7. Máquinas de Turing

Grado Ingeniería Informática
Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

- Introducción, Definición y Ejemplos
- Tipos de MT
- Equivalencia y Variantes de MT

Introducción

Origen:

- La Máquina de Turing (MT) fue descrita por Alan Turing en 1936.

Alan Turing (Inglés: 1912 - 1956)

Fue un científico inglés que hizo grandes aportaciones en: matemáticas, criptoanálisis, lógica, filosofía, biología, ciencias de la computación, inteligencia artificial y vida artificial.

Es considerado uno de los padres de la ciencia de la computación. Es el precursor de la informática moderna.

3

Introducción

- "Propongo considerar la siguiente cuestión:¿pueden pensar las máquinas?". Ha nacido la IA.
- Test de Turing

Turing:http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=ChJVaTqU2So

4

Introducción

Test de Turing:

- 1990, auspiciado por el filántropo Hugh Loebner, se celebra el **Premio Loebner** para honrar la memoria de Alan Turing.
- Una vez al año, robots de todo el mundo compiten para tratar de superar la prueba, aunque nadie ha podido hacerlo todavía.
- Si bien existen premios menores de consolación, los 100.000 dólares del premio gordo permanecen desiertos.
- Cuando un androide sea capaz de hacerse pasar por un humano antes los jueces, el concurso de desconvocará para siempre.
- Muchos han estado cerca, pero no ha llegado el día en que una máquina haya **imitado** la inteligencia humana.

5

Introducción

- Test de Turing:
  - 2010, cuando Suzette, de Bruce Wilcox, que volvió a ganar el certamen el año siguiente, logró engañar al juez del Premio Loebner. Una conversación sobre política en la que el *bot* sembró la confusión con una **imitación** casi perfecta de un humano.
  - En la palabra **imitar** está la clave. Los críticos del test de Turing esgrimen el argumento de que la mayoría de los robots que se enfrentan a él no están basados en un auténtica inteligencia artificial, sino en una especialmente dirigida para superar la prueba. Además, todo está permitido, desde las respuestas absurdas hasta las mentiras.
  - Wilcox es especialista en programación de *chatbots*, y su aplicación Tom Loves Angela, es ya un clásico de los programas de conversación basados en inteligencia artificial.

6

Introducción

- Test de Turing:
  - Según los expertos, el Premio Loebner es la prueba más fiel al test original, aunque existen una serie de concursos en la misma línea. Entre ellos, **Turing 100**, donde hace unos años se produjo una sorpresa protagonizada por un robot que imitaba a un adolescente de trece años.
  - El programa Eugene Goostman, también obtuvo los mejores resultados en varias ediciones del Premio Loebner, obtuvo un 29% de respuestas consideradas humanas, cuando el límite para superar el test de Turing se encuentra en el 30%.

7

Introducción

- Test de Turing: **Fecha límite**
  - Como ocurre con la ley de Moore, sobre el test de Turing existen especulaciones sobre cuándo los robots superarán el límite de su inteligencia.
  - Ray Kurzweil, ha predicho que un ordenador pasará la prueba de Turing en el año 2029, basándose en el concepto de la singularidad tecnológica.
  - En la misma línea, Luis Von Ahn, uno de los mayores expertos en inteligencia artificial de nuestra época: "*es difícil saberlo, pero quizás hasta dentro de 10 o 20 años no sea posible. Por ejemplo, un ordenador capaz de escribir noticias correctamente estaría muy cerca de superar el test de Turing*", explica el experto en ciencia computacional.

8

Definición de una MT

- Dispositivo hipotético capaz de manipular símbolos en una tira de cinta considerando ciertas reglas. A pesar de su simplicidad, pueden simular la lógica de cualquier algoritmo de un computador.

- Una MT está formado por:
  - Cinta infinita dividida en celdas
  - Cabezal de lectura/escritura capaz de moverse sobre dicha cinta.

vídeo

vídeo

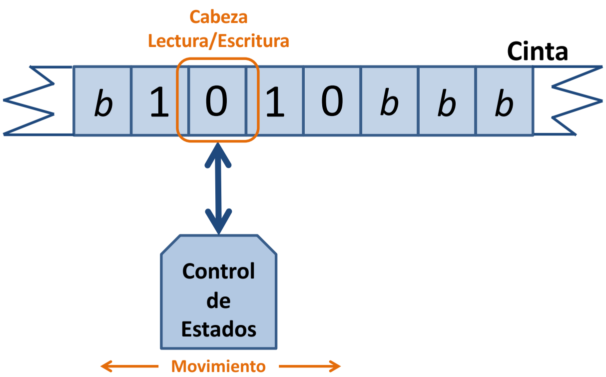
vídeo

Diferentes versiones que simulan una MT

9

Definición de una MT

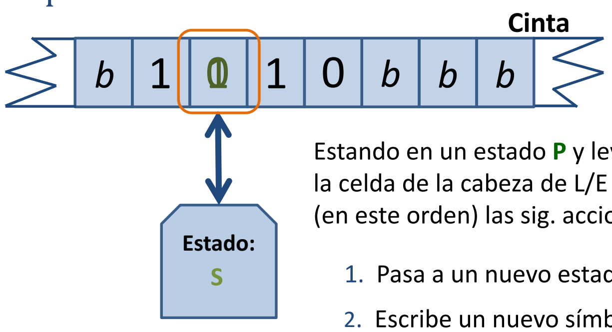
Representación:



10

Definición de una MT

Operaciones:



Estando en un estado **P** y leyendo el símbolo de la celda de la cabeza de L/E (Ej: 0), se realizan (en este orden) las sig. acciones:

1. Pasa a un nuevo estado. (Ej: S)
2. Escribe un nuevo símbolo en la cinta (reemplazando el existente). (Ej: 0 → 1)
3. Mueve el cabezal de L/E hacia: Drcha, Izqda, o no se mueve (Ej: Izqda)

Definición de una MT

Definición Formal:

Una MT se define como una 7-tupla:

$$\boxed{\text{MT} = (\Sigma, \Gamma, b, Q, q_0, f, F)}$$

Donde:

Símbolo	
$\Sigma \subset \Gamma$	Alfabeto de entrada.
Γ	Alfabeto de símbolos de la cinta.
$b \in \Gamma$	Símbolo especial - espacio en blanco ($b \not\subset \Sigma$). También se representa como: □
Q	Conjunto finito de estados.
$q_0 \in Q$	Estado inicial.
f	Función $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L(-), R(+), S(=)\}$ (donde *L: Left*, *R: Right* y *S: Stay*).
$F \subseteq Q$	Conjunto de estados finales o de aceptación.

Definición de una MT

Características:

- La cinta se supone infinita por ambos lados.
- Inicialmente la cinta contiene un número finito de símbolos consecutivos (de Σ) precedidos y seguidos por el símbolo b (o □).
- La cabecera de L/E está situada inicialmente sobre el elemento más a la izquierda de la palabra.
- Toda MT se representa por una tabla de transición (como el resto de Autómatas). **Si la transición No es posible → La MT *se detiene*.**

f (Estados)	Símbolo	Símbolo	...
Estado	*(Estado, Símbolo, Movim.)*	*(Estado, Símbolo, Movim.)*	...
Estado	*(Estado, Símbolo, Movim.)*	*(Estado, Símbolo, Movim.)*	...
...	...	...	...

13

Ejemplo de una MT

$MT\_1 = (\Sigma=\{0,1\}, \Gamma=\{0,1,b\}, \mathbf{b}, \mathbf{Q}=\{q_0, q_1, q_F\}, \mathbf{q_0}, \mathbf{f}, \mathbf{F}=\{q_F\})$

donde f:

f	0	1	b
$\rightarrow q_0$	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_F, 0, S)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_F, 1, S)$
$*q_F$			

14

Ejemplo de una MT

MT_1 = (Σ={0,1}, Γ={0,1,b}, **b**, **Q**={q_0 , q_1 , q_F}, $\mathbf{q_0}$, ***f***, ***F***={q_F})

donde f:

f	0	1	b
→q_0	(q_0, 0, R)	(q_1, 1, R)	(q_F, 0, S)
q_1	(q_1, 0, R)	(q_0, 1, R)	(q_F, 1, S)
*q_F			

Estado Inicial (→)

Estado Final (*)

También puede representarse como: □

Representación: (Estado al que transita, Símbolo que se escribe en la cinta, Movimiento que realiza el cabezal de L/E)

Desplazamiento:
R -> Derecha
L -> Izquierda
S -> No se mueve

También puede representarse como: +,-,=

15

Ejemplo de una MT

MT_1 = (Σ={0,1}, Γ={0,1,b}, **b**, **Q**={q_0 , q_1 , q_F}, $\mathbf{q_0}$, ***f***, ***F***={q_F})

donde f:

f	0	1	b
→q_0	(q_0, 0, R)	(q_1, 1, R)	(q_F, 0, S)
q_1	(q_1, 0, R)	(q_0, 1, R)	(q_F, 1, S)
*q_F			

16

Ejemplo de una MT

MT_1 = (Σ={0,1}, Γ={0,1,b}, **b**, **Q**={q_0 , q_1 , q_F}, q_0, ***f***, ***F***={q_F})

donde f:

f	0	1	b
→q_0	(q_0, 0, R)	(q_1, 1, R)	(q_F, 0, S)
q_1	(q_1, 0, R)	(q_0, 1, R)	(q_F, 1, S)
*q_F			

Sin transiciones → Parada de la MT

Cinta

b	b	1	0	0	1	b	b

Inicio

Estado: q_1

q_F

17

Ejemplo de una MT

MT_1 = (Σ={0,1}, Γ={0,1,b}, **b**, **Q**={q_0 , q_1 , q_F}, q_0, ***f***, ***F***={q_F})

donde f:

f	0	1	b
→q_0	(q_0, 0, R)	(q_1, 1, R)	(q_F, 0, S)
q_1	(q_1, 0, R)	(q_0, 1, R)	(q_F, 1, S)
*q_F			

Cinta

b	b	1	0	0	1	0	b

¿Cómo funciona esta MT?

Al final de la palabra (en el primer *b*), escribe:
0 → Si el número de 1's de la palabra leída es Par
1 → Si el número de 1's de la palabra leída es Impar

18

Definición de una MT

Diagrama de Estados:

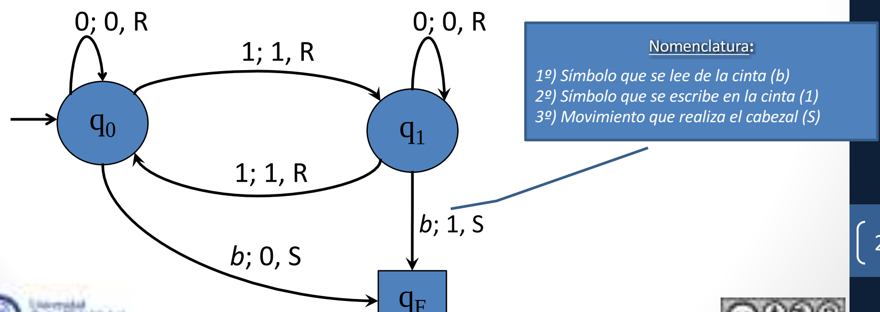
La función de transición también puede describirse en forma de diagrama de estados:

- Los nodos representan estados.
- Los arcos representan transiciones de estados.
- Cada arco es etiquetado con los prerrequisitos y los efectos de cada transición:
  - Símbolo inicial,
  - Símbolo que se escribe,
  - Dirección del movimiento del cabezal.

Definición de una MT

Diagrama de Estados - Ejemplo:

f	0	1	b
$\rightarrow q_0$	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_F, 0, S)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_F, 1, S)$
$*q_F$			



- Introducción, Definición y Ejemplos
- Tipos de MT
- Equivalencia y Variantes de MT

Tipos de MT

MT que actúa como TRANSDUCTOR:

- Modifica el contenido de la cinta realizando cierta función.

MT que actúa como RECONOCEDOR:

- MT capaz de reconocer un lenguaje *L*.
- MT capaz de aceptar un lenguaje *L*.

Tipos de MT

MT que actúa como TRANSDUCTOR:

- Modifica el contenido de la cinta realizando cierta función.
  Ejs: MT que sustituye los dígitos por cero,
  MT que añade un bit de paridad a la entrada,
  MT que duplica el número de 1's que hay en la cinta
  ...

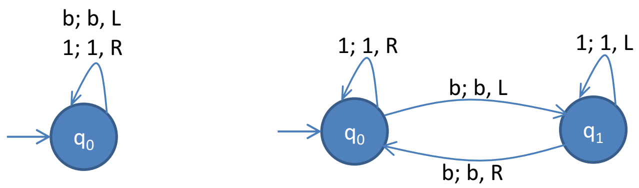
- Si la Entrada está bien formada:
  debe terminar en un Estado Final.

- Si la Entrada No está bien formada:
  debe terminar en un Estado No Final.

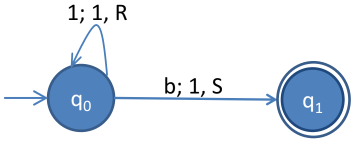
23

Ejemplos de MT

Diferentes MT que no se detienen (*Γ={1, b}*):



MT que calcula *n+1* considerando el n (*n>=0)* como una sucesión de *1's:*



24

Tipos de MT

MT que actúa como TRANSDUCTOR:

- Modifica el contenido de la cinta realizando cierta función.

MT que actúa como RECONOCEDOR:

- MT capaz de reconocer un lenguaje *L.*
- MT capaz de aceptar un lenguaje *L.*

25

Tipos de MT

MT que actúa como RECONOCEDOR:

- MT capaz de RECONOCER o ACEPTAR un lenguaje *L*.

- Una MT RECONOCE un lenguaje *L,* si dada una entrada (*w*) en la cinta, la MT SIEMPRE se para, y lo hace en un Estado Final si y sólo si: $w \in L$

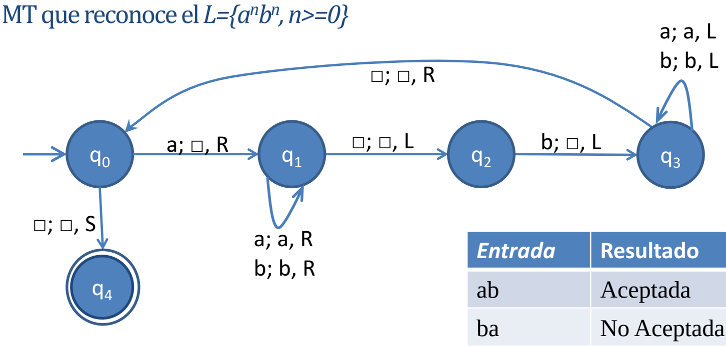
- Una MT ACEPTA un lenguaje *L,* si dada una entrada (*w*) en la cinta, la MT se para en un Estado Final si y sólo si: $w \in L$
    - *Así, en este caso, si* $w \notin L$ *, la MT podría no parar.*

*Ejs: MT que reconoce el lenguaje a*b*,*
MT que acepta el lenguaje $a^n b^n c^n$
…

26

Ejemplos de MT

MT que reconoce el $L=\{a^n b^n, n>=0\}$



Entrada	Resultado
ab	Aceptada
ba	No Aceptada
aabb	Aceptada
aab	No Aceptada
abb	No Aceptada
aaaabbbb	Aceptada

En este caso, el símbolo especial- espacio en blanco ($b \not\subset \Sigma$) se representa como: □ , porque $b \subset \Gamma$

27

- Introducción, Definición y Ejemplos
- Tipos de MT
- Equivalencia y Variantes de MT

28

Equivalencia de MT

Dos MT son equivalentes si:

Ambas realizan la misma acción sobre TODAS sus entradas. Además, si una MT no se parara para alguna entrada, la otra tampoco podrá pararse.

- Si las MT actúan como Transductor:
  - Para cada entrada posible, los contenidos de la cinta al final del proceso deben ser iguales.
- Si las MT actúan como Reconocedor:
  - Ambas deben Aceptar y/o Reconocer las mismas palabras.

29

Variantes de MT

- Existen numerosas variantes de MT obtenidas al restringir algún aspecto de las mismas.
- Consideremos algunos ejemplos:
  - MT con alfabeto binario ($\Gamma = \{0,1,b\}$).
  - MT limitada por un extremo.
  - MT con restricciones en el movimiento de L/E.

30

La Máquina de Turing

- Breaking the Code: Biography of Alan Turing (Derek Jacobi, BBC, 1996) http://www.youtube.com/watch?v=S23yie-779k
- https://www.youtube.com/watch?v=8fglRhM9pkU
- http://www.youtube.com/watch?v=6k2OUZdA7vQ

31

MT Universal (MTU)

- MT capaz de simular el comportamiento de cualquier MT.
- Una MTU contiene en su cinta:
  1. La descripción de otra MT,
  2. El contenido de la cinta de dicha MT,

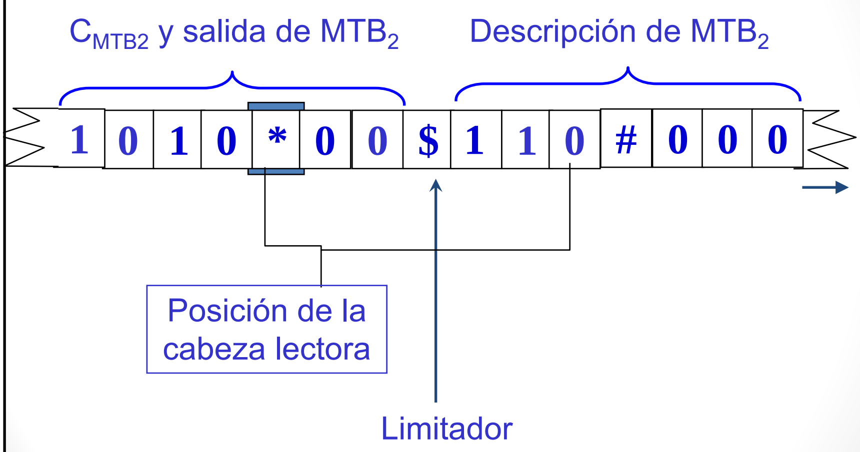
  y produce como resultado de su ejecución, el mismo resultado que produciría la MT sobre su cinta.
- Es una MT “programable”

32

MT Universal (I)

- Es una MT "programable"
  - Dependiendo del programa, puede simular a cualquier otra MT.
  - Lee y ejecuta programas almacenados en su cinta
  - El programa de una MTU es una versión codificada de una MT que lleva a cabo la tarea que se desea que ejecute la MTU.
- Para construir una MTU que desempeñe una tarea:
  - Hay que diseñar una MT genérica para esa tarea y
  - codificar dicha MT genérica en la cinta de la MTU.
  - Se tratará de una MT con alfabeto binario y cinta limitada en un sentido.
  - codificar la cadena de entrada.

MT Universal



En torno a la figura de Alan Turing

MT Universal. Cinta

- Información sobre:
  - función de transición
  - estado inicial
  - posición inicial de la cabeza
  - contenido inicial de la cinta
- Dividida en dos partes por el $:
  - izda del $: CMTB2
  - dcha del $: codificación de MTB2
- Cabeza lectora: ¿tiene que leer en ambos lados del $?
  - Donde está la cabeza: *
  - contenido reemplazado por *: en la posición "I" a la dcha del $.
- A la dcha del $, estructura análoga a MT Transcriptora de Información , con:
  - longitud de la dirección y etiquetas, *"l" = E(log 2 |Q|) + 1*
  - longitud de los registros, *"m" = 2 x l + 1*

35

MT y Computabilidad

- Turing demostró con su MT (y sus extensiones) que todo problema computable (resoluble), lo es en una MTU.
- Complejidad computacional:
  - Se basa en tratar de dar respuesta a la siguiente pregunta:
    - *¿Qué hace a algunos problemas computacionalmente difíciles y a otros sencillos?*
  - Estudia el orden de complejidad de un algoritmo que resuelve un problema *decidible.*
  - Para ello, considera los 2 tipos de recursos requeridos durante el cómputo para resolver un problema:
    - Tiempo: Número de pasos base de ejecución de un algoritmo para resolver un problema.
    - Espacio: Cantidad de memoria utilizada para resolver un problema.

36

Funciones NO computables (I)

- ¿Cuáles son los problemas/funciones no computables?
- Equivalente a los “no-decidibles”:
  - **Función de Rado**:
  - **Secuencias aleatorias**
  - **El teorema de Fermat**: $a^n+b^n = c^n$ / a, b, c ≠ 0 y n entero >2
  - **Los primos pares**:

37

Funciones NO computables (II)

- ¿Cuáles son los problemas/funciones no computables?
- Equivalente a los “no-decidibles”:
  - **Función de Rado**: El Problema del Castor Afanoso:¿Cuál es el número máximo de 1’s que pueden ser escritos por una máquina de Turing de *N* estados (donde *N* no incluye el estado final) que termina en parada, y que comienza con una cinta inicialmente en blanco? Este número, que varía en función del número de estados de la máquina, se denota σ (N). Una máquina que produce σ (N) celdas no en blanco se denomina Castor Afanoso.
  - **Secuencias aleatorias**
  - **El teorema de Fermat**
  - **Los primos pares**

38

Funciones NO computables (III)

- Función de Rado:

Num. estados	Num max. 1's impresos	Cota inferior para el valor de σ
3	σ(3)	6
4	σ(4)	12
5	σ(5)	17
6	σ(6)	35
7	σ(7)	22.961
8	σ(8)	3^{92}
9	σ(9)	$3^{92}+1$
10	σ(10)	$((a^a)^a)^{\dots a} = a^a$

Funciones NO computables (IV)

- ¿Cuáles son los problemas/funciones no computables?
- Diferentes de los "no-decidibles":
  - **Función de Rado**: El Problema del Castor Afanoso:¿Cuál es el número máximo de 1's que pueden ser escritos por una máquina de Turing de *N* estados (donde *N* no incluye el estado final) que termina en parada, y que comienza con una cinta inicialmente en blanco? Este número, que varía en función del número de estados de la máquina, se denota ∑ (N). Una máquina que produce ∑ (N) celdas no en blanco se denomina Castor Afanoso.
  - **Secuencias aleatorias**
  - **El teorema de Fermat**
  - **Los primos pares**:

Funciones NO computables (V)

- ¿Cuáles son los problemas/funciones no computables?
- Diferentes de los "no-decidibles":
  - **Función de Rado**:
  - **Secuencias aleatorias**
  - **El teorema de Fermat**: $a^n+b^n = c^n$ / a, b, c ≠ 0 y *n* entero >2
  - **Los primos pares**:

41

Funciones NO computables (VI)

- ¿Cuáles son los problemas/funciones no computables?
- Diferentes de los "no-decidibles":
  - **Función de Rado**:
  - **Secuencias aleatorias**
  - **El teorema de Fermat**:
  - **Los primos pares**: Existe un número infinito de primos *p* tales que *p* + 2 también es primo. Ejs: 3 y 5 son primos pares, 11 y 13 ó 29 y 31. según los primos son más grandes la frecuencia de aparición de pares va disminuyendo, pero siguen surgiendo pares de primos gemelos aun entre números de tamaños enormes.

42

Paradojas

- La **paradoja de Russell** o **paradoja del barbero**, 1901,
  - En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet *diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas*. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que ***los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas***. Cierto día el emir llamó a As-Samet para que lo afeitara y él le contó sus angustias:
    - En mi pueblo soy el único barbero. *No puedo afeitar al barbero de mi pueblo, ¡que soy yo!, ya que si lo hago, entonces puedo afeitarme por mí mismo, por lo tanto ¡no debería afeitarme! Pero, si por el contrario no me afeito, entonces algún barbero debería afeitarme, ¡pero yo soy el único barbero de allí!*
  - El emir pensó que sus pensamientos eran tan profundos, que lo premió con la mano de la más virtuosa de sus hijas. Así, el barbero As-Samet vivió para siempre feliz y barbón.

43

El problema de la Parada (I)

NO existe una Máquina de Turing que pueda decidir si una Máquina de Turing se va a parar: problema de la parada.

- Prueba por reducción al absurdo:
  - Supongamos que si existe esa MT y llamémosla ***A***
  - ***A*** tiene codificado en su cinta (parecido a como ocurre en MTU) una MT (***MTp***) y su cinta (***C***). A la salida hará:

$$A(MTp, C) = \begin{cases} 1 \, si \; MTp \, con \, C \; se \; para \\ 0 \, si \; MTp \, con \, C \; no \; se \; para \end{cases}$$

  - La MT ***A*** cuando escribe un 1, entra en un bucle ∞ (no se para)

44

El problema de la Parada (II)

- ***MT_p***: es la p-ésima MT
  - La cinta ***C*** puede ser binaria, de forma que ***C*** se corresponderá con un número binario (***q***).
- Supongamos que escribimos una MT_1 que:
  - Recibe el número en binario *k,*
  - lo duplica y
  - aplica al resultado ***A (MT_k,k)***.
- Dicha máquina será una MT determinada, por ejemplo la *n*-ésima.

45

El problema de la Parada (III)

- ***¿Qué ocurrirá con A (MT_n,n)?***:
  - Si ***A(MT_n,n)*** se para ➔ MT_n (n) no acaba
    - Si MT_n (n) no se para ➔ A(n,n) acaba
    - Si A (n,n) no se para ➔ MT_n (n) acaba
  - Es decir, si MT_n (n) no se para ➔ MT_n (n) se para, ABSURDO!
- Por otra parte:
  - Si ***A(MT_n,n)*** no se para ➔ MT_n (n) acaba
    - Si MT_n (n) se para ➔ A(n,n) no acaba
    - Si A (n,n) se para ➔ MT_n (n) no acaba
  - Es decir, si MT_n (n) se para ➔ MT_n (n) no se para, ABSURDO!
- Como hemos llegado a un absurdo, la hipótesis de partida es falsa.

46

El problema de la Parada (IV)

PRIMERO: Proponemos la existencia de un programa que:

Dado el número de Gödel de un programa

Programa propuesto

Se detendrá con la variable **x = 1** si la entrada representa un programa autoterminante o **x = 0** si no es así.

...

ENTONCES: si existe tal programa, podemos modificarlo.

Añadiéndole una estructura mientras / fin

Programa propuesto

mientras X no 0, hacer; fin;

Para producir un programa nuevo, con número de Gödel g

47

El problema de la Parada (V)

...

SIN EMBARGO: si ese nuevo programa no fuera autoterminante (X=0) y

Lo arrancamos con entrada g

La ejecución llegaría a este punto con X=0

Pasaría por alto esta parte del Programa

Programa propuesto

mientras X no 0 hacer; Fin;

y se detendrá la ejecución

Es decir, si el nuevo programa no es autoterminante, si es autoterminante.

AHORA BIEN: si ese nuevo programa fuera autoterminante (X=1) y

Lo arrancamos con entrada **g**

La ejecución llegaría a este punto con X=1

Y la ejecución quedaría atrapada en este bucle eternamente

Programa propuesto

mientras X no 0 hacer; fin

es decir, si el nuevo programa es autoterminante, no es autoterminante

48

El problema de la Parada (V)

…

…

En CONSECUENCIA:

La existencia del Programa propuesto autoterminante

Programa propuesto

Conduciría a

la existencia de un nuevo programa

Programa propuesto

mientras X no 0 hacer; fin

que no es ni no autoterminante.

Así que la existencia del programa propuesto es imposible.

49

7. Máquinas de Turing

Grado Ingeniería Informática

Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales