ÁLGEBRA LINEAL

Hoja de ejercicios 03: Espacios Vectoriales

Ejercicio 1. Demuestra que el conjunto P_3 de polinomios de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ de grado menor o igual que tres es un espacio vectorial (donde a_0; a1; a_2 y a_3 son números reales cualesquiera y x es una variable).
Demostrar que el conjunto $P^{(3)}$ de polinomios, $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$; $a \neq 0$; (i.e., de grado exactamente tres) no es un espacio vectorial.

Obsérvese que en general el conjunto de polinomios P_n de grado menor o igual que n, n natural, es un espacio vectorial.

Ejercicio 2. Decide cuáles de los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios:

a) $A = \{(x, 0, z): x, z \in R\}$

b) $B = \{(x, y, z): x, y, z \in R\}$

c) $C = \{(x, y, z): x = 2y + 5; x, y, z \in R\}$

Ejercicio 3. Considera las tres matrices en el espacio vectorial R^{2x2} dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestra que el conjunto de combinaciones lineales de A, B y C es un subespacio vectorial de R^{2x2}.

Ejercicio 4. Comprueba si el vector (3, 4, 4) de R^3 pertenece al subespacio generado por el conjunto de vectores {(1, 2, 3); (-1, 0, 2)} y si éste es el caso, encontrar la correspondiente combinación lineal.

Ejercicio 5. Demuestra que el conjunto de vectores {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)} de R^3 es linealmente dependiente. Prueba que el conjunto de vectores {(0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)} es linealmente independiente.

Ejercicio 6. Decide si los tres polinomios siguientes $p(x) = 1 - x + x^2$; $q(x) = 2 + x$; $r(x) = 1 + 2x - x^2$ son linealmente dependientes o independientes. Si son linealmente dependientes, encuentra alguna relación de dependencia lineal.

Ejercicio 7. Prueba que el conjunto B = {(1, 1, 0); (1, 2, 1); (2, 1, 0)} es una base de R^3. Halla las coordenadas del vector v = (3, -2, 1) con respecto a B.

Ejercicio 8. Halla una base y la dimensión de cada uno de los posibles subespacios siguientes de R^4:

a) $V_1 = \{(y, 2y, y, 0): y \in R\}$
b) $V_2 = \{(y, 2y, y, z): y, z \in R\}$
c) $V_3 = \{(y, 2y, z, 1): y, z \in R\}$
d) $V_4 = \{(y, y + z, 3y - 2z, z): y, z \in R\}$

Ejercicio 9. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Halla una base del subespacio vectorial ColA.

b) Halla el valor del parámetro real, **c**, para el que el vector **v = (0, 2, 2, c)** pertenezca a ese subespacio.

Ejercicio 10. Demuestra que:

a) *" Si* $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es un conjunto de p vectores linealmente independiente de un espacio vectorial y $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, x\}$ *es un conjunto linealmente dependiente, entonces x pertenece al subespacio generado por* $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ *y x se puede expresar de una manera única como combinación lineal de los vectores* $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ *"*

b) *"En un espacio vectorial E de dimensión n sobre el cuerpo K:*
1. Todo sistema l.i. tiene a lo sumo n elementos.
2. Todo sistema que tenga al menos n+1 elementos es l. d."

c) *"Todo sistema B de un espacio vectorial E de dimensión n sobre K que posee dos de las tres propiedades siguientes (n>0):*
1. B tiene n elementos.
2. B es libre.
3. B es sistema generador de E.
es una base de E"