Soluciones # 6

Transformaciones lineales y matrices

Problema 6.1 Un cálculo directo permite concluir que

a) $A_T = (1,0)$; $\quad B_{\ker(T)} = ((0,1)^t)$; $\quad B_{\mathrm{Im}(T)} = (1)$; $\quad T$ no es inyectiva.

b) $A_T = (w_1, w_2)$. Como $w \neq 0$, entonces $w_1 \neq 0$ ó $w_2 \neq 0$:

- Si $w_1 \neq 0$, $B_{\ker(T)} = \left(\left(-\dfrac{w_2}{w_1}, 1\right)^t\right)$.
- Si $w_1 = 0$, $B_{\ker(T)} = ((1,0)^t)$.

$B_{\mathrm{Im}(T)} = (1)$; $\quad T$ no es inyectiva.

c) $A_T = 3I_n$; $\quad \ker(T) = \{0\}$ (no hay $B_{\ker(T)}$); $\quad B_{\mathrm{Im}(T)} = (e_1, \dots, e_n)$; $\quad T$ es inyectiva.

d) Puesto que

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se tiene que $B_{\ker(T)} = (1, x)$; $\quad B_{\mathrm{Im}(T)} = (x^2)$; por lo que T no es inyectiva.

Problema 6.2 Se cumple que

$$A_{T,B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $\det(A_{T,B_0}) \neq 0$.

Problema 6.3 La matrix A_T es invertible;

$$A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Problema 6.4 Basta demostrar que es un conjunto linealmente independiente, es decir que

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$$

define un sistema compatible determinado. Usando las fórmulas de cambio de base $[u]_B = T_{BB_0}[u]_{B_0} = (5, 4, -2)^t$.

Por otro lado,

$$A_{T,B_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y se tiene que $\ker(T) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Problema 6.5 La condición es

$$u_1 + u_3 - 4u_2 = 0 .$$

La imagen de T satisface

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}\left((4, 1, 0)^t, (-1, 0, 1)^t\right) .$$

Problema 6.6 Las soluciones son:

a) $A_T = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $A_T = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Problema 6.7 La matriz es

$$A_{T,B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 6.8 Se tiene que:

1. $B_{\mathcal{C}(A)} = ((1,2,-4)^t, (2,3,-5)^t)$ y $B_{\mathcal{C}(A^t)} = ((1,2,-1,3)^t, (2,3,0,1)^t)$.

2. $\dim(N(A)) = 2$ y $\dim(N(A^t)) = 1$.

3. $a \in \{-1,-2\}$.

Problema 6.9

1. La matriz es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Además, $\ker(T) = \mathrm{Gen}\left((2,1,0,0)^t, (2,0,1,0)^t, (-3,0,0,1)^t\right)$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}\left((1,0)^t\right)$.

2. $N(A_T) = \ker(T)$, $\mathcal{C}(A_T) = \mathrm{Im}(T)$, $\mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}\left((1,-2,-2,3)^t\right)$ y $N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\left((0,1)^t\right)$.

Problema 6.10 Respecto a la base $B_1 = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{P}_2$ y la canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
N(A_T) &= \operatorname{Gen}\left((0,-1,1)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T) &= \operatorname{Gen}\left((1,0,0)^t,(0,1,0)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T^t) &= \operatorname{Gen}\left((1,0,0)^t,(0,1,1)^t\right) , \\
N(A_T^t) &= \operatorname{Gen}\left((0,0,1)^t\right) .
\end{aligned}$$

Problema 6.11 Respecto a la base

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
N(A_T) &= \operatorname{Gen}\left((-1,1,0,0)^t,(0,0,-1,1)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T^t) &= \operatorname{Gen}\left((1,1,0,0)^t,(0,0,1,1)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T) &= \operatorname{Gen}\left((1,0)^t,(0,1)^t\right) , \\
N(A_T^t) &= \left\{(0,0)^t\right\} .
\end{aligned}$$