Максимов 29С 1335. Вар 17.

№1

Является, потому что многочлен степени не выше 3 есть операции сложения и умножения на число, подходящие под аксиомы линейного пространства.

$f + g = (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) =$

$= (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$

не выше 3 степени.

если a произвольное число

$a \cdot f = (a \cdot a_3) x^3 + (a \cdot a_2) x^2 + (a \cdot a_1) x + a \cdot a_0$

снова не выше 3 степени.

Все аксиомы выполнены.

№2.

Проверим, являются ли эти векторы линейно независимыми.

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -7x + 2y + 8z = 0 \\ 5x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -7 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 11 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -(-3 \cdot 10 - 11) \neq 0$$

Т.е. система имеет только нулевое решение $x = y = z = 0$

Значит, векторы $e_1\ e_2\ e_3$ линейно независимы и образуют базис.

№3

Столбец координат элемента

$f(x)=5x^2+8x-7$ в базисе

$e_1(x)=x^2$

$e_2(x)=x$

$e_3(x)=1$

$f(x) = 5\cdot e_1 + 8\cdot e_2 - 7e_3$

$f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

№4

$3x-7y-3z-7t+6u=-64$

$2x-3y-4z-7t+2u=-26$

$x-5y+9z-3t+4u=-64$

$3x-6y-6z-6t+6u=-48$

$2x-5y-3z-3t+9u=-60$

сделаем матрицу и привидем ее к ступенчатому виду.

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 3 & -7 & -3 & -7 & +6 & -64 \\ 2 & -3 & -4 & -7 & +2 & -26 \\ 1 & -5 & 9 & -3 & 4 & -64 \\ 3 & -6 & -6 & -6 & 6 & -48 \\ 2 & -5 & -3 & -3 & 9 & -60 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right|$$

значит $x=-4$; $y=2$; $z=-4$; $t=5$; $v=-2$

№5

$L(v_1) = 2v_1 + v_3 \quad L(v_2) = v_1 + v_2; \; L(v_3) = v_1 - v_2 + 2v_3$

запишем в матрицу по столбцам

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

№6

$V = e^{4t} p(t)$ p - многочлен $\deg p \leq 3$.

$\cancel{L(e_1) = 4e^{4t} = 4}$

$e_1(t) = e^{4t}; e_2(t) = e^{4t} t; e_3(t) = e^{4t} t^2; e_4(t) = e^{4t} t^3$

$L(e_1) = 4e^{4t} = 4e_1$

$L(e_2) = 2e^{4t} + 4e^{4t} t = 2e_1 + 4e_2$

$L(e_3) = 2e^{4t} t + 4e^{4t} t^2 = 2e_2 + 4e_3$

$L(e_4) = 3e^{4t} t^2 + 4e^{4t} t^3 = 3e_3 + 4e_4$

матрица равна $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

№7.

$L: R^4 \to R^3$

$$L(x) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} x$$

Ядро это $L(x) = 0$ из этого приводим к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -x_3 + x_4$

$x_2 = x_3 - 2x_4$

$x_3 = x_3$

$x_4 = x_4$

1) предположим

$x_3 = 1$

$x_4 = 0$

тогда базис $(-1\ 1\ 1\ 0)$

2) предположим

$x_3 = 0$

$x_4 = 1$

тогда базис $(1, -2, 0\ 1)$

Эти два базиса образуют ядро.

№8

$$L(y)=(D-3I)(D+2I)$$

$$L(y)=(D-3I)(D+2I)y=$$
$$=(D-3I)(y'+2y)=y''-y'-6y.$$

№9

$$y''-6y'+25y=e^{2x}(17x+15) \qquad y(0)=6,\ y'(0)=-20$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью. Найдем общее решение однородного уравнения.

$$y''-6y'+25y=0$$

Решим хар-ское уравнение

$$\lambda^2-6\lambda+25=0$$ ← простите, это мои слезы...

$$\lambda_{1,2}=3\pm 4i$$

поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x)=Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}\sin 4x$$

где A, B - постоянные. Найдем частное решение неоднородного. Будем искать его в виде.

$y(x) = e^{2x}(Cx+D)$,

подставим в исходное уравнение и получим

$$4e^{2x}(Cx+D) + 4Ce^{2x} - 6\left(2e^{2x}(Cx+D) + Ce^{2x}\right) + 25e^{2x}(Cx+D) = e^{2x}(17x+15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17(Cx+D) - 2C = 17x+15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17Cx + (17D - 2C) = 17x + 15.$$

откуда $C = D = 1$.

Таким образом частное решение равно $y(x) = e^{2x}(x+1)$. Значит общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x + e^{2x}(x+1)$$

Используем начальные условия чтобы найти постоянные A и B. Имеем

$y(0) = A + 1 = 0 \quad A = -1$

$y'(0) = 3A + 4B + 2 + 1 = -20 \quad B = -5.$

Ответ получим.

$$y(x) = -e^{3x}\cos 4x - 5e^{3x}\sin 4x + e^{2x}(x+1)$$

№10

$$y'' + 4y' - 4y = e^{-2x}(3\cos x + (-x^2-3x+2)\sin 3x)$$

Решение лин. уравнения равно сумме частного решения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью. Найдем общее решение

$y''+4y'+4y=0$ общее решение уравнения

$\lambda^2+4\lambda+4=0$ $\quad y_0(x)=(A+Bx)e^{-2x}$

$\lambda_{1,2}=-2$

где A, B - постоянные. Найдем частное решение неоднородного. Частное решение лин. урав. с правой частью $f_1+\ldots+\ldots+f_p$ равно сумме частных решений уравн. с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$. Поэтому будем искать отдельно частные реш. уравнения

$$y''+4y'+4y=3e^{-2x}\cos x \quad (1)$$

$$y''-4y'+4y=e^{-2x}(-x^2-3x+2)\sin 3x \quad (2)$$

для первого ищем решение

$$y_1(x)=e^{-2x}(C\cos x+D\sin x)$$

тогда

$$y_1'=-2e^{-2x}(C\cos x+D\sin x)+e^{-2x}(-C\sin x+$$
$$+D\cos x)$$

$y_2'' = 4e^{-2x}(C\cos x + D\sin x) - 4e^{-2x}(-C\sin x +$
$+ D\cos x) + e^{-2x}(-C\cos x - D\sin x) =$
$= 3e^{-2x}(C\cos x + D\sin x) - 4e^{-2x}(-C\sin x + D\cos x).$

Подставим все в уравнение (1).

$-e^{-2x}(C\cos x + D\sin x) = 3e^{-2x}\cos x$

откуда найдем что

$C = -3,\ D = 0$ Значит:

$y_1(x) = -3e^{-2x}\cos x.$

Частное решение уравнения (2)

$y_2(x) = e^{-2x}((a_2x^2 + a_1x + a_0)\cos 3x +$
$+ (b_2x^2 + b_1x + b_0)\sin 3x)$

подставим в уравнение и приравняем коэффициенты при подобных членах найдем что

$a_2 = 0;\ a_1 = \frac{4}{27};\ a_0 = \frac{2}{9}$
$b_2 = \frac{1}{4};\ b_1 = \frac{1}{3};\ b_0 = -\frac{8}{27}$

Значит:

$$y_2(x) = e^{-2x}\left(\left(\frac{4}{27}x+\frac{2}{9}\right)\cos 3x+\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{8}{27}\right)\sin 3x\right)$$

Окончательное решение

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) =$$
$$= e^{-2x}(A+Bx) - 3e^{-2x}\cos 3x + e^{-2x}\left(\left(\frac{4}{27}x+\frac{2}{9}\right)\cos 3x+\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{8}{27}\right)\sin 3x\right)$$

Студент, Максимов Юлий Евгеньевич

Факультета компьютерных технологий и информатики.

Номер группы: 1335

Номер студ. билета: 133517