TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic
Linköpings Universitet
forelasningar@avdagic.net

8 maj 2017

Innehåll

2 Föreläsning 2

2.1 Gränsvärden för flervarre

2.1.1 Exempel 1

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^4+y^2)}{x^4+y^2}, \text{ ej definierad i origo} \tag{2.1}$$

Vad händer då (x,y) närmar sig (0,0)?

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{\sin(x^4+y^2)}{x^4+y^2}$$

//sätt $t = x^4 + y^2$, $t \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$//
då fås $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, (standard gränsvärde)

2.1.2 Exempel 2

$$f(x,y) = \frac{x^3+xy}{x^2+y^2}, \text{ ej definierad i origo} \tag{2.2}$$

Gå mot origo via x-axeln (där $y = 0$)

$$f(x,0) = \frac{x^3+0*x}{x^2+0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \text{ då } x \to 0$$

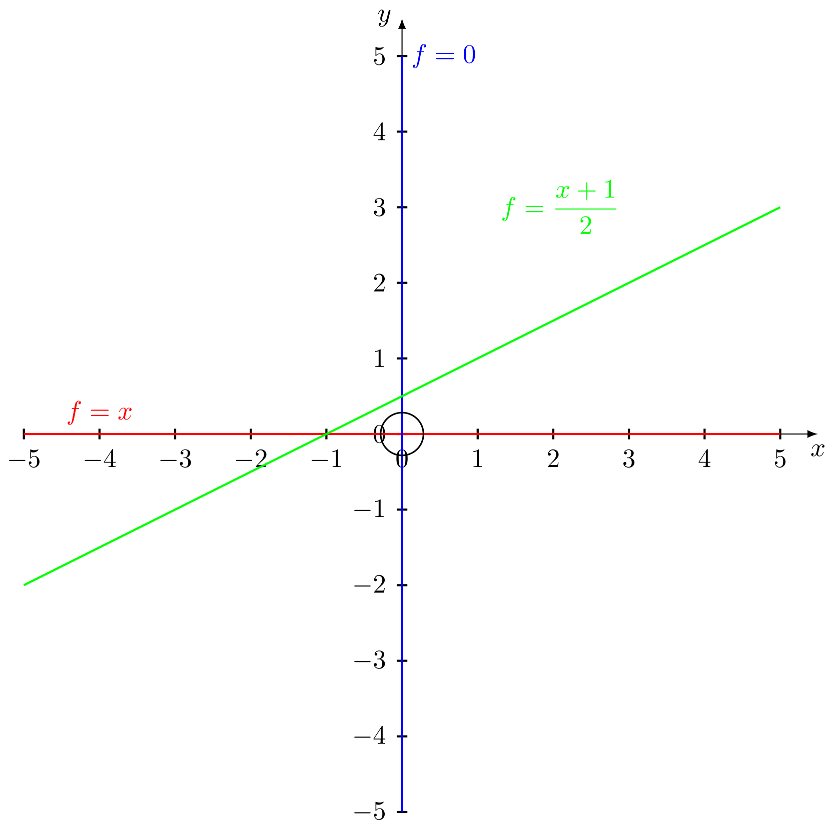
Gå mot origo via y-axeln (där $x = 0$)

$$f(0,y) = \frac{0^3+0*y}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0$$

Gå mot origo längs $y = x$

$$f(x,x) = \frac{x^3+x*x}{x^2+x^2} = \frac{x+1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0$$

Olika värden från olika riktningar
Innanför varje liten cirkel kring origo har f värden nära 0 och nära $\frac{1}{2}$. Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se 1 on page II



Figur 1: Graf i 2D

2.1.3 Definition

Funktionen $\bar{f}$ av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \to \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ så att $|\bar{f}(x) - \bar{b}| < \epsilon$ om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ och $\bar{x} \in D_f$. Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

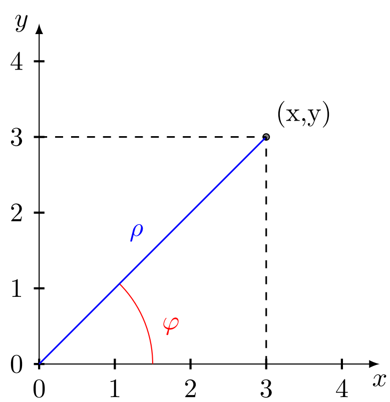
2.1.4 Exempel 3

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ ej definierad i origo} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x| \to 0 \text{ då } (x,y) \to (0,0) \\ \Rightarrow f(x,y) \to (0,0) \text{ då } (x,y) \to (0,0) \end{aligned}$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2.2)
- Sådana test kan INTE visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (2.1) eller (2.3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos(\varphi) \\ y &= \rho\sin(\varphi) \end{aligned}\right\}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \ \rho > 0$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden: $(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$

Exempel (2.2) med polära koordinater

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\varphi)+\rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}(\overbrace{\rho\cos^3(\varphi)}^{\to 0}+\underbrace{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}}) \Rightarrow \text{gränsvärde existerar ej}$$

Exempel (2.3) med polära koordinater

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \overbrace{\rho}^{\to 0} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

2.2 Oändlighet i envarre och flervarre

Envarre

x kan gå mot $\pm\infty$

Flervarre

bara en ∞ nämligen $|\bar{x}| \to \infty$

2D polära

$|\bar{x}| \to \infty \iff \rho \to \infty$

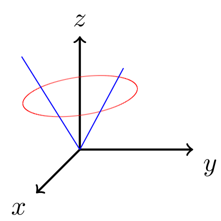
2.2.1 Definition

$$\bar{f}(\bar{x}) \to \bar{b} \text{ då } |\bar{x}| \to \infty \text{ om } \forall\epsilon > 0 \quad \exists\omega \text{ så att } |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon \text{ om } |\bar{x}| > \omega$$

2.2.2 Exempel 4

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{y}{x^2+y^2} \overset{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho\sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to\infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\to 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \tag{2.4}$$

<u>OBS!</u> 2-variabelfunktioner som uttryckta i polärakoordinater inte beror på φ har rotationssymmetriska grafer kring z-axeln



Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

$z = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

2.3 3-variabler mot origo

2.3.1 Exempel 5

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = \ ??? \tag{2.5}$$

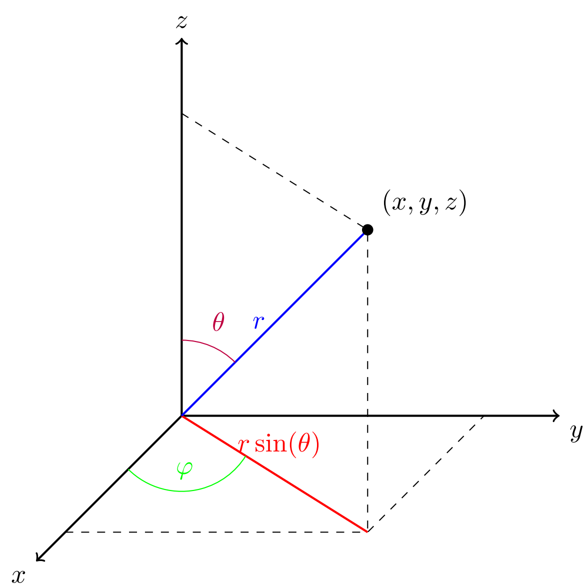
$$0 \leq \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2}\right| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+2z^2} \leq \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \leq$$

$$// \begin{array}{c} |x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array} //$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0 \text{ då } (x,y,z) \to (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} = 0$$

2.4 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r > 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$r\sin(\theta) = \rho$

För gränsvärden där $(x, y, z) \to (0, 0, 0) \iff r \to 0$

Exempel (2.5) med rymdpolära koordinater

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+2z^2} \overset{\text{rymdpol.koord}}{=}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2 + r^2\cos^2(\theta)} =$$
$$= \lim_{r\to 0} \overbrace{r}^{\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+\cos^2(\theta)}}_{\text{begränsad, nämnare } \geq 1 \text{ ingen risk för } /0}$$

2.4.1 Cylindriska koordinater

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\begin{cases} x & = r\cos(\varphi) \\ y & = r\sin(\varphi) \\ z & = z \end{cases}$$

3 Föreläsning 3

3.1 Partiella derivator

3.1.1 Exempel 1

$$f(x,y) = x^2y + x\sin(y) \tag{3.1}$$

Hur förändras f om bara x varieras? Vi vill derivera f m.a.p x och hålla y konstant. Skrivs:

$$\underbrace{f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}_{\text{båda skrivsätten används}} = 2xy + \sin(y)$$

Motsvarande då bara y varieras

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x\cos(y)$$

3.1.2 Definition

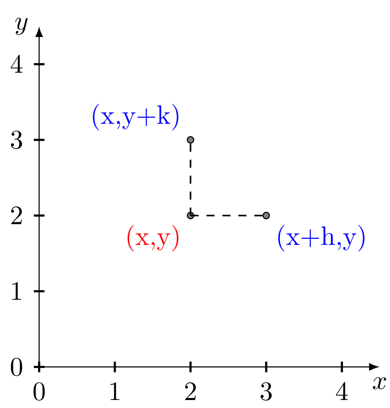
Partiella derivatan av $f(x,y)$ m.a.p x i punkten (x,y) är

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Om gränsvärde existerar!

Motsvarande för y:

$$f'_y(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$



Figur 5: Grafisk visning av hur f ändras i x- & y-riktningen

3.1.3 Exempel 2

3 variabler

$$f(x,y,z) = x^3y^2z + z^2e^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y,z) = & 3x^2y^2z \\ f'_y(x,y,z) = & 2x^3yz + z^2e^y \\ f'_z(x,y,z) = & x^3y^2 + 2ze^y \end{cases}$$

3.1.4 Andraderivator

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Exempel (3.1) andra derivator

$$f''_{xx} = 2y$$

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xy} = 2x + \cos(y) \\ f''_{yx} = 2x + \cos(y) \end{array}\right\} \text{lika, ingen slump}$$

$$f''_{yy} = -x\sin(y)$$

Skriv $f \in C^r$ om f:s alla r:te-derivator är kontinuerlig.

3.1.5 Sats

$$f \in C^2 \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$$

motsvarande för ≥ 3 varianter

$f(x,y)$ har 4 andraderivator varav 3 olika
$f(x,y,z)$ har 9 andraderivator varav 6 olika

3.1.6 Exempel 3

Bestäm alla $f(x, y, z)$ som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x &= p(x, y, z) = 3x^2yz \quad (1) \\ f'_y &= q(x, y, z) = x^3z + 2ye^z \quad (2) \\ f'_z &= r(x, y, z) = x^3y + y^2e^z \quad (3) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Systematisk lösning

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + \overbrace{\underbrace{g(y, z)}_{\text{2-variabel}f}}^{\text{godtycklig}} \\ \underline{\text{Derivera detta m.a.p } y} \\ \Rightarrow x^3z + g'_y(y, z) = x^3z + 2ye^z \Rightarrow \\ \Rightarrow g'_y(y, z) = 2ye^z \Rightarrow \\ \Rightarrow g(y, z) = y^2e^z + \overbrace{\underbrace{h(z)}_{\text{envarre } f}}^{\text{godtycklig}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + h(z) \\ \underline{\text{Derivera detta m.a.p } z} \\ \Rightarrow x^3y + y^2e^z + h'(z) = x^3y + y^2e^z \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Svar: $f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + C$,C är en godtycklig konstant

Man kan visa att systemet (1) - (3) är lösbart

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \\ p'_y &= q'_x \\ p'_z &= r'_x \\ q'_z &= r'_y \end{aligned}$$

3.1.7 Exempel 4

$$\begin{aligned} f'_x &= xy \\ f'_y &= x^2 \\ &\text{olösbart ty} \\ f''_{xy} = x &\neq f''_{yx} = 2x \end{aligned}$$

3.2 Differentierbarhet

Envarre

Om $f'_a = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\exists$ (dvs f deriverbar i a) så finns talet $f'_a = A$ sådant att $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - A = \dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a)-Ah) = \rho(h) \to 0$

Vi vet att $f \in C^1 \Rightarrow f$ deriverbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig

Flervarre

3.2.1 Definition

$f(x,y)$ är <u>differentierbar</u> i (a,b) om $\exists$ tal A, B så att

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk) = \rho(h,k) \to 0 \text{ då } (h,k)\to(0,0)$$

så deriverbar = differentierbar för envarre För ≥ 2 variabler gäller

3.2.2 Sats

$$f \in C^1 \overset{(1)}{\Rightarrow} f \text{ differentierbar} \begin{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \overset{(4)}{\not\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \\ \overset{(3)}{\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \overset{(5)}{\not\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \end{cases}$$

Förklaring av pilar

1. s.56-57 i boken
2. $f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \overset{f \text{ diff.bar med } k=0}{=}$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{Ah + B*0 + \sqrt{h^2+0^2}\rho(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} A + \underbrace{\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}}_{\pm 1 \text{ begränsad}} \underbrace{\dfrac{\rho(h,0)}{h}}_{\to 0} = A \quad \exists$
3. $f(a+h,b+k) = f(a,b) + \underbrace{Ah}_{\to 0} + \underbrace{Bk}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\to 0}\underbrace{\rho(h,k)}_{\to 0} \to$ $f(a,b)$ då $(h,k)\to(0,0) \Rightarrow f$ kontinuerlig
4. Motexempel finns i boken s.51
5. Motexempel $f(x,y) = |x|$ i $(0,0)$, kontinuerlig men $f'_x(x,y) \quad \nexists$

3.2.3 Linjär avbildning

Den linjära avbildningen $df_{(a,b)}$ av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, som definieras av
$df_{(a,b)}(h,k) = Ah + Bk = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$, kallas <u>differentialen</u> av f i (a,b)
ofta skrivs variablerna $h = dx$ & $k = dy$ så
$df_{(a,b)}(dx,dy) = f'_x(a,b)dx + f'_y(a,b)dy$ eller kort $df = f'_x dx + f'_y dy$

Exempel (3.1) omskrivet

$$f(x,y) = x^2y + x\sin(y) \Rightarrow df = (2xy + \sin(y))dx + (x^2 + x\cos(y))dy$$

Feluppskattning med df

Om $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ och f är differentierbar fås $f(\overline{x} + \overline{\Delta x}) - f(\overline{x}) =$
$f'_{x_1}\Delta x_1 + ... + f'_{x_n}\Delta x_n + \underbrace{\rho(\Delta x_1, ..., \Delta x_n)\sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}}_{\text{Restterm}} \approx df(\overline{\Delta x})$

3.2.4 Exempel 5

Bestäm rörelseenergin och uppskatta felet för massan $m = 1.0 \pm 0.1$kg med hastigheten $v = 4.0 \pm 0.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Formel för rörelseenergi: $E = \frac{mv^2}{2}$J
Utan fel: $E = \frac{1 * 1.4^2}{2} = 8.0$J
Fel:

$$\begin{aligned} \Delta E = E(m + \Delta m, v + \Delta v) - E(m,v) \approx dE(\Delta m, \Delta v) = \\ = \frac{\partial E}{\partial m}\Delta m + \frac{\partial E}{\partial v}\Delta v = \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\frac{4^2}{2}}\Delta m + \underbrace{mv}_{1*4}\Delta v = 8\Delta m + 4\Delta v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ maxfel } \leq 8|\Delta m| + 4|\Delta v| = 8 * 0.1 + 4 * 0.2 = 1.6\text{J} \Rightarrow E = 8.0 \pm 1.6\text{J}$$

4 Föreläsning 4

4.1 Kedjeregeln

Envarre

Exempel

$$\frac{d}{dx}e^{x^2} = e^{x^2}2x$$

Allmänt

$$f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{yttre}}\underbrace{g'(x)}_{\text{inre}}$$

Generalisering till flervarre

$$\underbrace{f(g(x))}_{\text{envarre}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(g(\bar{x})) \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(x)) \end{array} \right\} \overset{(3)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(\bar{x})) \Rightarrow \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$$

Förklaring av pilar

1. **Exempel 1**

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2y} = e^{x^2y} * \underbrace{2xy}_{\text{inre m.a.p } x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2y} = e^{x^2y} * \underbrace{x^2}_{\text{inre m.a.p } y}$$

Allmänt

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}f(g(x,y)) = f'(g(x,y))g'_x(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}f(g(x,y)) = f'(g(x,y))g'_y(x,y) \end{array} \right.$$

Motsvarande för ≥ 3 variabler

Exempel 2

Visa att $xh'_x - 2yh'_y = 0 \quad \forall$ 2 variabel funktioner $h(x,y)$ på formen $h(x,y) = f(x^2y)$ där f är en envariabelfunktion. Lösning:

$$xh'_x - 2yh'_y = xf'(x^2y)2xy - 2yf'(x^2y)x^2 = 0 \quad \forall f$$

2.

$$\frac{d}{dx}(f(\bar{g}(x))) = \frac{d}{dx}(f(g_1(x), g_2(x))) \overset{\text{def av } \frac{d}{dx}}{=}$$

$$= \lim_{l \to 0} \frac{f(\overbrace{g_1(x+l)}^{s+h}, \overbrace{g_2(x+l)}^{t+k}) - f(\overbrace{g_1(x)}^{s}, \overbrace{g_2(x)}^{t})}{l} \underset{\text{diff.bar}}{=}$$

$$= \lim_{l \to 0} \frac{f_s'(s,t)h + f_t'(s,t)k + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k)}{l} =$$

$$= \Big/ \begin{array}{l} h = g_1(x+l) - g_1(x) \to 0 \text{ då } l \to 0 \text{ om } g_1 \text{ är kontinuerlig} \\ k = g_2(x+l) - g_1(x) \to 0 \text{ då } l \to 0 \text{ om } g_2 \text{ är kontinuerlig} \end{array} \Big/ =$$

$$= \lim_{l \to 0} \left(f_s'(s,t) \overbrace{\frac{g_1(x+l) - g_1(x)}{l}}^{\to g_1'(x)} + f_t'(s,t) \overbrace{\frac{g_2(x+l) - g_2(x)}{l}}^{\to g_2'(x)} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{l}\right)^2}_{\to (g_1'(x))^2 + (g_2'(x))^2 \text{ begränsad}}} \overbrace{\rho(h,k)}^{\to 0} \right) =$$

$$= f_s'(s,t) g_1'(x) + f_t'(s,t) g_2'(x)$$

$$\text{eller } \frac{df}{dx} = f_s' s_x' + f_t' t_x'$$

3. **Fås av 1 & 2**

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\overbrace{g_1(x,y)}^{s}, \overbrace{g_2(x,y)}^{t}) = f_s' s_x' + f_t' t_x'$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(g_1(x,y), g_2(x,y)) = f_s' s_y' + f_t' t_y'$$

Matrisform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_x' & f_y' \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(x,y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_s' & f_t' \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(s,t)} \begin{pmatrix} s_x' & s_y' \\ t_x' & t_y' \end{pmatrix}$$

Motsvarande för ≥ 3 variabler

4.1.1 Exempel 1

Lös den partiella differentialekvationen

$$f'_x - f'_y = y - x \tag{4.1}$$

med bivillkoret

$$f(x,0) = x^2 \tag{4.2}$$

Ledning: inför nya variabler $\begin{cases} s = x + y \\ t = xy \end{cases}$

Kedjeregeln $\begin{cases} f'_s s'_x + f'_t t'_x = f'_s * 1 + f'_t y \\ f'_s s'_y + f'_t t'_y = f'_s * 1 + f'_t x \end{cases}$ sätt in i (4.1)

$\Rightarrow (f'_s + f'_t y) - (f'_s + f'_t x) = y - x \Rightarrow f'_t * (y - x) = y - x$, ska gälla alla (x, y)
$\Rightarrow f'_t = 1 \Rightarrow f_t = t + \underbrace{g(s)}_{godtycklig} \Rightarrow \underline{f(x,y) = xy + g(x,y)}$ [alla lösningar på (4.1)]

Bivillkoret (4.2) ger oss $f(x,0) = x * 0 + g(x) = x^2 \Rightarrow g(x+0) = x^2 \Rightarrow$
Lösningen blir $f(x,y) = xy + (x+y)^2$

4.1.2 Linjärt variabelbyte

$$\begin{cases} s = ax + by \\ t = cx + dy \end{cases} \Rightarrow \underset{X_{\underline{\mathrm{f}}}}{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}} = \underset{T^{-1}}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{X_{\underline{\mathrm{e}}}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Matris för kedjeregeln

$$\begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^{-1} \; !$$

4.1.3 Byte till polära koordinater

$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ t = \rho\sin(\varphi) \end{cases}$ Enklast med ρ & φ derivator i vänsterled i kedjeregeln

$$\begin{cases} f'_\rho = f'_x x'_\rho + f'_y y'_\rho = f'_x \cos(\varphi) + f'_y \sin(\varphi) \\ f'_\varphi = f'_x x'_\varphi + f'_y y'_\varphi = f'_x(-\rho\sin(\varphi)) + f'_y \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

Matrisform

$$\begin{pmatrix} f'_\rho & f'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho\sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

4.1.4 Exempel 2

Bestäm alla $f(x, y)$ som uppfyller

$$x f''_{xy} - y f''_{yy} - f'_y = 0 \tag{4.3}$$

$$\text{Ledning: inför } \begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$$

Översätt ekvationen till u & v. Kedjeregeln

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + y f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = x f'_v \end{cases}$$

Operator skrivsätt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial u} + y \dfrac{\partial}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = x \dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases} \quad \begin{cases} (\ )'_x = (\ )'_u + (\ )'_v \\ (\ )'_y = x(\ )'_v \end{cases}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (x f'_v)'_y = x(f'_v)'_y = x * x(f'_v)'_v = x^2 f''_{vv}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'_u + y f'_v)'_y = (f'_u)'_y + f'_v + y(f'_v)'_y = x f''_{uv} + f'_v + yx f''_{vv}$$

Sätt in i (4.2) $\Rightarrow$

$$x(x f''_{uv} + f'_v + yx f''_{vv}) - y(x^2 f''_{vv}) - x f'_v = 0$$

$$x^2 f''_{uv} + x f'_v + y x^2 f''_{vv} - y x^2 f''_{vv} - x f'_v = 0$$

$$\Rightarrow x^2 f''_{uv} = 0, \quad \forall (x, y) \Rightarrow f''_{uv} = 0 \iff (f'_u)'_v$$

$$\Rightarrow f'_u = g(u) \text{ , godtycklig funktion } g(u)$$

$$\Rightarrow f = G(u) + h(v) \text{ , godtycklig funktion } h(v)$$

<u>Svar:</u> $f(x, y) = G(x) + h(xy)$, $g = G'$ $g \& h$ godtyckliga funktioner

5 Föreläsning 5

5.1 Gradienter

5.1.1 Definition

<u>Gradienten</u> av $f(x,y)$ är <u>vektorn</u> $\nabla f = \text{grad } f = (f'_x, f'_y)$
För $g(x,y,z)$ är $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z)$ och motsvarande för ≥ 4 variabler

<u>Hessianen</u> av $f(x,y)$ resp $g(x,y,z)$ är <u>matrisen</u>

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{resp } Hg = \begin{pmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} & g''_{xz} \\ g''_{yx} & g''_{yy} & g''_{yz} \\ g''_{zx} & g''_{zy} & g''_{zz} \end{pmatrix}$$

symmetriska om $f, g \in C^2$,
mer om H i samband med max/min-problem. 6.2 on page XXII

5.1.2 Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D?

Kurvor i 2D

Tangenter och normaler (allmänt)
Tangentvektor $\bar{T} = (v_1, v_2)$
Normalvektor $\bar{T} = k(v_2, -v_1)$ ty ger

$$\bar{T} \bullet \bar{N} = v_1 k v_2 - v_2 k v_1 = 0 \Rightarrow \text{ortogonala}$$

Ekvivalent för tangentlinje i (x,y) är på tangenten $\iff$

$$\underbrace{(x-a, y-b)}_{\text{Parallell med } \bar{T}} \bullet \bar{N} = 0 \iff v_2 x - v_1 y = \underbrace{v_2 a - v_1 b}_{Konstant}$$

$$\text{Parameterform} \begin{cases} x = a + tv_2 \\ y = b + tv_2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \text{ parameter}$$

Ekvation för normallinjen: (x,y) är på normalen $\iff$

$$\underbrace{(x-a, y-b)}_{\text{Parallell med } \bar{N}} \times (v_1, v_2) = 0 \iff v_1 x + v_2 y = \underbrace{v_1 a + v_2 b}_{Konstant}$$

$$\text{Parameterform} \begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b - tv_2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

1. Kurvor på parameterform

Ex

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \iff (x, y) = (1, 2) + t(-1, 1) \quad \text{[rät linje]}$$

Ex

$$\bar{r}(t) = \Big(x(t), y(t)\Big) = \Big(\cos t, \sin t\Big) \quad \text{[enhetscirkeln]}$$

$$\text{Två punkter på kurvan } \bar{r}(t) \quad \& \quad \bar{r}(t + \Delta t)$$

$$\text{Låt } \Delta t \to 0 \Rightarrow \bar{T}(t) = r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}}{\Delta t} = \Big(x'(t), y'(t)\Big)$$

$$= \text{ ger tangentvektorn till kurvan, exempelvis har enhetscirkeln}$$

$$\bar{T}(t) = \Big(x'(t), y'(t)\Big) = \Big(-\sin t, \cos t\Big)$$

2. Nivåkurvor $f(x, y) = C$

   Om $f(x, y) = C$ parametriseras med t som $\Big(x(t), y(t)\Big)$ ger kedjeregeln

$$0 = \frac{d}{dt} \overbrace{f\Big(x(t), y(t)\Big)}^{\text{konstant } = \text{ C}} = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = \underbrace{\Big(f'_x, f'_y\Big)}_{\nabla f} \bullet \underbrace{\Big(x'(t), y'(t)\Big)}_{\bar{T}}$$

$$\Rightarrow \nabla f \text{ är normalvektor till nivåkurvan}$$

   Ex

   Enhetscirkeln $\Big[f(x, y) = x^2 + y^2 = 1\Big]$ har $\nabla f = \Big(2x, 2y\Big) = 2\Big(x, y\Big)$

3. **Grafer**

   $y = h(x)$ kan föras på

   - parameterform: $t = x$ ger $\Big(x, y\Big) = \Big(t, h(t)\Big)$
     $\Rightarrow \bar{T} = \Big(x', y'\Big) = \Big(t, h(t)\Big)$
   - nivåkurveform: sätt $f(x, y) = y - h(x) = 0$
     $\Rightarrow \bar{N} = \nabla f = \Big(f'_x, f'_y\Big) = \Big(-h'(x), 1\Big)$

5.2 Nivåytor i 3D

$$g(x, y, z) = C$$

Med kedjeregeln visas på liknande sätt som för nivåkurvor att

$$\boxed{\nabla g = \left(g'_x, g'_y, g'_z\right) \text{ är } \bar{N} \text{ till nivåytan}}$$

5.2.1 Exempel 1

Enhetssfären $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ har $\bar{N} = \nabla g = (2x, 2y, 2z)$
I punkten $P : \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ är $\bar{N} = \left(2 * \frac{2}{3}, 2 * \frac{1}{3}, 2 * \frac{2}{3}\right)$ och tangentplanet i P är $\left(x - \frac{2}{3}, y - \frac{1}{3}, z - \frac{2}{3}\right) = \bar{N} = 0 \iff 2x + y + 2z = 3$

En graf $z = f(x, y)$ kan skrivas som nivåytan $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$
$\Rightarrow \bar{N}$ är $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) = (f'_x, f'_y, -1)$

5.2.2 Exempel 2

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$f'_x = 2x$$
$$f'_y = 2y$$

har i punkten $(1, 2, 5)$

$$\bar{N} = \left(f'_x(1, 2), f'_y(1, 2), -1\right) = \left(2, 4, -1\right)$$

5.2.3 Definition

Riktningsderivatan av $f(x, y)$ i punkten (a, b) och riktning $\bar{v} = (v_1, v_2)$ där $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ är

$$f'_{\bar{v}}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$$

Mäter hur f ändras i $\bar{v}$:s riktning
$\Big(|\bar{v}| > 1$ behövs för att $f'_{\bar{v}}$ inte ska bero på $\bar{v}$:s längd $\Big)$ Partiella derivator är specialfall t.ex. $\bar{v} = \bar{e_1} = (1, 0)$ ger $f'_{\bar{v}} = f'_x$ Motsvarande gäller för ≥ 3 variabler

5.2.4 Sats

$$\text{f differentierbar } \Rightarrow f'_{\bar{v}} = \nabla f \bullet \bar{v}$$

5.2.5 Exempel 3

$$\bar{v} = (1,0) \Rightarrow f'_{\bar{v}} = (f'_x, f'_y) \bullet (1,0) = f'_x$$

5.2.6 Exempel 4

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 \Rightarrow \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

I punkten $(a,b,c) = (2,-1,1)$ och i riktningen $\bar{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$ från punkten är

$$f'_{\bar{v}}(2,-1,1) = \nabla f(a,b,c) \bullet \bar{v} = (1,-4,6) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) = \frac{1*1-4*0+6*2}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

5.2.7 Allmänt

$$f'_{\bar{v}} = \nabla f \bullet \bar{v} = |\nabla f| \underbrace{|\bar{v}|}_{=1} \cos\alpha$$

Maximal då $\alpha = 0$, dvs då $\bar{v}$ väljs åt samma håll som $\nabla f \Rightarrow$

$$\nabla f \text{pekar i den riktning } f \text{ växer snabbast i}$$

$f'_{\bar{v}} = 0$ då $\bar{v}$ är en tangent till nivåkurvan/ytan

6 Föreläsning 6

6.1 Lokala max och min

6.1.1 Definition

$f(x,y)$ har ett lokalt minimum i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b) \forall (x,y)$ i någon omgivning u av (a,b). Om $(f,y) \geq f(a,b)$ i $u \forall (x,y) = (a,b)$ har vi ett strängt lokalt minimum. Motsvarande för lokalt maximum och ≥ 3 variabler.

6.1.2 Hur hittas lokala max & min?

Om $z = f(x,y)$ har lokalt min i (a,b) & L parallell med x-axeln $\big(y = b =$konstant på $L\big)$ så har på L envaribelfunktionen $g(x) = f(x,b)$ ett lokalt min i $x = a \Rightarrow g'(a) = 0$ men $g'(a) = f'_x(a,b)$ $\big($enligt def av derivator$\big)$. Samma i y-led.

6.1.3 Sats

Om $f(x,y) \in C^1$ har ett lokalt max eller min i (a,b) så är

$$\begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases} \quad \text{, dvs } \nabla f(a,b) = (0,0)$$

Motsvarande för ≥ 3 variabler
En punkt $\bar{a}$ där $\nabla f(\bar{a} = \bar{0}$ kallas <u>stationär</u>. Den kan vara lok max, min eller sadelpunkt.

6.2 Avgör om max, min eller sadelpunkt ($\bar{a}$ stationär)?

Envarre: teckentabell eller tecken på $f'(a)$

Flervarre: tecken på $Hf(\bar{a})$, motiveras från Taylors formel
Envariabel - maclaurin:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + t^2 \frac{g''(0)}{2} + \cdots + t^{(p)} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} + \overbrace{\mathcal{R}_p}^{rest} \left(* \right) \tag{6.1}$$

Givet $f(x, y)$, sätt $g(t) = f(a + th, b + tk)$, a,h,b,k konstanta
Kedjeregeln:

$$g'(t) = f'_x * x'_t + f'_y * y'_t = f'_x * h + f'_y * k = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f = (h, k) \nabla f$$

$$\Rightarrow g''(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 * f''_{xx} + 2hk * f''_{xy} + k^2 * f''_{yy} =$$

$$= (h, k) \underbrace{\begin{pmatrix} f''xx & f''yx \\ f''xy & f''yy \end{pmatrix}}_{Hf} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \left[f''_{xy} = f''_{yx} \text{ om } f \in C^2 \right]$$

$$g^{(p)}(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(p)} f \tag{6.2}$$

$t = 0 \Rightarrow (x, y) = (a, b) \& g(0) = f(a, b)$
$t = 1 \Rightarrow (a + h, b + k) \& g(1) = f(a + h, b + k)$ in i 6.1 $\Rightarrow$ Taylors formel för $f(x, y) \in C^{p+1}$

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + (h, k) * \nabla f(a, b) + \frac{1}{2}(h, k)(Hf)(a, b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{p!} \Big(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \Big)^p * f(a, b) + \mathcal{R}_p \text{ , där man kan visa } \mathcal{R}_p = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^2 + k^2}^{p+1} \right)$$

För $p = 2$ och n variabler, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n), \bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ $(\Rightarrow h^{-t}$ kolonn $)$
fås $f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \bar{h} * \nabla f(\bar{a}) + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{h}(Hf)(\bar{a}) h^{-t}}_{Q(h)} + \mathcal{O} \left(|h^3| \right)$

$Q(\bar{h})$ är en kvadratisk form (lin.alg). I 2 variabler, se (6.2), i 3 variabler:

$$Q(h,k,l) = h^2 f''_{xx} + k^2 f''_{yy} + l^2 f''_{zz} + 2hk f''_{xy} + 2hl f''_{xz} + 2kl f''_{yz}$$

I stationär punkt $\bar{a}\Big(\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}\Big)$

$$f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|h^3|) \approx f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) \text{ om } |\bar{h}| \text{ liten}$$

$\Rightarrow Q(\bar{h})$ avgör f:s utseende nära stationär punkt.
Om t.ex. $Q(\bar{h}) = 0 \forall \bar{h} \neq 0$ är $f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) \Rightarrow$ strängt lokalt min i $\bar{a}$

6.2.1 Fyra fall fås

1. Q positivt definit $\Rightarrow$ strängt lokalt min
$$Q(\bar{h}) > 0 \quad \forall \bar{h} \neq 0$$
2. Q negativt definit $\Rightarrow$ strängt lokalt max
$$Q(\bar{h}) > 0 \quad \forall \bar{h} \neq 0$$
3. Q indefinit $\Rightarrow$ sadelpunkt
$$Q(\bar{h}) > 0, \text{för vissa } \bar{h} \ \& \ < 0 \text{ för andra}$$
4. Q positivt semidefinit (motsv. neg semidefinit) Ingen slutsats om max, min eller sadelpunkt kan dras
$$Q(\bar{h}) \geq 0 \quad \forall \bar{h} \text{ men } \exists \bar{h} \neq 0 \text{ med } Q(\bar{h}) = 0$$

6.2.2 Två metoder för att avgöra Q:s karaktär:

1. Digonalisering. Spektralsatsen $\Rightarrow Hf = TDT^{-1}$, $T^{-1} = T^T$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_j \text{ egenvärden till } Hf$$

7 Föreläsning 7

7.1 Kurvor & ytor i $\mathbb{R}^3$ på parameterform

Funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ kallas kurvor i $\mathbb{R}^m$. För $m = 3$ är
$\bar{r}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$ en kurva i rummet, variabeln t kallas parametern

Tangentvektorn är $\bar{r}'(t) = \Big(x'(t), y'(t), z'(t)\Big)$ (som i 2D). Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ beskriver ytor i rummet på parameterform
$\bar{r}(s,t) = \Big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\Big)$, s,t parametrar

7.1.1 Exempel 1 [Plan på parameterform]

$$\bar{r}(s,t) = (1+s+t, 2-s, 3t) = \underbrace{(1,2,0)}_{\text{en punkt i planet}} + \overbrace{s(1,-1,0)+t(1,0,3)}^{\text{vektorer parallella med planet}} \tag{7.1}$$

$\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial s}$ och $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ är tangentvektorer till ytan, och spänner upp tangentplanet vars normal $\bar{N} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial s} * \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ För planet i (7.1) är $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial s} = (1,-1,0) \quad \& \quad \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t} = (1,0,3)$

7.1.2 Exempel 2

Enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ kan skrivas med rymdpolära vinklar $\theta \quad \& \quad \varphi$ som parametrar

$$\bar{r}(\theta,\varphi) = \Big(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi)\Big) = \Big(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\Big)$$

Vi får

$$\bar{N} = \bar{r}'_\theta \times \bar{r}'_\varphi = \Big(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\Big) \times \Big(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0\Big) =$$
$$= \Big(-\sin^2\theta\cos\varphi, -\sin^2\theta\sin\varphi, -\cos\theta\sin\theta\Big) = -\sin\theta\bar{r}(\theta,\varphi)$$

7.2 Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

För $\bar{f}(\bar{x}) = \Big(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)\Big)$ av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieras funktionalmatrisen (Jacobi-matrisen)

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \text{ m} \times \text{n matris}$$

7.2.1 Exempel 3

$$\bar{f}(\bar{x}) = \Big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\Big) = (x_1 + x_2, x_1 x_2) \Rightarrow \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

7.2.2 Exempel 4

Variabelbyte $(x, y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ till polärakoordinater har matris

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

7.2.3 Exempel 5

En linjär avbildning $\bar{f}(\bar{x}) = \overbrace{A}^{\text{konstant m×n matris}} \underbrace{\bar{x}}_{\text{kolon}}$ har $\bar{f}'(\bar{x}) = A$

OBS! För $m = 1$ $\quad (\bar{f} = f)$ fås specialfallet $\bar{f}'(\bar{x}) = (f'_{x_1}, \cdots, f'_{x_n}) = \nabla f$

Tidigare kedjeregeln för varje $f_j\big(\bar{g}(\bar{x})\big)$ i $\bar{f}\big(\bar{g}(\bar{x})\big) = (\bar{f} \bullet \bar{g})(\bar{x}) \Rightarrow$
den mest allmänna kedjeregeln kan skrivas

$$\underbrace{(\bar{f} \bullet \bar{g})'(\bar{x})}_{m\times n} = \underbrace{\bar{f}'\big(\bar{g}(\bar{x})\big)}_{m\times p}\underbrace{\bar{g}'(\bar{x})}_{p\times n} \text{ Matris multiplikation}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \bar{g}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^p \quad \bar{f}\big(\bar{g}(\bar{x})\big) \in \mathbb{R}^m$$

För $m = n$ har $\bar{f}(\bar{x} \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funktionaldeterminant (Jacobi-determinant)

$$\det \bar{f}'(\bar{x}) = \frac{d(f_1, \ldots, f_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

I (7.2) är $\dfrac{d(f_1, f_2)}{d(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$ och i (7.3)
$\dfrac{d(x, y)}{d(\rho, \varphi)} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$

7.3 Linjärisering av $\bar{f}(\bar{x})$

Antag $m = n = 2$ och skriv $\bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ som kolonn

Taylors formel för u & v kring punkten (a, b) ger

$$\Big/ \begin{matrix} a + h = x, h = x - a \\ b + k = y, k = y - b \end{matrix} \Big/ \ \bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(a, b) + u'_x(a, b)(x - a) + u'_y(a, b)(y - b) + rest \\ \text{samma för v} \end{pmatrix} \approx$$

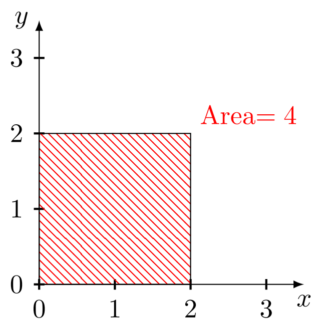
$$\approx \begin{pmatrix} u(a, b) \\ v(a, b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x(a, b) & u'_y(a, b) \\ v'_x(a, b) & v'_y(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = \bar{f}(a, b) + f'(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\overbrace{f'(a, b)}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\bar{x}}}_{\text{linjär avbildning}} + \underbrace{\bar{f}(a, b) - f'(a, b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{=\bar{C} \text{ konstant vektor}} = A\bar{x} + \bar{C}$$

linjärisering av $\bar{f}$, gäller nära (a, b). Motsvarande gäller godtyckliga m, n

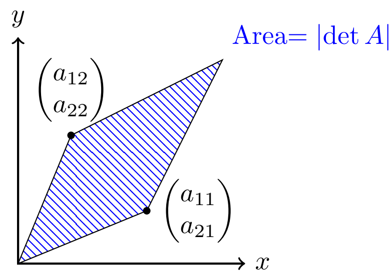
7.4 Area/volym-skalning

2D:



Figur 6: Arean innan skalning

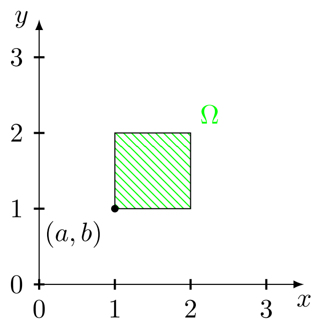
Linjär avbildning $\bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x}$



Figur 7: Arean efter skalning

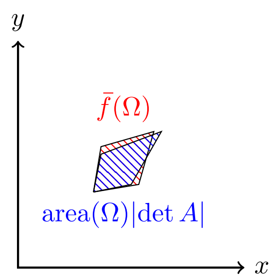
3D: $|\det A|$ = volym av parallellepiped med A:s kolonner som kanter
$|\det A|$ ger area/volym-skalning i 2D/3D

Godtycklig funktion $\bar{f}$



Figur 8: Arean innan skalning

Linjär avbildning, $\begin{matrix} \bar{f} & [r\ddot{o}d] \\ A\bar{x}+\bar{C} & [bl\dot{a}] \end{matrix}$



Figur 9: Arean efter skalning ($+\bar{C}$ påverkar ej arean)

8 Föreläsning 8

8.1 Implicita funktioner

Givet ett uttryck $F(x, y) = C$ (en ekvation eller en nivåyta), under vilka krav kan y lösas ut som en funktion av ?
Betyder att till varje x måste det svara <u>precis ett</u> y

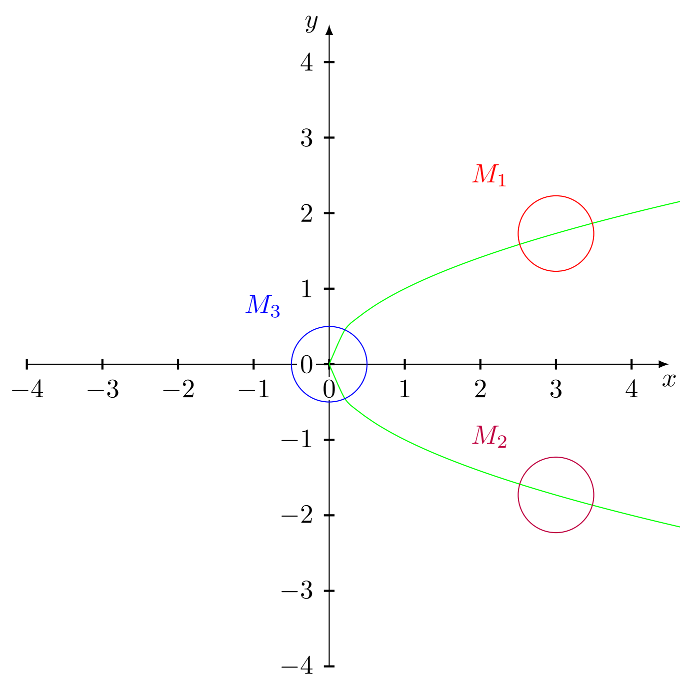
8.1.1 Exempel 1

$$F(x, y) = 3x - y = 1 \Rightarrow y = 3x - 1 = g(x) \text{ , går bra } \forall x \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

8.1.2 Exempel 2

$$F(x, y) = 3x - y = 0 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \text{ , } x \geq 0 \tag{8.2}$$

två värden på y för varje x, <u>inte en funktion</u>



Figur 10: Grafisk visning av (8.2)

På t.ex M_1 är $y = \sqrt{x} = g(x)$ medan på t.ex M_2 är $y = -\sqrt{x}$
Går ej på M_3, problem indikeras av att $\nabla F = \left(F'_x, F'_y\right) = \left(1, -2y\right)$ är parallell med x-axeln i $(0, 0) \in M_3$ (kurvan vänder i x-led där)
Alltså: $F'_y = 0$ ger problem

8.1.3 Exempel 3

$$\begin{aligned} F(x,y) = x - y^3 = 0 \\ \nabla F = (1, -3y^2) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Här kan vi lösa ut

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trots att

$$F_y' = -3^2 = 0$$

i origo (men kurvan vänder ej). Dock är

$$g'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

ej definierad i origo så $g(x)$ är ingen C^1-funktion av x kring $x = 0$
Man kan visa

8.2 Implicita funktionssatsen

y kan lösas ut som $y = g(x)$ med $g \in C^1$ ur $F(x,y) = C$, där $F \in C^1$, lokalt kring (a,b) på kurvan om $F_g'(a,b) \neq 0$

Kommentarer

- Med lokalt menas på någon (eventuellt liten) mängd kring (a,b) på nivåkurvan. I (8.2) & (8.3) ger $(a,b) = (0,0)$ problem, ingen g finns i (8.2) & $g \notin C^1$ i (8.3) men $F \in C^1$.
- Motsvarande gäller att x kan lösas ut som $x = h(y)$ om $F_x'(a,b) \neq 0$
- Med implicit menas att satsen bara säger att funktionen g finns, inte hur g beräknas
  (men i (8.1): $g(x) = 3x - 1$, i (8.2) $g(x) = \sqrt{x}$ på M_1 , $g(x) = -\sqrt{x}$ på M_2 och i (8.3) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, alla explicit skrivna)

8.2.1 Exempel 4

$$F(x,y) = x^3y^2 + y^5\sin x + y + 2x = 2 \quad , F \in C^\infty \tag{8.4}$$

$F(1,0) = 2 \Rightarrow (a,b) = (1,0)$ på nivåkurvan
Vi klarar inte att lösa ut y <u>explicit</u>, $y = g(x) =???$ liksom va fan femtegradare!!

$$F'_y = 2x^3 + 5y^4\sin x + 1 \Rightarrow F'_y(1,0) = 1 \neq 0$$

från sats: y kan lösas ut <u>implicit</u> som $y = g(x)$ där $g \in C^1$ lokalt kring $(1,0)$
Trots att $g(x)$ är okänd kan vi få ut $g'(x)$ på två olika sätt

Alternativ 1 (kedjeregeln)

$$\begin{gathered} 0 = \frac{d}{dx}\underbrace{F\Big(x, \overbrace{g(x)}^{y}\Big)}_{=2} = \frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{g'(x)} = F'_x + F'_y g'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y^2 + y^5\cos x + 2}{2x^3 + 5y^4\sin x + 1} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{1} = -2 \\ \nabla F = \Big(F'_x, F'_y\Big) = \Big(2, 1\Big) \end{gathered} \tag{8.5}$$

Alternativ 2 (implicit derivering)

$y = g(x) \Rightarrow x^3g(x)^2 + g(x)^5\sin x + g(x) + 2x = 2 =$ konstant $\forall x$ på intervall kring $x = 1$

Derivera $g(x) \Rightarrow$

$$3x^2g(x)^2 + 2x^3g(x)g'(x) + 5g(x)^4g'(x)\sin x + g(x)^5\cos x + g'(x) + 2 = 0 \tag{8.6}$$

Lös ut $g'(x)$, ger samma som i (8.5) Även $g''(x)$ kan beräknas genom implicit derivering av (8.6)

8.3 3 variabler, 1 funktion

Ur $F(x,y,z) = C$ $\Big(F \in C^1$, nivåyta geometriskt$\Big)$ kan t.ex. z lösas ut som en C^1-funktion av $x\&y$, $z = g(x,y)$, lokalt kring (a,b,c) på ytan om $F'_z(a,b,c) \neq 0$ $\Big(\nabla F$ ej parallell med xy-planet$\Big)$

Implicit derivering/kedjeregeln

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{F(x,y,\overbrace{g(x,y)}^{z})}_{=C} = F'_x * 1 + F'_y * 0 + F'_z g'_x \Rightarrow g'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \text{ pss } g'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Motsvarande om x eller y ska lösas ut

8.3.1 Exempel 5

$$F(x,y,z) = x^2 z\cos y + e^{z+3y-x} = 2 \text{ , nivåyta } F \in C^1 \tag{8.7}$$

$$F(1,0,1) = 1^2 * 1\cos 0 + e^{1+0-1} = 2 \Rightarrow (1,0,1) \text{ på ytan}$$

$$F'_y = -x^2 z\sin y + 3e^{z+3y-x} \Rightarrow F'_y(1,0,1) = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow y$ kan lösas ut som $y = g(x,z)$ ur $F(x,y,z) = 2$ kring $(1,0,1)$ på ytan
$g \in C^1$ med $g(1,1) = 0$

$$g'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xz\cos y - e^{z+3y-x}}{-x^2 z\sin y + 3e^{z+3y-x}} \overset{\text{i}(1,0,1)}{=} -\frac{2-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$g'_z = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x^2\cos y + e^{z+3y-x}}{-x^2 z\sin y + 3e^{z+3y-x}} \overset{\text{i}(1,0,1)}{=} -\frac{2}{3}$$

8.4 3 variabler, 2 funktioner

$$\text{Ekvationssystem } \begin{cases} F(x,y,z) = C_1 \\ G(x,y,z) = C_2 \end{cases}$$

är geometriskt skärningen mellan två nivåytor, dvs en kurva γ.
γ kan lokalt kring en punkt $P \in \gamma$ parametriseras med t.ex.
$x : \bar{r}(t) = \bar{r}(x) = \Big(x, h(x), j(x)\Big)$ om tangenten
$\bar{T} = \nabla F \times \nabla G$ har x-komponent

$$\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix} \neq 0$$

Algebraiskt tolkat kan då $y = h(x) \quad \& \quad z = j(x)$ lösas ut ur systemet som en funktion av x (lokalt kring P)

8.4.1 Exempel 6

$$\left\{\begin{matrix} F(x,y,z) = x^4 + yz = 1 & F(-1,0,2) = 1 \\ G(x,y,z) = x^2 e^y z = 2 & G(-1,0,2) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tag{8.8}$$

$$\Rightarrow P = (-1,0,2) \text{ på skärningskurvan } \gamma$$

$$\nabla F = (4x^3, z, y) \overset{P}{=} (-4,2,0) \quad \& \quad \nabla G = (2xe^y z, x^2 e^y z, x^2 e^y) \overset{P}{=} (-4,2,1)$$

$\Rightarrow \bar{T} = \nabla F \times \nabla G = (2,4,0)$ är tangent till γ i P
x-komponent av $\bar{T}$ är $2 \neq 0 \Rightarrow$ kring P (som har $x = -1$) kan både $y \quad \& \quad z$ lösas ut som C^1 funktioner $y = h(x) \quad \& \quad z = j(x)$ på γ.
Om γ skrivs $\bar{r}(x) = \Big(x, h(x), j(x)\Big)$ är $\bar{r}'(x) = \Big(1, h'(x), j'(x)\Big)$ vilket ger att
$\bar{r}'(-1) = \Big(1, h'(-1), j'(-1)\Big)$ är en tangentvektor till γ i $P \Rightarrow$
$\Rightarrow$ parallell med $(2,4,0) = 2(1,2,0) \Rightarrow h'(-1) = 2 \quad \& \quad j'(-1) = 0$
<u>OBS!</u> z-komponent av $\bar{r} = 0 \Rightarrow z$ ingen bra parameter för γ kring P

9 Föreläsning 9

Kommer snart!

10 Appendix

Figurer

Tabeller