ALGEBRA LINEAL

Examen Final.
12 de enero de 2017

Nombre:			
Grupo:		Hora de entrega:	

NORMAS GENERALES:

- El examen dura 3 horas. Se puede abandonar el aula después de pasados los primeros 30 minutos.
- Esta hoja debe devolverse cumplimentada, incluyendo la hora de entrega del examen.
- No se permiten dispositivos electrónicos.
- Toda afirmación debe ser justificada.
- Este examen corresponde a un 60% de la nota de la asignatura.

Problema1 .Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de los polinomios de grado 2 o inferior sobre el cuerpo de los reales, y consideremos los conjuntos $B_0 = \{1, x, x^2\}$ y $B_1 = \{1, x + 1, x^2 - 1\}$.

a) Demostrar que el conjunto B_1 es una base de $\mathbb{P}_2$.

b) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_0 a B_1.

c) Hallar las coordenadas del vector $p(x) = 1 + 5x + x^2$ con respecto a B_1.

Problema 2

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 - a_1 + a_1x + (a_0 - a_1)x^2.$$

a) Hallar la matriz A_T asociada a T.

b)Determinar su espacio nulo y su espacio columna.

c) Decidir si T es isomorfismo.

d) Determinar si T es ortogonal.

Problema3 Sea Tla transformaci´on lineal de $\mathbb{R}_3$ en $\mathbb{R}^3$, definida mediante una proyección sobre el plano XZ, seguida de una reflexión respecto del plano YZ.

a)Encontrar la matriz de la transformaci´on T.

b) Determinar si T es ortogonal.

Problema 4

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

a) Demostrar que A es diagonalizable.

b) Hallar dos matrices P, invertible, y D, diagonal, tales que $A = P\ DP_{-1}$.

c)¿Las matrices Py Dencontradas son´unicas?

Problema 5. Calcular la descomposici´on en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$, y sea la operación definida en este conjunto por

$$(a_1 + b_1x) \cdot (a_2 + b_2x) = 2a_1a_2 + 2^2b_1b_2 \ .$$

1. Demostrar que esta operación define un producto interno.

2. Calcular la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = 7x-2$ sobre el polinomio $q(x) = -x + 3$, respecto a este producto interior.

Problema 1

$\mathbb{P}_2$ e. v. de polinomios de grado ≤ 2 con variable x

$B_0 = \{1, x, x^2\}$ base estándar

$B_1 = \{1, x+1, x^2-1\}$

a) Puesto que $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, basta demostrar que B_1 es linealmente independiente para que B_1 sea base de $\mathbb{P}_2$

Sea $\alpha 1 + \beta(x+1) + \gamma(x^2-1) = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\}$$ con solución única $\alpha = \beta = \gamma = 0$ q.e.d.

b) Puesto que $\begin{bmatrix} 1 & x+1 & x^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q}$

La matriz pedida $P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $p(x) = 1 + 5x + x^2$

Como $[p(x)]_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[p(x)]_{B_1} = \underset{B_1 \leftarrow B_0}{P} [p(x)]_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_2 - a_1 + a_1 x + (a_0 - a_1)x^2$

$T(1) = x^2$; $T(x) = -1 + x - x^2$; $T(x^2) = 1$

a)

Así que $A_T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Como $\det(A_T) \neq 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, T = \dim \mathrm{Col}\, A = \mathrm{rg}(A) = 3$

y $\dim \mathrm{Ker}\, T = \dim \mathrm{Nul}\, A = 0$

Luego $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^3$ y $\mathrm{Nul}\, A = \{0\}$

c) Como $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{es sobreyectiva} \\ \mathrm{Nul}(A) = \{0\} \Rightarrow \text{es inyectiva} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{biyectiva} \Rightarrow \underline{\underline{\text{isomorfismo}}}$

d) T no es ortogonal porque $A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

que no es I_3

Problema 3

$P_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $R_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Luego $M(T) = R_{yz} P_{xz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Claramente T no es ortogonal porque no tiene inversa.

Problema 4

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 18 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\left[(7-\lambda)(-8-\lambda) + 54\right] = (-2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) =$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(A) = \{1, -2\} \quad \text{con} \quad m_{alg}(1) = 1 \ \text{ y } \ m_{alg}(-2) = 2$$

$$V(-2) = Ker(A+2I)$$

$$A+2I = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 3 \\ 18 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$V(-2) = \{ [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_3 = 0 \} = Gen\{[1 \ 0 \ 3]^T ; [0 \ 1 \ 0]^T\}$$

$$\dim(V(-2)) = 2 = m_{geom}(-2)$$

Como coinciden las multiplicidades, A es diagonalizable

$$V(1) = Ker(A-I)$$

$$A-I = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -9 & -3 & 3 \\ 18 & 0 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(1) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 0 ; \ 2x_2 - x_3 = 0 \} = Gen\{(1, 1, 2)\}$$

Luego $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ con $AP = PD$

Ninguna de las dos es única.
Las columnas de P pueden cambiarse por vectores linealmente independientes de cada subespacio.
Los valores de la diagonal de D son los autovalores repetidos tantas veces de acuerdo a su multiplicidad, pero el orden puede cambiar.

Problema 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(A^T A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(4-\lambda)^2 - 32(4-\lambda) =$$

$$= (8-\lambda)\left(16 - 8\lambda + \lambda^2\right) - 128 + 32\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda + 8\lambda^2 - 64\lambda + 32\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 48\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 16\lambda + 48\right) = -\lambda(\lambda-12)(\lambda-4)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = +\sqrt{12} = +2\sqrt{3} \quad ; \quad \sigma_2 = +2 \quad \Rightarrow$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovectores de $A^T A$: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$; $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$; $v_2 = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1 \end{bmatrix}^T$

$$A v_1 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix}^T \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$A v_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}^T \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$A v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ (como era de esperar)

$$\Rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad y \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que verifica $\boxed{A = U \Sigma V^T}$

Problema 6

$\mathbb{P}_1$ e.v. sobre $\mathbb{R}$

$$(a_1+b_1x)\cdot(a_2+b_2x) = 2a_1a_2 + 2^2 b_1b_2$$

Este producto será interno (escalar) si verifica sus axiomas:

1) $(a_1+b_1x)\cdot(a_2+b_2x) = (a_2+b_2x)\cdot(a_1+b_1x)$ ya que el producto de escalares es conmutativo.

2) $\underbrace{(a_1+b_1x)\cdot\left[(a_2+b_2x)+(a_3+b_3x)\right]}_{(1)} = \underbrace{(a_1+b_1x)\cdot(a_2+b_2x)+(a_1+b_1x)\cdot(a_3+b_3x)}_{(2)}$

porque $\left\{\begin{array}{l}(1) = 2a_1(a_2+a_3) + 2^2 b_1(b_2+b_3) \\ (2) = 2a_1a_2 + 2^2b_1b_2 + 2a_1\cdot a_3 + 2^2 b_1 b_3\end{array}\right\}$ evidentemente $(1)=(2)$

3) $\underbrace{(a_1+b_1x)\cdot\left[\alpha(a_2+b_2x)\right]}_{(1)} = \alpha\underbrace{\left[(a_1+b_1x)\cdot(a_2+b_2x)\right]}_{(2)}$

porque $\left\{\begin{array}{l}(1) = 2a_1(\alpha a_2) + 2^2 b_1(\alpha b_2) \\ (2) = \alpha(2a_1a_2 + 2^2 b_1b_2)\end{array}\right\}$ evidentemente $(1)=(2)$

4) De la misma forma $\left[\alpha(a_1+b_1x)\right]\cdot(a_2+b_2x) = \alpha\left[(a_1+b_1x)\cdot(a_2+b_2x)\right]$

5) $(a_1+b_1x)\cdot(a_1+b_1x) = 2a_1^2 + 2^2b_1^2 \geq 0$, y además

$$2a_1^2 + 2^2 b_1^2 = 0 \iff a_1 = b_1 = 0$$

Por lo tanto se trata de un producto interno

Problema 6 (continuación)

2 $\quad p(x) = 7x - 2 = -2 + 7x$

$q(x) = -x + 3 = 3 - x$

$$\text{proy}_{q(x)}\left(p(x)\right) = \left(\frac{p(x) \cdot q(x)}{q(x) \cdot q(x)}\right) q(x) = \left(\frac{(-2+7x)(3-x)}{(3-x)(3-x)}\right)(3-x) =$$

$$= \frac{2(-2) \cdot 3 + 2^2 \cdot 7(-1)}{2 \cdot 3^2 + 2^2(-1)^2}(3-x) = \frac{-12-28}{18+4}(3-x) = \frac{-40}{22}(3-x) =$$

$$= -\frac{20}{11}(3-x) = -\frac{60}{11} + \frac{20}{11}x$$