

TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic
Linköpings Universitet
forelasningar@avdagic.net

2 maj 2017



Innehåll

2	Föreläsning 2	I
2.1	Gränsvärden för flervarre	I
2.1.1	Exempel 1	I
2.1.2	Exempel 2	I
2.1.3	Definition	II
2.1.4	Exempel 3	III
2.2	Oändlighet i envarre och flervarre	IV
2.2.1	Definition	IV
2.2.2	Exempel 4	V
2.3	3-variabler mot origo	V
2.3.1	Exempel 5	V
2.4	Rymdpolära koordinater	VI
2.4.1	Cylindriska koordinater	VII
3	Föreläsning 3	VIII
3.1	Partiella derivator	VIII
3.1.1	Exempel 1	VIII
3.1.2	Definition	VIII
3.1.3	Exempel 2	IX
3.1.4	Andraderivator	IX
3.1.5	Sats	IX
3.1.6	Exempel 3	X
3.1.7	Exempel 4	X
3.2	Differentierbarhet	XI
3.2.1	Definition	XI
3.2.2	Sats	XI
3.2.3	Linjär avbildning	XII
3.2.4	Exempel 5	XII
4	Föreläsning 4	XIII
4.1	Kedjeregeln	XIII
4.1.1	Exempel 1	XV
4.1.2	Linjärt variabelbyte	XV
4.1.3	Byte till polära koordinater	XV
4.1.4	Exempel 2	XVI
5	Föreläsning 5	XVII
5.1	Gradienter	XVII
5.1.1	Definition	XVII
5.1.2	Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D?	XVII
5.2	Nivåtor i 3D	XIX
5.2.1	Exempel 1	XIX
5.2.2	Exempel 2	XIX
5.2.3	Definition	XIX

5.2.4	Sats	XX
5.2.5	Exempel 3	XX
5.2.6	Exempel 4	XX
5.2.7	Allmänt	XX

6 Föreläsning 6 XXI

7 Föreläsning 7 XXII

7.1	Implicita funktioner	XXII
7.1.1	Exempel 1	XXII
7.1.2	Exempel 2	XXII
7.1.3	Exempel 3	XXIII
7.2	Implicita funktionssatsen	XXIII
7.2.1	Exempel 4	XXIV
7.3	3 variabler, 1 funktion	XXIV
7.3.1	Exempel 5	XXV
7.4	3 variabler, 2 funktioner	XXV
7.4.1	Exempel 6	XXV

8 Appendix

2 Föreläsning 2

2.1 Gränsvärden för flervarre

2.1.1 Exempel 1

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.1)$$

Vad händer då (x, y) närmar sig $(0, 0)$?

$$\lim_{x, y \rightarrow 0, 0} \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}$$

//sätt $t = x^4 + y^2$, $t \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ //

då fås $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, (standard gränsvärde)

2.1.2 Exempel 2

$$f(x, y) = \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.2)$$

Gå mot origo via x-axeln (där $y = 0$)

$$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0 * x}{x^2 + 0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0$$

Gå mot origo via y-axeln (där $x = 0$)

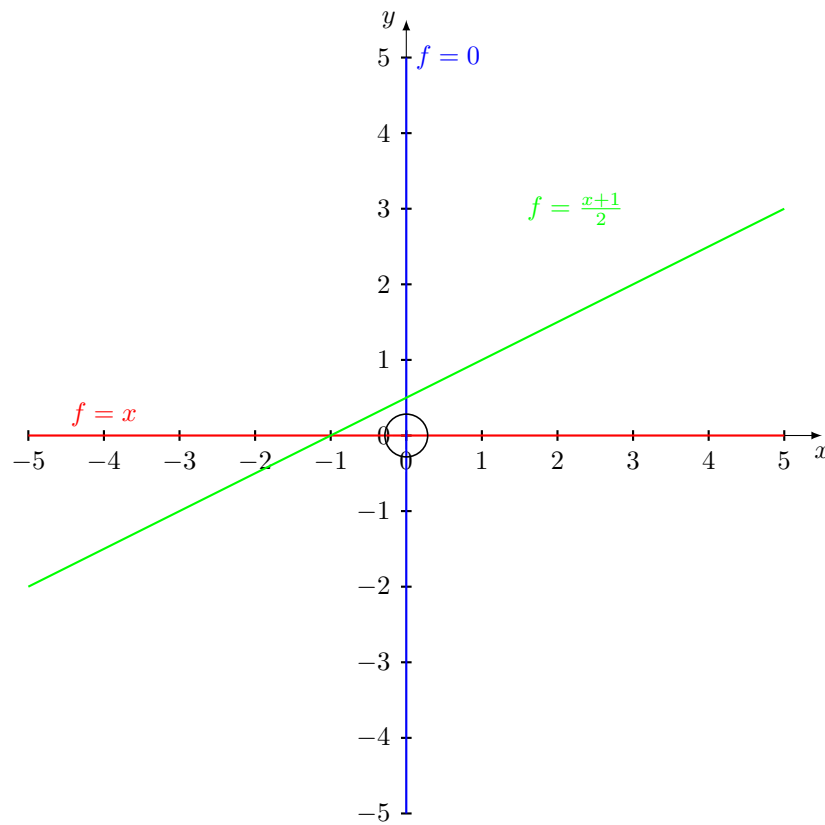
$$f(0, y) = \frac{0^3 + 0 * y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0$$

Gå mot origo längs $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^3 + x * x}{x^2 + x^2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0$$

Olika värden från olika riktningar

Innanför varje liten cirkel kring origo har f värden nära 0 och nära $\frac{1}{2}$. Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se [1](#)



Figur 1: Graf i 2D

2.1.3 Definition

Funktionen \bar{f} av typ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ så att $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon$ om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ och $\bar{x} \in D_{\bar{f}}$. Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

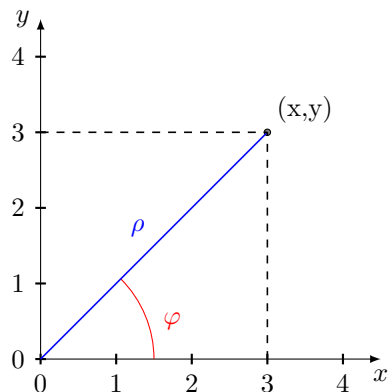
2.1.4 Exempel 3

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ ej definierad i origo} \quad (2.3)$$

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \Rightarrow f(x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2.2)
- Sådana test kan INTE visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (2.1) eller (2.3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \rho > 0 \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden: $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \rho \rightarrow 0$

Exempel (2.2) med polära koordinater

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2} &\stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi) + \rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\overbrace{\rho \cos^3(\varphi)}^{\rightarrow 0} + \underbrace{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}} \right) \Rightarrow \text{gränsvärde existerar ej} \end{aligned}$$

Exempel (2.3) med polära koordinater

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \overbrace{\rho}^{\rightarrow 0} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

2.2 Oändlighet i envarre och flervarre**Envarre**

x kan gå mot $\pm\infty$

Flervarre

bara en ∞ nämligen $|\bar{x}| \rightarrow \infty$

2D polära

$$|\bar{x}| \rightarrow \infty \iff \rho \rightarrow \infty$$

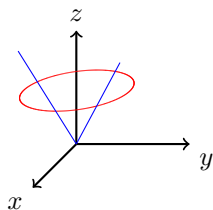
2.2.1 Definition

$$\bar{f}(\bar{x}) \rightarrow \bar{b} \text{ då } |\bar{x}| \rightarrow \infty \text{ om } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \omega \text{ så att } |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon \text{ om } |\bar{x}| > \omega$$

2.2.2 Exempel 4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{y}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho \sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\rightarrow 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \quad (2.4)$$

OBS! 2-variabelfunktioner som uttryckta i polärakordinater inte beror på φ har rotationssymmetriska grafer kring z-axeln



Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

2.3 3-variabler mot origo

2.3.1 Exempel 5

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = ??? \quad (2.5)$$

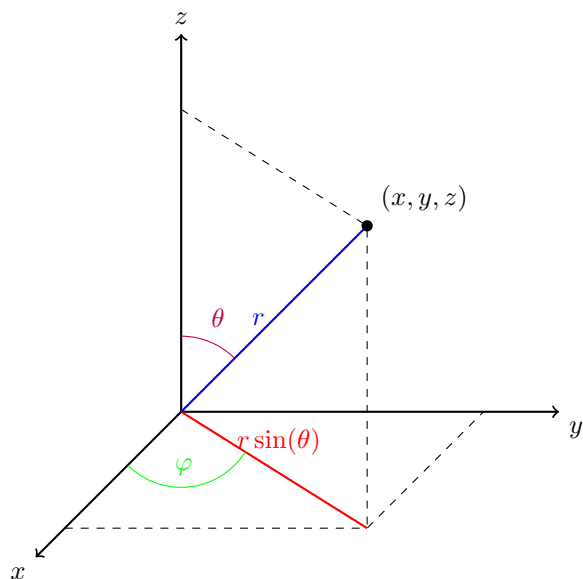
$$0 \leq \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \right| = \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + 2z^2} \leq \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq$$

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ // \quad |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} // \\ |z| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = 0$$

2.4 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r > 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$r \sin(\theta) = \rho$$

För gränsvärden där $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \iff r \rightarrow 0$

Exempel (2.5) med rympolära koordinater

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \stackrel{\text{rympol.koord}}{=} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^2 + r^2 \cos^2(\theta)} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\overbrace{r}^{\rightarrow 0}} \frac{\sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\underbrace{1 + \cos^2(\theta)}_{\text{begränsad, nämnare } \geq 1 \text{ ingen risk för } /0}} =
\end{aligned}$$

2.4.1 Cylindriska koordinater

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\begin{cases} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ z &= z \end{cases}$$

3 Föreläsning 3

3.1 Partiella derivator

3.1.1 Exempel 1

$$f(x, y) = x^2 y + x \sin(y) \quad (3.1)$$

Hur förändras f om bara x varieras? Vi vill derivera f m.a.p x och hålla y konstant. Skrivs:

$$\underbrace{f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}_{\text{båda skrivsätten används}} = 2xy + \sin(y)$$

Motsvarande då bara y varieras

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x \cos(y)$$

3.1.2 Definition

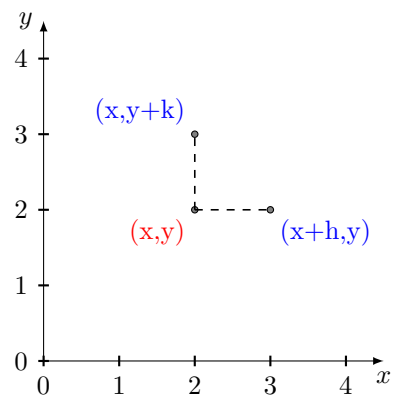
Partiella derivatan av $f(x, y)$ m.a.p x i punkten (x, y) är

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Om gränsvärde existerar!

Motsvarande för y :

$$f'_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$



Figur 5: Grafisk visning av hur f ändras i x - & y -riktningen

3.1.3 Exempel 2

3 variabler

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z + z^2 e^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3x^2 y^2 z \\ f'_y(x, y, z) = 2x^3 y z + z^2 e^y \\ f'_z(x, y, z) = x^3 y^2 + 2z e^y \end{cases}$$

3.1.4 Andraderivator

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Exempel (3.1) andra derivator

$$f''_{xx} = 2y$$

$$\left. \begin{aligned} f''_{xy} &= 2x + \cos(y) \\ f''_{yx} &= 2x + \cos(y) \end{aligned} \right\} \text{lika, ingen slump}$$

$$f''_{yy} = -x \sin(y)$$

Skriv $f \in C^r$ om f :s alla r :te-derivator är kontinuerlig.**3.1.5 Sats**

$$f \in C^2 \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$$

motsvarande för ≥ 3 varianter $f(x, y)$ har 4 andraderivator varav 3 olika $f(x, y, z)$ har 9 andraderivator varav 6 olika

3.1.6 Exempel 3

Bestäm alla $f(x, y, z)$ som uppfyller

$$\begin{aligned} f'_x &= p(x, y, z) = 3x^2yz & (1) \\ f'_y &= q(x, y, z) = x^3z + 2ye^z & (2) \\ f'_z &= r(x, y, z) = x^3y + y^2e^z & (3) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Systematisk lösning

$$(1) \Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + \overbrace{g(y, z)}^{\substack{\text{godtycklig} \\ \text{2-variabel } f}}$$

Derivera detta m.a.p y

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3z + g'_y(y, z) &= x^3z + 2ye^z \Rightarrow \\ \Rightarrow g'_y(y, z) &= 2ye^z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(y, z) = y^2e^z + \underbrace{h(z)}_{\substack{\text{godtycklig} \\ \text{envarre } f}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + h(z)$$

Derivera detta m.a.p z

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3y + y^2e^z + h'(z) &= x^3y + y^2e^z \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(z) &= 0 \Rightarrow h(z) = C \Rightarrow \end{aligned}$$

\Rightarrow Svar: $f(x, y, z) = x^3yz + y^2e^z + C$, C är en godtycklig konstant

Man kan visa att systemet (1) - (3) är lösbart

$$\Longleftrightarrow$$

$$p'_y = q'_x$$

$$p'_z = r'_x$$

$$q'_z = r'_y$$

3.1.7 Exempel 4

$$f'_x = xy$$

$$f'_y = x^2$$

olösbart ty

$$f''_{xy} = x \neq f''_{yx} = 2x$$

3.2 Differentierbarhet

Envarre

Om $f'_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \exists$ (dvs f deriverbar i a) så finns talet $f'_a = A$ sådant att $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a) - Ah) = \rho(h) \rightarrow 0$

Vi vet att $f \in C^1 \Rightarrow f$ deriverbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig

Flervarre

3.2.1 Definition

$f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) om \exists tal A, B så att

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}(f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk) = \rho(h, k) \rightarrow 0 \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

så deriverbar = differentierbar för envarre För ≥ 2 variabler gäller

3.2.2 Sats

$$f \in C^1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f \text{ differentierbar} \begin{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \stackrel{(4)}{\nRightarrow} f \text{ kontinuerlig} \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f \text{ kontinuerlig} \stackrel{(5)}{\nRightarrow} f \text{ partiellt deriverbar} \end{cases}$$

Förklaring av pilar

1. s.56-57 i boken

$$2. f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \stackrel{f \text{ diff. bar med } k=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ah + B \cdot 0 + \sqrt{h^2 + 0^2} \rho(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A + \underbrace{\frac{\sqrt{h^2}}{h}}_{\pm 1 \text{ begränsad}} \underbrace{\frac{\rho(h, 0)}{h}}_{\rightarrow 0} = A \quad \exists$$

$$3. f(a+h, b+k) = f(a, b) + \underbrace{Ah}_{\rightarrow 0} + \underbrace{Bk}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\rho(h, k)}_{\rightarrow 0} \rightarrow f(a, b) \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow f \text{ kontinuerlig}$$

4. Motexempel finns i boken s.51

5. Motexempel $f(x, y) = |x|$ i $(0, 0)$, kontinuerlig men $f'_x(x, y) \nexists$

3.2.3 Linjär avbildning

Den linjära avbildningen $df_{(a,b)}$ av typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som definieras av $df_{(a,b)}(h, k) = Ah + Bk = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$, kallas differentialen av f i (a, b) ofta skrivs variablerna $h = dx$ & $k = dy$ så $df_{(a,b)}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$ eller kort $df = f'_x dx + f'_y dy$

Exempel (3.1) omskrivet

$$f(x, y) = x^2y + x \sin(y) \Rightarrow df = (2xy + \sin(y))dx + (x^2 + x \cos(y))dy$$

Feluppskattning med df

Om $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ och f är differentierbar fås $f(\overline{x} + \overline{\Delta x}) - f(\overline{x}) = f'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n + \underbrace{\rho(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}}_{\text{Restterm}} \approx df(\overline{\Delta x})$

3.2.4 Exempel 5

Bestäm rörelseenergin och uppskatta felet för massan $m = 1.0 \pm 0.1 \text{ kg}$ med hastigheten $v = 4.0 \pm 0.2 \text{ m s}^{-1}$.

Formel för rörelseenergi: $E = \frac{mv^2}{2} \text{ J}$

Utan fel: $E = \frac{1 \cdot 4^2}{2} = 8.0 \text{ J}$

Fel:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(m + \Delta m, v + \Delta v) - E(m, v) \approx dE(\Delta m, \Delta v) = \\ &= \frac{\partial E}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial E}{\partial v} \Delta v = \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\frac{4^2}{2}} \Delta m + \underbrace{mv}_{1 \cdot 4} \Delta v = 8 \Delta m + 4 \Delta v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{maxfel} \leq 8|\Delta m| + 4|\Delta v| = 8 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 1.6 \text{ J} \Rightarrow E = 8.0 \pm 1.6 \text{ J}$$

4 Föreläsning 4

4.1 Kedjeregeln

Envarre

Exempel

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} 2x$$

Allmänt

$$f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{yttre}} \underbrace{g'(x)}_{\text{inre}}$$

Generalisering till flervarre

$$\underbrace{f(g(x))}_{\text{envarre}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(g(\bar{x})) \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(x)) \end{array} \right\} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(\bar{g}(\bar{x})) \Rightarrow \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$$

Förklaring av pilar

1. Exempel 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2 y} &= e^{x^2 y} * \underbrace{2xy}_{\text{inre m.a.p } x} \\ \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2 y} &= e^{x^2 y} * \underbrace{x^2}_{\text{inre m.a.p } y} \end{aligned}$$

Allmänt

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) g'_x(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) g'_y(x, y) \end{array} \right.$$

Motsvarande för ≥ 3 variabler

Exempel 2

Visa att $xh'_x - 2yh'_y = 0 \quad \forall$ 2 variabel funktioner $h(x, y)$ på formen $h(x, y) = f(x^2 y)$ där f är en envariabelfunktion. Lösning:

$$xh'_x - 2yh'_y = x f'(x^2 y) 2xy - 2y f'(x^2 y) x^2 = 0 \quad \forall f$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(\bar{g}(x))) &= \frac{d}{dx}(f(g_1(x), g_2(x))) \stackrel{\text{def av } \frac{d}{dx}}{=} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(\overbrace{g_1(x+l)}^{s+h}, \overbrace{g_2(x+l)}^{t+k}) - f(\overbrace{g_1(x)}^s, \overbrace{g_2(x)}^t)}{l} \stackrel{\text{diff.bar}}{=} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'_s(s, t)h + f'_t(s, t)k + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k)}{l} = \\
&= \left/ \begin{array}{l} h = g_1(x+l) - g_1(x) \rightarrow 0 \text{ då } l \rightarrow 0 \text{ om } g_1 \text{ är kontinuerlig} \\ k = g_2(x+l) - g_2(x) \rightarrow 0 \text{ då } l \rightarrow 0 \text{ om } g_2 \text{ är kontinuerlig} \end{array} \right/ = \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \left(f'_s(s, t) \frac{\overbrace{g_1(x+l) - g_1(x)}^{\rightarrow g'_1(x)}}{l} + f'_t(s, t) \frac{\overbrace{g_2(x+l) - g_2(x)}^{\rightarrow g'_2(x)}}{l} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{l}\right)^2}_{\rightarrow (g'_1(x))^2 + (g'_2(x))^2 \text{ begränsad}}} \overbrace{\rho(h, k)}^{\rightarrow 0} \right) = \\
&= f'_s(s, t)g'_1(x) + f'_t(s, t)g'_2(x) \\
&\quad \text{eller } \frac{df}{dx} = f'_s s'_x + f'_t t'_x
\end{aligned}$$

3. Fås av 1 & 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(\overbrace{g_1(x, y)}^s, \overbrace{g_2(x, y)}^t) &= f'_s s'_x + f'_t t'_x \\
\frac{\partial}{\partial y} f(g_1(x, y), g_2(x, y)) &= f'_s s'_y + f'_t t'_y
\end{aligned}$$

Matrisform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(x, y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f'_s & f'_t \end{pmatrix}}_{\text{derivator av } f(s, t)} \begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix}$$

Motsvarande för ≥ 3 variabler

4.1.1 Exempel 1

Lös den partiella differentialekvationen

$$f'_x - f'_y = y - x \quad (4.1)$$

med bivillkoret

$$f(x, 0) = x^2 \quad (4.2)$$

$$\text{Ledning: inför nya variabler } \begin{cases} s = x + y \\ t = xy \end{cases}$$

$$\text{Kedjeregeln } \begin{cases} f'_s s'_x + f'_t t'_x = f'_s \times 1 + f'_t y \\ f'_s s'_y + f'_t t'_y = f'_s \times 1 + f'_t x \end{cases} \text{ sätt in i (4.1)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f'_s + f'_t y) - (f'_s + f'_t x) &= y - x \Rightarrow f'_t \times (y - x) = y - x, \text{ ska gälla alla } (x, y) \\ \Rightarrow f'_t = 1 \Rightarrow f_t &= t + \underbrace{g(s)}_{\text{godtycklig}} \Rightarrow \underline{f(x, y) = xy + g(x, y)} \text{ [alla lösningar på (4.1)]} \end{aligned}$$

Bivillkoret (4.2) ger oss $f(x, 0) = x \times 0 + g(x) = x^2 \Rightarrow g(x + 0) = x^2 \Rightarrow$
Lösningen blir $f(x, y) = xy + (x + y)^2$

4.1.2 Linjärt variabelbyte

$$\begin{cases} s = ax + by \\ t = cx + dy \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$X_{\text{f}} \quad T^{-1} \quad X_{\text{e}}$

Matris för kedjeregeln

$$\begin{pmatrix} s'_x & s'_y \\ t'_x & t'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^{-1} !$$

4.1.3 Byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ t = \rho \sin(\varphi) \end{cases} \text{ Enklast med } \rho \text{ \& } \varphi \text{ derivator i vänsterled i kedjeregeln}$$

$$\begin{cases} f'_\rho = f'_x x'_\rho + f'_y y'_\rho = f'_x \cos(\varphi) + f'_y \sin(\varphi) \\ f'_\varphi = f'_x x'_\varphi + f'_y y'_\varphi = f'_x (-\rho \sin(\varphi)) + f'_y \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

Matrisform

$$\begin{pmatrix} f'_\rho & f'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

4.1.4 Exempel 2

Bestäm alla $f(x, y)$ som uppfyller

$$xf''_{xy} - yf''_{yy} - f'_y = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Ledning: inför } \begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$$

Översätt ekvationen till u & v . Kedjeregeln

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + yf'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = xf'_v \end{cases}$$

Operator skrivsätt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial v} \end{cases} \quad \begin{cases} ()'_x = ()'_u + ()'_v \\ ()'_y = x()'_v \end{cases}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (xf'_v)'_y = x(f'_v)'_y = x \times x(f'_v)'_v = x^2 f''_{vv}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'_u + yf'_v)'_y = (f'_u)'_y + f'_v + y(f'_v)'_y = xf''_{uv} + f'_v + yx f''_{vv}$$

Sätt in i (4.2) \Rightarrow

$$x(xf''_{uv} + f'_v + yx f''_{vv}) - y(x^2 f''_{vv}) - xf'_v = 0$$

$$x^2 f''_{uv} + xf'_v + yx^2 f''_{vv} - yx^2 f''_{vv} - xf'_v = 0$$

$$\Rightarrow x^2 f''_{uv} = 0, \quad \forall(x, y) \Rightarrow f''_{uv} = 0 \iff (f'_u)'_v$$

$$\Rightarrow f'_u = g(u), \text{ godtycklig funktion } g(u)$$

$$\Rightarrow f = G(u) + h(v), \text{ godtycklig funktion } h(v)$$

Svar: $f(x, y) = G(x) + h(xy)$, $g = G'$ & h godtyckliga funktioner

5 Föreläsning 5

5.1 Gradienter

5.1.1 Definition

Gradienten av $f(x, y)$ är vektorn $\nabla f = \text{grad } f = (f'_x, f'_y)$

För $g(x, y, z)$ är $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z)$ och motsvarande för ≥ 4 variabler

Hessianen av $f(x, y)$ resp $g(x, y, z)$ är matrisen

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{resp } Hg = \begin{pmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} & g''_{xz} \\ g''_{yx} & g''_{yy} & g''_{yz} \\ g''_{zx} & g''_{zy} & g''_{zz} \end{pmatrix}$$

symmetriska om $f, g \in C^2$, mer om H i samband med max/min-problem.

5.1.2 Hur tolkar man gradienter i 2D & 3D?

Kurvor i 2D

Tangenter och normaler (allmänt)

Tangentvektor $\vec{T} = (v_1, v_2)$

Normalvektor $\vec{N} = k(v_2, -v_1)$ ty ger

$$\vec{T} \bullet \vec{N} = v_1kv_2 - v_2kv_1 = 0 \Rightarrow \text{ortogonala}$$

Ekvivalent för tangentlinje i (x, y) är på tangenten \iff

$$\underbrace{(x-a, y-b) \bullet \vec{N}}_{\text{Parallell med } \vec{T}} = 0 \iff v_2x - v_1y = \underbrace{v_2a - v_1b}_{\text{Konstant}}$$

$$\text{Parameterform } \begin{cases} x = a + tv_2 \\ y = b + tv_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ parameter}$$

Ekvation för normallinjen: (x, y) är på normalen \iff

$$\underbrace{(x-a, y-b) \times (v_1, v_2)}_{\text{Parallell med } \vec{N}} = 0 \iff v_1x + v_2y = \underbrace{v_1a + v_2b}_{\text{Konstant}}$$

$$\text{Parameterform } \begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b - tv_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Kurvor på parameterform

Ex

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \iff (x, y) = (1, 2) + t(-1, 1) \quad [\text{rät linje}]$$

Ex

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \quad [\text{enhetscirkeln}]$$

Två punkter på kurvan $\bar{r}(t)$ & $\bar{r}(t + \Delta t)$

$$\begin{aligned} \text{Låt } \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{T}(t) = r'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}}{\Delta t} = (x'(t), y'(t)) \\ &= \text{ger tangentvektorn till kurvan, exempelvis har enhetscirkeln} \end{aligned}$$

$$\bar{T}(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$$

2. Nivåkurvor $f(x, y) = C$ Om $f(x, y) = C$ parametreras med t som $(x(t), y(t))$ ger kedjeregeln

$$0 = \frac{d}{dt} \overbrace{f(x(t), y(t))}^{\text{konstant} = C} = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = \underbrace{(f'_x, f'_y)}_{\nabla f} \bullet \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\bar{T}}$$

 $\Rightarrow \nabla f$ är normalvektor till nivåkurvan**Ex**

$$\text{Enhetscirkeln } [f(x, y) = x^2 + y^2 = 1] \text{ har } \nabla f = (2x, 2y) = 2(x, y)$$

3. Grafer

 $y = h(x)$ kan föras på

- parameterform: $t = x$ ger $(x, y) = (t, h(t))$
 $\Rightarrow \bar{T} = (x', y') = (t, h(t))$
- nivåkurveform: sätt $f(x, y) = y - h(x) = 0$
 $\Rightarrow \bar{N} = \nabla f = (f'_x, f'_y) = (-h'(x), 1)$

5.2 Nivåtor i 3D

$$g(x, y, z) = C$$

Med kedjeregeln visas på liknande sätt som för nivåkurvor att

$$\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) \text{ är } \bar{N} \text{ till nivåytan}$$

5.2.1 Exempel 1

Enhetssfären $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ har $\bar{N} = \nabla g = (2x, 2y, 2z)$
 I punkten $P : (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ är $\bar{N} = (2 \times \frac{2}{3}, 2 \times \frac{1}{3}, 2 \times \frac{2}{3})$ och tangentplanet i P är
 $(x - \frac{2}{3}, y - \frac{1}{3}, z - \frac{2}{3}) \cdot \bar{N} = 0 \iff 2x + y + 2z = 3$

En graf $z = f(x, y)$ kan skrivas som nivåytan $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$
 $\Rightarrow \bar{N}$ är $\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) = (f'_x, f'_y, -1)$

5.2.2 Exempel 2

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f'_x = 2x$$

$$f'_y = 2y$$

har i punkten $(1, 2, 5)$

$$\bar{N} = (f'_x(1, 2), f'_y(1, 2), -1) = (2, 4, -1)$$

5.2.3 Definition

Riktningensderivatan av $f(x, y)$ i punkten (a, b) och riktning $\bar{v} = (v_1, v_2)$ där $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ är

$$f'_{\bar{v}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}$$

Mäter hur f ändras i \bar{v} :s riktning

($|\bar{v}| > 1$ behövs för att $f'_{\bar{v}}$ inte ska bero på \bar{v} :s längd) Partiella derivator är
 specialfall t.ex. $\bar{v} = \bar{e}_1 = (1, 0)$ ger $f'_{\bar{v}} = f'_x$ Motsvarande gäller för ≥ 3 variabler

5.2.4 Sats

$$f \text{ differentierbar} \Rightarrow f'_v = \nabla f \bullet \bar{v}$$

5.2.5 Exempel 3

$$\bar{v} = (1, 0) \Rightarrow f'_v = (f'_x, f'_y) \bullet (1, 0) = f'_x$$

5.2.6 Exempel 4

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \Rightarrow \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$$

I punkten $(a, b, c) = (2, -1, 1)$ och i riktningen $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$ från punkten är

$$f'_v(2, -1, 1) = \nabla f(a, b, c) \bullet \bar{v} = (1, -4, 6) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2) = \frac{1 \times 1 - 4 \times 0 + 6 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

5.2.7 Allmänt

$$f'_v = \nabla f \bullet \bar{v} = |\nabla f| \underbrace{|\bar{v}|}_{=1} \cos \alpha$$

Maximal då $\alpha = 0$, dvs då \bar{v} väljs åt samma håll som $\nabla f \Rightarrow$

$$\nabla f \text{ pekar i den riktning } f \text{ växer snabbast i}$$

$f'_v = 0$ då \bar{v} är en tangent till nivåkurvan/ytan

6 Föreläsning 6

Kommer snart!

7 Föreläsning 7

7.1 Implicita funktioner

Givet ett uttryck $F(x, y) = C$ (en ekvation eller en nivåyta), under vilka krav kan y lösas ut som en funktion av x ?

Betyder att till varje x måste det svara precis ett y

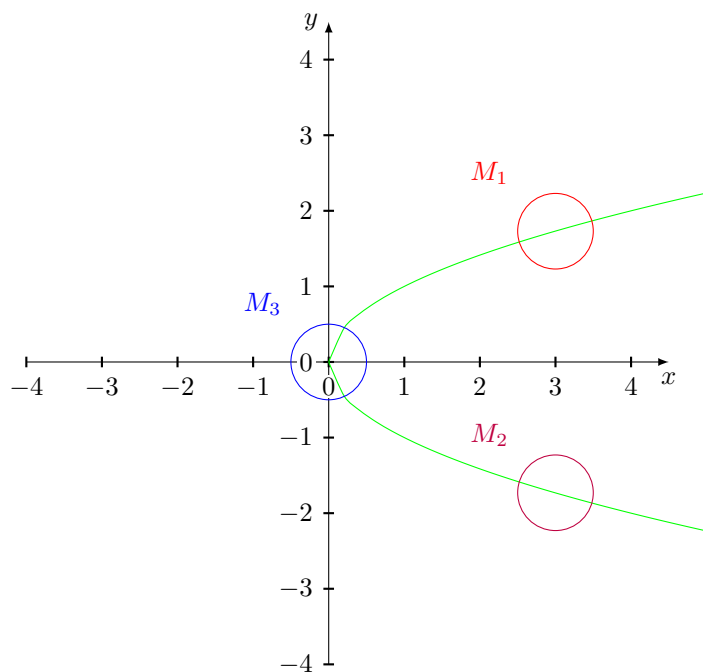
7.1.1 Exempel 1

$$F(x, y) = 3x - y = 1 \Rightarrow y = 3x - 1 = g(x), \text{ går bra } \forall x \in \mathbb{R} \quad (7.1)$$

7.1.2 Exempel 2

$$F(x, y) = 3x - y = 0 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}, x \geq 0 \quad (7.2)$$

två värden på y för varje x , inte en funktion



Figur 6: Grafisk visning av (7.2)

På t.ex M_1 är $y = \sqrt{x} = g(x)$ medan på t.ex M_2 är $y = -\sqrt{x}$
 Går ej på M_3 , problem indikeras av att $\nabla F = (F'_x, F'_y) = (1, -2y)$ är
 parallell med x -axeln i $(0, 0) \in M_3$ (kurvan vänder i x -led där)
 Alltså: $F'_y = 0$ ger problem

7.1.3 Exempel 3

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x - y^3 = 0 \\ \nabla F &= (1, -3y^2) \end{aligned} \tag{7.3}$$

Här kan vi lösa ut

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trots att

$$F'_y = -3y^2 = 0$$

i origo (men kurvan vänder ej). Dock är

$$g'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

ej definierad i origo så $g(x)$ är ingen C^1 -funktion av x kring $x = 0$
Man kan visa

7.2 Implicita funktionssatsen

y kan lösas ut som $y = g(x)$ med $g \in C^1$ ur $F(x, y) = C$, där $F \in C^1$, lokalt kring (a, b) på kurvan om $F'_g(a, b) \neq 0$

Kommentarer

- Med lokalt menas på någon (eventuellt liten) mängd kring (a, b) på nivåkurvan. I (7.2) & (7.3) ger $(a, b) = (0, 0)$ problem, ingen g finns i (7.2) & $g \notin C^1$ i (7.3) men $F \in C^1$.
- Motsvarande gäller att x kan lösas ut som $x = h(y)$ om $F'_x(a, b) \neq 0$
- Med implicit menas att satsen bara säger att funktionen g finns, inte hur g beräknas

$$\left(\begin{array}{l} \text{men i (7.1): } g(x) = 3x - 1, \text{ i (7.2) } g(x) = \sqrt{x} \text{ på } M_1, g(x) = -\sqrt{x} \\ \text{på } M_2 \text{ och i (7.3) } g(x) = \sqrt[3]{x}, \text{ alla explicit skrivna} \end{array} \right)$$

7.2.1 Exempel 4

$$F(x, y) = x^3 y^2 + y^5 \sin x + y + 2x = 2, F \in C^\infty \quad (7.4)$$

$F(1, 0) = 2 \Rightarrow (a, b) = (1, 0)$ på nivåkurvan

Vi klarar inte att lösa ut y explicit, $y = g(x) = ???$ liksom va fan femtegradare!!

$$F'_y = 2x^3 + 5y^4 \sin x + 1 \Rightarrow F'_y(1, 0) = 1 \neq 0$$

från sats: y kan lösas ut implicit som $y = g(x)$ där $g \in C^1$ lokalt kring $(1, 0)$

Trots att $g(x)$ är okänd kan vi få ut $g'(x)$ på två olika sätt

Alternativ 1 (kedjeregeln)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \underbrace{F\left(x, \overbrace{g(x)}^y\right)}_{=2} = \frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{g'(x)} = F'_x + F'_y g'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) &= -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 y^2 + y^5 \cos x + 2}{2x^3 + 5y^4 \sin x + 1} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{1} = -2 \\ \nabla F &= (F'_x, F'_y) = (2, 1) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Alternativ 2 (implicit derivering)

$y = g(x) \Rightarrow x^3 g(x)^2 + g(x)^5 \sin x + g(x) + 2x = 2 = \text{konstant } \forall x$ på intervall kring $x = 1$

Derivera $g(x) \Rightarrow$

$$3x^2 g(x)^2 + 2x^3 g(x) g'(x) + 5g(x)^4 g'(x) \sin x + g(x)^5 \cos x + g'(x) + 2 = 0 \quad (7.6)$$

Lös ut $g'(x)$, ger samma som i (7.5) Även $g''(x)$ kan beräknas genom implicit derivering av (7.6)

7.3 3 variabler, 1 funktion

Ur $F(x, y, z) = C$ ($F \in C^1$, nivåyta geometriskt) kan t.ex. z lösas ut som en C^1 -funktion av x & y , $z = g(x, y)$, lokalt kring (a, b, c) på ytan om $F'_z(a, b, c) \neq 0$ (∇F ej parallell med xy -planet)

Implicit derivering/kedjeregeln

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{F(x, y, \overbrace{g(x, y)}^z)}_{=C} = F'_x \times 1 + F'_y \times 0 + F'_z g'_x \Rightarrow g'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \text{ pss } g'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Motsvarande om x eller y ska lösas ut

7.3.1 Exempel 5

$$F(x, y, z) = x^2 z \cos y + e^{z+3y-x} = 2, \text{ nivåyta } F \in C^1 \quad (7.7)$$

$$F(1, 0, 1) = 1^2 \times 1 \cos 0 + e^{1+0-1} = 2 \Rightarrow (1, 0, 1) \text{ på ytan}$$

$$F'_y = -x^2 z \sin y + 3e^{z+3y-x} \Rightarrow F'_y(1, 0, 1) = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow y$ kan lösas ut som $y = g(x, z)$ ur $F(x, y, z) = 2$ kring $(1, 0, 1)$ på ytan
 $g \in C^1$ med $g(1, 1) = 0$

$$g'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xz \cos y - e^{z+3y-x}}{-x^2 z \sin y + 3e^{z+3y-x}} \Big|_{(1,0,1)} = -\frac{2-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$g'_z = -\frac{F'_z}{F'_y} = -\frac{x^2 \cos y + e^{z+3y-x}}{-x^2 z \sin y + 3e^{z+3y-x}} \Big|_{(1,0,1)} = -\frac{2}{3}$$

7.4 3 variabler, 2 funktioner

$$\text{Ekvationssystem } \begin{cases} F(x, y, z) = C_1 \\ G(x, y, z) = C_2 \end{cases}$$

är geometriskt skärningen mellan två nivåytor, dvs en kurva γ .

γ kan lokalt kring en punkt $P \in \gamma$ parametreras med t.ex.

$$x : \bar{r}(t) = \bar{r}(x) = (x, h(x), j(x)) \text{ om tangenten}$$

$\bar{T} = \nabla F \times \nabla G$ har x -komponent

$$\begin{bmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{bmatrix} \neq 0$$

Algebraiskt tolkat kan då $y = h(x)$ & $z = j(x)$ lösas ut ur systemet som en funktion av x (lokalt kring P)

7.4.1 Exempel 6

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^4 + yz = 1 & F(-1, 0, 2) = 1 \\ G(x, y, z) = x^2 e^y z = 2 & G(-1, 0, 2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad (7.8)$$

$$\Rightarrow P = (-1, 0, 2) \text{ på skärningskurvan } \gamma$$

$$\nabla F = (4x^3, z, y) \stackrel{P}{=} (-4, 2, 0) \quad \& \quad \nabla G = (2xe^y z, x^2 e^y z, x^2 e^y) \stackrel{P}{=} (-4, 2, 1)$$

$\Rightarrow \bar{T} = \nabla F \times \nabla G = (2, 4, 0)$ är tangent till γ i P

x -komponent av \bar{T} är $2 \neq 0 \Rightarrow$ kring P (som har $x = -1$) kan både y & z lösas ut som C^1 funktioner $y = h(x)$ & $z = j(x)$ på γ .

Om γ skrivs $\bar{r}(x) = (x, h(x), j(x))$ är $\bar{r}'(x) = (1, h'(x), j'(x))$ vilket ger att

$$\bar{r}'(-1) = (1, h'(-1), j'(-1)) \text{ är en tangentvektor till } \gamma \text{ i } P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{parallell med } (2, 4, 0) = 2(1, 2, 0) \Rightarrow h'(-1) = 2 \quad \& \quad j'(-1) = 0$$

OBS! z -komponent av $\bar{r} = 0 \Rightarrow z$ ingen bra parameter för γ kring P

8 Appendix

Figurer

1	Graf i 2D	II
2	Graf för polära koordinater	III
3	Exempel på rotationssymmetri	V
4	Rymdpolära koordinater	VI
5	Grafisk visning av hur f ändras i x - & y -riktningen	VIII
6	Grafisk visning av (7.2)	XXII

Tabeller