ALGEBRA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

1. INTRODUCCION

Los números complejos fueron introducidos en la matemática por Cauchy en 1821, aunque anteriormente Gauss en 1799 hizo una representación de magnitudes complejas en un plano para demostrar el teorema fundamental del Algebra. Los números complejos aparecen en matemáticas cuando se quiere resolver una ecuación de la forma:

$$x^2 + 1 = 0$$

no existe ningún número real que elevado al cuadrado cumpla la ecuación anterior. La solución de la ecuación anterior viene expresada por la cantidad imaginaria j, donde se cumple

$$j = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1; \quad j^3 = -j; \quad j^4 = 1$$

Debemos destacar que los matemáticos utilizan el símbolo "i" para la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ pero en la ingeniería eléctrica se emplea mejor el símbolo j, ya que la letra i está reservada para expresar la intensidad de la corriente eléctrica.

Se denomina número complejo a los números de la forma

$$z = a + j\,b$$

siendo a y b números reales, y j la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$

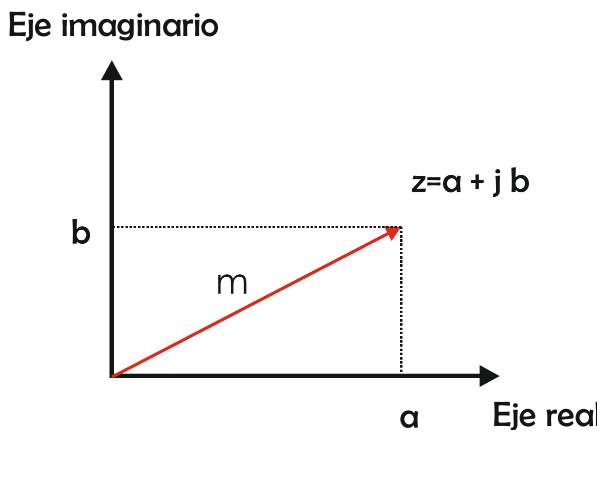
El número complejo z tiene una componente imaginaria b, de tal modo que se puede escribir

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

$$a = \mathrm{Re}[z]; \;\; b = \mathrm{Im}[z]$$

En las expresiones anteriores: Re significa *"parte real de ... "* e Im significa *"parte imaginaria de ... ".* Es importante darse cuenta que la parte imaginaria de z es b y no jb. En otras palabras, la j en jb, simplemente identifica a b como parte imaginaria del complejo z. La expresión $z = a + j\ b$ se conoce como representación binómica o rectangular de un número complejo, que admite una representación en un plano de coordenadas especiales, denominado plano complejo o de Gauss.

El eje de abscisas se denomina eje real mientras que el eje de ordenadas se conoce con el nombre de eje imaginario. Las coordenadas (a,b) define de este modo el complejo z; o de otro modo la línea que une el origen hasta el punto P representado por el par (a,b) representa el complejo z.



Otro procedimiento para representar el número complejo z, es por su módulo m o distancia de su afijo P al origen de coordenadas y

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

por su argumento a o ángulo formado por el vector asociado OP y el eje real. De la figura obtenemos las siguientes relaciones

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\;\; \theta = arctg(b/a)$$

O también

$$a = m \;\cos\theta;\;\; b = m \;sen\theta$$

la representación del número complejo en la forma

$$z = m\angle\theta$$

se denomina *forma polar o módulo-argumenta*l. El módulo m se expresa también

$$m = |z|$$

las ecuaciones

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\;\; \theta = arctg(b/a)\,;\quad a = m \;\cos\theta;\;\; b = m \;sen\theta$$

permiten pasar de una representación binómica a polar y viceversa. Normalmente estos dos tipos de representaciones son las que se utilizan con más frecuencia en los cálculos prácticos. Sin embargo en los desarrollos analíticos en los que intervienen los números complejos se emplea más la representación exponencial. Recuérdese de un Curso de Análisis Matemático que el desarrollo en serie de las funciones e^x, cos x y sen x es de la forma

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots;\, senx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\ldots$$

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

en las dos últimas expresiones x debe estar expresado en radianes. Si en el desarrollo en serie de e^x, se sustituye x por $j\theta$, resulta:

$$e^{j\theta}=\left(1+\frac{j\theta}{1!}+\frac{j^2\theta^2}{2!}+\frac{j^3\theta^3}{3!}...\right)$$

y teniendo en cuenta los valores de las potencias de j se podrá escribir

$$e^{j\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-...\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}...\right)$$

Es decir

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\ sen\theta$$

La relación anterior recibe el nombre de *fórmula de Euler.*

De acuerdo con la fórmula anterior $z=a+j\,b$, el número complejo si se tiene en cuenta $a=m\ \cos\theta;\ b=m\ sen\ \theta$ se podrá escribir así

$$z=a+j\ b=m\cos\theta+j\ m\ sen\theta=m\ e^{j\theta}=|z|e^{j\theta}$$

Que expresa la representación exponencial de un número complejo. En resumen

$z=a+j\ b\Rightarrow$ forma binómica

$z=m\angle\theta\Rightarrow$ forma polar

$z=m\ e^{j\theta}\Rightarrow$ forma exponencial

aunque desde un punto de vista riguroso, el argumento θ debería estar expresado en radiantes, es más útil emplear grados

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

sexagesimales para resolver problemas o ejercicios prácticos. Es conveniente que el lector practique cambios para pasar de una u otra forma de representación y tome la suficiente soltura, para evitar cometer errores en el estudio de los circuitos eléctricos. En la actualidad, con cualquier calculadora de bolsillo permite realizar éstos cambios de un modo directo, sin tener que fijarse en el cuadrante en el que se trabaja, pues lo determina directamente la calculadora. Existen unas teclas especiales R $\rightarrow$ P P$\rightarrow$ R que se emplean para pasar de rectangular a polar o de polar a rectangular, pudiendo trabajar en radianes o grados. Conviene que el lector compruebe este hecho en su calculadora. Para ejercitar su empleo puede comprobar las siguientes igualdades (argumento en grados sexagesimales)

Ejemplo:

$$3+4j=5\angle 53{,}13^{o};\text{-2-2j}=2{,}82\angle -135^{o};\text{-5+6j}=7{,}81\angle 129{,}8^{o}$$

Obsérvese que los grados se toman positivos en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativos en caso contrario, es decir, en el sentido horario.

Si se parte de un número complejo $z=a+j\ b=m\angle\theta=m\ e^{j\theta}$ se denomina número complejo conjugado del anterior, aquel que tiene la misma parte real y la imaginaria cambiada de signo (con el mismo valor). El conjugado de un número complejo representa un vector simétrico respecto del eje real, lo que equivale al mismo módulo y a un argumento cambiado de signo. El conjugado de z se escribe z* o $\overline{z}$ y se tiene:

$$\overline{z}\ =a-j\ b=m\angle-\theta=m\ e^{-j\theta}$$

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

2. ALGEBRA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

2.1 Operaciones básicas

Suma

La suma de dos números complejos tiene por parte real, la suma de las panes reales de los sumandos, y por parte imaginaria, la suma de las partes imaginarias. Si se parte de los números complejos.

$$z_1 = a_1 + j\ b_1;\ z_2 = a_2 + j\ b_2$$

La suma será igual

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j\ (b_1 + b_2)$$

Resta

La diferencia de dos números complejos, es otro número complejo que tiene por componente real la diferencia de las componentes reales y por componente imaginaria la diferencia de las componentes imaginarias. Para los complejos expresados en anteriormente resulta

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j\ (b_1 - b_2)$$

Producto

El producto de dos números complejos se obtiene multiplicando los binomios complejos como si fuesen algebraicos, y teniendo en cuenta los valores de las potencias de j se simplificará el resultado. El producto de los números complejos $z_1 = a_1 + j\ b_1;\ z_2 = a_2 + j\ b_2$ será igual a

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a_1 + j\ b_1\right)\cdot\left(a_2 + j\ b_2\right) = \left(a_1a_2 - b_1b_2\right) + j\left(b_1a_2 - a_1b_2\right)$$

Si los números están expresados en forma polar

$$z_1 = m_1\angle\theta_1 = m_1\cos\theta_1 + \ j\ m_1\ sen\theta_1\ = a_1 + j\ b_1$$

$$z_2 = m_2\angle\theta_2 = m_2\cos\theta_2 + \ j\ m_2\ sen\theta_2\ = a_2 + j\ b_2$$

Luego

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = {} & (m_1\ m_2\ \cos\ \theta_1\ \cos\ \theta_2 - \ m_1\ m_2\ sen\ \theta_1\ sen\ \theta_2) + \\ & j\ (m_1\ m_2\ sen\ \theta_1\ \cos\ \theta_2 + \ m_1\ m_2\ \cos\ \theta_1\ sen\ \theta_2) \end{aligned}$$

Es decir

$$z_1 \cdot z_2 = (m_1m_2)\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + j\ sen\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right] = m_1m_2\angle\left(\theta_1 + \theta_2\right)$$

Que indica que el producto de dos números complejos es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos. De un modo análogo si los números complejos están expresados en forma exponencial resultan

$$z_1 = m_1\ e^{j\theta_1};\ \ z_2 = m_2\ e^{j\theta_2};\ \ z_1 \cdot z_2 = m_1m_2e^{j\left(\theta_1+\theta_2\right)}$$

Cociente

Para obtener el cociente entre dos números complejos expresados en forma binómica, se multiplican ambos números por el conjugado del denominador y se simplifica el resultado

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j}=\frac{\left(a_1+b_1j\right)\left(a_2-b_2j\right)}{\left(a_2+b_2j\right)\left(a_2-b_2j\right)}$$

Que da lugar a

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\,j$$

Si los números complejos están expresados en forma polar, es fácil comprobar de un modo análogo al seguido en el caso del producto, que se obtiene un número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de argumentos. Así resultará

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{m_1\angle\theta_1}{m_2\angle\theta_2}=\frac{m_1}{m_2}\angle\left(\theta_1-\theta_2\right)$$

O en forma exponencial

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{m_1\ e^{j\theta_1}}{m_2\ e^{j\theta_2}}=\frac{m_1}{m_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

Potencias. Fórmula de De Moivre

Si $z=m\angle\theta=me^{j\theta}$ la potencia n-ésima se obtiene aplicando las reglas de la multiplicación dando lugar a

$$z^n=m^n\angle n\theta=m^ne^{jn\theta}$$

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

Que representa la fórmula de De Moivre e indica que la potencia n-ésima de un número complejo tiene por módulo la potencia n-ésima del módulo, y por argumento, el producto del exponente por el argumento de la base.

Raíces

La raíz n-ésima de un número complejo es otro número complejo cuya potencia n-ésima nos da el primero. Aplicando la definición anterior se puede comprobar que todo número complejo tiene n raíces n-simas distintas que tienen todas por módulo la raíz n-sima del módulo y por argumentos los n valores distintos que se

$$w = \sqrt[n]{z} = \rho\ e^{j\phi}; \quad \mathrm{z} = \mathrm{m}\ e^{j\theta}$$
$$\rho = \sqrt[n]{m}; \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Interpretación geométrica del operador “ j”

Si una parte de un número complejo $z = me^{j\theta} = m\angle\theta$ al multiplicar por j se obtiene

$$j\ z = e^{j\pi/2}\ me^{j\theta} = me^{j(\theta+\pi/2)} = m\angle(\theta + \pi/2)$$

Donde se ha tenido en cuenta que según la fórmula de Euler se cumple que $j = e^{j\pi/2}$

Si el complejo z se divide por j resulta

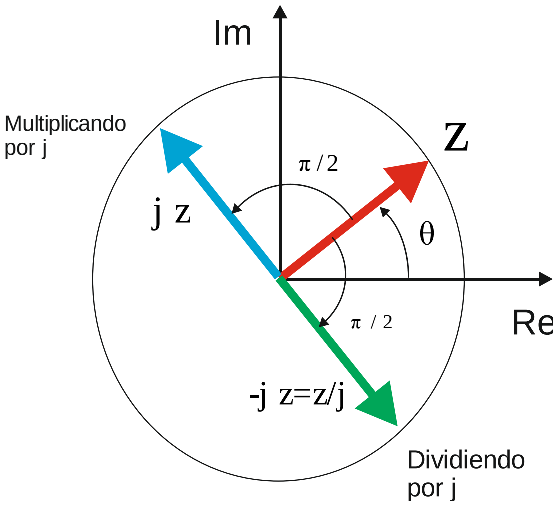
$$\frac{1}{j}\ z = e^{-j\pi/2}\ m\ e^{j\theta} = m\ e^{j(\theta-\pi/2)} = m\angle\ (\theta - \pi/2)$$

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

En la figura se han representado los tres números complejos z, jz ,

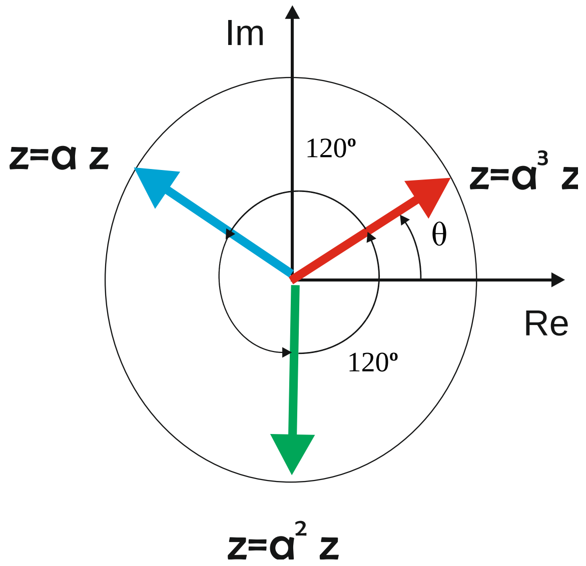
$$\frac{1}{jz} = -jz$$

Vemos que la multiplicación de un número complejo por el operador imaginario j, corresponde a una rotación del vector complejo un ángulo de 90º en sentido positivo (antihorario), mientras que la división por j corresponde a una rotación de 90° en sentido negativo (horario).



De una forma más general, la multiplicación de un "vector" por un número complejo de módulo unidad y fase α (es decir $e^{j\alpha}$) corresponde a la rotación del vector un ángulo α en sentido positivo o negativo según cual sea el signo de α . Por ejemplo en circuitos eléctricos trifásicos es útil el empleo del operador $a = e^{j2\pi/3} = 1\angle 120^{\circ}$. Al multiplicar un complejo $z = m\, e^{j\theta}$ por el operador a , se convierte en $m\angle(\theta + 120^{\circ})$ que corresponde a una rotación positiva de 120°. En la figura se muestra los complejos:
z; a z; a^2 z; a^3 z.

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es



Propiedades de los operadores “Re” e “Im”

Los operadores “Re” (parte real de…) e “Im” (parte imaginaria de…) tienen las propiedades siguientes

a)Distributiva:

$$\mathrm{Re}[z_1+z_2]=\mathrm{Re}[z_1]+\mathrm{Re}[z_2]$$

$$\mathrm{Im}[z_1+z_2]=\mathrm{Im}[z_1]+\mathrm{Im}[z_2]$$

b) Conmutativa respecto a un factor real k:

$$\mathrm{Re}[k\ z_1]=k\,\mathrm{Re}[z_1]$$

$$\mathrm{Im}[k\ z_1]=k\,\mathrm{Im}[z_1]$$

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es

c) No es conmutativa con respecto a un número complejo:

$$\mathrm{Re}[z_1\, z_2] \neq z_1\, \mathrm{Re}[z_2]$$

$$\mathrm{Im}[z_1\, z_2] \neq z_1\, \mathrm{Im}[z_2]$$

d) Conmutativa respecto de la derivación (z_1=f(x)):

$$\mathrm{Re}\left[\frac{dz_1}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{Re}\left(z_1\right)\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{dz_1}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{Im}\left(z_1\right)\right]$$

e)Conmutativa respecto de la integración:

$$\mathrm{Re}\left[\int z_1\, dx\right] = \int\left[\mathrm{Re}\left(z_1\right)\right]\, dx$$

$$\mathrm{Im}\left[\int z_1\, dx\right] = \int\left[\mathrm{Im}\left(z_1\right)\right]\, dx$$

las propiedades anteriores se pueden demostrar fácilmente y se dejan como ejercicio al alumno.

3. PROPIEDADES DE LA FUNCION CONJUGADA DE UN COMPLEJO

Como se ha indicado con anterioridad si se parte de un complejo z

$$z = a + j\ b = m\angle\theta = m\ e^{j\theta}$$

el conjugado de z, que se especifica como $\overline{z}$ es igual a

$$\overline{z} = a - j\ b = m\angle -\theta = m\ e^{-j\theta}$$

a) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}[z] = 2a$

b) $z \cdot \overline{z} = m\angle\theta \ \cdot \ m\angle -\theta = m^2 = |z|^2 = a^2 + b^2$

c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

d) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

f) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Prof. Ángel de Andrea González. aandrea@fis.uc3m.es