

## Tema 5.3. Equilibrado de árboles

Estructura de Datos y Algoritmos (EDA)

# Índice

---

- ▶ 5.3 Equilibrado de ABB
  - ▶ **Definición de Árbol Perfectamente Equilibrado**
  - ▶ Definición de Árbol Equilibrado en Altura

# ABB perfectamente equilibrados

---

- ▶ Resumen de características de ABB

- ▶  $h$  = altura del árbol,  $n$  = número de nodos

- ▶ Ventaja:

- ▶ Inserción, borrado y búsqueda  $\sim O(h)$

- ▶ Desventaja:

- ▶ Se pierde eficiencia cuando  $n \approx h$ , y su complejidad se iguala a la de las listas



# ABB perfectamente equilibrados

---

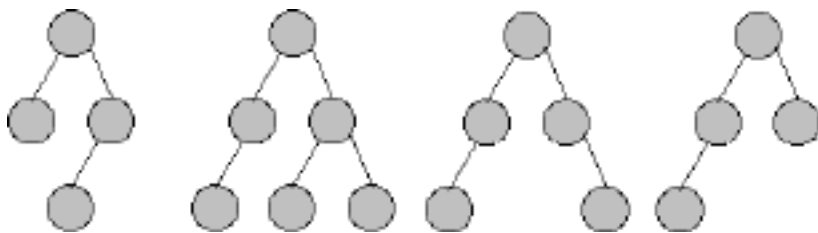
- ▶ Estrategia → Después de las operaciones de inserción o borrado, debemos mantener el árbol equilibrado.
  - ▶ Equilibrio perfecto o en tamaño (árboles perfectamente equilibrados)
  - ▶ Equilibrio en altura (árboles AVL, árboles ideado por los matemáticos Adelson-Velskii y Landis)



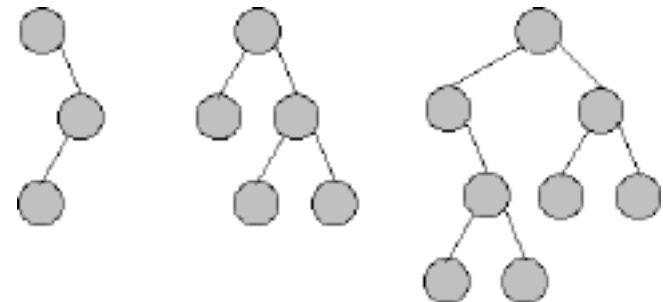
## ABB perfectamente equilibrados (en tamaño)

---

- ▶ Factor de equilibrio de un nodo (fe) : diferencia entre el tamaño del subárbol derecho y el del izquierdo (o viceversa)
- ▶ Para TODOS los nodos, el número de nodos del subárbol izquierdo y el número de nodos del subárbol derecho difieren como máximo en 1 unidad
- ▶ Coste alto de mantener un ABB perfectamente equilibrado,  $O(n)$



con equilibrio perfecto



sin equilibrio perfecto



# ABB perfectamente equilibrados: Algoritmo Reequilibrado

---

- ▶ Idea: desplazar la mitad de los nodos que sobran de un lado al otro del ABB
- ▶ Importante: Reequilibrado se hace desde la raíz hacia abajo (es decir, de forma **descendiente**).
- ▶ Será necesario modificar algoritmos de inserción/borrado
  - ▶ haciendo un re-equilibrado tras insertar/borrar, o bien
  - ▶ equilibrando en algún momento



# ABB perfectamente equilibrados: Algoritmo Reequilibrado

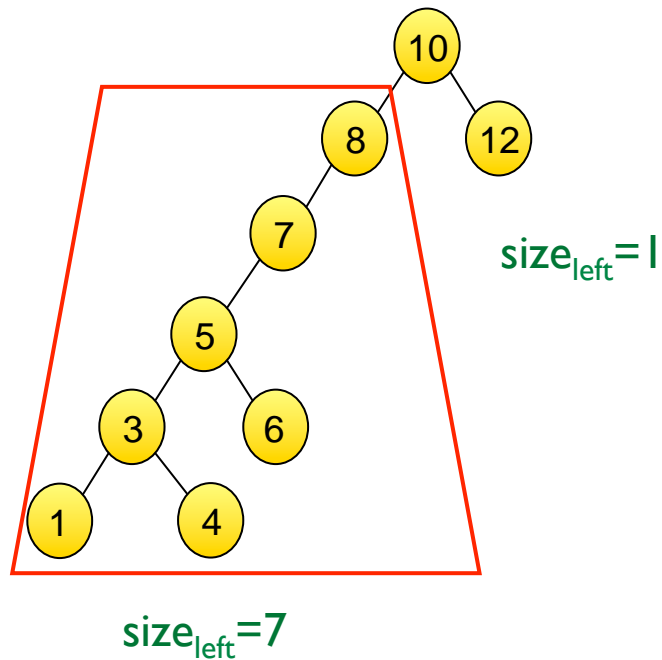
---

- ▶ El siguiente algoritmo para desplazar nodos, asegura el nuevo árbol mantendrá la condición de ABB. Pasos:
  - ▶ Desplazar a derechas:
    1. Introducir la raíz del subárbol no equilibrado en el subárbol derecho
    2. Colocar como raíz del subarbol no equilibrado el mayor del subárbol izquierdo
    3. Repetir 1 y 2 tantas veces como número de nodos a desplazar. (Es decir, repeticiones= (fe nodo a equilibrar/2)).
  - ▶ Desplazar a izquierdas: (simétrico)



# Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (1 de 4)

---



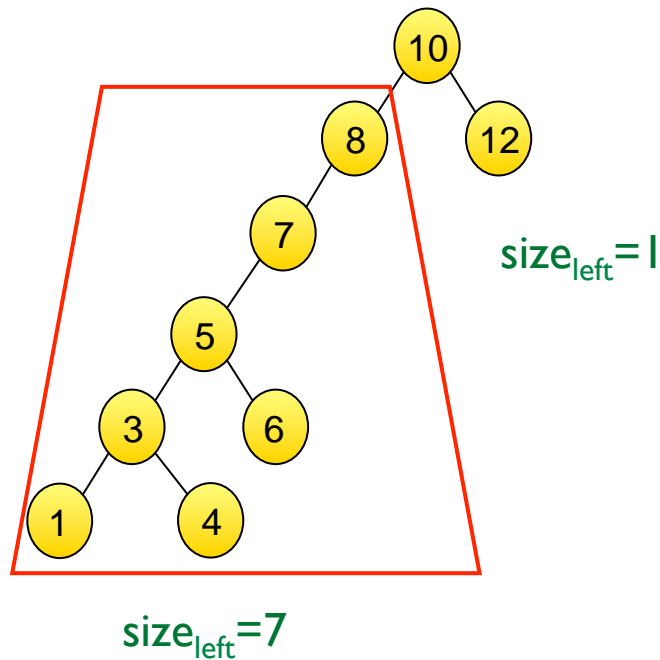
$\text{fe}(10)=7-1=6$ . Es decir, hay 6 nodos de diferencia  $\rightarrow$  desplazar  $6/2$  veces a la derecha





# Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (1 de 4)

---

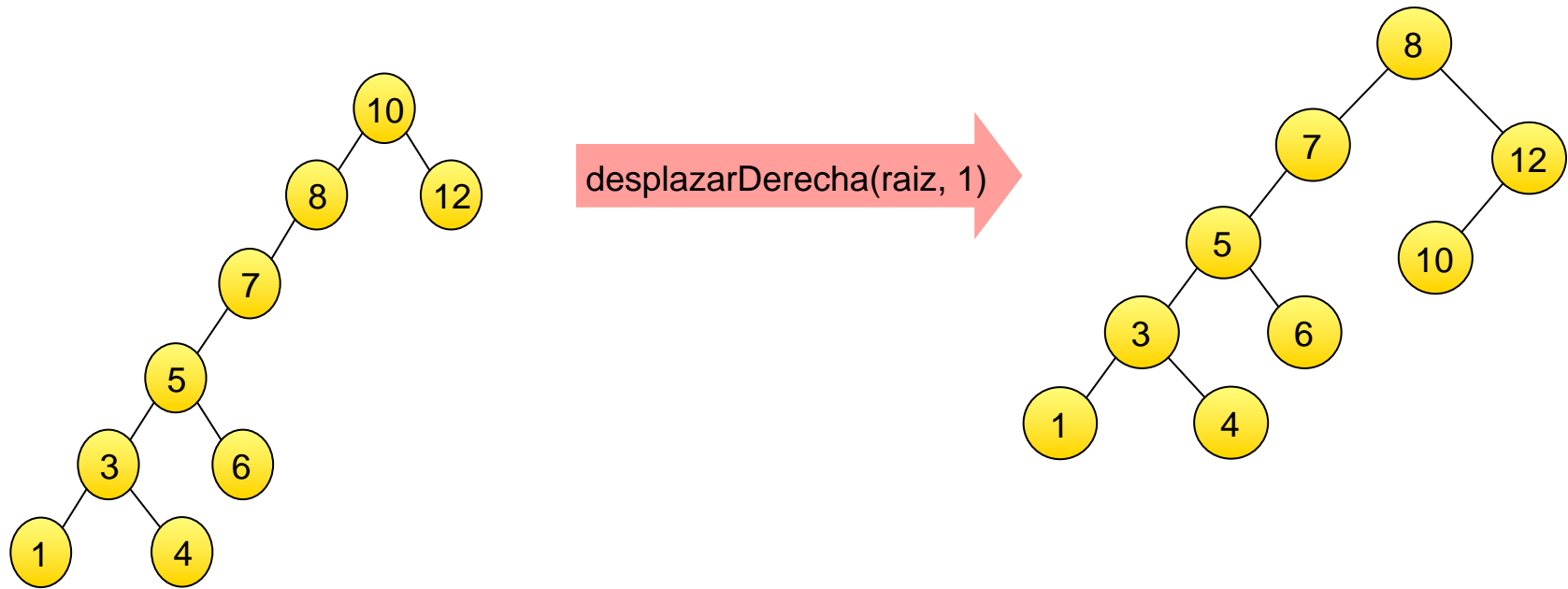


- 1) Insertar la raíz (es decir, el nodo 10) al subárbol derecho.
- 2) El mayor del subárbol izquierdo será la nueva raíz (en este caso, el nodo 8).

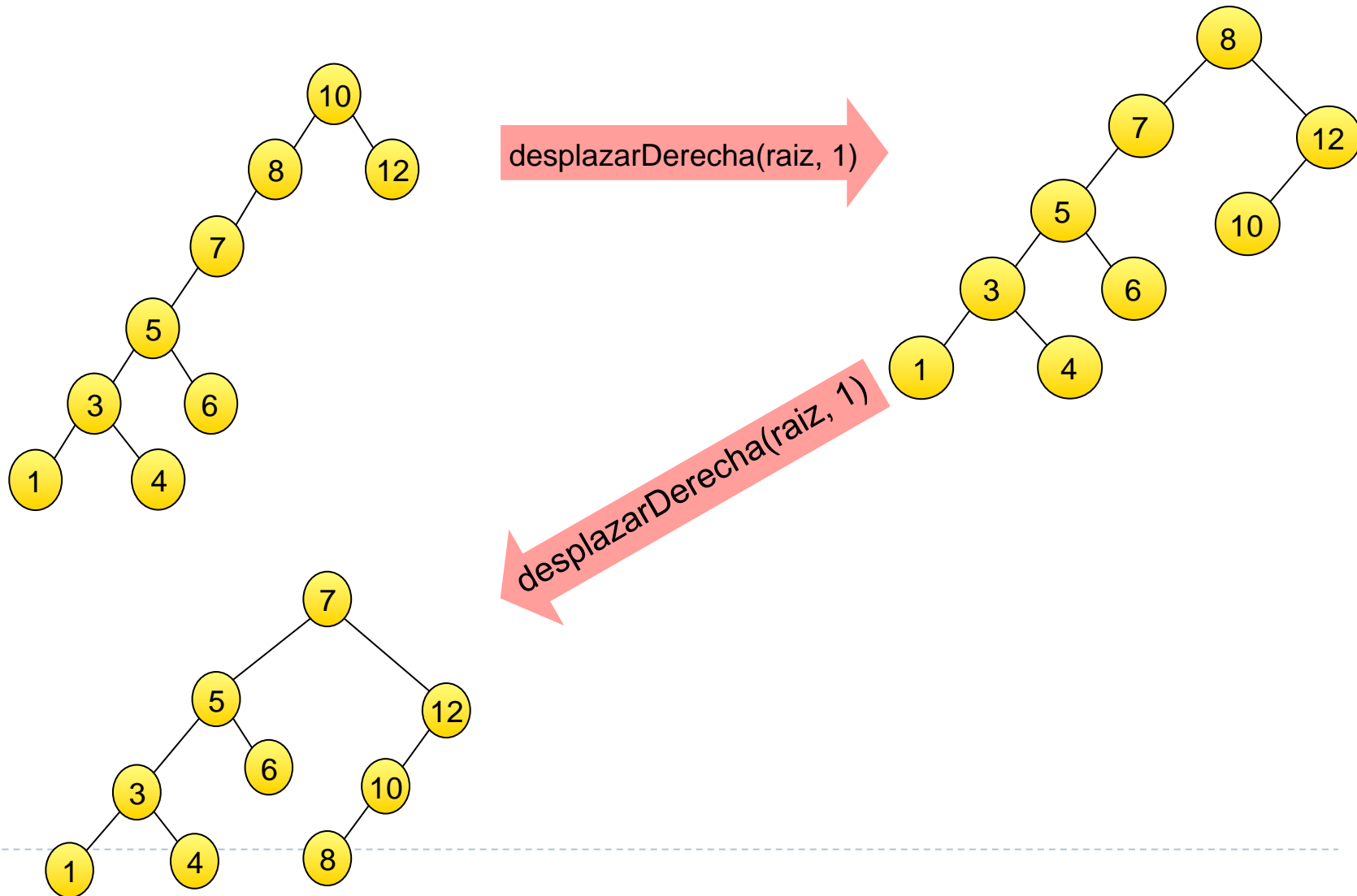


## Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (1 de 4)

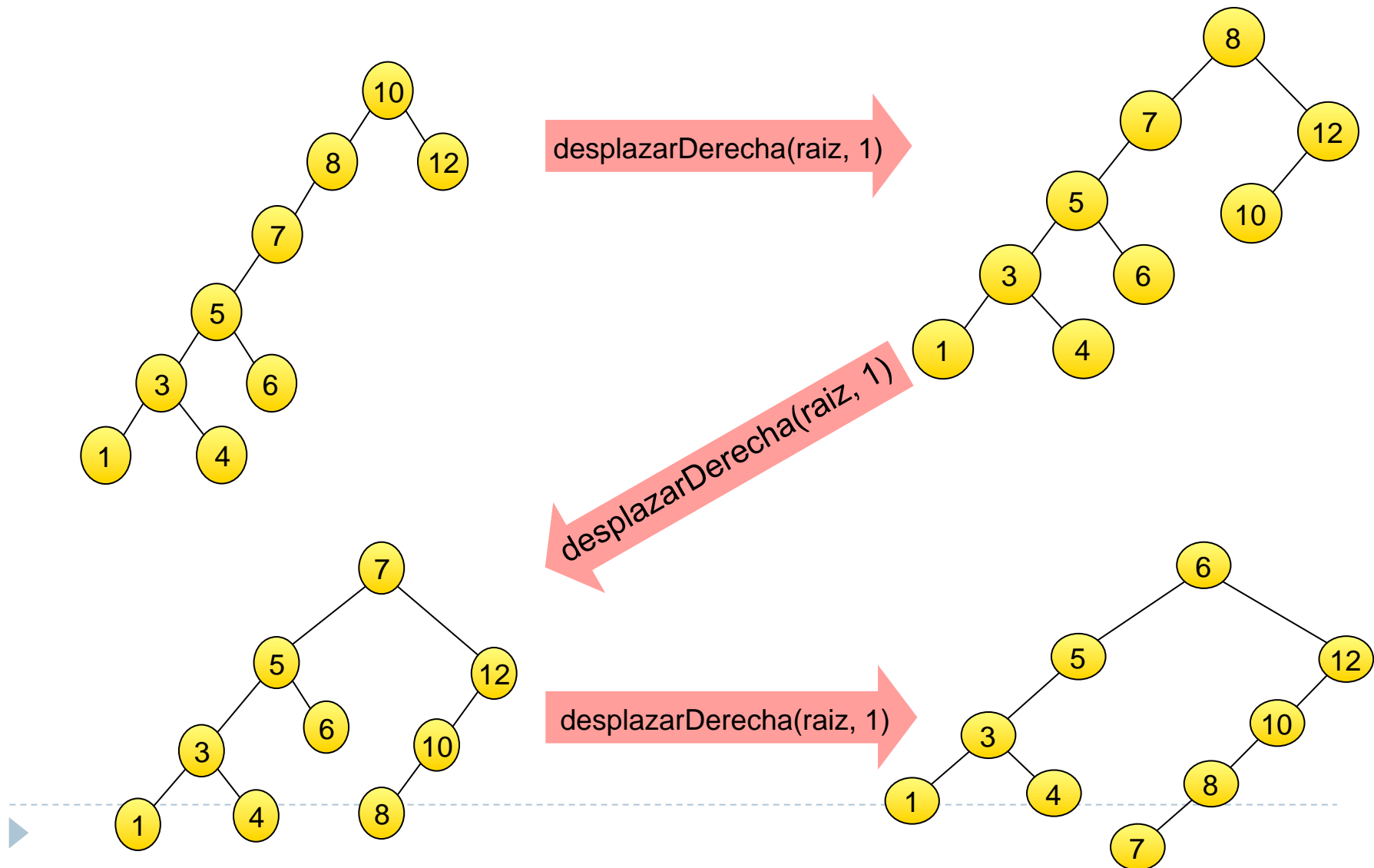
---



# Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (1 de 4)

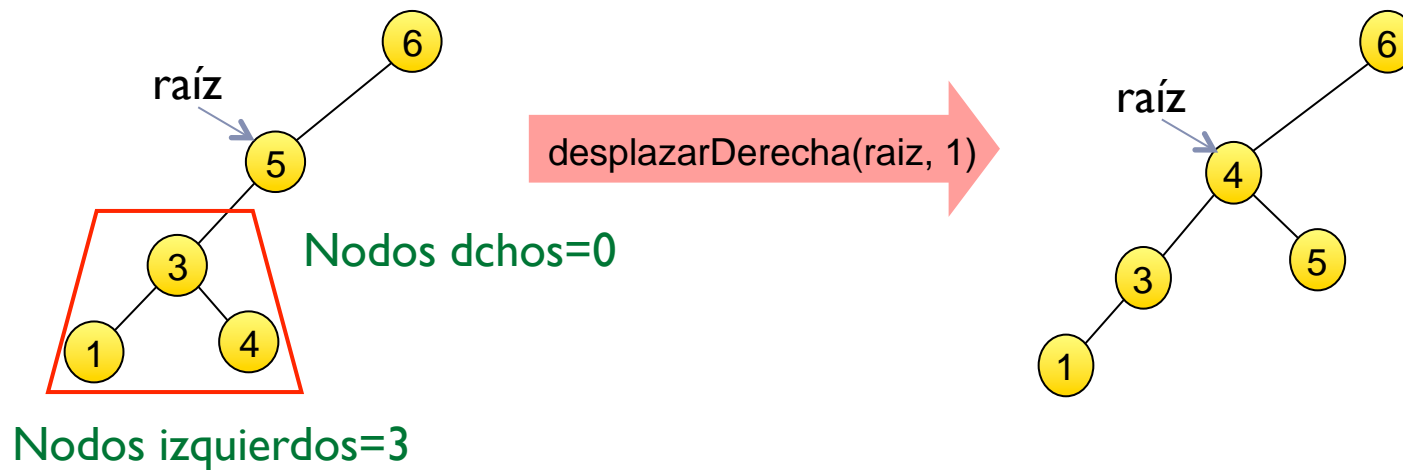


# Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (1 de 4)



## Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (2 de 4)

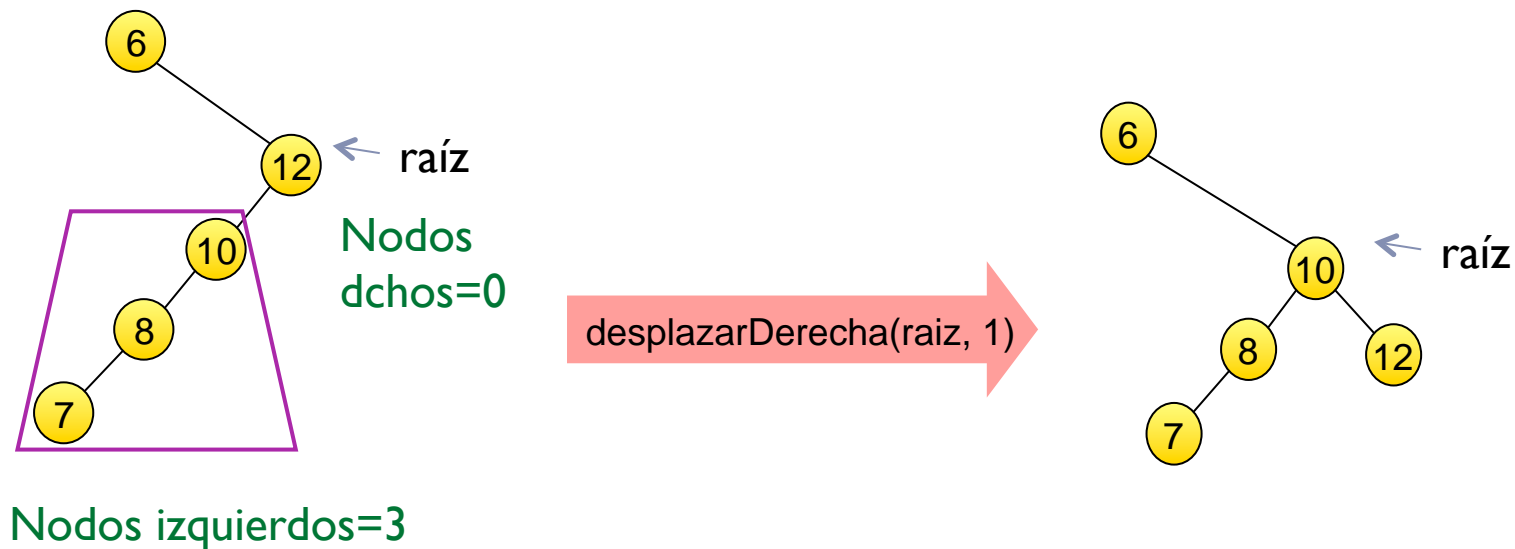
Continuamos: Aplicar equilibrio perfecto al subárbol izquierdo



3 nodos de diferencia → desplazar 3/2 veces a la derecha

## Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (3 de 4)

Continuamos: Aplicar equilibrio perfecto al subárbol derecho

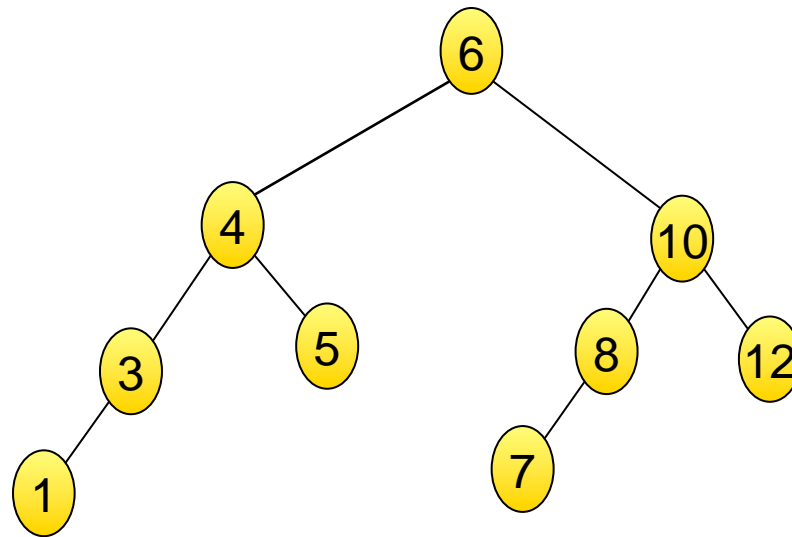


3 nodos de diferencia → desplazar 3/2 veces a la derecha

## Ejemplo 1 de equilibrado perfecto (4/4)

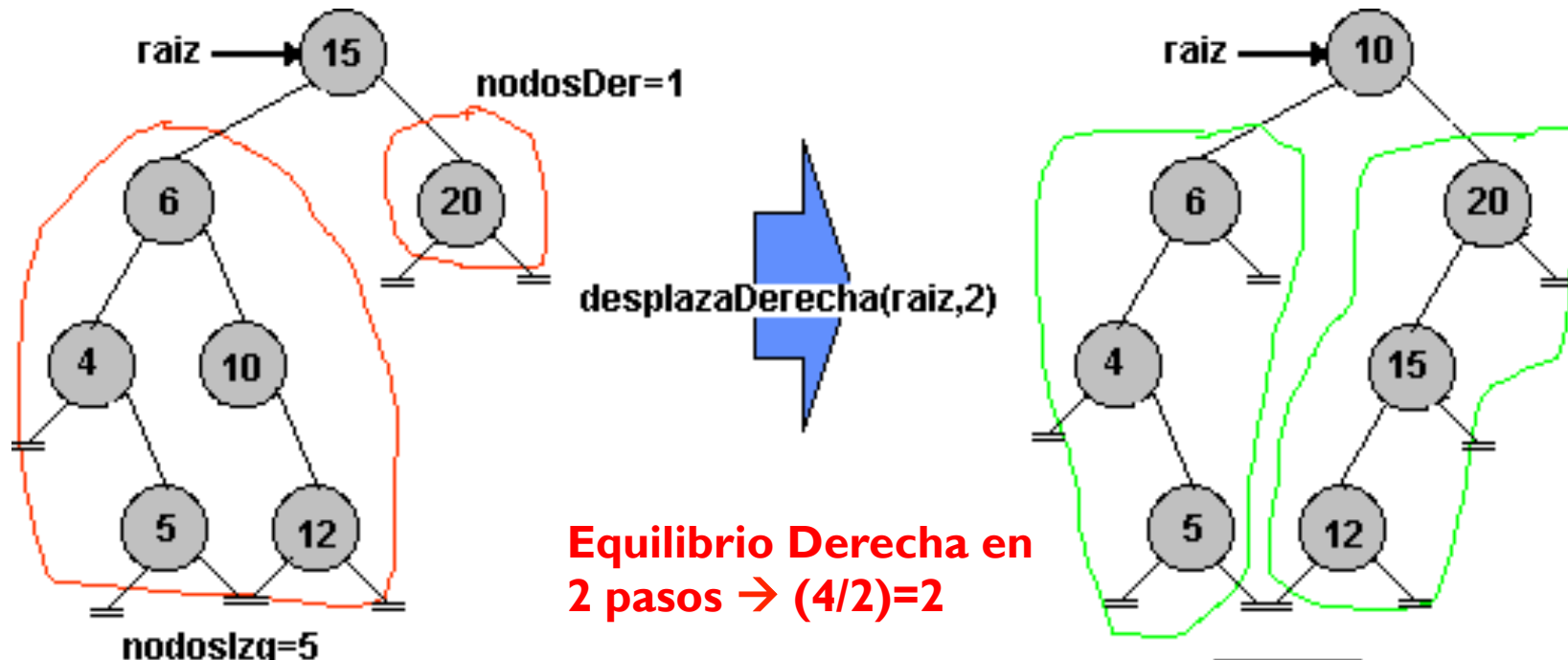
---

RESULTADO final



## Ejemplo 2 de equilibrado perfecto (1 de 4)

Primero se equilibra la raíz, pasando dos veces un nodo hacia la derecha ( $f_e = -4$ )

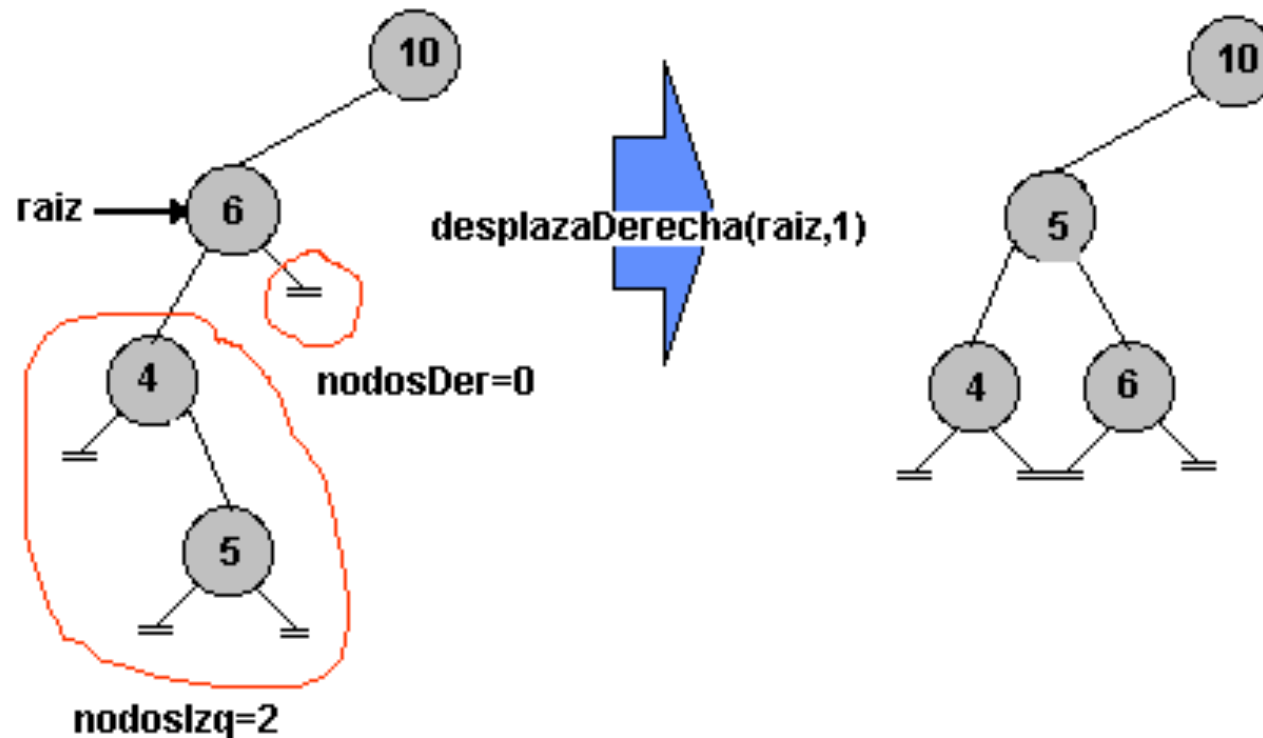


Continuamos: llamamos a equilibrar el subárbol izquierdo y luego el subárbol derecho



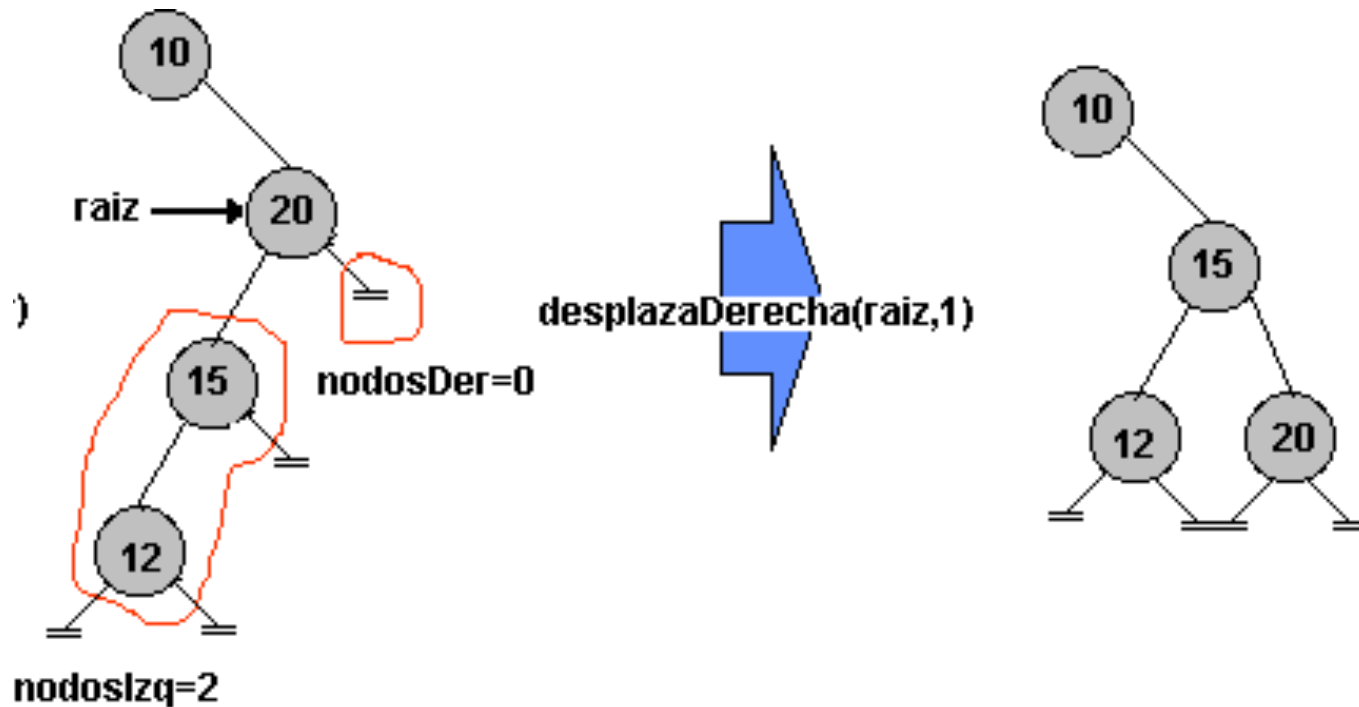
## Ejemplo 2 de equilibrado perfecto (2 de 4)

... equilibrio del subárbol izquierdo ( $fe = -2$ )



## Ejemplo 2 de equilibrado perfecto (3 de 4)

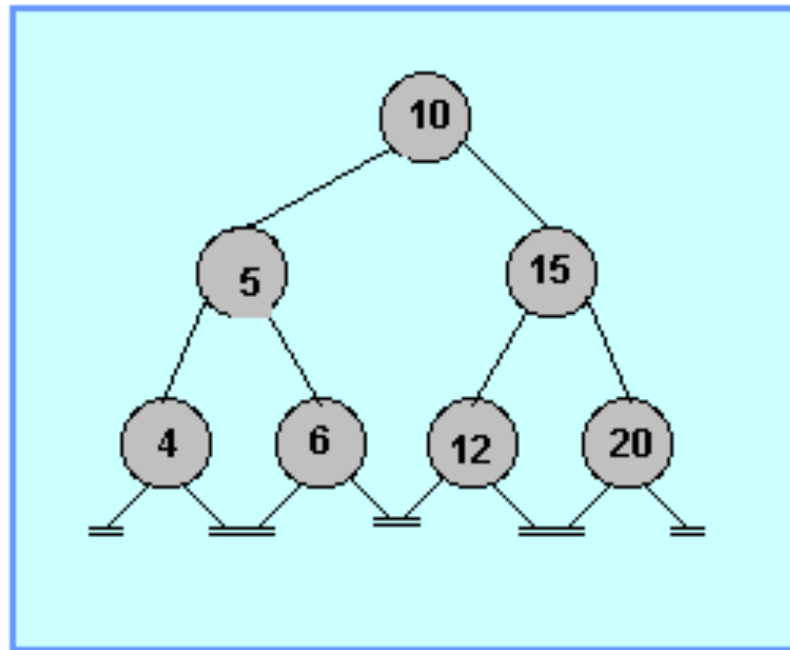
... equilibrio del subárbol derecho ( $f_e = -2$ )



## Ejemplo 2 de equilibrado perfecto (4 de 4)

---

RESULTADO: árbol perfectamente equilibrado



# Índice

---

- ▶ 4.3 Árboles Equilibrados

- ▶ **Árboles Binarios Equilibrados**

- ▶ Definición de Árbol Perfectamente Equilibrado

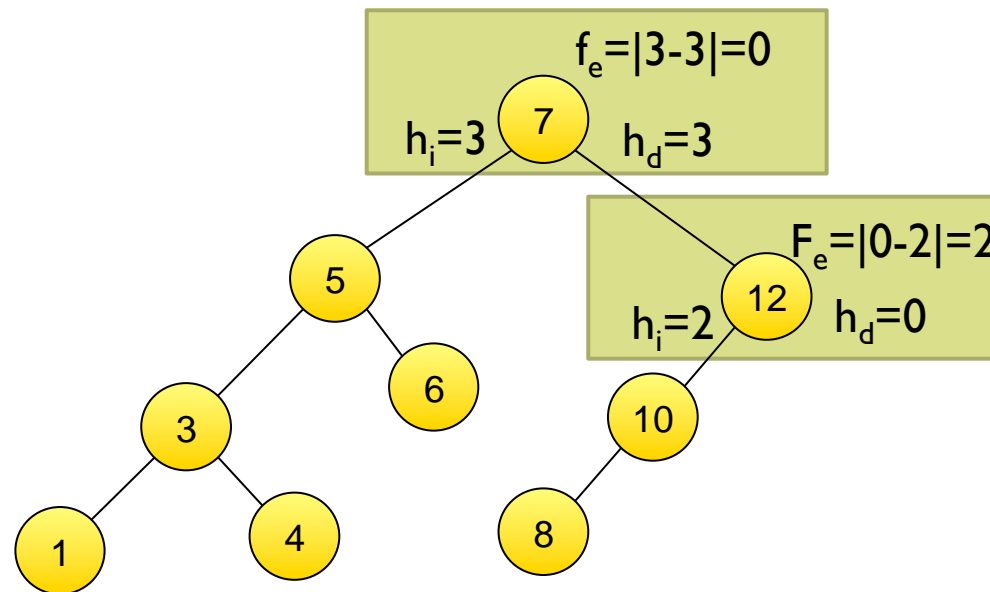
- ▶ **Árboles AVL: Definición de Árbol Equilibrado en Altura.**

- AVL: Árbol binario ideado por los matemáticos rusos Adelson-Velskii y Landis.

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

- Factor de equilibrio en altura de un nodo ( $f_e$ ) :  
Diferencia entre la altura (longitud del camino máximo a una hoja) por el lado derecho y por el lado izquierdo (o viceversa)

$$f_e = |h_d - h_i|$$

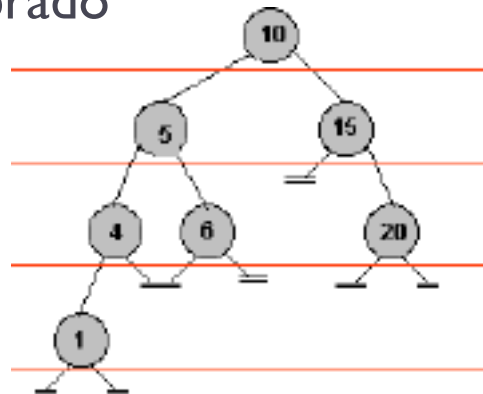


# ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

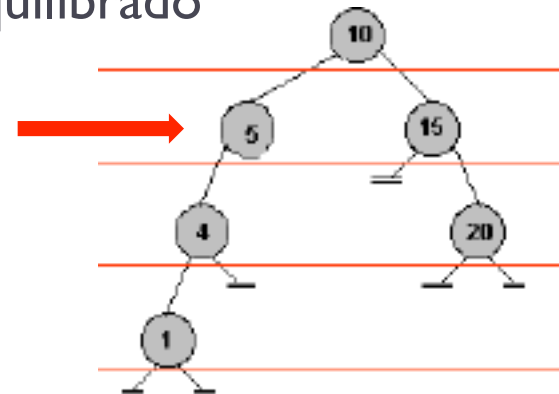
- ▶ **ABB equilibrado en altura**

- ▶ Para cada uno de sus nodos, las alturas de sus subárboles izquierdo y derecho difieren como máximo en 1 unidad

- ▶ **ABB equilibrado**



- ▶ **ABB no equilibrado**



- ▶ Esto es, el factor de equilibrio (en altura) de todos sus nodos es menor o igual que 1.

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

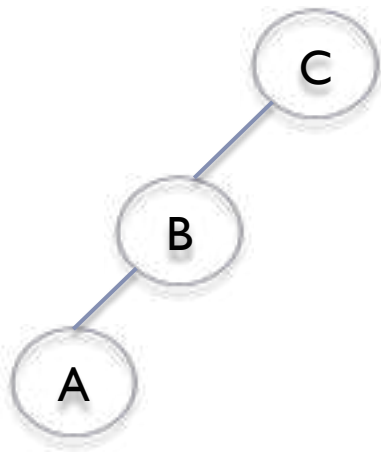
---

- ▶ Idea: desplazar nodos de la rama más larga a la rama más corta.
- ▶ Importante: Equilibrado se hace en orden ascendiente, es decir, siempre desde abajo, sólo en el camino desde el nodo insertado o borrado hacia la raíz.
- ▶ Nota que el árbol resultante debe seguir siendo ABB (y por tanto, tener el mismo recorrido in order).
- ▶ Rotaciones:
  - ▶ Rotación simple a la derecha
  - ▶ Rotación simple a la izquierda
  - ▶ Rotación doble (izquierda-derecha)
  - ▶ Rotación doble (derecha-izquierda)

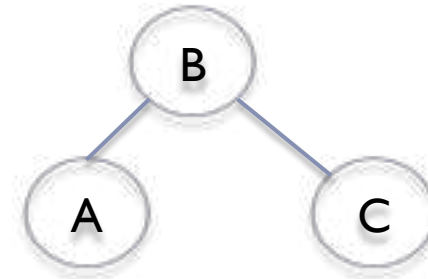
## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

- ▶ Rotación simple a la derecha:



InOrder: ABC



InOrder: ABC



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

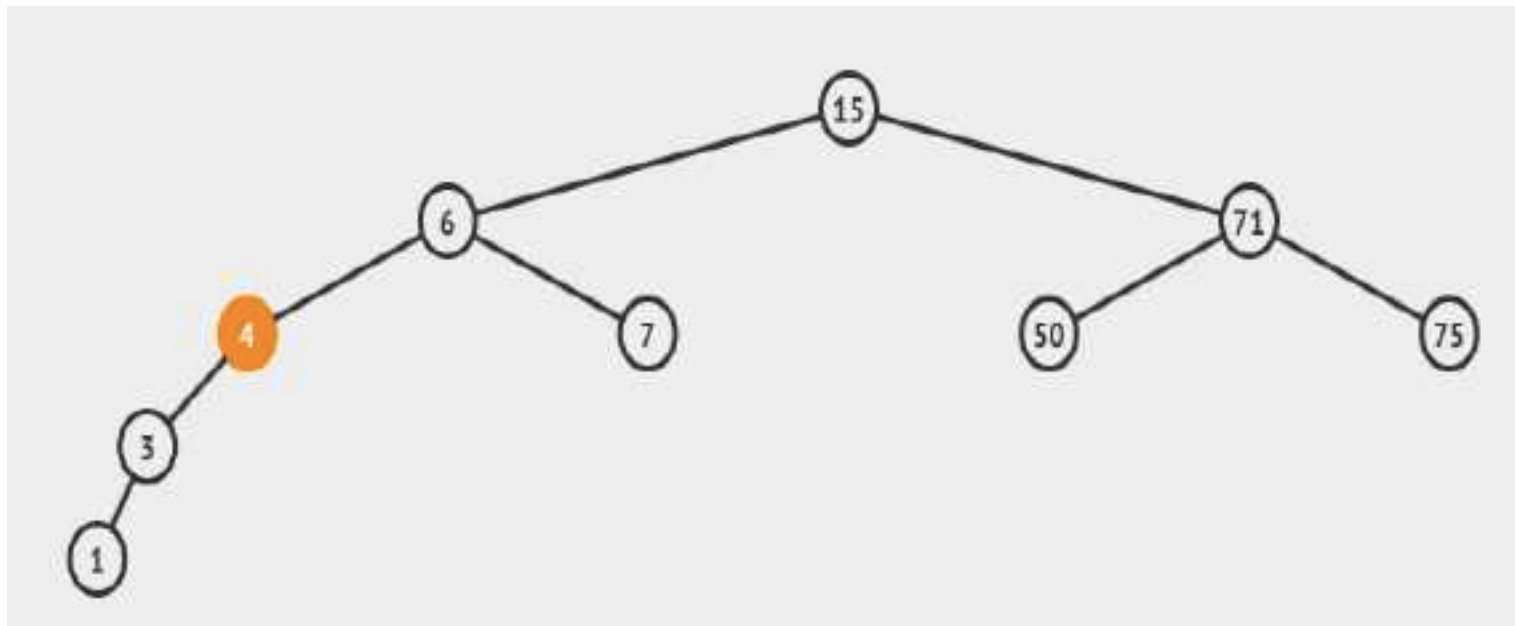
---

- ▶ Ejemplo rotación simple a la derecha:



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

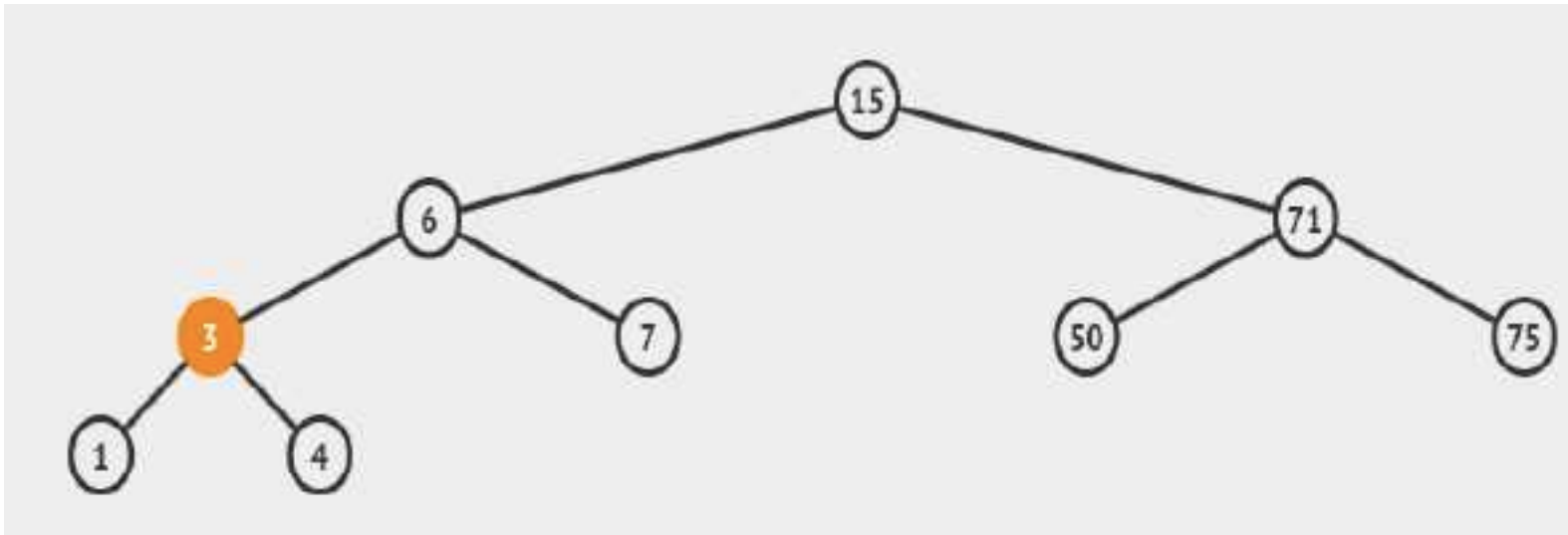
- ▶ Ejemplo rotación simple a la derecha:



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

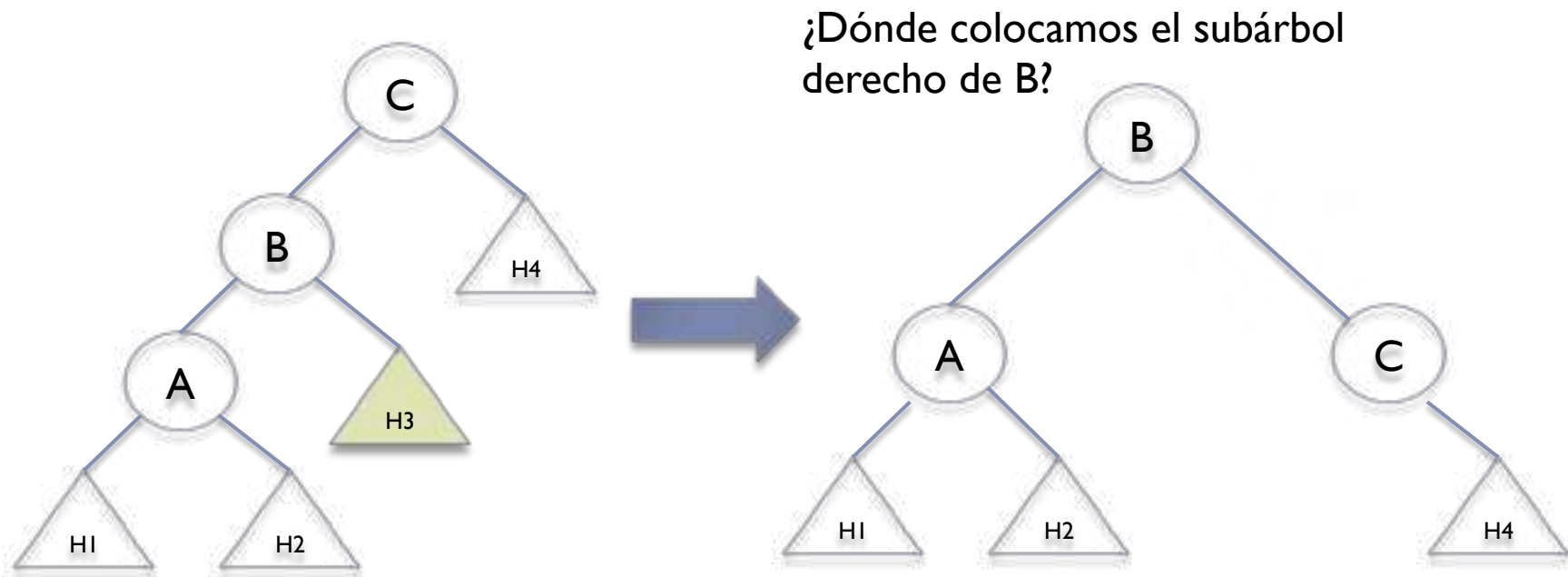
- ▶ Ejemplo rotación simple a la derecha:



<http://visualgo.net/bst.html>

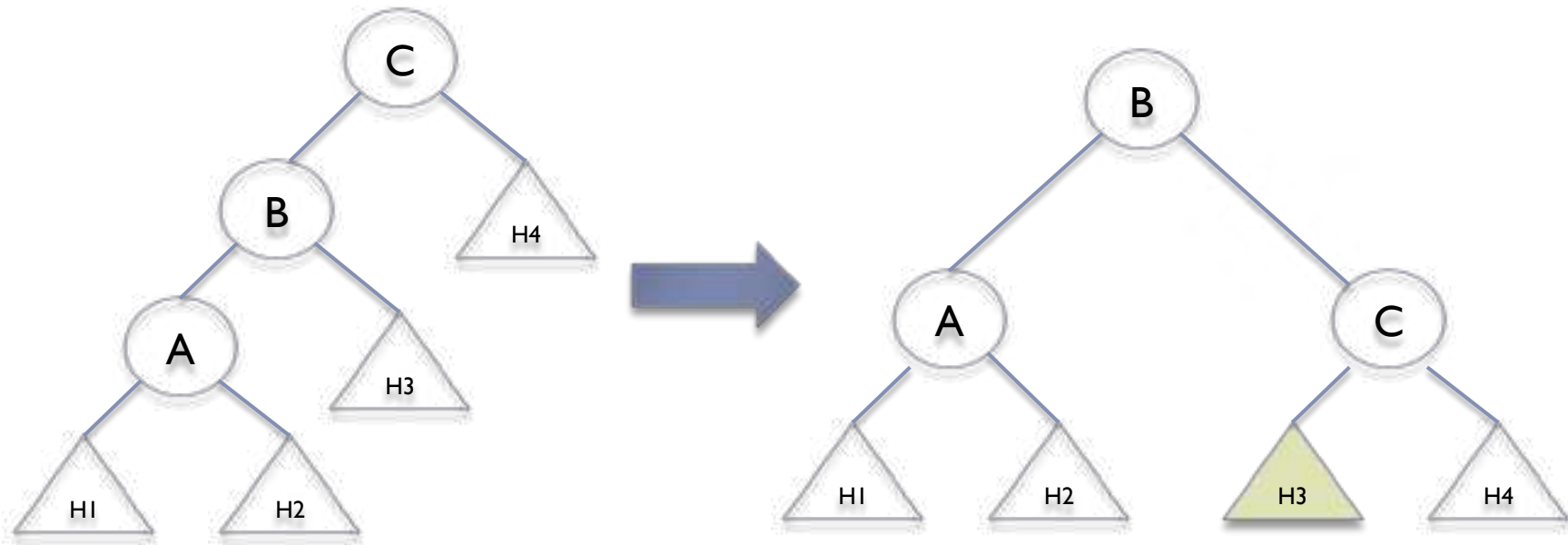
## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Rotación simple a la derecha:



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

- ▶ Rotación simple a la derecha:



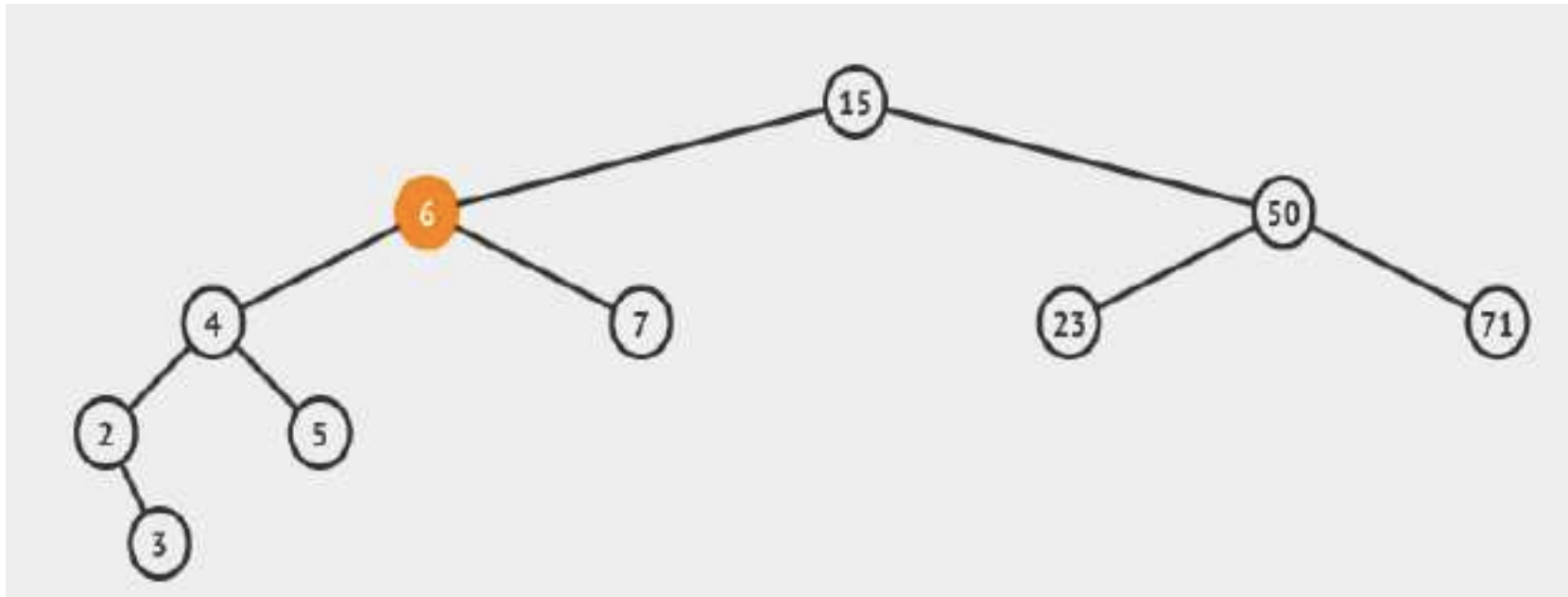
InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

=

InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

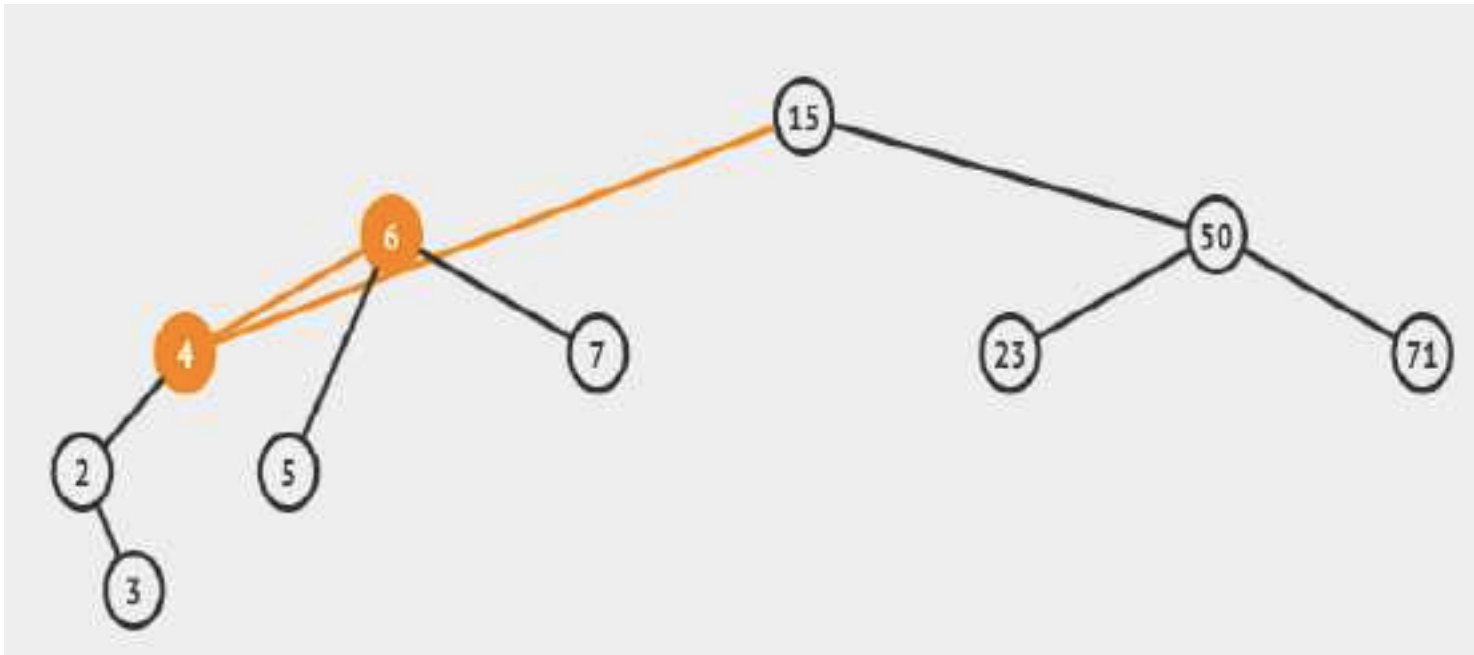
- ▶ Ejemplo (con subárboles) rotación simple a la derecha:



- El primer nodo desequilibrado es el 6.
- Podemos aplicar una rotación simple a la derecha: **mover 4 como raíz del subárbol, y 6 como su hijo derecho.**
- Nota que el nodo 4, tiene un subárbol derecho, ¿qué hacemos con el nodo 5?

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

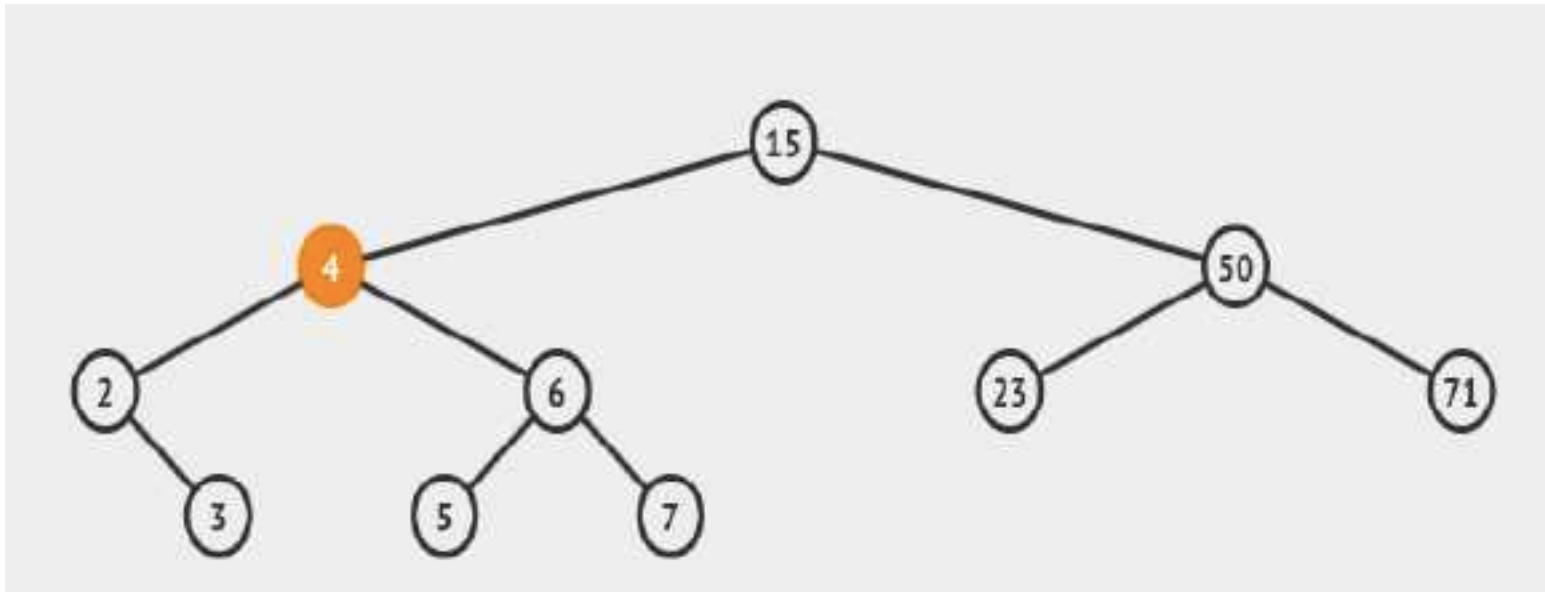
- ▶ Ejemplo (con subárboles) rotación simple a la derecha:



- El nodo 6 se rota como hijo derecho de 4, y éste pasa a ser la nueva raíz del subárbol.
- **El antiguo subárbol derecho de 4, es decir el 5, tiene que pasar ahora a ser subárbol izquierdo de 6.**

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

- ▶ Ejemplo (con subárboles) rotación simple a la derecha:

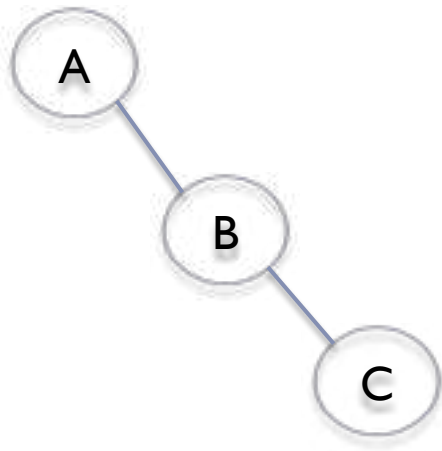




## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

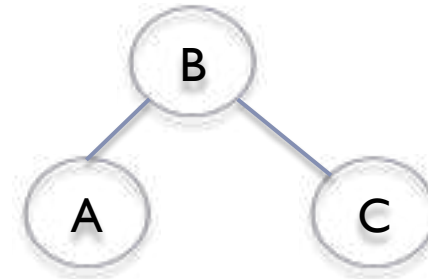
- ▶ Rotación simple a la izquierda:



InOrder: ABC



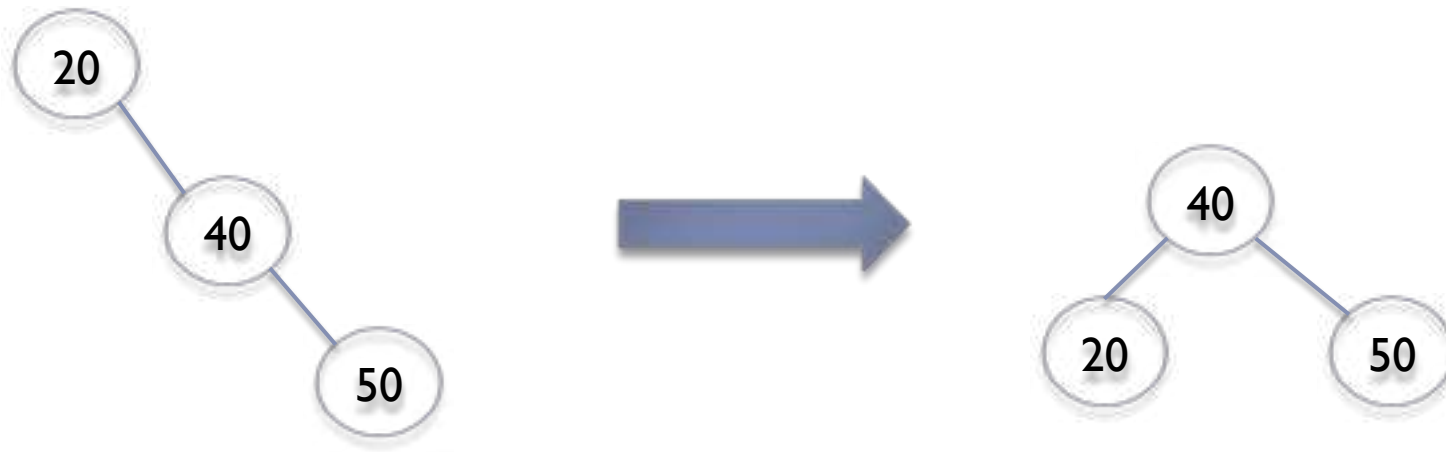
=



InOrder: ABC

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

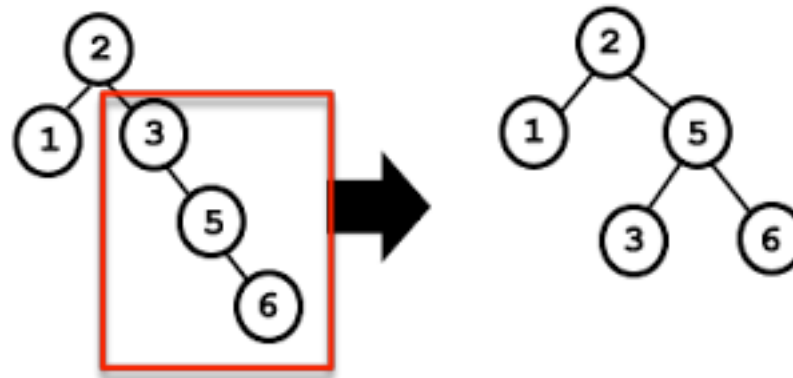
- Ejemplo Rotación simple a la izquierda:



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

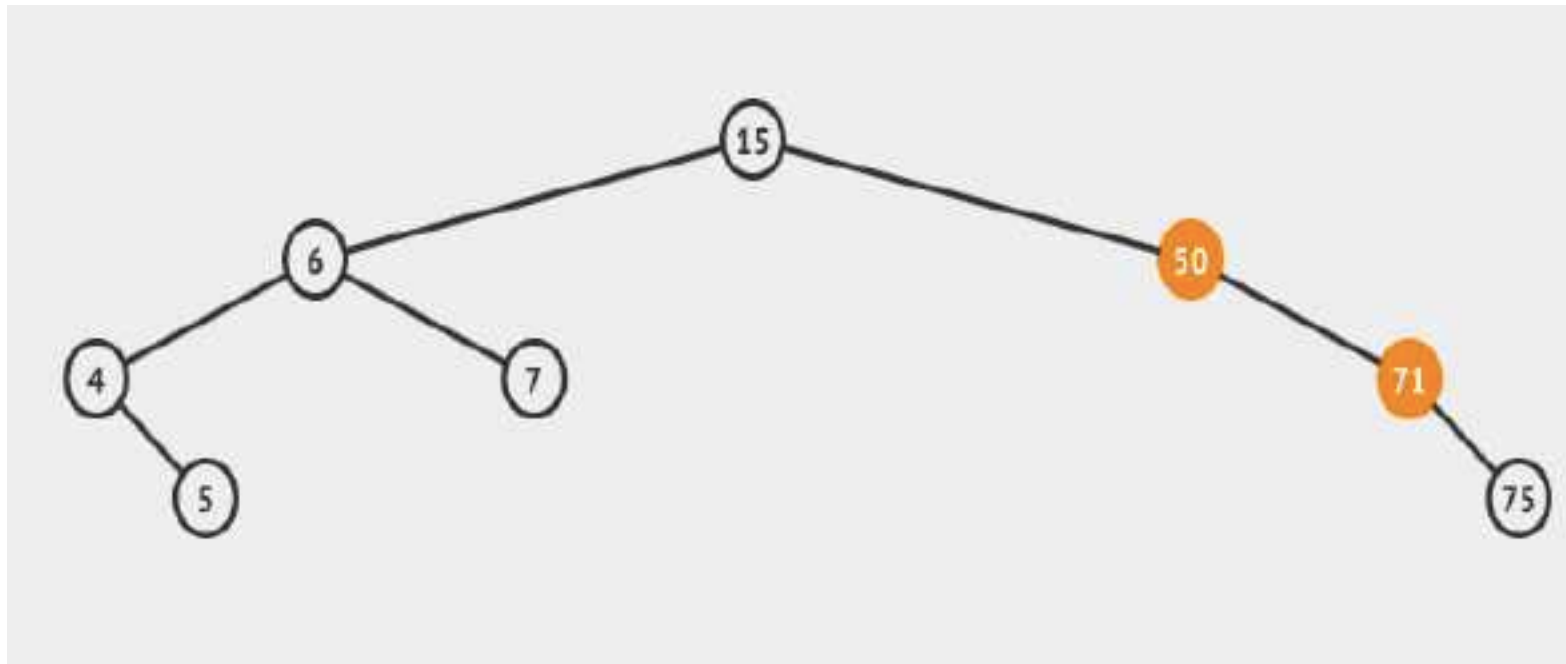
---

- ▶ Ejemplo rotación simple a la izquierda:



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

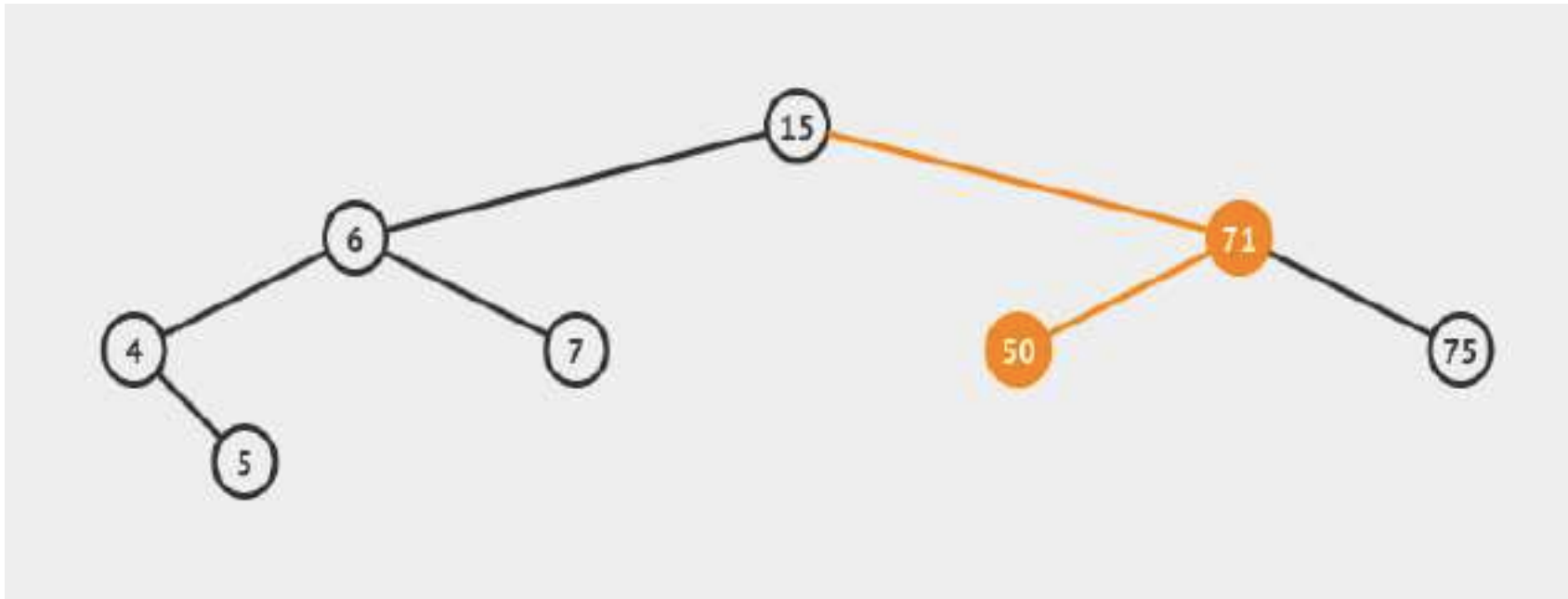
- Ejemplo rotación simple a la izquierda:



<http://visualgo.net/bst.html>

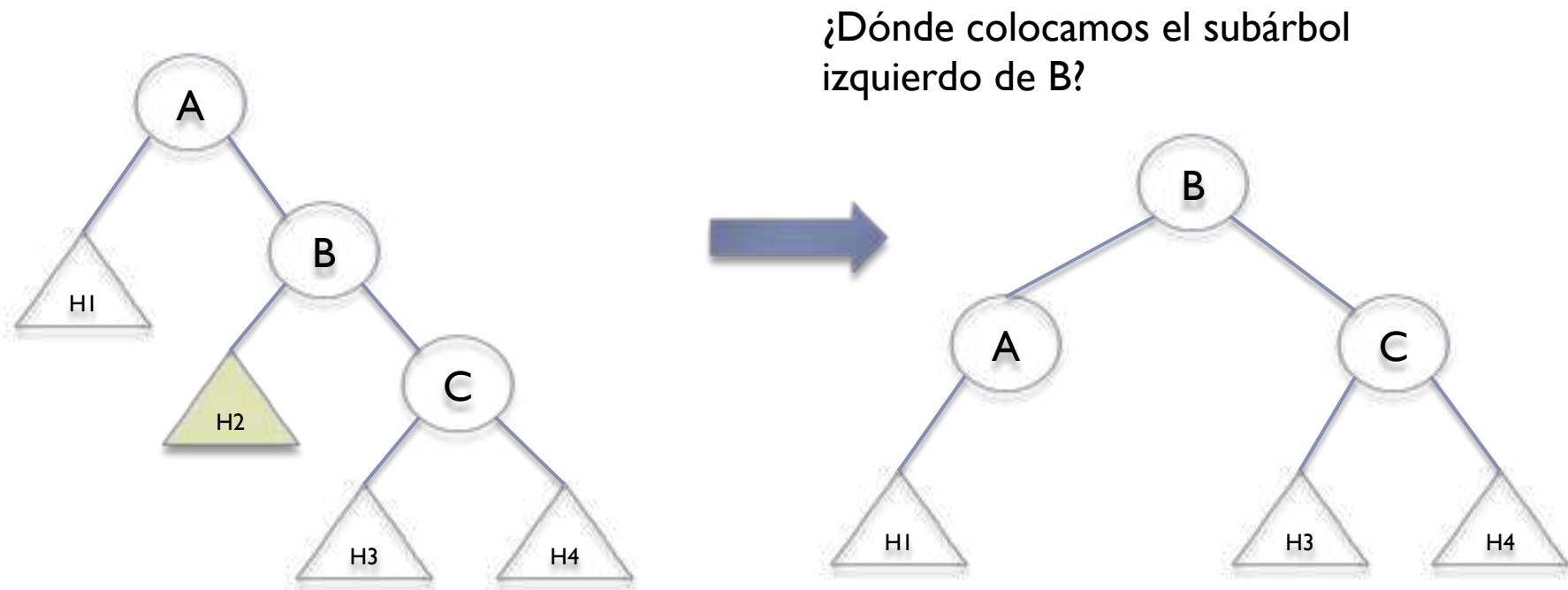
## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

- ▶ Ejemplo rotación simple a la izquierda:



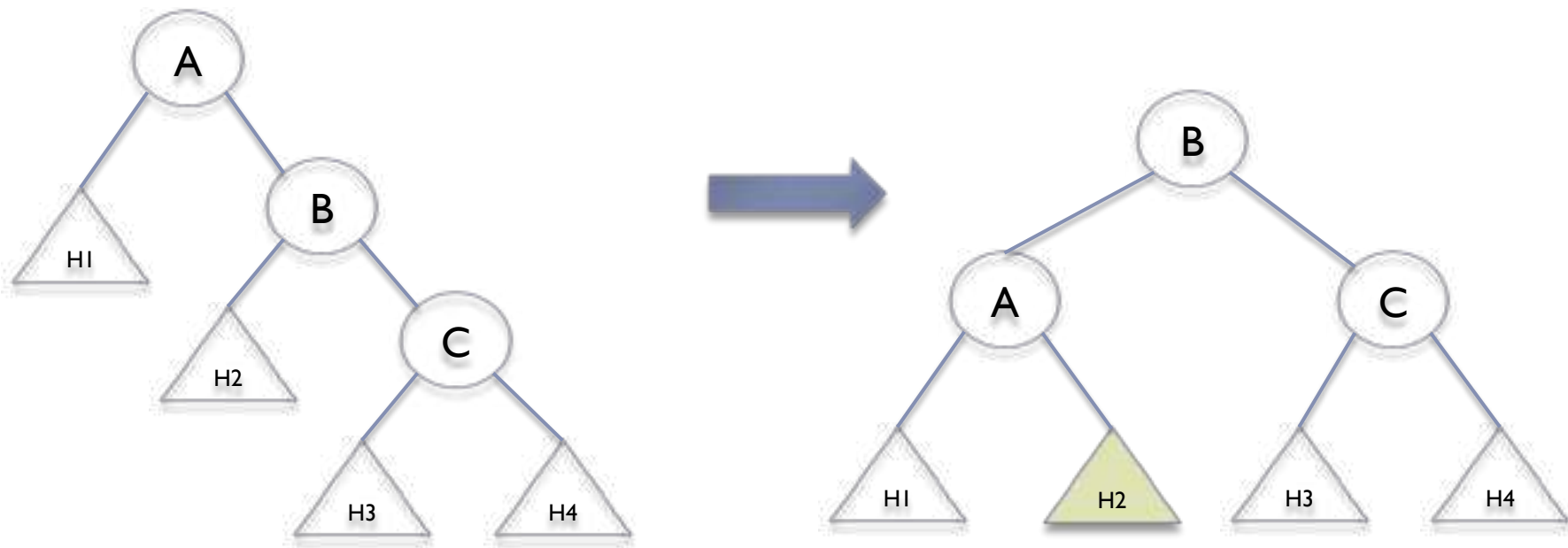
## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Rotación simple a la izquierda:



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

- ▶ Rotación simple a la izquierda:



InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

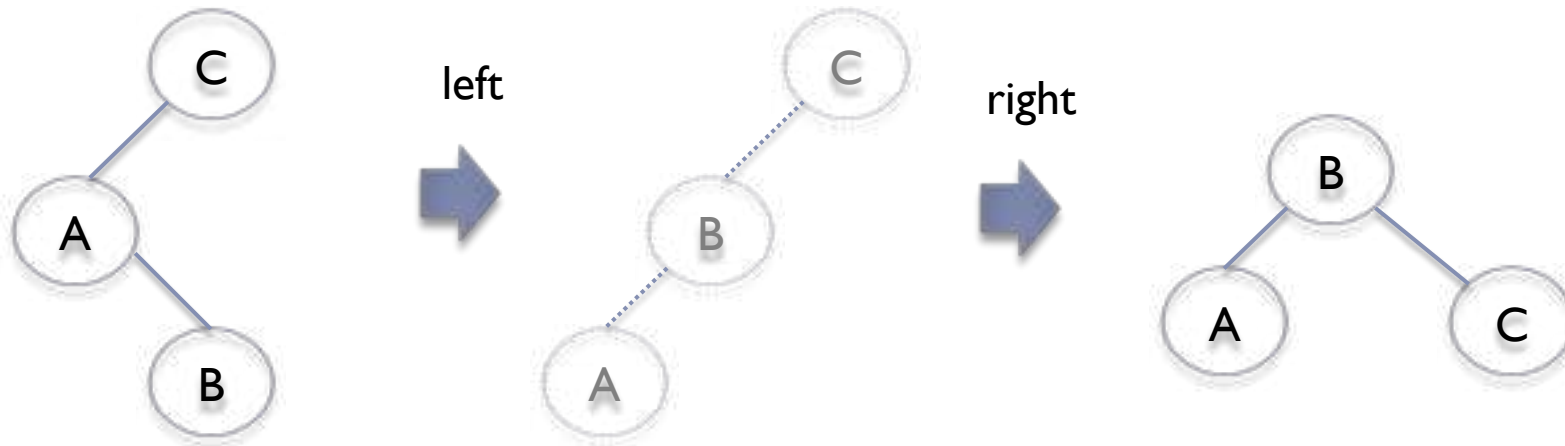
=

InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

### ► Rotación Doble (left-right) :



InOrder: ABC

=

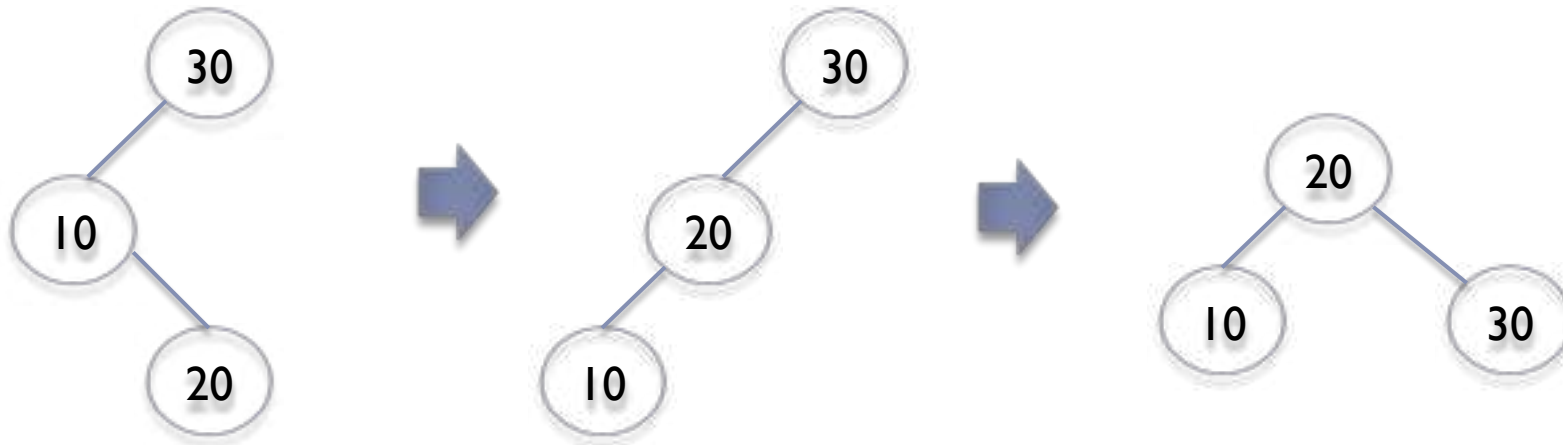
InOrder: ABC



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

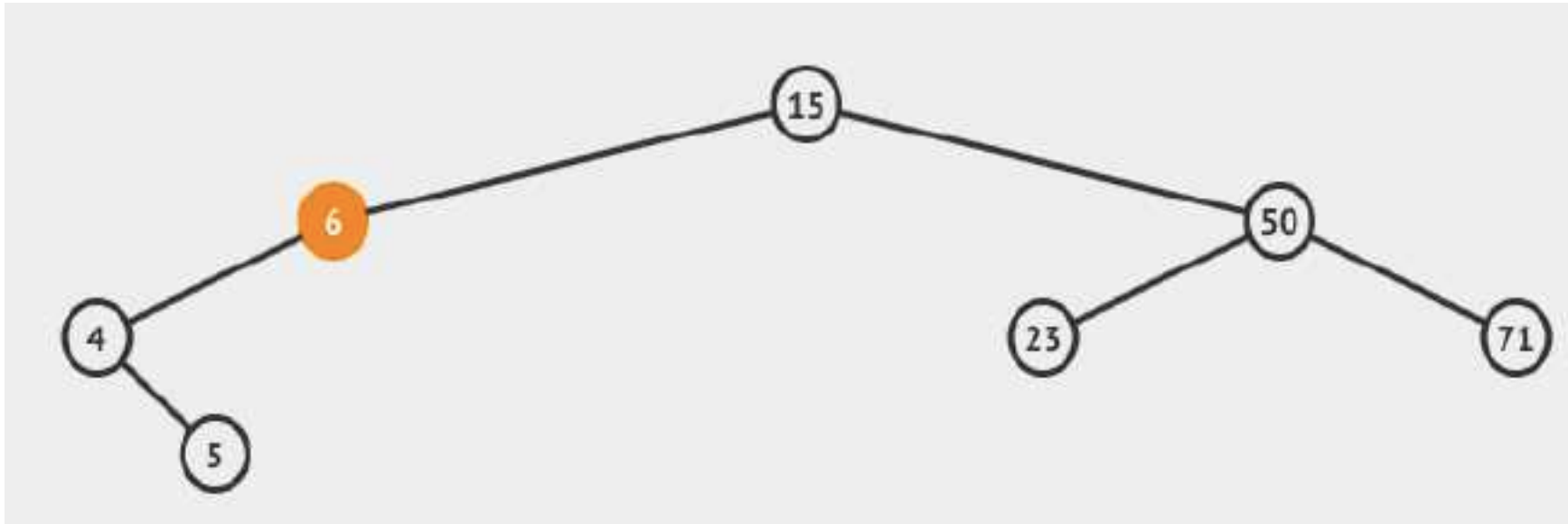
---

### ► Ejemplo Rotación Doble (left-right):



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

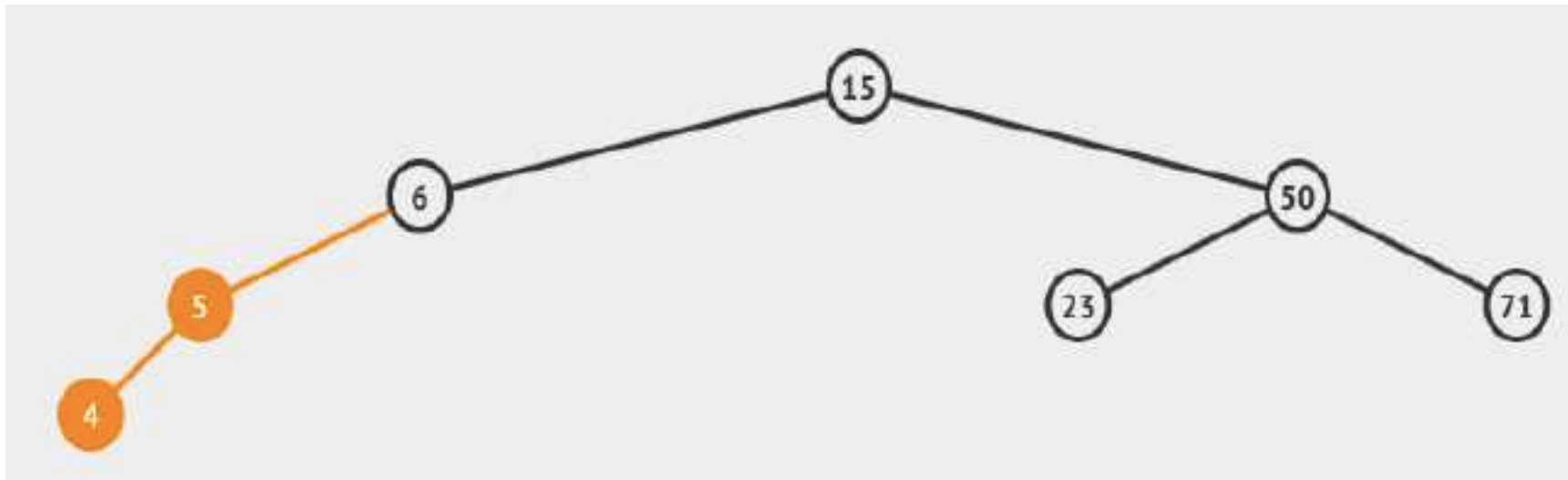
### ► Ejemplo Rotación doble (left-right):



- El nodo desequilibrado es el 6. Para equilibrar zig-zag izquierdo-derecho, tenemos que hacer dos rotaciones:
- Primera rotación a la izquierda: subimos el nodo 5 como hijo izquierdo de 6, y 4 pasa a ser hijo izquierdo de 5.
- Segunda rotación a la derecha: giramos el nodo 6 a la derecha y el nodo 5 pasa a ser la nueva raíz del subárbol.

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Ejemplo Rotación doble (left-right):



- El nodo desequilibrado es el 6. Para equilibrar zig-zag izquierdo-derecho, tenemos que hacer dos rotaciones:
- **Primera rotación a la izquierda: subimos el nodo 5 como hijo izquierdo de 6, y 4 pasa a ser hijo izquierdo de 5.**
- Segunda rotación a la derecha: giramos el nodo 6 a la derecha y el nodo 5 pasa a ser la nueva raíz del subárbol.

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

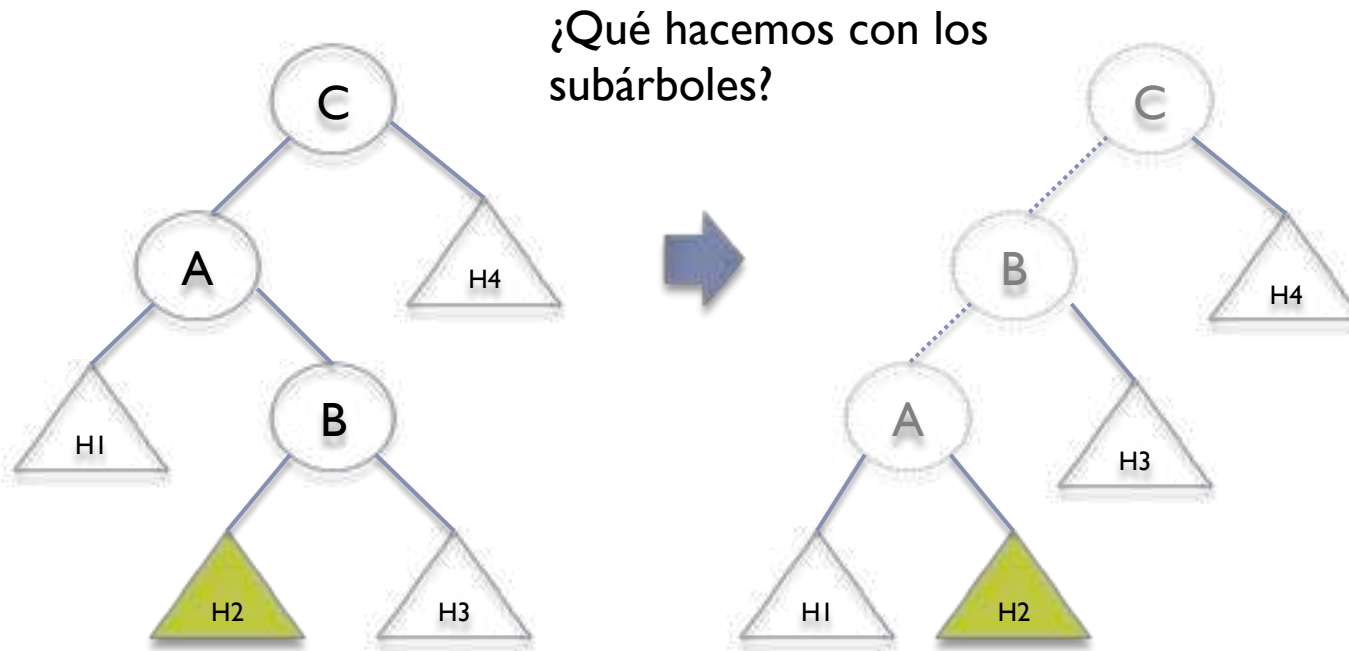
### ► Ejemplo Rotación doble (left-right):



- El nodo desequilibrado es el 6. Para equilibrar zig-zag izquierdo-derecho, tenemos que hacer dos rotaciones:
- Primera rotación a la izquierda: subimos el nodo 5 como hijo izquierdo de 6, y 4 pasa a ser hijo izquierdo de 5.
- **Segunda rotación a la derecha: giramos el nodo 6 a la derecha y el nodo 5 pasa a ser la nueva raíz del subárbol.**

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

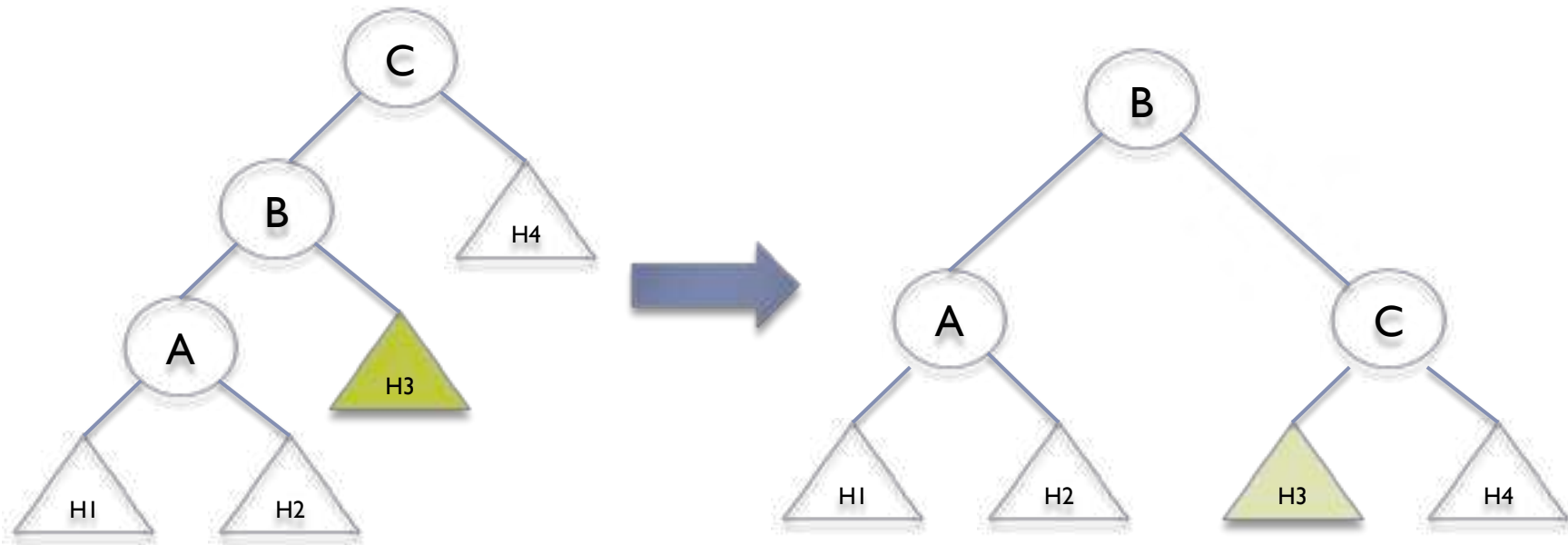
### ► Rotación Doble (left-right) :



Primer paso: rotamos a la izquierda el nodo B (como hijo izquierdo de C)

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

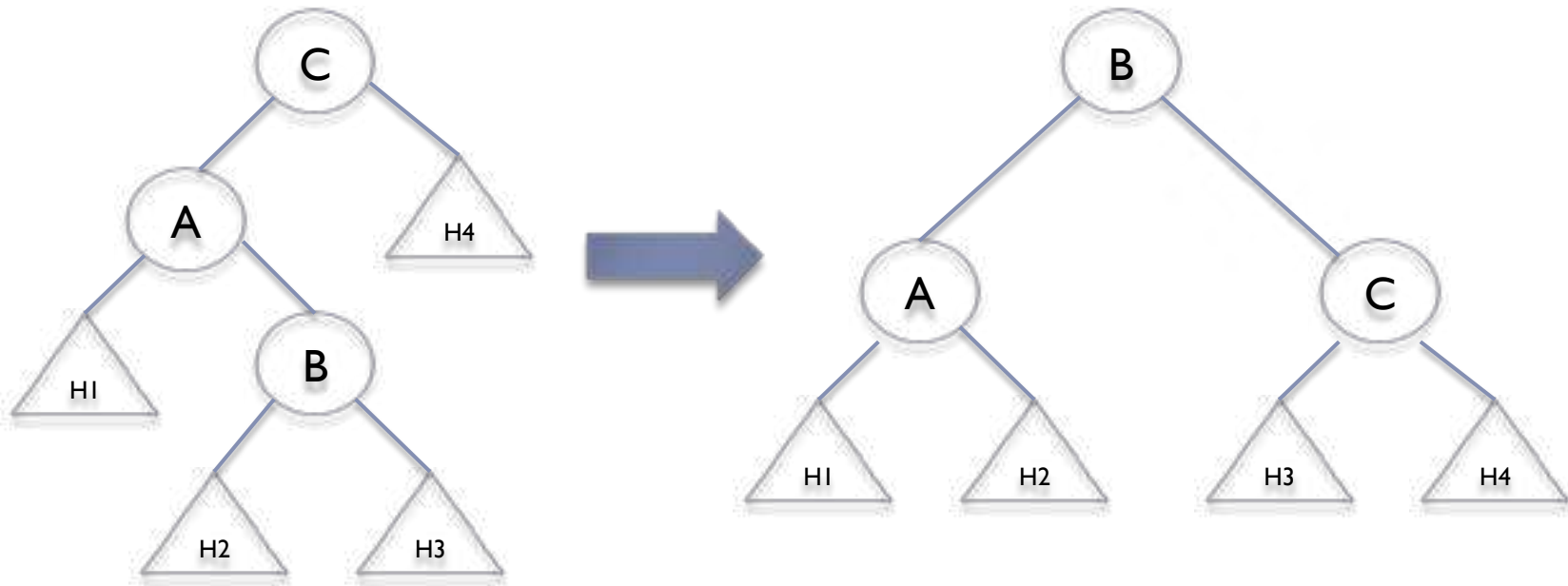
### ► Rotación doble (left-right) :



Segunda rotación: movemos el  
nodo C como hijo derecho de B

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Rotación doble (left-right):



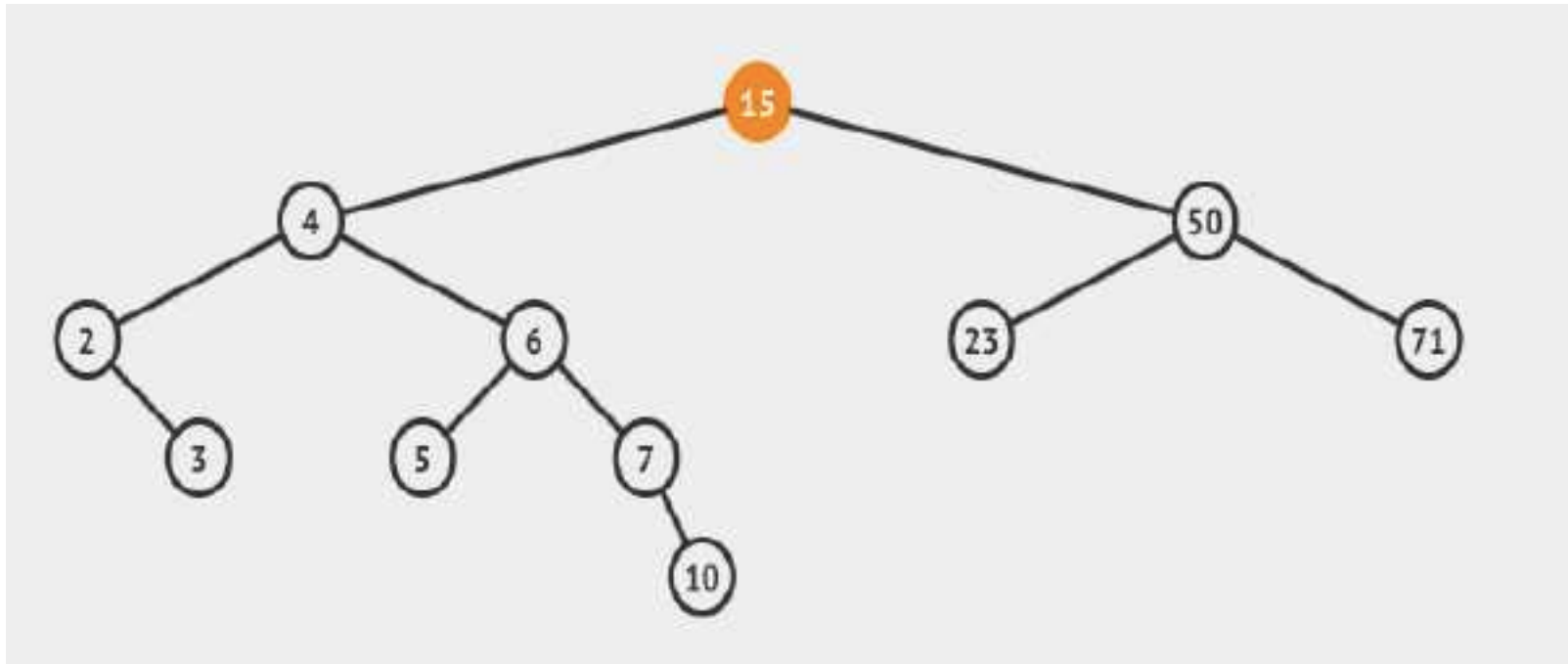
InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

=

InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Ejemplo (con subárboles) Rotación doble (left-right):

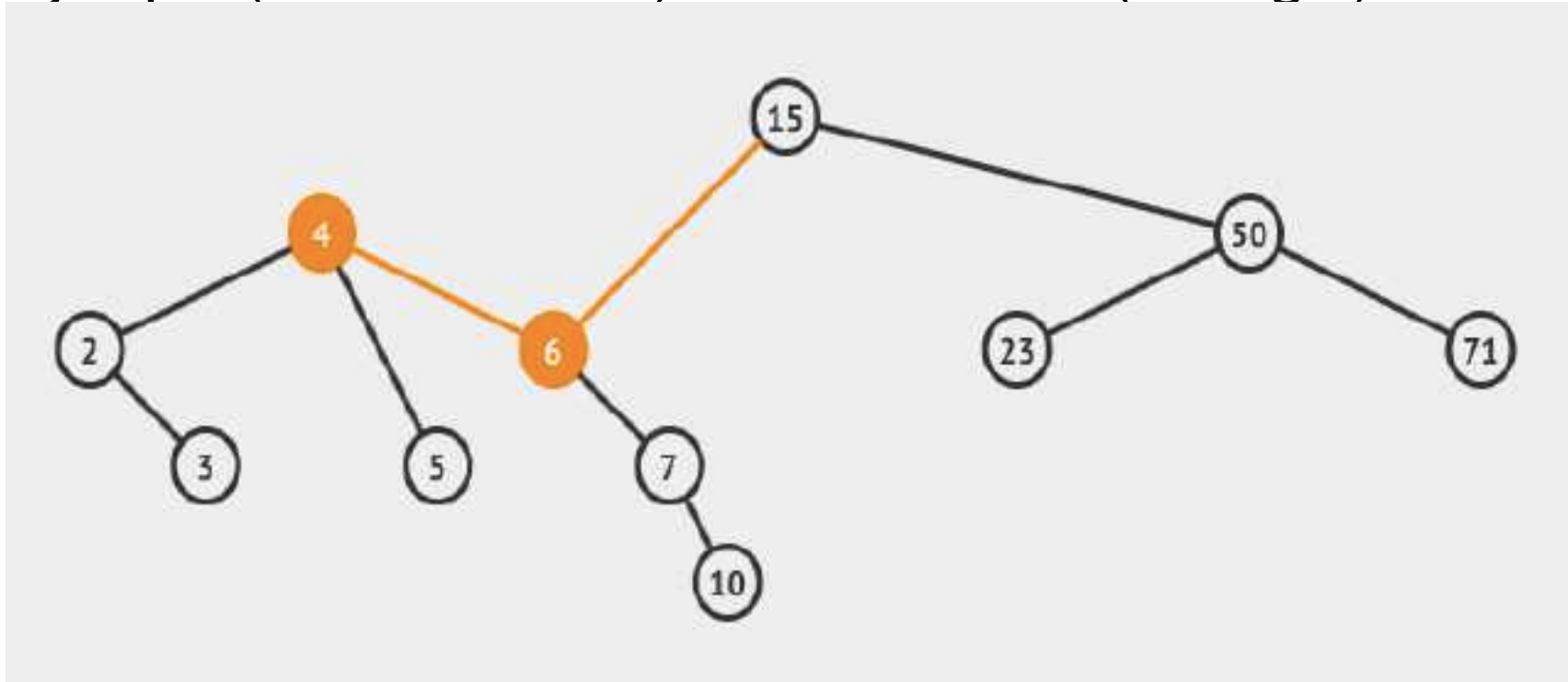


- El nodo 15 está desequilibrado ( $fe=2$ ). Podemos aplicar una rotación left-right.
- La primera rotación es mover el 6 como hijo izquierdo de 15.
- La segunda rotación será rotar el 15 como hijo derecho de 6 (y que éste sea la nueva raíz)



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

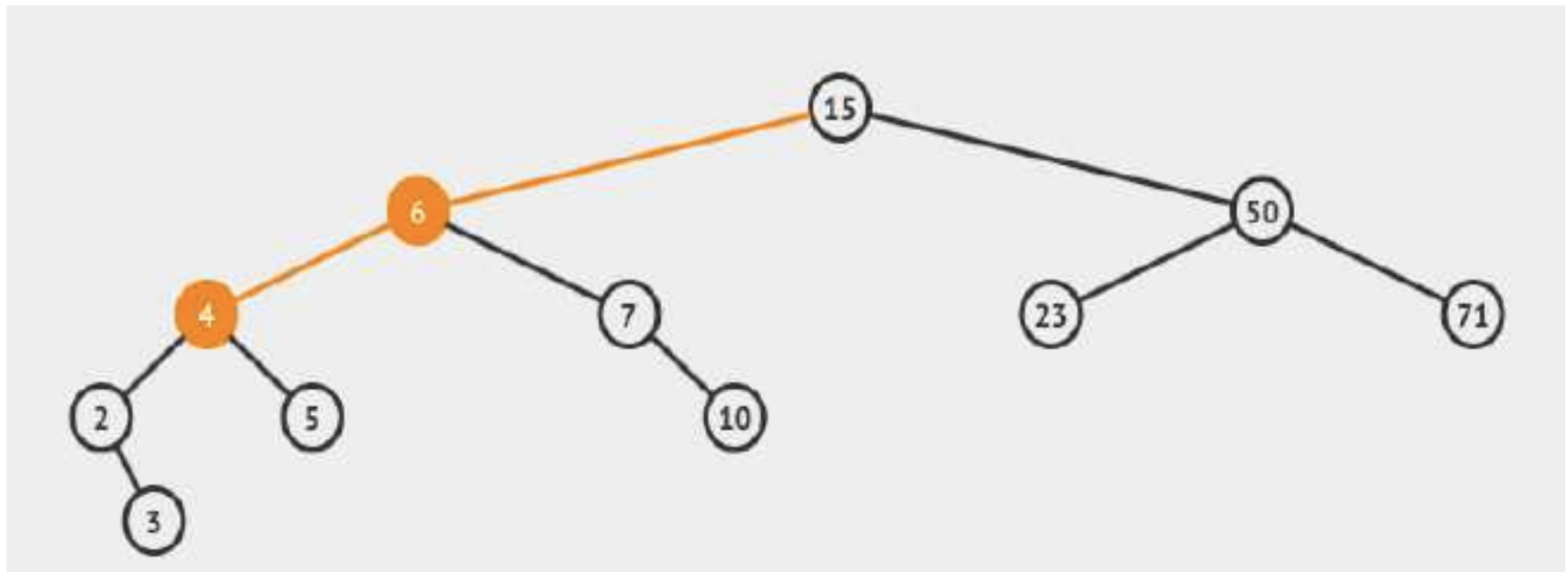
- ▶ Ejemplo (con subárboles), Rotación doble (left-right):



- El nodo 15 está desequilibrado ( $fe=2$ ). Podemos aplicar una rotación left-right.
- **La primera rotación es mover el 6 como hijo izquierdo de 15**
- La segunda rotación será rotar el 15 como hijo derecho de 6 (y que éste sea la nueva raíz)

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

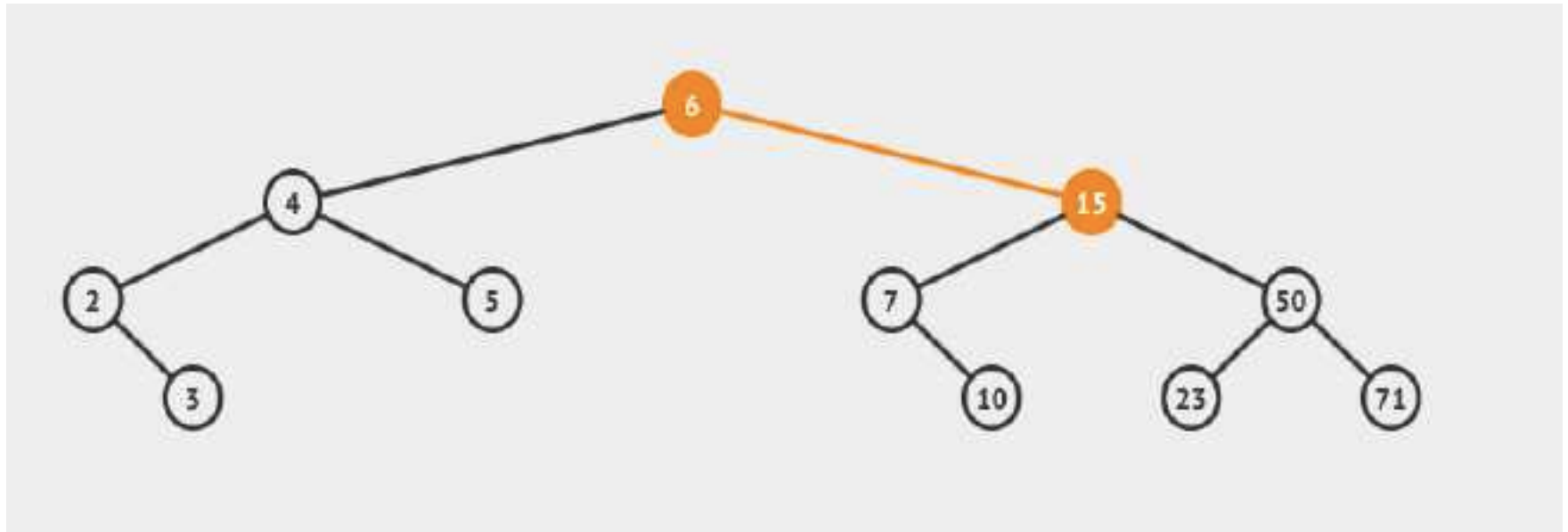
### ► Ejemplo (con subárboles) Rotación doble (left-right):



- El nodo 15 está desequilibrado ( $fe=2$ ). Podemos aplicar una rotación left-right.
- **La primera rotación es mover el 6 como hijo izquierdo de 15**
- **La segunda rotación será rotar el 15 como hijo derecho de 6 (y que éste sea la nueva raíz)**

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Ejemplo (con subárboles) Rotación doble (left-right):

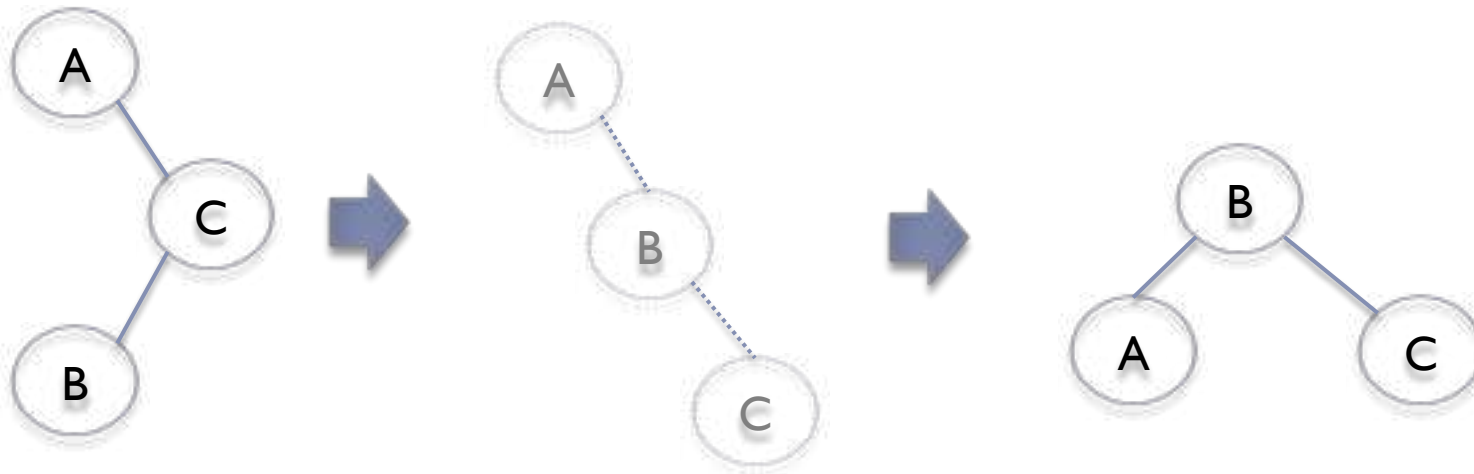


- El nodo 15 está desequilibrado ( $fe=2$ ). Podemos aplicar una rotación left-right.
- La primera rotación es mover el 6 como hijo izquierdo de 15
- **La segunda rotación será rotar el 15 como hijo derecho de 6 (y que éste sea la nueva raíz)**

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

### ► Rotación Doble (right-left):



InOrder: ABC

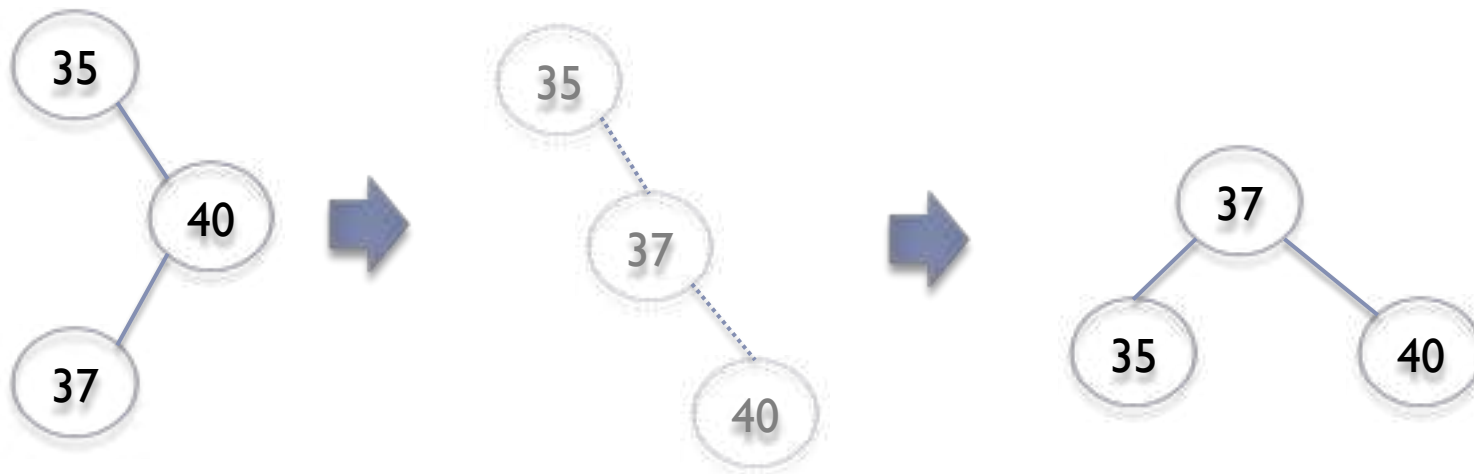
=

InOrder: ABC

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

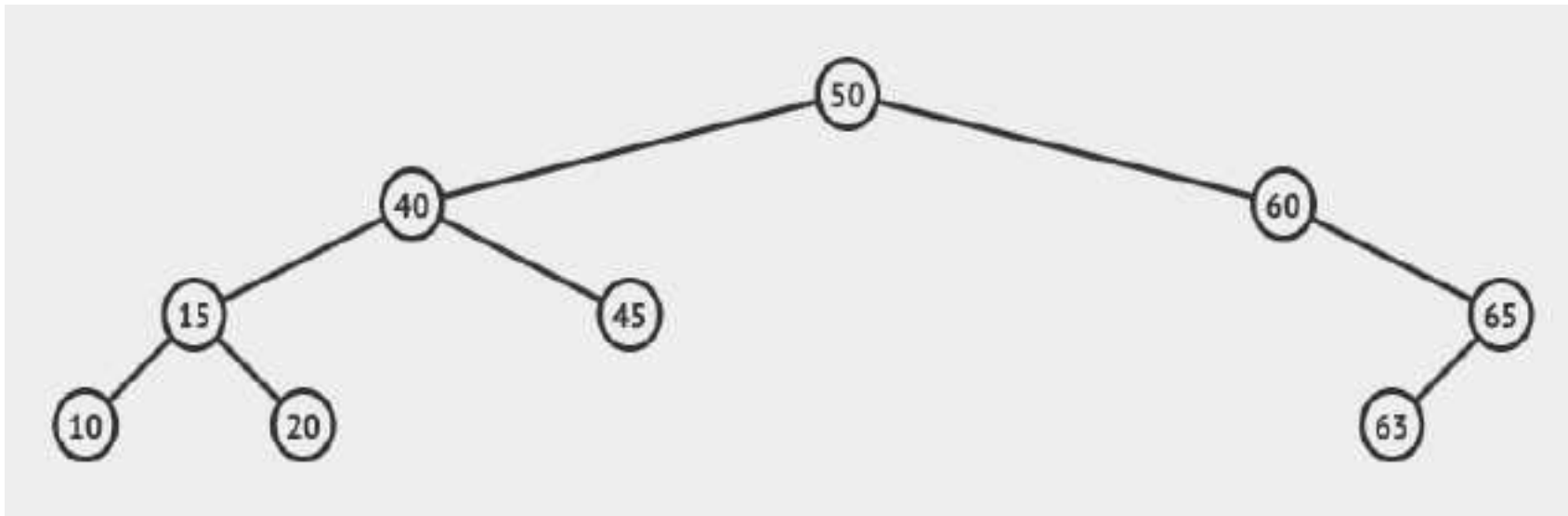
### ► Ejemplo Rotación Doble (right-left):



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

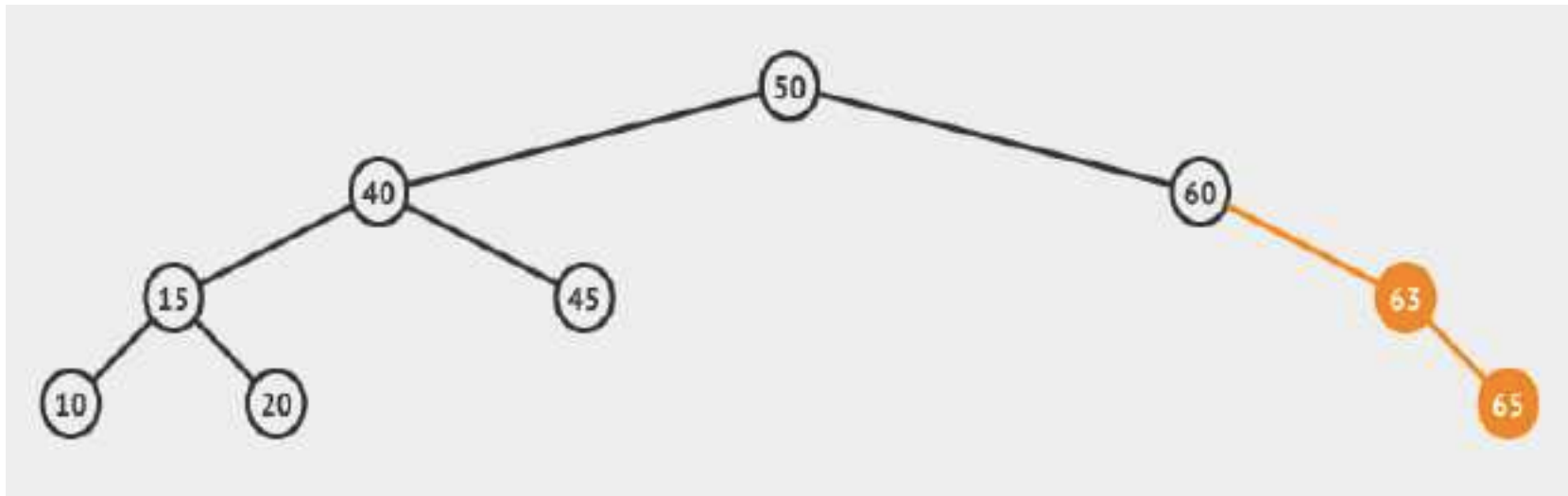
- ▶ Ejemplo Rotación doble (right-left):



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

- ▶ Ejemplo Rotación doble (right-left):



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Ejemplo Rotación doble (right-left):

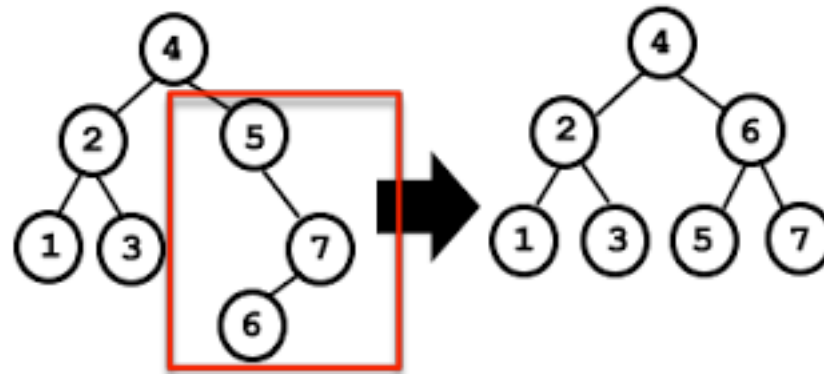




## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

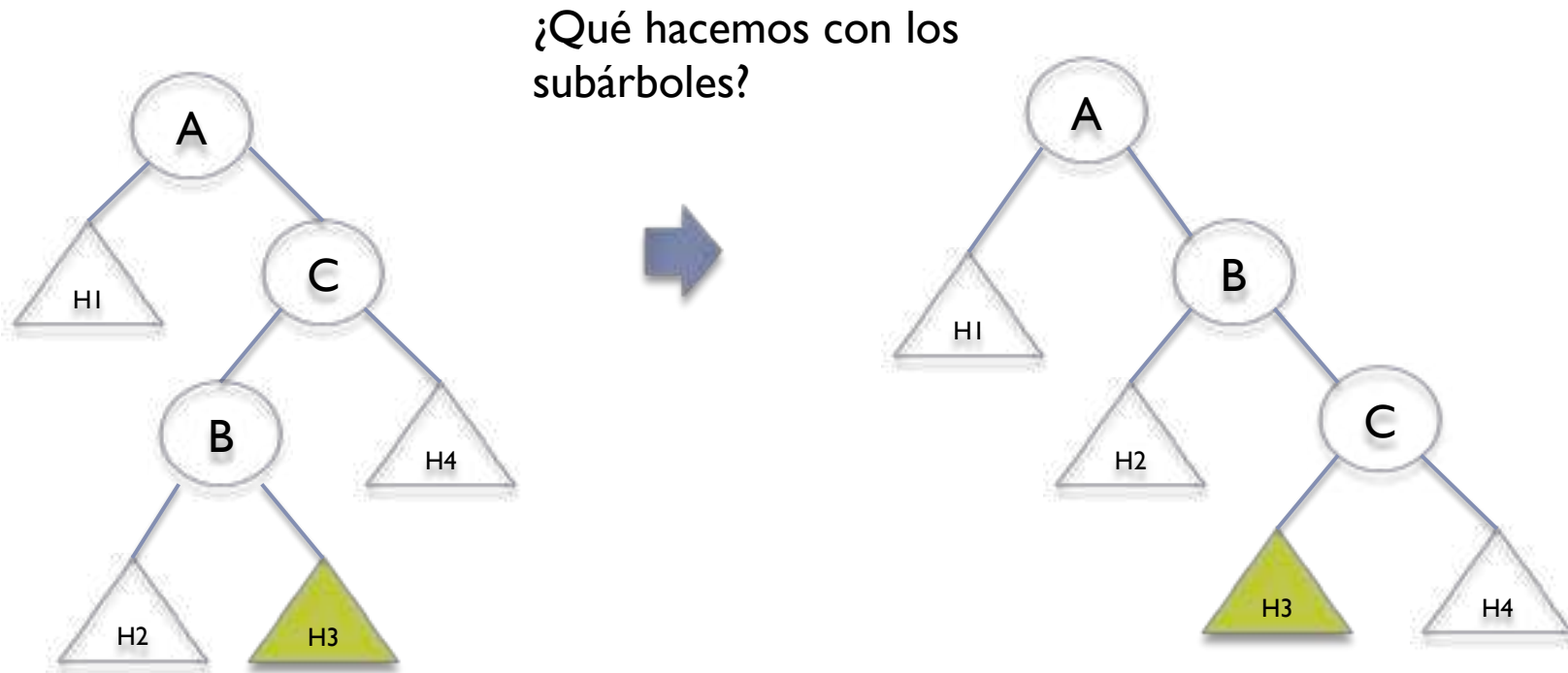
---

- ▶ Rotaciones Dobles (ejemplo right-left):



## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

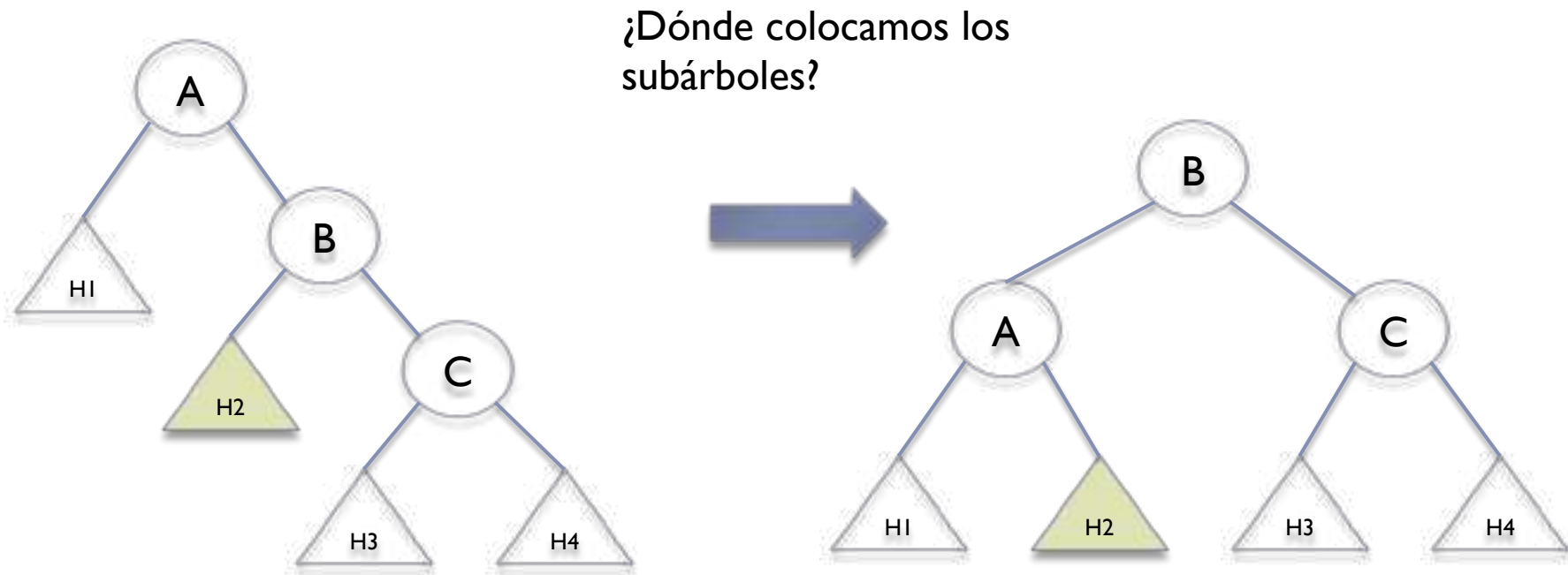
### ► Rotación Doble (right-left):



Primera rotación: rotamos el nodo B  
como hijo derecho de A

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

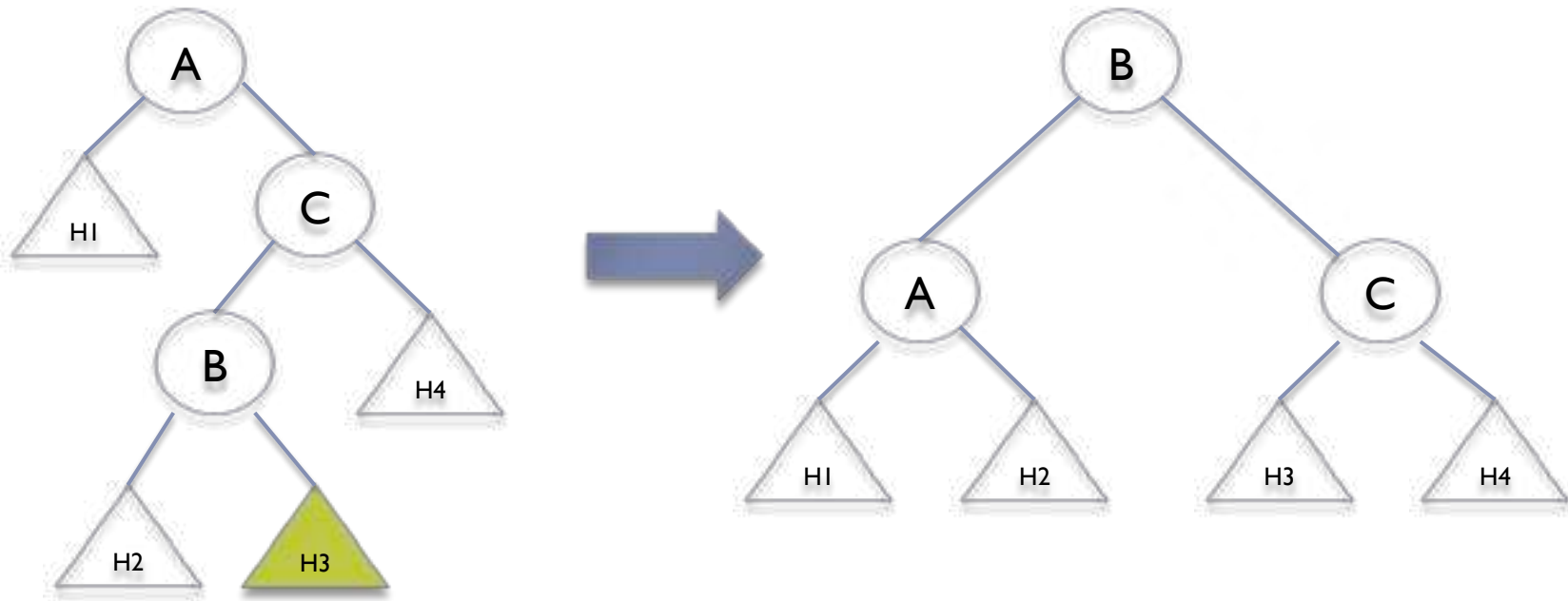
### ► Rotación Doble (right-left):



Segunda rotación: rotamos el nodo A  
como hijo izquierdo de B

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

### ► Rotación doble (right-left):



InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

=

InOrder:  $H_1 A H_2 B H_3 C H_4$

## ABB: Equilibrados en altura (árboles AVL)

---

- ▶ Ventaja: El equilibrado se hace desde abajo, sólo en el camino desde el nodo insertado o borrado hacia la raíz
  - ▶ Por tanto, el equilibrado es  $O(\log n)$
- ▶ Desventaja: El árbol no queda tan compactado como en ABB perfectamente equilibrado. Aun así, las búsquedas también son  $O(\log n)$