1. Найдите размерность пространств V^3, R^n, $M_{m\times n}(R)$, $P^n[x]$, приведите стандартный базисы этих пространств. Каким образом определить координаты элементов в приведенном базисе?

Запишите столбец координат элемента в предложенном базисе пространства:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 56 \end{pmatrix} \in M_2(R)$;

b) $g(x)=5x^4-x^2+6x-2 \in P^4[x]$.

Решение.

V^3 : $dim\left(V^3\right)=3$

Стандартный базис состоит из любой тройки некомпланарных радиус-векторов.
Координаты элемента находятся стандартными проекциями.

$\mathbb{R}^n$: $dim\left(\mathbb{R}^n\right)=n$

Стандартный базис состоит из столбцов единичной вещественной квадратной матрицы (n x n).
Координаты элемента это элементы самого столбца.

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$: $dim\left(M_{m\times n}(\mathbb{R})\right)=m\cdot n$

Стандартный базис состоит из вещественных матриц (m x n), у которых во всех клетках нули, кроме одной с единицей.
Координаты элемента это элементы самой матрицы.

$P^n\ [x]$: $dim\left(P^n\right)=n+1$

Стандартный базис состоит из мономов: 1, x, x^2, x^3, ... , x^n.
Координаты элемента это коэффициенты самого многочлена.

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 56 \end{bmatrix}$

(b) $P=\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. Выяснить, являются ли подпространством в V^2 следующие множества:

a) радиус-векторы плоскости, концы которых лежат на одной их двух прямых, пересекающихся в начале координат;

b) радиус-векторы плоскости, концы которых лежат на данной прямой.

Решение.

(a) Если прямые не совпадают, то это не подпространство в V^2, т.к. не определена операция сложения.

Если прямые совпадают, то получится одномерное подпространство.

(b) Это не подпространство в V^2 причем тогда и только тогда, когда прямая не проходит через начало координат.

В самом деле, если прямая проходит через начало координат, то мы получаем одномерное подпространство в V^2

Если же прямая **не** проходит через начало координат, то не определена операция сложения, и, соответственно, подпространства не получается.

10. Найдите ортогональное дополнение к подпространству <(2, 2, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1, 0)>.

Решение.

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{rank}(\mathbf{augment}(a, b, c)) = 2 \qquad a = \frac{b+c}{2}$$

Таким образом, в качестве базиса данного подпространства

$$L \subseteq \mathbb{R}^5$$

можно взять b и : . Тогда M - ортогональное дополнение к L есть

множество решений СЛАУ $b^{\mathrm{T}} \cdot x = 0$ $c^{\mathrm{T}} \cdot x = 0$.

15.Найдите ядро и образ линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Решение.

$$A:=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(A)=2 \qquad A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot x\\0\\y+3\cdot z+w\\0\end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что образ A есть двумерное подпространство Im A в пространстве $\mathbb{R}^4$, состоящем из столбцов

$$\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{bmatrix}$$

Именно, Im A состоит из всевозможных столбцов

$$\begin{bmatrix}t_1\\0\\t_3\\0\end{bmatrix} \qquad \forall t_1\in\mathbb{R} \qquad \forall t_2\in\mathbb{R}$$

Ядро, т.е. Ker A, есть двумерное подпространство Ker A в в исходном пространстве $\mathbb{R}^4$, состоящем из столбцов

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}$$

Именно, Im A состоит из таких всевозможных столбцов, что

$$\begin{bmatrix}2\cdot x\\0\\y+3\cdot z+w\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Следовательно, Im A есть пересечение двух гиперплоскостей:

$$x=0 \qquad y+3\cdot z+w=0$$