Контрольная работа №2. II

Группа 1335

Максимов ДЭ.

№1

$$\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ $\quad \sin x\,dx = dt$

$$\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + c = \frac{1}{\cos x} + C.$$

№2.

$\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

$u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$$

выполним замену:

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int\frac{t^2\,dt}{1+t^2} = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int\frac{(t^2+1-1)\,dt}{1+t^2} =$$

$$x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int dt + \int\frac{dt}{1+t^2} = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - t +$$

$$+ \operatorname{arctg} t + C = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

№3

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$$ Разделим числитель на знаменатель

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}$$

Разложим на простейшие

$$\frac{7x-6}{x^2-3x+2} = \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{x^2-3x+2} =$$

$$= \frac{x(A+B) -2A-B}{x^2-3x+2}$$

$$\begin{cases} A+B=7 \\ -2A-B=6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=-1 \\ B=7 \end{matrix}$$

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2} = x+3-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{x-2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x+3-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{x-2}\right)dx =$$

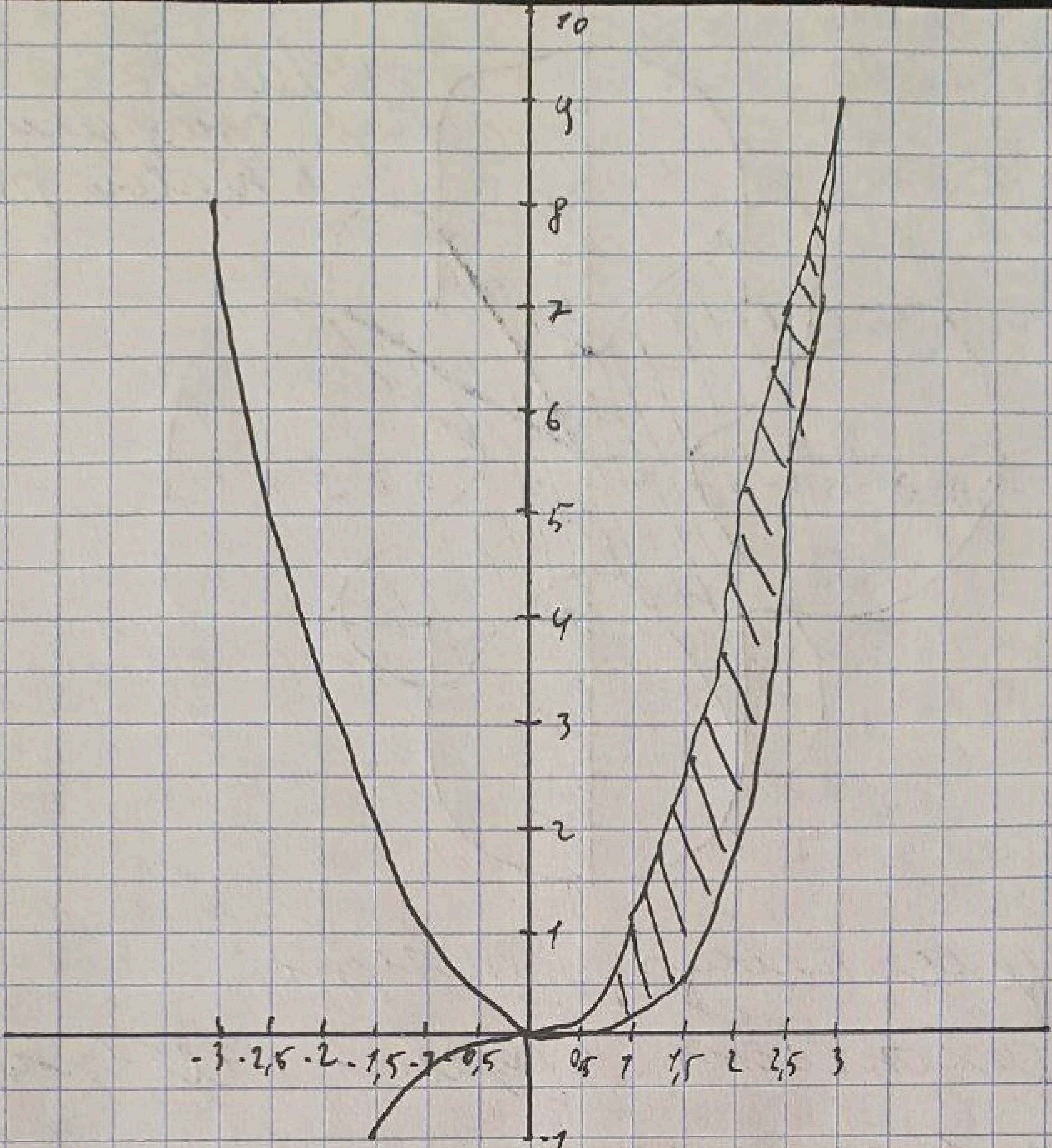
$$= 7\ln(3) - 15\ln(2) + \frac{13}{8}$$

№4

$$y=x^2;\ y=\frac{x^3}{3}$$

Построим фигуру и найдем

точки пересечения графиков ф-ий



$x^2 = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^2\left(1-\frac{x}{3}\right)=0 \quad x=0 \quad x=3$

площадь найдём как площадь криволин. трапеции с исп. опр интеграла

$S=\int_0^3\left(x-\frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}\Big)\Big|_0^3 = 9-\frac{81}{12} = 9-\frac{27}{4} = \frac{9}{4}$

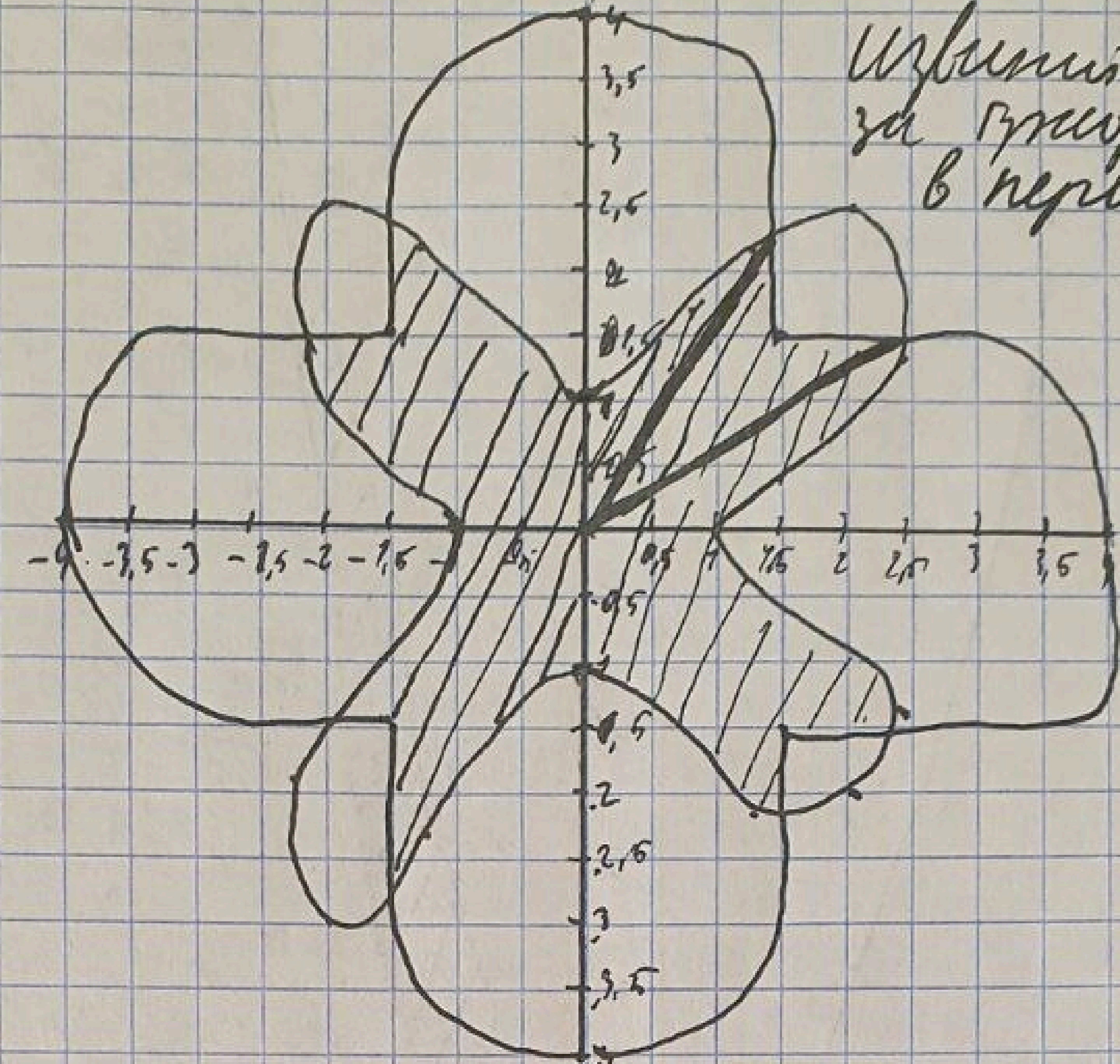
№5

$\rho = 3+\cos 4\varphi \quad \rho = 2-\cos 4\varphi$

$S=\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi$

II

Извините за графики... в первой раз!



Найдем площадь фигуры, расположенной в первой четверти, а результат умножим на четыре.

Найдем точки пересечения графиков функции.

$3+\cos 4\varphi = 2-\cos 4\varphi \Rightarrow 2\cos 4\varphi = -1$

$\cos 4\varphi = -\frac{1}{2}$

$4\varphi = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}$

для первой четверти:

$\varphi = \frac{\pi}{6}, \ \varphi = \frac{\pi}{3}$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2-\cos 4\varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(3+\cos 4\varphi)^2 d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos 4\varphi)^2 d\varphi = \frac{37\pi}{24} + \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$S = 4\cdot S_1 = \frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$$

№6.

Вычислить длину дуги кривой

$y = \ln x$ при $\sqrt{3} < x < \sqrt{8}$

Длину дуги найдем по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$$

выполним замену

$1+x^2 = t^2 \Rightarrow 2x\,dx = 2t\,dt \quad x^2 = t^2-1$

пределы интегрирования

$x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$

$x = \sqrt{8} \Rightarrow t = 3$

$$\int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \frac{(t^2-1+1)\,dt}{t^2-1} = \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\cdot \ln \frac{t-1}{t+1}\right)\Big|_2^3 = 3 + \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{1}{3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{3}{2}$$

P.S. Извините за ужасный почерк.

Студент, Максимов Юлий Евгеньевич

Факультета компьютерных технологий и
информатики.

Номер группы: 1335

Номер студ. билета: 133517