Ejercicios

1. Comprobar que la siguiente deducción no es correcta utilizando el método de Resolución.

$\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

(1) $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \sim\exists y \forall x P(x,y)$
(2) $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists x \sim P(x,y)$
(3) $\forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists u \sim P(u,y))$
(4) $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge \forall v \exists u \sim P(u,v))$
(5) $\forall x \exists y \forall v(P(x,y) \wedge \exists u \sim P(u,v))$
(6) $\forall x \exists y \forall v \exists u(P(x,y) \wedge \sim P(u,v))$ (Prenex)
(7) $\forall x \forall v \exists u(P(x,f(x)) \wedge \sim P(u,v))$
(8) $\forall x \forall v(P(x,f(x)) \wedge \sim P(g(x,v),v))$ (Skolem)

Cláusula 1: $P(x,f(x))$
Cláusula 2: $\sim P(g(x, v),v))$

No se puede hacer ninguna sustitución que unifique las dos cláusulas anteriores. Es importante ver que hay que sustituir una variable cada vez que aparece en una cláusula: es decir, en $P(x,f(x))$ la sustitución debe hacerse igual en los dos sitios donde aparece x. En las dos cláusulas sí que se puede reemplazar la x por variables distintas si se desea.

2. Comprobar, mediante el método de Resolución, si la siguiente deducción es correcta.

$\exists x \forall y(A(x,y) \rightarrow B(y,x) \vee C(y))$
$\forall x \forall y(D(x,y) \rightarrow \sim C(x))$
$D(a, b) \wedge \forall x \forall y A(x,y)$

$\exists x B(a,x)$

Premisa 1:
(1) $\exists x \forall y(A(x, y) \rightarrow B(y, x) \vee C(y))$ $\leftrightarrow$ Interdef.
(2) $\exists x \forall y(\sim A(x, y) \vee B(y, x) \vee C(y))$

Premisa 2:
(1) $\forall x \forall y(D(x, y) \rightarrow \sim C(x))$ $\leftrightarrow$ Interdef.
(2) $\forall x \forall y(\sim D(x, y) \vee \sim C(x))$

Premisa 3: No requiere más transformación.

Conclusión:
(1) $\sim\exists x B(a, x)$ $\leftrightarrow$ Interdef
(2) $\forall x \sim B(a, x)$

Pasamos a forma PRENEX la fórmula P1 ∧ P2 ∧ P3∧∼ Q, que comprobaremos si es insatisfacible:

(1) ∃x∀y(∼A(x,y) ∨ B(y,x) ∨ C(y)) ∧ ∀x∀y(∼D(x, y) ∨ ∼C(x)) ∧ D(a,b) ∧ ∀x∀yA(x,y) ∧ ∀x ∼B(a,x)

(2) ∃x∀y(∼A(x,y) ∨ B(y,x) ∨ C(y)) ∧ ∀u∀v(∼D(u,v) ∨ ∼C(u)) ∧ D(a,b) ∧ ∀r∀sA(r,s) ∧ ∀t∼B(a,t)

(3) ∃x∀y∀u∀v∀r∀s∀t((∼A(x,y) ∨ B(y,x) ∨ C(y)) ∧ (∼D(u,v) ∨ ∼C(u)) ∧ D(a,b) ∧ A(r,s) ∧ ∼B(a,t))

Transformamos a forma de Skolem y extraemos las cláusulas. No hay que hacer cierre existencial porque no hay variables libres. Luego sustituir los existenciales que están en cabeza por constantes:

(1) ∃x∀y∀u∀v∀r∀s∀t((∼A(x,y) ∨ B(y,x) ∨ C(y)) ∧ (∼D(u,v) ∨ ∼C(u)) ∧ D(a,b) ∧ A(r,s) ∧ ∼B(a, t))

(2)∀y∀u∀v∀r∀s∀t((∼A(c,y) ∨ B(y,c) ∨ C(y)) ∧ (∼D(u,v) ∨ ∼C(u)) ∧ D(a,b) ∧ A(r, s) ∧ ∼B(a,t))

Cláusula 1: ∼A(c,y) ∨ B(y,c) ∨ C(y)
Cláusula 2: ∼D(u,v) ∨ ∼C(u)
Cláusula 3: D(a,b)
Cláusula 4: A(r,s)
Cláusula 5: ∼B(a,t)

Resolventes:

Cláusula 6: B(s, c) ∨ C(s)	Cambios y/s r/c	en 1 y 4
Cláusula 7: C(a)	Cambios s/a t/c en 6 y 5	
Cláusula 8: ∼D(a,v)	Cambios u/a en 2 y 7	
Cláusula vacía:	Cambios v/b en 3 y 8	

La deducción es correcta porque la fórmula que comprobamos es insatisfacible.

3. Comprobar, mediante el método de Resolución, si la siguiente deducción es correcta.

$\forall x \exists y([(\sim P(x,a) \vee P(y,x)) \to (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [Q(y) \to R(x)])$

$\exists x \sim (R(x) \to P(x,a))$

a) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la premisa, y la ponemos en forma conjuntiva de cara a la transformación en Skolem.

1. $\forall x \exists y([(\sim P(x,a) \vee P(y,x)) \to (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [Q(y) \to R(x)])$
2. $\forall x \exists y([\sim(\sim P(x,a) \vee P(y,x)) \vee (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$
3. $\forall x \exists y([(P(x,a) \wedge \sim P(y,x)) \vee (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$
4. $\forall x \exists y([(P(x,a) \vee Q(y)) \wedge \sim P(y,x)] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$ (Distributiva $A \wedge (B \vee C)$)
5. $\forall x \exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$ (Asociativa)

b) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la conclusión negada:

1. $\sim \exists x \sim (R(x) \to P(x,a))$
2. $\forall x (R(x) \to P(x,a))$
3. $\forall x (\sim R(x) \vee P(x,a))$

c) Pasamos a skolem $P \wedge \sim Q$

1. $\forall x \exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)]) \wedge \forall x[\sim R(x) \vee P(x,a)]$
2. $\forall x (\exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)]) \wedge \forall z[\sim R(z) \vee P(z,a)])$
3. $\forall x \exists y([P(x, a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge \forall z[\sim R(z) \vee P(z,a)])$
4. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,a)])$

5. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,a)])$ (Prenex)
6. $\forall x \forall z([P(x,a) \vee Q(f(x))] \wedge \sim P(f(x),x) \wedge [\sim Q(f(x)) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z, a)])$

("y" cambia a la función "f(x)")

Cláusulas de la forma de Skolem

$P(x, a) \vee Q(f(x))$, $\sim P(f(x),x)$, $\sim Q(f(x)) \vee R(x)$, $\sim R(z) \vee P(z,a)$

d) Resolución

(1) $P(x, a) \vee Q(f(x))$	Cláusula 1
(2) $\sim P(f(x), x)$	Cláusula 2
(3) $\sim Q(f(x)) \vee R(x)$	Cláusula 3
(4) $\sim R(z) \vee P(z, a)$	Cláusula 4
(5) $P(x, a) \vee R(x)$	Resolución 1,3
(6) $P(x, a)$	Resolución (z/x) 4,5
(7) $P(f(a), a)$	Resolución (x/a en 2 ,x/f(a) en 6) 2,6
(8) Cláusula vacía	Resolución (x/a) 2,7

En la línea 7 se usa una sustitución diferente para la "x" en la cláusula 2 (x2) y en la cláusula 6 (x6). Como es posible obtener la cláusula vacía, la deducción original es correcta.

4. Comprobar, mediante el método de Resolución, si la siguiente deducción es correcta.

$\forall x\exists y(E(x) \rightarrow E(y) \wedge M(y,x))$

$\forall x(\sim\exists y M(y, x)\rightarrow\sim E(x))$

(1) $\forall x\exists y(E(x) \rightarrow E(y) \wedge M(y,x)) \wedge \sim\forall x(\sim\exists y M(y,x) \rightarrow \sim E(x))$

(2) $\forall x\exists y(E(x) \rightarrow E(y) \wedge M(y,x)) \wedge \exists x\sim(\sim\exists y M(y,x) \rightarrow \sim E(x))$

(3) $\forall x\exists y(E(x) \rightarrow E(y) \wedge M(y,x)) \wedge \exists x(\sim\exists y M(y,x) \wedge E(x))$

(4) $\forall x\exists y(\sim E(x) \vee (E(y) \wedge M(y,x))) \wedge \exists x(\sim\exists y M(y,x) \wedge E(x))$

(5) $\forall x\exists y((\sim E(x) \vee E(y)) \wedge (\sim E(x) \vee M(y,x))) \wedge \exists x(\forall y\sim M(y,x) \wedge E(x))$

(6) $\exists u(\forall x\exists y((\sim E(x) \vee E(y)) \wedge (\sim E(x) \vee M(y,x))) \wedge \forall y\sim M(y,u) \wedge E(u))$

(7) $\exists u\forall x(\exists y((\sim E(x) \vee E(y)) \wedge (\sim E(x) \vee M(y,x))) \wedge \forall y\sim M(y,u) \wedge E(u))$

(8) $\exists u\forall x\exists y((\sim E(x) \vee E(y)) \wedge (\sim E(x) \vee M(y,x)) \wedge \forall v\sim M(v,u) \wedge E(u))$

(9) $\exists u\forall x\exists y\forall v((\sim E(x) \vee E(y)) \wedge (\sim E(x) \vee M(y,x)) \wedge \sim M(v,u) \wedge E(u))$ (Prenex)

(10) $\forall x\exists y\forall v((\sim E(x) \vee E(y)) \wedge (\sim E(x) \vee M(y,x)) \wedge \sim M(v,a) \wedge E(a))$

(11) $\forall x\forall v((\sim E(x) \vee E(f(x))) \wedge (\sim E(x) \vee M(f(x),x)) \wedge \sim M(v,a) \wedge E(a))$ (Skolem)

Cláusulas:

C1: $\sim E(x) \vee E(f(x))$

C2: $\sim E(x) \vee M(f(x),x)$

C3: $\sim M(v,a)$

C4: $E(a)$

C5: $\sim E(a) \vee M(f(a),a)$ x/a en C2

C6: $M(f(a),a)$ resolución C4 y C5

C7: vacía v/f(a) en C3 y resolución con C6

5. Compruebe, mediante el método de resolución, si la siguiente deducción es correcta.

$\sim(\exists x\, (P(x) \wedge \sim Q(x))),\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\, (\sim P(x) \rightarrow S(x)) \Rightarrow \forall x\, (\sim R(x) \rightarrow S(x))$

1. $\sim (\exists x\, (P(x) \wedge \sim Q(x))) \wedge \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \forall x\, (\sim P(x) \rightarrow S(x)) \wedge \sim\forall x\, (\sim R(x) \rightarrow S(x))$
2. $\sim (\exists x\, (P(x) \wedge \sim Q(x))) \wedge \forall x\, ((\sim Q(x) \vee R(x)) \wedge \forall x\, (P(x) \vee S(x)) \wedge \sim\forall x\, (R(x) \vee S(x))$
3. $\forall x\, (\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x\, (\sim Q(x) \vee R(x)) \wedge \forall x\, (P(x)\vee S(x)) \wedge \exists x\, (\sim R(x) \wedge \sim S(x))$
4. $\forall x\, (\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y\, (\sim Q(y) \vee R(y)) \wedge \forall z\, (P(z)\vee S(z)) \wedge \exists w\, (\sim R(w) \wedge \sim S(w))$
5. $\exists w\, [\forall x\, (\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y\, (\sim Q(y) \vee R(y)) \wedge \forall z\, (P(z)\vee S(z)) \wedge \sim R(w) \wedge \sim S(w)]$
6. $\exists w\, [\forall x\forall y\, \forall z\, (\sim P(x) \vee Q(x)))\wedge (\sim Q(y) \vee R(y)) \wedge (P(z)\vee S(z)) \wedge \sim R(w) \wedge \sim S(w)]$

7. $\forall x \forall y\ \forall z\ (\sim P(x)\ \vee Q(x))) \wedge (\sim Q(y) \vee R(y)) \wedge (P(z) \vee S(z)) \wedge \sim R(a)\ \wedge \sim S(a)$

Cláusulas

C1: $\sim P(x)\ \vee Q(x)$	
C2: $\sim Q(y) \vee R(y)$	
C3: $P(z) \vee S(z)$	
C4: $\sim R(a)$	
C5: $\sim S(a)$	
C6: $\sim Q(a)$	y/a en C2 y Resol a C2 y C4
C7: $\sim P(a)$	x/a en C1 y resol C1 y C6
C8: S(a)	z/a en C3 y resol a C3 y C7
C9: vacía	Resol C5 y C8