

Тема: Алгоритм Дейкстры

Сергей Витальевич Рыбин
svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

28 июня 2023 г.



СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

1 **Постановка задачи.** Имеется ориентированный или неориентированный взвешенный граф, веса которого задаются **неотрицательными** вещественными числами.

- 1 **Постановка задачи.** Имеется ориентированный или неориентированный взвешенный граф, веса которого задаются **неотрицательными** вещественными числами.
- 2 Требуется найти длины всех кратчайших путей от вершины S (источника) до остальных вершин.

- 1 **Постановка задачи.** Имеется ориентированный или неориентированный взвешенный граф, веса которого задаются **неотрицательными** вещественными числами.
- 2 Требуется найти длины всех кратчайших путей от вершины S (источника) до остальных вершин.
- 3 **Основная идея алгоритма.** На каждом шаге отыскивается вершина, кратчайшее расстояние до которой уже найдено. Например, на первом шаге это будет вершина — конец наименьшего ребра, инцидентного источнику.

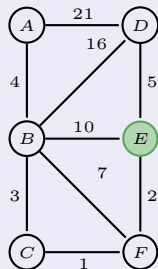
- 1 **Постановка задачи.** Имеется ориентированный или неориентированный взвешенный граф, веса которого задаются **неотрицательными** вещественными числами.
- 2 Требуется найти длины всех кратчайших путей от вершины S (источника) до остальных вершин.
- 3 **Основная идея алгоритма.** На каждом шаге отыскивается вершина, кратчайшее расстояние до которой уже найдено. Например, на первом шаге это будет вершина — конец наименьшего ребра, инцидентного источнику.
- 4 Пометки остальных вершин модифицируются через эту вершину, после чего ее можно не рассматривать.

Алгоритм 2.0. Дейкстры

```
// Инициализация
for  $i \leftarrow 1, n$  do
     $d(i) \leftarrow w(s, i)$  //  $s$  — вершина источник
     $G(i) \leftarrow s$ 
end for
//  $W$  — множество вершин, кратчайшее расстояние до которых уже найдено
 $W \leftarrow \{s\}$ 
// Основной алгоритм
while  $V \setminus W \neq \emptyset$  do // есть необработанные вершины
     $t \leftarrow u \mid d(u) = \min \{d(v), v \in V \setminus W\}$ 
    //  $t$  — необработанная вершина с минимальной пометкой
     $W \leftarrow W \cup \{t\}$  // переносим найденную вершину  $t$  в множество обработанных
    // модифицируем пометки необработанных вершин, смежных с  $t$ , через вершину  $t$ 
    for  $u \in V \setminus W \mid (t, u) \in E$  do
        if  $d(t) + w(t, u) < d(u)$  then
             $d(u) \leftarrow d(t) + w(t, u)$ 
             $G(u) \leftarrow t$ 
        end if
    end for
end while
end while
```

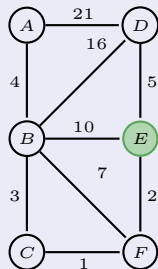
Пример. Кратчайшие расстояния

Пример. Кратчайшие расстояния



(a) Исходный граф

Пример. Кратчайшие расстояния

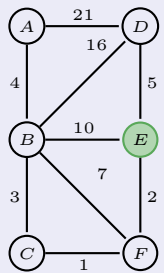


(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Пример. Кратчайшие расстояния



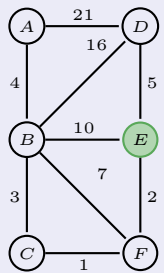
(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Номер шага m	A	B	C	D	F
----------------	---	---	---	---	---

Пример. Кратчайшие расстояния



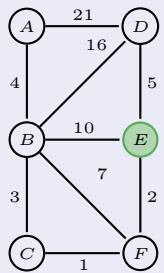
(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Номер шага m	A	B	C	D	F
1	∞	10/E	∞	5/E	2/E

Пример. Кратчайшие расстояния



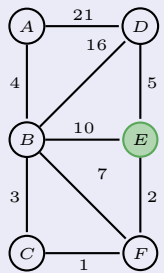
(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Номер шага m	A	B	C	D	F
1	∞	10/E	∞	5/E	2/E
2	∞	9/F	3/F	5/E	

Пример. Кратчайшие расстояния



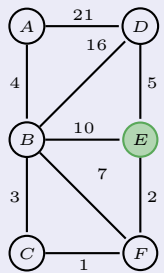
(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Номер шага m	A	B	C	D	F
1	∞	10/E	∞	5/E	2/E
2	∞	9/F	3/F	5/E	
3	∞	6/C		5/E	

Пример. Кратчайшие расстояния



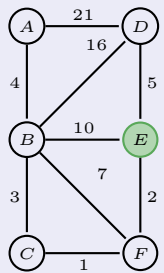
(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Номер шага m	A	B	C	D	F
1	∞	10/E	∞	5/E	2/E
2	∞	9/F	3/F	5/E	
3	∞	6/C		5/E	
4	26/D	6/C			

Пример. Кратчайшие расстояния



(a) Исходный граф

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	∞	21	∞	∞
B	4	0	3	16	10	7
C	∞	3	0	∞	∞	1
D	21	16	∞	0	5	∞
E	∞	10	∞	5	0	2
F	∞	7	1	∞	2	0

(b) Таблица весов графа

Номер шага m	A	B	C	D	F
1	∞	10/E	∞	5/E	2/E
2	∞	9/F	3/F	5/E	
3	∞	6/C		5/E	
4	26/D	6/C			
5	10/B				

(c) Протокол работы алгоритма

Пример. Кратчайшие пути

Пример. Кратчайшие пути

- 1 Числовые пометки обработанных вершин показывают кратчайшие расстояния до них, а символьные — предшествующие вершины в кратчайших путях.

Пример. Кратчайшие пути

1 Числовые пометки обработанных вершин показывают кратчайшие расстояния до них, а символьные — предшествующие вершины в кратчайших путях.

Таблица 1

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
10/ <i>B</i>	6/ <i>C</i>	3/ <i>F</i>	5/ <i>E</i>	2/ <i>E</i>

Пример. Кратчайшие пути

- 1 Числовые пометки обработанных вершин показывают кратчайшие расстояния до них, а символьные — предшествующие вершины в кратчайших путях.

Таблица 1

A	B	C	D	F
$10/B$	$6/C$	$3/F$	$5/E$	$2/E$

- 2 Используя символьные пометки (таблица 1), мы можем получить и сами кратчайшие маршруты.

Пример. Кратчайшие пути

1 Числовые пометки обработанных вершин показывают кратчайшие расстояния до них, а символьные — предшествующие вершины в кратчайших путях.

Таблица 1

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
10/ <i>B</i>	6/ <i>C</i>	3/ <i>F</i>	5/ <i>E</i>	2/ <i>E</i>

- 2 Используя символьные пометки (таблица 1), мы можем получить и сами кратчайшие маршруты.
- 3 Начиная от данной вершины нужно каждый раз брать символьную пометку от текущей вершины, пока не придем в стартовую вершину.

Пример. Кратчайшие пути

1 Числовые пометки обработанных вершин показывают кратчайшие расстояния до них, а символьные — предшествующие вершины в кратчайших путях.

Таблица 1

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
10/ <i>B</i>	6/ <i>C</i>	3/ <i>F</i>	5/ <i>E</i>	2/ <i>E</i>

- 2 Используя символьные пометки (таблица 1), мы можем получить и сами кратчайшие маршруты.
- 3 Начиная от данной вершины нужно каждый раз брать символьную пометку от текущей вершины, пока не придем в стартовую вершину.

Получаем искомый кратчайший путь, но записанный в обратном порядке:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \\ B &\rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \\ C &\rightarrow F \rightarrow E \\ D &\rightarrow E \\ F &\rightarrow E \end{aligned}$$