CÁLCULO

Soluciones del examen del 16 de noviembre de 2018, grupos 84 - 85

Problema 1. *[1 punto]* Considera la ecuación de recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3+2x_n}, \quad n \geq 1,$$

con dato inicial $x_1 > 0$. Demuestra que la sucesión

$$x_n = \frac{x_1}{(1+x_1)3^{n-1} - x_1}$$

es la solución de la ecuación de recurrencia.
¿Es (x_n) una sucesión creciente o decreciente? ¿ es acotada? ¿es convergente?

Solución del problema 1.

[0.25 puntos] Demostraremos por inducción que $x_n = \dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{n-1} - x_1}$ es solución de $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{3+2x_n}, n \geq 1$.

1. Base: $n = 1$.
$$\frac{x_1}{(1+x_1)3^{1-1} - x_1} = \frac{x_1}{1+x_1-x_1} = x_1$$

2. Hipótesis de inducción: $x_{k-1} = \dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{k-2} - x_1}$. ¿ $x_k = \dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{k-1} - x_1}$?

$$x_k = \frac{x_{k-1}}{3+2x_{k-1}} = \frac{\dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{k-2} - x_1}}{3 + 2\dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{k-2} - x_1}} = \frac{x_1}{((1+x_1)3^{k-2} - x_1)\dfrac{(1+x_1)3^{k-1} - 3x_1 + 2x_1}{(1+x_1)3^{k-2} - x_1}} =$$

$$= \frac{x_1}{(1+x_1)3^{k-1} - 3x_1 + 2x_1} = \frac{x_1}{(1+x_1)3^{k-1} - x_1}$$

Por 1. y 2., $x_n = \dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{n-1} - x_1}, \forall n \geq 1$.

[0.25 puntos] Monotonía.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{3+2x_n} - x_n = \frac{x_n - 3x_n - 2x_n^2}{3+2x_n} = \frac{-2x_n - 2x_n^2}{3+2x_n} = \frac{-2x_n(1+x_n)}{3+2x_n} < 0$$

ya que $x_n = \dfrac{x_1}{(1+x_1)3^{n-1} - x_1} > 0$ por ser $x_1 > 0$ y $n \geq 1$. Por lo tanto (x_n) es una sucesión estrictamente decreciente.

[0.25 puntos] Acotación. Por ser una sucesión estrictamente decreciente, $x_1 > x_n\,, \forall n \geq 2$. Además, $x_n > 0$. Por lo tanto, (x_n) es una sucesión acotada entre 0 y x_1, i.e., $0 < x_n \leq x_1\,, \forall n \geq 1$.

[0.25 puntos] Convergencia. Por ser (x_n) acotada y monótona, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura la existencia de límite de la sucesión, i.e.,

$$\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{(1+x_1)3^{n-1} - x_1} = 0\,.$$

Problema 2. *[1 punto]* Considera la función definida por la expresión

$$f(x) = x^4 \log(1+5x^8)\,.$$

Encuentra $\mathrm{Dom}(f)$ y calcula la serie de Taylor de f centrada en $x_0 = 0$.
¿Para qué valores de $x \in \mathrm{Dom}(f)$ la serie de Taylor converge a $f(x)$?

Solución del problema 2.

[0.25 puntos] Dominio de f.

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / 1 + 5x^8 > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x^8 > -\frac{1}{5}\right\} = \mathbb{R}$$

ya que $x^8 > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$.

[0.25 puntos] Serie de Taylor de f centrada en $x_0 = 0$. Usaremos la serie de Taylor conocida para la función $g(x) = \log(1+x)$ centrada en $x_0 = 0$:

$$g(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R(x|f,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Luego, para f, la serie de Taylor será:

$$f(x) = x^4 g(5x^8) = x^4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(5x^8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 5^n \frac{x^{8n+4}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

[0.5 puntos] Convergencia de la serie de Taylor. Usaremos el criterio del cociente:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+2} 5^{n+1} \dfrac{x^{8n+12}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n+1} 5^n \dfrac{x^{8n+4}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\dfrac{x^{8n+12}}{n+1}}{5^n \dfrac{x^{8n+4}}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5 \frac{x^{8n+12}\; n}{x^{8n+4}\;(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 5\, x^8 \frac{n}{(n+1)} = 5\, x^8$$

- Para $r = 5\,x^8 < 1 \Leftrightarrow x^8 < \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt[8]{5}} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}} < x < \dfrac{1}{\sqrt[8]{5}} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}}, \dfrac{1}{\sqrt[8]{5}}\right)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \dfrac{x^{8n+4}}{n}$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente.
- Para $r = 5\,x^8 > 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}}, \infty\right)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \dfrac{x^{8n+4}}{n}$ es divergente.
- Para $r = 5\,x^8 = 1 \Leftrightarrow x^8 = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x^4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \frac{x^{8n+4}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \frac{(x^4)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n+1}}{n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \frac{1}{5^n}\frac{1}{\sqrt{5}\,n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

que es condicionalmente convergente por el criterio de Leibniz: $\dfrac{1}{n}$ es una sucesión decreciente, $\dfrac{1}{n} > 0\,,\ \forall n \geq 1$ y $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n \dfrac{x^{8n+4}}{n}$ converge si $x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}}, \dfrac{1}{\sqrt[8]{5}}\right]$.

Problema 3. *[0.5 puntos]* Estudia el comportamiento local alrededor de $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = e^{x-x^3}\cos(x)\tan(x^2)$$

Solución del problema 3.

Estudiaremos el comportamiento local de f alrededor de $x_0 = 0$ a través del polinomio de Taylor. Para ello, usaremos los polinomios de Taylor conocidos centrados en $x_0 = 0$ de e^x, $\cos(x)$ y $\tan(x)$.

$$e^x = 1 + x + o(x) \to e^{x-x^3} = 1 + x + o(x)$$

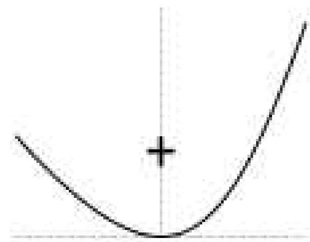
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \to \tan(x) = x^2 + o(x^2)$$

Así,

$$f(x) = e^{x-x^3}\cos(x)\tan(x^2) = (1 + x + o(x))\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x^2 + o(x^2)\right) = x^2 + o(x^2)$$

Por tanto, la primera derivada no nula en $x_0 = 0$ es de orden par y es mayor que cero, $f''(0) = 1 > 0$, así que f tiene un mínimo local en $x_0 = 0$ y es convexa en un entorno de $x_0 = 0$.



Problema 4. *[1.5 puntos]* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1/x^2) & x \neq 0 \\ \pi/2 & x = 0 \end{cases}$$

Calcula

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\,.$$

Estudia la continuidad y derivabilidad de f. ¿Es f' una función continua?
Calcula, si es que existe, el polinomio de Taylor de segundo orden de f centrado en $x_0 = 0$.

Solución del problema 4.

[0.25 puntos] Cálculo del límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan(1/x^2) = \arctan(0) = 0$$

por ser $\arctan(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$.

[0.25 puntos] Estudio de la continuidad de f.

- $x \neq 0$: Si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\arctan(1/x^2)$ es composición de funciones continuas, por lo tanto f es continua $\forall x \neq 0$.
- $x = 0$: $f(0) = \pi/2$, ¿ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \pi/2$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan(1/x^2) = \frac{\pi}{2}\,,\ \text{ya que}\ \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$$

Luego, f es continua en $\mathbb{R}$.

[0.25 puntos] Estudio de la derivabilidad de f. Hay dos opciones:

1. Por la definición de derivada

   - $x \neq 0$: Si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\arctan(1/x^2)$ es composición de funciones derivables, por lo tanto f es derivable $\forall x \neq 0$. En concreto, si $x \neq 0$,

   $$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{2x}{1+x^4}$$

   - $x = 0$:

   $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(1/x^2) - \pi/2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)_{\text{Indet.}} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} -\frac{2x}{1+x^4} = 0$$

   Luego, f es derivable en $\mathbb{R}$ y, dado que $-\frac{2x}{1+x^4}$ se puede evaluar en $x = 0$ y coincide con $f'(0)$, se cumple:

   $$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4}$$

2. Usar una consecuencia del teorema de valor medio. Si $x \neq 0$, $\arctan(1/x^2)$ es composición de funciones derivables, por lo tanto es derivable y, en concreto, si $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4}$. Por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $\lim_{x \to 0} f'(x) = L$, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = L$.

   $$\lim_{x \to 0} f'(x) = lim_{x \to 0} - \frac{2x}{1+x^4} = 0$$

   Así que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 0$, que coincide con el valor de f' en $x = 0$.

[0.25 puntos] Estudio de la continuidad de f'. $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4}$ es composición de funciones continuas para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto f' es continua en $\mathbb{R}$.

[0.5 puntos] Polinomio de Taylor de segundo orden de f centrado en $x_0 = 0$. Para hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de f necesitamos que sea derivable dos veces en $x_0 = 0$. Así que veremos si f' es derivable. $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4}$ es composición de funciones derivables en todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto f' es derivable en $\mathbb{R}$ y se cumple:

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 2}{(x^4+1)^2}, f''(0) = -2.$$

Usando la definición de polinomio de Taylor,

$$P_2(x|f, 0) = \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{-2}{2!}x^2 = \frac{\pi}{2} - x^2.$$