Tema 7

Forma normal de una transformación lineal

7.1. Recordatorio sobre el cambio de base

En el Tema 4 estudiamos cómo cambian las coordenadas $[\mathbf{u}]_B$ de un vector $\mathbf{u} \in U$ respecto a una base B cuando cambiamos dicha base por una nueva base B'. En este apartado vamos a recordar brevemente las fórmulas básicas.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial U de dimensión n. En dicho espacio tenemos una base $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, de manera que a cada vector $\mathbf{u} \in U$ le podemos asociar un vector columna con sus coordenadas en dicha base:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} u_i \, \mathbf{b}_i \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{u}]_B = (u_1, \dots, u_n)^t \,,$$

de manera que podemos escribir

$$\mathbf{u} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \, [\mathbf{u}]_B = B \, [\mathbf{u}]_B \,.$$

Definimos ahora una nueva base $B' = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n)$ en U. En esta base cada vector

$\mathbf{u} \in U$ tendrá una ciertas coordenadas $[\mathbf{u}]_{B'}$ dadas por

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} u'_i \, \mathbf{b}'_i \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{u}]_{B'} = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)^t$$

y también se cumple que

$$\mathbf{u} = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n) \, [\mathbf{u}]_{B'} = B' \, [\mathbf{u}]_{B'} \, .$$

La matriz de cambio de base $T_{BB'}$ se define de la manera habitual

$$T_{BB'} = ([\mathbf{b}'_1]_B, [\mathbf{b}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{b}'_n]_B) \; ,$$

de manera que

$$B' = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \, T_{BB'} = B \, T_{BB'} \, .$$

Con esta definición se tiene que las coordenadas cambian como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_B &= T_{BB'} \, [\mathbf{u}]_{B'} \, , \\ [\mathbf{u}]_{B'} &= T_{B'B} \, [\mathbf{u}]_B = T^{-1}_{BB'} \, [\mathbf{u}]_B \, . \end{aligned}$$

La matriz $T_{BB'}$ es siempre invertible. Si hacemos dos cambios sucesivos de base $B \to B' \to B''$, entonces se cumple que

$$T_{BB''} = T_{BB'} \, T_{B'B''} \, .$$

7.2. Forma normal de una transformación lineal

En el Tema 6 estudiamos cómo expresar una transformación lineal $T : U \to V$ por medio de una matriz referida a unas bases dadas de U y V. Si disponemos de otras bases distintas, es posible calcular la nueva matriz asociada a T, referida a éstas bases, con un cálculo sencillo, como veremos a continuación. Adicionalmente, dada la transformación lineal T, vamos a estudiar un procedimiento que nos permitirá encontrar ciertas bases con respecto a las cuales la matriz asociada tiene una forma por *bloques* particularmente sencilla.

7.2.1. Cambio de base como transformación lineal

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión n y sean $B_1 = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ y $B_2 = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ dos bases de V. Para cualquier transformación lineal $T : V \to V$ y fijadas las bases B_1 y B_2, podemos encontrar una representación matricial respecto a dichas bases dada por

$$A_{T,B_2B_1} = \left([T(\boldsymbol{v}_1)]_{B_2}, [T(\boldsymbol{v}_2)]_{B_2}, \ldots, [T(\boldsymbol{v}_n)]_{B_2}\right) ,$$

de manera que

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = A_{T,B_2B_1} [\boldsymbol{v}]_{B_1} .$$

Si consideramos ahora la *transformación identidad* $T = I$, que asocia a cada vector él mismo (es decir, $I(v) = v$), su representación respecto a las bases anteriores se obtiene usando $I(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$A_{I,B_2B_1} = \left([\boldsymbol{v}_1]_{B_2}, [\boldsymbol{v}_2]_{B_2}, \ldots, [\boldsymbol{v}_n]_{B_2}\right) = T_{B_2B_1} ,$$

donde $T_{B_2B_1}$ es la matriz de cambio de base de B_2 a B_1. Entonces

$$[\boldsymbol{v}]_{B_2} = A_{I,B_2B_1} [\boldsymbol{v}]_{B_1} = T_{B_2B_1} [\boldsymbol{v}]_{B_1} .$$

Esta ecuación es equivalente a que la imagen por $T = I$ de cualquier vector $\boldsymbol{v} \in V$ es $I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, como ya sabíamos.

Ya sabemos que toda matriz de cambio de base, equivalente a la matriz identidad, es invertible. Inversamente, toda matriz invertible se puede considerar como una matriz de cambio de base para pasar de una base B a una nueva base B', en la que sus columnas son las coordenadas de los vectores de la nueva base B' con respecto a la base B.

Finalmente, si usamos las matrices de cambio de base para definir una transformación lineal, es inmediata la relación que existe entre las diferentes matrices asociadas a una misma transformación lineal $T : U \to V$, referidas a bases distintas.

En efecto, si consideramos las bases B_1 y B_1' del espacio vectorial U y las bases B_2 y B_2' del espacio V, cualquier vector $\boldsymbol{v} \in U$ se transforma en $T(\boldsymbol{v})$ como se indica en el siguiente diagrama:

$$A_{T,B_2'B_1'} = T_{B_2'B_2} A_{T,B_2B_1} T_{B_1B_1'}$$

$$\begin{tikzcd}
{[\boldsymbol{v}]_{B_1}} \arrow[r, "A_{T,B_2B_1}"] & {[T(\boldsymbol{v})]_{B_2}} \arrow[d, "T_{B_2'B_2}"'] \\
{[\boldsymbol{v}]_{B_1'}} \arrow[u, "T_{B_1B_1'}"'] \arrow[r, "A_{T,B_2'B_1'}"'] & {[T(\boldsymbol{v})]_{B_2'}}
\end{tikzcd}$$

Es claro entonces que:

$$A_{T,B_2'B_1'} = T_{B_2'B_2} A_{T,B_2B_1} T_{B_1B_1'} = T^{-1}_{B_2B_2'} A_{T,B_2B_1} T_{B_1B_1'} .$$

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ dada por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$, que obviamente es lineal. Consideremos las bases $B_1 = (1, x, x^2)$ y $B_1' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ de $\mathbb{P}_2$ y $B_2 = (1, x)$ y $B_2' = (1-x, 1+x)$ de $\mathbb{P}_1$. La representación matricial de T respecto a las bases (canónicas) B_1 y B_2 es:

$$A_{T,B_2B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por otro lado, las matrices de cambio de base son:

$$T_{B_1B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B_2'B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la representación matricial de T respecto a las bases B_1' y B_2' puede escribirse de la forma:

$$A_{T,B_2'B_1'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.2.2. Cálculo de la forma normal

Consideremos la transformación lineal $T : U \to V$, donde los espacios vectoriales U y V tienen dimensiones respectivas m y n. Si denotamos el rango de la transformación por $r = rg(T)$, el procedimiento descrito a continuación nos permitirá encontrar una base B_1 de U y una base B_2 de V tales que la representación matricial de T con respecto a B_1 y B_2 sea de la forma:

$$A_{T,B_2B_1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ \hline 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{array}\right),$$

conocida como **forma normal** de la representación (*matriz*) de la transformación lineal. Obsérvese que esta matriz es diagonal por bloques.

Por una parte, sean B_1' y B_2' bases cualesquiera de U y V, respectivamente. Consideremos la matriz asociada a T con respecto a dichas bases $A_{T,B_2'B_1'}$.

Por otra parte, construimos las bases B_1 y B_2 de la siguiente manera.

- Obtenemos una base de $\ker(T)$ (de dimensión $m-r$). Denotamos los $m-r$ vectores que la forman por $\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m$. A continuación, extendemos ésta a una base de U añadiendo r vectores linealmente independientes, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$. Es decir:

$$B_1 = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \underbrace{\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m}_{\text{base de } \ker(T)}) .$$

- A continuación obtenemos una base de $\mathrm{Im}(T)$ de la forma $\boldsymbol{v}_i = T(\boldsymbol{u}_i)$ (para todo $1 \leqslant i \leqslant r$) y la extendemos a una base de V añadiendo $n-r$ vectores linealmente independientes:

$$B_2 = (\underbrace{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r}_{\text{base de } \mathrm{Im}(T)}, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n) .$$

Entonces, la matriz asociada a T respecto a las bases B_1 y B_2 toma la forma

$$A_{T,B_2B_1} = T_{B_2B_2'} A_{T,B_2'B_1'} T_{B_1'B_1} ,$$

que es la representación normal de la transformación T.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T((u_1, u_2, u_3)^t) = (u_1 + u_2 + u_3, u_1 - u_2)^t .$$

El núcleo de T será

$$\ker(T) = \left\{(1, 1, -2)^t u_1 : u_1 \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Gen}\left((-1, -1, 2)^t\right) .$$

Completamos una base de $\mathbb{R}^3$ con dos vectores linealmente independientes de $\boldsymbol{v}_3 = (-1, -1, 2)^t$: por ejemplo, $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)^t$ y $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1)^t$.
A continuación hallamos una base de $\mathbb{R}^2$ mediante $T(\boldsymbol{v}_1) = (2, 1)^t$ y $T(\boldsymbol{v}_2) = (2, -1)^t$.
Obsérvese que en este caso no es necesario extender la base, ya que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Para simplificar la escritura, vamos a *abusar de la notación* y vamos a representar por B_0 la base canónica tanto de $\mathbb{R}^3$ como de $\mathbb{R}^2$. La matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ (eliminando la referencia a éstas en el subíndice) viene dada por

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces las matrices de cambio de base entre las bases calculadas y las respectivas bases canónicas son:

$$T_{B_0 B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_{B_0 B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la representación normal de T será la matriz asociada a T referida a las bases B_1 y B_2, que calculamos mediante

$$\begin{aligned} A_{T,B_2 B_1} = T_{B_2 B_0} A_T T_{B_0 B_1} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$