Тема:
Машина Тьюринга

Сергей Витальевич Рыбин
svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

19 июня 2023 г.

Основные понятия

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.

   ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.

   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.

3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:
2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.
3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:
2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.
3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:
2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.
3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.
   - ✓ Машина всегда начинает работу в состоянии q_1 и всегда останавливается, попав в состояние q_0 (часто это состояние называют «стоп-сигналом»).

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:
2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.
3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.
   - ✓ Машина всегда начинает работу в состоянии q_1 и всегда останавливается, попав в состояние q_0 (часто это состояние называют «стоп-сигналом»).
4. **Считывающей/пишущей головки**, которая может перемещаться вдоль ленты и в каждый момент времени обозревает (считывает) одну из ее ячеек.

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.

3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.
   - ✓ Машина всегда начинает работу в состоянии q_1 и всегда останавливается, попав в состояние q_0 (часто это состояние называют «стоп-сигналом»).

4. **Считывающей/пишущей головки**, которая может перемещаться вдоль ленты и в каждый момент времени обозревает (считывает) одну из ее ячеек.

5. Машина Тьюринга функционирует в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ и в зависимости от внутреннего состояния машины и считываемого символа на ленте:

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:
2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.
3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.
   - ✓ Машина всегда начинает работу в состоянии q_1 и всегда останавливается, попав в состояние q_0 (часто это состояние называют «стоп-сигналом»).
4. **Считывающей/пишущей головки**, которая может перемещаться вдоль ленты и в каждый момент времени обозревает (считывает) одну из ее ячеек.
5. Машина Тьюринга функционирует в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ и в зависимости от внутреннего состояния машины и считываемого символа на ленте:
   - ✓ записывает в эту ячейку символ внешнего алфавита;

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:
2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.
3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.
   - ✓ Машина всегда начинает работу в состоянии q_1 и всегда останавливается, попав в состояние q_0 (часто это состояние называют «стоп-сигналом»).
4. **Считывающей/пишущей головки**, которая может перемещаться вдоль ленты и в каждый момент времени обозревает (считывает) одну из ее ячеек.
5. Машина Тьюринга функционирует в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ и в зависимости от внутреннего состояния машины и считываемого символа на ленте:
   - ✓ записывает в эту ячейку символ внешнего алфавита;
   - ✓ сдвигает считывающую головку на один шаг влево (вправо) или оставляет ее на месте;

Основные понятия

1. **Машина Тьюринга** состоит из следующих элементов:

2. **Ленты**, разбитой на ячейки и бесконечной в обе стороны . В каждой ячейке ленты может быть записан один из символов конечного алфавита $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$, называемого **внешним алфавитом**.
   - ✓ Условимся считать, что символ α_0 является пустым символом.
   - ✓ Иногда для обозначения пустого символа алфавита используют символы Λ или ϵ.

3. **Управляющего устройства**, которое может находиться в одном из конечного числа **внутренних состояний** $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$.
   - ✓ Число элементов в $\mathcal{Q}$ характеризует объем внутренней памяти машины.
   - ✓ В множестве $\mathcal{Q}$ выделены два специальных состояния: q_0 и q_1, называемых **заключительным** и **начальным** состояниями соответственно.
   - ✓ Машина всегда начинает работу в состоянии q_1 и всегда останавливается, попав в состояние q_0 (часто это состояние называют «стоп-сигналом»).

4. **Считывающей/пишущей головки**, которая может перемещаться вдоль ленты и в каждый момент времени обозревает (считывает) одну из ее ячеек.

5. Машина Тьюринга функционирует в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ и в зависимости от внутреннего состояния машины и считываемого символа на ленте:
   - ✓ записывает в эту ячейку символ внешнего алфавита;
   - ✓ сдвигает считывающую головку на один шаг влево (вправо) или оставляет ее на месте;
   - ✓ переходит в новое внутреннее состояние.

Схема машины Тьюринга

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

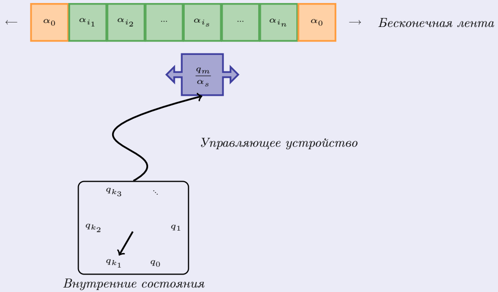

Рис. 1

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

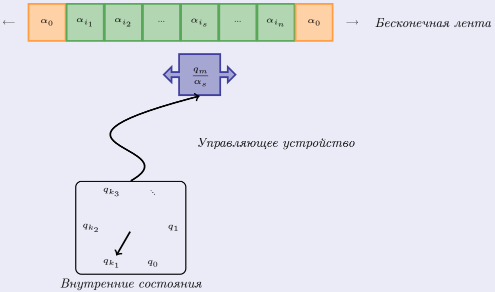

Рис. 1

2. Работа машины Тьюринга определяется системой **команд** вида

$$q_i \alpha_j \to q_k \alpha_l M_s , \tag{1}$$

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

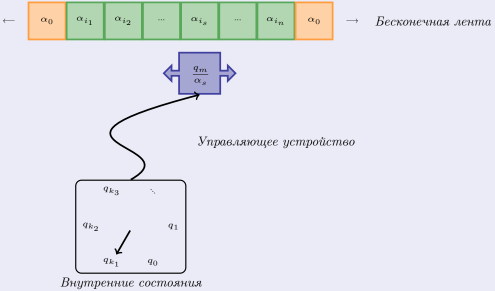

Рис. 1

2. Работа машины Тьюринга определяется системой **команд** вида

$$q_i \alpha_j \to q_k \alpha_l M_s\,, \tag{1}$$

✓ q_i — текущее внутреннее состояние машины;

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

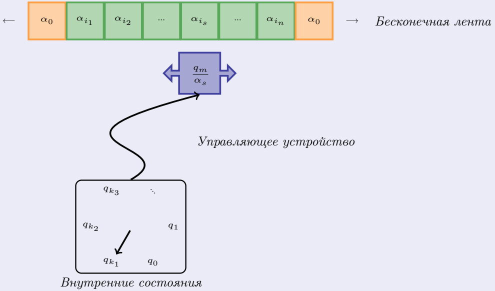

Рис. 1

2. Работа машины Тьюринга определяется системой **команд** вида

$$q_i \alpha_j \to q_k \alpha_l M_s, \tag{1}$$

- ✓ q_i — текущее внутреннее состояние машины;
- ✓ a_j — считываемый символ;

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

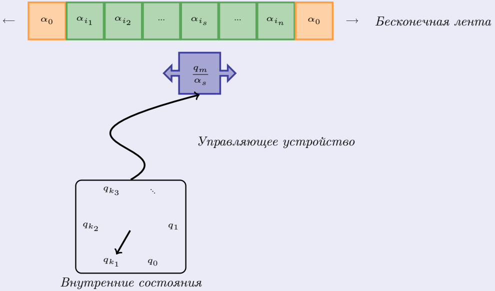

Рис. 1

2. Работа машины Тьюринга определяется системой **команд** вида

$$q_i \alpha_j \to q_k \alpha_l M_s, \tag{1}$$

- ✓ q_i — текущее внутреннее состояние машины;
- ✓ a_j — считываемый символ;
- ✓ q_k — новое внутреннее состояние;

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

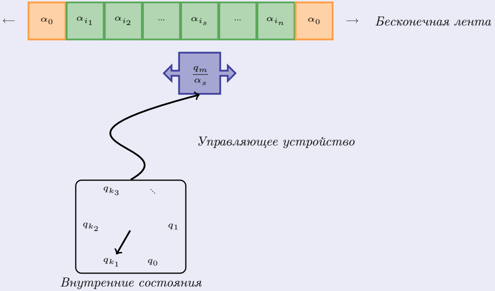

Рис. 1

2. Работа машины Тьюринга определяется системой **команд** вида

$$q_i \alpha_j \to q_k \alpha_l M_s, \tag{1}$$

- ✓ q_i — текущее внутреннее состояние машины;
- ✓ a_j — считываемый символ;
- ✓ q_k — новое внутреннее состояние;
- ✓ a_l — записываемый символ;

Схема машины Тьюринга

1. Схематично машина Тьюринга представлена на рисунке 1.

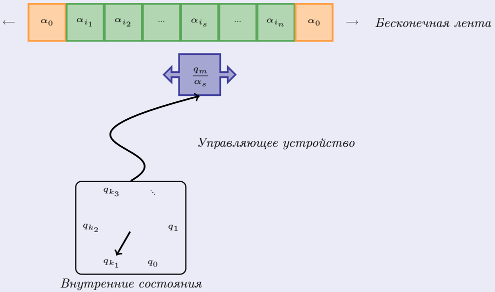

Рис. 1

2. Работа машины Тьюринга определяется системой **команд** вида

$$q_i\alpha_j \to q_k\alpha_l M_s, \tag{1}$$

- ✓ q_i — текущее внутреннее состояние машины;
- ✓ a_j — считываемый символ;
- ✓ q_k — новое внутреннее состояние;
- ✓ a_l — записываемый символ;
- ✓ M_s — направление движения головки, обозначаемое одним из символов: $M_1 = L$ (влево), $M_2 = R$ (вправо), $M_3 = C$ (на месте).

Программа машины Тьюринга

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

- У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

- У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

ℹ У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.
5. Состояние ленты для конфигурации с заключительным внутренним состоянием g_0 называют **результатом работы** машины Тьюринга.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

ℹ У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.
5. Состояние ленты для конфигурации с заключительным внутренним состоянием g_0 называют **результатом работы** машины Тьюринга.
6. Если машина Тьюринга начиная работу в конфигурации $\mathcal{K}$, за конечное число шагов приходит в состояние q_0 (в конфигурации $\mathcal{K}_0$), то ее называют **применимой** к исходной конфигурации $\mathcal{K}$, в противном случае — **неприменимой**.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

ℹ У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.
5. Состояние ленты для конфигурации с заключительным внутренним состоянием g_0 называют **результатом работы** машины Тьюринга.
6. Если машина Тьюринга начиная работу в конфигурации $\mathcal{K}$, за конечное число шагов приходит в состояние q_0 (в конфигурации $\mathcal{K}_0$), то ее называют **применимой** к исходной конфигурации $\mathcal{K}$, в противном случае — **неприменимой**.
7. **Активной зоной** конфигурации называют минимальную связную часть ленты, содержащую обозреваемую ячейку, а также все ячейки, в которых записаны непустые символы.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

ℹ У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.
5. Состояние ленты для конфигурации с заключительным внутренним состоянием g_0 называют **результатом работы** машины Тьюринга.
6. Если машина Тьюринга начиная работу в конфигурации $\mathcal{K}$, за конечное число шагов приходит в состояние q_0 (в конфигурации $\mathcal{K}_0$), то ее называют **применимой** к исходной конфигурации $\mathcal{K}$, в противном случае — **неприменимой**.
7. **Активной зоной** конфигурации называют минимальную связную часть ленты, содержащую обозреваемую ячейку, а также все ячейки, в которых записаны непустые символы.
8. **Унарный алфавит**. Часто рассматривают машины Тьюринга с внешним алфавитом $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 1\}$, в который при необходимости включают символ-разделитель $*$.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

ℹ У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.
5. Состояние ленты для конфигурации с заключительным внутренним состоянием g_0 называют **результатом работы** машины Тьюринга.
6. Если машина Тьюринга начиная работу в конфигурации $\mathcal{K}$, за конечное число шагов приходит в состояние q_0 (в конфигурации $\mathcal{K}_0$), то ее называют **применимой** к исходной конфигурации $\mathcal{K}$, в противном случае — **неприменимой**.
7. **Активной зоной** конфигурации называют минимальную связную часть ленты, содержащую обозреваемую ячейку, а также все ячейки, в которых записаны непустые символы.
8. **Унарный алфавит**. Часто рассматривают машины Тьюринга с внешним алфавитом $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 1\}$, в который при необходимости включают символ-разделитель $*$.
9. В унарном алфавите произвольное число $x \in N_0 = N \bigcup \{0\}$ представляют на ленте в виде $x+1$ единицы

$$1^{x+1} = \overbrace{1\,1\,\ldots\,1\,1}^{x+1}, \tag{2}$$

чтобы запись нуля была непустой.

Программа машины Тьюринга

1. Считаем, что для каждой пары $\{q_i, \alpha_j\}$, $q_i \in \mathcal{Q}$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $\quad i \in 1:n, j \in 0:m$ существует ровно одна команда вида (1).
2. Множество этих команд называют **программой** машины. Таким образом, в программе всего $n(m+1)$ команд.

ℹ У машины Тьюринга заключительное состояние q_0 может стоять только в правой части (1).

3. Совокупность внутреннего состояния, состояния ленты (т. е. размещения символов внешнего алфавита по ячейкам) и положения головки на ленте называют **конфигурацией**.
4. **Работа машины** заключается в изменении конфигураций согласно программе.
5. Состояние ленты для конфигурации с заключительным внутренним состоянием q_0 называют **результатом работы** машины Тьюринга.
6. Если машина Тьюринга начиная работу в конфигурации $\mathcal{K}$, за конечное число шагов приходит в состояние q_0 (в конфигурации $\mathcal{K}_0$), то ее называют **применимой** к исходной конфигурации $\mathcal{K}$, в противном случае — **неприменимой**.
7. **Активной зоной** конфигурации называют минимальную связную часть ленты, содержащую обозреваемую ячейку, а также все ячейки, в которых записаны непустые символы.
8. **Унарный алфавит**. Часто рассматривают машины Тьюринга с внешним алфавитом $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 1\}$, в который при необходимости включают символ-разделитель $*$.
9. В унарном алфавите произвольное число $x \in N_0 = N \bigcup \{0\}$ представляют на ленте в виде $x+1$ единицы

$$1^{x+1} = \overbrace{1\,1\,\ldots\,1\,1}^{x+1}, \tag{2}$$

чтобы запись нуля была непустой.

10. Машина $\mathcal{T}$ **правильно вычисляет функцию** $f(x_1, \ldots, x_n) : N_0^n \to N_0$, если начальную конфигурацию она переводит в заключительную

$$\mathcal{K}_s = 1^{x_1+1} * \ldots * 1^{x_n+1} \longrightarrow \mathcal{K}_f = 1^{f(x_1, \ldots, x_n)+1}$$

если значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ определено, и машина $\mathcal{T}$ неприменима к начальной конфигурации, если значение функции не определено.

Пример

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.
   - ✓ Если же это цифра 9, тогда заменить ее на 0 и сдвинуть управляющую головку к предыдущей цифре, после чего таким же способом увеличить на 1 эту предпоследнюю цифру.

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.
   - ✓ Если же это цифра 9, тогда заменить ее на 0 и сдвинуть управляющую головку к предыдущей цифре, после чего таким же способом увеличить на 1 эту предпоследнюю цифру.
3. Пусть на ленте только девятки (например, $9 \ldots 9$).

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.
   - ✓ Если же это цифра 9, тогда заменить ее на 0 и сдвинуть управляющую головку к предыдущей цифре, после чего таким же способом увеличить на 1 эту предпоследнюю цифру.
3. Пусть на ленте только девятки (например, $9 \ldots 9$).
   - ✓ Тогда управляющую головку будет сдвигаться влево, заменяя девятки на нули, и в конце концов окажется на пустой ячейке.

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.
   - ✓ Если же это цифра 9, тогда заменить ее на 0 и сдвинуть управляющую головку к предыдущей цифре, после чего таким же способом увеличить на 1 эту предпоследнюю цифру.
3. Пусть на ленте только девятки (например, $9 \ldots 9$).
   - ✓ Тогда управляющую головку будет сдвигаться влево, заменяя девятки на нули, и в конце концов окажется на пустой ячейке.
   - ✓ В эту пустую ячейку надо записать 1 и остановиться.

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.
   - ✓ Если же это цифра 9, тогда заменить ее на 0 и сдвинуть управляющую головку к предыдущей цифре, после чего таким же способом увеличить на 1 эту предпоследнюю цифру.
3. Пусть на ленте только девятки (например, 9 ... 9).
   - ✓ Тогда управляющую головку будет сдвигаться влево, заменяя девятки на нули, и в конце концов окажется на пустой ячейке.
   - ✓ В эту пустую ячейку надо записать 1 и остановиться.

$$q_1\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \to q_1\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,R,$$
$$q_1\alpha_0 \to q_2\alpha_0\,L,$$
$$q_2\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \to q_3\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,L,$$
$$q_2 9 \to q_2 0\,L,$$
$$q_3\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \to q_3\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,L,$$
$$q_3\alpha_0 \to q_0\alpha_0\,R,$$
$$q_2\alpha_0 \to q_0 1\,E$$

Пример

1. Построим машину Тьюринга правильно вычисляющую функцию $f(x) = x + 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\alpha_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. **Идея**: нужно «передвинуть» управляющую головку на последнюю цифру числа.
   - ✓ Если это цифра от 0 до 8, то заменить ее цифрой на 1 больше, вернуться в начало и остановиться.
   - ✓ Если же это цифра 9, тогда заменить ее на 0 и сдвинуть управляющую головку к предыдущей цифре, после чего таким же способом увеличить на 1 эту предпоследнюю цифру.
3. Пусть на ленте только девятки (например, $9 \dots 9$).
   - ✓ Тогда управляющую головку будет сдвигаться влево, заменяя девятки на нули, и в конце концов окажется на пустой ячейке.
   - ✓ В эту пустую ячейку надо записать 1 и остановиться.

$$
\begin{aligned}
& q_1 \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \to q_1 \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} R, \\
& q_1 \alpha_0 \to q_2 \alpha_0 L, \\
& q_2 \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \to q_3 \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} L, \\
& q_2 9 \to q_2 0 L, \\
& q_3 \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \to q_3 \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} L, \\
& q_3 \alpha_0 \to q_0 \alpha_0 R, \\
& q_2 \alpha_0 \to q_0 1 E
\end{aligned}
$$

4. Пусть $x = 2\,9\,9$. Начальная конфигурация имеет вид $\mathcal{K}_1 = \alpha_0 \frac{2}{q_1} 9\,9\,\alpha_0$, т. е. управляющая головка обозревает символ 2, а машина находится в состоянии q_1. Тогда

$$
\alpha_0 \frac{2}{q_1} 9\,9 \alpha_0 \to \alpha_0\, 2 \frac{9}{q_1} 9\, \alpha_0 \to \alpha_0\, 2\,9 \frac{9}{q_1} \alpha_0 \to \alpha_0\, 2\,9\,9 \frac{\alpha_0}{q_1} \alpha_0 \to \alpha_0\, 2\,9 \frac{9}{q_2} \alpha_0 \to \alpha_0\, 2 \frac{9}{q_2} 0\, \alpha_0 \to \alpha_0 \frac{2}{q_2} 0\,0\, \alpha_0 \to \alpha_0 \frac{\alpha_0}{q_3} 3\,0\,0\, \alpha_0 \to
$$

$$
\to \alpha_0 \frac{3}{q_0} 0\,0\, \alpha_0
$$