Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Informática

Heurística y Optimización

26 de Junio de 2015

Normas generales del examen

① El tiempo para realizar el examen es de **4 horas**

② No se responderá a ninguna pregunta sobre el examen transcurridos los primeros **30 minutos**

③ Cada pregunta debe responderse en páginas separadas en el mismo orden de sus apartados. Si no se responde, se debe entregar una página en blanco

④ Escribe con claridad y en limpio, de forma ordenada y concisa

⑤ Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen

⑥ No se puede presentar el examen escrito a lápiz

Pregunta 1 (1 puntos)

Una red eléctrica consiste en un conjunto de conmutadores distribuídos por la geografía nacional. Cada conmutador puede recibir tensión de cualquiera de los conmutadores que están conectados a él, y puede distribuírla, asimismo, a cualquiera de los conmutadores a los que está conectado de acuerdo a las siguientes reglas: un conmutador recibe una tensión que es igual a la suma de las tensiones que recibe por sus líneas de entrada; asimismo, un conmutador distribuye la tensión recibida equitativamente entre sus líneas de salida. Puede asumirse que la transmisión eléctrica se hace instantáneamente, sin ningún retardo.

Cada línea que transmite tensión eléctrica de un conmutador i a otro j está caracterizado por una capacidad máxima C_{ij}, de modo que sólo se transmitirá una tensión igual a su capacidad máxima si ésta se excediera.

De entre todos los conmutadores se distingue uno por su importancia: la central (marcada con el número 0) que es el punto que inicia la distribución de energía eléctrica por la red. La Figura 1 muestra el diseño de una red eléctrica a modo de ejemplo —en el que, sin embargo, no se han indicado explícitamente las capacidades máximas de cada enlace.

Se pide responder razonadamente las siguientes preguntas:

(a) **(1 punto)** Se pide diseñar un algoritmo basado en *Programación Dinámica* que calcule la tensión recibida en cada nodo de la red eléctrica distinto de la central, si en ella se inicia la distribución de 50 KWatt.

Pregunta 2 (3 puntos)

Considerése el siguiente problema de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\multicolumn{5}{c}{\max z = 3x_1 - 3x_2} \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\
x_1 & - & 3x_2 & \geq & -10 \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
\multicolumn{5}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}}
\end{array}
$$

Se pide responder razonadamente las siguientes preguntas:

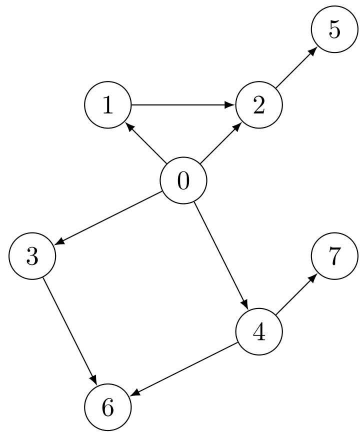


Figura 1: Diseño de la red eléctrica

(a) **(½ puntos)** Resolver el problema utilizando el método de *resolución gráfica* indicando la solución óptima y el valor de la función objetivo para la solución hallada.

Considérese ahora, en su lugar, la función objetivo $\max z = 2x_1 - 6x_2$ y responder razonadamente las siguientes preguntas:

(b) **(½ puntos)** Expresar el problema de Programación Lineal anterior en forma *estándar* de maximización.

(c) **(½ puntos)** Preparar el problema de Programación Lineal que ha resultado del apartado anterior para su aplicación con el algoritmo SIMPLEX para garantizar que pueda comenzarse con la matriz identidad.

(d) **(½ puntos)** Resolver el problema de Programación Lineal obtenido en el apartado anterior con el algoritmo SIMPLEX.

Es imprenscindible indicar claramente, en cada iteración: las variables escogidas en la base, su valor, y el valor de la función objetivo

(e) **(½ puntos)** Calcula la contribución por unidad de recurso del problema de Programación Lineal original al valor óptimmo de la función objetivo.

(f) **(½ puntos)** Interpretar las soluciones halladas y explicar qué conclusiones pueden extraerse.

Pregunta 3 (1½ puntos)

Una red eléctrica consiste en un conjunto de conmutadores distribuídos por la geografía nacional. Cada conmutador puede recibir tensión de cualquiera de los conmutadores que están conectados a él, y puede distribuírla, asimismo, a cualquiera de los conmutadores a los que está conectado de acuerdo a las siguientes reglas: un conmutador recibe una tensión que es igual a la suma de las tensiones que recibe por sus líneas de entrada; asimismo, un conmutador distribuye la tensión recibida equitativamente entre sus líneas de salida.

De entre todos los conmutadores se distingue uno por su importancia: la central (marcada con el número 0) que es el punto que inicia la distribución de energía eléctrica por la red.

La empresa que explota la red eléctrica está interesada en el uso de modelos de *satisfabilidad lógica* para demostrar que se verifican varias restricciones.

Considerando exclusivamente la red eléctrica mostrada en la Figura 1, se pide responder razonadamente las siguientes preguntas:

(a) **(1 punto)** Se pide modelizar la distribución de corriente eléctrica entre los nodos de la Figura 1, como un problema de satisfabilidad lógica.

Usar la modelización propuesta para demostrar que es posible recibir corriente eléctrica en el nodo 6.

(b) **(½ puntos)** Con el objeto de poder atender fallos en la red eléctrica, la empresa está interesada en calcular el número de formas diferentes para llevar corriente desde la central (conmutador 0) hasta el conmutador 6.

¿Cómo se puede resolver este problema con el uso de algoritmos de *satisfabilidad lógica*?

Pregunta 4 (2 puntos)

Una red eléctrica consiste en un conjunto de conmutadores distribuídos por la geografía nacional. Cada conmutador puede recibir tensión de cualquiera de los conmutadores que están conectados a él, y puede distribuírla, asimismo, a cualquiera de los conmutadores a los que está conectado de acuerdo a las siguientes reglas: un conmutador recibe una tensión que es igual a la suma de las tensiones que recibe por sus líneas de entrada; sin embargo, un conmutador puede distribuir la tensión recibida de cualquier modo entre sus líneas de salida. Para evitar problemas de sobrecarga, ningún conmutador puede recibir más de 50 KWatt.

De entre todos los conmutadores se distingue uno por su importancia: la central (marcada con el número 0) que es el punto que inicia la distribución de energía eléctrica por la red. Inicialmente, la central distribuye hasta 50 KWatt por diferentes líneas de salida a otros conmutadores.

Considerando exclusivamente la red eléctrica mostrada en la Figura 1, se pide responder razonadamente las siguientes preguntas:

(a) **(1 punto)** Se pide modelar el problema de la distribución de tensión eléctrica como un problema de *satisfacción de restricciones.*

Es imprenscindible distinguir claramente cada una de las componentes del problema de satisfacción de restricciones indicando claramente su objetivo.

(b) **(½ punto)** Verificar la arco consistencia entre los conmutadores 0 (Central) y 1. ¿Son arco consistentes? Si o no y por qué.

(c) **(½ punto)** Verificar la camino consistencia entre los conmutadores 0 (Central) y 1, respecto del conmutador 2. ¿Son camino consistentes? Si o no y por qué.

Pregunta 5 (2½ puntos)

Una impresora industrial acepta trabajos a través de una única cola de impresión. Cada trabajo debe estar anotado con el tiempo que se tardará en llevarlo a cabo, y un intervalo de tiempo en el que debe hacerse la impresión. Además, deben darse dos penalizaciones diferentes, p_i y q_i para el trabajo i-ésimo, indicadas como números que se aplican en caso de que el trabajo acabe antes del intervalo de tiempo indicado, o después, respectivamente.

La empresa que gestiona el uso de la impresora desea optimizar la ordenación de los trabajos de modo que resulte la mínima penalización posible. Una vez que se ha decidido la ordenación de los trabajos, se inicia la impresión siempre a las 12:00 del mediodía, y la ejecución se hace sin interrupciones.

Se pide responder razonadamente las siguientes preguntas:

(a) **(½ puntos)** Representar el espacio de estados de este problema

(b) **(½ puntos)** ¿Cuál es el tamaño del espacio de estados?

(c) **(½ puntos)** ¿Qué algoritmo de búsqueda de *fuerza bruta* (o *no informada*) es más adecuado para resolver este problema óptimamente?

Responder las siguientes cuestiones en relación con el diseño de una función heurística $h(n)$:

(d) **(½ puntos)** ¿Debe estimar el tiempo que falta para acabar las impresiones o la penalización máxima en la que se puede incurrir?

(e) **(½ puntos)** Habida cuenta que la función heurística $h(n)$ sea admisible, ¿qué algoritmo de búsqueda *heurística* es el más indicado para resolver este problema óptimamente?

Soluciones del examen de Heurística y Optimización
Junio 2015

Problema 1

La *Programación Dinámica* es una técnica de programación *bottom-up* basada fundamentalmente en tres principios:

1. Identificación de *casos base* cuya solución puede describirse inmediatamente.
2. Posibilidad de usar un recurso de memoria (por ejemplo, vectores o matrices) en los que almacenar la solución de los casos base u otros que se resuelven a partir de ellos. En este paso es particularmente importante identificar la forma de indexar las soluciones de problemas de forma eficiente.
3. Obtención de una *expresión de recurrencia* que exprese la solución de algunos problemas en relación con la resolución de otros más sencillos.

Su diferencia más importante con la técnica de *divide y vencerás* (que es del tipo *top-down*) es que no consiste en la descomposición de problemas cuyas soluciones se devuelven al caso general. En su lugar, cada subproblema se resuelve una única vez y su solución se reusa consultando la memoria empleada.

1. Para resolver este problema con el uso de *Programación Dinámica* se seguirán los mismos pasos indicados más arriba:

   a) *Casos base*: los casos más elementales se corresponden con la distribución eléctrica desde la central (mostrada en la Figura 1 como el nodo 0) hasta sus nodos adyacentes.

   En particular, si la central inicia la distribución de ω KWatt, entonces cada uno de sus vecinos recibirá una cuarta parte, puesto que hay cuatro nodos adyacentes a la central y la distribución se hace equitativamente como advertía el enunciado. Ahora bien, en ningún caso puede excederse la capacidad máxima de cada enlace, C_{0j}, donde j representa cada uno de los nodos inmediatamente accesibles desde la central: $j = \{1, 2, 3, 4\}$:

   $$x_{0j} = \min\{C_{0j}, \frac{1}{4}\omega\}$$

   donde xx_{0j} representa la tensión distribuída desde el nodo 0 (la central) hasta el nodo j.

   b) La expresión del apartado anterior sugiere el uso de una matriz T_{ij} que almacena en la fila i y la columna j la tensión que se distribuye desde el nodo i hasta el nodo j. Obviamente, todos los elementos de la diagonal principal, T_{ii} son nulos. Asimismo, cada vez que dos nodos i y j no sean inmediatamente adyacentes, tendrán un valor 0 en la tabla.

   c) La Figura 2 muestra con arcos discontinuos los enlaces cuya tensión ya ha sido calculada en la descripción de los casos base. Ahora debe calcularse la distribución de tensión en todos los enlaces que aparecen mostrados como líneas sólidas.

   En este caso particular, las reglas de recurrencia deben calcularse nodo por nodo:

   Nodo 1 El nodo 1 sólo tiene un enlace de entrada, de modo que distribuirá x_{01} por su única línea de salida, a menos que esta cantidad exceda el máximo permitido en el enlace de 1 a 2: $x_{12} = \min\{C_{12}, x_{01}\}$.

   Nodo 2 El nodo 2 recibe tensión de dos nodos diferentes: el 0 y el 1[1].

   Por lo tanto, el nodo 2 distribuirá por su única línea de salida exactamente la misma tensión que reciba salvo que exceda la capacidad máxima del enlace 2–5: $x_{25} = \min\{C_{25}, x_{12} + x_{02}\}$.

   Nodo 3 Como en el primer caso, este nodo intentará distribuir toda la tensión recibida por su única línea de entrada a su única línea de salida: $x_{36} = \min\{C_{36}, x_{03}\}$.

[1] Es ahora cuando aplica la advertencia del enunciado de que "*Puede asumirse que la transmisión eléctrica se hace instantáneamente, sin ningún retardo*", de modo que no es preciso preocuparse porque la tensión de 1 a 2 llegue *después* que de 0 a 1.

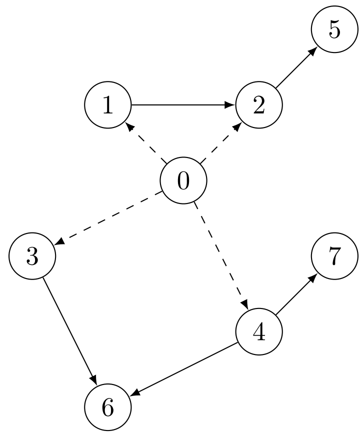


Figura 2: Los arcos discontinuos han sido resueltos como casos básicos. Los casos generales consisten el cálculo de la tensión distribuída en los arcos mostrados con líneas sólidas.

Nodo 4 A diferencia de los casos anteriores, este nodo debe equidistribuir la tensión recibida por su única línea de entrada a dos líneas de salida, teniendo en cuenta la capacidad máxima soportada por cada enlace: $x_{46} = \text{mín}\{C_{46}, \frac{1}{2}x_{04}\}$ y $x_{47} = \text{mín}\{C_{47}, \frac{1}{2}x_{04}\}$.

Los nodos restantes (nodos 5, 6 y 7) no redistribuyen tensión eléctrica. Por lo tanto, a partir de los valores descritos en las variables x_{ij} (y que se almacenan en el orden en que se calculan en la tabla T), ya es posible calcular la tensión recibida en cada nodo. Para ello, se sigue la misma lógica aplicada en los casos anteriores:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \omega \\
x_1 &= x_{01} \\
x_2 &= x_{02} + x_{12} \\
x_3 &= x_{03} \\
x_4 &= x_{04} \\
x_5 &= x_{25} \\
x_6 &= x_{36} + x_{46} \\
x_7 &= x_{47}
\end{aligned}
$$

donde ω es la tensión inicialmente distribuída desde la central que, en el enunciado, toma el valor 50 KWatt.

En realidad, si como se advertía al principio, x_{ij} vale cero si y sólo si no hay un enlace directo desde el nodo i hasta el nodo j, entonces la tabla anterior se puede simplificar diciendo simplemente:

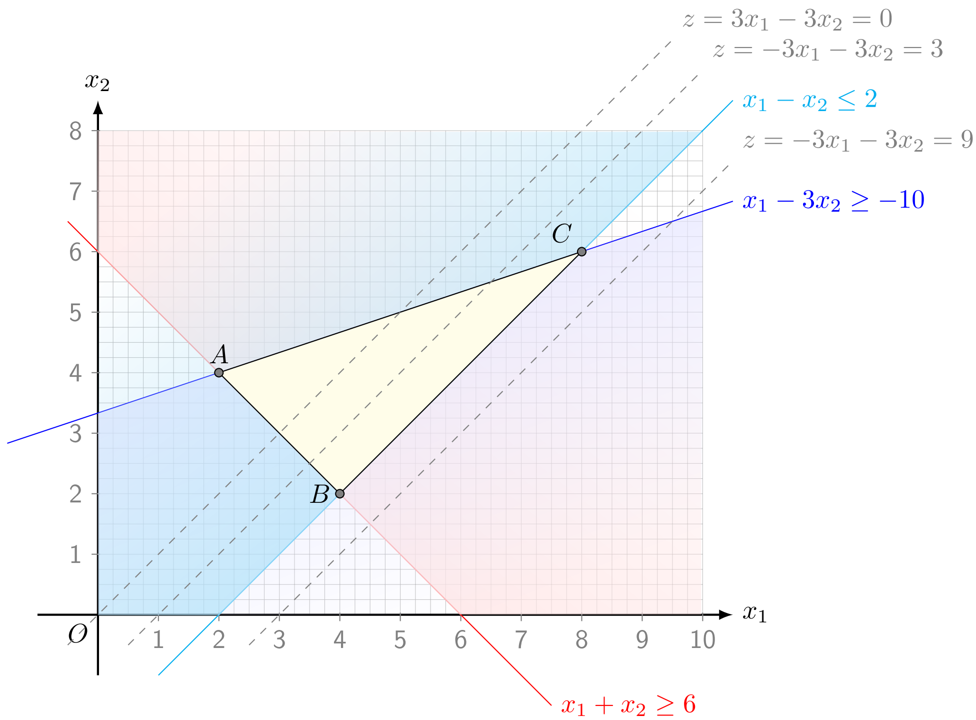
$$x_j = \sum_{i=0}^{7} x_{ij}$$

donde x_j representa el valor pedido: la tensión recibida en el nodo j-ésimo.

Problema 2

1. Puesto que sólo hay dos variables de decisión, x_1 y x_2, las restricciones se pueden dibujar sobre un plano bidimensional.

   La siguiente figura muestra gráficamente cada una de las restricciones. Como puede observarse, la región factible (mostrada en amarillo) consiste en la intersección de las regiones que satisfacen cada restricción (cada una dibujada de un color diferente), y está circunscrita por los puntos A, B y C.



Las líneas discontinuas muestran las curvas de isobeneficio —denominadas así porque la función objetivo es de *maximización*. Se han dibujado con la intención de hacer aparente que los últimos puntos de la región factible que visita según va creciendo (puesto que se trata de un problema de maximización) son, precisamente, los de la recta $x_1 - x_2 = 2$ que delimita la región de la tercera restricción. Se trata, por lo tanto, de un problema con una cantidad infinita de soluciones óptimas: todos los puntos que hay en el segmento $\overline{BC}$.

Como cualquiera de estos puntos verifican la recta $3x_1 - 3x_2 = 6$, el valor óptimo de la función objetivo es 6.

2. Dada la nueva función objetivo, el problema de Programación Lineal que hay que considerar en este punto es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} & \multicolumn{3}{c}{\text{máx}\, z = 2x_1 - 6x_2} & \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & \geq & -10 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & & \end{array}$$

Un problema de programación lineal está en forma *estándar* si todas las restricciones son de igualdad, las variables de decisión son no negativas y, por último, el vector de constantes o recursos $\mathbf{b}$ no contiene términos negativos. Estará, además, en forma de maximización si la función objetivo maximiza y de minimización en otro caso. El problema, tal y como estaba enunciado, sólo verifica la segunda condición. Conviene aquí recordar:

- Una restricción de la forma $\leq$ está acotada superiormente. Puesto que ninguna variable de decisión puede tomar valores negativos, es preciso *sumar* una *variable de holgura* para forzar la igualdad.
- Análogamente, las restricciones de la forma $\geq$ están acotadas inferiormente de modo que, con variables de decisión que no pueden tomar valores negativos, es preciso *restar* una *variable de holgura* para forzar la igualdad.

Además, las variables de holgura que se añadan a las restricciones para forzar igualdades, se añadirán a la función objetivo z con un coeficiente nulo.

En primer lugar, se cambia el signo del recurso de la segunda restricción para hacer que sea positivo. Para ello, basta con multiplicar los dos términos de la segunda restricción por -1 (con lo que, además, se cambia el sentido de la desigualdad):

$$\begin{array}{rrcrcr} \multicolumn{6}{c}{\text{máx}\, z = 2x_1 - 6x_2} \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ - & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ \multicolumn{6}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

A continuación hay que añadir variables de holgura para convertir todas las desigualdades en igualdades. Por lo tanto, el problema de Programación Lineal queda, como sigue, en forma estándar de maximización:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr} \multicolumn{12}{c}{\text{máx}\, z = 2x_1 - 6x_2} \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 6 \\ - & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\ \multicolumn{12}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

3. El problema de Programación Lineal, tal y como se muestra en el apartado anterior, contiene dos columnas de la matriz identidad (de dimensión 3): $\mathbf{a_4}$ y $\mathbf{a_5}$. Para poder añadir la tercera columna que falta (y que consistirá primero de un 1 y luego ceros), se añade una *variable artificial* x_6:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr} \multicolumn{14}{c}{\text{máx}\, z = 2x_1 - 6x_2 - \infty x_6} \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 6 \\ - & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 2 \\ \multicolumn{14}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

que se ha añadido también a la función objetivo con un coeficiente $-\infty$, puesto que su sentido es puramente técnico (se ha usado sólo para forzar la aparición de la matrix identidad como base factible inicial) y, por lo tanto, no debería aparecer en la solución final del SIMPLEX —salvo que el problema sea infactible, en cuyo caso, alguna variable artificial tomará un valor estrictamente positivo.

4. El algoritmo del SIMPLEX consiste en la aplicación iterativa de tres pasos: cálculo de las variables básicas, selección de la variable de entrada y selección de la variable de salida hasta que se detecte alguna de las siguientes condiciones:

   - El problema puede mejorar el valor de la función objetivo indefinidamente. Se dice entonces que el problema está *no acotado*. Este caso se detecta cuando todas las componentes y_i de la variable de decisión x_i elegida para entrar en la base son todos negativos o nulos.
   - El problema tiene soluciones infinitas. Este caso se detecta cuando los denominadores y_{ij} usados en la regla de salida para la variable que entra x_i son todos negativos o nulos.
   - El problema es irresoluble. Esto ocurre cuando en el segundo paso, todos los costes reducidos son positivos y el primer paso asignó un valor no negativo a alguna variable artificial.
   - Se alcanza una solución factible y puede demostrarse que no es posible mejorarla. Esta condición se detecta como en el segundo caso pero cuando las variables artificiales (si las hubiera) tienen valores nulos.

Paso 0 Cálculo de una solución factible inicial

a) Cálculo de las variables básicas
La primera iteración se inicia con una base igual a la matriz identidad de dimensión 3, tal y como se calculó ya en el apartado anterior. Por lo tanto, son variables básicas en este paso $\{x_6, x_4, x_5\}$ (¡precisamente en este orden!):

$$B_0 = I_3 \qquad\qquad B_0^{-1} = I_3$$

$$x_0^* = B_0^{-1} b = b = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad z_0^* = c_{B_0}^T x_0^* = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = -6\infty$$

Obviamente, $-6\infty = -\infty$. Sin embargo, ∞ se trata aquí simbólicamente como una variable con un valor arbitrariamente grande. Por lo tanto, es buena práctica preservar los coeficientes para poder hacer comparaciones con otras expresiones que también contengan el mismo término.

b) Selección de la variable de entrada
En las expresiones siguientes el cálculo de los vectores y_i se ha embebido en el cálculo de los *costes reducidos* directamente (aunque en una iteración con una base igual a la matriz identidad, $y_i = a_i$):

$$z_1 - c_1 = c_{B_0}^T B_0^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -\infty - 2$$

$$z_2 - c_2 = c_{B_0}^T B_0^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 6 = -\infty + 6$$

$$z_3 - c_3 = c_{B_0}^T B_0^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} I_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = +\infty$$

Tal y como se indicaba anteriormente, ∞ se ha utilizado como un símbolo cualquiera. También es posible usar una constante M muy alta (y, en particular, un valor de M mayor que la suma de los valores absolutos de todos los coeficientes en la función objetivo). Usando ∞ como un símbolo cualquiera es posible saber qué valores son más grandes sustituyéndolo por valores arbitrariamente grandes.
En particular, sustituyendo ∞ por cualquier valor positivo arbitrariamente grande, x_1 será siempre más negativo que x_2 y ésta será, por tanto, la variable elegida para entrar en la siguiente base.

c) Selección de la variable de salida
La regla de salida establece que debe salir aquella variable con el menor cociente x_i/y_{ij} (con valores y_{ij} estrictamente positivos) donde x_i es la variable elegida en el paso anterior (x_1):

$$\text{mín}\left\{\frac{6}{1}, \cancel{\frac{10}{-1}}, \frac{2}{1}\right\}$$

y sale la variable x_5 que es la que se corresponde con la tercera fracción (puesto que ocupa la tercera posición en la base).

Paso 1 Mejora de la solución actual (iteración #1)

a) Cálculo de las variables básicas
A continuación se mejora la calidad de la solución anterior. Las nuevas variables básicas son $\{x_1, x_4, x_6\}$. Nótese que ahora sí se han reordenado las variables con el único motivo de recordar su disposición más fácilmente.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1^* = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \quad z_1^* = c_{B_1}^T x_1^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 4(1-\infty)$$

Como aún hay una variable artificial en la base, su contribución al valor de la función objetivo es $-\infty$. Sin embargo, la función objetivo ha crecido (como debe ser, puesto que se trata de un problema de maximización) respecto de la iteración anterior de -6∞ a $4(1-\infty)$.

b) Selección de la variable de entrada
Como antes, el cálculo de los vectores columna $y_i = B_1^{-1}a_i$ se ha embebido en el cálculo de los costes reducidos:

$$z_2 - c_2 = c_{B_1}^T B_1^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 6 = -2\infty + 4$$

$$z_3 - c_3 = c_{B_1}^T B_1^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = +\infty$$

$$z_5 - c_5 = c_{B_1}^T B_1^{-1} a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = +\infty + 2$$

y la variable x_2 debe entrar en la base puesto que es la única que tiene un coste reducido estrictamente negativo.

c) Selección de la variable de salida
Como siempre, la variable de salida se calcula en atención al mínimo cociente x_1/y_{ij} (con valores y_{ij} estrictamente positivos) donde x_i es la variable elegida en el paso anterior para añadirse a la base (x_2) e y_{ij} son las componentes de su vector $\mathbf{y}$ también calculado en el paso anterior (aunque no se muestran explícitamente):

$$\text{mín}\left\{\cancel{\frac{2}{-1}}, \frac{12}{2}, \frac{4}{2}\right\}$$

y sale la variable x_6, la variable artificial.

Paso 2 Mejora de la solución actual (iteración #2)

a) Cálculo de las variables básicas
Las nuevas variables básicas son $\{x_1, x_2, x_4\}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2^* = B_2^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad z_2^* = c_{B_2}^T x_2^* = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$$

b) Selección de la variable de entrada
A continuación se muestra el cálculo de los costes reducidos de todas las variables no básicas, de las que se ha omitido únicamente, el de la variable artificial x_6 puesto que al hacer la diferencia con su coeficiente en la función objetivo resulta un valor positivo arbitrariamente grande:

$$z_3 - c_3 = c_{B_1}^T B_1^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 2$$

$$z_5 - c_5 = c_{B_1}^T B_1^{-1} a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

Como todos los costes reducidos son estrictamente positivos, añadir cualquiera de estas variables a la base decrementaría el valor de la función objetivo. En otras palabras, SIMPLEX ya ha encontrado la solución óptima.

Por lo tanto, la solución óptima, y el valor de la función objetivo en el punto óptimo son:

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z^* = -4$$

La solución óptima encontrada con SIMPLEX puede verificarse fácilmente en la figura del primer apartado. En particular, el punto x^* obtenido se corresponde, precisamente, con el punto C. Dibujando las curvas de isobeneficio consideradas en este apartado se puede ver fácilmente que ése es precisamente el último punto de la región factible que se visita en el sentido de crecimiento de la función objetivo.

5. Para la resolución de este apartado, basta con recordar la *interpretación económica* de las soluciones de un problema dual que advierte que:

La variable dual $x_i'^*$ indica la contribución por unidad del recurso i-ésimo b_i a la variación el en valor óptimo z^* actual del objetivo

Puesto que el enunciado requiere la contribución unitaria de todos los recursos, entonces es preciso calcular la solución completa del problema dual.

Para ello, es posible iniciar la aplicación de otro SIMPLEX al problema dual (en forma *simétrica*) del primal. Sin embargo, en su lugar es preferible hacer uso del siguiente resultado teórico:

Si el problema de programación lineal en forma simétrica tiene una solución óptima correspondiente a una base $\mathbf{B}$, entonces $\mathbf{x}'^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}$ es una solución óptima para el problema dual

En este teorema, los términos usados para el cálculo de la solución óptima del problema dual se refieren al problema primal, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Por lo tanto c_B^T es el vector de costes de las variables básicas en la solución del problema primal y B la base usada para el cálculo de la misma solución —que se mostró en el último paso de aplicación del SIMPLEX. Por el contrario, x'^T es la solución del problema dual.

En particular:

$$x'^{*} = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

¡que no debería ser posible! puesto que la primera variable dual toma un valor negativo. El motivo es que el problema original (antes de añadir las variables de holgura):

$$\begin{array}{rrcrcr} & \multicolumn{5}{c}{\text{máx}\, z = 2x_1 - 6x_2} \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ - & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & \multicolumn{5}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

no está en forma simétrica puesto que la primera desigualdad es de la forma $\geq$ en vez de $\leq$. por lo tanto, no se puede usar directamente la solución de esa tarea de Programación Lineal. Sin embargo, sí pueden utilizarse estos valores para indicar la contribución por unidad de recurso, que es lo que se pedía. Por lo tanto, el incremento en el primer recurso empeora la función objetivo (como cabe esperar en una restricción del tipo $\geq$), mientras que cada recurso adicional en la tercera restricción mejora la función objetivo en 4 unidades. No debería ser una sorpresa que disponer de más recursos en la segunda restricción no mejora la función objetivo puesto que, como se explica en el siguiente apartado, sobran.

6. La interpretación de un problema incluye varias consideraciones como son estudiar: si el problema es o no satisfacible, si la solución es única o hay varias soluciones o si está o no acotado. Además, debe estudiarse el uso de recursos: si sobra o no alguno y cual es su contribución al crecimiento de la función objetivo.

Interpretación de la solución De la solución se puede advertir lo siguiente:

- El problema es factible porque la solución no contiene valores positivos para ninguna variable artificial.
- La solución es única porque los costes reducidos de la última iteración son todos estrictamente positivos. Eso significa que cualquier cambio en la base implicaría un decremento neto en el valor de la función objetivo.
- El valor de la función objetivo está acotado porque siempre se pudo aplicar la regla de salida con denominadores estrictamente positivos.

Interpretación de los recursos La interpretación de los recursos se hace, fundamentalmente, observando los valores de la variable de holgura en la solución óptima y la solución del problema dual:

- Sobran hasta 8 unidades del segundo recurso, como lo atestigua el valor de la variable de holgura x_4 que, en el punto óptimo toma el valor 8. El resto de las variables de holgura valen 0 y eso significa que la solución óptima los explota por completo.
- Ya se había realizado en el apartado anterior y se reproduce de nuevo a continuación: el incremento en el primer recurso empeora la función objetivo (como cabe esperar en una restricción del tipo $\geq$), mientras que cada recurso adicional en la tercera restricción mejora la función objetivo en 4 unidades. No debería ser una sorpresa que disponer de más recursos en la segunda restricción no mejora la función objetivo puesto que, como se explica en el siguiente apartado, sobran..

Problema 3

La modelización basada en *lógica proposicional* consiste en distinguir proposiciones o unidades elementales de información que se relacionan entre ellas con conectivas lógicas. Por otra parte, la resolución de fórmulas proposicionales se hace en dos pasos:

1. En primer lugar, se convierte la expresión a Forma Normal Conjuntiva (abreviadamente, CNF).
2. Entonces pueden aplicarse una gran variedad de algoritmos. Entre ellos, Davis-Putnam o Davis-Putnam-Logemann-Loveland.

A continuación se ofrece la respuesta a cada uno de los apartados del ejercicio:

1. La modelización con lógica proposicional del problema propuesto consiste, únicamente, en modelizar la relación de adyacencia inmediata entre dos nodos o, en otras palabras, de que llegando corriente a un nodo, llega inmediatamente a otro. Esto será siempre cierto porque, tal y como advertía el enunciado, la energía se distribuye equitativamente entre los enlaces de salida, de modo que cualquier cantidad positiva de corriente eléctrica producirá efectivamente corriente en cada línea de salida.

   Por lo tanto, se sugiere modelizar las proposiciones de la siguiente manera:

   p_i:Llega una cantidad de corriente positiva al nodo i

   Por lo tanto, si el nodo i tiene una línea de salida hasta el nodo j, se creará la cláusula:

   $$p_i \rightarrow p_j$$

   o, equivalentemente, $(\overline{p_i} \vee p_j)$. En particular, la siguiente tabla muestra las clausulas generadas para cada uno de los enlaces mostrados en la Figura 1:

Nodo de salida	Nodo de llegada	Cláusula
0	1	$C_1 : (\overline{p_0} \vee p_1)$
0	2	$C_2 : (\overline{p_0} \vee p_2)$
0	3	$C_3 : (\overline{p_0} \vee p_3)$
0	4	$C_4 : (\overline{p_0} \vee p_4)$
1	2	$C_5 : (\overline{p_1} \vee p_2)$
2	5	$C_6 : (\overline{p_2} \vee p_5)$
3	6	$C_7 : (\overline{p_3} \vee p_6)$
4	6	$C_8 : (\overline{p_4} \vee p_6)$
4	7	$C_9 : (\overline{p_4} \vee p_7)$

   Además, sabemos que es cierto que la central transmite una cantidad positiva. Esta afirmación se modeliza con la cláusula *unitaria*:

   $$C_{10} : (p_0)$$

   Por lo tanto, el caso de la red mostrada en la Figura 1 se modeliza con la expresión en Forma Normal Conjuntiva F que consiste en la conjunción de las cláusulas 1 a 10:

   $$F = \bigwedge_{i=1}^{10} C_i$$

Para demostrar que, efectivamente, el nodo 6 recibirá corriente eléctrica si se inicia la distribución en la central, pueden aplicarse tanto Davis-Putnam como Davis-Putnam-Lovemann-Logeland a la expresión F anterior.

En cualquier caso, si se aplica *resolución* de la fórmula F respecto de cualquiera de los literales p_5, p_6 y p_7 se observará que son puros, de modo que pueden eliminarse automáticamente las cláusulas que los contienen (cláusulas C_6, C_7, C_8 y C_9), después de anotar que estos literales tomarán el valor que les corresponde al signo que tienen en el literal usado al aplicar resolución: $\{p_5 = \top, p_6 = \top, p_7 = \top\}$.

Por lo tanto, el nodo 6 efectivamente recibirá tensión si y sólamente si, la fórmula F es satisfacible. En realidad es muy fácil observar que es así: la cláusula C_{10} obliga al literal p_0 a tomar el valor cierto, $p_0 = \top$. Esta asignación, obliga a los literales p_1, p_2, p_3 y p_4 a tomar también el valor cierto para poder verificar las cláusulas C_1, C_2, C_3 y C_4: $p_1 = \top, p_2 = \top, p_3 = \top, p_4 = \top$.

Por último, puesto que $p_1 = \top$, necesariamente $p_5 = \top$ para poder verificar la quinta cláusula, C_5.

El modelo así generado es:

$$M = \{p_0 = \top, p_1 = \top, p_2 = \top, p_3 = \top, p_4 = \top, p_5 = \top, p_6 = \top, p_7 = \top\}$$

donde, efectivamente, el nodo 6 toma el valor cierto y, por lo tanto, recibirá corriente del nodo central.

2. Este problema se conoce como el problema de *contar* el número de asignaciones factibles de una fórmula lógica proposicional y se suele representar como #SAT.

   La forma más fácil de resolverlo, habida cuenta de los algoritmos estudiados en el curso es usar Davis-Putnam-Logemann-Loveland hasta que se ha expandido el árbol completo, generando exactamente las 2^n posibles asignaciones que hay, donde n es el número de variables de la fórmula proposicional original, en nuestro caso, 8. Por lo tanto, habría que examinar hasta 64 asignaciones y devolver la cuenta de las que se verifican.

Problema 4

1. Un problema de satisfacción de restricciones se define como una terna (X, D, C) donde $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de variables; $D = \{D_i\}_{i=1}^n$ representa los dominios de cada variable respectivamente y $C = \{C_i\}_{i=1}^m$ es el conjunto de restricciones del problema. A continuación se presenta una modelización de cada una de estas partes:

Variables Se propone el uso de dos grupos diferentes de variables: x_i representa la cantidad de tensión que puede llegar hasta un nodo e y_{ij} representa la cantidad de tensión que se transmite por la línea que relaciona los nodos i y j.

Dominios Obviamente, la cantidad de tensión que se transmite por una línea debe ser una cantidad no negativa: puede ser 0 si no se transmite ninguna corriente o cualquier valor positivo. Ahora bien, puesto que no pueden llegar más de 50 KWatt a un conmutador, tampoco puede transmitirse una cantidad mayor que esta por la línea.

Por lo tanto, el dominio de todas las variables es el intervalo cerrado $[0, 50]$.

Restricciones Las restricciones modelan los valores legales de cada variables. Para su cálculo es preciso tener en cuenta las restricciones del problema que, en esta parte, consisten únicamente en:

- Por una parte, no puede haber nunca más de 50 KWatt en un nodo. Por lo tanto: $x_i \leq 50, 0 \leq i \leq 7$.
- Por la otra, la cantidad de corriente que se transmite por todas las líneas de salida de un conmutador no puede exceder la que ha recibido.
  En particular, el nodo 0 inicia la transmisión eléctrica con exactamente 50 KWatt como indicaba el enunciado. Por lo tanto, la suma de tensión distribuída por sus líneas de salida no puede exceder esa cantidad:

$$\begin{aligned} x_0 &= 50 \\ y_{01} + y_{02} + y_{03} + y_{04} &\leq x_0 \end{aligned}$$

Análogamente, la cantidad de tensión recibida en el nodo 1 será sólo la que llega desde la central, y esta se distribuirá automáticamente hasta el nodo 2[2]:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{01} \\ y_{12} &\leq x_1 \end{aligned}$$

El nodo 2 debe modelarse de un modo diferente, puesto que tiene dos líneas de entrada. Por lo tanto, la tensión recibida en él será la suma de las contribuciones de los nodos 0 y 1. Por último, toda la corriente recibida se distribuirá por su única línea de salida hasta el nodo 5:

$$\begin{aligned} x_2 &= y_{02} + y_{12} \\ y_{25} &\leq x_2 \end{aligned}$$

Por su parte, el nodo 3 transmite una cantidad menor o igual de corriente que la recibida por la línea que le llega directamente desde la central:

$$\begin{aligned} x_3 &= y_{03} \\ y_{36} &\leq x_3 \end{aligned}$$

El nodo 4, sin embargo, debe distribuir la tensión recibida de la central por dos líneas de salida diferentes:

$$\begin{aligned} x_4 &= y_{04} \\ y_{46} + y_{47} &\leq x_4 \end{aligned}$$

Los únicos nodos que queda por modelizar son los nodos 5, 6 y 7. De estos sólo puede calcularse la cantidad de corriente que les llega por sus líneas de entrada, puesto que no tienen líneas de salida:

$$\begin{aligned} x_5 &= y_{25} \\ x_6 &= y_{36} + y_{46} \\ x_7 &= y_{47} \end{aligned}$$

2. La arco consistencia entre dos variables x_i y x_j sirve para determinar si para cada valor $a_i \in D_i$ existe otro $a_j \in D_j$ que satisfaga la restricción que relaciona las variables i y j, R_{ij}. Si no fuera así, entonces a_i puede eliminarse del dominio de la primera variable, D_i.

   La única restricción que hay entre los nodos 0 y 1 resulta de la línea que precisamente los une. El nodo 0 podría dedicar arbitrariemente toda su tensión a esa línea (no conduciendo corriente por las demás), o podría no enviar ninguna tensión por esa línea. De hecho, a partir de las restricciones identificadas en el problema anterior: $x_1 = y_{01} \leq x_0 - (y_{02} + y_{03} + y_{04})$. Puesto que y_{02}, y_{03} e y_{04} pueden tomar valores en el intervalo $[0, 50]$ (pero su suma no puede superar 50), resulta que $x_1 \leq x_0$.

   Por lo tanto, para cualquier valor del dominio de la variable x_0 (para la central), existe un valor para el nodo 1 (almacenado en x_1) que son simultaneamente legales.

3. La camino consistencia (de longitud 2) entre dos variables x_i y x_j respecto de una tercera x_k, consiste en determinar si para cada asignación de valores $a_i \in D_i$ y $a_j \in D_j$ a las variables x_i y x_j respectivamente compatible con la restricción que las une, R_{ij}, existe un valor $a_k \in D_k$ que sea consistente con las relaciones R_{ik} y R_{jk}. Si no fuera así, la asignación (a_i, a_j) puede eliminarse de la relación R_{ij}.

[2]Nótese que una de las restricciones indicadas a continuación considera que se puede distribuir incluso menos corriente de la que se recibe. Esto se hace interpretando libremente el enunciado que decía que la distribución se podía hacer de cualquier manera. Por supuesto, considerar en su lugar una igualdad es igualmente correcto.

Por supuesto, la camino consistencia se aplica habida cuenta de que las variables x_i y x_j sean arco-consistentes. De hecho, ya se ha verificado la arco-consistencia entre estas variables en el apartado anterior.

En particular, mientras que en el apartado anterior fue posible derivar una restricción algebraica entre las cantidades de tensión en los nodos 0 y 1, ahora no será posible, puesto que los dos nodos contribuyen (con cualquier cantidad que no supere su propia corriente) a la cantidad de tensión recibida en el nodo 2.

En otras palabras, para cualquier par de valores de tensión en los nodos 0 y 1, es posible llevar cualquier cantidad de tensión hasta el nodo 2 (dando por hecho que no se excede el valor máximo de 50 KWatt) por lo que se verifica la camino consistencia.

Problema 5

Este problema se conoce como SIMPLE MACHINE SCHEDULING o, abreviadamente, SMS.

1. El *espacio de estados* consiste en la representación de configuraciones plausibles del problema y operadores que sirven para transitar entre diferentes configuraciones.

   Si los primeros se representan como vértices, los segundos se representan como arcos que indican las transiciones que son factibles por aplicación de algún operador. De esta manera, resulta un *grafo* $G(V, E)$ donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de arcos, de modo que existirá una transición (v_i, v_j) entre dos vértices $v_i, v_j \in V$ si y sólo si existe un operador que transforma la configuración representada en el primer vértice, en la configuración indicada en el segundo.

   En el caso concreto de este problema, cada vértice se representa con instancias de estructuras de datos que necesariamente deben contener la siguiente información:

   Identificador Sirve para distinguir inequívocamente cada petición que se envía a la cola de impresión

   Duración Que se especifica con una variable d_i y representa la cantidad de tiempo necesaria para llevar a cabo la impresión del trabajo i-ésimo.

   Intervalo Representado como un intervalo semi-abierto[3] $[s_i, e_i)$ que indica el período en el que la finalización del trabajo i-ésimo se hace sin penalizaciones.

   Penalizaciones Indicadas como un par (p_i, q_i) que representan la penalización por acabar el trabajo antes de s_i, o por acabarlo después de e_i, respectivamente.

   Todas estas variables son ofrecidas por el sistema automáticamente. El algoritmo de optimización que se diseñará en este problema debe decidir, entonces, el momento de ejecución de cada trabajo:

   Tiempo Representado con una única variable t_i que indica el instante de tiempo en el que se inicia la ejecución.

   Si se trata del primer trabajo, entonces t_i será exactamente igual a las 12:00 del mediodía. En otro caso, $t_i = t_{i-1} + d_{i-1}$ puesto que, como se explicaba en el enunciado, los trabajos se ejecutan sin ninguna espera entre ellos.

   Por otra parte, este problema consiste en un único operador: dado un estado cualquiera que consistirá en una *permutación* de trabajos a imprimir, el operador `secuenciar (j)` añadirá al final de la permutación el trabajo j-ésimo especificado.

2. Tal y como se advertía en el apartado anterior, cada estado consiste en una permutación de N símbolos (donde N es el número de trabajos que deben secuenciarse). Por lo tanto, el tamaño del espacio de estados será exactamente igual a $N!$.

[3] La conveniencia de que sea semi-abierto es para que puedan concatenarse fácilmente, de modo que el extremo final del primer intervalo no se incluye en él, pero sí en el segundo intervalo.

3. Este problema es de costes arbitrarios. Dicho de otra manera, la aplicación del operador `secuenciar (j)` puede tener diferentes costes: 0, si la ejecución del trabajo j-ésimo se concluye en el intervalo de tiempo indicado; p_j, si se acaba antes del inicio del mismo intervalo, o q_j si acaba después.

   Con el propósito de encontrar soluciones óptimas, se descartan entonces los algoritmos del primero en profundidad, del primero en amplitud y del primero en profundización iterativa, puesto que no pueden encontrar soluciones óptimas si los costes de los operadores difieren.

   Sin embargo, los algoritmos de *Dijkstra* y de *Ramificación y acotación en profundidad* sí que pueden encontrar soluciones óptimas en los casos en los que hay costes diferentes:

   Dijkstra es un algoritmo de el mejor primero que, por lo tanto, consume una cantidad de memoria exponencial en la profundidad a la que se encuentra la solución. Dado que el espacio de estados de este problema, calculuado en el segundo apartado, es magníficamente grande, se deshecha su uso.

   Ramificación y acotación en profundidad es un algoritmo en profundidad (como su propio nombre indica) que empieza buscando una primera solución de baja calidad y que refina posteriormente eligiendo mejores alternativas.

   A pesar de que puede re-expandir los mismos nodos varias veces, su consumo de memoria es lineal en la profundidad a la que se encuentra la solución y, por lo tanto, se prefiere por encima del anterior.

   Para concluir, los árboles de búsqueda explorados por los algoritmos de búsqueda de fuerza bruta, en este caso, tienen siempre una profundidad igual a N (con N el número de trabajos que hay que secuenciar). Esto los hace aún más idóneos para las aproximaciones basadas en profundidad, puesto que, de una forma muy natural, ya tienen impuesto una profundidad máxima (lo que evita el riesgo de que caigan en la exploración de ramas infinitamente grandes).

4. La función heurística $h(n)$ se usa, típicamente, en conjunción con la función de coste de cada nodo n, $g(n)$. Su combinación se suele notar como $f(n)$ y se define como $f(n) = g(n) + h(n)$.

   Puesto que se había solicitado minimizar la penalización total de la secuenciación final calculada por un algoritmo de búsqueda, $g(n)$ será, exactamente eso, la suma de todas las penalizaciones de todos los trabajos que ya se han secuenciado en un nodo cualquiera n. Por lo tanto, $h(n)$ debe expresarse en las mismas unidades y la respuesta es que debe estimar la penalización que resultará de secuenciar los trabajos que aún no han sido añadidos a la impresión.

   Por otra parte, cada trabajo dura el mismo tiempo, de modo que la secuenciación de los N trabajos durará, exactamente: $\sum_{i=1}^{N} d_i$, independientemente de la ordenación elegida. En otras palabras, en este problema no hay siquiera una oportunidad para optimizar el tiempo total de ejecución de todos los trabajos.

5. A diferencia de otros problemas, en este caso se pedía explícitamente *minimizar* la penalización total. Por lo tanto, para que la función heurística sea *admisible*, debería no infraestimar la penalización que resultará de secuenciar los trabajos aún no asignados.

   Los algoritmos principales de búsqueda heurística que se pueden usar para obtener soluciones óptimas son IDA* y A*. El primero está basado en una aproximación en profundidad, mientras que el segundo es otro de los algoritmos de la familia de *el mejor primero*.

   Por lo tanto, como en el caso del apartado 3, dado el magnífico tamaño del espacio de estados, se elige la aproximación basada en profundidad (IDA*) que tiene requerimientos de memoria muy inferiores al segundo.