Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
ENERO 2012

Name		Group	

SOLUCIONES

Cuestión 1

i) Dado que $x \neq 0$, despejamos y',

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = 5x^3$$

La ecuación diferencial es de primer orden lineal y se puede resolver usando un factor integrante.

ii) Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$.
Multiplicando la ecuación por $\mu(x) = x^2$, se obtiene $x^2 y' + 2xy = 5x^5 \Rightarrow (x^2 y)' = 5x^5$, integrando y despejando y:

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \int x^2\, 5x^3\, dx = 5x^4/6 + C/x^2$$

Como $y(1) = 2$, entonces $C = 7/6$. Finalmente

$$y(x) = \frac{5x^4}{6} + \frac{7}{6x^2}$$

iii) Comprobamos la solución obtenida en ii)

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3x^3} \\ \frac{2y}{x} &= \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{3x^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = 5x^3 \quad \text{OK} .$$

Cuestión 2

i) Resolvemos la EDO para el caso $a \neq 1, 2$ por el método de los coeficientes indeterminados.
Las soluciones de la ecuación característica son:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ r = 1 \end{array} \right.$$

por tanto, la solución de la EDO homogénea es: $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^x$, A, B, constantes.

Dado que $a \neq 1, a \neq 2$, la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = Ce^{ax}\,,$$

donde el coeficiente C se debe de determinar.

$$\left.\begin{array}{r} y_p'(x) = aCe^{ax} \\ y_p''(x) = a^2Ce^{ax} \end{array}\right\} \Rightarrow y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (a^2 - 3a + 2)Ce^{ax} = (a-2)(a-1)Ce^{ax}$$

Igualamos con el término no homogéneo de la EDO

$$(a-2)(a-1)Ce^{ax} = e^{ax}\,,$$

con lo que

$$C = \frac{1}{(a-2)(a-1)}\,.$$

Finalmente

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{x} + \frac{1}{(a-2)(a-1)}e^{ax}\,.$$

ii) Para el caso $a = 1$, la solución particular es de la forma: $y_p(x) = Cxe^{ax}$, pues $y = e^x$ es una solución de la EDO homegénea. Análogamente a como hicimos en el anterior apartado, se obtiene que

$$C = -1\,,$$

con lo que

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{x} - xe^{x}\,.$$

Question 3

i) Aplicamos la transformada de Laplace a la EDO del enunciado para obtener $F(2)$:

$$F(s)\,(s^2 + 4s + 4) - s - 4 = \frac{1}{s-1} \Rightarrow F(s) = \frac{1 + (s+4)(s-1)}{(s-1)(s+2)^2} \Rightarrow F(2) = \frac{7}{16}\,.$$

ii)

$$F(s) = \frac{1 + (s+4)(s-1)}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

Después de resolver un sistema de ecuaciones se obtiene que $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{5}{3}$. Aplicamos la antitransformada a la ecuación

$$F(s) = \frac{1}{9}\frac{1}{s-1} + \frac{8}{9}\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{(s+2)^2}$$

para obtener el valor de $y(2)$:

$$y(t) = \frac{1}{9}e^{t} + \frac{8}{9}e^{-2t} + \frac{5}{3}te^{-2t} \Rightarrow y(2) = \frac{1}{9}(e^2 + 38e^{-4})\,.$$

Question 4

i) Si sustituimos en la EDO del enuciado $X_1 = y$, $X_2 = y'$ obtenemos:

$$X_1' = y' = X_2\,; \quad X_2' = y'' = -4y' - 3y = -4X_2 - 3X_1\,.$$

Escribiendo los resultados en forma matricial se obtiene,

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = -4X_2 - 3X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

donde $y(0) = X_1(0) = 1\,;\, y'(0) = X_2(0) = 2$, por tanto $\vec{X}(0) = (1, 2)^T$.

ii) Los valores propios de la matriz son $r = -3$ y $r = -1$ y los vectores propios correspondientes $v = (1\,, -3)^T$ y $w = (1\,, -1)^T$.
La solución queda

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}\,.$$

Por la condición inicial $\vec{X}(t) = (1, 2)^T$ se obtiene que $C_1 = -\frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{5}{2}$. Finalmente,

$$\vec{X}(t) = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}\,.$$

Question 5

i) De la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se deduce que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Para obtener los valores de los coeficientes A_n, fijamos $m \in \mathbb{Z}^+$ e integramos la ecuación anterior, previamente multiplicada por $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$,

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = A_m\,\frac{L}{2}\,,$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la fórmula integral del enunciado, con lo que

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx\,,$$

con $m \in \mathbb{Z}^+$.

ii) Considerando que $L = \pi$ y $f(x) = 3\sin(2x) + \frac{5}{3}\sin(4x)$, se obtiene que $A_n = 0$, si $n \neq 2, 4$ y que $A_2 = 3$ y $A_4 = \frac{5}{3}$.
Finalmente,

$$u(x, t) = 3\,e^{-4kt}\,\sin(2x) + \frac{5}{3}\,e^{-16kt}\,\sin(4x)\,.$$