Тема:
Построение наибольшего паросочетания

Сергей Витальевич Рыбин

svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

22 июня 2023 г.

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Основные понятия

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $G(V, E)$, такой, что множество его вершин V есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств V_1 и V_2. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множества V_2.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, такой, что множество его вершин $\boldsymbol{V}$ есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества $\boldsymbol{V}_1$ с вершиной из множества $\boldsymbol{V}_2$.
2. Множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, то это полный двудольный граф. При этом, если $|\boldsymbol{V}_1| = n$, а $|\boldsymbol{V}_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, такой, что множество его вершин $\boldsymbol{V}$ есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества $\boldsymbol{V}_1$ с вершиной из множества $\boldsymbol{V}_2$.
2. Множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, то это полный двудольный граф. При этом, если $|\boldsymbol{V}_1| = n$, а $|\boldsymbol{V}_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ лежали слева, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — справа. Иногда вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ будем обозначать литерой L, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — литерой R.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, такой, что множество его вершин $\boldsymbol{V}$ есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества $\boldsymbol{V}_1$ с вершиной из множества $\boldsymbol{V}_2$.
2. Множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, то это полный двудольный граф. При этом, если $|\boldsymbol{V}_1| = n$, а $|\boldsymbol{V}_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ лежали слева, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — справа. Иногда вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ будем обозначать литерой L, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, такой, что множество его вершин $\boldsymbol{V}$ есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества $\boldsymbol{V}_1$ с вершиной из множества $\boldsymbol{V}_2$.
2. Множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, то это полный двудольный граф. При этом, если $|\boldsymbol{V}_1| = n$, а $|\boldsymbol{V}_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ лежали слева, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — справа. Иногда вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ будем обозначать литерой L, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).
5. Будем считать, что множество из одного ребра является паросочетанием.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $G(V, E)$, такой, что множество его вершин V есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств V_1 и V_2. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множества V_2.
2. Множества V_1 и V_2 называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то это полный двудольный граф. При этом, если $|V_1| = n$, а $|V_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $G(V, E)$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли V_1 лежали слева, а доли V_2 — справа. Иногда вершины доли V_1 будем обозначать литерой L, а доли V_2 — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).
5. Будем считать, что множество из одного ребра является паросочетанием.
6. Паросочетание P в графе G называется **наибольшим** или **максимальным по размеру**, если в G нет паросочетаний, число ребер в которых больше, чем в P. Число ребер в наибольшем паросочетании графа G называется его **числом паросочетания**.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $G(V, E)$, такой, что множество его вершин V есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств V_1 и V_2. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множества V_2.
2. Множества V_1 и V_2 называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то это полный двудольный граф. При этом, если $|V_1| = n$, а $|V_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $G(V, E)$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли V_1 лежали слева, а доли V_2 — справа. Иногда вершины доли V_1 будем обозначать литерой L, а доли V_2 — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).
5. Будем считать, что множество из одного ребра является паросочетанием.
6. Паросочетание P в графе G называется **наибольшим** или **максимальным по размеру**, если в G нет паросочетаний, число ребер в которых больше, чем в P. Число ребер в наибольшем паросочетании графа G называется его **числом паросочетания**.
7. Паросочетание P в графе G называется **максимальным** или **максимальным по включению**, если оно не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа, т. е. в него нельзя включить ни одного ребра несмежного ко всем ребрам паросочетания. Очевидно, что наибольшее паросочетание является максимальным по включению. Обратное, не всегда верно.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, такой, что множество его вершин $\boldsymbol{V}$ есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества $\boldsymbol{V}_1$ с вершиной из множества $\boldsymbol{V}_2$.
2. Множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, то это полный двудольный граф. При этом, если $|\boldsymbol{V}_1| = n$, а $|\boldsymbol{V}_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ лежали слева, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — справа. Иногда вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ будем обозначать литерой L, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).
5. Будем считать, что множество из одного ребра является паросочетанием.
6. Паросочетание P в графе $\boldsymbol{G}$ называется **наибольшим** или **максимальным по размеру**, если в $\boldsymbol{G}$ нет паросочетаний, число ребер в которых больше, чем в P. Число ребер в наибольшем паросочетании графа $\boldsymbol{G}$ называется его **числом паросочетания**.
7. Паросочетание P в графе $\boldsymbol{G}$ называется **максимальным** или **максимальным по включению**, если оно не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа, т. е. в него нельзя включить ни одного ребра несмежного ко всем ребрам паросочетания. Очевидно, что наибольшее паросочетание является максимальным по включению. Обратное, не всегда верно.
8. Вершина v графа $\boldsymbol{G}$ называется **насыщенной** или **покрытой** в паросочетании P, если в P существует ребро, инцидентное v, в противном случае вершина называется **свободной**.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, такой, что множество его вершин $\boldsymbol{V}$ есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества $\boldsymbol{V}_1$ с вершиной из множества $\boldsymbol{V}_2$.
2. Множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, то это полный двудольный граф. При этом, если $|\boldsymbol{V}_1| = n$, а $|\boldsymbol{V}_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ лежали слева, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — справа. Иногда вершины доли $\boldsymbol{V}_1$ будем обозначать литерой L, а доли $\boldsymbol{V}_2$ — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).
5. Будем считать, что множество из одного ребра является паросочетанием.
6. Паросочетание P в графе $\boldsymbol{G}$ называется **наибольшим** или **максимальным по размеру**, если в $\boldsymbol{G}$ нет паросочетаний, число ребер в которых больше, чем в P. Число ребер в наибольшем паросочетании графа $\boldsymbol{G}$ называется его **числом паросочетания**.
7. Паросочетание P в графе $\boldsymbol{G}$ называется **максимальным** или **максимальным по включению**, если оно не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа, т. е. в него нельзя включить ни одного ребра несмежного ко всем ребрам паросочетания. Очевидно, что наибольшее паросочетание является максимальным по включению. Обратное, не всегда верно.
8. Вершина v графа $\boldsymbol{G}$ называется **насыщенной** или **покрытой** в паросочетании P, если в P существует ребро, инцидентное v, в противном случае вершина называется **свободной**.
9. Паросочетание P называется **совершенным**, если все вершины графа $\boldsymbol{G}$ насыщены в P. Очевидно, что каждое совершенное паросочетание является наибольшим, но обратное не всегда верно.

Основные понятия

1. **Двудольным графом** (**биграфом, четным графом**) называют граф $G(V, E)$, такой, что множество его вершин V есть объединение двух непересекающихся, непустых множеств V_1 и V_2. При этом каждое ребро графа соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множества V_2.
2. Множества V_1 и V_2 называют долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то это полный двудольный граф. При этом, если $|V_1| = n$, а $|V_2| = m$, то такой граф обозначают как $K_{n,m}$.
3. Пусть $G(V, E)$ — двудольный граф. Его всегда можно изобразить так, чтобы вершины доли V_1 лежали слева, а доли V_2 — справа. Иногда вершины доли V_1 будем обозначать литерой L, а доли V_2 — литерой R.
4. **Паросочетанием** двудольного графа называют подмножество его ребер, никакие два из которых не являются смежными (не инциденты одной вершине).
5. Будем считать, что множество из одного ребра является паросочетанием.
6. Паросочетание P в графе G называется **наибольшим** или **максимальным по размеру**, если в G нет паросочетаний, число ребер в которых больше, чем в P. Число ребер в наибольшем паросочетании графа G называется его **числом паросочетания**.
7. Паросочетание P в графе G называется **максимальным** или **максимальным по включению**, если оно не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа, т. е. в него нельзя включить ни одного ребра несмежного ко всем ребрам паросочетания. Очевидно, что наибольшее паросочетание является максимальным по включению. Обратное, не всегда верно.
8. Вершина v графа G называется **насыщенной** или **покрытой** в паросочетании P, если в P существует ребро, инцидентное v, в противном случае вершина называется **свободной**.
9. Паросочетание P называется **совершенным**, если все вершины графа G насыщены в P. Очевидно, что каждое совершенное паросочетание является наибольшим, но обратное не всегда верно.

Понятие паросочетания справедливо для любого графа (не обязательно двудольного). Мы будем рассматривать это понятие применительно к двудольным графам.

Примеры паросочетаний

Примеры паросочетаний

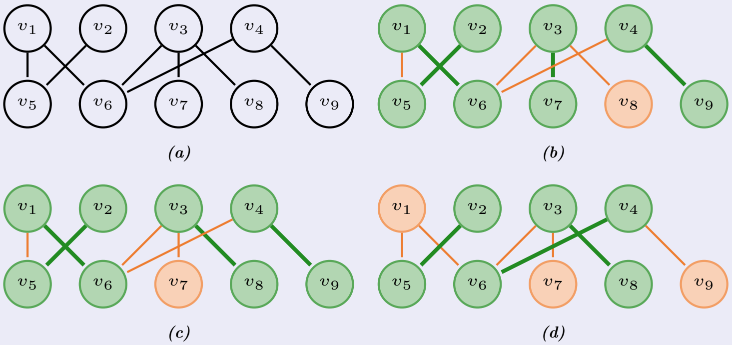


Рис. 1

Примеры паросочетаний

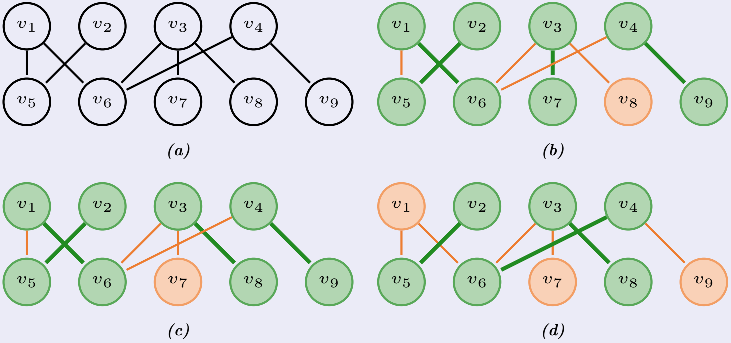


Рис. 1

1. Множество ребер $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5)\}$ является паросочетанием, но не максимальным по включению. Оно, например, включается в паросочетание $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_7), (v_4, v_9)\}$. Последнее очевидно, является наибольшим (ребра и насыщенные вершины отмечены зеленым цветом, оставшиеся ребра и свободная вершина v_8 — желтым), рисунок 1:b.

Примеры паросочетаний

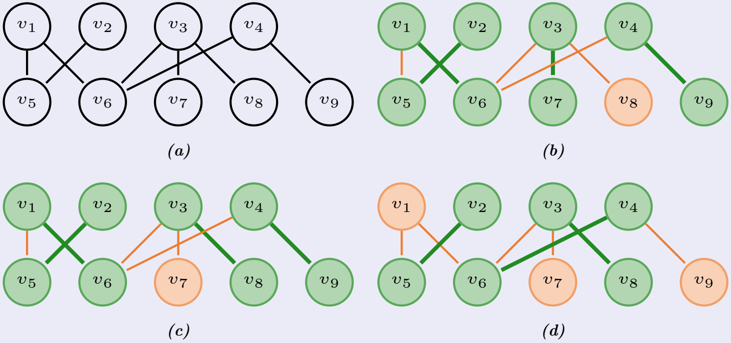


Рис. 1

1. Множество ребер $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5)\}$ является паросочетанием, но не максимальным по включению. Оно, например, включается в паросочетание $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_7), (v_4, v_9)\}$. Последнее очевидно, является наибольшим (ребра и насыщенные вершины отмечены зеленым цветом, оставшиеся ребра и свободная вершина v_8 — желтым), рисунок 1:b.

2. В данном графе существует еще наибольшее паросочетание, например, $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_9)\}$, рисунок 1:c.

Примеры паросочетаний

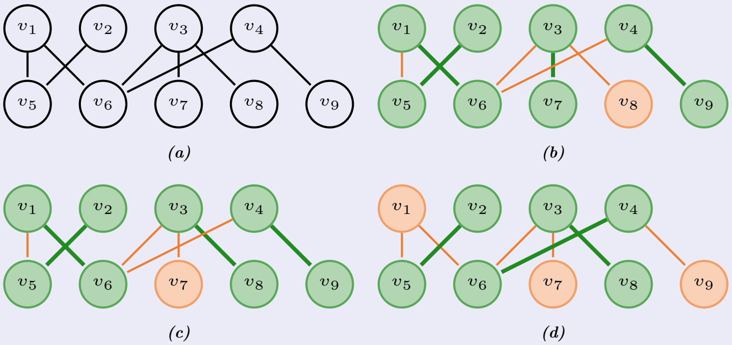


Рис. 1

1. Множество ребер $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5)\}$ является паросочетанием, но не максимальным по включению. Оно, например, включается в паросочетание $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_7), (v_4, v_9)\}$. Последнее очевидно, является наибольшим (ребра и насыщенные вершины отмечены зеленым цветом, оставшиеся ребра и свободная вершина v_8 — желтым), рисунок 1:b.
2. В данном графе существует еще наибольшее паросочетание, например, $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_9)\}$, рисунок 1:c.
3. Паросочетание $\{(v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_6)\}$, рисунок 1:d является максимальным по включению, но не наибольшим.

Примеры паросочетаний

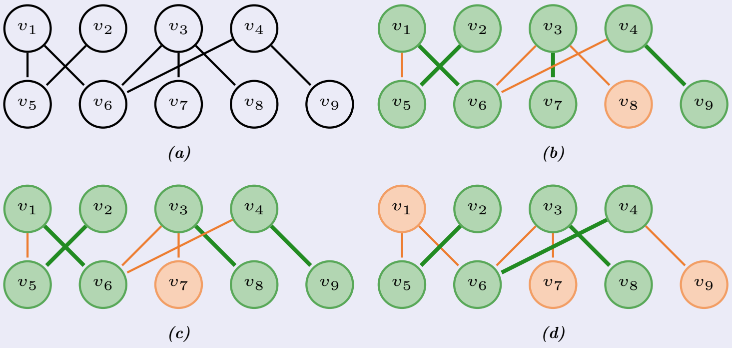


Рис. 1

1. Множество ребер $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5)\}$ является паросочетанием, но не максимальным по включению. Оно, например, включается в паросочетание $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_7), (v_4, v_9)\}$. Последнее очевидно, является наибольшим (ребра и насыщенные вершины отмечены зеленым цветом, оставшиеся ребра и свободная вершина v_8 — желтым), рисунок 1:b.
2. В данном графе существует еще наибольшее паросочетание, например, $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_9)\}$, рисунок 1:c.
3. Паросочетание $\{(v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_6)\}$, рисунок 1:d является максимальным по включению, но не наибольшим.
4. Число паросочетания равно 4.

Примеры паросочетаний

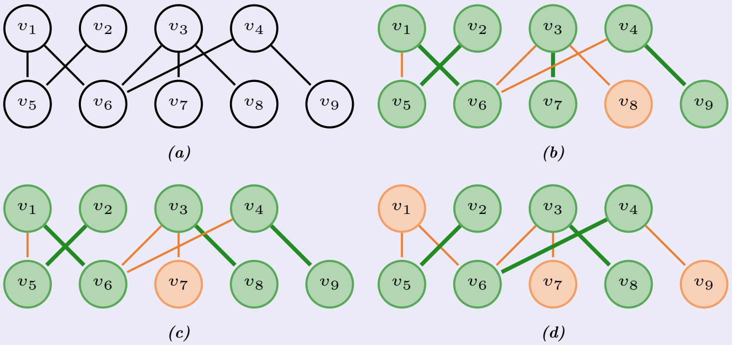


Рис. 1

1. Множество ребер $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5)\}$ является паросочетанием, но не максимальным по включению. Оно, например, включается в паросочетание $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_7), (v_4, v_9)\}$. Последнее очевидно, является наибольшим (ребра и насыщенные вершины отмечены зеленым цветом, оставшиеся ребра и свободная вершина v_8 — желтым), рисунок 1:b.
2. В данном графе существует еще наибольшее паросочетание, например, $\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_9)\}$, рисунок 1:c.
3. Паросочетание $\{(v_2, v_5), (v_3, v_8), (v_4, v_6)\}$, рисунок 1:d является максимальным по включению, но не наибольшим.
4. Число паросочетания равно 4.

Постановка задачи. В заданном двудольном графе найти наибольшее паросочетание (или все наибольшие паросочетания).

Алгоритм 3.0. Построение наибольшего паросочетания в двудольном графе

Исходные данные: двудольный граф $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}_1 \cup \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{E})$

Результат: Множество ребер графа $\boldsymbol{G}$, ориентированных справа налево

// *Инициализация*

Вводим две фиктивные вершины S и T

Соединяем S с вершинами $\boldsymbol{V}_1$ фиктивными ребрами, ориентированными от вершины S

Соединяем T с вершинами $\boldsymbol{V}_2$ фиктивными ребрами, ориентированными к вершине T

Ориентируем все ребра двудольного графа слева направо (от $\boldsymbol{V}_1$ к $\boldsymbol{V}_2$)

// *Основной алгоритм*

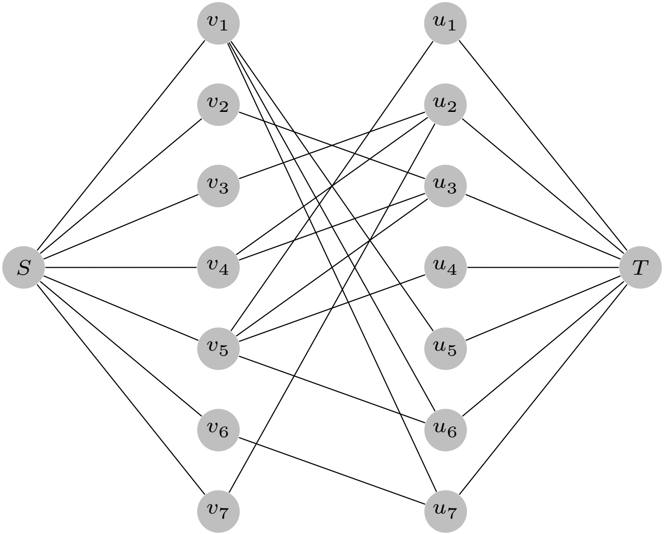
while существует путь $\{e_1, \dots, e_k\} \mid e_i \in \boldsymbol{E}, 2 \leqslant i \leqslant k-1$ от S к T **do**

  Удаляем фиктивные ребра пути: e_1 и e_k

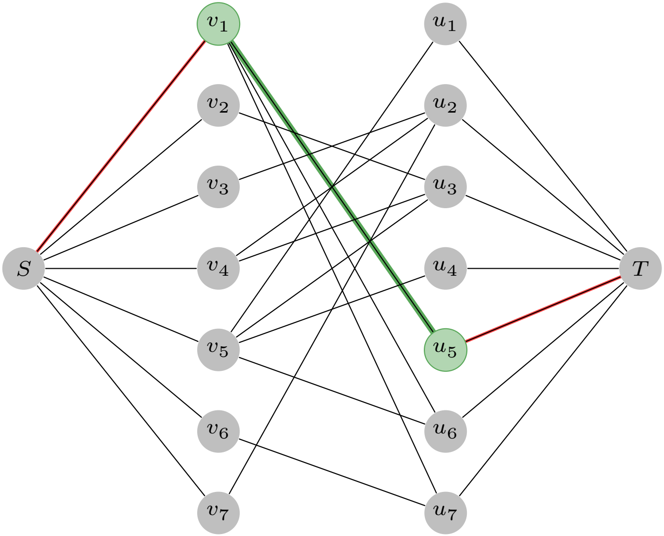
  Изменяем ориентацию ребер графа $\boldsymbol{G}$ вдоль пути: $e_2, \dots, e_{k-1}$

end while

Пример работы алгоритма

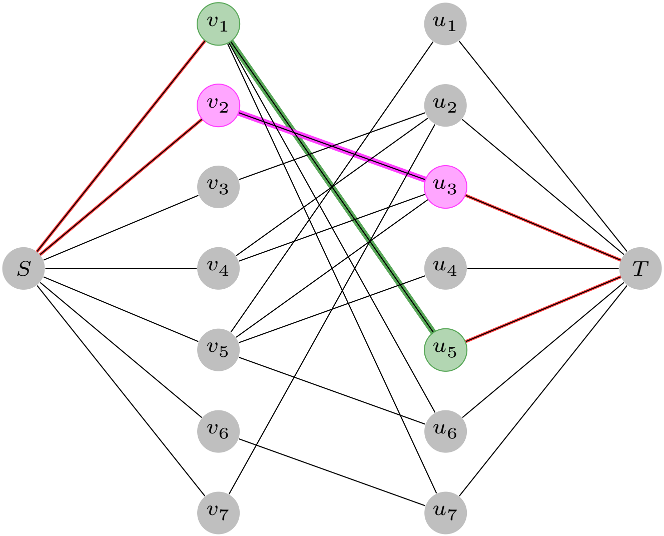


Пример работы алгоритма



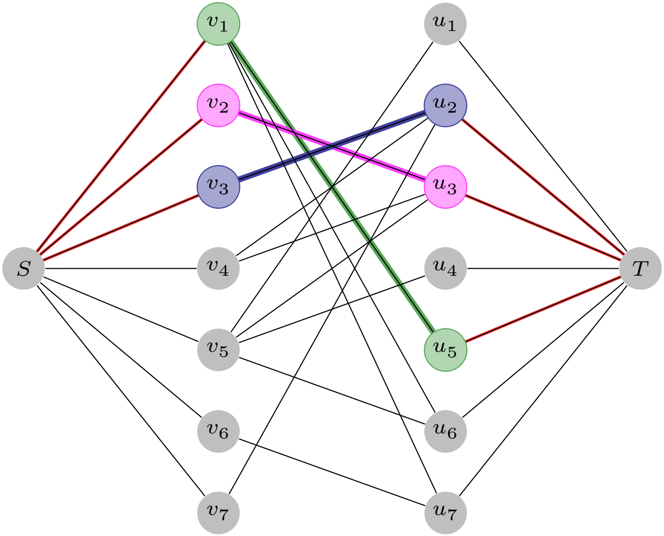
1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$

Пример работы алгоритма



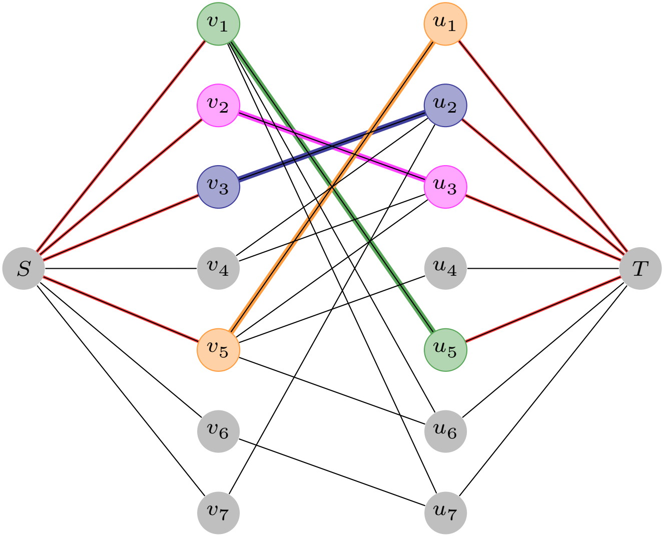
1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$

Пример работы алгоритма



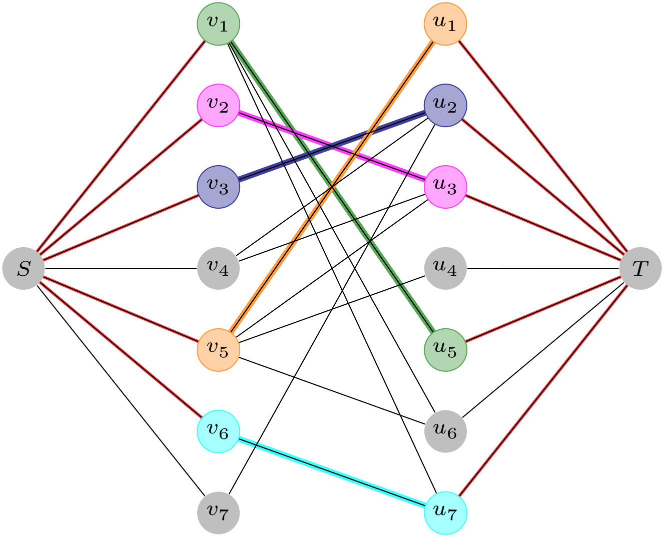
1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$
3. $S \to v_3 \to u_2 \to T$

Пример работы алгоритма



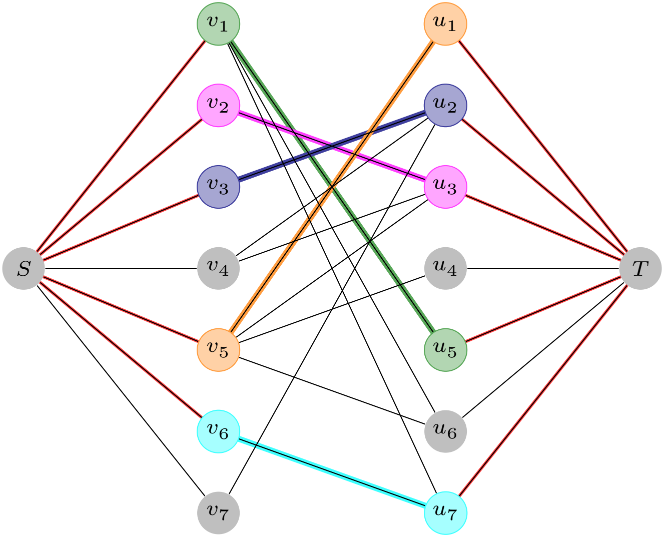
1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$
3. $S \to v_3 \to u_2 \to T$
4. $S \to v_5 \to u_1 \to T$

Пример работы алгоритма



1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$
3. $S \to v_3 \to u_2 \to T$
4. $S \to v_5 \to u_1 \to T$
5. $S \to v_6 \to u_7 \to T$

Пример работы алгоритма

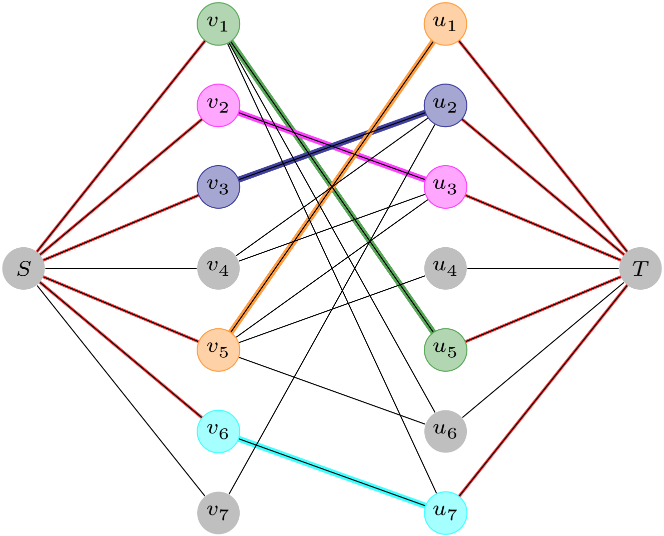


1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$
3. $S \to v_3 \to u_2 \to T$
4. $S \to v_5 \to u_1 \to T$
5. $S \to v_6 \to u_7 \to T$

Таким образом, искомое паросочетание:

$$\{(v_1, u_5), (v_2, u_3), (v_3, u_2), (v_5, u_1), (v_6, u_7)\}$$

Пример работы алгоритма



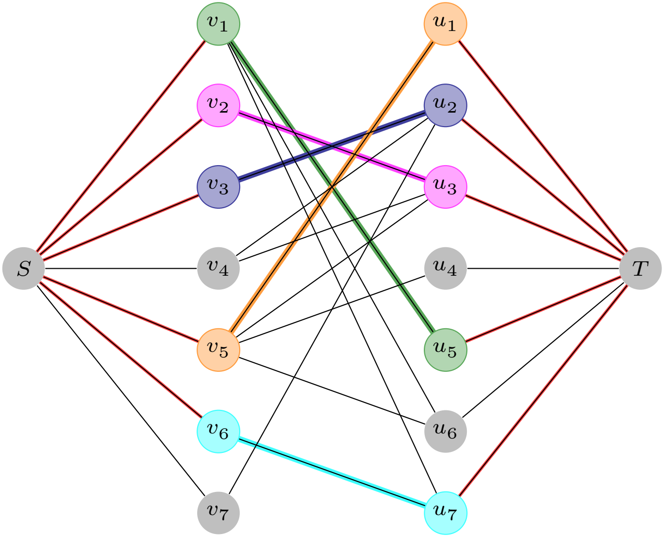
1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$
3. $S \to v_3 \to u_2 \to T$
4. $S \to v_5 \to u_1 \to T$
5. $S \to v_6 \to u_7 \to T$

Таким образом, искомое паросочетание:

$$\{(v_1, u_5), (v_2, u_3), (v_3, u_2), (v_5, u_1), (v_6, u_7)\}$$

6. Число паросочетания равно 5.

Пример работы алгоритма



1. $S \to v_1 \to u_5 \to T$
2. $S \to v_2 \to u_3 \to T$
3. $S \to v_3 \to u_2 \to T$
4. $S \to v_5 \to u_1 \to T$
5. $S \to v_6 \to u_7 \to T$

Таким образом, искомое паросочетание:

$$\{(v_1, u_5), (v_2, u_3), (v_3, u_2), (v_5, u_1), (v_6, u_7)\}$$

6. Число паросочетания равно 5.

Построенное паросочетание не является единственным для данного графа. Например:

$$\{(v_5, u_6), (v_1, u_5), (v_2, u_3), (v_4, u_2), (v_6, u_7)\}$$