Тема:

Разложение в бесконечную цепную дробь

Сергей Витальевич Рыбин
svrybin@etu.ru

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», кафедра «Алгоритмической математики»

14 января 2023 г.

Основные сведения

1. Представляем произвольное вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ в виде **цепной (непрерывной)** дроби.

$$\begin{aligned}
\alpha &= q_0 + \eta_1 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 > 1, \quad q_0 = [\alpha], \\
\alpha_1 &= q_1 + \eta_2 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad q_1 = [\alpha_1], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{s-2} &= q_{s-2} + \eta_{s-1} = q_{s-2} + \frac{1}{\alpha_{s-1}}, \quad \alpha_{s-1} > 1, \quad q_{s-2} = [\alpha_{s-2}], \\
\alpha_{s-1} &= q_{s-1} + \eta_s .
\end{aligned} \tag{1}$$

1. Представляем произвольное вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ в виде **цепной (непрерывной)** дроби.

$$\begin{aligned}
&\alpha = q_0 + \eta_1 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 > 1, \quad q_0 = [\alpha], \\
&\alpha_1 = q_1 + \eta_2 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad q_1 = [\alpha_1], \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\alpha_{s-2} = q_{s-2} + \eta_{s-1} = q_{s-2} + \frac{1}{\alpha_{s-1}}, \quad \alpha_{s-1} > 1, \quad q_{s-2} = [\alpha_{s-2}], \\
&\alpha_{s-1} = q_{s-1} + \eta_s .
\end{aligned} \tag{1}$$

2. Из (1) получаем следующее разложение α в **бесконечную** непрерывную дробь:

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \eta_s}}}} = [q_0; q_1, \dots, q_k, \dots]. \tag{2}$$

1. Представляем произвольное вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ в виде **цепной (непрерывной)** дроби.

$$\begin{aligned}
\alpha &= q_0 + \eta_1 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 > 1, \quad q_0 = [\alpha], \\
\alpha_1 &= q_1 + \eta_2 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad q_1 = [\alpha_1], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{s-2} &= q_{s-2} + \eta_{s-1} = q_{s-2} + \frac{1}{\alpha_{s-1}}, \quad \alpha_{s-1} > 1, \quad q_{s-2} = [\alpha_{s-2}], \\
\alpha_{s-1} &= q_{s-1} + \eta_s .
\end{aligned} \tag{1}$$

2. Из (1) получаем следующее разложение α в **бесконечную** непрерывную дробь:

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \eta_s}}}} = [q_0; q_1, \ldots, q_k, \ldots]. \tag{2}$$

3. Дроби, возникающие при разложении вида (2), называют **подходящими дробями**. Числа $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots$ называют **звеньями дроби**.

$$\delta_0 = q_0, \quad \delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \delta_2 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} \quad \cdots \tag{3}$$

Как вычислять бесконечную цепную дробь

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

4. Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}\,, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}\,,\ k \geqslant 1\,, \end{cases} \quad \begin{cases} P_{-1} = 1\,,\ P_0 = q_0\,, \\ Q_{-1} = 0\,,\ Q_0 = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

4. Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}\,, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}\,,\ k \geqslant 1\,, \end{cases} \quad \begin{cases} P_{-1} = 1\,,\ P_0 = q_0\,, \\ Q_{-1} = 0\,,\ Q_0 = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

4. Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}\,, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}\,,\; k \geqslant 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{-1} = 1\,,\; P_0 = q_0\,, \\ Q_{-1} = 0\,,\; Q_0 = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

5. Как оценить приближение δ_k к числу α в (1) с точностью до ε? Справедлива оценка:

$$|\alpha - \delta_k| \leqslant |\delta_{k+1} - \delta_k| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k}\,. \tag{5}$$

Как вычислять бесконечную цепную дробь

4 Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}\,, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}\,,\ k \geqslant 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{-1} = 1\,,\ P_0 = q_0\,, \\ Q_{-1} = 0\,,\ Q_0 = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

5 Как оценить приближение δ_k к числу α в (1) с точностью до ε? Справедлива оценка:

$$|\alpha - \delta_k| \leqslant |\delta_{k+1} - \delta_k| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k}\,. \tag{5}$$

6 Оценка (1) требует дополнительного вычислительного ресурса: для оценки δ_k требуется определить знаменатель следующей подходящей дроби Q_{k+1}.

4. Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \; k \geqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{-1} = 1, \; P_0 = q_0, \\ Q_{-1} = 0, \; Q_0 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

5. Как оценить приближение δ_k к числу α в (1) с точностью до ε? Справедлива оценка:

$$|\alpha - \delta_k| \leqslant |\delta_{k+1} - \delta_k| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k}. \tag{5}$$

6. Оценка (1) требует дополнительного вычислительного ресурса: для оценки δ_k требуется определить знаменатель следующей подходящей дроби Q_{k+1}.

Используем более грубую оценку:

$$|\alpha - \delta_m| \leqslant \frac{1}{Q_{m+1} Q_m} < \frac{1}{Q_m^2} < \varepsilon. \tag{6}$$

Как вычислять бесконечную цепную дробь

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» 1886 ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

4 Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}\,, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}\,,\; k \geqslant 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{-1} = 1\,,\; P_0 = q_0\,, \\ Q_{-1} = 0\,,\; Q_0 = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

5 Как оценить приближение δ_k к числу α в (1) с точностью до ε? Справедлива оценка:

$$|\alpha - \delta_k| \leqslant |\delta_{k+1} - \delta_k| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k}\,. \tag{5}$$

6 Оценка (1) требует дополнительного вычислительного ресурса: для оценки δ_k требуется определить знаменатель следующей подходящей дроби Q_{k+1}.

Используем более грубую оценку:

$$|\alpha - \delta_m| \leqslant \frac{1}{Q_{m+1} Q_m} < \frac{1}{Q_m^2} < \varepsilon\,. \tag{6}$$

Таким образом для достижения нужной точности ε вычисляем подходящие дроби $\{\delta_m\}$ до тех пор, пока $Q_m^2 \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Как вычислять бесконечную цепную дробь

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» 1886 ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

4 Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \; k \geqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{-1} = 1, \; P_0 = q_0, \\ Q_{-1} = 0, \; Q_0 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

5 Как оценить приближение δ_k к числу α в (1) с точностью до ε? Справедлива оценка:

$$|\alpha - \delta_k| \leqslant |\delta_{k+1} - \delta_k| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k}. \tag{5}$$

6 Оценка (1) требует дополнительного вычислительного ресурса: для оценки δ_k требуется определить знаменатель следующей подходящей дроби Q_{k+1}.

Используем более грубую оценку:

$$|\alpha - \delta_m| \leqslant \frac{1}{Q_{m+1} Q_m} < \frac{1}{Q_m^2} < \varepsilon. \tag{6}$$

- Таким образом для достижения нужной точности ε вычисляем подходящие дроби $\{\delta_m\}$ до тех пор, пока $Q_m^2 \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
- Иррациональное число, являющееся корнем некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами, называют **квадратичной иррациональностью**, например $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$, $\dfrac{7+\sqrt{29}}{10}$, $3+\sqrt{7}$.

Как вычислять бесконечную цепную дробь

4 Обозначим P_k и Q_k — числитель и знаменатель подходящей дроби δ_k из (3). Тогда

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \ k \geqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{-1} = 1, \ P_0 = q_0, \\ Q_{-1} = 0, \ Q_0 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять **отдельно** числители и знаменатели подходящих дробей.

5 Как оценить приближение δ_k к числу α в (1) с точностью до ε? Справедлива оценка:

$$|\alpha - \delta_k| \leqslant |\delta_{k+1} - \delta_k| = \frac{1}{Q_{k+1} Q_k}. \tag{5}$$

6 Оценка (1) требует дополнительного вычислительного ресурса: для оценки δ_k требуется определить знаменатель следующей подходящей дроби Q_{k+1}.

Используем более грубую оценку:

$$|\alpha - \delta_m| \leqslant \frac{1}{Q_{m+1} Q_m} < \frac{1}{Q_m^2} < \varepsilon. \tag{6}$$

- Таким образом для достижения нужной точности ε вычисляем подходящие дроби $\{\delta_m\}$ до тех пор, пока $Q_m^2 \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
- Иррациональное число, являющееся корнем некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами, называют **квадратичной иррациональностью**, например $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$, $\dfrac{7+\sqrt{29}}{10}$, $3+\sqrt{7}$.
- Квадратичные иррациональности и только они представимы в виде бесконечной **периодической** цепной дроби.

Пример 1. Разложение в цепную дробь

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{180}$ в виде периодической цепной дроби;

Пример 1. Разложение в цепную дробь

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{180}$ в виде периодической цепной дроби;
2. вычислить значение $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{180}$ в виде периодической цепной дроби;
2. вычислить значение $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. Получаем разложение (1) для $\sqrt{180}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{180} &= 13 + \frac{1}{\alpha_1}, \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{180}-13} = \frac{\sqrt{180}+13}{11} = 2 + \frac{1}{\alpha_2}, \\
\alpha_2 &= \frac{11}{\sqrt{180}-9} = \frac{\sqrt{180}+9}{9} = 2 + \frac{1}{\alpha_3}, \\
\alpha_3 &= \frac{9}{\sqrt{180}-9} = \frac{\sqrt{180}+9}{11} = 2 + \frac{1}{\alpha_4}, \\
\alpha_4 &= \frac{11}{\sqrt{180}-13} = \sqrt{180}+13 = 26 + \frac{1}{\alpha_5}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Пример 1. Разложение в цепную дробь

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{180}$ в виде периодической цепной дроби;
2. вычислить значение $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. Получаем разложение (1) для $\sqrt{180}$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{180} &= 13 + \frac{1}{\alpha_1}, \qquad (7)\\
\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{180}-13} = \frac{\sqrt{180}+13}{11} = 2 + \frac{1}{\alpha_2},\\
\alpha_2 &= \frac{11}{\sqrt{180}-9} = \frac{\sqrt{180}+9}{9} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},\\
\alpha_3 &= \frac{9}{\sqrt{180}-9} = \frac{\sqrt{180}+9}{11} = 2 + \frac{1}{\alpha_4},\\
\alpha_4 &= \frac{11}{\sqrt{180}-13} = \sqrt{180}+13 = 26 + \frac{1}{\alpha_5}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в схеме 7 $\alpha_5 = \alpha_1$ и происходит возврат к первому уравнению. Процесс **зацикливается**. Таким образом, получаем представление

$$\sqrt{180} = [13, (2, 2, 2, 26)].$$

1. Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (7) получаем следующие последовательности (таблица 1.)

1 Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (7) получаем следующие последовательности (таблица 1.)

Таблица 1

s		0	1	2	3	4
q_s		13	2	2	2	26
P_s	1	13	27	67	161	4253
Q_s	0	1	2	5	12	317

1. Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (7) получаем следующие последовательности (таблица 1.)

Таблица 1

s		0	1	2	3	4
q_s		13	2	2	2	26
P_s	1	13	27	67	161	4253
Q_s	0	1	2	5	12	317

2. Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

1. Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (7) получаем следующие последовательности (таблица 1.)

Таблица 1

s		0	1	2	3	4
q_s		13	2	2	2	26
P_s	1	13	27	67	161	4253
Q_s	0	1	2	5	12	317

2. Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

Очевидно, что

$$\frac{1}{317^2} = \frac{1}{10489} < 10^{-5}.$$

1. Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (7) получаем следующие последовательности (таблица 1.)

Таблица 1

s		0	1	2	3	4
q_s		13	2	2	2	26
P_s	1	13	27	67	161	4253
Q_s	0	1	2	5	12	317

2. Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

Очевидно, что

$$\frac{1}{317^2} = \frac{1}{10489} < 10^{-5}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{180} \simeq \frac{4253}{317} = 13,41640\ldots$$

Пример 1. Вычисление приближенного значения

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

1 Вычислим теперь $\sqrt{180}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (7) получаем следующие последовательности (таблица 1.)

Таблица 1

s		0	1	2	3	4
q_s		13	2	2	2	26
P_s	1	13	27	67	161	4253
Q_s	0	1	2	5	12	317

2 Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

Очевидно, что

$$\frac{1}{317^2} = \frac{1}{10489} < 10^{-5}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{180} \simeq \frac{4253}{317} = 13,41640\ldots$$

Получена более высокая точность, чем ε, так как оценка (6) достаточно грубая.

Пример 2. Разложение в цепную дробь

Пример 2. Разложение в цепную дробь

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{368}$ в виде периодической цепной дроби;

Пример 2. Разложение в цепную дробь

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{368}$ в виде периодической цепной дроби;
2. вычислить значение $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ 1886

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{368}$ в виде периодической цепной дроби;
2. вычислить значение $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. Аналогично предыдущему примеру получаем разложение (1) для $\sqrt{368}$:

$$\sqrt{368} = 19 + \frac{1}{\alpha_1}, \tag{8}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{368}-19} = \frac{\sqrt{368}+19}{7} = 5 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{\sqrt{368}-16} = \frac{\sqrt{368}+16}{16} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{16}{\sqrt{368}-16} = \frac{\sqrt{368}+16}{7} = 5 + \frac{1}{\alpha_4},$$

$$\alpha_4 = \frac{7}{\sqrt{368}-19} = \sqrt{368}+19 = 38 + \frac{1}{\alpha_5}.$$

Пример 2. Разложение в цепную дробь

Задача

1. представить квадратичную иррациональность $\sqrt{368}$ в виде периодической цепной дроби;
2. вычислить значение $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. Аналогично предыдущему примеру получаем разложение (1) для $\sqrt{368}$:

$$\sqrt{368} = 19 + \frac{1}{\alpha_1}, \tag{8}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{368}-19} = \frac{\sqrt{368}+19}{7} = 5 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{\sqrt{368}-16} = \frac{\sqrt{368}+16}{16} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{16}{\sqrt{368}-16} = \frac{\sqrt{368}+16}{7} = 5 + \frac{1}{\alpha_4},$$

$$\alpha_4 = \frac{7}{\sqrt{368}-19} = \sqrt{368}+19 = 38 + \frac{1}{\alpha_5}.$$

Заметим, что в схеме 8 $\alpha_5 = \alpha_1$ и происходит возврат к первому уравнению. Как и в предыдущем примере процесс **зацикливается**. Таким образом, получаем представление

$$\sqrt{368} = [19, (5, 2, 5, 38)].$$

Пример 2. Вычисление приближенного значения

1. Вычислим теперь $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Пример 2. Вычисление приближенного значения

1. Вычислим теперь $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (8) получаем следующие последовательности (таблица 2.)

1. Вычислим теперь $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (8) получаем следующие последовательности (таблица 2.)

Таблица 2

s		0	1	2	3	4
q_s		19	5	2	5	38
P_s	1	19	96	211	1151	43949
Q_s	0	1	5	11	60	2291

Пример 2. Вычисление приближенного значения

1. Вычислим теперь $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (8) получаем следующие последовательности (таблица 2.)

Таблица 2

s		0	1	2	3	4
q_s		19	5	2	5	38
P_s	1	19	96	211	1151	43949
Q_s	0	1	5	11	60	2291

2. Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

1. Вычислим теперь $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (8) получаем следующие последовательности (таблица 2.)

Таблица 2

s		0	1	2	3	4
q_s		19	5	2	5	38
P_s	1	19	96	211	1151	43949
Q_s	0	1	5	11	60	2291

2. Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2291^2} = \frac{1}{5248681} < 10^{-5}.$$

1. Вычислим теперь $\sqrt{368}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (4) из равенств предыдущего шага (8) получаем следующие последовательности (таблица 2.)

Таблица 2

s		0	1	2	3	4
q_s		19	5	2	5	38
P_s	1	19	96	211	1151	43949
Q_s	0	1	5	11	60	2291

2. Нужная точность будет достигнута, когда $\dfrac{1}{{Q_k}^2}$ станет меньше ε.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2291^2} = \frac{1}{5248681} < 10^{-5}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{368} \simeq \frac{43949}{2291} = 19,1833260\ldots$$

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

2. $\alpha = 155$

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

2. $\alpha = 155$

Ответ: $\sqrt{155} = [12, (2, 4, 2, 24)] \simeq \dfrac{6088}{489} = 12,44989\ldots$

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

2. $\alpha = 155$

Ответ: $\sqrt{155} = [12, (2, 4, 2, 24)] \simeq \dfrac{6088}{489} = 12,44989\ldots$

3. $\alpha = 222$

Задачи для самостоятельного решения

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

2. $\alpha = 155$

Ответ: $\sqrt{155} = [12, (2, 4, 2, 24)] \simeq \dfrac{6088}{489} = 12,44989\ldots$

3. $\alpha = 222$

Ответ: $\sqrt{222} = [14, (1, 8, 1, 28)] \simeq \dfrac{4306}{289} = 14,89965\ldots$

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

2. $\alpha = 155$

Ответ: $\sqrt{155} = [12, (2, 4, 2, 24)] \simeq \dfrac{6088}{489} = 12,44989\ldots$

3. $\alpha = 222$

Ответ: $\sqrt{222} = [14, (1, 8, 1, 28)] \simeq \dfrac{4306}{289} = 14,89965\ldots$

4. $\alpha = 119$

Задачи для самостоятельного решения

Задача: представить $\sqrt{\alpha}$ в виде периодической цепной дроби и вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. $\alpha = 252$

Ответ: $\sqrt{252} = [15, (1, 6, 1, 30)] \simeq \dfrac{3921}{247} = 15,87449\ldots$

2. $\alpha = 155$

Ответ: $\sqrt{155} = [12, (2, 4, 2, 24)] \simeq \dfrac{6088}{489} = 12,44989\ldots$

3. $\alpha = 222$

Ответ: $\sqrt{222} = [14, (1, 8, 1, 28)] \simeq \dfrac{4306}{289} = 14,89965\ldots$

4. $\alpha = 119$

Ответ: $\sqrt{119} = [10, (1, 9, 1, 20)] \simeq \dfrac{2509}{230} = 10,90870\ldots$

Литература

Литература

1. *С. В. Рыбин.* Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.

Литература

1. *С. В. Рыбин.* Дискретная математика и информатика. — Лань, 2022.
2. *С. Н. Поздняков, С. В. Рыбин.* Дискретная математика. — Издательский центр «Академия», 2008.