Контрольная работа №1

Задание №1

Найти предел:

Решение:

Выполним непосредственную подстановку предельного значения:

Задание №2

Найти предел:

Решение:

Выполним непосредственную подстановку предельного значения:

Получили неопределенность. Используем свойство второго замечательного предела:

Задание №3

Проверить непрерывность функции для . Для точек разрыва установить их характер. При каком значении параметра функция будет непрерывной.

Решение:

Подозрительными на разрыв служат точки смены аналитического выражения функции и точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Найдем односторонние пределы функции в данных точках:

Односторонние пределы не конечны, поэтому функция терпит разрыв второго рода в данной точке

Односторонние пределы конечны и не равны, поэтому функция терпит разрыв первого рода со скачком

Найдем значение при котором:

Каждое из аналитических выражений функции является непрерывной функцией в своей области определения. В точке смены аналитического выражения функция также является непрерывной:

Задание №4

Найти производные функций:

Решение:

1. Для нахождения производной используем правило производной сложной функции, а также, значения табличных производных:
2. Для нахождения производной используем правило производной сложной функции, а также, значения табличных производных:
3. Прежде чем дифференцировать функцию, прологарифмируем обе части равенства:

Дифференцируем обе части равенства, учитывая, что – сложная функция

Задание №5

Вычислить дифференциалы первого и второго порядка функции:

Решение:

Найдем производные первого и второго порядков для функции:

Дифференциал первого порядка:

Дифференциал второго порядка:

Задание №6

Провести исследование функции и построить эскиз графика:

Решение:

1. Функция определена для всех значений переменной , за исключением точек, в которых знаменатель обращается в нуль:
2. Исследуем функцию на четность:

Функция не является четной, не является нечетной. Это функция общего вида. Функция не является периодической

1. Найдем точки пересечения с осями координат.

С осью

С осью

1. Подозрительной на разрыв служит точка . Найдем односторонние пределы в данной точке:

Односторонние пределы не конечны, поэтому функция терпит разрыв второго рода в данной точке

– вертикальная асимптота

Наклонные асимптоты будем искать в виде:

Наклонная асимптота:

1. Монотонность и точки экстремума. Найдем точки, в которых первая производная равна нулю, либо не существует

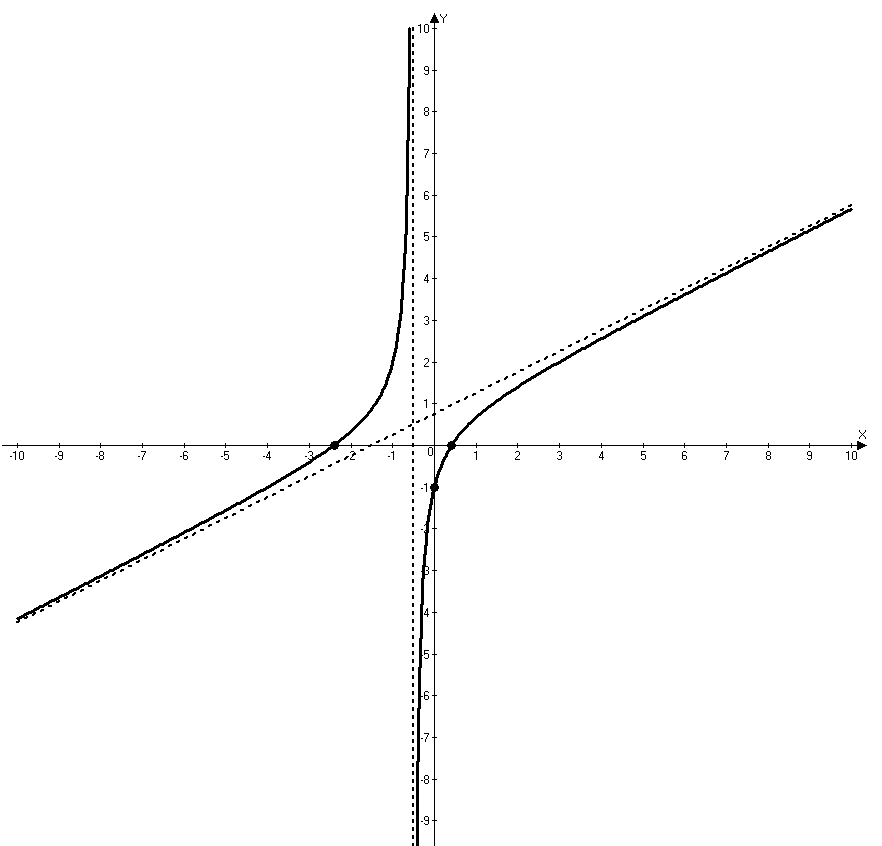
Первая производная на всей области определения положительная, значит, на всей области определения функция возрастает.

1. Выпуклость и точки перегиба. Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю, либо не существует.

Разобьем числовую ось на интервалы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | + | Не сущ. | + |
|  | Выпукла вниз | Не сущ. | Выпукла вверх |

Используя результаты исследования, построим график функции:



Задание №7

Найти полный дифференциал функции:

Решение:

Полный дифференциал функции трех переменных запишем по формуле:

При вычислении частной производной по какой-либо переменной, другие переменные считаем константами:

Полный дифференциал функции:

Задание №8

Проверить, что функция удовлетворяет уравнению:

Решение:

Найдем частные производные функции, входящие в уравнение:

Подставим данные значения в исходное уравнение:

Таким образом, заданная функция удовлетворяет уравнению

Задание №9

Найти производную функции в точке по направлению к точке

Решение:

Производную функции в точке по направлению вектора найдем по формуле:

Получаем:

Контрольная работа №2

Задание №1

Вычислить неопределенный интеграл:

Решение:

Выполним замену переменной:

Задание №2

Вычислить неопределенный интеграл:

Решение:

Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям:

Положим:

Получаем, что:

Выполним замену:

Задание №3

Вычислить определенный интеграл:

Решение:

Подынтегральная дробь является неправильной дробью. Разделим числитель на знаменатель:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |
|  |
|  |

Разложим дробь на сумму простейших дробей:

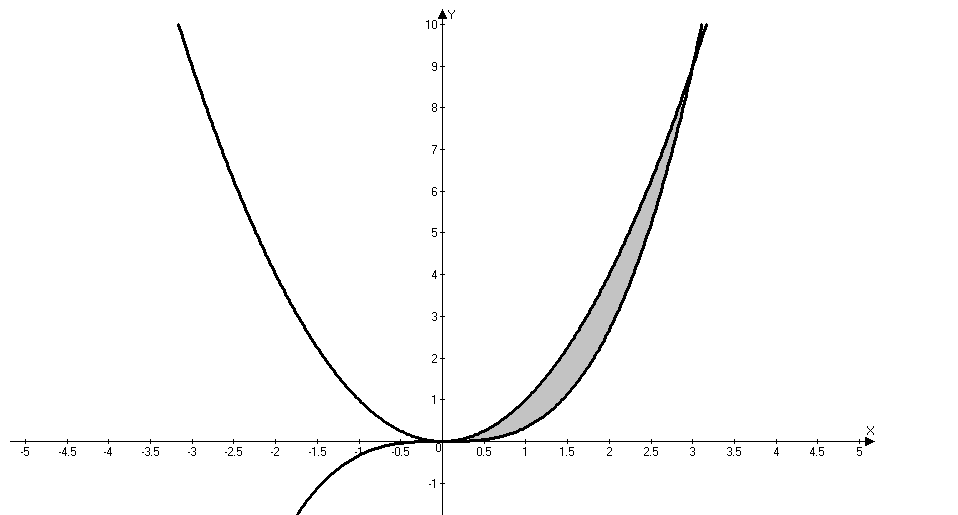
Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной в числителе левой и правой частей:

Задание №4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

Решение:

Построим фигуру и найдем точки пересечения графиков функций:



Площадь фигуры найдем как площадь криволинейной трапеции с использованием определенного интеграла:

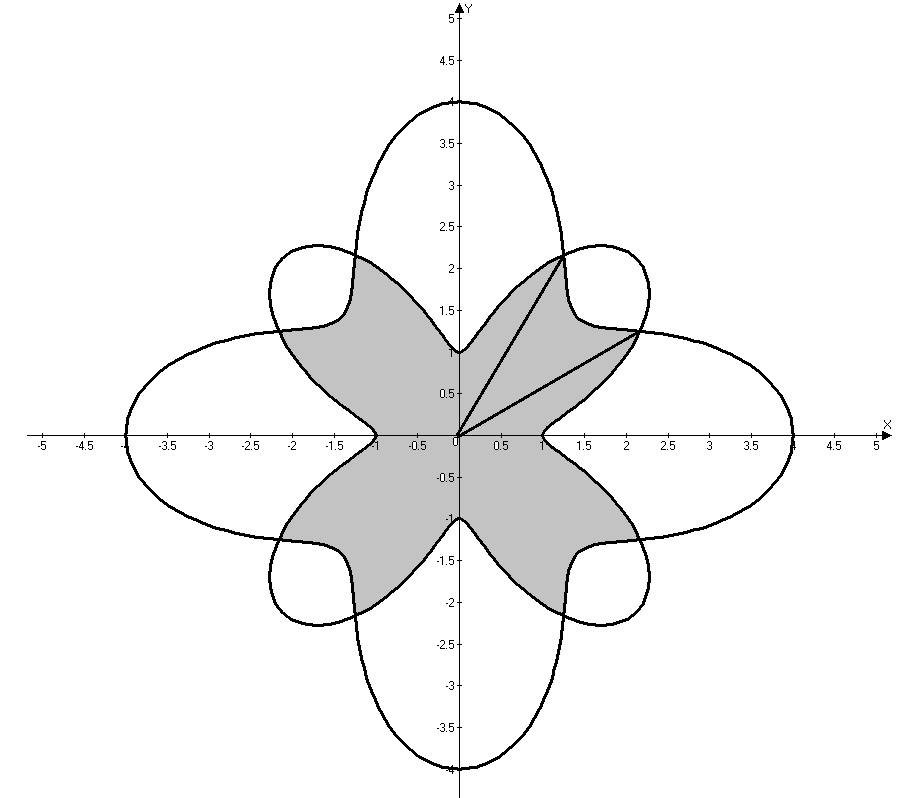
Задание №5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции, имеющим в полярных координатах уравнение:

Решение:

Площадь фигуры, заданной в полярных координатах, найдем по формуле:

Построим фигуру:



Найдем площадь фигуры, расположенной в первой четверти, а результат умножим на 4.

Найдем точки пересечения графиков функций:

Для первой четверти:

Задание №6

Вычислить длину дуги кривой при

Решение:

Длину дуги кривой, заданной в декартовых координатах, найдем по формуле:

Выполним замену:

Пределы интегрирования: