Tema 5

Transformaciones lineales

5.1. Definiciones y propiedades

Comencemos el tema recordando terminología y notación conocidas: una *función* real de una variable real x, $f : A \to \mathbb{R}$, transforma cada número x del *dominio* de f (un subconjunto propio $A \subset \mathbb{R}$ o el propio $\mathbb{R}$) en exactamente un número $f(x) \in \mathbb{R}$. En otras palabras, podríamos decir que la función f transforma un vector $\mathbf{x}$ (puesto que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial) en otro vector $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ de la *imagen* de f y este significado se refleja mediante el uso de la notación:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)\,. \end{array}$$

De manera similar, una función real f de dos variables reales transforma vectores $(x, y)^t$ del dominio ($\mathbb{R}^2$ o un subconjunto de $\mathbb{R}^2$) en vectores de la imagen ($\mathbb{R}$ o un subconjunto de $\mathbb{R}$) y escribiremos:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y)^t & \mapsto & f(x, y)\,. \end{array}$$

Sin embargo, genericamente las funciones que hemos estudiado en Cálculo no respetan las operaciones naturales de los espacios vectoriales. Por ejemplo, la función $x \mapsto f(x) = x^2$ no respeta las combinaciones lineales ya que (si $x_1\, x_2 \neq 0$):

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \neq f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 + x_2^2 .$$

Como veremos un poco más adelante, las funciones que respetan las operaciones naturales de los espacios vectoriales reciben el nombre de transformaciones lineales.

En general, dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una función T de V en W es una regla que asigna a cada vector $\boldsymbol{v} \in V$ un único vector $\boldsymbol{w} \in W$. Representamos esta función mediante $T\colon V \to W$.

Si una función $T\colon V \to W$ satisface la siguiente propiedad:

(PL) $T(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 T(\boldsymbol{v}_2)$ para todo $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ y todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

se denomina **transformación lineal** (o función lineal u **homomorfismo**).

Equivalentemente, es directo comprobar que una función T es lineal si y sólo si satisface las siguientes propiedades:

i) $T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2)$ para todo $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$.

ii) $T(\alpha\boldsymbol{v}_1) = \alpha T(\boldsymbol{v}_1)$ para todo $\boldsymbol{v}_1 \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Como en el caso de las bien conocidas funciones reales, dada $T : V \to W$, usamos los siguientes términos:

El espacio vectorial V es el **dominio** de T.

El conjunto de todos los valores $T(\boldsymbol{v})$ se denomina **imagen** de T. Denotaremos este conjunto por $\mathrm{Im}(T)$.

En ocasiones se utiliza el término **operador lineal** para referirse a una transformación lineal T, especialmente cuando $V = W$.

Ejemplo

Consideremos las siguientes transformaciones:

- $T_1 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, definida por $T_1(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_2\, x^2$.

  T_1 es lineal; para demostrarlo, consideremos los polinomios $p, q \in \mathbb{P}_2$ y el escalar α. Es inmediato ver que se cumplen las propiedades de linealidad. En efecto:

$$\begin{aligned} T_1(\underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}_{p(x)} + \underbrace{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}_{q(x)}) &= T_1(\underbrace{a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2}_{(p+q)(x)}) \\ &= (a_2 + b_2)x^2 = a_2 x^2 + b_2 x^2 \\ &= T_1(p(x)) + T_1(q(x)) \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(\alpha\, p(x)) &= T_1(\alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)) = T_1(\alpha\, a_0 + \alpha\, a_1 x + \alpha\, a_2 x^2) \\ &= \alpha\, a_2 x^2 = \alpha\, T_1(p(x)) \,. \end{aligned}$$

  Además, es fácil entender que la imagen de T está formada por los polinomios de grado exactamente dos con un solo término junto al polinomio 0.

- $T_2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$, definida por $T_2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_M$ donde $a_M = \text{máx}(a_0, a_1, a_2)$.

  T_2 no es lineal, lo cual es de esperar ya que intuitivamente, la función que nos devuelve el máximo de un conjunto de números no lo es. Para comprobarlo, consideremos por ejemplo los polinomios $p(x) = x^2$ y $q(x) = x^2 + 2x$; tenemos que:

$$T_2(p(x) + q(x)) = T_2(2x^2 + 2x) = 2 \,,$$

  mientras que

$$T_2(p(x)) + T_2(q(x)) = 1 + 2 = 3 \,.$$

La siguiente definición introduce un conjunto de gran importancia en el estudio de las transformaciones lineales.

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y 0 es el vector cero de W, entonces el conjunto de vectores $v \in V$ para los que $T(v) = 0$ se denomina **núcleo de** T o *espacio nulo de* T o *kernel de* T y lo denotamos por $\ker(T)$.

Obsérvese que, dada una transformación lineal $T : V \to W$, hemos dado "nombre propio" a un subconjunto de V -el núcleo- y a un subconjunto de W -la imagen-. Esto no es casual, ya que, como veremos, ambos juegan un papel fundamental en temas posteriores.

Las siguientes definiciones, conocidas de cursos previos, nos permiten identificar ciertos tipos de transformaciones lineales.

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces T se dirá **inyectiva** si para todo par de vectores diferentes v_1, v_2 ($v_1 \neq v_2$) de V los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ de W también son distintos.
Si la imagen de T es W diremos que T es **suprayectiva**.
Una transformación lineal T inyectiva y suprayectiva se denomina **isomorfismo** entre los espacios V y W; en tal caso, se dice que V y W son **isomorfos**.
Un **automorfismo** es un isomorfismo de un espacio vectorial en sí mismo.

Obsérvese que si T es lineal y no inyectiva, existen $v_1 \neq v_2$ tales que $T(v_1) = T(v_2)$ o, lo que es lo mismo, $T(v_1 - v_2) = 0$. Como $v_1 \neq v_2$, $v = v_1 - v_2 \neq 0$ por lo que una $\boxed{\text{transformación lineal es inyectiva si y sólo si } \ker(T) = \{0\}.}$

Además, dada una transformación lineal, se pueden definir otras transformaciones lineales asociadas con ella. En este tema introducimos la siguiente:

Si $T : V \to W$ es inyectiva entonces la **transformación inversa** $T^{-1} : W' \to V$, donde $W' = \mathrm{Im}(T) \subset W$, se define como sigue: para cada par $\boldsymbol{v} \in V$ y $\boldsymbol{w} \in W'$ con $\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v})$, es

$$T^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\,.$$

Veamos algunas propiedades sencillas derivadas de las definiciones anteriores:

Teorema

La imagen de la transformación lineal $T : V \to W$ es un espacio vectorial.

Demostración. Recordemos que, cuando S es un subconjunto de un espacio vectorial, para demostrar que S es un subespacio basta con probar que es cerrado bajo las operaciones de suma y producto por escalares. En efecto, en este caso tenemos que para todo $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ existen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ tales que

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. lineal}}}{=} T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$$

y, puesto que V es un espacio vectorial, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$; por tanto:

$$T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in \mathrm{Im}(T) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{Im}(T) \quad \text{(cerrado bajo la suma).}$$

Por otro lado, $\forall\, \boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(T)$, existe algún $\boldsymbol{v} \in V$ tal que $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\alpha\, \boldsymbol{w} = \alpha\, T(\boldsymbol{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. lineal}}}{=} T(\alpha\, \boldsymbol{v})$$

y como $\alpha\, \boldsymbol{v} \in V$ resulta que

$$T(\alpha\, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}(T) \quad \Rightarrow \quad \alpha\, \boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(T) \quad \text{(cerrado bajo el producto por escalares).}$$

En consecuencia, $\mathrm{Im}(T)$ es un espacio vectorial. $\square$

Teorema

El núcleo de una transformación lineal $T : V \to W$ es un espacio vectorial.

Demostración. Puesto que $\ker(T)$ es un subconjunto del espacio vectorial V basta con probar que es cerrado con respecto a la suma y al producto por escalares para garantizar que es un espacio vectorial (puesto que sería subespacio de V).

Consideremos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(T)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que probar que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \ker(T)$ y que $\alpha\mathbf{u} \in \ker(T)$. En efecto,

$$\begin{array}{rcccccl} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) & \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ lineal}}}{=} & T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) & \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\ker(T)}}{=} & 0+0=0 & \Rightarrow & \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\ker(T)\,, \\ T(\alpha\,\mathbf{u}) & \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ lineal}}}{=} & \alpha\,T(\mathbf{u}) & \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u}\in\ker(T)}}{=} & \alpha\,0=0 & \Rightarrow & \alpha\,\mathbf{u}\in\ker(T) \end{array}$$

y esto completa la demostración. □

Los teoremas anteriores permiten formular las siguientes definiciones, que utilizaremos con frecuencia en el futuro.

La dimensión del espacio vectorial "imagen de la transformación lineal T" se denomina **rango de** T y se denota por $\mathrm{rg}(T)$.

La dimensión del espacio vectorial "núcleo de la transformación lineal T" se denomina **nulidad de** T y se representa por $\mathrm{nul}(T)$.

Obsérvese que la elección del término "rango" no es casual; en temas posteriores veremos la relación de éste con el rango de ciertas matrices.

El siguiente teorema, que se da sin demostración, relaciona ambas dimensiones.

Teorema del rango

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y el espacio vectorial V tiene dimensión

n, entonces:

$$\boxed{\mathrm{rg}(T) + \mathrm{nul}(T) = n.}$$

Nótese que $\mathrm{rg}(T)$ es la dimensión de la imagen de T (un subespacio vectorial en W), mientras que $\mathrm{nul}(T)$ es la dimensión del núcleo de T (un subespacio vectorial en V).

Ejemplo

La transformación $T_1 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, definida por $T_1(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2x^2$, es lineal como vimos anteriormente. Es inmediato observar que la imagen de T es el espacio generado por el vector (polinomio) x^2, lo cual escribimos:

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}(x^2)\,.$$

Por otro lado, para calcular el núcleo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \colon T(p) = 0\} = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \colon T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0\right\} \\
&= \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \colon a_2x^2 = 0\right\} = \{a_0 + a_1x \in \mathbb{P}_2 \colon a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Gen}(1, x)\,.
\end{aligned}$$

Obviamente $\mathrm{rg}(T) = 1$, $\mathrm{nul}(T) = 2$ y

$$\mathrm{nul}(T) + \mathrm{rg}(T) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{P}_2)\,.$$

También es fácil ver que T no es inyectiva, ya que, por ejemplo, los polinomios x^2+1 y $x^2 - 1$ son distintos y sin embargo tienen la misma imagen x^2. Tampoco es suprayectiva, pues $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{P}_2$.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$T(\,(v_1, v_2, v_3)^t\,) = (v_1, v_2)^t\,.$$

Vamos a demostrar que T es una transformación lineal:

Consideremos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)^t) = (u_1+v_1, u_2+v_2)^t \\ &= (u_1, u_2)^t + (v_1, v_2)^t = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{u}) &= T(\alpha(u_1, u_2, u_3)^t) = T((\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)^t) \\ &= (\alpha u_1, \alpha u_2)^t = \alpha(u_1, u_2)^t = \alpha T(\mathbf{u})\,, \end{aligned}$$

por lo que T es lineal.

Vamos a calcular ahora bases para los espacios vectoriales imagen y núcleo. Obviamente, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $rg(T) = 2$ y $B_0 = ((1,0)^t, (0,1)^t)$ es una base de la imagen de T.

Por otra parte, podemos calcular la nulidad de T mediante

$$n - rg(T) = nul(T) = 3 - 2 = 1\,.$$

Para determinar el núcleo, buscamos los vectores $(v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3$ tales que $T((v_1, v_2, v_3)^t) = (v_1, v_2)^t = (0,0)^t$, es decir, el núcleo es el conjunto de vectores de la forma $(0, 0, v_3)^t, v_3 \in \mathbb{R}$. Una base de este subespacio viene dada por $B_1 = ((0,0,1)^t)$.

Finalmente, veamos si T puede ser un isomorfismo. Puesto que, por ejemplo, $(1,1,1)^t \neq (1,1,-1)^t$ y $T((1,1,1)^t) = (1,1)^t = T((1,1,-1)^t)$, concluimos que T no es inyectiva y por tanto no es isomorfismo; pero sí es suprayectiva, puesto que para cada $(u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$ hay al menos un vector de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $(u_1, u_2, 0)^t$, tal que $T(\,(u_1, u_2, 0)^t\,) = (u_1, u_2)^t$.

Las siguientes propiedades, muy intuitivas, son consecuencia directa de la linealidad.

Teorema

Sea T una transformación lineal $T : V \to W$.

a) Si $\mathbf{0} \in V$ es el vector cero de V entonces $T(\mathbf{0})$ es el vector cero de W.

b) Si $\boldsymbol{v} \in V$ y $-\boldsymbol{v}$ es el opuesto de $\boldsymbol{v}$ en V, entonces $T(-\boldsymbol{v})$ es el opuesto de $T(\boldsymbol{v})$ en W.

Demostración.

a) Sea $\boldsymbol{v} \in V$. Entonces

$$T(\mathbf{0}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{V espacio vectorial}}}{=} T(0\,\boldsymbol{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T lineal}}}{=} 0\,T(\boldsymbol{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Im}(T)\text{ espacio vectorial}}}{=} \mathbf{0}\,.$$

b) Sea $\boldsymbol{v} \in V$. Tenemos

$$T(\boldsymbol{v}) + T(-\boldsymbol{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T lineal}}}{=} T(\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{V esp. vectorial}}}{=} T(\mathbf{0}) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{prop.}(a))}}{=} \mathbf{0}\,.$$

□

Teorema

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal inyectiva y la imagen de T es W' (un subespacio de W), entonces T^{-1} es una transformación lineal de W' a V.

Demostración. Sean $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W'$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces, existen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ tales que $T(\boldsymbol{v}_1) =$

w_1, $T^{-1}(w_1) = v_1$ y $T(v_2) = w_2$, $T^{-1}(w_2) = v_2$. Primero, observemos que

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(v_1)) &= T^{-1}(w_1) = v_1\,, \\ T(T^{-1}(w_1)) &= T(v_1) = w_1\,. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} T^{-1}(w_1 + w_2) &\overset{w_1, w_2 \in W'}{\overset{\downarrow}{=}} T^{-1}(T(v_1) + T(v(2))) \overset{\text{T lineal}}{\overset{\downarrow}{=}} T^{-1}(T(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 \underset{\text{def. de } T^{-1}}{\underset{\uparrow}{=}} T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

y

$$T^{-1}(\alpha w_1) = T^{-1}(\alpha T(v_1)) \underset{\text{T lineal}}{\underset{\uparrow}{=}} T^{-1}(T(\alpha v_1)) = \alpha v_1 = \alpha T^{-1}(w_1)$$

y por tanto T^{-1} es lineal. □

Teorema

Si $T : V \to W$ es un isomorfismo entre V y W y $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es una base del espacio vectorial V, entonces $(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n))$ es una base del espacio vectorial W.

Demostración. Primero igualamos a cero una combinación lineal arbitraria de los vectores $T(v_1), \ldots, T(v_n)$:

$$0 = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \underset{\text{T lineal}}{\underset{\uparrow}{=}} T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)\,.$$

Puesto que $T(0) = 0$ y T es un isomorfismo:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \underset{v_1, \ldots, v_n \text{ lin. ind.}}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

y $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ son linealmente independientes. Además, si consideramos un $w \in W$ arbitrario, tenemos para algún $v \in V$:

$$w = T(v) \underset{v_1, \ldots, v_n \text{ base}}{\underset{\uparrow}{=}} T(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \underset{\text{T lineal}}{\underset{\uparrow}{=}} \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_n T(v_n)\,,$$

por lo que w puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\mathsf{T}(v_1), \ldots, \mathsf{T}(v_n)$; por tanto, $(\mathsf{T}(v_1), \mathsf{T}(v_2), \ldots, \mathsf{T}(v_n))$ es una base de W. $\square$

De aquí se deduce que dos espacios vectoriales isomorfos tienen la misma dimensión.

5.1.1. Álgebra de las transformaciones lineales

A continuación pasamos a describir algunas transformaciones lineales especialmente importantes y cómo realizar ciertas operaciones.

Proposición

- La aplicación IDENTIDAD I, definida de V en V mediante $I(v) = v$ es una aplicación lineal.
- La aplicación NULA 0, definida de V en W mediante $0(v) = \mathbf{0}$ es una aplicación lineal.

Proposición

Sean T_1, T_2 dos aplicaciones lineales de V en W y sea $\alpha \in \mathbb{K}$ un escalar.

- La aplicación SUMA, definida de V en W mediante:

  $$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$$

  es una aplicación lineal.
- La aplicación PRODUCTO POR EL ESCALAR $\alpha \in \mathbb{K}$, definida de V en W mediante:

  $$(\alpha T_1)(v) = \alpha\, T_1(v)$$

  es una aplicación lineal.

Es fácil ver que:

Proposición

Dados dos espacios vectoriales, V y W, el conjunto de todas las transformaciones lineales $T : V \to W$, con la suma y el producto por escalares de $\mathbb{K}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Adicionalmente, necesitaremos la siguiente noción, que es conocida de cursos anteriores.

Si $T_1 : U \to V$ y $T_2 : V \to W$ son transformaciones lineales, respectivamente, de U en V y de V en W, entonces la **composición**, denotada por $T_2 \circ T_1$, es una transformación $U \to W$, definida para $\mathbf{u} \in U$ mediante:

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u}))\,.$$

Obsérvese que $T_1(\mathbf{u})$ es un elemento de V por lo que T_2 hace corresponder a éste el valor $T_2(T_1(\mathbf{u}))$ de W.

Teorema

Dadas dos transformaciones lineales $T_1 : U \to V$ y $T_2 : V \to W$:

a) La composición $T_2 \circ T_1$ es una transformación lineal de $U \to W$.

b) Si T_2 y T_1 son inyectivas entonces $T_2 \circ T_1$ es inyectiva.

c) Si T_2 y T_1 son suprayectivas entonces $T_2 \circ T_1$ es suprayectiva.

Ejemplo

Consideremos de nuevo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(\,(v_1, v_2, v_3)^t\,) = (v_1, v_2)^t$$

y sea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación definida por

$$S((w_1, w_2)^t) = (w_1, w_2, 0)^t\,.$$

Vamos a comprobar que S es lineal y a describir las propiedades de $S \circ T$ (núcleo y base, nulidad, imagen y base, rango y si es o no inyectiva, suprayectiva o isomorfismo).

- Consideremos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((u_1+v_1, u_2+v_2)^t) = (u_1+v_1, u_2+v_2, 0)^t \\ &= (u_1, u_2, 0)^t + (v_1, v_2, 0)^t = S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v})\,, \\ S(\alpha u) &= S(\alpha(u_1, u_2)^t) = S((\alpha u_1, \alpha u_2)^t) \\ &= (\alpha u_1, \alpha u_2, 0)^t = \alpha(u_1, u_2, 0)^t = \alpha S(\mathbf{u})\,, \end{aligned}$$

  por lo que S es lineal.

- La composición $S \circ T$ es

$$(S \circ T)((u_1, u_2, u_3)^t) = (u_1, u_2, 0)^t\,.$$

  Entonces, $rg(S \circ T) = 2$ y $B_0 = ((1,0,0)^t, (0,1,0)^t)$ es una base de la imagen de la composición.

- La nulidad de $S \circ T$ se calcula con

$$n - rg(S \circ T) = nul(S \circ T) = 3 - 2 = 1\,.$$

  El núcleo está formado por los vectores $(v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$(S \circ T)((v_1, v_2, v_3)^t) = (v_1, v_2, 0)^t = (0,0,0)^t\,.$$

  Es decir, el núcleo es el conjunto de vectores de la forma $(0,0,v_3)^t, v_3 \in \mathbb{R}$. Una base de este subespacio viene dada por $B_1 = ((0,0,1)^t)$.

- Finalmente tenemos de nuevo que $S \circ T$ no puede ser un isomorfismo porque $\mathrm{dim}(\mathbb{R}^3) \neq \mathrm{rg}(S \circ T)$. Si consideramos los vectores $(1,1,1)^t \neq (1,1,-1)^t$, resulta que $(S \circ T)((1,1,1)^t) = (1,1,0)^t = (S \circ T)((1,1,-1)^t)$ y de aquí se deduce que $S \circ T$ no es inyectiva, pero sí es suprayectiva, puesto que para cada $(u_1, u_2, 0)^t \in \mathbb{R}^3$ existe al menos un vector de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo el propio $(u_1, u_2, 0)^t$, tal que $(S \circ T)((u_1, u_2, 0)^t) = (u_1, u_2, 0)^t$.