POLINOMIO DE TAYLOR

- Un polinomio de grado n es una función de la forma

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

con $p_n \neq 0$

p_i constantes

Ejemplo: $P(x) = 3 + 5x + 7x^2$
polinomio de grado 2.

- Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, cualquier polinomio de grado n puede escribirse en la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

con $a_n \neq 0$
a_i constantes

Ejemplo: $P(x) = 3 + 5x + 7x^2 =$

$\boxed{x = x - x_0 + x_0}$

$$= 3 + 5(x - x_0 + x_0) + 7(x - x_0 + x_0)^2$$

$$= 3 + 5x_0 + 7x_0^2 +$$

$$+ (5 + 14x_0)(x - x_0) +$$

$$+ 7(x - x_0)^2$$

$$\Rightarrow P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

con: $a_0 = 3 + 5x_0 + 7x_0^2$
$a_1 = 5 + 14x_0$
$a_2 = 7$

- Si $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$

es evidente que:

$$P^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= P(x_0) \\ a_1 &= P'(x_0) \\ 2a_2 &= P''(x_0) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)}$$

derivada k-ésima

- Si $P(x)$ es un polinomio de grado n
  x_0 es un número real arbitrario

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

- Sea $f:(x_1,x_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $C^n(x_1,x_2)$
  (aunque no hace falta tanta regularidad, todos los ejemplos que vamos a considerar serán de este tipo)

  Sea $x_0 \in (x_1,x_2)$
  El POLINOMIO de TAYLOR de ORDEN n de f en x_0 es el polinomio

$$P_n(x|f,x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

EL RESTO n-ÉSIMO de TAYLOR de f en x_0 se denota mediante $R_n(x|f,x_0)$ y se define como:

$$R_n(x|f,x_0) := f(x) - P_n(x|f,x_0)$$

<u>Obs:</u> $f(x)$ y $P_n(x|f,x_0)$ satisfacen:

$P(x_0|f,x_0) = f(x_0)$; $P'(x_0|f,x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0|f,x_0) = f^{(n)}(x_0)$

<u>Ejemplo:</u> $f(x) = \cos x$; $x_0 = 0$

$$P_4(x|f,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$R_4(x|f,0) = \cos x - (1 - x^2/2 + x^4/4!)$$

TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ una función $C^{n+1}(x_1, x_2)$

Sea $x_0 \in (x_1, x_2)$:

$\Rightarrow$ Si $x \neq x_0$ $\exists\, c \in (x_0, x)$ ó $c \in (x, x_0)$ tal que :

$$R_n(x | f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Obs: Para $n=0$ el teorema se reduce al teorema del valor medio de Lagrange

Corolarios: En las hipótesis del teorema de Taylor:

- $$\lim_{x \to x_0} R_n(x|f,x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f,x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f,x_0)}{(x-x_0)^2} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x|f,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x|f,x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

NOTACIÓN de LANDAU

Sean f y g funciones definidas en un entorno de x_0

O-grande de Landau:

Diremos que $f = O(g)$ cuando $x \to x_0$ si $\exists M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ $\forall x$ en un entorno de x_0

o-pequeña de Landau:

Diremos que $f = o(g)$ cuando $x \to x_0$ si $\forall M > 0$ existe un entorno de x_0 tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para todo x en dicho entorno

Observación: Si $g(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$

$$f = o(g) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f = O(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \text{ acotado para } x \text{ cerca de } x_0$$

Ejemplo: En las hipótesis del teorema de Taylor,

$$R_n(x|f, x_0) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

o-pequeña

ya que:

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \to x_0} R(x|f, x_0)$$

$\Rightarrow$ Muchas veces escribiremos simplemente:

$$f(x) = P_n(x|f, x_0) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

EJEMPLOS: Si $x \to 0$ se tiene que:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}_{o(x^{2n+1})}$

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{o(x^{2n+2})}$

- $(1+x)^a = 1 + a + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4$

Binomio Newton

$+ \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$; $a \in \mathbb{R}$ (no necesariamente entero)

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x + x^3/6}{x^5}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{5!}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (1-x)^{1/2}}{\operatorname{sen} x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - \frac{1}{2}x + o(x))}{x + o(x)} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Ejemplo: Aproxima el valor de } (1.1)^{1/3} \text{ mediante un polinomio de Taylor de grado 3 y estima el error cometido en la aproximación.}}$

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^{1/3}$.

Tanto el valor de f en $x_0=0$ como el de todas sus derivadas en $x_0=0$ son números racionales que se pueden calcular fácilmente:

$$f(x) = (1+x)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3^2}(1+x)^{-5/3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 5}{3^3}(1+x)^{-8/3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = \frac{10}{27}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2^4\cdot 5}{3^4}(1+x)^{-11/3}$$

En este caso, puesto que $f(x) = (1+x)^{1/3}$ podíamos haber calculado dichas derivadas usando el binomio de Newton:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$$

En cualquier caso:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (1+x)^{1/3} \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_3(x|f,0) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3}$$

$$\boxed{(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + R_3(x|f,0)}$$

Usando el teorema de Taylor:

$$R_3(x|f,0) = -\frac{2^4 \cdot 5}{3^4\ 4!}\ \frac{x^4}{(1+c)^{11/3}} \quad \text{con } c \in (0,x)$$

Particularizando la ecuación

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + R_3(x|f,0)$$

en $x = 0.1$ se tiene:

$$\boxed{(1.1)^{1/3} = 1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} + \frac{5\cdot(0.1)^3}{81} - \frac{2^4 \cdot 5}{3^4\cdot 4!}\ \frac{(0.1)^4}{(1+c)^{11/3}} \quad \text{con } c \in (0, 0.1)}$$

Podemos aproximar $(1.1)^{1/3}$ mediante:

$$(1.1)^{1/3} \simeq 1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} + \frac{5(0.1)^3}{81} \doteq 1.03228395\ldots$$

El error cometido en la aproximación es:

$$\text{Error} = \Big|\underbrace{(1.1)^{1/3}}_{\text{exacto}} - \underbrace{\left(1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} + \frac{5\cdot(0.1)^3}{81}\right)}_{\text{aproximación}}\Big|$$

$$\Rightarrow \text{Error} = \left| \frac{2^4 \cdot 5\,(0.1)^4}{3^4 \cdot 4!\,(1+c)^{11/3}} \right| \underset{\text{si } c=0}{\leq} \frac{2^4 \cdot 5 \cdot (0.1)^4}{3^4 \cdot 4!} \quad \text{con } c \in (0, 0.1)$$

$$\Rightarrow \text{Error} \leq \frac{2^4 \cdot 5 \cdot (0.1)^4}{3^4 \cdot 4!} < \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}}$$

La aproximación proporciona 5 cifras decimales exactas.

$$\boxed{(1.1)^{1/3} = \underset{\text{cifras exactas}}{1.03228}\ldots}$$