

# TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic  
Linköpings Universitet  
[forelasningar@avdagic.net](mailto:forelasningar@avdagic.net)

22 maj 2017



# Innehåll

<b>2</b>	<b>Föreläsning II</b>	<b>1</b>
2.1	Gränsvärden för flervarre	1
2.1.1	Exempel 1	1
2.1.2	Exempel 2	1
2.1.3	Definition	2
2.1.4	Exempel 3	3
2.2	Oändlighet i envarre och flervarre	4
2.2.1	Definition	4
2.2.2	Exempel 4	5
2.3	3-variabler mot origo	5
2.3.1	Exempel 5	5
2.4	Rymdpolära koordinater	6
2.4.1	Cylindriska koordinater	7
<b>3</b>	<b>Föreläsning III</b>	<b>8</b>
3.1	Partiella derivator	8
3.1.1	Exempel 1	8
3.1.2	Definition	8
3.1.3	Exempel 2	9
3.1.4	Andraderivator	9
3.1.5	Sats	9
3.1.6	Exempel 3	10
3.1.7	Exempel 4	10
3.2	Differentierbarhet	11
3.2.1	Definition	11
3.2.2	Sats	11
3.2.3	Linjär avbildning	12
3.2.4	Exempel 5	12
<b>4</b>	<b>Föreläsning IV</b>	<b>13</b>
4.1	Kedjeregeln	13
4.1.1	Exempel 1	15
4.1.2	Linjärt variabelbyte	15
4.1.3	Byte till polära koordinater	15
4.1.4	Exempel 2	16
<b>5</b>	<b>Föreläsning V</b>	<b>17</b>
5.1	Gradienter	17
5.1.1	Definition	17
5.1.2	Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D?	17
5.2	Nivåytor i 3D	19
5.2.1	Exempel 1	19
5.2.2	Exempel 2	19
5.2.3	Definition	19
5.2.4	Sats	20
5.2.5	Exempel 3	20
5.2.6	Exempel 4	20
5.2.7	Allmänt	20

<b>6</b>	<b>Föreläsning VI</b>	<b>21</b>
6.1	Lokala max och min . . . . .	21
6.1.1	Definition . . . . .	21
6.1.2	Hur hittas lokala max & min? . . . . .	21
6.1.3	Sats . . . . .	21
6.2	Avgör om max, min eller sadelpunkt ( $\bar{a}$ stationär)? . . . . .	22
6.2.1	Fyra fall fås . . . . .	23
6.2.2	Två metoder för att avgöra Q:s karaktär: . . . . .	24
6.2.3	Exempel . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Föreläsning VII</b>	<b>26</b>
7.1	Kurvor & ytor i $\mathbb{R}^3$ på parameterform . . . . .	26
7.1.1	Exempel 1 [Plan på parameterform] . . . . .	26
7.1.2	Exempel 2 . . . . .	26
7.2	Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	27
7.2.1	Exempel 3 . . . . .	27
7.2.2	Exempel 4 . . . . .	27
7.2.3	Exempel 5 . . . . .	27
7.3	Linjärisering av $\bar{f}(\bar{x})$ . . . . .	28
7.4	Area/volym-skalning . . . . .	28
7.4.1	Exempel . . . . .	30
7.4.2	Invers . . . . .	30
7.4.3	Exempel . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Föreläsning VIII</b>	<b>31</b>
8.1	Implicita funktioner . . . . .	31
8.1.1	Exempel 1 . . . . .	31
8.1.2	Exempel 2 . . . . .	31
8.1.3	Exempel 3 . . . . .	32
8.2	Implicita funktionssatsen . . . . .	32
8.2.1	Exempel 4 . . . . .	33
8.3	3 variabler, 1 funktion . . . . .	33
8.3.1	Exempel 5 . . . . .	34
8.4	3 variabler, 2 funktioner . . . . .	34
8.4.1	Exempel 6 . . . . .	34
<b>9</b>	<b>Föreläsning IX</b>	<b>35</b>
9.1	Dubbelintegraler . . . . .	35
9.1.1	Exempel . . . . .	35
9.1.2	Skiva i $y$ -led . . . . .	36
9.2	Översikt, definition av dubbelintegraler . . . . .	37
9.2.1	Steg 1 . . . . .	37
9.2.2	Steg 2 . . . . .	38
9.2.3	Steg 3 . . . . .	38
9.2.4	Exempel . . . . .	39
9.2.5	Exempel . . . . .	39
9.3	Definition . . . . .	40
9.3.1	Exempel . . . . .	40

<b>10 Föreläsning X</b>	<b>41</b>
10.1 Variabelbyte i dubbelintegraler - Sats	41
10.1.1 Bevisidé	41
10.1.2 Exempel	41
10.1.3 På en elipsskiva	42
10.2 Trippelintegraler	43
10.2.1 Exempel	43
10.3 Integrationsordningar	44
<b>11 Föreläsning XI</b>	<b>47</b>
11.1 Cylinderkoordinater $\rho$ , $\varphi$ och $z$	47
11.1.1 Exempel	47
11.1.2 Exempel	49
11.2 Tyngdpunkt/masscentrum	50
11.2.1 Exempel	50
11.2.2 Exempel	51
<b>12 Föreläsning XII</b>	<b>52</b>
12.1 Generaliserade multipelintegraler	52
12.1.1 Exempel	52
12.1.2 Exempel	52
12.1.3 Definition	52
12.1.4 I exempel (12.1) ovan	53
<b>13 Appendix</b>	

## 2 Föreläsning II

### 2.1 Gränsvärden för flervari

#### 2.1.1 Exempel 1

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.1)$$

Vad händer då  $(x, y)$  närmar sig  $(0, 0)$ ?

$$\lim_{x, y \rightarrow 0, 0} \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}$$

//sätt  $t = x^4 + y^2$ ,  $t \rightarrow 0$  då  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  //

då fås  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , (standard gränsvärde)

#### 2.1.2 Exempel 2

$$f(x, y) = \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.2)$$

Gå mot origo via x-axeln (där  $y = 0$ )

$$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0 * x}{x^2 + 0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0$$

Gå mot origo via y-axeln (där  $x = 0$ )

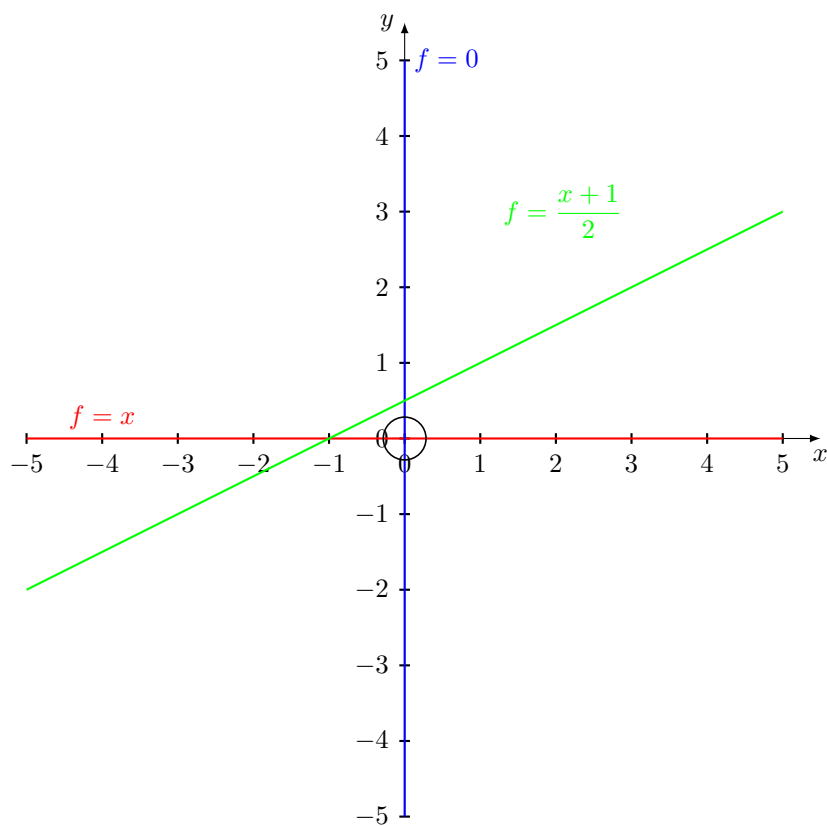
$$f(0, y) = \frac{0^3 + 0 * y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0$$

Gå mot origo längs  $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^3 + x * x}{x^2 + x^2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0$$

Olika värden från olika riktningar

Innanför varje liten cirkel kring origo har  $f$  värden nära 0 och nära  $\frac{1}{2}$ . Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se [1 on the following page](#)



Figur 1: Graf i 2D

### 2.1.3 Definition

Funktionen  $\bar{f}$  av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  har gränsvärdet  $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$  då  $\bar{x} \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^n$  om  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  så att  $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon$  om  $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$  och  $\bar{x} \in D_{\bar{f}}$ . Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

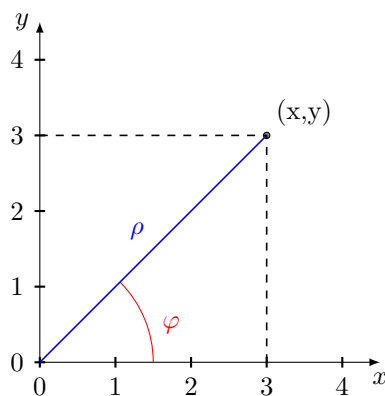
## 2.1.4 Exempel 3

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.3)$$

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \Rightarrow f(x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2.2)
- Sådana test kan INTE visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (2.1) eller (2.3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \rho > 0 \\ \tan \varphi = \frac{y}{x}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden:  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \rho \rightarrow 0$

**Exempel (2.2) med polära koordinater**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2} &\stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi) + \rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \overbrace{\rho \cos^3(\varphi)}^{\rightarrow 0} + \underbrace{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}} \right) \Rightarrow \text{gränsvärde existerar ej} \end{aligned}$$

**Exempel (2.3) med polära koordinater**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \overbrace{\rho}^{\rightarrow 0} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

**2.2 Oändlighet i envarre och flervarre****Envarre**

$x$  kan gå mot  $\pm\infty$

**Flervarre**

bara en  $\infty$  nämligen  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$

**2D polära**

$$|\bar{x}| \rightarrow \infty \iff \rho \rightarrow \infty$$

**2.2.1 Definition**

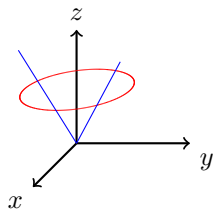
$$\bar{f}(\bar{x}) \rightarrow \bar{b} \text{ då } |\bar{x}| \rightarrow \infty \text{ om } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \omega \text{ så att } |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon \text{ om } |\bar{x}| > \omega$$



### 2.2.2 Exempel 4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{y}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho \sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\rightarrow 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \quad (2.4)$$

**OBS!** 2-variabelfunktioner som uttryckta i polärkoordinater inte beror på  $\varphi$  har rotationssymmetriska grafer kring z-axeln



Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

## 2.3 3-variabler mot origo

### 2.3.1 Exempel 5

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = ??? \quad (2.5)$$

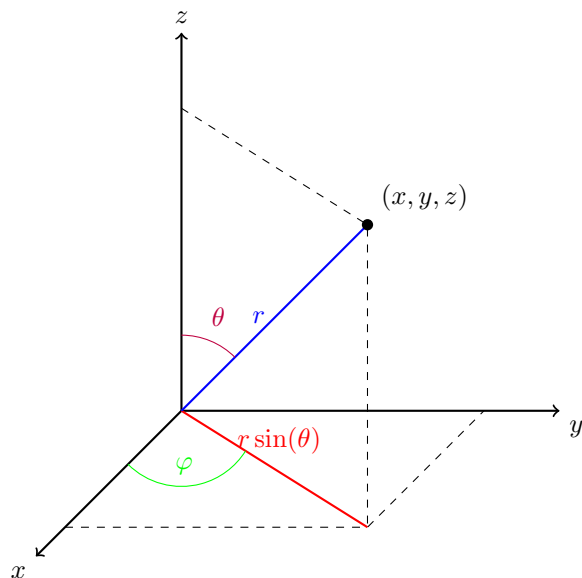
$$0 \leq \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \right| = \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + 2z^2} \leq \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq$$

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ // \quad |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} // \\ |z| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = 0$$

## 2.4 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, r > 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$r \sin(\theta) = \rho$$

För gränsvärden där  $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \iff r \rightarrow 0$

**Exempel (2.5) med rympolära koordinater**

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \stackrel{\text{rympol.koord}}{=} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^2 + r^2 \cos^2(\theta)} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\overbrace{r}^{\rightarrow 0}} \frac{\sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\underbrace{1 + \cos^2(\theta)}_{\text{begränsad, nämnare} \geq 1 \text{ ingen risk för } /0}}
\end{aligned}$$

**2.4.1 Cylindriska koordinater**

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\begin{cases} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ z &= z \end{cases}$$

### 3 Föreläsning III

#### 3.1 Partiella derivator

##### 3.1.1 Exempel 1

$$f(x, y) = x^2y + x \sin(y) \quad (3.1)$$

Hur förändras  $f$  om bara  $x$  varieras? Vi vill derivera  $f$  m.a.p  $x$  och hålla  $y$  konstant. Skrivs:

$$\underbrace{f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}_{\text{båda skrivsätten används}} = 2xy + \sin(y)$$

Motsvarande då bara  $y$  varieras

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x \cos(y)$$

##### 3.1.2 Definition

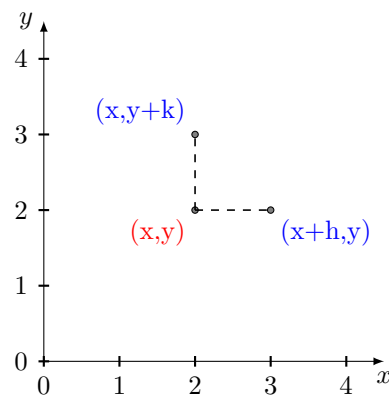
Partiella derivatan av  $f(x, y)$  m.a.p  $x$  i punkten  $(x, y)$  är

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Om gränsvärde existerar!

Motsvarande för  $y$ :

$$f'_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$



Figur 5: Grafisk visning av hur  $f$  ändras i  $x$ - &  $y$ -riktningen

**3.1.3 Exempel 2**

3 variabler

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z + z^2 e^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3x^2 y^2 z \\ f'_y(x, y, z) = 2x^3 y z + z^2 e^y \\ f'_z(x, y, z) = x^3 y^2 + 2z e^y \end{cases}$$

**3.1.4 Andraderivator**

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

**Exempel (3.1) andra derivator**

$$f''_{xx} = 2y$$

$$\left. \begin{aligned} f''_{xy} &= 2x + \cos(y) \\ f''_{yx} &= 2x + \cos(y) \end{aligned} \right\} \text{lika, ingen slump}$$

$$f''_{yy} = -x \sin(y)$$

Skriv  $f \in C^r$  om  $f$ 's alla  $r$ :te-derivator är kontinuerlig.**3.1.5 Sats**

$$f \in C^2 \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$$

motsvarande för  $\geq 3$  varianter $f(x, y)$  har 4 andraderivator varav 3 olika $f(x, y, z)$  har 9 andraderivator varav 6 olika

**3.1.6 Exempel 3**

Bestäm alla  $f(x, y, z)$  som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x &= p(x, y, z) = 3x^2yz & (1) \\ f'_y &= q(x, y, z) = x^3z + 2ye^z & (2) \\ f'_z &= r(x, y, z) = x^3y + y^2e^z & (3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Systematisk lösning

$$(1) \Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + \overbrace{g(y, z)}^{\text{godtycklig}} \\ \text{2-variabel } f$$

Derivera detta m.a.p  $y$

$$\Rightarrow x^3z + g'_y(y, z) = x^3z + 2ye^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_y(y, z) = 2ye^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y, z) = y^2e^z + \overbrace{h(z)}^{\text{godtycklig}} \Rightarrow \\ \text{envarre } f$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + h(z)$$

Derivera detta m.a.p  $z$

$$\Rightarrow x^3y + y^2e^z + h'(z) = x^3y + y^2e^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Svar: } f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + C, C \text{ är en godtycklig konstant}$$

Man kan visa att systemet (1) - (3) är lösbart

$$\Longleftrightarrow$$

$$p'_y = q'_x$$

$$p'_z = r'_x$$

$$q'_z = r'_y$$

**3.1.7 Exempel 4**

$$f'_x = xy$$

$$f'_y = x^2$$

olösbart ty

$$f''_{xy} = x \neq f''_{yx} = 2x$$

## 3.2 Differentierbarhet

### Envarre

Om  $f'_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \exists$  (dvs  $f$  deriverbar i  $a$ ) så finns talet  $f'_a = A$  sådant att  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a) - Ah) = \rho(h) \rightarrow 0$

Vi vet att  $f \in C^1 \Rightarrow f$  deriverbar  $\Rightarrow f$  kontinuerlig

### Flervarre

#### 3.2.1 Definition

$f(x, y)$  är differentierbar i  $(a, b)$  om  $\exists$  tal  $A, B$  så att

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}(f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk) = \rho(h, k) \rightarrow 0 \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

så deriverbar = differentierbar för envarre För  $\geq 2$  variabler gäller

#### 3.2.2 Sats

$$f \in C^1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f \text{ differentierbar} \begin{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \stackrel{(4)}{\nRightarrow} f \text{ kontinuerlig} \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \stackrel{(5)}{\nRightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \end{cases}$$

### Förklaring av pilar

1. s.56-57 i boken

$$2. f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \stackrel{f \text{ diff.bar med } k=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ah + B \cdot 0 + \sqrt{h^2 + 0^2} \rho(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A + \underbrace{\frac{\sqrt{h^2}}{h}}_{\pm 1 \text{ begränsad}} \underbrace{\frac{\rho(h, 0)}{h}}_{\rightarrow 0} = A \quad \exists$$

$$3. f(a+h, b+k) = f(a, b) + \underbrace{Ah}_{\rightarrow 0} + \underbrace{Bk}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\rho(h, k)}_{\rightarrow 0} \rightarrow f(a, b) \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow f \text{ kontinuerlig}$$

4. Motexempel finns i boken s.51

5. Motexempel  $f(x, y) = |x|$  i  $(0, 0)$ , kontinuerlig men  $f'_x(x, y) \nexists$

### 3.2.3 Linjär avbildning

Den linjära avbildningen  $df_{(a,b)}$  av typ  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , som definieras av  $df_{(a,b)}(h, k) = Ah + Bk = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$ , kallas differentialen av  $f$  i  $(a, b)$  ofta skrivs variablerna  $h = dx$  &  $k = dy$  så  $df_{(a,b)}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$  eller kort  $df = f'_x dx + f'_y dy$

**Exempel (3.1)** omskrivet

$$f(x, y) = x^2y + x \sin(y) \Rightarrow df = (2xy + \sin(y)) dx + (x^2 + x \cos(y)) dy$$

**Feluppskattning med  $df$**

Om  $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$  och  $f$  är differentierbar fås  $f(\overline{x} + \overline{\Delta x}) - f(\overline{x}) = f'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n + \underbrace{\rho(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}}_{\text{Restterm}} \approx df(\overline{\Delta x})$

### 3.2.4 Exempel 5

Bestäm rörelseenergin och uppskatta felet för massan  $m = 1.0 \pm 0.1 \text{ kg}$  med hastigheten  $v = 4.0 \pm 0.2 \text{ m s}^{-1}$ .

Formel för rörelseenergi:  $E = \frac{mv^2}{2} \text{ J}$

Utan fel:  $E = \frac{1 * 1.4^2}{2} = 8.0 \text{ J}$

Fel:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(m + \Delta m, v + \Delta v) - E(m, v) \approx dE(\Delta m, \Delta v) = \\ &= \frac{\partial E}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial E}{\partial v} \Delta v = \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\frac{4^2}{2}} \Delta m + \underbrace{mv}_{1*4} \Delta v = 8\Delta m + 4\Delta v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{maxfel} \leq 8|\Delta m| + 4|\Delta v| = 8 * 0.1 + 4 * 0.2 = 1.6 \text{ J} \Rightarrow E = 8.0 \pm 1.6 \text{ J}$$



## 4 Föreläsning IV

### 4.1 Kedjeregeln

**Envarre**

Exempel

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} 2x$$

Allmänt

$$f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{yttre}} \underbrace{g'(x)}_{\text{inre}}$$

**Generalisering till flervarre**

$$\underbrace{f(g(x))}_{\text{envarre}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(g(\bar{x})) \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(x)) \end{array} \right\} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(\bar{x})) \Rightarrow \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$$

**Förklaring av pilar**

#### 1. Exempel 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2 y} &= e^{x^2 y} * \underbrace{2xy}_{\text{inre m.a.p } x} \\ \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2 y} &= e^{x^2 y} * \underbrace{x^2}_{\text{inre m.a.p } y} \end{aligned}$$

**Allmänt**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) g'_x(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) g'_y(x, y) \end{array} \right.$$

Motsvarande för  $\geq 3$  variabler

#### Exempel 2

Visa att  $xh'_x - 2yh'_y = 0 \quad \forall$  2 variabel funktioner  $h(x, y)$  på formen  $h(x, y) = f(x^2 y)$  där  $f$  är en envariabelfunktion. Lösning:

$$xh'_x - 2yh'_y = x f'(x^2 y) 2xy - 2y f'(x^2 y) x^2 = 0 \quad \forall f$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(\bar{g}(x))) &= \frac{d}{dx}(f(g_1(x), g_2(x))) \stackrel{\text{def av } \frac{d}{dx}}{=} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(\overbrace{g_1(x+l)}^{s+h}, \overbrace{g_2(x+l)}^{t+k}) - f(\overbrace{g_1(x)}^s, \overbrace{g_2(x)}^t)}{l} \stackrel{\text{diff. bar}}{=} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'_s(s, t)h + f'_t(s, t)k + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)}{l} = \\
&= \left/ \begin{array}{l} h = g_1(x+l) - g_1(x) \rightarrow 0 \text{ då } l \rightarrow 0 \text{ om } g_1 \text{ är kontinuerlig} \\ k = g_2(x+l) - g_2(x) \rightarrow 0 \text{ då } l \rightarrow 0 \text{ om } g_2 \text{ är kontinuerlig} \end{array} \right/ = \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \left( f'_s(s, t) \frac{\overbrace{g_1(x+l) - g_1(x)}^{\rightarrow g'_1(x)}}{l} + f'_t(s, t) \frac{\overbrace{g_2(x+l) - g_2(x)}^{\rightarrow g'_2(x)}}{l} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{l}\right)^2}_{\rightarrow (g'_1(x))^2 + (g'_2(x))^2 \text{ begränsad}}} \overbrace{\rho(h, k)}^{\rightarrow 0} \right) = \\
&= f'_s(s, t)g'_1(x) + f'_t(s, t)g'_2(x) \\
&\text{eller } \frac{df}{dx} = f'_s s'_x + f'_t t'_x
\end{aligned}$$

3. Fås av 1 &amp; 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(\overbrace{g_1(x, y)}^s, \overbrace{g_2(x, y)}^t) &= f'_s s'_x + f'_t t'_x \\
\frac{\partial}{\partial y} f(g_1(x, y), g_2(x, y)) &= f'_s s'_y + f'_t t'_y
\end{aligned}$$

**Matrisform**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(x, y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f'_s & f'_t \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(s, t)} \begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix}$$

Motsvarande för  $\geq 3$  variabler

### 4.1.1 Exempel 1

Lös den partiella differentialekvationen

$$f'_x - f'_y = y - x \quad (4.1)$$

med bivillkoret

$$f(x, 0) = x^2 \quad (4.2)$$

$$\text{Ledning: inför nya variabler } \begin{cases} s = x + y \\ t = xy \end{cases}$$

$$\text{Kedjeregeln } \begin{cases} f'_s s'_x + f'_t t'_x = f'_s * 1 + f'_t y \\ f'_s s'_y + f'_t t'_y = f'_s * 1 + f'_t x \end{cases} \text{ sätt in i (4.1)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f'_s + f'_t y) - (f'_s + f'_t x) &= y - x \Rightarrow f'_t * (y - x) = y - x, \text{ ska gälla alla } (x, y) \\ \Rightarrow f'_t = 1 \Rightarrow f_t &= t + \underbrace{g(s)}_{\text{godtycklig}} \Rightarrow \underline{f(x, y) = xy + g(x, y)} \text{ [alla lösningar på (4.1)]} \end{aligned}$$

Bivillkoret (4.2) ger oss  $f(x, 0) = x * 0 + g(x) = x^2 \Rightarrow g(x + 0) = x^2 \Rightarrow$   
Lösningen blir  $f(x, y) = xy + (x + y)^2$

### 4.1.2 Linjärt variabelbyte

$$\begin{cases} s = ax + by \\ t = cx + dy \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} X_{\underline{f}} & T^{-1} & X_{\underline{e}} \end{matrix}$$

Matris för kedjeregeln

$$\begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^{-1} !$$

### 4.1.3 Byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ t = \rho \sin(\varphi) \end{cases} \text{ Enklast med } \rho \text{ \& } \varphi \text{ derivator i vänsterled i kedjeregeln}$$

$$\begin{cases} f'_\rho = f'_x x'_\rho + f'_y y'_\rho = f'_x \cos(\varphi) + f'_y \sin(\varphi) \\ f'_\varphi = f'_x x'_\varphi + f'_y y'_\varphi = f'_x (-\rho \sin(\varphi)) + f'_y \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

Matrisform

$$\begin{pmatrix} f'_\rho & f'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

## 4.1.4 Exempel 2

Bestäm alla  $f(x, y)$  som uppfyller

$$xf''_{xy} - yf''_{yy} - f'_y = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Ledning: inför } \begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$$

Översätt ekvationen till  $u$  &  $v$ . Kedjeregeln

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + yf'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = xf'_v \end{cases}$$

Operator skrivsätt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial v} \end{cases} \quad \begin{cases} ( )'_x = ( )'_u + ( )'_v \\ ( )'_y = x ( )'_v \end{cases}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (xf'_v)'_y = x(f'_v)'_y = x * x(f'_v)'_v = x^2 f''_{vv}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'_u + yf'_v)'_y = (f'_u)'_y + f'_v + y(f'_v)'_y = xf''_{uv} + f'_v + yx f''_{vv}$$

Sätt in i (4.2)  $\Rightarrow$

$$x(xf''_{uv} + f'_v + yx f''_{vv}) - y(x^2 f''_{vv}) - xf'_v = 0$$

$$x^2 f''_{uv} + xf'_v + yx^2 f''_{vv} - yx^2 f''_{vv} - xf'_v = 0$$

$$\Rightarrow x^2 f''_{uv} = 0, \quad \forall(x, y) \Rightarrow f''_{uv} = 0 \iff (f'_u)'_v$$

$$\Rightarrow f'_u = g(u), \text{ godtycklig funktion } g(u)$$

$$\Rightarrow f = G(u) + h(v), \text{ godtycklig funktion } h(v)$$

Svar:  $f(x, y) = G(x) + h(xy)$ ,  $g = G'$  &  $h$  godtyckliga funktioner

## 5 Föreläsning V

### 5.1 Gradienter

#### 5.1.1 Definition

Gradienten av  $f(x, y)$  är vektorn  $\nabla f = \text{grad } f = (f'_x, f'_y)$

För  $g(x, y, z)$  är  $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z)$  och motsvarande för  $\geq 4$  variabler

Hessianen av  $f(x, y)$  resp  $g(x, y, z)$  är matrisen

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{resp } Hg = \begin{pmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} & g''_{xz} \\ g''_{yx} & g''_{yy} & g''_{yz} \\ g''_{zx} & g''_{zy} & g''_{zz} \end{pmatrix}$$

symmetriska om  $f, g \in C^2$ ,

mer om  $H$  i samband med max/min-problem. [6.2 on page 22](#)

#### 5.1.2 Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D?

##### Kurvor i 2D

Tangenter och normaler (allmänt)

Tangentvektor  $\vec{T} = (v_1, v_2)$

Normalvektor  $\vec{N} = k(v_2, -v_1)$  ty ger

$$\vec{T} \bullet \vec{N} = v_1kv_2 - v_2kv_1 = 0 \Rightarrow \text{ortogonala}$$

Ekvivalent för tangentlinje i  $(x, y)$  är på tangenten  $\iff$

$$\underbrace{(x-a, y-b)}_{\text{Parallell med } \vec{T}} \bullet \vec{N} = 0 \iff v_2x - v_1y = \underbrace{v_2a - v_1b}_{\text{Konstant}}$$

$$\text{Parameterform } \begin{cases} x = a + tv_2 \\ y = b + tv_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ parameter}$$

Ekvation för normallinjen:  $(x, y)$  är på normalen  $\iff$

$$\underbrace{(x-a, y-b)}_{\text{Parallell med } \vec{N}} \times (v_1, v_2) = 0 \iff v_1x + v_2y = \underbrace{v_1a + v_2b}_{\text{Konstant}}$$

$$\text{Parameterform } \begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b - tv_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

## 1. Kurvor på parameterform

**Ex**

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \iff (x, y) = (1, 2) + t(-1, 1) \quad [\text{rät linje}]$$

**Ex**

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \quad [\text{enhetscirkeln}]$$

Två punkter på kurvan  $\bar{r}(t)$  &  $\bar{r}(t + \Delta t)$ 

$$\begin{aligned} \text{Låt } \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{T}(t) = r'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}}{\Delta t} = (x'(t), y'(t)) \\ &= \text{ger tangentvektorn till kurvan, exempelvis har enhetscirkeln} \end{aligned}$$

$$\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$$

2. Nivåkurvor  $f(x, y) = C$ Om  $f(x, y) = C$  parametreras med  $t$  som  $(x(t), y(t))$  ger kedjeregeln

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \overbrace{f(x(t), y(t))}^{\text{konstant} = C} = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = \underbrace{(f'_x, f'_y)}_{\nabla f} \bullet \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\bar{T}} \\ &\Rightarrow \nabla f \text{ är normalvektor till nivåkurvan} \end{aligned}$$

**Ex**

$$\text{Enhetscirkeln } [f(x, y) = x^2 + y^2 = 1] \text{ har } \nabla f = (2x, 2y) = 2(x, y)$$

## 3. Grafer

 $y = h(x)$  kan föras på

- parameterform:  $t = x$  ger  $(x, y) = (t, h(t))$   
 $\Rightarrow \bar{T} = (x', y') = (1, h'(t))$
- nivåkurveform: sätt  $f(x, y) = y - h(x) = 0$   
 $\Rightarrow \bar{N} = \nabla f = (f'_x, f'_y) = (-h'(x), 1)$

## 5.2 Nivåtor i 3D

$$g(x, y, z) = C$$

Med kedjeregeln visas på liknande sätt som för nivåkurvor att

$$\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) \text{ är } \bar{N} \text{ till nivåytan}$$

### 5.2.1 Exempel 1

Enhetssfären  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$  har  $\bar{N} = \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

I punkten  $P : \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  är  $\bar{N} = \left(2 * \frac{2}{3}, 2 * \frac{1}{3}, 2 * \frac{2}{3}\right)$  och tangentplanet i P är

$$\left(x - \frac{2}{3}, y - \frac{1}{3}, z - \frac{2}{3}\right) = \bar{N} = 0 \iff 2x + y + 2z = 3$$

En graf  $z = f(x, y)$  kan skrivas som nivåytan  $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$   
 $\Rightarrow \bar{N}$  är  $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) = (f'_x, f'_y, -1)$

### 5.2.2 Exempel 2

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f'_x = 2x$$

$$f'_y = 2y$$

har i punkten  $(1, 2, 5)$

$$\bar{N} = (f'_x(1, 2), f'_y(1, 2), -1) = (2, 4, -1)$$

### 5.2.3 Definition

Riktningsderivatan av  $f(x, y)$  i punkten  $(a, b)$  och riktning  $\bar{v} = (v_1, v_2)$  där

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1 \text{ är}$$

$$f'_{\bar{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$$

Mäter hur  $f$  ändras i  $\bar{v}$ :s riktning

( $|\bar{v}| > 1$  behövs för att  $f'_{\bar{v}}$  inte ska bero på  $\bar{v}$ :s längd) Partiella derivator är  
 specialfall t.ex.  $\bar{v} = \bar{e}_1 = (1, 0)$  ger  $f'_{\bar{v}} = f'_x$  Motsvarande gäller för  $\geq 3$  variabler

**5.2.4 Sats**

$$f \text{ differentierbar} \Rightarrow f'_v = \nabla f \bullet \bar{v}$$

**5.2.5 Exempel 3**

$$\bar{v} = (1, 0) \Rightarrow f'_v = (f'_x, f'_y) \bullet (1, 0) = f'_x$$

**5.2.6 Exempel 4**

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \Rightarrow \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

I punkten  $(a, b, c) = (2, -1, 1)$  och i riktningen  $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$  från punkten är

$$f'_v(2, -1, 1) = \nabla f(a, b, c) \bullet \bar{v} = (1, -4, 6) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2) = \frac{1 * 1 - 4 * 0 + 6 * 2}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

**5.2.7 Allmänt**

$$f'_v = \nabla f \bullet \bar{v} = |\nabla f| \underbrace{|\bar{v}|}_{=1} \cos \alpha$$

Maximal då  $\alpha = 0$ , dvs då  $\bar{v}$  väljs åt samma håll som  $\nabla f \Rightarrow$

$\nabla f$  pekar i den riktning  $f$  växer snabbast i

$f'_v = 0$  då  $\bar{v}$  är en tangent till nivåkurvan/ytan



## 6 Föreläsning VI

### 6.1 Lokala max och min

#### 6.1.1 Definition

$f(x, y)$  har ett lokalt minimum i  $(a, b)$  om  $f(x, y) \geq f(a, b) \forall (x, y)$  i någon omgivning  $U$  av  $(a, b)$ . Om  $f(x, y) \geq f(a, b)$  i  $U \forall (x, y) = (a, b)$  har vi ett strängt lokalt minimum. Motsvarande för lokalt maximum och  $\geq 3$  variabler.

#### 6.1.2 Hur hittas lokala max & min?

Om  $z = f(x, y)$  har lokalt min i  $(a, b)$  &  $L$  parallell med  $x$ -axeln ( $y = b = \text{konstant}$  på  $L$ ) så har på  $L$  envaribelfunktionen  $g(x) = f(x, b)$  ett lokalt min i  $x = a \Rightarrow g'(a) = 0$  men  $g'(a) = f'_x(a, b)$  (enligt def av derivator). Samma i  $y$ -led.

#### 6.1.3 Sats

Om  $f(x, y) \in C^1$  har ett lokalt max eller min i  $(a, b)$  så är

$$\begin{cases} f'_x(a, b) = 0 \\ f'_y(a, b) = 0 \end{cases}, \text{ dvs } \nabla f(a, b) = (0, 0)$$

Motsvarande för  $\geq 3$  variabler

En punkt  $\bar{a}$  där  $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$  kallas stationär. Den kan vara lok max, min eller sadelpunkt.

## 6.2 Avgör om max, min eller sadelpunkt ( $\bar{a}$ stationär)?

**Envarre:** teckentabell eller tecken på  $f'(a)$

**Flervarre:** tecken på  $Hf(\bar{a})$ , motiveras från Taylors formel

Envariabel - maclaurin:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + t^2 \frac{g''(0)}{2} + \dots + t^{(p)} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} + \underbrace{\mathcal{R}_p}_{rest} \left( * \right) \quad (6.1)$$

Givet  $f(x, y)$ , sätt  $g(t) = f(a + th, b + tk)$ ,  $a, h, b, k$  konstanta

Kedjeregeln:

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'_x * x'_t + f'_y * y'_t = f'_x * h + f'_y * k = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f = (h, k) \nabla f \\ \Rightarrow g''(t) &= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 * f''_{xx} + 2hk * f''_{xy} + k^2 * f''_{yy} = \\ &= (h, k) \underbrace{\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}}_{Hf} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \left[ f''_{xy} = f''_{yx} \text{ om } f \in C^2 \right] \\ g^{(p)}(t) &= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(p)} f \end{aligned} \quad (6.2)$$

$t = 0 \Rightarrow (x, y) = (a, b) \& g(0) = f(a, b)$

$t = 1 \Rightarrow (a + h, b + k) \& g(1) = f(a + h, b + k)$  in i 6.1  $\Rightarrow$  Taylors formel för  $f(x, y) \in C^{p+1}$

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + (h, k) * \nabla f(a, b) + \frac{1}{2} (h, k) (Hf)(a, b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \dots \\ &+ \frac{1}{p!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p * f(a, b) + \mathcal{R}_p, \text{ där man kan visa } \mathcal{R}_p = \mathcal{O} \left( \sqrt{h^2 + k^2}^{p+1} \right) \end{aligned}$$

För  $p = 2$  och  $n$  variabler,  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$  ( $\Rightarrow h^{-1}$  kolonn)

$$\text{fås } f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \bar{h} * \nabla f(\bar{a}) + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{h} (Hf)(\bar{a}) \bar{h}^{-1}}_{Q(h)} + \mathcal{O}(|h^3|)$$

$Q(\bar{h})$  är en kvadratisk form (lin.alg). I 2 variabler, se (6.2), i 3 variabler:

$$Q(h, k, l) = h^2 f''_{xx} + k^2 f''_{yy} + l^2 f''_{zz} + 2hk f''_{xy} + 2hl f''_{xz} + 2kl f''_{yz}$$

I stationär punkt  $\bar{a}$  ( $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ )

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|h^3|) \approx f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) \text{ om } |\bar{h}| \text{ liten}$$

$\Rightarrow Q(\bar{h})$  avgör  $f$ 's utseende nära stationär punkt.

Om t.ex.  $Q(\bar{h}) = 0 \forall \bar{h} \neq 0$  är  $f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) \Rightarrow$  strängt lokalt min i  $\bar{a}$

### 6.2.1 Fyra fall fås

1. Q positivt definit  $\Rightarrow$  strängt lokalt min

$$Q(\bar{h}) > 0 \quad \forall \bar{h} \neq 0$$

2. Q negativt definit  $\Rightarrow$  strängt lokalt max

$$Q(\bar{h}) < 0 \quad \forall \bar{h} \neq 0$$

3. Q indefinit  $\Rightarrow$  sadelpunkt

$$Q(\bar{h}) > 0, \text{ för vissa } \bar{h} \text{ \& } < 0 \text{ för andra}$$

4. Q positivt semidefinit (motsv. neg semidefinit) Ingen slutsats om max, min eller sadelpunkt kan dras

$$Q(\bar{h}) \geq 0 \quad \forall \bar{h} \text{ men } \exists \bar{h} \neq 0 \text{ med } Q(\bar{h}) = 0$$

**6.2.2 Två metoder för att avgöra Q:s karaktär:**

1. Digonalisering. Spektralsatsen  $\Rightarrow Hf = TDT^{-1}$ ,  $T^{-1} = T^T$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_j \text{ egenvärden till } Hf$$

$$Q = \bar{h} * (Hf) * \bar{h}^{-1} = \underbrace{\bar{h}T}_{\hat{\bar{h}}} D \underbrace{T^T h^{-1}}_{\hat{\bar{h}}^T} = \hat{\bar{h}} D \hat{\bar{h}}^T = \lambda_1 \hat{h}_1^2 + \lambda_2 \hat{h}_2^2 + \dots + \lambda_n \hat{h}_n^2$$

**De fyra fallen**

(a)

$$\lambda_j > 0, \quad \forall j \text{ pos.def}$$

(b)

$$\lambda_j < 0, \quad \forall j \text{ neg.def}$$

(c)

$$\exists \lambda_j > 0 \ \& \ \exists \lambda_k < 0 \text{ indef}$$

(d)

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j \quad \exists \lambda_k = 0 \text{ pos.semidef}$$

**Exempel**

$$Q(h, k, l) = h^2 + 2k^2 + 2l^2 + 2hk - 2hl + 2kl = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\det(Hf - \lambda I) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{k} & \hat{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 + \sqrt{2} & \\ & & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \hat{k} \\ \hat{l} \end{pmatrix} = 3\hat{h}^2 + (1 + \sqrt{2})\hat{k}^2 + (1 - \sqrt{2})\hat{l}^2$$

$\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_3 < 0 \Rightarrow$  indefinit (egenvektorer behövs ej för att avgöra karaktär)

## 2. Kvadratkomplettering

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

(6.3):

$$\begin{aligned} Q &= \overbrace{h^2 + 2hk - 2hl}^{\text{in i en parentes}} + 2k^2 + 2l^2 + 2kl = \\ &= (h + k - l)^2 + \underbrace{k^2 + 4kl}_{\text{in i en parentes}} + l^2 = \\ &= \pm(h + k - l)^2 \pm (k + 2l)^2 \pm 3l^2 \end{aligned}$$

tecken +, +, -, samma som på  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3 \Rightarrow$  indefinit

## De fyra fallen

- (a) Bara +  $\Rightarrow$  pos.def
- (b) Bara -  $\Rightarrow$  neg.def
- (c) + & - (&/eller 0)  $\Rightarrow$  indef
- (d) + & 0 (färre + än antalet variabler)  $\Rightarrow$  pos.semidef

## 6.2.3 Exempel

Hitta alla stationära punkter till  $f(x, y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$  och avgör om de är max, min eller sadelpunkter.

$$\text{Stationära punkter: } \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6y - 9 = 0 & [1] \\ f'_y = 6x + 6y = 0 & [2] \end{cases}$$

$$[2] \Rightarrow y = -x \text{ in i } [1] \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow \underbrace{x = 3}_{y = -3} \text{ eller } \underbrace{x = 1}_{y = 1}$$

Två stationära punkter:  $(3, -3)$  &  $(-1, 1)$  max/min?

$$f''_{xx} = 6x \quad f''_{xy} = 6 \quad f''_{yy} = 6$$

$$I(3, -3) : Q = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{1,2} = 12 \pm \sqrt{62} > 0 \Rightarrow \text{pos.def} \Rightarrow \text{lok.min}$$

$$I(-1, 1) : Q = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 6\sqrt{2} > 0 \text{ \& } \lambda_2 = -6\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \text{indef} \Rightarrow \text{sadelpunkt}$$

Svar:  $(3, -3)$  är lokalt minimum &  $(-1, 1)$  är en sadelpunkt

## 7 Föreläsning VII

### 7.1 Kurvor & ytor i $\mathbb{R}^3$ på parameterform

Funktioner av typen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  kallas kurvor i  $\mathbb{R}^m$ . För  $m = 3$  är

$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  en kurva i rummet, variabeln  $t$  kallas parametern

Tangentvektorn är  $\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  (som i 2D). Funktioner av typen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  beskriver ytor i rummet på parameterform

$\bar{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ ,  $s, t$  parametrar

#### 7.1.1 Exempel 1 [Plan på parameterform]

$$\bar{r}(s, t) = (1 + s + t, 2 - s, 3t) = \underbrace{(1, 2, 0)}_{\text{en punkt i planet}} + \overbrace{s(1, -1, 0) + t(1, 0, 3)}^{\text{vektorer parallella med planet}} \quad (7.1)$$

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}$  och  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$  är tangentvektorer till ytan, och spänner upp tangentplanet vars normal  $\bar{N} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} * \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$  För planet i (7.1) är  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = (1, -1, 0)$  &  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = (1, 0, 3)$

#### 7.1.2 Exempel 2

Enhetssfären  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  kan skrivas med rympolära vinklar  $\theta$  &  $\varphi$  som parametrar

$$\bar{r}(\theta, \varphi) = (x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

Vi får

$$\begin{aligned} \bar{N} = \bar{r}'_{\theta} \times \bar{r}'_{\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta \cos \varphi \\ -\sin^2 \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \bar{r}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

## 7.2 Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

För  $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definieras funktionalmatrisen (Jacobi-matrisen)

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \text{ m} \times \text{n matris}$$

### 7.2.1 Exempel 3

$$\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 x_2) \Rightarrow \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

### 7.2.2 Exempel 4

Variabelbyte  $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  till polärakoordinater har matris

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

### 7.2.3 Exempel 5

En linjär avbildning  $\bar{f}(\bar{x}) = \overbrace{\text{konstant m} \times \text{n matris}}^A \underbrace{\bar{x}}_{\text{kolon}}$  har  $\bar{f}'(\bar{x}) = A$

**OBS!** För  $m = 1$  ( $\bar{f} = f$ ) fås specialfallet  $\bar{f}'(\bar{x}) = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}) = \nabla f$

Tidigare kedjeregeln för varje  $f_j(\bar{g}(\bar{x}))$  i  $\bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) = (\bar{f} \bullet \bar{g})(\bar{x}) \Rightarrow$   
den mest allmänna kedjeregeln kan skrivas

$$\underbrace{(\bar{f} \bullet \bar{g})'(\bar{x})}_{m \times n} = \underbrace{\bar{f}'(\bar{g}(\bar{x}))}_{m \times p} \underbrace{\bar{g}'(\bar{x})}_{p \times n} \text{ Matris multiplikation}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \bar{g}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^p \quad \bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^m$$

För  $m = n$  har  $\bar{f}(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funktionaldeterminant (Jacobi-determinant)

$$\det(\bar{f}'(\bar{x})) = \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

I (7.2) är  $\frac{d(f_1, f_2)}{d(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$  och i (7.3)

$$\frac{d(x, y)}{d(\rho, \varphi)} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

### 7.3 Linjärisering av $\bar{f}(\bar{x})$

Antag  $m = n = 2$  och skriv  $\bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  som kolonn

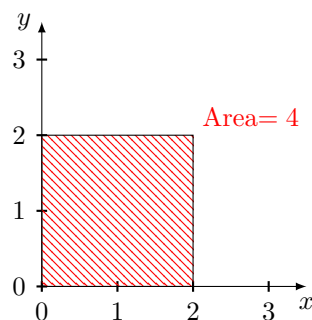
Taylor's formel för  $u$  &  $v$  kring punkten  $(a, b)$  ger

$$\begin{aligned} \left/ \begin{array}{l} a+h=x, h=x-a \\ b+k=y, k=y-b \end{array} \right/ \bar{f}(x, y) &= \begin{pmatrix} u(a, b) + u'_x(a, b)(x-a) + u'_y(a, b)(y-b) + rest \\ v(a, b) + v'_x(a, b)(x-a) + v'_y(a, b)(y-b) + rest \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} u(a, b) \\ v(a, b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x(a, b) & u'_y(a, b) \\ v'_x(a, b) & v'_y(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \bar{f}(a, b) + f'(a, b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\overbrace{f'(a, b)}^A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\bar{x}}}_{\text{linjär avbildning}} + \underbrace{\bar{f}(a, b) - f'(a, b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{=\bar{C} \text{ konstant vektor}} = A\bar{x} + \bar{C} \end{aligned}$$

linjärisering av  $\bar{f}$ , gäller nära  $(a, b)$ . Motsvarande gäller godtyckliga  $m, n$

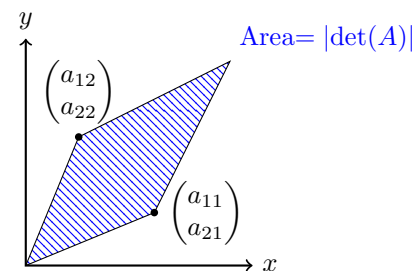
### 7.4 Area/volym-skalning

2D:



Figur 6: Areal innan skalning

Linjär avbildning  $\bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x}$

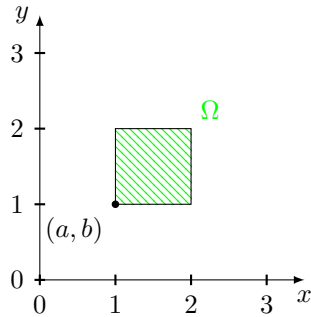


Figur 7: Areal efter skalning

3D:  $|\det(A)| = \text{volym av parallelepiped med } A\text{'s kolonner som kanter}$   
 $|\det(A)|$  ger area/volym-skalning i 2D/3D

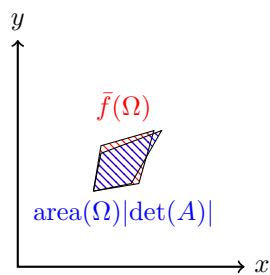


Godtycklig funktion  $\bar{f}$



Figur 8: Areal innan skalning

Linjär avbildning,  $\bar{f} \begin{matrix} [röd] \\ [blå] \end{matrix}$   
 $A\bar{x} + \bar{C}$



Figur 9: Areal efter skalning ( $+\bar{C}$  påverkar ej arean)

$\Omega$  liten  $\Rightarrow \bar{f} \approx A\bar{x} + \bar{C}$  i  $\Omega \Rightarrow$  area av  $\bar{f}(\Omega) \approx$  arean av  $(A\bar{x} + \bar{C})(\Omega)$   
 Vi hade  $A = \bar{f}'(a, b)$  funktionaldeterminanten i  $(a, b)$   $|\det(\bar{f}'(\bar{a}))|$  ger lokal  
 area/volym-skalning i 2D/3D nära  $\bar{a}$

### 7.4.1 Exempel

Variabelbyte till polärakoordinater har  $\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \rho \geq 0$  (se 7.2.3 on page 27)

Variabelbyte till rymdpolära koordinater i 3D ger

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin \theta \geq 0 \text{ (ty } 0 \leq \theta \leq \pi)$$

### 7.4.2 Invers

**LinAlg** Om  $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x}$  linjär av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $A$  en  $n \times n$  matris,  $\bar{u}, \bar{x}$  kolonner) och  $\det(\bar{f}') = \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists$  invers  $\bar{x} = A^{-1}\bar{u} = \bar{f}^{-1}(\bar{u})$  med

$$\det(\bar{f}'^{-1}) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\det(\bar{f}')}$$

För allmänna olinjära  $\bar{f}(\bar{x})$  kan man bevisa inversa funktionssatsen

*Bevis.*  $f \in C^1$  av typ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  och  $\det(f'(\bar{a})) \neq 0 \Rightarrow \exists$  omgivningar  $\Omega_1, \Omega_2$  av  $\bar{a}$  respektive  $\bar{f}(\bar{a})$  så att  $\bar{f}: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  är bijektiv och därmed inverterbar med invers  $\bar{f}^{-1}$ . Även  $\bar{f}^{-1} \in C^1$  och  $\det((\bar{f}^{-1})') = \frac{1}{\det(\bar{f}')}$   $\square$

### OBS!

1. Säger inget om hur  $\bar{f}^{-1}$  hittas bara att en finns
2. Gäller bara små  $\Omega_1, \Omega_2$  i allmänhet
3. Invers kan finnas kring  $\bar{a}$  även om  $\det(\bar{f}'(\bar{a})) = 0$  men är då ej  $C^1$  (från envarren)

### 7.4.3 Exempel

$\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ e^x + 2y \end{pmatrix} \in C^1$  ej globalt inverterbar  
 $\exists \bar{a} \neq \bar{b}$  med  $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b})$

Kring t.ex.  $(a,b) = (1,0)$  blir  $\det(\bar{f}^{-1}(1,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ e & 2 \end{vmatrix} = -e \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$  invers  $\bar{f}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$  lokalt kring  $\bar{f}(1,0)$

men vi kan inte uttryckligen hitta  $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$

## 8 Föreläsning VIII

### 8.1 Implicita funktioner

Givet ett uttryck  $F(x, y) = C$  (en ekvation eller en nivåyta), under vilka krav kan  $y$  lösas ut som en funktion av  $x$ ?

Betyder att till varje  $x$  måste det svara precis ett  $y$

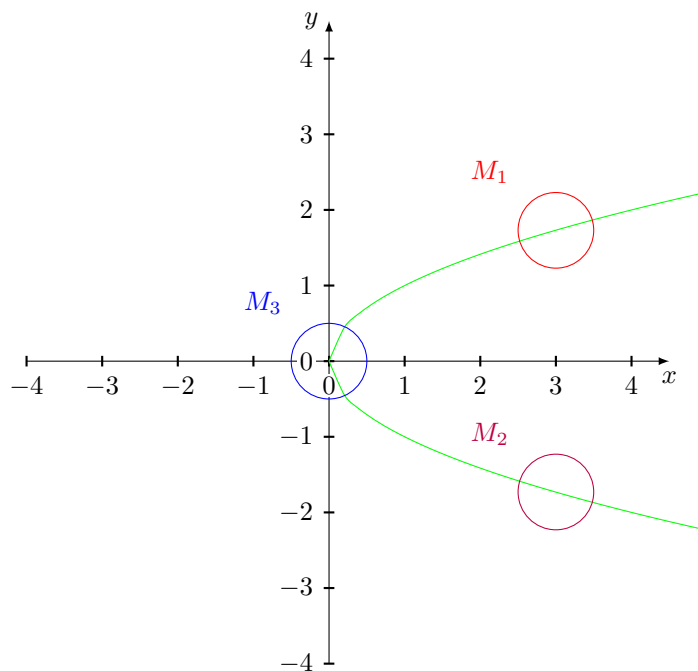
#### 8.1.1 Exempel 1

$$F(x, y) = 3x - y = 1 \Rightarrow y = 3x - 1 = g(x), \text{ går bra } \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

#### 8.1.2 Exempel 2

$$F(x, y) = 3x - y = 0 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}, x \geq 0 \quad (8.2)$$

två värden på  $y$  för varje  $x$ , inte en funktion



Figur 10: Grafisk visning av (8.2)

På t.ex  $M_1$  är  $y = \sqrt{x} = g(x)$  medan på t.ex  $M_2$  är  $y = -\sqrt{x}$   
 Går ej på  $M_3$ , problem indikeras av att  $\nabla F = (F'_x, F'_y) = (1, -2y)$  är  
 parallell med  $x$ -axeln i  $(0, 0) \in M_3$  (kurvan vänder i  $x$ -led där)  
 Alltså:  $F'_y = 0$  ger problem

**8.1.3 Exempel 3**

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x - y^3 = 0 \\ \nabla F &= (1, -3y^2) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Här kan vi lösa ut

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trots att

$$F'_y = -3y^2 = 0$$

i origo (men kurvan vänder ej). Dock är

$$g'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

ej definierad i origo så  $g(x)$  är ingen  $C^1$ -funktion av  $x$  kring  $x = 0$   
Man kan visa

**8.2 Implicita funktionssatsen**

$y$  kan lösas ut som  $y = g(x)$  med  $g \in C^1$  ur  $F(x, y) = C$ , där  $F \in C^1$ , lokalt kring  $(a, b)$  på kurvan om  $F'_g(a, b) \neq 0$

**Kommentarer**

- Med lokalt menas på någon (eventuellt liten) mängd kring  $(a, b)$  på nivåkurvan. I (8.2) & (8.3) ger  $(a, b) = (0, 0)$  problem, ingen  $g$  finns i (8.2) &  $g \notin C^1$  i (8.3) men  $F \in C^1$ .
- Motsvarande gäller att  $x$  kan lösas ut som  $x = h(y)$  om  $F'_x(a, b) \neq 0$
- Med implicit menas att satsen bara säger att funktionen  $g$  finns, inte hur  $g$  beräknas  

$$\left( \begin{array}{l} \text{men i (8.1): } g(x) = 3x - 1, \text{ i (8.2) } g(x) = \sqrt{x} \text{ på } M_1, g(x) = -\sqrt{x} \\ \text{på } M_2 \text{ och i (8.3) } g(x) = \sqrt[3]{x}, \text{ alla explicit skrivna} \end{array} \right)$$

**8.2.1 Exempel 4**

$$F(x, y) = x^3 y^2 + y^5 \sin x + y + 2x = 2, F \in C^\infty \quad (8.4)$$

$F(1, 0) = 2 \Rightarrow (a, b) = (1, 0)$  på nivåkurvan

Vi klarar inte att lösa ut  $y$  explicit,  $y = g(x) = ???$  liksom va fan femtegradare!!

$$F'_y = 2x^3 + 5y^4 \sin x + 1 \Rightarrow F'_y(1, 0) = 1 \neq 0$$

från sats:  $y$  kan lösas ut implicit som  $y = g(x)$  där  $g \in C^1$  lokalt kring  $(1, 0)$

Trots att  $g(x)$  är okänd kan vi få ut  $g'(x)$  på två olika sätt

**Alternativ 1 (kedjeregeln)**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \underbrace{F\left(x, \overbrace{g(x)}^y\right)}_{=2} = \frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{g'(x)} = F'_x + F'_y g'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) &= -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 y^2 + y^5 \cos x + 2}{2x^3 + 5y^4 \sin x + 1} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{1} = -2 \\ \nabla F &= (F'_x, F'_y) = (2, 1) \end{aligned} \quad (8.5)$$

**Alternativ 2 (implicit deriving)**

$y = g(x) \Rightarrow x^3 g(x)^2 + g(x)^5 \sin x + g(x) + 2x = 2 = \text{konstant } \forall x$  på intervall kring  $x = 1$

Derivera  $g(x) \Rightarrow$

$$3x^2 g(x)^2 + 2x^3 g(x) g'(x) + 5g(x)^4 g'(x) \sin x + g(x)^5 \cos x + g'(x) + 2 = 0 \quad (8.6)$$

Lös ut  $g'(x)$ , ger samma som i (8.5) Även  $g''(x)$  kan beräknas genom implicit derivering av (8.6)

**8.3 3 variabler, 1 funktion**

Ur  $F(x, y, z) = C$  ( $F \in C^1$ , nivåyta geometriskt) kan t.ex.  $z$  lösas ut som en  $C^1$ -funktion av  $x$  &  $y$ ,  $z = g(x, y)$ , lokalt kring  $(a, b, c)$  på ytan om  $F'_z(a, b, c) \neq 0$  ( $\nabla F$  ej parallell med  $xy$ -planet)

**Implicit deriving/kedjeregeln**

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{F(x, y, \overbrace{g(x, y)}^z)}_{=C} = F'_x * 1 + F'_y * 0 + F'_z g'_x \Rightarrow g'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \text{ pss } g'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Motsvarande om  $x$  eller  $y$  ska lösas ut

**8.3.1 Exempel 5**

$$F(x, y, z) = x^2 z \cos y + e^{z+3y-x} = 2, \text{ nivåyta } F \in C^1 \quad (8.7)$$

$$F(1, 0, 1) = 1^2 * 1 \cos 0 + e^{1+0-1} = 2 \Rightarrow (1, 0, 1) \text{ på ytan}$$

$$F'_y = -x^2 z \sin y + 3e^{z+3y-x} \Rightarrow F'_y(1, 0, 1) = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow y$  kan lösas ut som  $y = g(x, z)$  ur  $F(x, y, z) = 2$  kring  $(1, 0, 1)$  på ytan  
 $g \in C^1$  med  $g(1, 1) = 0$

$$g'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xz \cos y - e^{z+3y-x}}{-x^2 z \sin y + 3e^{z+3y-x}} \Big|_{(1,0,1)} = -\frac{2-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$g'_z = -\frac{F'_z}{F'_y} = -\frac{x^2 \cos y + e^{z+3y-x}}{-x^2 z \sin y + 3e^{z+3y-x}} \Big|_{(1,0,1)} = -\frac{2}{3}$$

**8.4 3 variabler, 2 funktioner**

$$\text{Ekvationssystem} \begin{cases} F(x, y, z) = C_1 \\ G(x, y, z) = C_2 \end{cases}$$

är geometriskt skärningen mellan två nivåytor, dvs en kurva  $\gamma$ .

$\gamma$  kan lokalt kring en punkt  $P \in \gamma$  parametreras med t.ex.

$$x : \bar{r}(t) = \bar{r}(x) = (x, h(x), j(x)) \text{ om tangenten}$$

$\bar{T} = \nabla F \times \nabla G$  har  $x$ -komponent

$$\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix} \neq 0$$

Algebraiskt tolkat kan då  $y = h(x)$  &  $z = j(x)$  lösas ut ur systemet som en funktion av  $x$  (lokalt kring  $P$ )

**8.4.1 Exempel 6**

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^4 + yz = 1 & F(-1, 0, 2) = 1 \\ G(x, y, z) = x^2 e^y z = 2 & G(-1, 0, 2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad (8.8)$$

$$\Rightarrow P = (-1, 0, 2) \text{ på skärningskurvan } \gamma$$

$$\nabla F = (4x^3, z, y) \stackrel{P}{=} (-4, 2, 0) \quad \& \quad \nabla G = (2xe^y z, x^2 e^y z, x^2 e^y) \stackrel{P}{=} (-4, 2, 1)$$

$\Rightarrow \bar{T} = \nabla F \times \nabla G = (2, 4, 0)$  är tangent till  $\gamma$  i  $P$

$x$ -komponent av  $\bar{T}$  är  $2 \neq 0 \Rightarrow$  kring  $P$  (som har  $x = -1$ ) kan både  $y$  &  $z$  lösas ut som  $C^1$  funktioner  $y = h(x)$  &  $z = j(x)$  på  $\gamma$ .

Om  $\gamma$  skrivs  $\bar{r}(x) = (x, h(x), j(x))$  är  $\bar{r}'(x) = (1, h'(x), j'(x))$  vilket ger att

$$\bar{r}'(-1) = (1, h'(-1), j'(-1)) \text{ är en tangentvektor till } \gamma \text{ i } P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{parallell med } (2, 4, 0) = 2(1, 2, 0) \Rightarrow h'(-1) = 2 \quad \& \quad j'(-1) = 0$$

**OBS!**  $z$ -komponent av  $\bar{r} = 0 \Rightarrow z$  ingen bra parameter för  $\gamma$  kring  $P$

## 9 Föreläsning IX

### 9.1 Dubbelintegraler

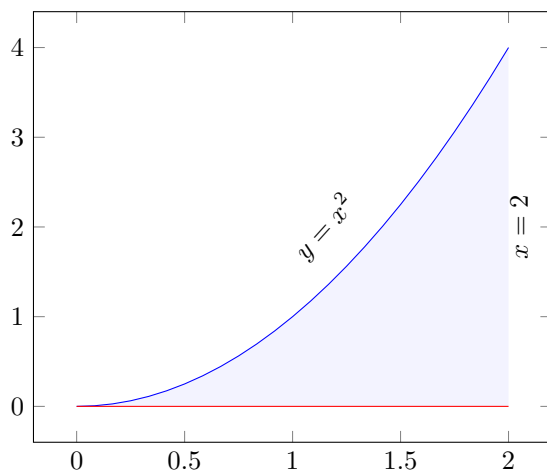
Skivformeln för volymen

Volymen av en tunn skiva ges av  $dV = A(x) dx$ , den hela volymen ges av

$$V = \int_a^b dV$$

#### 9.1.1 Exempel

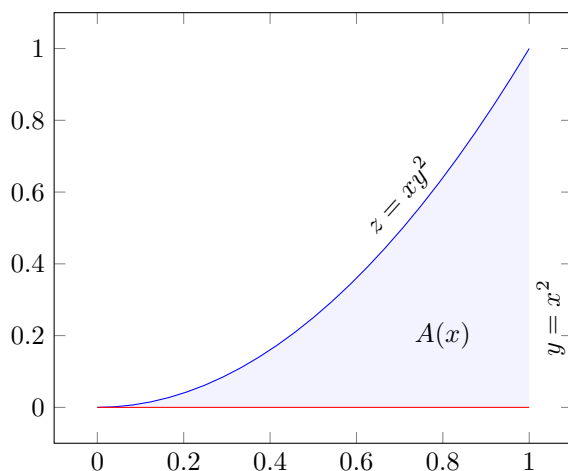
Låt  $D$  vara mängden  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$   $D$  kan också skrivas  $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 2 \end{cases}$



Figur 11:  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$

Låt  $f(x, y) = xy^2$

Vad blir volymen mellan ytan  $z = xy^2$  och  $xy$ -planet ovanför D?



Figur 12: 2D representation av en skiva

$$A(x) = \int_0^{x^2} xy^2 \, dy = x \int_0^{x^2} y^2 \, dy = x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} = x \frac{x^6}{3} = \frac{x^7}{3}$$

$$\text{Volymen } V = \int_0^2 A(x) \, dx = \int_0^2 \frac{x^7}{3} \, dx = \left[ \frac{x^8}{24} \right]_0^2 = \frac{256}{24} = \frac{32}{3}$$

Vi skriver dubbelintegralen av  $xy$  över D

$$V = \int_0^2 \left( \int_0^{x^2} xy^2 \, dy \right) dx = \iint_D xy^2 \, dx \, dy = \int_0^4 \left( \int_{\sqrt{y}}^2 xy^2 \, dx \right) dy$$

### 9.1.2 Skiva i $y$ -led

$$A(y) = \int_{\sqrt{y}}^2 xy^2 \, dx = y^2 \int_{\sqrt{y}}^2 x \, dx = y^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{y}}^2 = y^2 \left( 2 - \frac{y}{2} \right) = 2y^2 - \frac{y^3}{2}$$

$$V = \int_0^4 A(y) \, dy = \int_0^4 \left( 2 - \frac{y}{2} \right) dy = \left[ \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right]_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{8} = \frac{32}{3}$$

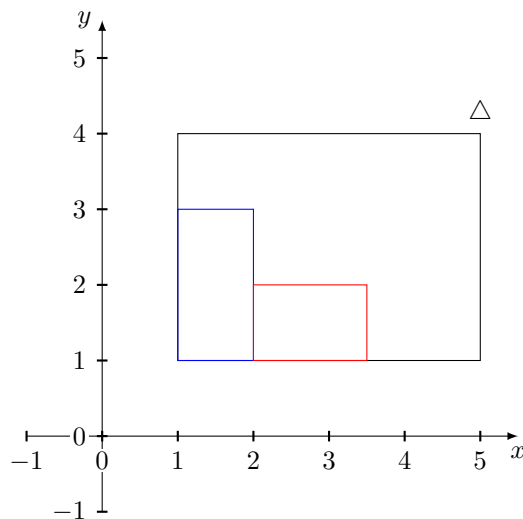
Samma svar såklart!



## 9.2 Översikt, definition av dubbelintegraler

Att integrera en variabel i taget kallas upprepade enkelintegraler

### 9.2.1 Steg 1



Figur 13: Visar på en yta med mindre ytor i

$\Delta$  = axelparallell rektangel

Dela in  $\Delta$  i små rektanglar  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$

En trappfunktion  $\phi$  på  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  är konstant på varje  $\Delta_j$  :  $\phi(x, y) = C_j$  på  $\Delta_j$ . Då kan dubbelintegralen av  $\phi$  över  $\Delta$  definieras som volymen (med tecken)

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) \, dx \, dy = I(\phi) = C_1 A(\Delta_1) + \dots + C_n A(\Delta_n)$$

### 9.2.2 Steg 2

Om  $\phi_1 \leq f \leq \phi_2$  på  $\Delta$ ,  $\phi_1, \phi_2$  trappfunktioner, så kallas  $I(\phi_1)$  en undersumma till  $f$  på  $\Delta$  och  $I(\phi_2)$  en översumma.  $f$  kallas integrerbar över  $\Delta$  om  $\forall \epsilon > 0 \exists$  sådana  $\phi_1, \phi_2$  med  $I(\phi_2) - I(\phi_1) < \epsilon$ . Man kan bevisa att då finns ett unikt tal  $k$  så att  $I(\phi_1) \leq k \leq I(\phi_2) \forall$  sådana  $\phi_1, \phi_2$

$k$  kallas dubbelintegralen av  $f$  över  $\Delta$ , skrivs

$$k = \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy$$

Kort sammanfattning:

Man visar att  $f$  kontinuerlig på  $\Delta \Rightarrow f$  integrerbar över  $\Delta$

### 9.2.3 Steg 3

$D$  är en godtycklig mängd,  $D \subset \Delta$

Sätt  $f_D = \begin{cases} f & \text{på } D \\ 0 & \text{utanför } D \end{cases}$ , normalt sett ej kontinuerlig på randen av  $D$

$f$  är integrerbar över  $D$  om  $f_D$  är integrerbar över  $\Delta$  och då definieras

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \underbrace{\iint_{\Delta} f_D(x, y) \, dx \, dy}_{\text{definierat i 9.2.2}}$$

Man visar att  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \exists$  om  $D$  begränsad,  $f$  beror på  $D$

( $|f(x, y)| \leq M$  på  $D$ ) och  $f$  kontinuerlig utom möjligen på en nollmängd; en mängd  $N$  som  $\forall \epsilon > 0$  kan täckas över med rektanglar med total area  $< \epsilon$ . T.ex. kan  $N$  vara en vanlig kurva (som  $D$ 's rand).

Vanliga räknelagar gäller, t.ex.

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) \, dx \, dy = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \iint_D g(x, y) \, dx \, dy$$

### 9.2.4 Exempel

Beräkna  $I = \iint_D x \sin xy \, dx \, dy$  då  $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

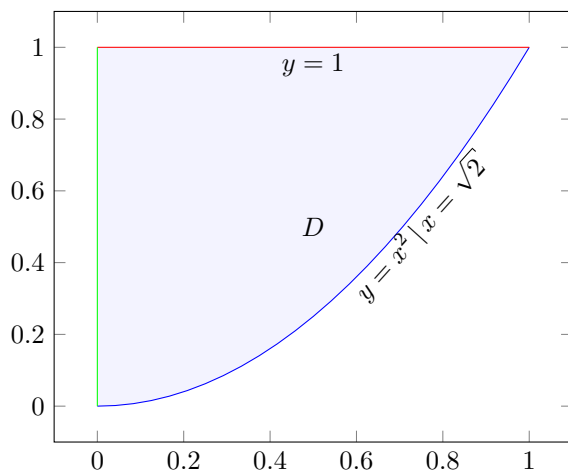
Enklast att börja med att integrera över  $y$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{y=0}^{y=1} x \sin xy \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\cos xy \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + 1) dx = \left[ -\sin x + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

### 9.2.5 Exempel

Beräkna  $I = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 x e^{y^2} \, dy \right) dx$

$\int e^{y^2} dy = ???$  Enklare att börja med  $x$



Figur 14:  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2} \, dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^1 e^{y^2} \frac{y}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{4} \left[ e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{4} \end{aligned}$$

### 9.3 Definition

Arean av en mängd  $D$  i  $xy$ -planet är  $\text{Area}(D) = \iint_D dx \, dy$

#### 9.3.1 Exempel

$$\begin{aligned} D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases} \quad , \text{ ger } \text{Area}(D) &= \iint_D dx \, dy = \\ &= \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{g(x)} dy \right) dx = \int_a^b \left[ y \right]_{f(x)}^{g(x)} dx = \\ &= \underbrace{\int_a^b (g(x) - f(x)) dx}_{\text{bekant från envarre}} \end{aligned}$$

## 10 Föreläsning X

### 10.1 Variabelbyte i dubbelintegraler - Sats

Om  $D$  i  $xy$ -planet avbildas bijektivt på  $E$  i  $uv$ -planet (till varje punkt  $(x, y) \in D$  hör en punkt  $(u, v) \in E$  och omvänt) med  $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$  så är

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du \, dv$$

#### 10.1.1 Bevisidé

Approximera trappfunktionen  $\phi$

För att integralens värde inte ska ändras måste vi multiplicera med

$$\frac{1}{\left| \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \right|} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

Jämför med envarre:  $dx = \frac{dx}{dt} dt$

Belopp på determinant i flervarre för att vi alltid sätter gränser från undre till övre värde

#### 10.1.2 Exempel

$$I = \iint_D \frac{dx \, dy}{5 + x^2 + y^2}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

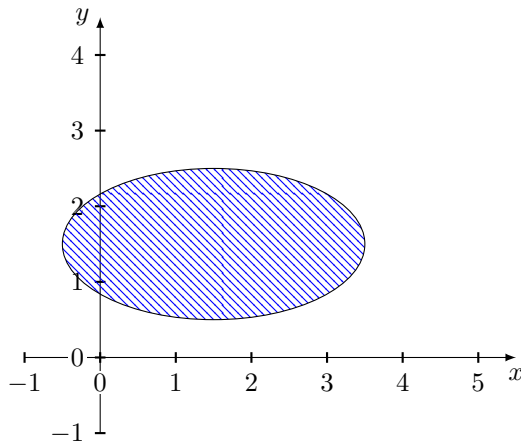
Byt till polära koordinater:  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow D$  övergår i  $E$

$$E : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \quad \frac{dx \, dy}{d\rho \, d\varphi} = \text{se 7.2.3 on page 27} = \rho$$

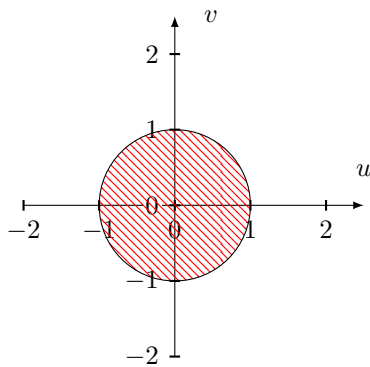
$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_E \frac{1}{5 + \rho^2} \left| \frac{dx \, dy}{d\rho \, d\varphi} \right| d\rho \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho}{5 + \rho^2} d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln 5 + \rho^2 \right]_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \frac{1}{2} \ln 8 - \frac{1}{2} \ln 5 \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} \left[ \rho \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} \ln \frac{8}{5}}} \end{aligned}$$

## 10.1.3 På en elipsskiva

$$\left(\frac{x-x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_o}{b}\right)^2 \leq 1$$

Figur 15: Funktion i  $xy$ -planet

Variabelbytet  $\begin{cases} u = \frac{x-x_o}{a} \\ v = \frac{y-y_o}{b} \end{cases}$ , ger  $u^2+v^2 \leq 1$  och  $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}} = \frac{1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}} = \frac{1}{\frac{1}{ab}} = ab$

Figur 16: Avbildat i  $uv$ -planet

$dx dy$  byts mot  $ab du dv$ , sedan kan  $u, v$  bytas mot polära  $\frac{d(u,v)}{d(\rho,\varphi)} = \rho$

## 10.2 Trippelintegraler

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

definieras också med över- och undersummor. Ingen rent geometrisk tolkning i 3D ty behövs 4 axlar för  $x, y, z$  och  $f$ . Fysikaliska tolkningar är att om  $f(x, y, z)$  är en densitet/täthet (mass-, laddnings,...) så ger integralen det totala värdet på storheten (massa, laddning,...).

Volymen av  $D$  definieras som

$$\iiint_D dx \, dy \, dz \text{ (som area i 2D, se 9.3 on page 40)}$$

Trippelintegraler och multipelintegraler

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1, \dots, dx_n, \, n \geq 4$$

kan beräknas med upprepade enkelintegraler

### 10.2.1 Exempel

Beräkna  $I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$  då  $D$  ges av  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq (y-x)^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_x^1 \left( \int_0^{(y-x)^2} z \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_x^1 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{(y-x)^2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( \left[ \frac{(y-x)^5}{10} \right]_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{(1-x)^5}{10} - \frac{(x-x)^5}{10} \right) dx = \\ &= \left[ -\frac{(1-x)^6}{60} \right]_0^1 = 0 - \left( -\frac{1}{60} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{60}}} \end{aligned}$$

### 10.3 Integrationsordningar

Det finns 6 olika integrationsordningar, ovan [10.2.1 on the preceding page](#) tog vi  $z \rightarrow y \rightarrow x$ .

Med  $z$  först har vi kvar projektionen  $D_{xy}$  av  $D$

$$z \rightarrow y \rightarrow x \text{ ger } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq (y-x)^2 \end{array} \right\} D_{xy} \quad (10.1)$$

$$z \rightarrow x \rightarrow y \text{ ger } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq (y-x)^2 \end{array} \right\} D_{xy} \quad (10.2)$$

Med  $y$  först har vi kvar projektionen  $D_{xz}$  av  $D$

$$\begin{cases} z = (y-x)^2 \Rightarrow \sqrt{z} = \pm(y-x) \Rightarrow y = x + \sqrt{z} \\ z = (1-x)^2 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{z} \end{cases}$$

$$y \rightarrow z \rightarrow x \text{ ger } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq z \leq (1-x)^2 \\ x + \sqrt{z} \leq y \leq 1 \end{array} \right\} D_{xz} \quad (10.3)$$

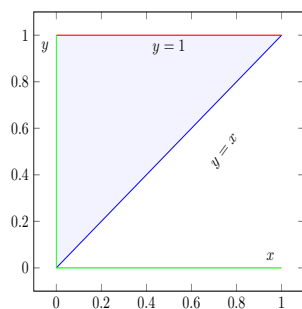
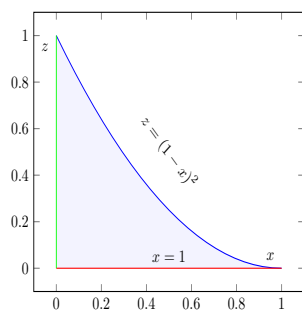
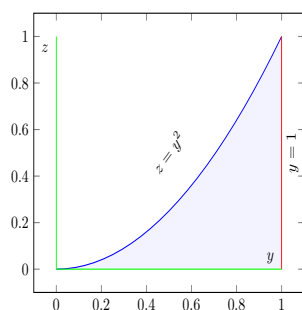
$$y \rightarrow x \rightarrow z \text{ ger } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - \sqrt{z} \\ x + \sqrt{z} \leq y \leq 1 \end{array} \right\} D_{xz} \quad (10.4)$$

Med  $x$  först har vi kvar projektionen  $D_{yz}$  av  $D$

$$x \rightarrow z \rightarrow y \text{ ger } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ x \leq z \leq y^2 \\ 0 \leq x \leq y - \sqrt{z} \end{array} \right\} D_{yz} \quad (10.5)$$

$$x \rightarrow y \rightarrow z \text{ ger } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ \sqrt{z} \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y - \sqrt{z} \end{array} \right\} D_{yz} \quad (10.6)$$



Figur 17:  $D_{xy}$ Figur 18:  $D_{xz}$ Figur 19:  $D_{yz}$

Test av (10.5)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{y-\sqrt{z}} z \, dx \, dz \, dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} z \left[ x \right]_0^{y-\sqrt{z}} dz \, dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} z(y - \sqrt{z}) \, dz \, dy = \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{z^2 y}{2} - \frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \left( \frac{y^2}{2} - \frac{2y^5}{5} - \frac{0^2 y}{2} - \frac{2 \cdot 0^{\frac{5}{2}}}{5} \right) dy = \\
 &= \int_0^1 \frac{y^5}{10} dy = \left[ \frac{y^6}{60} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{60}}}
 \end{aligned}$$

Man kan också tänka att  $D$  skivas upp. T.ex. för fixt  $y$  har vi skivan i figur 18 on the previous page

$$\begin{aligned}
 \text{Ger } I &= \int_0^1 \left( \iint_{\hat{D}_{xz}} dx \, dz \right) dy \\
 \hat{D}_{xz} &: \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq (y-x)^2 \end{cases} \quad \text{ger (10.2)} \\
 \hat{D}_{xz} &: \begin{cases} 0 \leq z \leq y^2 \\ 0 \leq x \leq y - \sqrt{z} \end{cases} \quad \text{ger (10.5)}
 \end{aligned}$$

## 11 Föreläsning XI

### 11.1 Cylinderkoordinater $\rho$ , $\varphi$ och $z$

i 3D är  $x, y$  bytt mot polära koordinater men  $z$  behålls  $\frac{d(x, y, z)}{d(\rho, \varphi, z)} = \rho \geq 0$

#### 11.1.1 Exempel

Beräkna volymen  $V = \iiint_K dx dy dz$  av  $K$  som begränsas av konen

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ och halvsfären } x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$$

$K$  ges av  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  ( $x, y$ )  $\in D$ , en cirkel med radie = 1

Skärningen av konen & sfären:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{radie} = 1$$

I cylindriska koordinater ges  $K$  av: 
$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \rho \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \iiint_K dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} \left| \frac{d(x, y, z)}{d(\rho, \varphi, z)} \right| dz d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \left[ z \right]_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \rho \sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3}(2 - \rho)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^1 d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{3}(2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{3}(2 - 0)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}0^3 \right) d\varphi = \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2}{3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Om vi istället tar konstanta gränser på  $z$  och variabla på  $\rho$  måste vi dela upp integralen i två bitar

$$\text{Konen: } \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq z \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{och Sfären: } \begin{cases} 1 \leq z \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2-z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^z dz \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2-z^2}} dz \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2-z^2}{2} dz \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[ \frac{z^3}{6} \right]_0^1}_{=\frac{1}{6}} d\varphi + \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[ z - \frac{z^3}{6} \right]_1^{\sqrt{2}}}_{=\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{6} - 1 + \frac{1}{6}} d\varphi = \\ &= \left( \frac{4\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)}} \end{aligned}$$

**11.1.2 Exempel**

Härled volymen av ett klot

$$\text{Rymdpolära koordinater} \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}, R \text{ är radien}$$

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = \text{7.4.1 on page 30} = r^2 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left| \frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} \right| dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[ -\cos \theta \right]_0^\pi}_{0^{(-1)-(-1)}} d\varphi = \\ &\quad \frac{2R^3}{3} \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}} \end{aligned}$$

## 11.2 Tyngdpunkt/masscentrum

**Envarre 2** (Forsling-Neymark 7.5):

Tyngdpunkten  $(x_T, y_T, z_T)$  hos en 3-dimensionell kropp  $K$  med massdensitet  $\rho(x, y, z)$  [kg/m<sup>3</sup>] ges av

$$\begin{aligned}x_T &= \frac{1}{m} \iiint_K x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\y_T &= \frac{1}{m} \iiint_K y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\z_T &= \frac{1}{m} \iiint_K z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

där  $m = \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  är kroppens totala massa

**OBS** att  $\rho(x, y, z)$  får variera över  $K$

I F-N skrivs  $dx \, dy \, dz$  som  $dV$

Om  $\rho(x, y, z)$  är konstant blir  $x_T = \frac{\iiint_K x \, dV}{\iiint_K dV} = \frac{\iiint_K x \, dV}{V}$  pss. för  $y$  och  $z$

En tunn skiva  $D$  kan modelleras 2-dimensionellt och har tyngdpunkt

$(x_T, y_T) = \left( \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dx \, dy, \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) \, dx \, dy \right)$  där  $\rho(x, y)$  är

ytdensiteten [kg/m<sup>2</sup>] och  $m = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy$  är den totala massan

### 11.2.1 Exempel

Beräkna  $t_p$  på en halvcirkelskiva med konstant  $\rho(x, y) = k$

$$\begin{cases} x_T = 0 & (\text{symmetri}) & -a \leq x \leq a \\ y_T = ??? & & 0 \leq y \leq a \end{cases}$$

$$\text{massa } m = \iint_D k \, dx \, dy = k \iint_D dx \, dy = k * \text{area}(D) = k \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\Rightarrow y_T = \frac{1}{m} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{2}{k\pi a^2} k \iint_D y \, dx \, dy =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} \text{polära koordinater } r, \varphi \text{ (} \rho \text{ upptagen)} \\ 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right/ \frac{d(x, y)}{d(r, \varphi)} =$$

$$= \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^a r \sin \varphi r \, dr \, d\varphi = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^a \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi a^2} \frac{a^3}{3} [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{4a^3}{\pi a^2 3} = \frac{4a}{3\pi}$$

## 11.2.2 Exempel

3D Bestäm  $t_p$  för en fylld kon

$$\begin{cases} x_T = 0 & (\text{symmetri}) \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \\ y_T = 0 & (\text{symmetri}) \end{cases} \quad \text{om} \quad \begin{matrix} a/ \\ b/ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rho = 1 \\ \rho = 1 + x^2 + y^2 + z^2 \end{matrix}$$

$K$  i cylinderkoordinater  $(r, \varphi, z)$

$$(1) \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{eller} \quad (2) \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Vi kommer att använda oss av (1) i detta exempel

a/

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z r \, dr \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{\left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^z}_{\frac{z^2}{2}} dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{z^3}{6} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{6} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}$$

$$z_T = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z \, dr \, dz \, d\varphi = \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{z \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^z}_{\frac{z^3}{2}} dz \, d\varphi = \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{z^4}{8} \right]_0^1 d\varphi = \frac{3}{\pi} * \frac{1}{8} * 2\pi = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

b/

$$\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 + r^2 + z^2 \text{ i cylindriska koordinater}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z (1 + r^2 + z^2) r \, dr \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_0^z dz \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{4} \right) dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{z^3}{6} + \frac{3z^5}{20} \right]_0^1 d\varphi = \left( \frac{1}{6} * \frac{3}{20} \right) 2\pi = \frac{19\pi}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= \frac{1}{m} \iiint_K z(1 + r^2 + z^2) r \, dr \, dz \, d\varphi = \frac{30}{19\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_0^z dz \, d\varphi = \\ &= \frac{30}{19\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{z^3}{2} + \frac{3z^5}{4} \right) dz \, d\varphi = \frac{30}{19\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{z^4}{8} + \frac{3z^6}{24} \right]_0^1 d\varphi = \frac{30}{19\pi} * \frac{1}{4} * 2\pi = \\ &= \underline{\underline{\frac{15}{19}}} > \frac{3}{4} \text{ rimligt} \end{aligned}$$

## 12 Föreläsning XII

### 12.1 Generaliserade multipelintegraler

**Envarre Def** t.ex.  $\int_a^\infty f(x) dx$  skrivs om som ett gränsvärde  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  om gränsvärdet  $\exists$

**Flervarre Def** Hur definierar man  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  om  $D$  är obegränsad eller om  $f(x, y)$  är obegränsad i  $D$ ??

#### 12.1.1 Exempel

Vad blir

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} ?? \quad (12.1)$$

$\mathbb{R}^2$  är en obegränsad mängd

1. Om  $f(x, y) \geq 0$  i  $D$  (eller om  $f(x, y) \leq 0$  i hela  $D$ )

Ta mängder  $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$  så att  $D_n \rightarrow D$  (uttömmande följd) och så att  $D_n$  är en begränsad mängd och  $f$  är begränsad på varje  $D_n$

$$\Rightarrow I_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \text{ är inte generaliserad}$$

#### 12.1.2 Exempel

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{men } f \text{ är obegränsad i origo}$$

Allmänt är  $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \dots \leq I_n \leq \dots$  eftersom  $f \geq 0$  i  $D$

#### 12.1.3 Definition

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \text{ om gränsvärde } \exists$$

Den generella integralen  $I$  är då konvergent, annars divergent



Man kan bevisa att:

- (a) Gränsvärde är oberoende av hur den uttömmande följen  $D_1 \subset D_2 \subset \dots$  väljs (annars dålig definition)
- (b)  $I$  kan beräknas med upprepade eventuellt generaliserade enkelintegraler
- (c) Variabelbyten är tillåtna på vanligt sätt

#### 12.1.4 I exempel (12.1) ovan

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} > 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$  kan räkna på med alla kända metoder

Med  $D_n : x^2 + y^2 \leq n^2$  och polära koordinater  $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq n \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$  får vi

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int$$

## 13 Appendix

### Figurer

1	Graf i 2D	2
2	Graf för polära koordinater	3
3	Exempel på rotationssymmetri	5
4	Rymdpolära koordinater	6
5	Grafisk visning av hur $f$ ändras i $x$ - & $y$ -riktningen	8
6	Arean innan skalning	28
7	Arean efter skalning	28
8	Arean innan skalning	29
9	Arean efter skalning ( $+\tilde{C}$ påverkar ej arean)	29
10	Grafisk visning av (8.2)	31
11	$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$	35
12	2D representation av en skiva	36
13	Visar på en yta med mindre ytor i	37
14	$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$	39
15	Funktion i $xy$ -planet	42
16	Avbildat i $uv$ -planet	42
17	$D_{xy}$	45
18	$D_{xz}$	45
19	$D_{yz}$	45

### Tabeller