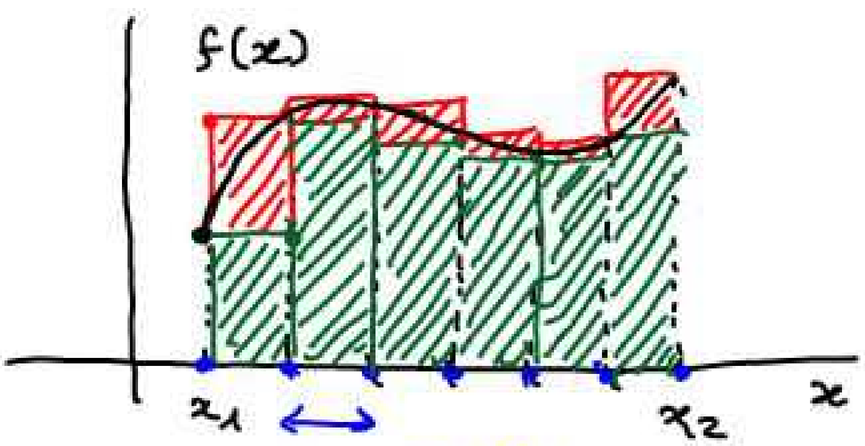
INTEGRACIÓN en $\mathbb{R}$

Ingredientes:

- $[x_1, x_2]$: intervalo cerrado y acotado
  $$0 \leq x_2 - x_1 < \infty$$
- $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$: función acotada
  $$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x.$$
- $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$: dividimos el intervalo $[x_1, x_2]$ en n intervalos de igual longitud:
  $$\Delta_n = \frac{x_2 - x_1}{n}$$
  (definición simplificada)



$\Delta_6 := \frac{x_2 - x_1}{6}$

$n = 6$

Definimos:
$$m_k(n) = \inf\{ f(x) : x_1 + (k-1)\Delta_n \leq x \leq x_1 + k\Delta_n \}$$
$$M_k(n) = \sup\{ f(x) : x_1 + (k-1)\Delta_k \leq x \leq x_1 + k\Delta_n \}$$

Suma inferior:
$$I_n(f, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{n} m_k(n) \cdot \Delta_n$$

Suma superior:
$$S_n(f, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{n} M_k(n) \cdot \Delta_n$$

DEFINICIÓN: Diremos que f es INTEGRABLE en $[x_1, x_2]$ si
$$\exists \lim_{n\to\infty} I_n(f, x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty} S_n(f, x_1, x_2).$$

Si f es integrable en $[x_1, x_2]$, el símbolo $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ denotará

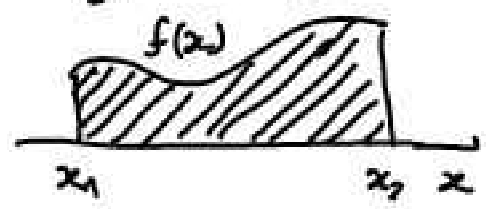
"variable muda"
$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} I_n(f, x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty} S_n(f, x_1, x_2)$$

y se denomina INTEGRAL de f en $[x_1, x_2]$.

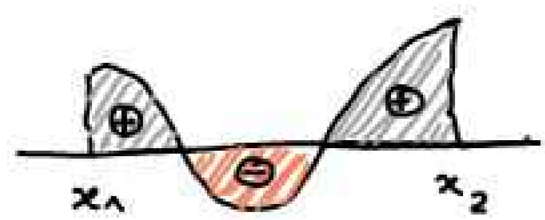
OBSERVACIONES:

- Si $f \geq 0$ el significado geométrico de $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ es claro:

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$: área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$

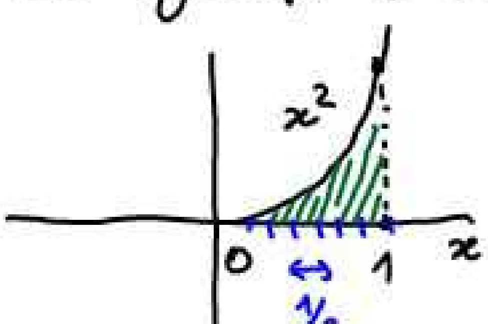


- En general, $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ representa la DIFERENCIA de las áreas qe qeden por encima y las qe qeden por debajo del eje x



- El cálculo de $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ usando la definición es difícil:

Por ejemplo, consideremos $f(x) = x^2$; $[x_1, x_2] = [0,1]$



En este caso:

$m_k(n) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$; $M_k(n) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$

por tanto:

$$I_n(f; 0,1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

$$S_n(f; 0,1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

[Resultado conocido: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$]

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

$f(x) = x^2$ integrable en $[0,1]$

Por tanto: $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ ■

Usando la definición de integral es posible demostrar las siguientes propiedades:

<u>TEOREMA</u>: Sean $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones integrables en $[x_1, x_2]$. Entonces:

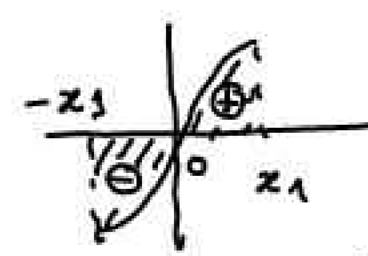
- $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ es integrable en $[x_1, x_2]$ y se cumple que:
$$\int_{x_1}^{x_2} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\,dt = c_1 \int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt + c_2 \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt$$

- Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$:
$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt \leq \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt$$

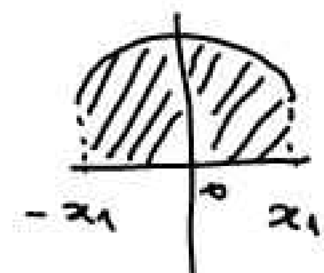
- Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [x_1, x_2]$:
$$m(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \leq M \cdot (x_2 - x_1)$$

- $|f(x)|$ es integrable en $[x_1, x_2]$ y se cumple que:
$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt$$

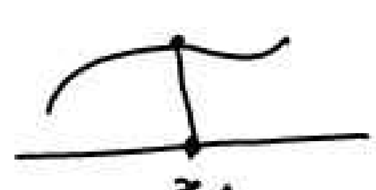
- Si f es IMPAR: $\displaystyle\int_{-x_1}^{x_1} f(t)\,dt = 0$



- Si f es PAR: $\displaystyle\int_{-x_1}^{x_1} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x_1} f(t)\,dt$



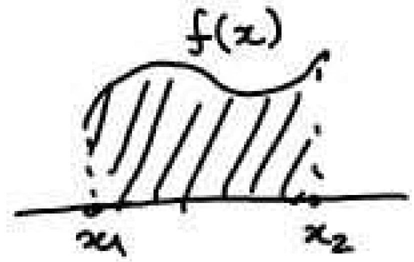
- $\displaystyle\int_{x_1}^{x_1} f(t)\,dt = 0$



<u>Ejemplo</u>:
$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} t\,dt = 0$$
$$\int_{-1}^{1} t^2\,dt = 2\int_{0}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}$$

Los siguientes teoremas nos garantizan que, en la práctica, casi nunca nos encontraremos con funciones no integrables:

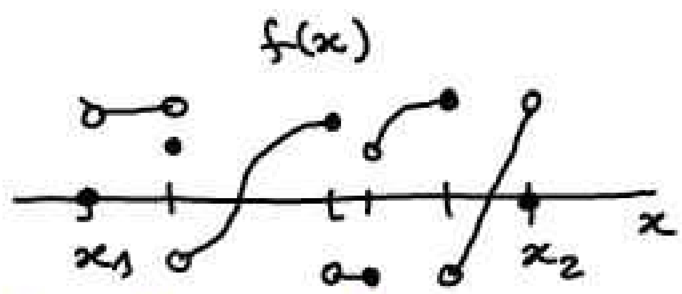
TEOREMA: Si f es continua en $[x_1, x_2]$ entonces: f es integrable en $[x_1, x_2]$



$$\exists \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

TEOREMA: Si f es acotada y continua a trozos en $[x_1, x_2]$:

$\Rightarrow$ f es integrable en $[x_1, x_2]$

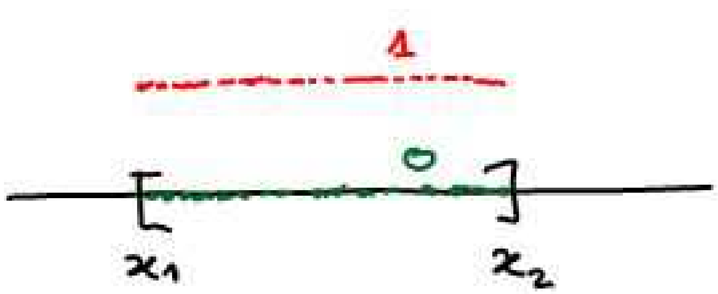


$$\exists \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

(continua salvo en un conjunto finito de puntos)

Ejemplo de función no integrable en $[x_1, x_2]$: $(x_1 < x_2)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$S_n = 1 \quad \forall n$

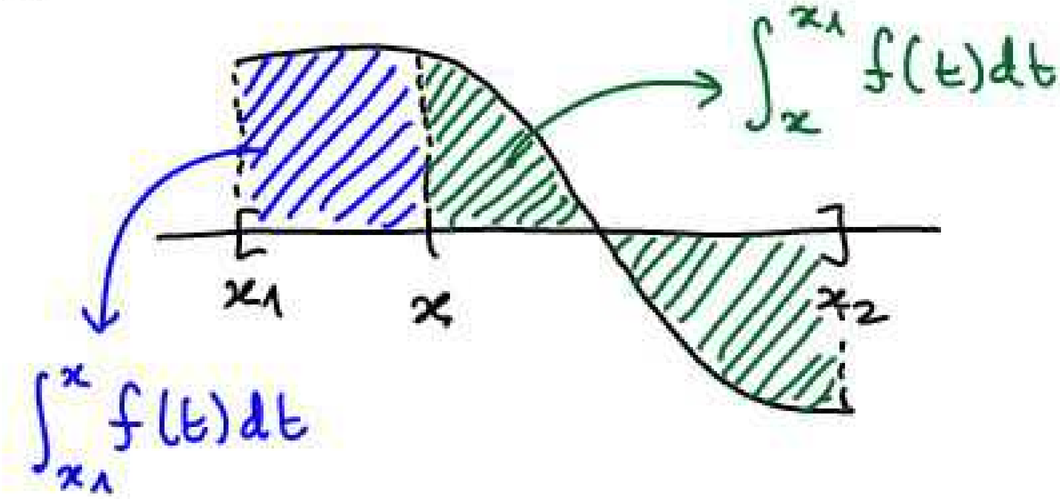
$I_n = 0 \quad \forall n$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f, x_1, x_2) = 1 \neq 0 = \lim_{n \to \infty} I_n(f, x_1, x_2)$$

Usando la definición, también es posible demostrar el siguiente resultado que usaremos frecuentemente:

TEOREMA: Sea f integrable en $[x_1, x_2]$ y sea $x \in [x_1, x_2]$. Entonces f es integrable en $[x_1, x]$ y en $[x, x_2]$ y se cumple que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x_2} f(t)\,dt$$



Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x, & -1 \le x \le 1 \\ 3 ; & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

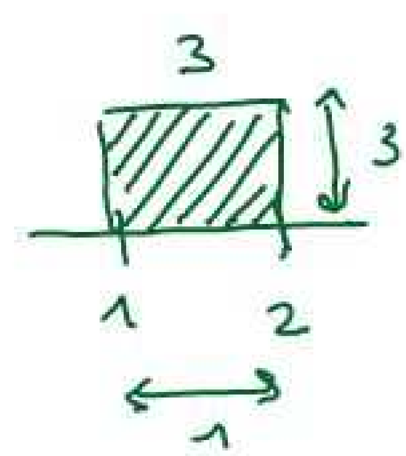
continua a trozos $\Rightarrow$ integrable

$$\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{2} f(t)\,dt =$$

$$= \cancelto{0}{\int_{-1}^{1} \text{sen}\, t\,dt} + \int_{1}^{2} 3\,dt =$$

impar

$$= 3 \cdot (2-1) = 3$$

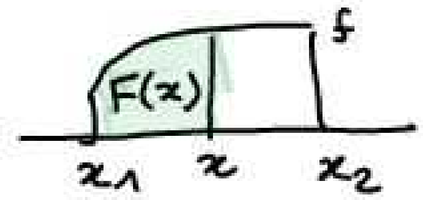


TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO (TFC)

Los siguientes teoremas nos permitirán calcular integrales sin necesidad de recurrir a la definición:

Primer TFC: • Sea f INTEGRABLE en $[x_1, x_2]$. Entonces, la función

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt \,; \quad x \in [x_1, x_2]$$



es una función CONTINUA en $[x_1, x_2]$.

• Si f es CONTINUA en $[x_1, x_2]$, entonces la función

$F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ es CONTINUA en $[x_1, x_2]$

DERIVABLE en (x_1, x_2)

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$

Obs: La integral tiene un "EFECTO REGULARIZADOR":

$f(x)$ integrable $\Longrightarrow F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ continua

$f(x)$ continua $\Longrightarrow F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ derivable

$F'(x) = f(x)$

Segundo TFC: Si f es integrable en $[x_1, x_2]$ y existe una función derivable g tal que $f(x) = g'(x) \ \forall x \in [x_1, x_2]$ se tiene que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} g'(t)\,dt = g(x_2) - g(x_1)$$

Definición (PRIMITIVA) Diremos que una función g es **UNA PRIMITIVA** de una función f en el intervalo (x_1, x_2) si

$$g'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: El primer TFC nos garantiza que si f es continua en $[x_1, x_2]$ la función:

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$$

es una PRIMITIVA de f en (x_1, x_2), es decir:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: El segundo TFC nos permitirá calcular un buen número de integrales. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ cumplen:

$$f(x) = g'(x) \quad \forall x$$

Por tanto:

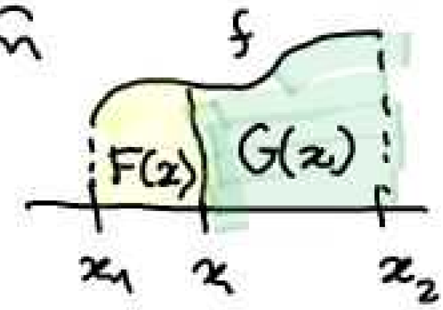
$$\int_{x_1}^{x_2} t^2\,dt = \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1^2$$

En particular:

$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$ (como ya sabíamos pero con menos sufrimiento)

Obs: Si f es continua, la función

$$G(x) = \int_x^{x_2} f(t)\,dt$$



cumple

$$G'(x) = -f(x)$$

La razón es evidente:

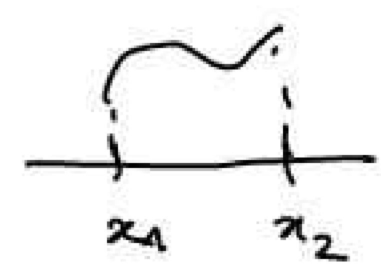
$$F(x) + G(x) = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt}_{\text{independiente de } x}$$

$$\underset{\text{derivando}}{\Longrightarrow} \quad F'(x) + G'(x) = 0$$

$$f(x) + G'(x) = 0 \Rightarrow G'(x) = -f(x) \quad \blacksquare$$

Notación: Para tener en cuenta dicho signo menos, si $x_1 \leq x_2$ definimos:

$$\int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt := -\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$



De esta manera, independientemente de si x es mayor o menor que x_1, la función

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} t^2\,dt$$

cumple $F'(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.