

Модификации метода анализа сингулярного спектра для анализа временных рядов: Circulant SSA и Generalized SSA

Погребников Н. В., гр. 21.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д. ф.-м. н., доц. Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург, 2025

Пусть $X = (x_1, \dots, x_N)$ – временной ряд длины N , $x_i \in \mathbb{R}$ – наблюдение в момент времени i .

$X = X_{\text{Trend}} + X_{\text{Periodics}} + X_{\text{Noise}}$, где:

- X_{Trend} – тренд, медленно меняющаяся компонента;
- $X_{\text{Periodics}}$ – сумма периодических компонент;
- X_{Noise} – шум, случайная составляющая.

Методы: **SSA** – метод, позволяющий раскладывать временной ряда в сумму интерпретируемых компонент (Golyandina, Nekrutkin и Zhigljavsky 2001); **GSSA** – модификация **SSA** на основе добавления весов (Gu и др. 2024); **CiSSA** – модификация **CiSSA** на основе циркулярной матрицы (Bogalo, Poncela и Senra 2020).

Задача: Описание модификаций в контексте теории **SSA**, сравнение алгоритмов, реализация их на языке R.

По чему будем сравнивать?

Пример

$$X = X_1 + X_2 + X_{\text{Noise}} = e^{An} \sin(2\pi\omega_1 n) + \cos(2\pi\omega_2 n) + \varepsilon_n.$$

ω_1, ω_2 – частоты; $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$ – шум;

$e^{An} \sin(2\pi\omega_1 n) + \cos(2\pi\omega_2 n)$ – сигнал.

\hat{X} – оценка выделения сигнала методом.

\hat{X}_1, \hat{X}_2 – оценки разделения компонент X_1, X_2

Критерии сравнения методов:

- Постановка задачи (для CiSSA она другая, решаем только с заранее заданными частотами)
- Выделение сигнала
- Разделимость

Определение 1

Есть метод разделения ряда на компоненты с параметрами Θ , ряд $X = X^{(1)} + X^{(2)}$. \exists набор параметров $\hat{\Theta}$, L , N , что при разделении ряда на компоненты этим методом, $\hat{X}^{(1)}$ является оценкой $X^{(1)}$, при этом, $\text{MSE}(X^{(1)}, \hat{X}^{(1)}) = 0$. Тогда ряды $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ точно разделимы данным методом.

Определение 2

Есть метод разделения ряда на компоненты с параметрами Θ , ряд $X = X^{(1)} + X^{(2)}$. \exists набор параметров $\hat{\Theta}$ и $L = L(N)$, $N \rightarrow \infty$, что при разделении ряда на компоненты этим методом, $\hat{X}^{(1)}$ является оценкой $X^{(1)}$, при этом, $\text{MSE}(X^{(1)}, \hat{X}^{(1)}) \rightarrow 0$. Тогда ряды $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ называются асимптотически $L(N)$ -разделимыми данным методом.

Модификации метода SSA

└ Разделимость

Какое из оформлений лучше?

Разделимость

Определение 1

Есть метод разложения ряда на компоненты с p параметрами Θ , ряд $X = X^{(1)} + X^{(2)}$, \exists некий параметр Θ , L , N , что при разложении ряда на компоненты этого метода, $\hat{X}^{(1)}$ является оценкой $X^{(1)}$, при этом, $MSE(\hat{X}^{(1)}, X^{(1)}) = 0$. Тогда ряды $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ точно разделимы данным методом.

Определение 2

Есть метод разложения ряда на компоненты с p параметрами Θ , ряд $X = X^{(1)} + X^{(2)}$, \exists некий параметр Θ и $L = L(N)$, $N \rightarrow \infty$, что при разложении ряда на компоненты этого метода, $\hat{X}^{(1)}$ является оценкой $X^{(1)}$, при этом, $MSE(\hat{X}^{(1)}, X^{(1)}) \rightarrow 0$. Тогда ряды $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ асимптотически $L(N)$ разделимы данным методом.

$X = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд. $1 < L < N$ — длина окна.

Алгоритм SSA:

- 1 Построение траекторной матрицы:

$$X = \mathcal{H}(X) = [X_1 : \dots : X_K], \quad X_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T, \\ 1 \leq i \leq K, \quad K = N - L + 1.$$

- 2 Сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы:

$$X = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d X_i, \quad d = \text{rank}(X).$$

X_i — элементарные матрицы ранга 1.

$(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i^T)$ — i -ая собственная тройка.

- 3 Группировка индексов $1, \dots, d$ на m непересекающихся

подмножеств I_1, \dots, I_m . $X_{I_k} = \sum_{i \in I_k}^{n_k} X_i, \quad n_k = |I_k|.$

$$X = X_{I_1} + \dots + X_{I_m}.$$

- 4 Восстановление: $\tilde{X}_{I_k} = \mathcal{H}^{-1}(X_{I_k}), \quad X = \tilde{X}_{I_1} + \dots + \tilde{X}_{I_m}.$

Модификации метода SSA

└ Метод SSA. Алгоритм

Какое из оформлений лучше?

Метод SSA. Алгоритм

$X = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд, $1 \leq L < N$ — длина окна.

Алгоритм SSA:

❶ Построение траекторной матрицы:

$$X = H(X) = [X_1; \dots; X_L], \quad X_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T, \\ 1 \leq i \leq K, \quad K = N - L + 1.$$

❷ Сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы:

$$X = \sum_{d=1}^D \sqrt{\lambda_d} U_d V_d^T = \sum_{d=1}^D X_d, \quad d = \text{rank}(X).$$

$$X_d = \sqrt{\lambda_d} U_d V_d^T \text{ — } d\text{-ая собственная компонента.}$$

❸ Группировка компонент $1, \dots, d$ по интересующим подмножествам I_1, \dots, I_m . $X_{I_k} = \sum_{d \in I_k} X_d$, $m_k = |I_k|$.

$$X = X_{I_1} + \dots + X_{I_m}.$$

❹ Восстановление: $\tilde{X}_{I_k} = H^{-1}(X_{I_k})$, $X = \tilde{X}_{I_1} + \dots + \tilde{X}_{I_m}$.

Определение 3 (Golyandina, Korobeynikov и Zhigljavsky 2018)

Вложенный вариант SSA — двухэтапный метод:

- 1 *Выделение сигнала с помощью базового SSA:*
 $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{Noise}}$ (отделение от шума).
- 2 *Применение другого метода к $\tilde{\mathbf{X}}$ для уточнения анализа:*
 $\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}_1 + \tilde{\mathbf{X}}_2$.

EOSSA (Golyandina, Dudnik и Shlemov 2023) является вложенным вариантом **SSA**. Для заданного набора компонент позволяет улучшить разделимость. Можно задать параметр r , тогда алгоритм будет улучшать разделимость для первых r наиболее значимых компонент (по SVD).

$X = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд, параметры L и $\alpha \geq 0$.

$$w^{(a)} = (w_1, w_2, \dots, w_L) = \left(\left| \sin \left(\frac{\pi n}{L+1} \right) \right| \right)^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots, L.$$

Шаг 1 алгоритма GSSA:

$$X^{(\alpha)} = \mathcal{H}^{(\alpha)}(X) = [X_1^\alpha : \dots : X_K^\alpha],$$

$$X_i^{(\alpha)} = (w_1 x_{i-1}, \dots, w_L x_{i+L-2})^T, \quad 1 \leq i \leq K.$$

Шаги 2-4: аналогичны **SSA**.

Замечание 1

При $\alpha = 0$, **GSSA** — в точности базовый алгоритм **SSA**.

Определение 4

Пусть $X = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ — бесконечный временной ряд. **Линейный конечный фильтр** — оператор Φ , преобразующий X в $X' = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$ по правилу:

$$y_j = \sum_{i=-r_1}^{r_2} h_i x_{j-i}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ — ширина фильтра, $h_i \in \mathbb{R}$ — коэффициенты.

Пример. При применении фильтра Φ на $X_{\cos} = \cos 2\pi\omega n$, получается ряд $y_j = A_{\Phi}(\omega) \cos(2\pi\omega j + \phi_{\Phi}(\omega))$.

$\phi_{\Phi}(\omega)$ — фазово-частотная характеристика (ФЧХ).

$A_{\Phi}(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ).

Сравнение SSA и GSSA. Линейные фильтры 2

$X = (x_1, \dots, x_N)$, $(\sqrt{\lambda}, U, V)$ – собственная тройка **SSA**.

$U = (u_1, \dots, u_L)$. $\tilde{X} = \mathcal{H}^{-1}(\sqrt{\lambda}UV^T)$.

Запись SSA через линейный фильтр:

$$\tilde{x}_s = \sum_{j=-(L-1)}^{L-1} \left(\sum_{k=1}^{L-|j|} u_k u_{k+|j|} / L \right) x_{s-j}, \quad L \leq s \leq K.$$

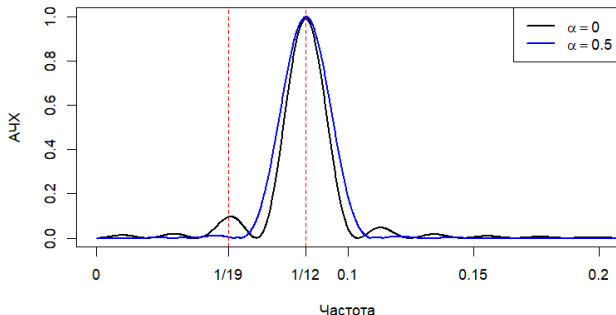
Аналогичное представление для GSSA:

$$\tilde{x}_s = \sum_{j=-(L-1)}^{L-1} \left(\sum_{k=1}^{L-|j|} u_k^{(\alpha)} u_{k+|j|}^{(\alpha)} w_k / \sum_{i=1}^L w_i \right) x_{s-j}, \quad L \leq s \leq K.$$

Сравнение SSA и GSSA. Пример

$$X = X_{\sin} + X_{\cos} = \sin\left(\frac{2\pi}{12}n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{19}n\right). \quad N = 96 \cdot 2 - 1, \quad L = 48.$$

АЧХ для суммы фильтров собственных троек синуса



При $\alpha = 0.5$ АЧХ без волн, но с широкой областью около частоты синуса, что ухудшает отделение от шума, но улучшает разделение компонентов.

Сравнение SSA и GSSA. Пример, продолжение

Таблица 1: MSE разложений $X = X_{\sin} + X_{\cos}$

Метод/Ошибка	X_{\sin}	X_{\cos}	X
SSA	5.15e-03	5.15e-03	6.01e-30
GSSA, $\alpha = 0.5$	3.68e-04	3.68e-04	9.53e-30

Без шума **GSSA** выдает результаты на порядок лучше **SSA**.

Таблица 2: MSE разложений $X = X_{\sin} + X_{\cos} + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \sim N(0, 0.1^2)$

Метод	X_{\sin}	X_{\cos}	X
SSA	5.68e-03	5.44e-03	7.48e-04
GSSA, $\alpha = 0.5$	1.21e-03	1.25e-03	1.04e-03

С шумом выигрыш на порядок у **GSSA** пропал, но теперь **SSA** выделил сигнал на порядок лучше.

Вывод. Вложенный вариант SSA + GSSA

Можно объединить преимущества обоих алгоритмов, выделив сигнал с помощью **SSA**, а затем разделив компоненты друг от друга благодаря **GSSA**:

Метод	X_{\sin}	X_{\cos}	X
SSA + GSSA , $\alpha = 0.5$	1.06e-03	1.12e-03	7.15e-04

Получается вложенный вариант **SSA**.

Метод CiSSA. Алгоритм

$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд. $1 < L < N$ — длина окна.

Алгоритм CiSSA:

❶ Построение траекторной матрицы: как в SSA.

❷ $l = 1 : L$,

$$U_l = L^{-1/2}(u_{l,1}, \dots, u_{l,L}), \quad u_{l,j} = \exp(-i2\pi(j-1)\frac{l-1}{L}).$$

Элементарное разложение: $w_k = \frac{k-1}{L}$, $k = 1 : \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor$

$$\mathbf{X}_{w_k} = U_k U_k^H \mathbf{X} + U_{L+2-k} U_{L+2-k}^H \mathbf{X};$$

$$\mathbf{X}_{w_{\frac{L}{2}+1}} = U_{\frac{L}{2}+1} U_{\frac{L}{2}+1}^H \mathbf{X}, \text{ если } L \bmod 2 = 0,$$

Разложение: $\mathbf{X} = \sum_{k=1}^d \mathbf{X}_{w_k}$, $d = \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor$ (или $\frac{L}{2} + 1$).

❸ Группировка по частотам:

$$\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \bigsqcup_{i=1}^m [w_i^{(l)}, w_i^{(r)}] = [0, 0.5].$$

❹ Диагональное усреднение: как в SSA.

Замечания:

- В отличие от **SSA**, базис подпространства которого зависит от X, L, N (адаптивный), базис в **CiSSA** зависит только от L, N (фиксированный).
- Поскольку группировка производится по частотам, а частоты зависят от L , то алгоритм применим только в случае, когда заранее известны интересующие частоты.

Определение 5

Разложение

$$x_n = c_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} (c_k \cos(2\pi nk/N) + s_k \sin(2\pi nk/N)), \quad (1)$$

где $1 \leq n \leq N$ и $s_{N/2} = 0$ для четного N , называется разложением Фурье ряда X .

Замечание 2

Разложение Фурье – проекции всего ряда на пространства, порожденные синусами и косинусами. **CiSSA** – разложения Фурье для K векторов матрицы X + усреднение соответствующих элементов.

Модификации метода SSA

└ Метод CiSSA. Свойства: связь с разложением Фурье

Словами сказать, что один из вопросов моего исследования является рассмотрение того, чем ciSSA лучше Фурье

Метод CiSSA. Свойства: связь с разложением Фурье

Определение 1

Разложение

$$x_n = a_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/4 \rfloor} (a_k \cos(2\pi nk/N) + b_k \sin(2\pi nk/N)), \quad |k|$$

где $1 \leq n \leq N$ и $a_{N/2} = 0$ для четного N , и даны эти разложения Фурье ряда X .

Замечание 1

Разложение Фурье – проекция вектора из пространства, порожденного синусами и косинусами. CiSSA – разложение Фурье для K векторов или трояды X + углубление соответствующих элементов.

Фиксируем временной ряд $X = X_1 + X_2 =$
 $= A_1 \cos(2\pi w_1 n + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi w_2 n + \varphi_2).$

Условия точной делимости X для разложения Фурье:
 $Nw_1, Nw_2 \in \mathbb{N}, w_1 \neq w_2.$

Условия точной делимости X для **CiSSA**:
 $Lw_1, Lw_2 \in \mathbb{N}, w_1 \neq w_2.$

Условия точной делимости X для **SSA**:
 $Lw_1, Lw_2, Kw_1, Kw_2 \in \mathbb{N}, w_1 \neq w_2, A_1 \neq A_2.$

Таким образом, условия на разделение косинусов, слабее у методов **CiSSA** и Фурье, чем у **SSA**.

Пример. Точная разделимость

Пример: $X = X_{\sin} + X_{\cos} = A_1 \sin(2\pi w_1 n) + A_2 \cos(2\pi w_2 n)$

Метод	Параметры	MSE (X_{\sin})	MSE (X_{\cos})	MSE (X)
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}, A_1 \neq A_2$	6.8e-30	1.5e-29	1.8e-29
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}, A_1 \neq A_2, r = 4$	8.2e-30	6.5e-30	5.5e-30
Fourier	$Nw \in \mathbb{N}$	3.4e-28	9.8e-29	4.0e-28
CiSSA	$Lw \in \mathbb{N}, A_1 \neq A_2$	1.1e-29	6.5e-30	7.8e-30
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}, A_1 = A_2$	3.8e-04	3.8e-04	6.0e-29
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \notin \mathbb{N}, A_1 = A_2$	4.9e-03	3.4e-03	5.9e-29
Fourier	$Nw \notin \mathbb{N}$	7.6e-03	3.3e-03	5.6e-03
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \notin \mathbb{N}, A_1 = A_2, r = 4$	1.4e-29	2.9e-29	1.1e-29

По таблице видно, что при нарушении условий точной разделимости, результаты значительно ухудшаются. При этом, EOSSA исправляет ситуацию.

└ Пример. Точная разделимость

Длину N ряда сложно подбирать, поэтому будем рассматривать случаи, когда N хорошее и плохое. А L всегда можем изменить, поэтому все L подобраны наилучшим образом. w_1, w_2 фиксированы

Пример: $X = X_{\sin} + X_{\cos} = A_1 \sin(2\pi \alpha n) + A_2 \cos(2\pi \alpha n)$

Матрица	Уравнение	Матрица X_1	Матрица X_2	Матрица X
555	$\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
555 D555	$\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
Рн. н.	$\sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
D555	$\sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
555	$\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
555	$\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
Рн. н.	$\sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$
555 D555	$\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha$	$1, 0, 0, 0$	$0, 1, 0, 0$	$1, 0, 0, 0$

По таблице видно, что при нарушении условий почвой разделимости, результаты значительно ухудшаются. Поэтому, ВО SSA исследует ситуацию.

Сравнение SSA, Фурье, CiSSA. Асимптотическая делимость

Асимптотически делимы в методе **SSA** полиномы, гармонические функции (Golyandina, Nekrutkin и Zhigljavsky 2001).

В алгоритме разложения **CiSSA** (Фурье) увеличение длины окна $L(N)$ изменяет сетку частот. Это означает, что даже если не удастся подобрать такое $L(N)$, при котором косинус будет точно отделим, его постепенное увеличение позволит приблизить частоты сетки к частоте компоненты. В итоге, можно снизить ошибку выделения нужной компоненты, учитывая соседние частоты.

Модификации метода SSA

└ Сравнение SSA, Фурье, CiSSA.
Асимптотическая разделимость

Сравнение SSA, Фурье, CiSSA. Асимптотическая разделимость

Асимптотически разделимы в методе SSA полиномы, порождающие функции (Gubarev, Kozlovskiy, Zhidkovsky 2018).
В алгоритме разделимости CiSSA (Фурье) увеличением длины окна L $[N]$ не меняет сетку частот. Это означает, что даже если не удастся подобрать такую L $[N]$, при котором каждая будет точно отделена, то постепенно увеличение L позволит приблизить частоты к сетке и частоты помешаются. В итоге, можно сказать о шаблону из L или нужной компоненте, учитывая соседние частоты.

TODO Переформулировать с меньшим количеством слов (тяжело)

Пример. Асимптотическая разделимость

Пример:

$$X = X_{e \cdot \sin} + X_{e \cdot \cos} = e^{A_1 n} \sin(2\pi w_1 n) + e^{A_2 n} \cos(2\pi w_2 n).$$

Метод	Параметры	MSE ($X_{e \cdot \sin}$)	MSE ($X_{e \cdot \cos}$)	MSE (X)
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}$	5.3e-05	5.3e-05	1.2e-27
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}, r = 4$	3.0e-28	4.4e-28	7.4e-29
Fourier	$Nw \in \mathbb{N}$	6.7e-02	1.4e-02	4.9e-02
CiSSA	$Lw \in \mathbb{N}$	2.6e-02	3.8e-03	1.5e-02
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \notin \mathbb{N}$	4.8e-04	4.8e-04	1.1e-27
Fourier	$Nw \notin \mathbb{N}$	1.1e-01	3.7e-02	1.1e-01
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \notin \mathbb{N}, r = 4$	2.8e-28	4.2e-28	7.5e-29

При домножении на экспоненты периодик, все результаты ухудшились кроме EOSSA. Фурье и **CiSSA** значительно ухудшились в точности разделения.

Пример 1. Отделение сигнала от шума

Пример 1: $X = X_{\sin} + X_{\cos} + X_{\text{Noise}} =$
 $= A_1 \sin(2\pi w_1 n) + A_2 \cos(2\pi w_2 n) + \varepsilon_n, \varepsilon \sim N(0, 0.1^2)$

Метод	Параметры	MSE (X_{\sin})	MSE (X_{\cos})	MSE (X)
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}$	2.7e-04	3.3e-04	6.0e-04
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}$	2.7e-04	3.3e-04	6.0e-04
Fourier	$Nw \in \mathbb{N}$	1.5e-04	2.1e-04	3.6e-04
CiSSA	$Lw \in \mathbb{N}$	1.6e-04	2.8e-04	4.3e-04
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}, A_1 = A_2$	2.5e-04	3.3e-04	6.0e-04
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \notin \mathbb{N}, A_1 = A_2$	4.9e-03	3.4e-03	6.0e-04
Fourier	$Nw \notin \mathbb{N}$	2.6e-02	7.3e-02	9.8e-02
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \notin \mathbb{N}, A_1 = A_2$	2.7e-04	3.4e-04	6.0e-04

Фурье значительно хуже остальных выделил сигнал.

Пример 2. Отделение сигнала от шума

Пример 2: $X = X_{e.\sin} + X_{e.\cos} + X_{\text{Noise}} =$
 $= e^{A_1 n} \sin(2\pi w_1 n) + e^{A_2 n} \cos(2\pi w_2 n) + \varepsilon_n, \varepsilon \sim N(0, 0.1^2)$

Метод	Параметры	MSE ($X_{e.\sin}$)	MSE ($X_{e.\cos}$)	MSE (X)
SSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}$	3.1e-04	3.6e-04	5.6e-04
SSA EOSSA	$Lw \in \mathbb{N}, Kw \in \mathbb{N}$	2.2e-04	3.4e-04	5.6e-04
Fourier	$Nw \in \mathbb{N}$	1.1e-01	1.3e+00	1.4e+00
CiSSA	$Lw \in \mathbb{N}$	2.8e-02	3.8e-01	4.0e-01

Таблица 3: Example Table

Фурье совсем плохо себя показал. **CiSSA** ухудшил результаты в сравнении с тем, что было без шума.

По полученным результатам, можно следующие выводы:

- ❶ **CiSSA** и разложение Фурье работает лучше базового **SSA** только в том случае, когда периодики имеют одинаковые амплитуды. При этом, **SSA** с EOSSA исправляет этот недостаток. Во всех остальных случаях **CiSSA** и разложение Фурье показывают результаты не лучше **SSA**.
- ❷ **CiSSA** показывает себя лучше Фурье.
- ❸ **CiSSA** при добавлении шума и отклонении от своих показывает значительное ухудшение в разделении сигнала и компонент между собой.

-  Bogalo, Juan, Pilar Poncela и Eva Senra (2020). «Circulant singular spectrum analysis: A new automated procedure for signal extraction». В: *Signal Processing* 177. ISSN: 0165-1684. DOI: 10.1016/j.sigpro.2020.107750. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168420303264>.
-  Golyandina, Nina, Pavel Dudnik и Alex Shlemov (2023). «Intelligent Identification of Trend Components in Singular Spectrum Analysis». В: *Algorithms* 16.7, с. 353. DOI: 10.3390/a16070353. URL: <https://doi.org/10.3390/a16070353>.
-  Golyandina, Nina, Anton Korobeynikov и Anatoly Zhigljavsky (янв. 2018). *Singular Spectrum Analysis with R*. ISBN: 978-3-662-57378-5. DOI: 10.1007/978-3-662-57380-8.



Golyandina, Nina, Vladimir Nekrutkin и Anatoly Zhigljavsky (2001). *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Chapman и Hall/CRC. URL: https://www.academia.edu/34626051/Analysis_of_Time_Series_Structure_-_SSA_and_Related_Techniques.



Gu, Jialiang и др. (2024). «Generalized singular spectrum analysis for the decomposition and analysis of non-stationary signals». В: *Journal of the Franklin Institute Accepted/In Press*. ISSN: 0016-0032. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2024.106696. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.106696>.