W10 手寫功課

劉至軒

May 25, 2019

Problem 1.

1. $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ 或 $(a, b, c) = (1, 0, 1)$
2. $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$

Problem 2.

1.

$$\begin{aligned} f &= (c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_k) \\ &= (c_1 \wedge c_2) \wedge [(c_3 \wedge c_4 \wedge \cdots \wedge c_k)] \\ \implies \neg f &= \neg(c_1 \wedge c_2) \vee \neg(c_3 \wedge c_4 \wedge \cdots \wedge c_k) \\ &= \neg c_1 \vee \neg c_2 \vee \neg\left[(c_3 \wedge c_4) \wedge c_5 \cdots \wedge c_k\right] \\ &= \neg c_1 \vee \neg c_2 \vee \neg c_3 \vee \neg c_4 \vee \left[(c_5 \wedge c_6) \wedge \cdots \wedge c_k\right] \\ &\vdots \\ &= \neg c_1 \vee \neg c_2 \vee \cdots \vee \neg c_k \end{aligned}$$

2. 因為 f 為一個 CNF 算式，所以型如

$$f = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_k$$

則若想要 f 為`F`，則至少一個 c_i 為`F`，又因為 c_i 中沒有重複變數，所以就一定可以選擇變數，使得 f 是`F`了，這樣子為 $O(k)$，k 為變數數量。

3. 因為 f 為 DNF 算式，所以型如

$$f = c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_k$$

只需要選擇其中一個 c_i，使得其中的變數經過運算回傳`T`即可，且因為沒有重複的變數所以一定辦得到，複雜 $O(k)$，k 為變數數量。

4. 同上，f 為一個 DNF 算式代表 $\neg f$ 是一個 CNF 算式。而判斷 f 是否可以為`F`等同於判斷 $\neg f$ 是否可以為`T`，成為了一個 $CNF - SAT$ 問題。然而，根據 Cook-Levin Theorem，$CNF - SAT \in NPC$，又 $P \neq NP$，所以其不存在一個多項式演算法。

5. 直接用構造反證法：考慮一個布林算式 $X = (a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_k \wedge b_k)$ 則這代表「存在某個數字 k 使得 a_k、b_k 皆為T」，也就代表：「當我每一個數字都選擇 a_i 或 b_i 的時候，不論怎麼選都一定會有一個T」，所以 CNF 樣式為 $(a_1 \vee a_2 \vee \ldots a_k) \wedge (b_1 \vee a_2 \vee \ldots a_k) \wedge \cdots \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \ldots b_k)$，長度從原本的 $2n$ 變成 2^n 了，光輸出就不是多項式了，所以不存在一個多項式時間演算法，因為下界就已經超過了！

Problem 3. 令要判斷的第一個為 A 和 B。若兩者相等，則 $A \oplus B$（此處 $\oplus$ 表示位元 XOR）恆為F。也就是，想要找到一組變數使得 $A \oplus B$ 為T即可。又

$$X = A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

，若 X 存在一組變數使得回傳T，則 A，B 不等價。已知這個運算式存在一個等價的 CNF 算式 P，則問題即化簡為：P 是否可以回傳T？也就是 $CNF - SAT$ 問題，故此問題為 $NP - hard$。