Тема: Нормальные формы логики высказываний

Сергей Витальевич Рыбин
rsvvm2leti@yandex.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

28 февраля 2021 г.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определение 1.1

- *Литералом* называют переменную или ее отрицание, *элементарной конъюнкцией* – литерал или конъюнкцию литералов.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определение 1.1

- *Литералом* называют переменную или ее отрицание, *элементарной конъюнкцией* – литерал или конъюнкцию литералов.
- Формулу, в которой знак отрицания находится только перед переменными, называют формулой с *тесными* отрицаниями.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определение 1.1

- *Литералом* называют переменную или ее отрицание, *элементарной конъюнкцией* – литерал или конъюнкцию литералов.
- Формулу, в которой знак отрицания находится только перед переменными, называют формулой с *тесными* отрицаниями.
- Формула G имеет *дизъюнктивную нормальную форму* (ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определение 1.1

- *Литералом* называют переменную или ее отрицание, *элементарной конъюнкцией* – литерал или конъюнкцию литералов.
- Формулу, в которой знак отрицания находится только перед переменными, называют формулой с *тесными* отрицаниями.
- Формула G имеет *дизъюнктивную нормальную форму* (ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Пример 1.1

- Формулы $X \leftrightarrow \overline{Y}$, $\overline{X} \to \overline{Y}$ являются формулами с тесными отрицаниями, а формулы $\overline{XY}$, $X \vee \overline{Y \vee Z}$ - нет.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определение 1.1

- *Литералом* называют переменную или ее отрицание, *элементарной конъюнкцией* – литерал или конъюнкцию литералов.
- Формулу, в которой знак отрицания находится только перед переменными, называют формулой с *тесными* отрицаниями.
- Формула G имеет *дизъюнктивную нормальную форму* (ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Пример 1.1

- Формулы $X \leftrightarrow \overline{Y}$, $\overline{X} \to \overline{Y}$ являются формулами с тесными отрицаниями, а формулы $\overline{XY}$, $X \vee \overline{Y \vee Z}$ - нет.
- Формулы X, $\overline{Y}$, $X\overline{Y}$, $X\overline{Y} \vee \overline{X}Z$ имеют ДНФ, а формулы $\overline{XY}$, $X \vee Y \vee 0$, $X \to Y$ – нет.

Определения

Мотивация

Во многих случаях удобно рассматривать вместо формул общего вида формулы в некоторой канонической форме.

Определение 1.1

- *Литералом* называют переменную или ее отрицание, *элементарной конъюнкцией* – литерал или конъюнкцию литералов.
- Формулу, в которой знак отрицания находится только перед переменными, называют формулой с *тесными* отрицаниями.
- Формула G имеет *дизъюнктивную нормальную форму* (ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Пример 1.1

- Формулы $X \leftrightarrow \overline{Y}$, $\overline{X} \to \overline{Y}$ являются формулами с тесными отрицаниями, а формулы $\overline{XY}$, $X \vee \overline{Y \vee Z}$ - нет.
- Формулы X, $\overline{Y}$, $X\overline{Y}$, $X\overline{Y} \vee \overline{X}Z$ имеют ДНФ, а формулы $\overline{XY}$, $X \vee Y \vee 0$, $X \to Y$ – нет.

Теорема 1.1

Для любой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая дизъюнктивную нормальную форму.

Алгоритм приведения к дизъюнктивной нормальной форме

Алгоритм приведения к дизъюнктивной нормальной форме

Алгоритм 1.1. Приведение к ДНФ

Исключаем из исходной формулы эквиваленции и импликации
// *Используем равносильности 15 и 14*
Преобразуем формулу к формуле с тесными отрицаниями.
// *Используем равносильности 11 и 12 (законы де Моргана)*
if формула содержит подформулу вида $F(G \vee H)$ **then**
  заменяем ее на равносильную формулу $FG \vee FH$
  // *«Раскрываем скобки»*

end if

Алгоритм приведения к дизъюнктивной нормальной форме

Алгоритм 1.1. Приведение к ДНФ

Исключаем из исходной формулы эквиваленции и импликации
// *Используем равносильности 15 и 14*
Преобразуем формулу к формуле с тесными отрицаниями.
// *Используем равносильности 11 и 12 (законы де Моргана)*
if формула содержит подформулу вида $F(G \vee H)$ **then**
  заменяем ее на равносильную формулу $FG \vee FH$
  // *«Раскрываем скобки»*

end if

Теорема 1.2

Построенная согласно алгоритму формула G имеет СДНФ и равносильна исходной формуле F.

Пример на приведение к ДНФ

Пример на приведение к ДНФ

Пример 1.2

Пусть $F = \overline{(X \leftrightarrow Y)}X$.
Как и ранее в цепочке равносильностей будем ставить номера использованных тавтологий.

1. Выполним первый шаг: $\overline{(X \leftrightarrow Y)}X \overset{15}{=} \overline{(X \to Y)(Y \to X)}X \overset{14}{=} \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X$.

Пример на приведение к ДНФ

Пример 1.2

Пусть $F = \overline{(X \leftrightarrow Y)}X$.
Как и ранее в цепочке равносильностей будем ставить номера использованных тавтологий.

1. Выполним первый шаг: $\overline{(X \leftrightarrow Y)}X \overset{15}{=} \overline{(X \to Y)(Y \to X)}X \overset{14}{=} \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X$.
2. Перейдем ко второму шагу: $\overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X \overset{11}{=} \left(\overline{(\overline{X} \vee Y)} \vee \overline{(\overline{Y} \vee X)}\right) X \overset{12,13}{=} (X\overline{Y} \vee Y\overline{X})\,X$.

Пример на приведение к ДНФ

Пример 1.2

Пусть $F = \overline{(X \leftrightarrow Y)}X$.
Как и ранее в цепочке равносильностей будем ставить номера использованных тавтологий.

1. Выполним первый шаг: $\overline{(X \leftrightarrow Y)}X \overset{15}{=} \overline{(X \to Y)(Y \to X)}X \overset{14}{=} \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X$.
2. Перейдем ко второму шагу: $\overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X \overset{11}{=} \left(\overline{(\overline{X} \vee Y)} \vee \overline{(\overline{Y} \vee X)}\right) X \overset{12,13}{=} (X\overline{Y} \vee Y\overline{X})\, X$.
3. Выполнение третьего шага заключается в применении дистрибутивности: $(X\overline{Y} \vee Y\overline{X})\, X \overset{7}{=} X\overline{Y}X \vee Y\overline{X}X = G$.

Пример на приведение к ДНФ

Пример 1.2

Пусть $F = \overline{(X \leftrightarrow Y)}X$.
Как и ранее в цепочке равносильностей будем ставить номера использованных тавтологий.

1. Выполним первый шаг: $\overline{(X \leftrightarrow Y)}X \overset{15}{=} \overline{(X \to Y)(Y \to X)}X \overset{14}{=} \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X$.
2. Перейдем ко второму шагу: $\overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)}X \overset{11}{=} \left(\overline{(\overline{X} \vee Y)} \vee \overline{(\overline{Y} \vee X)}\right) X \overset{12,13}{=} (X\overline{Y} \vee Y\overline{X})\, X$.
3. Выполнение третьего шага заключается в применении дистрибутивности: $(X\overline{Y} \vee Y\overline{X})\, X \overset{7}{=} X\overline{Y}X \vee Y\overline{X}X = G$.

Алгоритм на этом завершен. Формула G имеет ДНФ.
Но эту формулу можно упростить. Действительно, формула $Y\overline{X}X = 0$, а формула $X\overline{Y}X = X\overline{Y}$. Тогда

$$X\overline{Y}X \vee Y\overline{X}X = X\overline{Y} = \widehat{G}.$$

Формула $\widehat{G}$, как и G, имеет ДНФ и равносильна исходной формуле F.

Определение СДНФ

Определение СДНФ

Мотивация

Последний пример показывает, что может существовать несколько равносильных формул имеющих разное представление в дизъюнктивной нормальной форме. Иногда это обстоятельство является неудобным. Чтобы его исключить, вводится более узкое понятие, чем ДНФ.

Определение СДНФ

Мотивация

Последний пример показывает, что может существовать несколько равносильных формул имеющих разное представление в дизъюнктивной нормальной форме. Иногда это обстоятельство является неудобным. Чтобы его исключить, вводится более узкое понятие, чем ДНФ.

Определение 1.2

Формула $F(X_1, \ldots, X_n)$ имеет *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ), если выполнены следующие условия:

1) F имеет дизъюнктивную нормальную форму;
2) каждая элементарная конъюнкция ДНФ содержит один и только один из литералов X_i или $\overline{X_i}$ для любого $i = 1, \ldots, n$;
3) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Определение СДНФ

Мотивация

Последний пример показывает, что может существовать несколько равносильных формул имеющих разное представление в дизъюнктивной нормальной форме. Иногда это обстоятельство является неудобным. Чтобы его исключить, вводится более узкое понятие, чем ДНФ.

Определение 1.2

Формула $F(X_1, \ldots, X_n)$ имеет *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ), если выполнены следующие условия:

1) F имеет дизъюнктивную нормальную форму;
2) каждая элементарная конъюнкция ДНФ содержит один и только один из литералов X_i или $\overline{X_i}$ для любого $i = 1, \ldots, n$;
3) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Пример 1.3

- Формулы X, $\overline{X}Y$, $\overline{X}Y \vee X\overline{Y}$ имеют СДНФ.
- Формулы $\overline{XY}$, $XY \vee \overline{X}Z$, $XY \vee X\overline{Y} \vee YX$ не имеют СДНФ. Для первой формулы не выполняется первое условие, для второй – второе условие, для третьей формулы – последнее условие из определения СДНФ.

Определение СДНФ

Мотивация

Последний пример показывает, что может существовать несколько равносильных формул имеющих разное представление в дизъюнктивной нормальной форме. Иногда это обстоятельство является неудобным. Чтобы его исключить, вводится более узкое понятие, чем ДНФ.

Определение 1.2

Формула $F(X_1, \ldots, X_n)$ имеет *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ), если выполнены следующие условия:

1) F имеет дизъюнктивную нормальную форму;
2) каждая элементарная конъюнкция ДНФ содержит один и только один из литералов X_i или $\overline{X_i}$ для любого $i = 1, \ldots, n$;
3) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Пример 1.3

- Формулы X, $\overline{X}Y$, $\overline{X}Y \vee X\overline{Y}$ имеют СДНФ.
- Формулы $\overline{XY}$, $XY \vee \overline{X}Z$, $XY \vee X\overline{Y} \vee YX$ не имеют СДНФ. Для первой формулы не выполняется первое условие, для второй – второе условие, для третьей формулы – последнее условие из определения СДНФ.

Теорема 1.3

Для любой выполнимой формулы F существует равносильная ей формула G, имеющая совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Первый алгоритм приведения к СДНФ

Алгоритм 1.2. Первый алгоритм приведения к СДНФ

Приводим формулу к ДНФ: $F(X_1, \ldots, X_n) = C_1 \vee \ldots \vee C_k$
for each C_i **do**
  if существует $j \in 1 : n \mid X_j \notin C_i$ и $\overline{X_j} \notin C_i$ **then**
    // *равносильным преобразованием заменяем* C_i *на две элементарные конъюнкции*

$$C_i \leftarrow C_i \left(X_j \vee \overline{X_j} \right) = C_i X_j \vee C_i \overline{X_j} \tag{1}$$

    // *преобразование* (1) *равносильно, так-как* $X_i \vee \overline{X_i} = 1$ *и* $C \wedge 1 = C$
  end if
  if C_i содержит два вхождения одного литерала **then**
    одно из них вычеркиваем
  end if
  if $C_i = \ldots X_j \ldots \wedge \overline{X_j} \ldots$ **then**
    удаляем из F элементарную конъюнкцию C_i
  end if
end for

// *Приводим «подобные» члены*
if формула F содержит одинаковые элементарные конъюнкции **then**
  оставляем одну, остальные удаляем

end if

Пример приведения к СДНФ

Пример приведения к СДНФ

Пример 1.4

Примененим последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

Пример приведения к СДНФ

Пример 1.4

Применением последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

1. Эта формула уже имеет ДНФ, поэтому шаг 1 пропускаем

Пример приведения к СДНФ

Пример 1.4

Применением последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

1. Эта формула уже имеет ДНФ, поэтому шаг 1 пропускаем
2. Применив преобразование (1) к XY и $X\overline{Z}$, имеем $XY \vee X\overline{Z} = XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\overline{Z}Y \vee X\overline{Z}\,\overline{Y}$.

Пример приведения к СДНФ

Пример 1.4

Применением последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

1. Эта формула уже имеет ДНФ, поэтому шаг 1 пропускаем
2. Применив преобразование (1) к XY и $X\overline{Z}$, имеем $XY \vee X\overline{Z} = XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\overline{Z}Y \vee X\overline{Z}\,\overline{Y}$.
3. Одинаковых и противоположных литералов в элементарных конъюнкциях полученной формулы нет, поэтому шаг 3 не выполняется.

Пример приведения к СДНФ

Пример 1.4

Применением последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

1. Эта формула уже имеет ДНФ, поэтому шаг 1 пропускаем
2. Применив преобразование (1) к XY и $X\overline{Z}$, имеем $XY \vee X\overline{Z} = XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\overline{Z}Y \vee X\overline{Z}\,\overline{Y}$.
3. Одинаковых и противоположных литералов в элементарных конъюнкциях полученной формулы нет, поэтому шаг 3 не выполняется.
4. Формула содержит одинаковые элементарные конъюнкции – вторую и третью. При выполнении четвертого шага будет оставлена одна из них. Получается формула G $G = XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\overline{Z}\,\overline{Y}$.
   Формула G равносильна F и имеет СДНФ.

Второй алгоритм приведения к СДНФ

Второй алгоритм приведения к СДНФ

Имеется еще один способ приведения к СДНФ, основанный на построении таблицы истинности исходной формулы. Введем обозначения.

$$X^{\alpha}=\begin{cases}X, & \text{если } \alpha=1,\\ \overline{X}, & \text{если } \alpha=0.\end{cases}$$

Второй алгоритм приведения к СДНФ

Имеется еще один способ приведения к СДНФ, основанный на построении таблицы истинности исходной формулы. Введем обозначения.

$$X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{если } \alpha = 1, \\ \overline{X}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Алгоритм 1.3. Второй алгоритм приведения к СДНФ

// Инициализация
Составляем таблицу истинности формулы $F(X_1, \dots, X_n)$
$G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow 0$
for each $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}$ **do**
    // рассматриваем строки таблицы истинности, в которых в столбце F стоит 1
    if $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ **then**
        // каждой такой строке сопоставляем элементарную конъюнкцию $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$
        $G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow G(X_1, \dots, X_n) \vee X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$
    end if
end for

Второй алгоритм приведения к СДНФ

Имеется еще один способ приведения к СДНФ, основанный на построении таблицы истинности исходной формулы. Введем обозначения.

$$X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{если } \alpha = 1, \\ \overline{X}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Алгоритм 1.3. Второй алгоритм приведения к СДНФ

// *Инициализация*
Составляем таблицу истинности формулы $F(X_1, \dots, X_n)$
$G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow 0$
for each $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}$ **do**
  // *рассматриваем строки таблицы истинности, в которых в столбце F стоит 1*
  if $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ **then**
    // *каждой такой строке сопоставляем элементарную конъюнкцию $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$*
    $G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow G(X_1, \dots, X_n) \vee X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$
  end if

end for

Теорема 1.4

Построенная согласно алгоритму формула G имеет СДНФ и равносильна исходной формуле F.

Примеры на второй алгоритм приведения к СДНФ

Примеры на второй алгоритм приведения к СДНФ

Определение 1.3

Элементарную конъюнкцию $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ называют *конституентой единицы* набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (символически обозначают $K^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$).

Примеры на второй алгоритм приведения к СДНФ

Определение 1.3

Элементарную конъюнкцию $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ называют *конституентой единицы* набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (символически обозначают $K^1_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$).

Пример 1.5

Построим СДНФ для формулы $F(X_1, X_2, X_3) = X_1(X_2 \to X_3)$.
Составим таблицу истинности формулы F (таблица 1).

Таблица 1

X_1	X_2	X_3	$X_1(X_2 \to X_3)$	X_1	X_2	X_3	$X_1(X_2 \to X_3)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

Применив алгоритм получим искомое представление:

$$F(X_1, X_2, X_3) = X_1(X_2 \to X_3) = X_1 X_2 X_3 \vee X_1 \overline{X_2} X_3 \vee X_1 \overline{X_2}\,\overline{X_3}.$$

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Мотивация

Рассмотрим еще одну каноническую форму записи формул логики высказываний – конъюнктивную нормальную форму. Она получается из ДНФ заменой $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$. Дадим точные определения.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Мотивация

Рассмотрим еще одну каноническую форму записи формул логики высказываний – конъюнктивную нормальную форму. Она получается из ДНФ заменой $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$. Дадим точные определения.

Определение 1.4

- *Элементарной дизъюнкцией*, или дизъюнктом называют литерал или дизъюнкция литералов.
- Формула G имеет *конъюнктивную нормальную форму* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Мотивация

Рассмотрим еще одну каноническую форму записи формул логики высказываний – конъюнктивную нормальную форму. Она получается из ДНФ заменой $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$. Дадим точные определения.

Определение 1.4

- *Элементарной дизъюнкцией*, или дизъюнктом называют литерал или дизъюнкция литералов.
- Формула G имеет *конъюнктивную нормальную форму* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Замечание 1.1

Очевидно, что элементарная дизъюнкция является двойственной к элементарной конъюнкции. Это свойство позволяет свести определяемые новые понятия к ДНФ и СДНФ.

Используя понятие двойственной формулы можно дать и другое равносильное определение КНФ: формула G имеет КНФ, если двойственная ей формула G^* определена (т. е. не содержит связок $\to$ и $\leftrightarrow$) и находится в ДНФ.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Мотивация

Рассмотрим еще одну каноническую форму записи формул логики высказываний – конъюнктивную нормальную форму. Она получается из ДНФ заменой $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$. Дадим точные определения.

Определение 1.4

- *Элементарной дизъюнкцией*, или дизъюнктом называют литерал или дизъюнкция литералов.
- Формула G имеет *конъюнктивную нормальную форму* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Замечание 1.1

Очевидно, что элементарная дизъюнкция является двойственной к элементарной конъюнкции. Это свойство позволяет свести определяемые новые понятия к ДНФ и СДНФ.
Используя понятие двойственной формулы можно дать и другое равносильное определение КНФ: формула G имеет КНФ, если двойственная ей формула G^* определена (т. е. не содержит связок $\to$ и $\leftrightarrow$) и находится в ДНФ.

Пример 1.6

Формулы X, $\overline{Y}$, $X \vee \overline{Y}$, $X\overline{Y}$, $(X \vee \overline{Y})(X \vee Z)$ имеют КНФ, а формулы $X \to Y$, $\overline{X \vee Y}$, $X\overline{Y} \vee X\overline{Z}$ – нет.

Алгоритм приведения к КНФ

Алгоритм приведения к КНФ

Теорема 1.5

Для любой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая конъюнктивную нормальную форму.

Теорема 1.5

Для любой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая конъюнктивную нормальную форму.

Алгоритм приведения к КНФ

Алгоритм легко получить из алгоритма приведения к ДНФ, если на последнем шаге вместо используемого закона дистрибутивности

$$F(G \vee H) = FG \vee FH$$

использовать двойственную равносильность

$$F \vee GH = (F \vee G)(F \vee H).$$

Определение СКНФ

Определение СКНФ

Как и для случая ДНФ введем более узкое понятие, нежели КНФ.

Определение СКНФ

Как и для случая ДНФ введем более узкое понятие, нежели КНФ.

Определение 1.5

Формула $F(X_1, \dots, X_n)$ имеет *совершенную конъюнктивную нормальную форму* (СКНФ), если выполнены следующие условия:

1) F имеет КНФ;
2) каждая элементарная дизъюнкция содержит один и только один из литералов X_i или $\neg X_i$ для любого $i \in 1 : n$;
3) F не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Как и для КНФ можно дать другое равносильное определение СКНФ используя понятие двойственности: формула G имеет СКНФ, если двойственная ей формула G^* находится в СДНФ.

Определение СКНФ

Как и для случая ДНФ введем более узкое понятие, нежели КНФ.

Определение 1.5

Формула $F(X_1, \ldots, X_n)$ имеет *совершенную конъюнктивную нормальную форму* (СКНФ), если выполнены следующие условия:

1) F имеет КНФ;
2) каждая элементарная дизъюнкция содержит один и только один из литералов X_i или $\neg X_i$ для любого $i \in 1 : n$;
3) F не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Как и для КНФ можно дать другое равносильное определение СКНФ используя понятие двойственности: формула G имеет СКНФ, если двойственная ей формула G^* находится в СДНФ.

Пример 1.7

- Формулы X, $\overline{X} \vee Y$, $(\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y})$ имеют СКНФ.
- Формулы $\overline{X \vee Y}$, $(X \vee Y)(\overline{X} \vee Z)$, $(X \vee Y)(X \vee \overline{Y})(Y \vee X)$ не имеют СКНФ. Для первой формулы не выполняется первое условие, для второй формулы – второе условие, для третьей формулы – последнее условие из определения СКНФ.

Определение СКНФ

Как и для случая ДНФ введем более узкое понятие, нежели КНФ.

Определение 1.5

Формула $F(X_1, \ldots, X_n)$ имеет *совершенную конъюнктивную нормальную форму* (СКНФ), если выполнены следующие условия:

1) F имеет КНФ;
2) каждая элементарная дизъюнкция содержит один и только один из литералов X_i или $\neg X_i$ для любого $i \in 1 : n$;
3) F не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Как и для КНФ можно дать другое равносильное определение СКНФ используя понятие двойственности: формула G имеет СКНФ, если двойственная ей формула G^* находится в СДНФ.

Пример 1.7

- Формулы X, $\overline{X} \vee Y$, $(\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y})$ имеют СКНФ.
- Формулы $\overline{X \vee Y}$, $(X \vee Y)(\overline{X} \vee Z)$, $(X \vee Y)(X \vee \overline{Y})(Y \vee X)$ не имеют СКНФ. Для первой формулы не выполняется первое условие, для второй формулы – второе условие, для третьей формулы – последнее условие из определения СКНФ.

Теорема 1.6

Для любой не тождественно истинной формулы F существует равносильная ей формула G, имеющая совершенную конъюнктивную нормальную форму.

Первый алгоритм приведения к СКНФ

Первый алгоритм приведения к СКНФ

Алгоритм 1.4. Первый алгоритм приведения к СКНФ

Приводим формулу к КНФ: $F(X_1, \dots, X_n) = D_1 \wedge \dots \wedge D_k$
for each D_i **do**
  if существует $j \in 1 : n \mid X_j \notin D_i$ и $\overline{X_j} \notin D_i$ **then**
    // *равносильным преобразованием заменяем* D_i *на две элементарные дизъюнкции*

$$D_i \leftarrow (D_i \vee X_j)(D_i \vee \overline{X_j}) \tag{2}$$

    // *преобразование (2) равносильно, так-как* $X_j\overline{X_j} = 0$ *и* $D_i \vee 0 = D_i$
  end if
  if D_i содержит два вхождения одного литерала **then**
    одно из них вычеркиваем
  end if
  if $D_i = \dots X_j \vee \dots \vee \overline{X_j} \dots$ **then**
    удаляем из F элементарную дизъюнкцию D_i
  end if
end for

// *Приводим «подобные» члены*
if формула F содержит одинаковые элементарные дизъюнкции **then**
  оставляем одну, остальные удаляем
end if

Пример приведения к СКНФ

Пример приведения к СКНФ

Пример 1.8

Применением последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

Пример приведения к СКНФ

Пример 1.8

Применением последний алгоритм к формуле $F = XY \vee X\overline{Z}$.

1. Приводим формулу к КНФ: $\overline{(X \vee Z)}(X \to Y) \overset{14}{=} \overline{(X \vee Z)}(\overline{X} \vee Y) \overset{12}{=} \overline{X}\,\overline{Z}(\overline{X} \vee Y)$.
2. Построим ее СКНФ.

$$\overline{X}\,\overline{Z}(\overline{X} \vee Y) = (\overline{X} \vee Y\overline{Y} \vee Z\overline{Z})(X\overline{X} \vee Y\overline{Y} \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee Z\overline{Z}) =$$
$$= (\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})(X \vee Y \vee \overline{Z})(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Второй алгоритм приведения к СКНФ

Алгоритм 1.5. Второй алгоритм приведения к СКНФ

// *Инициализация*
Составляем таблицу истинности формулы $F(X_1, \ldots, X_n)$
$G(X_1, \ldots, X_n) \leftarrow 0$
for each $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}$ **do**
  // *рассматриваем строки таблицы истинности, в которых в столбце F стоит* 0
  if $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ **then**
    // *каждой такой строке сопоставляем элементарную дизъюнкцию* $\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \cdots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}$
    $G(X_1, \ldots, X_n) \leftarrow G(X_1, \ldots, X_n) \wedge \left(\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \cdots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}\right)$
  end if

end for

Алгоритм 1.5. Второй алгоритм приведения к СКНФ

// *Инициализация*
Составляем таблицу истинности формулы $F(X_1, \dots, X_n)$
$G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow 0$
for each $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}$ **do**
 // *рассматриваем строки таблицы истинности, в которых в столбце F стоит* 0
 if $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ **then**
  // *каждой такой строке сопоставляем элементарную дизъюнкцию* $\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \dots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}$
  $G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow G(X_1, \dots, X_n) \wedge \left(\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \dots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}\right)$
 end if

end for

Теорема 1.7

Построенная согласно алгоритму формула G имеет СКНФ и равносильна исходной формуле F.

Второй алгоритм приведения к СКНФ

Алгоритм 1.5. Второй алгоритм приведения к СКНФ

// *Инициализация*
Составляем таблицу истинности формулы $F(X_1, \dots, X_n)$
$G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow 0$
for each $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}$ **do**
  // *рассматриваем строки таблицы истинности, в которых в столбце F стоит* 0
  if $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ **then**
    // *каждой такой строке сопоставляем элементарную дизъюнкцию* $\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \dots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}$
    $G(X_1, \dots, X_n) \leftarrow G(X_1, \dots, X_n) \wedge \left(\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \dots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}\right)$
  end if

end for

Теорема 1.7

Построенная согласно алгоритму формула G имеет СКНФ и равносильна исходной формуле F.

Определение 1.6

Элементарную дизъюнкцию $\overline{X_1^{\alpha_1}} \vee \dots \vee \overline{X_n^{\alpha_n}}$ называют *конституентой нуля* набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (символически обозначают $K^0_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$).

Пример приведения к СКНФ

Пример приведения к СКНФ

Пример 1.9

Построим СКНФ, для формулы
$$F(X_1, X_2, X_3) = (\overline{X}_1 \to X_3) \to \overline{(\overline{X}_2 \to \overline{X}_1)}.$$

Составим таблицу истинности формулы F (таблица 2).

Таблица 2

X_1	X_2	X_3	$F(X_1, X_2, X_3)$	X_1	X_2	X_3	$F(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0

Применив алгоритм получим искомое представление:
$$F(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \vee X_2 \vee \overline{X}_3)(X_1 \vee \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3)(\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee X_3)(\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3)$$