I

Контрольная работа №1
Группа 1335
Максимов Ю.Е.

№1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+4x+2}=\frac{1+5+7+3}{1+4+4+2}=\frac{16}{11}$$

№2

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=$$

$$=\lim e^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2$$

№3

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x-a} & x>1\\ x & x\le 1\end{cases}$$

$$a=2\Rightarrow y=\begin{cases}\frac{1}{x-2} & x>1\\ x & x\le 1\end{cases}$$

подозрительными на разрыв служат точка смены аналитического вида функции и точки,

(1)

в которых знаменатель дроби обращается в ноль. Найдём односторонние пределы функции в данных точках.

$x = 2$

$$\lim_{x \to 2-} y(x) = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2+} y(x) \ \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2+0-2} = \frac{1}{0} = \infty$$

пределы не конечны, значит функция терпит разрыв второго рода.

$x = 1$

$$\lim_{x \to 1-0} y(x) = \frac{1}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x \to 1+0} y(x) = x = 1$$

односторонние пределы конечны и неравны функция терпит разрыв первого рода.

Найдём значение a при котором:

$$\lim_{x \to 1-0} y(x) = \lim_{x \to 1+0} y(x)$$

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 \Rightarrow 1-\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ x & x \le 1 \end{cases}$$

Каждое из аналитических выражений функции является непрерывной функцией в своей области определения. В том числе данная функция так же является непрерывной.

№4.

1) $y' = \left(\ln^2(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x} - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)' =$

$= 2\cdot\ln(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x}\cdot\left(\ln(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x})\right)' =$

$= \dfrac{2\cdot\ln(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x})}{\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x}}\cdot\left(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x}\right)' =$

$$\frac{2\cdot\ln(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x}}{\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x}\cdot(1+\sqrt[3]{(1-2x)^2})\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\cdot(1-2x)' =$$

$$\frac{-4\cdot\ln(\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x})}{3\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{1-2x}\cdot(1+\sqrt[3]{(1-2x)^2})\cdot\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

I

2) $y' = \left(3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})}\right)' = 3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})} \cdot \ln 3 \cdot (3\ln^3 \cdot$
$\cdot (\operatorname{arctg} e^{-x}))' = 9 \cdot 3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})} \cdot \ln^2(\operatorname{arctg} e^{-x}) \cdot$
$\cdot (\ln(\operatorname{arctg} e^{-x}))' =$

$$= \frac{9 \cdot 3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})} \cdot \ln^2(\operatorname{arctg} e^{-x})}{\operatorname{arctg} e^{-x}} \cdot (\operatorname{arctg} e^{-x})' =$$

$$= \frac{9 \cdot 3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})} \cdot \ln^2(\operatorname{arctg} e^{-x})}{\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot (1+e^{-2x})} \cdot (e^{-x})' =$$

$$= \frac{9 \cdot e^{-x} \cdot 3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})} \cdot \ln^2(\operatorname{arctg} e^{-3})}{\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot (1+e^{-2x})} \cdot (-x)' =$$

$$= -\frac{9 \cdot 3^{3\ln^3(\operatorname{arctg} e^{-x})} \cdot \ln^2(\operatorname{arctg} e^{-x})}{e^{x} \cdot \operatorname{arctg} e^{-x} \cdot (1+e^{-2x})}$$

3) $y = (5x - e^{-x^2})^{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

$\ln y = \ln (5x - e^{-x^2})^{\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$

$\ln y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \ln(5x - e^{-x^2})$

диференціюємо обидві частини рівняння

$\frac{y'}{y} = \left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)' \cdot \ln(5x - e^{-x^2}) + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot$
$\cdot (\ln(5x - e^{-x^2}))' = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' \cdot$
$\cdot \ln(5x - e^{-x^2}) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{(5x - e^{-x^2})'}{5x - e^{-x^2}} =$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \ln(5x - e^{-x^2})}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{5 - e^{-x^2} \cdot (-x^2)'}{5x - e^{-x^2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \ln(5x - e^{-x^2})}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \frac{5 + 2x \cdot e^{-x^2}}{5x - e^{-x^2}}$$

$$y' = (5x - e^{-x^2})^{tg^2(\frac{x}{2})} \cdot \left(\frac{tg\frac{x}{2} \cdot \ln(5x - e^{-x^2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} + tg^2\frac{x}{2} \cdot \frac{5 + 2x \cdot e^{-x^2}}{5x - e^{-x^2}} \right)$$

N5

$$y(t) = \sin t \cdot 2^{\sin t} + 2t$$

$$y' = (\sin t \cdot 2^{\sin t} + 2t)' = \cos t \cdot 2^{\sin t} + \sin t \cdot 2^{\sin t} \cdot \ln 2 \cdot (\sin t)' + 2 =$$

$$= \cos t \cdot 2^{\sin t} + \sin t \cdot \cos t \cdot 2^{\sin t} \cdot \ln 2 + 2 =$$

$$\cos t \cdot 2^{\sin t} \cdot (1 + \sin t \cdot \ln 2) + 2$$

дифр. перв. порядка

$$dy = y' dt = (\cos t \cdot 2^{\sin t} \cdot (1 + \sin t \cdot \ln 2) + 2) dt$$

$$y'' = (\cos t \cdot 2^{\sin t} \cdot (1 + \sin t \cdot \ln 2) + 2)' =$$

$$= (-\sin t \cdot 2^{\sin t} + \cos^2 t \cdot 2^{\sin t} \cdot \ln 2) \cdot (1 + \sin t \cdot \ln 2) + \cos^2 t \cdot 2^{\sin t} \cdot \ln 2 =$$

$$= 2^{\sin t} ((-\sin t + \cos^2 t \ln 2) \cdot (1 + \sin t \cdot \ln 2) + \cos^2 t \cdot \ln 2)$$

дифф. второго порядка

$d^2y = y''dt^2 = (2^{\sin t}((1-\sin t+\cos^2 t\cdot\ln 2)\cdot(1+\sin t\cdot\ln 2)+\cos^2 t\cdot\ln 2))dt^2$

№6.

$$y = \frac{x^2+2x-1}{2x+1}$$

1) функция определена для всех значений переменной x, за искл. точек в которых знаменатель обращается в ноль

$2x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -0{,}5 \Rightarrow D(y): x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;+\infty)$

2) Исследуем ф-цию на четность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2+2\cdot(-x)-1}{2\cdot(-x)+1} = \frac{x^2-2x-1}{-2x+1}$$

$y(-x)\neq y(x) \qquad y(-x)\neq -y(x)$

функция не является четной, не является нечетной. Это ф-ия общего вида.

3) Найдём точки пересечения с осями

С осью Ox $(y=0)$

$\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}=0 \quad x^2+2x-1=0$

$D=8 \quad x_1 \approx -2,41 \quad x_2 \approx 0,41$

С осью Oy $(x=0) \Rightarrow y=-1$

4) Подозрительной на разрыв служит точка $x=-0,5$. Найдём пределы в данной точке.

$\lim\limits_{x \to -0,5-} y(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x+1} = \dfrac{-\frac{7}{4}}{-0} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -0,5+} y(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x+1} = \dfrac{-\frac{7}{4}}{0} = -\infty$

Односторонние предел не конечны, поэтому ф-ия терпит разрыв второго рода в данной точке

$x=-0,5$ - вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты будем искать:

$y=kx+b$.

$$K = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+x} = \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right) = \frac{x^2+2x-1}{2x+1} - \frac{1}{2}x =$$

$$= \frac{x^2+2x-1}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{x^2+2x-1-x^2-\frac{1}{2}x}{2x+1} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x-1}{2x+1} = \frac{3}{4}$$

Наклонная асимптота

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

5) Монотонность и точки экстремума.

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю, либо не существует

а) $$y' = \left(\frac{x^2+2x-1}{2x+1}\right)' = \frac{(2x+2)(2x+1)-2(x^2+2x-1)}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2} = 0$$

$$2x^2+2x+4=0$$

$$D = -28$$

Первая производная на всей области определения положительна, значит ф-ия возрастает.

б) выпуклость и точки перегиба.

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю или не сущ.

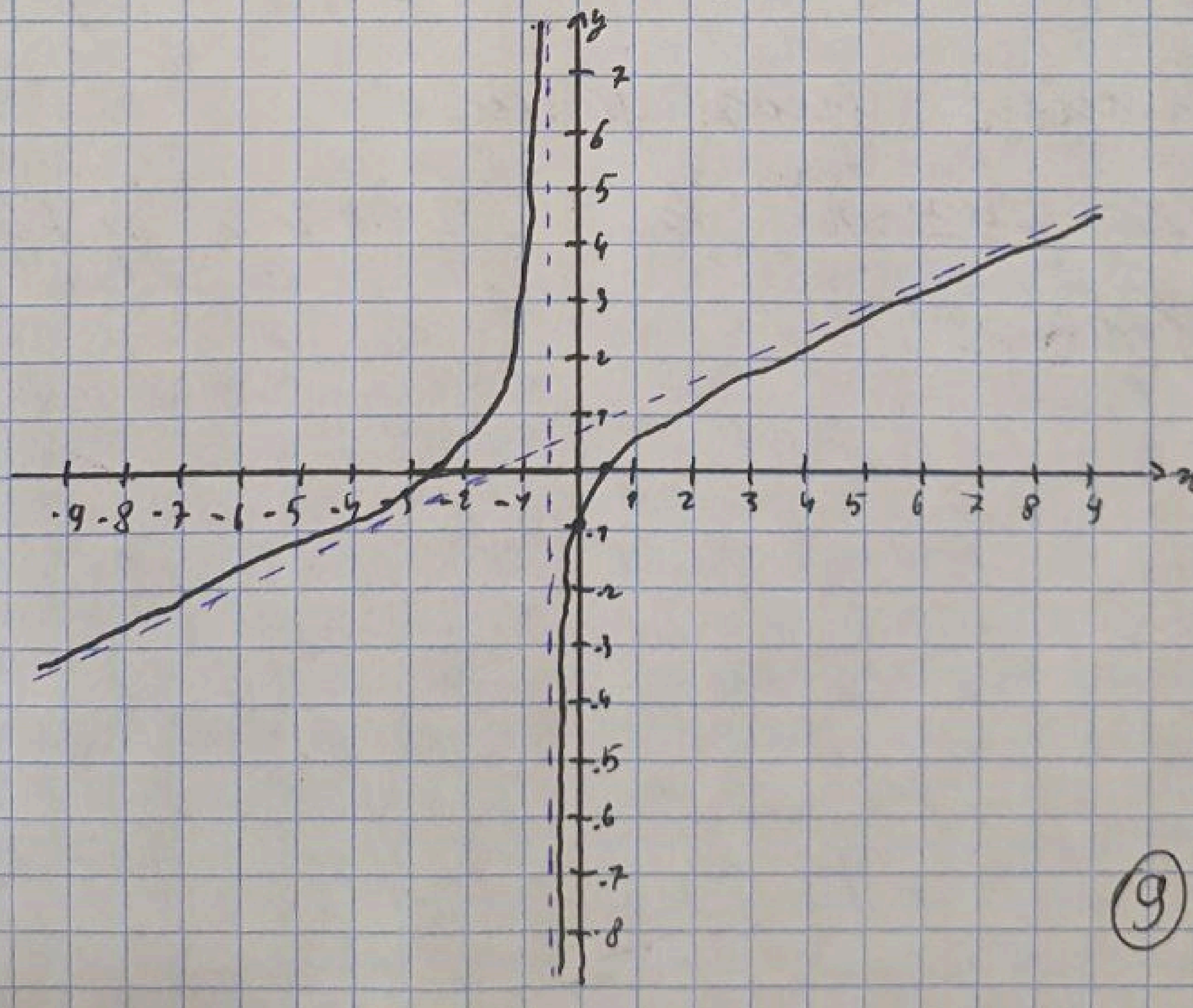
$$y'' = \left(\frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}\right)' = \frac{(4x+2)(2x+1)^2 - 4(2x+1)(2x^2+2x+4)}{(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x+2)(2x+1) - 4(2x^2+2x+4)}{(2x+1)^3} = \frac{8x^2+8x+2-8x^2-8x-16}{(2x+1)^3} =$$

$$= -\frac{14}{(2x+1)^3}$$

Разобьем числовую ось на интервалы

x	$(-\infty; -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5; \infty)$
y''	$+$	не сущ	$+$
y	(выпукла вниз)	не сущ	выпукла вверх



I

№7.

$U = 2x^{yz}$

Полный дифф. ф-ии

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz$$

При вычислении частной производной по какой-либо переменной, другие считаем const.

$$\frac{dU}{dx} = (2x^{yz})' = 2yz \cdot x^{yz-1}$$

$$\frac{dU}{dy} = (2x^{yz})' = 2x^{yz} \cdot \ln x \cdot (yz)' = 2z \cdot \ln x \cdot x^{yz}$$

$$\frac{dU}{dz} = (2x^{yz})' = 2x^{yz} \cdot \ln x \cdot (yz)' = 2y \ln x \cdot x^{yz}$$

Полный дифф. ф-ии.

$$dU = 2yz \cdot x^{yz-1}dx + 2z \cdot \ln x \cdot x^{yz}dy + 2y \cdot \ln x \cdot x^{yz}dz$$

№8

$$2\cdot\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{d^2 z}{dx\,dy}=0 \qquad z=2\cos^2\left(y-\frac{x}{2}\right)$$

Найдем частные производные фу-ии.

$$\frac{dz}{dx}=\left(2\cos^2\left(y-\frac{x}{2}\right)\right)'=4\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)\right)'=$$

$$=-4\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(y-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=2\cos\left(y-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(y-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\sin(2y-x)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=(\sin(2y-x))=\cos(2y-x)\cdot(2y-x)'=$$

$$=-\cos(2y-x)$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy}=(\sin(2y-x))'=\cos(2y-x)\cdot(2y-x)'=$$

$$=2\cos(2y-x)$$

Подставим данные значения

$$2\cdot\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{d^2 z}{dx\,dy}=-2\cos(2y-x)+2\cos(2y-x)=0$$

Т.о. заданная ф-ия удовл. уравнению.

№9.

I

Найти производную ф-ции.

$v = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}$ в точке $M(1;1;0)$

по направлению к точке $A(1;2;-1)$

$$\frac{dv}{d\overline{MA}}(M) = \frac{dv}{dx}(M)\cdot\cos\alpha + \frac{dv}{dy}(M)\cdot\cos\beta + \frac{dv}{dz}(M)\cdot\cos\gamma$$

$$\overline{MA} = (x_A - x_M; y_A - y_M; z_A - z_M) =$$

$$= (1-1; 2-1; -1-0) = (0; 1; -1)$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{MA}_x}{|\overline{MA}|} = \frac{0}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = 0$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{MA}_y}{|\overline{MA}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{MA}_z}{|\overline{MA}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dv}{dx} = (x^3+\sqrt{y^2+z^2})' = 3x^2 \quad \frac{dv}{dx}(M) = 3$$

$$\frac{dv}{dy} = (x^3+\sqrt{y^2+z^2})' = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \frac{dv}{dy}(M) = 1$$

$$\frac{dv}{dz} = (x^3+\sqrt{y^2+z^2})' = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \frac{du}{dz}(M) = 0$$

получим:

$$\frac{du}{d\overline{MA}}(M) = 3\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Студент, Максимов Юлий Евгеньевич

Факультета компьютерных технологий и информатики.

Номер группы: 1335

Номер студ. билета: 133517