



Teoría avanzada de la computación

Máquinas de Turing - Entrega Final

Grado en Ingeniería Informática - 4.º Curso

Campus de Leganés Grupo 83

Carlos Gallego Jimenez

Carlos Rubio Olivares

Jorge Rodríguez Fraile

Índice

Introducción	3
Ejercicio 0. Palíndromos	3
MT Determinista de una cinta	3
Diseño	3
Estudio Empírico	4
Estudio Analítico	4
MT Determinista de dos cintas	6
Diseño	6
Estudio Empírico	6
Estudio Analítico	7
MT No Determinista de dos cintas	8
Diseño	8
Estudio Empírico	9
Estudio Analítico	9
Ejercicio 1. Suma de enteros en base 1	10
MT Determinista de 1 cinta	10
Diseño	10
Estudio Empírico	11
Estudio Analítico	12
MT Determinista de 2 cintas	13
Diseño	13
Estudio Empírico	14
Estudio Analítico	14
Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas	16
Ejercicio 2. Suma de enteros en base 2	17
MT Determinista de una cinta	17
Diseño	17
Estudio Empírico	17
Estudio Analítico	18

MT Determinista de dos cintas	20
Diseño	20
Estudio empírico	20
Estudio analítico	21
Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas	23
Ejercicio 3. Comparativa de los Ejercicios 1 y 2	24
Determinar la eficiencia de cada algoritmo	24
¿Por qué la diferencia de complejidades?	25
¿Cómo se interpretan las diferencias en complejidad y en eficiencia?	26
Ejercicio 4. Palabras de estructura triplicada	26
MT Multicinta Determinista	26
Diseño	26
Estudio Empírico	27
Estudio Analítico	27
Diseñar MT Multicinta No Determinista	28
Diseño	28
Estudio Empírico	29
Estudio Analítico	29
Conclusión	30

1. Introducción

En este documento se detalla la realización de la práctica de diseño y evaluación de máquinas de Turing, llevando a cabo el análisis empírico y analítico de cada una de ellas con el objetivo de hallar su coste computacional y establecer una cota asintótica superior. Además, se alterna el uso de máquinas deterministas y no deterministas con diferente número de cintas para resolver diversos problemas.

2. Ejercicio 0. Palíndromos

a. MT Determinista de una cinta

En esta sección se detalla el análisis de una MT Determinista de una cinta que acepta palíndromos, es decir, palabras que se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha.

i. Diseño

Para el diseño de la MT Determinista de una cinta que acepte palíndromos se propone el siguiente diseño:

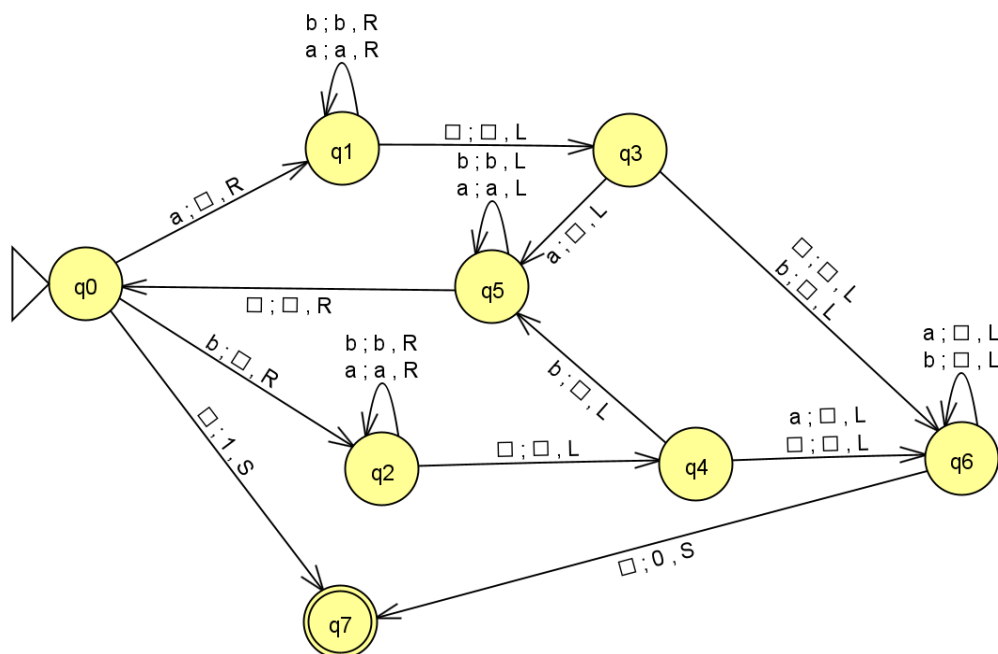


Figura 1. Diseño de MT Determinista de una cinta que acepta palíndromos.

El peor caso en número de pasos es cuando el input es un palíndromo con un número par de caracteres. Esto se debe a que el funcionamiento de esta máquina consiste en leer la primera letra del input, desplazarse al final de la cinta y borrar la última letra si coincide con la primera. Entonces, si n es el tamaño del input se harían $n/2$ recorridos, mientras que si no coincide, se llega al final de la máquina y se acaba la ejecución de manera temprana.

ii. Estudio Empírico

Para demostrar el peor caso y calcular $T(n)$ se han realizado experimentos con diferentes tamaños de entrada para comparar el número de pasos:

Input	Tamaño de entrada	Pasos
λ	0	1
aa	2	6
abba	4	15
baaaab	6	28
ababbaba	8	45
aaaaaaaaaa	10	66
baaaabbaaaaa	12	25
aaaaabbaaaaa	12	91

Tabla 1. Estudio empírico del número de pasos según el tamaño de entrada para la MT determinista que acepta palíndromos.

Se puede ver claramente como según aumenta el tamaño de entrada para entradas aceptadas va aumentando el número de pasos, pero no es el caso de la que no son palíndromos, que las rechaza antes. Por lo que confirma que el peor caso es un palíndromo de longitud n .

iii. Estudio Analítico

En esta sección se lleva a cabo el estudio analítico de la MT por medio del cálculo de diferencias finitas:

Tamaño	0	2	4	6	8	10	12
Pasos	1	6	15	28	45	66	91
Dif 1		5	9	13	17	21	25
Dif 2		4	4	4	4	4	4
Dif 3			0	0	0	0	0

Tabla 2. Diferencias finitas de la MT determinista que acepta palíndromos.

Después de realizar las diferencias finitas se puede observar que siendo las segundas diferencias finitas constantes y las terceras nulas se puede aproximar $T(n)$ con un polinomio de orden 2 de la forma: $T(n) = xn^2 + yn + z$.

Resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 16 & 4 & 1 & 15 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 16 & 4 & 0 & 14 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 3/2 \\ z = 1 \end{array}$$

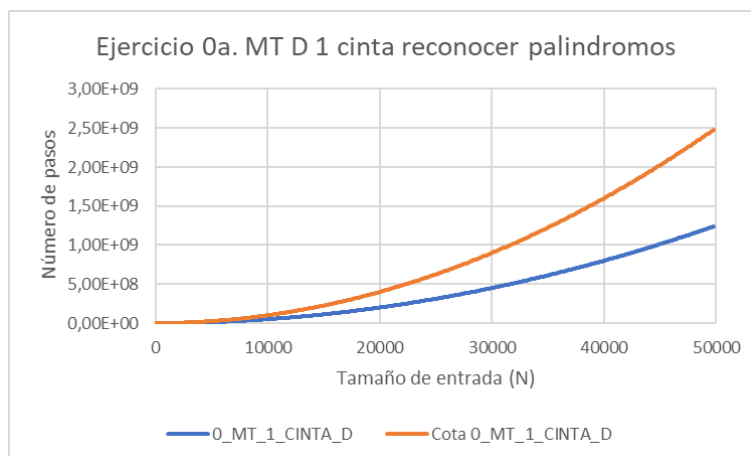
$$T(n) = n^2/2 + 3n/2 + 1.$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	2	4	6	8	10	12
Resultado empírico	6	15	28	45	66	91
$T(n)$	6	15	28	45	66	91

Tabla 3. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT Determinista de una cinta que acepta palíndromos.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(n^2)$, que queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 31$ y que $g(n) = n^2$, y como se puede ver con $c = 1$ se tiene lo siguiente:



Gráfica 1. Cota superior asintótica de la MT D de 1 cinta Ejercicio 0.

b. MT Determinista de dos cintas

i. Diseño

A continuación, se muestra en la figura 2, el diseño realizado para la máquina de Turing determinista de 2 cintas.

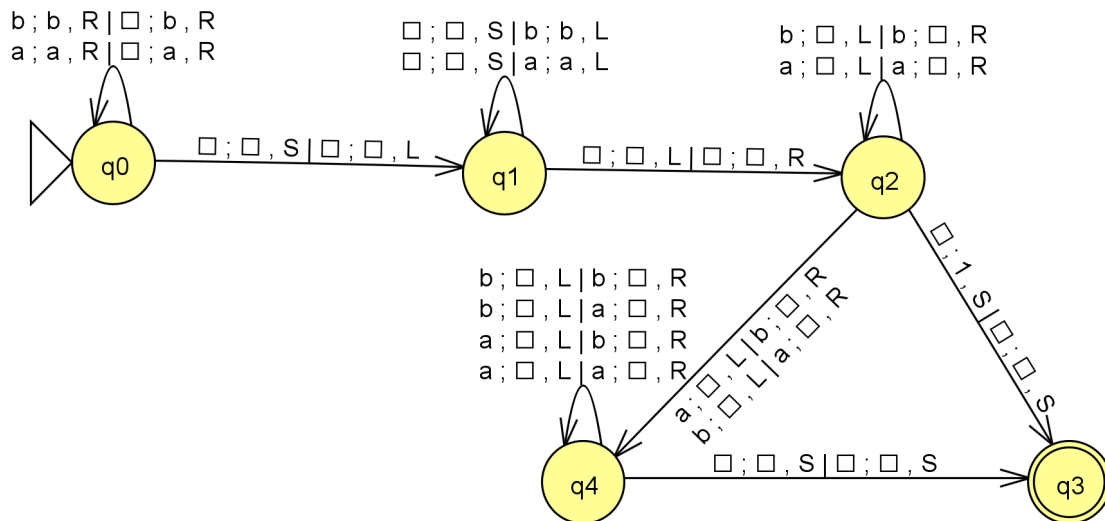


Figura 2. Diseño de MT Determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

En esta figura se diferencian 3 fases: Una primera fase donde el contenido de la cinta 1 se copia a la cinta 2, así ambas tienen el palíndromo copiado. Una vez hecho esto, se rebobina a la cinta 2 dejando el cabezal de la cinta 1 fijo. Por último, se compara el contenido de ambas cintas, en caso de ser igual, se acepta la palabra, y en caso contrario se rechaza.

ii. Estudio Empírico

Input	Tamaño de entrada	Pasos
λ	0	3
aa	2	9
abba	4	15
baaaab	6	21
ababbaba	8	27
aaaaaaaaaa	10	33
baaaabbbaaba	12	39
aaaaabbbaaaa	12	39

Tabla 4. Estudio empírico del número de pasos según el tamaño de entrada para la MT determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

Se han realizado una serie de pruebas para diferentes tamaños de entrada para ver cómo se comporta la MT, que se presentan en la tabla anterior. Se puede observar que según aumenta el tamaño de entrada, aumenta el número de pasos, pero no afecta si es o no palíndromo al número de pasos requeridos.

El peor caso para esta MT será una entrada de tamaño n formada por el alfabeto, pero sin importar si es o no un palíndromo, la recorre en su totalidad igualmente. La diferencia es al finalizar que no dejará el 1 de aceptada.

iii. Estudio Analítico

El primer paso en el Estudio Analítico es cálculo de diferencias finitas:

N	0	2	4	6	8	10	12
Pasos	3	9	15	21	27	33	39
Dif. 1		6	6	6	6	6	6
Dif. 2		0	0	0	0	0	0

Tabla 5. Diferencias finitas de la MT determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

Podemos ver gracias a las diferencias Finitas que se puede aproximar $T(n)$ a un polinomio de primer orden: $T(n) = an + b$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} a = 6/2 = 3 \\ b = 3 \end{array}$$

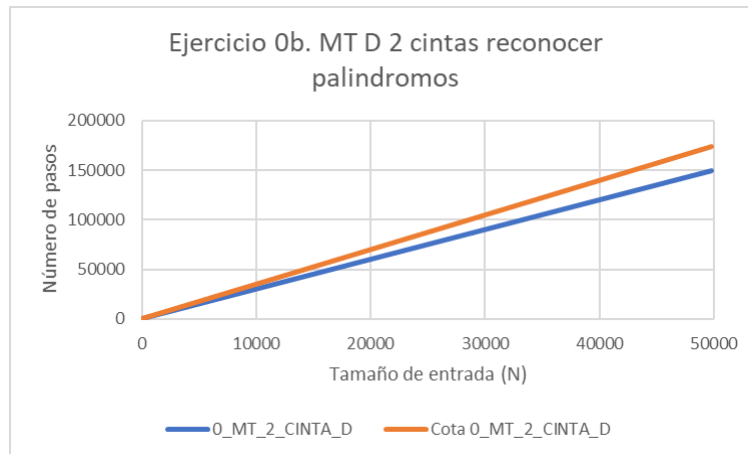
$$T(n) = 3n + 3; T(n) = 3(n + 1)$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	2	4	6	8	10	12
Resultado empírico	9	15	21	27	33	39
$T(n)$	9	15	21	27	33	39

Tabla 6. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$ se puede ver que será $O(n)$, aunque ahora queda por comprobar mediante la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 33$ y que $g(n) = n$. Se prueba con $c = 3, 5$ y se obtienen buenos resultados, que se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica 2. Cota superior asintótica de la MT D de 2 cintas Ejercicio 0.

c. MT No Determinista de dos cintas

i. Diseño

Para esta parte del problema se define una máquina de Turing con dos cintas. Este caso centra su comportamiento en el no determinismo, dado que gracias a las bifurcaciones que se generan es capaz de aceptar las entradas correctas.

En el primer estado se va copiando la cinta 1 en la 2, pudiendo en todo momento transitar al segundo estado, aquí entra el no determinismo, puesto que el primer estado solo deberá transcribir la primera mitad de la cinta y con el que hace esa mitad transita al segundo estado.

Una vez en el segundo estado avanzará hacia la derecha por la otra mitad de la cinta 1 e irá borrando lo copiado mientras comprueba que coinciden. Si se completa el cotejado se pone un 1 en la cinta 1 y se completa con éxito, en caso contrario se para en un estado no final.

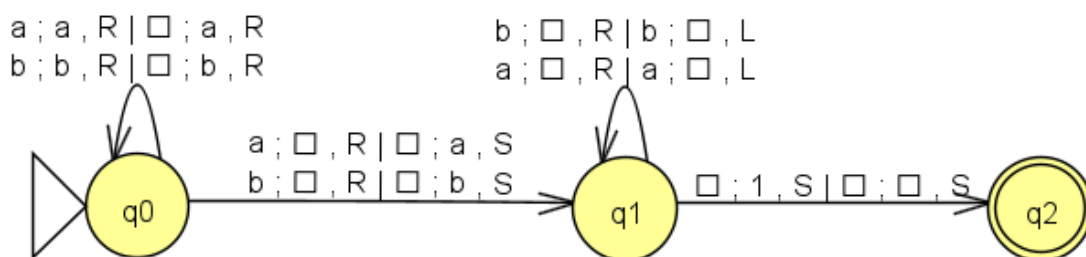


Figura 3. Diseño MT ND de 2 cintas para reconocer palíndromos de longitud par.

ii. Estudio Empírico

Una vez implementado pasamos el mismo set de entradas que se ha probado previamente, en el que incrementalmente aumentamos el N. El número de pasos que han tomado para alcanzar un resultado se resume en la siguiente tabla.

Input	N	Pasos
λ	0	1
aa	2	3
ab	2	3
bab	3	4
abba	4	5
baaaab	6	7
ababbaba	8	9
aaaaaaaaaa	10	11
aaaaabbbaaaa	12	13

Tabla 7. Estudio empírico del número de pasos según el tamaño de entrada para la MT no determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

En este caso no hay un tipo de tamaño N que dé peores resultados, independientemente de que los resultados sean palíndromos o no, o tengan un número par o impar de dígitos, el número de pasos es siempre N+1.

iii. Estudio Analítico

Realizamos las diferencias finitas de los resultados:

N	0	2	4	6	8	10	12
Pasos	1	3	5	7	9	11	13
Dif. 1		2	2	2	2	2	2
Dif. 2			0	0	0	0	0

Tabla 8. Diferencias finitas de la MT no determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

El $T(n)$ será un polinomio de grado 1 por lo que tiene la forma de $T(n) = xn + y$ que si utilizamos los resultados que hemos obtenido nos queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x = 2/2 = 1 \\ y = 1 \end{array}$$

Resulta finalmente como se predecía en el estudio empírico, lineal, y sigue la ecuación:

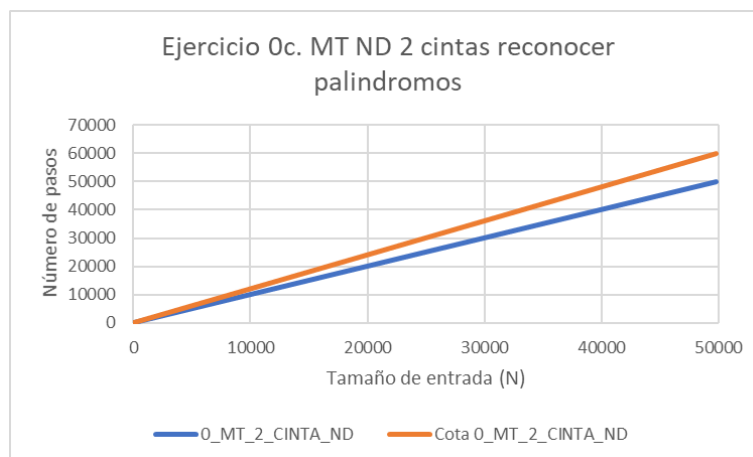
$$T(n) = n + 1.$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	2	4	6	8	10	12
Resultado empírico	3	5	7	9	11	13
$T(n)$	3	5	7	9	11	13

Tabla 9. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT no determinista de dos cintas que acepta palíndromos.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(n)$, que queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 11$ y que $g(n) = n$, y como se puede ver con $c = 1,2$ se tiene lo siguiente:



Gráfica 3. Cota superior asintótica de la MT ND de 2 cintas Ejercicio 0.

3. Ejercicio 1. Suma de enteros en base 1

a. MT Determinista de 1 cinta

i. Diseño

La primera aproximación a este problema se realiza con una máquina de Turing sencilla, con una sola cinta, en la que la entrada viene dada por los números a sumar en base 1 separados por el símbolo '\$'. Por lo que la entrada tendrá un tamaño n definido por: $\text{núm. 1} + \text{núm. 2} + 1$.

El funcionamiento de esta máquina consiste en desplazar de 1 en 1 los 1 del segundo número hasta el comienzo del primero, de manera que es como restar 1 y sumárselo al otro.

Este proceso se repetirá mientras sea posible, cuando se encuentre que no puede restar 1 quitará el \$ y regresará al comienzo de la cinta para finalizar.

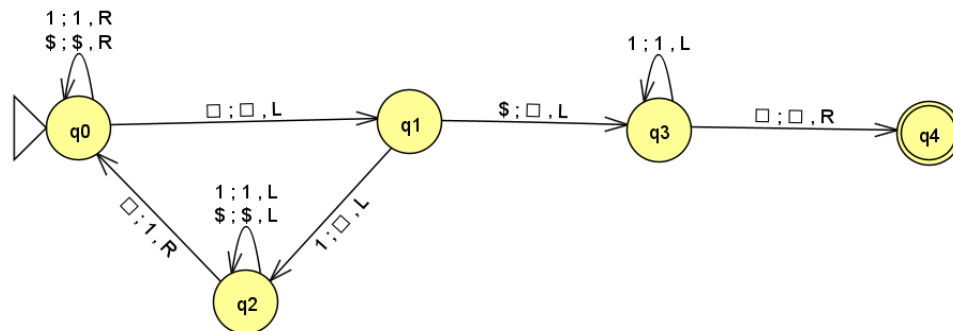


Figura 4. Diseño MT D de 1 cintas para realizar la suma de números enteros en base 1.

ii. Estudio Empírico

Se pasa a hacer las pruebas calculando el número de pasos necesarios para alcanzar la solución para una serie de entradas de prueba. Estas entradas se han elegido variando el tamaño de los números de manera incremental a la par que se alterna entre que uno sea mayor que el otro.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
1\$	x=1, y=0, n=2	6
11\$1	x=2, y=1, n=4	19
1\$1111	x=1, y=4, n=6	66
1111\$111	x=4, y=3, n=8	69
11111\$1111	x=5, y=4, n=10	106
1111\$1111111	x=4, y=7, n=12	201

Tabla 10. Estudio empírico del número de pasos según el tamaño de entrada para la MT determinista de una cinta que suma dos enteros.

Ahora para ver cuál es el peor caso se prueba cómo afecta el número de dígitos a cada uno de los lados de la suma. Primero más grande a la derecha, después iguales y por último más grande el de la izquierda.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
\$111111111111	x=0, y=4095, n=13	352
111111\$111111	x=6, y=6, n=13	190
111111111111\$	x=4095, y=0, n=13	28

Tabla 11. Comparación entre tamaño números para la MT determinista de una cinta que suma dos enteros.

Como se puede ver, el peor resultado es aquel con mayor valor en la parte derecha, por lo que el peor caso será una entrada de tamaño n en la cual el segundo valor a sumar sea de longitud $n - 1$.

iii. Estudio Analítico

Realizamos las diferencias finitas para ejemplos en los peores casos, es decir, cuando el primer valor de la suma es 0 y el segundo valor es $n - 1$.

N	1	3	5	7	9	11	13
Pasos	4	22	56	106	172	254	352
Dif. 1		18	34	50	66	82	98
Dif. 2			16	16	16	16	16
Dif. 3				0	0	0	0

Tabla 12. Diferencias finitas de la MT determinista de una cinta que suma dos enteros.

Se ve que en la Dif. 2 los valores se vuelven constantes, por lo que le corresponde una ecuación de orden 2, con la forma $T(n) = xn^2 + yn + z$. Resolvemos la ecuación con los ejemplos que tenemos y nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 22 \\ 25 & 5 & 1 & 56 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 18 \\ 24 & 4 & 0 & 52 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 18 \\ 8 & 0 & 0 & 16 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

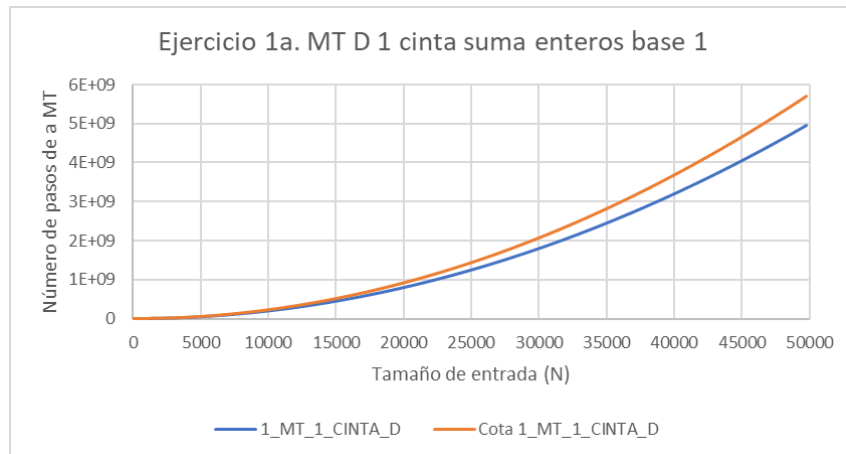
$$T(n) = 2n^2 + n + 1$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	3	5	7	9	11	13
Resultado empírico	22	56	106	172	254	352
T(n)	22	56	106	172	254	352

Tabla 13. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT determinista de una cinta que suma dos enteros.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(n^2)$, que queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 211$ y que $g(n) = n^2$, y como se puede ver con $c = 2, 3$ se tiene lo siguiente:



Gráfica 4. Cota superior asintótica de la MT D de 1 cinta Ejercicio 1.

b. MT Determinista de 2 cintas

i. Diseño

En cuanto al diseño utilizado, se ha reutilizado la idea del Ejercicio 0. En este caso se copia el número izquierdo en la segunda cinta, usando como delimitante el carácter '\$'. Una vez se haya copiado, borramos dicho carácter y se sigue leyendo la cinta principal hasta llegar al final dejando el cabezal de la segunda quieto.

En este punto, se empieza a rebobinar la cinta secundaria. Por cada '1' leído se incluye otro en la cinta principal, va restando 1 en la segunda y sumándose a la primera. Cuando se haya rebobinado por completo la cinta, tendremos la suma realizada en la otra. El último paso es dejar el cabezal en el primer símbolo más a la izquierda.

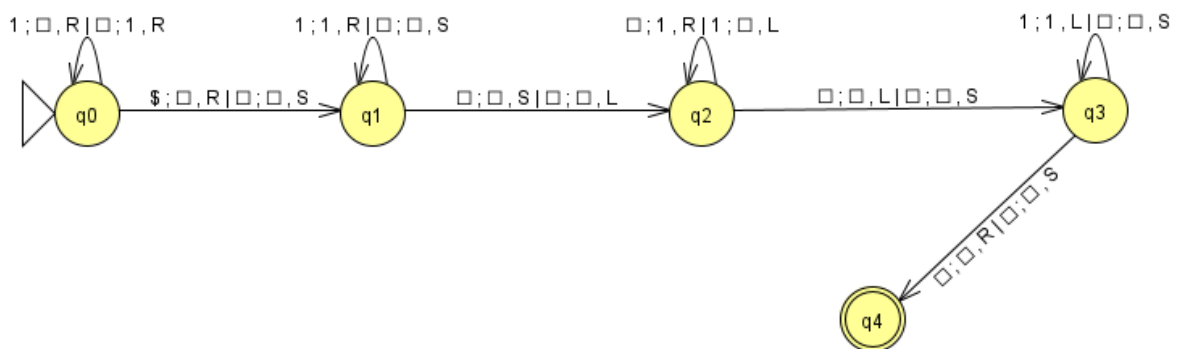


Figura 5. Diseño MT D de 2 cintas para realizar la suma de números enteros en base 1.

ii. Estudio Empírico

Una vez está implementado se pasa a probar su complejidad con una tanda de pruebas variadas para diferentes sumas, que van incrementando el tamaño de la entrada.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
1\$	x=1, y=0, n=2	7
11\$1	x=2, y=1, n=4	13
1\$1111	x=1, y=4, n=6	15
1111\$111	x=4, y=3, n=8	22
11111\$1111	x=5, y=4, n=10	27
1111\$1111111	x=4, y=7, n=12	30

Tabla 14. Estudio empírico del número de pasos según el tamaño de entrada para la MT determinista de dos cintas que suma dos enteros.

Se aprecia que el número de pasos requeridos según aumenta la entrada crece lentamente, pero antes de obtener la $T(n)$ vamos a ver en detalle los varios posibles casos para un mismo tamaño de entrada.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
\$111111111111	x=0, y=12, n=13	28
111111\$111111	x=6, y=6, n=13	34
111111111111\$	x=12, y=0, n=13	40

Tabla 15. Comparación entre tamaño números para la MT determinista de dos cintas que suman dos enteros.

Siguiendo los casos anteriores y la explicación del diseño, se puede observar que el peor caso se da cuando el sumando izquierdo tiene como longitud $\ln-1$ debido a que se debe copiar esta misma cadena en la otra cinta.

iii. Estudio Analítico

N	1	3	5	7	9	11	13
Pasos	4	10	16	22	28	34	40
Dif. 1		6	6	6	6	6	6
Dif. 2			0	0	0	0	0

Tabla 16. Diferencias finitas de la MT determinista de dos cintas que suman dos enteros.

Como ya se podía intuir en el estudio empírico por su lento crecimiento, la ecuación $T(n)$ que corresponde a este caso es de orden 1, es decir, de la forma $T(n) = xn + y$. Empleando los casos calculados resolvemos dicha ecuación:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 10 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \end{array}$$

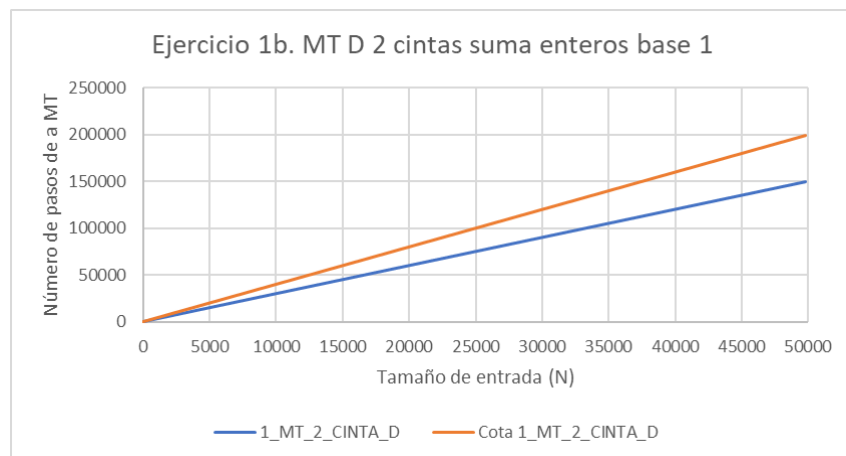
$$T(n) = 3n + 1$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	3	5	7	9	11	13
Resultado empírico	4	10	16	22	28	34
$T(n)$	4	10	16	22	28	34

Tabla 17. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT determinista de dos cintas que suman dos enteros.

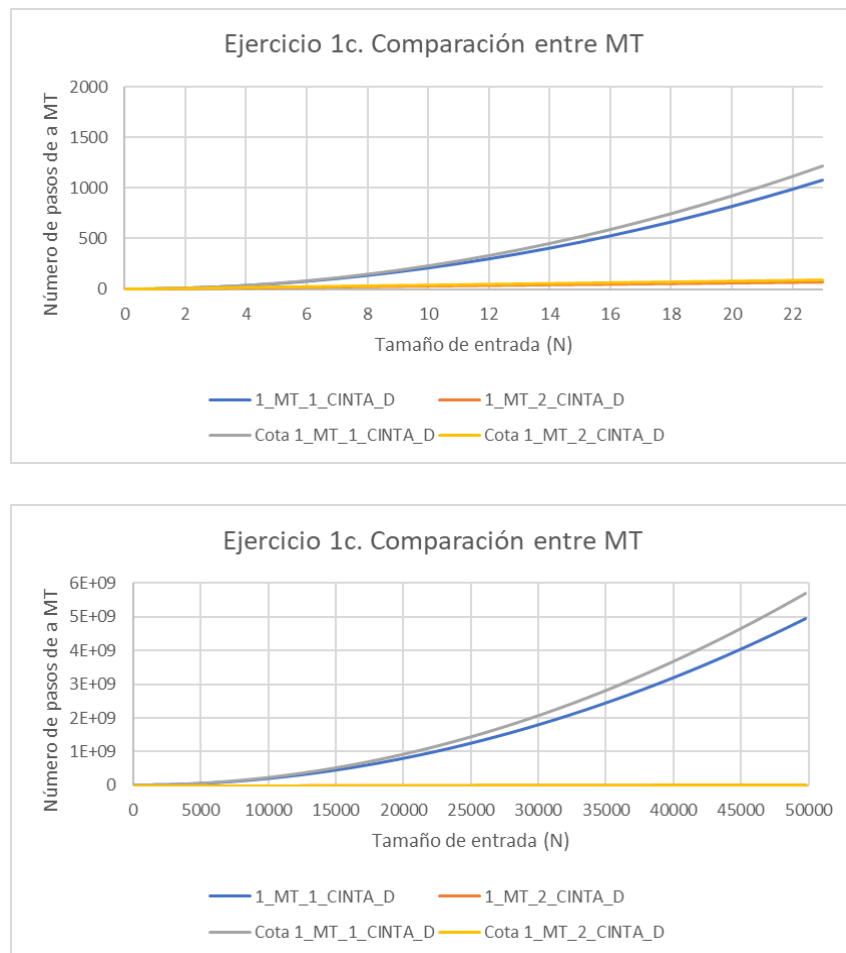
En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(n)$, que queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 31$ y que $g(n) = n$, y como se puede ver con $c = 4$ se tiene lo siguiente:



Gráfica 5. Cota superior asintótica de la MT D de 2 cintas Ejercicio 1.

c. Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas

Con una cinta obtenemos el siguiente $T_1(n) = 2n^2 + n + 1$ mientras que con dos cintas obtenemos $T_2(n) = 3n + 1$. Si se dibujan estos tiempos se puede ver claramente la mejora obtenida, ya que al ser el primer polinomio de un grado mayor, el crecimiento del tiempo con respecto al tamaño de entrada es también mayor, en la siguiente imagen se puede observar de forma clara la mejora:



Gráfica 6. Demostración de mejora al utilizar la MT de dos cintas frente a la MT de una cinta en la suma de enteros en base 1.

4. Ejercicio 2. Suma de enteros en base 2

a. MT Determinista de una cinta

i. Diseño

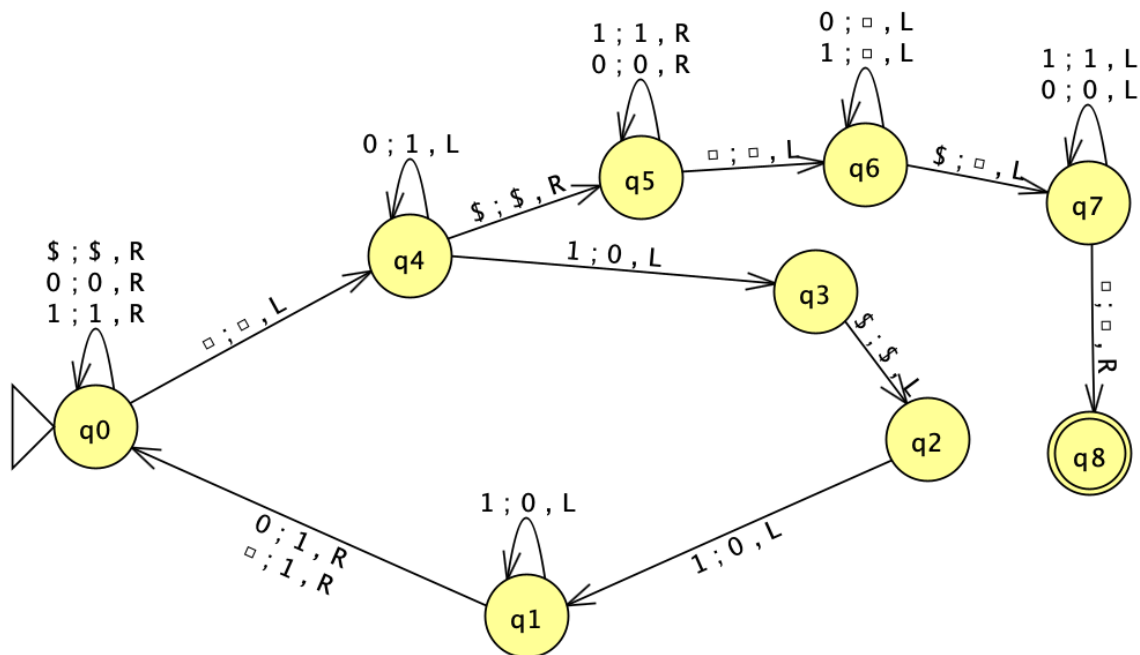


Figura 6. Diseño MT D de 1 cinta para realizar la suma de números enteros en base 2.

La máquina de Turing diseñada, con una sola cinta, para este problema emplea la aritmética de Peano por medio de las operaciones de succ y pred para la suma. Restando sucesivamente uno al sumando derecho para sumárselo al izquierdo, controlando el acarreo binario. Esto requiere en la suma de ver en qué posición se podrá poner el uno, buscando un cero, mientras se cambian los valores por su opuesto y en la resta buscar el uno más a la derecha para poner un cero y todo unos a la derecha.

ii. Estudio Empírico

Se estudia una serie de casos modelo para ver cómo se comporta con diferentes casos:

Input	Tamaño de entrada	Pasos
1\$	$x=1, y=0, n=2$	8
10\$1	$x=2, y=1, n=4$	20
1\$1000	$x=1, y=8, n=6$	137
1010\$100	$x=10, y=4, n=8$	72
10110\$1101	$x=22, y=13, n=10$	215
1000\$1010101	$x=8, y=85, n=12$	1737

Tabla 18. Estudio empírico del número de pasos según el tamaño de entrada para la MT determinista que suma enteros en base 2.

Se puede observar que hay grandes saltos en el número de pasos según avanza el tamaño, sobre todo cuando se amplía el sumando derecho. Pasamos a estudiar este caso, realizando una prueba para un tamaño fijo, pero diferente distribución de sumandos.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
\$101010101010	$x=0, y=2730, n=13$	81954
101010\$101010	$x=42, y=42, n=13$	799
101010101010\$	$x=2730, y=0, n=13$	30

Tabla 19. Estudio empírico del número de pasos para tamaño $n=13$ variando el tamaño de los números para la MT determinista que suma enteros en base 2.

En esta tabla se puede ver empíricamente el peor resultado se encuentra en una entrada de tamaño n cuando el segundo número es el más grande, está compuesto por unos. Esto es por el recorrido que se hace, restando al número izquierdo y sumándose al derecho, por tanto, se ejecutan más transiciones.

Para realizar estas pruebas tan costosas se implementa el comportamiento de la MT en un programa de Python que cuenta las transiciones, desarrollado por nosotros mismos, que se incluye en la carpeta de los diseños.

iii. Estudio Analítico

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T(N)	6	17	42	99	228	517	1158	2567
Dif. 1 A: T(N)-T(N-1)		11	25	57	129	289	641	1409
Dif. 2 B: A(N)-A(N-1)			14	$B(N-1)*2+4=32$	$B(N-1)*2+8=72$	$B(N-1)*2+16=160$	$B(N-1)*2+32=352$	$B(N-1)*2+64=768$
Dif. 3 C: B(N)-B(N-1)				18	$C(N-1)*2+4=40$	$C(N-1)*2+8=88$	$C(N-1)*2+16=192$	$C(N-1)*2+32=416$
Dif. 4 D: C(N)-C(N-1)					22	$D(N-1)*2+4=48$	$D(N-1)*2+8=104$	$D(N-1)*2+16=224$
Dif. 5 E: D(N)-D(N-1)						26	$E(N-1)*2+4=56$	$E(N-1)*2+8=120$

Tabla 20. Diferencias finitas de la MT determinista de una cinta que suman dos enteros en base 2.

Al realizar las diferencias finitas podemos ver que si dividimos n entre $n+1$ encontramos que la base es 2, pero la base no es exacta, esto sucede porque además de nuestra base tenemos un polinomio acompañante. Se puede entonces intuir que el polinomio $T(n)$ tiene la forma $b^n * (an + b) + cn + d$, ya que el polinomio acompañante también varía en las diferencias finitas y nunca llega a ser constante.

Sabiendo que el polinomio tiene la forma $2^n * (an + b) + cn + d$, se procede a resolver el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 17 \\ 24 & 8 & 3 & 1 & 42 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 99 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 11 \\ 22 & 6 & 2 & 0 & 36 \\ 62 & 14 & 3 & 0 & 93 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 11 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 14 \\ 44 & 8 & 0 & 0 & 60 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{array}$$

De esta manera $T(n) = 2^n * (n + 2) + n - 1$, con una complejidad de $O(n * 2^n)$.

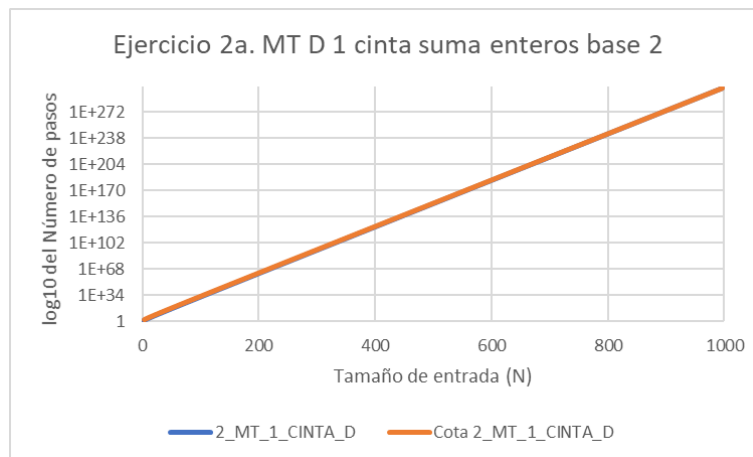
Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	5	6	7	8	9	10
Resultado empírico	228	517	1158	2567	5640	12297
T(n)	228	517	1158	2567	5640	12297

Tabla 21. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT determinista de una cinta que suman dos enteros en base 2.

Para la cota asintótica superior utilizamos el $T(n)$ y se estima cogido los términos de mayor grado que será $O(2^n * n)$, se comprueba que es así con la constante $c = 3$, ya que:

$$T(n) = 2 * (2^n * n) + n - 1 < 3 * (2^n * n); \forall n \geq 10$$



Gráfica 7. Cota superior asintótica de la MT D de 1 cinta Ejercicio 2.

En la gráfica se usa una escala logarítmica, por lo que al obtener una recta sabemos que la complejidad es exponencial.

b. MT Determinista de dos cintas

i. Diseño

El funcionamiento de esta alternativa es muy similar al anterior, en este caso al disponer de dos cintas copiaremos el primer sumando en la segunda cinta. Tras realizar esta copia se posiciona el puntero de la segunda cinta lo más a la derecha del número e irá sucesivamente restando uno en la segunda cinta y sumádoselo al de la primera. Esto será así hasta que el segundo número sea todo ceros, por lo que habrá terminado y limpiaremos la segunda cinta a la vez que colocamos el cabezal de la primera cinta en el primer carácter por la izquierda.

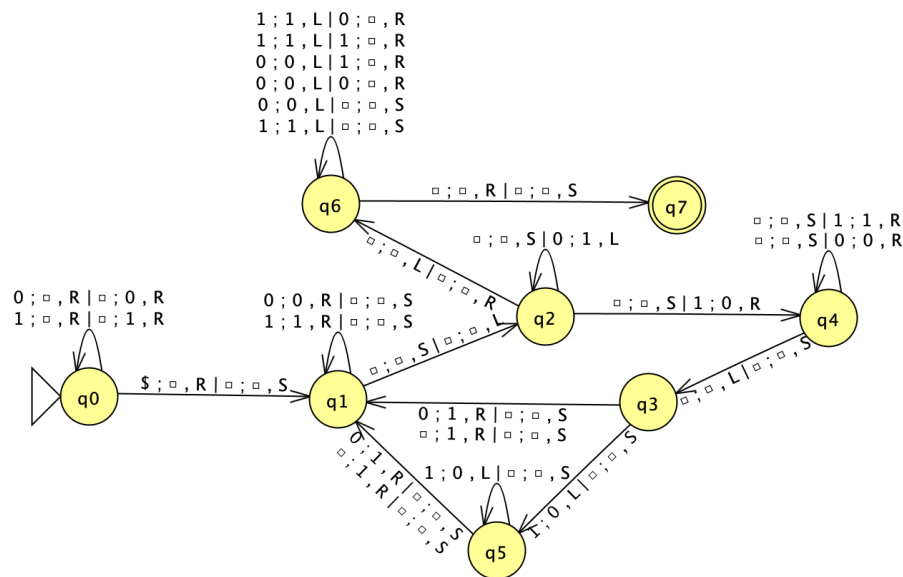


Figura 7. Diseño MT D de 2 cintas para realizar la suma de números enteros en base 2.

ii. Estudio empírico

Input	Tamaño de entrada	Pasos
1\$	$x=1, y=0, n=2$	11
10\$1	$x=2, y=1, n=4$	23
1\$1000	$x=1, y=8, n=6$	18
1010\$100	$x=10, y=4, n=8$	91
10110\$1101	$x=22, y=13, n=10$	194
1000\$1010101	$x=8, y=85, n=12$	86

Tabla 22. Estudio empírico del número de pasos según tamaño de entrada para la MT determinista de dos cintas que suma enteros en base 2.

Una vez realizada estas pruebas se puede ver que hay una gran diferencia entre las pruebas que tiene un valor más alto en un lado que en el otro. Además, crece muy rápido, pero ahora buscaremos cuáles son aquellos casos que provocan tal coste.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
\$101010101010	x=0, y=2730, n=13	28
101010\$101010	x=42, y=42, n=13	359
101010101010\$	x=2730, y=0, n=13	21856

Tabla 23. Estudio empírico del número de pasos para tamaño $n=13$ variando el tamaño de los números para la MT determinista de dos cintas que suma enteros en base 2.

El peor caso es una cadena de tamaño n en la que uno de los sumandos sea de longitud $n-1$, además de estar formada por completo por unos. Como pasaba en la anterior MT, el peor caso viene dado por tener que restar al número más grande, por lo que tiene que realizarlo más veces hasta llegar al 0.

iii. Estudio analítico

Ahora pasamos a ver cuál es la cota superior asintótica mediante su estudio con diferencias finitas.

N	1	3	5	7	9	11	13
Pasos	4	26	120	502	2036	8178	32752
Dif. 1		22	94	382	1534	6142	24574
Dif. 2			72	288	1152	4608	18432
Div. 1				4	4	4	4
Dif. 3					0	0	0

Tabla 24. Diferencias finitas de la MT determinista de dos cintas que suman dos enteros en base 2.

En esta tabla se van haciendo las diferencias, pero llegada la fila Div. 1 vemos una regularidad entre los datos, el siguiente es 4 veces el previo, por lo que dividimos en lugar de restar. Esto nos indica que el polinomio que lo representa tiene un término exponencial de base 2. Se pone 2 en lugar de 4, dado que los pasos van de dos en dos.

El resto de la ecuación $T(n)$ viene dado por un polinomio de orden 1, dado que es la última fila antes de que se produzca la regularización de las diferencias de los pasos, momento en el que se ha eliminado la influencia de este polinomio sobre los resultados.

Uniendo estas dos observaciones tenemos que la ecuación tiene la forma: $T(n) = x2^n + yn + z$. Empleando las n y pasos conocidos resolveremos esta ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 1 & 26 \\ 32 & 5 & 1 & 120 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & 22 \\ 18 & 0 & 0 & 72 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{array}$$

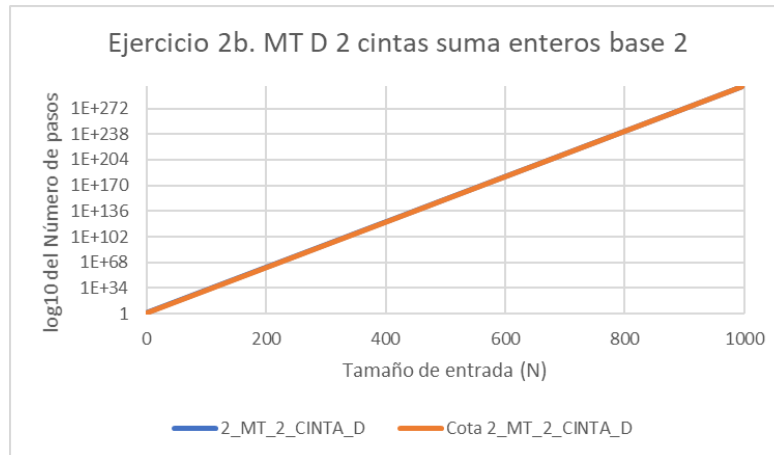
$$T(n) = 4 * 2^n - n - 3$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	3	5	7	9	11	13
Resultado empírico	26	120	502	2036	8178	32752
$T(n)$	26	120	502	2036	8178	32752

Tabla 25. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT determinista de dos cintas que suman dos enteros en base 2.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(2^n)$. Esta suposición queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 4083$ y que $g(n) = 2^n$, y se puede verificar que con $c = 4$ cumplirá esta condición, como se puede ver en la gráfica (se aplica logaritmo sobre el número de pasos para mejor visibilidad):

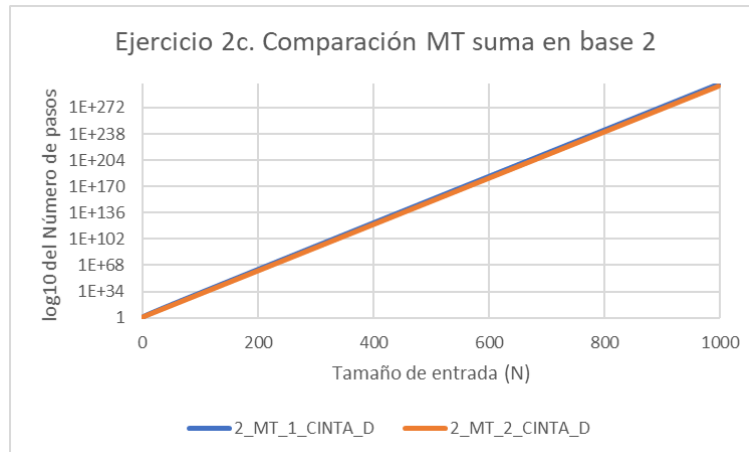


Gráfica 8. Cota superior asintótica de la MT D de 2 cintas Ejercicio 2.

Al analizar la gráfica podemos observar que obtenemos una recta, esto se debe a que la complejidad es exponencial y al utilizar una escala logarítmica obtiene este aspecto.

c. Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas

La principal diferencia que se puede ver entre ambas máquinas de Turing viene de que la de 1 cinta debe desplazarse sobre los 0 a la izquierda del segundo sumando, lo que ocurre numerosas veces para tamaños de entrada superiores. Sin embargo, la de 2 cintas al tener una copia del otro sumando en la otra cinta no tendrá que pasar por esos 0 para llegar hasta el otro sumando, desplazando la otra cinta directamente.



Gráfica 9. Comparación del número de pasos para las MT usadas en el ejercicio 2.

Gráficamente, no se ve una gran diferencia, pues ambas son exponenciales, pero $O(n2^n)$ se mantiene algo superior en todo momento, es por eso que en este caso no se incluyen ambas cotas asintóticas superiores. Si las comparamos más de cerca vemos que la mejora en número de pasos es sustancial, puesto que si quitamos la parte exponencial de ambas ecuaciones, la de una cinta aumenta linealmente, mientras la otra va reduciendo linealmente el valor que produce la exponencial, aunque mucho más lenta de lo que esta crece.

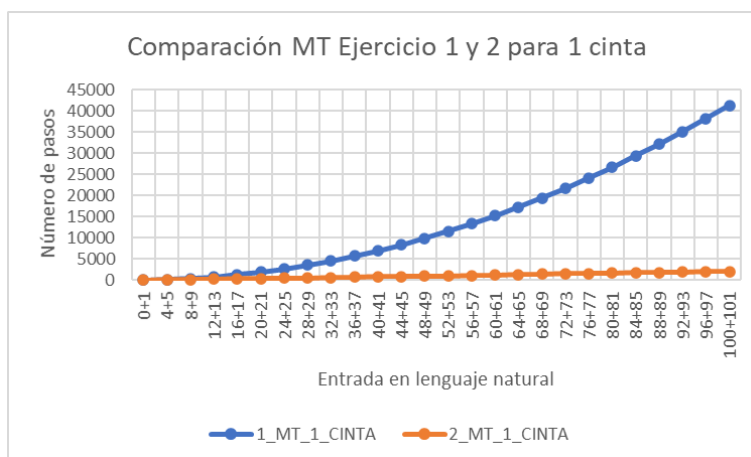
5. Ejercicio 3. Comparativa de los Ejercicios 1 y 2

a. Determinar la eficiencia de cada algoritmo

A continuación, se muestran los resultados de realizar un set de sumas en las MT de los ejercicios 1 y 2. Las diferencias mostradas en estas gráficas serán estudiadas y explicadas en los apartados posteriores.

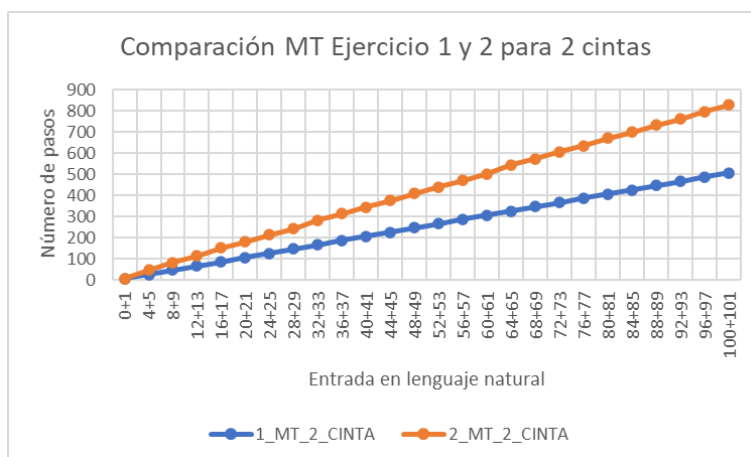
ENTRADA	N_1	N_2	1_MT_1_CINTA	2_MT_1_CINTA	1_MT_2_CINTA	2_MT_2_CINTA
0+1	2	2	11	17	6	6
4+5	10	7	127	83	26	47
8+9	18	9	371	155	46	83
12+13	26	9	743	211	66	113
16+17	34	11	1243	307	86	151
20+21	42	11	1871	371	106	181
24+25	50	11	2627	435	126	213
28+29	58	11	3511	499	146	243
32+33	66	13	4523	635	166	283
36+37	74	13	5663	707	186	313
40+41	82	13	6931	779	206	345
44+45	90	13	8327	851	226	375
48+49	98	13	9851	923	246	409
52+53	106	13	11503	995	266	439
56+57	114	13	13283	1067	286	471
60+61	122	13	15191	1139	306	501
64+65	130	15	17227	1347	326	543
68+69	138	15	19391	1427	346	573
72+73	146	15	21683	1507	366	605
76+77	154	15	24103	1587	386	635
80+81	162	15	26651	1667	406	669
84+85	170	15	29327	1747	426	699
88+89	178	15	32131	1827	446	731
92+93	186	15	35063	1907	466	761
96+97	194	15	38123	1987	486	797
100+101	202	15	41311	2067	506	827

Tabla 26. Comparación de eficiencia de las MT D de 1 y 2 cintas de los Ejercicios 1 y 2 con entrada en formato lenguaje natural.



Gráfica 10. Comparación del número de pasos para las MT de una cinta usadas en los ejercicios 1 y 2.

Tanto para las MT de 1 cinta como para las de 2 se han utilizado sumas sucesivas de la forma que se muestran en la tabla, de esta manera podemos ver la progresión que siguen los pasos de una manera más detallada. A pesar de no seguir el mismo N por la diferencia de bases en la representación de los valores, se cubre un amplio rango de estas y los resultados son bastante ilustrativos para ver la distribución que siguen y analizar su diferencia. En el Excel adjunto se ven algunas sumas intermedias extras que se han suprimido de esta representación.



Gráfica 11. Comparación del número de pasos para las MT multicinta utilizadas en los ejercicios 1 y 2.

b. ¿Por qué la diferencia de complejidades?

La diferencia entre complejidades se puede observar principalmente entre las máquinas de una cinta y dos cintas. El hecho de poder usar una máquina multicinta permite un decremento importante en la complejidad de esta. La manera en la que se ha usado ha sido en la de almacenar un sumando en la cinta secundaria, para así disminuir el número de transiciones necesarias. En las máquinas de una sola cinta, por tanto, es necesario el ir y volver entre sumandos en cada iteración para poder hacer la suma.

c. ¿Cómo se interpretan las diferencias en complejidad y en eficiencia?

Las diferencias entre complejidad significan que las máquinas multicinta son mejores para evitar una complejidad alta. Para la complejidad en eficiencia es vital fijarse en las gráficas.

En la primera de ella vemos como la suma en base 1 es bastante menos eficiente que la suma en base 2. Esto principalmente se debe al uso de la base binaria en el segundo ejercicio. Esto hace que números enormemente largos en base uno sean de menor longitud en base dos, lo que implica que el número de transiciones entre estados también lo será.

En cuanto a la segunda gráfica, se observan los resultados contrarios. Al introducir una cinta más y poder almacenar uno de los sumandos, los resultados parecen ser favorables para la suma en base 1. Esto se debe a que en dicha máquina las sumas resultan más sencillas de hacer, siendo el proceso simplemente el de eliminar un símbolo de una cinta para añadirlo en otra. En el caso de la suma binaria hay que tener en cuenta la función de acarreo, lo que conlleva ciertos pasos extra.

6. Ejercicio 4. Palabras de estructura triplicada

a. MT Multicinta Determinista

i. Diseño

El comportamiento de esta primera máquina de Turing se basa en la forma que tiene de tener la cadena, de manera que tendremos en la segunda cinta la cadena w que se irá recorriendo de un extremo a otro mientras se comprueba que cumple la condición, dado que la cadena primero se hace del derecho, luego del revés y por último otra vez al derecho. Cuando se trata de realizar esta comprobación y no se cumple para algún carácter, se va ampliando la cadena que se utiliza en la segunda cinta para buscar la coincidencia con una serie más larga.

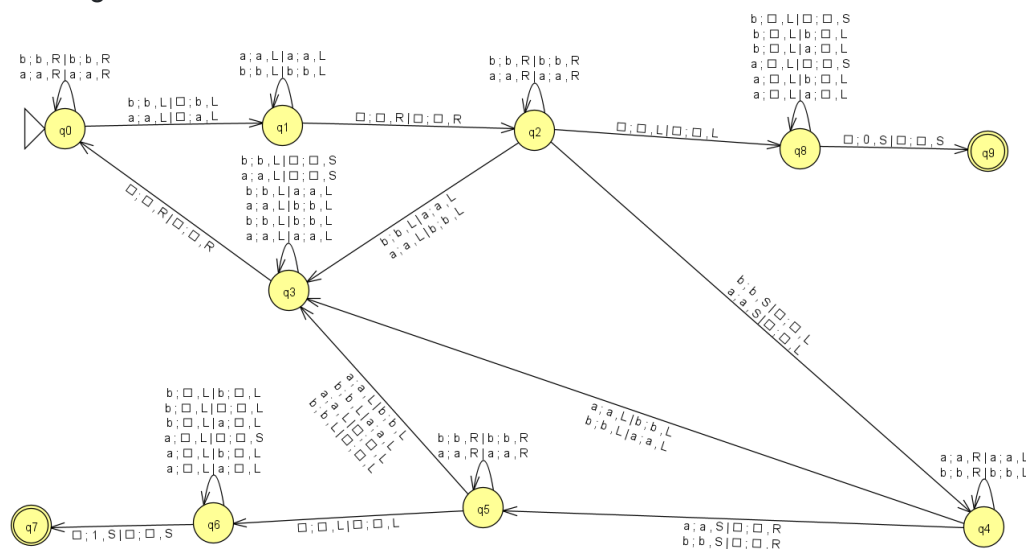


Figura 8. Diseño MT D de 2 cintas para reconocer palabras de estructura $ww^{-1}w$.

ii. Estudio Empírico

Una vez diseñada la MT pasamos a efectuar una serie de pruebas para ver cómo se comporta con diferentes tamaños de entrada para sacar algunas conclusiones iniciales.

Input	Tamaño de entrada	Pasos
a	n=0	6
aaa	n=3	12
abbaab	n=6	27
abaabaaba	n=9	46
abbabaaba	n=9	102
abaabaabb	n=9	174

Tabla 27. Estudio empírico para la MT multicinta determinista que acepta palabras de estructura triplicada.

Con la entrada de tamaño 9 podemos ver que el peor caso para este caso son aquellas cadenas x de longitud n que no cumplen la condición $x = ww^{-1}w$ en el último carácter, de manera que se ve obligado a copiarla entera en la segunda cinta mientras en las previas ha probado satisfactoriamente ww^{-1} .

iii. Estudio Analítico

N	3	9	15	21	27	33
Pasos	35	252	661	1262	2055	3040
Dif. 1		217	409	601	793	985
Dif. 2			192	192	192	192
Dif. 3				0	0	0

Tabla 28. Diferencias finitas para la MT multicinta determinista que acepta palabras de estructura triplicada.

Realizando las diferencias finitas obtenemos que el número de pasos sigue un polinomio de la forma $xn^2 + yn + z$. Resolvemos esta ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 35 \\ 81 & 9 & 1 & 252 \\ 225 & 15 & 1 & 661 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 35 \\ 72 & 6 & 0 & 217 \\ 216 & 12 & 0 & 626 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} -54 & 0 & 2 & -147 \\ 72 & 6 & 0 & 217 \\ 72 & 0 & 0 & 192 \end{array} \right); \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 144 & -216 \\ 0 & 6 & 0 & 25 \\ 72 & 0 & 0 & 192 \end{array} \right) \begin{array}{l} x = 192/72 = 8/3 \\ y = 25/6 \\ z = -216/144 = -3/2 \end{array}$$

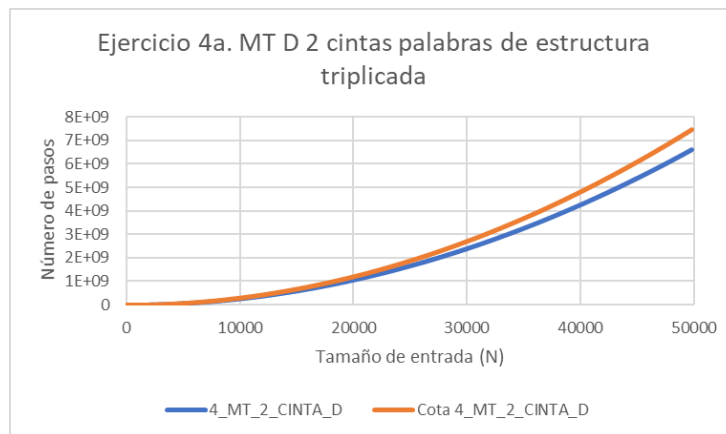
$$T(n) = 8/3n^2 + 25/6n - 3/2$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	3	9	15	21	27	33
Resultado empírico	35	252	661	1262	2055	3040
T(n)	35	252	661	1262	2055	3040

Tabla 29. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida para MT multicinta determinista que acepta palabras de estructura triplicada.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(n^2)$, que queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) \approx 307$ y que $g(n) = n^2$, y como se puede ver con $c = 3$ se tiene lo siguiente:



Gráfica 12. Cota superior asintótica de la MT D de 2 cintas Ejercicio 4.

b. Diseñar MT Multicinta No Determinista

i. Diseño

El diseño para esta máquina acaba siendo más simple que el anterior. En el primer estado se probarán todos los patrones de w posibles. Cuando se tenga el patrón correcto estará copiado en la segunda cinta y se pasará al estado 1. Verificará que lo que sigue en la cadena original es w^{-1} a partir de leer de derechas a izquierda la cadena secundaria. El último paso será, por tanto, el de verificar de nuevo w . Como se ha dicho anteriormente, la simpleza de este diseño recae en que no se debe sopesar qué conformará w , ya que la propia naturaleza de la MT hará que se prueben todas las posibilidades.

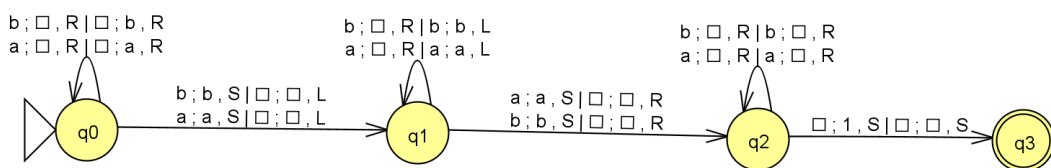


Figura 9. Diseño MTND de 2 cintas para reconocer palabras de estructura triplicada $(ww^{-1}w)$.

ii. Estudio Empírico

Input	Tamaño de entrada	Pasos
a	n=0	4
aaa	n=3	6
abbaab	n=6	9
abaabaaba	n=9	12
abbabaaba	n=9	12
abaabaabb	n=9	12

Tabla 30. Estudio empírico para la MT multicinta no determinista que acepta palabras de estructura triplicada.

Con estas pruebas observamos que el coste se mantiene bastante bajo e invariante ante entradas que cumplan o no la condición de aceptación.

En este caso el peor caso es cualquier cadena de longitud n , dado que siempre toma $n+3$ transiciones. Como se puede observar en la tabla, el número de pasos será siempre el de $n+3$ independientemente de que una palabra sea aceptada o no. Esto hace que el peor caso pase a ser cualquier entrada de la MT.

iii. Estudio Analítico

N	3	9	15	21	27	33
Pasos	6	12	18	24	30	36
Dif. 1		6	6	6	6	6
Dif. 2			0	0	0	0

Tabla 31. Diferencias finitas para la MT multicinta no determinista que acepta palabras de estructura triplicada.

Mediante la realización de las diferencias finitas podemos ver claramente que se adapta a un polinomio de la forma $xn + y$, aunque se podía ver claramente en el estudio empírico. Resolvemos dicha ecuación:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & 12 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array}$$

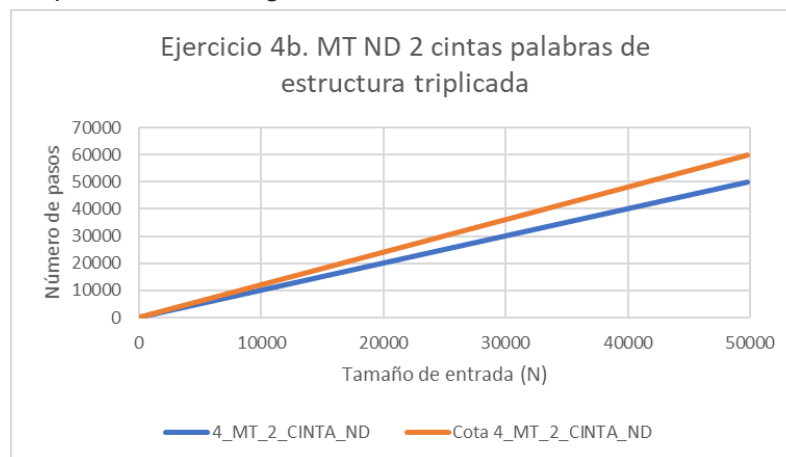
$$T(n) = n + 3$$

Para comprobar la estimación obtenida con la ecuación comparamos los resultados obtenidos manualmente con los resultados de la $T(n)$ obtenida:

N	3	9	15	21	27	33
Resultado empírico	6	12	18	24	30	36
$T(n)$	6	12	18	24	30	36

Tabla 32. Comparación entre el número de pasos obtenido empíricamente frente a los pasos obtenidos mediante la $T(n)$ obtenida, la MT multicinta no determinista que acepta palabras de estructura triplicada.

En cuanto a la cota superior asintótica, por la forma de $T(n)$, se puede ver que será $O(n)$, que queda comprobada con la existencia de una constante c tal que $c * g(n) \geq T(n_0)$, sabiendo que $n_0 = 10$, $T(n_0) = 13$ y que $g(n) = n$, y con $c = 1,2$ se cumplirá esta condición como se puede ver en la gráfica:



Gráfica 13. Cota superior asintótica de la MT ND de 2 cintas Ejercicio 4.

7. Conclusión

El presente trabajo ha supuesto un gran avance para la resolución de problemas utilizando diferentes aplicaciones de MT junto con su evaluación en eficacia y eficiencia. Se ha podido emplear el conocimiento adquirido durante las sesiones de teoría y muchas de las dudas han sido resueltas en las sesiones de práctica.

Por otro lado, conceptos como la cota superior asintótica han sido revisados por los integrantes del grupo, lo que ha permitido que el conocimiento sobre el uso de esta cota y su significado sea mucho más claro. La utilización de las diferencias finitas para el cálculo de la complejidad de la MT y el uso de máquinas multicintas también ha sido de gran utilidad. En definitiva, ha sido un proyecto que ha permitido al grupo extender su conocimiento sobre las MT, sus aplicaciones y evaluaciones.