

TATA69 Föreläsningar

Adnan Avdagic
Linköpings Universitet
`adnan@avdagic.net`

27 mars 2017

Innehåll

1 Föreläsning 2	3
1.1 Gränsvärden för flervarje	3
1.1.1 3-variabler mot origo	7
1.2 Rymdpolära koordinater	8

1 Föreläsning 2

1.1 Gränsvärden för flervari

Exempel 1

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}, \text{ ej definerad i origo} \quad (1)$$

Vad händer då (x, y) närmar sig $(0, 0)$?

$$\lim_{x, y \rightarrow 0, 0} \frac{\sin(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2}$$

//sätt $t = x^4 + y^2$, $t \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ //

då fås $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, (standard gränsvärde)

Exempel 2

$$f(x, y) = \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}, \text{ ej definerad i origo} \quad (2)$$

Gå mot origo via x-axeln (där $y = 0$)

$$f(x, 0) = \frac{x^3 + 0 * x}{x^2 + 0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0$$

Gå mot origo via y-axeln (där $x = 0$)

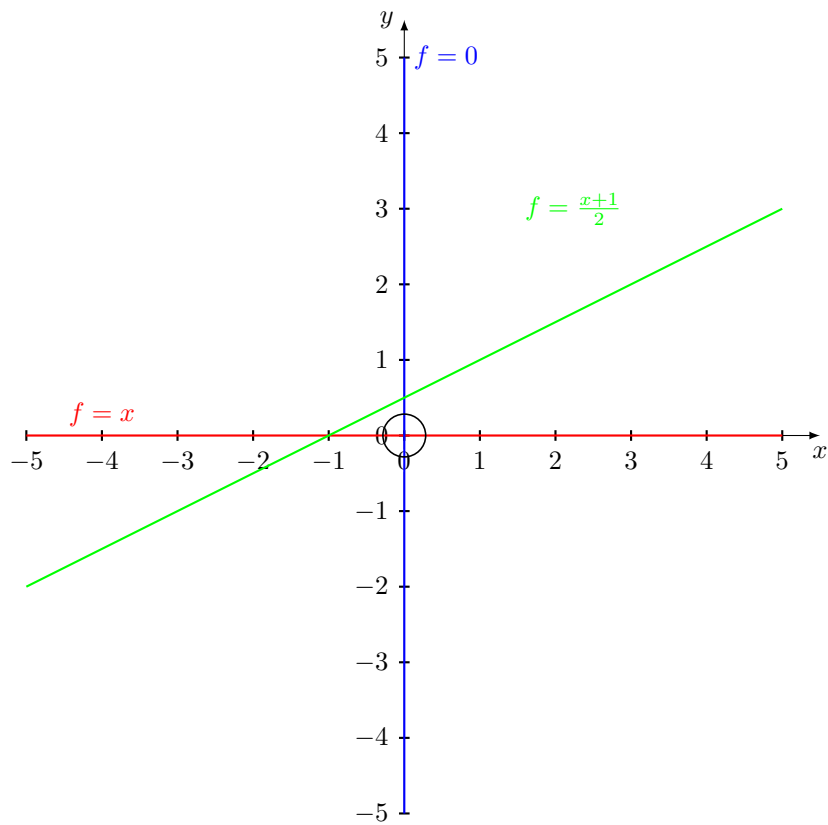
$$f(0, y) = \frac{0^3 + 0 * y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0$$

Gå mot origo längs $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^3 + x * x}{x^2 + x^2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0$$

Olika värden från olika riktningar

Innanför varje liten cirkel kring origo har f värden nära 0 och nära $\frac{1}{2}$. Vi säger därför att gränsvärde ej existerar. Se [1](#)



Figur 1: Graf i 2D

Definition Funktionen \bar{f} av typ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ så att $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon$ om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ och $\bar{x} \in D_f$. Skrivs

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}$$

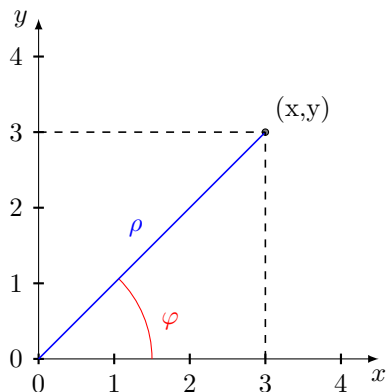
Exempel 3

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ ej definerad i origo} \quad (3)$$

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ \Rightarrow f(x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Vanliga räkneregler för gränsvärden (summa, produkt, instängning) gäller också för flervarregränsvärden Undersökning/beräkning av gränsvärden

- Om test av värden längs olika riktningar eller olika kurvor ger olika resultat så saknas gränsvärde, se (2)
- Sådana test kan INTE visa att gränsvärde existerar, andra metoder behövs, som (1) eller (3), eller polära koordinater



Figur 2: Graf för polära koordinater

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \rho > 0 \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Viktigt för gränsvärden: $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \rho \rightarrow 0$

Exempel (3) med polära koordianter

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{(\rho \rightarrow 0)} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \overbrace{\rho}^{\rightarrow \infty} \underbrace{\cos^3(\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0$$

Exempel (2) med polära koordianter

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2} &\stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3(\varphi) + \rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\overbrace{\rho \cos^3(\varphi)}^{\rightarrow 0} + \underbrace{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}_{\text{vinkelberoende}} \right) \Rightarrow \text{gränsvärde existerar ej} \end{aligned}$$

Oändlighet i envarre och flervarre

Envarre x kan gå mot $\pm\infty$

Flervarre bara en ∞ nämligen $|\bar{x}| \rightarrow \infty$

2D polära $|\bar{x}| \rightarrow \infty \iff \rho \rightarrow \infty$

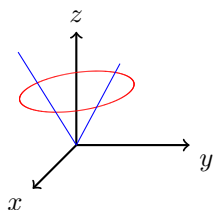
Definition

$\bar{f}(\bar{x}) \rightarrow \bar{b}$ då $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ om $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \omega$ så att $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \epsilon$ om $|\bar{x}| > \omega$

Exempel 4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{y}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{pol.koord}}{=} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho \sin(\varphi)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \overbrace{\frac{1}{\rho}}^{\rightarrow 0} \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Begränsad}} = 0 \quad (4)$$

OBS! 2-variablefunktioner som uttryckta i polärakordinater inte beror på φ har rotationssymmetriska grafer kring z-axeln



Figur 3: Exempel på rotationssymmetri

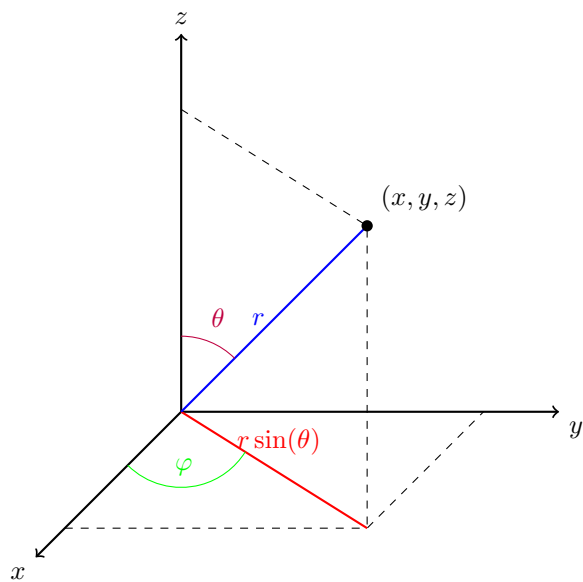
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

1.1.1 3-variabler mot origo

Exempel 5

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} &= ??? \quad (5) \\ 0 \leq \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \right| &= \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + 2z^2} \leq \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \\ &\quad |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ // \quad |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} // \\ &\quad |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \text{ då } (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = 0 \end{aligned}$$

1.2 Rymdpolära koordinater



Figur 4: Rymdpolära koordinater

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, r > 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$r \sin(\theta) = \rho$$

För gränsvärden där $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \iff r \rightarrow 0$

Exemepl 5 med rympolära koordinater

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + 2z^2} \stackrel{\text{rympol.koord}}{=} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^2 + r^2 \cos^2(\theta)} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\overbrace{r}^{\rightarrow 0}} \frac{\sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\underbrace{1 + \cos^2(\theta)}_{\text{begränsad, nämnare } \geq 1 \text{ ingen risk för } /0}} =
 \end{aligned}$$

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i (x,y) och vanliga i z

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \right\}$$

Figurer

1	Graf i 2D	4
2	Graf för polära koordinater	5
3	Exempel på rotationssymmetri	7
4	Rymdpolära koordinater	8

Tabeller