Тема:
Диофантовы уравнения и сравнения

Сергей Витальевич Рыбин
svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

14 января 2023 г.

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \quad (1)$$

Обобщенный алгоритм Евклида

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \quad (1)$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \quad (2)$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.

Обобщенный алгоритм Евклида

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \quad (1)$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \quad (2)$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \quad (3)$$

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \tag{3}$$

3. Равенство (3) можно записать в векторной форме, т. е. наибольший общий делитель можно представить вектором (упорядоченным) набором коэффициентов разложения по исходным числам $d = (x, y)$.

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c,\ \text{где}\ a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t,\ y = y_0 + \frac{a}{d}t,\ \text{где}\ t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \tag{3}$$

3. Равенство (3) можно записать в векторной форме, т. е. наибольший общий делитель можно представить вектором (упорядоченным) набором коэффициентов разложения по исходным числам $d = (x, y)$.

Сами числа представляются такими векторами очень просто:

$$a = (1, 0),\ \text{так как}\ a = 1 \times a + 0 \times b,$$
$$b = (0, 1),\ \text{так как}\ b = 0 \times a + 1 \times b.$$

Обобщенный алгоритм Евклида

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c,\ \text{где}\ a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t,\ y = y_0 + \frac{a}{d}t,\ \text{где}\ t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \tag{3}$$

3. Равенство (3) можно записать в векторной форме, т. е. наибольший общий делитель можно представить вектором (упорядоченным) набором коэффициентов разложения по исходным числам $d = (x, y)$.

Сами числа представляются такими векторами очень просто:

$$a = (1, 0),\ \text{так как}\ a = 1 \times a + 0 \times b,$$
$$b = (0, 1),\ \text{так как}\ b = 0 \times a + 1 \times b.$$

4. Для нахождения наибольшего общего делителя и **одновременно** вектора (x, y) применим схему **классического** алгоритма Евклида и **параллельно** будем выполнять соответствующие действия с векторами разложений (покомпонентно).

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \tag{3}$$

3. Равенство (3) можно записать в векторной форме, т. е. наибольший общий делитель можно представить вектором (упорядоченным) набором коэффициентов разложения по исходным числам $d = (x, y)$.

Сами числа представляются такими векторами очень просто:

$$a = (1, 0), \text{ так как } a = 1 \times a + 0 \times b,$$
$$b = (0, 1), \text{ так как } b = 0 \times a + 1 \times b.$$

4. Для нахождения наибольшего общего делителя и **одновременно** вектора (x, y) применим схему **классического** алгоритма Евклида и **параллельно** будем выполнять соответствующие действия с векторами разложений (покомпонентно).
5. **Основная идея**. Обозначим вектора разложения (3) для чисел a и b как (x_a, y_a) и (x_b, y_b).

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \tag{3}$$

3. Равенство (3) можно записать в векторной форме, т. е. наибольший общий делитель можно представить вектором (упорядоченным) набором коэффициентов разложения по исходным числам $d = (x, y)$.

Сами числа представляются такими векторами очень просто:

$$a = (1, 0), \text{ так как } a = 1 \times a + 0 \times b,$$

$$b = (0, 1), \text{ так как } b = 0 \times a + 1 \times b.$$

4. Для нахождения наибольшего общего делителя и **одновременно** вектора (x, y) применим схему **классического** алгоритма Евклида и **параллельно** будем выполнять соответствующие действия с векторами разложений (покомпонентно).
5. **Основная идея**. Обозначим вектора разложения (3) для чисел a и b как (x_a, y_a) и (x_b, y_b).

Основной шаг алгоритма Евклида $a = bq + r$, тогда формула пересчета для вектора остатка r:

$$r = a - bq, \; (x_r, y_r) = (x_a, y_a) - q(x_b, y_b) \tag{4}$$

Обобщенный алгоритм Евклида

Задача: решить диофантово уравнение:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c, x, y \in Z. \tag{1}$$

Если известно x_0, y_0 — частное решение (1), легко выписать его общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t, \; y = y_0 + \frac{a}{d}t, \text{ где } t \in Z, d = D(a, b). \tag{2}$$

1. Для нахождения x_0, y_0 используем обобщенный алгоритм Евклида.
2. Обобщенный алгоритм Евклида позволяет найти **линейное представление** наибольшего общего делителя двух **натуральных** чисел:

$$d = D(a, b) = ax + by. \tag{3}$$

3. Равенство (3) можно записать в векторной форме, т. е. наибольший общий делитель можно представить вектором (упорядоченным) набором коэффициентов разложения по исходным числам $d = (x, y)$.

Сами числа представляются такими векторами очень просто:

$$a = (1, 0), \text{ так как } a = 1 \times a + 0 \times b,$$
$$b = (0, 1), \text{ так как } b = 0 \times a + 1 \times b.$$

4. Для нахождения наибольшего общего делителя и **одновременно** вектора (x, y) применим схему **классического** алгоритма Евклида и **параллельно** будем выполнять соответствующие действия с векторами разложений (покомпонентно).
5. **Основная идея**. Обозначим вектора разложения (3) для чисел a и b как (x_a, y_a) и (x_b, y_b).

Основной шаг алгоритма Евклида $a = bq + r$, тогда формула пересчета для вектора остатка r:

$$r = a - bq, \; (x_r, y_r) = (x_a, y_a) - q(x_b, y_b) \tag{4}$$

Если $a < b$, то после первого шага алгоритма a и b поменяются местами.

Диофантовы уравнения. Пример 1

Диофантовы уравнения. Пример 1

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1. Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

Диофантовы уравнения. Пример 1

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1. Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

2. На основании (5) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 1):

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1. Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

2. На основании (5) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 1):

Таблица 1

	5529	2375	779	38	19	0
q_i			2	3	20	2
x	1	0	1	-3	61	-125
y	0	1	-2	7	-142	295

Диофантовы уравнения. Пример 1

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1. Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

2. На основании (5) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 1):

Таблица 1

	5529	2375	779	38	19	0
q_i			2	3	20	2
x	1	0	1	-3	61	-125
y	0	1	-2	7	-142	295

3. Пример получения новых значений компонент наборов (x_a, y_a) и (x_b, y_b) показан в третьей и четвертой строках таблицы.

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1. Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

2. На основании (5) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 1):

Таблица 1

	5529	2375	779	38	19	0
q_i			2	3	20	2
x	1	0	1	−3	61	−125
y	0	1	−2	7	−142	295

3. Пример получения новых значений компонент наборов (x_a, y_a) и (x_b, y_b) показан в третьей и четвертой строках таблицы.

4. Из числа, расположенного в клетке $k-2$ (зеленого цвета) вычитают число в клетке $k-1$ (синего цвета), помноженное на число, стоящее справа от него во второй строке (оранжевого цвета), результат записывают в клетку k соответствующей строки.

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1 Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

2 На основании (5) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 1):

Таблица 1

	5529	2375	779	38	19	0
q_i			2	3	20	2
x	1	0	1	−3	61	−125
y	0	1	−2	7	−142	295

3 Пример получения новых значений компонент наборов (x_a, y_a) и (x_b, y_b) показан в третьей и четвертой строках таблицы.

4 Из числа, расположенного в клетке $k-2$ (зеленого цвета) вычитают число в клетке $k-1$ (синего цвета), помноженное на число, стоящее справа от него во второй строке (оранжевого цвета), результат записывают в клетку k соответствующей строки.

5 Последний ненулевой остаток (фиолетового цвета) и есть наибольший общий делитель $(d = 19)$, а коэффициенты $(x = 61, y = -142)$, стоящие в этом столбце — искомые частные решения (x_0, y_0):

$5529 \times 61 + 2375 \times (-142) = 19,$

$5529 \times 122 - 2375 \times (284) = 38,$ получаем нужную правую часть и расставляем знаки

$x_0 = 122, y_0 = 284.$

Задача: решить диофантово уравнение $5529x - 2375y = 38$.

1. Запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя натуральных **(без учета знаков)** чисел 5529 и 2375:

$$\begin{cases} 5529 & = & 2375 \times 2 + 779, \\ 2375 & = & 779 \times 3 + 38, \\ 779 & = & 38 \times 20 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{5}$$

2. На основании (5) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 1):

Таблица 1

	5529	2375	779	38	19	0
q_i			2	3	20	2
x	1	0	1	-3	61	-125
y	0	1	-2	7	-142	295

3. Пример получения новых значений компонент наборов (x_a, y_a) и (x_b, y_b) показан в третьей и четвертой строках таблицы.

4. Из числа, расположенного в клетке $k-2$ (зеленого цвета) вычитают число в клетке $k-1$ (синего цвета), помноженное на число, стоящее справа от него во второй строке (оранжевого цвета), результат записывают в клетку k соответствующей строки.

5. Последний ненулевой остаток (фиолетового цвета) и есть наибольший общий делитель $(d = 19)$, а коэффициенты $(x = 61, y = -142)$, стоящие в этом столбце — искомые частные решения (x_0, y_0):

$5529 \times 61 + 2375 \times (-142) = 19,$

$5529 \times 122 - 2375 \times (284) = 38,$ получаем нужную правую часть и расставляем знаки

$x_0 = 122, y_0 = 284.$

6. Согласно (2) запишем общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t = 122 - \frac{-2375}{19}t = 122 + 125t, \;\; y = y_0 + \frac{a}{d}t = 284 + \frac{5529}{19}t = 284 + 291t.$$

Диофантовы уравнения. Пример 2

Диофантовы уравнения. Пример 2

Задача: решить диофантово уравнение $3427x + 6256y = -161$.

Задача: решить диофантово уравнение $3427x + 6256y = -161$.

1. Аналогично предыдущему примеру запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 3427 и 6256:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6256 & = & 3427 \times 1 + 2829, \\ 3427 & = & 2829 \times 1 + 598, \\ 2829 & = & 598 \times 4 + 437, \\ 598 & = & 437 \times 1 + 161, \\ 437 & = & 161 \times 2 + 115, \\ 161 & = & 115 \times 1 + 46, \\ 115 & = & 46 \times 2 + 23, \\ 46 & = & 23 \times 2 + 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Диофантовы уравнения. Пример 2

Задача: решить диофантово уравнение $3427x + 6256y = -161$.

1. Аналогично предыдущему примеру запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 3427 и 6256:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6256 & = & 3427 \times 1 + 2829, \\ 3427 & = & 2829 \times 1 + 598, \\ 2829 & = & 598 \times 4 + 437, \\ 598 & = & 437 \times 1 + 161, \\ 437 & = & 161 \times 2 + 115, \\ 161 & = & 115 \times 1 + 46, \\ 115 & = & 46 \times 2 + 23, \\ 46 & = & 23 \times 2 + 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

2. На основании (6) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 2):

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ 1886

Задача: решить диофантово уравнение $3427x + 6256y = -161$.

1. Аналогично предыдущему примеру запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 3427 и 6256:

$$\begin{cases} 6256 & = & 3427 \times 1 + 2829, \\ 3427 & = & 2829 \times 1 + 598, \\ 2829 & = & 598 \times 4 + 437, \\ 598 & = & 437 \times 1 + 161, \\ 437 & = & 161 \times 2 + 115, \\ 161 & = & 115 \times 1 + 46, \\ 115 & = & 46 \times 2 + 23, \\ 46 & = & 23 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{6}$$

2. На основании (6) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 2):

Таблица 2

	6256	3427	2829	598	437	161	115	46	23	0
q_i			1	1	4	1	2	1	2	2
x	1	0	1	-1	5	-6	17	-23	63	-149
y	0	1	-1	2	-9	11	-31	42	-115	273

3. Последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель ($d = 23$), а коэффициенты ($x = 63$, $y = -115$), стоящие в этом столбце — искомые частные решения (x_0, y_0):

$3427 \times (-115) + 6256 \times 63 = 23,$

$3427 \times 805 + 6256 \times (-441) = -161$, получаем нужную правую часть и расставляем знаки

$x_0 = 805,\ y_0 = -441.$

Диофантовы уравнения. Пример 2

Задача: решить диофантово уравнение $3427x + 6256y = -161$.

1. Аналогично предыдущему примеру запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 3427 и 6256:

$$\begin{cases} 6256 & = & 3427 \times 1 + 2829, \\ 3427 & = & 2829 \times 1 + 598, \\ 2829 & = & 598 \times 4 + 437, \\ 598 & = & 437 \times 1 + 161, \\ 437 & = & 161 \times 2 + 115, \\ 161 & = & 115 \times 1 + 46, \\ 115 & = & 46 \times 2 + 23, \\ 46 & = & 23 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{6}$$

2. На основании (6) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 2):

Таблица 2

	6256	3427	2829	598	437	161	115	46	23	0
q_i			1	1	4	1	2	1	2	2
x	1	0	1	−1	5	−6	17	−23	63	−149
y	0	1	−1	2	−9	11	−31	42	−115	273

3. Последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель ($d = 23$), а коэффициенты ($x = 63$, $y = -115$), стоящие в этом столбце — искомые частные решения (x_0, y_0):

$$3427 \times (-115) + 6256 \times 63 = 23,$$

$$3427 \times 805 + 6256 \times (-441) = -161,$$ получаем нужную правую часть и расставляем знаки

$$x_0 = 805,\ y_0 = -441.$$

4. Согласно (2) запишем общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t = 805 - \frac{3427}{23}t = 805 - 272\,t,\quad y = y_0 + \frac{a}{d}t = -441 + \frac{6256}{23}t = -441 + 149\,t.$$

Диофантовы уравнения. Пример 3

Диофантовы уравнения. Пример 3

Задача: решить диофантово уравнение $2071x - 2318y = -95$.

Задача: решить диофантово уравнение $2071x - 2318y = -95$.

1. Аналогично предыдущим примерам запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 2071 и 2318:

$$\begin{cases} 2071 & = & 2318 \times 0 + 2071, \\ 2318 & = & 2071 \times 1 + 247, \\ 2071 & = & 247 \times 8 + 95, \\ 247 & = & 95 \times 2 + 57, \\ 95 & = & 57 \times 1 + 38, \\ 57 & = & 38 \times 1 + 19, \\ 38 & = & 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{7}$$

Диофантовы уравнения. Пример 3

Задача: решить диофантово уравнение $2071x - 2318y = -95$.

1. Аналогично предыдущим примерам запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 2071 и 2318:

$$\begin{cases} 2071 = 2318 \times 0 + 2071, \\ 2318 = 2071 \times 1 + 247, \\ 2071 = 247 \times 8 + 95, \\ 247 = 95 \times 2 + 57, \\ 95 = 57 \times 1 + 38, \\ 57 = 38 \times 1 + 19, \\ 38 = 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{7}$$

После первого шага алгоритма 2071 и 2318 поменялись местами.

Диофантовы уравнения. Пример 3

Задача: решить диофантово уравнение $2071x - 2318y = -95$.

1. Аналогично предыдущим примерам запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 2071 и 2318:

$$\begin{cases} 2071 = 2318 \times 0 + 2071, \\ 2318 = 2071 \times 1 + 247, \\ 2071 = 247 \times 8 + 95, \\ 247 = 95 \times 2 + 57, \\ 95 = 57 \times 1 + 38, \\ 57 = 38 \times 1 + 19, \\ 38 = 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{7}$$

После первого шага алгоритма 2071 и 2318 поменялись местами.

2. На основании (7) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 3):

Таблица 3

	2071	2318	2071	247	95	57	38	19	0
q_i			0	1	8	2	1	1	2
x	1	0	1	−1	9	−19	28	−47	122
y	0	1	0	1	−8	17	−25	42	−109

Задача: решить диофантово уравнение $2071x - 2318y = -95$.

1. Аналогично предыдущим примерам запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 2071 и 2318:

$$\begin{cases} 2071 &= 2318 \times 0 + 2071, \\ 2318 &= 2071 \times 1 + 247, \\ 2071 &= 247 \times 8 + 95, \\ 247 &= 95 \times 2 + 57, \\ 95 &= 57 \times 1 + 38, \\ 57 &= 38 \times 1 + 19, \\ 38 &= 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{7}$$

После первого шага алгоритма 2071 и 2318 поменялись местами.

2. На основании (7) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 3):

Таблица 3

	2071	2318	2071	247	95	57	38	19	0
q_i			0	1	8	2	1	1	2
x	1	0	1	−1	9	−19	28	−47	122
y	0	1	0	1	−8	17	−25	42	−109

3. Последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель ($d = 19$), а коэффициенты ($x = -47$, $y = 42$), стоящие в этом столбце — искомые частные решения (x_0, y_0):

$2071 \times (-47) + 2318 \times 42 = 19,$

$2071 \times 235 - 2318 \times 210 = -95,$ получаем нужную правую часть и расставляем знаки

$x_0 = 235, y_0 = 210.$

Задача: решить диофантово уравнение $2071x - 2318y = -95$.

1. Аналогично предыдущим примерам запишем классическую схему Евклида для определения наибольшего общего делителя чисел 2071 и 2318:

$$\begin{cases} 2071 = 2318 \times 0 + 2071, \\ 2318 = 2071 \times 1 + 247, \\ 2071 = 247 \times 8 + 95, \\ 247 = 95 \times 2 + 57, \\ 95 = 57 \times 1 + 38, \\ 57 = 38 \times 1 + 19, \\ 38 = 19 \times 2 + 0. \end{cases} \tag{7}$$

После первого шага алгоритма 2071 и 2318 поменялись местами.

2. На основании (7) запишем протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 3):

Таблица 3

	2071	2318	2071	247	95	57	38	19	0
q_i			0	1	8	2	1	1	2
x	1	0	1	−1	9	−19	28	−47	122
y	0	1	0	1	−8	17	−25	42	−109

3. Последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель ($d = 19$), а коэффициенты ($x = -47$, $y = 42$), стоящие в этом столбце — искомые частные решения (x_0, y_0):

$$2071 \times (-47) + 2318 \times 42 = 19,$$

$2071 \times 235 - 2318 \times 210 = -95$, получаем нужную правую часть и расставляем знаки

$$x_0 = 235, \; y_0 = 210.$$

4. Согласно (2) запишем общее решение:

$$x = x_0 - \frac{b}{d}t = 235 - \frac{-2318}{19}t = 235 + 122t, \;\; y = y_0 + \frac{a}{d}t = 210 + \frac{2071}{19}t = 210 + 109t.$$

Задача: Решить диофантово уравнение.

Задачи для самостоятельного решения

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t\,,\;\; y = -187 + 244\,t$

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t\,,\;\; y = -187 + 244\,t$

2. $1534x + 1547y = 26$

Задачи для самостоятельного решения

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t,\ \ y = -187 + 244\,t$

2. $1534x + 1547y = 26$

Ответ: $x = 117 - 119\,t,\ \ y = -116 + 118\,t$

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t,\;\; y = -187 + 244\,t$

2. $1534x + 1547y = 26$

Ответ: $x = 117 - 119\,t,\;\; y = -116 + 118\,t$

3. $2461x - 2438y = -115$

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t\,,\;\; y = -187 + 244\,t$

2. $1534x + 1547y = 26$

Ответ: $x = 117 - 119\,t\,,\;\; y = -116 + 118\,t$

3. $2461x - 2438y = -115$

Ответ: $x = 101 + 106\,t\,,\;\; y = 102 + 107\,t$

Задачи для самостоятельного решения

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t, \;\; y = -187 + 244\,t$

2. $1534x + 1547y = 26$

Ответ: $x = 117 - 119\,t, \;\; y = -116 + 118\,t$

3. $2461x - 2438y = -115$

Ответ: $x = 101 + 106\,t, \;\; y = 102 + 107\,t$

4. $2977x + 3497y = -26$

Задача: Решить диофантово уравнение.

1. $4636x + 4389y = -171$

Ответ: $x = 177 - 231\,t,\ \ y = -187 + 244\,t$

2. $1534x + 1547y = 26$

Ответ: $x = 117 - 119\,t,\ \ y = -116 + 118\,t$

3. $2461x - 2438y = -115$

Ответ: $x = 101 + 106\,t,\ \ y = 102 + 107\,t$

4. $2977x + 3497y = -26$

Ответ: $x = 148 - 269\,t,\ \ y = -126 + 229\,t$

Линейные сравнения. Пример 1

Задача: вычислить $\frac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

Линейные сравнения. Пример 1

Задача: вычислить $\dfrac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

1. Найдем сначала $x = 72^{-1}$ в Z_{97}. Для этого решим сравнение $72x \equiv 1 \bmod 97$.

Линейные сравнения. Пример 1

Задача: вычислить $\frac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

1. Найдем сначала $x = 72^{-1}$ в Z_{97}. Для этого решим сравнение $72x \equiv 1 \mathrm{mod}\ 97$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $72x - 97y = 1$.

Линейные сравнения. Пример 1

Задача: вычислить $\dfrac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

1. Найдем сначала $x = 72^{-1}$ в Z_{97}. Для этого решим сравнение $72x \equiv 1 \bmod 97$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $72x - 97y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 4). При этом нас интересует только частное решение x_0.

Линейные сравнения. Пример 1

Задача: вычислить $\frac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

1. Найдем сначала $x = 72^{-1}$ в Z_{97}. Для этого решим сравнение $72x \equiv 1 \bmod 97$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $72x - 97y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 4). При этом нас интересует только частное решение x_0.

Таблица 4

	72	97	72	25	22	3	1
q_i			0	1	2	1	7
x	1	0	1	-1	3	-4	31

Задача: вычислить $\frac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

1. Найдем сначала $x = 72^{-1}$ в Z_{97}. Для этого решим сравнение $72x \equiv 1 \bmod 97$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $72x - 97y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 4). При этом нас интересует только частное решение x_0.

Таблица 4

	72	97	72	25	22	3	1
q_i			0	1	2	1	7
x	1	0	1	−1	3	−4	31

4. Получаем $x_0 = 31$.

Задача: вычислить $\frac{16}{72}$ в кольце вычетов по модулю 97.

1. Найдем сначала $x = 72^{-1}$ в Z_{97}. Для этого решим сравнение $72x \equiv 1 \bmod 97$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $72x - 97y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 4). При этом нас интересует только частное решение x_0.

Таблица 4

	72	97	72	25	22	3	1
q_i			0	1	2	1	7
x	1	0	1	-1	3	-4	31

4. Получаем $x_0 = 31$.
5. Окончательно:

$$\frac{16}{72} = 16 \times 72^{-1} = (16 \times 31) \bmod 97 = 11.$$

Линейные сравнения. Пример 2

Линейные сравнения. Пример 2

Задача: вычислить $\dfrac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

Линейные сравнения. Пример 2

Задача: вычислить $\dfrac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

1. Аналогично предыдущему примеру, найдем сначала $x = 71^{-1}$ в Z_{82}. Для этого решим сравнение $71x \equiv 1 \mod 82$.

Линейные сравнения. Пример 2

Задача: вычислить $\frac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

1. Аналогично предыдущему примеру, найдем сначала $x = 71^{-1}$ в Z_{82}. Для этого решим сравнение $71x \equiv 1 \bmod 82$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $71x - 82y = 1$.

Линейные сравнения. Пример 2

Задача: вычислить $\frac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

1. Аналогично предыдущему примеру, найдем сначала $x = 71^{-1}$ в Z_{82}. Для этого решим сравнение $71x \equiv 1 \bmod 82$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $71x - 82y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 5). При этом, как и ранее, нас интересует только частное решение x_0.

Линейные сравнения. Пример 2

Задача: вычислить $\frac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

1. Аналогично предыдущему примеру, найдем сначала $x = 71^{-1}$ в Z_{82}. Для этого решим сравнение $71x \equiv 1 \bmod 82$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $71x - 82y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 5). При этом, как и ранее, нас интересует только частное решение x_0.

Таблица 5

	71	82	71	11	5	1
q_i			0	1	6	2
x	1	0	1	-1	7	-15

Линейные сравнения. Пример 2

Задача: вычислить $\frac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

1. Аналогично предыдущему примеру, найдем сначала $x = 71^{-1}$ в Z_{82}. Для этого решим сравнение $71x \equiv 1 \bmod 82$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $71x - 82y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 5). При этом, как и ранее, нас интересует только частное решение x_0.

Таблица 5

	71	82	71	11	5	1
q_i			0	1	6	2
x	1	0	1	-1	7	-15

4. Получаем $x_0 = -15 = 67 \mod 82$.

Задача: вычислить $\frac{32}{71}$ в кольце вычетов по модулю 82.

1. Аналогично предыдущему примеру, найдем сначала $x = 71^{-1}$ в Z_{82}. Для этого решим сравнение $71x \equiv 1 \bmod 82$.
2. Решение этого сравнения эквивалентно решению диофантова уравнения $71x - 82y = 1$.
3. Запишем для него протокол обобщенного алгоритма Евклида (таблица 5). При этом, как и ранее, нас интересует только частное решение x_0.

Таблица 5

	71	82	71	11	5	1
q_i			0	1	6	2
x	1	0	1	-1	7	-15

4. Получаем $x_0 = -15 = 67 \mod 82$.
5. Окончательно:

$$\frac{32}{71} = 32 \times 71^{-1} = (32 \times 67) \bmod 82 = 12.$$

Задача: вычислить:

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

2. $\dfrac{17}{33}$ в кольце вычетов по модулю 46

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

2. $\dfrac{17}{33}$ в кольце вычетов по модулю 46

Ответ: 27

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

2. $\dfrac{17}{33}$ в кольце вычетов по модулю 46

Ответ: 27

3. $\dfrac{6}{85}$ в кольце вычетов по модулю 96

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

2. $\dfrac{17}{33}$ в кольце вычетов по модулю 46

Ответ: 27

3. $\dfrac{6}{85}$ в кольце вычетов по модулю 96

Ответ: 78

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

2. $\dfrac{17}{33}$ в кольце вычетов по модулю 46

Ответ: 27

3. $\dfrac{6}{85}$ в кольце вычетов по модулю 96

Ответ: 78

4. $\dfrac{14}{27}$ в кольце вычетов по модулю 92

Задачи для самостоятельного решения

Задача: вычислить:

1. $\dfrac{3}{37}$ в кольце вычетов по модулю 87

Ответ: 33

2. $\dfrac{17}{33}$ в кольце вычетов по модулю 46

Ответ: 27

3. $\dfrac{6}{85}$ в кольце вычетов по модулю 96

Ответ: 78

4. $\dfrac{14}{27}$ в кольце вычетов по модулю 92

Ответ: 38

Литература

Литература

1. *С. В. Рыбин.* Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.

Литература

1. *С. В. Рыбин.* Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.
2. *С. Н. Поздняков, С. В. Рыбин.* Дискретная математика. — Издательский центр «Академия», 2008.