# Optimering av utbyggnad av Sveriges elnät med Bendersdekomposition

## TAOP61 Projekt 3

## HT2017 Linköpings Universitet

Adnan Avdagic, Carl-Martin Johansson, Joel Runesson

11 december 2017

# Innehåll



# Tabeller

# 1 Inledning

## 1.1 Bakgrund

Denna rapport är ett delmoment i kursen TAOP61 på Linköpings Tekniska Högskola. Uppgiften som rapporten handlar om berör Sveriges elnät, där olika platser (noder) har olika elbehov. Vissa noder är källor till el och vissa är sänkor dit el måste tillföras. Noder kan skicka el till andra noder och kan på så sätt tillfredsställa behovet överallt. Dock är bågkostnaderna och kapaciteterna olika för bågarna mellan noderna. Detta ger att en modell måste optimera hur el ska skickas och vilka bågar som ska byggas för att få bästa möjliga resultat (minsta kostnad).

# 2 Syfte

Syftet med projektet är att formulera en optimeringsmodell som optimerar utbyggnaden av Sveriges elnät genom att minimera kostnader i ett flödesproblem. Detta optimeras under olika förutsättningar där exempelvis vissa bågar antas inte kan byggas och vårt intresse är att se hur detta minkostnadsflödesproblem kan lösas med Bendersdekomposition optimerat och modellerat i Vineopt och GMPL.

# 3 Metod

När målfunktionen innehåller variabler som är svåra att lösa kan Bendersdekomposition med fördel användas. Problemet blir lättare att lösa när variablerna fixeras. De svåra variablerna fixeras medan ett linjärt subproblem enkelt löses. Detta ger då en pessimistisk lösning på problemet men ändock en tillåten lösning som kan användas.

Sedan sätts ett masterproblem upp där de svåra variablerna inte längre är fixerade utan istället använder de kända subproblemslösningarna. Detta ger tvärtemot lösningen med fixerade svåra variabler, en optimistisk lösning och blir det absolut bästa värdet som kan antas. Masterproblemet ger nya subproblem. De båda löses till det undre pessimistiska värdet från subproblemet är samma som det övre optimistiska värdet från masterproblemet. Då vet vi att optimalitet råder och problemet är därmed löst.

## 3.1 Primala subproblemet

Elnätets alla bågar markeras nedan som A, och alla noder betecknas med N. Bågkostnaden c är kostnaden att skicka en enhet av flödet flow på båge (i,j). Flödet begränsas av den maximala kapaciteten per båge, vilket styrs av parametern cap. För de nya bågarna som elnätet eventuellt ska utökas med, finns en fast kostnad f om bågen används, vilket styrs av den binära variabeln bin.

Parametern demand betyder som namnet antyder, efterfrågan av el för varje nod i nätverket. Om denna efterfrågan är positiv kallas noden för en sänka, annars är det en källa.

Slutligen återstår att förklara vad $\alpha$ och $\beta$ betyder. Parametern $\alpha$ är nodpriset och $\beta$ ges av $\beta \geq \max\,(0, -\hat{c}_{i,j})$.

### 3.1.1 Målfunktion

$$\text{minimize total cost} = \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} * \text{flow}_{i,j} + \sum_{(i,j)\in A} f_{i,j} * bin_{i,j} \tag{3.1}$$

Målfunktionen i det primala subproblemet vill minimera elnätets kostnader. Dessa är uppdelade i rörliga och fasta kostnader.

#### 3.1.2 Bivillkor

$$\sum_{j:(j,i)\in A} \text{flow}_{j,i} - \sum_{j:(i,j)\in A} \text{flow}_{i,j} = \text{demand}_i \quad \forall i \in N \tag{3.2}$$

$$\text{flow}_{i,j} \leq bin_{i,j} * cap_{i,j} \tag{3.3}$$

$$\text{flow}_{i,j} \geq 0 \tag{3.4}$$

Det översta bivillkoren till det duala subproblemet säger att flödet ut från alla noder subtraherat med inflödet ska vara lika med behovet. Detta finns för att uppfylla elbehovet i varje nod. De två övriga bivillkoren reglerar så att flöden varken får överskrida bågkapaciteten eller vara negativt.

### 3.2 Duala subproblemet

#### 3.2.1 Målfunktion

$$\text{maximize } \varphi(\overline{bin}_{i,j}) = \sum_{i\in N} \text{demand}_i * \alpha_i - \sum_{(i,j)\in A} \left(\overline{bin}_{i,j} * cap_{i,j} * \beta_{i,j}\right) + \sum_{(i,j)\in A} 300\overline{bin}_{i,j} \tag{3.5}$$

Koefficienterna i målfunktionen i det duala subproblemet (hädanefter förtkortat DS) fås från högerledet i det primala subproblemets (PS) båda bivillkor, d.v.s $demand_{i,j}$ och $\overline{bin}_{i,j} * cap_{i,j}$.

Den sista summan i DS målfunktion kommer direkt från PS målfunktion utan någon ändring av tecken, då det är den variabel som räknas som svår och ska fixeras.

#### 3.2.2 Bivillkor

$$-\alpha_i + \alpha_j - \beta_{ij} \leq c_j \tag{3.6}$$

$$\beta_{ij} \geq 0 \tag{3.7}$$

De duala bivillkorens första koefficienter kommer från primalens första bivillkors samtliga koefficienter. Likaså kommer de duala bivillkorens nästa koefficienter från primalens andra bivillkors koefficienter. I dualen ändras även tecken framför koefficienterna samt att olikheterna byter håll.

Eftersom $\hat{c}_{i,j} = c_{i,j} + \alpha_i$ -$\alpha_j$ ger bivillkor 3.6 och 3.7 att $\beta_{i,j} \geq -\hat{c}$. Detta leder till funktionen $max(0, -\hat{c}_{i,j})$ vilket gör att alla positiva reducerade kostnader sätts till 0.

## 3.3 Masterproblem

### 3.3.1 Målfunktion

$$\text{minimize cost} = q + \sum_{i=1}^{bows} \left(bin_i * 300\right) \tag{3.8}$$

I masterproblemet vill vi sänka den totala kostnaden genom att bygga diverse olika nya bågar. Variabeln q i detta fall står för de rörliga kostnaderna.

### 3.3.2 Bivillkor

$$q \geq dc_j + \sum_{(i,j)\in A_1} \left(\overline{u}_{i,j} * \beta_{i,j}\right) - \sum_{(i,j)\in A_1} \left(50 * \beta_{i,j} * bin_i\right) \quad \forall j \in cuts \tag{3.9}$$

I det första bivillkoret justeras variabeln q genom att summera de rörliga kostnaderna för de bågar som inte ingår i nybyggnationen och de rörliga kostnaderna för de bågar som byggdes i den föregående iterationen samt subtrahera med kostnaderna för eventuell nybyggnation i denna iteration. Ett nytt bivillkor skapas för varje snitt (iteration). Dessa kallas cuts i vår metod.

A har delats upp i $A_0$ och $A_1$, där $A_0$ består av bågar med fast kostnad = 0 och $A_1$ består av alla bågar med positiv fast kostnad.

# 4 Resultat

Inkludera alla iterationsdata samt åtminstone sista masterproblemet numeriskt.

## 4.1 Deluppgift 1

Målfunktionsvärde för nuvarande elnät = 132 450

## 4.2 Deluppgift 2

Om kapaciteten höjs med 5 enheter på en befintlig båge, så är det optimalt om båge (49,48) väljs. Målfunktionsvärde blir då = 132 255 vilket är 195 billigare än förut.

## 4.3 Deluppgift 3

Om bågarna (10,9) och (14,20) är möjliga att bygga så blir optimallösningen att bygga båge (14,20) med målfunktionsvärdet 132 325. Målfunktionsvärdet när ingen båge byggs är 132 425, när (10,9) byggs är målfunktionsvärdet 132 725 samt när både (10,9) och (14,20) byggs är målfunktionsvärdet 132 625.

## 4.4 Deluppgift 4

Det är givet att bågarna (9,22), (10,9), (14,20), (40,33), (40,39), (49,51) och (51,46) är möjliga att bygga. Med 1% felmarginal från optimum fås övre gräns $\overline{v} = 130\,215$ och undre gräns $\underline{v} = 129\,265$ med lösningen att bågarna (9,22), (14,20), (49,50) och (51,48) byggs.

Exakt optimum fås av lösningen (9,22), (10,9), (49,50) och (51,48) med målfunktionsvärdet 128 690.

# 5 Diskussion

## 5.1 Begränsning av antalet möjliga utbyggnader av bågar

Givet att endast två stycken bågar får byggas, löstes minkostnadsflödesproblemet genom att utnyttja de tidigare Benderssnitten. Detta är möjligt på grund av att ett bivillkor läggs till som anger att det maximala antalet bågar som får byggas, ej får överskrida två. I detta fall får vi:

$$\sum_{(i,j)\in A_1} bin_{i,j} \leq 2$$

Masterproblemet ger härmed en ny optimallösning av byggda bågar som på grund av det nya bivillkoret inte överskrider två i antal, samt en ny undre gräns $\underline{z}$. De nya bågarna implementeras i Vineopt och en övre gräns $\overline{z}$ fås. Detta upprepas tills dess att $\underline{z} = \overline{z}$.

Den nya optimallösningen blev att bågarna (9,22) och (49,51) ska byggas vilket ger målfunktionsvärdet 130 117. Detta är högre än då det inte fanns ett krav på max antal byggda bågar vilket är rimligt eftersom det i deluppgift 4.4 var optimalt att bygga fyra bågar.