Examen Final Ordinario. Cálculo Dif. Apl.

Grado en Ingeniería Informática y Doble Grado

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

16 de Enero de 2013

APELLIDOS Y NOMBRE		GRUPO	

1. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.
ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.
iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

2. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax}\,; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.
ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

3. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Sea $F(s)$ la Transformada de Laplace de la función $y(t)$. Sabiendo que $y(t)$ resuelve el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0\,.$$

Se pide:

i) Hallar el valor de $F(2)$.
ii) Hallar el valor de $y(2)$.

Nota: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

4. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2\,.$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y\,; X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t)\,; \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.
ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.
iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

i) EDO lineal (y' no mult. y), 1^{er} orden (hasta 1^a derivada)
¿Solo depende de x

ii) $y(1)=2$

$$y' + \frac{2}{x}y = 5x^3 \quad \text{Lineal} \Rightarrow \overset{y' + p(x)y = g(x)}{p(x) = 2/x \,,\, g(x) = 5x^3}$$

$$\mu(x) = e^{\int 2/x\, dx} = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

$$\frac{d}{dx}(y \cdot x^2) = x^2 \cdot 5x^3; \quad y \cdot x^2 = 5\int x^3 \cdot x^2 \, dx = 5\int x^5 dx$$

$$y(x)x^2 = 5\frac{x^6}{6} + k; \; y(x) = \frac{5x^{\cancel{6}\,4}}{6\cancel{x^2}} + \frac{1}{x^2}k = \frac{5}{6}x^4 + 1/x^2 \cdot k \quad / k \in \mathbb{R}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 5/6 \cdot 1 + k \quad ; \quad k = 7/6$$

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{6}x^4 + \frac{7}{6x^2}}$$

$$\frac{0 - 12x \cdot 7}{(6x^2)^2} = \frac{-84\cancel{x}}{36x^{\cancel{4}3}} = \frac{-7}{3x^3}$$

iii) Comprobación: $-5x^4 + 2y + xy' = 0$

$$y'(x) = \frac{20}{6}x^3 + \frac{7}{6} \cdot \frac{-2x}{x^{\cancel{4}3}} = 20/6\, x^3 - 7/3x^3$$

$$-5x^4 + \frac{10}{6}x^4 + \frac{14}{6x^2} + \frac{20}{6}x^4 - \frac{7}{3x^2} = 0 \; ; \; -\cancel{5x^4} + \cancel{\frac{30}{6}x^4} + \cancel{\frac{7}{3x^2}} - \cancel{\frac{7}{3x^2}} = 0$$

$$\boxed{0 = 0 \; ✓}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax}\,; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

i) $y(x) = y_h + y_p$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,; \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \mathcal{B}\{e^x, e^{2x}\}$$

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} \;/ A, B \in \mathbb{R}$$

$y_p(x) = Ce^{ax}$ Al ser $a \neq 1$ y $a \neq 2$, no se repiten en y_h los $\mathcal{B}$

$$y_p'(x) = Cae^{ax} \qquad y_p''(x) = Ca^2e^{ax}$$

$$Ca^2e^{ax} - 3Cae^{ax} + 2Ce^{ax} = e^{ax}$$

$$e^{ax}(Ca^2 - 3Ca + 2C) = e^{ax}$$

$$C(a^2 - 3a + 2) = 1\,; \quad C = \frac{1}{a^2 - 3a + 2} = \frac{1}{(s-2)(s-1)}$$

$$\boxed{y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{e^{ax}}{(s-2)(s-1)} \;/ A, B \in \mathbb{R}}$$

ii) para $a = 1$ $\quad y'' - 3y' + 2y = e^x$

$y_h = Ae^x + Be^{2x} / A, B \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{B} = \{e^x, e^{2x}\}$

$$y_p = Ce^x x\,; \quad y_p' = Ce^x + Ce^x x \qquad y_p'' = Ce^x + Ce^x + Ce^x x = C2e^x + Ce^x x$$

$$2Ce^x + \cancel{Ce^x}x - 3Ce^x - \cancel{3Ce^x}x + \cancel{2Ce^x}x = e^x\,; \quad C = 1$$

$$\boxed{y(x) = Ae^x + Be^{2x} + xe^x \;/ A, B \in \mathbb{R}}$$

3. ([**EC 1.00**] / [**EF 1.20**] **puntos**) Sea $F(s)$ la Transformada de Laplace de la función $y(t)$. Sabiendo que $y(t)$ resuelve el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Se pide:

i) Hallar el valor de $F(2)$.

ii) Hallar el valor de $y(2)$.

Nota: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

$\mathcal{L}\{y(x)\} = F(s)$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 4F(s) = \mathcal{L}\{e^t\}$$

$$s^2F(s) - sy(0) - \cancel{y'(0)}^{0} + 4sF(s) - 4y(0) + 4F(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2 - 4s + 4)F(s) - s - 4 = \frac{1}{s-1}; \quad F(s)(s^2-4s+4) = \frac{s^2+3s-3}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{s^2+3s-3}{(s-1)(s^2+4s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot1\cdot4}}{2} = \frac{-4\pm0}{2} = -2 \text{ Raiz doble}$$

$$s^2+3s-3 = A(s+2)^2 + B(s+2)(s-1) + C(s-1)$$

$s=-2 \qquad 4-6-3 = A0 + B0 + C(-3); \quad C = \frac{-5}{-3} = 5/3$

$s=1 \qquad 1+3-3 = A(3)^2 + B\cdot0 + C\cdot0; \quad A = 1/9$

$s=-1 \qquad \underbrace{1-3-\cancel{3}}_{-5} = A(1)^2 + B\underbrace{(1)(-2)}_{(-2)} + C(-2); \quad B = \frac{-5 - 1/9\cdot1^2 + 2\cdot5/3}{-2} = 8/9$

$$F(s) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{(s+2)^2}$$

$\rightarrow n+1; \ n=1$, $a=2$

$$\boxed{F(2) = 1/9\cdot 1/1 + 8/9\cdot 1/4 + 5/3\cdot 1/16 = 7/16} = 0'4375$$

$\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\{\underbrace{\frac{1}{s-1}}_{e^t}\} + \frac{8}{9}\mathcal{L}^{-1}\{\underbrace{\frac{1}{s-(-2)}}_{e^{-2t}}\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\underbrace{\frac{1}{(s-(-2))^{1+1}}}_{t e^{-2t}}\}$$

$$\boxed{y(x) = 1/9\, e^t + 8/9\, e^{-2t} + 5/3\cdot t e^{-2t}}$$

$$\boxed{y(2) = 1/9\, e^2 + 8/9\, e^{-4} + 10/3\, e^{-4}} = 0'898$$

4. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2.$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y$; $X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t); \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1,2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

i) $\begin{cases} x_1(t) = y \\ x_2(t) = y' \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'(t) = y'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = y''(t) = -4y' - 3y = -4x_2(t) - 3x_1(t) \end{cases}$

$y'' + 4y' + 3y = 0; \quad y'' = -4y' - 3y$

$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -3x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$ $\boxed{\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}}$

ii) $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0; \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$

$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 3$

$\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

Para $\lambda_1 = -1$

$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x + y = 0; \quad x = -y$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = -3$

$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 3x + y = 0$

$y = -3x$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}_2 = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C_1 e^{-0} + C_2 e^{-30}\\ C_1 e^{-0} - 3C_2 e^{-3\cdot 0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C_1 + C_2\\ C_1 - 3C_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = -C_1 + C_2 \\ 3 = C_1 - 3C_2 \end{cases} \Longrightarrow C_1 = 3 + 3C_2 = -3$$

$$4 = \; / \; -2C_2 \;;\quad C_2 = -2$$

$$\boxed{x(t) = \begin{pmatrix}3e^{-t} - 2e^{-3t}\\ -3e^{-t} + 6e^{-3t}\end{pmatrix}}$$

5. ([**EC 1.00**] / [**EF 1.20**] **puntos**) Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ \ t>0\,,\ \ x\in[0,L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{array}{rl} (CC) & u(0,t)=0\,,\ \ u(L,t)=0\,,\ \ \forall t>0\,, \\ (CI) & u(x,0)=f(x)\,,\ \ \forall x\in[0,L]\,. \end{array}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,,\quad \text{con } n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$$

Se pide:

i) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_n, $n\in\mathbb{N}$, sabiendo que

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m\neq n \\ L/2\,, & m=n \end{cases}\quad .$$

ii) Tomando $L=\pi$, hallar la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + \frac{5}{3}\operatorname{sen}(4x).$$

5. (**[EC 1.00] / [EF 1.20] puntos**) Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\;\; t>0\,,\;\; x\in[0,L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{array}{ll} (CC) & u(0,t)=0\,,\;\; u(L,t)=0\,,\;\; \forall t>0\,, \\ (CI) & u(x,0)=f(x)\,,\;\; \forall x\in[0,L]\,. \end{array}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,,\quad \text{con } n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$$

Se pide:

i) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_n, $n\in\mathbb{N}$, sabiendo que

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m\neq n \\ L/2\,, & m=n \end{cases}\,.$$

ii) Tomando $L=\pi$, hallar la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + \frac{5}{3}\operatorname{sen}(4x).$$

$$k\,X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

$$\frac{\cancel{k}X''(x)\cancel{T(t)}}{\cancel{k}X(x)\cancel{T(t)}} = \frac{\cancel{X(x)}T'(t)}{k\cancel{X(x)}T(t)} = -\lambda\,;\quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \frac{T'(t)}{T(t)\,k}$$

Ec. 1) $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$

$$\mu(x) = e^{\int k\lambda dt} = e^{k\lambda t}\,;\quad T(t)\cdot e^{k\lambda t} = C\,;\quad T(t) = Ce^{-k\lambda t}$$

Ec. 2) $X''(x) + \lambda X(x) = 0\,;\;\; \lambda>0\,;\;\; \lambda = a^2$

$r^2 + a^2 = 0\,;\;\; r = \pm ia \qquad \mathcal{B} = \{\operatorname{sen}(ax), \cos(ax)\}$

$X(x) = C_1\operatorname{Sen}(ax) + C_2\cos(ax)$

$0 = u(0,t) = X(0)\cdot T(t) \Rightarrow X(0) = 0\,;\;\; 0 = C_1\operatorname{sen}(0) + C_2\cos(0)$

$0 = C_2$

$u(L,t) = 0 = X(L)\,T(t) \Rightarrow X(L) = 0\,;\;\; 0 = \underset{\neq 0 \text{ Exijo}}{C_1}\operatorname{sen}(aL)$

$\operatorname{sen}(aL) = 0\,;\;\; \underset{n=1,2,\ldots}{aL = n\pi}\,;\;\; a = \frac{n\pi}{L}$

$$X_n(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad \lambda = a^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-kt\cdot\frac{n^2\pi^2}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$