TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic
Linköpings Universitet
adnan@avdagic.net

28 mars 2017

Innehåll

1 Abstract

2 Föreläsning 2

2.1 Gränsvärden för flervarre

Exempel 1

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^4+y^2)}{x^4+y^2}, \text{ ej definierad i origo} \tag{2.1}$$

Vad händer då (x,y) närmar sig (0,0)?

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{\sin(x^4+y^2)}{x^4+y^2}$$

//sätt $t = x^4 + y^2$, $t \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$//
då fås $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, (standard gränsvärde)

Exempel 2

$$f(x,y) = \frac{x^3+xy}{x^2+y^2}, \text{ ej definierad i origo} \tag{2.2}$$

Gå mot origo via x-axeln (där $y = 0$)

$$f(x,0) = \frac{x^3+0*x}{x^2+0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \text{ då } x \to 0$$

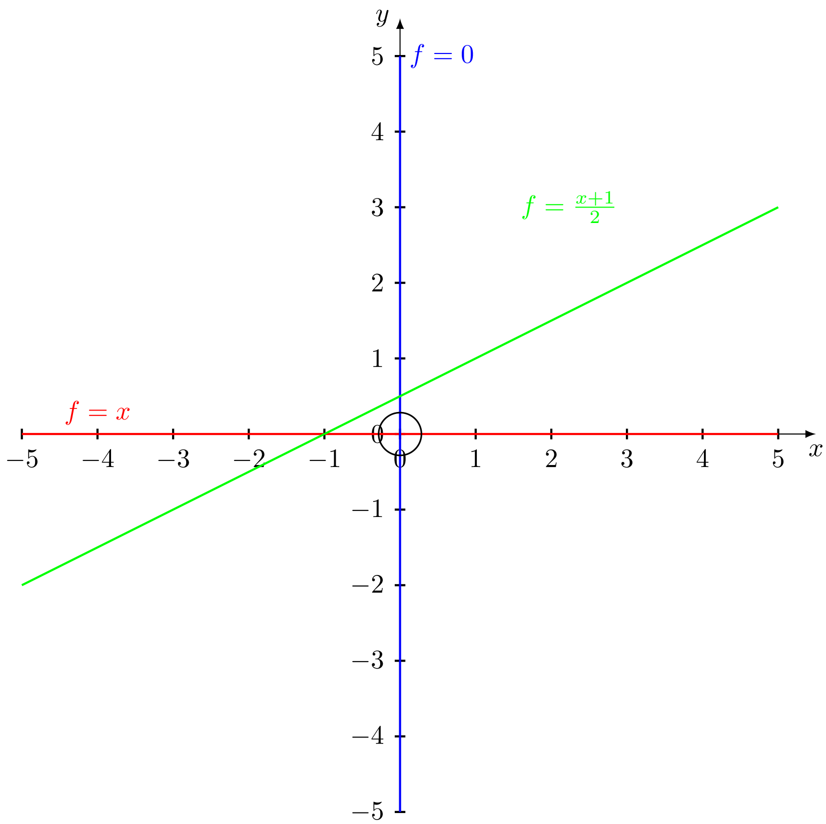
Gå mot origo via y-axeln (där $x = 0$)

$$f(0,y) = \frac{0^3+0*y}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0$$

Gå mot origo längs $y = x$

$$f(x,x) = \frac{x^3+x*x}{x^2+x^2} = \frac{x+1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0$$

Olika värden från olika riktningar
Innanför varje liten cirkel kring origo har f värden nära 0 och nära $\frac{1}{2}$. Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se 1



Figur 1: Graf i 2D

2.1.1 Definition

Funktionen $\bar{f}$ av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \to \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ så att $|\bar{f}(x) - \bar{b}| < \epsilon$ om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ och $\bar{x} \in D_f$. Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

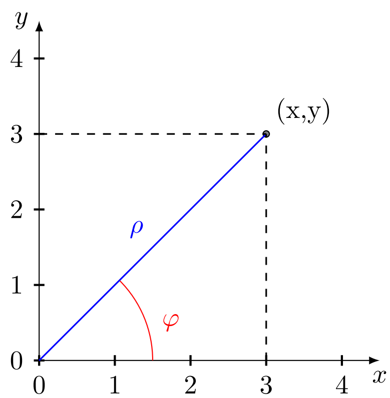
Exempel 3

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ ej definierad i origo} \tag{2.3}$$

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x| \to 0 \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$
$$\Rightarrow f(x,y) \to (0,0) \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2.2)
- Sådana test kan <u>INTE</u> visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (2.1) eller (2.3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos(\varphi) \\ y &= \rho\sin(\varphi) \end{aligned}\right\}$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \rho > 0$$
$$\tan\varphi = \tfrac{y}{x},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden: $(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$

Exempel (2.3) med polära koordinater

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \overbrace{\rho}^{\to 0} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

Exempel (2.2) med polära koordinater

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\varphi)+\rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} (\overbrace{\rho\cos^3(\varphi)}^{\to 0} + \underbrace{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}}) \Rightarrow \text{gränsvärde existerar ej}$$

2.1.2 Oändlighet i envarre och flervarre

Envarre

x kan gå mot $\pm\infty$

Flervarre

bara en ∞ nämligen $|\bar{x}| \to \infty$

2D polära

$|\bar{x}| \to \infty \iff \rho \to \infty$

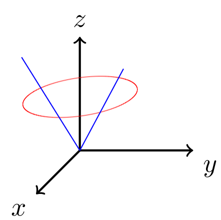
2.1.3 Definition

$\bar{f}(\bar{x}) \to \bar{b}$ då $|\bar{x}| \to \infty$ om $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\omega$ så att $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon$ om $|\bar{x}| > \omega$

Exempel 4

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{y}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho\sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to\infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\to 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \tag{2.4}$$

<u>OBS!</u> 2-variabelfunktioner som uttryckta i polärakoordinater inte beror på φ har rotationssymmetriska grafer kring z-axeln



Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

$z = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

2.1.4 3-variabler mot origo

Exempel 5

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = \;??? \tag{2.5}$$

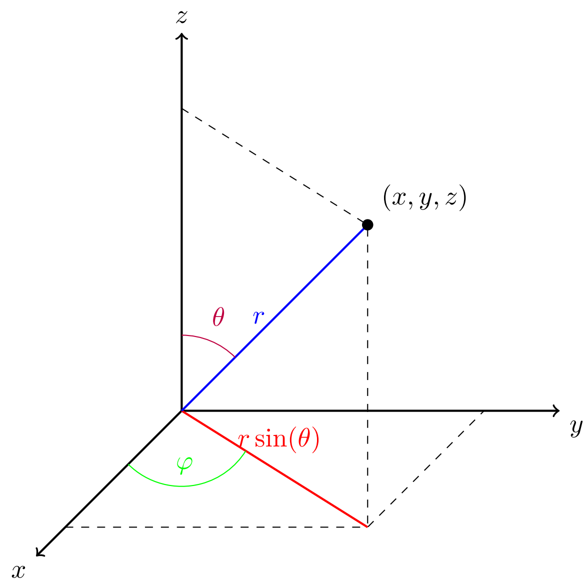
$$0 \le |\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2}| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+2z^2} \le \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \le$$

$$// \begin{array}{c} |x| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |y| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array} //$$

$$\le \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0 \text{ då } (x,y,z) \to (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = 0$$

2.2 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x & = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y & = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z & = r\cos(\theta) \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r > 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$r\sin(\theta) = \rho$

För gränsvärden där $(x, y, z) \to (0, 0, 0) \iff r \to 0$

Exempel 5 med rymdpolära koordinater

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} \overset{\text{rymdpol.koord}}{=}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2 + r^2\cos^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \overbrace{r}^{\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+\cos^2(\theta)}}_{\text{begränsad, nämnare} \geq 1 \text{ ingen risk för } /0}$$

2.2.1 Cylindriska koordinater

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\begin{cases} x & = r\cos(\varphi) \\ y & = r\sin(\varphi) \\ z & = z \end{cases}$$

3 Föreläsning 3

3.1 Partiella derivator

Exempel 1

$$f(x,y) = x^2y + x\sin(y) \tag{3.1}$$

Hur förändras f om bara x varieras? Vi vill derivera f m.a.p x och hålla y konstant. Skrivs:

$$\underbrace{f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}_{\text{båda skrivsätten används}} = 2xy + \sin(y)$$

Motsvarande då bara y varieras

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x\cos(y)$$

3.1.1 Definition

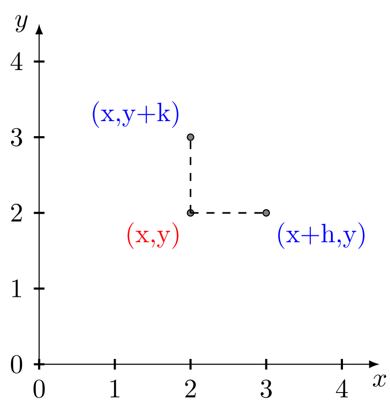
Partiella derivatan av $f(x,y)$ m.a.p x i punkten (x,y) är

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Om gränsvärde existerar!

Motsvarande för y:

$$f'_y(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$



Figur 5: Grafisk visning av hur f ändras i x- & y-riktningen

Exempel 2 3 variabler

$$f(x,y,z) = x^3y^2z + z^2e^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y,z) = & 3x^2y^2z \\ f'_y(x,y,z) = & 2x^3yz + z^2e^y \\ f'_z(x,y,z) = & x^3y^2 + 2ze^y \end{cases}$$

3.1.2 Andraderivator

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Exempel (3.1) andra derivator

$$f''_{xx} = 2y$$
$$\left.\begin{array}{l} f''_{xy} = 2x + \cos(y) \\ f''_{yx} = 2x + \cos(y) \end{array}\right\} \text{lika, ingen slump}$$
$$f''_{yy} = -x\sin(y)$$

Skriv $f \in C^r$ om f:s alla r:te-derivator är kontinuerlig.

3.1.3 Sats

$$f \in C^2 \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$$

motsvarande för ≥ 3 varianter

$f(x,y)$ har 4 andraderivator varav 3 olika
$f(x,y,z)$ har 9 andraderivator varav 6 olika

Exempel 3 Bestäm alla $f(x,y,z)$ som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x &= p(x,y,z) = 3x^2yz \quad (1)\\ f'_y &= q(x,y,z) = x^3z + 2ye^z \quad (2)\\ f'_z &= r(x,y,z) = x^3y + y^2e^z \quad (3)\end{aligned} \tag{3.2}$$

Systematisk lösning

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow f(x,y,z) = x^3yz + \overbrace{\underbrace{g(y,z)}_{\text{2-variabel}f}}^{\text{godtycklig}}\\ \underline{\text{Derivera detta m.a.p } y}\\ \Rightarrow x^3z + g'_y(y,z) = x^3z + 2ye^z \Rightarrow\\ \Rightarrow g'_y(y,z) = 2ye^z \Rightarrow\\ \Rightarrow g(y,z) = y^2e^z + \overbrace{\underbrace{h(z)}_{\text{envarre } f}}^{\text{godtycklig}} \Rightarrow\\ \Rightarrow f(x,y,z) = x^3yz + y^2e^z + h(z)\\ \underline{\text{Derivera detta m.a.p } z}\\ \Rightarrow x^3y + y^2e^z + h'(z) = x^3y + y^2e^z \Rightarrow\\ \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Svar: $f(x,y,z) = x^3yz + y^2e^z + C$,C är en godtycklig konstant

Man kan visa att systemet (1) - (3) är lösbart

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} p'_y &= q'_x\\ p'_z &= r'_x\\ q'_z &= r'_y\end{aligned}$$

Exempel 4

$$\begin{aligned} f'_x &= xy\\ f'_y &= x^2\\ &\text{olösbart ty}\\ f''_{xy} = x &\neq f''_{yx} = 2x\end{aligned}$$

3.2 Differentierbarhet

Envarre

Om $f'_a = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \exists$ (dvs f deriverbar i a) så finns talet $f'_a = A$ sådant att $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - A = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a) - Ah) = \rho(h) \to 0$

Vi vet att $f \in C^1 \Rightarrow f$ deriverbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig

Flervarre

3.2.1 Definition

$f(x, y)$ är <u>differentierbar</u> i (a, b) om $\exists$ tal A, B så att

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk) = \rho(h, k) \to 0 \text{ då } (h, k) \to (0, 0)$$

så deriverbar = differentierbar för envarre För ≥ 2 variabler gäller

3.2.2 Sats

$$f \in C^1 \overset{(1)}{\Rightarrow} f \text{ differentierbar} \begin{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \overset{(4)}{\not\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \\ \overset{(3)}{\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \overset{(5)}{\not\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \end{cases}$$

Förklaring av pilar

1. s.56-57 i boken
2. $f'_x(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \overset{f \text{ diff.bar med } k=0}{=}$
   $\lim_{h\to 0} \frac{Ah+B*0+\sqrt{h^2+0^2}\rho(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} A \quad \underbrace{\frac{\sqrt{h^2}}{h}}_{\pm 1 \text{ begränsad}} \quad \underbrace{\frac{\rho(h,0)}{h}}_{\to 0} = A \quad \exists$
3. $f(a+h, b+k) = f(a, b) + \underbrace{Ah}_{\to 0} + \underbrace{Bk}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\to 0}\underbrace{\rho(h, k)}_{\to 0} \to$
   $f(a, b)$ då $(h, k) \to (0, 0) \Rightarrow f$ kontinuerlig
4. Motexempel finns i boken s.51
5. Motexempel $f(x, y) = |x|$ i $(0, 0)$, kontinuerlig men $f'_x(x, y) \quad \nexists$

3.2.3 Linjär avbildning

Den linjära avbildningen $df_{(a,b)}$ av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, som definieras av
$df_{(a,b)}(h,k) = Ah + Bk = f'_{x(a,b)}h + f'_{y(a,b)}k$, kallas <u>differentialen</u> av f i (a,b)
ofta skrivs variablerna $h = dx$ & $k = dy$ så
$df_{(a,b)}(dx, dy) = f'_{x(a,b)}dx + f'_{y(a,b)}dy$ eller kort $df = f'_x dx + f'_y dy$

Exempel (3.1) omskrivet

$$f(x,y) = x^2y + x\sin(y) \Rightarrow df = (2xy + \sin(y))dx + (x^2 + x\cos(y))dy$$

Feluppskattning med df

Om $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ och f är differentierbar fås $f(\overline{x} + \overline{\Delta x}) - f(\overline{x}) =$
$f'_{x_1}\Delta x_1 + ... + f'_{x_n}\Delta x_n + \underbrace{\rho(\Delta x_1, ..., \Delta x_n)\sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}}_{\text{Restterm}} \approx df(\overline{\Delta x})$

Exempel 5

Bestäm rörelseenergin och uppskatta felet för massan $m = 1.0 \pm 0.1$kg med hastighet $v = 4.0 \pm 0.2\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Formel för rörelseenergi: $E = \frac{mv^2}{2}$J
Utan fel: $E = \frac{1*1.4^2}{2} = 8.0$J
Fel:

$$\Delta E = E(m + \Delta m, v + \Delta v) - E(m,v) \approx dE(\Delta m, \Delta v) =$$
$$= \frac{\partial E}{\partial m}\Delta m + \frac{\partial E}{\partial v}\Delta v = \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\frac{4^2}{2}}\Delta m + \underbrace{mv}_{1*4}\Delta v = 8\Delta m + 4\Delta v$$

$$\Rightarrow \text{ maxfel } \leq 8|\Delta m| + 4|\Delta v| = 8*0.1 + 4*0.2 = 1.6\text{J} \Rightarrow E = 8.0 \pm 1.6\text{J}$$

4 Appendix

Figurer

Tabeller