

Тема:
Хроматические многочлены

Сергей Витальевич Рыбин
svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

25 июня 2023 г.



СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Основные понятия и свойства

Основные понятия

1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.
- 3 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и t — заданное число цветов. Число способов правильной вершинной t -раскраски графа G называется его **хроматическим многочленом** и обозначается $P(G, t)$.

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.
- 3 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и t — заданное число цветов. Число способов правильной вершинной t -раскраски графа G называется его **хроматическим многочленом** и обозначается $P(G, t)$.

Основные свойства

- i Пусть G — граф из одной изолированной вершины. Тогда

$$P(G, t) = t. \quad (1)$$

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.
- 3 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и t — заданное число цветов. Число способов правильной вершинной t -раскраски графа G называется его **хроматическим многочленом** и обозначается $P(G, t)$.

Основные свойства

- i Пусть G — граф из одной изолированной вершины. Тогда

$$P(G, t) = t. \quad (1)$$

- ii Пусть C_n — цикл, состоящий из n вершин. Тогда

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1). \quad (2)$$

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.
- 3 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и t — заданное число цветов. Число способов правильной вершинной t -раскраски графа G называется его **хроматическим многочленом** и обозначается $P(G, t)$.

Основные свойства

- ❶ Пусть G — граф из одной изолированной вершины. Тогда

$$P(G, t) = t. \quad (1)$$

- ❷ Пусть C_n — цикл, состоящий из n вершин. Тогда

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1). \quad (2)$$

- ❸ Пусть в графе G есть висячая вершина v . Обозначим через G_1 граф, полученный удалением из исходного графа вершины v и инцидентного ей ребра. Тогда

$$P(G, t) = (t-1)P(G_1, t) \quad (3)$$

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.
- 3 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и t — заданное число цветов. Число способов правильной вершинной t -раскраски графа G называется его **хроматическим многочленом** и обозначается $P(G, t)$.

Основные свойства

- ❶ Пусть G — граф из одной изолированной вершины. Тогда

$$P(G, t) = t. \quad (1)$$

- ❷ Пусть C_n — цикл, состоящий из n вершин. Тогда

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1). \quad (2)$$

- ❸ Пусть в графе G есть висячая вершина v . Обозначим через G_1 граф, полученный удалением из исходного графа вершины v и инцидентного ей ребра. Тогда

$$P(G, t) = (t-1)P(G_1, t) \quad (3)$$

- ❹ Пусть в графе G есть вершина $u : \deg(u) = 2$ и смежные с u вершины смежны между собой (образуют «треугольник»). Обозначим через G_1 граф, полученный удалением из исходного графа вершины u и обоих инцидентных ей ребер. Тогда

$$P(G, t) = (t-2)P(G_1, t) \quad (4)$$

Основные понятия и свойства

Основные понятия

- 1 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, $\{1, 2, \dots, k\}$ — множество «цветов». Отображение $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ называют **вершинной k -раскраской** графа G .
- 2 Такую k -раскраску называют **правильной**, если для любого ребра $(v_1, v_2) \in E$ справедливо $f(v_1) \neq f(v_2)$, т. е. смежные вершины получают различную окраску.
- 3 Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф и t — заданное число цветов. Число способов правильной вершинной t -раскраски графа G называется его **хроматическим многочленом** и обозначается $P(G, t)$.

Основные свойства

- i Пусть G — граф из одной изолированной вершины. Тогда

$$P(G, t) = t. \quad (1)$$

- i Пусть C_n — цикл, состоящий из n вершин. Тогда

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1). \quad (2)$$

- i Пусть в графе G есть висячая вершина v . Обозначим через G_1 граф, полученный удалением из исходного графа вершины v и инцидентного ей ребра. Тогда

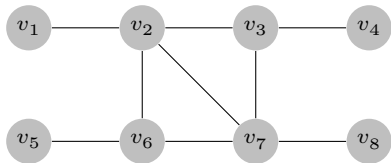
$$P(G, t) = (t-1)P(G_1, t) \quad (3)$$

- i Пусть в графе G есть вершина $u : \deg(u) = 2$ и смежные с u вершины смежны между собой (образуют «треугольник»). Обозначим через G_1 граф, полученный удалением из исходного графа вершины u и обоих инцидентных ей ребер. Тогда

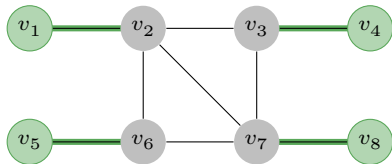
$$P(G, t) = (t-2)P(G_1, t) \quad (4)$$

- i Соотношения (1), (2), (3) и (4) в некоторых случаях существенно упрощают вычисление хроматического многочлена.

Пример 1

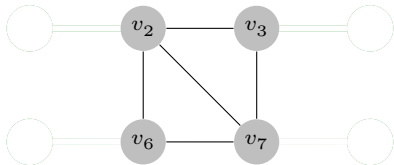


Пример 1



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

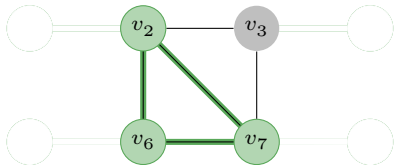
Пример 1



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

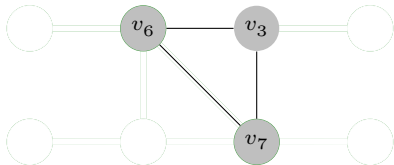
2
$$P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t - 1)^4$$

Пример 1



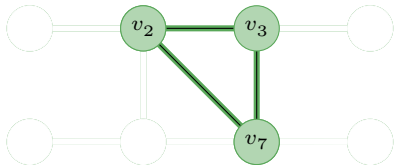
- 1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .
- 2 $P(G, t) = P(G_1, t)(t - 1)^4$
- 3 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_6, v_2, v_7 (с вершиной треугольника v_6) графа G_1 . Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_2 .

Пример 1



- 1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .
- 2 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4$
- 3 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_6, v_2, v_7 (с вершиной треугольника v_6) графа G_1 . Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_2 .
- 4 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^4(t-2)$

Пример 1



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

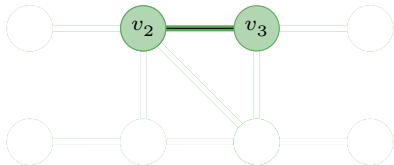
2
$$P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4$$

3 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_6, v_2, v_7 (с вершиной треугольника v_6) графа G_1 . Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_2 .

4
$$P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^4(t-2)$$

4 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_3, v_7, v_2 (с вершиной треугольника v_7). Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_3 .

Пример 1



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

2 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4$

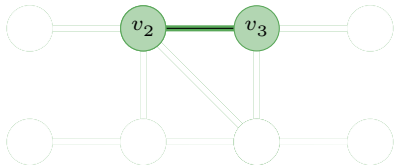
3 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_6, v_2, v_7 (с вершиной треугольника v_6) графа \mathbf{G}_1 . Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф \mathbf{G}_2 .

4 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^4(t-2)$

4 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_3, v_7, v_2 (с вершиной треугольника v_7). Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф \mathbf{G}_3 .

5 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^4(t-2) = P(\mathbf{G}_3, t)(t-1)^4(t-2)^2$

Пример 1



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

2 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_6, v_2, v_7 (с вершиной треугольника v_6) графа G_1 . Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_2 .

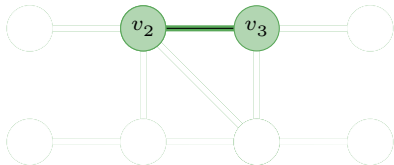
4 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^4(t-2)$

4 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_3, v_7, v_2 (с вершиной треугольника v_7). Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_3 .

5 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^4(t-2) = P(G_3, t)(t-1)^4(t-2)^2$

6 Используем соотношение (4) для висячей вершины v_2 , затем соотношение (1) для изолированной вершины v_3 .

Пример 1



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин v_1, v_4, v_5, v_8 графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

2 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_6, v_2, v_7 (с вершиной треугольника v_6) графа G_1 . Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_2 .

4 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^4(t-2)$

4 Используем соотношение (4) для «треугольника» v_3, v_7, v_2 (с вершиной треугольника v_7). Удаляя вершину треугольника и ребра, смежные с ней, получаем граф G_3 .

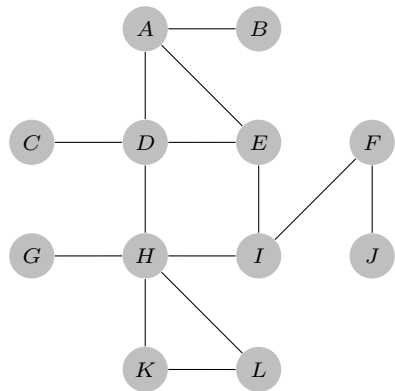
5 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^4(t-2) = P(G_3, t)(t-1)^4(t-2)^2$

6 Используем соотношение (4) для висячей вершины v_2 , затем соотношение (1) для изолированной вершины v_3 .

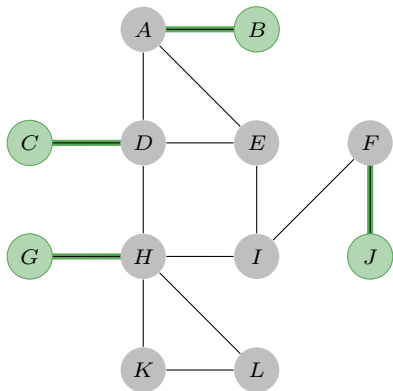
7 Окончательно получаем

$$P(G, t) = t(t-1)^5(t-2)^2.$$

Пример 2

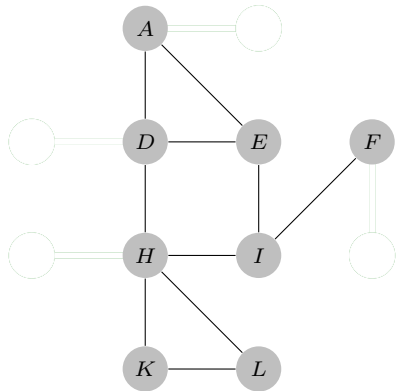


Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

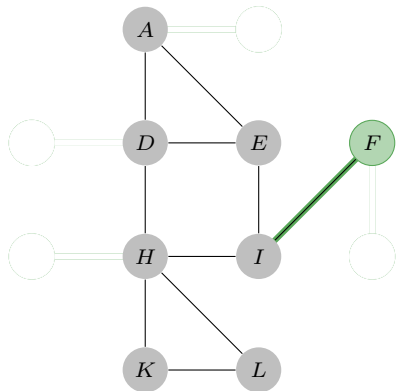
Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

2
$$P(G, t) = P(G_1, t)(t - 1)^4$$

Пример 2

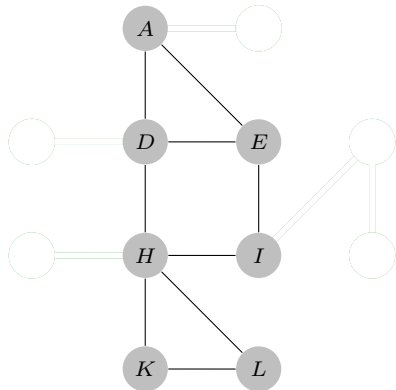


1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

2
$$P(G, t) = P(G_1, t)(t - 1)^4$$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф G_2 .

Пример 2



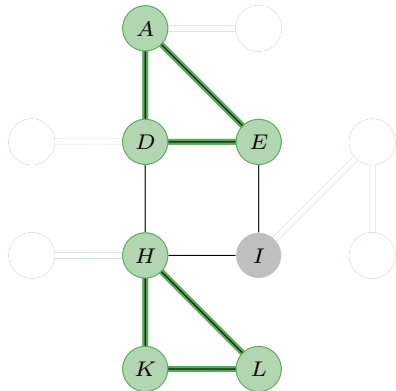
1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

2 $P(G, t) = P(G_1, t)(t - 1)^4$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф G_2 .

4 $P(G, t) = P(G_1, t)(t - 1)^4 = P(G_2, t)(t - 1)^5$

Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа G . Удаляя вершины и ребра получаем граф G_1 .

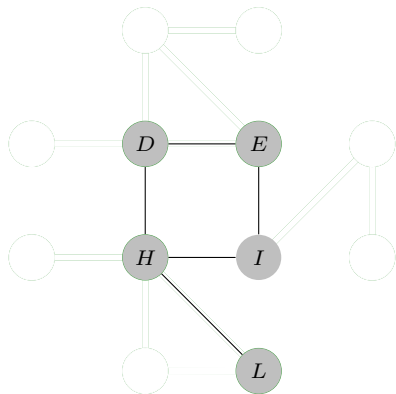
2 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф G_2 .

4 $P(G, t) = P(G_1, t)(t-1)^4 = P(G_2, t)(t-1)^5$

5 Применим формулу (4) для «треугольников» A, D, E и K, H, L с вершинами в A и K . Удаляя вершины треугольников и ребра, смежные с ними, получаем граф G_3 .

Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

2 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4$

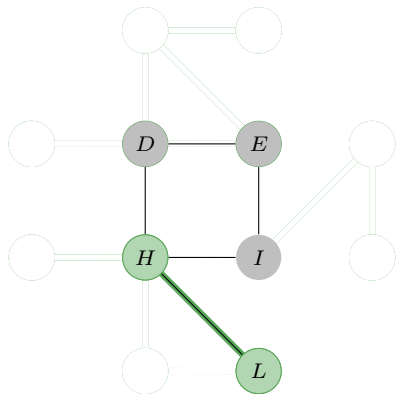
3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф \mathbf{G}_2 .

4 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5$

5 Применим формулу (4) для «треугольников» A, D, E и K, H, L с вершинами в A и K . Удаляя вершины треугольников и ребра, смежные с ними, получаем граф \mathbf{G}_3 .

6 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5 = P(\mathbf{G}_3, t)(t-1)^5(t-2)^2$

Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

2 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф \mathbf{G}_2 .

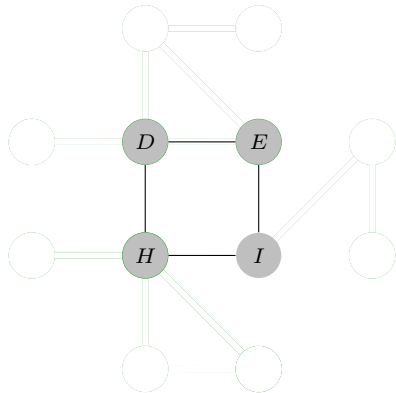
4 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5$

5 Применим формулу (4) для «треугольников» A, D, E и K, H, L с вершинами в A и K . Удаляя вершины треугольников и ребра, смежные с ними, получаем граф \mathbf{G}_3 .

6 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5 = P(\mathbf{G}_3, t)(t-1)^5(t-2)^2$

7 Применим соотношение (3) для вершины L , которая станет висячей после удаления вершины треугольника K , получаем граф \mathbf{G}_4 .

Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

2 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф \mathbf{G}_2 .

4 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5$

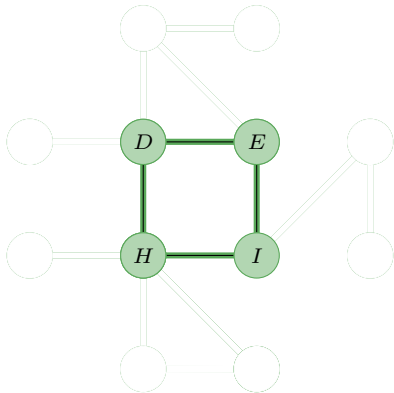
5 Применим формулу (4) для «треугольников» A, D, E и K, H, L с вершинами в A и K . Удаляя вершины треугольников и ребра, смежные с ними, получаем граф \mathbf{G}_3 .

6 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5 = P(\mathbf{G}_3, t)(t-1)^5(t-2)^2$

7 Применим соотношение (3) для вершины L , которая станет висячей после удаления вершины треугольника K , получаем граф \mathbf{G}_4 .

8 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_4, t)(t-1)^6(t-2)^2$

Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

2 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф \mathbf{G}_2 .

4 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5$

5 Применим формулу (4) для «треугольников» A, D, E и K, H, L с вершинами в A и K . Удаляя вершины треугольников и ребра, смежные с ними, получаем граф \mathbf{G}_3 .

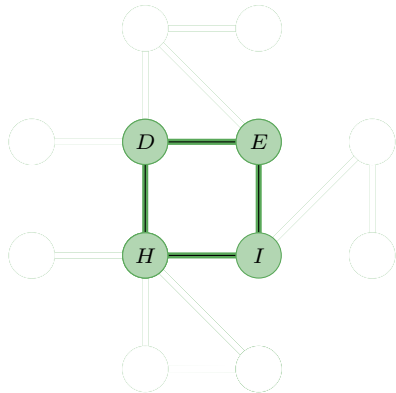
6 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5 = P(\mathbf{G}_3, t)(t-1)^5(t-2)^2$

7 Применим соотношение (3) для вершины L , которая станет висячей после удаления вершины треугольника K , получаем граф \mathbf{G}_4 .

8 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_4, t)(t-1)^6(t-2)^2$

9 Для оставшегося четырехвершинного цикла $D \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow D$ используем свойство (2).

Пример 2



1 Используем соотношение (3) для висячих вершин B, C, G, J графа \mathbf{G} . Удаляя вершины и ребра получаем граф \mathbf{G}_1 .

2 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4$

3 Используем соотношение (3) для вершины F , которая стала висячей после удаления вершины J . Удаляя вершину и ребро получаем граф \mathbf{G}_2 .

4 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5$

5 Применим формулу (4) для «треугольников» A, D, E и K, H, L с вершинами в A и K . Удаляя вершины треугольников и ребра, смежные с ними, получаем граф \mathbf{G}_3 .

6 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_1, t)(t-1)^4 = P(\mathbf{G}_2, t)(t-1)^5 = P(\mathbf{G}_3, t)(t-1)^5(t-2)^2$

7 Применим соотношение (3) для вершины L , которая станет висячей после удаления вершины треугольника K , получаем граф \mathbf{G}_4 .

8 $P(\mathbf{G}, t) = P(\mathbf{G}_4, t)(t-1)^6(t-2)^2$

9 Для оставшегося четырехвершинного цикла $D \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow D$ используем свойство (2).

10 Окончательно получаем

$$P(\mathbf{G}, t) = (t-1)^6(t-2)^2 \left((t-1)^4 + (t-1) \right) = t(t-1)^7(t-2)^2(t^2 - 3t + 3).$$