TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic
Linköpings Universitet
adnan@avdagic.net

27 mars 2017

Innehåll

1 Föreläsning 2

1.1 Gränsvärden för flervarre

Exempel 1

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}, \text{ ej definderad i origo} \tag{1}$$

Vad händer då (x,y) närmar sig (0,0)?

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}$$

//sätt $t = x^4 + y^2$, $t \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$//
då fås $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, (standard gränsvärde)

Exempel 2

$$f(x,y) = \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}, \text{ ej definderad i origo} \tag{2}$$

Gå mot origo via x-axeln (där $y = 0$)

$$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0 * x}{x^2 + 0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \text{ då } x \to 0$$

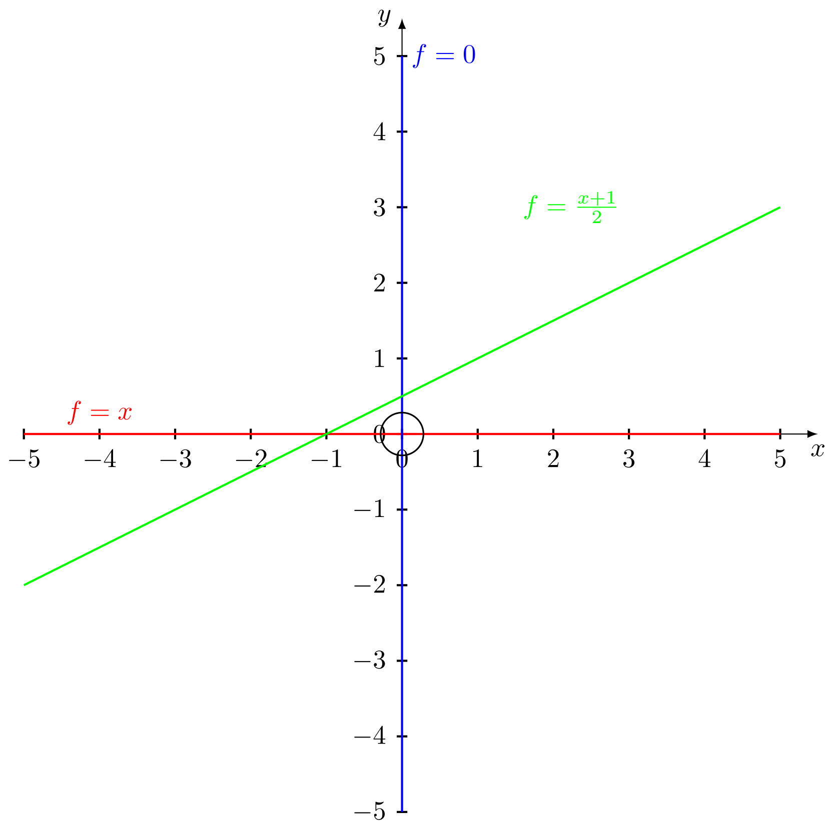
Gå mot origo via y-axeln (där $x = 0$)

$$f(0, y) = \frac{0^3 + 0 * y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0$$

Gå mot origo längs $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^3 + x * x}{x^2 + x^2} = \frac{x + 1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0$$

Olika värden från olika riktningar
Innanför varje liten cirkel kring origo har f värden nära 0 och nära $\frac{1}{2}$. Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se 1



Figur 1: Graf i 2D

Definition Funktionen $\bar{f}$ av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \to \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ så att $|\bar{f}(x) - \bar{b}| < \epsilon$ om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ och $\bar{x} \in D_f$. Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

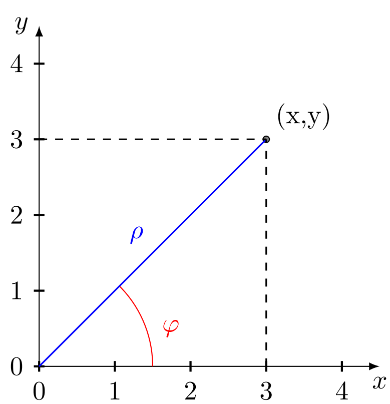
Exempel 3

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ ej definderad i origo} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 0 \le |f(x,y)| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} \le |x| \to 0 \text{ då } (x,y) \to (0,0) \\ \Rightarrow f(x,y) \to (0,0) \text{ då } (x,y) \to (0,0) \end{aligned}$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2)
- Sådana test kan <u>INTE</u> visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (1) eller (3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos(\varphi) \\ y &= \rho\sin(\varphi) \end{aligned}\right\}$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \rho > 0$$
$$\tan\varphi = \tfrac{y}{x},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden: $(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$

Exempel (3) med polära koordianter

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \overbrace{\rho}^{\to 0} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

Exempel (2) med polära koordianter

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\varphi)+\rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} (\overbrace{\rho\cos^3(\varphi)}^{\to 0} + \underbrace{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}}) \Rightarrow \text{gränsvärde exiterar ej}$$

Oändlighet i envarre och flervarre

Envarre x kan gå mot $\pm\infty$

Flervarre bara en ∞ nämligen $|\bar{x}| \to \infty$

2D polära $|\bar{x}| \to \infty \iff \rho \to \infty$

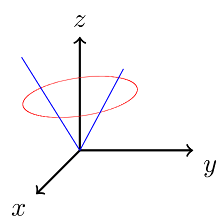
Definition

$$\bar{f}(\bar{x}) \to \bar{b} \text{ då } |\bar{x}| \to \infty \text{ om } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \omega \text{ så att } |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon \text{ om } |\bar{x}| > \omega$$

Exempel 4

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{y}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho\sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to\infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\to 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \tag{4}$$

<u>OBS!</u> 2-variablefunktioner som uttryckta i polärakoordinater inte beror på φ har rotationssymetriska grafer kring z-axeln



Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

$z = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

1.1.1 3-variabler mot origo

Exempel 5

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = \ ??? \tag{5}$$

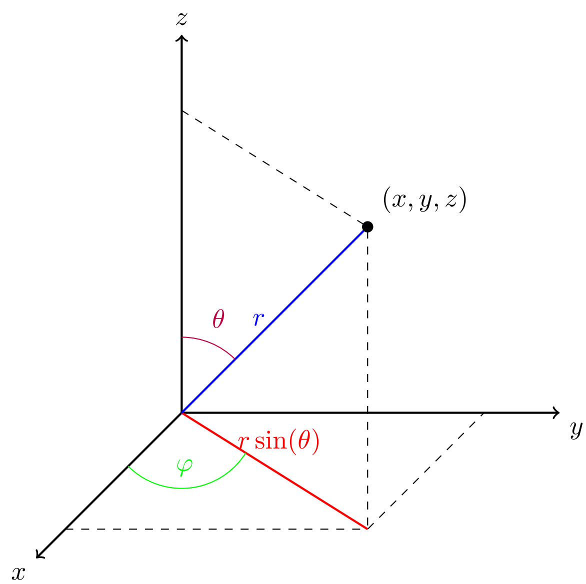
$$0 \le \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2}\right| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+2z^2} \le \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \le$$

$$// \begin{array}{l} |x| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |y| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array} //$$

$$\le \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0 \text{ då } (x,y,z) \to (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = 0$$

1.2 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$
\left.\begin{aligned}
x &= r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\
y &= r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\
z &= r\cos(\theta)
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ r > 0\\
&0 \leq \varphi \leq 2\pi\\
&0 \leq \theta \leq \pi\\
&r\,\sin(\theta) = \rho
\end{aligned}
$$

För gränsvärden där $(x, y, z) \to (0, 0, 0) \iff r \to 0$

Exemepl 5 med rymdpolära koordinater

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} \overset{\text{rymdpol.koord}}{=}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2 + r^2\cos^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \overbrace{r}^{\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+\cos^2(\theta)}}_{\text{begränsad, nämnare} \geq 1 \text{ ingen risk för } /0}$$

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

Figurer

Tabeller