I. PRODUCTO ESCALAR Y NORMA.

1. **Definición (Producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$).-** *"Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, escritos en forma matricial:*

$$x = \left[x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n \right]^T \;, \quad y = \left[y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n \right]^T$$

Se define su producto escalar, y se escribe $x \cdot y$ o bien $\langle x, y \rangle$, al escalar:

$$x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ ''}$$

2. **Definición (Producto escalar usual en $\mathbb{C}^n$).-** *"Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$, escritos en forma matricial:*

$$x = \left[x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n \right]^T \;, \quad y = \left[y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n \right]^T$$

Se define su producto escalar, y se escribe $x \cdot y$ o bien $\langle x, y \rangle$, al escalar:

$$x \cdot y = x^H y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i \text{ ''}$$

3. **Propiedades del producto escalar**.

En $\mathbb{R}^n$: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

1. $x \cdot y = y \cdot x$
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
3. $x \cdot (\alpha\, y) = \alpha\, (x \cdot y)$
4. $(\alpha\, x) \cdot y = \alpha\, (x \cdot y)$
5. $x \cdot x \geq 0$, además: $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

En $\mathbb{C}^n$: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{C}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

1. $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
3. $x \cdot (\alpha\, y) = \alpha\, (x \cdot y)$
4. $(\alpha\, x) \cdot y = \overline{\alpha}\, (x \cdot y)$
5. $x \cdot x \geq 0$, además: $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. **Definición (Norma en** $\mathbb{R}^n$**).-** *"Sea* $x \in \mathbb{R}^n$, escrito en forma matricial:

$$x = \left[\, x_1\ x_2\ \cdots\ x_n \,\right]^T$$

Se define norma de x, y se escribe $\|x\|$*, al escalar:*

$$\|x\| = +\sqrt{x^T x} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\ \text{"}$$

5. **Definición (Norma en $\mathbb{C}^n$).-** *"Sea* $x \in \mathbb{C}^n$, escrito en forma matricial:

$$x = \left[\, x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n \,\right]^T$$

Se define norma de x, y se escribe $\|x\|$*, al escalar:*

$$\|x\| = +\sqrt{x^H x} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \text{ "}$$

6. **Propiedades de la norma**.

En K^n: $\forall\, x, y \in K^n$, $\forall\, \alpha \in K$

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$
3. $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

7. **Definición (**Vectores unitarios).- *"Si* $x \in K^n$*, se dice que x es unitario, si verifica* $\|x\| = 1$".

8. **Definición (**Distancia entre vectores).- *"Si* $x, y \in K^n$*, se define distancia entre x e y, al escalar* $d(x, y) = \|x - y\|$".

9. **Definición (**Vectores ortogonales).- *"Si* $x, y \in K^n$*, se dice que x e y son ortogonales, si verifican* $x \cdot y = 0$".

10. **Teorema de Pitágoras**.- *"Dos vectores* $x, y \in K^n$*, son ortogonales si y sólo si* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$".

11. **Definición (**Complemento ortogonal).- *"Sea V un subespacio vectorial de* K^n*, se define complemento ortogonal de V, se escribe* $V^{\perp}$*, al conjunto de vectores* $V^{\perp} = \left\{ x \in K^n : x \cdot y = 0, \forall y \in V \right\}$".

12. **Teorema**.- *"El complemento ortogonal de un s.e.v. es un subespacio vectorial"*.

13. **Teorema**.- *"Sea A una matriz mxn. Entonces el complemento ortogonal del espacio de filas de A es el espacio nulo de A, y el complemento ortogonal del espacio de la columnas es el espacio nulo de* A^T*;* $(FilA)^{\perp} = NulA, \quad (ColA)^{\perp} = NulA^T$".

II. CONJUNTOS ORTOGONALES.

1. **Definición**.- *"Sea* $S = \left\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \right\} \subset K^n$*, se dice que S es un conjunto ortogonal si cada par de vectores distintos en el conjunto es ortogonal, es*

decir, $v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall\, i \neq j$ *. Si además S es una base, entonces se denominará base ortogonal*".

2. **Definición**.- *"Sea* $R = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset K^n$ *, se dice que R es un conjunto ortonornal si es ortogonal y todos sus vectores unitarios. Si además R es una base, entonces se denominará base ortonornal*"

3. **Definición**.- *"Sea* $A = [\, a_1\ a_2 \ldots a_n \,] \in K^{m \times n}$ una matriz, se dice que A tiene las columnas ortogonales (u ortonormales) si el conjunto de vectores columna de K^m forman un conjunto ortogonal (ortonormal)".

4. **Definición**.- *"Sea* Q una matriz cuadrada de orden n, se dice que Q es **ortogonal** (si está construida sobre $\mathbb{R}$) o **unitaria** (si está construida sobre $\mathbb{C}$) si sus vectores columna forman un conjunto ortonornal, es decir, se verifica $Q^T Q = I_n \quad sobre \quad \mathbb{R}$, o bien $Q^H Q = I_n \quad sobre \quad \mathbb{C}$".

5. **Teorema**.- *"Si Q es una matriz con columnas ortonormales, y* $x, y \in K^n$ *dos vectores. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*
   a) $\|Qx\| = \|x\|$.
   b) $(Qx).(Qy) = x.y$
   c) $(Qx).(Qy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x.y = 0$".

6. **Teorema**.- *"Si* $S = \left\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \right\} \subset K^n$ *es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces S es un sistema libre, y por lo tanto es una base del subespacio generado por S*".

7. **Teorema**.- *"Sea* $B = \left\{ u_1, u_2, \ldots, u_p \right\} \subset K^n$ *una base ortogonal de un subespacio W. Entonces todo vector* $x \in W$ *puede escribirse:*

$$x = \left(\frac{x.u_1}{u_1.u_1} \right) u_1 + \left(\frac{x.u_2}{u_2.u_2} \right) u_2 + \cdots + \left(\frac{x.u_p}{u_p.u_p} \right) u_p = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x.u_i}{u_i.u_i} \right) u_i$$

En el caso en que la base sea ortonormal esa expresión queda reducida a:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \left(x.u_i \right) u_i \text{".}$$

III. PROYECCIONES ORTOGONALES.

1. **Definición**.- *" Sea W un subespacio de* K^n*,* $B = \left\{ u_1, u_2, \ldots, u_p \right\} \subset K^n$ *una base ortogonal de W y* $x \in K^n$ *un vector cualquiera , entonces, se define:*

$$x_W = proy_W(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{u_i.x}{u_i.u_i} \right) u_i = \sum_{i=1}^{p} proy_{u_i}\left(x \right)$$

como la proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio W, y cada sumando de la expresión es *la proyección ortogonal del vector x sobre los subespacios generados por cada vector de la base.*

Si la base es ortonormal, esa expresión queda reducida a:

$$x_W = proy_W(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(u_i . x \right) u_i = \sum_{i=1}^{p} proy_{u_i}\left(x \right) \text{”.}$$

2. **Teorema de la descomposición ortogonal.-**

“Sea W un subespacio de K^n*,* $B = \left\{ u_1, u_2, \ldots, u_p \right\} \subset K^n$ *una base ortogonal de W y* $x \in K^n$ *un vector cualquiera , entonces, se puede escribir de forma única:*

$$x = x_W + y \text{, siendo}$$

$$x_W = proy_W(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{u_i . x}{u_i . u_i} \right) u_i = \sum_{i=1}^{p} proy_{u_i}\left(x \right)$$

e $y = x - x_W$ es un vector del complemento ortogonal de W”

3. **Teorema (propiedades de las proyecciones ortogonales).-**

(1) $proy_W(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in W$

(2) *Linealidad:* $proy_W(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, proy_W(x) + \beta\, proy_W(y)$

(3) $proy_{W^{\perp}}(x) = x - proy_W\left(x \right)$

4. **Teorema (propiedades del complemento ortogonal).-**

(1) $\dim W + \dim W^{\perp} = n$

(2) $\left(W^{\perp} \right)^{\perp} = W$

(3) $\quad B = B_W \cup B_{W^{\perp}}$ *es base de* K^n

5. **Teorema (Matriz canónica de la proyección ortogonal).-**
"Sea W un subespacio de K^n, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset K^n$ una base ortonormal de W y $x \in K^n$ un vector cualquiera , entonces:

$$proy_W(x) = QQ^T x, \text{ siendo}$$

$$Q = \left[u_1\ u_2 \ldots u_p\right] \in K^{n \times p} \text{ que verifica } Q^T Q = I_p\text{"}$$

6. **Teorema de la aproximación óptima.-**
"Sea W un subespacio de K^n, y $x \in K^n$ un vector cualquiera, entonces:

$$\left\| x - proy_W(x) \right\| \leq \left\| x - y \right\| \quad \forall y \in W.$$

La desigualdad es estricta si $y \neq proy_W(x)$"

III. EL PROCESO DE GRAM-SCHMIDT.

1. **Teorema de Gram-Schmidt.-**

"*Sea B =* $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ *base de W subespacio vectorial de* K^n*, definiendo la serie de vectores:*

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \dfrac{w_1.v_2}{w_1.w_1} w_1 \\ w_3 = v_3 - \dfrac{w_1.v_3}{w_1.w_1} w_1 - \dfrac{w_2.v_3}{w_2.w_2} w_2 \\ \vdots \\ w_p = v_p - \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \dfrac{w_i v_p}{w_i.w_i} w_i \end{array}\right\} w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{w_i.v_j}{w_i.w_i} w_i \quad ;\ \text{j} = 1,...,\text{p}$$

a) El sistema $\{w_1, w_2, \cdots, w_p\}$ *es una base ortogonal de W.*
b) *Gen* $\{w_1, w_2, \cdots, w_j\}$ = *Gen* $\{v_1, v_2, \cdots, v_j\}$ *para j =1, ..., p"*

Demostración.-

a) La construcción de los vectores asegura que w_j es ortogonal a $Gen\{w_1, w_2, \cdots, w_{j-1}\}$, razonando por inducción se llega a que $\{w_1, w_2, \cdots, w_p\}$ es base ortogonal de W.

Veamos como se realiza la inducción:
El hecho de que $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ sea base, asegura independencia lineal y no nulos.

Para j=1 y 2 , $w_1 = v_1$ y $w_2 = v_2 - proy_{w_1}(v_2)$ y v_2 no pertenece a Gen{w_1}, entonces w_2 pertenece al complemento ortogonal de Gen{w_1}, luego es ortogonal a w_1.

Supongámoslo cierto para j = k, entonces para j = k+1, $w_{k+1} = v_{k+1} - proy_{W_k}(v_{k+1})$ y $v_{k+1} \notin Gen\{w_1, w_2, ..., w_k\}$, entonces w_{k+1} pertenece al complemento ortogonal de $Gen\{w_1, w_2, ..., w_k\}$, luego es ortogonal a todo $w_1, w_2, ..., w_k$.

q. e. d.

b) INDUCCIÓN:
Claramente cierto para j = 1 ya que $w_1 = v_1$.
Supongamos que es cierto para j = k, entonces
$Gen\{w_1, w_2, \cdots, w_k\} = Gen\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} = W_k$.

Como $w_{k+1} = v_{k+1} - proy_{W_k}(v_{k+1})$, y además $\begin{cases} v_{k+1} \notin W_k \\ v_{k+1} \neq 0 \end{cases}$ ya que es linealmente independiente a los anteriores, por lo tanto, por el teorema de la base se puede sustituir v_{k+1} por w_{k+1}.

q. e. d.

ORTOGONALIDAD