

W1 手寫功課

劉至軒

March 9, 2019

Problem 1. 可以知道

$$\log_2(10^3) \approx 9.96578, \log_2(10^6) \approx 19.93157$$

故最靠近的分別為 10 和 20。

Problem 2. 每一個人都會有 0 到 $n-1$ 個認識的人，總共 n 種可能，而只有 n 個人，所以如果沒有重複的話，那就是每一個人都認識（順序不一定） $0, 1, \dots, n-1$ 個人，但是這個就會有矛盾，因為有人什麼人都不認識，而有人認識所有人！故一定會重複。

Problem 3. 先證明 base case：顯然，對於 $n = 3$ ，

$$91 = 3^3 + 4^3 < 5^3 = 125$$

，而假設對於 $n = k$ 來說，命題成立。則：

$$4^{k+1} + 3^{k+1} < 5 \cdot 4^k + 5 \cdot 3^k < 5^{k+1}$$

得證。

Problem 4. 同上，先證明 base case：對於 $n = 4$ ，

$$81 = 3^4 > 4^3 = 64$$

而假設對於 $n = k$ ，命題成立，則：

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 < k^3 + k^3 + k^3 = 3k^3 < 3^{k+1}$$

此處，注意 $k^3 > 3k + 1 \Leftrightarrow k > 2$ 故會對。

Problem 5. 這一題利用數學歸納法。顯然對於 $n = 1$ 會對（不能再分割），和 $n = 2$ ，只能分成兩個 1，而得到的分數就是 $1 \cdot 1 = \frac{2^2-2}{2}$ 。那假設對於所有的 $i < k$ ， i 得到的分數都是 $\frac{i^2-i}{2}$ ，則 $k+1$ 可以分割成 $k+1 = a+b$ ，則所得到的分數 S 是（注意到 $a, b \leq k$ ）：

$$\begin{aligned} S &= ab + \frac{a^2-a}{2} + \frac{b^2-b}{2} \\ &= \frac{a^2+b^2+2ab-a-b}{2} \\ &= \frac{(a+b)^2-(a+b)}{2} \\ &= \frac{n^2-n}{2} \end{aligned}$$

得證。

Problem 6. 我們將用數列 a 來構造出一個合法的投票結果。令 S_k 為

$$S_k := \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \sum_{i=1}^k a_i, & k > 0 \end{cases}$$

那對於所有的 i ，我們可以令 $[S_{i-1}, S_{i-1} + a_i)$ 的人都投給第 i 個人。那如果有人投給自己呢？假設這個人是 a_i ，則一定可以找到一個不是投給 a_i 的人 a_j （由於 $0 \leq a_i \leq n-1$ ，所以一定有），使得他們兩個交換投票對象。 a_i 本來投給自己，所以新的對象不會是自己； $a_j \neq a_i$ ，所以新的對象也不會是自己，所以交換合法。這樣子每次交換完一定會至少少一個人不是投給自己，而不會多人投給自己，所以只需要有限次步驟（最多 n 次）即可做完。