Тема:
Комбинаторные задачи

Сергей Витальевич Рыбин

svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

21 января 2023 г.

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Простые комбинаторные задачи

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Пример 1

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Задача: определить количество четных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Простые комбинаторные задачи

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Задача: определить количество четных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 13. При этом в силу четности, в последнем разряде стоит 0. Имеем 12 разрядов для постановки 7 нулей.

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Задача: определить количество четных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 13. При этом в силу четности, в последнем разряде стоит 0. Имеем 12 разрядов для постановки 7 нулей.

Ответ: C_{12}^{7}.

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Задача: определить количество четных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 13. При этом в силу четности, в последнем разряде стоит 0. Имеем 12 разрядов для постановки 7 нулей.

Ответ: C_{12}^{7}.

Задачи для самостоятельного решения

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Задача: определить количество четных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 13. При этом в силу четности, в последнем разряде стоит 0. Имеем 12 разрядов для постановки 7 нулей.

Ответ: C_{12}^{7}.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить количество четных чисел, меньших 2^{22}, двоичная запись которых имеет 18 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Простые комбинаторные задачи

Пример 1

Задача: определить количество нечетных чисел, меньших 2^{15}, двоичная запись которых имеет 11 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 15. При этом в силу нечетности, в последнем разряде стоит 1. Имеем 14 разрядов для постановки 10 единиц.

Ответ: C_{14}^{10}.

Пример 2

Задача: определить количество четных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Решение: из условия задачи получаем, что число двоичных разрядов равно 13. При этом в силу четности, в последнем разряде стоит 0. Имеем 12 разрядов для постановки 7 нулей.

Ответ: C_{12}^{7}.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить количество четных чисел, меньших 2^{22}, двоичная запись которых имеет 18 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.
2. Определить количество нечетных чисел, меньших 2^{13}, двоичная запись которых имеет 8 нулей. Ответ записать в виде числа сочетаний.

Изменение исходного множества

Изменение исходного множества

Пример

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$

2. Объединим y_i, $i \in 1 : 35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$

2. Объединим y_i, $i \in 1:35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 35$).

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_1} \,|\, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_2} \,|\, \cdots\cdots \,|\, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_n}. \tag{1}$$

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$

2. Объединим y_i, $i \in 1 : 35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 35$).

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_1} | \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_2} | \cdots\cdots | \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_n}. \tag{1}$$

4. Разделителей между группами в (1) всего 34. Мест для их размещения всего 244 (после последней единицы не ставим). Очевидно, что есть взаимно однозначное соответствие между произвольным исходным сочетанием и взаиморасположением разделителей в (1).

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$

2. Объединим $y_i,\ i \in 1:35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, 35$).

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_1} \mid \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_2} \mid \cdots\cdots \mid \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_n}. \qquad (1)$$

4. Разделителей между группами в (1) всего 34. Мест для их размещения всего 244 (после последней единицы не ставим). Очевидно, что есть взаимно однозначное соответствие между произвольным исходным сочетанием и взаиморасположением разделителей в (1).

Ответ: C_{244}^{34}.

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \cdots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{35} = 245.$$

2. Объединим y_i, $i \in 1:35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, 35$).

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{y_1} | \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{y_2} | \cdots\cdots | \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{y_n}. \qquad (1)$$

4. Разделителей между группами в (1) всего 34. Мест для их размещения всего 244 (после последней единицы не ставим). Очевидно, что есть взаимно однозначное соответствие между произвольным исходным сочетанием и взаиморасположением разделителей в (1).

Ответ: C_{244}^{34}.

Задачи для самостоятельного решения

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$\begin{aligned}&(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,\\ &y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.\end{aligned}$$

2. Объединим y_i, $i \in 1 : 35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 35$).

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_1} \mid \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_2} \mid \cdots\cdots \mid \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_n}. \qquad (1)$$

4. Разделителей между группами в (1) всего 34. Мест для их размещения всего 244 (после последней единицы не ставим). Очевидно, что есть взаимно однозначное соответствие между произвольным исходным сочетанием и взаиморасположением разделителей в (1).

Ответ: C_{244}^{34}.

Задачи для самостоятельного решения

Пояснение: заменой $x \to y$ нужно добиться чтобы $y_i > 0$.

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:
$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$
2. Объединим y_i, $i \in 1:35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 35$).
$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_1} \,|\, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_2} \,|\, \cdots\cdots \,|\, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_n}. \qquad (1)$$
4. Разделителей между группами в (1) всего 34. Мест для их размещения всего 244 (после последней единицы не ставим). Очевидно, что есть взаимно однозначное соответствие между произвольным исходным сочетанием и взаиморасположением разделителей в (1).

Ответ: C_{244}^{34}.

Задачи для самостоятельного решения

Пояснение: заменой $x \to y$ нужно добиться чтобы $y_i > 0$.

1. Сколько существует решений уравнения $x_1 + \dots + x_{85} = 95$ в целых числах, где $x_i > -1$?

Пример

Задача: сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{35} = 105$$

в целых числах, где $x_i \geqslant -3$?

Решение.

1. сделаем замену переменной $y_i = x_i + 4$ и подставим в исходное уравнение. Имеем:

$$(y_1 - 4) + (y_2 - 4) + \dots + (y_{35} - 4) = 105, \quad y_i \geqslant 1,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{35} = 245.$$

2. Объединим y_i, $i \in 1:35$ в группы (по числу единиц в представлении каждого y_i), а между ними поставим разделители.
3. В силу проведенного преобразования между любыми двумя разделителями присутствует хотя бы один элемент ($y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 35$).

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_1} | \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_2} | \cdots\cdots | \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{y_n}. \tag{1}$$

4. Разделителей между группами в (1) всего 34. Мест для их размещения всего 244 (после последней единицы не ставим). Очевидно, что есть взаимно однозначное соответствие между произвольным исходным сочетанием и взаиморасположением разделителей в (1).

Ответ: C_{244}^{34}.

Задачи для самостоятельного решения

Пояснение: заменой $x \to y$ нужно добиться чтобы $y_i > 0$.

1. Сколько существует решений уравнения $x_1 + \dots + x_{85} = 95$ в целых числах, где $x_i > -1$?
2. Сколько существует решений уравнения $x_1 + \dots + x_{10} = 40$ в целых числах, где $x_i > 1$?

Литература

Литература

1. *С. В. Рыбин.* Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.

Литература

1. *С. В. Рыбин.* Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.
2. *С. Н. Поздняков, С. В. Рыбин.* Дискретная математика. — Издательский центр «Академия», 2008.