Тема: Исследование булевой функции

Сергей Витальевич Рыбин

svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

19 июня 2023 г.

Монотонные функции. Определения

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.
2. Будем считать, что

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{ если } \alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n, \ \alpha_i, \beta_i, \in \{0, 1\}.$$

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.
2. Будем считать, что

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ если } \alpha_1 \leqslant \beta_1, \dots, \alpha_n \leqslant \beta_n, \ \alpha_i, \beta_i, \in \{0, 1\}.$$

Например, $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \preceq (1, 0, 1, 1)$. В то же время неверно, что $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 0)$.

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.
2. Будем считать, что
$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ если } \alpha_1 \leqslant \beta_1, \dots, \alpha_n \leqslant \beta_n, \ \alpha_i, \beta_i, \in \{0, 1\}.$$

Например, $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \preceq (1, 0, 1, 1)$. В то же время неверно, что $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 0)$.

3. Булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ называют **монотонной**, если для любых двух наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из условия $\alpha \preceq \beta$ следует, что $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.
2. Будем считать, что
$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n),\ \text{если}\ \alpha_1 \leqslant \beta_1, \dots, \alpha_n \leqslant \beta_n,\ \alpha_i, \beta_i, \in \{0, 1\}.$$

Например, $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \preceq (1, 0, 1, 1)$. В то же время неверно, что $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 0)$.

3. Булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ называют **монотонной**, если для любых двух наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из условия $\alpha \preceq \beta$ следует, что $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Примеры

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.
2. Будем считать, что
$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ если } \alpha_1 \leqslant \beta_1, \dots, \alpha_n \leqslant \beta_n, \ \alpha_i, \beta_i, \in \{0, 1\}.$$

Например, $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \preceq (1, 0, 1, 1)$. В то же время неверно, что $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 0)$.

3. Булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ называют **монотонной**, если для любых двух наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из условия $\alpha \preceq \beta$ следует, что $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Примеры

1. **Монотонные функции**: $1, \ 0, \ xy, \ x \vee y \in M$.

Монотонные функции. Определения

1. Введем отношение частичного нестрогого порядка на множестве булевых наборов длиной n.
2. Будем считать, что

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preceq \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{ если } \alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n, \ \alpha_i, \beta_i, \in \{0, 1\}.$$

Например, $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \preceq (1, 0, 1, 1)$. В то же время неверно, что $(1, 0, 0, 1) \preceq (1, 0, 1, 0)$.

3. Булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ называют **монотонной**, если для любых двух наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из условия $\alpha \preceq \beta$ следует, что $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Примеры

1. **Монотонные функции**: $1,\ 0,\ xy,\ x \vee y \in M$.
2. **Немонотонные функции**: $\overline{x},\ x \to y,\ x \oplus y$.

Монотонные функции. Проверка монотонности

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 .$$

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 .$$
4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 .$$

4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 .$$

4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

5. Составим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества булевых наборов длиной 3 (рисунок 1).

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3.$$

4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

5. Составим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества булевых наборов длиной 3 (рисунок 1).

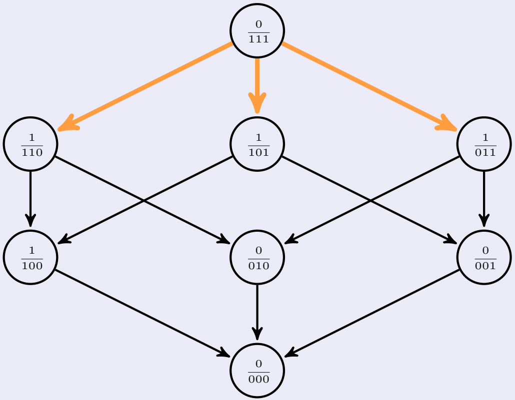

Рис. 1

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 .$$
4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

5. Составим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества булевых наборов длиной 3 (рисунок 1).
6. В вершинах этого графа проставим значения исследуемой функции согласно таблице 1 и соответствующие наборы.

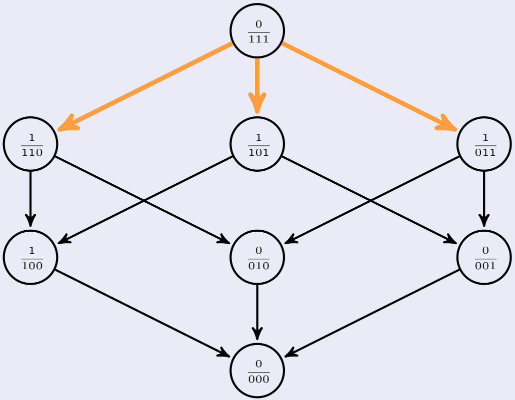

Рис. 1

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.

2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.

3. Проверим монотонность функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 .$$

4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

5. Составим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества булевых наборов длиной 3 (рисунок 1).

6. В вершинах этого графа проставим значения исследуемой функции согласно таблице 1 и соответствующие наборы.

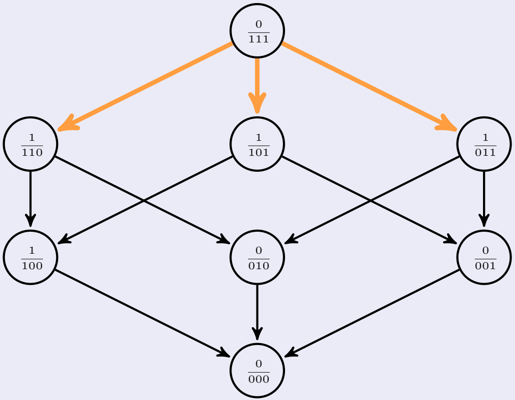

Рис. 1

7. Монотонность функции означает, что при движении по любому ориентированному пути в диаграмме Хассе значение функции не должно увеличиваться.

Монотонные функции. Проверка монотонности

1. Проверка монотонности булевой функции по определению достаточно трудоемка.
2. Используем для этого графическое представление упорядоченных множеств — **диаграмму Хассе**.
3. Проверим монотонность функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3.$$

4. Составим таблицу значений функции (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 x_3$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

5. Составим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества булевых наборов длиной 3 (рисунок 1).
6. В вершинах этого графа проставим значения исследуемой функции согласно таблице 1 и соответствующие наборы.

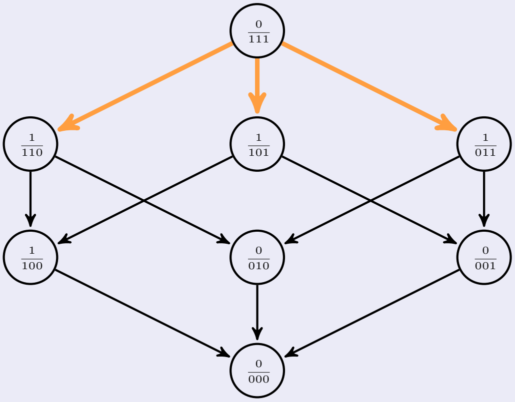

Рис. 1

7. Монотонность функции означает, что при движении по любому ориентированному пути в диаграмме Хассе значение функции не должно увеличиваться.
8. Это свойство нарушается при переходе от вершины $(1, 1, 1)$ к вершинам $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$. Соответствующие дуги в графе на рисунке 1 показаны линиями желтого цвета. Таким образом, функция f немонотонна.