Lời giải hướng tới VPhO 42

Câu lạc bộ vật lý xPhO

CÂU 1. (4.0 điểm)

Một quả lựu đạn đang đứng yên ở độ cao H so với mặt đất thì phát nổ và bắn ra các mảnh đạn giống nhau với cùng tốc độ v_0, phân bố các mảnh đạn khi văng ra là đẳng hướng. Gia tốc trọng trường là $\vec{g}$.

a, Xác định phương trình mặt cong ba chiều biểu diễn ranh giới giữa *vùng an toàn* và *vùng nguy hiểm*, tức là trong vùng an toàn thì mảnh đạn sẽ không thể bay tới, ngược lại với vùng nguy hiểm. Vẽ phác dạng đồ thị của đường ranh giới, ghi chú thích và các điểm đặc biệt.

b, Sau khi các mảnh đạn rơi hết xuống đất, xác định bán kính R của vùng đạn đã rơi trên mặt đất.

c, Giả sử rằng lựu đạn chứa M khối lượng đạn nổ trong một góc nón nhỏ hướng lên trên với góc mở $2\alpha_0 \ll 1$, bom nổ trên mặt đất ($H = 0$). Chứng minh rằng phân bố khối lượng mặt $\rho(r)$ (khai triển tới thành phần bậc hai r^2) của đạn trên mặt đất khi tất cả mảnh đạn đã rơi xuống đất có dạng như sau

$$\rho(r) \approx \rho_0(1 + \beta r^2),$$

hãy biểu diễn ρ_0 và β theo các thông số đã biết.

Có thể sử dụng xấp xỉ sau: $\sin\alpha \approx \alpha\left(1 - \dfrac{1}{6}\alpha^2\right)$.

(Biên soạn bởi Zinc)

Bài giải

a, Ta đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ là toạ độ khoảng cách trong mặt phẳng Oxy. Từ phương trình ném xiên, tuân theo định luật Newton II, ta có phương trình chuyển động của mảnh đạn:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta t + H, \tag{1}$$

$$r = v_0 \cos\theta t. \tag{2}$$

Thay (1) vào (2) ta thu được phương trình quỹ đạo của mảnh đạn là

$$z = H - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} r^2 + r\tan\theta. \tag{3}$$

Ta có thể viết (3) thành phương trình tam thức bậc hai với biến $\tan\theta$ như sau

$$-\frac{gr^2}{2v_0^2}\tan^2\theta + r\tan\theta - \left(\frac{gr^2}{2v_0} + z - H\right) = 0. \tag{4}$$

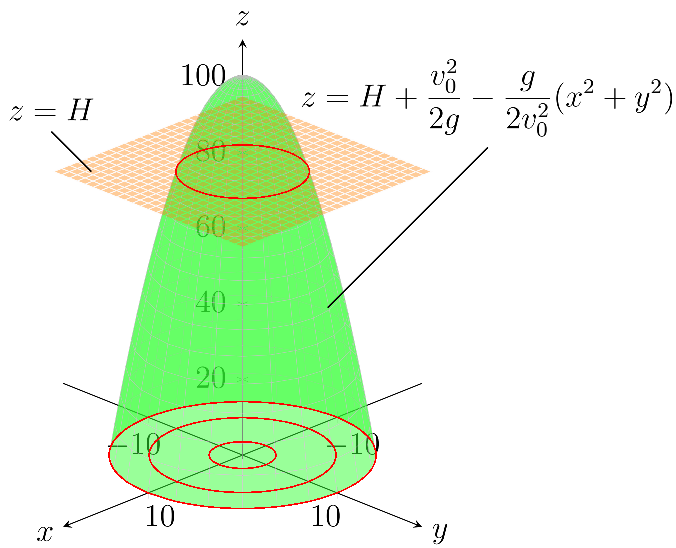
- Bên ngoài ranh giới, tức vùng an toàn, thì phương trình (4) vô nghiệm.
- Bên trong ranh giới, tức vùng nguy hiểm, thì phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt.
- Tại ranh giới thì phương trình (4) là nghiệm kép, tức là $\Delta = 0$.

Từ nhận xét trên ta có phương trình

$$\Delta = r^2 - 4\frac{gr^2}{2v_0^2}\left(\frac{gr^2}{2v_0^2} + z - H\right) = 0, \tag{5}$$

$$\Rightarrow z = H + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v_0^2} = H + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}(x^2+y^2). \tag{6}$$

Hình bên dưới là mô phỏng đường ranh giới an toàn của bom nổ.



b, Bán kính của vùng đạn là

$$R = r(z=0) = \frac{v_0}{g}\sqrt{2gH + v_0^2}. \tag{7}$$

c, Gọi góc phương vị (tạo bởi đường xiên và phương z) là $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$.
Tầm xa của mảnh đặn bắn với góc nhìn θ là

$$r = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{8}$$

Vi phân khối lượng đạn dm được bắn ra từ góc $\alpha \to \alpha + d\alpha$ (hệ toạ độ cầu) là

$$dm = M\frac{2\pi\sin\alpha d\alpha}{2\pi\displaystyle\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha d\alpha} = \frac{M\sin\alpha d\alpha}{1-\cos\alpha_0} \approx \frac{2M}{\alpha_0^2}\sin\alpha d\alpha. \tag{9}$$

Phân bố khối lượng đạn trên sàn nhà thoả mãn

$$\rho(r)2\pi r dr = dm = \frac{2M}{\alpha_0^2}\sin\alpha d\alpha \tag{10}$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{2M\sin\alpha}{\pi\alpha_0^2}\frac{d\alpha}{d(r^2)}. \tag{11}$$

Bình phương rồi đạo hàm (8) ta thu được

$$\frac{d(r^2)}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g^2}\sin 4\alpha \approx \frac{8v_0^2}{g}\alpha\left(1-\frac{8}{3}\alpha^2\right). \tag{12}$$

Lắp (12) vào (11) ta thu được

$$\rho(r) = \frac{Mg^2}{4\pi v_0^4\alpha_0^2}\frac{1-\frac{1}{6}\alpha^2}{1-\frac{8}{3}\alpha^2} \tag{13}$$
$$\approx \frac{Mg^2}{4\pi v_0^4\alpha_0^2}\left(1-\frac{1}{6}\alpha^2\right)\left(1+\frac{8}{3}\alpha^2\right) \tag{14}$$
$$\approx \frac{Mg^2}{4\pi v_0^4\alpha_0^2}\left(1+\frac{5}{2}\alpha^2\right) \tag{15}$$
$$= \frac{Mg^2}{4\pi v_0^4\alpha_0^2}\left(1+\frac{5g^2}{8v_0^4}r^2\right). \tag{16}$$

Vậy ta có các hệ số cần tìm là $\rho_0 = \dfrac{Mg^2}{4\pi v_0^4\alpha_0^2}$ và $\beta = \dfrac{5g^2}{8v_0^4}$.

Biểu điểm

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
a	Viết được tam thức bậc hai với $\tan\theta$ (4)	0.50
	Việt được phương trình đường ranh giới (6)	1.00
	Vẽ phác đồ thị, đúng dạng paraboloid, có chú thích	0.50
b	Biểu diễn đúng R (7)	0.50
c	Biểu diễn được vi phân dm (9)	0.50
	Biển diễn được $\rho(r)$ theo $d\alpha$ và dr (11)	0.50
	Tìm được các hệ số ρ_0 và β	0.50

Mở rộng vấn đề:

Bài toán này được trích từ bài 3 đề 1 trong đề Olympic đồng bằng sông Châu Giang 2016 (Pan Pear River Delta Physics Olympiad). Đây không phải một bài toán khó, song hầu hết các học sinh vật lý giải sai do sự thiếu chặt chẽ trong các tính toàn về khai triển nhỏ (Rất nhiều người ra hệ số của β là $1/2$ hoặc $1/24$ do bỏ mất các hạng tử nhỏ đồng bậc).

CÂU 2. (4.0 điểm)

Cho 1 mol khí lý tưởng có hằng số đoạn nhiệt γ thực hiện một chu trình thuận nghịch gồm 8 đường đẳng nhiệt và 8 đường đoạn nhiệt xen kẽ (đường bắt đầu chu trình là đường đẳng nhiệt), trong đó, 7 đường giãn đoạn nhiệt và 7 đường giãn đẳng nhiệt, 1 đường nén đẳng nhiệt và 1 đường nén đoạn nhiệt đưa khối khí về trạng thái ban đầu. Trong 7 quá trình trong giãn đẳng nhiệt, thể tích khối khí tăng lần lượt $n_1 = 1.10$, $n_2 = 1.09$, $n_3 = 1.08$, $n_4 = 1.07$, $n_5 = 1.06$, $n_6 = 1.05$, $n_7 = 1.04$ lần. Nhiệt độ của 8 quá trình đẳng nhiệt lần lượt là $T_1 = 373\,\mathrm{K}$, $T_2 = 363\,\mathrm{K}$, $T_3 = 353\,\mathrm{K}$, $T_4 = 343\,\mathrm{K}$, $T_5 = 333\,\mathrm{K}$, $T_6 = 323\,\mathrm{K}$, $T_7 = 313\,\mathrm{K}$, $T_8 = 303\,\mathrm{K}$. Cho hằng số khi lý tưởng là $R = 8.31\,\mathrm{J/K\cdot mol}$.

a, Entropy S là một hàm trạng thái trong nhiệt động lực học. Với các quá trình biến đổi thuận nghịch, khi người ta cấp cho một vật nhiệt độ T một nhiệt lượng δQ, ta có biểu thức

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Hãy chỉ ra rằng entropy S của 1 mol khí lý tưởng là một hàm trạng thái mà chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ T và thể tích V của khối khí.

b, Vẽ phác đồ thị chu trình của bài toán trên giản đồ T-S (giản đồ có trục tung là nhiệt độ T và trục hoành là entropy S của khối khí).

Ở phần này, chỉ yêu cầu vẽ phác hình dạng của đồ thị, không yêu cầu vẽ chính xác số liệu hay tỷ lệ.

c, Trong quá trình nén đẳng nhiệt duy nhất của chu trình, thể tích khối khí đã giảm đi bao nhiêu lần?

d, Tính công khí thực hiện trong một chu trình và hiệu suất của chu trình.

(Biên soạn bởi Log)

Bài giải

a, Theo nguyên lý 1 nhiệt động lực học:

$$TdS = dU + pdV. \tag{1}$$

Ta nhớ rằng nội năng khí lý tưởng tuân theo biểu thức:

$$dU = C_V dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT. \tag{2}$$

Phương trình Clapeyron-Mendeleev cho 1 mol khí lý tưởng:

$$p = \frac{RT}{V}. \tag{3}$$

Thay các phương trình (2) và (3) vào phương trình (1) rồi chia hai vế cho T, ta được

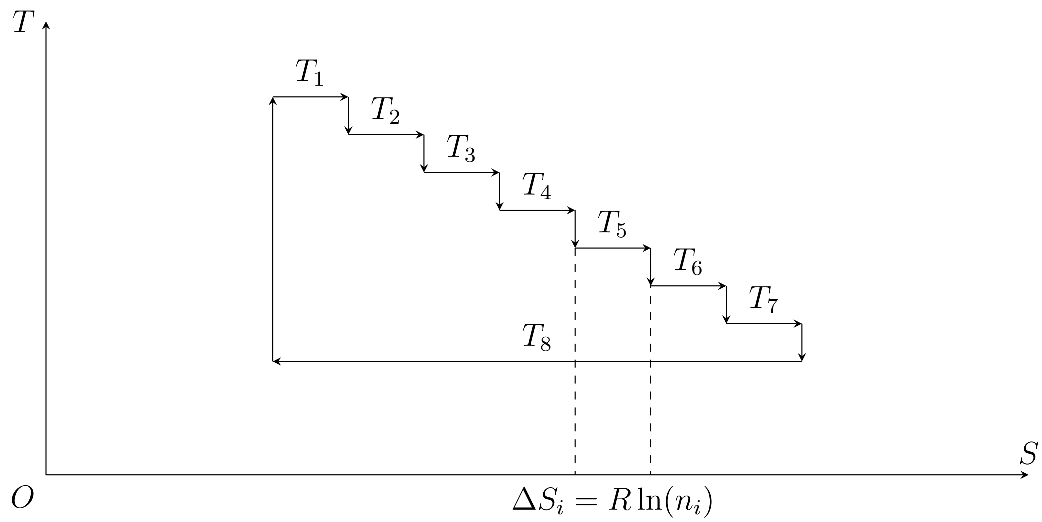
$$dS = \frac{R}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}. \tag{4}$$

Lấy nguyên hàm phương trình (4), ta thu được hàm entropy của khối khí là một hàm trạng thái chỉ phụ thuộc vào T và V:

$$S(T,V) = \frac{R}{\gamma - 1}\ln(T) + R\ln(V) + S_0. \tag{5}$$

Với S_0 là một hằng số.

b, Ta biết rằng, các quá trình đoạn nhiệt là các quá trình đẳng entropy (entropy không đổi), chúng sẽ là những đường thẳng đứng vuông góc với trục hoành trên đồ giản đồ T-S. Còn các quá trình đẳng nhiệt sẽ là các đường nằm ngang vuông góc với trục tung T, mỗi đường giãn đẳng nhiệt làm thể tích tăng n_i lần được biểu diễn trên giản đồ T-S này, theo biểu thức (5 sẽ ứng với một đoạn có độ dài $\Delta S_i = R\ln(n_i)$. Như vậy ta thu được đồ thị:



c, Ta có thể xác định được hiệu entropy giữa điểm đầu và điểm cuối của quá trình nén đẳng nhiệt thông qua 2 con đường của đồ thị. Gọi tỷ số thể tích giữa trạng thái đầu và trạng thái cuối của quá trình nén đẳng nhiệt là n_8. Ta có thể xác định được hiệu entropy giữa điểm đầu và điểm cuối của quá trình co đẳng nhiệt thông qua 2 con đường của đồ thị:

$$\begin{aligned} &R\ln(n_1) + R\ln(n_2) + ... + R\ln(n_6) + R\ln(n_7) = R\ln(n_8) \quad (= \Delta S_8) \\ &\Rightarrow n_8 = n_1n_2n_3n_4n_5n_6n_7 \approx 1.60. \end{aligned} \tag{6}$$

d, Việc tính công của chu trình này thông qua việc tính tổng công của từng quá trình nhỏ tương đối phức tạp. Song, ta hoàn toàn có thể thay thế công việc này thông qua tính tổng nhiệt lượng khí nhận nhiệt Q_1 và tổng nhiệt lượng khí nhả ra Q_2 rồi xác định công của khối khí thực hiện là $W' = Q_1 - Q_2$.

Theo định nghĩa của entropy nhiệt động lực học, ta dễ dàng có thể lấy nó ở dạng tích phân trong trường hợp này:

$$Q = \sum T_i \Delta S_i. \tag{7}$$

Áp dụng công thức trên, ta tìm được:

$$Q_1 = T_1R\ln(n_1) + T_2R\ln(n_2) + T_3R\ln(n_3) + ... + T_6R\ln(n_6) + T_7R\ln(n_7). \tag{8}$$

Và
$$Q_2 = T_8 R \left[\ln(n_1) + \ln(n_2) + \ln(n_3) + ... + \ln(n_6) + \ln(n_7)\right]. \tag{9}$$
Vậy công khí thực hiện trong quá trình là:
$$W' = Q_1 - Q_2 = \sum_{i=1}^{7} R\left(T_i - T_8\right)\ln(n_i) = 179\,\text{J}. \tag{10}$$
Hiệu suất của chu trình:
$$H = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_8 \sum_{i=1}^{7} \ln(n_1)}{\sum_{i=1}^{7} T_i \ln(n_i)} = 13.1\%. \tag{11}$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
a	Tìm được hàm entropy $S(T, V)$ (5)	0.50
b	Vẽ phác đồ thị	1.00
c	Tính được n_8 (6)	1.00
d	Tính Q_1 (8)	0.50
	Tính công W' (10)	0.50
	Tính hiệu suất H (11)	0.50

Mở rộng vấn đề:
Đây là một bài toán lấy ý tưởng từ bài 2 ngày 1 VPhO 2022 (một bài toán cũng thường xuất hiện trong các sách bài tập vật lý đại cương). Không khó để nhận thấy, việc mở rộng bài toán từ 3 cặp đường đẳng nhiệt và đoạn nhiệt lên thành 8 cặp đường không phải là chỉ để tăng sự phức tạp trong tính toán mà còn đòi hỏi người giải phải tìm ra được quy luật tổng quát của bài toán với số cặp đường đẳng nhiệt và đoạn nhiệt là bất kì. Phần **a** và **b** của bài toán đã được đưa vào với mục đích dẫn dắt đến một lời giải đơn giản hơn so với cách làm thường thấy.
Lời giải này đưa đến 2 thủ thuật nho nhỏ:

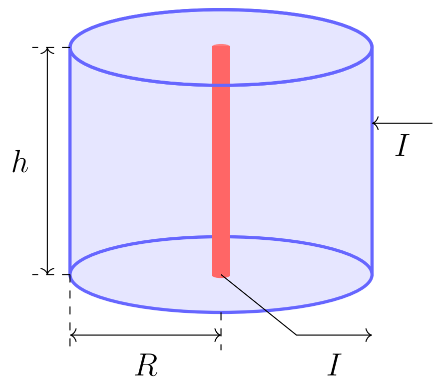
1. Đôi khi entropy cho phép ta đơn giản hoá các vấn đề trong tính toán (đặc biệt là trong các bài toán có các quá trình đẳng nhiệt và đoạn nhiệt).

2. Đôi khi, việc tính công của quá trình trở nên phức tạp hơn việc xác tìm nhiệt lượng thu Q_1 và nhiệt lượng toả Q_2.

Hiển nhiên, các thủ thuật kia chỉ có thể dùng từ "đôi khi", khá nhiều khi chúng phản tác dụng và việc sử dụng chúng hiệu quả không sẽ phụ thuộc vào kinh nghiệm của người giải. Cho một số ứng dụng đơn giản, hãy thử những mẹo trên và mở rộng bài toán này cho p quá trình giãn và q quá trình co, giải lại các bài toán về chu trình Carnot, chu trình Otto, chu trình Atkinson, chu trình Stirling,... chúng có thể không mang đến một lời giải hoàn hảo như ở bài toán này, song chúng vẫn có những hiệu quả nhất định khi sử dụng.
Đây chỉ là một bài toán mang tính giáo dục cũng như đưa ra các cách giải quyết vấn đề thú vị chưa được sử dụng nhiều trong các tài liệu Olympiad, các số liệu trong bài toán chỉ nhằm mục đích kiểm tra đáp số đơn giản hơn, không có ý nghĩa thực tế.

CÂU 3. (4.0 điểm)

Một diode chân không được cấu thành bởi hai vỏ kim loại hình trụ đặt đồng trục, có độ cao h rất lớn so với bán kính R của vỏ ngoài. Vỏ trong của diode này có bán kính rất nhỏ so với vỏ bên ngoài. Vỏ bên trong (Cathode), người ta đốt một sợi dây phát ra các electron có điện tích $-e$, khối lượng m bay ra với vận tốc đầu không đáng kể hướng tới vỏ bên ngoài (Anode). Lấy mốc điện thế tại vỏ bên trong là $V(0) = 0$. Khi ta cấp cho hai vỏ này một hiệu điện thế U (tức là vỏ bên ngoài có điện thế $V(R) = U$), sau khi dòng nhanh chóng ổn định, sẽ có một dòng điện I được truyền giữa hai vỏ, các hàm điện thế V, mật độ điện tích ρ và mật độ dòng j không phụ thuộc vào thời gian mà chỉ phụ thuộc vào bán kính r kể từ tâm của hệ.



a, Tìm biểu thức mật độ điện tích khối ρ theo điện thế V tại điểm có bán kính r theo h, I, e, m, r.

b, Chứng minh rằng, điện thế $V(r)$ là nghiệm của phương trình vi phân:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

c, Nghiệm của phương trình vi phân **b** sau khi thế điện trở suất tìm được ở phần **a** vào sẽ có dạng $V(r) = Ar^{\alpha}$, trong đó A và α là các hằng số không phụ thuộc vào r. Xác định các hệ số A và α theo I, e, m, ε_0, h, R.

d, Theo định luật Child-Langmuir hay còn được gọi là "định luật số-mũ-ba-phần-hai" (three-halves-power law), khi bỏ qua vận tốc đầu của các electron khi bật ra, các diode chân không bất kể hình dạng nào cũng sẽ có đường đặc tuyến Volt-Ampere tuân theo biểu thức:

$$I = KU^{3/2}.$$

Với K là một hằng số. Chứng minh rằng trường hợp diode chân không hình trụ tuân theo định luật này. Xác định hệ số K theo e, m, ε_0, h, R.

(Biên soạn bởi Log)

Bài giải

a, Theo tính đối xứng cầu của hệ, ta có thể dễ dàng suy ra mật độ dòng

$$j(r) = \frac{I}{2\pi h r}. \tag{1}$$

Một hạt electron chuyển động đến vị trí có bán kính r sẽ nhận được một công $eV(r)$ của điện trường, xem rằng công này được chuyển hoá làm tăng động năng của hạt điện tích $\frac{1}{2}mv^2$, từ đó ta xác định được vận tốc của hạt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV(r) \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{2eV(r)}{m}}. \tag{2}$$

Theo định nghĩa mật độ dòng:

$$j(r) = \rho v \Rightarrow \rho = \frac{j}{v} = \frac{I}{2\pi h r}\sqrt{\frac{m}{2eV}}. \tag{3}$$

b, Trong hệ đối xứng cầu, cường độ điện trường tại bán kính r là

$$E = -\frac{dV}{dr}. \tag{4}$$

Áp dụng định luật Gauss cho một vỏ trụ bán kính r và độ dày dr, ta có

$$\begin{gathered} E(r+dr)\cdot 2\pi h(r+dr) - E(r)\cdot 2h\pi r = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot 2\pi h r dr \\ \Rightarrow \frac{d}{dr}(E\cdot r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r. \end{gathered} \tag{5}$$

Từ (4) và (5), ta được:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{6}$$

c, Từ (3) và (6) ta thu được phương trình vi phân của $V(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2eV}}. \tag{7}$$

Thế dạng nghiệm $V(r) = Ar^{\alpha}$ vào phương trình (7), ta được:

$$A\alpha^2 r^{\alpha-1} = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2eA}}r^{-\alpha/2}. \tag{8}$$

Đồng nhất hệ số 2 vế, ta được:

$$\alpha - 1 = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}. \tag{9}$$

Và

$$A\alpha^2 = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2eA}} \Rightarrow A = \left(\frac{9I}{8\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3}. \tag{10}$$

d, Thay (9) và (10) vào công thức nghiệm

$$V(r) = \left(\frac{9I}{8\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} r^{2/3}. \tag{11}$$

Tại $r = R$ thì $V(R) = U$ nên

$$U = \left(\frac{9I}{8\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} R^{2/3}. \tag{12}$$

Hay

$$I = \left(\frac{8\pi\varepsilon_0 h}{9R}\sqrt{\frac{2e}{m}}\right) U^{3/2}. \tag{13}$$

Như vậy

$$K = \frac{8\pi\varepsilon_0 h}{9R}\sqrt{\frac{2e}{m}}. \tag{14}$$

Biểu điểm

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
a	Tìm được mật độ dòng j theo I (1)	0.25
	Tìm vận tốc v theo điện thế V (2)	0.50
	Tìm mật độ điện khối ρ theo V và r (3)	0.25
b	Viết biểu thức điện trường theo điện thế (4)	0.25
	Áp dụng định luật Gauss cho vỏ trụ (5)	0.50
	Kết hợp 2 phương trình để viết được phương trình vi phân (6)	0.25
c	Hoàn chỉnh phương trình vi phân (7)	0.25
	Thế dạng nghiệm của phương trình (8)	0.25
	Tính được α (9)	0.50
	Tính được A (10)	0.50
d	Thay điều kiện biên và viết được U theo I (12)	0.25
	Tính hệ số K (14)	0.25

Mở rộng vấn đề:
Đây là một bài toán không có các tính toán phức tạp nhưng khá khó để nhìn được ra đường hướng giải quyết, đòi hỏi người giải cần có một kiến thức nền khá tốt. Đối với những người đã học tương đối sâu về phân bố của điện từ trường và biết sử dụng các công cụ toán tốt, không khó để nhận thấy câu hỏi phần **b** chính là chứng minh phương trình Poisson $\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ đối với hệ toạ độ trụ có tính đối xứng trụ, đây là một phương trình được dẫn ra từ 2 trong 4 phương trình Maxwell, 1 phương trình là định luật Gauss về thông lượng của điện trường và 1 phương trình về lưu số của điện trường (liên hệ giữa điện trường và điện thế). Tổng quát hơn, với mọi bài toán về tĩnh điện và các hệ từ trường dừng, ta sẽ đều cần sử dụng 1 phương trình về thông lượng và 1 phương trình về lưu số để giải quyết chúng.
Bài toán diot chân không và định luật Child-Langumuir được lấy từ Bài tập giải sẵn "Diode chân không" trang 59-60 quyển *Điện từ học 2* của Jean Marie Brébec (bộ sách PFIEV), bản dịch của Lê Băng Xương, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam. Bài toán được tham khảo thêm từ bài 2.53

trang 109 trong quyển sách *Introduction to Electrodynamics* của David Griffiths cũng như các bài báo về "Child-Langumuir law".
Như ta có thể thấy, bài toán diode chân không này phổ biến nhất là trường hợp 2 bản tụ phẳng rộng có diện tích S đặt song song cách nhau một khoảng d như trong bài 2.53 quyển *Introduction to Electrodynamics*. Kết quả của bài toán này sẽ là:

$$I = \frac{4\varepsilon_0 S}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}U^{3/2}.$$

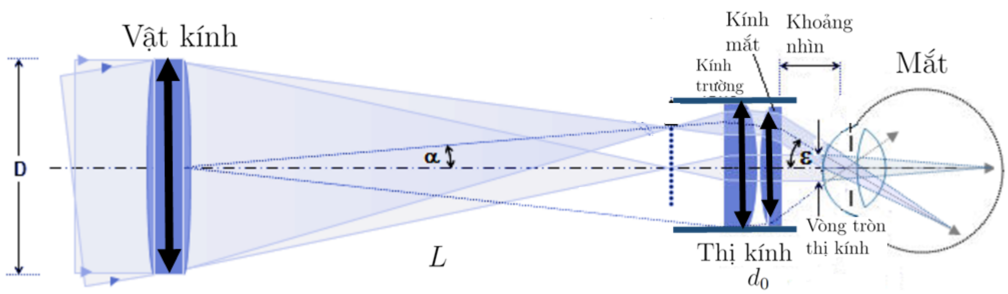
Các vấn để mở rộng cho bài toán này như khảo sát trường hợp electron có vận tốc ban đầu v_0 đáng kể cũng được được xét tới trong các bài báo Generalization of Child-Langmuir Law for Non-Zero Injection Velocities in a Planar và A new approach to the Child-Langmuir law.
Bài toán của chúng ta là dạng hình trụ của diode, tất nhiên, ta hoàn toàn có thể mở rộng bài toán này cho trường hợp hệ diode hình cầu, song nó đưa đến một phương trình vi phân tương đối phức tạp và không phù hợp để giải ở đây.

CÂU 4. (4.0 điểm)

Một học sinh được giao nhiệm vụ chế tạo một kính thiên văn đơn giản từ những dụng cụ tại gia. Thật may mắn, bố của cậu học sinh là chủ một xưởng sản xuất gia công mài tiện thuỷ tinh, quyết định giúp con trai của mình tạo ra ba thấu kính hội tụ để tạo một chiếc kính thiên văn khúc xạ đơn giản có những thông số tiêu cự-đường kính như sau

- Vật kính: $F = 1200$ mm
  $D = 130$ mm
- Kính trường: $f_0 = 45$ mm
  $d_0 = 30$ mm
- Kính mắt: $f = 15$ mm
  $d = 15$ mm

Thứ tự lắp đặt như sau: Vật kính → Kính trường → Kính mắt, được đặt đồng trục. Mục đích của kính trường là để tăng thị trường nhìn của kính thiên văn. Thực tế các thị kính kính thiên văn chuyên nghiệp trên thị trường hiện nay bao gồm ít nhất hai thấu kính thành phần. Thị kính tự chế này có hai thấu kính trường và thấu kính mắt đặt cách nhau một khoảng $l = 30$ mm. Biết mắt ngắm chừng ảnh ở vô cực. Sơ đồ kính thiên văn tự chế (Hình vẽ không đúng tỉ lệ).



1. Hãy xác định:

a, Khoảng cách giữa vật kính và kính trường theo F, f, f_0, l.

b, Độ bội giác của kính thiên văn theo F, f, f_0, l.

2. Để mắt nhận được toàn bộ ánh sáng từ việc quan sát, người ta đặt mắt ra xa kính mắt một khoảng Δ. Tức là khi đó *ảnh của vật kính* nằm trên mắt. Biết đồng tử mắt có đường kính khoảng 7 mm. Hãy xác định Δ và đường kính vòng tròn ảnh vật kính trên mắt khi đó, biến đổi Δ theo dạng

$$\Delta = f\left(a + \frac{f}{F}b\right).$$

Xác định a và b theo F, f, f_0, l. Hỏi mắt người có nhận được toàn bộ ánh sáng không?

3. Đặt mắt cách kính mắt khoảng $\Delta = 5$ mm. Biết Mặt Trăng có bán kính là $R_M = 1737.4$ km và cách Trái Đất $d_{ME} = 384400$ km. Hãy xác định xem bao nhiêu phần trăm diện tích ảnh của Mặt Trăng qua kính thiên văn xuất hiện trên vùng ta quan sát?

(Biên soạn bởi Zinc)

Bài giải

1. a, Sơ đồ tạo ảnh:

$$S_1 \xrightarrow[\infty \quad F]{F} S_2 \xrightarrow[L-F \quad l-f]{f_0} S_3 \xrightarrow[f \quad \infty]{f} S_4. \tag{1}$$

Ta có phương trình tạo ảnh của thấu kính trường là

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{L-F} + \frac{1}{d_0 - f} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow L = F + \frac{f_0(l-f)}{l-f-f_0} = 1177.5 \text{ mm}. \tag{3}$$

b, Độ bội giác của hệ ba thấu kính là

$$G_\infty = \frac{F}{f}\frac{l-f}{L-F} = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{f-l}{f_0}\right) = \frac{160}{3} \approx 53.33. \tag{4}$$

2. Ta có sơ đồ tạo ảnh của *vật kính* qua hệ thị kính:

$$S_1 \xrightarrow[L \quad d']{f_0} S_2 \xrightarrow[l-d' \quad \Delta]{f} S_3. \tag{5}$$

Ta có hệ phương trình thấu kính:

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{L} + \frac{1}{d'}. \tag{6}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l-d'} + \frac{1}{\Delta}. \tag{7}$$

Kết hợp với phương trình (3) và giải hệ ba phương trình ta thu được kết quả

$$\Delta = f\left[\frac{1}{1 + \dfrac{f}{f_0 - l}} + \frac{f}{F}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{f-l}{f_0}\right)^2}\right] = \frac{507}{64} \approx 7.92 \text{ mm}. \tag{8}$$

Đường kính vòng tròn ánh sáng xuất hiện trên đồng tử mắt người là

$$\delta = -\frac{D}{G_\infty} = -\frac{39}{16} = -2.4375\text{mm}. \tag{9}$$

Ta thấy rằng δ bé hơn kích thước đồng tử mắt người, nên người có thể nhìn được toàn bộ ánh sáng qua hệ.

3. Để xác định thị trường qua kính thiên văn, ta coi mắt người là nguồn sáng điểm rồi tìm ảnh của mắt qua hệ thấu kính. Ta có sơ đồ tạo ảnh

$$S_1 \xrightarrow[\Delta \quad d_1]{f} S_2 \xrightarrow[l-d_1 \quad d_2]{f_0} S_3 \xrightarrow[L-d_2 \quad d_3]{F} S_4. \tag{10}$$

Ta có hệ phương trình thấu kính

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{d_1}. \tag{11}$$
$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{l - d_1} + \frac{1}{d_2}. \tag{12}$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{L - d_2} + \frac{1}{d_3}. \tag{13}$$

Bấm máy thay số liệu ta thu được

$$d_1 = -7.5 \text{ mm} \tag{14}$$
$$d_2 = -225 \text{ mm} \tag{15}$$
$$d_3 = 8311.11 \text{ mm} \tag{16}$$

Giả sử từ mắt nhìn qua được toàn bộ thấu kính mắt. Khi đó đường kính vòng tròn nhìn được trên kính trường là d_0', khi đó

$$\left|\frac{d_1}{l - d_1}\right| = \frac{d}{d_0'} \tag{17}$$
$$\Rightarrow d_0' = 75 \text{ mm} > d_0 = 30 \text{ mm} \tag{18}$$

Nhận thấy rằng mắt người không thể nhận toàn bộ ánh sáng qua kính mắt.
Làm tương tự đối với kính trường, ta tìm được vòng tròn ánh sáng trên vật kính, gọi là D', khi đó

$$\left|\frac{d_2}{L - d_2}\right| = \frac{d_0}{D'} \tag{19}$$
$$\Rightarrow D' = 187 \text{ mm} > D = 130\text{mm} \tag{20}$$

Từ đó ta nhận định rằng ánh sáng đi qua toàn bộ vật kính sẽ không bị mất mát năng lượng khi đi đến mắt người, và *không ngược lại.*
Từ đó ta tìm được góc mở thị trường khi nhìn qua kính thiên văn là

$$\theta \approx \frac{D}{d_3} = 0.01564 \text{ rad}. \tag{21}$$

Đường kính góc của Mặt Trăng khi nhìn từ Trái Đất là

$$\theta_M = \frac{2R_M}{d_{ME}} = 0.00900 \text{ rad}. \tag{22}$$

Cuối cùng, ta xác định được tỉ lệ diện tích của Mặt Trăng so với trường nhìn qua kính thiên văn là

$$k = \left(\frac{\theta_M}{\theta}\right)^2 = 33.4\%. \tag{23}$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
a	Viết được biểu thức chữ và giá trị số của L	0.50
	Viết được biểu thức chữ và giá trị số của G_∞	0.50
b	Tìm được biểu thức chữ và giá trị của Δ	1.00
	Tìm được δ	0.50
c	Tìm được d_1, d_2, d_3	0.50
	Chứng minh được toàn bộ ánh sáng qua vật kính khi đến mắt không bị mất mát	0.50
	Tìm được tỉ số k	0.50

CÂU 5. (4.0 điểm)

Bức xạ vũ trụ hay **tia vũ trụ** (viết tắt là CR-*Cosmic ray*) là chùm tia các hạt photon hoặc hạt nhân nguyên tử có năng lượng cao phóng vào khí quyển Trái Đất từ không gian (bức xạ sơ cấp) và bức xạ thứ cấp được sinh ra do các hạt đó tương tác với các hạt nhân nguyên tử trong khí quyển với thành phần gồm hầu hết là các hạt cơ bản. Bức xạ vũ trụ sơ cấp đẳng hướng trong không gian và không đổi theo thời gian. Bức xạ vũ trụ có tính sát thương mạnh. Theo thiên văn học hiện đại, vũ trụ chứa đầy bức xạ điện từ còn sót lại sau vụ nổ Big Bang gọi là bức xạ nền vũ trụ hay bức xạ phông vi sóng vũ trụ (viết tắt là CMB-*Cosmic microwave background*). Xét sự tương tác giữa CR và CMB, được đơn giản thành phản ứng

$$p + \gamma \to \Delta.$$

Với p là hạt proton của chùm CR, γ là photon tàn dư của CMB, Δ là baryon nhẹ nhất (khi so sánh với các nucleon khác) có khối lượng nghỉ $m_\Delta = 1232$ MeV/c^2. Biết rằng hướng chuyển động của hai chùm tia tạo với nhau một góc θ.

a, Hãy tìm năng lượng E'_p của proton trong hệ quy chiếu khối tâm của hệ hạt.

b, Hãy tìm năng lượng E_p của proton trong hệ quy chiếu Thiên Hà theo các đại lượng E_γ, m_p, m_Δ, θ và c. Tính trong trường hợp θ bất kì và $\theta = \pi$ (va chạm trực diện).

Gợi ý: Trong mọi hệ quy chiếu quán tính, đại lượng $E^2 - |\vec{p}|^2c^2 = m_0^2c^4$ là một đại lượng bất biến. Trong đó E, $\vec{p}$ và m_0 lần lượt là năng lượng, động lượng và khối lượng nghỉ của một hạt chuyển động tương đối tính.

(Biên soạn bởi Zinc)

Bài giải

a, Trong hệ quy chiếu khối tâm của hệ hạt, tổng động lượng của hai hạt bằng 0, hai hạt va vào nhau với động lượng bằng nhau, trực diện và sau va chạm tạo ra hạt Δ đứng yên (do bảo toàn động lượng).
Sử dụng định luật bảo toàn động lượng, ta có

$$p'_\gamma c = p'_p c = \sqrt{E'^2_p - m_p^2c^4}. \tag{1}$$

Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$m_\Delta c^2 = E'_p + E'_\gamma \tag{2}$$
$$m_\Delta c^2 = E'_p + \sqrt{E'^2_p - m_p^2c^4} \tag{3}$$
$$(m_\Delta c^2 - E'_p)^2 = E'^2_p - m_p^2c^4 \tag{4}$$
$$m_\Delta^2c^4 - 2m_\Delta c^2E'_p = -m_p^2c^4 \tag{5}$$
$$\Rightarrow E'_p = \frac{m_\Delta^2 + m_p^2}{2m_\Delta}c^2. \tag{6}$$

b, Từ định luật bảo toàn động lượng ta có

$$p_\Delta^2 = p_p^2 + p_\gamma^2 + 2p_pp_\gamma\cos\theta. \tag{7}$$

Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$E_p + E_\gamma = \sqrt{p_\Delta^2 c^2 + m_\Delta^2 c^4} \tag{8}$$
$$E_p^2 + 2E_pE_\gamma + E_\gamma^2 = m_\Delta^2 c^4 + p_p^2 c^2 + E_\gamma^2 + 2E_\gamma p_p c\cos\theta \tag{9}$$
$$2E_\gamma(E_p - p_p c\cos\theta) = (m_\Delta^2 - m_p^2)c^4. \tag{10}$$

Cách khác: Ta có thể sử dụng quy tắc *vector 4 chiều* trong va chạm tương đối tính như sau

$$(E_\gamma, \vec{p_\gamma}) + (E_p, \vec{p}_p) = (E_\Delta, \vec{p}_\Delta) \tag{11}$$
$$(E_\gamma, \vec{p_\gamma})^2 + (E_p, \vec{p}_p)^2 + 2(E_\gamma, \vec{p_\gamma})(E_p, \vec{p}_p) = (E_\Delta, \vec{p}_\Delta)^2 \tag{12}$$
$$0 + m_p^2 c^4 + 2(E_p E\gamma - \vec{p}_p\vec{p_\gamma}c^2) = m_\Delta^2 c^4. \tag{13}$$

Cũng trùng với phương trình (10).
Với trường hợp $\theta = \pi$, tức va chạm trực diện, từ (10) ta sẽ có

$$E_p + \sqrt{E_p^2 - m_p^2 c^4} = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{2E_\gamma}c^4 \tag{14}$$

Chuyển phần tử căn thức thành vế phương trình độc lập rồi bình phương, biến đổi tiếp thu được

$$E_p(\pi) = \frac{(m_\Delta^2 - m_p^2)c^4}{4E_\gamma} + \frac{m_p^2 E_\gamma}{m_\Delta^2 - m_p^2}. \tag{15}$$

Đối với trường hợp θ bất kì, làm tương tự ta sẽ ra được phương trình bậc hai đối với E_p là

$$E_p^2\sin^2\theta - \frac{(m_\Delta^2 - m_p^2)c^4}{E_\gamma}E_p + \left[\left(\frac{(m_\Delta^2 - m_p^2)c^4}{2E_\gamma}\right)^2 + m_p^2c^4\cos^2\theta\right] = 0. \tag{16}$$

Giải phương trình ta thu được nghiệm thoả mãn

$$E_p(\theta) = \frac{(m_\Delta^2 - m_p^2)c^4}{2E_\gamma\sin^2\theta}\left(1 + \sqrt{\cos^2\theta - \frac{m_p^2E_\gamma^2\sin^2 2\theta}{(m_\Delta^2 - m_p^2)^2c^4}}\right). \tag{17}$$

Lưu ý rằng phương trình trên chỉ có nghiệm khi phần tử trong căn thức là dương. Tức là

$$\cos^2\theta - \frac{m_p^2E_\gamma^2\sin^2 2\theta}{(m_\Delta^2 - m_p^2)^2c^4} > 0 \tag{18}$$

Thu được điều kiện với góc mở của hướng hai hạt

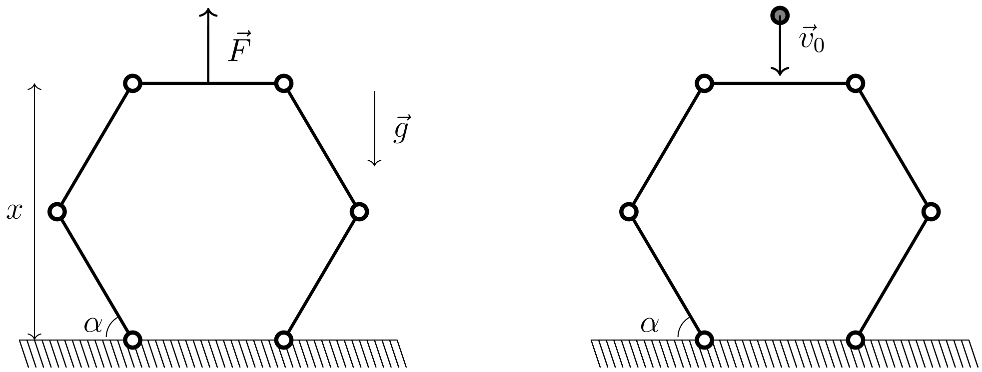
$$\sin\theta < \frac{(m_\Delta^2 - m_p^2)c^2}{2m_pE_\gamma}. \tag{19}$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
a	Nhận xét ra $\vec{p} = 0$ trong HQC khối tâm	0.5
	Viết được hai phương trình bảo toàn $E, \vec{p}$	0.5
	Biểu diễn đúng E'_p (6)	0.5
b	Dẫn ra được phương trình (10)	1
	Biểu diễn đúng $E_p(\pi)$ (15)	1
	Biểu diễn đúng $E_p(\theta)$ (16)	0.5

CÂU 6. (4.0 điểm)

Một chiếc khung có bao gồm 5 thanh cứng đồng chất khối lượng m vài có chiều dài l được nối với sàn và nối với nhau bằng các chốt tạo thành lục giác với các cạnh bằng nhau và nằm đối xứng 2 bên (như hình vẽ). Xem rằng không có các ma sát tại các chốt nối. Gọi góc α là góc tạo bởi một thanh ở bên với mặt phẳng nằm ngang. Gia tốc trọng trường là g.



1. Ta đặt vào tâm của thanh ở giữa một lực F theo phương thẳng đứng hướng từ dưới lên trên. Xác định gia tốc góc các thanh $\ddot{\alpha}$ ở bên tại thời điểm cơ hệ đang đứng yên tạm thời ($\dot{\alpha} = 0$) theo m, g, F và α.

2. Xét trường hợp lực F đặt vào giữa thanh ở giữa theo phương từ dưới lên trên và độ lớn có dạng $F = k(x_0 - x)$ với x là khoảng cách từ sàn tới độ cao của thanh ở giữa, k và x_0 là các hằng số. Tại vị trí góc $\alpha = \alpha_0$, hệ khung đạt trạng thái cân bằng bền.

a, Tìm hằng số x_0 theo l, m, g, k và α_0.

b, Tính chu kỳ dao động nhỏ của hệ quanh vị trí cân bằng bền theo l, m, g, k và α_0.

3. Bỏ qua lực F đặt vào hệ ở các phần trước. Tại thời điểm $\alpha = \alpha_1$ và $\dot{\alpha} = 0$, một vật nhỏ có khối lượng M có vận tốc v_0 theo phương thẳng đứng chiều từ trên xuống dưới đập vào tâm thanh ở giữa. Xem rằng va chạm này là va chạm hoàn toàn đàn hồi và thời gian va chạm vô cùng ngắn sao cho tọa độ của các vật thay đổi không đáng kể trong quá trình va chạm.

a, Tính vận tốc góc $\dot{\alpha}$ của các thanh ở hai bên ngay sau va chạm.

b, Tính vận tốc v của vật nhỏ ngay sau va chạm.

(Biên soạn bởi Log)

Bài giải

Lời giải chính thức:

1. Động năng của hệ khung là:

$$K = ml^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right). \tag{1}$$

Thế năng trọng trường của hệ so với mặt đất:3

$$U = 6mgl\sin\alpha. \tag{2}$$

Công của lực F và thế năng được chuyển hóa thành động năng của hệ khung, theo định lý động năng dạng vi phân:

$$dK = -dU + Fdx \Rightarrow \frac{dK}{d\alpha} = -\frac{dU}{d\alpha} + F\frac{dx}{d\alpha}. \tag{3}$$

Thế (1) và (2) vào (3), sử dụng phép đạo hàm $\dfrac{d(\dot{\alpha}^2)}{d\alpha} = \dfrac{1}{\dot{\alpha}}\dfrac{d(\dot{\alpha}^2)}{dt} = 2\ddot{\alpha}$ và $\dfrac{dx}{d\alpha} = 2l\cos\alpha$, ta được

$$2ml^2\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right)\ddot{\alpha} - 8ml^2\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha = -6mgl\cos\alpha + 2Fl\cos\alpha. \tag{4}$$

Tại thời điểm $\dot{\alpha} = 0$, ta tìm được gia tốc góc của các thanh ở bên là:

$$\ddot{\alpha} = \frac{(F - 3mg)\cos\alpha}{2ml\left(\dfrac{1}{3} + 2\cos^2\alpha\right)}. \tag{5}$$

2.

a, Áp dụng kết quả phần **1**, để hệ cân bằng thì tại thời điểm thả bất kì không vận tốc đầu thì ta đều có $\ddot{\alpha} = 0$, tức là

$$F = 3mg. \tag{6}$$

Tại vị trí cân bằng, lực $F = k(x_0 - 2l\sin\alpha_0)$ nên

$$x_0 = 2l\sin\alpha_0 + \frac{3mg}{k}. \tag{7}$$

b, Để khảo sát dao động nhỏ, ta đặt $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$ với $\delta\alpha \ll \alpha_0$. Như vậy, ta có thể viết biểu thức lực F theo độ lệch nhỏ $\delta\alpha$ như sau:

$$F = k[x_0 - \sin(\alpha_0 + 2l\delta\alpha)] \approx 3mg - 2kl\cos\alpha_0\delta\alpha. \tag{8}$$

Trong dao động nhỏ, ta có thể bỏ qua các số hạng bậc 2 trong biểu thức lực gia tốc như $\dot{\alpha}^2$, tức là ta có thể sử dụng trực tiếp biểu thứ (5) để xác định gia tốc góc:

$$\delta\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha} \approx -\frac{k\cos^2\alpha_0}{m\left(\dfrac{1}{3} + 2\cos^2\alpha_0\right)}\delta\alpha. \tag{9}$$

Từ đó, ta tìm được tần số dao động là

$$\omega = \sqrt{\frac{k\cos^2\alpha_0}{m\left(\dfrac{1}{3} + 2\cos^2\alpha_0\right)}}. \tag{10}$$

Tức là hệ dao động nhỏ với chu kỳ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(\dfrac{1}{3} + 2\cos^2\alpha_0\right)}{k\cos^2\alpha_0}}. \tag{11}$$

3. Gọi v là vận tốc của vật nhỏ sau va chạm.
Do va chạm hoàn toàn đàn hồi và động năng của hệ được bảo toàn:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + ml^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right). \tag{12}$$

Ta mô hình xung lực mà vật nhỏ tác dụng lên bộ khung bằng một lực F có hướng ngược lại với hướng lực F ở phần **1** tác dụng trong khoảng thời gian rất ngắn Δt. Như vậy, theo định lý biến thiên động lượng với vật nhỏ, ta có

$$F\Delta t = M(v + v_0). \tag{13}$$

Xem rằng ảnh hưởng của $\dot{\alpha}^2$ trong biểu thức lực trong quá trình va chạm rất nhanh là nhỏ và bỏ qua được, ta áp dụng biểu thức (5) nhưng với chiều của lực F là ngược lại, thành phần liên quan đến trọng lực ở đây có thể xem như rất nhỏ so với xung lực va chạm F, như vậy ta tìm được biểu thức thứ hai về liên hệ giữa v và $\dot{\alpha}$ sau va chạm:

$$M(v + v_0) = F\Delta t = \frac{ml\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha}\ddot{\alpha}\Delta t = \frac{ml\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha}\dot{\alpha}. \tag{14}$$

Để thuận tiện, ta sẽ viết lại các phương trình (12) và (14) theo một cách gọn gàng hơn một chút:

- Từ phương trình (14), ta được:
$$v + v_0 = \frac{ml\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right)}{M\cos\alpha}\dot{\alpha}. \tag{15}$$
- Hệ phương trình ta có được là một hệ phương trình bậc 1 giả bậc 2, như mọi bài toán va chạm đàn hồi khác, ta sẽ viết lại phương trình (12) như sau:
$$(v_0 - v)(v_0 + v) = 2\frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{M}\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right). \tag{16}$$
Chia (16) cho (15), ta được:
$$v_0 - v = 2l\dot{\alpha}\cos\alpha. \tag{17}$$

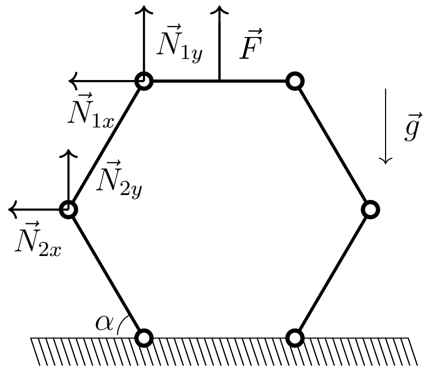
Hệ phương trình (15) và (17) là hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn, từ đó, ta dễ dàng giải được:
a, Vận tốc góc các thanh ở bên sau va chạm:

$$\dot{\alpha} = \frac{v_0}{l}\left[\frac{m}{M\cos\alpha}\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\alpha\right) + \cos\alpha\right]^{-1}. \tag{18}$$

b, Vận tốc của vật nhỏ sau va chạm:

$$v = v_0\frac{\frac{m}{M\cos\alpha}\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\alpha\right) - \cos\alpha}{\frac{m}{M\cos\alpha}\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\alpha\right) + \cos\alpha}. \tag{19}$$

Lời giải bằng động phương pháp tách vật và lực gia tốc (với sự giúp đỡ của bạn Đinh Đức Thiện):
1.



Gọi N_{1x} và N_{1y} là hình chiếu của lực một thanh ở bên tác dụng lên thanh trên cùng. N_{2x} và N_{2y} là hình chiếu của lực một thanh bên phía dưới tác dụng lên thanh bên phía trên (như hình vẽ). Định luật 2 Newton cho thanh trên cùng

$$F - mg + 2N_{1y} = m\frac{d^2}{dt^2}(2l\sin\alpha) = 2ml\left(-\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \ddot{\alpha}\cos\alpha\right). \tag{20}$$

Định luật 2 Newton cho chuyển động khối tâm thanh bên phía trên theo 2 phương

$$-mg - N_{1y} + N_{2y} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{3}{2}l\sin\alpha\right) = \frac{3}{2}ml\left(-\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \ddot{\alpha}\cos\alpha\right). \tag{21}$$

Và

$$-N_{1x} + N_{2x} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}l\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}ml\left(-\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \ddot{\alpha}\sin\alpha\right). \tag{22}$$

Định luật 2 Newton chuyển động quay cho tâm quay khối tâm thanh bên phía trên

$$-\left(N_{1x} + N_{2x}\right)\frac{1}{2}l\cos\alpha - \left(N_{1y} + N_{2y}\right)\frac{1}{2}l\sin\alpha = \frac{1}{12}ml^2\ddot{\alpha}.$$

Hay

$$-\left(N_{1x} + N_{2x}\right)\cos\alpha - \left(N_{1y} + N_{2y}\right)\sin\alpha = \frac{1}{6}ml\ddot{\alpha}. \tag{23}$$

Định luật 2 Newton tâm quay cố định của thanh bên phía dưới

$$-mg\frac{1}{2}l\cos\alpha + N_{2x}l\cos\alpha - N_{2y}l\sin\alpha = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\alpha}.$$

Hay

$$-mg\cos\alpha + 2N_{2x}\cos\alpha - 2N_{2y}\sin\alpha = \frac{2}{3}ml\ddot{\alpha}. \tag{24}$$

Giải hệ phương trình (20), (21), (22), (23) và (24), với $\dot{\alpha} = 0$, ta xác định được gia tốc góc các thanh ở bên là

$$\ddot{\alpha} = \frac{(F - 3mg)\cos\alpha}{2ml\left(\dfrac{1}{3} + 2\cos^2\alpha\right)}.$$

2. Giống như lời giải chính thức.

3. Coi xung lực trao đổi giữa thanh và vật nhỏ là F như phần **1.** nhưng ngược hướng. Giống như lời giải chính thức, ta thu được phương trình (13).

Hệ 5 phương trình (20), (21), (22), (23) và (24) trong phần này sẽ trở thành:

$$F\Delta t + 2N_{1y}\Delta t = 2ml\dot{\alpha}\cos\alpha. \tag{25}$$

$$-N_{1y}\Delta t + N_{2y}\Delta t = \frac{3}{2}ml\dot{\alpha}\cos\alpha. \tag{26}$$

$$-N_{1x}\Delta t + N_{2x}\Delta t = -\frac{1}{2}ml\dot{\alpha}\sin\alpha. \tag{27}$$

$$-\left(N_{1x}\Delta t + N_{2x}\Delta t\right)\cos\alpha - \left(N_{1y}\Delta t + N_{2y}\Delta t\right)\sin\alpha = \frac{1}{6}ml\dot{\alpha}. \tag{28}$$

$$2N_{2x}\Delta t\cos\alpha - 2N_{2y}\Delta t\sin\alpha = \frac{2}{3}ml\dot{\alpha}. \tag{29}$$

Giải hệ phương trình (25), (26), (27), (28) và (29), ta thu được phương trình (14). Phần còn lại của lời giải sẽ trở về như lời giải chính thức.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
1	Viết động năng K (1)	0.25
	Viết thế năng U (2)	0.25
	Áp dụng định lý biến thiên động năng (4)	0.25
	Tính được gia tốc góc $\ddot{\alpha}$	0.25
2a	Xác định điều kiện để cân bằng (6)	0.25
	Tính x_0 (7)	0.25
2b	Viết phương trình dao động điều hòa (9)	0.25
	Tìm được chu kỳ dao động (11)	0.25
3a	Viết phương trình bảo toàn năng lượng (12)	0.25
	Viết được liên hệ thứ hai giữa v và $\dot{\alpha}$ (14)	0.75
3b	Tính vận tốc góc $\dot{\alpha}$ (18)	0.50
	Tính vận tốc vật sau va chạm v (19)	0.50

Mở rộng vấn đề:

Đây là một bài toán có liên kết tương đối phức tạp, dù hệ khung chỉ có 1 bậc tự do nhưng việc sử dụng lực và gia tốc để giải quyết bài toán này như lời giải thứ hai được đưa ra trở nên rất phức tạp trong tính toán, đòi hỏi người giải phải vận dụng khéo léo các kiến thức ta có.

Ở phần **1**, sử dụng định lý động năng có thể xem là cách làm hiệu quả nhất. Việc định nghĩa ra một hàm thế năng cho lực F và đưa bài toán về bảo toàn năng lượng là một cách làm không chặt chẽ vì lực F không thể chắc rằng nó là một lực thế, song, cách làm này có thể chấp nhận được vì lực là một đại lượng không phụ thuộc vào lịch sử, quá trình, với bất kỳ một quá trình khác nhau nào nhưng có cùng một giá trị của lực ứng với một trạng thái xác định, các thông tin về cơ hệ tại thời điểm đó cũng là tương đương và kết quả vẫn là chính xác.

Phần **3** của bài toán là một phần có thể nói là rất khó về ý tưởng vật lý đối với học sinh THPT. Thường ở các bài toán va chạm, ta sẽ sử dụng các phương trình bảo toàn để lập hệ phương trình và giải. Tuy nhiên trong bài toán này, ta không thể thấy một động lượng hay một momen động lượng ứng với một trục nào được bảo toàn. Cách dẫn dắt và lời giải của bài toán cũng đã đưa ra một cách giải quyết tạm thời ổn thỏa.

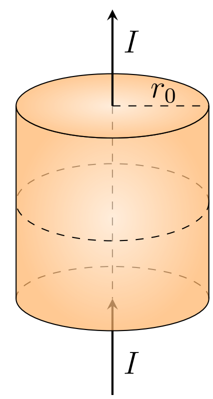
Bài toán này được lấy ý tưởng từ các bài: Bài cơ học TST 2016, Bài 1 ngày 1 TST 2005, Bài 1 ngày 1 TST 2001, Bài 48 trong quyển sách "200 more puzzling Physics problems" của Péter Gnädig , Gyula Honyek và Mate Vigh, bài 1.30 trong quyển sách "A guide to physics problems" tập 1 của Sidney B. Cahn và Boris E. Nadgorny.

CÂU 7. (4.0 điểm)

Có một sợi dây hình trụ bằng vật liệu đồng chất dẫn điện dẫn nhiệt, biết rằng khi nhiệt độ môi trường là T_0 thì chiều dài của nó là l_0, bán kính là r_0 và điện trở suất của nó là ρ_0. Điện trở suất của vật liệu thay đổi theo nhiệt độ theo hàm $\rho(T) = \rho_0 (1 + \beta (T - T_0))$, hệ số giãn nở tuyến tính là α. Bây giờ một dòng điện có cường độ I chạy vào và đợi cho hệ cân bằng nhiệt. Biết rằng theo vật liệu toả nhiệt ra môi trường với hệ số λ với công suất

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{loss}} = \lambda S(T - T_0),$$

với S là diện tích bề mặt toả nhiệt.



a, Giả sử rằng hình trụ dẫn nhiệt tốt và nhiệt độ tại mỗi vị trí là như nhau khi nó ổn định, hãy tính nhiệt độ T_f lúc cân bằng (khai triển đến bậc nhất của α, β).

b, Giả sử rằng hình trụ dài và nhiệt độ khác nhau tại các vị trí khác nhau trong quá trình cân bằng, điện trở suất và sự nở vì nhiệt được bỏ qua (nghĩa là lấy $\alpha = \beta = 0$), hệ số dẫn nhiệt Fourier k là một hằng số và nhiệt độ ở cả hai đầu được giả định là T_0, hãy tìm phân bố nhiệt độ $T(x)$ trên khối trụ.

Gợi ý: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y'' - Ay + B = 0$ $(A > 0)$ là

$$y = \frac{B}{A} + C_1 e^{\sqrt{A}x} + C_2 e^{-\sqrt{A}x},$$

với C_1 và C_2 là các hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu.

(Biên soạn bởi Zinc và Yukon)

Bài giải

a, Khi hình trụ ổn định nhiệt, công suất tỏa nhiệt Joule khi dòng điện chạy qua bằng công suất tỏa nhiệt ra môi trường.
Công suất tỏa nhiệt Joule trên toàn bộ dây dẫn là

$$\begin{aligned} P_j &= I^2 R = I^2 \frac{\rho l}{\pi r^2} \\ &= I^2 \frac{\rho_0 l_0}{\pi r_0^2}[1 + (\beta - \alpha)(T - T_0)]. \end{aligned} \tag{1}$$

Ở đây ta sử dụng liên tiếp các bước xấp xỉ tuyến tính (v.d $(1+\beta)(1+\alpha) \approx 1 + \beta + \alpha$ với β và α nhỏ).
Công suất tỏa nhiệt ra môi trường trên toàn dây dẫn là

$$\begin{aligned} P_l &= \lambda S(T - T_0) \\ &= \lambda \cdot 2\pi r l (T - T_0) \\ &= 2\pi \lambda r_0 l_0 (T - T_0)[1 + 2\alpha(T - T_0)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Điều kiện cân bằng nhiệt

$$I^2\frac{\rho_0 l_0}{\pi r_0^2}\frac{1+(\beta-\alpha)(T-T_0)}{1+2\alpha(T-T_0)} = 2\pi\lambda r_0 l_0(T-T_0). \tag{3}$$

Bỏ qua thành phần bậc 2 của β và α có được

$$T_f = T_0 + \frac{I^2\rho_0}{2\pi^2\lambda r_0^3}\left(1+\frac{I^2\rho_0}{2\pi^2\lambda r_0^3}(\beta-3\alpha)\right) \tag{4}$$

b, Ký hiệu dòng nhiệt là $\vec{j} = j\hat{x}$.
Phương trình truyền nhiệt theo định luật Fourier

$$j = -k\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{5}$$

Ở đây ta xét một lát cắt của hình trụ có chiều dài dx tại tọa độ x. Thông lượng nhiệt đi ra khỏi lát cắt này là

$$\begin{aligned} dP_{loss} &= \lambda\cdot 2\pi r_0 dx(T-T_0) + j(x+dx)\pi r_0^2 - j(x)\pi r_0^2 \\ &= \left[2\pi\lambda r_0(T-T_0) + \pi r_0^2\frac{\partial j}{\partial x}\right]dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Nhiệt năng Joule tỏa ra tại lát cắt này là

$$dP_j = I^2\frac{\rho dx}{\pi r_0^2}. \tag{7}$$

Tại chế độ dừng, hai lượng nhiệt này phải bằng nhau. Khi đó

$$\begin{aligned} 2\pi\lambda r_0(T-T_0) + \pi r_0^2\frac{\partial^2(T-T_0)}{\partial x^2} &= I^2\frac{\rho}{\pi r_0^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T-T_0) - \frac{2\lambda}{kr_0}(T-T_0) + \frac{I^2\rho_0}{k\pi^2 r_0^4} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$T(x) = T_0 + \frac{I^2\rho_0}{2\lambda\pi^2 r_0^3}\left(1 + C_1 e^{\mu(x-x_0)} + C_2 e^{-\mu(x-x_0)}\right). \tag{9}$$

Với $\lambda = \sqrt{\frac{2\lambda}{kr_0}}$, C_1, C_2 là các đại lượng không thứ nguyên, x_0 là một hằng số phụ thuộc vào điều kiện đầu.
Giải hệ phương trình điều kiện biên $T(0) = T(l) = T_0$, ta sẽ thu được giá trị của C_1, C_2. Từ đó ta có nghiệm

$$T(x) = T_0 + \frac{I^2\rho_0}{2\lambda\pi^2 r_0^3}\left(1 - \frac{\cosh[\mu(x-x_0)]}{\cosh(\mu l_0/2)}\right), \tag{10}$$

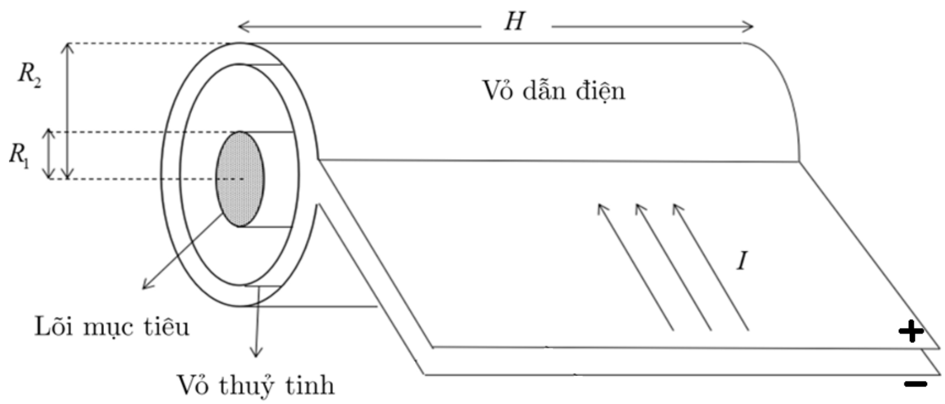
với cosh là hàm cos hyperbolic, $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Biểu điểm

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
a	Tìm được công suất tỏa nhiệt Joule (1)	0.50
	Tìm được công suất tỏa nhiệt (2)	0.50
	Khai triển tìm được $T - T_0$ (4)	0.50
b	Tìm được thông lượng nhiệt tại vi phân thể tích (6)	0.50
	Tìm được nhiệt lượng tỏa ra tại vi phân thể tích (7)	0.25
	Đưa về dạng phương trình vi phân và đưa ra dạng nghiệm tổng quát (8)	1.00
	Tìm được nghiệm riêng phù hợp điều kiện biên (10)	0.75

CÂU 8. (4.0 điểm)

Máy co góc plasma (*Angular pinch*) sử dụng từ trường để tăng tốc và định hướng dòng plasma, do đó nó có thể tạo ra một vụ nổ plasma tại một mục tiêu ngay lập tức. Thiết bị được thể hiện trên hình dưới. Có một tấm dẫn xung quanh ống thủy tinh chân không và chứa một thanh mục tiêu có cùng chiều dài, bỏ qua độ dày của thành ống thủy tinh và độ dày của vỏ ruột dẫn, và $H \gg R_2$. Ống chứa đầy hiđro bị ion hóa thành plasma có mật độ số điện tích dương và âm đều là n. Khi $t = 0$, người ta đặt một nguồn điện vào vỏ dây dẫn để dòng điện tăng nhanh từ 0 đến I và dòng điện I được giữ nguyên trong một khoảng thời gian, dòng điện chạy đều dọc theo hướng tiếp tuyến của vỏ hình trụ. Bỏ qua chuyển động nhiệt của các hạt, tương tác Coulomb và va chạm giữa các hạt, điện tích nguyên tố là e, khối lượng của các electron và hạt nhân hydro lần lượt là m_e, m_p.



a, Một hạt có điện tích q và khối lượng m ở khoảng cách từ trục trung tâm $r\,(R_1 < r < R_2)$ sau khi dòng điện ổn định tới I. Tìm tốc độ tức thời v_0 của hạt.

b, Tìm thời điểm $t(r)$ khi hạt trong câu hỏi trước chuyển động đến vị trí R_1.

c, Giả sử hạt va chạm với thanh mục tiêu hoàn toàn không đàn hồi, tìm áp suất $P(t)$ trên bề mặt của thanh mục tiêu tại thời điểm t. Trên thực tế, plasma trong ống là các electron và hạt nhân hydro bị ion hóa, điều này cho thấy chuyển động của một loại hạt có thể bị bỏ qua khi t nhỏ, và ảnh hưởng của hạt này cần được bỏ qua trong câu trả lời cuối cùng.

d, Xác định thông số thiết bị $\beta = \dfrac{P_{\max}}{\omega_B}$, trong đó ω_B là mật độ năng lượng của từ trường chân không và độ lớn của nó là $\dfrac{B^2}{2\mu_0}$. Sau đó, so sánh nó với $\beta\,(\approx 10^{-1} \sim 1)$ của hầu hết các thiết bị Tokamak (định hướng dòng plasma dạng donut) và thể hiện những ưu điểm của máy co góc. Đối với phép tính số trong câu hỏi này, hãy thay $\dfrac{\mu_0}{4\pi} = 1 \times 10^{-7}$ N/A^2, $H = 30.0$ m, $R_1 = 1.0$ mm, $R_2 = 1.00$ m, $n = 1.00 \times 10^8$ m^{-3}.

(Biên soạn bởi Zinc và Yukon)

Bài giải

a, Chọn hệ tọa độ trụ $(r,\ \phi,\ z)$ sao cho chiều tăng của ϕ trùng với chiều dòng điện qua trụ.
Ta có từ trường bên trong trụ là đều và bằng:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{i}{H}\hat{z}, \tag{1}$$

với i là dòng điện tức thời trên trụ.
Do đối xứng, khi từ trường tăng lên khi dòng điện tăng, sẽ có điện trường xoáy theo phương $\hat{\boldsymbol{\phi}}$.
Điện trường này sẽ gây một xung lượng lên các hạt điện tích trong khoảng không bên trong trụ.
Theo định luật Faraday

$$\begin{aligned} 2\pi r E(r) &= \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \\ \Rightarrow E &= \frac{\mu_0 r}{2H}\frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Theo định luật Lenz, E hướng ngược chiều $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (là chiều dòng điện gây ra biến thiên từ trường) (giả sử $\dfrac{\partial i}{\partial t} > 0$).
Có tốc độ mà một hạt tích điện nhận được

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \frac{\vec{F}}{m} dt \\ &= -\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{I} \frac{\mu_0 q r}{2mH} \hat{\boldsymbol{\phi}} di \\ &= -\frac{\mu_0 q r I}{2mH}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \tag{3}$$

b, Khi dòng điện đã ổn định, các điện tích chỉ chuyển động trong từ trường. Do đó tốc độ từng hạt được bảo toàn.
Do từ trường hướng theo trục $\hat{z}$, vận tốc đầu vuông góc với trục $\hat{z}$ nên chuyển động sau đó của hạt nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\hat{z}$.
Ký hiệu R_0 là tọa độ r ban đầu của hạt ta đang xét.
Như vậy

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \Rightarrow |\vec{v}| &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2} = v_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ta nhận thấy trong trường hợp này, momen động lượng của một hạt tích điện (so với trục z) không được bảo toàn. Theo đó

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times (q\vec{v} \times \vec{B}) = q[(\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{v} - (\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{B}] = -\frac{q\vec{B}}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial t}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L} + \frac{qr^2\vec{B}}{2} &= \text{const} \\ &= -mR_0 v_0 \hat{z} + \frac{qR_0^2 B}{2}\hat{z} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ đó tìm được vận tốc v_ϕ theo phương tiếp tuyến (không xét chiều)

$$\begin{aligned} v_\phi &= \frac{qr^2B}{2mr} \\ &= \frac{qB}{2m}r. \end{aligned} \tag{7}$$

Do đó vận tốc theo phương tiếp tuyến $\dot{r}$

$$\begin{aligned} |\dot{r}| &= \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{qB}{2m}\right)^2 r^2} \\ &= \frac{qB}{2m}\sqrt{R_0^2 - r^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dễ dàng nhận thấy để biểu thức có nghĩa, $r < R_0$ trong suốt quá trình chuyển động. Do đó $\dot{r}$ mang dấu âm.
Khoảng thời gian từ khi dòng điện được bật lên cho đến khi vật đang xét đập vào thành trong của ống trụ là

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{R_0}^{R_1} -\frac{2m}{qB}\frac{dr}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \\ &= \frac{2m}{qB}\arccos\left(\frac{R_1}{R_0}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

c, Chú ý rằng với t nhỏ, tác động do các hạt có khối lượng bé hơn sẽ là chủ đạo (khối lượng electron nhỏ hơn proton khoảng 2000 lần).
Tại thời điểm t, các hạt tới từ lớp $r = R(t)$ sẽ đập vào thành trong trụ với $R(t)$ bằng

$$R(t) = \frac{R_1}{\cos\left(\frac{qBt}{2m}\right)}. \tag{10}$$

Động lượng mà một hạt truyền cho thành trong trụ khi đập vào là

$$\begin{aligned} p_1 = m\dot{r} &= \frac{qB}{2}\sqrt{R_1^2\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{qBt}{2m}\right)} - 1\right)} \\ &= \frac{qBR_1}{2}\tan\left(\frac{qBt}{2m}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Áp suất tác dụng lên thành trong của trụ

$$p = \frac{1}{2\pi R_1 l}\frac{qBR_1}{2}\tan\left(\frac{qBt}{2m}\right) n \cdot 2\pi R(t)\frac{dR}{dt}, \tag{12}$$

với $R(t)$ là hàm được định nghĩa ở trên. Đặt $\omega = \dfrac{qB}{2m}$.
Ta tìm được áp suất là

$$p = nm\omega^2 R_1^2 \frac{\sin^2(\omega t)}{\cos^4(\omega t)}. \tag{13}$$

d, Ta thấy p là hàm đồng biến theo t (khi $\omega t < \dfrac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} p_{max} &= nm\omega^2 R_2^2\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right] \\ \Rightarrow \beta = \frac{p_{max}}{\omega_B} &= \frac{\mu_0 n e^2}{2m}R_2^2\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

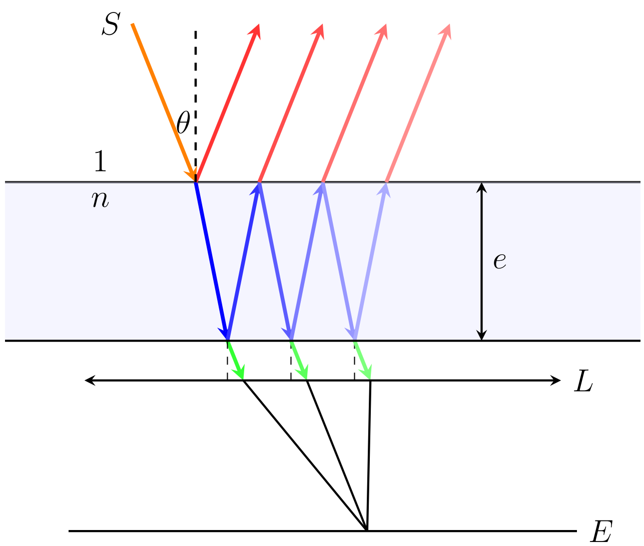
Thế số, ta được $\beta = 1.77 > 1$.

Biểu điểm

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
a	Tìm được từ trường bên trong trụ (1)	0.10
	Tìm được điện trường bên trong trụ theo định luật Faraday (2)	0.10
	Chú ý rằng vẫn truyền một xung lượng cho hạt tích điện khi $\Delta t \to 0$	0.10
	Tìm được vận tốc truyền cho hạt tích điện (3)	0.20
b	Nhận ra rằng tốc độ hạt là không đổi và tìm được thành phần vận tốc theo phương bán kính	0.25
	Đạo hàm momen động lượng và đưa ra phương trình (6) (dạng vector hoặc vô hướng)	0.75
	Đưa về dạng phương trình vi phân tại (8)	0.25
	Tích phân để tìm được khoảng thời gian hạt đập vào thành trong (9)	0.25
c	Tìm được bán kính đầu của các hạt đập vào thành trong trụ tại thời điểm t (10)	0.25
	Tìm được động lượng mà hạt truyền cho trụ (11)	0.50
	Tìm được dạng cơ bản của áp suất tác dụng lên thành trong trụ (12)	0.50
	Khai triển và đưa về dạng hoàn chỉnh (13)	0.25
d	Tìm được P_{max} theo R_2/R_1 (14)	0.25
	Tìm được giá trị (bằng số và biểu thức) của β	0.25

CÂU 9. (4.0 điểm)

Giao thoa kế Fabri-Perot là một bản thuỷ tinh mỏng hai mặt song song có bề dày e, chiết suất n đặt trong không khí có chiết suất 1. Chiếu sáng bản bằng một nguồn điểm S phát ánh sáng đơn sắc bước sóng λ và được đặt cách bản ở khoảng cách xa và chiếu tới bản mỏng, chỉ xét những tia gần vuông góc với bản mỏng. Hình ảnh giao thoa truyền qua được quan sát trên màn E đặt tại tiêu diện ảnh của một thấu kính hội tụ L có tiêu cự f được đặt sát mặt sau của bản (tính theo chiều truyền sáng) sao cho trục chính của thấu kính vuông góc với các mặt phản xạ và S nằm trên trục chính của thấu kính. Cho R là hệ số phản xạ của các mặt (là tỉ số giữa cường độ sóng phản xạ và cường độ sóng tới).



a, Chứng minh rằng cường độ của ánh sáng trên màn được xác định bằng biểu thức

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{1 + a\sin^2\frac{\Phi}{2}}.$$

Với $I(0)$ là cường độ của ánh sáng với góc chiếu $\theta = 0$. Hãy xác định a và Φ theo e, R, λ, n và góc tới θ.

b, Tìm độ rộng vân trung tâm.

c, Độ tương phản của hình ảnh giao thoa trên màn được đặc trưng bởi đại lượng Γ, xác định bởi

$$\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Trong đó $I_{\max}$, $I_{\min}$ tương ứng là cường độ sáng cực đại và cực tiểu. Hãy xác định Γ theo R.

Có thể sử dụng công thức tổng chuỗi sau: khi $|R| < 1$, ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n\cos(n\delta) = \frac{1 - R\cos\delta}{1 + R^2 - 2R\cos\delta}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} R^n\sin(n\delta) = \frac{R\sin\delta}{1 + R^2 - 2R\cos\delta}.$$

(Biên soạn bởi Zinc)

Bài giải

a. Ta nhận thấy rằng cường độ của các tia ló liên tiếp nhau hơn kém nhau R^2 lần, do đó biên độ sóng hơn kém nhau R lần.
Hiệu quang trình của hai tia ló liên tiếp là: $\Delta = 2e\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}$.
Từ đó ta tìm được độ lệch pha của hai tia ló liên tiếp là: $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\delta = \dfrac{4\pi e}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}$.
Dao động tổng hợp của sóng ánh sáng tại vị trí θ trên màn E là:

$$A(r,t) = A_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right) + A_0R\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r - \delta\right) \tag{1}$$

$$+ A_0R^2\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r - 2\delta\right) + \ldots \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_0R^n\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r - n\delta\right). \tag{3}$$

Tách hàm lượng giác thành hai phần tử thời gian và độ lệch pha, ta có

$$A(r,t) = A_0\left[\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)\sum_{n=0}^{\infty}R^n\cos(n\delta) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)\sum_{n=0}^{\infty}R^n\sin(n\delta)\right] \tag{4}$$

$$= \frac{A_0}{1+R^2-2R\cos\delta}\left[\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)(1 - R\cos\delta) + R\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)\sin\delta\right]. \tag{5}$$

Cường độ ánh sáng tại vị trí cần tỉ lệ thuận với giá trị trung bình của bình phương biên độ sóng, tức là

$$I(\theta) \propto \langle A(r,t)^2\rangle = \frac{A_0^2}{2}\frac{1}{1+R^2-2R\cos\delta} \tag{6}$$

$$\propto \frac{A_0^2}{2}\frac{1}{1+R^2-2R\left(1-2\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)} \tag{7}$$

$$\propto \frac{I(0)}{1+\dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}. \tag{8}$$

**Cách giải khác:* Ta có thể sử dụng phương pháp số phức trong bài toán này, cụ thể là ta đặt biên độ sóng từ tia thứ $n+1$ lúc này là $A = A_0e^{i(\omega t - kr + n\delta)}$.
Khi đó biên độ tổng hợp của sóng tại vị trí màn là

$$A(r.t) = A_0e^{i(\omega t - kr)}\left(1 + Re^{i\delta} + R^2e^{2i\delta} + R^3e^{3i\delta}\ldots\right) \tag{9}$$

$$= A_0e^{i(\omega t - kr)}\frac{1}{1-Re^{i\delta}} \tag{10}$$

Cường độ sáng tại vị trí xét sẽ tỉ lệ thuận với tích của A và liên hợp phức của nó $\bar{A}$:

$$I \propto A\cdot\bar{A} = \frac{A_0^2}{1+R^2-2R\cos\delta}. \tag{11}$$

Từ đó ta tìm được $a = \dfrac{4R}{(1-R)^2}$ và $\Phi = \delta = \dfrac{4\pi e}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}$.

b. Để tìm khoảng vân, ta cần tìm các vị trí cực đại liên tiếp, khi $\dfrac{\delta}{2} = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
Ta có $y = f\sin\theta$ là toạ độ của điểm giao thoa với chùm tia ló góc θ. Khi đó tại vị trí $\theta \approx 0$, ta có

$$k = \frac{2ne}{\lambda}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} \approx \frac{2ne}{\lambda}\left(1 - \frac{y^2}{2n^2f^2}\right). \tag{12}$$

Tại $y = 0$ thì $k_0 = \dfrac{2ne}{\lambda}$, tại $y = i$ (i là khoảng vân) thì $k = k_0 - 1$. Khi đó ta tìm được khoảng vân là

$$i = f\sqrt{\frac{n\lambda}{e}}. \tag{13}$$

c. Ta tìm được khoảng giá trị của $I(\theta)$ là

$$I_{\max} = I_0, \tag{14}$$
$$I_{\min} = \frac{I_0}{1+a}. \tag{15}$$

Từ đó ta tìm được độ tương phản giao thoa trên màn

$$\Gamma = \frac{a}{a+2} = \frac{2R}{1+R^2}. \tag{16}$$

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
a	Tìm được độ lệch pha δ	0.50
	Viết được biên độ tổng hợp trên màn tại θ (3)	0.50
	Khai triển tổng chuỗi biên độ (5)	0.50
	Nhận ra $I \propto \langle A^2 \rangle$ (6)	0.50
	Viết được hàm I và tìm được a và Φ (8)	0.50
b	Tìm được k (12)	0.50
	Tìm được khoảng vân i (13)	0.50
c	Biểu diễn đúng Γ theo R	0.50

CÂU 10. (4.0 điểm)

1. Ở vật lý sơ cấp, chúng ta đã biết đến nhiều cách đo *điện tích riêng* của một hạt (phổ biến nhất là electron) bằng cách sử dụng điện từ trường. Tuy nhiên, để đo chính xác điện tích (hoặc tương đương là khối lượng) thì không phổ biến đến thế. Ở đây chúng ta sẽ tìm hiểu phương pháp đo của nhà vật lý người Mỹ Robert Millikan (1886-1953).

a, Cho các dụng cụ như sau

- Một bình kim loại có kích thước lớn để chứa các bản kim loại và kín để cô lập với không khí bên ngoài
- Một đầu phun nhỏ giọt các giọt dầu được tích điện (điện tích, kích thước của từng giọt chưa được biết trước). Lưu ý đầu phun này còn đưa vào. bình các điện tích khác dưới dạng các hạt bụi có kích thước rất bé so với các giọt dầu.
- Hai bản kim loại phẳng, có khoảng cách giữa chúng không đáng kể so với kích thước. Cho một số lỗ trên hai bản này và giả thiết các lỗ này không ảnh hướng đến điện trường giữa hai bản.
- Các máy đếm thời gian gắn với cảm biến quang (thay thế cho các ống nhìn và đồng hồ bấm tay).
- Một nguồn pin DC 5000V, với độ sụt áp không đáng kể so với thời gian thực hiện thí nghiệm.
- Các dây nối, thước đo phù hợp.

Cho biết gia tốc trọng trường g, khối lượng riêng của dầu ρ, hằng số khí lý tưởng R, quãng đường tự do trung bình của không khí tại nhiệt độ bên trong bình l. Chú ý rằng các giọt dầu không giữ nguyên điện tích trong suốt quá trình đo do các hạt bụi tích điện trong không khí. Công thức về lực cản của chất lưu Newton (ở đây là không khí loãng) đối với vật có dạng cầu lý tưởng:

$$F = 6\pi\nu r v. \tag{1}$$

Hãy nêu phương án sử dụng để tính điện tích của electron. Đánh giá các tác nhân có thể gây ra sai số và nêu cách khắc phục (nếu có).

b, Do kích thước rất bé của các giọt dầu (tỉ số l/r có thể đạt 0.2-0.5), Millikan cần căn chỉnh lại định luật Stokes về lực cản của môi trường:

$$F = 6\pi\nu r v\left(1 + A\frac{l}{r}\right), \tag{2}$$

với A là một hằng số chưa xác định, l là chiều dài tự do trung bình của môi trường (đã được cho trước). Lưu ý rằng kết quả này chỉ là phân tích chuỗi Taylor đối với công thức Stokes đến bậc nhất của l/r mà không theo kết quả lý thuyết nào.

Hãy điều chỉnh lại cách tính điện tích của electron cho phù hợp.

c, Tại thí nghiệm đầu tiên của mình, Millikan thu được bảng số liệu về các điện tích như sau. Hãy tìm điện tích của electron (đơn vị: esu, *electrostatic unit* là một đơn vị đo điện tích). Không yêu cầu tìm sai số.

STT	Điện tích (esu)	STT	Điện tích (esu)
1	34.47	11	44.40
2	39.50	12	59.06
3	44.42	13	53.95
4	49.41	14	68.65
5	39.45	15	83.22
6	59.12	16	78.34
7	44.36	17	68.67
8	49.47	18	63.68
9	53.90	19	59.20
10	49.37	20	63.69

(Biên soạn bởi Yukon)

Bài giải

1. a.
Ta xét một giọt dầu, có khối lượng riêng ρ, được xem là dạng cầu bán kính r được đưa vào khoảng không gian có điện trường E (điện trường này có thể tính được bằng V/d, với V là hiệu điện thế của tụ, d là khoảng cách giữa hai bản tụ).

Khi giọt dầu rơi đều với vận tốc v_1 do tác dụng của trọng lực

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)g = 6\pi\nu r v^1 \tag{1}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\nu v_1}{2(\rho-\rho_0)g}}. \tag{2}$$

Khi nối nguồn vào hai bản tụ song song và giọt dầu bốc lên đều với vận tốc v_2 do tác dụng của điện trường

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)g + 6\pi\nu r v_2 = qE. \tag{3}$$

Thế **(1)** và **(2)** vào **(3)** ta tìm được điện tích

$$q = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\nu}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{(\rho-\rho_0)g}}\frac{(v_1+v_2)\sqrt{v_1}}{E}. \tag{4}$$

Trên thực tế, những gì ta đo được là thời gian các giọt dầu này di chuyển từ bản kim loại này đến bản kim loại kia. Do đó, ta bố trí các cổng quang và máy đếm cách nhau các khoảng xác định (d) và đo thời gian giọt dầu đi qua các khoảng này.
Do điện tích của giọt dầu thay đổi trong khi rơi / bốc lên bên trong bình, ta có thể thu được nhiều số liệu về điện tích. Chú ý không thực hiện đo thời gian khi vận tốc tăng hoặc giảm đột ngột. Có thể thực hiện với nhiều giọt dầu hơn để thu thêm số liệu.
Sau khi thu được bảng số liệu của q, ta thực hiện phân tích số liệu như sau:

1, Sắp xếp các giá trị theo thứ tự tăng dần (cột II)

2, Tìm hiệu giữa hai giá trị điện tích liên tiếp (cột III)

3, Tìm số lần điện tích cơ bản của các giá trị tại cột 3 (cột IV). Lưu ý ta cần lấy đủ dày số liệu để các giá trị tại cột 3 đủ nhỏ. "Điện tích cơ bản" ở đây có thể xác định là giá trị nhỏ nhất (hoặc ước chung lớn nhất) của tất cả kết quả tại cột III

4, Tính giá trị điện tích cơ bản bằng cách lấy các giá trị tương ứng tại cột III chia cho giá trị tại cột IV (cột V). Tìm giá trị trung bình của cột để lấy giá trị điện tích cơ bản cho cột tiếp theo

5, Tính số lần điện tích cơ bản của giá trị điện tích tại cột II (cột VI)

6, Tính giá trị điện tích cơ bản bằng cách lấy các giá trị tương ứng tại cột II chi cho giá trị tại cột VI (cột VII).

7, Ta lấy giá trị cuối cùng và sai số từ giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của các giá trị tại cột VII

Các nguyên nhân gây ra sai số:

1, Tác dụng của sức căng bề mặt tại giá trị nhỏ của r làm ảnh hưởng đến khối lượng riêng.

2, Giả thiết về hình dạng cầu của giọt dầu, chưa tính đến các ảnh hưởng của trọng lực và đặc biệt là của điện trường lên các điện tích bên trong giọt dầu.

3, Chiều của điện trường có thể không trùng với chiều của trọng lực.

4, Tác dụng của chuyển động Brown làm sai lệch biểu thức về lực cản của không khí.

b. Ta tìm được quan hệ giữa v_1 và v_2:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{mg}{qE - mg} \tag{5}$$

chỉ với dạng lực cản tác dụng lên giọt dầu tỉ lệ thuận với vận tốc.
Thế $m = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ ta tìm được giá trị cho r:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3qE}{4\pi g(\rho - \rho_0)}\frac{v_1}{v_1 + v_2}}. \tag{6}$$

Ta có giá trị của điện tích

$$q = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\nu\left(1 - A\frac{l}{r}\right)}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{(\rho - \rho_0)g}}\frac{(v_1 + v_2)\sqrt{v_1}}{E}. \tag{7}$$

Để tìm được giá trị của điện tích, ta thực hiện đo "điện tích ảo" q' theo cách tính tại câu **(a)**:

$$q' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\nu}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{(\rho - \rho_0)g}}\frac{(v_1 + v_2)\sqrt{v_1}}{E}. \tag{8}$$

Đặt $x = l/r$. Khi đó ta có (bỏ qua khai triển bậc cao của Ax

$$q^{2/3}(1 + Ax) = q'^{2/3}. \tag{9}$$

Để tính đến các chỉnh sửa này, ta khảo sát số liệu như sau:

1, Khảo sát các số liệu trên cùng một giọt để thu được l/r và e', tức là giá trị của điện tích cơ bản thu được trên một giọt (bằng phương pháp của câu **(a)**).

2, Sử dụng chức năng hồi quy tuyến tính trên máy tính cầm tay theo hai biến $q'^{2/3}$ và x để tìm được giá trị của q.

c. Sử dụng phương pháp tại câu **(a)**, ta có bảng số liệu

STT	q	q'	n'	e'	n	e
1	34.47	-	-	-	7	4.924
2	39.45	4.98	1	4.98	8	4.931
3	39.50	0.05	0	-	8	4.938
4	44.36	4.86	1	4.86	9	4.929
5	44.40	0.04	0	-	9	4.933
6	44.42	0.02	0	-	9	4.933
7	49.35	4.93	1	4.93	10	4.935
8	49.37	0.02	0	-	10	4.937
9	49.41	0.04	0	-	10	4.941
10	53.90	4.49	1	4.49	11	4.9
11	53.955	0.05	0	-	11	4.905
12	59.06	5.11	1	5.11	12	4.922
13	59.12	0.06	0	-	12	4.927
14	59.20	0.08	0	-	12	4.933
15	63.68	4.48	1	4.48	13	4.898
16	64.69	0.01	0	-	13	4.899
17	68.65	4.96	1	4.96	14	4.903
18	68.67	0.02	0	-	14	4.905
19	78.34	9.67	2	4.835	16	4.896
20	83.22	4.88	1	4.88	17	4.895
		TB		4.836		4.919

Vậy ta thu được điện tích electron là 4.919 esu, so với kết quả hiện đại (được định nghĩa bởi hệ SI) là 4.80 esu.

Biểu điểm

Phần	Nội dung	Điểm
a	Nhận xét được rằng cần tìm vận tốc trôi tại hai thời điểm: khi bật và tắt điện trường	0.25
	Tính được điện tích q theo hai vận tốc trôi tìm được và các dữ kiện được cho trước hoặc đo đạc được	0.50
	Bố trí cách thực hiện thí nghiệm và đọc thông số	0.50
	Tìm được cách sắp xếp giá trị của q tăng dần và lấy hiện liên tiếp để tìm được e. Có thể lấy giá trị trung bình của cột VII hoặc cột V.	0.50
	Tìm hiểu được các nguyên nhân có thể gây ra sai số	0.25
b	Tìm được giá trị của r theo v_1 và v_2 (6)	0.5
	Tìm được giá trị thực của điện tích q (có chứa tham số A) (7)	0.25
	Nhận xét được rằng có thể đo giá trị "điện tích ảo" q' để hồi quy được giá trị thực của điện tích	0.25
	Chỉnh sửa cách lấy số liệu cho phù hợp	0.25
c	Thu được bảng số liệu	0.50
	Kết luận được giá trị điện tích electron. Lưu ý rằng kết quả trung bình của cột e' hay cột e đều được.	0.25

HẾT