Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Отчет по учебной практике 1 (научно-исследовательской работе) (семестр 2)

Знакомство с основами теории вероятностей

Выполнил:

Погребников Николай Вадимович, группа 21.Б05-мм

Научный руководитель:

Профессор, доктор физико-математических наук

Ермаков Михаил Сергеевич.

Кафедра статистического моделирования

Работа выполнена качественно и на высоком уровне

Оценка „А" (отлично).

18.05.2022

/Ермаков М. С./

Санкт-Петербург

2022

# Введение

Мне была поставлена задача разобраться в материале первых двух глав учебника Крмера «Теория вероятностей и математическая статистика», решить упражнения на основе прочитанного.

# Основная часть

Мною были разобраны основные понятия теории вероятностей и теоремы сложения, умножения вероятностей, изучены формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа. Благодаря вышеперечисленным знаниям, я решил следующие задачи.

# Решение задач

**1.58.** Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.

**Решение:**

**а)** $P_1 = 0.6$; $P_2 = 0.5$; $P_3 = 0.8$;

У нас имеется три устраивающих нас ситуации: студент выполнит первую и вторую контрольную и не выполнит третью, студент выполнит первую и третью контрольную и не выполнит вторую, студент выполнит третью и вторую контрольную и не выполнит первую. Вычислим вероятности этих исходов и сложим:

$P(a) = P_1 * P_2 * (1 - P_3) + P_1 * (1 - P_2) * P_3 + (1 - P_1) * P_2 * P_3 = 0.46$

**б)** Нас устраивают исходы из пункта а), к ним добавляется случай, когда студент решил все три контрольные: $P(b) = P(a) + P_1 * P_2 * P_3 = 0.7$

**Ответ:** a) 0.46; b) 0.7

**1.62.** Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.

**Решение:**

Условие: «хотя бы одна нестандартная», равносильно условию: «не будет двух стандартных». Всего исходов:$C_{15}^2$. Удовлетворяющих нам: $C_4^2$

Итого: $P = 1 - \frac{12}{210} \approx 0.94$

**Ответ:** 0.94

**1.67.** Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей Р, можно было утверждать, что по крайней мере один раз произойдет событие, вероятность которого в каждом испытании равна р? Дать ответ при р = 0,4 и Р = 0,8704.

**Решение:**

Проведём событие n раз. Поскольку события независимые, то вероятность

успеха хотя бы вы одном испытании: $P(A) = 1 - (1 - p)^n$
Нам нужно, чтобы эта вероятность была больше, чем P:
$P(A) \geq P; 1 - (1 - p)^n \geq P; n * \ln(1 - p) \leq \ln(1 - P); n \geq (\ln(1 - P))/(\ln(1 - p))$
Подставляя значения, мы получаем, что n должно быть равным как минимум четырём.
**Ответ:** n >= 4

**1.72.** Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: 1 класс - малый риск, 2 класс - средний, 3 класс - большой риск. Среди этих клиентов 50% - первого класса риска, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго - 0,03, третьего - 0,08. Какова вероятность того, что: а) застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования; б) получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска?
**Решение:**
**а)** События: A — человек получит выплату, $B_1$ – человек 1 класса, $B_2$ – человек 2 класса, $B_3$ – человек 3 класса.
$P(B_1) = 0.5; P(B_2) = 0.3; P(B_3) = 0.2;$
$P(A|B_1) = 0.01; P(A|B_2) = 0.03; P(A|B_3) = 0.08;$
$P(A) = P(B_1)*P(A|B_1)+P(B_1)*P(A|B_2)+P(B_1)*P(A|B_3) = 0.03$
**б)** По формуле Байеса:
$P(B_1|A) = P(A|B_1) * P(B_1) / P(A) \approx 0.0167$
**Ответ:** a) 0.03; b) 0.0167

**1.73.** В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй - 85%, третьей - 75%. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?
**Решение:**
События: A — изделие стандартного качества, $B_1$ – изделие от 1 фирмы, $B_2$ – изделие от 2 фирмы, $B_3$ – изделие от 3 фирмы.
$P(B_1) = 5/20; P(B_2) = 8/20; P(B_3) = 7/20;$
$P(A|B_1) = 0.9; P(A|B_2) = 0.85; P(A|B_3) = 0.75;$
**а)** $P(!A) = 1-P(A) = 1 - (P(B_1)*P(A|B_1)+P(B_1)*P(A|B_2)+P(B_1)*P(A|B_3)) = 0.1725$
**б)** По формуле Байеса:
$P(B_3|A) = P(A|B_3) * P(B_3) / P(A) \approx 0.317$
**Ответ:** a) 0.1725; b) 0.317

**1.78.** Из n экзаменационных билетов студент A подготовил только m (m < n). В каком случае вероятность вытащить на экзамене «Хороший» для него билет выше: когда он берет наудачу билет первым, или вторым, ... , или k-м (k < n) по счету среди сдающих экзамен?
**Решение:**

Пусть взяли l хороших билетов и P(A) – вероятность взять хороший билет. Тогда, если студент пойдёт k-тым по счёту сдавать экзамен, P(A)=(m-l)/(n-k+1). Если же он решит пропустить кого-то вперёд, тогда есть два исхода: одногруппник возбмёт хороший билет с вероятностью (m-l)/(n-k+1), либо плохой билет с вероятностью (n-k+1-m+l)/(n-k+1)
В таком случае, по формуле полной вероятности:
P(A) = (m-l)/(n-k+1) * (m-l-1)/(n-k) + (n-k+1-m+l)/(n-k+1) * (m-l)/(n-k) = (m-l)/(n-k+1)*((m-l-1)/(n-k)+(n-k+1-m+l)/(n-k)) = (m-l)/(n-k+1)
Отсюда видим, что нет разницы, пойдёте ли вы сдавать билет сразу или следующим. Соответственно, нет разницы, каким по счёту идти в принципе.
**Ответ:** без разницы.

**2.16.** В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.
**Решение:**
**а)** p = 0.15; q = 0.85;
Нас устроит вариант, когда три раза будет выплачена страховая компенсация. Таких случаев может быть C_10^3:
P = C_10^3 * p^3 * q^7 ≈ 0.1298
**б)** P = q^10 + 10*p*q^9 ≈ 0.544
**Ответ:** a) 0.1298; b) 0.544

**2.22.** В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти: а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события; б) вероятность того, что по крайней мере 3 студента имеют один и тот же день рождения.
**Решение:**
n = 3650 – число студентов; p = 1/365; q = 1 – p = 364/365; $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$
**а)** Найдём $m_0$ – наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая. Для этого составим данную систему:
$$\begin{cases} P_{(m_0,n)} \geq P_{(m_0+1,n)} \\ P_{(m_0,n)} \geq P_{(m_0-1,n)} \end{cases}$$
Упрощая первое и второе уравнение получаем np-q <= $m_0$ <= np + p
Откуда 9.003 <= $m_0$ <=10.003 => $m_0$ = 10;
Поскольку p – мала, n – велико, ƛ = np = 10, то применим формулу Пуассона:
$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \approx ƛ^m * e^{-ƛ}/m! = P_m(ƛ)$
$P_{10}(10)$ = 0.1251
**б)** Для вычисления данной вероятности воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласса:

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right],$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt \qquad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

a = 3; b = 360.

Подставляя значения в формулу, получаем: $P_{3650}(3 <= m <= 3650) \approx 0.9971$

**Ответ:** a) $m_0$ = 10; $P_{10}(10)$ = 0.1251; b) 0.9971

**2.26.** Вероятность того, что перфокарта набита оператором неверно, равна 0.1. Найти вероятность того, что: а) из 200 перфокарт правильно набитых будет не меньше 180; б) у того же оператора из десяти перфокарт будет неверно набитых не более двух.

**Решение:**

**а)** p = 0.9; q = 0.1;

Используя интегральную теорему Муавра-Лапласса, мы получим:

$P_{200}(180 <= m <= 200) \approx 0.5$

**б)** p = 0.1; q = 0.9;

$P_{10}(m \le 2) = P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} \approx 0.348868 + 0.38742 + 0.19371 \approx 0.93$

**Ответ:** a) 0.5; b) 0.93

**2.30.** Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

**Решение:**

n = 800; p = 0.01; q = 0.99; $m_0$ – наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров.

Найдём $m_0$ и вероятность такого числа опоздавших, используя те же рассуждения, что и в упражнении 2.22:

$800*0.01 – 0.99 <= m_0 <= 8.99 => m_0 = 8$;

$P_{8,\,800} = P_8(8) \approx 0.1396$

**Ответ:** 0.1396

**2.33.** Вероятность того, что дилер, торгующий ценными бумагами, продаст их, равна 0,7. Сколько должно быть ценных бумаг, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,996, что доля проданных среди них отклонится от 0,7 не более чем на 0,04 (по абсолютной величине)?

**Решение:**

Применим следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа:

n — количество ценных бумаг; Δ = 0.04; p = 0.7; q = 0.3; $t = \Delta\sqrt{n}/\sqrt{pq}$ ; $\Phi(t) = 0.996 \rightarrow t = 2.88$Откуда $n = t^2pq/\Delta^2 >= 1088.64$

**Ответ:** n = 1089

## Заключение

Я решил 11 задач по теме «Теория вероятностей» и научился на практике применять теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа.

## Список литературы


- Кремер Наум Шевелевич. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям/ Н.Ш. Кремер. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 551 с. - (Серия «Золотой фонд российских учебников»).