Hoja 10

Bases Ortogonales

Problema 10.1 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales, respecto al producto escalar usual:

a) $\{(-1,4,-3)^t, (5,2,1)^t, (3,-4,-7)^t\}$.

b) $\{(3,-2,1,3)^t, (-1,3,-3,4)^t, (3,8,7,0)^t\}$.

c) $\{(2,-7,-1)^t, (6,3,-9)^t, (3,1,-1)^t\}$.

d) $\{(5,-4,0,3)^t, (-4,1,-3,8)^t, (3,3,5,-1)^t\}$.

Problema 10.2 Probar que (u_1, u_2, u_3) es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto al producto escalar usual y expresar x como combinación lineal de los u_i's.

a) $u_1 = (1,0,1)^t\,, \quad u_2 = (-1,4,1)^t\,, \quad u_3 = (2,1,-2)^t\,, \quad x = (8,-4,-3)^t$.

b) $u_1 = (3,-3,0)^t \quad u_2 = (2,2,-1)^t\,, \quad u_3 = (1,1,4)^t\,, \quad x = (5,-3,1)^t$.

Problema 10.3 Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente independiente. Sea W el espacio vectorial generado por cada conjunto. Usar el método de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal de W. Finalmente encontrar una base ortonormal de W.

a) $\{(3,0,-1)^t, (8,5,-6)^t\}$.

b) $\{(1,-4,0,1)^t, (7,-7,-4,1)^t\}$.

c) $\{(0,4,2)^t, (5,6,-7)^t\}$.

d) $\{(3,-1,2,-1)^t, (-5,9,-9,3)^t\}$.

Problema 10.4 Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\left\{(x,y,z)^t : x-2y+3z=0\right\} .$$

Encontrar una base ortonormal de W. Extender la base obtenida a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Problema 10.5 Consideremos la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface $T(e_1) = e_1 + e_2$ y $T(e_2) = -e_1 + e_2$.

1. ¿Preserva la longitud?
2. Encontrar el núcleo y la imagen de esta transformación y sus correspondientes dimensiones.

Problema 10.6 Encontrar una base ortogonal para el espacio columna de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Problema 10.7 Encontrar, si es posible, la factorización QR de las matrices del Problema 10.6.

Problema 10.8 Demostrar que $S = (v_1, v_2, v_3)$ es una base de $\mathbb{R}^3$, siendo $v_1 = (1, 0, 1)^t$, $v_2 = (2, -1, 1)^t$ y $v_3 = (1, 1, 5)^t$.

1. Hallar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$.
2. Encontrar las coordenadas de v_2 y v_3 respecto a la base B.
3. Obtener la matriz de cambio de base T_{SB} para pasar de la base S a la base B. Comprobar que $[v_3]_S = T_{SB}\,[v_3]_B$.