

---

# «Математическая логика «и теория алгоритмов»

---

Материалы для студентов  
заочного отделения СПбГЭТУ (ЛЭТИ)  
Кафедра «Алгоритмической математики»

---

Санкт-Петербург, 21 февраля 2023 г.

# 1. Программа курса

## 1. Логика высказываний и булевы функции.

1. Формулы логики высказываний. Равносильность.
2. Логическое следствие.
3. Нормальные формы в логике высказываний (СДНФ и СКНФ).
4. Контактные схемы.
5. Минимизация формул логики высказываний.
6. Самодвойственные, монотонные булевы функции
7. Линейные булевы функции. Полиномы Жегалкина
8. Критерий полноты Поста.
9. Метод резолюций.
10. Стратегии метода резолюций.

## 2. Логика предикатов.

1. Синтаксис формул логики предикатов.
2. Предваренная (ПНФ) и сколемовская (СНФ) нормальные формы в логике предикатов.

## 3. Автоматы, рекурсивные функции и машины Тьюринга.

1. Машины Тьюринга. Операции над машинами Тьюринга.
2. Рекурсивные функции.
3. Нормальные алгоритмы Маркова.
4. Автоматы Мили и Мура.
5. Распознающие автоматы.
6. Детерминизация, минимизация конечного автомата.
7. Автоматы с  $\epsilon$  – переходами.
8. Конечные автоматы и регулярные выражения

## 4. Языки и грамматики.

1. Языки и грамматики. Основные определения
2. Контекстно-свободные грамматики: запись в форме Бэкуса-Наура и синтаксической диаграммы.
3. Автоматы и автоматные грамматики.
4. Проектирование синтаксических анализаторов.
5. Грамматики и алгоритмы обработки скобочных записей.

## 2. Задачи по курсу

1. Нормальные формы в логике высказываний (СДНФ и СКНФ).
2. Методы минимизирующих карт и Куайна – Мак-Класки.
3. Метод резолюций в логике высказываний.
4. Построение полинома Жегалкина. Методы неопределенных коэффициентов и треугольника Паскаля.
5. Полнота системы булевых функций
6. Нормальные формы в логике первого порядка, подстановка и унификация, процедура сколемизации.
7. Машины Тьюринга.
8. Алгоритмы Маркова.
9. Порождающие грамматики.
10. Автоматы Мили и Мура.
11. Распознающие автоматы и регулярные выражения.

## 3. Варианты курсовых работ

### 3.1. Первый вариант

1. Будет ли логичным следующее рассуждение: *Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.*

2. Провести исследование булевой функции

$$f(x, y, z) = (zx \vee (z \oplus x))((x \vee y)(z \oplus y)) :$$

а) построить таблицу функции; ответ записать в виде набора значений, упорядоченного в соответствии с лексикографическим порядком набора аргументов;

б) построить СДНФ этой функции; ответ записать, упорядочив элементарные конъюнкции в лексикографическом порядке;

с) упростить полученное выражение с помощью метода минимизирующих карт, ответ записать в виде минимальной ДНФ;

д) построить многочлен Жегалкина исходной функции;

е) построить таблицу двойственной функции; ответ записать в виде упорядоченного набора значений;

ф) построить СКНФ двойственной функции; ответ записать, упорядочив элементарные дизъюнкции в лексикографическом порядке;

г) проверить исходную функцию на принадлежность основным классам замкнутости  $T_0, T_1, L, M, S$ ;

h) выразить отрицание  $h(x) = \neg x$  и конъюнкцию  $g(x, y) = x \wedge y$  через функцию  $f(x, y, z)$  и ее отрицание.

3. Привести формулу логики предикатов сначала в ПНФ, затем в СНФ:

$$F = \neg \exists x (\neg \forall y (G(f(y))) \oplus Q(x))$$

4. Машина Тьюринга имеет алфавит из трех символов  $\{2, 1, *\}$  (символ  $*$  означает отсутствие символа на ленте), два состояния  $\{q_0, q_2\}$ , из которых  $q_0$  — начальное состояние,  $q_2$  — конечное. Символ  $R$  означает сдвиг читающей головки вправо по ленте,  $L$  — влево,  $E$  — головка остается на месте. В начальный

момент головка указывает на крайний левый символ записи. Команды машины задаются набором:

$$q_0 2 \rightarrow q_0 1R, q_0 1 \rightarrow q_0 1L, q_0 * \rightarrow q_2 1E.$$

Какой результат даст машина на наборе  $\{22122\}$ ?

5. Пусть  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ . Построить нормальный алгоритм Маркова, преобразующий слово так, чтобы сначала шли все четные цифры 0 и 2, а затем — все нечетные.

6. Построить конечный автомат с входным алфавитом  $\{0, 1\}$ , который допускает все цепочки, в которых перед и после каждой единицы стоит 0.

7. Описать конечный автомат, распознающий язык, заданный регулярным выражением:

$$(ab + (c + d)^*)^*$$

8. Построить порождающую грамматику для языка  $L = \{a^n b^n c^n, n > 0\}$ .

9. Описать язык, который определяет КС грамматика  $S ::= 1 \mid S0S$ . Удовлетворяет ли она условию однозначности ветвления по первому символу?

10. Для грамматики, заданной следующими правилами вывода, построить эквивалентный ей конечный автомат:

$$S \rightarrow 0S \mid 0D, C \rightarrow 0D \mid 0S \mid 1, D \rightarrow 1C \mid 1S \mid 0.$$

11. Дана инфиксная скобочная форма записи арифметического выражения:

$$(a - b * c) / (d + e + f).$$

Перевести ее в постфиксную форму.

## 3.2. Второй вариант

1. Будет ли логичным следующее рассуждение: *Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.*

2. Провести исследование булевой функции

$$f(x, y, z) = ((z \oplus y) \vee x)(xy \oplus (z \vee x)) :$$

- а) построить таблицу функции; ответ записать в виде набора значений, упорядоченного в соответствии с лексикографическим порядком набора аргументов;
- б) построить СДНФ этой функции; ответ записать, упорядочив элементарные конъюнкции в лексикографическом порядке;
- в) упростить полученное выражение с помощью метода минимизирующих карт, ответ записать в виде минимальной ДНФ;
- г) построить многочлен Жегалкина исходной функции;
- д) построить таблицу двойственной функции; ответ записать в виде упорядоченного набора значений;
- е) построить СКНФ двойственной функции; ответ записать, упорядочив элементарные дизъюнкции в лексикографическом порядке;
- ж) проверить исходную функцию на принадлежность основным классам замкнутости  $T_0, T_1, L, M, S$ ;
- з) выразить отрицание  $h(x) = \neg x$  и конъюнкцию  $g(x, y) = x \wedge y$  через функцию  $f(x, y, z)$  и ее отрицание.

3. Привести формулу логики предикатов сначала в ПНФ, затем в СНФ:

$$F = \neg \exists x (\neg \exists y P(y, x) \leftrightarrow Q(x))$$

4. Машина Тьюринга имеет алфавит из трех символов  $\{2, 1, *\}$  (символ  $*$  означает отсутствие символа на ленте), два состояния  $\{q_0, q_2\}$ , из которых  $q_0$  — начальное состояние,  $q_2$  — конечное. Символ  $R$  означает сдвиг читающей головки вправо по ленте,  $LR$  — влево,  $E$  — головка остается на месте. В начальный момент головка указывает на крайний левый символ записи. Команды машины задаются набором:

$$q_0 2 \rightarrow q_0 1 R, q_0 1 \rightarrow q_0 2 L, q_0 * \rightarrow q_2 1 E.$$

Какой результат даст машина на наборе  $\{22122\}$ ?

5. Пусть  $A = \{\alpha, \beta\}$ . Построить алгоритм Маркова, который приписывает символ  $\beta$  к концу слова.

6. Построить конечный автомат, распознающий язык  $L$  над алфавитом  $\{a, b\}$ , длина слов которого кратна трем.

7. Описать конечный автомат, распознающий язык, заданный регулярным выражением:

$$(a + b + cd^*)^*$$

8. Построить порождающую грамматику для языка  $L = \{(ac)^n(cb)^n, n > 0\}$ .
9. Описать язык, который определяет КС грамматика  $S ::= 0 \mid S0S$ . Удовлетворяет ли она условию однозначности ветвления по первому символу?
10. Для грамматики, заданной следующими правилами вывода, построить эквивалентный ей конечный автомат:

$$S \rightarrow bS \mid aA \mid a \mid b, \quad A \rightarrow aA \mid bS \mid a.$$

11. Дана инфиксная скобочная форма записи арифметического выражения:

$$(a + b * c) / (d - e - f).$$

Перевести ее в постфиксную форму.

## 4. Литература по курсу

1. С.В. Рыбин. Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.
2. Ф.А. Новиков. Дискретная математика. — Питер, 2019. 3-е изд.
3. Дж. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Ульман. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. — М.: Вильямс, 2015.
4. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. — СПб.: Питер, 2003.
5. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1984.