

# W9 手寫功課

劉至軒

May 25, 2019

**Problem 1.** 假設問題是輸入一個數字，再輸出一個數字： $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  能在  $O(n^2)$  建立一個  $n \times n$  的表格給  $q: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  在  $2^n$  得到答案，然後  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  能在  $O(1)$  將答案轉換。那時間的  $\max$  為  $2^n$ ，但是經過  $f$  之後， $q$  的輸入變成  $O(n^2)$ ，所以實際複雜度  $O(n^2 + 2^{n^2} + 1) = O(2^{n^2}) \neq 2^n$ 。

**Problem 2.** 因為一個多項式時間函數的輸出一定是多項式的多（如果超過的話，光輸出解答時間就爆掉了！），所以  $Q$  的輸入一定是多項式，回報給  $g$  的東西也一定是多項式。甚至，我們可以給界：時間複雜度的次方上界為三個時間複雜度的度數（degree）的和。

**Problem 3.** 若  $Q$  的最佳時間複雜度超過了多項式時間的限制，則用  $P$  規約為  $Q$  的解也超過了多項式時間的限制；不過只知道  $P$  存在一個多項式時間的演算法，不代表一定是用  $Q$  來解決的，並沒有引起矛盾。所以沒辦法斷言道  $Q$  一定有多項式時間的演算法。

**Problem 4.** 假設此資料結構存在，則可以  $O(n)$  將所有值插入，再不斷  $O(1)$  查詢極值並刪除，共  $O(n)$ 。這樣，所得到的序列就是原本序列的排序，但是這違反了排序的  $O(n \log n)$  下界，故不可能。

**Problem 5.** 將每一個點做變換： $a_i \mapsto (a_i, a_i)$ ，再跑一次最近點對得到最近距離  $d$ 。若  $d = 0$  則回傳“Yes”，否則回傳“No”。

**Problem 6.** 將序列看成一個圖：點  $a_i$  連到  $a_{a_i}$ 。因為  $1 \leq a_i \leq n - 1$ ，可以知道  $a_{a_n} \neq a_n$ 。則開始找環（用龜兔賽跑法，額外空間  $O(1)$ ）：找到了之後，環的入口就是解，因為  $a_{a_n}$  一定不在環內，一定有至少兩個  $a_k$  指向環的入口：環的最後一員和剛進環前的元素。而環的起點可以在空間  $O(1)$ （也是雙指標，一個從龜開始跑，另外一個從  $a_n$  開始跑，一次跑一個直到撞到就是解答），時間  $O(n)$  找到。則再退後一步（判是不是即將撞到）輸出即可。（時間  $O(n)$ 、額外空間  $O(1)$ 、沒有動到原本序列）