W11 手寫功課

劉至軒

June 1, 2019

Problem 1. 令 $\operatorname{lowbit}(x) = 2^k$。則 x 為

$$x = \underbrace{1...}_{\text{第}k\text{位以上的位數}} \quad 1\underbrace{000\ldots0}_{k-1\text{個}0}$$

則 x 的 bit-inverse 可以表示為

$$x‘ = \underbrace{1...}_{\text{第}k\text{位以上的位數皆反轉}} \quad 0\underbrace{111\ldots1}_{k-1\text{個}1}$$

則當 x' 被加一的時候，x' 的前 $k-1$ 位會不斷進位，到第 k 位會停止，因為其一定為 0。此不影響第 k 位以上的位數，所以都和 x 相反。則當取 $x\&x'$ 時，前 $k-1$ 位數一者為 0、一者為 1，所以都是 0；第 k 位以上皆被反轉，所以也是 0，惟第 k 位皆 1，故 $x\&x' = \operatorname{lowbit}(x)$。

Problem 2.

1.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^{i-1} \\
2S &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (i-1) \cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot 2^{i-1} + n \cdot 2^n \\
\implies (S - 2S) &= \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} - n \cdot 2^n \\
&= 2^n - 1 - n \cdot 2^n \\
-S &= -1 - (n-1) \cdot 2^n \\
S &= 2^n \cdot (n-1) + 1 \quad \square
\end{aligned}$$

2. 我們會用強歸納法：先驗證 Base Case（$f(0)$）會對：

$$f(0) = 1 \geq 0 = 0 \cdot 2^{-1}$$

現在，假設對於所有的 $n' < n$ 來說，都滿足

$$f(n') \geq n' \cdot 2^{n'-1}$$

則

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot 2^{i-1} = (n-2) \cdot 2^{n-1} + 1$$

現在計算 $f(n)$：

$$\begin{aligned} f(n) &= 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \\ &\geq 2^n + (n-2) \cdot 2^{n-1} + 1 \\ &= 2^n + n \cdot 2^{n-1} - 2^n + 1 \\ &= n \cdot 2^{n-1} + 1 \\ &> n \cdot 2^{n-1} \quad \square \end{aligned}$$

Problem 3.

1. query(1, 15)
2. $O(\log^2 n)$，因為當詢問 query(1, $2^k - 1$) 的時候，會花 $O(k)$ 的時間變成 query(1, $2^{k-1} - 1$)，所以會變成 $T(n) = k + (k-1) + (k-2) + \cdots + 1 = O(k^2) = O(\log^2 n)$。

Problem 4.

1. 透過定義，可以知道 $\texttt{arr}[x] = \sum \texttt{dif}[x]$（為差分序列）。則 query($\texttt{dif}$, x) 就好了。
2. 透過定義，可以知道若 $[a, b]$ 都加了 k，則$\texttt{dif}[a]$ 會增加 k，$\texttt{dif}[b+1]$ 會減少 k。故呼叫 update($\texttt{dif}$, a, k)、update($\texttt{dif}$, $b+1$, $-k$)、update($\texttt{dif}$, a, $a \cdot k$)、update($\texttt{dif}$, $b+1$, $-k \cdot (b+1)$) 即可。
3. $\sum_{i=1}^{n} \texttt{arr}[i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \texttt{dif}[j] = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\ \texttt{dif}[i]$
4. 同上，$\sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\ \texttt{dif}[i] = (n+1) \sum_{i=1}^{n} \texttt{dif}[i] - \sum_{i=1}^{n} i \times\ \texttt{dif}[i]$
$= (n+1) \sum_{i=1}^{n} \texttt{dif}[i] - \sum_{i=1}^{n}\ \texttt{dif2}[i]$，故回傳 $(n+1)\times$ query($\texttt{dif}$, n) $-$ query($\texttt{dif2}$, n) 即可。