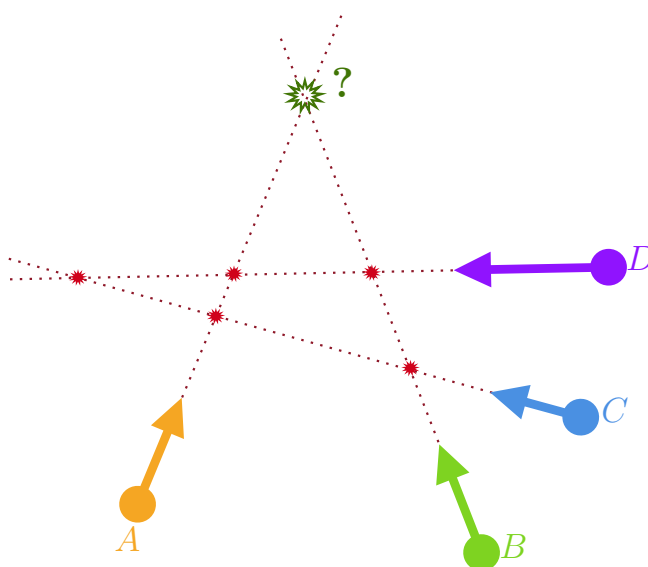


# Hướng tới chuyên lý 2024

## Câu lạc bộ vật lý xPhO

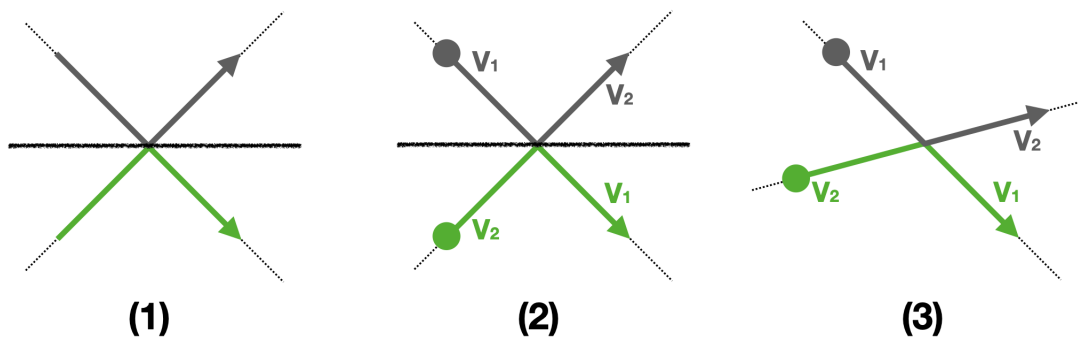
### CÂU 1 (4 điểm)

- Vào giờ ra chơi ở một trường nọ, có bốn bạn đang băng qua sân trường rộng lớn cùng lúc, khi bắt đầu chuyển động, vận tốc các bạn không đổi và khác nhau, phương các vận tốc không song song nhau và không có quá hai phương chuyển động đồng quy tại một điểm. Biết 5 và chỉ 5 trên 6 trường hợp các bạn có thể gặp nhau đã xảy ra. Cho rằng vận tốc các bạn không đổi suốt quá trình chuyển động và mỗi lần gặp nhau không ảnh hưởng gì tới sự chuyển động của các bạn. Trường hợp gặp nhau thứ 6 có xảy ra không?



Hình 1

- Lúc này, khi các bạn thực hiện lại quá trình trên nhưng với giả định rằng khi hai người gặp nhau thì họ "va chạm đàn hồi" nhau. Hỏi số va chạm lớn nhất mà một người có thể trải nghiệm là bao nhiêu? Với giả định là các bạn học sinh này có cân nặng như nhau. Bỏ qua ảnh hưởng của kích thước các bạn lên chuyển động và hành động tương tác lẫn nhau.



Hình 2

Hành động va chạm đàn hồi của bài có thể dùng hiện tượng phản xạ gương để liên tưởng.

- (1) hình ảnh phản xạ gương (tia đen là tia thật, tia xanh là ảnh tia đen qua gương).
  - (2) cho hai hạt đi theo quỹ đạo của các tia.
  - (3) một va chạm đàn hồi bình thường diễn ra.
- Trong các va chạm đàn hồi, các hạt trao đổi **tốc độ** và **quỹ đạo** với nhau.

(Biên soạn bởi wan và Mino)

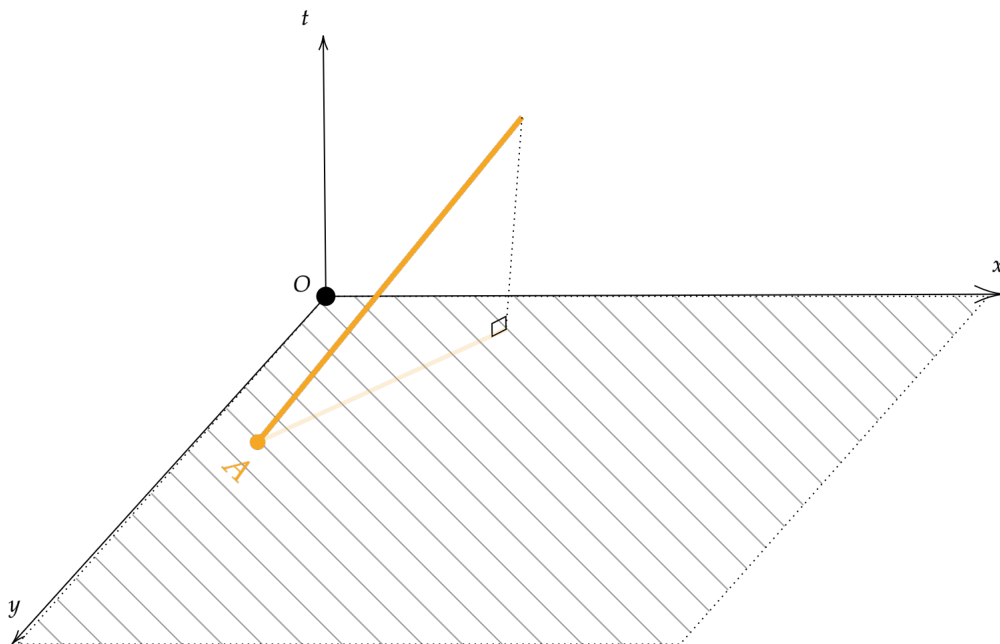
### Bài giải

1. Nhận xét: Do có 5 trên 6 trường hợp gặp nhau đã xảy ra giữa 4 bạn, chắc chắn có 2 bạn đã gặp hết 3 bạn còn lại và còn 1 cặp bạn chưa gặp nhau. Gọi các bạn lần lượt là A, B, C và D sao cho cặp bạn chưa gặp nhau là C và D (cũng có nghĩa A và B mỗi bạn đã gặp hết các bạn còn lại).

Ta có 2 cách giải quyết:

#### Cách 1: Dùng đồ thị vị trí theo thời gian:

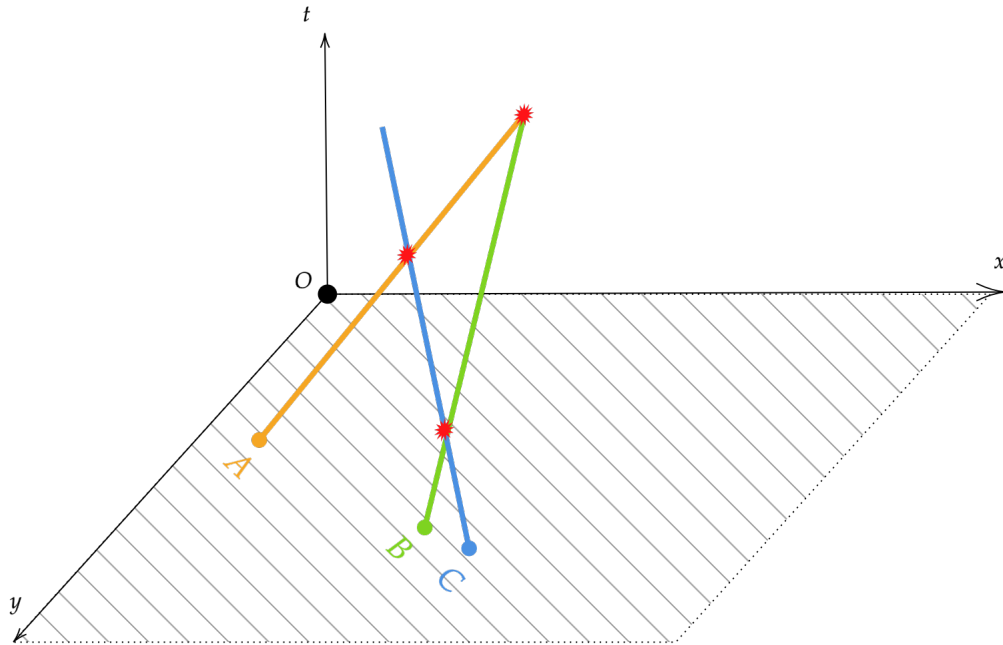
Xét hệ trục tọa độ không gian-thời gian với 2 trục tạo nên mặt phẳng chứa quỹ đạo chuyển động của các bạn và một trục thời gian. Do các bạn chuyển động thẳng đều trên các quỹ đạo không song song nên đồ thị của các bạn trên hệ trục tọa độ này là *các đường thẳng không song song*.



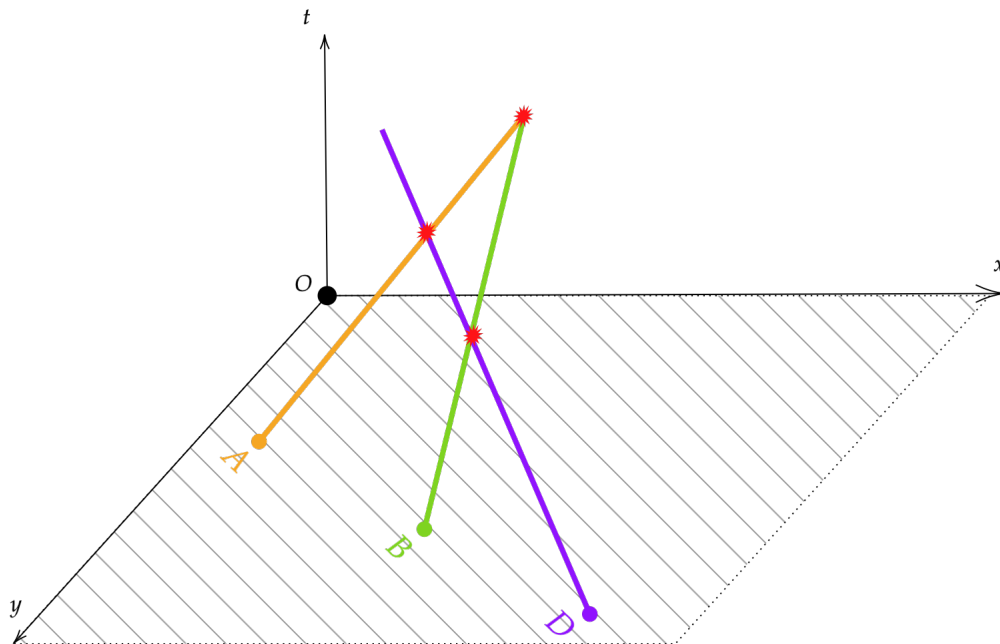
Hình 1: Đồ thị tọa độ-thời gian của bạn A  
Quỹ đạo của bạn cũng chính là hình chiếu của đồ thị lên hệ trục Oxy!

Mỗi điểm giao nhau của các đường thẳng này biểu thị cho một lần gặp nhau.

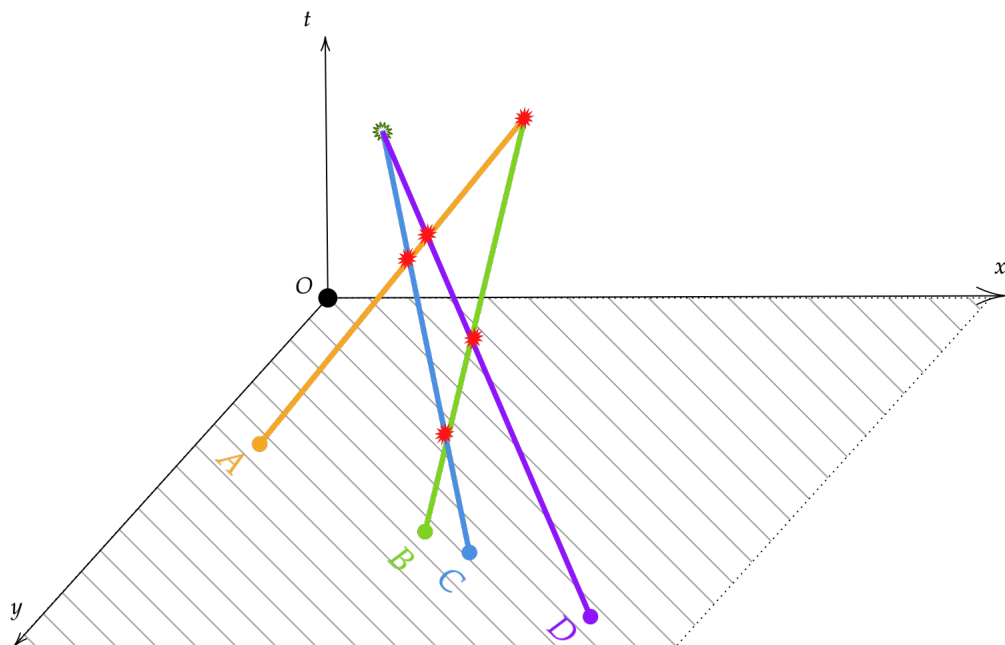
Từ các giao điểm thể hiện lần gặp mặt của A với B, A với C và B với C ta có thể lập một mặt phẳng chứa cả ba đường thẳng của A, B và C. Do đường thẳng của D giao A và B nên cũng nằm trên mặt phẳng này. Vì các đường thẳng đồng phẳng và không song song nên đường thẳng của D và C sẽ giao nhau. Do đó bạn C và bạn D sẽ gặp nhau.



Hình 2: Đồ thị tọa độ-thời gian của bạn A, B và C cùng nằm trên một mặt phẳng



Hình 3: Đồ thị của A, B và D cũng nằm trên một mặt phẳng

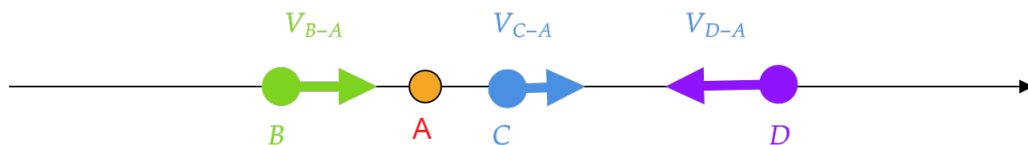


Hình 4: Đồ thị của 4 bạn đồng phẳng

Vậy trường hợp gặp nhau thứ 6 chắc chắn sẽ xảy ra.

### Cách 2: Dùng hệ quy chiếu:

Chọn hệ quy chiếu gắn với A, khi này, các đường thẳng quỹ đạo của B, C và D đều *giao nhau tại điểm A* do cả ba bạn đã gặp A. Vì B đã gặp C nên quỹ đạo của B và C *giao nhau*, mà hai đường thẳng quỹ đạo này cũng *giao nhau tại A* nên quỹ đạo của B và C *trùng nhau*. Tương tự, ta có đường thẳng quỹ đạo của B và D cũng *trùng nhau*. Do đó quỹ đạo của B, C và D *trùng nhau*.



Hình 5: Chuyển động của các bạn trong hệ quy chiếu gắn với A

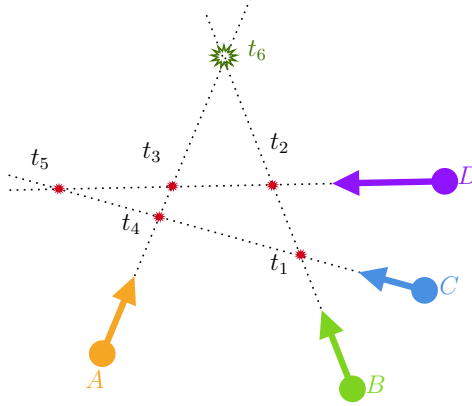
Vận tốc của các bạn đối với mặt đất *khác nhau và không đổi* nên vận tốc của những bạn còn lại đối với A cũng *khác nhau và không đổi*.

Vì bạn C và bạn D chuyển động đều với vận tốc khác nhau trên *cùng một đường thẳng*, sẽ có một lúc nào đó hai bạn đi qua nhau (nếu hai bạn chuyển động ngược chiều nhau) hoặc bạn này vượt qua bạn kia (nếu hai bạn chuyển động cùng chiều).

Vậy trường hợp gặp nhau thứ 6 chắc chắn sẽ xảy ra.

### Cách 3: (Lời giải của Murasakiiro)

Giả sử các bạn gặp nhau tại các thời điểm  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  như hình. Gọi  $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$  là toạ độ ban đầu của các bạn  $A, B, C, D$ , với gốc toạ độ  $O$  tùy ý.



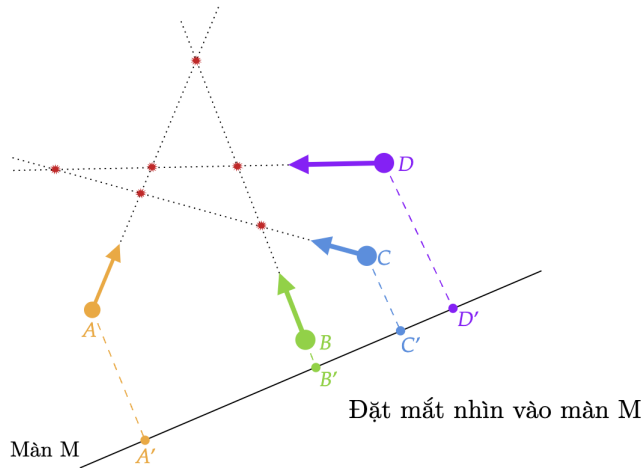
Với 5 cặp gặp nhau, ta có điều kiện gặp của 5 cặp điểm này là:

$$\begin{cases} (\vec{r}_B - \vec{r}_C) = t_1 (\vec{v}_B - \vec{v}_C) & (\text{cặp B-C}). \\ (\vec{r}_B - \vec{r}_D) = t_2 (\vec{v}_B - \vec{v}_D) & (\text{cặp B-D}). \\ (\vec{r}_A - \vec{r}_D) = t_3 (\vec{v}_A - \vec{v}_D) & (\text{cặp A-D}). \\ (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = t_4 (\vec{v}_C - \vec{v}_A) & (\text{cặp C-A}). \\ (\vec{r}_C - \vec{r}_D) = t_5 (\vec{v}_C - \vec{v}_D) & (\text{cặp D-C}). \end{cases}$$

Từ hệ phương trình trên, ta khử  $\vec{r}_C, \vec{r}_D, \vec{v}_C, \vec{v}_D$  ta sẽ thu được phương trình sau:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \frac{t_1 t_2 (t_4 - t_3) + t_2 t_4 (t_3 - t_5) + t_1 t_3 (t_5 - t_4)}{t_5 (t_1 + t_3 - t_2 - t_4) - t_1 t_3 - t_2 t_4} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) = t_6 (\vec{v}_A - \vec{v}_B). \quad (1)$$

Như vậy từ biểu thức (1) ta thấy rằng cặp điểm  $(A - B)$  có va chạm nhau. Như vậy có 6 va chạm diễn ra.



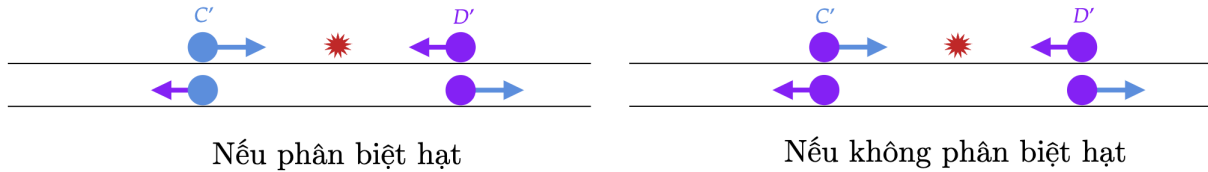
Hình 6

2. Ta sẽ biến một hệ 2D thành một hệ 1D bằng hình (6). Một số điểm cần lưu ý:

- (a) Do các bạn đều va chạm mỗi khi đi va điểm giao nhau của 2 quỹ đạo. Nên khi hình ảnh hai bạn trùng nhau trên màn tương đương hai bạn va chạm.
- (b) Hành động va chạm vẫn tuân theo quy tắc mà đề bài đã đề ra là trao đổi tốc độ và quỹ đạo.

### Tổng va chạm diễn ra

Hình (7) mô tả hai trường hợp. Nếu *không phân biệt* rõ hạt  $C'$  hay hạt  $D'$  thì giống như hai hạt đi xuyên qua nhau mà không tương tác gì.



Hình 7

Vậy lúc này nếu nói về số va chạm tổng cộng thì phần 2 vẫn có hiện tượng giống như phần 1. Như vậy tổng số va chạm diễn ra vẫn là 6.

Đến đây ta vô tình bổ sung thêm cho nhận định 1 trong phần lưu ý.

### Phân loại loại hạt trên màn.

Từ giờ để dễ gọi, ta sẽ thay thế từ 'bạn' thành 'hạt'.

Lúc này thì bài toán đã trở thành một bài toán va chạm 1D. Các vận tốc của các hạt là bất kì, nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện ở Phần 1.



Hình 8

Từ đây ta chia các hạt trên màn gồm: **hạt ngoài rìa** ( $A'$  và  $D'$ ) và **hạt bên trong** ( $B'$  và  $C'$ ).

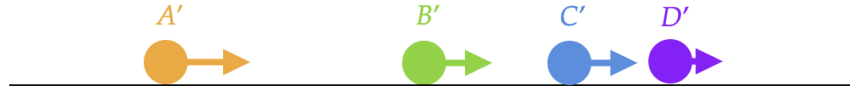
Lý do để chia cũng khá dễ hiểu, ta thấy rằng tiềm năng để hạt ngoài rìa va chạm ít hơn so với lại hạt bên trong. Hạt ngoài rìa tự do một đầu, nên khả năng thoát khỏi hệ sớm hơn hạt bên trong. Giờ ta sẽ đi khảo sát số va chạm của các loại hạt này.

### Hạt ngoài rìa:

Để số va chạm có thể được tối đa thì

*Điều kiện 1:* Tất các hạt phải *hướng vận tốc về phía hạt  $D'$* . Lý do là vì để cho hạt  $D'$  có khả năng trao đổi vận tốc với hạt đó. Vì vậy số va chạm lớn nhất của  $D'$  diễn ra khi các hạt đều hướng về phía  $D'$ .

*Điều kiện 2:* Hạt  $D'$  phải va chạm với những hạt có tốc độ thấp và lần lượt đến các hạt có tốc độ cao sau. Bởi vì nếu hạt  $C'$  đuổi theo hạt  $D'$ , mà tốc độ của  $C'$  nhỏ hơn của  $D'$  thì hạt  $D'$  sẽ thoát khỏi hệ và kết thúc quá trình va chạm. Vì thế mình chia các loại tốc độ thành: *Lớn-Trung-Nhỏ*



Hình 9

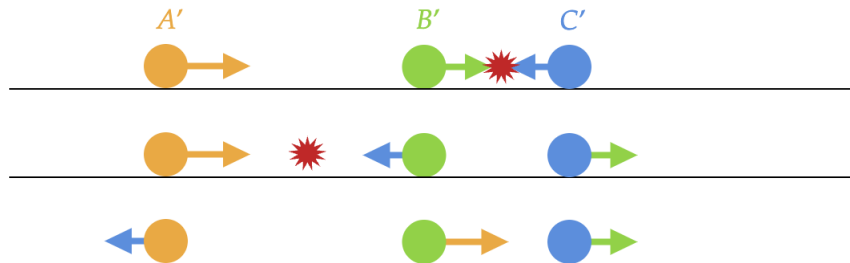
Thứ tự va chạm	Số va chạm của $D'$
Lớn	1
Trung(Nhỏ) - Lớn	2
Nhỏ - Trung - Lớn	3

Nhìn vào bảng thì ta thấy số va chạm khả dĩ của hạt ngoài rìa là  $[1;3]$ .

#### Hạt bên trong:

Ta sẽ lấy đại diện là hạt  $B'$ . Dựa vào kết quả đã được tính ở những hạt ngoài rìa, ta lập luận được số va chạm mà *không có sự góp mặt của  $D'$*  là  $[3;5]$ . Lý do là bởi tổng số va chạm vẫn bảo toàn là **6**.

Các hạt  $A'$  và  $C'$  không thể va chạm trực tiếp với nhau. Lý do là vì khi  $C'$  gặp  $B'$  thì đã bị bật ra do va chạm đàn hồi. Tương tự với  $A'$ . Vì thế nên sẽ không có va chạm giữa  $A'$  và  $C'$ , số va chạm là 0.



Hình 10: Tương tác của  $A' - B' - C'$

Do số va chạm của các hạt còn lại (là  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ) gồm va chạm giữa  $B' - C'$ ,  $B' - A'$  (cặp  $A' - C'$  không thể xảy ra va chạm như vừa chứng minh). Chung quy đều là va chạm có mặt  $B'$ . Như vậy số va chạm mà  $B'$  trải nghiệm thuộc  $[3;5]$ .

#### Tổng kết

	Số va chạm khả dĩ
Hạt ngoài rìa	$[1;3]$
Hạt bên trong	$[3;5]$

Từ đây dễ dàng kết luận là số va chạm lớn nhất một hạt (bạn) có thể trải nghiệm là **5**.

### 3. Phổ điểm

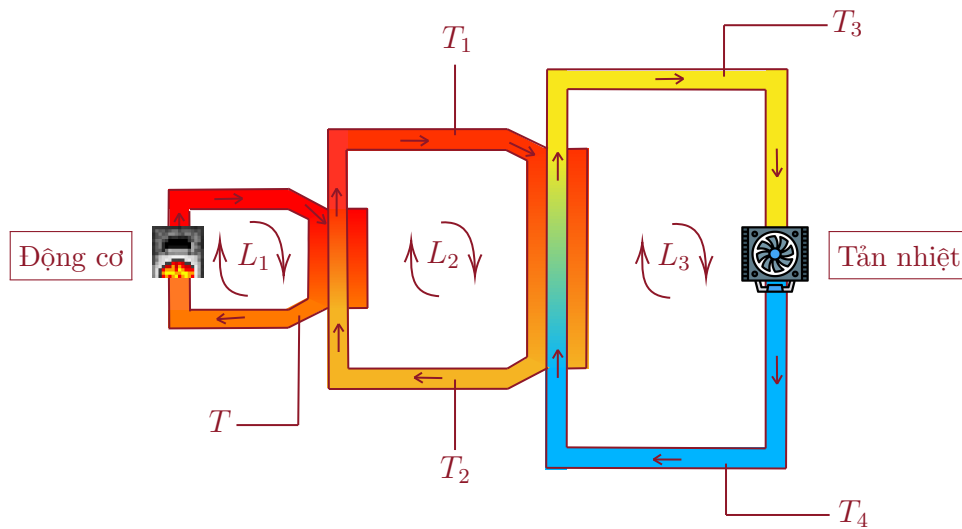
Phần	Nội dung		Điểm thành phần
1	Nếu làm theo cách 1	Biểu diễn chuyển động trên trục Oxyt.	0.5
		Biện luận 3 đồ thị bất kì đồng phẳng.	1
		Kết luận 4 đồ thị đồng phẳng, suy ra có cuộc gặp nhau thứ 6.	0.5
	Nếu làm theo cách 2	Biện luận chuyển động trong hệ quy chiếu gắn với một người.	0.5
		Biện luận các đường thẳng quỹ đạo trùng nhau.	1
		Kết luận cuộc gặp nhau thứ 6 có xảy ra.	0.5
2	Tương đương hệ 2D và 1D.		0.5
	Chứng minh tổng số va chạm.		0.25
	Điều kiện 1: Hạt ngoài rìa.		0.25
	Điều kiện 2: Hạt ngoài rìa.		0.25
	Va chạm khả dĩ hạt ngoài rìa.		0.25
	Chứng minh cặp hạt A-C không va chạm.		0.25
	Va chạm khả dĩ hạt bên trong.		0.25

Nếu làm theo cách khác nhưng hợp lý thì được trọn điểm.



## CÂU 2 (4 điểm)

Trong bài tập này, chúng ta sẽ xem xét một hệ thống dùng để làm mát động cơ có nhiệt độ cao khi hoạt động. Hệ thống này sử dụng các chất tải nhiệt làm vật trung gian truyền nhiệt mà có thể đơn giản hoá bằng một kết cấu như sau: Có ba khoang dẫn chất tải nhiệt (hình vẽ), trong đó khoang thứ nhất (vòng 1) kết nối với động cơ để thu nhiệt trực tiếp, khoang thứ hai (vòng 2) làm trung gian và khoang thứ ba (vòng 3) kết nối với nguồn lạnh để bơm nhiệt từ hệ thống ra ngoài. Nhiệt lượng giữa các khoang sẽ được trao đổi tại các buồng trao đổi nhiệt có tiết diện đều giữa các vòng 1-2 và 2-3. Chất tải nhiệt có nhiệt độ không đổi khi không ở trong buồng trao đổi nhiệt hoặc không tiếp xúc với động cơ hay nguồn lạnh. Lưu lượng chất lưu trong các khoang sẽ được giữ ổn định bằng một hệ thống bơm. Sở dĩ cần nhiều vòng như vậy là để giảm nhiệt độ của chất tải nhiệt khi tiếp xúc với nguồn lạnh, vốn không thể hoạt động ở nhiệt độ quá cao.



Hình 11: Sơ đồ làm mát

Biết rằng công suất tỏa nhiệt của động cơ là  $\mathcal{P}$ , chất tải nhiệt ở vòng 1 có nhiệt độ thấp nhất là  $T$ , lưu lượng chất tải nhiệt trong vòng 1 là  $L_1$ ; nhiệt dung riêng của chất tải nhiệt ở hai vòng đầu là  $C_1$ , nhiệt dung riêng của chất tải nhiệt ở vòng 3 là  $C_2$ ; hệ số truyền nhiệt giữa chất tải nhiệt ở vòng 1 và vòng 2 là  $K_1$ , hệ số truyền nhiệt giữa chất tải nhiệt ở vòng 2 và vòng 3 là  $K_2$ . Trừ tản nhiệt, các bộ phận trọng hệ thống không trao đổi nhiệt với môi trường ngoài.

Để thuận tiện khảo sát, một người muốn làm cho nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 1 khi ở trong buồng trao đổi nhiệt với vòng 2 và chất tải nhiệt trong vòng 2 khi ở trong buồng trao đổi nhiệt với vòng 3 có nhiệt độ giảm tuyến tính dọc theo buồng. Nhằm làm điều này, người đó đã điều chỉnh nhiệt độ và lưu lượng của chất tải nhiệt trong các vòng 2 và 3. Hỏi rằng người ấy phải điều chỉnh sao cho  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  bằng bao nhiêu để nhiệt độ động cơ và hệ thống làm mát luôn ổn định? (Biểu diễn đáp án theo  $\mathcal{P}$ ,  $T$ ,  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ )

*Cho biết: Trong một khối chất tiết diện đều, công suất nhiệt truyền qua tiết diện chất đó tại một vị trí tỉ lệ với độ biến thiên nhiệt độ dọc theo khối chất tại vị trí đó (hay độ dốc của hàm nhiệt độ dọc theo khối chất,  $-\frac{\Delta T}{\Delta x}$ ). Trong khuôn khổ bài này các bạn sẽ không cần dùng sự truyền nhiệt này để tính toán mà chỉ dùng để lập luận hiện tượng.*

(Biên soạn bởi Hirrus)

## Bài giải

1. **Ổn định nhiệt độ tại động cơ:** Để nhiệt độ của động cơ ổn định, chất tải nhiệt ở vòng 1 phải thu nhiệt từ động cơ cũng với công suất  $\mathcal{P}$ .

**Ổn định nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 1:** Giả sử nhiệt độ cao nhất của chất tải nhiệt tại vòng 1 là  $T_0$ . Sau một khoảng thời gian  $\Delta t$  nhỏ, có một lượng  $L_1 \Delta t$  chất tải nhiệt ở vòng 1 đi tới buồng trao đổi nhiệt ở nhiệt độ  $T_0$ ,  $L_1 \Delta t$  ra khỏi buồng trao đổi nhiệt ở nhiệt độ  $T$ . Như vậy, nhiệt lượng mà chất tải nhiệt trong vòng 1 đã truyền cho chất tải nhiệt trong vòng 2 trong khoảng thời gian  $\Delta t$  là:

$$\Delta Q = L_1 \Delta t C_1 T_0 - L_1 \Delta t C_1 T. \quad (1)$$

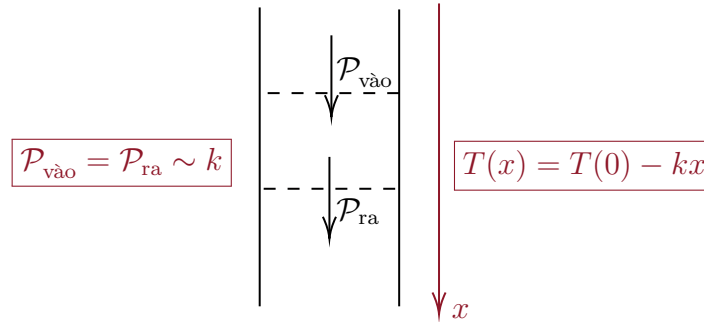
Do đó công suất truyền nhiệt của vòng 1 cho vòng 2 là:

$$\mathcal{P}' = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_1 C_1 (T_0 - T). \quad (2)$$

Để nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 1 là ổn định, nhiệt lượng nó thu từ động cơ trong một khoảng thời gian phải bằng nhiệt tỏa ra cho vòng 2 trong một thời gian tương ứng, nên  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ . Ta nhận được biểu thức của  $T_0$ :

$$T_0 = T + \frac{\mathcal{P}}{L_1 C_1}. \quad (3)$$

**Ổn định nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 2:** Xét một lớp chất tải nhiệt trong vòng 1 tại buồng trao đổi nhiệt, do nhiệt độ của chất giảm tuyến tính dọc theo buồng, nên nhiệt lượng mà lớp chất đó nhận được từ lớp chất đằng sau nó trên một khoảng thời gian bằng với công suất nhiệt mà nó tỏa ra cho lớp chất đằng trước nó trên một khoảng thời gian tương ứng.



Hình 12: Mô hình hóa sự truyền nhiệt

Như vậy, nguyên nhân làm giảm nhiệt độ của lớp chất đó chỉ là trao đổi nhiệt với chất tải nhiệt trong vòng 2, có nhiệt độ thấp hơn. Vì tiết diện buồng là đều, lưu lượng của dòng chất không đổi nên vận tốc chảy của chất tải nhiệt trong vòng 1 tại buồng trao đổi nhiệt là không đổi. Thế nên để nhiệt độ luôn giảm tuyến tính dọc theo buồng, công suất tỏa nhiệt tại mọi vị trí dọc theo buồng phải như nhau. Mà công suất tỏa nhiệt này lại tỉ lệ với độ chênh lệch nhiệt độ giữa chất tải nhiệt của hai vòng 1 và 2 tại điểm mà chúng tiếp xúc nhau, nên nhiệt

độ của chất tải nhiệt trong vòng 2 tại buồng trao đổi nhiệt với vòng 1 cũng có nhiệt độ tuyến tính dọc theo buồng.

Công suất nhiệt mà chất tải nhiệt trong vòng 2 nhận được từ vòng 1:

$$\mathcal{P} = K_1(T_0 - T_1) = K_1(T - T_2). \quad (4)$$

Từ đó ta có được biểu thức của  $T_1$

$$T_1 = T_0 - \frac{\mathcal{P}}{K_1} = T + \frac{\mathcal{P}}{L_1 C_1} - \frac{\mathcal{P}}{K_1}, \quad (5)$$

và  $T_2$ :

$$T_2 = T - \frac{\mathcal{P}}{K_1}. \quad (6)$$

Để nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 2 ổn định, nó cũng phải tỏa nhiệt cho vòng 3 với công suất  $\mathcal{P}$ . Chứng minh tương tự như bước tìm  $T_0$ , ta tìm được  $L_2 = L_1$ .

**Ổn định nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 3:** Do nhiệt độ của chất tải nhiệt trong vòng 2 tại buồng trao đổi nhiệt với vòng 3 là tuyến tính nên chứng minh tương tự như tại buồng trao đổi nhiệt giữa vòng 1-2, ta cũng có nhiệt độ của vòng 3 tuyến tính dọc theo buồng. Công suất nhiệt mà chất tải nhiệt trong vòng 3 nhận được từ vòng 2:

$$\mathcal{P} = K_2(T_1 - T_3) = K_2(T_2 - T_4). \quad (7)$$

Từ đó ta thu được biểu thức của  $T_3$ :

$$T_3 = T_1 - \frac{\mathcal{P}}{K_2} = T + \frac{\mathcal{P}}{L_1 C_1} - \left( \frac{\mathcal{P}}{K_1} + \frac{\mathcal{P}}{K_2} \right), \quad (8)$$

và  $T_4$ :

$$T_4 = T_2 - \frac{\mathcal{P}}{K_2} = T - \left( \frac{\mathcal{P}}{K_1} + \frac{\mathcal{P}}{K_2} \right). \quad (9)$$

Chứng minh tương tự như bước tìm  $T_0$ , ta tìm được biểu thức của  $L_3$ :

$$L_3 = \frac{\mathcal{P}}{C_2(T_3 - T_4)} = \frac{\mathcal{P}}{C_2(T_0 - T)} = \frac{C_1}{C_2} L_1. \quad (10)$$

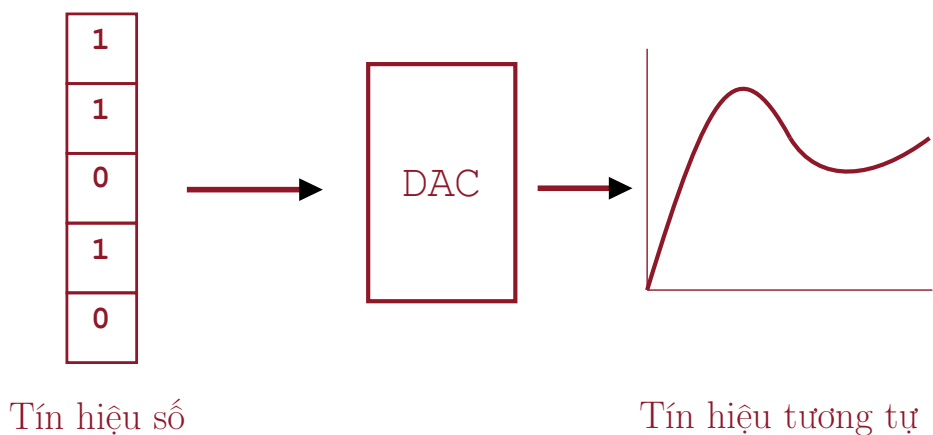
## 2. Phổ điểm

Nội dung	Điểm thành phần
Tìm được nhiệt độ thấp nhất $T_0$ của chất tải nhiệt ở vòng 1	0.50
Chứng minh nhiệt độ của vòng 2 tại buồng trao đổi nhiệt với vòng 1 có nhiệt độ tuyến tính dọc theo buồng	1.00
Tính được công suất nhiệt mà chất tải nhiệt trong vòng 2 nhận được từ vòng 1 bằng công thức Newton	0.50
Biểu diễn $T_1$ và $T_2$ theo $T, \mathcal{P}, L_1, C_1, K_1$	0.50
Chứng minh được $L_2 = L_1$	0.25
Chứng minh nhiệt độ của vòng 3 tại buồng trao đổi nhiệt với vòng 2 có nhiệt độ tuyến tính dọc theo buồng	0.25
Tính được công suất nhiệt mà chất tải nhiệt trong vòng 3 nhận được từ vòng 2 bằng công thức Newton	0.25
Biểu diễn $T_3$ và $T_4$ theo $T, \mathcal{P}, L_1, C_1, K_1, K_2$	0.50
Biểu diễn $L_3$ theo $C_1, C_2, L_1$	0.25

**CÂU 3 (4 điểm)**

## Mạch chuyển đổi tín hiệu số - tương tự (DAC)<sup>1</sup>

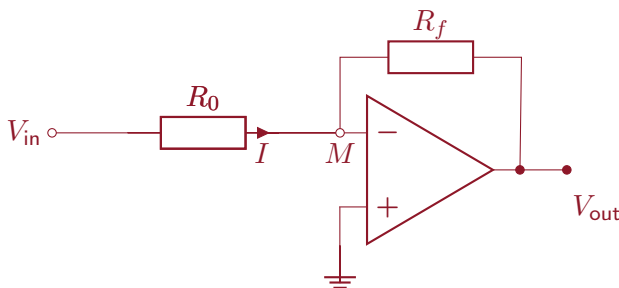
Trong nhiều năm qua, công nghệ số (Digital) với các tín hiệu rời rạc được tổ hợp bởi các bit hai trạng thái 0 và 1<sup>2</sup>, đang dần thay thế các công nghệ tương tự (Analog) với tín hiệu là đại lượng vật lý có giá trị liên tục, trong việc truyền và xử lý, tính toán tín hiệu. Sự chuyển đổi công nghệ này là cần thiết và phù hợp để tín hiệu số ít bị ảnh hưởng bởi các nhiễu của môi trường tạo ra. Nhằm thực hiện các thao tác điều khiển ở đầu ra sau khi xử lý tín hiệu, chúng ta cần một bộ chuyển đổi từ tín hiệu số (dạng các số nhị phân tổ hợp bởi 0 và 1) sang tín hiệu tương tự (dạng các số tự nhiên liên tiếp). Ở bài toán này, chúng ta sẽ khảo sát các mô hình mạch DAC 4 bit đơn giản để hiểu được cơ chế của bộ chuyển đổi này.



Hình 13: Sơ đồ biến đổi Digital - Analog

(a) Mach khuếch đại đảo

Một linh kiện được sử dụng thường xuyên trong mạch chuyển đổi tín hiệu số là OPAMP (Operation amplifier). Xét mạch như hình sau, biết rằng ở trạng thái lý tưởng của mạch hiệu điện thế giữa hai điểm ở hai đầu (+) và (-) là bằng 0 và không có dòng điện đi qua nhánh nối giữa  $M$  và OPAMP. Đầu (+) được nối với thành phần được gọi là nối đất<sup>3</sup>. Biết rằng hai đại lượng  $V_{out}$  và  $V_{in}$  tỉ lệ với nhau qua một hằng số  $\alpha$ , cụ thể là  $V_{out} = \alpha V_{in}$ . Tìm  $\alpha$  theo  $R_0$  và  $R_f$ .



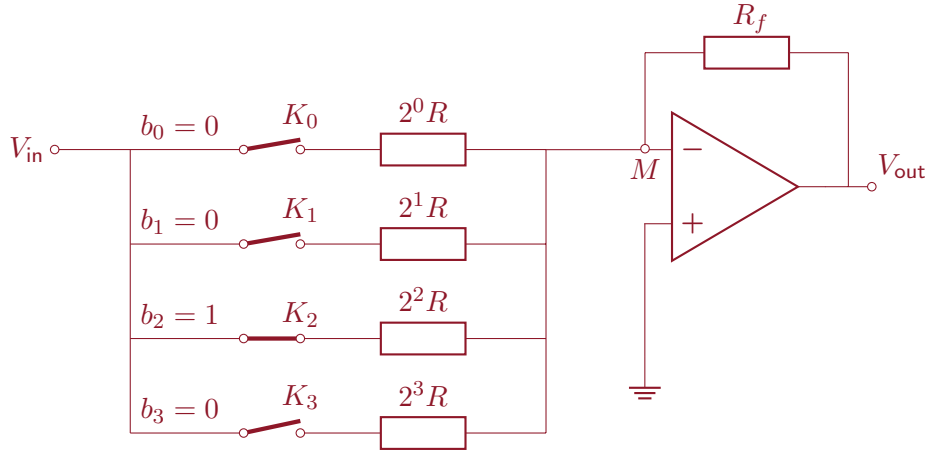
Hình 14: Mạch khuếch đại đảo

<sup>1</sup>ADC: Analog Digital Converter.

<sup>2</sup>Trạng thái 0 ứng với dòng điện và điện áp ở mức "thấp" và trạng thái 1 ứng với dòng điện ở mức "cao" trong một chuẩn quy ước. Ví dụ với một số chip, trạng thái 0 ứng với điện áp 0 V, trạng thái 1 ứng với điện áp 5 V.

<sup>3</sup>Dây nối đất sẽ coi như nối vào một nguồn có điện thế bằng 0.

(b) Mạch DAC R/2nR (Binary Weighted Input DAC)



Hình 15: Mạch DAC R/2nR 4 Bit ở trạng thái 0010.

Trong phần này, ta sẽ xét một mạch thể hiện được 4 bit thông tin (hay 4 giá trị nhị phân) như hình (15). Quy ước về các giá trị nhị phân là: khi khoá  $K_n$  mở thì tương đương với giá trị nhị phân 0; khi khoá  $K_n$  đóng thì tương đương giá trị nhị phân 1. Với  $n$  tương ứng với số mũ của điện trở ( $2^n R$ ) mà khoá  $K$  mắc nối tiếp. Các trạng thái này được biểu diễn qua các giá trị  $b_n$  được ghi trên hình.

Khi thể hiện dãy thông tin 4 bit, ta sẽ ghi nhận trạng thái của các khoá  $K$ . Với thứ tự lần lượt từ trái sang phải là từ  $n = 0$  đến  $n = 3$ .

Cho các giá trị  $V_{in}$ ,  $R$  và  $R_f$  coi như đã biết. Hãy tính giá trị của điện thế  $V_{out}$  dựa theo các giá trị trên và tương ứng với các tín hiệu nhị phân 4 bit trong bảng 1. Để có một bảng giá trị đẹp mắt, ta chọn đơn vị của  $V_{out}$  là  $\left(-\frac{R_f}{8R}V_{in}\right)$ .

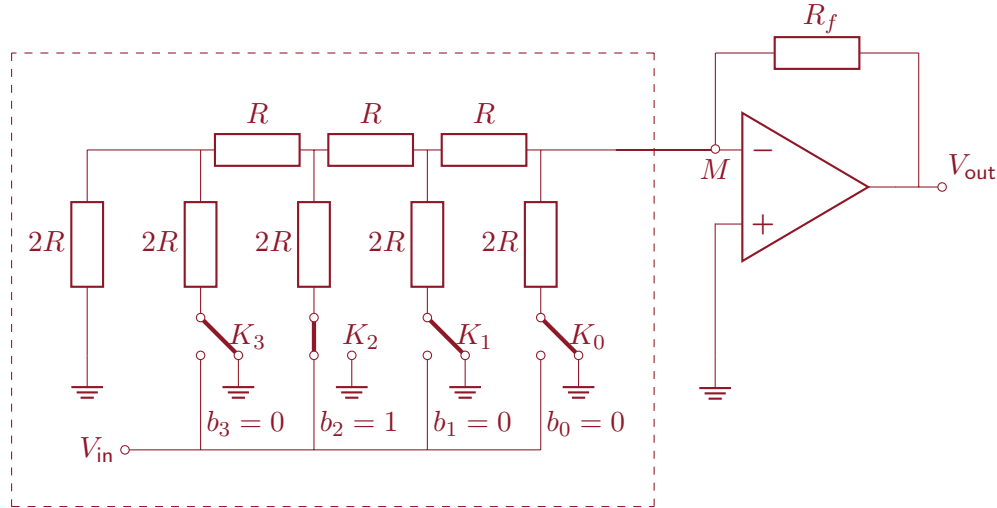
Tín hiệu số	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
$V_{out}$								

Tín hiệu số	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
$V_{out}$								

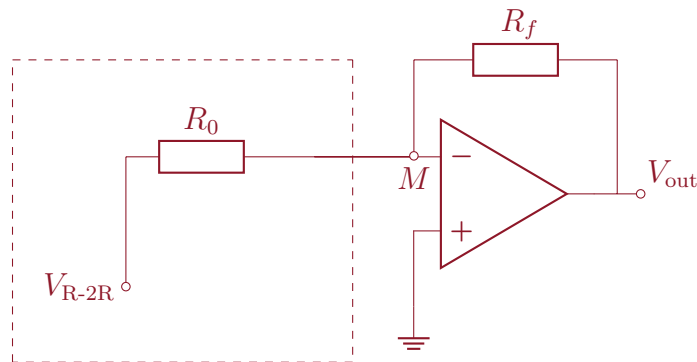
Bảng 1

(c) Mạch DAC R-2R (Ladder DAC)

Có thể nhận thấy, nhược điểm lớn nhất của mạch DAC dạng R/2nR là việc sử dụng quá nhiều điện trở chính xác để thực hiện quá trình chuyển đổi và khi mà các số bit đầu vào tăng lên thì giá trị điện trở sẽ tăng lên theo cấp số nhân. Vì vậy, một biến thể được sử dụng rộng rãi hơn là dạng R-2R vốn chỉ sử dụng tới 2 loại điện trở. Mạch điện ấy có dạng như sau:



Hình 16: Mạch DAC R-2R 4 Bit ở trạng thái 0010



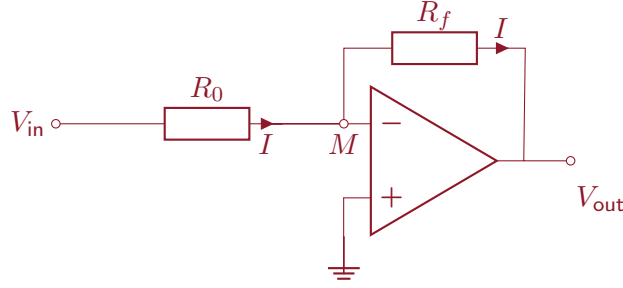
Hình 17: Hệ tương đương của mạch R-2R

Hệ mạch điện nằm trong khung sẽ tương đương với một điện thế  $V_{R-2R}$  và một điện trở  $R_0$  như hình (17). Các giá trị điện thế và điện trở có thể bị thay đổi bởi trạng thái của khoá  $K$ .

1. Khi mạch điện ở trạng thái 0000, tìm  $V_{R-2R}$  và  $R_0$ .
2. Khi mạch điện ở trạng thái 0001 và 1000, tìm  $V_{R-2R}$  và  $R_0$ .
3. Sử dụng tính tương tự để tính  $V_{R-2R}$  và  $R_0$  cho mạch ở trạng thái 0100 và 0010.
4. Sử dụng nguyên lý chồng chập để đưa ra quy luật chung cho điện thế  $V_{out}$  theo các giá trị  $b_n$ ,  $R$ ,  $R_f$  và  $V_{in}$ . Nguyên lý chồng chập phát biểu: "Ảnh hưởng do các nguồn độc lập gây ra, bằng tổng ảnh hưởng của từng nguồn gây ra".

Gợi ý: Sử dụng định lý Thevenin.

(Biên soạn bởi Mino và trees&streetslights.inc)



- (a) Từ điều kiện lý tưởng, nhánh dây đi từ  $M$  đến OPAMP không có dòng đi qua. Vì vậy, cường độ dòng điện đi qua 2 điện trở  $R_0$  và  $R_f$  là bằng nhau và bằng  $I$ . Áp dụng định luật Ohm cho hai đoạn mạch chứa  $R_0$  và  $R_f$ , ta suy ra được đẳng thức sau:

$$I = \frac{V_{in} - V_M}{R_0} = \frac{V_M - V_{out}}{R_f}. \quad (1)$$

Vì theo điều kiện lý tưởng,  $V_M = 0$ . Vậy nên, ta có:

$$\frac{V_{in}}{R_0} = -\frac{V_{out}}{R_f}. \quad (2)$$

Từ đây, ta có biểu thức xác định điện thế đầu ra của mạch khuếch đại đảo:

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_0} V_{in}. \quad (3)$$

Ở đây dấu âm của một đại lượng điện thế có nghĩa là điện thế tại điểm đó thấp hơn  $V = 0$  một lượng bằng đúng độ lớn của điện thế đó.

- (b) Hệ điện trở trên 4 nhánh sẽ tương đương với một điện trở  $R_0$ , tùy theo trạng thái của các khoá  $K$ . Dựa vào các hàm  $b_n$  ta có thể xây dựng biểu thức tính điện trở tương đương của hệ. Khi  $b_n = 0$  nghĩa là điện trở đó bị ngắt khỏi mạch, khi  $b_n = 1$  nghĩa là điện trở có tham gia vào mạch.

Ta thấy rằng, hệ 4 nhánh điện trở là hệ các điện trở mắc song song nhau. Dựa vào trạng thái của các khoá  $K$  ta viết được điện trở tương đương  $R_0$  tổng quát như sau:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{b_0}{2^0 R} + \frac{b_1}{2^1 R} + \frac{b_2}{2^2 R} + \frac{b_3}{2^3 R}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (2), ta tìm được biểu thức của  $V_{out}$  theo trạng thái của các khoá  $K$ .

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R} \left( \frac{b_0}{2^0} + \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} \right) V_{in}. \quad (5)$$

Thay các trạng thái như bảng đề bài yêu cầu, ta sẽ thu được một bảng như sau. Ta chọn đơn vị của điện thế  $V_{out}$  là  $\left(-\frac{R_f}{8R} V_{in}\right)$  thì bảng sẽ được điền vào như sau:



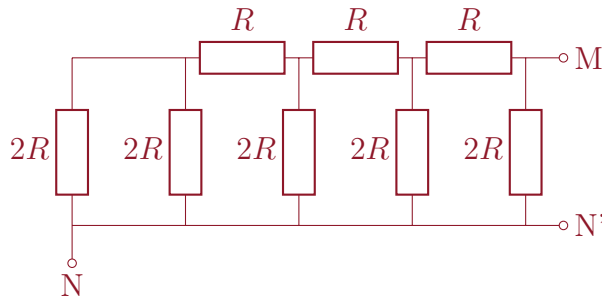
Tín hiệu số	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
$V_{out}$	0	1	2	3	4	5	6	7

Tín hiệu số	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
$V_{out}$	8	9	10	11	12	13	14	15

Bảng 2

- (c) 1. Do các đầu nối đất đều có thể nối với nhau nên ta có thể vẽ lại mạch như hình (18). Ta muốn tính điện trở giữa điểm  $M$  và  $N$ . Nhưng do dây có điện thế nối đất có điện thế bằng nhau tại mọi điểm nên điện trở khi tính ở điểm  $N$  cũng bằng khi tính ở điểm  $N'$ . Đây là một mạch hỗn hợp gồm các thành phần song song và nối tiếp, về cơ bản ta có thể tính được đơn giản điện trở giữa hai điểm  $M$  và  $N'$  là.

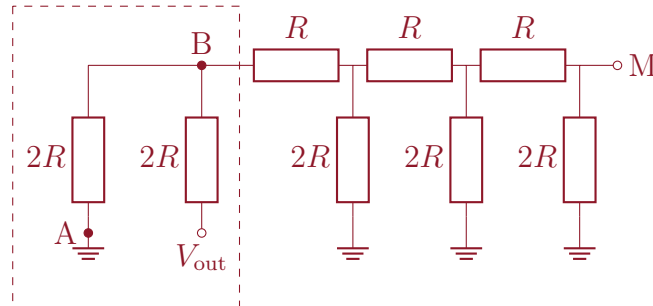
$$R_0 = R_{MN} = R. \quad (6)$$



Hình 18

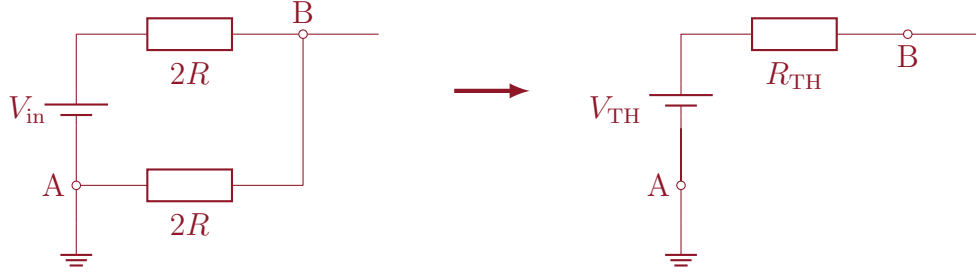
Về điện thế  $V_{R-2R}$ , do hệ nối đất nên ta có  $V_{R-2R} = 0$ .

2. Ta vẽ lại mạch ở trạng thái 0001. Để xét được hệ mạch này ta sẽ ứng dụng định lý Thevenin cho các ô mạch nhỏ hơn. Ta xét ô mạch nằm trong khung.



Hình 19

Ta ngắt mạch tại hai điểm  $A$  và  $B$  để tạo ra một tương đương Thevenin, có nguồn  $V_{TH}$  và điện trở tương đương  $R_{TH}$ . Định lý Thevenin cho rằng, bất cứ hệ mạch điện dù có phức tạp đến đâu cũng sẽ có thể vẽ thành một mạch nối tiếp đơn giản. Điều đó được thể hiện ở hình (20).



Hình 20

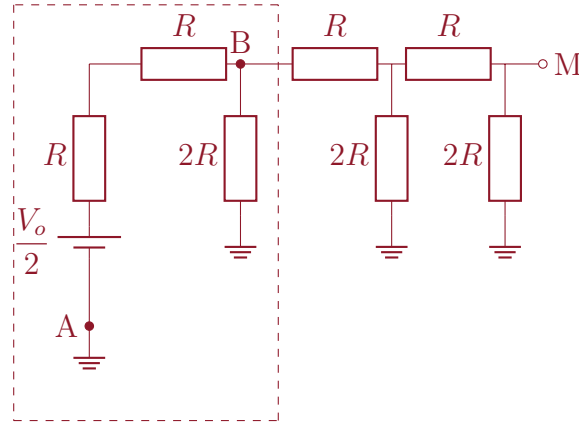
Để tìm  $V_{TH}$  thì ta cần tìm được  $U_{AB}$  khi ngắt các điểm  $A$  và  $B$ . Lúc này mạch sẽ gồm một nguồn  $V_{in}$  và hai điện trở  $2R$  mắc nối tiếp nhau. Lúc này hiệu điện thế giữa hai điểm  $A$  và  $B$  là.

$$V_{TH} = U_{AB} = V_{in} \frac{2R}{2R + 2R} = \frac{V_{in}}{2}. \quad (7)$$

Để tìm  $R_{TH}$  thì ta tìm  $R_{AB}$  khi bỏ nguồn ra khỏi mạch. Lúc này giữa hai điểm  $A$  và  $B$  sẽ là hai điện trở  $2R$  mắc song song nhau. Từ đây điện trở giữa hai điểm  $A$  và  $B$  là.

$$R_{TH} = R_{AB} = \left( \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = R. \quad (8)$$

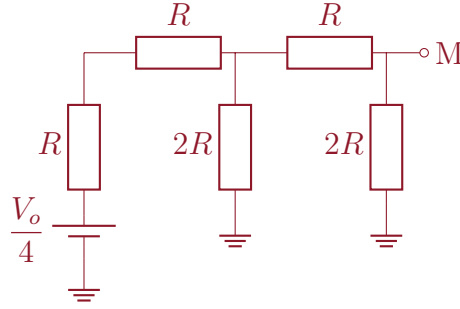
Ta ghép hệ mạch trong khung lại mạch chính như sau, và ta xét tiếp tục các ô tiếp theo như hình vẽ và áp dụng định lý Thevenin.



Hình 21

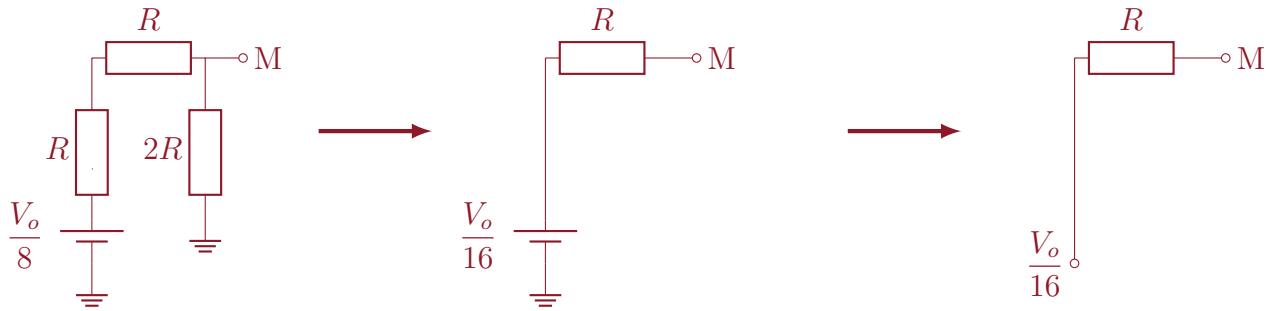
Mạch trong khung sẽ giống như (Hình số (3)) nhưng thay nguồn  $V_{in}$  thành nguồn  $V_{in}/2$ . Vậy nên ta sẽ thu được được một kết quả tương tự. Ta ghép lại vô mạch thì ta sẽ có hình (22).

$$V_{TH} = \frac{V_{in}}{4}; R_{TH} = R. \quad (9)$$



Hình 22

Đó chính là phương pháp chính của chúng ta để giải quyết bài toán. Để bài toán bớt cồng kềnh, ta sẽ biểu diễn các bước tiếp theo bằng hình (23). Từ hình thứ hai qua hình thứ ba, ta đổi từ một hiệu điện thế  $V_{R-2R}$  sang một điện thế  $V_{R-2R}$ . Lý do ta có thể thực hiện bởi vì  $V_M = 0$  nên chênh lệch điện thế giữa nguồn và điểm  $M$  vẫn giữ nguyên.

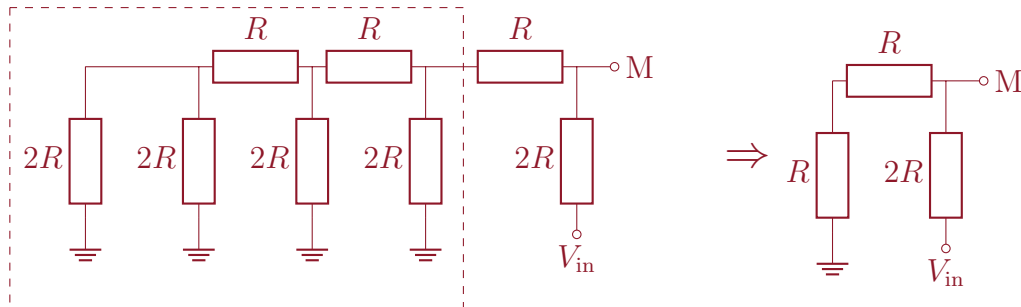


Hình 23

Từ đây ta tính được hệ trong trạng thái 0001.

$$V_{R-2R} = \frac{V_{in}}{16}; R_0 = R. \quad (10)$$

Ta vẽ mạch tại trạng thái 1000 và áp dụng kết quả từ mục 1. của phần (c) cho hệ này. Phần mạch nằm trong khung có quy luật giống với mạch ở trạng thái 0000, nên ta có thể có phép thu gọn như hình (24).



Hình 24

Giờ đây ta áp dụng Thevenin cho phần mạch đã rút gọn, với kết quả tương tự được tính ở mục 2. ta có thể tính ra được các kết quả sau.

$$V_{R-2R} = \frac{V_{in}}{2}; R_0 = R. \quad (11)$$

3. Ta đã làm việc với mạch ở trạng thái 0001 và 1000 để biết được số biến đổi của hệ mạch này. Ta nhận ra một điều là, khi áp dụng một lần định lý Thevenin, thì điện thế đầu vào sẽ giảm theo cấp số nhân lùi  $2^{-1}$ . Vì vậy, dựa vào tính tương tự trong phương pháp làm, ta thấy mạch ở trạng thái 0010 sẽ phải dùng Thevenin 3 lần; mạch ở trạng thái 0100 sẽ phải dùng Thevenin 2 lần. Vì thế nên ta có thể suy thẳng ra kết quả với từng trạng thái.

Với mạch 0010.

$$V_{R-2R} = \frac{V_{in}}{8}; R_0 = R. \quad (12)$$

Với mạch 0100

$$V_{R-2R} = \frac{V_{in}}{4}; R_0 = R. \quad (13)$$

Ta sẽ tổng hợp được một bảng các giá trị như sau.

Trạng thái	0001	0010	0100	1000
$V_{R-2R}$	$V_{in}/16$	$V_{in}/8$	$V_{in}/4$	$V_{in}/2$
$R_0$	R	R	R	R

Bảng 3

4. Sử dụng nguyên lý chồng chập, ta biết ảnh hưởng của từng nguồn độc lập dựa vào bảng 3. Vậy nên tổng những thành phần độc lập này sẽ có ta biểu thức tổng quát  $V_{R-2R}$  của trạng thái  $b_0b_1b_2b_3$ .

$$V_{R-2R} = V_{in} \left( \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{16} \right). \quad (14)$$

Cũng dựa vào bảng 3 ta biết rằng điện trở tương đương  $R_0$  luôn bằng  $R$  trong mọi trường hợp, từ đây áp dụng phương trình (3) ta sẽ viết được biểu thức tổng quát của  $V_{out}$ .

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R} \left( \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{16} \right) V_{in}. \quad (15)$$

(d) **Phổ điểm**

Phần	Nội dung	Điểm thành phần
(a)	Chứng minh $V_M = 0$ .	0.5
	Tính được phương trình (1) và suy ra $\alpha$ .	0.5
(b)	Phương trình (4).	0.25
	Tính được phương trình (5).	0.25
	Điền bảng 1 hoàn chỉnh.	0.5
(c)	Tính được $V_{R-2R}, R_0$ trạng thái 0000.	0.25
	Phương trình (7) và (8).	0.25
	Phương trình (9)	0.25
	Hình (23). Phương trình (10).	0.5
	Hình (24). Phương trình (11).	0.25
	Phương trình (12) và (13).	0.25
	Phương trình (14) và (15).	0.25

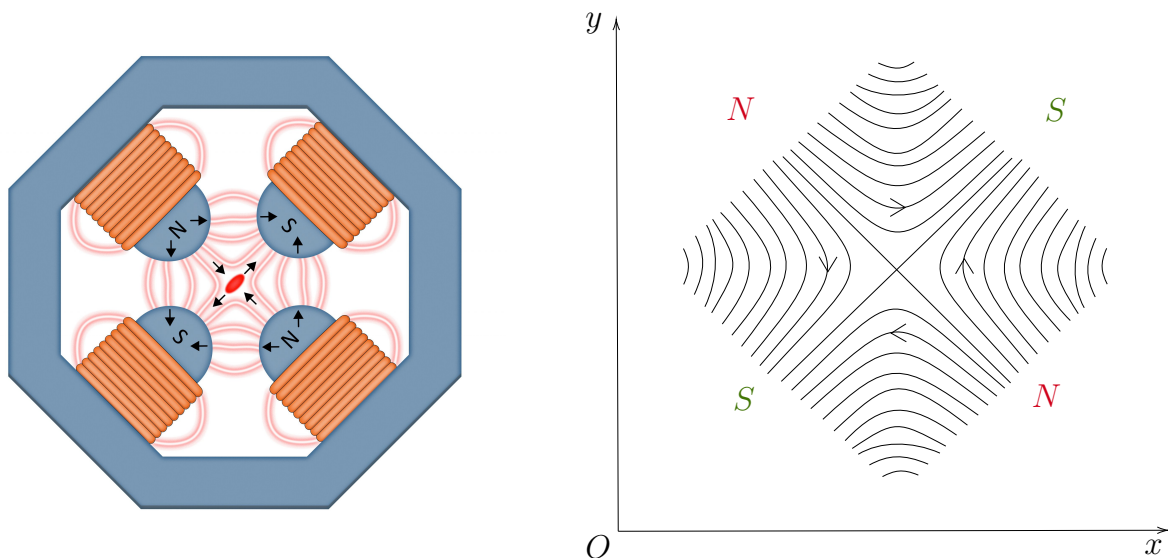
## CÂU 4 (4 điểm)

### Thấu kính tứ cực từ hội tụ mạnh

Trong các máy gia tốc hạt năng lượng cao, việc điều hướng chuyển động của các hạt cần thông qua các tương tác điện từ. Tứ cực từ là một mô hình từ trường tạo ra bởi hệ thống dây điện được cuộn để sinh ra từ trường có dạng đường sức khá giống với bốn nam châm đặt đối xứng bốn góc và thường được sử dụng cho mục đích điều hướng chùm hạt. Trường điện từ của tứ cực từ sẽ tác dụng lực lên các hạt khiến cho quỹ đạo của chúng bị bẻ cong như cách các tia sáng đi qua các thấu kính quang học, nhưng lại chỉ bẻ hướng tia sáng về phía quang trục (như thấu kính hội tụ) theo một phương và bẻ hướng tia sáng ra xa khỏi quang trục (như thấu kính phân kỳ) theo phương còn lại. Trong bài toán này, chúng ta sẽ khảo sát định tính về mô hình tứ cực từ cũng như thiết kế một hệ các thấu kính tứ cực để tạo ra sự hội tụ cho chùm hạt.

#### 1. Tính chất thú vị của tứ cực từ

Khi bạn lắp ráp bốn nam châm điện lại thành một hệ sao cho hai cực Nam ở đối diện nhau và hai cực Bắc ở đối diện nhau như hình 25, bạn sẽ thu được một **tứ cực từ**. Tứ cực từ có rất nhiều tính chất thú vị, và được sử dụng rộng rãi trong các máy gia tốc hạt nhằm hội tụ các chùm tia tích điện. Các câu hỏi phía dưới sẽ khảo sát các đặc tính độc đáo của tứ cực từ:

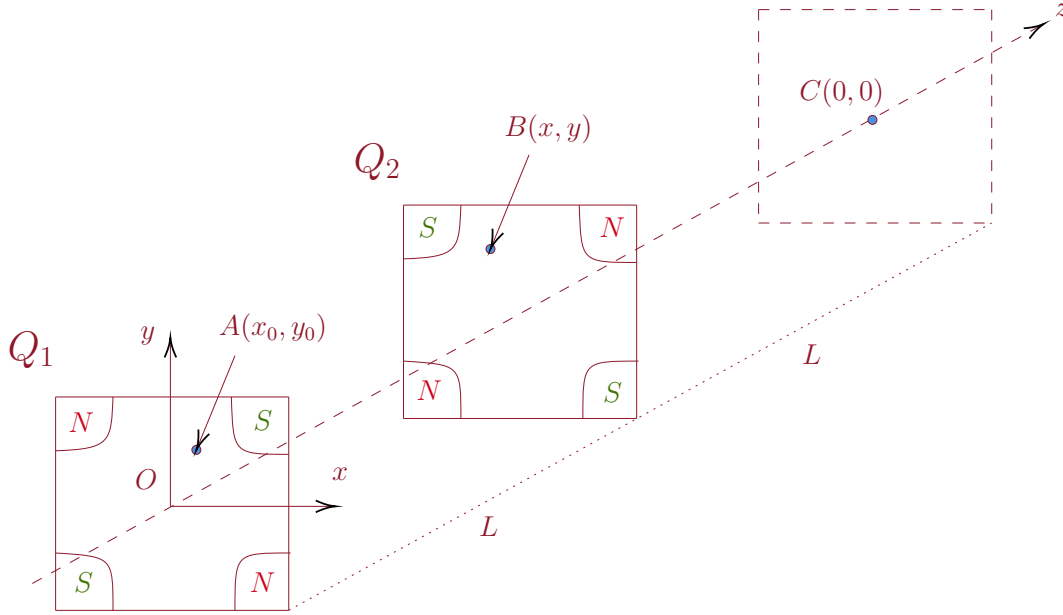


Hình 25: Mô hình tứ cực từ trong thực tế (bên trái) và từ phổ của tứ cực từ (bên phải)

Cho từ phổ của một tứ cực từ. Dựa vào hình 25, hãy xác định phương, chiều của **đường sức từ** và **lực điện từ** tác dụng lên một hạt điện tích nhỏ bay vào tứ cực từ với phương vuông góc với trang giấy, chiều ra xa người đọc.

#### 2. Ứng dụng trong việc hội tụ chùm tia

Sau khi đã xác định được lực điện từ tác dụng lên hạt điện tích, ta có thể thấy rằng theo phương  $y$ , hạt sẽ bị đẩy vào bên trong tứ cực từ, còn theo phương  $x$ , hạt sẽ bị đẩy ra xa tứ cực từ. Hay nói cách khác, nếu ta coi tứ cực từ là một thấu kính thì thấu kính này sẽ **hội tụ** trên phương  $y$  và **phân kỳ** trên phương  $x$  với cùng một tiêu cự  $f$ . Nếu ta lật ngược thấu kính đi  $90^\circ$  thì thấu kính sẽ phân kỳ trên phương  $y$  và hội tụ trên phương  $x$ .



Hình 26: Hệ hai thấu kính tứ cực từ

Vì tính chất độc đáo này, các nhà khoa học thường dùng các hệ thấu kính tứ cực từ để hội tụ các chùm hạt tích điện trong máy gia tốc hạt. Xét một hệ hai thấu kính tứ cực từ  $Q_1$  và  $Q_2$  như hình 26. Các thấu kính cách nhau một đoạn  $L$  theo phương  $z$ , và thấu kính  $Q_1$  có tiêu cự trên cả hai phương  $x$  và  $y$  đều là  $f_x = f_y = f$ . Ban đầu, có một hạt nhỏ bắn dọc theo phương  $z$  vào  $Q_1$  tại vị trí  $A(x_0, y_0)$ .

- Xác định tọa độ  $B(x, y)$  của hạt khi hạt đến thấu kính  $Q_2$  (giả sử các thấu kính đủ rộng để hạt không bị bắn ra ngoài thấu kính).
- Tìm điều kiện của  $f$  để khi tới điểm cách thấu kính  $Q_2$  đoạn  $L$ , hạt sẽ hội tụ tại điểm  $C(0, 0)$ . Tính tiêu cự  $f$  của thấu kính  $Q_1$  và  $f'$  của thấu kính  $Q_2$ .

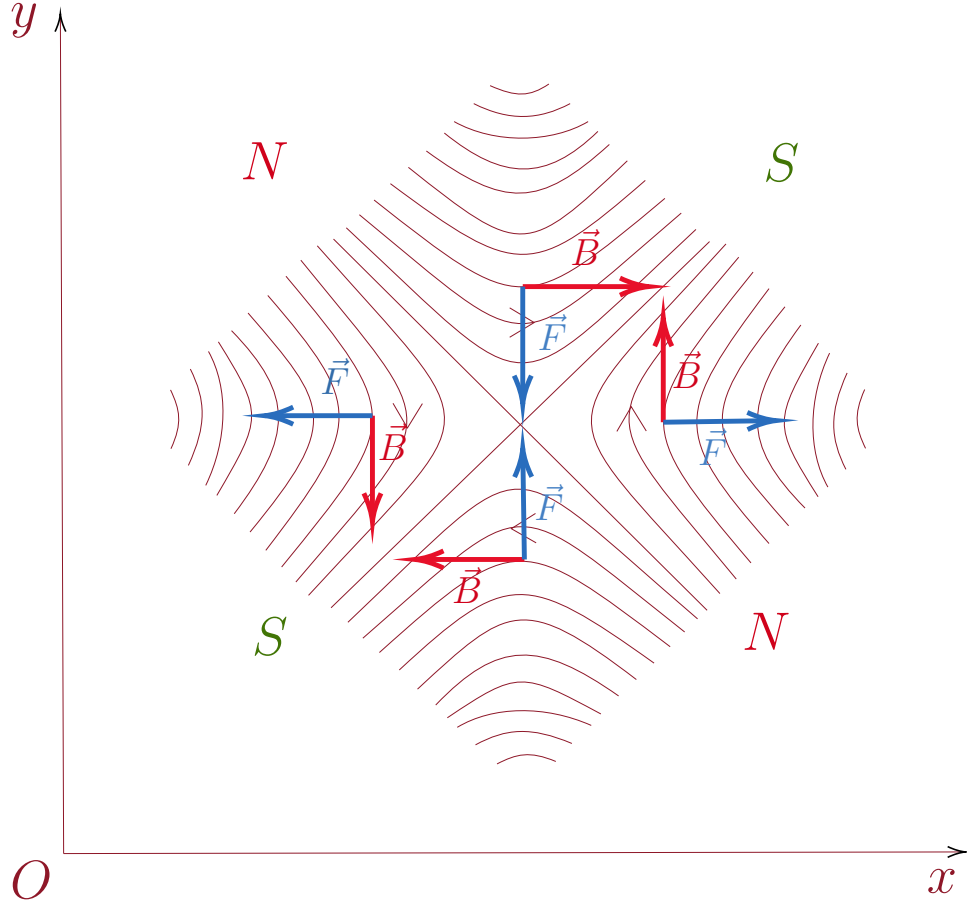
(Biên soạn bởi Colevol)

### Bài giải

- Từ hình 25, ta có thể dễ dàng chỉ ra được phương và chiều của đường sức từ như hình 27.

Áp dụng quy tắc bàn tay trái: Đặt bàn tay sao cho ngón trỏ chỉ vào màn hình, lòng bàn tay hướng sao để nhận được các đường sức từ vuông góc với mặt bàn tay. Ngón cái duỗi thẳng ra sẽ là chiều của lực điện từ, được mô tả như hình 27.

**Bình luận:** Bằng các kiến thức về trường điện từ, động lực học và động lực học tương đối tính, ta có thể dễ giải thích về quỹ đạo của hạt khi đi vào tứ cực từ. Cụ thể, trên phương  $y$ , do lực điện từ luôn hướng vào tâm của tứ cực từ nên hạt sẽ bị **hội tụ**. Tương tự, trên phương  $x$ , lực điện từ đều hướng ra xa tâm của tứ cực từ nên hạt sẽ bị **phân kì**.



Hình 27: Đường sức từ và lực điện từ của tứ cực từ

2. (a) Chọn trục chính hướng theo phương  $z$  và đi qua gốc tọa độ  $O$ , ta có thể vẽ được đường đi của hạt trên phương  $x$  và  $y$  như hình 28.

Sử dụng các cặp tam giác đồng dạng khác nhau, ta sẽ thu về được hai phương trình tỉ lệ:

$$\begin{cases} \frac{x_0}{f} = \frac{x}{L+f} \\ \frac{y_0}{f} = \frac{y}{f-L} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{x_0(L+f)}{f} \\ y = \frac{y_0(f-L)}{f} \end{cases} \quad (1)$$

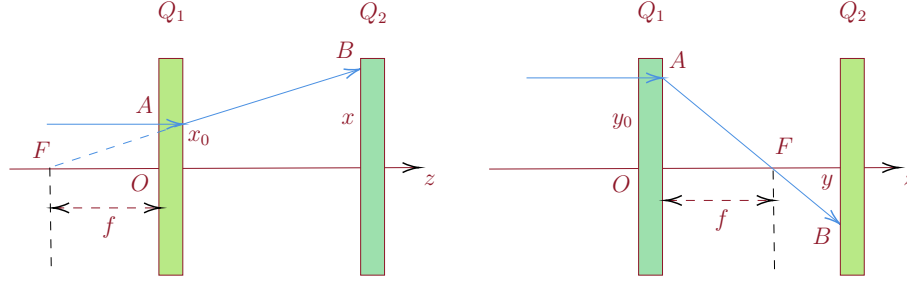
- (b) Để hạt có thể hội tụ về điểm  $C(0,0)$  thì tiêu cự  $f$  của thấu kính  $Q_1$  phải thỏa mãn:

$$L < f < 2L. \quad (2)$$

Để giải thích điều này, ta sẽ cần phải lập luận:

Đối với phương  $x$ , bất kể thấu kính  $Q_1$  có tiêu cự như thế nào thì chỉ cần thấu kính  $Q_2$  có tiêu cự hợp lý thì hạt vẫn có thể hội tụ về được điểm  $C$ , nên không có ràng buộc về điều kiện cho  $f$  để hạt hội tụ về điểm  $C$ .





Hình 28: Quỹ đạo của hạt trên mặt phẳng  $xOz$  (bên trái) và  $yOz$  (bên phải)

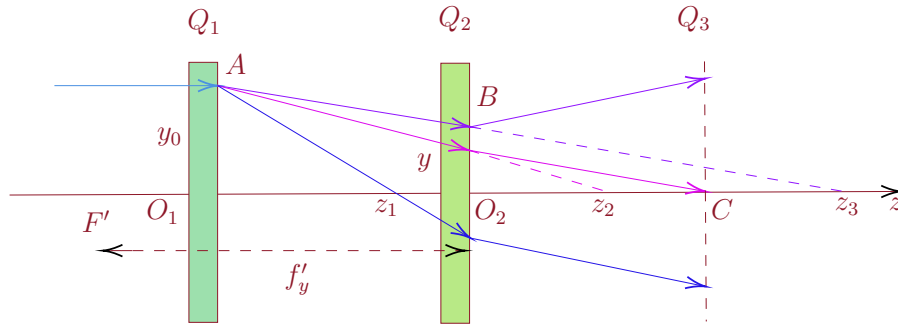
Đối với phương  $y$ , có ba trường hợp có thể xảy ra, được mô tả như trong hình 29:

Nếu  $f = O_1z_1$  (tia sáng màu xanh đậm) thì khi tới  $Q_2$  (lúc này là thấu kính phân kì trên phương  $y$ ), tia ló tại  $Q_2$  sẽ phân kì ra khỏi trục chính  $Oz$  và không thể hội tụ lại tại điểm  $C$ .

Nếu  $f = O_1z_3$  (tia sáng màu tím) thì khi tới  $Q_2$ , tia ló tại  $Q_2$  sẽ không thể tới được điểm  $C$ , vì nếu tồn tại trường hợp như thế thì thấu kính  $Q_2$  sẽ phải "hội tụ" tia sáng mạnh hơn  $Q_1$  (vô lý vì  $Q_2$  là thấu kính phân kì).

Nếu  $f = O_1z_2$  (tia sáng màu hồng) thì tồn tại một tia ló từ  $Q_2$  sao cho tới được điểm  $C$ .

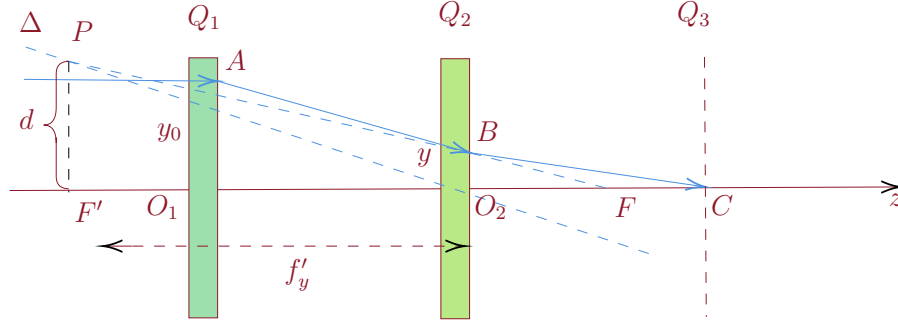
Vậy, để tia ló từ  $Q_2$  hội tụ được tại điểm  $C(0,0)$  thì tiêu điểm của  $Q_1$  phải nằm trong đoạn  $O_2C$ , tức  $O_1z_1 < f < O_1z_2$ , hay tương đương  $L < f < 2L$  như đã nêu ở phương trình (2).



Hình 29: Các trường hợp về đường đi của tia sáng trên mặt phẳng  $yOz$

Khi đã có được  $f$  thỏa điều kiện, ta đi tìm tiêu cự  $f'_y$  của thấu kính  $Q_2$ . Vẽ đường đi của tia sáng như hình 30 (để vẽ được hình, đầu tiên ta vẽ tia ló từ  $Q_1$   $AB$  sao cho đường kéo dài của nó giao với trục chính tại tiêu điểm  $F$  nằm trong đoạn  $O_2C$ , sau đó nối điểm  $B$  và  $C$  lại rồi vẽ đường kéo dài của đoạn  $BC$ . Vẽ một trục phụ  $\Delta$  song song với  $AB$ , giao của đường kéo dài  $BC$  và  $\Delta$  sẽ là  $P$ . Hạ  $P$  vuông góc xuống trục chính, ta sẽ có được tiêu điểm  $F'$  của thấu kính  $Q_2$ ).

$\Delta PF'O_2$  đồng dạng với  $\Delta AO_1F$  nên:



Hình 30: Đường đi của tia sáng trên mặt phẳng  $yOz$

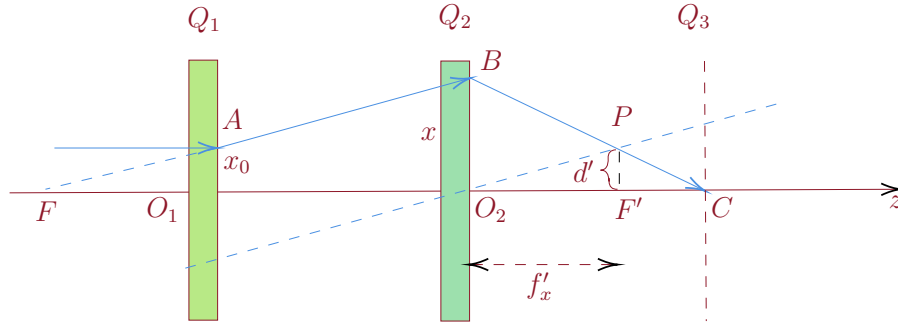
$$\frac{y_0}{f} = \frac{d}{f'_y} \iff d = \frac{f'_y}{f} y_0. \quad (3)$$

$\triangle BO_2C$  đồng dạng với  $\triangle AO_1F$  nên:

$$\frac{|y|}{L} = \frac{d}{f'_y + L} \iff \frac{y_0}{f} (f - L)(f'_y + L) = \frac{y_0}{f} f'_y L \iff f'_y = \frac{L(f - L)}{2L - f}. \quad (4)$$

Ở đây, ta có thể thấy rằng  $f'_y$  là độ lớn của tiêu cự nên để xác định thì  $f'_y > 0$ . Nhìn vào kết quả, ta thấy với  $L < f < 2L$  thì  $f'_y$  mới xác định, giống như điều kiện ban đầu ta lập ra cho  $f$ .

Tương tự với mặt phẳng  $xOz$ , vẽ đường đi của tia sáng như hình 31.



Hình 31: Đường đi của tia sáng trên mặt phẳng  $xOz$

$\triangle PF'O_2$  đồng dạng với  $\triangle BO_2F$  nên:

$$\frac{d'}{f'_x} = \frac{x_0}{f} \iff d' = \frac{f'_x}{f} x_0. \quad (5)$$

$\triangle PF'C$  đồng dạng với  $\triangle BO_2C$  nên:

$$\frac{d'}{L - f'_x} = \frac{x}{L} \iff \frac{x_0}{f} (L + f)(L - f'_x) = \frac{x_0}{f} f'_x L \iff f'_x = \frac{L(f + L)}{2L + f}. \quad (6)$$

Tiêu cự của thấu kính  $Q_2$  ở trên cả hai phương  $x$  và  $y$  đều bằng nhau nên từ (4) và (6) ta được:

$$f'_x = f'_y \iff \frac{L(f-L)}{2L-f} = \frac{L(f+L)}{2L+f} \iff f = \sqrt{2}L. \quad (7)$$

$$\implies f'_x = f'_y = f' = \frac{L(\sqrt{2}L+L)}{2L+\sqrt{2}L} = \frac{L}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Tức  $f = 2f'$ .

### 3. Phổ điểm

Phần	Nội dung	Điểm thành phần
1	Xác định đúng phương và chiều của đường sức từ và lực điện từ	0.50
2	Xác định tọa độ $x$ và $y$ của điểm B	0.25/tọa độ
3	Lập luận được các trường hợp về đường đi của tia sáng	0.50
	Xác định được điều kiện của $f$	0.50
	Vẽ được hai hình 30 và 31	0.25/ảnh
	Biểu diễn $f'_y$ theo $L$	0.50
	Biểu diễn $f'_x$ theo $L$	0.50
	Biểu diễn $f$ và $f'$ theo $L$	0.25/biểu thức

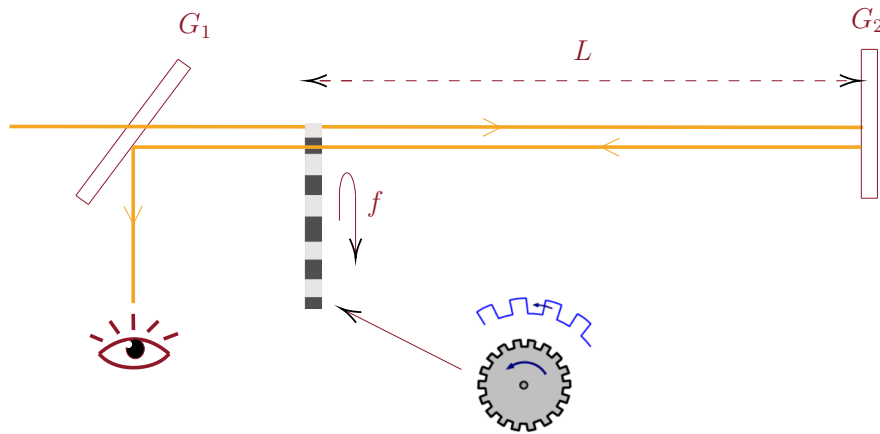
Lưu ý: Nếu suy ra điều kiện của  $f$  từ phương trình (4) thì không được điểm phần lập luận.

### CÂU 5 (4 điểm)

- Vào năm 1849, Hippolyte Fizeau, một nhà Vật lý học người Pháp, đã có một thí nghiệm rất tinh tế để xác định tương đối chính xác giá trị của vận tốc ánh sáng:

Thí nghiệm bao gồm các loại vật dụng: Một *nguồn sáng* có khả năng phát ra một tia sáng, một *bánh răng* có  $n$  răng (cho rằng kích thước răng rất nhỏ so với bán kính bánh răng, và các răng cách nhau một đoạn đúng bằng chiều rộng của nó) và có thể quay  $f$  vòng trong 1 giây ( $f$  tùy chỉnh), một chiếc *gương bán mạ phẳng* (gọi là  $G_1$ ), là gương có khả năng cho ánh sáng đi qua ở một bên và phản xạ tại bên khác, một chiếc *gương phẳng* (gọi là  $G_2$ ) có khả năng phản xạ hoàn toàn.

Thiết lập mô hình thí nghiệm như hình 32, bánh răng cách  $G_2$  đoạn  $L$ , bánh răng cách  $G_1$  đoạn  $l \ll L$ , mắt cũng cách  $G_1$  một đoạn rất nhỏ so với  $L$ . Khi bắt đầu xoay bánh răng (thay đổi  $f$  từ 0 lên các giá trị dương), hãy **thiết lập công thức tính vận tốc ánh sáng** theo  $L, n, f$ .



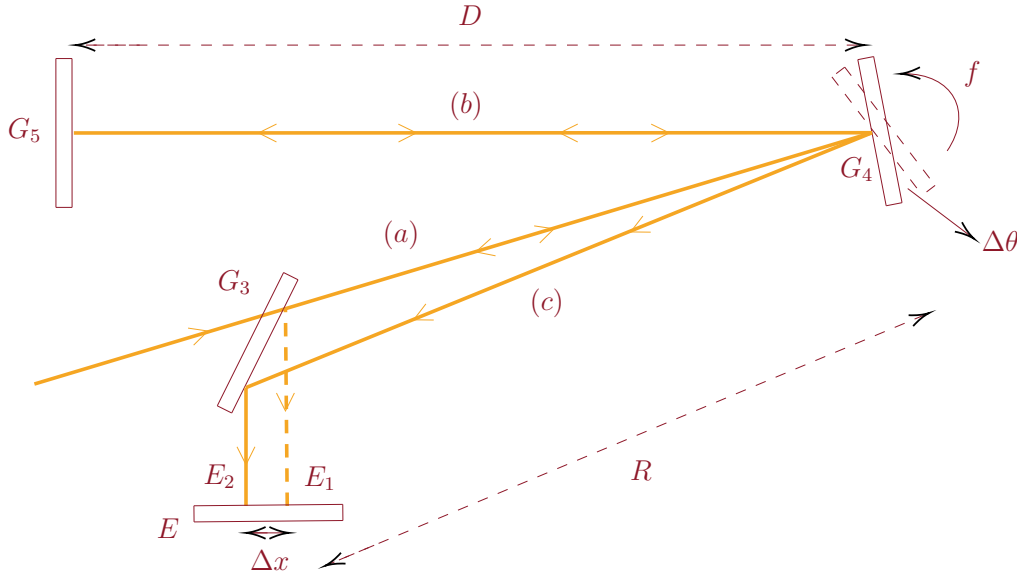
Hình 32: Mô hình thực nghiệm của Fizeau

- Thay  $L = 8630$  m,  $n = 720$  bánh răng, và khi hiện tượng cần tìm xảy ra,  $f = 12.6$  vòng/s để tính vận tốc ánh sáng dựa trên thí nghiệm này. Tính phần trăm chênh lệch giữa giá trị vừa tính được và giá trị chính xác hiện nay ( $c = 299\,792\,458$  m/s).
- Sau khi có được giá trị của vận tốc ánh sáng, Léon Foucault, cộng sự của Fizeau, đã phát triển thêm cho thí nghiệm này vào năm 1862 bằng việc sử dụng một chiếc gương quay thay cho bánh răng:

Thí nghiệm bao gồm các vật dụng: Một chiếc *gương bán mạ* (gọi là  $G_3$ ) được gắn cố định, một chiếc *gương phẳng* (gọi là  $G_4$ ) có khả năng phản xạ toàn phần, được *gắn trên một motor* có khả năng xoay qua một trục cố định với và có thể quay  $f$  vòng trong 1 giây ( $f$  tùy chỉnh), một chiếc *gương phẳng khác* (gọi là  $G_5$ ) được gắn cố định, một tấm kính mờ để đón ánh sáng, một *nguồn sáng* có khả năng phát ra một tia sáng (trên thực tế, còn có thêm một *thấu kính hội tụ* để tránh trường hợp các tia sáng loe ra khi phản xạ tại  $G_5$ , nhưng trong thí nghiệm

này, ta giả sử mọi điều kiện về ánh sáng đủ hoàn hảo để không bị loe ra trong quá trình truyền).

Thiết lập mô hình thí nghiệm như hình 33. Gương  $G_3$  cách gương  $G_4$  đoạn  $R$ , gương  $G_4$  cách gương  $G_5$  đoạn  $D$ . Nếu gương  $G_4$  không xoay thì đường truyền ánh sáng va vào tấm kính mờ  $E$  sẽ là đường nét đứt. Khi bắt đầu xoay gương  $G_4$  với tần số  $f$  (vòng/s) thì điểm mà tia sáng chiếu tới tấm  $E$  sẽ cách điểm ban đầu đoạn  $\Delta x$ . Hãy **thiết lập công thức tính vận tốc ánh sáng** theo  $D, R, x, f$ .



Hình 33: Mô hình thực nghiệm của Foucault

4. Dựa vào thí nghiệm này và thay các số liệu cần thiết, ta ra được kết quả  $c = 298\,000\,000$  m/s. So sánh kết quả này với giá trị chính xác hiện nay ( $c = 299\,792\,458$  m/s) và giá trị của Foucault để xem rằng bản cải tiến của Foucault có hiệu quả hơn không.

**Lưu ý:** Với đơn vị góc Radian mà  $360^\circ \equiv 2\pi$  rad, ở góc  $x$  nhỏ, ta có thể xấp xỉ  $\tan(x) \approx \sin(x) \approx x$ .

(Biên soạn bởi Colevol)

### Bài giải

- Khi xoay bánh răng với một tần số nhất định, ánh sáng sẽ có lúc đập vào răng, sẽ có lúc đi qua khe giữa hai răng liên tiếp. Xét trường hợp đi qua khe, khi đó ánh sáng chiếu đến gương 2 và phản xạ lại. Nếu bánh răng quay đủ chậm, ánh sáng sẽ trở lại đúng với khe đó, phản xạ với gương bán mạ và tới mặt. Nhưng nếu ta tăng dần tần số thì tại một tần số  $f$ , sẽ có trường hợp ánh sáng đập vào răng, khiến ta không thấy gì. Lúc này, thời gian quay từ khe tới bánh răng thứ hai sẽ chính là thời gian ánh sáng đi quãng đường  $2L$ .

Quãng đường một bánh răng đi được trong khoảng thời gian  $T$ :

$$s = 2\pi RfT. \quad (1)$$

Suy ra vận tốc của một bánh răng:

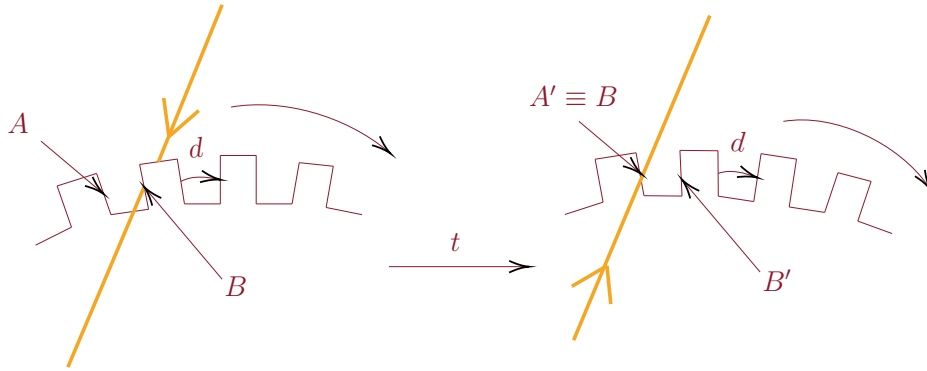
$$v = \frac{s}{T} = 2\pi Rf. \quad (2)$$

Trên chu vi bánh răng sẽ có  $n$  bánh răng và  $n$  khoảng trống giữa các bánh răng. Vì các khoảng trống này có kích thước bằng các bánh răng nên khoảng cách giữa hai bánh răng là:

$$d = \frac{2\pi R}{2n} = \frac{\pi R}{n}. \quad (3)$$

Suy ra thời gian đi của khe 1 đến khe 2 (hay từ A đến B, như trên hình 34):

$$t = \frac{d}{v} = \frac{1}{2nf}. \quad (4)$$



Hình 34: Hình ảnh di chuyển của răng bánh

Thời gian ánh sáng từ B, chạm vào gương  $G_2$  và sau đó đi qua A':

$$t_S = \frac{2L}{c}. \quad (5)$$

Vì thời gian ánh sáng đi một quãng đường dài  $2L$  bằng với thời gian bánh răng đi từ vị trí A đến vị trí B như trên Hình 34 nên ta có:

$$\frac{1}{2nf} = \frac{2L}{c} \Rightarrow c = 4Lnf. \quad (6)$$

2. Thay số vào (6), ta được:

$$c = 4 \times 8630 \times 720 \times 12.6 = 313\,000\,000 \text{ m/s}. \quad (7)$$

Phần trăm chênh lệch so với giá trị hiện nay:

$$\Delta c = \frac{313000000 - 299792458}{299792458} \times 100\% \simeq 4.41\%. \quad (8)$$

Vậy vận tốc mà Fizeau đo cao hơn 4.41% so với giá trị chính xác hiện nay.

3. Nếu không khởi động motor, gương  $G_4$  không xoay thì đường truyền của tia sáng sẽ là  $(a) \xrightarrow{G_4} (b) \xrightarrow{G_5} (b) \xrightarrow{G_4} (a) \xrightarrow{G_3} E_1$ .

Nếu motor khởi động, gương  $G_4$  bắt đầu xoay thì đường truyền tia sáng sẽ là  $(a) \xrightarrow{G_4} (b) \xrightarrow{G_5} (b) \xrightarrow{G_4} (c) \xrightarrow{G_3} E_2$ .

Khi này, dựa vào độ thay đổi của góc  $\Delta\theta$  và độ thay đổi của tia sáng trên tấm kính mờ  $\Delta x$ , ta có thể dùng các kiến thức hình học và lượng giác để xác định vận tốc ánh sáng.

Gọi  $\tau$  là thời gian ánh sáng từ gương  $G_4$  đi tới gương  $G_5$ , sau khi phản xạ thì quay về lại  $G_4$ . Ta có:

$$\tau = \frac{2D}{c}. \quad (9)$$

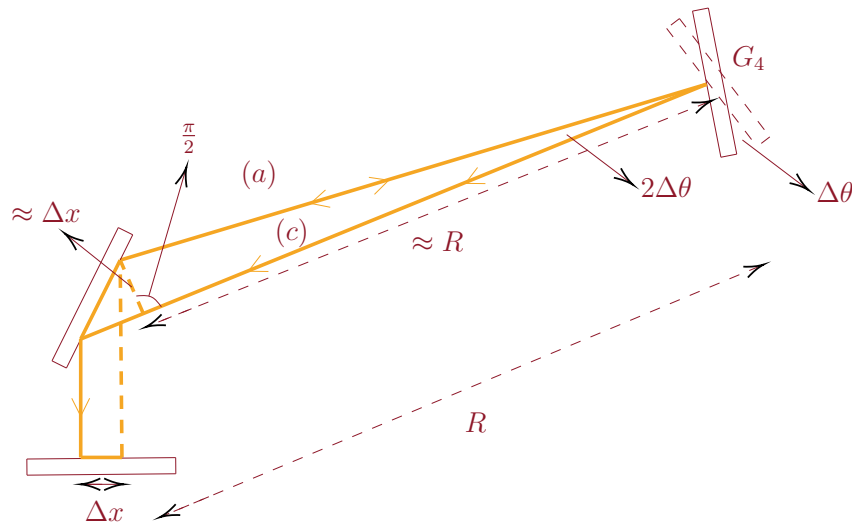
Trong 1 giây thì gương xoay được  $f$  vòng, tức một điểm trên gương sẽ xoay được một góc  $2\pi f$  quanh tâm của gương. Ta định nghĩa **vận tốc góc**  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 2\pi f. \quad (10)$$

là độ biến thiên góc  $\Delta\alpha$  của một điểm chuyển động tròn đều quanh một tâm xác định trong khoảng thời gian  $\Delta t$ . Giả sử trong thời gian  $\tau$  gương quay được một góc  $\Delta\theta$ , ta sẽ có:

$$\tau = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\Delta\theta}{2\pi f}. \quad (11)$$

Khi gương  $G_4$  quay được một góc  $\Delta\theta$  thì góc tạo bởi tia sáng  $(a)$  và  $(c)$  sẽ là  $2\Delta\theta$ . Vì góc  $2\Delta\theta$  rất nhỏ nên ta có thể xấp xỉ  $\tan(2\Delta\theta) \approx 2\Delta\theta$  như đã cung cấp ở đề bài. Từ điều này, ta sẽ xấp xỉ những giá trị khác như trong Hình 35, sao cho thuận tiện trong tính toán nhất có thể. Từ những xấp xỉ trên, ta có:



Hình 35: Các phép xấp xỉ

$$\tan(2\Delta\theta) \approx 2\Delta\theta \approx \frac{\Delta x}{R}. \quad (12)$$

Thay  $\Delta\theta$  từ (12) và  $\tau$  từ (9) vào phương trình (11), ta được:

$$\frac{2D}{c} = \frac{\Delta x}{4\pi Rf} \Rightarrow c = \frac{8\pi DRf}{\Delta x}. \quad (13)$$

4. Phần trăm chênh lệch so với giá trị hiện nay:

$$\Delta c = \frac{298000000 - 299792458}{299792458} \times 100\% \simeq -0.6\%. \quad (14)$$

Vận tốc mà Foucault đo nhỏ hơn 0.6% so với giá trị chính xác hiện nay. So với phần trăm chênh lệch của thí nghiệm của Fizeau (4.41%) thì thí nghiệm của Foucault hiệu quả hơn.

## 5. Phổ điểm

Phần	Nội dung	Điểm thành phần
1	Xác định vận tốc của một bánh răng	0.25
	Xác định khoảng cách giữa hai bánh răng	0.25
	Thiết lập công thức tính vận tốc ánh sáng	0.5
2	Thay số vào và tính đúng	0.25
3	Thiết lập phương trình (9)	0.25
	Xác định được công thức liên hệ giữa thời gian gương quay và góc quay của gương	0.50
	Lập luận góc tạo bởi hai tia ( $a$ ) và ( $c$ ) là $2\Delta\theta$	0.25
	Lấy được các phép xấp xỉ trong hình 35 và phép xấp xỉ trong phương trình (12)	1.00 (0.25 cho mỗi phép xấp xỉ)
	Rút ra được phương trình (13) và thiết lập công thức tính vận tốc ánh sáng	0.50
4	Thay số vào và tính đúng	0.25

HẾT



Danh sách thành viên tham gia xây dựng [Hướng tới chuyên lý 2024]:

1. **Hirrus** (Trưởng nhóm)
2. **Colevol**
3. **Mino**
4. **wan**
5. **Khui đập chai**
6. **trees&streetslights.inc**
7. **Carina**
8. **LunarEclipse**