Ejercicios

Los marcados con * son para evaluación continua.

Observación: en muchos casos citamos el teorema o axioma que se aplica, seguido de Modus Ponens para obtener las nuevas líneas de la deducción. También es válido, en todos esos casos, poner el resultado de la regla derivada correspondiente directamente.

1. Comprobar si la deducción que sigue es correcta, usando cálculo con supuestos:

$p \wedge q \rightarrow r \vee s,\ p \rightarrow q,\ p \wedge (r \rightarrow t \wedge m),\ s \rightarrow n \wedge o \Rightarrow t \vee n$

1. $p \wedge q \rightarrow r \vee s$	premisa
2. $p \rightarrow q$	premisa
3. $p \wedge (r \rightarrow t \wedge m)$	premisa
4. $s \rightarrow n \wedge o$	premisa
5. $\vdash p \wedge (r \rightarrow t \wedge m) \rightarrow p$	A4
6. p	MP 5,3
7. q	MP 2,6
8. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$	A3
9. $q \rightarrow p \wedge q$	MP 8,6
10. $p \wedge q$	MP 9,7
11. $r \vee s$	MP 1,10
*12. r	supuesto caso 11
13. $\vdash p \wedge (r \rightarrow t \wedge m) \rightarrow (r \rightarrow t \wedge m)$	A4 simplificación
14. $r \rightarrow t \wedge m$	MP 13,3
15. $t \wedge m$	MP 14,12
16. $\vdash t \wedge m \rightarrow t$	A4
17. t	MP 16,15
18. $\vdash t \rightarrow t \vee n$	A5
19. $t \vee n$	MP 18,17
*20. s	supuesto caso 11
21. $n \wedge o$	MP 4,20
22. $\vdash n \wedge o \rightarrow n$	A4
23. n	MP 22,21
24. $\vdash n \rightarrow n \vee t$	A5
25. $n \vee t$	MP 24,23
26. $\vdash n \vee t \rightarrow t \vee n$	conmutativa
27. $t \vee n$	MP 26,25

28. t ∨ n — canc. casos 11, 12-19, 20-27

2. Formalizar la siguiente deducción y comprobar si es correcta, usando cálculo con supuestos (*):

Ni apruebo ni programo bien a menos que tenga paciencia.

Esta claro que o apruebo o me cae una bronca de mis padres.

Si me cae una bronca de mis padres entonces es que estoy programando bien.

De todo esto se deduce que tengo paciencia.

Podemos usar el método prueba por casos y además de los axiomas de Kleene necesitaremos usar la propiedad conmutativa ($\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$) y De Morgan ($\vdash A \vee B \rightarrow \sim(\sim A \wedge \sim B)$)

a: apruebo
b: programo bien
p: tengo paciencia
r: me cae una bronca de mis padres

1. $\sim(\sim a \wedge \sim b) \rightarrow p$	premisa
2. $a \vee r$	premisa
3. $r \rightarrow b$	premisa
*4. a	supuesto caso 2
5. $\vdash a \rightarrow a \vee b$	A5
6. $a \vee b$	MP 5,4
*7. r	supuesto caso 2
8. b	MP 3,7
9. $\vdash b \rightarrow a \vee b$	A5
10. $a \vee b$	MP 9,8
11. $a \vee b$	cancelación casos 2, 4-6, 7-10
12. $\vdash a \vee b \rightarrow \sim(\sim a \wedge \sim b)$	De Morgan
13. $\sim(\sim a \wedge \sim b)$	MP 12,11
14. p	MP 2,13

3. Formalizar la siguiente deducción y comprobar si es correcta, usando cálculo con supuestos:

O no es suficiente tener un buen sueldo para vivir bien, o soy demasiado exigente.

La verdad es que no trabajo mucho.

Pero sólo si trabajo mucho o vivo bien tendré un buen sueldo.

Luego lo que pasa es que soy demasiado exigente.

Usaremos el cálculo de supuestos mediante el teorema de la deducción y demostraremos, al cancelar la cadena subsidiaria que "si tengo un buen sueldo entonces vivo bien". Necesitaremos usar la interdefinición de la disyunción y la implicación ($\vdash \sim A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$).

s: tener un buen sueldo
b: vivir bien
e: ser demasiado exigente
t: trabajar mucho

$\sim(s \rightarrow b) \vee e$,
$\sim t$,
$s \rightarrow t \vee b$,
$\Rightarrow e$

1. $\sim(s \rightarrow b) \vee e$	premisa
2. $\sim t$	premisa
3. $s \rightarrow t \vee b$	premisa
4. s	supuesto TD
5. $t \vee b$	MP 3,4
6. $\vdash t \vee b \rightarrow (\sim t \rightarrow b)$	Interdefinición $\vee, \rightarrow$
7. $\sim t \rightarrow b$	MP 6,5
8. b	MP 7,2
9. $s \rightarrow b$	cancelación TD 4-8
10. $\vdash \sim(s \rightarrow b) \vee e \rightarrow ((s \rightarrow b) \rightarrow e)$	Interdefinición $\vee, \rightarrow$
11. $(s \rightarrow b) \rightarrow e$	MP 10,1
12. e	MP 11,9

4. Formalizar la siguiente deducción y comprobar si es correcta, usando cálculo con supuestos.

"Si x=1 e y=2, entonces z=3.

Sabemos que w=0 es necesario para que si y=2 entonces sea z=3.

Tenemos que x=1;

por consiguiente w=0."

Usamos la reducción al absurdo iniciando la cadena subsidiaria con la propia conclusión negada. Usaremos tanto la contraposición ($\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$) como la interdefinición ($\vdash \sim(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \sim B$)

x: x = 1 ; y: y = 2; z : z = 3; w: w=0

$x \wedge y \to z$
$(y \to z) \to w$
x

$\Rightarrow w$

1. $x \wedge y \to z$	premisa
2. $(y \to z) \to w$	premisa
3. x	premisa
4. $\sim w$	supuesto absurdo
5. $\vdash ((y \to z) \to w) \to (\sim w \to \sim(y \to z))$	Contrap.
6. $\sim w \to \sim(y \to z)$	MP 5,2
7. $\sim(y \to z)$	MP 6,4
8. $\vdash \sim(y \to z) \to y \wedge \sim z$	Interdefinición $\wedge ,\to$
9. $y \wedge \sim z$	MP 8,7
10. $\vdash y \wedge \sim z \to y$	A4
11. y	MP 10,9
12. $\vdash x \to (y \to x \wedge y)$	A3
13. $y \to x \wedge y$	MP 12,3
14. $x \wedge y$	MP 13,11
15. z	MP 1,14
16. $\vdash y \wedge \sim z \to \sim z$	A4
17. $\sim z$	MP 16,9
18. w	cancelación 4, 15, 17

5. Formalizar y demostrar que la deducción es correcta, usando cálculo con supuestos.

1. Si hablas eres un ser humano.

2. Si no tienes nada que decir, no hablas.

3. Sólo si tienes algo que decir, eres un ser inteligente.

4. Si eres un ser humano, y tienes algo que decir, eres un buen conversador.

5. No eres un ser inteligente o eres un ser humano.

6. Por lo tanto, si hablas o eres un ser inteligente, eres un buen conversador.

Usamos primero el teorema de la deducción para iniciar una secuencia subsidiaria y posteriormente prueba por casos. Aparte de los axiomas de Kleene necesitaremos usar tanto la contraposición (⊢ (A → B) → (~B → ~A)) como la implicación (⊢ ~A ∨ B → (A → B))

h: hablas
s: ser humano
t: tener qué decir
i: inteligente
c: conversador

h → s
~t → ~h
i → t
s ∧ t → c
~i ∨ s

⇒ h ∨ i → c

1. h → s	premisa
2. ~t → ~h	premisa
3. i → t	premisa
4. s ∧ t → c	premisa
5. ~i ∨ s	premisa
6. h ∨ I	supuesto TD
*7. h	supuesto casos 6
8. s	MP 1,7
9. ⊢ (~t → ~h) → (h → t)	CP
10. h → t	MP 9,2
11. t	MP 10,7
12. ⊢ s → (t → s ∧ t)	A3
13. t → s ∧ t	MP 12,8
14. s ∧ t	MP 13,11
*15. I	supuesto casos 6
16. t	MP 3,15
17. ⊢ ~i ∨ s → (i → s)	Interdef. ∨ ,→
18. i → s	MP 17,5
19. s	MP 18,15
20. ⊢ s → (t → s ∧ t)	A3
21. t → s ∧ t	MP 20,19
22. s ∧ t	MP 21,16

23. $s \wedge t$	cancelación casos 6,7-14,15-22
24. c	MP 4,23
25. $h \vee i \rightarrow c$	cancelación TD 6-24

6. Demuestra usando cálculo con supuestos (*):

$p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow s), r \wedge \sim s \Rightarrow t \rightarrow \sim(p \wedge q)$

1. $p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow s)$	premisa
2. $r \wedge \sim s$	premisa
3. t	supuesto TD
4. $p \wedge q$	supuesto absurdo
5. $r \rightarrow s$	MP 1,4
6. $\vdash r \wedge \sim s \rightarrow r$	A4
7. r	MP 6,2
8. s	MP 5,7
9. $\vdash r \wedge \sim s \rightarrow \sim s$	A4
10. $\sim s$	MP 9,2 MP 12,10
11. $\sim(p \wedge q)$	cancelación absurdo 4, 8, 10
12. $t \rightarrow \sim(p \wedge q)$	cancelación TD 3-14

7. Demuestra usando cálculo con supuestos:

$\sim(p \rightarrow \sim q) \Rightarrow q$

1. $\sim(p \rightarrow \sim q)$	premisa
2. $\sim q$	supuesto absurdo
3. $\vdash \sim q \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$	A1
4. $p \rightarrow \sim q$	MP 3,2
5. $\sim\sim q$	canc. absurdo 2, 1, 4
6. $\vdash \sim\sim q \rightarrow q$	A8
7. q	MP 9,8

8. Demuestra usando cálculo con supuestos:

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow \sim r \rightarrow \sim p$

1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $q \rightarrow r$	premisa
3. $\sim r$	supuesto TD
4. p	supuesto absurdo
5. q	MP 1,4

6. r	MP 2,5
7. ~p	cancelación absurdo 4, 3, 6
8. ~r → ~p	cancelación TD 3-7

9. Demuestra usando cálculo con supuestos (*):

~(p ∨ q), ~p → (r ∧ t) ⇒ r

1. ~(p ∨ q)	premisa
2. ~p → (r ∧ t)	premisa
3. ~r	supuesto absurdo
4. ~p	supuesto absurdo
5. r ∧ t	MP 2,4
6. ⊢ r ∧ t → r	A4
7. r	MP 6,5
8. ~~p	cancelación abs 4, 3, 7
9. ⊢ ~~p → p	A8
10. p	MP 8,9
11. ⊢ p → p ∨ q	A5
12. p ∨ q	MP 10,11
13. ~~r	canc absurdo 3, 1, 12
14. ⊢ ~~r → r	A8
15. r	MP 13,14

Sin usar supuestos y usando De Morgan:

1. ~(p ∨ q)	premisa
2. ~p → (r ∧ t)	premisa
3. ⊢ ~(p ∨ q) → ~p ∧ ~q	De Morgan
4. ~p ∧ ~q	MP 3,1
5. ⊢ ~p ∧ ~q → ~p	A4
6. ~p	MP 5,4
7. r ∧ t	MP 2,6
8. ⊢ r ∧ t → r	A4
9. r	MP 8,7

10. Demuestra usando cálculo con supuestos:

p ⇒ ~p → q

1. p	premisa
2. ~p	supuesto TD
3. ~q	supuesto absurdo

4. q	canc abs 3, 2, 1
5. ~p → q	canc TD 2-4

Sin supuestos, usando Contraposición e Introducción de Antecedente:

1. p	premisa
2. ⊢ p → (~q → p)	A1
3. ~q → p	MP 2,1
4. ⊢ (~q → p) → (~p → q)	Contraposición
5. ~p → q	MP 4,3

11. Demuestra usando cálculo con supuestos:

~(p →p ∧ r)⇒ ~r

1. ~(p → p ∧ r)	premisa
2. r	supuesto absurdo
3. p	supuesto TD
4. ⊢ p → (r → p ∧ r)	A3
5. r → p ∧ r	MP 4,3
6. p ∧ r	MP 5,2
7. p → p ∧ r	cancelación TD 3-6
8. ~r	cancelación abs 2, 1, 6

Sin usar supuestos y usando varios teoremas:

1. ~(p → (p ∧ r))	premisa
2. ⊢~p ∨ (p ∧ r) → (p → p ∧ r)	Interdefinición ∨,→
3. ⊢ (~p ∨ (p ∧ r) → (p → p ∧ r)) → (~(p → p ∧ r) → ~(~p ∨ (p ∧ r)))	Contraposición
4. ~(p → p ∧ r) → ~(~p ∨ (p ∧ r))	MP 3,2
5. ~(~p ∨ (p ∧ r))	MP 4,1
6. ⊢ ~(~p ∨ (p ∧ r)) → p ∧ ~(p ∧ r)	De Morgan
7. p ∧ ~(p ∧ r)	MP 6,5
8. ⊢ p ∧ ~(p ∧ r) → p	A4
9. p	MP 8,7
10. ⊢ p ∧ ~(p ∧ r) → ~(p ∧ r)	A4
11. ~(p ∧ r)	MP 10,7
12. ⊢ ~(p ∧ r) → ~p ∨ ~r	De Morgan
13. ~p ∨ ~r	MP 12,11
14. ⊢ ~p ∨ ~r → (p → ~r)	Interdefinición ∨,→
15. p → ~r	MP 14,13
16. ~r	MP 15,9

12. Demuestra usando cálculo con supuestos(*):

p∧ ~q → r, ~(r ∨ t) ⇒p → q

1. p ∧ ~q → r	premisa
2. ~(r ∨ t)	premisa
3. p	supuesto TD
4. ~q	supuesto absurdo
5. ⊢ p → (~q → p ∧ ~q)	A3
6. ~q → p ∧ ~q	MP 5,3
7. p ∧ ~q	MP 6,4
8. r	MP 1,7
9. ⊢ r → r ∨ t	A5
10. r ∨ t	MP 9,8
11. ~~q	cancelación absurdo 4, 2, 10
12. ⊢ ~~q → q	A8
13. q	MP 15,14
14. p → q	cancelación TD 3-16

13. Demuestra usando cálculo con supuestos:

~(p ∧ q), ~p → r, ~q → s ⇒ r ∨ s

1. ~(p ∧ q)	premisa
2. ~p → r	premisa
3. ~q → s	premisa
4. ~(r ∨ s)	supuesto absurdo
5. ⊢ ~(p ∧ q) → ~p ∨ ~q	De Morgan
6. ~p ∨ ~q	MP 5,1
*7. ~p	supuesto caso 6
8. r	MP 2,7
9. ⊢ r → r ∨ s	A5
10. r ∨ s	MP 9,8
*11. ~q	supuesto caso 6
12. s	MP 3,11
13.⊢ s → r ∨ s	A5

14. r ∨ s	MP 13,12
15. r ∨ s	Canc. Casos 6, 7-10, 11-14
16. ~~(r ∨ s)	Canc. Absurdo 4, 4, 16
17. r ∨ s	Equivalencia 16

14. Demuestra, usando cálculo con supuestos:

$$(p \vee q) \rightarrow r,\ (r \rightarrow s) \vee t,\ \sim s \wedge \sim u,\ t \rightarrow u \Rightarrow \sim r$$

1. (p ∨ q) → r
2. (r → s) ∨ t
3. ~s ∧ ~u
4. t → u

*5. r → s	supuesto caso 1
6. ~s	Simplificación 3
7. ~r	Modus Tollens 5,6
*8. t	supuesto caso 2
9. u	MP 4,8
10. ~u	Simplificación 3
11. ~r	E.C.Q. 9,10
12. ~r	Canc. Casos 2, 5-7, 8-11

Obsérvese que la primera premisa no se utiliza, esto no supone ningún problema para que la deducción sea correcta.

15. Demuestra, usando cálculo con supuestos (*):

$$a \rightarrow b,\ b \rightarrow c,\ \sim c,\ d \rightarrow c \Rightarrow \sim(a \vee b)$$

1. a → b	premisa
2. b → c	premisa
3. ~c	premisa
4. d → c	premisa
5. a ∨ b	Supuesto Abs.
6. ~b	Modus Tollens 2,3
7. a	Sil. Disyuntivo 5,6
8. b	MP 1,7
9. ~(a ∨ b)	Canc. Abs. 5, 6, 8