Ejercicios 6: Redes Bayesianas

Departamento de Informática / Department of Computer Science
Universidad Carlos III de Madrid

Inteligencia Artificial
Grado en Ingeniería Informática
2019/20

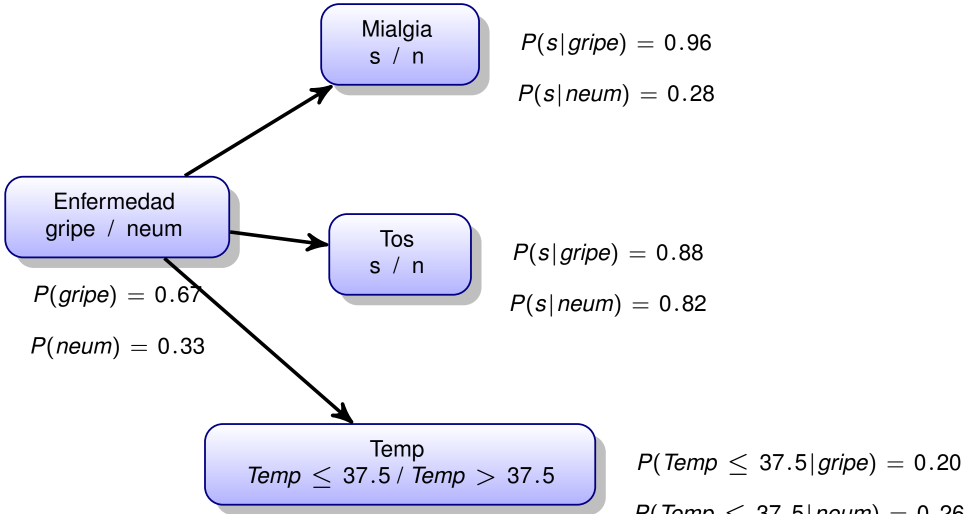
Tabla de contenidos

Notación y resumen

- Para representar un problema con una red Bayesiana hay que definir dos elementos, variables y dependencias:
  - Para representar las variables de la red tenemos que escribir su nombre y los valores que pueden tomar.
  - Para representar las relaciones entre variables podemos usar dos notaciones equivalentes:
    - Un diagrama donde las variables son los nodos y los arcos las dependencias, con las tablas de probabilidad condicional asociadas a cada nodo.
    - Simplemente el conjunto de tablas de probabilidad condicional.

  En ambos casos las variables hijo están condicionadas a sus variables padre ($P(hijo|\{padres\})$). Las variables que no tienen padre se etiquetan con sus probabilidades a priori.
- Para inferir algo en una RB nos preguntarán la probabilidad de que una variable tome un valor (consulta) sabiendo que ciertas variables tienen otros (evidencia) pero desconociendo los valores de otras variables (variables ocultas).
  - El método de inferencia exacta permite calcular numéricamente cualquier consulta.
  - En algunas ocasiones permitimos dejar los cálculos en función de un valor α de proporcionalidad (escalado); en los demás casos, hay que despejar α o calcular todos los valores posibles para la consulta en función de α y normalizar.

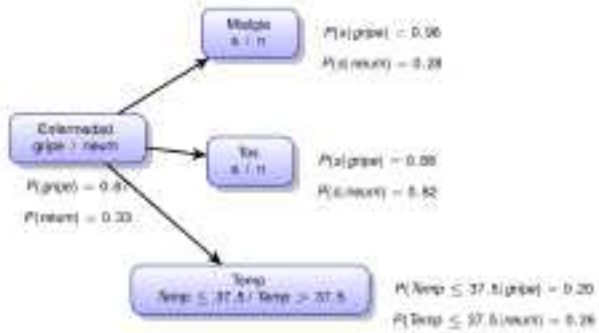
Considere la red Bayesiana de la siguiente figura, que corresponde con un modelo de clasificador Naive Bayes:



Escriba la expresión que corresponde al cálculo que se pide a continuación, dejando sin calcular el factor de proporcionalidad α:

- Dada la evidencia $e = \{Temp > 37.5\}$, calcule la probabilidad de gripe (es decir, $P(gripe/Temp > 37.5)$)
- Dada la evidencia $e = \{Temp > 37.5, Tos = s\}$, calcule la probabilidad de gripe (es decir $P(gripe/Temp > 37.5, Tos = s)$)

Ejercicio 1)



a) evidencia $= \{ Temp > 37'5 \}$

Calcular $P(gripe / Temp > 37'5) = \dfrac{(1 - P(Temp \leq 37'5 / gripe)) \cdot P(gripe)}{1 - P(Temp \leq 37'5)} =$

$$= \frac{0'8 \cdot 0'67}{1 - 0'2198} = \boxed{0'687}$$

$$P(Temp \leq 37'5) = 0'2 \cdot 0'67 + 0'26 \cdot 0'33 = 0'2198$$

$$P(gripe, T > 37'5) = \alpha P(T > 37'5 / gripe) P(gripe) = \alpha 0'8 \cdot 0'67 = \boxed{\alpha 0'536}$$

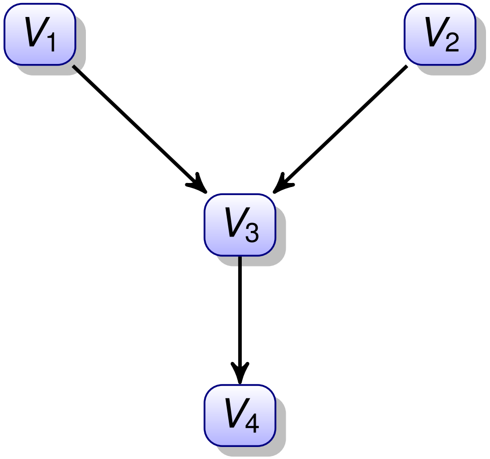
b.) evid $= \{ Temp > 37'5 , Tos\ s \}$

$$P(gripe / Temp > 37'5, Tos = s) = \alpha P(gripe, Temp > 37'5, tos) =$$

$$= \alpha P(gripe) P(tos/gripe) P(T > 37'5 / gripe) = \boxed{\alpha 0'88 \cdot 0'8 \cdot 0'67}$$

Ejercicio 2: Inferencia, sólo fórmulas

Considere la red Bayesiana de la figura con cuatro variables binarias (booleanas):



1. Escriba cómo se puede escribir de forma simplificada la distribución de probabilidad conjunta para estas variables, a partir la estructura de ese grafo (factorización)
2. Escriba la expresión para la distribución de probabilidad marginal de P(V4)
3. Asuma que $V_2 = \text{true}$. Cuál es la distribución de probabilidad *a posteriori* de V_2? Cuál es la distribución de probabilidad *a posteriori* de V_4?
4. Asuma que solo observamos que $V_4 = \textit{true}$ (es decir, V_2 es de nuevo desconocido). Calcule la distribución de probabilidad *a posteriori* de V_2.
5. Calcule la probabilidad conjunta de $V_1 = \textit{true}$, $V_2 = \textit{false}$, $V_3 = \textit{true}$, $V_4 = \textit{true}$.

Ejer 2)

1.) $P(V_4, V_3, V_2, V_1) = P(V_4 / V_3)\, P(V_3 / V_1, V_2)\, P(V_1)\, P(V_2)$

2.) $P(V_4) = P(V_4, \underbrace{V_3, V_2, V_1}_{\text{ocultas}}) = \sum_{x,y,z} P(V_4 / V_3 = z)\, P(V_3 = z / V_1 = x, V_2 = y)\, P(V_1 = x)\, P(V_2 = y)$

3) $V_2 = true$.

$P(V_2 / V_2 = true) = (1, 0)$

$P(V_4 / V_2 = true) = \alpha\, P(V_4, V_3, V_1, V_2 = true) = \alpha \sum_{\substack{V_1, V_3 \\ x \;\; y}} P(V_4 / V_3 = y)\, P(V_3 = y / V_1 = x, V_2 = true)$

$P(V_1 = x)\, P(V_2 = true) =$

$= \alpha\, P(V_2 = true) \sum_x P(V_1 = x) \sum_y P(V_4 / V_3 = y)\, P(V_3 = y / V_1 = x, V_2 = true)$

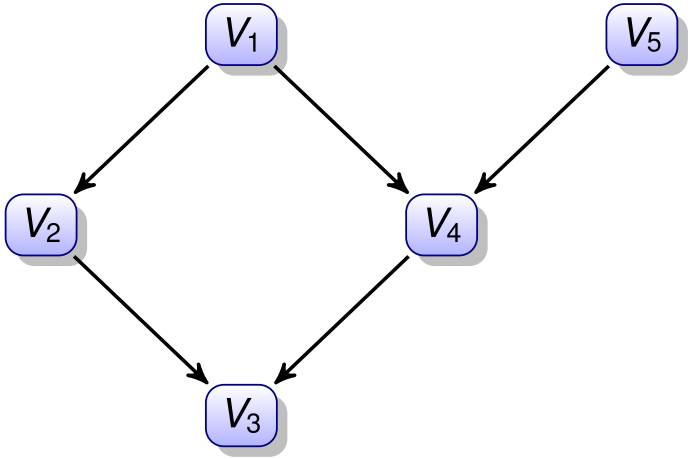
4.) $P(V_2 / V_4 = true) = P(V_2) \sum_{x,y} P(V_4 = t / V_3 = y)\, P(V_3 = y / V_2 = t, V_1 = x)\, P(\underset{\text{Sacable.}}{V_1 = x})$

Para $V_2 = true$

5.) $P(V_1\, t, V_2\, f, V_3\, t, V_4\, t) = P(V_4\, t / V_3\, t)\, P(V_3\, t / V_1\, t, V_2\, f)\, P(V_1\, t)\, P(V_2\, f)$

Ejercicio 3: Inferencia exacta

Dada la red Bayesiana con cinco variables booleanas de la figura:



$P(v_1)=0.2$	
$P(v_5)=0.8$	
$P(v_2\|v_1)=0.5$	$P(v_2\|\neg v_1)=0.4$
$P(v_3\|v_2, v_4)=0.4$	$P(v_3\|\neg v_2, v_4)=0.7$
$P(v_3\|v_2, \neg v_4)=0.3$	$P(v_3\|\neg v_2, \neg v_4)=0.6$
$P(v_4\|v_1, v_5)=0.6$	$P(v_4\|\neg v_1, v_5)=0.2$
$P(v_4\|v_1, \neg v_5)=0.0$	$P(v_4\|\neg v_1, \neg v_5)=1.0$

- Calcule la probabilidad $P(\neg v_5/v_3)$. Es decir, la probabilidad de que V_5 sea falso dado que V_3 es cierto.

Ejer 3:

$$P(\neg V_5 / V_3) = \alpha P(V_3, \underset{x}{\underset{\shortparallel}{V_2}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{V_4}}, \underset{z}{\underset{\shortparallel}{V_1}}, \neg V_5) = \alpha \sum_{x,y,z} P(V_3/x,y) P(x/z) P(y/z,\neg V_5) P(z) P(\neg V_5) =$$

$$= \alpha P(\neg V_5) \sum_z P(z) \sum_y P(y/z,\neg V_5) \sum_x P(V_3/x,y) P(x/z)$$

$x = V_2$
$y = V_4$
$z = V_1$

$$= \alpha P(\neg V_5) \cdot \Big[P(z) \Big[P(y/z,\neg V_5) \big[P(V_3/x,y) P(x/z) + P(V_3/\neg x,y) P(\neg x/z) \big] +$$
$$+ P(\neg y/z,\neg V_5) \big[P(V_3/x,\neg y) P(x/z) + P(V_3/\neg x,\neg y) P(\neg x/z) \big] \Big] +$$
$$+ P(\neg z) \Big[P(y/z,\neg V_5) \big[P(V_3/x,y) P(x/z) + P(V_3/\neg x,y) P(\neg x/z) \big] +$$
$$+ P(\neg y/z,\neg V_5) \big[P(V_3/x,\neg y) P(x,z) + P(V_3/\neg x,\neg y) P(\neg x/z) \big] \Big] \Big]$$

$$= \alpha 0'2 \cdot \Big[0'2 \cdot \Big[0 \cdot [\ ] +$$
$$+ 1 \cdot [0'3 \cdot 0'5 + 0'6 \cdot 0'5] \Big] +$$
$$+ 0'8 \cdot \Big[0 \cdot [\ ] +$$
$$+ 1 \cdot [0'3 \cdot 0'5 + 0'6 \cdot 0'5] \Big] \Big]$$

Ejercicio 4: Concesionario

- Un vendedor de coches usados ofrece a los clientes potenciales que se realice una revisión en el coche que quieren comprar. El test debe revelar si el coche tiene o no defectos. La probabilidad a priori de que un coche tenga defectos es 0.3 %.
- Hay dos tests posibles:
  - **Test1** tiene tres posibles resultados: sin-defectos, defectos y no-conclusivo. Si el coche no tiene defectos, entonces las probabilidades para estos resultados son respectivamente 0.8, 0.05 y 0.15. Sin embargo, si tiene defectos, las probabilidades son 0.05, 0.75 y 0.2.
  - **Test2** tiene sólo dos posibles resultados: sin-defectos y defectos. Si el coche no tiene defectos, las probabilidades de cada resultado son 0.8 y 0.2 respectivamente. Y si los tiene, las probabilidades son 0.25 y 0.75.
- **Se pide:** Construir una red Bayesiana (estructura y TPC) que represente esta situación.

Ejer 4) $P(d) = (0'003, 0'997)$

d : defectos

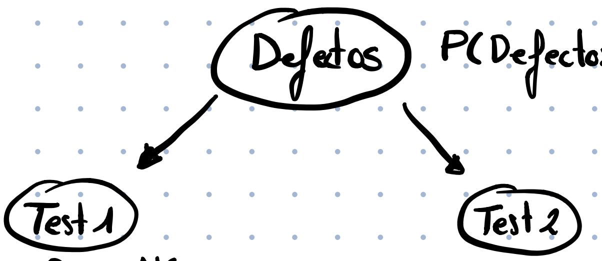
sd: sin defecto dt: defecto tras test nc: no conclusivo

Test 1: $P(sd_1/d) = 0'05$ $P(dt_1/d) = 0'75$ $P(nc_1/d) = 0'2$

$P(sd_1/\neg d) = 0'8$ $P(dt_1/\neg d) = 0'05$ $P(nc_1/d) = 0'15$

Test 2: $P(sd_2/d) = 0'25$ $P(dt_2/d) = 0'75$

$P(sd_2/\neg d) = 0'8$ $P(dt_2/d) = 0'2$



P(Defectos) = 0'003

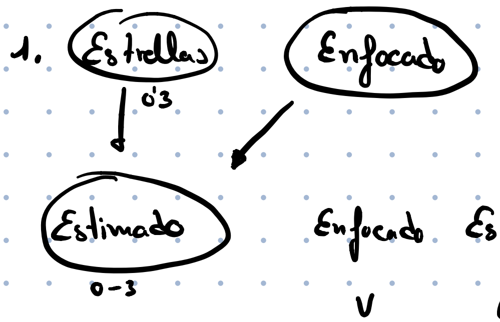
Defectos	SD	D	NC
V	0'05	0'75	0'2
F	0'8	0'05	0'15

Defectos	SD	D
V	0'25	0'75
F	0'8	0'2

Ejercicio 5: Astrónomos

- Sean dos astrónomos (A and B) que miden el numero de estrellas que hay en una región del universo determinada, utilizando para ello sus respectivos telescopios, que tienen características similares.
  El 90 % de las veces la estimación que obtienen se corresponde con la real, mientras que en el 10 % restante la estimación varía en una estrella, siempre que los telescopios estén enfocados correctamente.
  Desgraciadamente, esto último solo ocurre en 9 de cada 10 ocasiones.
  Si no están enfocados correctamente, la estimación difiere del valor real en una estrella en un 50 % de los casos.
  Ambos saben que el número de estrellas en cada región seleccionada varía uniformemente entre 0 y 3, y la estimación debe también dar un valor entre 0 y 3.
  Usando esta información:
  1. Construya una red Bayesiana que represente el dominio
  2. Defina cada una de las tablas de probabilidad condicional de la red

Ejer 5) Depende del N° estrellas y si enfocado.

1. 

P(Enfocado) = 0'9

Enfocado	Estrellas	0	1	2	3
V	0	0'9	0'1	0	0
V	1	0'05	0'9	0'05	0
V	2	0	0'05	0'9	0'05
V	3	0	0	0'1	0'9
F	0	0'5	0'5	0	0
F	1	0'25	0'5	0'25	0
F	2	0	0'25	0'5	0'25
F	3	0	0	0'5	0'5

Ejercicio 6: Causas concurrentes

Cuando una persona alérgica a los gatos se encuentra en casa de un amigo y empieza a estornudar, puede ser por dos motivos: está resfriado o su amigo tiene un gato. Normalmente, los muebles de las casas con gatos están arañados.

1. Queremos construir un sistema capaz de razonar con la información del texto para personas alérgicas a los gatos. Diseña una red Bayesiana que represente esta información.
2. ¿Cúantos parámetros tiene la red?
3. Juan es alérgico a los gatos. Actualmente se encuentra en la casa de un amigo y observa que los muebles están arañados ¿Cuál es la expresión para calcular la probabilidad de que su amigo tenga un gato?
4. Después Juan comienza a estornudar ¿Cuál es ahora la expresión para calcular la probabilidad de que su amigo tenga un gato? ¿Cuál es la expresión para calcular la probabilidad de que Juan esté resfriado?

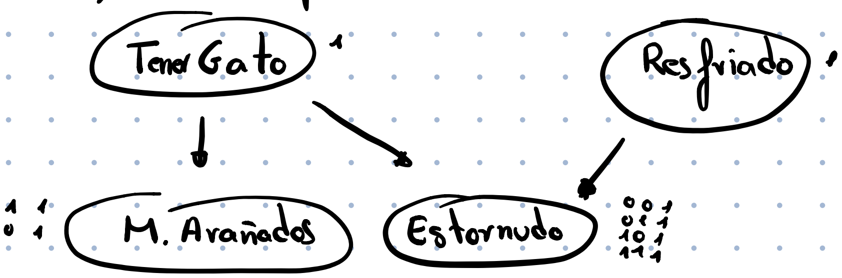
Nota: considere que el dominio considerado son las personas alérgicas a los gatos. ¿Cómo variaría el ejercicio si guera genérico (para todo tipo de personas), y qué otros datos podrían faltar en ese caso?

Ejer 6)

Estornu
Gato Resfri

Gatos — Mueb Arañ

1.) Causa → efecto



2.) $P(\text{TenerGato})$ $\quad P(M.Ar/TG)$ $\quad P(E/TG,R)$ $\quad P(E/TG,\neg R)$

$P(\text{Resfriado})$ $\quad P(M.Ar/\neg TG)$ $\quad P(E/\neg TG,R)$ $\quad P(E/\neg TG,\neg R)$

8 parametros.

3.) $P(TG/MA) = \alpha P(MA,E,TG,R) = \alpha \sum_{E,R} P(MA/TG) P(\underline{E}/TG,\underline{R}) P(TG) P(\underline{R}) =$

$= \alpha P(MA/TG) P(TG) \sum_{R} P(R) \sum_{E} P(E/TG,R)$

4.) $P(TG/MA,E) = \alpha P(MA,E,TG,R) = \alpha \sum_{R} P(MA/TG) P(E/TG,\underline{R}) P(TG) P(\underline{R}) =$

$= \alpha P(MA/TG) P(TG) \sum_{R} P(R) P(E/TG,R)$

$P(R/MA,E) = \alpha P(MA,E,TG,R) = \alpha \sum_{TG} P(MA/\underline{TG}) P(E/\underline{TG},R) P(\underline{TG}) P(R) =$

$\alpha P(R) \sum_{TG} P(MA/TG) P(E/TG,R) P(R)$

Ejercicio 7: Detector de fraude

Imagina que trabajas en una institución financiera que necesita construir un aistema de detección de fraude.

- Cuando el titular de la tarjeta está de viaje al extranjero, son más probables las transacciones fraudulentas, ya que los turistas son un objetivo importante de los timadores. Concretamente, el 1 % de las transacciones que se realizan cuando el titular de la tarjeta está de viaje en el extranjero son fraudulentas, mientras que sólo el 0,2 % de la transacciones que se producen cuando no está viajando al extranjero son fraudulentas.
- En promedio, un 5 % de las transacciones suceden mientras el titular de la tarjeta está viajando al extranjero. Si una transacción es fraudulenta, entonces se incrementa la probabilidad de que la operación se deba a compras realizadas en el extranjero, a menos que el titular de la tarjeta esté viajando al extranjero. Concretamente, cuando el titular no está viajando al extranjero, el 10 % de las transacciones fraudulentas son compras realizadas en el extranjero, mientras que sólo un 1 % de las transacciones legítimas son compras realizadas en el extranjero.
- Por otro, cuando el titular está viajando al extranjero, el 90 % de las transacciones son compras realizadas en el extranjero, independientemente de la legitimidad de las mismas.

Ejercicio 7: Detector de fraude

Imagina que trabajas en una institución financiera que necesita construir un aistema de detección de fraude.

1. Construye una red bayesiana (estructura y distribuciones de probabilidad) para representar las relaciones del sistema de detección de fraudes.
2. Si el sistema ha detectado una compra fuera de la ciudad del titular. ¿Cuál es la probabilidad de fraude si no sabemos si el titular está de viaje o no?
3. Un agente llama al cliente para confirmar una transacción, pero el titular de la tarjeta no está en casa. Su esposa confirma que esta fuera de la ciudad en un viaje de negocios. ¿Cómo cambia la probabilidad de fraude considerando esta nueva información?

Ejercicio 8: Detector de incendios

Construya un clasificador Naive Bayes para la detección de fuegos a partir del siguiente conjunto de datos de entrenamiento. Los niveles de CO_2 y Temperatura se dan en rangos (entre 0 y 2).

1. Definir la estructura y tablas de probabilidad del clasificador
2. Determinar cuál sería la respuesta del clasificador para el caso marcado como “Test”.
3. ¿Cómo se aplica el clasificador Naive Bayes para evaluar un caso de test en el que no se dispone del valor de algún atributo?

Humo	CO	CO_2	Temp	Fuego
S	N	1	2	S
S	S	2	0	S
N	S	2	1	S
N	N	1	2	S
S	S	1	1	S
S	S	0	2	S
N	N	2	2	S
		Test		
S	N	1	1	?

Humo	CO	CO_2	T	Fuego
S	N	2	1	N
S	N	1	0	N
N	N	1	0	N
S	N	0	1	N
N	S	1	0	N
S	N	0	2	N
S	S	0	1	N
		Test		
N	S	2	0	?