/\lambda) + C_2 \exp(-x/\lambda)$ với $\lambda = \sqrt{m/(\mu_0 ne^2)}$. Do từ trường sâu trong lõng vật dẫn bằng 0 nên $C_1 = 0$, $C_2 = B_0$, ta tìm được độ sâu London

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}}. \quad (9)$$

3. Áp dụng định luật Ampere cho một vòng tròn kín quanh ống

$$H_0 \cdot 2\pi a = I \Rightarrow H_0 = \frac{I}{2\pi a}. \quad (10)$$

Ở đây, ta có 2 cách để xác định độ tự cảm của ống siêu dẫn này, đó là thông qua năng lượng và thông qua tỷ số từ thông sinh ra bởi ống và cường độ dòng điện.

Cách 1: Tìm độ tự cảm thông qua tỷ số từ thông và cường độ dòng điện:

Từ thông qua mặt tạo bởi trục ống và thành ống song song

$$\Phi = \int_0^a \mu_0 H l dr = \int_0^\infty \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) l dx = \frac{\mu_0 l \lambda}{2\pi a} I \Rightarrow L = \frac{\mu_0 l \lambda}{2\pi a}. \quad (11)$$

Cách 2: Tìm độ tự cảm thông qua năng lượng của hệ:

Năng lượng từ trường

$$E = \int_V \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV = \int_0^\infty \frac{1}{2} \mu_0 \left[\left(\frac{I}{2\pi a} \right) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right]^2 \cdot l 2\pi a dx = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l \lambda}{4\pi a} I^2. \quad (12)$$

Tức là độ tự cảm từ sẽ là

$$L_M = \frac{\mu_0 l \lambda}{4\pi a}. \quad (13)$$

Sở dĩ, sự khác biệt về kết quả giữa 2 cách làm này là do trong cách sử dụng năng lượng, ta chưa tính đến độ tự cảm động năng của hệ. Theo đó, động năng của hệ

$$K = \int_V \frac{1}{2} nm v^2 dV = \int_V \mu_0 \lambda^2 J^2 dV = \int_0^\infty \frac{1}{2} \mu_0 \lambda^2 \left[\left(\frac{I}{2\pi a \lambda} \right) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right]^2 \cdot l 2\pi a dx = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l \lambda}{4\pi a} I^2. \quad (14)$$

²Lời giải rõ ràng hơn để đưa ra hệ thức này được trình bày ở cuối, tuy nhiên nó khá nặng toán.

Tức là độ tự cảm động năng là

$$L_K = \frac{\mu_0 l \lambda}{4\pi a}. \quad (15)$$

Tổng năng lượng của hệ gồm năng lượng từ và động năng của các hạt mang điện nên độ tự cảm toàn hệ cũng sẽ bằng tổng của hai độ tự cảm này

$$L = L_M + L_K = \frac{\mu_0 l \lambda}{2\pi a}. \quad (16)$$

Đây là một kết quả hoàn toàn tương đồng với cách tính thứ nhất.

Độ tự cảm động năng vốn dĩ là một thứ rất cơ bản và tự nhiên, nó đã được giới thiệu trong mô hình Drude và định luật Ohm. Tuy nhiên, do thời gian để mạch điện ổn định khi chỉ có độ tự cảm động năng là rất ngắn, trong quy mô thông thường gần như là ngay lập tức, vì vậy ta vẫn thường bỏ qua hiện tượng này. Độ tự cảm động năng do đó chỉ thường được quan tâm đến trong những trường hợp đặc biệt như các mạch cao tần hay trong các vật liệu siêu dẫn.

Cũng vì sự khác thường của nó, việc tính độ tự cảm chỉ thông qua năng lượng từ không còn là một tính toán hiển nhiên đúng, đặc biệt đối với chất siêu dẫn, độ tự cảm động năng thậm chí có thể bằng và cùng cỡ độ lớn với độ tự cảm từ.

Lời giải tổng quát cho chứng minh phần 2.

Định luật 2 Newton cho một hạt điện tích

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}. \quad (17)$$

Phương trình Maxwell-Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (18)$$

Phương trình Maxwell-Ampere

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (19)$$

Từ đây, ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\nabla \times \vec{H})] = -\nabla \times \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\frac{me^2}{m} \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m} \vec{H} \right). \quad (20)$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Viết biểu thức động năng (2)	0.50
	Xác định độ tự cảm động năng (3)	0.50
2	Tìm liên hệ giữa \vec{J} và \vec{E} (4)	0.50
	Viết phương trình Maxwell-Faraday (5)	0.50
	Viết phương trình Maxwell-Ampere (6)	0.50
	Giải hệ phương trình vi phân và xác định λ (9)	0.50
3	Xác định H_0 theo I (10)	0.25
	Tìm độ tự cảm tổng cộng (11)	0.75

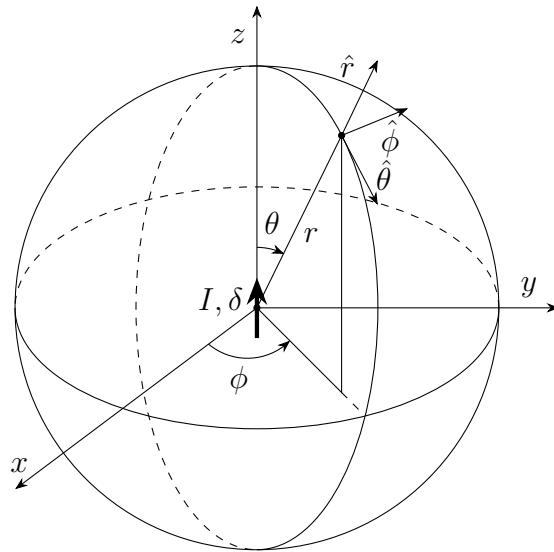
Tài liệu

- [1] R. Meservey and P. M. Tedrow. Measurements of the Kinetic Inductance of Superconducting Linear Structures. *Journal of Applied Physics*, 40(5):2028–2034, 11 2003.
- [2] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications, 2004.

CÂU 9 (4 điểm)

Bức xạ vùng xa

Trong truyền sóng điện từ không dây, "trường xa" thường được hiểu là trường điện từ ở vị trí xa nguồn phát r hơn nhiều lần bước sóng điện từ λ . Khi khảo sát ánh hưởng của trường điện từ tại vùng không gian này, hiện tượng cảm ứng điện từ chiếm ưu thế hoàn toàn so với điện từ trường như trong các mô hình tĩnh điện (định luật Coulomb) hay từ dừng (định luật Bio-Savart-Laplace).



Hình 1: Hệ tọa độ cầu và vị trí của dây dẫn.

Theo đó, một đoạn dây dẫn vô cùng ngắn có chiều dài $\delta \ll \lambda$ có dòng điện xoay chiều $I = I_0 \cos \omega t$ chạy qua và tích điện hai đầu dây như một lưỡng cực điện sẽ giống như một nguồn phát sóng điện từ có dạng

$$\vec{E} = -\omega \mu \frac{I_0 \delta}{4\pi r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \sin \theta \hat{\theta}.$$

Và cường độ từ trường

$$\vec{H} = -\omega \sqrt{\mu \epsilon} \frac{I_0 \delta}{4\pi r} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \sin \theta \hat{\phi}.$$

Năng lượng bức xạ của sóng điện từ qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian được biểu diễn qua vector Poynting theo biểu thức

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

1. Xét một đoạn dây thẳng có độ dài $l_1 \ll \lambda$ có dòng $I = I_0 \cos \omega t$.
 - (a) Hãy tìm công suất bức xạ trung bình P của đoạn dây.
 - (b) Công suất phát xạ sóng điện từ của đoạn dây tiêu hao năng lượng tương đương một thành phần điện trở R_r . Hãy xác định điện trở R_r .
2. Xét một đoạn dây thẳng có độ dài l_2 so sánh được với λ và có dòng điện $I = I_0 \cos \omega t$ chạy qua. Xét các điểm cùng cách tâm đoạn dây thẳng một khoảng r , tìm tỷ số cường độ sóng truyền theo phương hợp với dây một góc θ và cường độ sóng truyền theo phương $\theta = \pi/2$.

Bài giải

1. (a) Công suất bức xạ của dây

$$P(t) = \int_0^\pi S \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \omega^2(\varepsilon\mu) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{(I_0 l_1)^2}{6\pi} \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right). \quad (1)$$

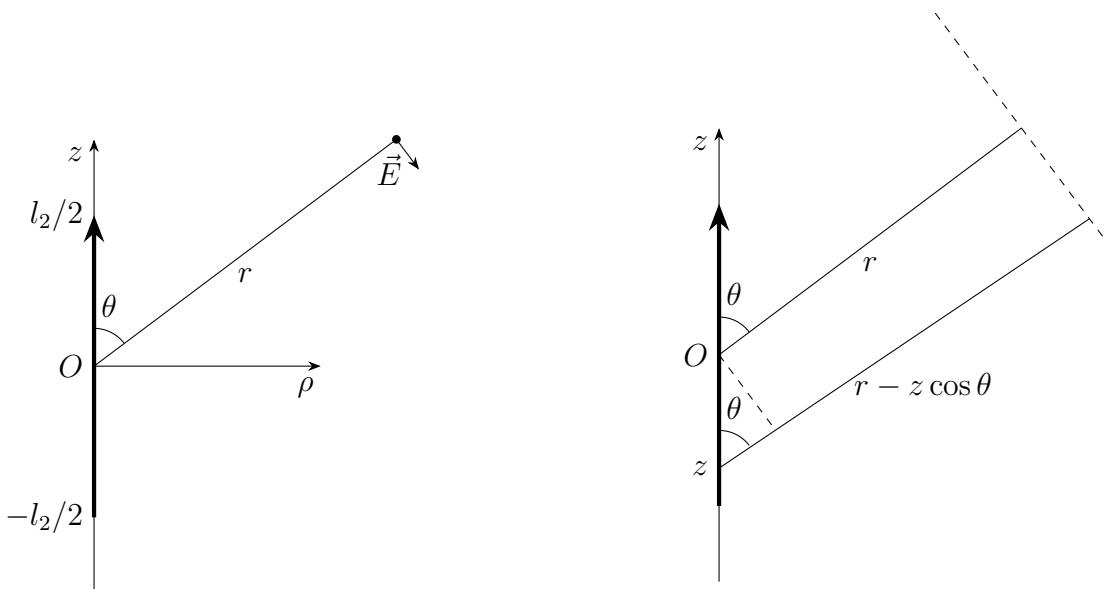
Lấy trung bình theo thời gian

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^2}{12\pi c^2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (I_0 l_1)^2. \quad (2)$$

- (b) Công suất bức xạ của một đoạn dây có dạng $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_r$, đồng nhất hệ thức này với kết quả tính toán phần trên, ta được

$$R_r = \frac{\omega^2}{6\pi c^2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} l_1^2 = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{l_1}{\lambda} \right)^2. \quad (3)$$

2. Ở khoảng cách khá xa, biên độ các sóng điện từ gây ra bởi từng phần tử trên dây dẫn có thể xem là như nhau và tỷ lệ với $\sin \theta$.



Hình 2: Giao thoa sóng điện từ gây ra bởi dây theo các phương diện tọa độ, hướng của điện trường (hình bên trái) và hiệu quang trình (hình bên phải).

Tức là nếu chọn mốc thời gian phù hợp, điện trường gây ra bởi một phần tử dây nằm từ z đến $z + dz$ có dạng

$$dE = A \sin \theta \sin \left(\omega t + \frac{2\pi z \cos \theta}{\lambda} \right) dz, \quad (4)$$

trong đó A là một hằng số không phụ thuộc vào thời gian và thay đổi ít theo không gian ở khoảng cách xa (theo hàm $1/r$). Ở đây, ta có thể xác định giá trị của hằng số này là

$A = -\omega\mu I_0/(4\pi r)$, song do việc đo lường và quan sát sóng điện từ tương đối phức tạp và hầu hết ta chỉ quan tâm đến sự khác biệt của điện từ trường theo các vị trí nên giá trị của hằng số A này không thực sự quan trọng khi khảo sát.

Theo nguyên lý chồng chập điện trường

$$E = \int_{-l_2/2}^{l_2/2} A \sin \theta \sin \left(\omega t + \frac{2\pi z \cos \theta}{\lambda} \right) dz = A \sin \theta \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi l_2}{\lambda} \cos \theta \right)}{\frac{\pi l_2}{\lambda} \cos \theta} \right] \sin(\omega t). \quad (5)$$

Cường độ sóng điện từ, hay trung bình năng lượng sóng điện từ truyền qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian tỷ lệ với bình phương biên độ sóng điện từ nêu

$$\frac{\langle S \rangle}{\langle S_0 \rangle} = \sin^2 \theta \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi l_2}{\lambda} \cos \theta \right)}{\frac{\pi l_2}{\lambda} \cos \theta} \right]^2. \quad (6)$$

Anten ngắn lý tưởng này là một trong những mô hình đơn giản nhất của truyền sóng điện từ ở vùng xa. Ở các mô hình thực tế và phức tạp hơn, dòng điện trên dây có thể sẽ không đều, nó có thể xuất hiện dưới dạng hàm tuyến tính hoặc hàm sin tùy theo độ dài của anten. Không khó để có thể nhận thấy, cường độ sáng ở đây tỷ lệ với bình phương biên độ của điện trường tổng hợp, đó là một kết quả mà ta thường xuyên áp dụng trong quang học sóng.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1a	Tính công suất bức xạ tức thời (1)	0.50
	Tính công suất bức xạ trung bình (2)	0.50
1b	Rút ra biểu thức điện trở tương đương (3)	1.00
2	Tính điện trường gây ra bởi một vi phân đoạn dây (4)	0.50
	Tính tổng điện trường gây bởi toàn dây (5)	1.00
	Tìm tỷ số cường độ sáng (6)	0.50

Tài liệu

- [1] W.L. Stutzman and G.A. Thiele. *Antenna Theory and Design*. Wiley, 2012.
- [2] Constantine A. Balanis. *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley Sons, second edition, 1997.

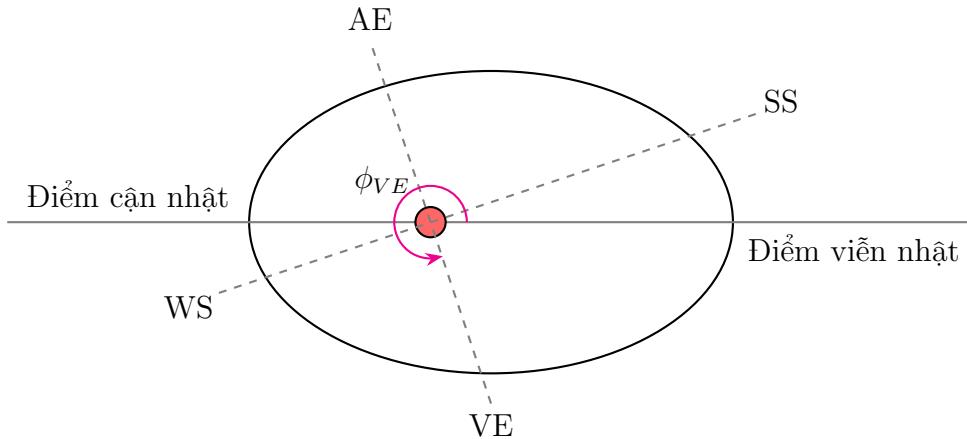
CÂU 10 (4 điểm)**Tâm sai quỹ đạo trái đất**

Quỹ đạo Trái Đất quanh Mặt Trời không phải là một hình tròn hoàn hảo mà là một hình ellipse với tâm sai ε . Chính vì vậy, thời gian giữa các sự kiện Xuân phân, Hạ chí, Thu phân và Đông chí là không đều nhau. Trong bài tập này, chúng ta sẽ đưa ra một mô hình tính toán tâm sai của trái đất với sai số cỡ 9% thông qua các thông tin về những ngày đặc biệt trong năm (như bảng dưới).

Sự kiện	Thời điểm	Thời gian kể từ sự kiện trước (ngày)	Số ngày trôi qua
Xuân phân 2022 (VE)	20/03/2022, 15h33	-	-
Hạ chí 2022 (SS)	21/06/2022, 09h14	92.7368	93
Thu phân 2022 (AE)	23/09/2022, 01h04	93.6597	93
Đông chí 2022 (WS)	21/12/2022, 21h48	89.8939	90
Xuân phân 2023 (VE)	20/03/2023, 21h24	88.9833	89

1. Định luật 2 Kepler

Biểu diễn vận tốc dS/dt theo moment động lượng của Trái Đất L_E và khối lượng Trái Đất m_E , trong đó S là diện tích quét được của đường nối Mặt Trời và Trái Đất. Từ đó kiểm nghiệm lại quan sát của Kepler: Diện tích quét được của đường nối hành tinh và Mặt Trời là như nhau trong khoảng thời gian bằng nhau.

2. Xác định tâm sai quỹ đạo Trái Đất

Hình 1: Vị trí bốn sự kiện đặc biệt trong năm.

Kí hiệu ϕ_1, ϕ_2 ($\phi_2 > \phi_1$) là góc lượng giác hợp bởi điểm viễn nhật và 2 điểm 1, 2 bất kỳ trên quỹ đạo. Thời gian đi từ 1 đến 2 $t_{1 \rightarrow 2}$ được cho bởi tích phân sau:

$$t_{1 \rightarrow 2} = A \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1 - \varepsilon \cos \phi)^2}.$$

a, Biểu diễn A theo chu kỳ T và tâm sai ε của trái đất.

b, Tâm sai quỹ đạo Trái Đất là nhỏ. Từ phương trình đề bài cho, hãy rút ra xấp xỉ sau:

$$t_{1 \rightarrow 2} \approx A[(\phi_2 - \phi_1) + 2\varepsilon(\sin \phi_2 - \sin \phi_1)].$$

c, Sử dụng các số liệu cho trong bảng, xử lý và đưa ra tâm sai của quỹ đạo Trái Đất ε .

Bài giải

1, Vi phân diện tích quét của đường nối giữa Trái Đất và Mặt Trời:

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\phi \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\phi}. \quad (1)$$

Moment động lượng của Trái Đất quanh Mặt trời:

$$L_E = m_E r v_\phi = m_E r^2 \dot{\phi}. \quad (2)$$

Từ đó ta suy ra:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L_E}{2m_E}. \quad (3)$$

Do lực hấp dẫn là lực xuyên tâm, momen động lượng của Trái Đất là hằng số, và đại lượng dS/dt không đổi. Từ đây ta có thể suy ra định luật 2 Kepler.

2, a, Từ định luật 2 Kepler, ta suy được:

$$\frac{S_{1 \rightarrow 2}}{t_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\pi ab}{T}, \quad (4)$$

trong đó, $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ là bán trục nhỏ của quỹ đạo ellipse. Phân diện tích trái đất quét qua khi đi từ 1 đến 2

$$S_{1 \rightarrow 2} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{2}r^2 d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{2} \left[\frac{a(1 - \varepsilon^2)^2}{1 - \varepsilon \cos \phi} \right]^2 d\phi. \quad (5)$$

Thay trở lại biểu thức trên, ta tìm được hằng số A như sau

$$A = \frac{T(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi}. \quad (6)$$

b, Với $\varepsilon \ll 1$, ta khai triển nhỏ số hạng chứa ε :

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \phi)^2} \approx 1 + 2\varepsilon \cos \phi. \quad (7)$$

Thay vào biểu thức thời gian di chuyển giữa hai vị trí của trái đất và lấy tích phân, ta thu được

$$t_{1 \rightarrow 2} \approx A[(\phi_2 - \phi_1) + 2\varepsilon(\sin \phi_2 - \sin \phi_1)]. \quad (8)$$

c, Do mỗi sự kiện nối tiếp nhau có góc lệch khi ngắm từ phía trái đất gần đúng là $\pi/2$ nên

$$t_{VE \rightarrow SS} \sim A[\pi/2 + 2\varepsilon(\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})], \quad (9)$$

$$t_{SS \rightarrow AE} \sim A[\pi/2 - 2\varepsilon(\sin \phi_{VE} + \cos \phi_{VE})], \quad (10)$$

$$t_{AE \rightarrow WS} \sim A[\pi/2 - 2\varepsilon(\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})], \quad (11)$$

$$t_{WS \rightarrow VE} \sim A[\pi/2 + 2\varepsilon(\sin \phi_{VE} + \cos \phi_{VE})]. \quad (12)$$

Từ 4 phương trình trên, ta tìm được góc ϕ_{VE}

$$\tan \phi_{VE} = \frac{(1 - \tau_1)}{(1 + \tau_1)}, \quad (13)$$

trong đó

$$\tau_1 = \left(\frac{t_{VE \rightarrow SS} - t_{AE \rightarrow WS}}{t_{WS \rightarrow VE} - t_{SS \rightarrow AE}} \right) = \left(\frac{\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE}}{\cos \phi_{VE} + \sin \phi_{VE}} \right). \quad (14)$$

Từ bảng số liệu, $\tau_1 \approx -3/4$ và $\varepsilon \approx 4.57$ Rad. Vậy

$$\tau_2 = \frac{t_{VE \rightarrow SS}}{t_{AE \rightarrow WS}} = \frac{\pi/2 + 2\varepsilon (\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})}{\pi/2 - 2\varepsilon (\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})}. \quad (15)$$

Ta tìm được

$$\varepsilon \sim \frac{\pi (\tau_2 - 1)}{4 (1 + \tau_2) (\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})} \approx 0.0152. \quad (16)$$

Từ 4 phương trình trên, ta thu được hai phương trình:

$$\frac{t_{VE \rightarrow SS}}{t_{AE \rightarrow WS}} = \frac{A [\pi/2 + 2\varepsilon (\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})]}{A [\pi/2 - 2\varepsilon (\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE})]}, \quad (17)$$

$$\frac{t_{WS \rightarrow VE}}{t_{SS \rightarrow AE}} = \frac{A [\pi/2 + 2\varepsilon (\cos \phi_{VE} + \sin \phi_{VE})]}{A [\pi/2 - 2\varepsilon (\cos \phi_{VE} + \sin \phi_{VE})]}. \quad (18)$$

(19)

Chuyển về và rút gọn, ta thu được:

$$\varepsilon (\cos \phi_{VE} - \sin \phi_{VE}) = \frac{\pi (t_{VE \rightarrow SS} - t_{AE \rightarrow WS})}{4 (t_{VE \rightarrow SS} + t_{AE \rightarrow WS})} = a, \quad (20)$$

$$\varepsilon (\cos \phi_{VE} + \sin \phi_{VE}) = \frac{\pi (t_{WS \rightarrow VE} - t_{SS \rightarrow AE})}{4 (t_{WS \rightarrow VE} + t_{SS \rightarrow AE})} = b. \quad (21)$$

Ta rút ra được $\varepsilon \cos \phi_{VE} = (a + b)/2$, $\varepsilon \sin \phi_{VE} = (a - b)/2$. Cuối cùng,

$$\varepsilon = \left(\left(\frac{a + b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a - b}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \approx 0.0166 \quad (22)$$

Theo số liệu của USNO, tâm sai của trái đất là $\varepsilon = 0.0167$, tức là phép đánh giá thô của chúng ta đã có những hiệu quả nhất định trong việc thiết lập mô hình tính toán tâm sai của trái đất.

Lưu ý: Việc khai triển làm xuất hiện các số hạng ε bậc cao hơn 1 có thể gây ra sai số khá lớn và các đáp án đó sẽ không được chấp nhận.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Viết biểu thức diện tích quét (1)	0.25
	Viết phương trình bảo toàn momen động lượng (2)	0.50
	Suy ra định luật 2 Kepler (3)	0.25
2a	Áp dụng định luật 2 Kepler (4)	0.25
	Viết biểu thức diện tích quét	0.50
	Dối chiếu kết quả và tìm a	0.25
2b	Khai triển nhỏ số hạng ε bậc 1 (7)	0.50
	Lấy tích phân và thu được biểu thức thời gian giữa các sự kiện (8)	0.50
2c	Từ bảng số liệu xác định ϕ_{VE} (13)	0.50
	Tính được giá trị ε với một phương pháp đúng sai lệch dưới 20% (16)	0.50

Tài liệu

- [1] B. Cameron Reed. Eccentricity and orientation of Earth's orbit from equinox and solstice times. *American Journal of Physics*, 91(4):324–326, 04 2023.

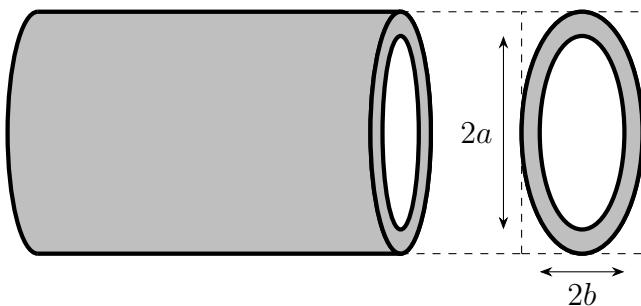
CÂU 11 (8 điểm)**Chảy****1. Dòng chảy tầng và định luật Hagen-Poiseuille.**

Định luật Hagen-Poiseuille phát biểu rằng với một dòng chảy không nén và có hệ số nhót đồng nhất dâng hướng ở chế độ dừng, thông lượng chất lưu chảy qua một mặt cắt ống sẽ tỷ lệ với chênh lệch áp suất hai đầu ống.

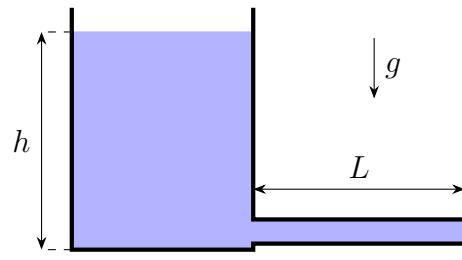
Xét một ống nước thẳng dài có tiết diện ống hình ellipse với độ dài hai bán trục lần lượt là a và b . Có một dòng chảy không nén có độ nhót là μ . Với chênh lệch áp suất hai đầu ống là Δp và ống dài L , ta có thể đặt $G = \Delta p/L$ là chênh lệch áp suất trên mỗi đơn vị độ dài ống. Ở chế độ chảy dừng ổn định, dòng chảy là dòng chảy tầng, xem rằng các tầng nước có cùng vận tốc nằm theo một đường ellipse trên mặt cắt, hãy tìm phân bố vận tốc theo tọa độ tại các lớp nước và tìm thông lượng nước Q chảy qua một mặt cắt ống trong một đơn vị thời gian theo G, μ, a và b .

2. Dòng chảy Bernoulli không dừng.

Một bình nước hình trụ được cấp nước vào sao cho giữ nguyên mực nước cao h so với đáy. Ở gần đáy bình, có một ống nước nằm ngang dài L tiết diện rất nhỏ so với bình xả nước từ bình ra ngoài. Gia tốc trọng trường là g . Xem rằng nước trong bình không bị nén. Bỏ qua các ma sát, tổn thất năng lượng ở các đoạn ống, hiệu ứng co hẹp đường ống,... Ban đầu, đầu xả nước bị bịt và toàn bộ nước đứng yên. Tại thời điểm $t = 0$, đầu xả nước của ống được mở và nước bắt đầu chảy từ ống ra ngoài. Hãy tìm vận tốc chảy của nước trong ống theo thời gian.



Hình 1: Ống trụ có mặt cắt hình ellipse.



Hình 2: Bình nước hình trụ có ống dài.

(Biên soạn bởi Log)

Bài giải

1. Với các tầng nước có cùng vận tốc nằm trên một hình ellipse, phân bố vận tốc theo tọa độ có thể viết dưới dạng:

$$u(x, y) = A + Bx^2 + Cy^2. \quad (1)$$

Để vận tốc này thỏa mãn điều kiện biên, các phần nước sát thành ống có vận tốc bằng 0. Tức là, mọi điểm nằm trên đường $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, đều có vận tốc bằng 0. Đối chiếu với phân bố vận tốc trên, ta được

$$u(x, y) = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \quad (2)$$

Định luật 2 Newton với một khối nước có kích thước $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$:

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial u}{\partial t} = (G \Delta z) \Delta x \Delta y - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu (\Delta y \Delta z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta x - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu (\Delta x \Delta z) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \Delta y. \quad (3)$$

hay ta thu được phương trình Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = G + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Ở chế độ dừng, $\partial u / \partial t = 0$, nên

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{G}{\mu}. \quad (5)$$

Thay dạng hàm phân bố vận tốc theo tọa độ bên trên vào phương trình này, ta tìm được hệ số $A = \frac{G}{2\mu(a^{-2} + b^{-2})}$. Như vậy, ta xác định được phân bố vận tốc các lớp nước theo tọa độ

$$u(x, y) = \frac{G}{2\mu(a^{-2} + b^{-2})} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (6)$$

Thông lượng dòng qua ống

$$Q = \iint_S u(x, y) dx dy \quad (7)$$

Đặt $x = a\rho \cos \theta$ và $y = b\rho \sin \theta$, để lấy tích phân, ta tìm được thông lượng

$$Q = \int_0^1 \frac{G a^2 b^2}{2\mu} (1 - \rho^2) 2\pi a b \rho d\rho = \frac{\pi G a^3 b^3}{4\mu (a^2 + b^2)}. \quad (8)$$

2. Do ta đang khảo sát quá trình không dừng của dòng chảy, vận tốc dòng chảy thay đổi theo thời gian, nên áp dụng trực tiếp phương trình Bernoulli cho dòng chảy dừng là một lời giải sai. Ở đây, ta có 2 cách giải quyết vấn đề này: Cách thứ nhất là ta sẽ áp dụng phương pháp năng lượng và cách thứ hai là tìm lại một phương trình Bernoulli đầy đủ hơn và giải quyết được cả với dòng chảy không dừng.

Cách 1: Phương pháp năng lượng

Để mực nước được giữ nguyên, lượng thế năng được cấp vào hệ trong mỗi vi phân thời gian dt là

$$dU = \rho g h S v dt. \quad (9)$$

Lượng biến đổi động năng hệ trong mỗi vi phân thời gian dt là

$$dK = \rho L S v \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \rho S v^3 dt. \quad (10)$$

Trong đó, số hạng thứ nhất là sự biến đổi động năng gây ra bởi việc dòng nước được tăng tốc khiến động năng của nước trong ống tăng lên và số hạng thứ hai là động năng mà các phần tử nước mang ra ngoài khỏi ống.

Do thế năng nước cấp thêm vào ống gây ra biến đổi về động năng, tức là $dK = dU$, ta thu được biểu thức:

$$L \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = \rho g h. \quad (11)$$

Giải phương trình vi phân trên với điều kiện đầu $t = 0$ thì $v = 0$, ta được

$$v = \sqrt{2gh} \tanh \left(\frac{\sqrt{2gh}}{L} t \right). \quad (12)$$

Cách 2: Bổ chính phương trình Bernoulli

Theo phương trình Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}. \quad (13)$$

Đạo hàm toàn phần của \vec{v} theo thời gian t có thể viết dưới dạng

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (14)$$

Nên

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} = 0. \quad (15)$$

Lấy tích phân đường của hai vế phương trình trên từ vị trí A đến vị trí B nào đó, ta thu được phương trình Bernoulli dạng đầy đủ

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{s} + \left(\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gz_A \right) - \left(\frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + gz_B \right) = 0. \quad (16)$$

Có thể thấy rằng, với dòng chảy có vận tốc không đổi, ta thu được phương trình Bernoulli cho dòng chảy dừng thường thấy. Tuy nhiên, dòng chảy ở đây là một dòng chảy có sự biến đổi về vận tốc theo thời gian. Áp dụng phương trình Bernoulli dạng đầy đủ cho điểm trên đầu mực nước và điểm cuối ống, xem rằng vận tốc nước trong bình rất chậm so với trong ống, ta thu được phương trình vi phân (11).

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Lập luận dạng biểu thức của vận tốc dòng theo tọa độ (1)	0.25
	Xác định điều kiện biên bài toán	0.50
	Lập luận chỉ ra dạng phân bố vận tốc theo tọa độ (2)	0.25
	Viết phương trình động lực học ứng với vi phân khối nước (3)	0.50
	Suy ra phương trình Navier-Stokes	0.25
	Áp dụng phương trình Navier-Stokes ở chế độ dòng chảy dừng	0.25
	Xác định hằng số A và suy ra biểu thức vận tốc (6)	1.00
	Viết biểu thức tính thông lượng (7)	0.25
	Đổi biến trong tích phân 2 lớp	0.25
	Tính được thông lượng dòng (8)	0.50
2	Áp dụng định luật bảo toàn hoặc phương trình Bernoulli, suy ra phương trình vi phân của bài toán (11)	3.00
	Giải phương trình vi phân (12)	1.00

Tài liệu

- [1] G.K. Batchelor. An Introduction to Fluid Dynamics. *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press, 1967.
- [2] <https://ocw.mit.edu/courses/2-25-advanced-fluid-mechanics-fall>
- [3] Matthew J. Traum and Luis Enrique Mendoza Zambrano. *A fluids experiment for remote learners to test the unsteady bernoulli equation using a burette*, 2021.
- [4] Jean Marie Brebéc, P.F.I.E.V Cơ học chất lưu.

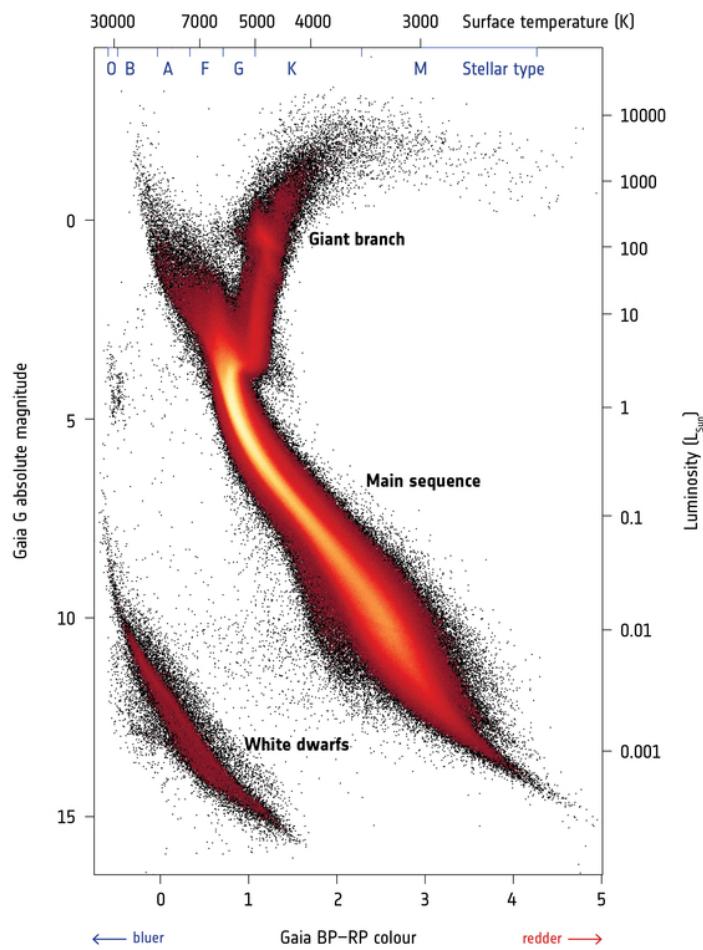
CÂU 12 (8 điểm)

Sao dây chính (Main sequence stars)

Trong bài này, chúng ta hãy cùng xây dựng hệ phương trình cấu trúc của một ngôi sao dây chính và ước tính các thông số cơ bản của Mặt Trời.

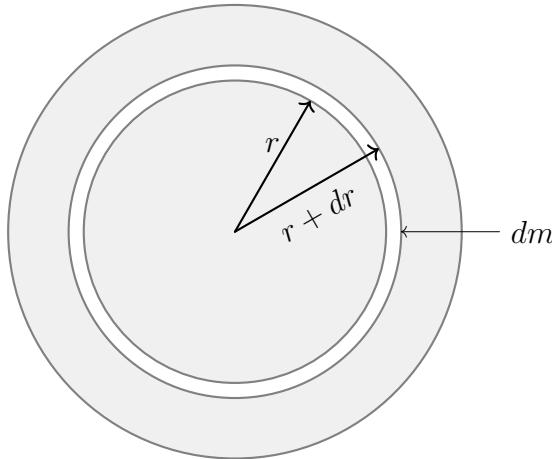
Mặt Trời là một ngôi sao dây chính (dây trên hình vẽ dễ thấy nhất từ phía dưới bên phải lên đến phía trên bên trái), với nhiệt độ bề mặt và độ trưng năng lượng được biểu thị trên giản đồ Hertzsprung-Russell.

→ GAIA'S HERTZSPRUNG-RUSSELL DIAGRAM



Hình 4: Hình vẽ biểu diễn giản đồ HR của các ngôi sao được đo đạc bởi Gaia, với độ trưng năng lượng L của ngôi sao tỉ lệ với độ trưng năng lượng của mặt trời 1 trên trực tung bên phải, và nhiệt độ bề mặt T_e (K) trên trực hoành ở phía trên.

1. Xét lớp cầu khối lượng dm dày dr , bán kính r , có mật độ khối lượng là ρ . Một ngôi sao ở trạng thái cân bằng thuỷ tĩnh khi mà lực hấp dẫn của chính nó cân bằng với nội áp suất từ bên trong ngôi sao tạo ra. Gọi áp suất tác dụng lên mặt trong lớp cầu là $p(r)$, áp suất tác dụng lên mặt ngoài lớp cầu là $p(r + dr)$. Tìm $\frac{dm}{dr}$ và gradient áp suất $\frac{dp}{dr}$ để một ngôi sao ở trạng thái cân bằng.



Cho phân bố vật chất bên trong mặt trời:

$$\rho(x) = 293 \exp(-10.5x) - 139 \exp(-22.7x), \quad (1)$$

trong đó $x = \frac{r}{R}$.

Áp suất tác dụng lên lớp ngoài cùng của Mặt trời đến từ sự suy giảm bức xạ photon trong quang quyển của mặt trời. Độ dày quang học là một đại lượng đặc trưng cho sự suy giảm đó. Cho biết độ dày quang học của photon là:

$$\tau(R) = \int_R^\infty \kappa \rho dr = \frac{2}{3}, \quad (2)$$

với κ có thể coi là hằng số khi $r > R$.

2. Tính áp suất P_s ở bề mặt Mặt Trời, từ đó tính áp suất tại tâm Mặt Trời, biết tâm mặt trời có thể coi là 0.1% bán kính.
3. Thành phần của tâm mặt trời bao gồm 74% Hidro, 24% Heli và 2% các kim loại nặng khác. Tại trung tâm của ngôi sao, do nhiệt độ cao nên vật chất tồn tại ở thể plasma (vật chất bị ion hoá hoàn toàn) nên nó có khối lượng mol khoảng $\mu_i = 0.62 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Coi khí plasma là khí lý tưởng, ước tính nhiệt độ T_c ở tâm mặt trời.

Do sự chênh lệch nhiệt độ giữa tâm và bề mặt của một ngôi sao, năng lượng có xu hướng "chảy" từ trong ra ngoài thông qua bức xạ điện từ. Ta hãy xem xét lực do bức xạ tác dụng lên lớp cầu dm trong trường hợp này. Khi một bức xạ xuyên qua một môi trường truyền thì năng lượng của nó bị chất truyền dẫn đó hấp thụ một phần. Cụ thể, cường độ của bức xạ đó sau khi đi được quãng đường x trong môi trường truyền có mật độ khối lượng ρ và độ mờ κ được miêu tả bằng hàm

$$I(x) = I_0 \exp(\kappa \rho x). \quad (3)$$

4. Biết năng lượng bức xạ tới lớp cầu dr trong một đơn vị thời gian là $l(r)$. Tính áp suất bức xạ dp_{rad} gây ra trên lớp cầu.
5. Cho độ mờ trung bình của mặt trời là $\langle \kappa \rangle = 10^2 \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$. Độ trung năng lượng Eddington là độ trung lớn nhất có thể có của một ngôi sao. Tìm độ trung Eddington của Mặt Trời.

Người ta tìm thấy rằng áp suất bức xạ bằng một phần ba mật độ năng lượng bức xạ vật đen, kết hợp với định luật Stefan-Boltzmann, ta được:

$$p = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = \frac{a}{3} T^4, \quad (4)$$

trong đó a được gọi là hằng số bức xạ.

6. Tìm quy luật phân bố nhiệt độ bên trong một ngôi sao dãy chính.
7. Cho năng lượng tao ra do phản ứng hạt nhân của một ngôi sao trong một đơn vị thời gian và trên một đơn vị khối lượng là ϵ . Tìm quy luật phân bố độ trung năng lượng của một ngôi sao. Độ trung năng lượng của một ngôi sao tỉ lệ với luỹ thừa bậc mấy của nhiệt độ? Từ đó so sánh với giản đồ HR và nhận xét. Thời gian một ngôi sao tồn tại ở dãy chính tỉ lệ thế nào với khối lượng của nó.
8. Thời khắc cuối cùng của một ngôi sao ở dãy chính diễn ra khi mà Hidro bị chuyển hoá hết thành Heli. Do tốc độ phản ứng tỉ lệ với nhiệt độ, nên khi Hidro ở trong tâm bị sử dụng hết, thì ở phía ngoài, nơi nhiệt độ thấp hơn, Hidro vẫn đang được đốt cháy, tạo ra một lớp vỏ Hidro ở phía ngoài. Khi lõi Heli bên trong đạt tới khối lượng khi mà nó sụp đổ do áp suất của lớp vỏ bên ngoài, gọi là giới hạn Schönberg-Chandrasekhar thì ngôi sao bước vào giai đoạn Sao khổng lồ đỏ. Tìm giới hạn Schönberg-Chandrasekhar $\frac{M_c}{M}$ theo tỉ số $\frac{\mu_c}{\mu_s}$, với M_c , M , μ_c , μ_s lần lượt là khối lượng lõi, khối lượng ngôi sao, khối lượng nguyên tử của lõi và khối lượng nguyên tử của lớp vỏ.

(Biên soạn bởi Hiagari)

Bài giải

1. Xét một lớp vỏ cầu bán kính r dày dr , khối lượng của lớp vỏ cầu này là

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr. \quad (1)$$

Do lực do áp suất gây ra cân bằng với lực hấp dẫn nên

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (2)$$

2. Lấy tích phân biểu thức (2), ta được

$$P_{\text{sur}} = \int_R^\infty -\frac{GM\rho}{r^2} dr = \frac{GM}{R^2} \int_R^\infty \rho dr = \frac{GM}{\kappa R^2} \tau(R) = \frac{2GM}{3\kappa R^2}. \quad (3)$$

Từ hàm ρ thay $x = 0.001$ ta tính được $\rho \approx 154 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Theo (2)

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}. \quad (4)$$

Thê hàm ρ và tích phân ta được $p \approx 28.9 \text{ Pa}$.

3. Từ phương trình khí lý tưởng

$$p = \frac{\rho RT}{\mu} \implies T = \frac{p\mu}{R\rho}. \quad (5)$$

Thay số tính được $T \approx 14$ triệu độ.

4. Lực gây ra là do photon va chạm với môi trường truyền làm mất một phần động lượng và chuyển thành lực. Do góc khối phát bức xạ là như nhau nên $I \sim E$

$$\Delta F_r = \frac{dp}{dt} = \frac{dE}{cdt} = \frac{l}{c} = \frac{l_0[1 - \exp(\kappa\rho\Delta r)]}{c} \approx -\frac{l(r)}{c}\kappa\rho\Delta r \implies dF_r = -\frac{l(r)}{c}\kappa\rho dr. \quad (6)$$

5. Từ dF_r vừa tìm được ở trên, chúng ta có thể tìm gradient áp suất trên tại bề mặt, kết hợp với điều kiện cân bằng thuỷ tĩnh (2), ta tìm được

$$L_{Ed} = \frac{4\pi Gc}{\langle\kappa\rangle} M. \quad (7)$$

6. Thông qua áp suất bức xạ ta có

$$dF_r = 4\pi r^2 dp = 4\pi r^2 \frac{4aT^3}{3} dT = \frac{16a\pi r^2 T^3}{3} dT. \quad (8)$$

Từ 2 phương trình trên ta có

$$dF_r = \frac{16a\pi r^2 T^3}{3} dT = -\frac{l(r)}{c}\kappa\rho dr \implies l(r) = -\frac{16ca\pi r^2 T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (9)$$

7. Ta tìm được gradient độ trung năng lượng từ định nghĩa

$$\frac{dl(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon. \quad (10)$$

Xuất phát từ (2)

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}. \quad (11)$$

Lưu ý rằng $\rho \sim \frac{M}{R^3}$.

Ta được

$$p \sim -\frac{M^2}{R^4}. \quad (12)$$

Từ phương trình khí lý tưởng ta có $p \sim \rho T$.

Ta được

$$T \sim M/R. \quad (13)$$

Từ $l(r) = -\frac{16ca\pi r^2 T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}$ tìm được

$$L \sim M^3. \quad (14)$$

Từ định luật Stefan-Boltzmann $L = 4\pi r^2 \sigma T_e^4$ ta được

$$L \sim R^2 T^4 = (TR)^2 T^2 \Rightarrow M^3 \sim M^2 T^2 \Rightarrow M \sim T^2. \quad (15)$$

Vậy $L \sim T^6$ và $\tau \sim M^{-2}$.

8. Từ điều kiện cân bằng thuỷ tĩnh

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \Rightarrow 4\pi r^3 \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{r}. \quad (16)$$

Xét về trái, sử dụng phương trình khối lượng

$$4\pi r^3 \frac{dp}{dm} = \frac{d(4\pi r^3 p)}{dm} - 12\pi r^2 p \frac{dr}{dm} = \frac{d(4\pi r^3 p)}{dm} - \frac{3p}{\rho}. \quad (17)$$

Tích phân phương trình 1 trên toàn bộ khối lượng lõi Heli

$$\int_0^{M_c} \frac{d(4\pi r^3 p)}{dm} dm - \int_0^{M_c} \frac{3p}{\rho} dm = \int_0^{M_c} -\frac{Gm}{r} dm. \quad (18)$$

Từ phương trình khí lý tưởng $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$, do lõi Heli đẵng nhiệt nên

$$\int_0^{M_c} \frac{3p}{\rho} dm = \frac{3M_c R T_c}{\mu_c} = 2U_c, \quad (19)$$

ở đó K_c là nội năng của khí He trong lõi.

Thành phần bên trái phương trình (18) là thế năng hấp dẫn của lõi

$$\int_0^{M_c} -\frac{Gm}{r} dm = -\frac{3}{5} \frac{GM_c^2}{R_c}. \quad (20)$$

Thế vào phương trình (18) và hoàn thành tích phân còn lại, ta được

$$4\pi R_c^3 P_c - 3 \frac{M_c R T_c}{\mu_c} = -\frac{3}{5} \frac{GM_c^2}{R_c} \Rightarrow P_c = \frac{3}{4\pi R_c^3} \left(\frac{M_c R T_c}{\mu_c} - \frac{1}{5} \frac{GM_c^2}{R_c} \right). \quad (21)$$

Từ phương trình trên, với giá trị R_c xác định, ta thấy rằng khi khối lượng lõi tăng lên thì năng lượng nhiệt sẽ tăng áp suất ở bề mặt của lõi, trong khi thế năng hấp dẫn gây giảm áp suất. Ta tìm được áp suất lớn nhất trên bề mặt lõi

$$P_{c,max} = \frac{375}{64\pi} \frac{1}{G^3 M_c^2} \left(\frac{RT_c}{\mu_c} \right)^4. \quad (22)$$

Dễ dàng thấy được khi M_c tăng thì áp suất trên giảm. Do đó, ở một giá trị khối lượng của lõi, cân bằng thuỷ tĩnh sẽ bị phá vỡ.

Chúng ta sẽ tìm áp suất tác dụng lên bề mặt lõi bởi lớp vỏ. Từ điều kiện cân bằng thuỷ tĩnh

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \implies P_s \approx \frac{G}{8\pi \langle r^4 \rangle} (M^2 - M_c^2) \approx \frac{G}{4\pi} \frac{M^2}{R^4}. \quad (23)$$

Thông qua ρ_s và phương trình khí lí tưởng, ta tìm được:

$$P_s \approx \frac{81}{4\pi} \frac{1}{G^3 M^3} \left(\frac{RT_c}{\mu_s} \right)^4. \quad (24)$$

Như vậy, ta tìm được giới hạn S-C khi mà lõi còn có thể duy trì được cân bằng thuỷ tĩnh:

$$\frac{M_c}{M} \approx 0.537 \left(\frac{\mu_s}{\mu_c} \right)^2. \quad (25)$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Tìm được gradient khối lượng (1)	0.50
	Tìm được gradient áp suất (2)	0.50
2	Tìm được áp suất bề mặt (3)	0.50
	Tìm được áp suất tại tâm (4)	0.50
3	Tìm được nhiệt độ tại tâm (5)	0.50
4	Dẫn ra được lực do áp suất bức xạ gây ra trên lớp cầu (6)	0.50
5	Tìm được độ trung Eddington của Mặt Trời (7)	0.50
6	Tìm ra được hàm độ trung năng lượng (9)	0.50
7	Tìm ra được hàm độ trung năng lượng theo định nghĩa (10)	0.50
	Tìm ra được quan hệ tỉ lệ giữa L và M	0.50
	Tìm ra được quan hệ tỉ lệ giữa L và T và giữa τ và M	0.50
8	Dẫn ra được phương trình (17)	0.50
	Tính được thế năng hấp dẫn của lõi (20)	0.50
	Tìm ra được áp suất lớn nhất trên bề mặt lõi (22)	0.50
	Tìm ra được áp suất tác dụng lên bề mặt lõi bởi lớp vỏ ngoài (24)	0.50
	Tìm ra được giới hạn S-C (25)	0.50

Tài liệu

[1] JPhO 2022 Theory Problems.

[2] Bradley W.Carroll, Dale A.Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*

CÂU 13 (8 điểm)

Tương tác tĩnh điện của protein

Nghiên cứu về vật lý trong sinh học đã trở thành một trong những chủ đề bùng nổ và hấp dẫn gần đây, trong số đó có chủ đề mà bài toán này tim hiểu, đó là tương tác tĩnh điện của protein trong DNA với điện tích trong môi trường nước hoặc trong môi trường có ion tự do (môi trường chứa muối đơn trị như NaCl) để giải thích một số quá trình như *đảo điện tích (charge inversion)* trong hệ thống polyelectrolyte-micelle hay trên bề mặt rắn của màng mica hoặc lipid; hay hiện tượng *di điện di (electrophoresis)* trong quá trình sinh học (Ví dụ như quá trình chuyển gen đến tế bào sống với mục đích trị liệu gen,...).

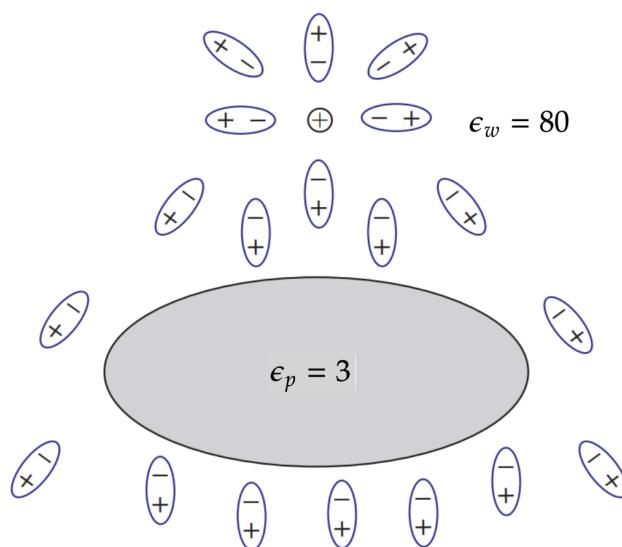
1. Axit amin trong protein.

Dầu tiên ta tìm hiểu tại sao sâu bên trong protein, axit amin ion hoá lại hầu như không tích điện. Ta xét mô hình đơn giản của một điện tích, giả thiết như một quả cầu bán kính $R \approx 1.5 \text{ \AA}$, tích điện $q = e \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, di chuyển từ môi trường nước bên ngoài protein vào sâu bên trong protein. Protein và nước coi như môi trường điện môi đồng nhất với hằng số điện môi lần lượt là $\epsilon_p \approx 3$, $\epsilon_w \approx 80$. Cho biết năng lượng tĩnh điện cần để phá huỷ bắt kỳ cấu trúc protein nào xấp xỉ $E_0 \approx 5 \text{ kcal/mol}$ ($1 \text{ J} \approx 1.44 \times 10^{20} \text{ kcal/mol}$).

Lưu ý: Trong toàn bộ bài tập này ta sẽ chủ yếu dùng đơn vị kcal/mol cho năng lượng vì trong nghiên cứu về tế bào chủ yếu sử dụng đơn vị này nhưng vẫn chấp nhận kết quả bằng đơn vị Joule.

Xác định độ chênh lệch năng lượng tĩnh điện của một điện tích nếu điện tích đó xuất hiện bên trong protein. Vậy tại sao axit amin ion hoá lại hầu như không tích điện bên trong protein ?

2. Tương tác giữa điện tích và protein trong môi trường nước.

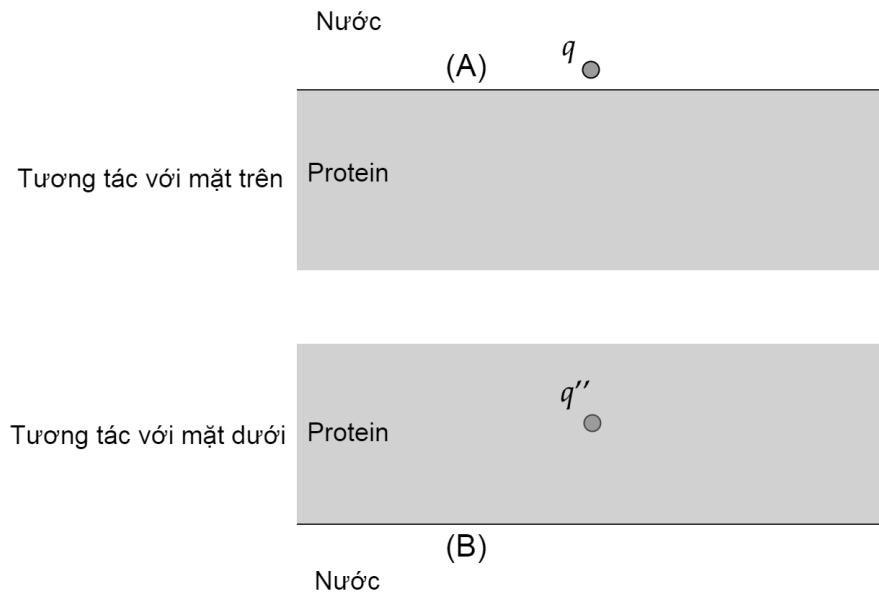


Hình 1: Các luồng cực bị phân cực

Tiếp đến ta tính tương tác của các điện tích ở gần hay tại mặt phân cách của protein và nước (**Hình 1**). Coi điện tích rất bé và nằm rất gần so với protein để có thể mô hình hoá protein như một tấm điện môi đồng nhất có hai mặt phẳng rộng vô hạn song song với nhau (**Hình 2**). Trong từng vùng môi trường, tồn tại "hằng số điện môi hiệu dụng" ϵ_{eff} , cho phép tính điện thế của điện tích q gây ra tại vị trí \vec{r} rất xa so với chính nó (nhưng đủ lớn để không coi điện thế bằng 0) như thế điện tích q được đặt trong môi trường điện môi đồng nhất có hằng số điện môi bằng hằng số điện môi hiệu dụng:

$$V(\vec{r}) = \frac{kq^2}{\epsilon_{\text{eff}} |\vec{r}|}.$$

Do vùng không gian môi trường nước chứa điện tích, các lưỡng cực phân cực mạnh hơn vùng không gian không chứa điện tích nên khi ta khảo sát tương tác tĩnh điện đối với mặt phân cách gần điện tích thì ảnh hưởng của mặt phân cách xa điện tích là không đáng kể. Ngoài ra khi khảo sát tĩnh điện ở vùng không gian môi trường nước không chứa điện tích, các lưỡng cực trong nước bị phân cực mạnh hơn trong protein nên ta chỉ xét ảnh hưởng của các điện tích liên kết trong môi trường nước ở mặt phân cách xa điện tích. Do đó ta gần đúng hệ này bằng cách tách thành hai hệ tương tác tĩnh điện giữa điện tích điểm q hoặc q'' và mặt phẳng điện môi bán vô hạn (**Hình 2**).



Hình 2: Tương tác giữa điện tích và protein trong từng môi trường. Điện tích q là điện tích ban đầu ta xét. Điện tích q'' là điện tích ảnh sinh ra do sự tương tự về mặt tĩnh điện của các điện tích liên kết trong môi trường protein.

- a**, Xác định hằng số điện môi hiệu dụng trong vùng môi trường nước chứa điện tích.
- b**, Xác định hằng số điện môi hiệu dụng trong vùng môi trường bên trong protein.

c, Xác định hằng số điện môi hiệu dụng trong vùng môi trường nước không chứa chúa điện tích.

3. Tương tác giữa điện tích và protein trong môi trường có ion tự do.

Cho đến giờ ta mới chỉ tìm hiểu về tương tác giữa các điện tích riêng biệt. Tuy nhiên ta đã "bỏ sót" tương tác của các lưỡng cực (các lưỡng cực cũng tham gia vào liên kết hydro như $H^+ - O^-$ và $H^+ - N^-$) và cũng như các tứ cực (các vòng thơm) bên trong các cấu trúc tế bào. Thêm vào đó, do các điện tích tự do có sẵn trong nước (nước muối), từ những điều kể trên chúng ta rút ra biểu thức điện thế gây ra bởi điện tích q tại vị trí \vec{r} rất xa so với chính nó (nhưng đủ lớn để không coi điện thế bằng 0) có dạng:

$$V(r) = \frac{kq}{\epsilon_{\text{eff}}} \frac{e^{-r/D}}{r}.$$

Thế năng này gọi là thế "chắn" hay thế Debye-Hückel hay thế Yukawa, xuất hiện rất nhiều trong các lĩnh vực khác nhau của vật lý. Ở đây D là bán kính "chắn" Debye-Hückel, tương ứng với kích thước điển hình của đám mây phản ion xung quanh điện tích. Giá trị của D không phụ thuộc vào điện tích q mà phụ thuộc hằng số điện môi hiệu dụng, nhiệt độ và cường độ ion (ionic strength) I mol/l của dung dịch:

$$I = \frac{1}{2} \sum_i c_i N_i^2.$$

Trong đó N_i là tỉ số giữa điện tích của ion loại i ($i = 1, 2, 3, \dots$) và điện tích nguyên tố. c_i là nồng độ của ion loại i , tính bằng mol/l. Cho biết mật độ điện tích ion trong môi trường tuân theo phân bố Maxwell- Boltzmann:

$$\rho(r) = \sum_i c_i (eN_i) e^{-E_i/(k_B T)}.$$

Giả thiết $E_i \ll k_B T$ (T là nhiệt độ, k_B là hằng số Boltzmann) và các ion coi như đúng yên. Hệ ion coi là trung hoà. Cho biết toàn bộ hệ ở nhiệt độ phòng $T = 20^\circ\text{C}$, hằng số điện môi hiệu dụng $\epsilon_{\text{eff}} = 40$, cường độ ion $I \approx 0.12 \text{ mol/l}$.

Hãy xác định bán kính chấn Debye-Hückel của hệ.

Có thể bạn cần dùng: $\nabla_r f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf(r))$.

(Biên soạn bởi Nhân viên phòng lab)

Bài giải

1. Axit amin trong protein.

Mật độ năng lượng điện trường trong môi trường ϵ bất kỳ:

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{kq^2}{8\pi \epsilon kr^4}. \quad (1)$$

Năng lượng tĩnh điện trong môi trường ϵ bất kỳ:

$$W = \int_R^\infty \omega 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{kq^2}{2\epsilon r^2} dr = \frac{kq^2}{2\epsilon R}. \quad (2)$$

Thay số:

$$W_p \approx 2.56 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 36.86 \text{ kcal/mol}, \quad (3)$$

$$W_w \approx 9.61 \times 10^{-21} \text{ J} \approx 1.38 \text{ kcal/mol}. \quad (4)$$

Độ chênh lệch năng lượng:

$$\Delta W = |W_w - W_p| = 35.48 \text{ kcal/mol}. \quad (5)$$

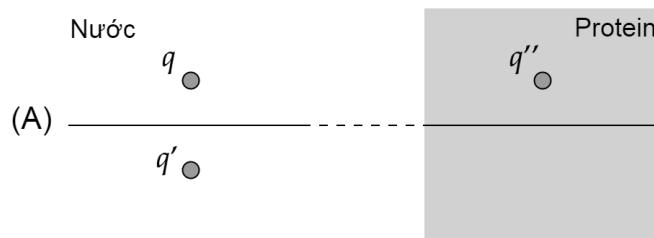
Như vậy độ chênh năng lượng tĩnh điện khi điện tích đi từ nước vào protein hay chính bằng năng lượng cung cấp cho cấu trúc protein sẽ rất lớn so với năng lượng cần để phá huỷ cấu trúc protein, vì vậy bên trong protein hầu như axit amin không tích điện để không phá huỷ cấu trúc protein.

Trên thực tế, vẫn có các cấu trúc phân tử tích điện xuất hiện bên trong protein nhưng các phân tử này đóng vai trò của các nhóm chức năng và tham gia các hoạt động sinh học của protein chứ không phải nhóm cấu tạo nên không làm phá huỷ cấu trúc protein.

2. Tương tác giữa điện tích và protein trong môi trường nước.

a, Ta sử dụng phương pháp ảnh điện. Giả sử ban đầu điện tích q có toạ độ \vec{r}_0 ($R \ll |\vec{r}_0| \ll |\vec{r}|$) với gốc là một điểm nằm trên mặt phân cách (A) (**Hình 3**). Để thoả mãn điều kiện biên của điện trường tại mọi điểm trên mặt phân cách (A), hệ tương đương như sau:

- Diện tích ảnh $q' = \frac{\epsilon_w - \epsilon_p}{\epsilon_w + \epsilon_p} q$ của điện tích q qua mặt (A), trong môi trường nước, đặt tại $\vec{r}_1 = -\vec{r}_0$.
- Diện tích ảnh $q'' = \frac{2\epsilon_p}{\epsilon_w + \epsilon_p} q$ của điện tích q' qua mặt (A), trong môi trường protein, đặt tại $\vec{r}_2 = \vec{r}_0$.



Hình 3: Điện tích q và các điện tích ảnh tương ứng.

Diện tích q và q' tham gia vào tương tác tĩnh điện trong vùng môi trường nước chứa điện tích, q'' tham gia vào vùng môi trường protein. Thế năng tĩnh điện trong từng vùng môi trường:

$$V_{\text{nước}\uparrow} = \frac{kq}{\epsilon_w |\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{kq'}{\epsilon_w |\vec{r} - \vec{r}_1|} \approx \frac{k(q + q')}{\epsilon_w r} = \frac{2kq}{(\epsilon_w + \epsilon_p)r}, \quad (6)$$

$$V_{\text{protein}} = \frac{kq''}{\epsilon_p |\vec{r} - \vec{r}_2|} \approx \frac{kq''}{\epsilon_p r} = \frac{2kq}{(\epsilon_w + \epsilon_p)r}. \quad (7)$$

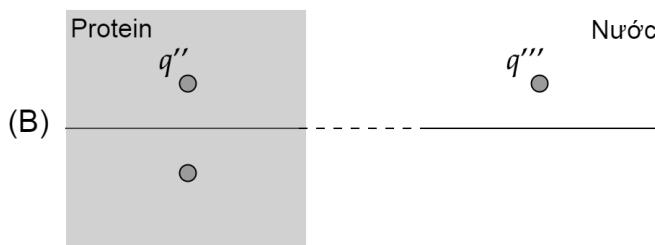
Từ phương trình (6) ta suy ra hằng số điện môi hiệu dụng tương ứng với vùng môi trường nước chứa điện tích:

$$\epsilon_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{\epsilon_w + \epsilon_p}{2} = 41.50. \quad (8)$$

b, Từ phương trình (7) ta suy ra hằng số điện môi hiệu dụng tương ứng với vùng môi trường bên trong protein:

$$\epsilon_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{\epsilon_w + \epsilon_p}{2} = 41.50. \quad (9)$$

c, Do khi khảo sát tĩnh điện ở vùng không gian môi trường nước không chứa điện tích, các lưỡng cực trong nước bị phân cực mạnh hơn trong protein nên ta chỉ xét ảnh hưởng của các điện tích liên kết trong môi trường nước ở mặt phân cách xa điện tích q nên điện tích tham gia vào tương tác chỉ có điện tích ảnh sinh ra do các điện tích liên kết trong môi trường nước hình thành ở mặt phân cách xa điện tích q . Điện tích này tương tự điện tích ảnh q'' đối với chính q'' , ta gọi là q''' (**Hình 4**). Điện tích ảnh $q''' = \frac{2\epsilon_w}{\epsilon_p + \epsilon_w} q'' = \frac{4\epsilon_w \epsilon_p}{(\epsilon_w + \epsilon_p)^2} q$ của điện tích q'' qua mặt (B), trong môi trường nước, đặt tại \vec{r}_3 .



Hình 4: Điện tích q'' và điện tích ảnh q''' .

Thế năng tĩnh điện trong vùng môi trường nước không chứa điện tích:

$$V_{\text{nước}\downarrow} = \frac{kq'''}{\epsilon_w |\vec{r} - \vec{r}_3|} \approx \frac{kq'''}{\epsilon_w r} = \frac{4\epsilon_p kq}{(\epsilon_w + \epsilon_p)^2 r}. \quad (10)$$

Từ phương trình (10) ta suy ra hằng số điện môi hiệu dụng tương ứng với vùng môi trường nước không chứa điện tích:

$$\epsilon_{\text{eff}}^{(3)} = \frac{(\epsilon_w + \epsilon_p)^2}{4\epsilon_p} \approx 574.08. \quad (11)$$

Kết quả thực nghiệm cho kết quả (11) chỉ cỡ 200, giải thích cho điều này là do kích thước của protein hữu hạn nên gần đúng chúng ta sử dụng trong bài tương đối cực đoan, nhưng dù sao 200 vẫn là con số khá lớn so với 41,5. Các thí nghiệm bởi nhóm nghiên cứu của Alan Fersht cho thấy những ước tính trên cũng phù hợp với protein. Trong các thí nghiệm của Fersht, các đột biến được thực hiện trên bề mặt của protein để không làm hỏng cấu trúc của nó. Kết quả thực nghiệm cho thấy: hằng số điện môi hiệu dụng năm trong khoảng từ 40 đến 200. Thực tế là ϵ_{eff} có thể đạt đến giá trị 200 không có gì ngạc nhiên sau các xem xét chúng ta đã thực hiện ở trên. Phương pháp ảnh điện phổ thông đã mô tả và giải thích khá thành công cho một số hiện tượng vật lý trong sinh học (Bạn có thể tham khảo một số công trình khoa học của GS. TS Nguyễn Thế Toàn về vật lý sinh).

3. Tương tác giữa điện tích và protein trong môi trường có ion tự do.

Phương trình Poisson:

$$\nabla_r^2 V(r) = -\frac{4\pi k\rho}{\epsilon_{\text{eff}}} = -\frac{4\pi k e}{\epsilon_{\text{eff}}} \sum_i c_i N_i e^{-E_i/k_B T} \approx -\frac{4\pi k e}{\epsilon_{\text{eff}}} \sum_i c_i N_i \left(1 - \frac{E_i}{k_B T}\right). \quad (12)$$

Năng lượng của ion loại i :

$$E_i = e N_i V(r). \quad (13)$$

Thay phương trình (13) vào phương trình (12):

$$\nabla_r^2 V(r) = \frac{4\pi k e}{\epsilon_{\text{eff}}} \sum_i c_i N_i \left(\frac{e N_i V(r)}{k_B T} - 1 \right) = \frac{8\pi k e^2 V(r)}{\epsilon_{\text{eff}} k_B T} \sum_i \frac{1}{2} c_i N_i^2 - \frac{4\pi k e}{\epsilon_{\text{eff}}} \sum_i c_i N_i. \quad (14)$$

Do hệ ion trung hoà nên $\sum_i c_i e N_i = 0$, phương trình (14) trở thành:

$$\nabla_r^2 V(r) = \frac{8\pi k e^2 V(r)}{\epsilon_{\text{eff}} k_B T} I. \quad (15)$$

Mặt khác, theo đề bài, $V(r) = \frac{kq}{\epsilon_{\text{eff}}} \frac{e^{-r/D}}{r}$, thay vào về trái phương trình (15) ta được:

$$\nabla_r^2 V(r) = \frac{1}{D^2} V(r). \quad (16)$$

Từ phương trình (15) và phương trình (16) ta suy ra:

$$\frac{1}{D^2} = \frac{8\pi k e^2 I}{\epsilon_{\text{eff}} k_B T} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{eff}} k_B T}{8\pi k e^2 I}}. \quad (17)$$

Thay số: $D \approx 6.21 \times 10^{-10} \text{ m} = 6.21 \text{ \AA}$.

Qua bài tập này, ta thấy được một tính chất rất quan trọng trong nghiên cứu về tế bào, đó là tương tác tĩnh điện không chỉ phụ thuộc vào khoảng cách và điện tích, mà còn phụ thuộc cả đặc tính của môi trường như nhiệt độ, nồng độ ion, thậm chí còn phụ thuộc cả vào hình dạng của vật thể tương tác do hằng số điện môi hiệu dụng phụ thuộc vào hình dạng của vật.

Phần	Nội dung	Điểm
1	Viết biểu thức năng lượng tĩnh điện trong môi trường ϵ (2)	0.50
	Tính được độ chênh lệch năng lượng giữa môi trường nước và môi trường protein (5)	0.50
	Lập luận và kết luận	0.50
2a	Chỉ ra điện tích ảnh q'	0.50
	Chỉ ra điện tích ảnh q''	0.50
	Viết biểu thức năng lượng tĩnh điện trong vùng môi trường nước chứa điện tích q (6)	0.50
	Viết biểu thức năng lượng tĩnh điện trong vùng môi trường protein q (7)	0.50
	Tính được hằng số điện môi $\epsilon_{\text{eff}}^{(1)}$ (8)	0.50
2b	Tính được hằng số điện môi $\epsilon_{\text{eff}}^{(2)}$ (9)	0.50
2c	Chỉ ra điện tích ảnh q'''	0.50
	Viết biểu thức năng lượng tĩnh điện trong vùng môi trường nước chứa điện tích q (10)	0.50
	Tính được hằng số điện môi $\epsilon_{\text{eff}}^{(3)}$ (11)	0.50
3	Dẫn ra phương trình Poisson (12)	0.50
	Gần đúng phương trình Poisson và thu được phương trình (15)	0.50
	Dẫn ra phương trình (16)	0.50
	Viết biểu thức cho bán kính chắn Debye-Hückel và thay số (17)	0.50

Tài liệu

- [1] T. T. Nguyen, A. Yu. Grosberg, B. I. Shklovskii (2000), *Macroions in Salty Water with Multivalent Ions: Giant Inversion of Charge*, Physical Review Letters, Volume 85, Issue 7, Pages 1568-1571.
- [2] Alan R. Fersht, Michael J. E. Sternberg (1989), *Can a simple function for the dielectric response model electrostatic effects in globular proteins?*, Protein Engineering, vol.2 no.15 pp.527-530.
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz (1980), *Statistical Physics*.
- [4] Alexi V. Finkelstein, Oleg Ptitsyn (1964), *Protein Physics: A course of lectures*.
- [5] Nguyễn Thé Toàn, Nguyễn Hoạ Mi (2021), *Giáo trình Vật lý Sinh học của Protein*, NXB DHQGHN.
- [6] Charles L. Brooks III, Martin Karplus, B. Montgomery Pettitt (1987), *Proteins: A Theoretical Perspective of Dynamics, Structure, and Thermodynamics*.

CÂU 14+15 (16 điểm)

Rối lượng tử

Trong Vật Lý lượng tử, phép đo có thể làm thay đổi trạng thái của hệ cần quan sát, dẫn tới sự xuất hiện của tính xác suất trong kết quả thu được. Một hệ quả vô cùng thú vị đến từ tính chất này là khi chúng ta thực hiện đo đạc trên những hạt ở rất xa nhau thì kết quả thu được vẫn có thể liên hệ thống kê với nhau như những sự kiện xảy ra không độc lập, nếu chúng đã *rối lượng tử* với nhau. Theo lý thuyết, điều này khả dĩ ngay cả khi vận tốc ánh sáng là không đủ nhanh để truyền tín hiệu giữa chúng.

Hiện tượng *rối lượng tử* không tồn tại trong Vật Lý cổ điển, rất kỳ lạ và trái ngược trực giác, nên đã tạo ra những bất đồng về diễn giải thế giới lượng tử. Nổi tiếng nhất là cuộc tranh luận giữa những nhà Vật Lý được dẫn dắt bởi Niels Bohr và Albert Einstein, về vấn đề tồn tại hay không một *biến số ẩn định* xứng cho các sự kiện lượng tử xảy ra độc lập vẫn có thể biểu hiện liên hệ thống kê với nhau.

Trong bài tập này, chúng ta sẽ đi tìm hiểu cội nguồn của lĩnh vực thông tin lượng tử và cách giải Nobel Vật lý 2022 của 3 nhà vật lý John Clauser, Alain Aspect và Anton Zeilinger chấm dứt cuộc tranh cãi dài một thế kỷ giữa Albert Einstein và Niels Bohr.

Bài tập này được chia làm hai phần độc lập với nhau và mỗi phần có tổng điểm như một bài.

1. Bất đẳng thức Bell.

Rối lượng tử (*quantum entanglement*) là một hiện tượng vô cùng "ma quái" của tự nhiên. (Ví dụ trong một số các thí nghiệm lượng tử, hiện tượng rối có thể được tạo ra trong thực tế khi có sự tương tác không tuyến tính giữa các hạt, như quang học phi tuyến, tương tác giữ những nguyên tử Rydberg, ...) Chúng ta hiểu đơn giản rằng sự "ma quái" của rối lượng tử là việc khi ta thực hiện phép đo và biết spin của một trong hai hạt của cặp hạt bị rối lượng tử thì ta *ngay lập tức* biết spin của hạt còn lại bất kể khoảng cách. Như thế hai hạt bị rối đã "nói chuyện" với nhau để tiết lộ thông tin về trạng thái của nhau, điều này ban đầu khiến các nhà vật lý đau đầu vì tưởng rằng rối lượng tử vi phạm thuyết tương đối - không có gì có thể di chuyển nhanh hơn tốc độ truyền thông tin trong chân không - đây chính là *tác dụng ma quái theo khoảng cách* (*spooky action at a distance*) của cơ học lượng tử. Với hi vọng giải thích cho hiện tượng rối lượng tử mà điều kiện là không vi phạm thuyết tương đối và khớp với quan sát thực nghiệm, Einstein đã đưa ra lý thuyết về việc tồn tại các biến số ẩn chưa biết (tính xác suất của cơ học lượng tử là do chưa biết hết các biến số ẩn này). Lý thuyết biến số ẩn của Einstein đã trở thành cách diễn giải đối lập với quan điểm của Bohr về suy sắp hàm sóng do thực hiện phép đo.

Năm 1964, John Bell đã đề xuất một phương pháp kiểm chứng cơ học lượng tử và lý thuyết biến ẩn thông qua thí nghiệm giả tưởng về rối lượng tử dựa trên kết quả thực nghiệm đo spin của hai hạt bị rối với nhau luôn luôn cho ra kết quả spin của chúng song song và ngược chiều nhau. Ông giả thuyết tồn tại một biến số ẩn λ là thông số liên tục và đơn nhất vào trong hàm sóng. Ông tổng quát phép đo spin của hai hạt bị rối với nhau như sau:

"Do spin $\vec{\sigma}_1$ của hạt 1 trên phương \vec{a} và đo spin $\vec{\sigma}_2$ của hạt 2 trên phương \vec{b} với \vec{a} và \vec{b} là hai vector đơn vị bất kỳ. Spin của hạt 1 "hướng lên" khi song song và cùng chiều với \vec{a} , tức là $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} = +1$ và "hướng xuống" khi song song và ngược chiều với \vec{a} , tức là $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} = -1$. Kết quả phép đo $A(\vec{a}, \lambda)$ của phép đo spin hạt 1 trên \vec{a} được xác định bởi \vec{a} và λ . Tương

tự với hạt 2 và kết quả phép đo $B(\vec{b}, \lambda)$. Giả thiết **kết quả phép đo A hoàn toàn không ảnh hưởng đến kết quả phép đo B và ngược lại**"

- a,** Kết quả phép đo $A(\vec{a}, \lambda)$ và phép đo $B(\vec{b}, \lambda)$ có thể nhận những giá trị nào tương ứng với trường hợp nào ?
- b,** Cách tính giá trị trung bình của kết quả phép đo $\vec{\sigma}_1$ đo trên \vec{a} và $\vec{\sigma}_2$ đo trên \vec{b} xảy ra đồng thời được định nghĩa như sau:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda)B(\vec{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda = -\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

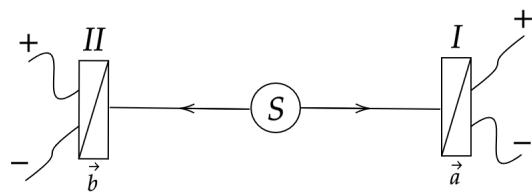
Trong đó $\rho(\lambda)$ là phân bố xác suất của λ trong toàn không gian với điều kiện $\rho(\lambda) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)d\lambda = 1$.

Ta giả thiết tồn tại lý thuyết biến ẩn, xét trường hợp đặc biệt khi $\vec{a} = \vec{b}$, hai hạt rỗi lượng tử với nhau luôn đo ra spin song song nhưng ngược chiều với nhau theo thực nghiệm. Với trường hợp đặc biệt này, hãy:

- Biểu diễn kết quả phép đo B theo A .
 - Tính giá trị trung bình của kết quả phép đo $\vec{\sigma}_1$ đo trên \vec{a} và $\vec{\sigma}_2$ đo trên \vec{b} khi hai phép đo này xảy ra đồng thời.
 - Biểu diễn lại giá trị trung bình $P(\vec{a}, \vec{b})$ chỉ theo A và $\rho(\lambda)$.
- c,** Do ta chọn \vec{a} và \vec{b} là hai vector đơn vị bất kỳ nên ta có thể chọn một vector đơn vị \vec{c} và tính toán phép đo trên \vec{a} và \vec{c} . Hãy biểu diễn giá trị trung bình $P(\vec{a}, \vec{c})$ chỉ theo A và $\rho(\lambda)$.
- d,** Vì ta đã xây dựng lý thuyết này dựa trên lý thuyết biến ẩn nên ta không chỉ có thể kết luận lý thuyết biến ẩn là đúng mà còn kết luận cơ học lượng tử theo quan điểm của Bohr sai nếu bất kỳ trường hợp nào của \vec{a} , \vec{b} và \vec{c} đều thoả mãn điều kiện nào đó giữa $P(\vec{a}, \vec{b})$, $P(\vec{a}, \vec{c})$ và $P(\vec{b}, \vec{c})$. Ngược lại nếu không thì ta có thể kết luận lý thuyết biến ẩn là không tồn tại và cơ học lượng tử theo quan điểm của Bohr là đầy đủ.
- Tìm điều kiện của hiệu $P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})$ theo $P(\vec{b}, \vec{c})$.
 - Thay thử trường hợp \vec{a} và \vec{b} tạo với nhau một góc 90° còn \vec{c} tạo với \vec{a} và \vec{b} một góc 45° , từ kết quả thu được, theo bạn lý thuyết biến ẩn là đúng hay sai ?
- 2. Kiểm chứng bất đẳng thức Bell bằng thực nghiệm và giải Nobel 2022.**
Sau khi bất đẳng thức Bell ra đời, rất nhiều nhà vật lý cố gắng kiểm chứng tính đúng đắn của bất đẳng thức này bằng thực nghiệm, một trong những thí nghiệm đầu tiên là của John Clauser đề xuất năm 1972, bằng việc đo độ phân cực của cặp photon bị rọi lượng tử với nhau. Thí nghiệm của Clauser còn nhiều lỗ hổng nên chưa được chấp nhận rộng rãi mà đến mãi năm 2005, các lỗ hổng mới được lấp hết bởi thí nghiệm của Alain Aspect năm 1982 và của Anton Zeilinger năm 2005. Cả ba thí nghiệm chỉ ra cơ học lượng tử theo quan điểm của Bohr đúng, rọi lượng tử không vi phạm thuyết tương đối và buộc tất cả các nhà vật lý phải

thừa nhận sự tồn tại của "tác dụng ma quái theo khoảng cách", chấm dứt cuộc tranh cãi một thế kỉ giữa Albert Einstein và Niels Bohr!

Trong bài toán này ta sẽ tìm hiểu thí nghiệm của Alain Aspect. Giả sử ta có nguồn sáng S phát ra một cặp photon có tần số khác nhau, di chuyển ngược chiều nhau dọc theo trục z . Chúng ta không thể gán cho từng photon một trạng thái xác định, cũng như sự phân cực của từng photon. Photon 1 bay đến đầu đo I, phân cực theo phương \vec{a} cùng lúc photon 2 bay đến đầu đo II, phân cực theo phương \vec{b} . Khi đến kính phân cực, photon có thể đi qua hoặc không đi qua, được thu bằng kênh (+) và (-) tương ứng (Hình 1).



Hình 1: Thí nghiệm đo phân cực của một cặp photon bị rối

Theo diễn giải cơ học lượng tử của Bohr, xác suất để ngẫu nhiên một photon đi qua (+) một kính phân cực bằng xác suất để nó không đi qua (-):

$$P_+(\vec{a}) = P_-(\vec{a}) = \frac{1}{2},$$

$$P_+(\vec{b}) = P_-(\vec{b}) = \frac{1}{2}.$$

Cũng theo quan điểm này của Bohr, với hệ photon như thí nghiệm của Aspect có xác suất để cả hai photon cùng đi qua (++) hai kính phân cực hoặc cùng không đi qua (--) là bằng nhau và xác suất để một trong hai đi qua kính phân cực I (+-) hoặc II (-+) là bằng nhau:

$$P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) = P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta,$$

$$P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) = P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta.$$

Trong đó θ là góc tạo bởi \vec{a} và \vec{b} .

- a,** Xét trường hợp đặc biệt khi cả hai kính phân cực có cùng phương phân cực, Xác suất để cả hai photon cùng đi, cùng không đi qua và chỉ một trong hai photon đi qua kính phân cực là bao nhiêu ?
- b,** Xét đại lượng $E(\vec{a}, \vec{b})$ được gọi là "*tương quan giữa hai photon*". Nếu lý thuyết biến ẩn không tồn tại và diễn giải của Bohr đúng, "*tương quan*" giữa hai photon được xác định là:

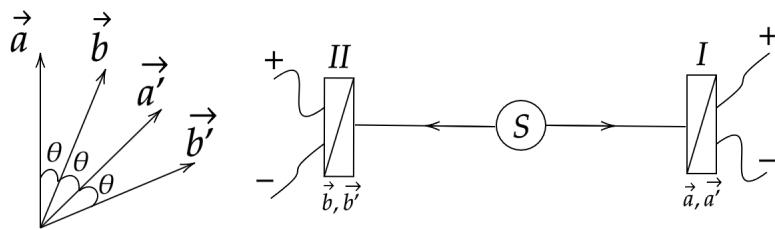
$$E(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}).$$

Nếu lý thuyết biến ẩn tồn tại và diễn giải của Bohr sai, "tương quan" giữa hai photon được xác định là:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda.$$

Tính biểu thức "tương quan" giữa hai photon chỉ phụ thuộc vào θ nếu không tồn tại biến số ẩn.

- c, Bây giờ ta xây dựng tiếp thí nghiệm của Aspect, đó là thêm ở đầu đo I kính phân cực có phương \vec{a}' và thêm ở đầu đo II kính phân cực có phương \vec{b}' sao cho phương phân cực của các kính tạo thành các góc như (**Hình 2**), lúc này photon đi đến đầu đo I phân cực trên phương \vec{a} và \vec{a}' , tương tự với đầu đo II là \vec{b} và \vec{b}' (**Hình 2**).



Hình 2: Thí nghiệm của Alain Aspect

Ta xây dựng biểu thức "tương quan" giữa hai photon dựa trên lý thuyết biến ẩn. Khi tiến hành phép đo hai photon đồng thời với nhau, kết quả phép đo thu được là tổ hợp các trường hợp phân cực có thể xảy ra trên hai đầu đo và bằng tích AB . Ta xét đại lượng sau:

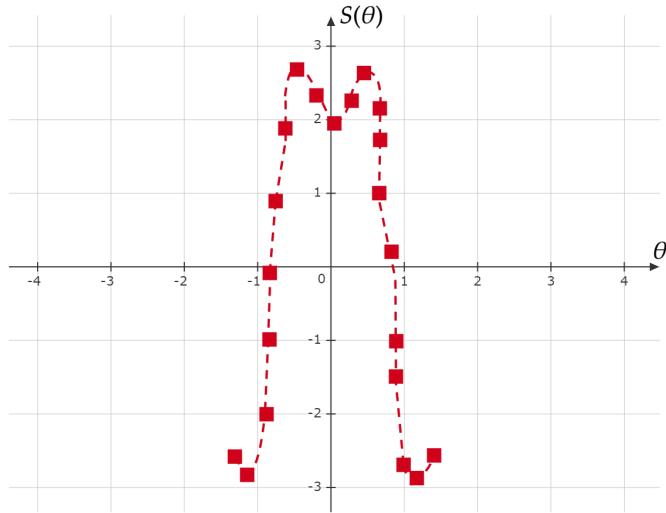
$$s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda) = A(\vec{a}, \lambda)B(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda)B(\vec{b}', \lambda) + A(\vec{a}', \lambda)B(\vec{b}, \lambda) + A(\vec{a}', \lambda)B(\vec{b}', \lambda).$$

Trong đó A và B chỉ có thể nhận các giá trị -1 hoặc $+1$.

Và giá trị trung bình của đại lượng $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$ được định nghĩa là:

$$S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda) \rho(\lambda) d\lambda.$$

- Đại lượng $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$ chỉ có thể nhận những giá trị nào ?
- Giả sử lý thuyết biến ẩn tồn tại và diễn giải cơ học lượng tử của Bohr sai, xác định điều kiện biến của $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$.
- Giả sử lý thuyết biến ẩn không tồn tại và diễn giải cơ học lượng tử của Bohr đúng, xác định điều kiện biến của $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$.
- Đồ thị bên dưới (**Hình 3**) là kết quả thực nghiệm của Aspect đo đại lượng $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$ khi thay đổi góc θ . Dựa vào kết quả bạn tìm được ở trên, theo bạn từ kết quả thực nghiệm, lý thuyết biến ẩn đúng hay diễn giải cơ học lượng tử của Bohr đúng? Vậy Einstein hay Bohr đã sai về sự tồn tại của biến số ẩn?



Hình 3: Kết quả thực nghiệm

(Biên soạn bởi Nhân viên phòng lab)

Bài giải

1. Bất đẳng thức Bell.

a, Do $A(\vec{a}, \lambda)$ và $B(\vec{b}, \lambda)$ là kết quả đo spin của hạt 1 và hạt 2 lần lượt trên vector đơn vị \vec{a} và \vec{b} mà A không ảnh hưởng đến B nên $A(\vec{a}, \lambda)$ và $B(\vec{b}, \lambda)$ chỉ nhận giá trị sau:

$$A(\vec{a}, \lambda) = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} = \pm 1, \quad (1)$$

$$B(\vec{b}, \lambda) = \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} = \pm 1. \quad (2)$$

b, i. Trong trường hợp $\vec{a} = \vec{b}$, hai hạt chắc chắn có spin phản song song nhau, khi đó:

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda), \quad (3)$$

$$A(\vec{b}, \lambda) = -B(\vec{b}, \lambda). \quad (4)$$

ii. Thay phương trình (1) và phương trình (3) vào công thức tính giá trị trung bình trong đề bài, ta được giá trị trung bình của kết quả phép đo $\vec{\sigma}_1$ đo trên \vec{a} và $\vec{\sigma}_2$ đo trên \vec{b} xảy ra đồng thời:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{a}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{a}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda = - \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\vec{a}, \lambda)]^2 \rho(\lambda) d\lambda \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) d\lambda = -1. \end{aligned} \quad (5)$$

iii. Từ kết quả (4), thay vào công thức tính giá trị trung bình $P(\vec{a}, \vec{b})$, ta được:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (6)$$

c, Tương tự kết quả (6), ta tổng quát hoá với trường hợp \vec{a} và \vec{c} , \vec{c} có vai trò như \vec{b} nên ta chỉ cần thay \vec{b} thành \vec{c} :

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (7)$$

d, i. Ta tính hiệu $P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})$ từ phương trình (6) và phương trình (7):

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{A(\vec{c}, \lambda)}{A(\vec{b}, \lambda)} \right] A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Vì ta đang cần xuất hiện thành phần $A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)$ để tạo ra thành phần $P(\vec{b}, \vec{c})$ nên ta nhân vào trước $A(\vec{c}, \lambda)$ số hạng $\left[A(\vec{b}, \lambda) \right]^2$. Theo kết quả (2): $\left[A(\vec{b}, \lambda) \right]^2 = 1$.

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \left[A(\vec{b}, \lambda) \right]^2 \frac{A(\vec{c}, \lambda)}{A(\vec{b}, \lambda)} \right] A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Ta nhận xét từ phương trình (9): Do các giá trị A chỉ có thể nhận các giá trị $+1$ và -1 nên ta có:

$$-1 \leq A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \leq +1, \quad (10)$$

$$-1 \leq A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \leq +1. \quad (11)$$

Từ kết quả (11), ta nhận thấy: $\left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) \geq 0$.

A. Xét trường hợp 1: $0 \leq A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \leq +1$. Rõ ràng ta thấy được:

$$0 \geq - \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \geq - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda, \quad (12)$$

$$0 \geq P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \geq -1 - P(\vec{b}, \vec{c}). \quad (13)$$

B. Xét trường hợp 2: $-1 \leq A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda) \leq 0$. Rõ ràng ta thấy được:

$$0 \leq - \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda) \left[1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \leq - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

$$0 \leq P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}). \quad (15)$$

Như vậy điều kiện liên hệ giữa $P(\vec{a}, \vec{b})$, $P(\vec{a}, \vec{c})$ và $P(\vec{b}, \vec{c})$ từ bất đẳng thức (13) và (15) là:

$$\begin{cases} 0 \leq P(\vec{a}, \vec{c}) - P(\vec{a}, \vec{b}) \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}), \\ 0 \leq P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}). \end{cases} \quad (16)$$

Bất đẳng thức (16) có thể viết lại thành:

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}). \quad (17)$$

ii. Thay số theo đề bài:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad (18)$$

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = -\vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (19)$$

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = -\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Như vậy, từ (17), (18), (19) và (20), rõ ràng điều kiện (17) bị vi phạm vì:

$$\left| 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kết quả này là vô lý và trường hợp cụ thể này không tồn tại. Vì ta đã xây dựng bài toán và điều kiện (17) theo lý thuyết biến ẩn nên trường hợp bị vi phạm đã chỉ ra không tồn tại lý thuyết biến ẩn và cơ học lượng tử theo quan điểm của Bohr đúng.

Bất đẳng thức (17) chính xác là bất đẳng thức Bell nổi tiếng, công trình này khi ra đời đã giúp loại bỏ lý thuyết biến số ẩn khỏi cơ học lượng tử và kết luận rằng việc thực hiện phép đo ở một vị trí trong không gian này có thể ảnh hưởng tức thì đến phép đo ở vị trí khác trong không gian kia. Sự ảnh hưởng này là tức thời bất kể khoảng cách, Bell đã thừa nhận sự tồn tại của "tác dụng ma quái theo khoảng cách". Tuy nhiên, các nhà khoa học dù phần lớn tin vào trường phái Copenhagen của Bohr nhưng vẫn có những người vẫn chọn tin vào Einstein, điều đó mới dẫn đến các thí nghiệm kiểm chứng bất đẳng thức Bell sau này của Clauser, Aspect và Zeilinger.

2. Kiểm chứng bất đẳng thức Bell bằng thực nghiệm và giải Nobel 2022.

a, Khi phương phân cực của hai kính giống nhau $\vec{a} = \vec{b}$, xác suất để hai photon cùng đi qua bằng xác suất để cùng không đi qua và không tồn tại trường hợp chỉ một trong hai đi qua, do:

$$P_{++}(\vec{a}, \vec{a}) = P_{--}(\vec{a}, \vec{a}) = \frac{1}{2}, \quad (21)$$

$$P_{+-}(\vec{a}, \vec{a}) = P_{-+}(\vec{a}, \vec{a}) = 0. \quad (22)$$

b, "Tương quan" giữa hai photon theo diễn giải của Bohr:

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) &= P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

c, i. Ta biến đổi đại lượng $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$:

$$\begin{aligned} s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda) &= A(\vec{a}, \lambda)B(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda)B(\vec{b}', \lambda) + A(\vec{a}', \lambda)B(\vec{b}, \lambda) + A(\vec{a}', \lambda)B(\vec{b}', \lambda) \\ &= A(\vec{a}, \lambda) [B(\vec{b}, \lambda) - B(\vec{b}', \lambda)] + A(\vec{a}', \lambda) [B(\vec{b}, \lambda) + B(\vec{b}', \lambda)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Từ đề bài, do A và B chỉ có thể nhận giá trị -1 hoặc $+1$ nên $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$ chỉ có thể nhận giá trị $+2$ hoặc -2 .

ii. Giả sử lý thuyết biến ẩn tồn tại và diễn giải của Bohr sai. Giá trị trung bình $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$ của $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$ là phải nằm trong khoảng -2 đến $+2$ do $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$ chỉ có thể nhận giá trị $+2$ hoặc -2 (giả sử ta đo ra m giá trị $+2$, n giá trị -2 , trung bình sẽ là $\frac{2(m-n)}{m+n}$ và nằm trong khoảng -2 đến $+2$)

$$-2 \leq S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq 2. \quad (25)$$

Ngoài ra, khi ta sử dụng định nghĩa giá trị trung bình trong đề bài, ta thu được như sau:

$$\begin{aligned} S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}'). \end{aligned} \quad (26)$$

Đây chính là biểu diễn của đại lượng $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$.

iii. Giả sử lý thuyết biến ẩn không tồn tại và diễn giải của Bohr đúng. Giá trị trung bình $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$ so với xây dựng từ lý thuyết biến ẩn đều phải mô tả cùng một đại lượng vật lý nào đó. Từ phương trình (23) và phương trình (26):

$$\begin{aligned} S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') &= E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') \\ &= \cos 2\theta - \cos 6\theta + \cos 2\theta + \cos 2\theta \\ &= 3 \cos 2\theta - \cos 6\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Đại lượng $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$ đạt cực trị khi $\frac{dS}{d\theta} = 0$:

$$\frac{dS}{d\theta} = 0$$

$$\sin 6\theta - \sin 2\theta = 0$$

$$2 \sin 2\theta \cos^2 2\theta + \sin 2\theta (\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) - \sin 2\theta = 0$$

$$\sin 2\theta (2 \cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) = 0$$

$$\sin 2\theta \cos 4\theta = 0. \quad (28)$$

Từ phương trình (28), suy ra cực trị của $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$ (do $S(\theta)$ là hàm lượng giác có công thức như (27) nên để tìm cực trị của S ta chỉ cần xét $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$):

$$\begin{cases} \theta_{\text{extr}} = 0, \pm \frac{\pi}{2} & S_{\text{extr}} = \pm 2, \\ \theta_{\text{extr}} = \pm \frac{3\pi}{8} & S_{\text{extr}} = -2\sqrt{2}, \\ \theta_{\text{extr}} = \pm \frac{\pi}{8} & S_{\text{extr}} = +2\sqrt{2}. \end{cases} \quad (29)$$

Như vậy, theo quan điểm cơ học lượng tử của Bohr, điều kiện biên của $S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')$:

$$-2\sqrt{2} \leq S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq +2\sqrt{2}. \quad (30)$$

- iv. Từ bất đẳng thức (25) và bất đẳng thức (30), nếu tồn tại kết quả thực nghiệm nằm trong khoảng $[-2\sqrt{2}, -2]$ và $[2, 2\sqrt{2}]$ thì có thể kết luận quan điểm cơ học lượng tử của Bohr đúng.

- Diễn giải suy sáp hàm sóng do phép đo của Bohr:

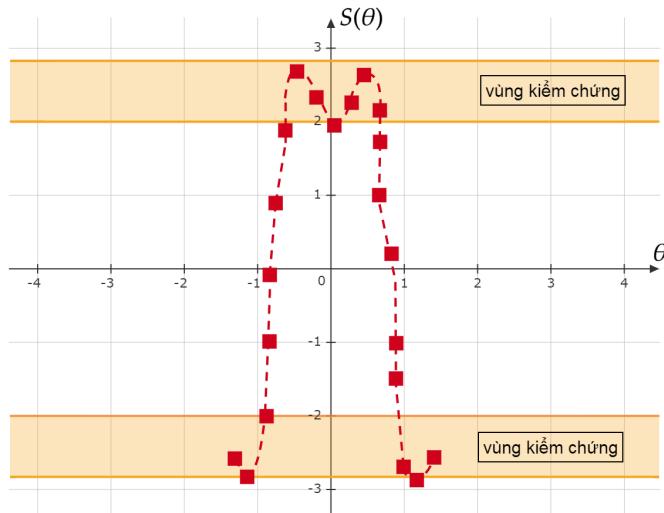
$$-2\sqrt{2} \leq S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq +2\sqrt{2}.$$

- Lý thuyết biến số ẩn của Einstein:

$$-2 \leq S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq +2.$$

Từ đồ thị (Hình 4) ta thấy kết quả thực nghiệm đã chỉ ra diễn giải của Bohr đúng và lý thuyết biến ẩn không tồn tại. Vậy Einstein đã sai và Bohr đã đúng về sự tồn tại của biến số ẩn!

Bất đẳng thức (25) là bất đẳng thức CHSH mang chữ cái đầu của 4 tác giả Clauser, Horne, Shimony và Holt. Đây là cách thể hiện khác của bất đẳng thức Bell, được đề xuất bằng cách thay việc đo spin của các hạt thực bằng việc đo hướng phân cực của photon. Kết quả thực nghiệm của các nhà vật lý đã chỉ ra không có biến số ẩn, các hạt vi mô không có định xứ, sự rối loạn tử giữa các hạt là tức thời bất kể khoảng cách bao xa, "tác dụng ma quái theo khoảng cách" không chỉ có thật mà còn là bản chất của các hạt vi mô. Ngoài ra "tác dụng ma quái theo khoảng cách" cũng không còn ma quái khi các nhà khoa học đã chứng minh nó không vi phạm thuyết tương đối vì không có thông tin nào được truyền đi giữa các hạt.



Hình 4: Tồn tại các kết quả thực nghiệm nằm trong khoảng $[-2\sqrt{2}, -2]$ và $[2, 2\sqrt{2}]$.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1a	Viết được kết quả (1) và (2)	0.50
1b.i	Viết được kết quả (3) và (4)	0.50
1b.ii	Viết được kết quả (5)	0.50
1b.iii	Viết được kết quả (6)	0.50
1c	Viết được kết quả (7)	0.50
1d.i	Viết biểu thức hiệu $P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})$ (9)	2.00
	Viết được bất đẳng thức (10) và (11)	0.50
	Viết được bất đẳng thức (16) hoặc (17)	2.00
1d.ii	Chỉ ra bất đẳng thức (17) bị vi phạm	0.50
	Kết luận về sự tồn tại của biến số ẩn	0.50
2a	Viết được kết quả (21) và (22)	0.50
2b	Viết biểu thức "tương quan" giữa hai photon theo diễn giải của Bohr (23)	0.50
2c.i	Viết được biểu thức (24)	0.50
2c.ii	Chỉ ra đại lượng $s(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}', \lambda)$ chỉ có thể nhận các giá trị ± 2	0.50
	Viết được bất đẳng thức (25)	1.50
	Viết được biểu thức (26)	0.50
2c.iii	Viết được biểu thức (27)	0.50
	Tìm được các cực trị của đại lượng S (29)	1.50
	Viết được bất đẳng thức (30)	1.50
2c.iv	Lập luận và so sánh với kết quả trong đồ thị. Kết luận.	0.50

Tài liệu

- [1] John S. Bell (1964), *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics Physique Fizika 1, 195 – Published 1 November 1964.

- [2] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt (1970), *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Physical Review Letters, Volume 23, Issue 15, Pages 880-884.
- [3] Alain Aspect (1976), *Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics*, Physical Review D, Volume 14, Issue 8, Pages 1944-1951.

CÂU 16 (8 điểm)

Pha trộn và dao động neutrino

Neutrino là một trong các hạt cơ bản của vũ trụ mà đã được con người phát hiện ra. Các nghiên cứu về neutrino là một trong những nghiên cứu tiền tuyến của vật lý hạt cơ bản do các hạt neutrino chuyển động rất nhanh (tiệm cận vận tốc ánh sáng) và chỉ tham gia vào tương tác yếu và tương tác hấp dẫn nên rất khó để "bắt" được dấu vết của các hạt neutrino. Theo *Mô hình Chuẩn (Standard Model)*, các hạt neutrino được giả định là không có khối lượng; tuy nhiên số liệu từ thí nghiệm phân rã hạt β của tritium ${}^3\text{H}$ tương thích với khả năng các hạt neutrino có khối lượng khác không. Trong bài tập này ta sẽ tìm hiểu về hiện tượng dao động neutrino dựa trên các cách tiếp cận phổ thông và trực quan hơn bên cạnh cách tiếp cận chính thống là lý thuyết trường lượng tử để đánh giá và tìm hiểu cách mà các nhà vật lý đã kiểm chứng được các hạt neutrino có khối lượng.

1. Hiện tượng phách

Theo cơ học lượng tử, hàm sóng liên kết của hai trạng thái có tần số gần giống nhau sẽ xảy ra hiện tượng phách, tương tự như khi chồng chập hai sóng âm có tần số gần giống nhau trong vật lý cổ điển. Giả sử ta có hai hàm sóng A_1 và A_2 có tần số góc khác nhau lần lượt là ω_1 và ω_2 :

$$A_1(t) = Ae^{-i\omega_1 t},$$
$$A_2(t) = -Ae^{-i\omega_2 t}.$$

- Xác định biểu thức môđun phức bình phương của hàm sóng liên kết hai trạng thái tại thời điểm t bất kỳ.
- Giả sử ω_1 và ω_2 là tần số góc ứng với hai trạng thái của hạt nào đó chuyển động với vận tốc tiệm cận vận tốc ánh sáng có năng lượng lần lượt là E_1 và E_2 . Dựa trên quan điểm của de Broglie về lưỡng tính sóng-hạt của vật chất. Biểu diễn biểu thức môđun phức bình phương của hàm sóng liên kết hai trạng thái tại thời điểm t bất kỳ theo năng lượng E_1 , E_2 và các hằng số liên quan.

2. Độ dài dao động của neutrino

Các nhà vật lý đã giả thiết rằng, nếu hạt neutrino a nào đó thực sự có khối lượng, ứng với mỗi trạng thái năng lượng E_n của nó thì hạt sẽ có khối lượng m_n tương ứng. Nếu xảy ra sự liên kết giữa hai hàm sóng mô tả hai trạng thái có khối lượng khác nhau của hạt neutrino thì sẽ xảy ra hiện tượng phách, sự liên kết này được gọi là *pha trộn neutrino (neutrino mixing)*. Trong quá trình pha trộn neutrino, qua thời gian, hạt neutrino a liên tục biến thành hạt neutrino b và ngược lại, ứng với pha của hàm sóng liên kết, quá trình này được gọi là *dao động neutrino (neutrino oscillations)*. Giả sử ban đầu ở lò phản ứng hạt nhân chỉ phát ra chùm hạt neutrino a theo phương x , tỉ lệ giữa số hạt neutrino b biến đổi từ neutrino a ở thời điểm t so với số hạt neutrino a ở thời điểm ban đầu được tính theo biểu thức:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{E_m - E_n}{2\hbar} t \right) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{x}{L_0} \right).$$

Trong đó θ được gọi là góc pha trộn, L_0 được gọi là độ dài dao động của neutrino.

Xác định biểu thức độ dài dao động của neutrino theo E_m , E_n và các hằng số liên quan.

3. Thí nghiệm KamLAND

Thí nghiệm KamLAND (The Kamioka Liquid-scintillator Anti-Neutrino Detector) nghiên

cứu về dao động của phản hạt neutrino electron $\bar{\nu}_e$ sau khi bay ra từ lò phản ứng hạt nhân với vận tốc tiệm cận vận tốc ánh sáng ở khoảng cách $x \approx 170$ km so với lò phản ứng. Tại đó, số hạt $\bar{\nu}_e$ chỉ còn 20% so với ban đầu. Giả thiết các hạt $\bar{\nu}_e$ chỉ có các trạng thái E_m và E_n . Năng lượng trung bình của các hạt $\bar{\nu}_e$ là $E \approx E_m \approx E_n \approx 4$ MeV và $E_m \gg m_m c^2$, $E_n \gg m_n c^2$. Cho biết góc pha trộn $\theta = 45^\circ$.

Tính hiệu số bình thường khối lượng $\Delta m^2 = m_m^2 - m_n^2$ theo đơn vị $(\text{eV})^2/\text{c}^4$.

(Biên soạn bởi Nhân viên phòng lab)

Bài giải

1. Hiệu tượng phách

(a) Hàm sóng liên kết hai trạng thái:

$$A_{\text{tot}}(t) = A_1(t) + A_2(t) = A (e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}). \quad (1)$$

Môđun phức bình thường của hàm sóng liên kết:

$$\begin{aligned} |A_{\text{tot}}(t)|^2 &= A^2 (e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}) (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}) \\ &= A^2 (2 - e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} - e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}) \\ &= A^2 [2 - 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)] \\ &= 4A^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (2)$$

(b) Dựa trên lý thuyết về sóng vật chất của de Broglie, liên hệ giữa tần số góc và năng lượng của hạt:

$$E = \hbar\omega. \quad (3)$$

Môđun phức bình thường của hàm sóng từ phương trình (2) viết lại thành:

$$|A_{\text{tot}}(t)|^2 = 4A^2 \sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t \right). \quad (4)$$

2. Độ dài dao động của neutrino

Tại thời điểm t chùm hạt neutrino bay đến vị trí x :

$$x = ct. \quad (5)$$

Từ đề bài ta suy ra:

$$\frac{E_m - E_n}{2\hbar} t = \frac{x}{L_0} = \frac{ct}{L_0}. \quad (6)$$

Độ dài dao động của neutrino:

$$L_0 = \frac{2\hbar c}{E_m - E_n}. \quad (7)$$

3. Thí nghiệm KamLAND

Tại thời điểm t , hạt $\bar{\nu}_e$ bay đến vị trí x , do số hạt $\bar{\nu}_e$ còn 20% so với ban đầu nên tỉ lệ hạt $\bar{\nu}_e$ đã biến đổi thành hạt khác (giả sử hạt ν_α nào đó) so với ban đầu là:

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - 0.2 = 0.8. \quad (8)$$

Mặt khác, từ biểu thức tỉ lệ số hạt bị biến đổi ở đề bài, ta suy ra:

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\alpha} = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{x}{L_0}\right). \quad (9)$$

Từ phương trình (7), phương trình (9) có thể viết lại thành:

$$\frac{x}{2\hbar c}(E_m - E_n) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\alpha}}}{\sin(2\theta)}\right). \quad (10)$$

Ta sẽ biến đổi lại phương trình (10) để xuất hiện hiệu số bình phương khối lượng Δm^2 . Năng lượng của từng trạng thái E_m và E_n biểu diễn theo thuyết tương đối hẹp như sau:

$$E_m = \sqrt{p^2 c^2 + m_m^2 c^4} \approx pc, \quad (11)$$

$$E_n = \sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4} \approx pc. \quad (12)$$

Hiệu $E_m - E_n$ gần đúng đến bậc nhất của khối lượng bình phương:

$$\begin{aligned} E_m - E_n &= \sqrt{p^2 c^2 + m_m^2 c^4} - \sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4} \approx pc \left(1 + \frac{m_m^2 c^4}{2p^2 c^2} - 1 - \frac{m_n^2 c^4}{2p^2 c^2}\right) \\ &= \frac{(m_m^2 - m_n^2)c^4}{2pc} = \frac{\Delta m^2 c^4}{2E}. \end{aligned} \quad (13)$$

Từ phương trình (10) và phương trình (13), ta suy ra biểu thức của hiệu số bình phương khối lượng theo các tham số đã biết:

$$\frac{x \Delta m^2 c^4}{4\hbar c E} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\alpha}}}{\sin(2\theta)}\right) \Rightarrow \Delta m^2 = \frac{4\hbar E}{c^3 x} \arcsin\left(\frac{\sqrt{P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\alpha}}}{\sin(2\theta)}\right). \quad (14)$$

Thay số từ đề bài: $\Delta m^2 \approx 2.05 \times 10^{-5} (\text{eV})^2/\text{c}^4$.

Theo Mô hình Chuẩn, hạt neutrino không mang khối lượng, tuy nhiên để kiểm chứng điều này, lý thuyết về dao động neutrino đã chỉ ra hiện tượng dao động neutrino chỉ xảy ra khi hạt neutrino mang khối lượng. Sau đó là một loạt các thí nghiệm kiểm chứng, cho đến nay, hiện tượng dao động neutrino cũng có ý nghĩa là hạt neutrino mang khối lượng đã được thừa nhận rộng rãi nhờ một loạt các thí nghiệm huyền thoại đã được thực hiện có thể kể đến là thí nghiệm NOMAD của CERN, thí nghiệm Super Kamiokande tại Nhật Bản, thí nghiệm Homestake, thí nghiệm SAGE, thí nghiệm SNO, thí nghiệm KamLAND, ... Bài tập trên chỉ ra, nếu hiệu số bình phương khối lượng Δm^2 bằng 0 thì hạt neutrino không mang khối lượng và hiện tượng dao động neutrino sẽ không xảy ra.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1a	Viết được module phức bình phương của hàm sóng liên kết hai trạng thái (2)	1.00
1b	Viết được liên hệ năng lượng và tần số của hạt theo lý thuyết của de Broglie	0.50
	Viết được module phức bình phương của hàm sóng liên kết hai trạng thái (4)	0.50
2	Viết biểu thức độ dài dao động neutrino (7)	1.00
3	Viết được tỉ lệ hạt $\bar{\nu}_e$ biến đổi thành hạt ν_α (8)	1.00
	Viết liên hệ giữa độ dài dao động neutrino và tỉ lệ hạt $\bar{\nu}_e$ bị biến đổi (10)	0.50
	Gần đúng và viết được liên hệ giữa Δm^2 và hiệu $E_m - E_n$ (13)	2.00
	Viết được biểu thức hiệu số bình phương khối lượng Δm^2 (14)	1.00
	Thay số	0.50

Tài liệu

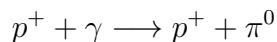
- [1] Vadim O. Egorov, Igor P. Volobuev (2019), *Coherence length of neutrino oscillations in a quantum field-theoretical approach*, Physical Review D, Volume 100, Issue 3.
- [2] Tadao Mitsui, KamLAND collaboration (2003), *KamLAND experiment*, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Volume 117, Page 13-17.

CÂU 17 (8 điểm)

Giới hạn GZK

Vào năm 1966, Greisen, Zatsepin và Kuzmin lập luận rằng chúng ta không thể quan sát được các tia vũ trụ (các proton năng lượng cao ngoài không gian đi vào khí quyển) ở trên một ngưỡng năng lượng nào đó do sự tương tác của chúng với bức xạ vi phông vũ trụ (CMB).

- Cho rằng vũ trụ có nhiệt độ 2.73 K. Tìm năng lượng trung bình của một photon ngoài không gian. Kết quả biểu diễn theo đơn vị (eV). Giả sử rằng photon tuân theo quy luật thống kê Bose-Einstein.
- Giả sử proton p^+ tương tác với photon γ theo phương trình:



Tìm năng lượng cần thiết của proton đến để phản ứng có thể xảy ra. Biết khối lượng của proton và pion lần lượt là $m_p = 938$ MeV và $m_\pi = 135$ MeV.

- Tìm năng lượng của proton sau phản ứng.

Hiện tượng này lần đầu tiên được quan sát thực nghiệm vào năm 2008, sau hơn 40 năm phỏng đoán được đưa ra.

Cho các tính phân:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2.40$$

Phân bố Bose-Einstein $n(E) = \frac{g}{e^{E/k_B T} - 1}$, trong đó g là số phân cực của hạt.

(Biên soạn bởi Bourbaki và Log)

Bài giải

- Xét một vùng không gian thể tích V , năng lượng của photon nằm trong đó là

$$\bar{E} = \int_0^\infty \frac{3E}{e^{\beta E} - 1} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} V. \quad (1)$$

Trong đó hệ số 3 tính đến số phân cực của photon và $\beta = 1/(k_B T)$. Thay $d^3 \vec{p} = 4\pi p^2 dp = 4\pi E^2 dE/c^3$ và đổi biến $x = \beta E$, ta thu được:

$$\bar{E} = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} (k_B T)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} (k_B T)^4 \frac{\pi^4}{15}. \quad (2)$$

Tương tự, ta tính được số lượng photon nằm trong vùng không gian thể tích V là

$$N = \int_0^\infty \frac{3}{e^{\beta E} - 1} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} V = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} (k_B T)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} (k_B T)^3 \times 2.40 \quad (3)$$

Năng lượng trung bình của một hạt photon là:

$$\epsilon = \frac{\bar{E}}{N} = \frac{\pi^4}{15 \times 2.40} k_B T \approx 6.35 \times 10^{-4} \text{ eV}. \quad (4)$$

b) Chọn hệ đơn vị với $c = 1$. Khi đó, động lượng của photon là $p_\gamma = \epsilon$.

Gọi năng lượng của proton trước va chạm là \tilde{E} , động lượng của proton này theo đó là $\tilde{p} = \sqrt{\tilde{E}^2 - m_p^2}$.

Trường hợp giới hạn dưới của năng lượng proton bay đến để phản ứng xảy ra là khi sau va chạm, các hạt mới chuyển động như một hạt, hạt đó có khối lượng nghỉ là $m_\pi + m_p$. Quá trình va chạm có thể xem là bảo toàn năng xung lượng, tổng năng lượng sau va chạm bằng tổng năng lượng trước va chạm, tổng động lượng sau va chạm bằng tổng động lượng trước va chạm. Tức là lúc này, áp dụng bất biến năng-xung lượng, ta thu được:

$$(\tilde{E} + \epsilon)^2 - \left(\sqrt{\tilde{E}^2 - m_p^2} + \epsilon \right)^2 = (m_\pi + m_p)^2. \quad (5)$$

Từ đây, khai triển các biểu thức, chuyển về và triệt tiêu căn bậc hai, ta dễ dàng tìm được năng lượng \tilde{E} cần thiết để phản ứng xảy ra là

$$\tilde{E} = \frac{m_\pi(m_\pi + 2m_p)}{4\epsilon} + \frac{m_p^2\epsilon}{m_\pi(m_\pi + 2m_p)} \approx \frac{m_\pi(m_\pi + 2m_p)}{4p_\gamma} \approx 1.07 \times 10^{14} \text{ MeV}. \quad (6)$$

Ngoài cách làm này, bạn có thể chọn biến giải là động lượng \tilde{p} của Proton trước phản ứng. Với cách chọn biến đó, bạn sẽ tránh được các bước khai triển bình phương của tổng và căn bậc 2, song bạn sẽ phải giải hệ phương trình bậc nhất tuyến tính. Nhìn chung, cả hai cách làm đều không quá khác biệt.

c) Sau phản ứng, vận tốc hai hạt là như nhau nên tỷ số năng lượng của hai hạt bằng tỷ số khối lượng nghỉ của hai hạt, tức là

$$\frac{E_p}{E_\pi} = \frac{m_p}{m_\pi}. \quad (7)$$

Kết hợp với phương trình bảo toàn năng lượng

$$E_p + E_\pi = \tilde{E} + \epsilon, \quad (8)$$

ta tìm được năng lượng của proton sau phản ứng là

$$E_p = \frac{m_p}{m_p + m_\pi}(E + \epsilon) \approx 0.93 \times 10^{14} \text{ MeV}. \quad (9)$$

Ta nhận thấy các proton bị giảm tốc đáng kể sau quá trình phản ứng do đó giới hạn $E_i \sim 10^{20} \text{ eV}$ được coi như là giới hạn của mức năng lượng của tia vũ trụ.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Viết biểu thức phân bố Bose-Einstein trong không gian 3 chiều (1)	0.50
	Xác định mật độ năng lượng trung bình của photon (2)	1.00
	Xác định mật độ hạt trung bình của photon (3)	1.00
	Tính năng lượng trung bình của một photon	0.50
2	Xác định mối liên hệ về năng xung lượng đối với từng hạt	1.00
	Phát biểu về bảo toàn năng lượng và động lượng	1.00
	Viết phương trình bất biến năng-xung lượng (5)	1.00
	Tính năng lượng cần thiết của proton để xảy ra va chạm (6)	1.00
3	Tính năng lượng proton sau va chạm (9)	1.00

Tài liệu

- [1] https://apc.u-paris.fr/semikoz/MEPHI_2019_seminar1_Cosmic_Rays.pdf
- [2] https://www.hep.shef.ac.uk/edaw/PHY206/Site/2012_course_files/phy206lec5.pdf

CÂU 18 (8 điểm)

Hội tụ mạnh chùm tia bằng tứ cực từ

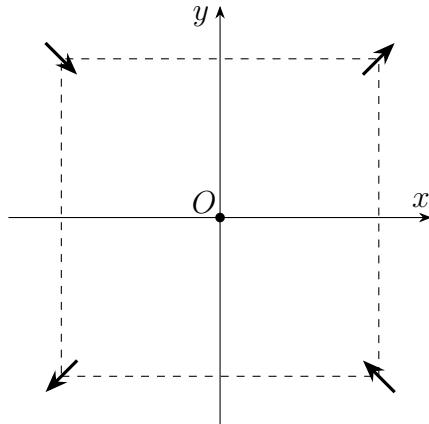
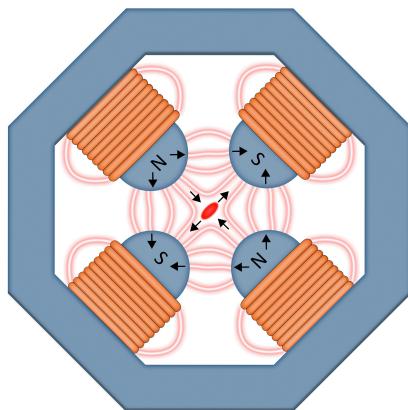
Trong các máy gia tốc hạt, để hội tụ các chùm tia tích điện thì hệ các cặp tứ cực từ đặt lệch so với nhau góc 90° thường được sử dụng. Ở vùng trung tâm một tứ cực từ, vector điện trường \vec{B} có dạng gần đúng trong hệ tọa độ Decartes là (tuyến tính theo độ lệch trực):

$$\vec{B} = g(y\hat{x} + x\hat{y}),$$

với g là một hệ số phụ thuộc vào cấu trúc của tứ cực từ.

1. Tứ cực từ

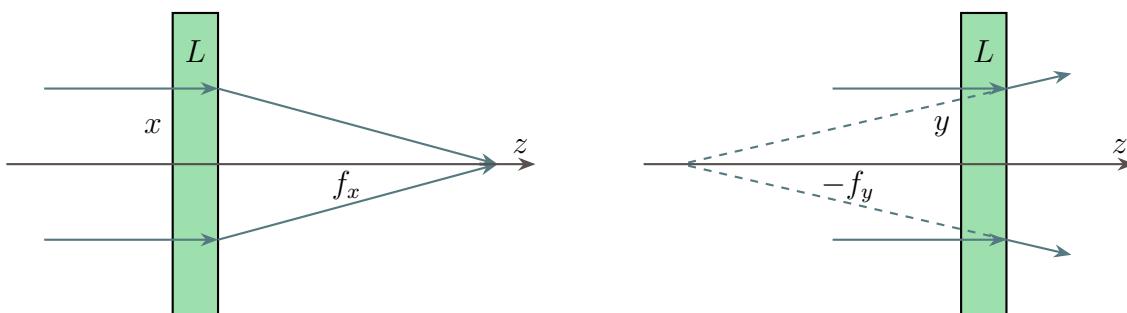
Xét một mô hình đơn giản của tứ cực từ tạo bởi 4 lưỡng cực từ có moment lưỡng cực p_m nằm ở 4 góc của một hình vuông có cạnh là $a\sqrt{2}$. Hai lưỡng cực từ chéo góc có chiều hướng về phía tâm và hai lưỡng cực từ chéo góc còn lại có hướng ngược chiều hướng tâm (như hình 1). Hãy tìm hệ số g trong trường hợp này theo p_m , a và hằng số từ μ_0 .



Hình 1: Mô hình tứ cực từ: (Bên trái) Trong thực tế; (Bên phải) Trong bài toán.

2. Chuyển động của hạt qua một tứ cực từ

Một hạt điện tích q chuyển động với một động lượng p lớn theo hướng gần như song song trục Oz của một tứ cực từ. Để đơn giản, ta xem rằng hạt đi qua một tứ cực từ chỉ chịu ảnh hưởng của tứ cực từ trong một vùng dài L [với $L \ll p/(qg)$] theo trục Oz và từ trường trong vùng này có thể xem như không đổi theo tọa độ z .

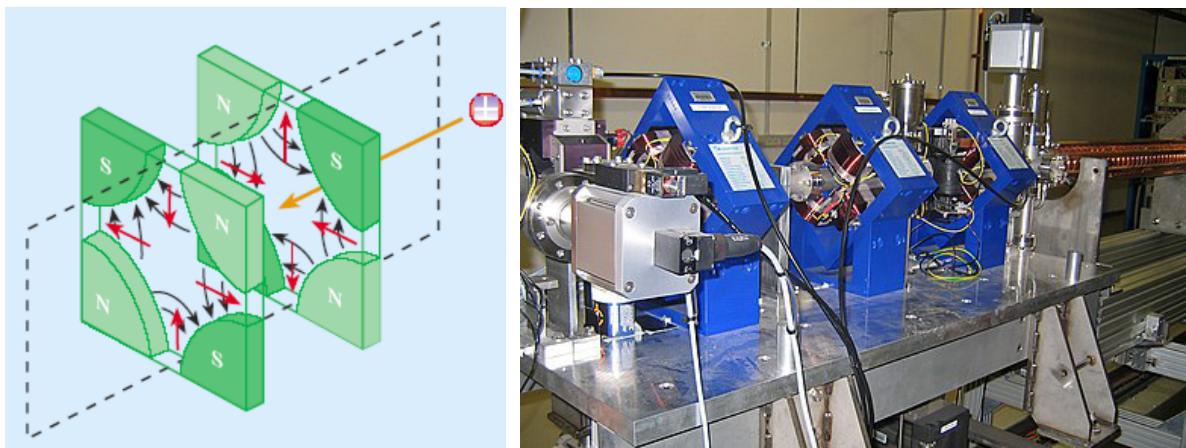


Hình 2: Quỹ đạo của hạt trong mặt phẳng xOz (bên trái) và yOz (bên phải).

Theo định luật Earnshaw, trong trường tĩnh điện (và tương tự với từ trường) sẽ không tồn tại một vị trí cân bằng bền. Hiểu đơn giản trong trường hợp này, chúng ta có thể chỉ ra rằng nếu như chuyển động của hạt theo phương x có một vị trí cân bằng bền để hạt dao động quanh thì vị trí cân bằng tương tự theo phương y sẽ không phải vị trí cân bằng bền (và ngược lại). Như vậy, từ cực từ giống như một thấu kính kỳ lạ, hội tụ đối với phương x và phân kỳ đối với phương y (như hình 2). Hãy tìm các tiêu cự f_x và f_y ứng với mỗi phương của thấu kính này theo g , q , p và L .

3. Hội tụ chùm tia

Để chùm tia đi qua hệ hội tụ, người ta thường sử dụng các từ cực từ thành từng cặp đặt lệch nhau 90° và cách nhau một khoảng d (xem hình 3). Độ lớn các tiêu cự của các từ cực từ là f . Hãy tìm tiêu cự tương đương qua toàn hệ f'_x và f'_y theo f và d , chỉ ra điều kiện để chùm tia này hội tụ theo từng phương.



Hình 3: Cặp từ cực từ (bên trái) và máy gia tốc hạt hội tụ mạnh sử dụng các từ cực từ (bên phải).

(Biên soạn bởi Bourbaki và Log)

Bài giải

1. Để tiện tính toán, ta đánh số các nam châm như hình dưới đây.

Từ trường tại điểm P có tọa độ $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ là:

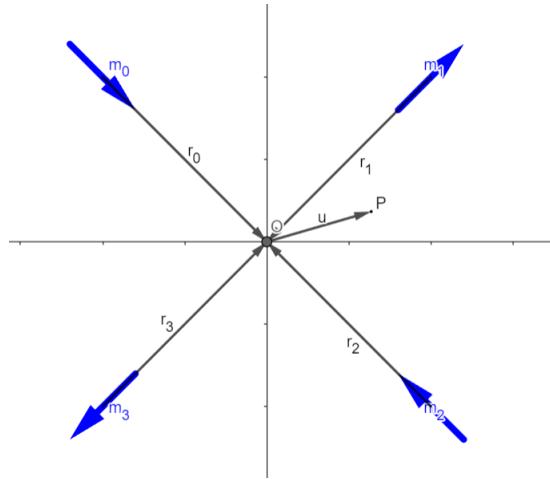
$$\vec{B} = \sum_{i=0}^3 \frac{\mu_0}{4\pi r_i'^5} \left[3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i') \vec{r}_i' - \vec{m}_i r_i'^2 \right]. \quad (1)$$

Với $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{r}$, $|\vec{r}|/a \ll 1$, từ đây ta có

$$\frac{1}{r_i'^3} \approx \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{3\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{a^2} \right), \quad \frac{1}{r_i'^5} \approx \frac{1}{a^5} \left(1 - \frac{5\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{a^2} \right). \quad (2)$$

Thế (2) vào phương trình (1) ta thu được

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^3 \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i') \vec{r}_i'}{a^5} \left(1 - \frac{5\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{a^2} \right) - \frac{\vec{m}_i}{a^3} \left(1 - \frac{3\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{a^2} \right) \right]. \quad (3)$$



Ta lần lượt tính các số hạng thành phần của từ trường:

$$\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i = (-1)^i p_m \cdot a \implies \sum_{i=0}^3 \vec{m}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=0}^3 \vec{m}_i \cdot \vec{r} + \sum_{i=0}^3 (-1)^i p_m \cdot a = 0, \quad (4)$$

và

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 (\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i &= \sum_{i=0}^3 (\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i + \sum_{i=0}^3 (\vec{m}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i + \sum_{i=0}^3 (\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{r} \\ &= p_m a \sum_{i=0}^3 (-1)^i \vec{r}_i + \sum_{i=0}^3 (\vec{m}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=0}^3 (\vec{m}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i = \sum_{i=0}^3 [\vec{r} \times (\vec{r}_i \times \vec{m}_i) + \vec{m}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r})] \\ &= \sum_{i=0}^3 \vec{m}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}). \end{aligned} \quad (5)$$

Thế (4) và (5) vào (3) và giữ lấy hệ thức bậc nhất theo \vec{r} , ta thu được:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \sum_{i=0}^3 \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{6(\vec{r}_i \cdot \vec{r}) \vec{m}_i}{a^5} - \frac{15(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i)(\vec{r}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i}{a^7} \right] \\ &= \sum_{i=0}^3 \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{6(\vec{r}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i (-1)^i p_m}{a^6} - \frac{15(-1)^i p_m (\vec{r}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i}{a^6} \right] \\ &= - \sum_{i=0}^3 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{9(\vec{r}_i \cdot \vec{r}) \vec{r}_i (-1)^i p_m}{a^6} \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{18 p_m}{a^6} [(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}) \vec{r}_0 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}) \vec{r}_1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Thay $\vec{r}_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})$ và $\vec{r}_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$, ta tìm được biểu thức từ trường

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{9 p_m}{a^4} [(x - y)(\vec{x} - \vec{y}) - (x + y)(\vec{x} + \vec{y})] = \frac{9\mu_0 p_m}{2\pi a^4} (y\hat{x} + x\hat{y}). \quad (7)$$

Hay

$$g = \frac{9\mu_0}{2\pi} \frac{9p_m}{a^4}. \quad (8)$$

Lực từ tác dụng lên một hạt điện tích có dạng $\vec{F} \sim v\vec{z} \times \vec{B} \sim (\vec{y} - \vec{x})$. Do đó hạt có xu hướng dao động điều hòa theo phương \hat{x} và chuyển động ra xa theo phương \hat{y}

2. Vì lực từ không sinh công nên năng lượng của hạt $E = \text{const}$, vận tốc của hạt không đổi. Phương trình chuyển động của hạt sẽ được thu gọn thành

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (9)$$

Chiếu phương trình trên theo 2 phương x và y , đổi biến t sang biến z để triệt tiêu v , ta được

$$\frac{dp_x}{dz} = -qgx \Rightarrow \Delta p_x = -qgLx, \quad (10)$$

$$\frac{dp_y}{dz} = qgy \Rightarrow \Delta p_y = qgLy. \quad (11)$$

Khi hạt bay ra khỏi tứ cực từ, hạt gần như chuyển động thẳng đều, với góc chuyển động không đổi so với trục z , ta được

$$\frac{x}{f_x} = \frac{\Delta p_x}{p} \Rightarrow f_x = \frac{p}{qgL}. \quad (12)$$

$$\frac{y}{f_y} = -\frac{\Delta p_y}{p} \Rightarrow f_y = -\frac{p}{qgL}. \quad (13)$$

3. *Đối với phương x của tứ cực từ thứ nhất:

Sau khi đi qua tứ cực từ thứ nhất, chùm kia hội tụ tài đường thẳng cách tứ cực từ thứ hai một đoạn $g - f$. Đây là vật thật của thấu kính phân kỳ (ứng với tứ cực từ thứ hai). Như vậy,

$$\frac{1}{d - f} + \frac{1}{f'_x} = -\frac{1}{f} \Rightarrow f'_x = \frac{f(f - d)}{d}. \quad (14)$$

Như vậy, để chùm tia hội tụ theo phương x sau khi qua hai tứ cực thì $d < f$. Tương tự đối với phương y , ta thu được kết quả:

$$\frac{1}{d + f} + \frac{1}{f'_y} = \frac{1}{f} \Rightarrow f'_y = \frac{f(f + d)}{d}. \quad (15)$$

Theo phương y , chùm tia luôn hội tụ.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Viết biểu thức tổng quát của từ trường gây ra bởi tứ cực (1)	0.50
	Khai triển nhỏ các số hạng (2)	1.00
	Tính các số hạng trong tổng (4) & (5)	1.00
	Tìm biểu thức từ trường gần tâm của tứ cực từ và xác định g (8)	0.50
2	Lập luận về từ trường không sinh công và các hệ quả	0.50
	Viết phương trình biến thiên động lượng (9)	0.50
	Lấy tổng phương trình biến thiên động lượng theo hai phương (10) & (11)	1.00
	Xác định tiêu cự của hai phương từ yếu tố hình học (12) & (13)	1.00
3	Khảo sát quỹ đạo của tia theo trục Ox của tứ cực thứ nhất (14)	1.00
	Khảo sát quỹ đạo tia theo trục Oy của tứ cực thứ nhất (15)	1.00

Tài liệu

- [1] Wolfgang Hillert. Transverse linear beam dynamics, 2021.
- [2] https://www.lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.magnetic_multipoles

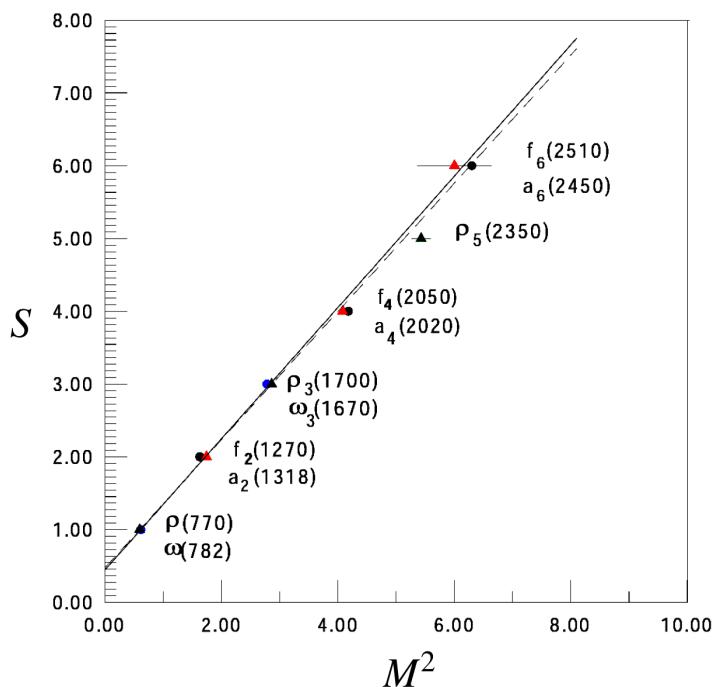
CÂU 19+20 (16 điểm)

Lý thuyết dây cho tương tác mạnh

Theo Vật Lý hiện đại, thế giới tự nhiên được xây dựng dựa trên bốn lực tương tác cơ bản. Trong chương trình Vật Lý THPT, cũng như qua cuộc sống thường ngày, có lẽ các bạn đã không còn xa lạ với lực hấp dẫn và lực điện từ. Tuy nhiên, để giải thích các hiện tượng ở mức nguyên tử và nhỏ hơn, các nhà khoa học cần sử dụng thêm hai loại lực tương tác nữa: lực tương tác yếu và lực tương tác mạnh. Lý thuyết mô tả lực tương tác mạnh là *sắc động lực lượng tử*, và theo lý thuyết này thì các hạt nhân nguyên tử – hạt proton và hạt neutron – có cấu tạo từ ba hạt quark, liên kết với nhau chủ yếu qua trường gluon. Các hạt được cấu tạo từ nhiều quark liên kết kiểu này có tên gọi chung là hadron.

1. Quỹ đạo Regge của họ các hạt meson

Meson là các hạt hadron có cấu tạo từ hai quark. Xét một họ các hạt meson có liên hệ giữa khối lượng bình phương M^2 và spin S (giá trị momen động lượng nội tại, tính theo đơn vị hằng số Planck rút gọn \hbar) như hình 5. Liên hệ này gần như tuyến tính $S = \alpha_0 + \alpha M^2$, là đặc trưng của tính chất quỹ đạo Regge, được quan sát trên rất nhiều họ các hạt meson khác nhau.



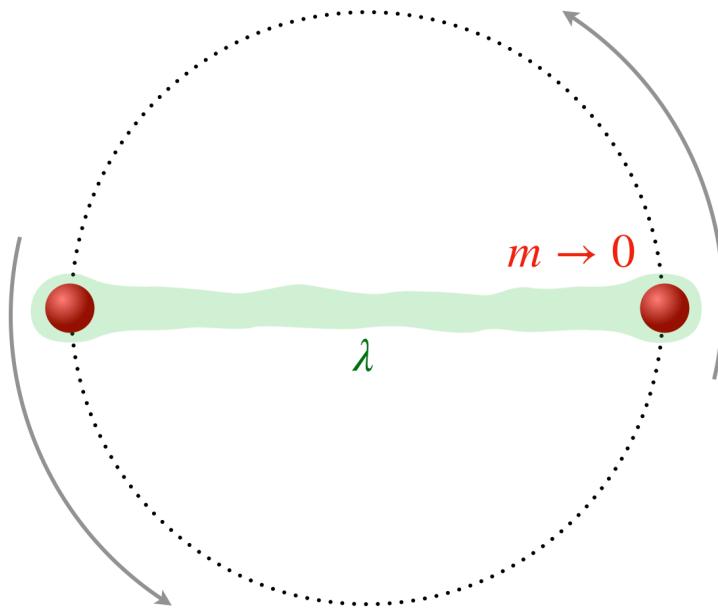
Hình 5: Đồ thị Chew-Frautschi cho liên hệ gần như tuyến tính giữa khối lượng bình phương M^2 và spin (giá trị momen động lượng nội tại) S của một họ các hạt meson.

Cho biết M^2 được tính theo đơn vị $(\text{GeV}/c^2)^2$ với c là giá trị vận tốc ánh sáng và $1\text{GeV} = 1.60 \times 10^{-10}\text{J}$. Hãy xác định hệ số tỉ lệ α của họ các meson trong hình 5.

2. Mô hình dây tương đối tính của meson

Thành phần αM^2 trong biểu thức của S có thể được giải thích thông qua một mô hình dây quay tròn tương đối tính, như mô tả ở hình 6. Cụ thể, trong mô hình này, hai quark được nối với nhau bằng một ống dòng trường gluon tạo thành một dây có hai đầu nặng. Giả sử

rằng các quark là những chất điểm có khối lượng nghỉ rất nhỏ $m \rightarrow 0$, và ống dòng trường gluon có mật độ năng lượng nghỉ λ trên đơn vị chiều dài. Xét trạng thái chuyển động của hai quark là ở trên cùng một đường tròn, đứng yên trong hệ quy chiếu quan sát.



Hình 6: Mô hình dây quay tròn tương đối tính của hạt meson, với giả sử rằng hai quark có khối lượng nghỉ $m \rightarrow 0$ và chuyển động trên cùng một đường tròn. Dây dự trữ mật độ năng lượng nghỉ λ trên đơn vị chiều dài.

a/ Nếu momen động lượng của dây quay quanh tâm đường tròn là J , hãy xác định năng lượng E của dây (cùng hai quark) trong hệ quy chiếu quan sát theo momen động lượng J và mật độ năng lượng nghỉ λ . Bạn cần phải chứng minh rằng sự phụ thuộc của kết quả này vào khối lượng nghỉ m các quark sẽ biến mất khi $m \rightarrow 0$.

b/ Chúng ta liên hệ khối lượng M của hạt meson với năng lượng E của dây theo công thức tương đương năng - khối lượng Einstein $E = Mc^2$, và spin S của meson với momen động lượng J/\hbar của dây (tính theo đơn vị hằng số Planck rút gọn). Hãy xác định mật độ năng lượng nghỉ λ theo giá trị α đã tìm được từ ý 1 của bài tập này.

c/ Hãy xác định chiều dài L của dây theo momen động lượng J và hệ số α .

3. Nhiệt độ Hagedorn

Tương tác mạnh, như tên gọi của nó, là vô cùng mạnh – ta gần như không thể quan sát được một hạt quark đơn lẻ ở trạng thái tự do, là đặc trưng cho tính chất giam cầm. Tuy nhiên, ở một giá trị nhiệt độ T_H đủ lớn, được gọi là nhiệt độ Hagedorn, thì tương tác mạnh sẽ mất đi tính chất giam cầm và các quark sẽ được giải phóng, trở nên tự do – hệ *sắc động lực học lượng tử* khi ấy sẽ ở trạng thái quark-gluon plasma.

Ở các ý tiếp theo, chúng ta không những sẽ phải giải quyết một câu hỏi toán thống kê cụ thể, mà còn sẽ phải hiểu ý nghĩa Vật Lý của kết quả. Các bạn sẽ được cung cấp rất nhiều kiến thức mới, và yêu cầu phải sử dụng được chúng để giải quyết những câu hỏi.

a/ Thay vì chỉ quay vòng quanh như mô hình tương đối tính trong hình 6, dây lượng tử có năng lượng và momen động lượng phụ thuộc vào trạng thái dao động của nó. Các giá trị momen động lượng khả dĩ của dây lượng tử (tính theo đơn vị hằng số Planck rút gọn) là tập hợp số nguyên khôn âm $J/\hbar = 0, 1, 2, \dots$, và số lượng $\mathcal{N}[J/\hbar]$ các trạng thái dao động độc lập khác nhau cho mỗi giá trị momen động lượng $J/\hbar > 0$ là bằng với số lượng các cách viết J theo tổng của các số nguyên dương ($\mathcal{N}[0] = 1$, tương ứng với trạng thái nền duy nhất). Các số hạng trong biểu diễn tổng có thể lặp lại, nhưng các hoán đổi vị trí khác nhau chỉ được tính là một cách viết. Đây chỉ là một trong rất nhiều các liên hệ kỳ thú và sảng khoái giữa lý thuyết dây và lý thuyết số học.

Chúng ta minh họa với $J/\hbar = 4$. Có 5 cách khác nhau để biểu diễn số 4 theo tổng các số nguyên dương, là $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+3$, $2+2$, và 4, cho nên $\mathcal{N}[4] = 5$. Chú ý rằng, các trạng thái dao động khả dĩ của dây có thể xảy ra theo các phương khác nhau trong không gian, nhưng phép đếm $\mathcal{N}[J/\hbar]$ trên của chúng ta không hề đả động tới. Đây là một đơn giản hóa của bài tập.

Hãy xác định giá trị $\mathcal{N}[5]$, $\mathcal{N}[6]$, và $\mathcal{N}[7]$.

b/ Hãy thành lập biểu thức ước tính chiều dài trung bình $\langle L \rangle$ ở nhiệt độ T , theo hàm $\mathcal{N}[J/\hbar]$, hệ số α , hằng số Boltzmann k_B và giá trị nhiệt độ T . Sử dụng kết quả đã tìm được ở ý 2a cho năng lượng E dây quay tròn tương đối tính để ước tính năng lượng dây lượng tử, và 2c cho chiều dài L dây quay tròn tương đối tính để ước tính chiều dài dây lượng tử, theo momen động lượng J và hệ số α . Giả sử rằng khi hệ *sắc động học lượng tử* ở nhiệt độ T cân bằng thống kê thì xác suất dây sở hữu mỗi trạng thái mang năng lượng E sẽ tuân theo phân bố Maxwell-Boltzmann – tỉ lệ với $\exp(-E/k_B T)$.

c/ Chúng ta có thể xấp xỉ hàm $\mathcal{N}[J/\hbar]$ theo công thức Hardy-Ramanujan:

$$\mathcal{N}[J/\hbar] \approx \frac{1}{4\sqrt{3}(J/\hbar)} \exp \left[\pi \sqrt{\frac{2(J/\hbar)}{3}} \right], \quad (1)$$

áp dụng tốt nhất khi $J/\hbar \gg 1$.

Với kết quả tìm được ở ý 3b, vận dụng suy luận Vật Lý, hãy ước tính xem ở giá trị nhiệt độ bằng bao nhiêu thì các quark sẽ được giải phóng khỏi tính chất giam cầm. So sánh giá trị tìm được với nhiệt độ Hagedorn $T_H \sim 1.7 \times 10^{12}$ K suy ra từ giả lập và thực nghiệm.

(Biên soạn bởi XONG)

Bài giải

Lý thuyết dây cho tương tác mạnh

1. Quỹ đạo Regge của các hạt meson

Từ đồ thị trong hình 5, ta ước tính được $S/M^2 \approx 1$ theo đơn vị $(\text{GeV}/c^2)^{-2}$, tức $\alpha \approx 3.15 \times 10^{53} \text{kg}^{-2}$.

2. Mô hình dây tương đối tính của meson

Đây là một bài tập rất khó, yêu cầu bạn phải biết về liên hệ lực và biến đổi chuyển động trong lý thuyết tương đối hẹp, cũng như áp dụng sự tương đương năng - khối lượng – dây dự trữ mật độ năng lượng nghỉ λ trên đơn vị chiều dài, tức nó cũng sở hữu khối lượng nghỉ λ/c^2 trên đơn vị chiều dài.

a/ Gọi vận tốc của các quark là \vec{v} , đặt $\beta = v/c$ và $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Dây dự trù mật độ năng lượng nghỉ λ trên đơn vị chiều dài, tức ý nghĩa Vật Lý của λ chính là lực căng dây trong hệ quy chiếu nghỉ. Lực căng dây trong hệ quy chiếu quan sát tại vị trí đầu dây nối với các quark là λ/γ , gây nên biến thiên động lượng $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ các quark:

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \left| \frac{d}{dt} \vec{p} \right| = \frac{\gamma m v^2}{R} \implies L = \gamma^2 \beta^2 \frac{2mc^2}{\lambda}. \quad (1)$$

Ở đây, R là bán kính đường tròn, có độ dài bằng một nửa chiều dài dây L (là đường kính đường tròn). Dóng góp năng lượng E_{2q} và momen động lượng J_{2q} của hai quark là:

$$E_{2q} = 2\gamma mc^2, \quad J_{2q} = 2|\vec{p}|R = \gamma\beta mcL. \quad (2)$$

Dóng góp năng lượng E_d và momen động lượng J_d của ống dòng trường gluon là:

$$\begin{aligned} E_g &= 2 \int_0^R dr \left[1 - \left(\frac{r}{R} \beta \right)^2 \right]^{-1/2} \lambda = \left[\frac{\arcsin(\beta)}{\beta} \right] \lambda L, \\ J_g &= 2 \int_0^R dr \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R} \beta \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\lambda}{c^2} \left(\frac{r}{R} \beta c \right) \right\} r = \left[\frac{\arcsin(\beta) - \beta (1 - \beta^2)^{1/2}}{4\beta^2} \right] \frac{\lambda L^2}{c}. \end{aligned} \quad (3)$$

Tổng hợp lại, ta có năng lượng E và momen động lượng J của dây:

$$\begin{aligned} E &= E_{2q} + E_g = \gamma [1 + \gamma\beta \arcsin(\beta)] 2mc^2, \\ J &= J_{2q} + J_g = \gamma\beta \left\{ 1 + \frac{1}{2} \gamma^3 \beta \left[\arcsin(\beta) - \beta (1 - \beta^2)^{1/2} \right] \right\} \frac{2m^2 c^3}{\lambda}, \end{aligned} \quad (4)$$

với giá trị của L được thế bằng công thức tìm được ở (1). Khi $m \rightarrow 0$, vận tốc hai quark sẽ tiến gần tới giá trị vận tốc ánh sáng $\beta \rightarrow 1$ và $\gamma \rightarrow \infty$, nên vì vậy ta có xấp xỉ ở bậc cao nhất theo khai triển γ :

$$E \approx \pi\gamma^2 mc^2 + \mathcal{O}(\gamma), \quad J \approx \frac{\pi}{2} \gamma^4 \frac{m^2 c^3}{\lambda} + \mathcal{O}(\gamma^3). \quad (5)$$

Từ đây ta thu được gần đúng liên hệ tỉ lệ tuyến tính giữa năng lượng bình phương E^2 và momen động lượng J :

$$(2\pi\lambda c)^{-1} E^2 \approx J \implies E = [(2\pi\lambda c) J]^{1/2}. \quad (6)$$

b/ Với $E = Mc^2$ và $J = S\hbar$, công thức (6) trở thành:

$$\frac{c^3}{2\pi\lambda} M^2 \approx S\hbar \implies \lambda = \frac{c^3}{2\pi\hbar\alpha}. \quad (7)$$

c/ Để liên hệ L với J , chúng ta sử dụng công thức (1) và công thức (4):

$$L \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^2 \frac{2mc^2}{\lambda} \approx \left(\frac{8}{\pi} \frac{c}{\lambda} J \right)^{1/2} = \left(\frac{16\hbar^2\alpha}{c^2} J \right)^{1/2} \quad (8)$$

3. Nhiệt độ Hagedorn

a/ $\mathcal{N}[5] = 7$, do 5 có thể được biểu diễn theo tổng $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 3$, $1 + 2 + 2$, $1 + 4$, $2 + 3$, và 5.

$\mathcal{N}[6] = 11$, do 6 có thể được biểu diễn theo tổng $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 1 + 3$, $1 + 1 + 2 + 2$, $1 + 1 + 4$, $1 + 2 + 3$, $1 + 5$, $2 + 2 + 2$, $2 + 4$, $3 + 3$, và 6.

$\mathcal{N}[7] = 15$, do 7 có thể được biểu diễn theo tổng $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 1 + 1 + 3$, $1 + 1 + 1 + 2 + 2$, $1 + 1 + 1 + 4$, $1 + 1 + 2 + 3$, $1 + 1 + 5$, $1 + 2 + 2 + 2$, $1 + 2 + 4$, $1 + 3 + 3$, $1 + 6$, $2 + 2 + 3$, $2 + 5$, $3 + 4$, và 7.

b/ Với công thức ở ý 2a là $E(\alpha, J/\hbar)$ và ở ý 2c là $L(\alpha, J/\hbar)$, thế thì ta có thể tính chiều dài dây trung bình $\langle L \rangle$ ở nhiệt độ cân bằng thống kê T như sau:

$$\langle L \rangle = \frac{\sum_{J/\hbar=0}^{\infty} \mathcal{N}[J/\hbar] \exp\left[-\frac{E(\alpha, J/\hbar)}{k_B T}\right] L(\alpha, J/\hbar)}{\sum_{J/\hbar=0}^{\infty} \mathcal{N}[J/\hbar] \exp\left[-\frac{E(\alpha, J/\hbar)}{k_B T}\right]} . \quad (9)$$

Cụ thể hơn:

$$E(\alpha, J/\hbar) = \left[\frac{c^4}{\alpha} (J/\hbar) \right]^{1/2} , \quad L(\alpha, J/\hbar) = \left[\frac{16\hbar^2\alpha}{c^2} (J/\hbar) \right]^{1/2} . \quad (10)$$

c/ Áp dụng công thức Hardy-Ramanujan, xác suất dây có chiều dài $L(\alpha, J/\hbar) \propto (J/\hbar)^{1/2}$ khi $J/\hbar \gg 1$ là tỉ lệ với:

$$\mathcal{N}[J/\hbar] \exp\left[-\frac{E(\alpha, J/\hbar)}{k_B T}\right] \approx \exp\left\{ \left[\left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^{1/2} - \frac{1}{k_B T} \left(\frac{c^4}{\alpha} \right)^{1/2} \right] (J/\hbar)^{1/2} \right\} , \quad (11)$$

tăng theo hàm mũ theo chiều dài khi bên vế phải sở hữu $[...] > 0$:

$$T > \frac{1}{k_B} \left(\frac{3}{2\pi^2} \frac{c^4}{\alpha} \right)^{1/2} \equiv T_* . \quad (12)$$

Nói cách khác, chiều dài trung bình của dây tiến tới vô cùng khi $T > T_*$. Dây dài vô hạn tức hai quark có thể cách xa nhau tùy ý, không còn giam cầm bởi lực tương tác mạnh nữa! Ước tính này cho ta kết quả $T_* \approx 4.5 \times 10^{12}$ K, cùng bậc độ lớn với nhiệt độ Hagedorn, nhiệt độ mà các hadron sẽ “tan chảy”.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Xác định hệ số α từ đồ thị	4.00
2a	Tìm chiều dài dây theo vận tốc (1)	1.00
	Xác định đóng góp năng lượng và momen động lượng của hai quark (2)	0.50
	Xác định đóng góp năng lượng và momen động lượng của dây (3)	1.00
	Khảo sát các đại lượng khi khối lượng quark rất bé (5)	1.00
	Dựa ra mối liên hệ giữa năng lượng và moment động lượng (6)	0.50
2b	Xác định λ theo α (7)	1.00
2c	Xác định chiều dài L của dây theo J và α (8)	1.00
3a	Xác định giá trị $\mathcal{N}[5]$, $\mathcal{N}[6]$, và $\mathcal{N}[7]$	2.00
3b	Tính chiều dài trung bình của dây (9)	2.00
3c	Áp dụng công thức Hardy-Ramnajan xác định xác suất độ dài dây (11)	1.00
	Dánh giá về nhiệt độ và biến luận (12)	1.00

Tài liệu

- [1] P. Desgrolard, M. Giffon, E. Martynov, and E. Predazzi. Exchange-degenerate regge trajectories: A fresh look from resonance and forward scattering regions. *Eur. Phys. J. C*, 18(3):555–561, 2001.
- [2] *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1918): 75-115.
- [3] *Melting hadrons, boiling quarks: from Hagedorn temperature to ultra-relativistic heavy-ion collisions at CERN: with a tribute to Rolf Hagedorn*. Springer Nature; 2016.

————— HẾT —————

Danh sách thành viên tham gia xây dựng [Hướng tới VPhO 43]

Thành Viên tham gia đề xuất các bài tập:

1. Log (Trưởng nhóm)
2. NVPL
3. Yuki
4. Bourbaki
5. Hiagari
6. manhducnmd
7. Pèct
8. Miale
9. Yukon
10. XOONG

Thành viên tham gia rà soát và góp ý:

1. $\tau \hbar \alpha \chi$
2. 4,699
3. Lok
4. Irvy
5. Quinn
6. Đầu Không Tròn
7. vanimiaou
8. Physcium

Nhóm xin gửi lời cảm ơn đến các thầy, các bạn bên ngoài nhóm đã hỗ trợ kiểm duyệt các lối:

1. sigma
2. idonthaveusername
3. Duy Khù Khờ
4. Thầy Bùi Đức Hưng (Chuyên Lê Quý Đôn - Bình Định)
5. Thầy Nguyễn Hải Dương (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định)
6. Thầy Phạm Đình Hoàn (Chuyên Lào Cai)