Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales
Curso 2019/2020
Ejercicios de Autómatas Finitos
Tema 3 – Parte 3

1. Aparcar el tiempo máximo en las calles de GOTHAM cuesta 1 euro. Los parquímetros admiten hasta una cantidad máxima de 1 euro. Cuando la cantidad introducida es la máxima o menor, se puede presionar sobre el botón de emitir ticket, de modo que se emite dicho ticket e indica que el crédito introducido es 0. Sin embargo, cuando se introduce una cantidad de dinero mayor de la permitida, i.e. 1euro, devuelve directamente todo el dinero, sin haber presionado el botón de emitir ticket, e indica que el crédito introducido es 0. En el parquímetro sólo se pueden introducir monedas de 10 céntimos, 20 céntimos, 50 céntimos y 1 euro. Diseñar el AFD correspondiente que controle la máquina. ¿Diseñarías un autómata con transición λ para controlar la máquina? Justificar la respuesta.

2. El castillo encantado. El problema es el expuesto en esta carta, que debe resolverse utilizando la teoría de autómatas finitos.

   “Querido amigo: al poco tiempo de comprar esta vieja mansión tuve la desagradable sorpresa de comprobar que está hechizada con dos sonidos de ultratumba que la hacen prácticamente inhabitable: un canto picaresco y una risa sardónica.

   Aún conservo, sin embargo, cierta esperanza, pues la experiencia me ha demostrado que su comportamiento obedece a ciertas leyes, oscuras pero infalibles, y que puede modificarse tocando el órgano y quemando incienso. En cada minuto, cada sonido está presente o ausente. Lo que cada uno de ellos hará en el minuto siguiente depende de lo que pasa en el minuto actual, de la siguiente manera:

   El canto conservará el mismo estado (presente o ausente) salvo si durante el minuto actual no se oye la risa y toco el órgano, en cuyo caso el canto toma el estado opuesto.

   En cuanto a la risa, si no quemo incienso, se oirá o no según que el canto esté presente o ausente (de modo que la risa imita al canto con un minuto de retardo). Ahora bien, si quemo incienso la risa hará justamente lo contrario de lo que hacía el canto.

   En el momento en que le escribo estoy oyendo a la vez la risa y el canto. Le quedaré muy agradecido si me dice qué manipulaciones de órgano e incienso debo seguir para restablecer definitivamente la calma”.

Ayuda: ¿cuál sería y qué representaría el alfabeto? ¿cuál sería el conjunto de estados y qué representaría cada estado?

3. Considérese el siguiente problema:

   Un hombre, un lobo, una oveja y un repollo están en el lado izquierdo de un río. Hay una lancha en la cual pueden ir el hombre y uno de los otros tres. El hombre desea cruzar al lado derecho del río y puede cruzar sólo a uno de los otros por vez. No obstante, si el hombre deja al lobo y a la oveja solos, seguramente el lobo se comerá a la oveja. De igual modo si se quedan la oveja y el repollo solos, la oveja se comerá al repollo. ¿Es posible cruzar el río sin que la oveja o el repollo sean comidos?

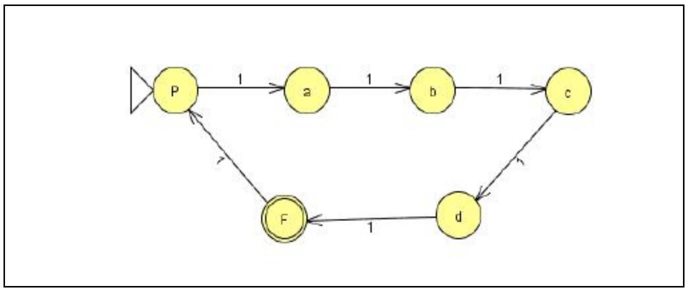
Resolver este problema mediante Autómatas Finitos. Considerar que el estado inicial del AF es aquel en el cual se encuentran los cuatro del lado izquierdo y el estado final es aquel en el cual los cuatro están del lado derecho.

Se pide:

1. Indicar cuál sería el alfabeto. ¿Qué significado tienen los elementos del alfabeto? ¿Qué significado tendría una palabra? ¿Qué significado tendría una sentencia?
2. Indicar el conjunto de estados. ¿Qué significado tienen los estados?
3. Como reformularías la siguiente pregunta desde el punto de vista de Lenguajes y Autómatas: "¿Es posible cruzar el río sin que la oveja o el repollo sean comidos?"
4. Diseña el AFD que permita reconocer las palabras que pertenezcan al lenguaje.

4. Indica el grafo de un Autómata Finito No Determinista, con sólo el número de estados indicados que reconozca cada uno de los siguientes lenguajes. El alfabeto es siempre {0,1}.
   a) El lenguaje {0} *<u>con sólo 2 estados</u>*.
   b) El lenguaje de cadenas acabadas en 01 *<u>con sólo tres estados</u>*.
   c) El lenguaje $0^m1^n0^p$ ($m \geq 0, n \geq 0, p \geq 1$) *<u>con sólo tres estados</u>*.

5. Dado el siguiente autómata finito, marque las afirmaciones que considere correctas



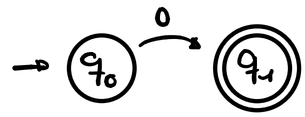
   a. Q/E0 estaría formado por las clases de equivalencia C1={P, a, b, c, d} y C2={F}
   b. Q/E1 estaría formado por las clases de equivalencia C1={P, a, b, c} y C2={d, F}
   c. Q/E3 estaría formado por las clases de equivalencia C1={P, c, d}, C2={d,F}, C3={a,b}
   d. Q/E4 estaría formado por las clases de equivalencia indicadas en c.
   e. Es necesario calcular Q/E0, Q/E1, Q/E2, Q/E3 y Q/E4 para determinar si las sentencias anteriores son verdaderas o falsas

6. Dado el lenguaje $(01)^n$ con $n \geq 0$, marque el autómata que reconoce el lenguaje indicado. Además, obtenga el AFD mínimo equivalente del autómata seleccionado.
   a. AF=[{0,1}, {A,B,C,F}, f, A, {F}]
      f(A,0)=B, f(A, λ)= λ, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,1)= λ
   b. AF=[{0,1}, {A,B,C,F}, f, A, {F}]
      f(A,0)=B, f(A, λ)=F, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,1)=F
   c. AF=[{0,1}, {A,B,C,F}, f, A,{F}]
      f(A, B)=0, f(A,F)= λ, f(C,B)=0, f(B,C)=1, f(B,F)=1
   d. AF=[{0,1}, {A,B,C,F}, f, A, {F}]
      f(B,0)=A, f(F, λ)=A, f(B,0)=C, f(C,1)=B, f(F,1)=B

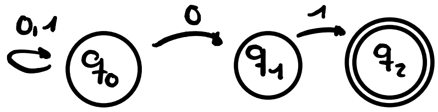
1, 2, 3) No es completamente TALF, pero en papel estan hechos.

4) AFND $\Sigma = \{0, 1\}$

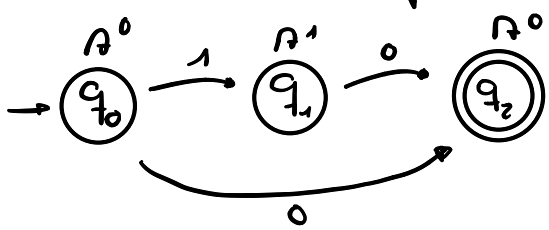
a) $L = \{0\}$ 2 estados



b) Cadenas acabadas en 01 3 estados



c) $0^m 1^n 0^p$ $m \geq 0$ $n \geq 0$ $p \geq 1$ 3 estados



5)

a) V

b) F no puede d entrar en {F}

c) F

d) F

e) F

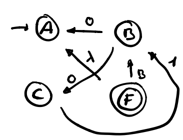
6) $(01)^n$ $n \geq 0$

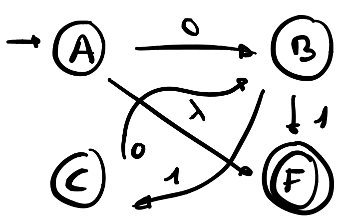
a) λ no es un estado. X

b) Correcto

c) Con B no se transita. X

d) No hay reglas que salgan del inicial

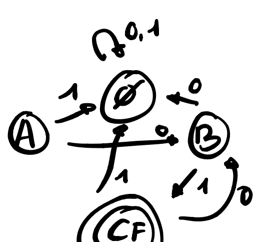




AFND → AFD → AFD Minimo

	0	1	λ	λ*	λ*0λ*	λ*1λ*
→ A	B	—	F	A, F	B	—
B	—	C, F	—	B	—	C, F
C	B	—	—	C	B	—
* F	—	—	—	F	-	—

$$T^* = \begin{pmatrix} (A,A) & (A,F) \\ (B,B) & \\ (C,C) & \\ (F,F) & \end{pmatrix}$$



	0	1	Q/E₀	Q/E₁ 0	Q/E₁ 1	Q/E₂ 0	Q/E₂ 1
→ A	B	∅	C_0	C_0	C_0	C_1	C_0
B	∅	CF	C_0	C_0	C_1	—	—
∅	∅	∅	C_0	C_0	C_0	C_0	C_0
* CF	B	∅	C_1	—	—	—	—

Ya es mínimo

$Q/E = Q/E_{2} =$ $_{n-2}$

7. Marque las afirmaciones verdaderas. Justifique la respuesta.
    a. Dado un AFND siempre es posible encontrar un AFD que reconozca el mismo lenguaje.
    b. Dos AFD's son equivalentes si sus AF mínimos respectivos son isomorfos.
    c. Todo autómata finito no determinista puede ser transformado en un autómata finito determinista equivalente.
    d. Si un autómata finito no presenta transiciones lambda entonces es determinista.
    e. Un autómata finito, si con distintos símbolos realiza una transición entre dos estados q0 y q1, entonces el autómata es no determinista.
    f. Si en el proceso de cálculo del conjunto cociente de un AFD de 5 estados hemos obtenido Q/E3, podemos afirmar que Q/E3= Q/E.
    g. Los autómatas finitos no deterministas necesariamente realizan transiciones entre estados mediante λ.
    h. Los autómatas finitos no deterministas no pueden aceptar ninguna palabra, por tanto sólo aceptan el lenguaje vacío.
    i. f'(p,111) = s y f'(p,110) =s indican que el autómata finito es no determinista.
    j. f'(p,110) = s y f'(p,110) = q indican que el autómata finito es no determinista.
    k. Un AFD es conexo si todos los estados son accesibles desde el estado inicial.
    l. Un AFD es conexo si todos los estados son accesibles entre sí.
    m. Dos AFD no conexos que reconocen el mismo lenguaje lo siguen haciendo si eliminamos los estados inaccesibles.
    n. Un AFD no conexo no puede reconocer ningún lenguaje.
    o. Dos AFDs que no son equivalentes pueden ser isomorfos.
    p. Si dos AFDs son isomorfos reconocen el mismo lenguaje.
    q. Si dos AFDs son equivalentes tienen que ser isomorfos.
    r. Dos AFDs son equivalentes si al hacer su suma directa los estados finales están en la misma clase de equivalencia.

7)

a) V

b) V

c) V

d) F, hay más condiciones (transiciones λ / faltan transiciones / multiples trans.)

e) F

f) V $Q/E_{n-2} \Rightarrow Q/E$

g) F

h) F

i) F Con entradas distintas el mismo estado $\xrightarrow{0,1}$

j) V Con la misma entrada distintos estados

k) V

l) F

m) V

n) F

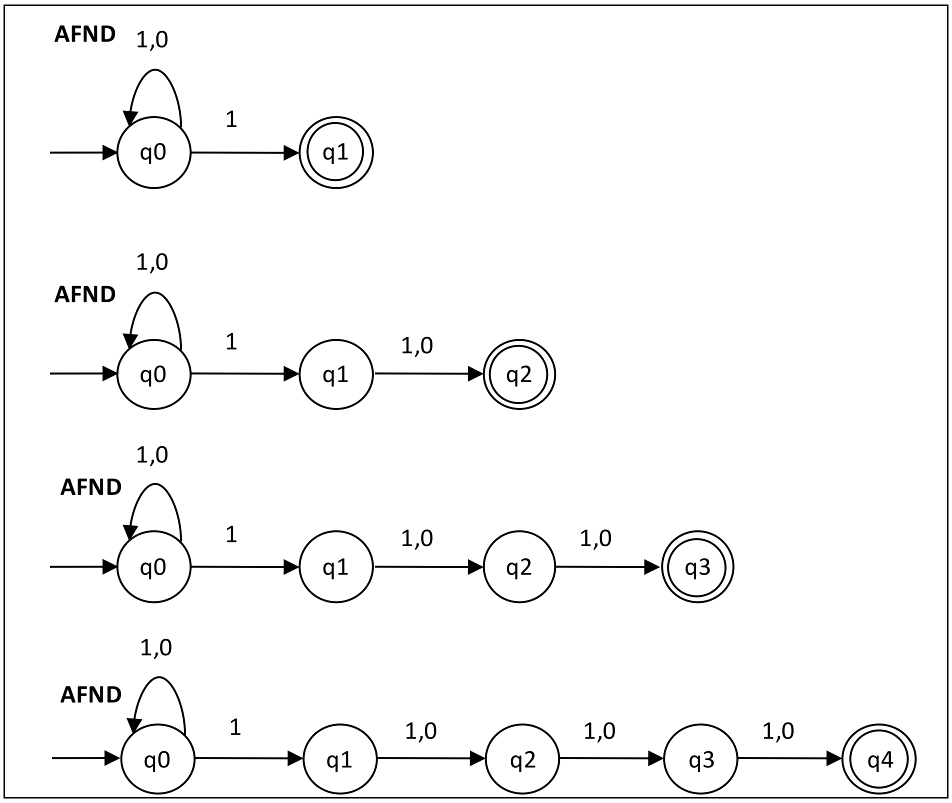
o) F

p) V

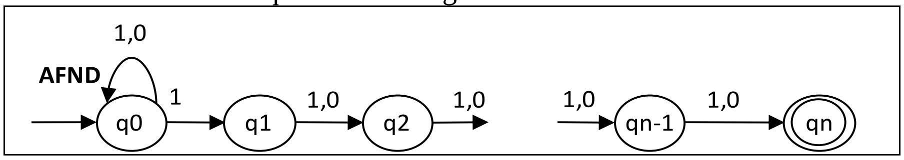
q) F

r) F Son los iniciales.

8. Obtenga el grafo de los Autómatas Finitos Deterministas que se corresponden con los AFND indicados en las siguientes figuras.



¿Cuántos estados tendrá el AFD equivalente al siguiente Autómata No Determinista?



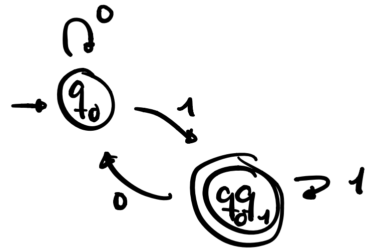
9. Obtener el AFD mínimo equivalente a cada uno de los siguientes Autómatas Finitos No Deterministas, describiendo las transformaciones intermedias: AFND $\rightarrow$ AFD $\rightarrow$ AFD mínimo.

a) AFND$_A$=({a,b,c},{Q0,Q1,Q2,Q3},f,Q0,Q3) f(Q0, a) = Q1 ; f(Q0, b) = Q2 ; f(Q0, c) = Q3 f(Q1, a) = Q2 ; f(Q1, b) = Q3 ; f(Q1, c) = Q1 f(Q2, a) = Q3 ; f(Q2, b) = Q1 ; f(Q2, c) = Q3	b) AFND$_B$=({a,b,c},{Q0,Q1,Q2,Q3,Q7},f,Q0,Q3) f(Q0, a) = Q0,Q2,Q3 ; f(Q0, c) = Q1 f(Q1, c) = Q3 ; f(Q2, b) = Q2,Q3 f(Q7, b) = Q2,Q3
c) AFND$_C$=({a,b,c},{Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5},f,Q0,Q5) f(Q0, a) = Q1 ; f(Q1, a) = Q1,Q5 f(Q1, b) = Q2 ; f(Q2, b) = Q2,Q3,Q5 f(Q3, b) = Q2,Q3 ; f(Q3, c) = Q4 f(Q4, b) = Q2,Q3 ; f(Q4, c) = Q3	d) AFND$_D$=({c,f,d},{Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6},f,Q0,Q6) f(Q0, c) = Q1,Q4 ; f(Q0, f) = Q2,Q6 ; f(Q1, c) = Q1 f(Q1, f) = Q3 ; f(Q1, d) = Q4 ; f(Q2, c) = Q0 f(Q3, c) = Q3 ; f(Q3, f) = Q3 ; f(Q4, c) = Q4 f(Q4, f) = Q5 ; f(Q4, d) = Q5 ; f(Q5, c) = Q5 f(Q5, f) = Q5

8)

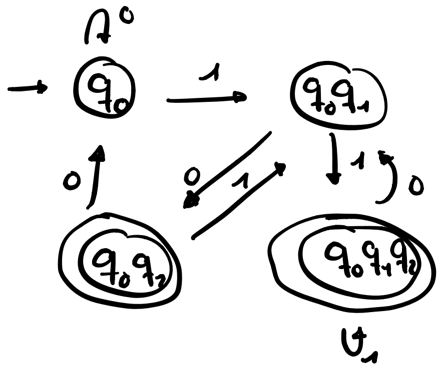
	0	1
→ q_0	q_0	q_0, q_1
* q_1	–	–

	0	1
→ q_0	q_0	q_0q_1
* q_0q_1	q_0	q_0q_1



	0	1
→ q_0	q_0	q_0, q_1
q_1	q_2	q_2
* q_2	–	–

	0	1
→ q_0	q_0	q_0q_1
q_0q_1	q_0q_2	$q_0q_1q_2$
* q_0q_2	q_0	q_0q_1
* $q_0q_1q_2$	q_0q_1	$q_0q_1q_2$



	0	1
→ q_0	q_0	q_0, q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_3
* q_3	–	–

	0	1
→ q_0	q_0	q_0q_1
q_0q_1	q_0q_2	$q_0q_1q_2$
q_0q_2	q_0q_3	$q_0q_1q_3$
$q_0q_1q_2$	$q_0q_2q_3$	$q_0q_1q_2q_3$
* q_0q_3	q_0	q_0q_1
* $q_0q_1q_3$	q_0q_2	$q_0q_1q_2$
* $q_0q_2q_3$	q_0q_3	$q_0q_1q_3$
* $q_0q_1q_2q_3$	$q_0q_2q_3$	$q_0q_1q_2q_3$

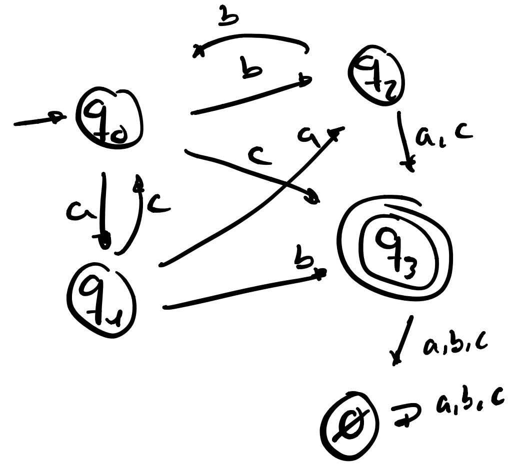
El ultimo tiene 16 estados $2^{n^{\circ}\text{estados}-1}$

El AFND con q_n estado, su equivalente tendrá: 2^n estados

9) AFND → AFD → AFD Mínimo

a)	a	b	c
→ q_0	q_1	q_2	q_3
q_1	q_2	q_3	q_1
q_2	q_3	q_1	q_3
q_3	—	—	—

	a	b	c
→ q_0	q_1	q_2	q_3
q_1	q_2	q_3	q_1
q_2	q_3	q_1	q_3
* q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



	a	b	c	Q/E0	a (Q/E1)	b	c		a	b	c
→ q_0	q_1	q_2	q_3	C_0	C_0	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_2
q_1	q_2	q_3	q_1	C_0	C_0	C_1	C_0	C_1	—	—	—
q_2	q_3	q_1	q_3	C_0	C_0	C_0	C_1		C_2	C_1	C_2
* q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_1	—	—	—	C_2	—	—	—
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_0	C_0	C_0	C_0	C_3	—	—	—

Ya era mínimo

b)	a	b	c
→ q_0	$q_0q_2q_3$	—	q_1
q_1	—	—	q_3
q_2	—	q_2, q_3	—
* q_3	—	—	—
q_7	—	$q_2 q_3$	—

	a	b	c
→ q_0	$q_0q_1q_3$	$\emptyset$	q_1
* $q_0q_2q_3$	$q_0q_2q_3$	q_2q_3	q_1q_3
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	q_3
* q_2q_3	$\emptyset$	q_2q_3	$\emptyset$
* q_1q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	q_3

	a	b	c	Q/E_0	a	b	c	
$\rightarrow q_0$	$q_0q_1q_3$	$\emptyset$	q_1	C_0	C_1	C_0	C_0	–
$* q_0q_2q_3$	$q_0q_2q_3$	q_2q_3	q_1q_3	C_1	C_1	C_1	C_1	–
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_0	C_0	C_0	C_0	–
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	q_3	C_0	C_0	C_0	C_1	–
$* q_2q_3$	$\emptyset$	q_2q_3	$\emptyset$	C_1	C_0	C_1	C_0	–
$* q_1q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	q_3	C_1	C_0	C_0	C_1	–

Ya es mínimo

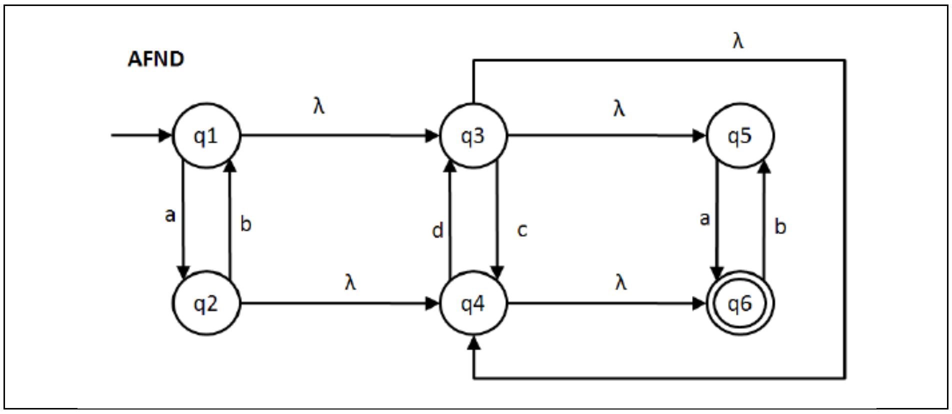
c)

10. Indica el grafo del Autómata Finito Determinista. El alfabeto es siempre {0,1}. El problema se puede resolver bien diseñando directamente el AFD, o resolverlo partiendo de los AFND obtenidos para el problema 4, y posteriormente obtener el AFD equivalente.
   a) El lenguaje $0^m1^n0^p$ ($m \geq 0, n \geq 0, p \geq 1$) (el AFND era con sólo tres estados)
   b) El lenguaje {0} (el AFND era con sólo 2 estados)

11. Dado el AFND (con transiciones lambda) descrito por la tabla siguiente, hallar el AFD equivalente.

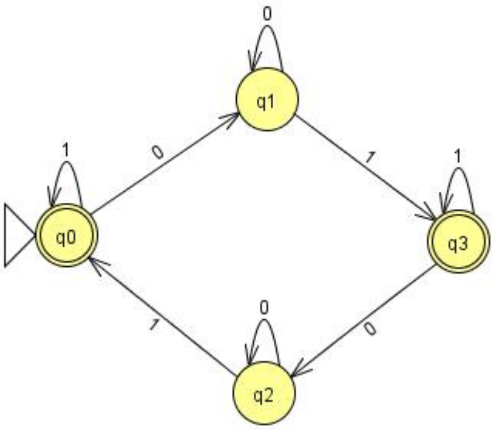
	a	**b**	**c**	**λ**
→p	p	q		q
q	q	p,r		r
r			s	p
*** s**	s			

12. Indica el grafo del Autómata Finito Determinista que se corresponde con el siguiente AFND:



13. Dados los 3 siguientes Autómatas Finitos Deterministas:

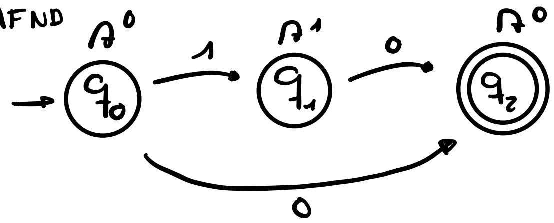
AFD1



10) $\Sigma = \{0,1\}$

a) $0^m 1^n 0^p \quad m \geq 0 \quad n \geq 0 \quad p \geq 1$

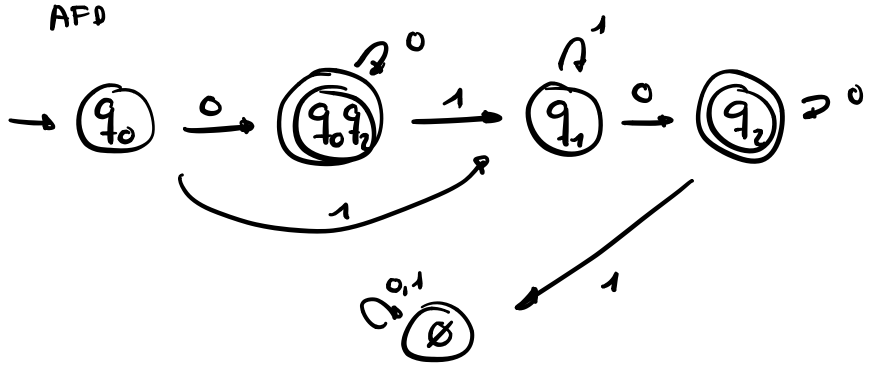
AFND



	0	1
$\to q_0$	q_0, q_2	q_1
q_1	q_2	q_1
$* q_2$	q_2	—

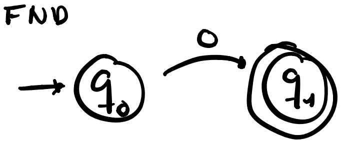
	0	1
$\to q_0$	$q_0 q_2$	q_1
$* q_0 q_2$	$q_0 q_2$	q_1
q_1	q_2	q_1
$* q_2$	q_2	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

AFD



b) $L = \{0\}$

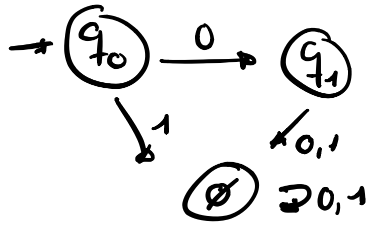
AFND



	0	1
q_0	q_1	—
q_1	—	—

	0	1
q_0	q_1	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

AFD



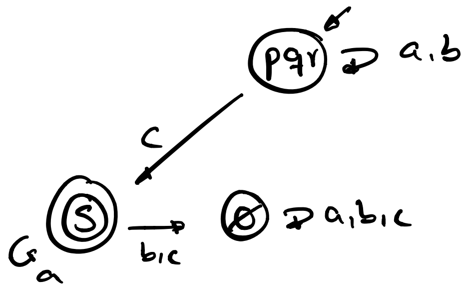
11)

	a	b	c	λ	λ^*	$\lambda^* a \lambda^*$	$\lambda^* b \lambda^*$	$\lambda^* c \lambda^*$
$\to p$	p	q	—	q	p, q, r	p, q, r	p, q, r	s
q	q	p, r	—	r	q, r, p	p, q, r	p, q, r	s
r	—	—	s	p	r, p, q	p, q, r	p, q, r	s
* s	s	—	—	—	s	s	—	—

	a	b	c
→ p	pqr	pqr	s
→ pqr	pqr	pqr	s
* s	s	∅	∅
∅	∅	∅	∅

Equivalentes

$$T^* = \begin{pmatrix} (p,p)\ (p,q)\ (p,r) \\ (q,q)\ (q,r)\ (q,r) \\ (r,r)\ (r,p)\ (r,q) \\ (s,s) \end{pmatrix}$$

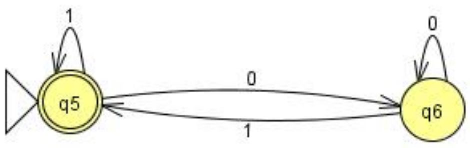


12)

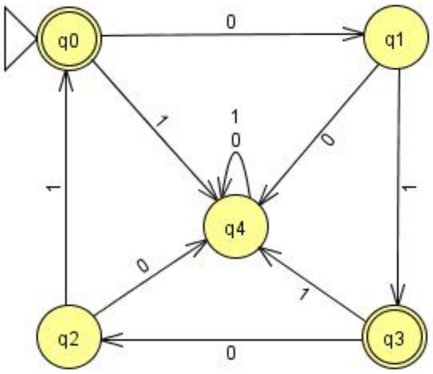
	a	b	c	d	λ	λ*
→ q_1	q_2	—	—	—	q_3	q_1, q_3, q_4, q_5
q_2	—	q_1	—	—	q_4	q_2, q_4, q_6
q_3	—	—	q_4	—	q_4, q_5	q_3, q_4, q_5, q_6
q_4	—	—	—	q_3	q_6	q_4, q_6
q_5	q_6	—	—	—	—	q_5
* q_6	—	q_5	—	—	—	q_6

$$T^* \begin{pmatrix} (q_1, q_1)\ (q_1, q_3)\ (q_1, q_4)\ (q_1, q_5) \\ (q_2, q_2)\ (q_2, q_4)\ (q_2, q_6) \\ (q_3, q_3)\ (q_3, q_4)\ (q_3, q_5)\ (q_3, q_6) \\ (q_4, q_4)\ (q_4, q_6) \\ (q_5, q_5) \\ (q_6, q_6) \end{pmatrix}$$

AFD2



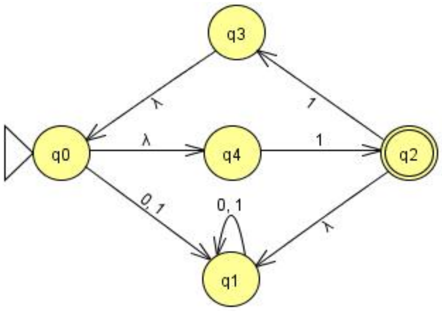
AFD3



a. Comprobar si AFD1 y AFD2 son equivalentes, mediante el algoritmo de suma directa.

b. Comprobar si AFD3 y AFD2 son equivalentes, verificando si sus mínimos son isomorfos.

14. Dado el siguiente AFND, obtener su AFD equivalente, y posteriormente minimizarlo.
AFND=({0,1},{q0,q1,q2,q3,q4},f,q0,{q2}), donde f:



14)

	0	1	$\cancel{\lambda}$	λ^*	$\lambda^* 0 \lambda^*$	$\lambda^* 1 \lambda^*$
$\to q_0$	q_1	q_1	q_4	q_0, q_4	q_1	q_1, q_2
q_1	q_1	q_1	—	q_1	q_1	q_1
$* q_2$	—	q_3	q_1	q_1, q_2	q_1	q_0, q_1, q_3, q_4
q_3	—	—	q_0	q_0, q_3, q_4	q_1	q_1, q_2
q_4	—	q_2	—	q_4	—	q_1, q_2

	0	1
$\to q_0$	q_1	$q_1 q_2$
q_1	q_1	q_1
$* q_1 q_2$	q_1	$q_0 q_1 q_3 q_4$
$q_0 q_1 q_3 q_4$	q_1	$q_1 q_2$

$$T^* = \begin{pmatrix} (q_0, q_0) \ (q_0, q_4) \\ (q_1, q_1) \\ (q_2, q_2) \ (q_2, q_1) \\ (q_3, q_3) \ (q_3, q_0) \ (q_3, q_4) \\ (q_4, q_4) \end{pmatrix}$$

	0	1	Q/E_0	Q/E_1: 0	Q/E_1: 1		Q/E_2: 0	Q/E_2: 1	
$\to A$	B	C	C_0	C_0	C_1	C_0	C_1	C_2	C_0
B	B	B	C_0	C_0	C_0	C_1	C_1	C_1	C_1
$* C$	B	D	C_1	C_0	C_0	C_2	C_1	C_0	C_2
D	B	C	C_0	C_0	C_1		C_1	C_2	

$Q/E_0 = (\overset{C_0}{\{A, B, D\}}, \overset{C_1}{\{C\}})$

$Q/E_1 = (\overset{C_0}{\{A, D\}}, \overset{C_1}{\{B\}}, \overset{C_2}{\{C\}},) = Q/E_2$

$Q/E = (\overset{C_0}{\{A, D\}} \overset{C_1}{\{B\}} \overset{C_2}{\{C\}})$