ALGEBRA LINEAL

Examen Final. Convocatoria ordinaria.
11 de enero de 2018

Nombre:		Hora de entrega:	
		Grupo:	

Normas generales:

- El examen acaba a las 13:00. Se puede abandonar el aula a partir de las 10:30.
- Esta hoja debe devolverse cumplimentada, incluyendo la hora de entrega del examen.
- No se permiten dispositivos electrónicos.
- Toda afirmación debe ser justificada.
- Este examen corresponde a un 60 % de la nota de la asignatura.

Problema 1 (1 punto). Sea V un espacio vectorial y sea $T\colon V \to V$ una proyección.

1. Determinar los posibles valores propios de T. (0.5 puntos)

   Solución: Si λ es un valor propio de T y $v \in V$ es un vector propio asociado se tiene que $T(v) = \lambda v$. Como T es proyección, se tiene que $(T \circ T)(v) = T(v)$, es decir,

   $$T(T(v)) = T(v) \Rightarrow T(\lambda v) = \lambda v \Rightarrow \lambda T(v) = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}.$$

2. Si A es la matriz que representa a T respecto a una cierta base ortonormal de V, calcular $A^4 - A^3 + A^2 - A$. (0.5 puntos)
   Solución: Como T es proyección A es una matriz idempotente, por tanto $A^2 = A$. Entonces:

   $$A^4 - A^3 + A^2 - A = A^2A^2 - AA^2 + A^2 - A = AA - AA + A - A = 0_{n\times n},$$

   donde n es la dimensión del espacio V.

Problema 2 (2 puntos). Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Encontrar los espacios propios asociados. (0.75 puntos)

   Solución: En primer lugar calculamos la ecuación característica:

   $$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

   por lo que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, simple, y $\lambda_2 = 2$, doble.
   Para $\lambda_1 = 1$, el espacio propio asociado es

   $$N(A - \lambda_1 I) = N\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Gen}((1, 0, 1)^t).$$

   Para $\lambda_1 = 2$, el espacio propio asociado es

   $$N(A - \lambda_2 I) = N\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Gen}((2, 1, 1)^t).$$

2. Decidir si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encontrar dos matrices P invertible y D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$; en caso negativo, justificar por qué A no es diagonalizable. (0.25 puntos)

   Solución: Como la multiplicidad algebraica de λ_2 no coincide con su multiplicidad geométrica concluimos que A no es diagonalizable.

3. Encontrar, si es posible, la factorización QR de la matriz A. Si no es posible, justificar por qué. (0.5 puntos)

   Solución: Como los valores propios de A no incluyen el 0, su determinante es distinto de 0, y por tanto A es invertible. Esto implica que sus columnas son linealmente independientes, por lo que podremos calcular su factorización QR. Para ello, aplicamos Gram-Schmidt a las columnas de A; llamamos $v_1 = (1, -1, 0)^t$, $v_2 = (2, 3, 1)^t$ y $v_3 = (0, 1, 1)^t$. Los nuevos vectores ortogonales serán:

   $$w_1 = (1, -1, 0)^t,$$

   $$w_2^* = (2, 3, 1)^t - \frac{-1}{2}(1, -1, 0)^t = (5/2, 5/2, 1)^t$$

   o para simplificar los cálculos:

   $$w_2 = (5, 5, 2)^t$$

   y

   $$w_3^* = (0, 1, 1)^t - \frac{-1}{2}(1, -1, 0)^t - \frac{7}{54}(5, 5, 2)^t = (-4/27, -4/27, 20/27)^t,$$

   o para simplificar cálculos:

   $$w_3 = (-1, -1, 5)^t.$$

Por último normalizamos para obtener la matriz Q de la forma:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 5/3\sqrt{6} & -1/3\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 5/3\sqrt{6} & -1/3\sqrt{3} \\ 0 & 2/3\sqrt{6} & 5/3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La matriz R se calcula mediante:

$$R = Q^t A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 9/\sqrt{6} & 7/3\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 4/3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

4. Sin calcular explícitamente las potencias, indicar el valor de A^3-5A^2+8A. (0.5 puntos)

   Solución: El polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4$. Como $p_A(A) = 0_{3\times 3}$ resulta que $A^3 - 5A^2 + 8A = 4I_3$.

Problema 3 (1 punto). Encontrar la descomposición SVD de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución: Construimos la matriz $K = A^t A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, que tiene valores propios $\sigma(K) = \{10, 1, 0\}$; los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{10}$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, por tanto la matriz S de la descomposición $A = USV^t$ es:

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación calculamos vectores propios de K ortonormales.

Para $\lambda = 10$, $N(K - 10I) = Gen((-2, 0, 1)^t)$.

Para $\lambda = 1$, $N(K - I) = Gen((0, 1, 0)^t)$.

Para $\lambda = 0$, $N(K - I) = Gen((1, 0, 2)^t)$.

Normalizando los vectores que generan estos espacios vectoriales, podemos escribir la matriz V de la descomposición como:

$$V = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Por último, calculamos la matriz U; sabemos que para los valores singulares σ_i no nulos, podemos encontrar las columnas de U en la forma $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} A v_i$; por tanto:

$$u_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^t,$$

y

$$u_2 = (0, 1, 0)^t.$$

Para u_3 buscamos un vector ortogonal a u_1 y u_2, por ejemplo $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^t$. Por tanto, la matriz U es:

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

y podemos escribir $A = USV^t$.

Problema 4 (1 punto). Sea la transformación $T_1 \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por:

$$T_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a & d \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que T_1 es lineal. (0.25 puntos)

   Solución: Basta con observar que se cumplen las condiciones de linealidad, las cuales son inmediatas de comprobar:

   i) $T_1\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & c_1+c_2+d_1+d_2 \\ a_1+a_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 & c_2+d_2 \\ a_2 & d_2 \end{pmatrix} =$
   $T_1\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + T_1\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$

   ii) $T_1\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha a_1+\alpha b_1 & \alpha c_1+\alpha d_1 \\ \alpha a_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix} =$
   $\alpha T_1\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right).$

2. Hallar la matriz A_{T_1} que representa T_1 respecto a la base

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

   (0.25 puntos)

   Solución: Para determinar la matriz pedida basta con encontrar las imágenes de los vectores de la base y expresarlas en coordenadas respecto a dicha base. Tenemos:

$$T_1\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_1\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_1\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_1\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Por tanto, la matriz es:

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Consideremos la transformación $T_2 \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por:

$$T_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Encontrar la matriz de la transformación T consistente en aplicar T_1 y a continuación T_2, respecto a la misma base anterior. (0.25 puntos)

Solución: Como en el apartado anterior, calculamos la matriz que representa a T_2 con respecto a la misma base hallando las coordenadas en dicha base de las imáges por T_2 de los vectores de la misma. Ahora tenemos:

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz de la transformación T es

$$A_T = A_{T_2} A_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Consideremos el producto interno definido en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mediante:

$$\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2.$$

Decidir si respecto a este producto interno T es autoadjunta. (0.25 puntos)

Solución: Obviamente, la base dada es ortonormal respecto al producto interno dado. Como la matriz que representa a T respecto a esta base no es simétrica concluimos que T no es autoadjunta.

Problema 5 (1 punto). Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado 2 o inferior, de la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, sobre el cuerpo de los reales.

1. Consideremos la base $B = (1, 1-x, 1+x^2)$ de $\mathbb{P}_2$. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B a la base $B_0 = (1, x, x^2)$. [0.5 puntos]

   Solución: La matriz de cambio de base pedida es

$$T_{BB_0} = T_{B_0B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Hallar las coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2$ respecto a B, utilizando la matriz de cambio de base apropiada. [0.5 puntos]

   Solución: Para hallar las coordenadas de p respecto de la base B basta con multiplicar, por la izquierda, sus coordenadas respecto a la base B_0 por la matriz que cambia las coordenadas de B_0 a B, que es precisamente la inversa de la matriz de cambio de base de B_0 a B, es decir:

$$[p]_B = T_{BB_0}[p]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
