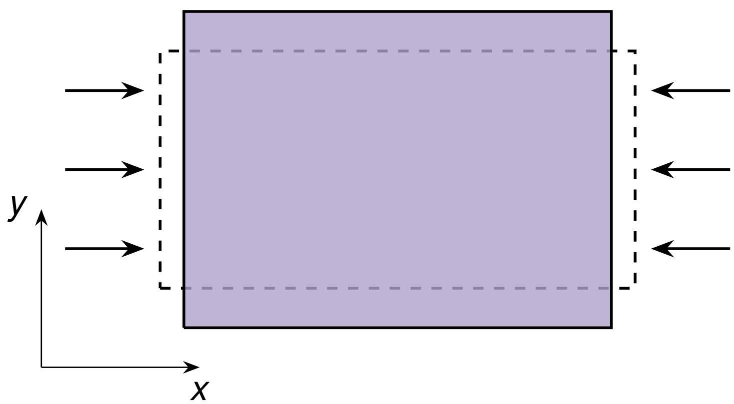
Đề hướng tới VPhO 44

Câu lạc bộ vật lý xPhO

CÂU 1.

1. Hệ số Poisson, suất Young và module khối

Thông thường, khi ta nén một tấm vật liệu theo một trục, ngoài sự biến dạng đàn hồi dọc theo trục của lực nén, tấm vật liệu còn bị phình ra theo các phương vuông góc với lực nén. Hiện tượng này được gọi là "hiệu ứng Poisson".



Hình 1: Hiệu ứng Poisson - vật chịu nén theo phương x sẽ giãn ra theo phương y.

Để phân tích về tính chất của vật liệu chịu ảnh hưởng bởi hiệu ứng Poisson, ta sử dụng hệ số Poisson ν được định nghĩa là giá trị âm của tỷ số biến dạng hông và biến dạng dọc trục của tấm vật liệu bị nén [1]. Điều này tức là nếu một khối vật liệu hình chữ nhật có độ dài theo trục x và trục y là l_x và l_y, bị nén một đoạn Δl_x theo trục x và bị phình một đoạn Δl_y theo trục y thì hệ số Poisson ν mô tả hiệu ứng Poisson giữa trục x và trục y được định nghĩa theo phương trình:

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = -\nu \frac{\Delta l_y}{l_y}. \tag{1}$$

Tổng quát hơn, định luật Hooke mô tả biến dạng của vật liệu đẳng hướng theo lực nén của các vật được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right].
\end{aligned}$$

trong đó

- $\varepsilon_x = \Delta l_x / l_x$, $\varepsilon_y = \Delta l_y / l_y$, $\varepsilon_z = \Delta l_z / l_z$ lần lượt là độ biến dạng theo 3 phương x, y, z.
- E là suất Young của vật liệu.

[1] Dấu âm thể hiện cho việc thông thường khi chịu nén theo một phương thì vật liệu phình theo phương còn lại.

- σ_x, σ_y, σ_z lần lượt là ứng suất [2] nén lên tấm vật liệu theo 3 phương x, y, z.
- ν là suất Poisson của vật liệu.

Câu hỏi a. Xét một khối vật liệu hình hộp chữ nhật có thể tích V. Khi khối vật liệu chịu ứng suất p theo các phương, thể tích của khối hộp chữ nhật bị giảm đi ΔV. Hệ số module khối K được định nghĩa theo biểu thức

$$p = -K\frac{\Delta V}{V}. \tag{2}$$

Xác định hệ số module khối của vật liệu đó theo suất Young E và suất Poisson ν.

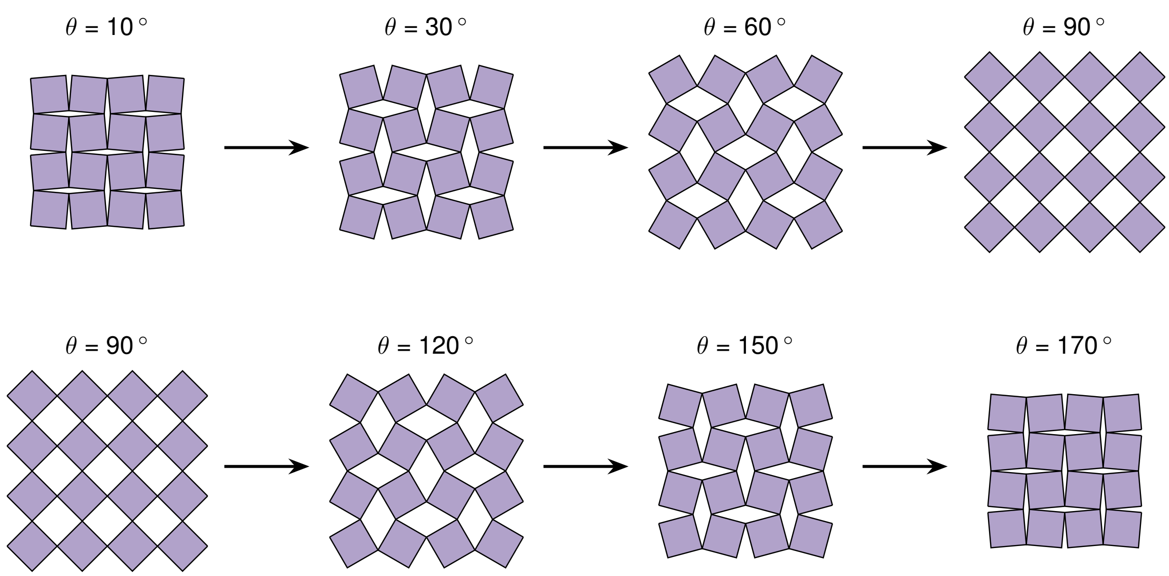
Câu hỏi b. Xét một vật hình hộp chữ nhật được giữ cố định độ dài theo trục y và z, công thức định luật Hooke theo trục x lúc này có dạng:

$$\sigma_x = f(\nu)E\varepsilon_x, \tag{3}$$

với $f(\nu)$ là một hàm phụ thuộc vào suất Poisson ν. Hãy tìm hàm $f(\nu)$ trong bài toán trên.

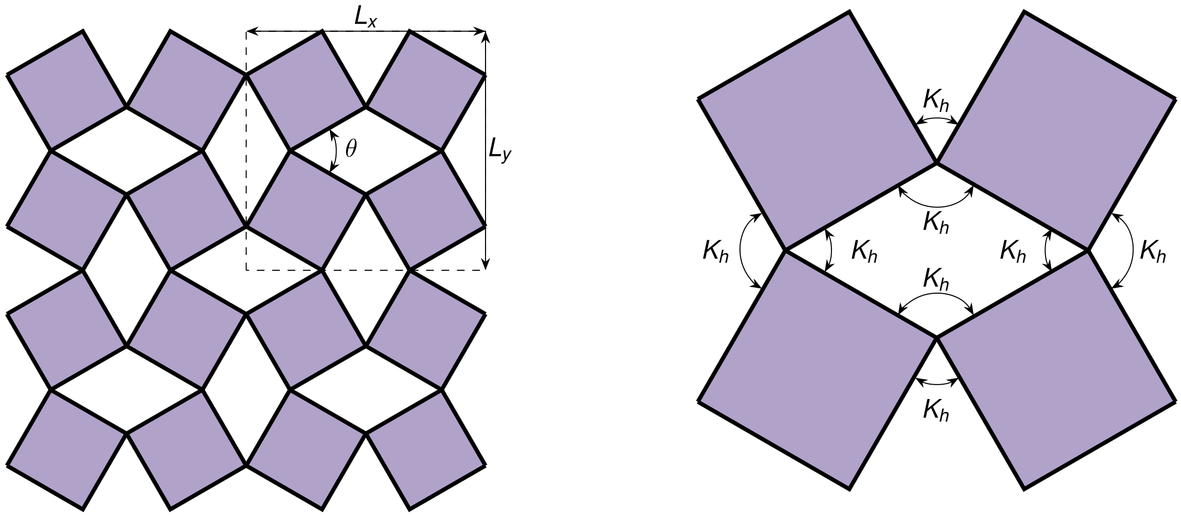
2. Mô hình mạng hình vuông quay

Vật liệu auxetic là một vật liệu có thể mang lại tỷ số Poisson âm, tức là nếu như ép vật liệu này theo một phương, phương vuông góc với nó sẽ co lại theo thay vì nở ra như vật liệu thông thường. Cấu trúc mạng hình vuông quay (hình 2) là một trong những cấu trúc cơ bản nhất, là cơ sở lý thuyết cho vật liệu auxetic.



Hình 2: Quá trình giãn và co của cấu trúc mạng hình vuông quay khi tăng dần góc θ.

Cấu trúc mạng hình vuông quay bao gồm các hình vuông có độ dài L ghép nối với nhau thông qua bản lề ở các góc của hình vuông, tạo thành mạng (như hình 3a). Xem rằng, các tấm hình vuông



(a) Các thông số hình học L_x, L_y và θ đặc trưng cho kích thước ô cơ sở.

(b) Độ cứng tại mỗi bản lề K_h trong một ô cơ sở.

Hình 3: Các thông số cấu trúc của mạng tinh thể hình vuông quay.

là các vật rắn không biến dạng, ta chỉ quan tâm đến các biến dạng và chuyển động trong không gian 2 chiều.

Câu hỏi c. Tính tỷ số Poisson của cấu trúc mạng hình vuông.
Ở thời điểm trạng thái hình học của vật được xác định bởi góc θ, xem rằng tại mỗi góc tạo bởi hai hình vuông có một moment lực xoắn gây ra bởi bản lề với độ cứng xoắn k_h (như hình 3b).

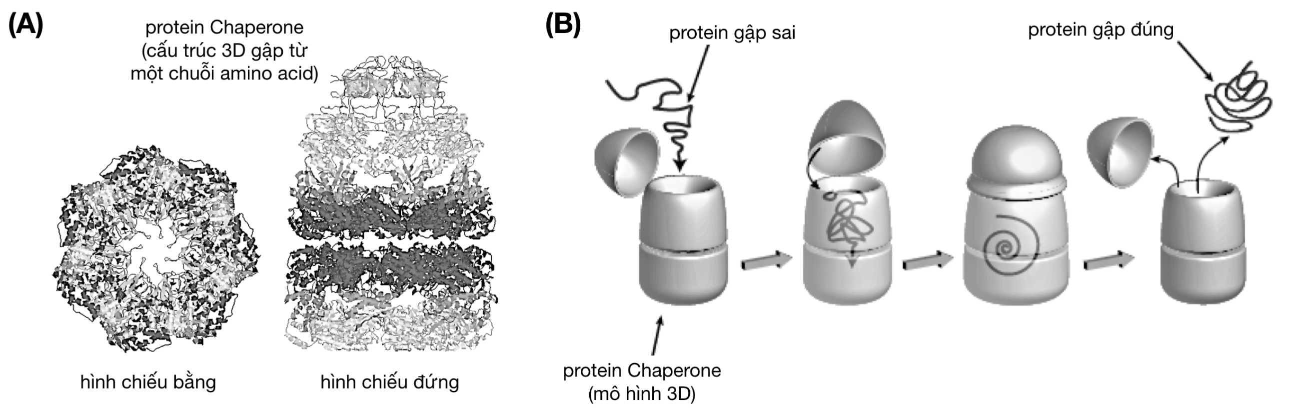
Câu hỏi d. Vật liệu xây dựng bởi cấu trúc mạng tinh thể hình vuông có phải vật liệu đẳng hướng trong không gian 2 chiều không? Tính suất Young từng hướng của vật liệu.

[2] Lực trên một đơn vị diện tích.

CÂU 2.

Sự Gập và Mở của Protein theo Nhiệt độ

Ở chương trình giáo khoa THPT, các bạn đã được học về protein trong bộ môn Sinh học lớp 9. Protein là một chuỗi các amino acid được sắp xếp theo thứ tự cụ thể, quyết định cấu trúc và chức năng của protein trong cơ thể. Chuỗi này sau đó sẽ gập lại thành hình dạng ba chiều để thực hiện các chức năng sinh học khác nhau; e.g. protein Chaperone giúp gập cho đúng lại các protein bị gập sai (xem hình 4), đảm bảo rằng những protein đó thực hiện được chức năng chính xác. Lưu ý rằng, khi được gập lại đúng cách, protein thường không trở thành một cấu trúc rắn tuyệt đối, mà là một cấu trúc linh động, có thể co duỗi và hoạt động như một "cỗ máy" ở kích thước nano. Nói cách khác, khi protein gập đúng cách và hoạt động được, nó không cần nhất thiết phải là *gập hoàn hảo*.



Hình 4: Cấu trúc và chức năng của protein Chaperone. (A) Các hình chiếu của protein Chaperone, mô tả một chuỗi amino acid được gấp lại thành một cấu trúc ba chiều xác định. (B) Các protein bị gấp sai có thể di chuyển vào khoang trung tâm của protein Chaperone, nơi chúng được điều chỉnh và gấp lại đúng cách.

Tìm hiểu về cấu trúc gập của các loại protein khác nhau là một trong những vấn đề quan trọng nhất trong lĩnh vực Vật lý Sinh học phân tử, và nghiên cứu ứng dụng trí tuệ nhân tạo để giải quyết vấn đề này đã dẫn tới giải Nobel Hóa học năm 2024.

Chúng ta sẽ cùng nhau khám phá sự chuyển trạng thái của protein theo nhiệt độ, từ cấu trúc gập (có khả năng thực hiện chức năng sinh học) sang cấu trúc mở (không còn hoạt động). Cụ thể hơn, chúng ta tìm hiểu về *mô hình khóa kéo*, tuy rất đơn giản, nhưng đủ để mô tả các tương tác giữa những thành phần cấu tạo protein (các amino acid) với môi trường xung quanh (các phân tử nước) ở bậc vi mô, cũng như các tính chất nhiệt động lực học của của đa số các loại protein khác nhau ở bậc vĩ mô.

Trong *mô hình khóa kéo* của protein, mỗi amino acid tại vị trí j được biểu diễn bằng một tham số bit nhị phân $\phi_j \in \{0, 1\}$: $\phi_j = 1$ khi amino acid ở đúng vị trí so với trạng thái *gập hoàn hảo*, và $\phi_j = 0$ nếu không đúng. Khi các amino acid từ thứ tự 1 đến j không ở vị trí *gập hoàn hảo*, amino acid thứ j có thể tương tác với các phân tử nước bên ngoài (đây chính là tính chất *khóa kéo* đặc trưng của mô hình này), được mô tả qua tham số $w_j \in \{0, 1, 2, ..., (g-1)\}$, trong đó g là số mức năng lượng tương tác khả dĩ. Với protein gồm N amino acid, chỉ số j sẽ chạy từ 1 đến N. Mỗi *vi* *thái* α của protein được xác định bởi $2N$ các giá trị tham số:

$$\alpha \equiv [(\phi_1, w_1), (\phi_2, w_2), (\phi_3, w_3), ..., (\phi_N, w_N)] \ .$$

Năng lượng của protein khi nó ở *vi thái* α được xác định bởi:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \sum_{j=1}^{N} \left[-E_0 \prod_{k=1}^{j} \phi_k + \left(1 - \prod_{k=1}^{j} \phi_k\right) (\mu + w_j \delta) \right] \\ &= -E_0 (\phi_1 + \phi_1\phi_2 + \phi_1\phi_2\phi_3 + ... + \phi_1\phi_2\phi_3...\phi_N) \\ &\quad + \Big[(1-\phi_1)(\mu + w_1\delta) + (1-\phi_1\phi_2)(\mu + w_2\delta) + (1-\phi_1\phi_2\phi_3)(\mu + w_3\delta) \\ &\qquad + ... + (1-\phi_1\phi_2\phi_3...\phi_N)(\mu + w_N\delta)\Big] \ , \end{aligned} \tag{1}$$

với $E_0 > 0$, $\mu < 0$, và $\delta > 0$ là các giá trị mang thứ nguyên năng lượng.

Khi protein ở nhiệt độ T, xác suất p_α nó đang ở *vi thái* α sẽ tuân theo phân bố Maxwell-Boltzmann:

$$p_\alpha \propto \exp\left(-\frac{E_\alpha}{k_B T}\right) \ , \tag{2}$$

với $\propto$ là ký hiệu biểu thị mối liên hệ tỉ lệ và k_B là giá trị hằng số Boltzmann. Định nghĩa giá trị nhiệt độ $T_0 \equiv E_0/k_B$. Năng lượng trung bình thống kê $\langle E(T)\rangle$ của protein ở nhiệt độ T được xác định theo giá trị trung bình của năng lượng trên tất cả các *vĩ thái* khả dĩ:

$$\langle E(T)\rangle = \sum_\alpha p_\alpha E_\alpha \tag{3}$$

Nhiệt dung riêng $C_1(T)$ ở nhiệt độ T trên mỗi amino acid của protein được xác định theo phép tính đạo hàm sau đây:

$$C_1(T) = \frac{d}{dT}\left[\frac{\langle E(T)\rangle}{N}\right] \ . \tag{4}$$

Xét một protein được cấu tạo từ rất rất nhiều amino acid (tức xét giới hạn $N \to \infty$). Sử dụng các giá trị số sau đây: $\mu/E_0 = -2$, $\delta/E_0 = 0.1$, $g = 60$.

Câu hỏi a. Khảo sát giá trị $C_1(T)$ theo đơn vị k_B tại các giá trị nhiệt độ T thỏa mãn:

$$T/T_0 = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 \ \text{ và } \ T/T_0 = 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8 \ .$$

Câu hỏi b. Chứng minh rằng $C_1(T)$ sẽ phải thay đổi đột ngột tại một số giá trị nhiệt độ.

Cho biết rằng những giá trị nhiệt độ này tương ứng với sự chuyển pha của protein, từ trạng thái mở sang trạng thái gấp khi $C_1(T)$ nhảy xuống cùng với sự tăng của nhiệt độ T, và từ trạng thái gấp sang trạng thái mở khi $C_1(T)$ nhảy lên với sự tăng của T. Cũng cho biết chỉ tồn tại duy nhất hai giá trị nhiệt độ chuyển pha.

Câu hỏi c. Hãy ước tính những vùng giá trị tỉ số T/T_0 mà protein sẽ ở trạng thái gấp.

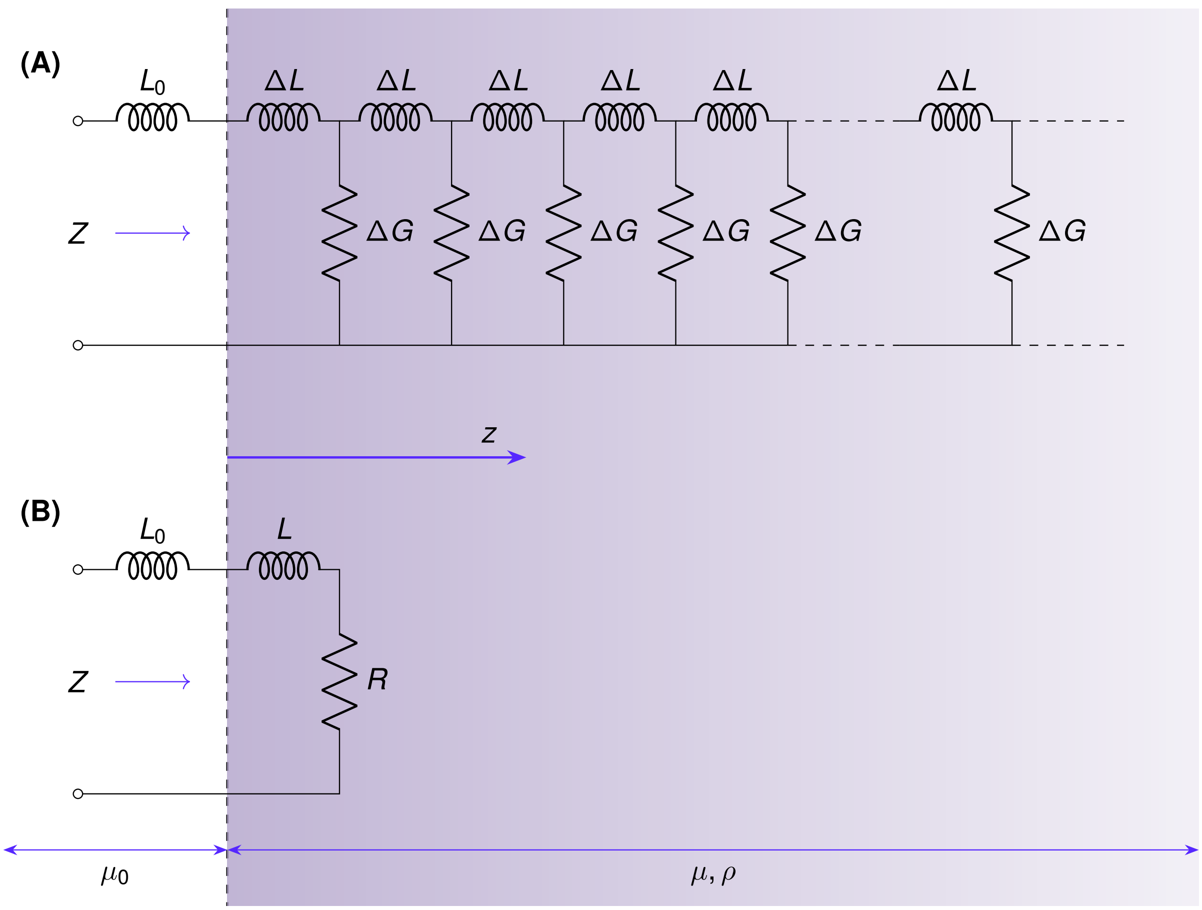
CÂU 3.

Hiệu ứng bề mặt [3]

Hiệu ứng bề mặt là một hiệu ứng xuất hiện phổ biến trong các các đường mạch điện truyền dẫn dòng điện cao tần. Theo đó, thay vì phân bố đều trên toàn dây dẫn như các dòng điện tần số thấp, ở tần số cao, các dòng điện tập trung chủ yếu ở sát bề mặt kim loại và nhanh chóng giảm theo độ sâu với cấp số mũ.

1. Mô hình mạch tương đương đơn giản

Quy luật chuyển động của dòng điện trong một vật dẫn với hằng số điện môi μ và điện trở suất ρ có thể được mô tả bởi một mạch điện tương đương (như hình 5) [4]. Ở hình 5A, phân bố dòng điện trong tấm vật liệu được tương đương như một mạch điện vô hạn, theo đó, từng khối chữ nhật có chiều dài l, chiều rộng w và độ dày Δz (như hình 6) được tương đương như một mắt mạch tương đương gồm một thành phần cảm kháng ΔL và một phần điện dẫn [5] ΔG.



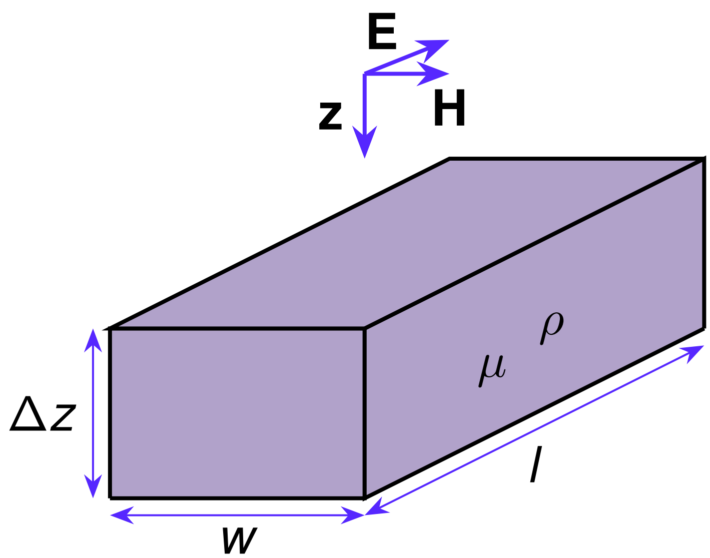
Hình 5: Mô hình mạch tương đương của hiệu ứng bề mặt. (A) Mạch tương đương phân bố vô hạn trong không gian. (B) Mạch tương đương trở kháng của mạch.

Dựa vào các tính toán mạch tương đương, mạng mạch vô hạn tuần hoàn trên có trở kháng quan

[3] Skin effect.

[4] Điện kháng L_0 được sử dụng để mô tả hằng số từ thẩm trong chân không μ_0 của môi trường ngoài. Ta không cần quan tâm đến nó trong bài toán này

[5] Nghịch đảo của điện trở.



Hình 6: Mô hình một phần tử trong khối vật dẫn.

sát từ phía bề mặt ngăn cách hai môi trường là Z và có thể được phân tích như tổng của hai phân tử R và L (như hình 5B).
Câu hỏi a. Tìm ΔL và ΔG của mạch trong mô hình mạch tương đương vô hạn theo μ, ρ, w, l và Δz.

Câu hỏi b. Tìm các thông số trở kháng Z, R và L theo μ, ρ, w, l và tần số ω của dòng điện.

Câu hỏi c. Độ sâu bề mặt[6] là độ sâu để biên độ dòng điện giảm đi e lần. Xác định độ sâu bề mặt của tấm vật liệu theo tần số ω của dòng điện, độ từ thẩm μ và điện trở suất ρ.

2. Điện trở gây bởi hiệu ứng bề mặt

Câu hỏi d. Chứng minh rằng, ta có thể tính điện trở R tương đương của một đoạn vật dẫn điện chịu ảnh hưởng bởi hiệu ứng bề mặt có thể tính theo công thức:

$$R = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial L_0}{\partial z} R_S, \tag{1}$$

trong đó

- L_0 là độ tự cảm của một miếng bề mặt vật dẫn được xét với giả thiết độ sâu bề mặt bằng không.
- Tọa độ z được hiểu là tọa độ có trục vuông góc với bề mặt.
- $R_S = \sqrt{\omega\mu\rho/2}$ được gọi là hệ số điện trở suất bề mặt.

Câu hỏi e. Tính điện trở gây ra bởi hiệu ứng bề mặt đối với hai ống dây dẫn tròn có chiều dài l, bán kính a và có trục dây đặt cách nhau một khoảng $2b$.

[6] Skin depth.

CÂU 4.

ABCD

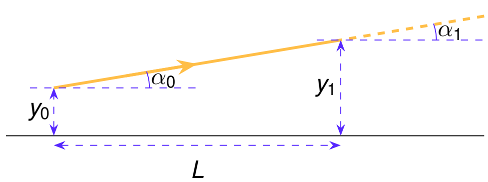
1. Ma trận ABCD cho hệ quang đồng trục

Quang hệ đồng trục là một quang hệ bao gồm các quang cụ (lưỡng chất, thấu kính, gương cầu,...) được đặt đồng trục với nhau. Một tia sáng tại một vị trí xác định trong hệ quang đồng trục có thể được mô tả thông qua 2 thông số tọa độ, đó là góc α mà tia sáng đó hợp với quang trục và khoảng cách y từ điểm cắt của tia sáng với mặt phẳng xác định vị trí đến quang trục.

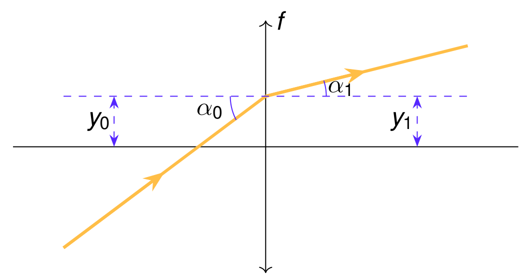
Với mỗi đoạn di chuyển hoặc thay đổi quỹ đạo của tia sáng trong hệ quang đồng trục, ta có thể biểu diễn sự biến đổi tọa độ thông qua 4 tham số A, B, C, D sao cho thông số tia sáng trước và sau bước biến đổi tuân theo biểu thức:

$$y' = Ay + B\alpha,$$
$$\alpha' = Cy + D\alpha.$$

Bộ 4 tham số trên được gọi là "ma trận ABCD".



(a) Sự thay đổi bộ thông số (y, α) của tia sáng thẳng.



(b) Sự thay đổi bộ thông số (y, α) của thấu kính hội tụ.

Hình 7: Biến đổi thông số (y, α) qua các cấu trúc quang học.

Câu hỏi a. Ma trận biến đổi thẳng

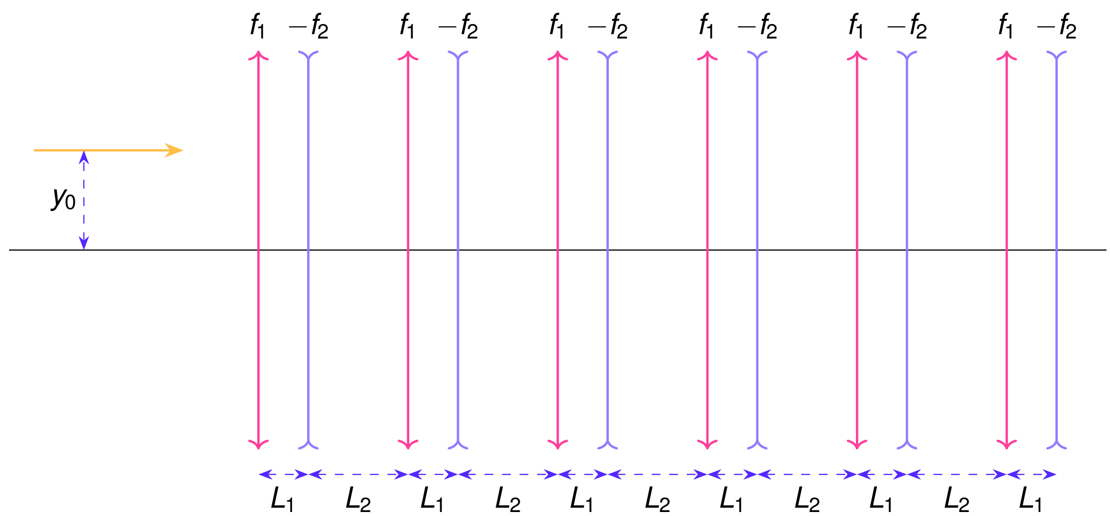
Xét một tia sáng đi thẳng trong môi trường đồng tính đẳng hướng (Như hình 7a). Hãy tìm bộ ma trận ABCD đối với một đoạn biến đổi ứng với việc tia sáng đi được một khoảng cách L theo quang trục của hệ.

Câu hỏi b. Ma trận thấu kính mỏng

Một tia sáng gặp một thấu kính hội tụ mỏng với góc tới α_0 và tại vị trí cách quang tâm của thấu kính một khoảng y_0 (như hình 7b). Tìm ma trận ABCD đối với sự bẻ hướng tia sáng của thấu kính này theo tiêu cự f của nó.

2. Hệ thấu kính, hội tụ và phân kỳ

Ghép đan xen một hệ các thấu kính hội tụ có tiêu cự f_1 và thấu kính phân kỳ có tiêu cự $-f_2$ thành một hệ thấu kính vô hạn tuần hoàn (như hình 8). Khoảng cách từ thấu kính hội tụ trước đến thấu kính sau là L_1 và khoảng cách từ thấu kính phân kỳ trước đến thấu kính hội tụ sau là L_2.



Hình 8: Hệ vô hạn thấu kính ghép đan xen.

Câu hỏi c. Tìm ma trận ABCD của một mắt trong mạng thấu kính tuần hoàn bao gồm một thấu kính hội tụ và 1 thấu kính phân kỳ, tính từ điểm bắt đầu mắt là điểm tia sáng gặp thấu kính hội tụ của mắt và kết thúc mắt là điểm tia sáng gặp thấu kính hội tụ ở mắt tiếp theo.

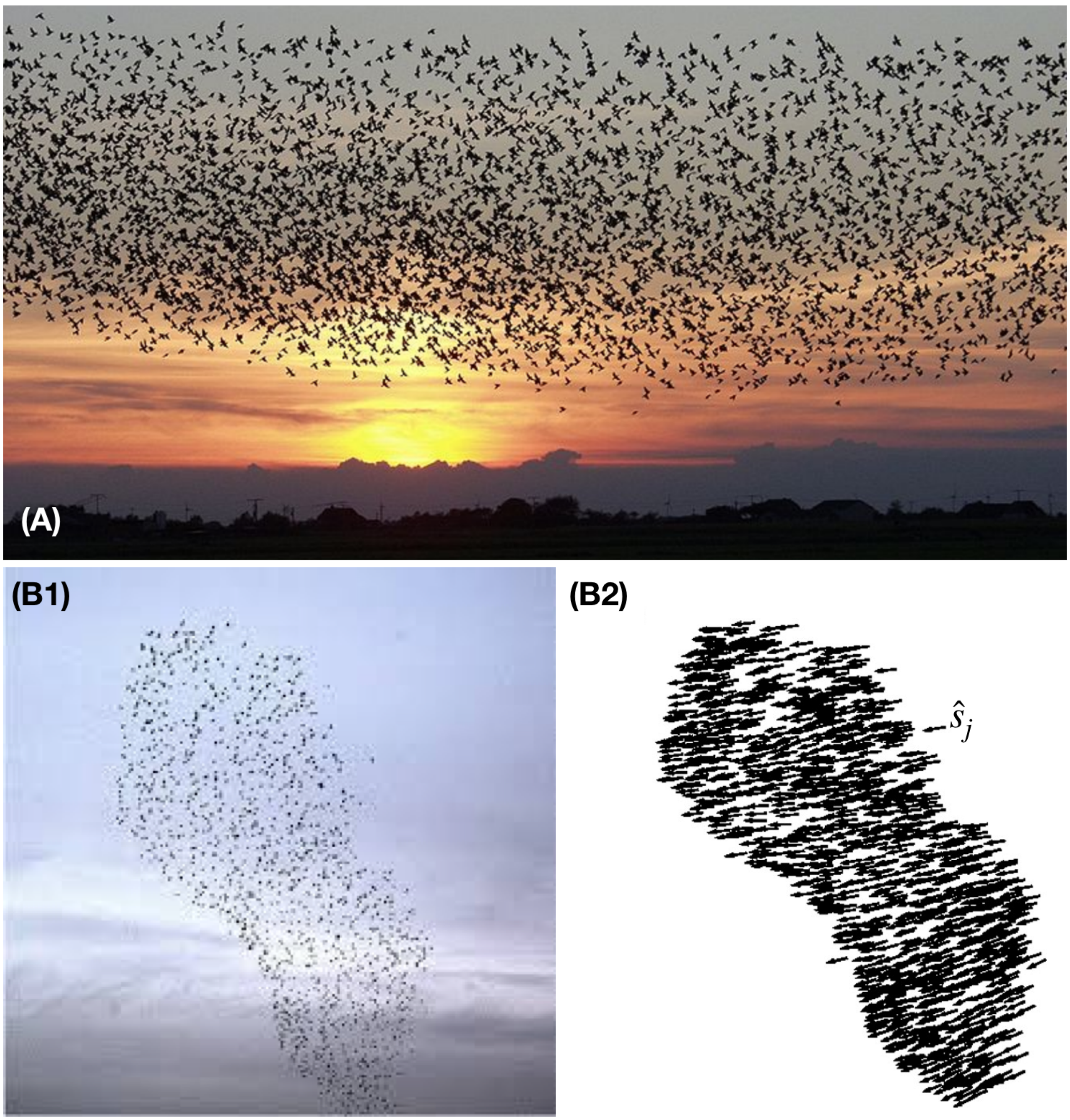
Câu hỏi d. Tìm điều kiện của L_1 và L_2 để tia sáng di chuyển qua vô số thấu kính trong hệ có xu hướng hội tụ về phía quang trục.

Câu hỏi e. Xét một tia sáng tới hệ thấu kính theo phương song song quang trục và cách quang trục một khoảng y_0. Tìm giá trị y_n và α_n khi tia sáng vừa ló ra khỏi thấu kính hội tụ thứ n.

CÂU 5.

Nguyên lý Cực đại Entropy và Đàn chim Bay

Vật lý hiện diện trong thế giới quanh ta, giúp mô tả các hành vi quần thể của những hệ thống tương tác phức tạp, từ đám khí lý tưởng đến đám đông người. Trong bài tập này, chúng ta sẽ cùng khám phá xem nguyên lý cực đại entropy đã được áp dụng như thế nào để thành lập lên một trong những lý thuyết Vật Lý Sinh thành công nhất hiện đại dùng để mô tả đàn chim bay (xem hình 9A).



Hình 9: (A) Đàn chim bay. (B) Mô tả Toán học của một đàn chim bay, với (B1) là hình ảnh thô của đàn chim và (B2) là tập hợp các vector hướng bay của các cá thể trong đàn chim tại cùng thời điểm.

Nguyên lý cực đại entropy là một phương pháp thống kê dùng để suy ra phân phối xác suất không thiên vị nhất có thể dựa trên thông tin đã biết, đồng thời tránh đưa ra giả định về những điều chưa biết. Về cơ bản, nguyên lý này nói rằng, với một tập hợp các ràng buộc đã biết (như giá trị trung bình), phân phối xác suất tốt nhất là phân phối có entropy cao nhất mà vẫn thỏa mãn các ràng buộc này. Ở đây, công thức entropy thường được sử dụng là Boltzmann-Gibbs-Shannon entropy.

Với xác suất xảy ra của một đại lượng Vật Lý liên tục X, Boltzmann-Gibbs-Shannon entropy S được xác định bởi giá trị trung bình của hàm *độ ngạc nhiên* $I(x) = -\ln[p(x)]$ theo biến x:

$$S = \langle I \rangle = -\int_{\Omega_X} dx\; p(x) \ln[p(x)] \ , \tag{1}$$

trong đó x đại diện cho kết quả đo của đại lượng X, $p(x)$ là xác suất đo đại lượng X cho ra kết quả x, Ω_X là vùng khả dĩ của các kết quả đo cho đại lượng X.

Chúng ta sẽ cùng nhau tìm hiểu về những ứng dụng của nguyên lý này trong việc diễn giải các kết quả thí nghiệm Vật lý, khi trong báo cáo chỉ cung cấp ít các thông tin liên quan.

1. Phương pháp nhân Lagrange

Trước hết, chúng ta cùng nhau tìm hiểu về một phương pháp Toán học, vô cùng mạnh mẽ và hiệu quả, giúp chúng ta giải quyết các vấn đề tìm kiếm quỹ tích các điểm cực trị trong bối cảnh có ràng buộc – phương pháp nhân Lagrange.

Xét việc tìm cực trị của hàm số $f(\vec{z})$ theo biến $\vec{z} \equiv [z_1, z_2, ..., z_{n_z}]$ (trong đó n_z là số lượng các biến), với các điều kiện ràng buộc $C_k(\vec{z})$=0 (trong đó $k = 1, 2, ..., n_C$, và n_C là số lượng điều kiện ràng buộc). Hàm Lagrangian có thể được thiết lập như sau:

$$L(\vec{Z}) = f(\vec{z}) - \sum_{k=1}^{n_C} \lambda_k C_k(\vec{z}) \ , \tag{2}$$

với biến $\vec{Z} \equiv [\vec{z}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_{n_C}]$.

Câu hỏi a. Hãy chứng minh rằng, điều kiện cực trị của hàm số $L(\vec{Z})$ theo biến $\vec{Z}$ có thể giúp chúng ta xác định được quỹ tích các điểm cực trị $\vec{z}$ của hàm số $f(\vec{z})$ dưới các ràng buộc $C_k(\vec{z})$.

Những câu hỏi tiếp theo đây đều có thể được giải quyết sử dụng phương pháp nhân Lagrange.

2. Các hàm phân bố nội suy

Để tránh rườm rà, nhiều báo cáo kết quả thí nghiệm thường không cung cấp toàn bộ dữ liệu thô từ các phép đo, mà chỉ trình bày giá trị ước lượng tốt nhất cùng với độ phân tán của các kết quả, thể hiện qua giá trị trung bình và phương sai.

Hãy xác định hàm phân bố nội suy $p(x)$ cho xác suất thu được kết quả x khi đo đại lượng X thỏa mãn nguyên lý cực đại entropy, khi chúng ta chỉ biết những tính chất sau đây:

Câu hỏi b. Vùng khả dĩ Ω_X là miền số thực i.e. $x \in (-\infty, \infty)$, giá trị đo trung bình của X là μ và giá trị phương sai của X là $\sigma^2 > 0$. Biểu diễn $p(x)$ theo μ, σ^2, và biến x.

Câu hỏi c. Vùng khả dĩ Ω_X là miền số dương i.e. $x \in [0, \infty)$, và giá trị đo trung bình của X là μ (với $\mu > 0$). Biểu diễn $p(x)$ theo μ và biến x.

Bây giờ, chúng ta sẽ áp dụng những kiến thức này vào một hệ vật lý cụ thể. Xét một quần thể gồm nhiều bậc tự do khác nhau mang năng lượng, e.g. một đám khí lý tưởng được cấu tạo từ nhiều phân tử khí khác nhau. Chúng ta sẽ tìm hiểu về tính chất thống kê của kết quả $\mathcal{E}$ khi đo giá trị năng lượng E trên mỗi bậc tự do này.

Câu hỏi d. Vùng khả dĩ Ω_E là miền chặn dưới i.e. $x \in [\mathcal{E}_{\min}, \infty)$, và giá trị đo trung bình của E là $\mathcal{E}_0$ (với $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_{\min}$). Hãy chứng minh rằng, xác suất $p(\mathcal{E})$ – cho kết quả $\mathcal{E}$ khi đo đại lượng E – thỏa mãn nguyên lý cực đại entropy chính là hàm phân bố Maxwell-Boltzmann:

$$p(\mathcal{E}) \propto \exp\left(-\beta\mathcal{E}\right) \quad , \tag{3}$$

trong đó β là một hằng số nào đó liên hệ trực tiếp với $\mathcal{E}_0$.

3. Vật Lý Sinh mô tả đàn chim bay

Có lẽ các bạn đã biết, hàm phân bố Maxwell-Boltzmann tạo ra cầu nối giữa hành vi ở cấp độ cá nhân và hành vi ở cấp độ quần thể, đặc biệt hiệu quả khi áp dụng cho những hệ Vật Lý được cấu tạo từ các cá thể đơn giản và vô tri. Tuy nhiên, với các hệ Vật Lý thường thấy trong thế giới Sinh học, nơi các cá thể có khả năng quan sát, xử lý thông tin và ra quyết định, để xây dựng cầu nối này thì hàm phân bố cần được sử dụng sẽ phải rất khác biệt.

Xét một đàn chim bay, với chú chim j ở vị trí $\vec{r}_j(t)$ và đang bay với vận tốc $\vec{v}_j(t) = d\vec{r}_j(t)/dt$ (t là thời điểm hiện tại). Hướng bay của chú chim này được xác định bởi $\hat{s}_j(t) = \vec{v}_j(t)/\left|\vec{v}_j(t)\right|$ (xem các hình 9B), trong đó $|\vec{o}|$ là giá trị độ dài của vector $\vec{o}$. Định nghĩa giá trị liên kết C_{jk} giữa cặp chim j và k theo giá trị trung bình của tích vô hướng hướng bay $\hat{s}_j(t) \cdot \hat{s}_k(t)$ theo thời gian t. Khi C_{jk} càng gần với 1, thì có nghĩa rằng cặp chim này càng cố gắng bay cùng hướng với nhau hơn.

Giả sử đàn chim bao gồm $N \gg 1$ chú chim, thế thì $j = 1, 2, 3, ..., N$ và mỗi *vi thái* Θ của hướng bay đàn chim này có thể được xác đinh bởi N các giác trị véc-tơ:

$$\Theta \equiv \left[\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, ..., \hat{s}_N\right] \ .$$

Cho biết tập hợp giá trị tất cả các hàm liên kết hướng bay $\{C_{ij}\}$, chúng ta muốn xác định xác suất $p(\Theta)$ ở thời điểm bất kỳ quan sát được đàn chim bay đang sở hữu *vi thái* Θ.

Câu hỏi e. Chứng minh rằng:

$$p(\Theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{jk}\left(\hat{s}_j \cdot \hat{s}_k\right)\right] \ , \tag{4}$$

với mỗi giá trị β_{jk} có thể được xác định từ tập hợp tất cả các giá trị liên kết hướng bay $\{C_{jk}\}$.

Chú ý rằng, để đơn giản hóa câu hỏi ở trên, chúng ta xét ràng buộc là tất cả các tất cả các giá trị liên kết C_{jk}. Các nhà Vật Lý Sinh sử dụng ít ràng buộc hơn (chỉ với các cặp chim *đủ gần* nhau) nhưng chặt hơn (tất cả các giá trị liên kết này đều bằng nhau). Nói cách khác, khi khớp lý thuyết này với thực nghiệm, thì chỉ có đúng hai giá trị tự do là kích thước hàng xóm n và giá trị liên kết trong nhóm hàng xóm C. Kích thước hàng xóm n xác định nhóm hàng xóm *đủ gần* với một chú chim. Cụ thể, chim j được coi là *đủ gần* chim k nếu nó nằm trong số n chim gần nhất quanh chim k. Ý nghĩa sinh học ở đây là mỗi con chim đưa ra quyết định dựa trên quan sát và tương tác với các chim trong nhóm hàng xóm của mình, tập trung vào các tương tác địa phương thay vì toàn bộ bầy. Mô hình đơn giản này mô tả rất tốt những hành vi quần thể của nhiều bầy đàn sinh vật di cư đồng bộ khác nhau, e.g. bầy chim sáo đá châu Âu (*Sturnus vulgaris*, xem hình 10) với $n \approx 11$ và $C \approx 0.996$.

Hình 10: Một chú chim sáo đá châu Âu (*Sturnus vulgaris*).

HẾT