ALGEBRA LINEAL - COSAS IMPORTANTES

TEMA 1

SUMAR: Tienen que tener el mismo orden las matrices a sumar.

RESTAR: Igual que sumar.

PROPIEDADES:

① Conmutativa $A+B=B+A$

② Asociativa $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ Elem. neutro $A+\Theta=\Theta+A=A$

④ Elemento opuesto $A+(-A)=(-A)+A=0$

PRODUCTO: El número de columnas de la 1ª matriz tiene que ser igual al número de filas de la 2ª matriz.

$A\cdot B=C$ $\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots$

PROPIEDADES:

① Producto no conmutativo $AB\neq BA$

② ASOCIATIVA $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

③ Elemen. neutro $A\cdot I=I\cdot A=A$

Tiene que ser cuadrada ya que la matriz identidad es cuadrada

④ Distributiva del producto y suma. $A\cdot(B+C)=AB+AC$

*CUIDADO CON EL ORDEN.

TIPOS DE MATRICES.

① Matriz fila: tiene $1\times n$ elem.

② Matriz columna: tiene $m\times 1$ elem.

③ Matriz cuadrada: tiene $m\times m$ elem.

④ Matriz identidad: matriz cuadrada cuya diagonal principal son "1" y lo demas "0". I

⑤ Matriz nula: Θ, todos elementos cero

⑥ Matriz triangular: triangular superior si todos los elem por debajo son cero e inferior si los elem. por arriba son ceros.

⑦ Matriz diagonal: todos los elem. fuera de la diagonal principal son ceros.

① $(2,3,-1)$

② $\begin{pmatrix}-7\\1\\6\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}2&2\\1&0\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

⑥ Superior $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ Inferior $\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$

⑦ $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

NEWS

WUOLAH

LUN 10 SEP

Noticias para el mundo universitario.

nº **2.** Semana del 10 al 16

Fuente: Clínica Universidad de Navarra

Consejos.

¡Cómo no sucumbir al síndrome postvacacional!

Actitud positiva. Esa es la clave para que el mes de septiembre no se vuelva cuesta arriba. Dejar atrás el verano y retomar las actividades laborales o escolares puede ser un cambio arduo para más de uno.

1. Mira las pequeñas contrariedades que van a venir como **retos a superar.** Vivirlos bien te ayudará a sentirte bien y estresarte menos.

2. **Planifica y organízate** con un horario diario y semanal en el que haya tiempo para todo (matrícula de cursos, organización de cuentas y tareas del hogar...), incluso para descansar y no perder la frescura de las vacaciones.

3. Trata de **ajustar y adaptar los horarios de sueño** de manera progresiva una semana antes de empezar el curso académico.

4. **Prioriza** haciendo lo importante diferenciándolo de lo que puede esperar.

Tratar de organizarse, planear las cosas que van a ser necesarias contribuirá a que el cambio sea más paulatino. Sin embargo, no todos lo consiguen. Si eres uno de ellos, no pasa nada: **"Que nunca te falte el buen humor y la paciencia contigo mismo y con los tuyos cuando veas que te ha vuelto a pillar el toro y que sea un motivo de aprendizaje".**

Fuente: Universia

Empleo.

La universidad digital: El papel del CIO.

El responsable de las TI en la Universidad es el motor del cambio para el progreso de la educación.

- La transformación digital afecta a todos los aspectos de la Universidad, desde su organización, a su modelo educativo y su cultura como agente social.
- El CIO es uno de los protagonistas del cambio y de hacer ver a la Universidad cómo debe adaptarse a las nuevas tecnologías.
- La Universidad aspira a ser digital y para ello debe ser algo más que una institución con presencia online: lo digital debe ser su razón de ser.

Papel del CIO para que la Universidad supere con éxito la transformación digital.

1. Ser el motor del cambio.
2. Convencer de que la cultura también debe cambiar.
3. Ser el intermediario en la relación Tecnología-Negocio.
4. Diseñar el plan estratégico y ejecutarlo.
5. Gestionar el talento.

El reto no es sencillo, pero la **capacidad creativa y visionaria del CIO,** respecto al entorno y las tecnologías, debe dejar huella en la comunidad universitaria.

Fuente: Elena Sanz para MUY INTERESANTE

Interesante.

El "efecto Google" reduce la memoria.

Los educadores y científicos habían empezado a advertir que el hombre se estaba haciendo cada vez más dependiente de la información en Internet, pero hasta ahora había pocos estudios que lo confirmaran.

Una investigación de la psicóloga **Betsy Sparrow, profesora adjunta de la Universidad de Columbia en Nueva York (EE UU),** *revela que Internet funciona como una "memoria externa" que nos hace retener cada vez menos información.*

El estudio sugiere que la población ha comenzado a utilizar internet como su "banco personal de datos", un fenómeno conocido como **"efecto Google", y los ordenadores y los motores de búsqueda on line se han convertido en una especie de sistema de "memoria externo" al puede accederse a voluntad del usuario y al que la memoria humana se está adaptando.**

Según Sparrow, no le ha sorprendido constatar que cada vez más personas no memoricen datos porque confían en que pueden conseguirlos, sino su habilidad para encontrarlos. "Somos realmente eficientes", concluye.

Matrices especiales

① Matriz regular o ~~irreversible~~ inversible.

Matriz cuadrada que cumple: $A \cdot B = B \cdot A = I$

Notación: A^{-1} ← MATRIZ INVERSA DE A * Si no existe decimos que A es SINGULAR.

1) $I = I^{-1}$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) Si A es regular, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ $(\lambda \cdot A)$ tambien es regular y se verifica: $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$

② Transpuesta.

Notación: A^t

Filas por columnas.

1) Si $A \in M_{m \times n} \to A^t \in M_{n \times m}$

2) $(A^t)^t = A$

3) $(A+B)^t = A^t + B^t$

4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

5) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

③ Simétrica.

Las matriz que cumple: $A^t = A$. Para ellas los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal deben ser iguales.

④ Matrices idempotentes

Propiedad: $A^2 = A \cdot A = A$

Propiedades

① $A \cdot B$ es idempotente si: $A \cdot B = B \cdot A$

② $I - A$ es idempotente.

⑤ Matriz antisimétrica

Cumple que $A^t = -A$

* Su diagonal principal siempre está conformada por ceros

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -7 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa. A^{-1}

① Método de Gauss

1.- Creamos algo parecido a esto $(A : I)$. Nuestro objetivo es ir sumando filas por filas para que al final "A" sea igual que I. Tambien podemos multiplicar por un escalar para que nos de el resultado. La operación que hagamos en "A" también lo tenemos que hacer en "I".

2.- Una vez hayamos hecho lo anterior, lo que tengamos en "I" es nuestra matriz inversa.

② Formula.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{adj}\,(a_{ij}))^t$$

1.- Hacemos el determinante de la matriz. Para ello utilizamos Gauss o la reglas definidas para las matrizes menores de 4.

2.- Hacemos los adjuntos. Los adjuntos son el resultado de hacer el determinante de la matriz resultante al eliminar ~~de elemento~~ la fila y la columna correspondiente a cada uno de los elemento. MEJOR EXPLICADO 16/2/2017.

Cálculo de los determinantes.

Los determinantes es un número asociado a una matriz. Formas de calcularlo:

- Orden 1 → El determinante es el elemento
- Orden 2 → $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- Orden 3 → Triangulizar por Gauss
- Orden ~~<~~ 3 → Utilizando los adjuntos, cogiendo una fila (que tenga el mayor nº de ceros posible) y haciendo el determinante resultante de cada uno de los miembros. Procedimiento: (nº en la matriz) $\cdot (-1)^{i+j} \cdot$ determi menor complementario en i,j + (nº en la matriz) $\cdot (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$ + ...

Propiedades

1.- Cuando un det. tiene 1 linea con todo ceros → $|A_n| = 0$

2.- Cuando un det tenga los mismos elem que una linea paralela → $|A_n| = 0$

3.- Cuando dos lineas son proporcionales → $|A_n| = 0$

4.- Cuando dos lineas sean combinacion lineal → $|A_n| = 0$

5.- El det de una matriz cuadrada coincide con el de su transpuesta $|A| = |A^t|$

6.- Cuando una matriz posee A^{-1} → $|A| \neq 0$

7.- Producto de determinantes → $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ $\qquad |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A|$

8.- Cuando cambiamos líneas entre sí, el determinante cambia de signo.

9.- Cuando todos los elem. de una fila estén multiplicados por la misma cantidad: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

10.- Cuando los elementos estén expresados en suma de términos (NO COMBINACIÓN LINEAL):

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & i \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

11.- El determinante permanecerá invariante si una fila tiene como resultado la suma o la resta de ella misma con otra paralela o si todos sus elementos son multiplicados por otro. Esto nos facilitará el cálculo del determinante.

*** Rango ***

Def: se llama al número que representa el número de filas y columnas linealmente independientes.

① Cálculo:

1.- Cogeremos una matriz, y empezaremos por elegir una de las esquinas, si esta es diferente a cero, aumentaremos a una matriz 2 por dos, siendo uno de esos elementos la esquina. Si el determinante no es igual a cero, podremos seguir. si fuese igual a cero,

• Ejemplo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ 4 & -5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

1.- El primer cuadro es 1, por lo que el determinante tiene rango 1
2.- El segundo cuadro, tiene como valor de determinante -3, tiene rango 2.
3.- El tercer cuadro, cuando hacemos el determinante, nos da como resultado cero, por lo que su rango es 2

** El rango máx de una matriz será el menor número de filas o columna que posea **
- En el ejemplo anterior, era una matriz 3 x 4, lo que haría que su rango máx fuese 3.

② Cálculo:

Método de Gauss: El objetivo es hacer ceros por debajo de la diagonal principal. Nos ayudaremos de las operaciones elementales. Estas son tanto el cambio de dos líneas, sustituir todos los elementos de una fila por la suma o resta con otra paralela.

• Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 7F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} = Rg(2)$$

Proporcionales → SE ELIMINA UNA (Propiedad)

Propiedades del Rango.

NO VARÍA:

1.- Si eliminamos una línea cuyos elementos sean cero
2.- Si eliminamos una " " " sean iguales
3.- " " " " " " son proporcionales a otra paralela
4.- " " " " " " son combinación lineal

SIN ELIMINAR LÍNEAS:

1.- Cuando cambiamos la posición de dos líneas
2.- Cuando multiplicamos todos los elems por un número ≠ de una lín
3.- Cuando sustituimos todos los elementos por la suma o resta de esta línea con otra. La otra puede estar multiplicada por un número.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Puede tener como soluciones:
- COMPATIBLE (tiene solución)
  - DETERMINADO (una solución)
  - INDETERMINADO (∞ soluciones)
- INCOMPATIBLE (no tiene solución)

. Tipos de sistemas

- Homogéneos: cuyo término independiente es cero.

Podrán ser:

COMPATIBLES → DETER: si solo tiene la solución (0,0,0)
→ INDETER: si tiene ∞ soluciones.

*SIEMPRE TIENE UNA SOL, ∴ LA TRIVIAL (0,0,0)

- Heterogéneo: términos independientes diferentes a cero.

Hay que usar Roche-Frobenius, que nos dice:

. Si el $Rg(A) = Rg(A^*) =$ nº incógnitas → S. C. DET.
. Si el $Rg(A) = Rg(A^*) <$ nº incógnitas → S. C. INDET
. Si el $Rg(A) \neq Rg(A^*)$ → S. INCOMPATIBLE

. - A^* - Matriz ampliada, con los coeficientes.

En el caso de los sist. heterogeneos y que son S. C. DET, seguimos con LA REGLA DE CRAMER:

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad y = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \qquad z = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

PASOS PARA RESOLVERLOS.

* Caso en el que esté en función de un parámetro "m"

1] Plantearnos si es más fácil hacer el determinante de toda la matriz y evaluar en función de la incógnita, si la ampliada tiene un rango u otro, dependiendo del valor que tome "m". También ver si se facilita el trabajo haciendo ceros por debajo de la diagonal principal.

2] ** Puede pasarnos que realizando los ceros por debajo de la diagonal principal se nos complique. En este caso vamos haciendo determinante 1×1, 2×2, 3×3...

¿Podemos evaluar "m" haciendo el det de toda la matriz?
- SÍ → Rango (A^*), Rango (A) } DIFERENTES → EVALUAMOS CASOS QUE EL DET. SEA IGUAL A CERO
- NO → ¿Podemos hacer ceros por debajo de la diag. prin. facilmente?
  - SÍ → Hacemos ops y evaluamos
    - Rango (A^*) ≠ Rango (A) S. I
    - Rango (A^*) = Rango (A) < nº incog — Sacamos los valores en función de una incógnita
    - Rango (A^*) = Rango (A) = nº incog SCD.
  - NO → Vamos haciendo determinantes y vemos el rango

TEMA 2 - ESPACIOS VECTORIALES.

Vectores: Elementos de un espacio vectorial.

. Vectores LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

Para saber si un conjunto de vectores son linealmente independientes, tenemos que ver si alguno/s de ellos están expresados como combinación lineal de los otros. En el caso que ninguno este así expresado, todos serán linealmente independientes.

. Para ver si son linealmente independientes, el único valor de los λ_n tiene que ser 0:

$\lambda_1(a,b) + \lambda_2(c,d) + \lambda_3 \cdots + \lambda_n(y,z) = (0,0)$ (En el caso de matrices igual).

. También podemos ~~hac~~ representar los vectores en una matriz y buscar ceros bajo la diagonal principal. Si alguna fila ~~se pued~~ se queda como cero, ese vector es L.D.

• Sistema GENERADOR.

Un conjunto de vectores es un sist. generador si todos los vectores del esp. vect. se pueden expresar como C.L. de esos.

Propiedades necesarias:

① TODOS TIENEN QUE SER LINEALMENTE INDEP. ② Conformado por el nº vectores necesarios $\mathbb{R}^n$ nº vectores $\geq n$ (DIMENSIÓN)

• Base de un espacio vectorial.

Conjunto de vectores que son: LINEALMENTE INDEPENDIENTES y SISTEMA GENERADOR en $\mathbb{R}^n$

* TODAS LAS BASES DE $\mathbb{R}^n$ tienen n elementos.

• Para comprobar si un conjunto de vectores son una base:

① Vemos si son linealmente independientes

② Que forme un sist. generador (que cumpla nº vectores $\geq n$)

* Dimensión

- Número de vectores que forman una base del espacio vectorial.

.Pasos: Base $\longrightarrow$ ¿Vectores linealmente independientes? $\xrightarrow{\text{SI}}$ RANGO $\longrightarrow$ DIMENSIÓN.

$\xrightarrow{\text{NO}}$ No base

• COORDENADAS.

Valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que cumplan que la suma de ellos multiplicado por el vector sea el vector pedido.

Ej: $B\{(1,0),(0,1)\}\ \mathbb{R}^2$

$x = (3,4) \longrightarrow 3 \cdot (1,0) + 4\,(0,1)$ $\boxed{\alpha_1 = 3\ ,\ \alpha_2 = 4}$

vector a buscar

COORDENADAS (3,4) en la base canónica

SUBESPACIOS VECTORIALES

Def: Decimos que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si es un esp. vectorial con las mismas ops. que $\mathbb{R}^n$

*** ¿Como saber si H pertenece a $\mathbb{R}^n$? ***

- Tenemos que ver si cualquier combinación lineal de dos vectores pertenecientes al subconjunto, también pertenece al subconjunto.

Ejemplo: $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x_1 = 3x_2 + 1\}$ tal que

¿Es subespacio?

1. Damos dos valores que queramos $(1,0)$, $(4,1)$ } Estos $\in H$

2. Hacemos CL multiplicado por un número cualquiera

$2(1,0) + 3(4,1) = (14,3)$

Estos dos pertenecen a H — ESTE NO

Conclusión: no es subespacio.

REPRESENTACIÓN DE SUBESPACIOS

1. $L_1 < (1,2,0,1) >$

2. $L_2 \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ CARTESIANAS

3. $L_3 \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_2 \end{cases}$ PARAMÉTRICAS

¿Como pasar de unas a las otras?

1 → 3 $B_H = \{(1,2,-1), (0,2,2)\}$ ← ES LA BASE, NO EL SUBESPACIO

$(x,y,z) = \alpha(1,2,-1) + \beta(0,2,2) \rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 2\beta \\ z = -\alpha + 2\beta \end{cases}$

3 → 1 $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_2 \end{cases}$

$x_1 = \lambda_1 = (1)\lambda_1 + (0)\lambda_2 + (0)\lambda_3$

$x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = (1)\lambda_1 + (1)\lambda_2 + (0)\lambda_3$

$x_3 = \lambda_3 = (0)\lambda_1 + (0)\lambda_2 + (1)\lambda_3$

$x_4 = \lambda_2 = (0)\lambda_1 + (1)\lambda_2 + (0)\lambda_3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_3 \Rightarrow L_3 \{(1,1,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0)\}$

2 → 3 $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Dando valores a α y β, y...

como hay 4 var y 2 ec. → $4 - 2 = 2$ variables (α y β)

$\begin{cases} y = z \quad \boxed{\lambda_1 = y} \; \boxed{\lambda_1 = z} \\ x - \cancel{z} + \cancel{z} + t = 0 \rightarrow x = -t \end{cases}$

$\boxed{x = \lambda_2}$

$\boxed{t = -\lambda_2}$

$\begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_1 \\ t = -\lambda_2 \end{cases}$

3 → 2 $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_2 \end{cases}$

1. $\boxed{x_1 = \lambda_1} \rightarrow x_2 = x_1 + \lambda_2 \rightarrow \boxed{\lambda_2 = x_2 - x_1}$ $\quad \boxed{x_3 = \lambda_3}$ Asignamos vars a λ.

2. $x_4 = x_2 - x_1 \longrightarrow \boxed{x_1 - x_2 + x_4 = 0}$ Ec implícita.

1 → 2 ⇝ 1 → 3 y 3 → 2

2 → 1 ⇝ 2 → 3 y 3 → 1

* 2 → 3 - Si tiene muchas ecuaciones, hacemos la matriz que le corresponde y buscamos ceros por debajo de la diagonal principal. Cuando ya no puedas reducir ceros más, la transformas de nuevo. De esta manera es más sencilla pasar a paramétrica.

. ¿Cómo saber si un vector pertenece a un subespacio vectorial?

Tenemos que buscar la/s coordenada/s que satisfaga que el vector esté dentro.

. Si está de la forma $\boxed{1}$, α, β ... que al multiplicarlo salga el vector

. " " " " $\boxed{2}$, sustituyes en x, y, z ... y ves si concuerda.

. " " " " $\boxed{3}$, sustituimos y vemos si concuerda. (Un único valor para cada λ)

. Intersección de subespacios.

* Cálculo de la intersección de los subespacios.

- Vendrán dados por los valores de x que compartan los dos subespacios. Como mínimo estará la INTERSECCIÓN NULA (todas las x igual a cero) ← IMPORTANTE.

Pasos:

$\boxed{1}$ Pasamos los subespacios a forma cartesiana ($\boxed{2}$). Si alguna de ellas ya está en esa forma no la tocamos.

$\boxed{2}$ Vemos que valor de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ se cortan.

Ejemplo:

$U: L< x^2+2x, -x^2+x, x^2+x>$

$P_3(\mathbb{R}), B=\{1, x, x^2, x^3\}$

$$\begin{cases} x^2+2x=0 \\ -x^2+x=0 \\ x^2+x=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{cccc} x^3 & x^2 & x & 1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Hacemos el rango para saber cuantas ecuaciones son lineal. independientes.
Rango: 2
2 de las ecuaciones valen.

$$\text{Cojemos} \begin{cases} x^2+x=0 \longrightarrow \\ -x^2+x=0 \longrightarrow \end{cases} \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=\alpha+\beta \\ x_3=-\alpha+\beta \\ x_4=0 \end{array}$$

⇒ Pasamos a forma ~~paramétrica~~ cartesiana

$\alpha = x_2-\beta$

$x_3=-x_2+\beta+\beta=-x_2+2\beta \rightarrow \beta=\frac{x_3+x_2}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_4=0 \end{array}\right\}$ No se pueden sustituir α y β. ESTOS SON LOS VALORES DE LAS ECUACIONES CARTESIANAS

$$U=\begin{cases} x_1=0 \\ x_4=0 \end{cases} \qquad W=\begin{cases} x_2+x_3=0 \rightarrow x_2=-x_3 \\ -x_2+2x_3=0 \rightarrow x_3+2x_3=0 \rightarrow x_3=0 \longrightarrow x_2=0 \end{cases}$$

$U \cap W=\{0,0,0,0\}$ Intersección nula.

* Base de la intersección de dos subespacios

$\boxed{1}$ Pasamos a paramétricas y damos valores cualesquiera a $\alpha, \beta, \dots$ mientras que no sean iguales o proporcionales. $(1,0)$ $(0,1)$ valdrían para α, β. Damos valores el mismo número de veces que parámetros haya

$\boxed{2}$ Transformamos el resultado de sustituir a lo correspondiente. Vemos que tienen en común.

Ejemplo:

$$V=\begin{cases} x_1=\alpha+\beta \\ x_2=0 \\ x_3=\beta \\ x_4=0 \end{cases} \qquad B_V=\{(1,0,0,0),(1,0,-1,0)\} \longrightarrow (1, 1-x^2)$$

$$W=\begin{cases} x_2+x_3=0 \\ -x_2+2x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1=\alpha \leftarrow \text{Damos a } x_1 \text{ el valor de } \alpha \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{array} \Big] \text{ Se anulan haciendo ops} \\ x_4=\beta \leftarrow \text{" " } x_4 \text{ " " " } \beta$$

$B_W=\{(0,0,0,1),(1,0,0,0)\}$ $(x^3, 1)$

1 está en las dos bases. x^3 no se puede formar como C.L de $1-x^2$ y 1 ni $1-x^2$ de x^3 con 1, por lo que: $B_{V\cap W}=\{(1,0,0,0)\}$

* Cálculo de la base de un subespacio vectorial.

- En el caso que tan sólo nos pidan la base de un subespacio vectorial, transformamos a paramétrica y damos valores igual que antes.

DIMENSIÓN - Si nos piden la dimensión de la base, corresponde al número de vectores que tenga la base ya que todos esos vectores son linealmente independientes.

APLICACIONES LINEALES

Una aplicación es lineal si ~~s~~ cumple:

$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a \cdot f(\vec{u}) + b\, f(\vec{v})$ Donde $\vec{u}$ ~~g~~ $= (x, y)$ $\vec{v} = (z, t)$ (En el caso que sea $\mathbb{R}^2$)

Con el ejemplo, se quedaría así:

$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = f(a \cdot (x, y) + b\,(z, t)) = f(\underbrace{ax + bz}_{x}, \underbrace{ay + bt}_{y})$ - Esas van a ser nuestras x e y. Dependiendo de como nos den f( ), este se quedará de una manera u otra.

Ejemplo:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (xy, x)$

NO ENCAJA

SI ENCAJA

Aquí ~~s~~ $f(ax + bz, ay + bt)$ será igual a $= (ax+bz)(ay+bt), (ax+bz))$

$a \cdot f(\vec{u}) + b\, f(\vec{v}) = a \cdot f(x, y) + b \cdot f(z, t) = a \cdot (xy, x) + b\,(zt, z) = (axy + bzt, ax + bz)$

NO ES APL. LINEAL.

***Problemas de aplicaciones lineales. COSAS QUE SUELEN PREGUNTAR

!!! IMPORTANTE: Tenemos que fijarnos en el enunciado en el número que está encima de las $\mathbb{R}$, ya que nos indica el numero de variables del Kernel y la imagen

$\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{Kernel}(f)} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^4}_{\text{Imagen}(f)}$ $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, 0)$ (Ejemplo)

$\boxed{1}$ Nos daran valores de la aplicación lineal para f, que pondremos en la matriz del homomorfismo.

$\boxed{2}$ También nos dirán que $f(x_1, x_2, x_3)$, teniendo x, y, z valores. Estos corresponden a otra matriz de una columna y tantas filas como x halla.

$\boxed{3}$ A partir de aquí nos preguntarán: a) Base del Kernel b) Base de la imagen y dimensión c) Ec → Implícitas / → Paramétricas

Ejemplo:

$\boxed{1}$ ~~$~~ Sea $f: \overset{\text{Ker}(f)}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overset{\text{Im}(f)}{\mathbb{R}^4}$

$f(1,0,0) = (1,0,1,1)$

$f(0,1,0) = (0,1,1,1)$

$f(0,0,1) = (1,-1,0,0)$

$\boxed{2}$ Si $f(1,-1,1)$

$\boxed{3}$ a) Calcula base Kernel, Imagen, dimensión ec paramétricas y ec. implícitas

a) $\overset{\text{Im}(f)}{Y} = A \cdot \overset{\text{Ker}}{X}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz Homomorfismo}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{Im}(f)) = \text{Rango}(\text{Matriz})$

En este caso: Rango 2 $= \dim(\text{Im}(f))$

corresponde al de $f: \mathbb{R}^{(n)}$ ← esto

$\dim(\text{Total}) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$

$3 - 2 = \dim(\text{Ker}(f))$

$1 = \dim(\text{Ker}(f))$

$**$ $B_{Ker(f)}$ = tomando toda la matriz Y como 0. Siempre está la posibilidad de que todo sea ∅

Ej anterior:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ \cancel{x_1+x_2=0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=x_3 \\ x_1=-x_2 \end{cases} \quad \boxed{x_3=x_3} \quad \boxed{x_2=x_3} \quad \boxed{x_1=-x_3 = -x_2}$$

Iguales. Nos quedamos con una

$**$ $B_{im(f)}$ = tomando $x_1, x_2, x_3 \ldots$ simplemente así

Ej. anterior

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1=x_1+x_3 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_1+x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1=-y_2+y_3=y_2+y_4 \\ y_2=y_2 \\ y_3=y_4 \\ y_4=y_4 \end{matrix}$$

RESUMEN APLICACIÓN LINEAL.

1. Matriz homomorfismo = aplicación lineal = A ($Y = A X$)
2. $f: \underbrace{\mathbb{R}^3}_{Ker(f)} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^4}_{Im(f)}$ - Indica el numero de (Y) (Ker(f)) y las x en Im(f)
3. dim (Im (f)) = Rango (Matriz homomorfismo)
4. dim (Total) = dim (Im(f)) + dim (Ker (f)) (Primero calculas ~~el~~ ~~rea~~ la dim Im(f) y hallas dim (Ker(f)))
5. $B_{Kerf} \rightarrow Y = \{0\}$
6. $B_{imf} \rightarrow Y = \{Y\}$
7. Ecuación paramétricas y e implicitas → de base las sacas

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

*AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Def: Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ si existe un vector $\bar{X}$ no nulo tal que:

$$\boxed{A\bar{X} = \lambda \cdot \underbrace{\bar{X}}_{\text{Autovector asociado a } \lambda}}$$

- Cálculo de autovalores y autovectores.

$A\bar{X} = \lambda \bar{X} \longrightarrow A\bar{X} - \lambda \bar{X} = 0 \longrightarrow (A - \lambda I)\bar{X} = 0$; entonces

① Autovalores de A

λ es autovalor de A si $\underbrace{\overbrace{|A - \lambda I|}^{\text{Polinomio característico}} = 0}_{\text{Ecuación característica.}}$

② Autovectores de A

λ es auto vector de A si $(A - \lambda I) \cdot \bar{X} = 0$ (Asociado a λ)

- Ejemplo: Calcula autovalores y autovectores de la matriz:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad |A - \lambda I| = 0 \quad (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = (3 - \lambda)(3 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)$ $\begin{cases} \lambda = 1 \text{ (simple)} \\ \lambda = 3 \text{ (doble)} \end{cases}$

$\boxed{\lambda = 1 \text{ simple}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \rightarrow x = -z \quad z = z \\ 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$

$\boxed{\lambda = 3 \text{ doble}}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{ -x + z = 0 \downarrow \; x = z, \; z = z, \; y = y$

DEFINICIONES

- Multiplicidad algebraica: nº de veces que se obtiene λ al resolver $(A - \lambda I) = 0$ (m.a)
- Multiplicidad geométrica: $\dim V(\lambda)$ (m.g)

$\boxed{1 \leq m.g(\lambda) \leq m.a(\lambda)}$ $\quad \boxed{m.g = \underbrace{n}_{\text{TAMAÑO MATRIZ}} - \text{Rango}(A - \lambda I)} = \boxed{m.g = n - n^{\circ} \text{ ecuaciones}}$

Ejemplo anterior:

$A = \begin{cases} \lambda = 1 \begin{cases} m.a = 1 \\ m.g = n - \text{Rango}(A - I) = 3 - 2 = 1 \end{cases} \\ \lambda = 3 \begin{cases} m.a = 2 \\ m.g = 3 - 1 = 2 \end{cases} \end{cases}$

· PROPIEDADES DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

① Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de una matriz cuadrada de orden n, se verifica: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n =$ traza de A (suma elementos diagonal principal)

· $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|$

② En general se verifica que λ^p es autovalor a A^p y $\bar{X}$ es su autovector asociado

Si λ es autovalor de A y $\bar{X}$ su autovector asociado por la def se verifica: $A\bar{X} = \lambda\bar{X}$

$$AA\bar{X} = A\lambda\bar{X}$$
$$A^2\bar{X} = \lambda A\bar{X} \Rightarrow A^2 X = \lambda\lambda\bar{X} \Rightarrow A^2\bar{X} = \lambda^2\bar{X}$$

· DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ.

- Se dice que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si se puede expresar: $\boxed{A = \underbrace{P}_{\text{Matriz regular}} \cdot \overbrace{D}^{\text{Matriz diagonal.}} \cdot P^{-1}}$

- TEOREMA:

. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable sí y solo si:

$\boxed{A}$ Sus autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{B}$ $m.a(\lambda) = m.g(\lambda)$, para cualquier autovalor. Si no coincide $\longrightarrow$ A NO ES DIAGONALIZABLE

* CÁLCULO DE LAS MATRICES D Y P.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \dots & \boxed{} \\ V(\lambda_1) & V(\lambda_2) & & V(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

RELLENAMOS LA DIAGONAL PRINCIPAL CON LOS λ OBTENIDOS

. APLICACIÓN DE LA DIAGONALIZACIÓN.

- Diagonalización de las matrices simétricas.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ COMO LA MATRIZ ES SIMÉTRICA, ES DIAGONALIZABLE

- Teorema: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces A es diagonalizable.

- Potencias de una matriz.

Si tenemos $A \in M_n(\mathbb{R})$, queremos hallar A^n

$\downarrow$

ES DIAGONALIZABLE, QUE QUIERE DECIR QUE $A = PDP^{-1} \rightarrow A^n = (PDP^{-1})^n \rightarrow$

$\rightarrow PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}D\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}D\dots \cdot PDP^{-1}$ (n veces) $\rightarrow P \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D \dots D$ (n veces) $\longrightarrow \boxed{P \cdot D^n \cdot P^{-1}}$

ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

* Producto escalar

Propiedades.

$\boxed{A}$ Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $\boxed{B}$ ~~Aso~~ Asociativa: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$\boxed{C}$ $(\alpha\cdot\vec{u})\cdot\vec{u}\rightarrow\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\alpha)$ $\boxed{D}$ $\vec{u}\cdot\vec{v}>0\rightarrow(\vec{u}\cdot\vec{u}=0\rightarrow\vec{u}=0)$

* Módulo

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

* BASE ORTOGONAL Y BASE ORTONORMAL.

- DEFINICIONES.

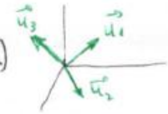
- Se dice que dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $(\mathbb{R},\cdot)$, $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ base de $\mathbb{R}$. Se dice que es una base ortogonal si sus vectores son ortogonales 2 a 2: $\vec{u_i}\cdot\vec{u_j}=0$ $(j\neq i)$

- Se dice que B es una base ortonormal si:

$\boxed{A}$ Sus vectores son ortogonales 2 a 2 (= Base ortogonales)

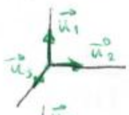
$\boxed{B}$ Sus vectores son unitarios ($|u_i|=1$)

$B=\{u_1,u_2,u_3\}$ BASE ARBITRARIA (Base cualquiera)



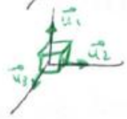
$\Downarrow$

$B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ ORTOGONAL



$\Downarrow$

$B''=\{u_1,u_2,u_3\}$ ORTONORMAL



* Una matriz es ortogonal si la inversa coincide con la transpuesta.

Propiedad

Se verifica que si las columnas de una matriz P forman una base ortonormal entonces P es ortogonal

P es ortogonal si $P^{-1}=P^t$

$$P=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$ $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es ortonormal

$$P^t\cdot P=\begin{pmatrix} \cdots & v_1 & \cdots \\ \cdots & v_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & v_n & \cdots \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

* PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.

Dada una Base: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ cualquiera, obtener "B_1" base ortogonal y después una "B_2" base ortonormal

. $B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

$\rightarrow w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1$$

$v_2 \cdot w_1$ → Producto escalar (número)

w_1 → vector

$w_1 \cdot w_1$ → Producto escalar (número)

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \cdot w_2$$

$\vdots$

$$w_n = v_n - \frac{v_n \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1 - \frac{v_n \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \cdot w_2 - \dots - \frac{v_n \cdot w_{n-1}}{w_{n-1} \cdot w_{n-1}} \cdot w_{n-1}$$

$B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base ortogonal asociada a B ($w_i \cdot w_j = 0$ si $i \neq j$)

. Finalmente construimos:

$$B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad u_i = \frac{w_i}{|w_i|} \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

EJEMPLO:

$B = \{(1,1), (0,1)\}$ *No es ortogonal por que el producto escalar da 1. Aplicamos G-S para obtener una base ortogonal.

$w_1 = (1,1)$

$$w_2 = (0,1) - \frac{1}{2} \cdot (1,1) = (0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$B_1 = \left\{(1,1), \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ Base ortogonal, vamos ~~por~~ a obtener la ortonormal

$$u_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$B_2 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ El producto escalar de esto da igual a cero → base ortonormal.

* En el caso que la matriz sea simétrica, la base ortogonal y la ortonormal la podemos sacar con los vectores que obtenemos de esta.
auto

DOS FORMAS DE DIAGONALIZAR

→ SEMEJANZA → $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ (D- matriz diagonal (todo ceros menos diagonal)) (P- matriz de los autovectores)

→ SEMEJANZA ORTOGONAL (Solo con la matriz transpuesta) → $A = P \cdot D \cdot P^t$ → ya que $A^t = P \cdot D \cdot P^t$ que es igual.

IMPORTANTE: SI UNA MATRIZ ES SIMÉTRICA ⟶ ES DIAGONALIZABLE

. Si nos piden una base ortonormal de vectores propios (autovectores), buscamos ~~t~~ los autovectores y después los ponemos en la base.

COSAS IMPORTANTES A AÑADIR

. TRAZA $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

DETERMINANTE $= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

PROGRESIONES

Progresión geométrica

* Si al restar el siguiente con el anterior no sale, pero al dividir siempre sale lo mismo.

P.G de razón: resultado de la división (r)

Progresión aritmética:

* Si al restar sale lo mismo siempre.

P.A de razón: resultado de la resta. (d)

Progresión geométrica → $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ → $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$

Progresión aritmética → $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ → $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

(*) Cuando no acote, es decir, que no salga A^n $(A_1 + A_2 + \ldots = ( ))$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$