W2 手寫功課

劉至軒

March 24, 2019

Problem 1.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=3$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$$

3. $$f(n)\in O(2^n)\implies \exists\varepsilon,x_0,\forall n>x_0,|f(n)|\le\varepsilon\cdot 2^n=\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{n+1}$$

   ，所以只要選 $\varepsilon'=\varepsilon$ 即可以符合定義。

   反方向：

   $$f(n)\in O(2^{n+1})\implies \exists\varepsilon,x_0,\forall n>x_0|f(n)|\le\varepsilon\cdot 2^{n+1}=2\varepsilon\cdot 2^n$$

   ，則選擇 $\varepsilon'=2\varepsilon$ 則符合定義。

4. $$f(n)\in O(n!)\implies \exists\varepsilon,x_0,\forall n>x_0,|f(n)|\le\varepsilon\cdot(n!)<\varepsilon\cdot(n+1)!$$

   故命題成立。

   反方向：$f(n)=(n+1)!$ 就是一個反例子：假設

   $$\exists\varepsilon,x_0,\forall n>x_0,|f(n)|\le\varepsilon\cdot(n)!$$

   再考慮 $f(\lceil\varepsilon\rceil)$：

   $$\begin{aligned}f(\lceil\varepsilon\rceil)&=(\lceil\varepsilon\rceil+1)!\\&=(\lceil\varepsilon\rceil+1)\cdot(\lceil\varepsilon\rceil])!\\&>\varepsilon\cdot(\varepsilon)!\end{aligned}$$

   矛盾。所以此不成立，只有一方面。

5. 這一題也是舉範例：對於 $k>1$，$f(x)=kx$ 皆不成立：顯然 $f(x)=kx\in O(n)$，只需要取 $\varepsilon>k$ 即可。假設 $2^{f(n)}\in O(2^n)$，則

$$\exists\varepsilon,x_0,\forall n>x_0,|2^{f(n)}|<\varepsilon\cdot 2^n$$

$$|2^{f(n)}|<\varepsilon\cdot 2^n \implies 2^{kx}<\varepsilon\cdot 2^x$$
$$(2^k)^x=2^{x+\log_2\varepsilon}$$

所以對於任何的 ε，當 $x>\frac{\log_2\varepsilon}{k-1}$ 則以上不等式不成立，有矛盾，故命題不成立。

Problem 2. 先計算 $m=1$ 的 case：

$$f(2^1)=2f(1)+4=6\leq 6\log_2 6$$

假設 $m=k$ 不等式成立，則考慮 $m=k+1$：

$$\begin{aligned}
f(2^{k+1})&=2f(2^k)+2^{k+2}\\
&\leq 2\cdot 3\cdot 2^k\cdot k+2^{k+2}\\
&\leq (3k+2)\cdot 2^{k+1}\\
&<(3k+3)\cdot 2^{k+1}\\
&=3\cdot 2^{k+1}\cdot\log_2(2^{k+1})
\end{aligned}$$

得證。

Problem 3. 先驗證 $n=1$ 的 case:

$$f(1)=1\leq 2\cdot 1^2-1=1$$

成立。則假設對於所有 $x\leq k$，命題皆成立。現在考慮 $n=k+1$（並且 $k=2l$，l 為正整數)：

$$\begin{aligned}
f(k+1)&=f(\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor)+f(\lceil\frac{k+1}{2}\rceil)+(k+1)^2\\
&\leq 2(\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor)^2+2(\lceil\frac{k+1}{2}\rceil)^2+k^2+2k+1\\
&=2l^2+2(l+1)^2+4l^2+4l-1\\
&=8l^2+8l+1\\
&=2k^2+4k+1\\
&=2(k+1)^2-1
\end{aligned}$$

然後再考慮 $k=2l+1$，$l\in\mathbb{N}$ 的 case：

$$\begin{aligned}
f(k+1)&=f(\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor)+f(\lceil\frac{k+1}{2}\rceil)+(k+1)^2\\
&\leq 2(l+1)^2+2(l+1)^2+(2l+2)^2-2\\
&=8(l+1)^2-2\\
&=8l^2+16l+6\\
&<2(2l+2)^2-1=16l^2+16l+7
\end{aligned}$$

得證。*36 th*