Ứng dụng lý thuyết hàng đợi

Trong việc tối ưu hóa thiết kế hệ thống

Nguyễn Quang Huy - 20173179
Nguyễn Xuân Trường - 20172881

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Hà Nội, ngày 15 tháng 7 năm 2020

Mục lục

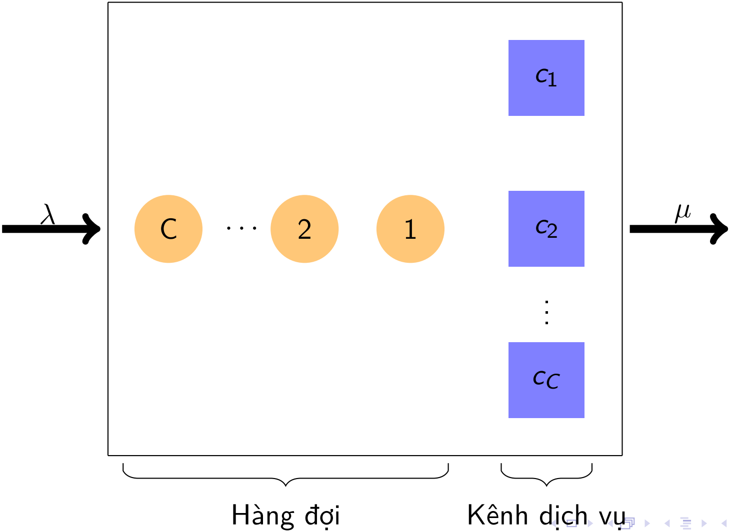
Đặt vấn đề

- Giới thiệu về bài toán.
- Lý do chọn đề tài.
- Mục đích của đề tài.

Lý thuyết hàng đợi

- Khái niệm hàng đợi.
- Các thành phần của hệ thống hàng đợi.

Lý thuyết hàng đợi



Mô hình bài toán

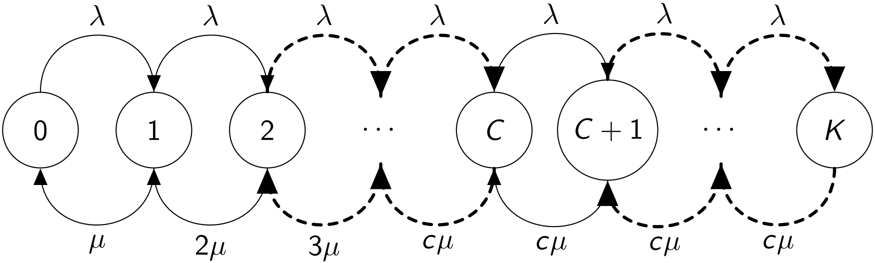
- Hệ thống khách hàng gồm:
  - C trạm phục vụ khách hàng.
  - Số lượng khách hàng tối đa là K.
- Yêu cầu của bài toán:
  - Tối ưu chi phí hoạt động của khách hàng.
  - Nguyên tắc phục vụ: FIFO.

Các kí hiệu cơ bản trong hệ thống hàng đợi

- P_n: Xác suất có đúng n khách hàng trong hệ thống khi ở trạng thái cân bằng.
- L: Số lượng khách hàng trung bình trong hệ thống.
- L_q: Số lượng khách hàng trung bình trong hàng đợi.
- W: Thời gian trung bình của khách hàng trong hệ thống.
- W_q: Thời gian trung bình của khách hàng trong hàng đợi.
- λ: Cường độ đến trung bình của khách hàng trên một đơn vị thời gian.
- μ: Cường độ phục vụ trung bình của ngân hàng cho một khách hàng trên một đơn vị thời gian.

Mô hình M/M/C/K

- Mô hình bài toán trên có thể đưa về chuỗi Markov rời rạc.



Mô hình M/M/C/K

- Mô hình bài toán là một quá trình sinh chết với:

$$\lambda_n = \lambda \text{ nếu } n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ nếu } n = 1, \dots, C-1 \\ C\mu \text{ nếu } n = C, C+1, \dots, K \end{cases}$$

Xác suất khách hàng đến với dịch vụ

Gọi n là khách hàng thứ n đến với dịch vụ.

- Nếu $n < C$:

$$n\mu p(n) = \lambda p(n-1) \tag{1}$$

$$p(n) = \frac{\lambda}{n.\mu} p(n-1) \tag{2}$$

$$p(n) = \frac{\rho^n}{n!} p(0) \tag{3}$$

- Nếu $n \geq C$:

$$C\mu p(n) = \lambda p(n-1) \tag{4}$$

$$p(n) = \frac{\lambda}{C\mu} p(n-1) \tag{5}$$

$$p(n) = \frac{\rho^{n-c}}{C^{n-C}} p(C) \tag{6}$$

Trong đó $\rho = \lambda/\mu$

Xác suất khách hàng đến với dịch vụ

Từ phương trình (3), để xác định giá trị $p(n)$, ta có:

$$p(C) = \frac{\rho^C}{C!} p(0) \tag{7}$$

Do đó:

$$p(n) = \frac{\rho^n}{C^{n-C} C!} p(0) \tag{8}$$

Xác suất khách hàng đến với dịch vụ

Xác định giá trị $p(0)$, ta có:

$$\sum_{n=0}^{K} p(n) = 1 \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{C-1} p(n) + \sum_{n=C}^{K} p(n) = 1 \tag{10}$$

$$\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} p(0) + \sum_{n=C}^{K} \frac{\rho^n}{C^{n-C} C!} p(0) = 1 \tag{11}$$

$$p(0) = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{K} \frac{\rho^n}{C^{n-C} C!} \right]^{-1} \tag{12}$$

Xác suất khách hàng đến với dịch vụ

Như vậy, xác suất để khách hàng thứ n đến với dịch vụ $p(n)$ sẽ được tính như sau:

$$p(n) = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}.p(0) \text{ nếu } 0 \leq n < C \\ \dfrac{\rho^n}{C^{n-C}C!}p(0) \quad \text{nếu} \quad n \geq C \end{cases} \tag{13}$$

Với:

$$p(0) = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{K} \frac{\rho^n}{C^{n-C}C!}\right]^{-1}$$

Xác suất khách hàng đến khi hàng đợi đầy

Vì hàng đợi với số lượng hữu hạn, khi hàng đợi đầy thì dịch vụ sẽ bị từ chối. Do vậy, xác suất P_r để một khách hàng bị từ chối dịch vụ được tính như sau:

$$P_r = \sum_{n=K}^{\infty} p(n) \tag{14}$$

Kết hợp với (8), ta thu được:

$$P_r = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\rho^n}{C^{n-C}.C!}.p(0) \tag{15}$$

Chi phí cơ hội

Chi phí cơ hội là chi phí thất thoát mà các ngân hàng phải gánh chịu khi mà khách hàng rời đi khi hàng đợi đã đầy. Theo (9), ta có xác suất khách hàng rời đi khi gặp hàng đợi đầy là:

$$P_r = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\rho^n}{C^{n-C}.C!}.p(0)$$

Gọi C_0 là trung bình chi phí cơ hội khi từ chối phục vụ khách hàng. C_0 được cho bởi công thức dưới đây:

$$C_0 = P_r \lambda c \tag{16}$$

$$= \frac{\rho^K}{C^{K-C} C!} p(0) \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{\rho}{C}\right)^n \lambda c \tag{17}$$

trong đó c là phí mà khách hàng phải chi trả khi tham gia vào hệ thống.

Số lượng khách hàng trung bình trong hàng đợi và trong hệ thống

Số khách hàng trung bình L_q được tính như sau:

$$L_q = \sum_{n=C}^{K} (n - C) p(n) \tag{18}$$

Từ (8), ta có:

$$L_q = \sum_{n=C}^{K} (n - C) \frac{\rho^n}{C^{n-C}.C!} p(0) \tag{19}$$

$$L_q = p(0) \frac{\rho^C}{C!} \sum_{n=0}^{K-C} n \left(\frac{\rho}{C} \right)^n \tag{20}$$

Số lượng khách hàng trung bình trong hàng đợi và trong hệ thống

Từ đó ta cũng tính được trung bình số khách hàng ở trong hệ thống:

$$\begin{aligned} L &= L_q + \left(C - \sum_{n=0}^{C-1} (C-n) p(n) \right) \\ &= L_q + C - \sum_{n=0}^{C-1} (C-n) \frac{\rho^n}{n!} p(0) \end{aligned} \tag{21}$$

Thời gian đợi trung bình của khách hàng

Gọi W_q là thời gian đợi trung bình của mỗi khách hàng trong hàng đợi khi đến với dịch vụ. Giá trị W_q được tính như sau:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{22}$$

Như vậy:

$$W_q = p(0).\frac{\rho^C}{\lambda.C!}\sum_{n=0}^{K-C-1} n\left(\frac{\rho}{C}\right)^n \tag{23}$$

Thời gian trung bình của khách hàng khi ở trong hệ thống là:

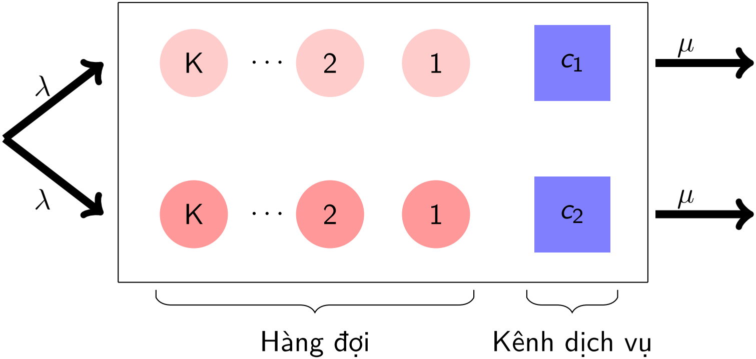
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{24}$$

Áp dụng lý thuyết hàng đợi vào thiết kế hệ thống hàng đợi

- Vấn đề của các ngân hàng hiện tại.
- Đưa ra các giải pháp.

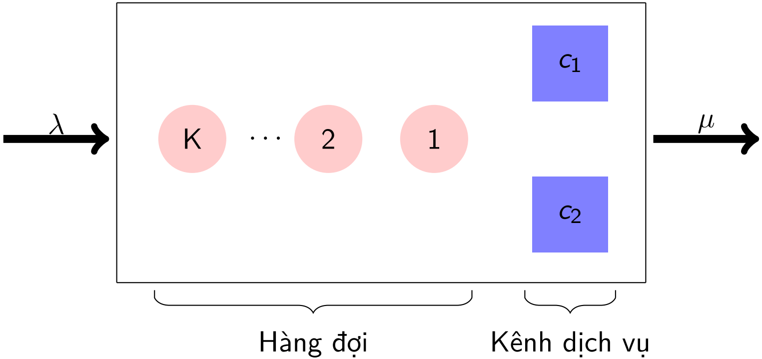
Mô hình có một hàng đợi và hai hàng đợi

Mô hình bài toán:



Hình 1: Mô hình hai hàng đợi $M/M/1/K$.

Mô hình có một hàng đợi và hai hàng đợi



Hình 2: Mô hình hàng đợi $M/M/2/K$.

Mô hình có một hàng đợi và hai hàng đợi

Giả sử rằng ta có hai mô hình hàng đợi. Mô hình thứ nhất có một hàng đợi và hai kênh dịch vụ nghĩa là mô hình $M/M/2/K$ (hình 1). Mô hình thứ hai có hai hàng đợi và mỗi hàng đợi có một kênh dịch vụ (hình 2), các kênh dịch vụ này hoạt động hoàn toàn độc lập với nhau.

Cường độ khách hàng đến là $\lambda = 16$ khách trên một đơn vị thời gian. Ta cũng xem rằng cường độ phục vụ của mỗi dịch vụ là $\mu = 20$. Khi đó xác suất khách hàng tham gia vào một hàng chờ là $1/2$ và ta sẽ có hai mô hình hàng đợi $M/M/1/K$ với $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda/2 = 8$. Bây giờ ta sẽ so sánh hai mô hình trên dựa vào một vài tiêu chí cụ thể.

Mô hình có một hàng đợi và hai hàng đợi

Ta có kết quả thu được như sau:

Số hàng chờ	λ	μ	L_q	L	W_q	W
1	16	20	0.152	0.952	0.010	0.060
2	8	20	0.267	0.667	0.033	0.083

Mô hình có một hàng đợi và hai hàng đợi

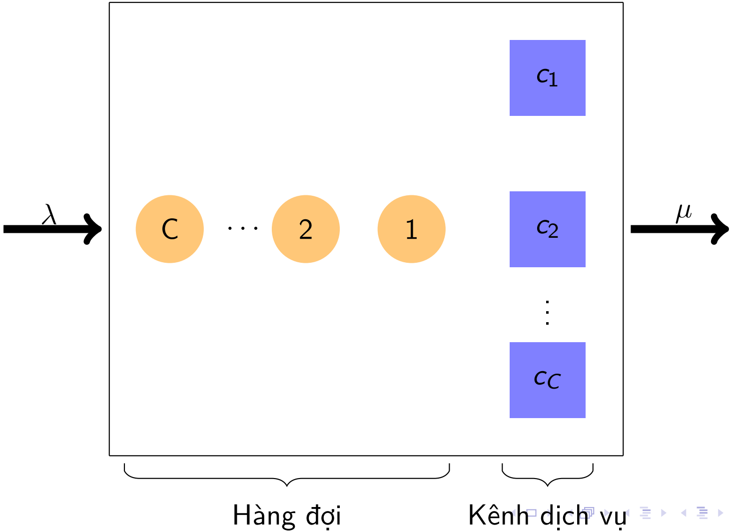
Làm tương tự với hai mô hình là mô hình có 3 hàng đợi $M/M/1/K$ và mô hình $M/M/3/K$, ta thu được kết quả:

Số hàng chờ	λ	μ	L_q	L	W_q	W
1	16	20	0.019	0.819	0.001	0.051
3	$\frac{16}{3}$	20	0.097	0.364	0.018	0.068

Mô hình có nhiều dịch vụ

Ta sẽ tiếp tục với ví dụ trên nhưng thay bằng việc chia thành nhiều hàng đợi, ta sẽ giữ nguyên một hàng đợi và mở nhiều kênh dịch vụ. Mô hình bài toán lúc này như sau:

Mô hình có nhiều dịch vụ



Mô hình có nhiều dịch vụ

Chạy chương trình, ta thu được kết quả như sau:

Số dịch vụ	1	2	3	4	5
Xs chờ của k/hàng $C(c, \rho)$	0.800	0.229	0.052	0.009	0.001

Tối ưu chi phí

Qua các mục trên ta có thể thấy rằng mô hình đem lại lợi nhuận cao nhất cho ngân hàng chính là mô hình với một hàng đợi và nhiều cổng dịch vụ. Trong mục này ta sẽ quyết định xem thiết kế bao nhiêu cổng dịch vụ là tối ưu nhất. Để đơn giản hoá vấn đề, trong phần dưới đây, chúng em chỉ áp dụng cho mô hình có hàng đợi vô hạn, túc là mô hình $M/M/C$. Ta gọi c_q là chi phí để phục vụ cho một khách hàng có trong hệ thống trong một giờ, c_s là tiền lương phải chi trả cho nhân viên ở các cổng dịch vụ trong một giờ.

Tối ưu chi phí

Tổng chi phí phải chi trả trong một giờ là:

$$f = xc_s + Lc_q.$$

Trong đó x là số kênh dịch vụ. Ta cần tìm x sao chi chi phí f là nhỏ nhất. Theo (21), cho $K \to \infty$ ta có:

$$L = \frac{\lambda}{x\mu - \lambda.}$$

Tối ưu chi phí

Suy ra:

$$f = x * c_s + \frac{\lambda\mu}{x\mu - \lambda} c_q$$

Để f nhỏ nhất thì:

$$f'_x = 0$$
$$\Leftrightarrow c_s - \frac{\lambda\mu}{(x\mu - \lambda)^2} c_q = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{\mu}(\lambda + \sqrt{\frac{c_q\lambda\mu}{c_s}})$$

Với ví dụ như ở trên, ta có $\lambda = 16$, $\mu = 20$, cho $c_q = 4$, $c_s = 20$, ta tính được số cổng dịch vụ là $c = x \approx 1$. Vậy chỉ nên mở 1 cổng dịch vụ để phục vụ khách hàng.

Tổng kết

Với những phân tích nêu trên ta có thể thấy rằng có nhiều cách thiết kế mô hình dựa trên lý thuyết hàng đợi sao cho chi phí bỏ ra của các ngân hàng là thấp nhất. Và mô hình tối ưu nhất chính là mô hình một hàng đợi và có nhiều kênh dịch vụ. Tuy nhiên việc quyết định bao nhiêu kênh dịch vụ còn phụ thuộc vào lượng khách hàng cũng như chi phí chi trả của các ngân hàng.
Ví dụ trên được thu thập dữ liệu từ việc khảo sát thực tế tại một ngân hàng. Cách thiết kế này hoàn toàn có thể áp dụng cho các mô hình kinh doanh có hàng đợi khác như là cửa hàng ăn, xếp hàng vào kho, khám chữa bệnh,... Đối với mỗi mô hình kinh doanh ta sẽ lựa chọn các phương pháp thích hợp nhất.

Thank For Listening