W5 手寫功課

劉至軒

May 18, 2019

Problem 1.

1. 假設有一個解是 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$，但是不是最佳解（不是每次都選最大可以拿的），現在我們要證明這個拿的數量一定比最佳解拿的數量多。假設對於其中一步沒有取最大值（不妨設為第一步），那其中一定有一堆可以化成一個更大的幣值的，也就是可以減少錢幣數：要證明的是：如果有許多的小錢幣 $x_1, x_2, x_3, \cdots x_k$，其加起來超過 c_i，則一定可以挑選其中一些個，加起來等於 c_i，就可以消掉。

   證明：

   用數學歸納法：假設一個由 $c_1 = 1$ 的錢幣的和大於或等於 c_2，則答案顯然：選 c_2 個不就得了！那假設一堆比 c_i 小的錢幣加起來超過 c_i，且一定可以選擇那些錢幣使得和等於 c_i。那看 c_{i+1}：它有兩種可能：因為 $c_i | c_{i+1}$，所以可能全部由 c_i 組成，也可能不是。分這兩個 case 討論：

   (a) 全部由 c_i 組成，則顯然可以：選 $\frac{c_{i+1}}{c_i}$ 個就好了！

   (b) 假設由 x ($x \leq \frac{c_{i+1}}{c_i} - 1$) 個 c_i 和其他的，比 c_i 小的錢幣，令其和為 S。因為 $c_i | c_{i+1}$ 且 $S + x \cdot c_i = c_{i+1}$ 所以

   $$c_{i+1} = S + x \cdot c_i \leq S + c_{i+1} - c_i \implies S \geq c_i$$

   那因為以上的假設，我就可以取一些化簡成 c_i，而 x 變成 $x+1$。若其依然符合 $x \leq \frac{c_{i+1}}{c_i} - 1$，那就繼續取，直到 $x = \frac{c_{i+1}}{1}$，那就變成第一個 case 了，就直接取最大的。

   所以每次如果沒有取最大的，而是取其他的，一定有辦法合併成更好的解，而最後的合併就會變成貪心解，得證。

2. 令 $c_1 = 1, c_2 = 3561, c_3 = 3562, x = 7122$，則用貪心法則需要取 3561 個（$c_3$ 一個，$c_1$3560 個），但是最佳解取兩個（c_2）就好了，所以貪心法在這個時候不一定會對。

3. 令 $c_1 = 2, c_2 = 3$ 就會對了：先觀察：發現一定不會取超過 2 個 2，因為只要超過了，每 3 個 2 就可以換成 2 個 3，進而減少錢幣數量。對 x 進行模 3 的分析：

   (a) $x \equiv 0 \pmod 3$，則 x 為 $6k$，$k \in \mathbb{N}$ 的形式，那一定是全部取 3 最好。

(b) $x \equiv 1 \pmod 3$，則 x 為 $6k+1$ 或 $6k+4$，$k \in \mathbb{N}$ 的形式，在這兩個 case，都是需要拿兩個 2 可以化成 3 的倍數（分別為 $6k-3$ 和 $6k$ 的形式）

(c) $x \equiv 2 \pmod 3$，則則 x 為 $6k+2$ 或 $6k+5$，$k \in \mathbb{N}$ 的形式，在這兩個 case，都是需要拿一個 2 可以化成 3 的倍數（分別為 $6k$ 和 $6k+3$ 的形式）

由以上分析可以知道貪心法在這個 case 也會對。

Problem 2. 假設我目前選了區間集合 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$，且有

$$\forall i < j, l_i < r_i < l_j < r_j$$

則可以一直做這個操作：$\forall i$，將 S_i 移動至目前終點最左邊，與之前的線段都不相交的線段。這個操作顯然不會影響到 $|S|$（也就是，如果 S_i 做了這個操作，則顯然 S_{i+1} 一定還是可以存在，因為 S_i 的右界一定會不動或往左，所以 S_{i+1} 最差就是不動）則到最後，可能有一些剩下在後面的區間。那如果這個 S 剛好是解答呢（令其稱為 S_{ans}）？對每一個元素都做這個操作之後（變成 S'_{ans}），$|S'_{ans}| = |S_{ans}|$ 維持不變！而且，還有一個好的性質，就是呢，假設 S_l 為用貪心法則（排序右界然後取最左邊不相交的）的話，那對於每一個 $S_l[i]$ 都有

$$S_l[i] = S'_{ans}[i]$$

總結就是：假設有答案 S_{ans}，而 S'_{ans} 是對於每一個線段做以上的操作後的集合，則用貪心法取出的集合 S_l 會滿足

$$|S_{ans}| = |S'_{ans}| = |S_l|$$

所以 S_l 可以得出最多的選法的其中一組解。為什麼呢？因為對於第 i 個線段，其經過運算之後會跑到貪心第 i 步所選到的線段。