

Teoría de la Demostración en Predicados

$$\exists x \forall y (S(x) \rightarrow M(x,y)), \forall x (S(x) \wedge P(x) \rightarrow \sim M(x,x)) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists x \sim S(x)$$

1.	$\exists x \forall y (S(x) \rightarrow M(x,y))$	Premisa
2.	$\forall x (S(x) \wedge P(x) \rightarrow \sim M(x,x))$	Premisa
3.	$\forall x P(x)$	Supuesto TD
4.	$\forall y (S(a) \rightarrow M(a,y))$	Supuesto EE 1
5.	$S(a) \rightarrow M(a,a)$	EU 4
6.	$S(a) \wedge P(a) \rightarrow \sim M(a,a)$	EU 2
7.	$P(a)$	EU 3
8.	$P(a) \rightarrow (S(a) \rightarrow \sim M(a,a))$	Exportación 6
9.	$S(a) \rightarrow \sim M(a,a)$	MP 8, 7
10.	$\sim S(a)$	Regla derivada Ax. 7 5, 9
11.	$\exists x \sim S(x)$	GE 10
12.	$\exists x \sim S(x)$	Cancelación sup. EE 4-11
13.	$\forall x P(x) \rightarrow \exists x \sim S(x)$	Cancelación sup. TD 3-12

$$\forall x (M(x) \wedge H(x)) \rightarrow V(x), \forall x (V(x) \rightarrow \sim P(x)), \exists x (B(x) \wedge \sim V(x)) \Rightarrow \exists x (B(x) \vee \sim M(x) \vee \sim H(x))$$

1.	$\forall x (M(x) \wedge H(x)) \rightarrow V(x)$	Premisa
2.	$\forall x (V(x) \rightarrow \sim P(x))$	Premisa
3.	$\exists x (B(x) \wedge \sim V(x))$	Premisa
4.	$B(x) \wedge \sim V(x)$	Supuesto EE 3
5.	$B(x)$	Simplificación 4
6.	$B(x) \vee \sim M(x) \vee \sim H(x)$	Regla de adición 5
7.	$\exists x (B(x) \vee \sim M(x) \vee \sim H(x))$	GE 6
8.	$\exists x (B(x) \vee \sim M(x) \vee \sim H(x))$	Cancelación sup EE 3, 4-7

$$\forall x (P(x) \vee \sim Q(x)), \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x (\sim P(x) \vee Q(x))$$

1.	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$,	Premisa
2.	$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$	Premisa
3.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	Supuesto EE 2
4.	$P(a) \vee \sim Q(a)$	EU 1
5.	$P(a)$	Supuesto casos I 4
6.	$Q(a)$	MP 3, 5
7.	$\sim P(a) \vee Q(a)$	Adición 6
8.	$\sim Q(a)$	Supuesto casos II 4
9.	$\sim P(a)$	MT 3, 8
10.	$\sim P(a) \vee Q(a)$	Adición 9
11.	$\sim P(a) \vee Q(a)$	Cancelación supuesto por casos 4, 7, 10
12.	$\exists x (\sim P(x) \vee Q(x))$	GE a 11
13.	$\exists x (\sim P(x) \vee Q(x))$	Cancelación supuesto EE 2, 4-12

$$\forall x[A(x) \rightarrow (C(x)), \forall x[B(x) \rightarrow C(x)], \exists x[C(x) \rightarrow D(x)] \Rightarrow \exists x[A(x) \vee B(x) \rightarrow D(x)]$$

1. $\forall x[A(x) \rightarrow C(x)]$	Premisa
2. $\forall x[B(x) \rightarrow C(x)]$	Premisa
3. $\exists x[C(x) \rightarrow D(x)]$	Premisa
4. $C(a) \rightarrow D(a)$	Supuesto EE 3
5. $A(a) \rightarrow C(a)$	EU 1
6. $B(a) \rightarrow C(a)$	EU 2
7. $[A(a) \rightarrow C(a)] \rightarrow [[B(a) \rightarrow C(a)] \rightarrow [A(a) \vee B(a) \rightarrow C(a)]]$	A6
8. $[B(a) \rightarrow C(a)] \rightarrow [A(a) \vee B(a) \rightarrow C(a)]$	MP 5,7
9. $A(a) \vee B(a) \rightarrow C(a)$	MP 6,8
10. $A(a) \vee B(a) \rightarrow D(a)$	Silogismo 9, 4
11. $\exists x[A(x) \vee B(x) \rightarrow D(x)]$	GE 10
12. $\exists x[A(x) \vee B(x) \rightarrow D(x)]$	Cierre Supuesto EE 3 4-11

$$\forall x(R(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow I(x)]), \exists x(\sim S(x) \wedge I(x)), \forall x((R(x) \vee S(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow I(x)))$$

1. $\forall x (R(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow I(x)])$	Premisa
2. $\exists x (\sim S(x) \wedge I(x))$	Premisa
3. $\forall x ((R(x) \vee S(x))$	Premisa
4. $\sim S(a) \wedge I(a)$	Supuesto EE 2
5. $R(a) \rightarrow [Q(a) \rightarrow I(a)]$	EU a 1
6. $R(a) \vee S(a)$	EU a 3
7. $\sim S(a)$	Simplificación 4
8. $R(a)$	Silogismo disyuntivo 6, 7
9. $Q(a) \rightarrow I(a)$	MP 8,5
10. $\exists x (Q(x) \rightarrow I(x))$	GE 10
11. $\exists x (Q(x) \rightarrow I(x))$	Cancelación Supuesto EE a 2, 4-10

$$\forall x(\sim P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x (\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x)$$

1. $\forall x (\sim P(x) \rightarrow Q(x))$	Premisa 1
2. $\exists x (\sim P(x) \wedge \sim Q(x))$	Premisa 2
3. $\sim P(x) \wedge \sim Q(x)$	Supuesto EE 2
4. $\sim P(x) \rightarrow Q(x)$	EU 1
5. $\sim Q(x)$	Simplificación 3
6. $P(x)$	MT 5, 4
7. $\exists x P(x)$	GE 6
8. $\exists x P(x)$	Cancelación supuesto EE 2, 3-7

$$\forall x(R(x) \rightarrow \sim Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x((P(x) \rightarrow \sim R(x)) \vee A(x))$$

1. $\forall x (R(x) \rightarrow \sim Q(x))$	Premisa
2. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	Premisa
3. $R(a) \rightarrow \sim Q(a)$	E.U. a 1
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$	E.U. a 2
5. $P(a)$	Supuesto TD
6. $Q(a)$	MP 4,5
7. $\sim R(a)$	MT 3,6
8. $P(a) \rightarrow \sim R(a)$	Cancelación supuesto TD 5-7
9. $(P(a) \rightarrow \sim R(a)) \vee A(a)$	Adición en 8
10. $\exists x ((P(x) \rightarrow \sim R(x)) \vee A(x))$	G.E. a 9

$$\forall x(S(x) \rightarrow \sim D(x)), \exists x(V(x) \rightarrow \sim C(x)), \forall x(\sim D(x) \rightarrow C(x)) \Rightarrow \exists x(S(x) \rightarrow \sim V(x))$$

1. $\forall x (S(x) \rightarrow \sim D(x))$	Premisa 1
2. $\exists x (V(x) \rightarrow \sim C(x))$	Premisa 2
3. $\forall x (\sim D(x) \rightarrow C(x))$	Premisa 3
4. $V(y) \rightarrow \sim C(y)$	Supuesto E.E. 2
5. $S(y) \rightarrow \sim D(y)$	E.U. 1
6. $\sim D(y) \rightarrow C(y)$	E.U. 3
7. $S(y)$	Supuesto TD
8. $\sim D(y)$	M.P. 5, 7
9. $C(y)$	M.P. 6, 8
10. $\sim V(y)$	M.T. 4, 9
11. $S(y) \rightarrow \sim V(y)$	Cancelación supuesto T.D. 7-10
12. $\exists x (S(x) \rightarrow \sim V(x))$	G.E. 11
13. $\exists x (S(x) \rightarrow \sim V(x))$	Cancelación supuesto EE 2, 4-12

$$\forall x(D(x) \rightarrow E(x)), \forall x(E(x) \wedge C(x) \rightarrow B(x)), \exists x(\sim B(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \exists x(\sim D(x))$$

1. $\forall x(D(x) \rightarrow E(x))$	Premisa 1
2. $\forall x(E(x) \wedge C(x) \rightarrow B(x))$	Premisa 2
3. $\exists x(\sim B(x) \wedge C(x))$	Premisa 3
4. $\sim B(a) \wedge C(a)$	Supuesto EE a 3
5. $D(a) \rightarrow E(a)$	E.U. 1
6. $E(a) \wedge (C(a) \rightarrow B(a))$	E.U. 2
7. $\sim B(a)$	Simplificación 4
8. $\sim B(a) \rightarrow \sim(E(a) \wedge C(a))$	Contraposición 6
9. $\sim(E(a) \wedge C(a))$	MP 7, 8
10. $\sim E(a) \vee \sim C(a)$	Leyes de De Morgan 9
11. $C(a)$	Simplificación 4
12. $\sim E(a)$	Silogismo disyuntivo 10, 11
13. $\sim D(a)$	MT 5, 12
14. $\exists x(\sim D(x))$	GE a 15
15. $\exists x(\sim D(x))$	Cancelación supuesto EE 3, 4-14

$$\forall x(B(x) \rightarrow A(x)), \exists x(A(x) \wedge B(x) \rightarrow P(x)), \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \Rightarrow \exists x(B(x) \rightarrow M(x))$$

1. $\forall x(B(x) \rightarrow A(x))$	Premisa
2. $\exists x(A(x) \wedge B(x) \rightarrow P(x))$	Premisa
3. $\forall x(P(x) \rightarrow M(x))$	Premisa
4. $A(a) \wedge B(a) \rightarrow P(a)$	Supuesto EE 2
5. $B(a)$	Supuesto TD I
6. $B(a) \rightarrow A(a)$	EU 1
7. $A(a)$	MP 5, 6
8. $A(a) \wedge B(a)$	Producto 7, 5
9. $P(a)$	MP 8, 4
10. $P(a) \rightarrow M(a)$	EU 3
11. $M(a)$	MP 9, 10
12. $B(a) \rightarrow M(a)$	Cancelación supuesto TD I 5-11
13. $\exists x(B(x) \rightarrow M(x))$	GE 12
14. $\exists x(B(x) \rightarrow M(x))$	Cancelación supuesto EE 2, 4-13

$$\exists x(P(x) \wedge G(x)), \forall x(P(x) \rightarrow A(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge G(x))$$

1. $\exists x(P(x) \wedge G(x))$	Premisa
2. $\forall x(P(x) \rightarrow A(x))$	Premisa
3. $P(a) \wedge G(a)$	Supuesto T.D
4. $P(a) \rightarrow A(a)$	EU 2
5. $P(a)$	Simplificación 3
6. $A(a)$	M.P 3,5
7. $G(a)$	Simplificación 3
8. $A(a) \wedge G(a)$	Producto 6,7
9. $\exists x(A(x) \wedge G(x))$	G.E 8
10. $P(x) \wedge G(x) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge G(x))$	Cancelación supuesto T.D 3-9
11. $\exists x(A(x) \wedge G(x))$	EE 1, 10

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x(A(x) \vee C(x)), \forall x(C(x) \rightarrow B(x) \wedge \sim D(x)) \Rightarrow \exists x(B(x) \vee E(x))$$

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	Premisa
2. $\exists x(A(x) \vee C(x))$	Premisa
3. $\forall x(C(x) \rightarrow B(x) \wedge \sim D(x))$	Premisa
4. $A(a) \vee C(a)$	Supuesto E.E. 2
5. $A(a) \rightarrow B(a)$	E.U. 1
6. $C(a) \rightarrow B(a) \wedge D(a)$	E.U. 3
7. $A(a)$	Supuesto casos I 4
8. $B(a)$	M.P. 4, 7
9. $C(a)$	Supuesto casos II 4
10. $B(a) \wedge \sim D(a)$	M.P 3, 10
11. $B(a)$	Simplificación
12. $B(a)$	Cancelación supuesto Px C 4, 7-8, 9-11
13. $B(a) \vee E(a)$	Adición 12
14. $\exists x(B(x) \vee E(x))$	G.E. a 13
15. $\exists x(B(x) \vee E(x))$	Cancelación supuesto EE 2, 4-14

$$\exists x (O(x) \wedge \sim W(x)), \forall x (K(x) \rightarrow W(x)) \Rightarrow \exists x (O(x) \wedge \sim K(x))$$

1. $\exists x (O(x) \wedge \sim W(x))$	Premisa 1
2. $\forall x (K(x) \rightarrow W(x))$	Premisa 2
3. $O(a) \wedge \sim W(a)$	Supuesto E.E 1
4. $K(a) \rightarrow W(a)$	E.U. 2
5. $O(a)$	Simplificación 3
6. $\sim W(a)$	Simplificación 3
7. $\sim K(a)$	Modus Tollens 4, 6
8. $O(a) \wedge \sim K(a)$	Producto 5, 7
9. $\exists x (O(x) \wedge \sim K(x))$	G.E. 8
10. $\exists x (O(x) \wedge \sim K(x))$	Cierro Supuesto E.E. 1, 3-9

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)), \exists x (B(x) \rightarrow \sim C(x)) \Rightarrow \exists x (\sim C(x) \wedge A(x))$$

1. $\forall x (A(x) \wedge B(x))$	Premisa
2. $\exists x (B(x) \rightarrow \sim C(x))$	Premisa
3. $B(a) \rightarrow \sim C(a)$	Supuesto E.E. 2
4. $A(a) \wedge B(a)$	E.U. 1
5. $A(a)$	Simplificación 3
6. $B(a)$	Simplificación 3
7. $\sim C(a)$	MP 3, 6
8. $\sim C(a) \wedge A(a)$	Producto 5, 7
9. $\exists x (\sim C(x) \wedge A(x))$	G.E. 8
10. $\exists x (\sim C(x) \wedge A(x))$	Cancelación supuesto E.E. 2, 3-9

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \sim \forall x (Q(x) \vee S(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow R(x))$$

1. $\forall x ((P(x) \rightarrow Q(x)))$	Premisa
2. $\sim \forall x ((Q(x) \vee S(x)))$	Premisa
3. $\exists x \sim (Q(x) \vee S(x))$	Equivalencia 2
4. $\sim (Q(a) \vee S(a))$	Supuesto E.E. 3
5. $P(a) \rightarrow Q(a)$	E.U. 1
6. $\sim Q(a) \wedge \sim S(a)$	De Morgan 4
7. $\sim Q(a) \rightarrow \sim P(a)$	Contraposición 5
8. $\sim Q(a)$	Simplificación 6
9. $\sim P(a)$	MP 7, 8
10. $\sim P(a) \vee R(a)$	Adición 9
11. $P(a) \rightarrow R(a)$	Equivalencia 10
12. $\exists x (P(x) \rightarrow R(x))$	G.E. 10
13. $\exists x (P(x) \rightarrow R(x))$	Cancelación supuesto E.E. 3, 4-12