Tema 5:
Teoría Semántica

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

uc3m

Teoría Semántica en cálculo proposicional

Introducción

- Utiliza la simbolización vista hasta el momento
- La diferencia principal es que el sistema de fórmulas y estructuras deductivas válidas ***no se construye a partir de los axiomas y reglas*** sino mediante una ***simbolización del significado*** de las proposiciones

Introducción

- Para esto, se necesita
  - Un conjunto de significados atribuibles a las proposiciones **{V,F} o {1,0}**
  - Definición semántica de las conectivas (tablas de verdad)
  - Una definición semántica de deducción correcta

Tablas de verdad

- Definición de conectivas

p	~p
V	F
F	V

p	q	p ∧ q
V	V	V
v	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tablas de verdad

- El número de interpretaciones (filas) es 2^n, donde *n* es el número de proposiciones que intervienen en la fórmula.

Interpretaciones para 3 proposiciones

		p	q	r
7	$\rightsquigarrow$	1	1	1
6	$\rightsquigarrow$	1	1	0
5	$\rightsquigarrow$	1	0	1
4	$\rightsquigarrow$	1	0	0
3	$\rightsquigarrow$	0	1	1
2	$\rightsquigarrow$	0	1	0
1	$\rightsquigarrow$	0	0	1
0	$\rightsquigarrow$	0	0	0

Evaluación de Fórmulas

- Es posible construir la tabla de significado de cualquier fórmula a partir de las correspondientes fórmulas parciales que la integran
- **Interpretación:** asignación de significados a sus componentes básicas (una línea de la tabla de verdad)
  - **Modelo:** interpretación que hace cierta una fórmula
  - **Contramodelo (contraejemplo):** interpretación que hace falsa la fórmula

Tablas de verdad

- **Ejemplo:** $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2^2 interpretaciones

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

¿$A \rightarrow B$ <=> $B \rightarrow A$?

¿$A \rightarrow B$ <=> ~A v B?

Modelos

Contramodelos

Equivalencia

Considere las formulas que siguen:

$$\mathbf{p \wedge q \quad \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \sim(p \rightarrow \sim q) \quad \sim(q \rightarrow \sim p)}$$

- Si se construyen las tablas de verdad, se puede verificar que se obtienen columnas finales idénticas.

1
0
0
0

- Cuando se obtienen los mismos resultados para cualquier interpretación (fila) estamos ante un caso de ***equivalencia lógica***

Evaluación de Fórmulas

- De acuerdo con el resultado de las interpretaciones, las fórmulas pueden clasificarse en:
  - **Tautología:** siempre es verdad ($\models$)
  - **Contradicción:** siempre es falsa
  - **Contingencia:** valores distintos (ninguna de las anteriores)
- Una fórmula que tiene **al menos un modelo** es ***satisfacible*** (al menos una línea en la que todas las fórmulas son válidas).
- Una fórmula **sin contraejemplos** es ***semánticamente válida.***

Evaluación de Fórmulas

2^3 interpretaciones

p	q	r	Fórmula 1: $(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee r)$	Fórmula 2: $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$	Fórmula 3: $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

- F1 es insatisfacible (contradicción) (tautología negada)
- F2 es satisfacible
- F3 es una tautología (semánticamente válida)

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: tautologías

p	p → p
1	1
0	1

p	q	q → p	p → (q → p)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

p	q	~p → q	p → (~p → q)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: contradicciones y contingencia

p	~p	p ∧ ~p
1	0	0
0	1	0

p	q	p ∨ q	q ∧ ~(p ∨ q)
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

p	q	p ∧ q	(p ∧ q) → ~q
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Deducción Correcta

- Dada una estructura deductiva $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ se define como **correcta** cuando **no existe** una interpretación que haga $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ verdadero y q falso.

- Para comprobar que una estructura deductiva es **incorrecta**, basta con encontrar una interpretación que no cumpla la regla anterior.

Deducción Correcta

Ejemplo: Modus Ponens: A, A → B ⇒ B

A	**A → B**	**B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

No hay ninguna interpretación donde las premisas sean **V** y la conclusión **F**.

Por tanto, la deducción es correcta

Deducción Correcta

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** A → B, B → C ⇒ A→C

A	B	C	A → B	B → C	A→C
1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	**1**

Deducción incorrecta

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C \rightarrow A$

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$C \rightarrow A$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	1

Teorema de la Deducción

- Es demostrable mediante la definición semántica de deducción

Si

$$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$$

Es una deducción correcta

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q$$

También es una deducción correcta

Tautologías asociadas una Deducción

- Si $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models \mathbf{p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots (p_n \rightarrow q)\ldots)}$ es una tautología

- Si $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models \mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q}$ es una tautología

- Las fórmulas asociadas son equivalentes

Tautologías asociadas una Deducción

- Dos ideas importantes:
  - Mediante la TS podemos ***comprobar*** si una deducción es correcta, pero ***no demostrar*** dicha corrección.
  - Si una deducción es correcta, la fórmula asociada es una tautología. Lo recíproco también es cierto.

Comprobación de Deducciones

- Frente a los sistemas axiomáticos, TS permite definir un procedimiento ***sistemático*** para comprobar si una deducción es correcta o si una fórmula es semánticamente válida.
- Dos métodos principales
  - **Directo**
    - Construcción de una tabla de verdad completa
    - Problemático si hay muchas interpretaciones
  - **Contraejemplo**
    - Búsqueda de una interpretación específica

Comprobación de Deducciones

- Procedimiento contraejemplo
  - Construir una fórmula asociada
  - Generar interpretaciones y calcular significados para la fórmula
  - Buscando algún significado *falso* (contraejemplo)
- Alternativa: operar de forma análoga con una deducción completa buscando una interpretación tal que
    - *Todas las premisas* sean *verdaderas*
    - *Conclusión falsa*

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \vee \sim B) \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Método directo

A	B	~A	~B	A ∧ B	~A ∨ ~B	~(A ∧ B)	(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

La formula asociada es una tautología (no hay contraejemplos), entonces la deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \vee \sim B) \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Método del contraejemplo

- 1. $\underbrace{(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)}_{\text{Falso}}$
- 2. $\underbrace{(\sim A \vee \sim B)}_{\text{Verdad}} \rightarrow \underbrace{\sim(A \wedge B)}_{\text{Falso}}$
- 3. $(\underbrace{\sim A}_{V} \vee \underbrace{\sim B}_{F}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{F} \vee \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{V} \vee \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

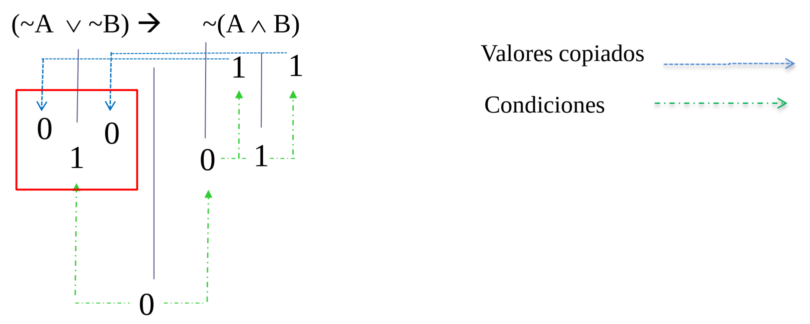
A=F, B=V, entonces ~(A ∧ B) es V
A=V, B=F, entonces ~(A ∧ B) es V
A=F B=F, entonces ~(A ∧ B) es V

La implicación no puede ser falsa, no hay contraejemplos, por lo que deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)

Método del contraejemplo. Otra representación



No hay un contraejemplo. La deducción es correcta

Comprobación de Deducciones

$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s \Rightarrow s$

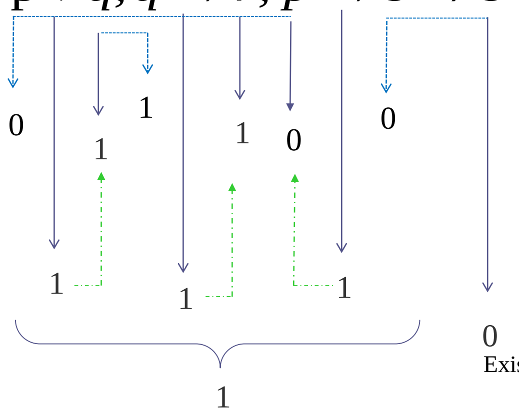
Método directo

	p	q	r	s	p ∨ q	q → r	p → s
	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	1
	0	0	1	1	0	1	1
	0	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	1	0
	1	0	1	1	1	1	1
	1	1	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	1

Existe una interpretación en la que las premisas con V y la conclusión F
Deducción no correcta

Comprobación de Deducciones

$$p \vee q, q \to r, p \to s \Rightarrow s$$



p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una interpretación es un contraejemplo si: premisas ***V*** *y conclusión* ***F***

Existe una interpretación que hace premisas V y conclusión F (contraejemplo):
p=0,q=1,r=1,s=0
Deducción incorrecta

Comprobación de Deducciones

- Analizamos la corrección de la deducción estudiando si la fórmula asociada es una tautología.

$$[p \to (q \vee r)] \;,\; (r \leftrightarrow s) \;,\; t \Rightarrow (p \to q)$$

$$\underbrace{([\overset{1}{p} \to (q \vee r)] \overset{1}{\wedge} (\overset{1}{r \leftrightarrow s}) \overset{1}{\wedge} \overset{1}{t})}_{1} \overset{0}{\to} \underbrace{(\overset{1}{p} \overset{0}{\to} \overset{0}{q})}_{0}$$

Intentamos identificar una interpretación para la cual el consecuente sea F, y el antecedente V. Para esto, *p* tiene que ser V *q* tiene que ser F. Para que el segmento proveniente de la primera premisa sea V, r tiene que ser V. Esto supone que s también deberá ser V. Si t fuese v, entonces todo el antecedente sería V, con lo que queda claro que existe un contraejemplo y NO ES UNA TAUTOLOGÍA

Comprobación de Deducciones

Refutación

- Otra vía potencial fundamentada en la misma idea que la del contraejemplo
- Negamos la conclusión, la unimos a las premisas y vemos si el conjunto resultante es satisfacible

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n \Rightarrow \mathbf{q}$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim\mathbf{q}$$

- La deducción es correcta si y sólo si la segunda expresión es insatisfacible.

Propiedades Formales de Cálculo Prop.

- El sistema formal de cálculo proposicional tiene como propiedades:
  - **Consistencia:** no es demostrable una fórmula y su negación
  - **Completitud:** toda fórmula válida es demostrable.
  - **Decidibilidad:** existe un procedimiento efectivo de comprobar si una fórmula es válida.

Teorema de Post: $\vdash B$ *es demostrable* $\leftrightarrow \models B$

Resumen Sem. Prop. Fórmulas

¿Fórmula válida?

Válida si tautología

Tautología si no contraejemplo

Contraejemplo si no interpret. falsa

Tabla de verdad

Coherencia de resultados

Método del Contraejemplo

Resumen Sem. Prop. Deducciones

¿Deducción correcta?

Correcta si **no** contraejemplo

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \Rightarrow q$$

Si **no interpretación** tal que

$$1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \Rightarrow 0$$

Como deducción

- Tabla de verdad
- Met. Contraejemplo
- Refutación

Transformar en fórmula

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q$$

Deduc. correcta si fórmula

INSATISFACIBLE

Como fórmula

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

Si **válida**, deducción **correcta**