

# TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic  
Linköpings Universitet  
[forelasningar@avdagic.net](mailto:forelasningar@avdagic.net)

29 april 2017



# Innehåll

<b>2</b>	<b>Föreläsning 2</b>	<b>I</b>
2.1	Gränsvärden för flervarre . . . . .	I
2.1.1	Definition . . . . .	II
2.1.2	Oändlighet i envarre och flervarre . . . . .	IV
2.1.3	Definition . . . . .	IV
2.1.4	3-variabler mot origo . . . . .	V
2.2	Rymdpolära koordinater . . . . .	VI
2.2.1	Cylindriska koordinater . . . . .	VII
<b>3</b>	<b>Föreläsning 3</b>	<b>VIII</b>
3.1	Partiella derivator . . . . .	VIII
3.1.1	Definition . . . . .	VIII
3.1.2	Andraderivator . . . . .	IX
3.1.3	Sats . . . . .	IX
3.2	Differentierbarhet . . . . .	XI
3.2.1	Definition . . . . .	XI
3.2.2	Sats . . . . .	XI
3.2.3	Linjär avbildning . . . . .	XII
<b>4</b>	<b>Föreläsning 4</b>	<b>XIII</b>
4.1	Kedjeregeln . . . . .	XIII
4.1.1	Linjärt variabelbyte . . . . .	XV
4.1.2	Byte till polära koordinater . . . . .	XV
<b>5</b>	<b>Föreläsning 5</b>	<b>XVII</b>
5.1	Gradienter . . . . .	XVII
5.1.1	Definition . . . . .	XVII
5.1.2	Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D? . . . . .	XVII
5.2	Nivåtor i 3D . . . . .	XIX
5.2.1	Definition . . . . .	XIX

## 2 Föreläsning 2

### 2.1 Gränsvärden för flervarve

#### Exempel 1

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.1)$$

Vad händer då  $(x, y)$  närmar sig  $(0, 0)$ ?

$$\lim_{x, y \rightarrow 0, 0} \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}$$

//sätt  $t = x^4 + y^2$ ,  $t \rightarrow 0$  då  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  //

då fås  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , (standard gränsvärde)

#### Exempel 2

$$f(x, y) = \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.2)$$

Gå mot origo via x-axeln (där  $y = 0$ )

$$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0 * x}{x^2 + 0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0$$

Gå mot origo via y-axeln (där  $x = 0$ )

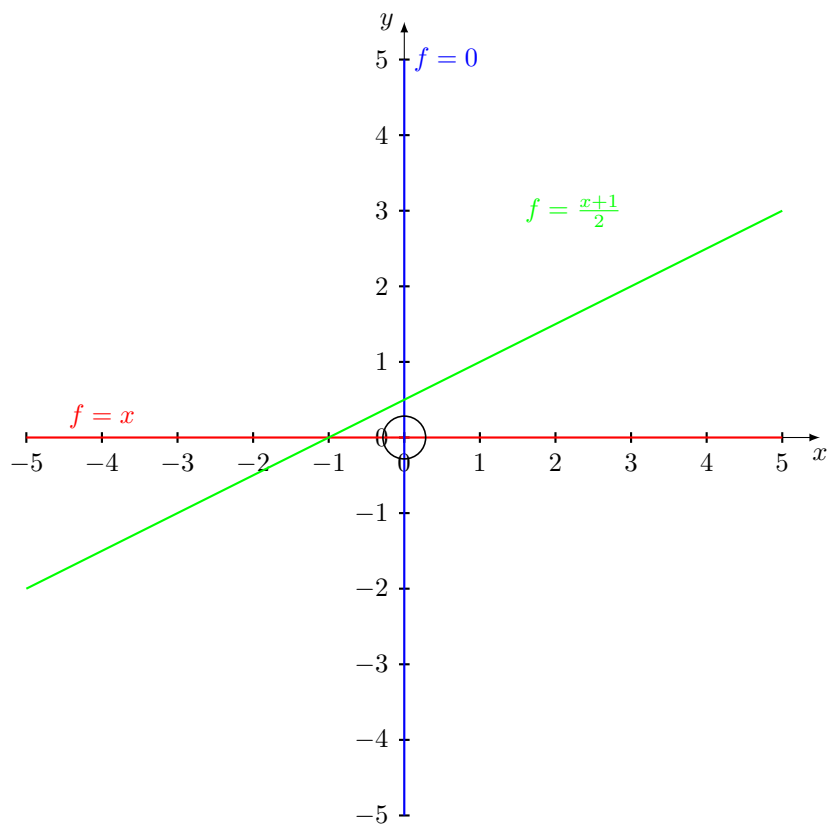
$$f(0, y) = \frac{0^3 + 0 * y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0$$

Gå mot origo längs  $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^3 + x * x}{x^2 + x^2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0$$

Olika värden från olika riktningar

Innanför varje liten cirkel kring origo har  $f$  värden nära 0 och nära  $\frac{1}{2}$ . Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se [1](#)



Figur 1: Graf i 2D

### 2.1.1 Definition

Funktionen  $\bar{f}$  av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  har gränsvärdet  $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$  då  $\bar{x} \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^n$  om  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  så att  $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon$  om  $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$  och  $\bar{x} \in D_{\bar{f}}$ . Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

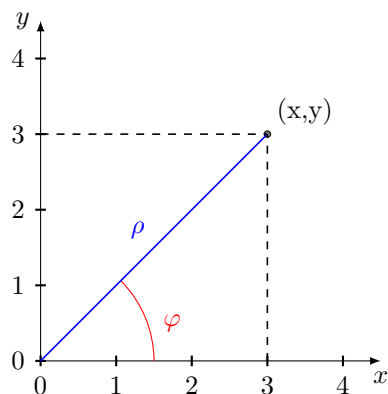
**Exempel 3**

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.3)$$

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \Rightarrow f(x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2.2)
- Sådana test kan INTE visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (2.1) eller (2.3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \rho > 0 \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden:  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \rho \rightarrow 0$

**Exempel (2.2) med polära koordinater**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2} &\stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi) + \rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \overbrace{\rho \cos^3(\varphi)}^{\rightarrow 0} + \underbrace{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}} \right) \Rightarrow \text{gränsvärde existerar ej} \end{aligned}$$

**Exempel (2.3) med polära koordinater**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \overbrace{\rho}^{\rightarrow 0} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

**2.1.2 Oändlighet i envarre och flervarre****Envarre**

$x$  kan gå mot  $\pm\infty$

**Flervarre**

bara en  $\infty$  nämligen  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$

**2D polära**

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty \iff \rho \rightarrow \infty$$

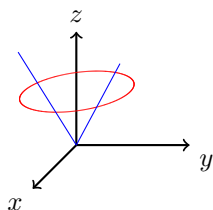
**2.1.3 Definition**

$$\bar{f}(\vec{x}) \rightarrow \bar{b} \text{ då } |\vec{x}| \rightarrow \infty \text{ om } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \omega \text{ så att } |\bar{f}(\vec{x}) - \bar{b}| < \epsilon \text{ om } |\vec{x}| > \omega$$

**Exempel 4**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{y}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho \sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\rightarrow 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \quad (2.4)$$

OBS! 2-variabelfunktioner som uttryckta i polärakordinater inte beror på  $\varphi$  har rotationssymmetriska grafer kring z-axeln



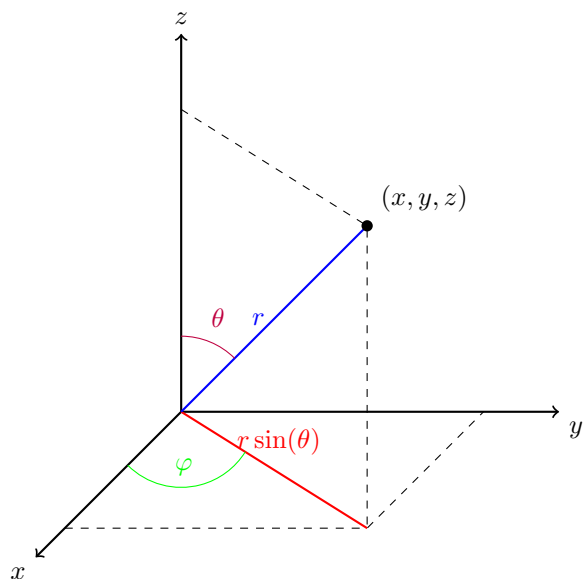
Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

**2.1.4 3-variabler mot origo****Exempel 5**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} &= ??? \quad (2.5) \\ 0 \leq \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \right| &= \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + 2z^2} \leq \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \\ &\quad |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ // \quad &|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} // \\ &|z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \\ \Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} &= 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, r > 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$r \sin(\theta) = \rho$$

För gränsvärden där  $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \iff r \rightarrow 0$



**Exempel (2.5) med rympolära koordinater**

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \stackrel{\text{rympol.koord}}{=} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^2 + r^2 \cos^2(\theta)} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\overbrace{r}^{\rightarrow 0}} \frac{\sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\underbrace{1 + \cos^2(\theta)}} \\
&\quad \text{begränsad, nämnare } \geq 1 \text{ ingen risk för } /0
\end{aligned}$$

**2.2.1 Cylindriska koordinater**

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\begin{cases} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ z &= z \end{cases}$$

## 3 Föreläsning 3

### 3.1 Partiella derivator

#### Exempel 1

$$f(x, y) = x^2y + x \sin(y) \quad (3.1)$$

Hur förändras  $f$  om bara  $x$  varieras? Vi vill derivera  $f$  m.a.p  $x$  och hålla  $y$  konstant. Skrivs:

$$\underbrace{f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}_{\text{båda skrivsätten används}} = 2xy + \sin(y)$$

Motsvarande då bara  $y$  varieras

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x \cos(y)$$

#### 3.1.1 Definition

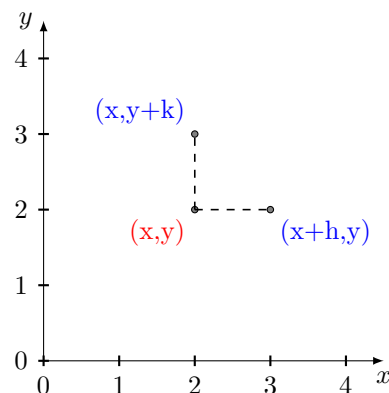
Partiella derivatan av  $f(x, y)$  m.a.p  $x$  i punkten  $(x, y)$  är

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Om gränsvärde existerar!

Motsvarande för  $y$ :

$$f'_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$



Figur 5: Grafisk visning av hur  $f$  ändras i  $x$ - &  $y$ -riktningen

**Exempel 2** 3 variabler

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z + z^2 e^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3x^2 y^2 z \\ f'_y(x, y, z) = 2x^3 y z + z^2 e^y \\ f'_z(x, y, z) = x^3 y^2 + 2z e^y \end{cases}$$

**3.1.2 Andraderivator**

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

**Exempel (3.1) andra derivator**

$$f''_{xx} = 2y$$

$$\left. \begin{aligned} f''_{xy} &= 2x + \cos(y) \\ f''_{yx} &= 2x + \cos(y) \end{aligned} \right\} \text{lika, ingen slump}$$

$$f''_{yy} = -x \sin(y)$$

Skriv  $f \in C^r$  om  $f$ :s alla  $r$ :te-derivator är kontinuerlig.

**3.1.3 Sats**

$$f \in C^2 \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$$

motsvarande för  $\geq 3$  varianter

$f(x, y)$  har 4 andraderivator varav 3 olika

$f(x, y, z)$  har 9 andraderivator varav 6 olika

**Exempel 3** Bestäm alla  $f(x, y, z)$  som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x &= p(x, y, z) = 3x^2yz & (1) \\ f'_y &= q(x, y, z) = x^3z + 2ye^z & (2) \\ f'_z &= r(x, y, z) = x^3y + y^2e^z & (3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Systematisk lösning

$$(1) \Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + \overbrace{g(y, z)}^{\substack{\text{godtycklig} \\ \text{2-variabel}}}$$

Derivera detta m.a.p  $y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3z + g'_y(y, z) &= x^3z + 2ye^z \Rightarrow \\ \Rightarrow g'_y(y, z) &= 2ye^z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(y, z) = y^2e^z + \overbrace{h(z)}^{\substack{\text{godtycklig} \\ \text{envarre } f}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + h(z)$$

Derivera detta m.a.p  $z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3y + y^2e^z + h'(z) &= x^3y + y^2e^z \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(z) = 0 &\Rightarrow h(z) = C \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Svar:  $f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + C$ ,  $C$  är en godtycklig konstant

Man kan visa att systemet (1) - (3) är lösbart

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \\ p'_y &= q'_x \\ p'_z &= r'_x \\ q'_z &= r'_y \end{aligned}$$

**Exempel 4**

$$\begin{aligned} f'_x &= xy \\ f'_y &= x^2 \\ \text{olösbart ty} \\ f''_{xy} &= x \neq f''_{yx} = 2x \end{aligned}$$

## 3.2 Differentierbarhet

### Envarre

Om  $f'_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \exists$  (dvs  $f$  deriverbar i  $a$ ) så finns talet  $f'_a = A$  sådant att  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a) - Ah) = \rho(h) \rightarrow 0$

Vi vet att  $f \in C^1 \Rightarrow f$  deriverbar  $\Rightarrow f$  kontinuerlig

### Flervarre

#### 3.2.1 Definition

$f(x, y)$  är differentierbar i  $(a, b)$  om  $\exists$  tal  $A, B$  så att

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}(f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk) = \rho(h, k) \rightarrow 0 \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

så deriverbar = differentierbar för envarre För  $\geq 2$  variabler gäller

#### 3.2.2 Sats

$$f \in C^1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f \text{ differentierbar} \begin{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \stackrel{(4)}{\nRightarrow} f \text{ kontinuerlig} \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \stackrel{(5)}{\nRightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \end{cases}$$

### Förklaring av pilar

1. s.56-57 i boken

$$2. f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \stackrel{f \text{ diff. bar med } k=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ah + B \cdot 0 + \sqrt{h^2 + 0^2} \rho(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A + \underbrace{\frac{\sqrt{h^2}}{h}}_{\pm 1 \text{ begränsad}} \underbrace{\frac{\rho(h, 0)}{h}}_{\rightarrow 0} = A \quad \exists$$

$$3. f(a+h, b+k) = f(a, b) + \underbrace{Ah}_{\rightarrow 0} + \underbrace{Bk}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\rho(h, k)}_{\rightarrow 0} \rightarrow f(a, b) \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow f \text{ kontinuerlig}$$

4. Motexempel finns i boken s.51

5. Motexempel  $f(x, y) = |x|$  i  $(0, 0)$ , kontinuerlig men  $f'_x(x, y) \nexists$

### 3.2.3 Linjär avbildning

Den linjära avbildningen  $df_{(a,b)}$  av typ  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , som definieras av  $df_{(a,b)}(h, k) = Ah + Bk = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$ , kallas differentialen av  $f$  i  $(a, b)$  ofta skrivs variablerna  $h = dx$  &  $k = dy$  så  $df_{(a,b)}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$  eller kort  $df = f'_x dx + f'_y dy$

#### Exempel (3.1) omskrivet

$$f(x, y) = x^2y + x \sin(y) \Rightarrow df = (2xy + \sin(y))dx + (x^2 + x \cos(y))dy$$

#### Feluppskattning med $df$

Om  $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$  och  $f$  är differentierbar fås  $f(\overline{x} + \overline{\Delta x}) - f(\overline{x}) = f'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n + \underbrace{\rho(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}}_{\text{Restterm}} \approx df(\overline{\Delta x})$

#### Exempel 5

Bestäm rörelseenergin och uppskatta felet för massan  $m = 1.0 \pm 0.1 \text{ kg}$  med hastigheten  $v = 4.0 \pm 0.2 \text{ m s}^{-1}$ .

Formel för rörelseenergi:  $E = \frac{mv^2}{2} \text{ J}$

Utan fel:  $E = \frac{1 \cdot 4^2}{2} = 8.0 \text{ J}$

Fel:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(m + \Delta m, v + \Delta v) - E(m, v) \approx dE(\Delta m, \Delta v) = \\ &= \frac{\partial E}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial E}{\partial v} \Delta v = \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\frac{4^2}{2}} \Delta m + \underbrace{mv}_{1 \cdot 4} \Delta v = 8 \Delta m + 4 \Delta v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{maxfel} \leq 8|\Delta m| + 4|\Delta v| = 8 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 1.6 \text{ J} \Rightarrow E = 8.0 \pm 1.6 \text{ J}$$

## 4 Föreläsning 4

### 4.1 Kedjeregeln

**Envarre**

Exempel

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} 2x$$

Allmänt

$$f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{yttre}} \underbrace{g'(x)}_{\text{inre}}$$

**Generalisering till flervarre**

$$\underbrace{f(g(x))}_{\text{envarre}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(g(\bar{x})) \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(x)) \end{array} \right\} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(\bar{x})) \Rightarrow \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$$

**Förklaring av pilar**

#### 1. Exempel 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2 y} &= e^{x^2 y} * \underbrace{2xy}_{\text{inre m.a.p } x} \\ \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2 y} &= e^{x^2 y} * \underbrace{x^2}_{\text{inre m.a.p } y} \end{aligned}$$

**Allmänt**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) g'_x(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) g'_y(x, y) \end{array} \right.$$

Motsvarande för  $\geq 3$  variabler

#### Exempel 2

Visa att  $xh'_x - 2yh'_y = 0 \quad \forall$  2 variabel funktioner  $h(x, y)$  på formen  $h(x, y) = f(x^2 y)$  där  $f$  är en envariabelfunktion. Lösning:

$$xh'_x - 2yh'_y = x f'(x^2 y) 2xy - 2y f'(x^2 y) x^2 = 0 \quad \forall f$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(\bar{g}(x))) &= \frac{d}{dx}(f(g_1(x), g_2(x))) \stackrel{\text{def av } \frac{d}{dx}}{=} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(\overbrace{g_1(x+l)}^{s+h}, \overbrace{g_2(x+l)}^{t+k}) - f(\overbrace{g_1(x)}^s, \overbrace{g_2(x)}^t)}{l} \stackrel{\text{diff.bar}}{=} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'_s(s, t)h + f'_t(s, t)k + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)}{l} = \\
&= \left/ \begin{array}{l} h = g_1(x+l) - g_1(x) \rightarrow 0 \text{ då } l \rightarrow 0 \text{ om } g_1 \text{ är kontinuerlig} \\ k = g_2(x+l) - g_2(x) \rightarrow 0 \text{ då } l \rightarrow 0 \text{ om } g_2 \text{ är kontinuerlig} \end{array} \right/ = \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \left( f'_s(s, t) \frac{\overbrace{g_1(x+l) - g_1(x)}^{\rightarrow g'_1(x)}}{l} + f'_t(s, t) \frac{\overbrace{g_2(x+l) - g_2(x)}^{\rightarrow g'_2(x)}}{l} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{l}\right)^2}_{\rightarrow (g'_1(x))^2 + (g'_2(x))^2 \text{ begränsad}}} \overbrace{\rho(h, k)}^{\rightarrow 0} \right) = \\
&= f'_s(s, t)g'_1(x) + f'_t(s, t)g'_2(x) \\
&\quad \text{eller } \frac{df}{dx} = f'_s s'_x + f'_t t'_x
\end{aligned}$$

3. Fås av 1 &amp; 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(\overbrace{g_1(x, y)}^s, \overbrace{g_2(x, y)}^t) &= f'_s s'_x + f'_t t'_x \\
\frac{\partial}{\partial y} f(g_1(x, y), g_2(x, y)) &= f'_s s'_y + f'_t t'_y
\end{aligned}$$

**Matrisform**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(x, y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f'_s & f'_t \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(s, t)} \begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix}$$

Motsvarande för  $\geq 3$  variabler



**Exempel** Lös den partiella differentialekvationen

$$f'_x - f'_y = y - x \quad (4.1)$$

med bivillkoret

$$f(x, 0) = x^2 \quad (4.2)$$

Ledning: inför nya variabler  $\begin{cases} s = x + y \\ t = xy \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Kedjeregeln } \begin{cases} f'_s s'_x + f'_t t'_x = f'_s \times 1 + f'_t y \\ f'_s s'_y + f'_t t'_y = f'_s \times 1 + f'_t x \end{cases} \text{ sätt in i (4.1)} \\ \Rightarrow (f'_s + f'_t y) - (f'_s + f'_t x) = y - x \Rightarrow f'_t \times (y - x) = y - x, \text{ ska gälla alla } (x, y) \\ \Rightarrow f'_t = 1 \Rightarrow f_t = t + \underbrace{g(s)}_{\text{godtycklig}} \Rightarrow \underline{f(x, y) = xy + g(x, y)} \text{ [alla lösningar på (4.1)]} \end{aligned}$$

Bivillkoret (4.2) ger oss  $f(x, 0) = x \times 0 + g(x) = x^2 \Rightarrow g(x + 0) = x^2 \Rightarrow$   
Lösningen blir  $f(x, y) = xy + (x + y)^2$

#### 4.1.1 Linjärt variabelbyte

$$\begin{cases} s = ax + by \\ t = cx + dy \end{cases} \Rightarrow \underset{X_{\text{f}}}{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}} = \underset{T^{-1}}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{X_{\text{e}}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Matris för kedjeregeln

$$\begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^{-1} !$$

#### 4.1.2 Byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ t = \rho \sin(\varphi) \end{cases} \text{ Enklast med } \rho \text{ \& } \varphi \text{ derivator i vänsterled i kedjeregeln}$$

$$\begin{cases} f'_\rho = f'_x x'_\rho + f'_y y'_\rho = f'_x \cos(\varphi) + f'_y \sin(\varphi) \\ f'_\varphi = f'_x x'_\varphi + f'_y y'_\varphi = f'_x (-\rho \sin(\varphi)) + f'_y \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

Matrisform

$$\begin{pmatrix} f'_\rho & f'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

**Exempel** Bestäm alla  $f(x, y)$  som uppfyller

$$xf''_{xy} - yf''_{yy} - f'_y = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Ledning: inför } \begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$$

Översätt ekvationen till  $u$  &  $v$ . Kedjeregeln

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + yf'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = xf'_v \end{cases}$$

Operator skrivsätt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial v} \end{cases} \quad \begin{cases} ( )'_x = ( )'_u + ( )'_v \\ ( )'_y = x ( )'_v \end{cases}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (xf'_v)'_y = x(f'_v)'_y = x \times x(f'_v)'_v = x^2 f''_{vv}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'_u + yf'_v)'_y = (f'_u)'_y + f'_v + y(f'_v)'_y = x f''_{uv} + f'_v + y x f''_{vv}$$

Sätt in i (4.2)  $\Rightarrow$

$$x(x f''_{uv} + f'_v + y x f''_{vv}) - y(x^2 f''_{vv}) - x f'_v = 0$$

$$x^2 f''_{uv} + x f'_v + y x^2 f''_{vv} - y x^2 f''_{vv} - x f'_v = 0$$

$$\Rightarrow x^2 f''_{uv} = 0, \quad \forall(x, y) \Rightarrow f''_{uv} = 0 \iff (f'_u)'_v$$

$$\Rightarrow f'_u = g(u), \text{ godtycklig funktion } g(u)$$

$$\Rightarrow f = G(u) + h(v), \text{ godtycklig funktion } h(v)$$

Svar:  $f(x, y) = G(x) + h(xy)$ ,  $g = G'$  &  $h$  godtyckliga funktioner

## 5 Föreläsning 5

### 5.1 Gradienter

#### 5.1.1 Definition

Gradienten av  $f(x, y)$  är vektorn  $\nabla f = \text{grad } f = (f'_x, f'_y)$   
 För  $g(x, y, z)$  är  $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z)$  och motsvarande för  $\geq 4$  variabler

Hessianen av  $f(x, y)$  resp  $g(x, y, z)$  är matrisen

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{resp } Hg = \begin{pmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} & g''_{xz} \\ g''_{yx} & g''_{yy} & g''_{yz} \\ g''_{zx} & g''_{zy} & g''_{zz} \end{pmatrix}$$

symmetriska om  $f, g \in C^2$ , mer om  $H$  i samband med max/min-problem.

#### 5.1.2 Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D?

##### Kurvor i 2D

Tangenter och normaler (allmänt)

Tangentvektor  $\vec{T} = (v_1, v_2)$

Normalvektor  $\vec{N} = k(v_2, -v_1)$  ty ger

$$\vec{T} \bullet \vec{N} = v_1kv_2 - v_2kv_1 = 0 \Rightarrow \text{ortogonala}$$

Ekvivalent för tangentlinje i  $(x, y)$  är på tangenten  $\iff$

$$\underbrace{(x-a, y-b) \bullet \vec{N}}_{\text{Parallell med } \vec{T}} = 0 \iff v_2x - v_1y = \underbrace{v_2a - v_1b}_{\text{Konstant}}$$

$$\text{Parameterform } \begin{cases} x = a + tv_2 \\ y = b + tv_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ parameter}$$

Ekvation för normallinjen:  $(x, y)$  är på normalen  $\iff$

$$\underbrace{(x-a, y-b) \times (v_1, v_2)}_{\text{Parallell med } \vec{N}} = 0 \iff v_1x + v_2y = \underbrace{v_1a + v_2b}_{\text{Konstant}}$$

$$\text{Parameterform } \begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b - tv_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

## 1. Kurvor på parameterform

**Ex**

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \iff (x, y) = (1, 2) + t(-1, 1) \quad [\text{rät linje}]$$

**Ex**

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \quad [\text{enhetscirkeln}]$$

Två punkter på kurvan  $\bar{r}(t)$  &  $\bar{r}(t + \Delta t)$ 

$$\begin{aligned} \text{Låt } \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{T}(t) = r'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}}{\Delta t} = (x'(t), y'(t)) \\ &= \text{ger tangentvektorn till kurvan, exempelvis har enhetscirkeln} \end{aligned}$$

$$\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$$

2. Nivåkurvor  $f(x, y) = C$ Om  $f(x, y) = C$  parametreras med  $t$  som  $(x(t), y(t))$  ger kedjeregeln

$$0 = \frac{d}{dt} \overbrace{f(x(t), y(t))}^{\text{konstant} = C} = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = \underbrace{(f'_x, f'_y)}_{\nabla f} \bullet \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\bar{T}}$$

 $\Rightarrow \nabla f$  är normalvektor till nivåkurvan**Ex**

$$\text{Enhetscirkeln } [f(x, y) = x^2 + y^2 = 1] \text{ har } \nabla f = (2x, 2y) = 2(x, y)$$

## 3. Grafer

 $y = h(x)$  kan föras på

- parameterform:  $t = x$  ger  $(x, y) = (t, h(t))$   
 $\Rightarrow \bar{T} = (x', y') = (t, h(t))$
- nivåkurveform: sätt  $f(x, y) = y - h(x) = 0$   
 $\Rightarrow \bar{N} = \nabla f = (f'_x, f'_y) = (-h'(x), 1)$

## 5.2 Nivåtor i 3D

$$g(x, y, z) = C$$

Med kedjeregeln visas på liknande sätt som för nivåkurvor att

$$\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) \text{ är } \bar{N} \text{ till nivåytan}$$

**Ex**

Enhetssfären  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$  har  $\bar{N} = \nabla g = (2x, 2y, 2z)$   
 I punkten  $P : (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  är  $\bar{N} = (2 \times \frac{2}{3}, 2 \times \frac{1}{3}, 2 \times \frac{2}{3})$  och tangentplanet i P är  
 $(x - \frac{2}{3}, y - \frac{1}{3}, z - \frac{2}{3}) = \bar{N} = 0 \iff 2x + y + 2z = 3$

En graf  $z = f(x, y)$  kan skrivas som nivåytan  $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$   
 $\Rightarrow \bar{N}$  är  $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) = (f'_x, f'_y, -1)$

**Ex**

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f'_x = 2x$$

$$f'_y = 2y$$

har i punkten  $(1, 2, 5)$

$$\bar{N} = (f'_x(1, 2), f'_y(1, 2), -1) = (2, 4, -1)$$

### 5.2.1 Definition

Riktningensderivatan av  $f(x, y)$  i punkten  $(a, b)$  och riktning  $\bar{v} = (v_1, v_2)$  där  $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$  är

$$f'_{\bar{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$$

Mäter hur  $f$  ändras i  $\bar{v}$ :s riktning

( $|\bar{v}| > 1$  behövs för att  $f'_{\bar{v}}$  inte ska bero på  $\bar{v}$ :s längd) Partiella derivator är  
 specialfall t.ex.  $\bar{v} = \bar{e}_1 = (1, 0)$  ger  $f'_{\bar{v}} = f'_x$  Motsvarande gäller för  $\geq 3$  variabler

## 5.2.2 Sats

$$f \text{ differentierbar} \Rightarrow f'_v = \nabla f \bullet \bar{v}$$

Ex

$$\bar{v} = (1, 0) \Rightarrow f'_v = (f'_x, f'_y) \bullet (1, 0) = f'_x$$

Ex

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \Rightarrow \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

I punkten  $(a, b, c) = (2, -1, 1)$  och i riktningen  $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$  från punkten är

$$f'_v(2, -1, 1) = \nabla f(a, b, c) \bullet \bar{v} = (1, -4, 6) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2) = \frac{1 \times 1 - 4 \times 0 + 6 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

## 5.2.3 Allmänt

$$f'_v = \nabla f \bullet \bar{v} = |\nabla f| \underbrace{|\bar{v}|}_{=1} \cos \alpha$$

Maximal då  $\alpha = 0$ , dvs då  $\bar{v}$  väljs åt samma håll som  $\nabla f \Rightarrow$

$$\nabla f \text{ pekar i den riktning } f \text{ växer snabbast i}$$

$$f'_v = 0 \text{ då } \bar{v} \text{ är en tangent till nivåkurvan/ytan}$$

## 6 Appendix

### Figurer

1	Graf i 2D . . . . .	II
2	Graf för polära koordinater . . . . .	III
3	Exempel på rotationssymmetri . . . . .	V
4	Rymdpolära koordinater . . . . .	VI
5	Grafisk visning av hur $f$ ändras i $x$ - & $y$ -riktningen . . . . .	VIII

### Tabeller