# Programación Lineal

Carlos Linares López

Grupo de Planificación y Aprendizaje (PLG)
Departamento de Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid

19 de septiembre de 2013

# Forma canónica

**Definición 1** *Un problema de programación lineal está en forma canónica si:*

- *El objetivo es de la forma de maximización*
- *Todas las restricciones son de desigualdad del tipo* $\leq$
- *Todas las variables de decisión son no negativas*

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ & & & & \ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

donde $x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$

# Forma canónica

Algebraicamente:

$$\begin{aligned} \text{máx}\, z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{A}_{m\times n}$ es la *matriz de coeficientes tecnológicos* de $m$ desigualdades con *$n$ variables de decisión*; $\mathbf{x}_{n\times 1}$ es el vector columna de *variables de decisión*; $\mathbf{b}_{m\times 1}$ es el vector de *recursos* y $\mathbf{c}_{n\times 1}$ es el vector de *costes* o *beneficios*

# Transformaciones

- Un problema de *minimización* es equivalente a un problema de *maximización* cambiando el signo de la función objetivo:

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ equivale a } \max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- Equivalentemente, es posible cambiar el sentido de una desigualdad multiplicando ambos miembros por -1

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \text{ equivale a } -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i$$

# Solución grafica

1. Representar el problema en forma canónica (aunque no es estrictamente necesario)
2. Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas donde cada eje representa una variable de decisión
3. Representar todas las restricciones del problema como regiones (que pudieran ser no acotadas)
4. La intersección de todas las regiones es la *región factible* o *espacio de soluciones* $F$
5. Evaluar la función objetivo en los puntos extremos y escoger alguno que maximice la función objetivo

# Ejemplo

Resolver gráficamente el programa lineal:

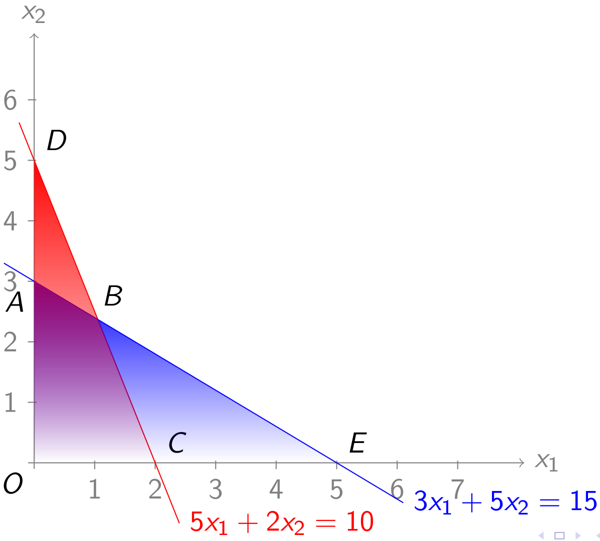
$$
\begin{array}{rcrcr}
\multicolumn{5}{c}{\min z = -2x_1 - x_2} \\
5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
-3x_1 & - & 5x_2 & \geq & -15 \\
\multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

# Ejemplo

El programa lineal anterior se representa en forma canónica como sigue:

$$\begin{array}{rcrcr} & & \max z = 2x_1 + x_2 & & \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

# Ejemplo



# Ejemplo

La región factible está delimitada por $A(0,3)$, $B(20/19, 45/19)$, $C(2,0)$ y $O(0,0)$
Evaluando la función objetiva en estos puntos extremos resulta:

$$\begin{array}{lclcl} z_O & = & c^T(0,0) & = & 0 \\ z_A & = & c^T(0,3) & = & 3 \\ z_B & = & c^T(20/19, 45/19) & = & 85/19 \\ z_C & = & c^T(2,0) & = & 4 \end{array}$$

donde $c^T = (2,1)$ y el valor máximo se observa en $B$, que es la solución del problema

# Sóluciones óptimas alternativas

- Un problema con solución óptima no única se dice que tiene soluciones óptimas alternativas
- Se detecta con el método de resolución gráfica si la curva de *isobeneficio*/*isocoste* es paralela o idéntica a una de las restricciones cuyos puntos extremos son soluciones óptimas

# Ejemplo

Cambiando la función objetivo del problema anterior:

$$\begin{array}{c} \max z = 6x_1 + 10x_2 \\ \begin{array}{ccccc} 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \end{array} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Obviamente, la nueva función z coincide con la segunda restricción y por lo tanto, los infinitos puntos en el segmento $\overline{AB}$ son soluciones óptimas

# Problemas infactibles

- Un problema es infactible si y sólo si la región de soluciones factibles es vacía: $F = \varnothing$

# Ejemplo

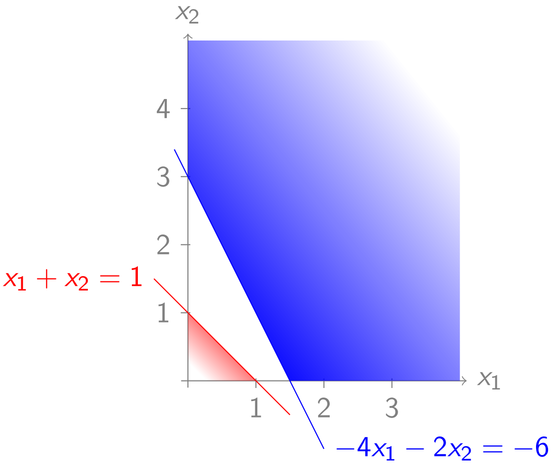
Considérese el problema:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{máx}\, z = x_1 + x_2 & & \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

que en forma canónica se expresa como sigue:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{máx}\, z = x_1 + x_2 & & \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
-4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -6 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

# Ejemplo



# Consideraciones

- En realidad, no es necesario expresar el problema en forma canónica
- Sin embargo, sólo vale para aquellos casos con muy pocas variables de decisión (a lo sumo, 3)

# Forma estándar

**Definición 2** *Un problema de programación lineal está en forma estándar si:*

- *El objetivo es de la forma de maximización o minimización*
- *Todas las restricciones son de igualdad*
- *Todas las variables de decisión son no negativas*
- *El vector de constantes o recursos* $\mathbf{b}_{m\times 1}$ *no contiene componentes negativas*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{9}{c}{\text{máx} / \text{mín}\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n} \\
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & & & \ldots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

donde $x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$ y $b_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, m$

# Forma estándar

Algebraicamente (equivalentemente para la minimización):

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{A}_{m\times n}$ es la *matriz de coeficientes tecnológicos* de $m$ desigualdades con $n$ *variables de decisión*; $\mathbf{x}_{n\times 1}$ es el vector columna de *variables de decisión*; $\mathbf{b}_{m\times 1}$ es el vector de *recursos* y $\mathbf{c}_{n\times 1}$ es el vector de *beneficios* o *costes*.

# Transformaciones

Además de las transformaciones a forma canónica, puede considerarse que:

- Cualquier desigualdad puede convertirse en una igualdad introduciendo una variable no negativa de suma o resta (*de holgura*) con coeficiente nulo en la función objetivo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \triangleq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \triangleq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - t_i = b_i$$

- Si una variable de decisión $x_i$ no está restringida se pone entonces como la diferencia de dos variables no negativas restringidas:

$$x_i = x_i' - x_i'', x_i', x_i'' \geq 0$$

# Definiciones

**Definición 3**

*Un vector* $\mathbf{x}_{n\times 1}$ *no negativo que satisface las restricciones* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *se denomina solución factible para tales restricciones*

**Definición 4**

*Un vector* $\mathbf{x_B} = \{x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}\}$ *se denomina solución básica si satisface* $\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b}$, *donde* $\mathbf{B}_{m\times m}$ *es una submatriz de* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *y todas las* $(n-m)$ *variables de decisión que no están en la base son nulas.*

*Si además es factible, se denomina solución básica factible. Se dice que la base* $\mathbf{B}_{m\times m}$, *formada por las columnas* $a_i$ *de* $\mathbf{A}$ *asociadas con las variables básicas* $x_{Bi}$ *es una* **base factible** *si* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.

- Por lo tanto, $\mathbf{B}_{m\times m}$ debe ser *no singular*
- Podría haber hasta $\binom{n}{m}$ soluciones básicas factibles
- Típicamente se denotará $B = \{x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}\}$

# Definiciones

**Definición 5**

*El conjunto de todas las soluciones factibles se denomina Región (o conjunto) factible $F$:*

$$F = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

**Definición 6**

*Un punto $\mathbf{x}$ de un conjunto convexo $F$ se dice que es un punto extremo, si no existen dos puntos distintos $x_1$ y $x_2$ en $F$ tal que $\mathbf{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ para algún $\lambda \in (0, 1)$*

# Definiciones

**Definición 7**

*El coeficiente de las variables básicas en la función objetivo se denota con* $\mathbf{c}_B = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm})$ *para la base* $B = \{x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}\}$

Por lo tanto, dada una solución factible $\mathbf{x}_B$ el valor de la función objetivo es:

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$$

**Definición 8**

*Una solución factible* $\mathbf{x}^*$ *es óptima si:*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in F$$

# Base

Una base para un problema de programación lineal está formada por un conjunto de vectores columna linealmente independientes de la matriz $\mathbf{A}$

Por lo tanto, si $\mathbf{a}_j$ es un vector no básico:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{b}_i = \mathbf{B}\mathbf{y}_j$$

Puesto que $\mathbf{B}$ es no singular:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$$

# Puntos extremos

**Teorema 1**
*El conjunto de soluciones factibles del problema lineal estándar es un conjunto convexo y cerrado*

**Teorema 2**
*Sea* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *la matriz de coeficientes tecnológicos de un problema de programación lineal en forma estándar con* $r(\mathbf{A}) = m$ *y* $\mathbf{b}_{m\times 1}$ *el vector de constantes. Sea* $F$ *el poliedro convexo formado por los vectores* $\mathbf{x}$ *que verifican:*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

*Un vector* $\mathbf{x}$ *es una solución básica factible si y sólo si es un punto extremo de* $F$

# Puntos extremos

**Teorema 3**

*Dado el problema de programación lineal estándar (factible acotada)*

$$\begin{aligned} & \max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \textit{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

*el valor óptimo de la función objetivo se alcanza en un punto extremo de la región factible $F$*

# Descripción

1. Iniciar la búsqueda en una solución básica factible (punto extremo)
2. Si existe una solución factible adyacente que mejore el valor de la función objetivo, pasar al punto 3.
   En otro caso, detenerse. La solución óptima es la solución actual
3. Determinar la variable que abandona la base y cuál la reemplaza. Volver al paso 2 hasta que el problema sea resuelto —o, en su lugar, se detecte la infactibilidad o que es no acotado.

# Mejora de la solución factible

**Regla de la variable de salida** Dada la solución básica factible $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, si el vector columna $\mathbf{a}_j$ fuera de la base tiene $y_{ij} > 0$ para algún $i$, entonces puede entrar en la base en lugar de un vector $\mathbf{b}_k$ de la base que verifique

$$\frac{x_{Bk}}{y_{kj}} = \min \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} \right\}, y_{ij} > 0$$

**Regla de la variable de entrada** La variable de entrada en la base será aquella con el $(z_j - c_j)$ más negativo. En caso de igualdad, se elige uno arbitrariamente

# Ejemplo

Resolver con el método del simplex el problema:

$$\text{máx}\, z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Ejemplo

En forma estándar (de maximización):

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 8 \\
x_1 & - & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

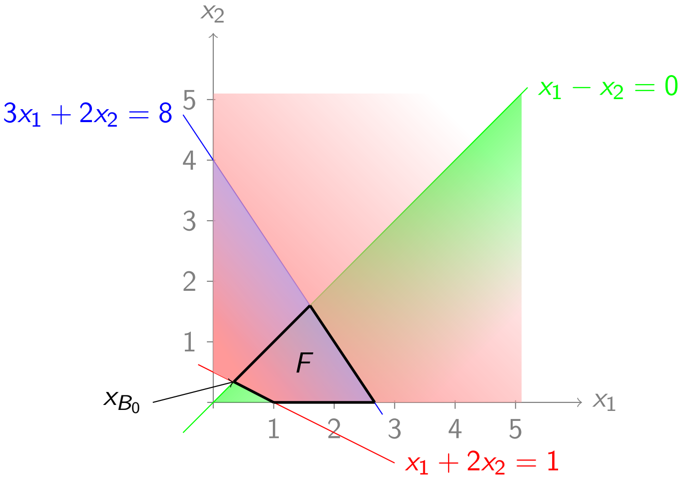
# Ejemplo

1. Cálculo de una solución inicial factible
   1. Cálculo de las variables básicas
      Con $B_0 = \{x_1, x_2, x_4\}$ (de modo que $x_3 = x_5 = 0$) es posible obtener una base factible:

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_0}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_{B_0} = \mathbf{B_0}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B_0}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

# Ejemplo



# Ejemplo

1. Cálculo de una solución inicial factible (cont.)
   2. Selección de la variable de entrada

$$\mathbf{y_3} = \mathbf{B_0}^{-1}\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y_5} = \mathbf{B_0}^{-1}\mathbf{a_5} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_3 - c_3 &= \mathbf{c}_{B_0}^T\mathbf{y_3} - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y_3} - 0 = -\mathbf{\frac{2}{3}} \\ z_5 - c_5 &= \mathbf{c}_{B_0}^T\mathbf{y_5} - c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y_5} - 0 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entra la variable $x_3$ puesto que $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}$

# Ejemplo

1. Cálculo de una solución inicial factible (cont.)
   3. Selección de la variable de salida

$$\theta = \text{mín}\{\cancel{\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}}, \cancel{\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}}, \frac{\mathbf{\frac{19}{3}}}{\mathbf{\frac{5}{3}}}\} = \frac{19}{5}$$

Sale la variable $x_4$ puesto que es la que concede el mínimo valor a la variable de entrada $x_3$[1]

[1] Nótese que se desechan los términos $y_{ij} \leq 0$

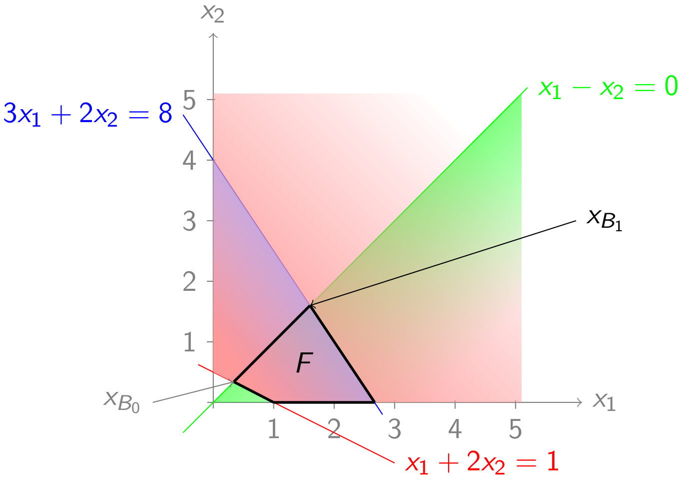
# Ejemplo

2. Mejora de la solución (Iteración 1)
   1. Cálculo de las variables básicas
      Con $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ (de modo que $x_4 = x_5 = 0$) se obtiene la base factible:

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{B_1} = \mathbf{B_1}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B_1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

# Ejemplo



# Ejemplo

2. Mejora de la solución (Iteración 1) (cont.)
   2. Selección de la variable de entrada

$$\mathbf{y_4} = \mathbf{B_1}^{-1}\mathbf{a_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y_5} = \mathbf{B_1}^{-1}\mathbf{a_5} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_4 - c_4 &= \mathbf{c}_{B_1}^T\mathbf{y_4} - c_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y}_4 - 0 &= \frac{2}{5} \\ z_5 - c_5 &= \mathbf{c}_{B_1}^T\mathbf{y_5} - c_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y}_5 - 0 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Y el procedimiento ha acabado puesto que no es posible mejorar la función objetivo

# Ejemplo

## Solución

La solución final es el punto dado por el valor a las variables básicas calculado en el último paso

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

(donde la variable de holgura $x_3 = \frac{19}{5}$ indica que ésa es la cantidad excedida en la primera restricción)

# Ejemplo

## Cóste óptimo

El valor de la función objetivo es:

$$z^* = \mathbf{c}_{B_1}^T \mathbf{x}_{B_1} = (11) \left( \begin{array}{c} \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} \end{array} \right)$$

(en el que las variables de holgura se han omitido directamente porque sus coeficientes de coste son nulos)

# Factibilidad del problema inicial

Para garantizar una solución inicial se añaden *variables artificiales* al problema original al pasarlas a forma estándar

$$\begin{array}{rcc} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & \triangleq & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - t_i + r_i = b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & \triangleq & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + r_i = b_i \end{array}$$

(donde ya se muestra la introducción de la variable de holgura $t_i$)

# Forma tabular

Con el objeto de simplificar los cálculos, se suele usar una forma tabular como la siguiente:

$$
\begin{array}{c|c|cccc|c}
\mathbf{c}_B & VB & x_1 & \dots & x_n & & \mathbf{x}_B \\
\hline
c_{B1} & x_{B1} & y_{11} & \dots & y_{1n} & & x_{B1} \\
c_{B2} & x_{B2} & y_{21} & \dots & y_{2n} & & x_{B2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
c_{Bm} & x_{Bm} & y_{m1} & \dots & y_{mn} & & x_{Bm} \\
\hline
 & & (z_1 - c_1) & \dots & (z_n - c_n) & & z
\end{array}
$$

# Forma tabular

El significado de cada componente es:

- La columna $\mathbf{c}_B$ contiene los coeficientes de las variables básicas ...
- ... que se muestran en la columna $VB$
- Las columnas $x_i$ contienen los vectores columna $y_i$ que se corresponden con la base $\mathbf{B}$ representada por la columna $VB$
- $\mathbf{x}_B$ es el valor de las variables básicas
- $(z_j - c_j)$ son los *costes reducidos* de cada variable
- Por último, $z$ representa el valor de la función objetivo para la solución actual

# Algoritmo

1. Construir la tabla inicial
2. Si hay algún *coste reducido* negativo, ir al paso 4. En otro caso, ir al paso 3
3. Si todo $(z_j - c_j) \geq 0$ y no hay variables básicas artificiales positivas, la solución es óptima. En otro caso, el problema es infactible.
4. Si existe alguna columna $j$, tal que $(z_j - c_j) < 0$ e $\mathbf{y}_j \leq 0$, el problema es no acotado. En otro caso, ir al paso 5

# Algoritmo

5. Escoger como variable de entrada aquella con el menor coste reducido y designarla $x_k$; la variable de salida será aquella que haga menor la razón $x_{Bi}/y_{ik}$ $(y_{ik} > 0)$. Designar la fila por $r$
6. Sustituir la variable básica $x_{Br}$ por $x_k$ y $c_{Br}$ por $c_k$
7. Dividir la fila $r$ por $y_{rk}$ y hacer la columna $k$ igual a 0 menos la posición $y_{rk} = 1$
8. Los nuevos valores del resto de la tabla se calculan como:

$$\begin{array}{cc} \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \phi & \hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \phi \\ \hat{z}_j - \hat{c}_j = (z_j - c_j) - \phi & \hat{z} = z - \phi \end{array}$$

donde $\phi = \frac{y_{rj} \times y_{ik}}{y_{rk}}$

9. Ir al paso 2.

# Ejemplo

Resolver con el método del simplex el problema:

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Ejemplo

- Construcción de la tabla inicial

| $\mathbf{c}_B$ | $VB$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\mathbf{x}_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_3$ | **6** | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 24 |
| 0 | $x_4$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 0 | $x_5$ | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | | $-5$ | $-4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Ejemplo

- Mejora de la solución actual (iteración 1)

| $\mathbf{c}_B$ | $VB$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\mathbf{x}_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $x_1$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | $x_4$ | 0 | $\mathbf{\frac{4}{3}}$ | $-\frac{1}{6}$ | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | $x_5$ | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 0 | $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{10}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 20 |

# Ejemplo

- Mejora de la solución actual (iteración 2)

| $\mathbf{c}_B$ | $VB$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\mathbf{x}_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 3 |
| 4 | $x_2$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ |
| 0 | $x_5$ | 0 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | 1 | 0 | $\frac{5}{2}$ |
| 0 | $x_6$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{3}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| | | 0 | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 21 |

# Ejemplo

## Solución

La solución final es el punto dado por el valor a las variables básicas calculado en el último paso

$$\mathbf{x}^* = \left(3, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

con un valor $z = 21$

# Forma simétrica

**Definición 9** *Un problema de programación lineal está en forma simétrica (de maximización) si:*

- *El objetivo es de la forma de maximización*
- *Todas las restricciones son de desigualdad del tipo* $\leq$
- *Todas las variables de decisión son no negativas*

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ & & & & \ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

donde $x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$

# Transformaciones

Es posible transformar una igualdad como la siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

en dos desigualdades del tipo $\leq$ como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq -b_i \end{aligned}$$

# Relación primal-dual en forma simétrica

El problema dual del problema *primal*:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

es:

$$\begin{aligned} \min w &= \mathbf{b}^T \mathbf{x}' \\ \text{sujeto a} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{x}' &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{x}' &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

# Ejemplo

Calcular el problema dual de:

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 5x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & & & \leq & 0 \\ & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Ejemplo

El problema anterior, se representa en forma simétrica como:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\multicolumn{5}{c}{\max z' = -2x_1 - x_2} \\
x_1 & + & 5x_2 & \leq & 8 \\
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\
3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
-x_1 & & & \leq & 0 \\
 & - & x_2 & \leq & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

de modo que éste es el problema *primal*

# Ejemplo

Cuya formulación dual es:

$$
\begin{array}{l}
\min w = 8x'_1 + 6x'_2 + 6x'_3 \\
\begin{array}{cccccccccl}
x'_1 & + & 2x'_2 & + & 3x'_3 & - & x'_4 & & & \geq -2 \\
5x'_1 & + & 3x'_2 & + & x'_3 & & & - & x'_5 & \geq -1
\end{array} \\
\quad x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5 \geq 0
\end{array}
$$

# Cálculo de la solución del dual

**Teorema 4**

*Si el problema de programación lineal en forma simétrica tiene una solución óptima correspondiente a una base* $\mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{x'}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1}$ *es una solución óptima para el problema dual*

# Ejemplo

En el problema primal anterior es fácil ver que la base

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para las variables básicas $(x_4, x_5)$ da la solución óptima:

$$x^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Ejemplo

De modo que la solución óptima del problema dual es:

$$x'^{*T} = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

para las variables $x'_4$ y $x'_5$ con un coste:

$$w^* = b^T x'^{*T} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

# Interpretación económica

La variable dual $x_i'^*$ indica la contribución por unidad del recurso $i$-ésimo $b_i$ a la variación en el valor óptimo $z^*$ actual del objetivo

# Ejemplo

En el problema primal anterior, incrementando el valor del cuarto recurso en una unidad, la función objetivo se incrementaría en 2; análogamente, incrementando el quinto recurso en una unidad, la función objetivo se incrementaría en 1

# Introducción

Consiste en añadir restricciones adicionales de igualdad:

- Programación Entera Pura (PEP): todas las variables de decisión deben tomar valores enteros
- Programación 0-1: las variables de decisión sólo pueden tomar valores 0 ó 1
- Programación Entera Mixta (PEM): sólo hay restricciones de integridad sobre algunas variables de decisión

Algebraicamente (PEP):

$$\begin{aligned} \text{máx}\, z &= z(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x} \in F \\ & \mathbf{x}_j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

# Algoritmo de Ramificación y Acotación

1. Inicializar $B = -\infty$
2. Resolver el *problema relajado*. Si la solución es entera, terminar; en otro caso ir al paso 3
3. Ramificar sobre una variable de decisión y crear dos subconjuntos de la región factible
4. Determinar una cota superior $z_s$ del problema original
5. Son nodos terminales aquellos que:
    - I El subconjunto es infactible
    - II $z_s \leq B$
    - III $z_s$ se alcanza en un punto factible y $z_s > B$. Hacer $z_s = B$. Ir al paso 5.
6. Parar si todos los nodos son terminales, el mejor valor de la función objetivo está en $z_s$ dado por 5III. En otro caso, ir al paso 3

# Bibliografía


- Ríos Insua, Sixto
  *Investigación Operativa: Optimización*
  Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, 1988
- Hamdy A. Taha
  *Operations Research: An Introduction*
  Prentice Hall International, 2007
- French, S., Hartley., R., Thomas, L. C., White, D. J.
  *Operational Research Techniques*
  Edward Arnold, 1991
- Sriram Sankaranarayanan, Shalom D. Ruben
  Linear and Integer Programming
  Coursera (`www.coursera.org`)