1. Является ли линейным пространством множество многочленов степени не ниже 3?

Решение. Да, является, потому что на множестве многочленов степени не ниже 3 определены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие восьми аксиомам линейного пространства. Так, если $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ - два многочлена степени не ниже 3, то их сумма

$$f + g = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) =$$

$$= (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

снова является многочленом степени не ниже 3. Если $\alpha \in \mathbb{R}$ - произвольный скаляр, то

$$\alpha \cdot f = (\alpha \cdot a_3)x^3 + (\alpha \cdot a_2)x^2 + (\alpha \cdot a_1)x + \alpha \cdot a_0$$

снова является многочленом степени не ниже 3. Все аксиомы выполнены.

2. Является ли набор векторов $e_1 = (-2, -7, 5)^T,\ e_2 = (1, 2, 3)^T,\ e_3 = (2, 8, 5)^T$ базисом в $\mathbb{R}^3$?

Решение. Проверим, является ли этот набор линейно независимым. Пусть некоторая линейная комбинация этих векторов равна нулю, т.е.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0,$$

тогда получим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + 2\gamma = 0, \\ -7\alpha + 2\beta + 8\gamma = 0, \\ 5\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0. \end{cases}$$

Матрица этой системы

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -7 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

невырождена, т.е.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -7 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 11 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -(-3 \cdot 10 - 11) \neq 0,$$

поэтому система имеет только нулевое решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Значит, векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы и образуют базис.

3. Запишите столбец координат элемента $f(x) = 5x^2 + 8x - 7$ в базисе $e_1(x) = x^2, e_2(x) = x, e_3(x) = 1$.

Решение. Имеем $f(x) = 5 \cdot e_1(x) + 8 \cdot e_2(x) - 7 \cdot e_3(x)$, поэтому

$$f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x - 7y - 3z - 7t + 6u = -64, \\ 2x - 3y - 9z - 7t + 2u = -26, \\ x - 5y + 9z - 3t + 4u = -64, \\ 3x - 6y - 6z - 6t + 6u = -48, \\ 2x - 5y + 3z - 3t + 9u = -60. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу этой системы и элементарными преобразованиями приведём её к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -7 & -3 & -7 & 6 & -64 \\ 2 & -3 & -9 & -7 & 2 & -26 \\ 1 & -5 & 9 & -3 & 4 & -64 \\ 3 & -6 & -6 & -6 & 6 & -48 \\ 2 & -5 & 3 & -3 & 9 & -60 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -16 \\ 0 & 2 & -12 & -4 & -7 & 34 \\ 1 & -5 & 9 & -3 & 4 & -64 \\ 0 & 9 & -33 & 3 & -6 & 144 \\ 0 & 5 & -15 & 3 & 1 & 68 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

значит, $x = -4, y = 2, z = -3, t = 5, u = -2$.

5. Запишите матрицу линейного оператора L в базисе u, если известно: $L(u_1) = 2u_1 + u_3;\ L(u_2) = u_1 + u_2;\ L(u_3) = u_1 - u_2 + 2u_3$.

Решение. Матрица линейного оператора состоит из координат образов базисных векторов, записанных по столбцам, поэтому

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $V = \{e^{4t}p(t) | p - \text{многочлен}, \deg p \leq 3\}$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$. Выберите базис в пространстве V и найдите матрицу оператора L в этом базисе, если L - оператор дифференцирования по переменной t.

Решение. Выберем в V такой базис:

$$e_1(t) = e^{4t},\ e_2(t) = e^{4t}t,\ e_3(t) = e^{4t}t^2,\ e_4(t) = e^{4t}t^3.$$

Тогда

$$L(e_1) = 4e^{4t} = 4e_1,$$
$$L(e_2) = e^{4t} + 4e^{4t}t = e_1 + 4e_2,$$
$$L(e_3) = 2e^{4t}t + 4e^{4t}t^2 = 2e_2 + 4e_3,$$
$$L(e_4) = 3e^{4t}t^2 + 4e^{4t}t^3 = 3e_3 + 4e_4,$$

поэтому матрица оператора L в этом базисе равна

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Оператор $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ задан формулой

$$L(x) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Укажите какой-нибудь базис ядра этого оператора.

Решение. Ядро линейного оператора - это множество всех векторов x таких, что $L(x)=0$, поэтому получаем однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приведём её к ступенчатому и выпишем общее решение однородной системы.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

значит, общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4, \\ x_2 = x_3 - 2x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1, x_4 = 0$ найдем один базисный вектор - $(-1,1,1,0)$. Полагая $x_3 = 0, x_4 = 1$, найдем второй - $(1,-2,0,1)$. Эти два вектора образуют базис ядра оператора L.

8. Для оператора $L = (D-3I)(D+2I)$ запишите $L(y)$ в виде $Ay'' + By' + Cy$.

Решение. Имеем

$$L(y) = (D-3I)(D+2I)y = (D-3I)(y'+2y) =$$

$$= y'' - 3y' + 2y' - 6y = y'' - y' - 6y.$$

9. Решить $y'' - 6y' + 25y = e^{2x}(17x+15),\ y(0)=0,\ y'(0)=-20.$

Решение. Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - 6y' + 25y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = 3 \pm 4i,$$

поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x,$$

где A, B - постоянные. Найдем частное решение неоднородного. Будем искать его в виде

$$y(x) = e^{2x}(Cx + D),$$

подставим в исходное уравнение, получим

$$4e^{2x}(Cx + D) + 4Ce^{2x} - 6\left(2e^{2x}(Cx + D) + Ce^{2x}\right) + 25e^{2x}(Cx + D) = e^{2x}(17x + 15),$$

$$17(Cx + D) - 2C = 17x + 15,$$

$$17Cx + (17D - 2C) = 17x + 15,$$

откуда $C = D = 1$. Таким образом, частное решение равно $y(x) = e^{2x}(x + 1)$. Значит, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x + e^{2x}(x + 1).$$

Используем начальные условия, чтобы найти постоянные A и B. Имеем

$$y(0) = A + 1 = 0,$$

поэтому $A = -1$. Далее

$$y'(0) = 3A + 4B + 2 + 1 = -20,$$

$$4B = -20, \ B = -5.$$

Окончательно получим ответ:

$$y(x) = -e^{3x}\cos 4x - 5e^{3x}\sin 4x + e^{2x}(x + 1).$$

10. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\left(3\cos x + (-x^2 - 3x + 2)\sin 3x\right).$$

Решение. Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -2,$$

поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0(x) = (A + Bx)e^{-2x},$$

где A, B - постоянные. Найдем частное решение неоднородного. Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \cdots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ \ldots, \ f_p$. Поэтому будем искать отдельно частные решения уравнений:

$$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}\cos x, \ (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(-x^2 - 3x + 2)\sin 3x. \ (2)$$

Для первого ищем частное решение в виде:

$$y_1(x) = e^{-2x}\left(C\cos x + D\sin x\right).$$

Тогда

$$y_1' = -2e^{-2x}\left(C\cos x + D\sin x\right) + e^{-2x}\left(-C\sin x + D\cos x\right),$$

$$y_2'' = 4e^{-2x}\left(C\cos x + D\sin x\right) - 4e^{-2x}\left(-C\sin x + D\cos x\right) + e^{-2x}\left(-C\cos x - D\sin x\right) =$$

$$= 3e^{-2x}\left(C\cos x + D\sin x\right) - 4e^{-2x}\left(-C\sin x + D\cos x\right).$$

Подставим всё в уравнение (1), получим

$$-e^{-2x}\left(C\cos x + D\sin x\right) = 3e^{-2x}\cos x,$$

откуда найдем, что $C = -3, \ D = 0$. Значит, $y_1(x) = -3e^{-2x}\cos x$.

Частное решение уравнения (2) ищем в виде:

$$y_2(x) = e^{-2x}\left((a_2x^2 + a_1x + a_0)\cos 3x + (b_2x^2 + b_1x + b_0)\sin 3x\right).$$

Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобнах членах, найдем, что

$$a_2 = 0,\ a_1 = \frac{4}{27},\ a_0 = \frac{2}{9},$$

$$b_2 = \frac{1}{9},\ b_1 = \frac{1}{3},\ b_0 = -\frac{8}{27}.$$

Значит,

$$y_2(x) = e^{-2x}\left(\left(\frac{4}{27}x + \frac{2}{9}\right)\cos 3x + \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{8}{27}\right)\sin 3x\right).$$

Окончательно, решение исходного уравнения

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) = e^{-2x}(A + Bx) - 3e^{-2x}\cos x +$$

$$+e^{-2x}\left(\left(\frac{4}{27}x + \frac{2}{9}\right)\cos 3x + \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{8}{27}\right)\sin 3x\right).$$