PROBLEMA 6.8 Usar el teorema del valor medio para calcular $\lim_{x\to\infty}\left((1+x)^{1+\frac{1}{1+x}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right)$

Consideremos la función

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\log x}$$

Continua y derivable (infinitas veces) en $(0,\infty)$.

$$f'(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\log x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= x^{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\log x\right) =$$

$$= x^{1/x}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\log x}{x}\right)$$

$\Rightarrow$ Aplicando el teorema del valor medio en $[x, x+1]$:

$$x_0^{1/x_0}\left(1+\frac{1}{x_0}-\frac{\log x_0}{x_0}\right) = (1+x)^{1+\frac{1}{1+x}} - x^{1+1/x}$$

para algún $x_0 \in (x, x+1)$

Si ahora tomamos $x\to\infty$ es evidente que $x_0\to\infty$.

Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left((1+x)^{1+\frac{1}{1+x}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x_0\to\infty} x_0^{1/x_0}\left(1+\underbrace{\cancel{\frac{1}{x_0}}}_{\to 0}-\underbrace{\cancel{\frac{\log x_0}{x_0}}}_{\to 0}\right)$$

$$= \lim_{x_0\to\infty} x_0^{1/x_0}$$

$$= \lim_{x_0\to\infty} e^{\frac{\log x_0}{x_0}} = e^0 = 1$$