uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Exámenes de Matemática Discreta

Grado en Ingeniería en Informática

Doble Grado en Ingeniería en Informática y Administración de Empresas

Curso 2018–2019

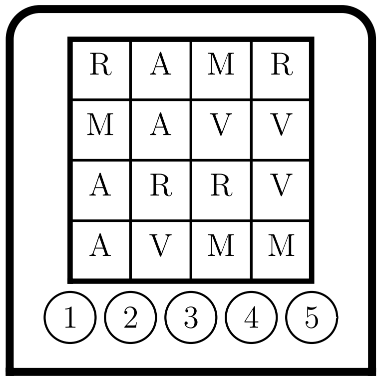
Grupo de Modelización, Simulación Numérica y Matemática Industrial
Universidad Carlos III de Madrid
Avda. de la Universidad, 30
28911 Leganés

v1.0: Enero 2019

Índice

1. Control abril 2014 (1)

Problema 1.1 Un juego electrónico tiene una pantalla formada por 16 celdas iguales dispuestas en una matriz 4×4, tal y como muestra la figura. Dichas celdas están coloreadas de manera que en todo momento 4 son rojas (R), 4 son verdes (V), 4 son azules (A) y 4 son magenta (M).



1. ¿Cuántas configuraciones distintas puede tener la pantalla del juego?

Debajo de la pantalla hay cinco botones marcados del 1 al 5 (ver figura). Un jugador puede presionar una secuencia cualquiera de botones con una única condición: no se puede presionar el mismo botón dos veces consecutivas.

2. ¿Cuántas secuencias distintas de n pulsaciones puede efectuar un jugador?

Al presionar uno cualquiera de los botones del juego se produce un cambio complicado (pero determinista) de la configuración de colores de la pantalla. Es decir, dada una pantalla inicial cualquiera, siempre obtenemos la misma pantalla final después de efectuar la misma secuencia de pulsaciones.

3. Sabiendo que $4^{32} = 16^{16} > 16!$, demostrar que, si partimos de la configuración de la pantalla de la figura, existen al menos dos secuencias diferentes de 32 pulsaciones de los botones tales que ambas producen exactamente la misma configuración final de la pantalla.

<u>SOLUCIÓN.</u>

1. Es un problema de permutaciones de 16 elementos en las que hay elementos iguales y que forman cuatro grupos de cuatro elementos. Luego

$$\text{Solución} \;=\; \frac{16!}{(4!)^4}\,.$$

2. Es una aplicación del principio del producto: en la primera pulsación tenemos cinco opciones, mientras que en el resto de las pulsaciones sólo tenemos cuatro opciones (al no poderse presionar un botón dos veces consecutivas). Luego el resultado es:

$$\text{Solución} \;=\; 5 \times 4^{n-1}\,.$$

3. En este caso tenemos secuencias de 32 pulsaciones, luego el número posible de pulsaciones es 5×4^{31}. Entonces:

$$5 \times 4^{31} \;>\; 4^{32} \;=\; 16^{16} \;>\; 16! \;>\; \frac{16!}{(4!)^4}\,.$$

Por lo tanto hay más secuencias de pulsaciones que pantallas posibles. El principio del palomar nos garantiza que hay al menos dos secuencias de pulsaciones distintas que corresponden a una cierta pantalla. `Nota:` el papel de los palomares lo juegan las pantallas y el papel de las palomas lo juegan las secuencias de pulsaciones.

Problema 1.2

1. Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n \;=\; 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,, \qquad a_1 = 1\,, \qquad a_2 = 4\,.$$

2. Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n \;=\; 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3\,, \quad n \geq 3\,, \qquad a_1 = 1\,, \qquad a_2 = 4\,.$$

Solución.

1. El polinomio característico de la ecuación homogénea es $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Luego hay dos raíces distintas $x = 2$ y $x = 1$. Luego la solución general es

$$a_n \;=\; A\,2^n + B\,.$$

Las constantes A y B las obtenemos con las condiciones iniciales. Obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución es $A = 3/2$ y $B = -2$. La solución es:

$$a_n \;=\; 3 \times 2^{n-1} - 2\,, \quad n \geq 1\,.$$

2. La solución general de la ecuación homogénea es idéntica a la del apartado anterior:

$$a_n \;=\; A\,2^n + B\,.$$

Como 1 es una raíz del polinomio característico con multiplicidad 1, la solución particular de la ecuación no homogénea tendrá la forma $a_n = Cn$. Si sustituimos esta expresión en la ecuación no homogénea, obtendremos el valor de C para el que la expresión anterior sea solución de dicha ecuación. El resultado es $C = -3$. Luego la solución de la ecuación no homogénea es:

$$a_n \;=\; A\,2^n + B - 3\,n\,.$$

Las constantes A y B las obtenemos con las condiciones iniciales. Obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución es $A = 3$ y $B = -2$. La solución es:

$$a_n \;=\; 3 \times 2^n - 2 - 3\,n\,, \quad n \geq 1\,.$$

Problema 1.3 Sea $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ el conjunto de vértices de un grafo simple ponderado $G = (V, E, \omega)$ cuya "matriz de pesos" viene dada por:

V	a	b	c	d	e	f
a	$\cdot$	-3	$\cdot$	$\cdot$	1	1
b	-3	$\cdot$	-2	1	$\cdot$	$\cdot$
c	$\cdot$	-2	$\cdot$	0	1	$\cdot$
d	$\cdot$	1	0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
e	1	$\cdot$	1	$\cdot$	$\cdot$	2
f	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	2	$\cdot$

Por ejemplo, $\{a, b\} \in E$ y su peso es $\omega(\{a, b\}) = -3$; sin embargo, $\{a, c\} \notin E$.

1. Encontrar un árbol generador de peso mínimo y calcular dicho peso mínimo.

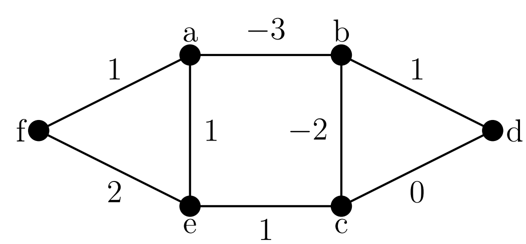
Sea ahora el grafo simple $H = (V, E)$.

2. Decir si H es euleriano, semi-euleriano, hamiltoniano y/o semi-hamiltoniano.

3. Calcular $\chi(H)$ usando técnicas de teoría de grafos.

<u>Solución.</u>

1. El grafo ponderado pedido es el siguiente:



   El árbol generador de peso mínimo lo construimos usando el algoritmo de Kruskal. Las aristas que contiene dicho árbol son (en orden de elección):

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, f\}, \{c, e\}\}.$$

   Su peso es $\omega = \sum_{e \in E} \omega_e = -3$.

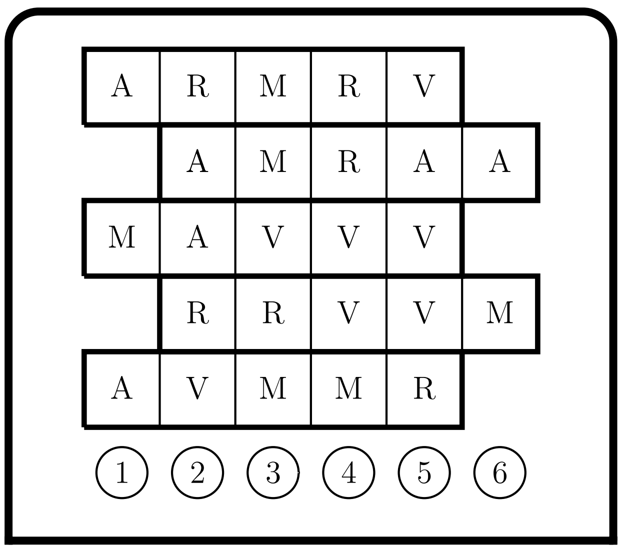
2. El grafo es hamiltoniano porque contiene un ciclo hamiltoniano: (a, b, d, c, e, f, a). La secuencia de grados es $(2, 2, 3, 3, 3, 3)$, luego como hay más de dos vértices con grado impar, el grafo no es ni euleriano ni semi-euleriano.

3. El grafo no es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar, por ejemplo (a,f,e,a). Luego no se puede colorear con dos colores y $\chi(G) \geq 3$. Por otra parte si uso el algoritmo voraz para coloraciones con el orden (a, e, f, c, b, d) obtengo una coloración propia con tres colores (a, c tienen el color 1, e, b tienen el color 2 y f, d tienen el color 3). Luego $\chi(G) \leq 3$. La única solución a estas dos desigualdades es $\chi(G) = 3$.

---

2. Control abril 2014 (2)

Problema 2.1 Un juego electrónico tiene una pantalla formada por 25 celdas iguales dispuestas tal y como muestra la figura. Dichas celdas están coloreadas de manera que en todo momento 6 son rojas (R), 7 son verdes (V), 6 son azules (A) y 6 son magenta (M).



1. ¿Cuántas configuraciones distintas puede tener la pantalla del juego?

Debajo de la pantalla hay seis botones marcados del 1 al 6 (ver figura). Un jugador puede presionar una secuencia cualquiera de botones con una única condición: no se puede presionar el mismo botón dos veces consecutivas.

2. ¿Cuántas secuencias distintas de n pulsaciones puede efectuar un jugador?

Al presionar uno cualquiera de los botones del juego se produce un cambio complicado (pero determinista) de la configuración de colores de la pantalla. Es decir, dada una pantalla inicial cualquiera, siempre obtenemos la misma pantalla final después de efectuar la misma secuencia de pulsaciones.

3. Sabiendo que $5^{50} = 25^{25} > 25!$, demostrar que, si partimos de la configuración de la pantalla de la figura, existen al menos dos secuencias diferentes de 50 pulsaciones de los botones tales que ambas producen exactamente la misma configuración final de la pantalla.

Solución.

1. Es un problema de permutaciones de 25 elementos en las que hay elementos iguales y que forman cuatro grupos de seis (tres grupos) y siete (un grupo) elementos. Luego

$$\text{Solución} \;=\; \frac{25!}{(6!)^3\,7!}\,.$$

2. Es una aplicación del principio del producto: en la primera pulsación tenemos seis opciones, mientras que en el resto de las pulsaciones sólo tenemos cinco opciones (al no poderse presionar un botón dos veces consecutivas). Luego el resultado es:

$$\text{Solución} \;=\; 6 \times 5^{n-1}\,.$$

3. En este caso tenemos secuencias de 50 pulsaciones, luego el número posible de pulsaciones es 6×5^{49}. Entonces:

$$6 \times 5^{49} \;>\; 5^{50} \;=\; 25^{25} \;>\; 25! \;>\; \frac{25!}{(6!)^3\,7!}\,.$$

Por lo tanto hay más secuencias de pulsaciones que pantallas posibles. El principio del palomar nos garantiza que hay al menos dos secuencias de pulsaciones distintas que corresponden a una cierta pantalla. `Nota:` el papel de los palomares lo juegan las pantallas y el papel de las palomas lo juegan las secuencias de pulsaciones.

Problema 2.2

1. Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n \;=\; a_{n-1} + 2a_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,, \qquad a_1 = 1\,, \qquad a_2 = 3\,.$$

2. Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n \;=\; a_{n-1} + 2a_{n-2} - 3 \cdot 2^n\,, \quad n \geq 3\,, \qquad a_1 = 1\,, \qquad a_2 = 3\,.$$

Solución.

1. El polinomio característico de la ecuación homogénea es $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Luego hay dos raíces distintas $x = 2$ y $x = -1$. Luego la solución general es

$$a_n \;=\; A\,2^n + B\,(-1)^n\,.$$

Las constantes A y B las obtenemos con las condiciones iniciales. Obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución es $A = 2/3$ y $B = 1/3$. La solución es:

$$a_n \;=\; \frac{1}{3}\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]\,, \quad n \geq 1\,.$$

2. La solución general de la ecuación homogénea es idéntica a la del apartado anterior:

$$a_n \;=\; A\,2^n + B\,(-1)^n\,.$$

Como 2 es una raíz del polinomio característico con multiplicidad 1, la solución particular de la ecuación no homogénea tendrá la forma $a_n = Cn2^n$. Si sustituimos esta expresión en la ecuación no homogénea, obtendremos el valor de C para el que la expresión anterior sea solución de dicha ecuación. El resultado es $C = -2$. Luego la solución de la ecuación no homogénea es:

$$a_n \;=\; A\,2^n + B\,(-1)^n - 2\,n\,2^n\,.$$

Las constantes A y B las obtenemos con las condiciones iniciales. Obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución es $A = 4$ y $B = 3$. La solución es:

$$a_n \;=\; 2^{n+2} + 3\times(-1)^n - n\,2^{n+1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Problema 2.3 Sea $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ el conjunto de vértices de un grafo simple ponderado $G = (V, E, \omega)$ cuya "matriz de pesos" viene dada por:

V	a	b	c	d	e	f	g
a	$\cdot$	1	$\cdot$	$\cdot$	1	-1	$\cdot$
b	1	$\cdot$	1	-2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
c	$\cdot$	1	$\cdot$	$\cdot$	1	$\cdot$	1
d	$\cdot$	-2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	-3
e	1	$\cdot$	1	$\cdot$	$\cdot$	-1	$\cdot$
f	-1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	-1	$\cdot$	$\cdot$
g	$\cdot$	$\cdot$	1	-3	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Por ejemplo, $\{a, b\} \in E$ y su peso es $\omega(\{a, b\}) = 1$; sin embargo, $\{a, c\} \notin E$.

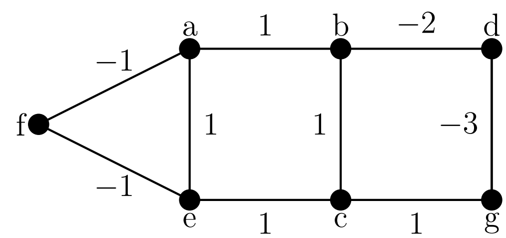
1. Encontrar un árbol generador de peso mínimo y calcular dicho peso mínimo.

Sea ahora el grafo simple $H = (V, E)$.

2. Decir si H es euleriano, semi-euleriano, hamiltoniano y/o semi-hamiltoniano.
3. Calcular $\chi(H)$ usando técnicas de teoría de grafos.

Solución.

1. El grafo ponderado pedido es el siguiente:



El árbol generador de peso mínimo lo construimos usando el algoritmo de Kruskal. Las aristas que contiene dicho árbol son (en orden de elección):

$$E = \{\{d,g\},\{b,d\},\{f,a\},\{f,e\},\{a,b\},\{e,c\}\}.$$

Su peso es $\omega = \sum_{e\in E} \omega_e = -5$.

2. El grafo es hamiltoniano porque contiene un ciclo hamiltoniano: (a,b,d,g,c,e,f,a). La secuencia de grados es $(2,2,2,3,3,3,3)$, luego como hay más de dos vértices con grado impar, el grafo no es ni euleriano ni semi-euleriano.

3. El grafo no es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar, por ejemplo (a,f,e,a). Luego no se puede colorear con dos colores y $\chi(G) \geq 3$. Por otra parte si uso el algoritmo voraz para coloraciones con el orden (a,e,f,c,b,d,g) obtengo una coloración propia con tres colores (a,c,d tienen el color 1, e,b,g tienen el color 2 y f tiene el color 3). Luego $\chi(G) \leq 3$. La única solución a estas dos desigualdades es $\chi(G) = 3$.

---

3. Examen final mayo 2014

Problema 3.1

- Sean a camiones idénticos y b furgonetas distintas todas ellas entre sí. ¿Cuántas caravanas distintas se pueden formar con todos los vehículos de manera que no haya dos furgonetas seguidas? Si a se considera fijo, ¿cuál es el rango posible de valores de b para tener un número positivo de caravanas distintas?

- Encontrar la función generatriz F que codifica el problema de encontrar el número de particiones distintas de un natural N en naturales n_i tal que cada uno de ellos aparezca un número par de veces. Encontrar los cinco primeros términos **no nulos** de la serie de potencias de F.
`Nota:` la solución para F **no** puede contener series de potencias.

- Probar por **inducción** que $n^n > n!$ para todo natural $n \geq 2$.

SOLUCIÓN.

- La primera tarea es decidir dónde colocar las b furgonetas en cualquiera de los $a+1$ lugares entre camiones (incluyendo el principio y el final de la caravana). El resultado es $\binom{a+1}{b}$. La segunda tarea, es colocar las furgonetas en los lugares escogidos y, como son todas distintas, podemos hacer esta tarea de $b!$ maneras. El principio del producto nos garantiza que la solución es
$$\binom{a+1}{b}\, b!\,.$$
El coeficiente binomial no es nulo si $0 \leq b \leq a+1$. Éste es el rango pedido.

- La función generatriz se escribe como
$$\begin{aligned} F(x) &= (1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^6+x^{12}+\cdots) \\ &\quad \times (1+x^8+x^{16}+\cdots)(1+x^{10}+\cdots)\ldots \\ &= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^4}\,\frac{1}{1-x^6}\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k}}\,. \end{aligned}$$
Los primeros 5 coeficientes no nulos se obtienen de la ecuación anterior:
$$\begin{aligned} F(x) &= (1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^6+\cdots) \\ &\quad \times (1+x^8+\cdots)\ldots = 1+x^2+2x^4+3x^6+5x^8+\cdots\,. \end{aligned}$$

- El paso base es trivial: si $n=2$, $2^2 = 4 > 2! = 2$. Supongamos ahora que $k^k > k!$ para k arbitrario, pero fijo. Veamos qué ocurre en el siguiente natural:
$$(k+1)^{k+1} = (k+1)\,(k+1)^k > (k+1)\,k^k > (k+1)\,k! = (k+1)!\,,$$
ya que $k+1 > k$. Luego el principio de inducción nos garantiza que la desigualdad $n^n > n!$ es cierta para todo entero $n \geq 2$.

Problema 3.2 Sea el conjunto $X = A \times B$ donde $A = \{1,2,5,9,90\}$ y $B = \{7,9,11\}$. Definimos ahora la siguiente relación binaria $\mathcal{R}$ sobre X:
$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(u,w) \;\Leftrightarrow\; [(x \mid u) \wedge (x \neq u)] \vee [(x=u) \wedge (y \leq w)]\,.$$
donde $\vee$ y $\wedge$ son respectivamente los operadores lógicos OR y AND.

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.
- Encontrar su diagrama de Hasse.
- ¿Es $(X,\mathcal{R})$ un retículo?

- ¿Es $(X, \mathcal{R})$ un álgebra de Boole?

<u>SOLUCIÓN.</u>

- Como $x = x$ e $y \leq y$, entonces $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ para todo $(x, y) \in X$. Luego $\mathcal{R}$ es reflexiva.

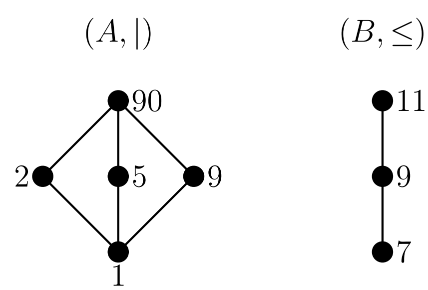
  Si $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$, entonces $(x \mid a \wedge x \neq a) \vee (x = a \wedge y \leq b)$. Si $(a, b)\mathcal{R}(x, y)$, entonces $(a \mid x \wedge x \neq a) \vee (x = a \wedge b \leq y)$. Si asumimos que $x \neq a$, como $(\mathbb{N}, |)$ en un conjunto parcialmente ordenado, entonces $x \mid a$ y $a \mid x$ implican que $x = a$. Luego se deben cumplir las condiciones $y \leq b$ y $b \leq y$, cuya única solución es $y = b$. Luego $(x, y) = (a, b)$ y $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

  Si $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$, entonces $(x \mid a \wedge x \neq a) \vee (x = a \wedge y \leq b)$. Si $(a, b)\mathcal{R}(m, n)$, entonces $(a \mid m \wedge m \neq a) \vee (m = a \wedge b \leq n)$. Ahora hay varios casos:

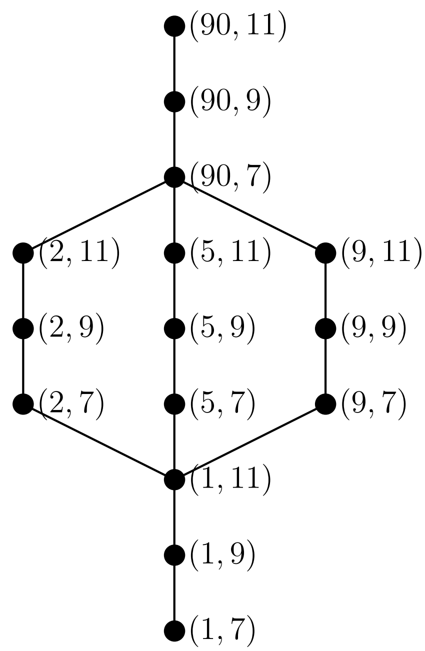
  - Si $x \neq a$ y $a \neq m$, entonces $x \mid a$ y $a \mid m$ implican que $x \mid m$, luego $(x, y)\mathcal{R}(m, n)$.
  - Si $x = a$ y $a \neq m$, entonces $x \mid m$ implica que $(x, y)\mathcal{R}(m, n)$.
  - Si $x \neq a$ y $a = m$, entonces $x \mid m$ implica que $(x, y)\mathcal{R}(m, n)$.
  - Si $x = a = m$, entonces $y \leq b$ y $b \leq m$ implica que $y \leq m$ y $(x, y)\mathcal{R}(m, n)$.

  Luego $\mathcal{R}$ es transitiva.

- El diagrama de Hasse de $(X, \mathcal{R})$ lo construimos a partir de los diagramas de Hasse de $(A, |)$ y $(B, \leq)$. Estos son

  Cada punto del diagrama de Hasse de $(A, |)$ se ha de sustituir por el diagrama de Hasse de $(B, \leq)$. El resultado es:



- Sean dos elementos comparables $a, b \in X$. Supongamos que $a\mathcal{R}b$, entonces $\sup(a, b) = b$ e $\text{ínf}(a, b) = a$. Sean ahora dos elementos no comparables $a, b \in X$. Estos han de ser de la forma (x, y) y (z, w) con $x \neq z$ y $x, z = 2, 5, 9$. Entonces $\sup(a, b) = (90, 7)$ e $\text{ínf}(a, b) = (1, 11)$. Luego, dado cualquier par de elementos de X, existe su ínfimo y su supremo; luego $(X, \mathcal{R})$ es un retículo.

- En clase vimos que si el diagrama de Hasse de un retículo contiene como subretículo al diagrama de Hasse de $(A, |)$, entonces el primer retículo no es distributivo y, por tanto, no es un álgebra de Boole. Otra manera de verlo es usar el resultado siguiente: en todo retículo $(A, \preceq)$ distributivo y acotado, cada elemento de A tiene un único elemento complementario. Dado que $(X, \mathcal{R})$ es acotado y $(1, 11)$ no tiene elemento complementario, entonces $(X, \mathcal{R})$ no puede ser distributivo.

Problema 3.3

- Resolver la congruencia lineal $12x \equiv 20 \pmod{26}$.

- Calcular el resto de dividir 3^{240010} entre 52.

<u>SOLUCIÓN.</u>

- Como $d = \text{mcd}(12, 26) = 2$ y $d \mid 20$, entonces la congruencia $12x \equiv 20 \pmod{26}$ tiene dos soluciones módulo 26.

Dado que $\operatorname{mcd}(2,26) = 2$, la congruencia lineal anterior es equivalente a $3x \equiv 5 \pmod{13}$, que tiene solución única módulo 13. Como

$$-4 \cdot 3 = -12 \equiv 1 \pmod{13},$$

el inverso multiplicativo de 3 módulo 13 es -4. Luego, la solución es

$$x \;=\; 5 \cdot (-4) \pmod{13} \equiv -20 \pmod{13} \equiv 6 \pmod{13}.$$

Las dos soluciones módulo 26 buscadas son:

$$x \;\equiv\; \begin{cases} 6 \pmod{26}, \\ 6 + 13 \pmod{26} \equiv 19 \pmod{26}. \end{cases}$$

- El valor de $\phi(52)$ está dado por

$$\phi(52) \;=\; \phi(13 \cdot 2^2) = 52 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} = 24.$$

El teorema de Euler nos garantiza que $3^{24} \equiv 1 \pmod{52}$ ya que $\operatorname{mcd}(3,52) = 1$. Como $240010 = 24 \times 10^4 + 10$:

$$3^{240010} = \left(3^{24}\right)^{10000} \times 3^{10} \equiv 3^{10} \pmod{52}.$$

Como $3^4 = 81 \equiv 29 \pmod{52}$, $3^5 \equiv 3 \times 29 \pmod{52}$, entonces $3^5 \equiv 3 \times 29 \pmod{52} \equiv 87 \pmod{52} \equiv 35 \pmod{52}$. Luego

$$3^{10} \equiv 35^2 \pmod{52} \equiv 1225 \pmod{52} \equiv 185 \pmod{52} \equiv 29 \pmod{52}.$$

Finalmente concluimos que

$$3^{240010} \bmod 52 \;=\; 29.$$

---

4. Examen extraordinario junio 2014

Problema 4.1

- Un informático ha escrito un programa que elige al azar 50 caracteres de entre un alfabeto de 100 caracteres (permitiéndose tantas repeticiones como se quiera) y luego los ordena alfabéticamente. ¿Cuántas "palabras" distintas se pueden obtener de este modo? **Nota:** en el resultado final se aceptan solamente enteros, factoriales $p!$ o coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$.

- Sea A un conjunto finito no vacío y sea $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de sus partes. Sea ahora una función $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$. Decir si existe una función f que sea inyectiva o sobreyectiva. Si una respuesta es afirmativa, dar un ejemplo de f con dominio en $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10^3\}$. `Ayuda`: dependiendo del método escogido, es útil saber que $\log 2 > 1/2$.

Solución.

- El problema es equivalente a repartir 50 bolas idénticas en 100 cajas distinguibles (=99 barras móviles) pudiendo quedar cajas vacías. Luego

$$\text{Solución} \;=\; \binom{149}{50}\,.$$

- Tenemos que considerar dos tipos de funciones
  - Funciones $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ inyectivas. De este tipo existen muchas; por ejemplo $f(x) = \{x\}\ \forall\, x \in A$.
  - Funciones $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ sobreyectivas. De este tipo no existen ninguna, ya que si $|A| = n \geq 1$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ y $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La demostración de esta última desigualdad se puede hacer de dos modos:
    - Por inducción. El caso base es trivial: si $n = 1$, $2^n = 2 > n = 1$. Supongamos que $2^k > k$ para k arbitrario pero fijo. Entonces, para el siguiente entero $k+1$ se cumple que

      $$2^{k+1} \;=\; 2\times 2^k \;>\; 2k \;=\; k+k \;\geq\; k+1\,.$$

      Luego la propiedad buscada también es cierta para $k+1$. El principio de inducción nos garantiza que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    - Usando métodos de cálculo. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2^x - x$. g es una función continua y derivable que satisface $g(1) = 2 - 1 = 1 > 0$ y $g'(x) = 2^x \log 2 - 1$. Si $x \in [1,\infty)$, $g'(x)$ satisface que:

      $$g'(x) \;=\; 2^x \log 2 - 1 \;\geq\; 2\log 2 - 1 \;>\; 1 - 1 \;=\; 0\,,$$

      dónde hemos aplicado que $x \geq 1$ y $\log 2 > 1/2$. Luego como $g(1) > 0$ y g es estrictamente creciente en $[1,\infty)$, entonces $g(x) > 0$ para todo $x \in [1,\infty)$. En particular $g(n) = 2^n - n > 0$ ó $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N} \subseteq [1,\infty)$.

Problema 4.2 Sea la familia de grafos $G_n = (V_n, E_n)$ con $n \in \mathbb{N}$ definida de la siguiente manera:

- Cada vértice $v \in V_n$ corresponde a una cadena de bits de longitud n con un número **par** de unos.

- Dos vértices $x, y \in V_n$ son adyacentes ($\{x,y\} \in E_n$) si y sólo si difieren exactamente en dos bits.

Si n es un natural fijo, calcular $|V_n|$ y $|E_n|$. ¿Es G_n un grafo regular? En caso afirmativo dar el grado común y, en caso negativo, dar la secuencia de grados. ¿Para qué valores de n es G_n euleriano? `Ayuda`: Los valores posibles de n forman clases de congruencia módulo m para un cierto valor de m.

Solución.

El número de vértices es igual al número a_n de cadenas de bits de longitud n con un número par de unos. Por simetría este número debe ser igual a $a_n = |V_n| = 2^{n-1}$ con $n \in \mathbb{N}$. Otra manera de verlo es la siguiente. Si denotamos por b_n al número de cadenas de bits de longitud n con un número impar de unos, entonces $a_n + b_n = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además se cumple la recurrencia siguiente: como cada cadena de bits de longitud n con un número par de unos empieza por un 1 ó por un 0, se tiene que

$$a_n \;=\; b_{n-1} + a_{n-1} \;=\; 2^{n-1} \;=\; |V_n| \,.$$

Como dos vértices son adyacentes si y sólo si difieren exactamente en dos bits y cambiar dos bits en una cadena de bits de longitud n con un número par de unos no cambia el carácter par del número de unos, entonces el número de aristas incidentes a un vértice $v \in V_n$ dado es

$$d(v) \;=\; \binom{n}{2} \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \,.$$

Este número es el grado del vértice. Como este argumento no depende del vértice escogido, todos ellos tienen el mismo grado y el grafo G_n es regular.

En número de aristas $|E_n|$ lo calculamos usando el teorema del apretón de manos:

$$|E_n| \;=\; \frac{1}{2}\sum_{v\in V_n} d(v) \;=\; \frac{1}{2}\binom{n}{2}|V_n| \;=\; 2^{n-2}\binom{n}{2} \,.$$

G_n es euleriano si y solo si todos los vértices tienen grado par. Si $n = 1$, $|E_1| = 0$ y el grafo no puede ser euleriano al no tener aristas. Entonces G_n es euleriano si y sólo si $\binom{n}{2}$ es par para todo $n \geq 2$. Podemos replantear esta condición de la siguiente manera:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2p \quad\Leftrightarrow\quad n(n-1) = 4p \quad\Leftrightarrow\quad n(n-1) \equiv 0 \pmod{4} \,.$$

Los números n pueden pertenecer a cuatro clases de congruencia módulo 4:

- Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, entonces $n(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$.
- Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $n(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$.
- Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, entonces $n(n-1) \equiv 2 \pmod{4}$.
- Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces $n(n-1) \equiv 2 \pmod{4}$.

Luego la solución a nuestro problema es:

$$n \;=\; \begin{cases} 4p & \text{con } p \in \mathbb{N}, \\ 4p+1 & \text{con } p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ya que debemos excluir los casos $n = 0$ ($|V_0| = 0$) y $n = 1$ ($|E_1| = 0$).

Problema 4.3 Sea la familia de grafos

$$T \;=\; \{G = (V, E) \mid G \text{ es conexo}\,, \quad |V| - |E| = 1\,, \quad |V| \leq 5\}\,.$$

- Sea la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre T de la siguiente manera:

$$G_1 \, \mathcal{R} \, G_2 \quad \Leftrightarrow \quad G_1 \text{ y } G_2 \text{ son isomorfos.}$$

  Describir las clases de equivalencia $[G]_{\mathcal{R}}$ y calcular el conjunto cociente $C = T/\mathcal{R}$.

- Sobre el conjunto C definimos la relación $\mathcal{S}$: si $[G_1]_{\mathcal{R}}, [G_2]_{\mathcal{R}} \in C$, entonces

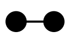
$$[G_1]_{\mathcal{R}} \, \mathcal{S} \, [G_2]_{\mathcal{R}} \quad \Leftrightarrow \quad |V_1| \leq |V_2| \, .$$

  Discutir si $\mathcal{S}$ es una relación de orden o no.

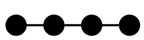
Solución.

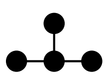
Los elementos del conjunto T son todos los árboles con a lo sumo cinco vértices. Las clases de equivalencia se caracterizan mediante el número de vértices y, si $|V| \geq 4$, es necesario añadir la secuencia de grados S. Éstas son:

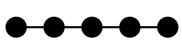
1. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 1\}$.

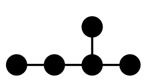
2. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 2\}$.

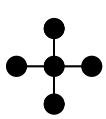
3. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 3\}$.

4. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 4 \wedge S = (1, 1, 2, 2)\}$.

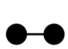
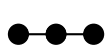
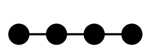
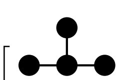
5. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 4 \wedge S = (1, 1, 1, 3)\}$.

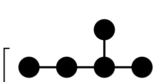
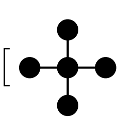
6. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 5 \wedge S = (1, 1, 2, 2, 2)\}$.

7. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 5 \wedge S = (1, 1, 1, 2, 3)\}$.

8. []$_{\mathcal{R}} = \{G = (V, E) \in T \mid |V| = 5 \wedge S = (1, 1, 1, 1, 4)\}$.

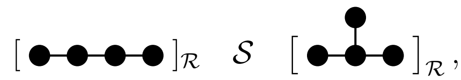
El conjunto cociente $C = T/\mathcal{R}$ es:

$C = \{$[]$_{\mathcal{R}}$, []$_{\mathcal{R}}$, []$_{\mathcal{R}}$, []$_{\mathcal{R}}$, []$_{\mathcal{R}}$, [ ]$_{\mathcal{R}}$,

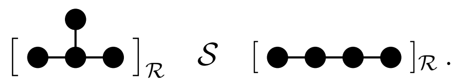
[]$_{\mathcal{R}}$, []$_{\mathcal{R}}\}$

y tiene cardinal $|C| = 8$.

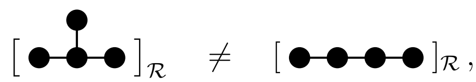
La relación $\mathcal{S}$ no es de orden puesto que no es antisimétrica. Por un lado se cumple que



ya que $4 \leq 4$. Por la misma razón se cumple que

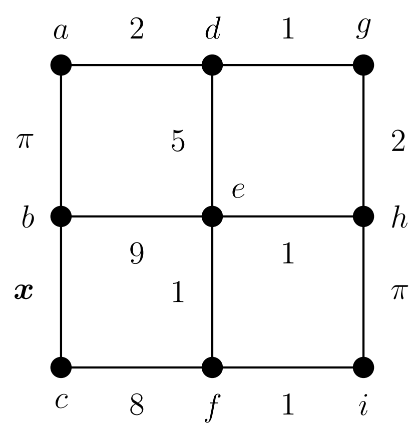


Pero



lo que implica que $\mathcal{S}$ no es antisimétrica.

Problema 4.4 Sea el siguiente grafo ponderado $G = (V, E, \omega)$:



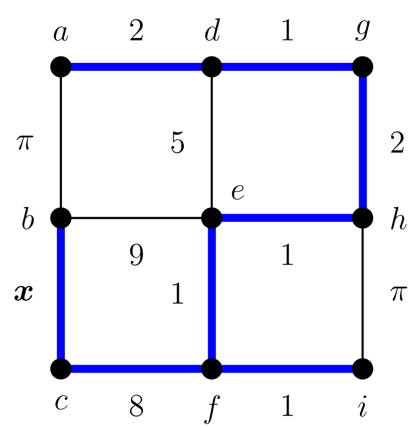
Calcular el rango de valores posibles del parámetro $\boldsymbol{x}$ para poder encontrar (usando técnicas de teoría de grafos) un camino de peso mínimo entre los vértices b e i que pase **obligatoriamente** por la arista $\{b, c\}$. ¿Cuál es el peso de dicho camino?

<u>Solución.</u>

Dado que la distancia $d(b, i)$ coincide por simetría con $d(i, b)$, podemos buscar mediante el algoritmo de Dijkstra el camino de peso mínimo entre los vértices i y b. De esta manera podemos evitar usar la variable x desde un principio y facilitar el cálculo. La tabla que se obtiene al aplicar el algoritmo de Dijkstra es:

i	$\boxed{(0,\text{i})}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
a	∞	∞	∞	∞	∞	$(8,d)$	$\boxed{(8.\text{d})}$	$*$
b	∞	∞	$(11,e)$	$(11,e)$	$(11,e)$	$(11,e)$	$(11,e)$	$\text{mín}(11,9+x)$
c	∞	$(9,f)$	$(9,f)$	$(9,f)$	$(9,f)$	$(9,f)$	$(9,f)$	$\boxed{(9,\text{f})}$
d	∞	∞	$(7,e)$	$(7,3)$	$(6,g)$	$(6,g)$	$*$	$*$
e	∞	$(2,f)$	$\boxed{(2,\text{f})}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
f	$(1,i)$	$\boxed{(1,\text{i})}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
g	∞	∞	∞	$(5,h)$	$\boxed{(5,\text{h})}$	$*$	$*$	$*$
h	(π,i)	(π,i)	$(3,e)$	$\boxed{(3,\text{e})}$	$*$	$*$	$*$	$*$

Como quiero que la arista $\{c,b\}$ esté en el camino de peso mínimo, debo escoger x tal que $\text{mín}(11,9+x) = 9+x$. Esto implica que $0 < x < 2$, ya que el peso de cada arista debe ser positivo para que funcione el algoritmo de Dijkstra. El peso del camino buscado es $\omega = 9+x < 11$. El árbol con raíz en el vértice i generado por este algoritmo es:



Problema 4.5 Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n \;=\; 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2\,, \quad n \geq 2\,, \quad a_0 = a_1 = 1\,.$$

<u>Solución.</u>

El polinomio característico asociado a la ecuación de recurrencia homogénea es $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Luego tiene una sola raíz $x = 1$ con multiplicidad 2. La solución general de la parte homogénea es

$$a_{h,n} \;=\; A + Bn\,.$$

La solución particular de la ecuación de recurrencia no homogénea tiene la forma $a_{p,n} = Cn^2$, ya que $x = 1$ es raíz del polinomio anterior con multiplicidad 2. El valor de C lo obtenemos sustituyendo esta ecuación para $a_{p,n}$ en la ecuación de recurrencia no homogénea:

$$Cn^2 \;=\; 2C(n-1)^2 - C(n-2)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad C \;=\; 1\,.$$

Luego la solución general de la ecuación de recurrencia no homogénea es:

$$a_n \;=\; A + Bn + n^2\,.$$

Los valores de las constantes A y B se obtienen a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} a_0 =& 1 = A \\ a_1 =& 1 = A + B + 1\,. \end{aligned}$$

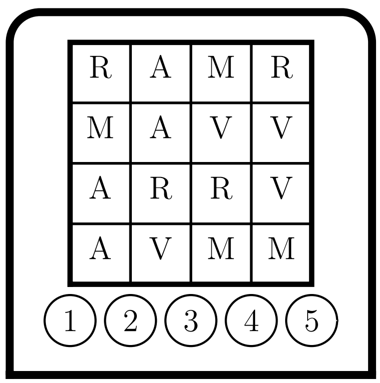
Luego $A = 1$ y $B = -1$. La solución buscada es

$$a_n \;=\; 1 - n + n^2\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

---

5. Examen extraordinario junio 2015

Problema 5.1 Un juego electrónico tiene una pantalla formada por 16 celdas iguales dispuestas en una matriz 4×4, tal y como muestra la figura. Dichas celdas están coloreadas de manera que en todo momento 4 son rojas (R), 4 son verdes (V), 4 son azules (A) y 4 son magenta (M).



1. ¿Cuántas configuraciones distintas puede tener la pantalla del juego?

   <u>SOLUCIÓN.</u> Es el Problema 1.2(1).

Debajo de la pantalla hay cinco botones marcados del 1 al 5 (ver figura). Un jugador puede presionar una secuencia cualquiera de botones con una única condición: no se puede presionar el mismo botón dos veces consecutivas.

2. ¿Cuántas secuencias distintas de n pulsaciones puede efectuar un jugador?

   <u>SOLUCIÓN.</u> Es el Problema 1.2(2).

3. Probar por **inducción** que $n^n > n!$ para todo natural $n \geq 2$.

   <u>SOLUCIÓN.</u> Es el Problema 3.1(3).

Al presionar uno cualquiera de los botones del juego se produce un cambio complicado (pero determinista) de la configuración de colores de la pantalla. Es decir, dada una pantalla inicial cualquiera, siempre obtenemos la misma pantalla final después de efectuar la misma secuencia de pulsaciones.

4. Usando el resultado (3), demostrar que, si partimos de la configuración de la pantalla de la figura, existen al menos dos secuencias diferentes de 32 pulsaciones de los botones tales que ambas producen exactamente la misma configuración final de la pantalla.

   SOLUCIÓN. Es el Problema 1.2(3).

Problema 5.2

1. Calcular el inverso multiplicativo (si existe) de 2^{68} en $\mathbb{Z}_{19}$.

   SOLUCIÓN.

   Este inverso multiplicativo existe y es único porque 2^{68} y 19 son coprimos. Buscamos un x tal que
   $$2^{68} \cdot x \equiv 1 \pmod{19}.$$
   Como 19 es primo, entonces para todo $y \not\equiv 0 \pmod{19}$, se cumple el teorema pequeño de Fermat:
   $$2^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$
   Como $68 = 18 \cdot 3 + 14$ y $18 - 14 = 4$, entonces, si escogemos $x \equiv 2^4 \pmod{19}$, tenemos que
   $$2^{68} \cdot 2^4 = 2^{72} = \left(2^{18}\right)^4 \equiv 1 \pmod{19}.$$
   Luego, la solución es:
   $$x \equiv 2^4 \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}.$$

2. Encontrar (si existen) los divisores de cero en $\mathbb{Z}_{16}$.

   SOLUCIÓN.

   Un divisor de cero de $\mathbb{Z}_{16}$ es un elemento $x \not\equiv 0 \pmod{16}$ tal existe un elemento $y \not\equiv 0 \pmod{16}$ tal que $x \cdot y \equiv 0 \pmod{16}$. Como $16 = 4^2$, tendremos que buscar pares de elementos de $\mathbb{Z}_{16}$ que contengan el factor 16 al multiplicarlos entre sí:

   - $2 \cdot 8 = 16 \equiv 0 \pmod{16}$.
   - $4 \cdot 4 = 16 \equiv 0 \pmod{16}$.
   - $4 \cdot 12 = 48 \equiv 0 \pmod{16}$.
   - $6 \cdot 8 = 48 \equiv 0 \pmod{16}$.
   - $8 \cdot 10 = 80 \equiv 0 \pmod{16}$.

- $8 \cdot 14 = 112 \equiv 0 \pmod{16}$.

Los divisores de cero de $\mathbb{Z}_{16}$ son sus elementos pares no nulos: $\{2n \in \mathbb{Z}_{16} \,:\, 1 \leq n \leq 7\}$.

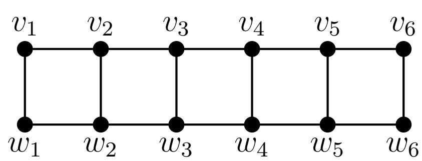
3. Sea $A = \{0,1,2\} \times \{2,4,7,9\}$. Sobre él definimos la siguiente relación $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow (a+b) \mid (c+d)$. ¿Es $(A, \mathcal{R})$ un retículo?

   <u>Solución.</u>

   El conjunto $(A, \mathcal{R})$ no es un conjunto parcialmente ordenado porque $\mathcal{R}$ sobre A no es antisimétrica. Por una parte tenemos que $\{(0,4),(2,2)\} \subset A$, $(0,4)\mathcal{R}(2,2)$ y $(2,2)\mathcal{R}(0,4)$ (ya que $4 \mid 4$), pero por otra parte $(0,4) \neq (2,2)$, luego $\mathcal{R}$ no es antisimétrica. Si $(A, \mathcal{R})$ no es un conjunto parcialmente ordenado, no puede ser un retículo.

Problema 5.3 Sea la familia de grafos $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que cada miembro $G_n = (V_n, E_n)$ se define de la siguiente manera:

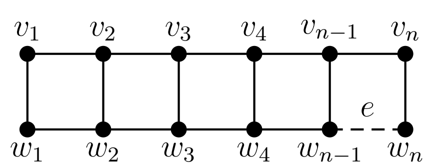
- $V_n = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$
- $E_n = \{\{v_i, v_{i+1}\} \colon 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{w_i, w_{i+1}\} \colon 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{v_i, w_i\} \colon 1 \leq i \leq n\}$.



1. Encontrar usando el teorema de contracción-borrado una relación de recurrencia para el polinomio cromático P_{G_n} de G_n. Encontrar las condiciones iniciales necesarias.

   <u>Solución.</u>

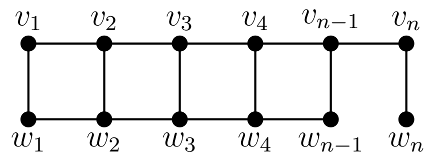
   Aplicamos contracción-borrado en G_n. Ilustraremos el argumento con $n = 6$, pero la deducción es válida para todo n.

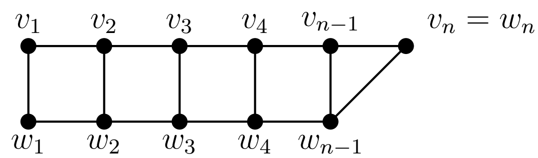
   El teorema de contracción-borrado nos asegura que

   $$P_{G_n} \;=\; P_{G_n - e} - P_{G_n/e}\,,$$

   donde e es la arista marcada con línea discontinua en la figura anterior. El grafo $G_n - e$ con la arista e borrada es



El grafo G_n/e con la arista e contraída es



Aplicando el Teorema 135 de las notas, obtenemos

$$P_{G_n} = P_{G_n - e} - P_{G_n/e} = \frac{P_{G_{n-1}}\, P_{P_3}}{P_{K_1}} - \frac{P_{G_{n-1}}\, P_{K_3}}{P_{K_2}} = (q^2 - 3q + 3)\, P_{G_{n-1}}\,,$$

válida para todo entero $n \geq 2$. Esta es una relación de recurrencia lineal de orden 1 para P_{G_n}, luego necesitamos una condición inicial:

$$P_{G_1}(q) = P_{K_2}(q) = q(q-1)\,.$$

2. Resolver dicha ecuación usando funciones generatrices.

<u>Solución.</u> Definimos la función generatriz de la manera usual (empezando la suma en $n = 1$):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{G_n}\, x^n = q(q-1)\, x + \sum_{n=2}^{\infty} P_{G_n}\, x^n\,.$$

De la ecuación de recurrencia obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_{G_n}\, x^n = (q^2 - 3q + 3) \sum_{n=2}^{\infty} P_{G_{n-1}}\, x^n\,.$$

Luego

$$F - q(q-1)x = (q^2 - 3q + 3)xF\,.$$

La solución para F es

$$F(x) = \frac{q(q-1)x}{1 - (q^2 - 3q + 3)x} = \sum_{n=1}^{\infty} q(q-1)(q^2 - 3q + 3)^{n-1}\, x^n\,,$$

luego

$$P_{G_n}(q) \;=\; q\,(q-1)\,(q^2 - 3q + 3)^{n-1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

3. Usando la expresión de $P_{G_n}(q)$, calcular $\chi(G_n)$.

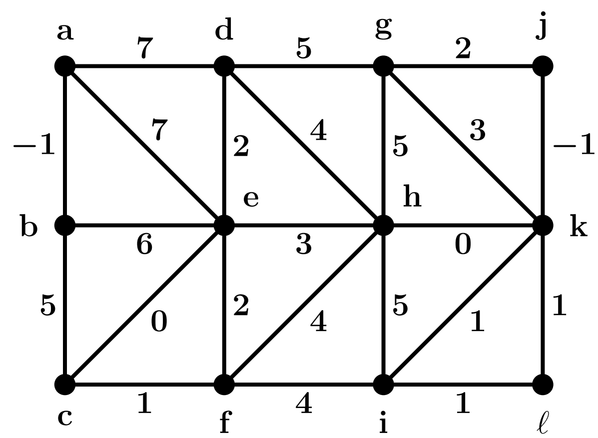
<u>Solución.</u>

$P_{G_n}(q)$ se anula en $q = 0, 1$. Además las raíces de $q^2 - 3q + 3$ no son reales, luego $\chi(G_n) = 2$. De hecho, $P_{G_n}(2) = 2$, ya que G_n es bipartito.

6. Control abril 2016 (1)

Problema 6.1

1. En el grafo ponderado de la figura



calcular un árbol generador T de peso mínimo:

a) Escribir las aristas que pertenecen a T en el orden en que se van escogiendo según el algoritmo de Prim.

b) Calcular el peso mínimo de dicho árbol T.

Solución.

Sea $T = (V, F)$ el árbol buscado usando el algoritmo de **Prim**.

a) El conjunto de aristas es $F = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{e, d\}, \{e, h\}, \{h, k\}, \{k, j\}, \{k, \ell\}, \{\ell, i\}, \{j, g\}\}$ y se han escrito en el orden en que se han añadido usando el algoritmo de Prim.

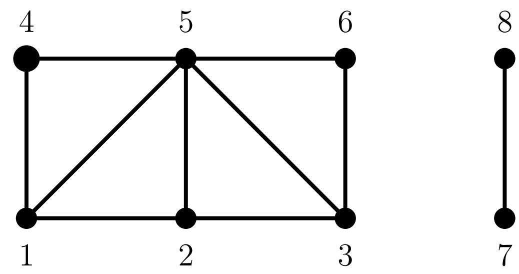
b) El peso mínimo es $\omega_{\min} = 13$.

2. Sea N un natural fijo. Encontrar un grafo simple con N vértices que sea hamiltoniano, euleriano y tal que el ciclo hamiltoniano no coincida con el circuito euleriano.

Solución.

Basta considerar el grafo $C_N = (V, E)$ y añadirle las aristas $F = \{\{1, 3\},\{3, 5\},\{5, 1\}\}$. El grafo buscado es $G = (V, E \cup F)$. Es necesario que $N \geq 6$ para que este grafo cumpla las propiedades pedidas.

3. Sea el grafo G de la figura:



Calcular el número de coloraciones propias $P_G(q)$ de dicho grafo con q colores y su número cromático.

Solución.

El grafo es no conexo $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ y tiene dos componentes conexas. El polinomio cromático de la componente $G_2 = (V_2, E_2) \simeq K_2$ con $V_2 = \{7, 8\}$ es $P_{G_2}(q) = q(q-1)$.

Para la componente conexa de la izquierda $G_1 = (V_1, E_1)$ con $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ podemos usar el principio del producto:

- El vértice 1 lo puedo colorear de q maneras distintas.
- Una vez coloreado el vértice 1, el vértice 4 lo puedo colorear de $q-1$ maneras distintas.
- Una vez coloreados los vértices 1 y 4, el vértice 5 lo puedo colorear de $q-2$ maneras distintas.
- Una vez coloreados los vértices 1,4,5, el vértice 2 lo puedo colorear de $q-2$ maneras distintas.
- Una vez coloreados los vértices 1,2,4,5, el vértice 3 lo puedo colorear de $q-2$ maneras distintas.
- Una vez coloreados los vértices 1–5, el vértice 6 lo puedo colorear de $q-2$ maneras distintas.

Luego el principio del producto garantiza que $P_{G_1}(q) = q(q-1)(q-2)^4$. Finalmente, el mismo principio nos asegura que:

$$P_G(q) \ = \ P_{G_1}(q) P_{G_2}(q) \ = \ q^2 (q-1)^2 (q-2)^4 \,.$$

Como las raíces reales de P_G son $q = 0, 1, 2$, el natural menor tal que $P_G(q) > 0$ es $q = 3$, luego $\chi(G) = 3$ ($P_G(3) = 12$).

Problema 6.2 Nota: los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

1. Una compañía de vehículos comerciales fabrica camiones blancos y furgonetas azules. Dicha compañía quiere enviar P camiones y Q furgonetas, de manera que sólo las furgonetas lleven matrículas (todas distintas entre sí). ¿Cuántas caravanas distintas se pueden formar con todos los vehículos de manera que no haya dos furgonetas seguidos?

   <u>SOLUCIÓN.</u>

   Los camiones son idénticos, luego sólo se pueden colocar en fila de una única manera. Si suponemos que las furgonetas son idénticas, entonces se puede insertar una de ellas delante de todos los camiones, entre dos camiones o al final de todos los camiones. En cada uno de los posibles $P+1$ lugares se puede insertar una sola furgoneta o ninguna. Luego hay
$$\binom{P+1}{Q}$$
   maneras de hacerlo. Como las furgonetas son distinguibles, para cada configuración de las anteriores hay $Q!$ permutaciones de las furgonetas, luego el resultado final es:
$$Q!\binom{P+1}{Q}.$$

2. Resolver la ecuación de recurrencia
$$a_n \;=\; 2a_{n-1}+2a_{n-2}\,,\quad n\geq 3\,,\quad a_1=1\,,\quad a_2=4\,.$$

   <u>SOLUCIÓN.</u>

   Las raíces del polinomio característico son $x = 1\pm\sqrt{3}$, luego la solución general es $a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$. Si $a_1 = 1$ y $a_2 = 4$, tenemos que $a_2 = 2a_1 + 2a_0 = 4 = 2 + 2a_0$. Luego $a_0 = 1$.

   Usando las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 1$, se obtiene que $A = B = 1/2$. Luego:
$$a_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n\right]\,,\quad n\geq 1\,.$$

3. Una empresa tiene que inspeccionar una serie de ciudades y las quiere agrupar en 3 grupos de 3, 4 grupos de 4, 5 grupos de 5 y 6 grupos de 6. ¿De cuántas maneras puede lograrlo?

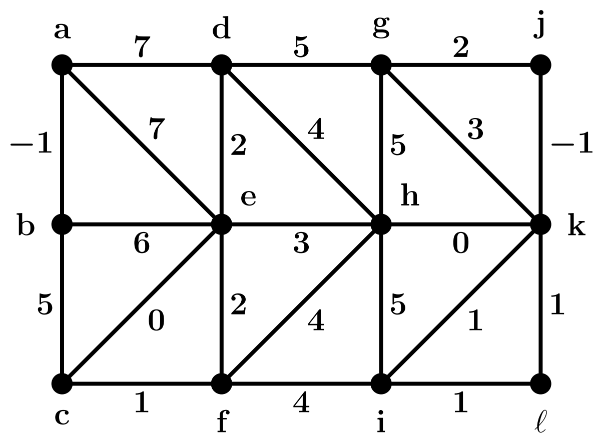
   <u>SOLUCIÓN.</u>

   Hay $9+16+25+36 = 86$ ciudades en total. El número de particiones es:
$$\frac{86!}{(3!)^3(4!)^4(5!)^5(6!)^6}\,\frac{1}{3!4!5!6!}\,,$$
   ya que el orden de las ciudades dentro de cada grupo es irrelevante, así como el orden de los grupos con el mismo cardinal.

7. Control abril 2016 (2)

Problema 7.1

1. En el grafo ponderado de la figura



calcular un árbol generador T de peso mínimo:

a) Escribir las aristas que pertenecen a T en el orden en que se van escogiendo según el algoritmo de Kruskal.

b) Calcular el peso mínimo de dicho árbol T.

<u>SOLUCIÓN.</u>

Sea $T = (V, F)$ el árbol buscado usando el algoritmo de **Kruskal**.

a) El conjunto de aristas es $F = \{\{a, b\}, \{k, j\}, \{c, e\}, \{h, k\}, \{c, f\}, \{k, i\}, \{\ell, k\}, \{j, g\}, \{e, d\}, \{e, h\}, \{b, c\}\}$ y se han escrito en el orden en que se han añadido usando el algoritmo de Kruskal.

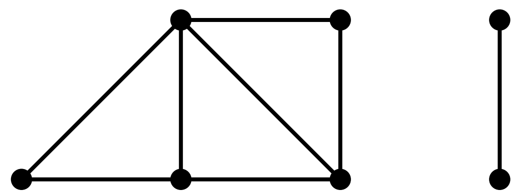
b) El peso mínimo es $\omega_{\min} = 13$.

2. Sea N un natural fijo. Encontrar un grafo simple con N vértices que no sea hamiltoniano, pero sí euleriano.

<u>SOLUCIÓN.</u>

Sean los ciclos $C_{N-2} = (V_1, E_1)$ y $C_3 = (V_3, E_3)$. Cada uno de ellos es un grafo regular con $d = 2$ y hamiltoniano. Supongamos que $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{N-2}\}$ y que $V_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$. El grafo $G = (V, E)$ se obtiene identificando un vértice de C_{N-2} (por ejemplo v_1) con otro de C_3 (por ejemplo u_1). Entonces $V = \{v_1, \ldots, v_{N-2}, u_2, u_3\}$ con $|V| = N$ y $E = E_1 \cup E_3$. En G todos los vértices tienen grado 2 excepto el vértice v_1 que tiene grado 4. G es euleriano porque es conexo y todos los vértices tiene grado par; pero no es hamiltoniano porque v_1 es un punto de corte. Esta construcción requiere que $N \geq 5$.

3. Sea el grafo G de la figura:



Calcular el número de coloraciones propias $P_G(q)$ de dicho grafo con q colores y su número cromático.

Solución.

El grafo no es conexo. El polinomio cromático de la componente de la derecha $G_1 \simeq K_2$ es $P_{G_1}(q) = q(q-1)$.

Para la componente conexa de la izquierda G_2 usamos el teorema que nos asegura que si un grafo G se puede descomponer en dos subgrafos G_a y G_b cuya intersección es un grafo completo K_p, entonces

$$P_G(q) \;=\; \frac{P_{G_a}(q)\, P_{G_b}(q)}{P_{K_p}(q)}\,.$$

De esta manera obtenemos después de aplicar esta fórmula dos veces con $K_p = K_2$:

$$P_{G_2}(q) \;=\; \frac{P_{K_3}(q)^3}{P_{K_2}(q)^2} \;=\; q(q-1)(q-2)^3\,.$$

Luego el polinomio cromático de G es, por el principio del producto,

$$P_G(q) \;=\; P_{G_1}(q)\, P_{G_2}(q) \;=\; q^2(q-1)^2(q-2)^3\,.$$

Como las raíces reales de P_G son $q = 0, 1, 2$, se deduce que $\chi(G) = 3$.

---

8. Examen final mayo 2016

Problema 8.1 Sea el conjunto de los números enteros no negativos $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \geq 0\}$. En él definimos la siguiente relación $\mathcal{T}$:

$$a\,\mathcal{T}\,b \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor\sqrt{a}\rfloor \;=\; \lfloor\sqrt{b}\rfloor\,.$$

1. Demostrar que $\mathcal{T}$ es una relación de equivalencia.

2. Encontrar las clases de equivalencia.

3. Calcular el cardinal de cada clase de equivalencia.
4. Encontrar el conjunto cociente $\mathbb{Z}_+/\mathcal{T}$.

<u>Solución.</u>

1. $\mathcal{T}$ es de equivalencia porque $a\,\mathcal{T}\,b \;\Leftrightarrow\; f(a) = f(b)$ donde $f\colon \mathbb{Z}_+ \to Z_+$ está dada por $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$. El conjunto cociente $\mathbb{Z}_+/\mathcal{T} \simeq \mathrm{Im}(f) = Z_+$.
2. Una clase de equivalencia contiene todas las preimágenes del elemento $p \in \mathrm{Im}(f) = Z_+$ que elijamos. Dado $p \in Z_+$ fijo, su preimagen menor es p^2 y la mayor será $(p+1)^2 - 1$. Si escogemos el primer elemento como representante de dicha clase de equivalencia, tenemos que las clases de equivalencia viene dadas por

$$[n^2]_{\mathcal{T}} \;=\; \{k \in \mathbb{Z}_+ \colon n^2 \leq k \leq n^2 + 2n\}\,,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.
3. $|[n^2]_{\mathcal{T}}| = 2n + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.
4. $\mathbb{Z}_+/\mathcal{T} = \{[n^2]_{\mathcal{T}} \colon n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Problema 8.2

1. Resolver la congruencia lineal $6x \equiv 9 \pmod{15}$.
2. Encontrar el resto de dividir $20^{234123456702702}$ por 101.

<u>Solución.</u>

1. La congruencia anterior es equivalente a $2x \equiv 3 \pmod 5$, ya que $3 \mid 15$. Como $\mathrm{mcd}(2,5) = 1$ y $1 \mid 3$ existe una única solución módulo 5. La solución se ve fácilmente que corresponde a $x \equiv 4 \pmod 5$ $(2 \cdot 4 = 8 \equiv 3 \pmod 5)$. Las soluciones módulo 15 se calculan escribiendo la solución de la forma $x = 4 + 5k$ y considerar las 3 clases de congruencia módulo 3 de k:
   - $k = 3p$, luego $x = 4 + 15p$ ó $x \equiv 4 \pmod{15}$.
   - $k = 3p + 1$, luego $x = 9 + 15p$ ó $x \equiv 9 \pmod{15}$.
   - $k = 3p + 2$, luego $x = 14 + 15p$ ó $x \equiv 14 \pmod{15}$.

   Éstas son las tres soluciones módulo 15 de la congruencia pedida.
2. Como 101 es primo, $\phi(101) = 100$. Luego el teorema pequeño de Fermat implica que $20^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} 20^{234123456702702} \pmod{101} &\equiv 20^{234123456702700} \cdot 20^2 \pmod{101} \\ &\equiv \left(20^{100}\right)^{2341234567027} 400 \pmod{101} \\ &\equiv 400 \pmod{101} \equiv 97 \pmod{101}\,. \end{aligned}$$

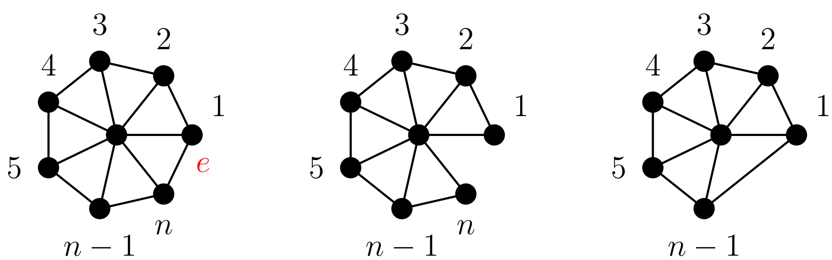
   Como $0 \leq 97 \leq 100$, el resto buscado es $20^{234123456702702} \bmod 101 = 97$.

Problema 8.3 Sea la familia de grafos rueda $W_2, W_3, W_4, \ldots$.
Recordatorio: el grafo rueda W_n tiene n vértices formando un ciclo y un vértice extra en el interior del ciclo y tal que es vecino de los n vértices del ciclo.

1. Si $q \geq 2$ es un natural arbitrario, demostrar que el polinomio cromático $P_{W_n}(q) = p_n$ de W_n satisface la relación de recurrencia
$$p_n \;=\; -p_{n-1} + q(q-1)(q-2)^{n-1}\,, \quad n \;\geq\; 4\,.$$
2. Encontrar la condición inicial $p_3 = P_{W_3}(q)$.
3. Resolver la ecuación de recurrencia del apartado 1. con la condición inicial encontrada en el apartado 2.
4. ¿Es cierta la expresión de $p_n = P_{W_n}(q)$ encontrada en el apartado 3. (y válida para todo $n \geq 3$) si la aplicamos al caso $n = 2$?
5. Calcular $\chi(W_n)$ para todo $n \geq 2$.

SOLUCIÓN.

1. En la parte izquierda de la figura siguiente está dibujado el grafo W_7, con el vértice interno sin su etiqueta $n+1$. Aunque se muestre W_7 como ejemplo, el argumento que se va a usar es general para todo $n \geq 4$. La relación de recurrencia se obtiene usando el teorema de contracción-borrado aplicado a una arista cualquiera del ciclo exterior, en particular a la arista $e = \{n, 1\}$. Los grafos $W_n - e$ y $W_n \setminus e$ están representados en la siguiente figura.



$\boldsymbol{W_n}$ $\quad$ $\boldsymbol{W_n - e}$ $\quad$ $\boldsymbol{W_n \setminus e}$

El grafo $W_n \setminus e$ es isomorfo a W_{n-1} y el polinomio cromático del grafo $W_n - e$ se puede calcular fácilmente usando el principio del producto: el vértice central lo puedo colorear de q maneras; el vértice n lo puedo colorear de $q-1$ maneras y los $n-1$ vértices restantes $(1 \leq k \leq n-1)$ de $q-2$ maneras. Luego el polinomio cromático buscado es (por el principio del producto) $P_{W_n - e}(q) = q(q-1)(q-2)^{n-1}$. Finalmente,
$$P_{W_n}(q) \;=\; P_{W_n - e}(q) - P_{W_n \setminus e} \;=\; P_{W_n - e}(q) - P_{W_{n-1}}\,.$$
En términos de $p_n = P_{W_n}(q)$ queda la recurrencia pedida:
$$p_n \;=\; -p_{n-1} + q(q-1)(q-2)^{n-1}\,, \quad \text{para todo } n \geq 4.$$

2. El grafo W_3 es un grafo simple, de 4 vértices y regular de grado $d = 3$. Luego es isomorfo a K_4 y

$$p_3 \;=\; P_{W_3}(q) \;=\; P_{K_4}(q) \;=\; q(q-1)(q-2)(q-3)\,.$$

3. La recurrencia es lineal, de grado uno, no homogénea y con coeficientes constantes (no dependen de n). Luego su solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la no homogénea.

   La solución general de la homogénea $p_n = -p_{n-1}$ es trivial: $x = -1$ y $p_n = A(-1)^n$.

   La solución particular de la no homogénea es de la forma $p_n = B(q-2)^n$, ya que $q-2$ no puede ser nunca igual a -1 si $q \geq 2$. Sustituyendo en la recurrencia, se obtiene que $B = q$. Luego dicha solución particular es $p_n = q(q-2)^n$.

   La solución general de la recurrencia es $p_n = A(-1)^n + q(q-2)^n$. Como $p_3 = q(q-1)(q-2)(q-3)$, se tiene que

$$q(q-1)(q-2)(q-3) \;=\; -A + q(q-2)^3\,, \quad \Rightarrow \quad A \;=\; q(q-2)\,.$$

   Luego la solución buscada es

$$p_n \;=\; P_{W_n}(q) \;=\; q(q-2)(-1)^n + q(q-2)^n\,, \quad n \;\geq\; 3\,.$$

4. El grafo W_2 tiene 3 vértices. El vértice interno tiene grado 2 y los dos vértices externos están unidos entre sí por dos aristas. Pero su polinomio cromático, como las multiaristas son irrelevantes, es igual al de K_3. Luego $P_{W_2}(q) = P_{K_3}(q) = q(q-1)(q-2)$.

   La fórmula anterior evaluada en $n = 2$ resulta:

$$P_{W_2}(q) \;=\; q(q-2) + q(q-2)^2 \;=\; q(q-1)(q-2)\,,$$

   por lo que se comprueba que la fórmula obtenida de la recurrencia también es válida para $n = 2$:

$$P_{W_n}(q) \;=\; q(q-2)(-1)^n + q(q-2)^n\,, \quad n \;\geq\; 2\,.$$

5. Para $n \geq 2$ arbitrario, puedo sacar factor común $q(q-2)$ en $P_{W_n}(q)$. Luego $P_{W_n}(0) = P_{W_n}(2) = 0$. También esto debería ser cierto para $q = 1$: $P_{W_n}(1) = (-1)^{n+1} + (-1)^n = 0$. Esto implica que $\chi(W_n) \geq 3$.

   Veamos cuál es el valor en $q = 3$:

$$P_{W_n}(3) \;=\; 3(-1)^n + 3 \;=\; \begin{cases} 6 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Luego $\chi(W_n) = 3$ para todo $n \geq 2$ par. Si $n \geq 3$ es impar, $P_{W_n}(4) = 8(2^{n-1} - 1) > 0$. Luego,

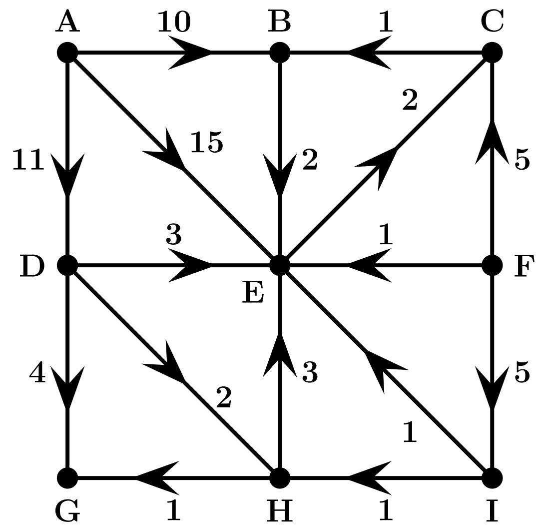
$$\chi(W_n) \;=\; \begin{cases} 3 & \text{si } n \geq 2 \text{ es par,} \\ 4 & \text{si } n \geq 3 \text{ es impar.} \end{cases}$$

---

9. Control abril 2017 (1)

Problema 9.1

1. En el grafo dirigido y ponderado de la figura



Calcular los caminos de distancia mínima entre el vértice **A** y el resto de los vértices del grafo, así como las distancias mínimas correspondientes.

<u>Solución.</u>

Corriendo el algoritmo de Dijkstra en este grafo (que es simple, conexo y con todos los pesos positivos) tenemos la siguiente tabla

A	$\boxed{(0,A)}$	*	*	*	*	*	*
B	(10,A)	$\boxed{(10,A)}$	*	*	*	*	*
C	∞	∞	∞	(14,E)	(14,E)	$\boxed{(14,E)}$	*
D	(11,A)	(11,A)	$\boxed{(11,A)}$	*	*	*	*
E	(15,A)	(12,B)	(12,b)	$\boxed{(12,B)}$	*	*	*
F	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
G	∞	∞	(15,D)	(15,D)	(14,H)	(14,H)	$\boxed{(14,H)}$
H	∞	∞	(13,D)	(13,D)	$\boxed{(13,D)}$	*	*
I	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Luego la solución es:

- $d(A, B) = 10$ con el camino (A,B).
- $d(A, C) = 14$ con el camino (A,B,E,C).

- $d(A, D) = 11$ con el camino (A,D).
- $d(A, E) = 12$ con el camino (A,B,E).
- $d(A, F) = \infty$. No es posible llegar de A a F.
- $d(A, G) = 14$ con el camino (A,D,H,G).
- $d(A, H) = 13$ con el camino (A,D,H).
- $d(A, I) = \infty$. No es posible llegar de A a I.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y conexo que satisface que el grado de sus vértices es al menos 2 y que cada cara está rodeada por al menos 6 aristas. Decir si existe tal grafo o no. En caso afirmativo, decir el número mínimo de vértices que debe tener; en caso contrario, encontrar el mínimo grado máximo para que exista.

   <u>Solución.</u>

   Supongamos que existe tal grafo G. Del teorema del apretón de manos aplicado a G obtenemos que $|E| \geq |V|$.

   Al ser plano y conexo tiene grafo dual $G^* = (V^*, E^*)$. Del teorema del apretón de manos aplicado a G^* obtenemos que $|E| \geq 3R$, donde R es el número de regiones del plano delimitadas por G.

   El teorema de Euler nos dice que $|V| - |E| + R = 2$, luego

   $$|E| \;=\; |V| + R - 2 \leq \frac{|E|}{3} + |V| - 2 \;\Rightarrow\; |E| \leq \frac{3|V|}{2} - 3\,.$$

   Luego el número de vértices debe satisfacer

   $$|V| \leq |E| \leq \frac{3|V|}{2} - 3\,.$$

   Esta ecuación tiene solución para $|V| \geq 6$. Luego el valor mínimo que puede tener el grafo buscado es 6. Sin embargo, debemos probar que existe un grafo con estas características y $|V| = 6$. Un ejemplo muy sencillo es C_6. Luego

   $$|V|_{\min} \;=\; 6\,.$$

Problema 9.2 Nota: los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

1. Un agricultor quiere repartir parte de su cosecha entre 30 personas distintas. La fruta a repartir consta de 100 naranjas idénticas y de 300 manzanas idénticas. El agricultor quiere repartir la fruta de manera que ninguna persona se quede sin naranjas y que cada persona reciba al menos 3 manzanas. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Solución.

El problema se puede dividir en dos tareas secuenciales e independientes: primero repartir las naranjas y luego repartir las manzanas.

En el caso de las naranjas, tenemos que repartir 100 objetos idénticos entre 30 cajas distintas de manera que no quede ninguna caja vacía. Por ello debemos colocar en fila las 100 naranjas, de manera que hay 99 espacios entre dos naranjas consecutivas donde podremos insertar las 29 barras móviles que definen las 30 cajas. Luego el número de maneras de realizar esta tarea es $\binom{99}{29}$.

Una vez colocadas las naranjas colocamos las manzanas. Ahora hay que repartir 300 objetos idénticos entre 30 cajas distintas de manera que en cada caja haya al menos 3 objetos. Esto es equivalente a repartir $300 - 30 \times 3 = 210$ objetos en 30 cajas distintas pudiendo quedar cajas vacías. Esto es equivalente a permutar $210 + 29 = 239$ objetos de los cuales 210 son idénticos entre sí y los 29 restantes también lo son. Luego el número de maneras de realizar esta tarea es $\binom{239}{29}$.

El principio del producto nos garantiza que la solución del problema es:

$$\binom{99}{29} \times \binom{239}{29}.$$

2. Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n \;=\; 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2 \times 3^n\,, \quad n \geq 2\,, \quad a_0 = a_1 = 3\,.$$

Solución.

La solución general de esta recurrencia no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea.

La homogénea tiene como polinomio característico $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$. Luego tiene la raíz $x = 3$ con multiplicidad 2. La solución general de la homogénea es $a_n^{(h)} = 3^n(A + Bn)$.

La forma de la solución particular es $a_n^{(p)} = Cn^2 3^n$, ya que la base de la potencia $= 3$ es raíz del polinomio característico de la homogénea con multiplicidad 2. El valor de C lo calculamos sustituyendo la expresión anterior en la recurrencia

$$C3^n n^2 \;=\; 6C3^{n-1}(n-1)^2 - 9C3^{n-2}(n-2)^2 + 2 \times 3^n\,.$$

Esta expresión se simplifica mucho: $-2C + 2 = 0$, luego $C = 1$.

La solución general de la recurrencia es:

$$a_n \;=\; 3^n(A + Bn + n^2)\,.$$

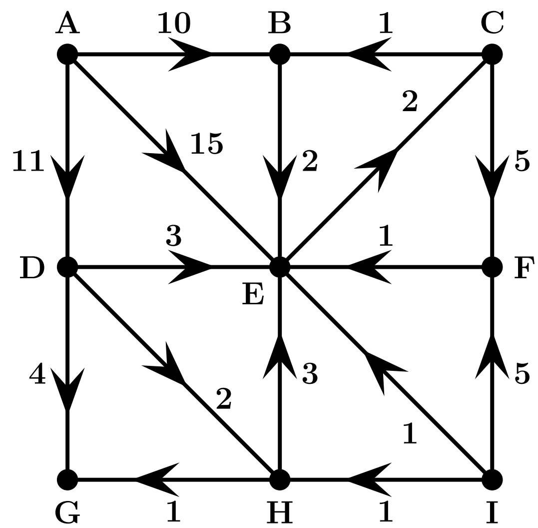
Los parámetros A y B se calculan con las condiciones iniciales: $a_0 = 3 = A$ y $a_1 = 3 = 3(A + B + 1)$. Luego $A = -B = 3$ y la solución pedida es

$$a_n \;=\; 3^n(3 - 3n + n^2)\,, \quad n \geq 0.$$

10. Control abril 2017 (2)

Problema 10.1

1. En el grafo dirigido y ponderado de la figura



Calcular los caminos de distancia mínima entre el vértice **A** y el resto de los vértices del grafo, así como las distancias mínimas correspondientes.

<u>Solución.</u>

Corriendo el algoritmo de Dijkstra en este grafo (que es simple, conexo y con todos los pesos positivos) tenemos la siguiente tabla

A	$\boxed{(0,A)}$	*	*	*	*	*	*	*
B	(10,A)	$\boxed{(10,A)}$	*	*	*	*	*	*
C	∞	∞	∞	(14,E)	(14,E)	$\boxed{(14,E)}$	*	*
D	(11,A)	(11,A)	$\boxed{(11,A)}$	*	*	*	*	*
E	(15,A)	(12,B)	(12,b)	$\boxed{(12,B)}$	*	*	*	*
F	∞	∞	∞	∞	∞	(19,C)	(19,C)	$\boxed{(19,C)}$
G	∞	∞	(15,D)	(15,D)	(14,H)	(14,H)	$\boxed{(14,H)}$	*
H	∞	∞	(13,D)	(13,D)	$\boxed{(13,D)}$	*	*	*
I	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Luego la solución es:

- $d(A, B) = 10$ con el camino (A,B).

- $d(A,C) = 14$ con el camino (A,B,E,C).
- $d(A,D) = 11$ con el camino (A,D).
- $d(A,E) = 12$ con el camino (A,B,E).
- $d(A,F) = 19$ con el camino (A,B,E,C,F).
- $d(A,G) = 14$ con el camino (A,D,H,G).
- $d(A,H) = 13$ con el camino (A,D,H).
- $d(A,I) = \infty$. No es posible llegar de A a I.

2. Sea $G = (V,E)$ un grafo plano y conexo que satisface que el grado de sus vértices es al menos 3 y que el ciclo de menor longitud contiene 4 aristas. Decir si existe tal grafo o no. En caso afirmativo, decir el número mínimo de vértices que debe tener; en caso contrario, encontrar el mínimo grado máximo para que exista.

   <u>Solución.</u>

   Supongamos que existe tal grafo G. Del teorema del apretón de manos aplicado a G obtenemos que $|E| \geq \frac{3|V|}{2}$.

   Al ser plano y conexo tiene grafo dual $G^* = (V^*, E^*)$. Del teorema del apretón de manos aplicado a G^* obtenemos que $|E| \geq 2R$, donde R es el número de regiones del plano delimitadas por G.

   El teorema de Euler nos dice que $|V| - |E| + R = 2$, luego

   $$|E| \;=\; |V| + R - 2 \leq \frac{|E|}{2} + |V| - 2 \;\Rightarrow\; |E| \leq 2|V| - 4\,.$$

   Luego el número de vértices debe satisfacer

   $$\frac{3|V|}{2} \leq |E| \leq 2|V| - 4\,.$$

   Esta ecuación tiene solución para $|V| \geq 8$. Luego necesitamos al menos 8 vértices para que G exista. Para probar que 8 es realmente el número mínimo de vértices basta encontrar un ejemplo con todas estas propiedades. Un puede ser el grafo formado por dos C_4 con vértices $V_1 = \{1,2,3,4\}$ y $V_2 = \{1',2',3',4'\}$ y a los que añadimos las aristas $\{k,k'\}$ con $1 \leq k \leq 4$. Luego

   $$|V|_{\min} \;=\; 8\,.$$

Problema 10.2 Nota: los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

1. Un agricultor tiene una cosecha de 400 peras idénticas. Está pensando en repartir la fruta de dos maneras distintas:

   - Repartirlas entre los 50 jubilados de su pueblo de manera que ninguno se quede sin fruta.

- Repartirlas entre los 30 niños de su pueblo de manera que todos tengan como mínimo 4 piezas de fruta.

¿De cuántas maneras distintas puede hacer dicho reparto?

SOLUCIÓN.

El problema se puede ver como dos tareas incompatibles: o se reparte la fruta entre los jubilados o entre los niños.

En el caso de los jubilados, tenemos que repartir 400 objetos idénticos entre 50 cajas distintas de manera que no quede ninguna caja vacía. Por ello debemos colocar en fila las 400 peras, de manera que hay 399 espacios entre dos peras consecutivas donde podremos insertar las 49 barras móviles que definen las 50 cajas. Luego el número de maneras de realizar esta tarea es $\binom{399}{49}$.

Si repartimos los 400 objetos idénticos entre 30 cajas distintas de manera que en cada caja haya al menos 4 objetos, esto es equivalente a repartir $400 - 30 \times 4 = 280$ objetos en 30 cajas distintas pudiendo quedar cajas vacías. Esto es equivalente a permutar $280 + 29 = 309$ objetos de los cuales 280 son idénticos entre sí y los 29 restantes también lo son. Luego el número de maneras de realizar esta tarea es $\binom{309}{29}$.

El principio de la suma nos garantiza que la solución del problema es:

$$\binom{399}{49} + \binom{309}{29}.$$

2. Resolver la ecuación de recurrencia

$$a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + 2 \times 4^n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 4.$$

SOLUCIÓN.

La solución general de esta recurrencia no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea.

La homogénea tiene como polinomio característico $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 = 0$. Luego tiene la raíz $x = 4$ con multiplicidad 2. La solución general de la homogénea es $a_n^{(h)} = 4^n(A + Bn)$.

La forma de la solución particular es $a_n^{(p)} = Cn^2 4^n$, ya que la base de la potencia $= 4$ es raíz del polinomio característico de la homogénea con multiplicidad 2. El valor de C lo calculamos sustituyendo la expresión anterior en la recurrencia

$$C4^n n^2 = 8C4^{n-1}(n-1)^2 - 16C4^{n-2}(n-2)^2 + 2 \times 4^n.$$

Esta expresión se simplifica mucho: $-2C + 2 = 0$, luego $C = 1$.

La solución general de la recurrencia es:

$$a_n = 4^n(A + Bn + n^2).$$

Los parámetros A y B se calculan con las condiciones iniciales: $a_0 = 4 = A$ y $a_1 = 4 = 4(A + B + 1)$. Luego $A = -B = 4$ y la solución pedida es

$$a_n = 4^n(4 - 4n + n^2) = 4^n(n-2)^2, \quad n \geq 0.$$

11. Examen final mayo 2017

Problema 11.1

- Encontrar las soluciones en $\mathbb{Z}_{33}$ (si hay alguna) de la congruencia lineal $18x \equiv 30 \pmod{33}$.
- Sea $A = \{2,5,8\} \times \{0,1,2,3\}$. En A definimos la relación binaria $\mathcal{R}$ definida por $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow (a+b) \mid (c+d)$. Justificar si $\mathcal{R}$ es una relación de orden o no. En caso afirmativo, encontrar su diagrama de Hasse.

<u>Solución.</u>

- Como $\text{mcd}(2,33) = 1$, la congruencia anterior es equivalente a $9x \equiv 15 \pmod{33}$. Como $\text{mcd}(3,33) = 3$, la congruencia anterior se puede escribir como $3x \equiv 5 \pmod{11}$.

  Como $\text{mcd}(3,11) = 1$ y $1 \mid 5$, la congruencia anterior tiene una única solución $\text{mód}\, 11$. Dado que $3(-2) = -6 \equiv 5 \pmod{11}$, entonces $x \equiv -2 \pmod{11} \equiv 9 \pmod{11}$ es dicha solución (única) $\text{mód}\, 11$.

  Para volver a $\mathbb{Z}_{33}$, basta considerar la solución anterior como la igualdad $x = 9 + 11k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si ahora tomamos $k = 3p$, $k = 3p+1$ y $k = 3p+2$ con $p \in \mathbb{Z}$ obtenemos las tres soluciones en $\mathbb{Z}_{33}$ de la congruencia original: $x \equiv 9 \pmod{33}$, $x \equiv 20 \pmod{33}$ y $x \equiv 31 \pmod{33}$.

- No es una relación de orden porque no es antisimétrica: $(5,0), (2,3) \in A$, $(5,0)\mathcal{R}(2,3)$, $(2,3)\mathcal{R}(5,0)$, pero $(5,0) \neq (2,3)$.

Problema 11.2 Sean las siguientes clases de grafos:

- El grafo hipercubo Q_n cuyos vértices son las cadenas de bits de longitud n.
- El grafo camino P_n de n vértices.
- El grafo ciclo C_n de n vértices.
- El grafo completo K_n de n vértices.
- El grafo trivial t_n de n vértices: $t_n = (\{1,2,\ldots,n\}, \varnothing)$

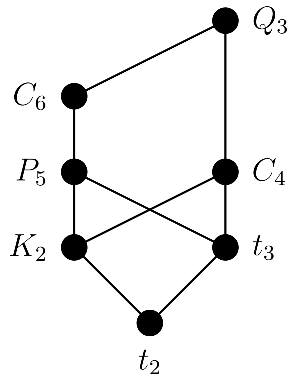
Sea ahora el conjunto de grafos $A = \{Q_3, P_5, C_6, C_4, K_2, t_3, t_2\}$. En él definimos la relación de orden $\preceq$: si $G_1, G_2 \in A$,

$$G_1 \preceq G_2 \quad \Leftrightarrow \quad G_1 \text{ es un subgrafo de algún grafo isomorfo a } G_2.$$

Justificar si el conjunto $(A, \preceq)$ tiene la estructura de un álgebra de Boole o no.

<u>Solución.</u>

El diagrama de Hasse es



Por lo tanto $(A, \preceq)$ no es un retículo, puesto que $\sup(K_2, t_3)$ no existe. Por lo tanto tampoco puede ser un álgebra de Boole.

Problema 11.3 Encontrar la solución de la siguiente recurrencia

$$a_n \;=\; 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (e-2)^2\, e^n\,, \quad n \geq 2\,,$$

con las condiciones iniciales $a_0 = e^2$, $a_1 = e^3 + 1$.

<u>SOLUCIÓN.</u>

La solución general de esta recurrencia es igual a la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea.

La solución general de la homogénea se obtiene a partir de las raíces de su polinomio característico $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$. Luego sólo tiene la raíz $x = 2$ con multiplicidad 2. Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$a_n^{(h)} \;=\; (A + B\,n)\,2^n\,.$$

Como e no es raíz del polinomio característico de la homogénea, la forma general de la solución particular de la no homogénea es $C\,e^n$. El valor de la constante C lo encontramos sustituyendo la expresión anterior en la recurrencia:

$$C\,e^n \;=\; 4\,C\,e^{n-1} - 4\,C\,e^{n-2} + (e-2)^2\,e^n\,.$$

Si dividimos por e^{n-2} obtenemos

$$C\,e^2 \;=\; 4\,C\,e - 4\,C + (e-2)^2\,e^2\,.$$

Luego

$$C \;=\; \frac{(e-2)^2\,e^2}{e^2 - 4\,e + 4} \;=\; \frac{(e-2)^2\,e^2}{(e-2)^2} \;=\; e^2\,.$$

y la solución particular buscada es $a_n^{(p)} = e^{n+2}$.

La solución general de la recurrencia es

$$a_n \;=\; (A + B\,n)\,2^n + e^{n+2}$$

y calculamos las constantes A y B usando las condiciones iniciales:

$$a_0 \;=\; e^2 \;=\; A + e^2 \;\Rightarrow\; A \;=\; 0\,, \quad a_1 \;=\; e^3 + 1 \;=\; 2\,B + e^3 \;\Rightarrow\; B \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Luego la solución buscada es

$$a_n \;=\; e^{2+n} + 2^{n-1}\,n\,, \quad n \geq 0\,.$$

---

12. Examen extraordinario junio 2017

Problema 12.1 **Nota:** los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

Se tienen p pelotas de golf y q cajas distintas. Hallar de cuántas maneras distintas pueden distribuirse las pelotas en las cajas si

1. todas las pelotas son distintas y en ninguna caja cabe más de una pelota.
2. las pelotas son indistinguibles y en ninguna caja cabe más de una pelota.
3. las pelotas son indistinguibles y en cada caja caben cuantas se deseen.
4. todas las pelotas son distintas y en cada caja caben cuantas se deseen.

<u>Solución.</u>

Este problema es la versión general del problema 7.1 de las hojas. Por lo tanto

1. El papel de las cajas lo juegan las pelotas. La primera pelota la puedo colocar en q cajas, la segunda en $q-1$ cajas, etc. Luego el principio del producto nos garantiza el resultado $q(q-1)(q-2)\ldots(q-p+1) = \frac{q!}{(p-q)!}$, de manera que el número de factores en el producto es p.
2. Hay q cajas distinguibles y hay que escoger p de ellas. Este problema es equivalente a encontrar el número de cadenas de bits de longitud q con exactamente p unos. Luego el resultado es $\binom{q}{p}$.
3. Éste es un reparto estándar en el que tenemos p objetos idénticos y $q-1$ barras móviles (que definen las q cajas), luego el resultado es $\binom{p+q-1}{p}$.
4. El argumento es como en la parte (1), salvo que ahora cada pelota la puedo colocar en las q cajas posibles. Luego el resultado es q^p.

Problema 12.2 Sea el conjunto $X = \{A, B, C\}$. Definimos el grafo simple $G = (V, E)$ de la siguiente manera: el conjunto de vértices está formado por los subconjuntos de X ($V = \mathcal{P}(X)$) y dos vértices $R, S \in V$ son adyacentes si y sólo si $R \subset S$ ó $S \subset R$.

- ¿Cuántos vértices y aristas tiene G?
- ¿Cuál es el grado de los distintos vértices de G? ¿Es regular?
- Razonar si G es planar o no.
- ¿Es G bipartito?

SOLUCIÓN.

Éste es el problema 4.8 de las hojas.

- El número de vértices es $|V| = 2^{|X|} = 8$.
- Como los elementos X y $\varnothing$ tienen grado 7 y el resto de los vértices tienen grado 4, entonces el grafo no es regular y usando el teorema del apretón de manos: $2|E| = 7 \times 2 + 6 \times 4 = 38$. Luego $|E| = 19$.
- Si fuese planar, satisfaría que $|E| \le 3|V|-6$; pero $19 \not\le 3\times 8-6 = 18$. Esta contradicción implica que la hipótesis de partida es falsa; luego G no es planar.
- No es bipartito porque contiene un ciclo de longitud impar: por ejemplo, el ciclo $(\varnothing, \{A\}, \{A,B\}, \varnothing)$ tiene longitud 3.

Problema 12.3 En $A = [-2,2] \times [-2,2] \subset \mathbb{R}^2$ se considera la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$:

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(z,t) \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 \;=\; z^2+t^2\,.$$

1. Encontrar las clases de equivalencia y encontrar el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$. ¿Cuántas clases tienen un número finito de elementos?
2. En el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$ se define la relación de orden $\preceq$ de la manera siguiente

   $$[(x,y)]_{\mathcal{R}} \;\preceq\; [(z,w)]_{\mathcal{R}} \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 \;\le\; z^2+w^2\,.$$

   Justificar si el conjunto $(A/\mathcal{R}, \preceq)$ tiene estructura de álgebra de Boole o no.

SOLUCIÓN.

Éste es una modificación del problema 11.10(5) de las hojas.

1. Las clases de equivalencia corresponden a $x^2+y^2 = R^2$ donde R es un número real tal que $0 \le R \le 2\sqrt{2}$. Luego si tomamos como representante de cada clase al punto de intersección de la circunferencia $x^2+y^2 = R^2$ con la recta $x = y$ con $x, y \ge 0$, podemos escribir dichas clases como:

   $$[(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})]_{\mathcal{R}} \;=\; \left\{(x,y) \in A \mid x^2+y^2 = R^2\right\}\,,$$

   con $0 \le R \le 2\sqrt{2}$. Hay sólo dos clases de equivalencia que contienen un número finito de elementos: $[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(0,0)\}$ (que tiene cardinal 1) y

   $$[(2,2)]_{\mathcal{R}} \;=\; \{(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)\}$$

   (que tiene cardinal 4). El conjunto cociente es:

   $$A/\mathcal{R} \;=\; \left\{[(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})]_{\mathcal{R}} \mid 0 \le R \le 2\sqrt{2}\right\}\,.$$

2. Dadas dos clases de equivalencia $[(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})]_{\mathcal{R}}$ y $[(R'/\sqrt{2}, R'/\sqrt{2})]_{\mathcal{R}}$, tendremos que $[(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})]_{\mathcal{R}} \preceq [(R'/\sqrt{2}, R'/\sqrt{2})]_{\mathcal{R}}$ si y sólo si $R \leq R'$. Luego el conjunto $(A/\mathcal{R}, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado y, por tanto, es un retículo. Además es un retículo acotado (con cotas $0 = [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $1 = [(2,2)]_{\mathcal{R}}$); pero no es complementado. Sea el elemento $[(x,y)]_{\mathcal{R}}$ y supongamos que tiene (al menos) un elemento complementario $\overline{[(x,y)]_{\mathcal{R}}}$. Entonces $\sup([(x,y)]_{\mathcal{R}}, \overline{[(x,y)]_{\mathcal{R}}}) = 1$; pero esto sólo es posible si $\overline{[(x,y)]_{\mathcal{R}}} = 1$. Si esto es cierto, entonces se debería cumplir que $\inf([(x,y)]_{\mathcal{R}}, 1) = 0$. Esta ecuación sólo es cierta si $[(x,y)]_{\mathcal{R}} = 0$. Luego sólo las cotas superior e inferior tienen elemento complementario y el resto de elementos del retículo no lo tienen. Luego no es un retículo complementado ni un álgebra de Boole.

Problema 12.4

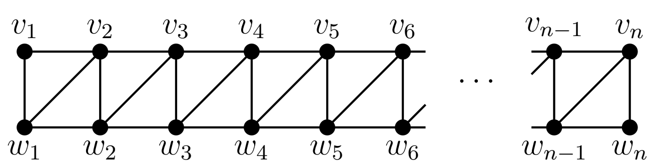
1. Calcular el inverso multiplicativo (si existe) de 2^{68} en $\mathbb{Z}_{19}$.

2. Resolver en $\mathbb{Z}_{15}$ la congruencia lineal $6x \equiv 9 \pmod{15}$.

<u>SOLUCIÓN.</u>

Estos son los problemas 5.2(1) y 8.2(1) hechos anteriormente.

Problema 12.5 Sea la familia de grafos $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que cada miembro $G_n = (V_n, E_n)$ se define de la siguiente manera:



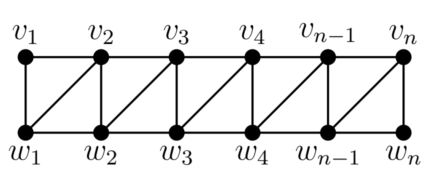
1. Encontrar, usando técnicas de teoría de grafos, una relación de recurrencia para el polinomio cromático $p_n = P_{G_n}$ de G_n. Encontrar las condiciones iniciales necesarias.

2. Resolver dicha ecuación de recurrencia para p_n.

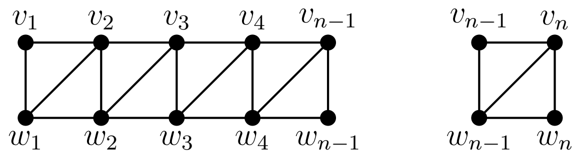
<u>SOLUCIÓN.</u>

Éste es una variación del problema 8.3 hecho anteriormente.

1. Podemos descomponer el grafo G_n en dos subgrafos cuya intersección es el grafo completo K_2. Para visualizarlo mejor, tomaremos el caso de G_6, aunque el argumento es general.



La descomposición buscada es:



donde K_2 es el grafo formado por los vértices $\{v_{n-1}, w_{n-1}\}$ y la arista que los une.

El polinomio cromático del grafo de la derecha H es trivial usando el principio del producto (problema 10.3 de las hojas): $P_H(q) = q(q-1)(q-2)^2$. Luego usando el Teorema 135 de las notas

$$p_n = \frac{p_{n-1}\, P_H}{P_{K_2}} = (q-2)^2\, p_{n-1}\,.$$

Esta es una recurrencia lineal de orden 1, por lo que necesito una única condición inicial

$$p_1 = P_{G_1} = P_{K_2} = q(q-1)\,.$$

2. El polinomio característico de esta recurrencia es $x = (q-2)^2$, luego la solución general es: $p_n = A\,(q-2)^{2n}$. La constante A se obtiene al usar la condición inicial: $p_1 = q(q-1) = A(q-2)^2$. Luego $A = q(q-1)/(q-2)^2$ y la solución final es:

$$P_{G_n}(q) = p_n = q(q-1)\,(q-2)^{2(n-1)}\,, \quad n \geq 1\,.$$

---

13. Control abril 2018 (1)

Problema 13.1 **Nota:** los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

1. Calcular el número de palabras de longitud n que se pueden formar con el alfabeto $\{A, B, C, D\}$ de manera que no haya dos B o dos C o dos D consecutivas.

   <u>Solución.</u>

   Sea X la condición de no tener 2 B ó 2 C ó 2 D consecutivas. Entonces definimos

   - x_n es el número de palabras de longitud n que satisfacen X.
   - a_n es el número de palabras de longitud n que satisfacen X y que empiezan por A.
   - b_n es el número de palabras de longitud n que satisfacen X y que empiezan por B.
   - c_n es el número de palabras de longitud n que satisfacen X y que empiezan por C.
   - d_n es el número de palabras de longitud n que satisfacen X y que empiezan por D.

Como el alfabeto es $\{A, B, C, D\}$, se cumple que (principio de la suma)

$$x_n \;=\; a_n + b_n + c_n + d_n\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Las condiciones iniciales se calculan fácilmente:

- $x_1 = 4$, ya que las cadenas son $\{A, B, C, D\}$.
- $x_2 = 13$, ya que las cadenas son $\{AA, AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$.

La recurrencia es

$$x_n \;=\; \underbrace{x_{n-1}}_{A} + \underbrace{a_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}}_{B} + \underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} + d_{n-1}}_{C} + \underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}_{D}\,.$$

En la ecuación anterior, el carácter debajo de cada llave muestra la letra por la que comienza cada tipo de palabra. Luego,

$$x_n \;=\; x_{n-1} + a_{n-1} + 2(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}) \;=\; 3x_{n-1} + a_{n-1}$$

Como $a_{n-1} = x_{n-2}$, se obtiene la recurrencia

$$x_n \;=\; 3x_{n-1} + x_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,, \quad x_1 = 4\,, \quad x_2 = 13\,.$$

Es una recurrencia lineal de orden dos con coeficientes constantes y homogénea.

El polinomio característico asociado a la recurrencia y sus raíces son:

$$x^2 - 3x - 1 \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad x \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\,.$$

Luego la solución general será

$$x_n \;=\; \alpha \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n\,.$$

Para calcular α y β usamos las condiciones iniciales. Como la segunda condición $x_2 = 13$ implica hacer cálculos pesados, es más cómodo ver cuál sería el valor de x_0 que predice la recurrencia

$$x_2 \;=\; 3x_1 + x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \;=\; x_2 - 3x_1 = 1$$

y usar como condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 4$. El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene es:

$$\begin{cases} 1 &= \alpha + \beta\,, \\ 4 &= \alpha\,\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} + \beta\,\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\,. \end{cases}$$

La solución es fácil de obtener:

$$\alpha \;=\; \frac{\sqrt{13}+5}{2\sqrt{13}}\,, \quad \beta \;=\; \frac{\sqrt{13}-5}{2\sqrt{13}}\,.$$

Luego la solución final es:

$$x_n \;=\; \frac{1}{26}\left[(13+5\sqrt{13})\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n + (13-5\sqrt{13})\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 1\,.$$

Por supuesto se cumple que $x_0 = 1, x_1 = 4$ y $x_2 = 13$.

---

2. Encontrar el número de soluciones enteras distintas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \;=\; M\,,$$

si $x_i \geq 2$ para todo $1 \leq i \leq n$. ¿Qué condiciones deben satisfacer n y M para que el número de soluciones no sea cero?

<u>Solución.</u>

Primero reescribimos la ecuación de manera que las variables sean no nulas. Para ello hacemos el siguiente cambio de variables: $x_i = 2 + u_i$ para $1 \leq i \leq n$. De esta manera $u_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n \;=\; M - 2n\,, \quad u_i \geq 0\,.$$

Este es un reparto estándar en el que tenemos $M - 2n$ objetos idénticos y n cajas representadas por $n - 1$ barras idénticas. Luego el número de soluciones es

$$\binom{M - 2n + n - 1}{n - 1} \;=\; \binom{M - n - 1}{n - 1}.$$

Para que $\binom{p}{q} \neq 0$, necesitamos que $p \geq 0$ y que $0 \leq q \leq p$. La primera condición implica que $M \geq n + 1$. La condición $n - 1 \geq 0$ implica que $n \geq 1$. Finalmente, la condición $M - n - 1 \geq n - 1$ implica que $M \geq 2n$. Como $n \geq 1$, ésta es más fuerte que la que obtuvimos antes $M \geq n + 1 \geq 2$. Por lo tanto, las condiciones que M y n deben satisfacer son

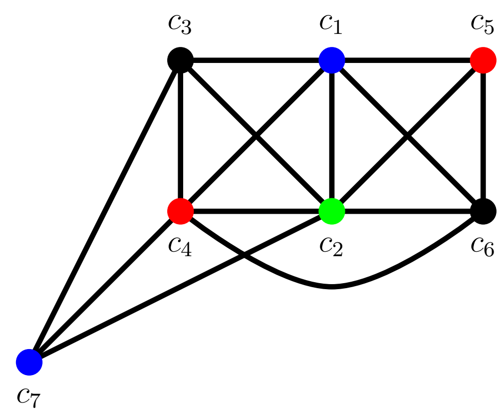
$$n \geq 1\,, \quad M \geq 2n\,.$$

Problema 13.2

1. El primer día de un congreso hay 7 charlas pertenecientes a 4 temas distintos. Las charlas $\{c_1, c_2, c_5, c_6\}$ tienen que ver con el Tema 1; las charlas $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, con el Tema 2; las charlas $\{c_2, c_3, c_4, c_7\}$, con el Tema 3 y las charlas $\{c_4, c_6\}$, con el Tema 4. Si cada charla dura una hora, calcula (usando técnicas de teoría de grafos) el número mínimo de horas necesarias para organizar las charlas de manera que todas las personas interesadas en un único tema no se pierdan ninguna de ellas. ¿Cuál es el número mínimo de salas necesarias para organizar dicha sesión inaugural.

Solución.

Modelizamos este problema con un grafo de manera que cada charla está representada por un vértice. Dos vértices son adyacentes si y sólo si pertenecen al mismo tema. El grafo $G = (V, E)$ resultante es:



El resultado pedido no es más que el número cromático $\chi(G)$, ya que las franjas horarias juegan el papel de colores. Dado que hay varios subgrafos de G que son K_4 (por ejemplo, los correspondientes a los tres primeros temas), entonces se sigue que $\chi(G) \geq \chi(K_4) = 4$. Además es fácil encontrar una ordenación de los vértices de G de manera que el algoritmo voraz para las coloraciones propias de G encuentre que existe tal coloración con 4 colores. Luego $\chi(G) \leq 4$. Dicha ordenación es (por ejemplo): $(c_1, c_5, c_2, c_6, c_4, c_3, c_7)$. Los colores de los vértices en el grafo anterior corresponden a la coloración propia obtenida por este algoritmo. Luego la única solución de las desigualdades $\chi(G) \geq 4$ y $\chi(G) \leq 4$ es $\chi(G) = 4$. Ordenamos ahora los resultados obtenidos por dicho algoritmo en la siguiente tabla:

Franja horarias	Color	vértices
1	azul	c_1, c_7
2	rojo	c_4, c_5
3	verde	c_2
4	negro	c_3, c_6

Está claro que el número mínimo de franjas horarias es 4 y, como cada franja corresponde a una hora, el número mínimo de horas necesarias es 4. Además se ve que el número máximo de vértices coloreados con un mismo color es 2, luego el número mínimo de salas para organizar las charlas es 2.

---

2. ¿Cuál es el número mínimo de componentes conexas que puede tener un grafo plano con 68 vértices, que divide al plano en 52 regiones y que el grado de todos sus vértices es como mucho 3?

Solución.

Supongamos que $G = (V, E)$ es un grafo que cumple estas condiciones. El teorema del apretón de manos nos dice que

$$2|E| \;=\; \sum_{x\in V} d_x \;\leq\; 3|V| \quad \Rightarrow \quad |E| \;\leq\; \frac{3}{2}\,|V|\,.$$

Por otra parte el teorema de Euler nos asegura que

$$|V| - |E| + R \;=\; 1 + n\,,$$

donde n es el número de componentes conexas de G. Luego

$$n \;=\; |V| - |E| + R - 1 \geq |V| - \frac{3}{2}|V| + R - 1 \;=\; R - 1 - \frac{1}{2}|V| \;=\; 17\,.$$

Luego $n \geq 17$ y por tanto $n_{\min} = 17$. De hecho, éste es el resultado si G es una grafo con 17 componentes conexas y cada una de ellas en un K_4 $(d = 3)$.

---

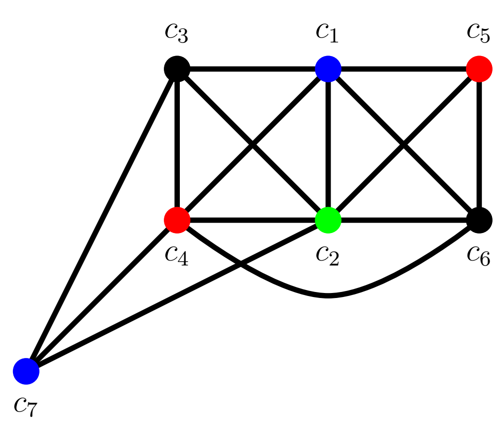
14. Control abril 2018 (2)

Problema 14.1

1. Una compañía de telecomunicaciones quiere establecer una red de radios en 7 pueblos de un valle aislados. Viendo el alcance de las emisoras, resulta que los pueblos se dividen en 4 grupos tales que los pueblos en cada grupo no pueden emitir en la misma frecuencia. Estos grupos son: $\{c_1, c_2, c_5, c_6\}$, $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $\{c_2, c_3, c_4, c_7\}$ y $\{c_4, c_6\}$. Calcula (usando técnicas de teoría de grafos) el número mínimo de frecuencias necesarias para diseñar dicha red de manera que todas los pueblos en cada grupo tengan frecuencias distintas. ¿Cuál son los números mínimo y máximo de pueblos que emiten en la misma frecuencia?

Solución.

Modelizamos este problema con un grafo de manera que cada pueblo está representado por un vértice. Dos vértices son adyacentes si y sólo si pertenecen al mismo grupo. El grafo $G = (V, E)$ resultante es:



El resultado pedido no es más que el número cromático $\chi(G)$, ya que las frecuencias juegan el papel de colores. Dado que hay varios subgrafos de G que son K_4 (por ejemplo, los correspondientes a los tres primeros grupos), entonces se sigue que $\chi(G) \geq \chi(K_4) = 4$. Además es fácil encontrar una ordenación de los vértices de G de manera que el algoritmo voraz para las coloraciones propias de G encuentre que existe tal coloración con 4 colores. Luego $\chi(G) \leq 4$. Dicha ordenación es (por ejemplo): $(c_1, c_5, c_2, c_6, c_4, c_3, c_7)$. Los colores de los vértices en el grafo anterior corresponden a la coloración propia obtenida por este algoritmo. Luego la única solución de las desigualdades $\chi(G) \geq 4$ y $\chi(G) \leq 4$ es $\chi(G) = 4$. Ordenamos ahora los resultados obtenidos por dicho algoritmo en la siguiente tabla:

Frecuencia	Color	vértices
1	azul	c_1, c_7
2	rojo	c_4, c_5
3	verde	c_2
4	negro	c_3, c_6

Está claro que el número mínimo de frecuencias distintas es 4. Además se ve en la tabla que el número mínimo de vértices coloreados con un color es 1 (color 3 o verde) y el número máximo de vértices coloreados con un mismo color es 2 (los otros 3 colores). Luego los números mínimo y máximo de pueblos que emiten en la misma frecuencia son 1 y 2, respectivamente.

---

2. Sea la familia de grafos Q_n (es decir, los n-cubos) con $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de n dichos grafos son eulerianos? ¿Para qué valores de n dichos grafos no son planares?

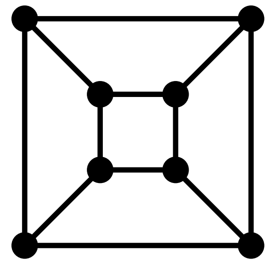
Solución.

Los grafos $Q_n = (V_n, E_n)$ son grafos simples tales que cada vértice corresponde a una cadena de bits de longitud n y dos vértices son vecinos si y sólo si las correspondientes cadenas difieren en un único bit. Luego tienen $|V_n| = 2^n$ vértices y son regulares con grado n.

Q_n es también conexo porque, dado cualquier cadena $x \in V_n$, podemos encontrar un camino (elemental) que una x con el vértice $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in V_n$. La razón es que podemos ir secuencialmente cambiando todos los bits que sean 1 en x por 0. Luego en cada paso, el camino une un vértice con uno vecino de x que contiene un 1 menos. El último paso corresponde a llegar al único vértice que no tiene ningún bit igual a 1; es decir $\mathbf{0}$. Por lo tanto, dados dos vértices distintos $x, y \in V_n$, existen dos caminos elementales: uno va de x a $\mathbf{0}$ y el otro, de y a $\mathbf{0}$. Luego existe al menos un camino (elemental o no) que une x con y. De todos los caminos que unan dichos vértices, los de menor longitud corresponden a caminos elementales. Luego Q_n es conexo.

Por lo tanto serán eulerianos aquellos Q_n con n par, ya que todos los vértices tendrán grado par ($=n$). El más pequeño corresponde a $Q_2 \simeq C_4$.

Está claro que $Q_1 \simeq K_2$ y $Q_2 \simeq C_4$ son planares. El siguiente caso también lo es: una representación grafica plana de Q_3 es:



Veamos qué ocurre para los Q_n para todo $n \geq 4$. Recordemos que cada Q_n es simple, conexo, con $|V_n| = 2^n \geq 8 > 3$ vértices y con

$$|E_n| \;=\; \frac{1}{2}\sum_{x\in V_n} d_x \;=\; n\,2^{n-1}$$

aristas. También sabemos que para $n \geq 4$, no existen ciclos de longitud 3, ya que dos vértices vecinos corresponden a cadenas de bits que difieren en un único bit. Luego si existiese un ciclo de longitud 3 (v_1, v_2, v_3, v_1), v_3 debería diferir de v_1 simultaneamente en 1 ó 2 bits, lo que es imposible.

Supongamos ahora que Q_n es planar para todo $n \geq 4$. Entonces se debe satisfacer la desigualdad

$$|E_n| \;\leq\; 2|V_n| - 4 \quad\Rightarrow\quad n\,2^{n-1} \;\leq\; 2^{n+1} - 4 \quad\Rightarrow\quad n \;\leq\; 4 - 2^{3-n} \;<\; 4\,.$$

La última desigualdad contradice la hipótesis, luego ésta es falsa. La conclusión es que Q_n no es planar para todo $n \geq 4$.

Problema 14.2 Nota: los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

1. Calcular el número de palabras de longitud n que se pueden formar con el alfabeto $\{A, B, C, D\}$ de manera que haya un número par de letras A.

   <u>Solución.</u>

   Definimos las siguientes cantidades

   - x_n es el número de palabras de longitud n que tienen un número par de A.
   - a_n es el número de palabras de longitud n que tienen un número impar de A.

   Como el alfabeto es $\{A, B, C, D\}$, se cumple que (principios de la suma y el producto)

   $$x_n + a_n \;=\; 4^n\,, \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

   Las condiciones iniciales se calculan fácilmente:

   - $x_1 = 3$, ya que las cadenas son $\{B, C, D\}$.
   - $x_2 = 10$, ya que las cadenas son $\{AA, BB, BC, BD, CC, CB, CD, DB, DC, DD\}$.

La recurrencia es

$$x_n \;=\; \underbrace{a_{n-1}}_{A} + \underbrace{x_{n-1}}_{B} + \underbrace{x_{n-1}}_{C} + \underbrace{x_{n-1}}_{D} \,.$$

En la ecuación anterior, el carácter debajo de cada llave muestra la letra por la que comienza cada tipo de palabra. Luego,

$$x_n \;=\; 2x_{n-1} + (x_{n-1} + a_{n-1}) \;=\; 3x_{n-1} + a_{n-1}$$

Como $a_{n-1} + x_{n-1} = 4^{n-1}$, se obtiene la recurrencia

$$x_n \;=\; 2x_{n-1} + 4^{n-1}\,, \quad n \geq 2\,, \quad x_1 = 3\,.$$

Es una recurrencia lineal de orden uno con coeficientes constantes y no homogénea.

La solución general de esta recurrencia es la suma de la solución general de la recurrencia homogénea y una solución particular de la no homogénea.

La recurrencia homogénea es $x_n = 2x_{n-1}$, cuyo polinomio característico es $r = 2$. Luego la solución general será

$$x_n \;=\; \alpha\, 2^n\,.$$

La solución particular de la no homogénea es de la forma $x_n = \beta\, 4^n$, ya que 4 no es raíz del polinomio característico anterior. El valor de β se obtiene sustituyendo esta forma general en la recurrencia no homogénea:

$$\beta\, 4^n \;=\; 2\beta\, 4^{n-1} + 4^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 4\beta \;=\; 2\beta + 1 \quad \Rightarrow \quad \beta \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

La solución general es

$$x_n \;=\; \alpha\, 2^n + \frac{1}{2}\, 4^n\,.$$

El valor de α lo obtenemos con la condición inicial:

$$x_1 \;=\; 3 \;=\; 2\,\alpha + 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

La solución final es:

$$x_n \;=\; \frac{1}{2}\,(4^n + 2^n)\,, \quad n \geq 1\,.$$

Por supuesto, $x_1 = 3$ y $x_2 = 10$.

---

2. Encontrar el número de soluciones naturales distintas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \;=\; M\,,$$

si $x_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. ¿Qué condiciones deben satisfacer n y M para que el número de soluciones no sea cero?

Solución.

Primero reescribimos la ecuación de manera que las variables sean no nulas. Para ello hacemos el siguiente cambio de variables: $x_i = 2 + u_i$ para $1 \leq i \leq 3$ y $x_i = 1 + u_i$ para todo $4 \leq i \leq n$. De esta manera $u_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n \;=\; M - n - 3\,, \quad u_i \geq 0\,.$$

Este es un reparto estándar en el que tenemos $M - n - 3$ objetos idénticos y n cajas representadas por $n - 1$ barras idénticas. Luego el número de soluciones es

$$\binom{M - n - 3 + n - 1}{n - 1} \;=\; \binom{M - 4}{n - 1}.$$

Para que el problema tenga sentido necesitamos que $n \geq 3$. Por otra parte, para que $\binom{p}{q} \neq 0$, necesitamos que $p \geq 0$ y que $0 \leq q \leq p$. La primera condición implica que $M \geq 4$. La condición $n - 1 \geq 0$ implica que $n \geq 1$, que es más débil que $n \geq 3$. Finalmente, la condición $M - 4 \geq n - 1$ implica que $M \geq n + 3$. Como $n \geq 3$, ésta es más fuerte que la que obtuvimos antes $M \geq 4$. Por lo tanto, las condiciones que M y n deben satisfacer son

$$n \geq 3\,, \quad M \geq n + 3\,.$$

---

15. Examen final mayo 2018

Problema 15.1

- Encontrar las soluciones en $\mathbb{Z}_{69}$ (si hay alguna) de la congruencia lineal $12x \equiv 30 \pmod{69}$.
- Sean A y B los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \mathcal{P}(A) \setminus \{A, \varnothing\}$ donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A. ¿Es el conjunto parcialmente ordenado $(B, \subseteq)$ un retículo distributivo?

Solución.

- Como $\mathrm{mcd}(2, 69) = 1$, la congruencia original es equivalente a $6x \equiv 15 \pmod{69}$. Como $\mathrm{mcd}(3, 69) = 3$, esta congruencia se puede escribir como $2x \equiv 5 \pmod{23}$.

  Como $\mathrm{mcd}(2, 23) = 1$ y $1 \mid 5$, la congruencia anterior tiene una única solución en $\mathbb{Z}_{23}$. Dado que $2 \times 12 = 24 \equiv 1 \pmod{23}$, entonces $2^{-1} \equiv 12 \pmod{23}$ y por tanto $x \equiv 5 \times 12 \pmod{23} \equiv 60 \pmod{23} \equiv 14 \pmod{23}$ es dicha solución (única) $\mathrm{mód}\,23$.

  Para volver a $\mathbb{Z}_{69}$, basta reescribir la solución anterior como la igualdad $x = 14 + 23\,k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si ahora tomamos $k = 3p$, $k = 3p+1$ y $k = 3p+2$ con $p \in \mathbb{Z}$, obtenemos las tres soluciones en $\mathbb{Z}_{69}$ de la congruencia original: $x \equiv 14 \pmod{69}$, $x \equiv 37 \pmod{69}$ y $x \equiv 60 \pmod{69}$.

- No porque $(B, \subseteq)$ no es un retículo. Por ejemplo, dados $\{a\}, \{b\} \in B = \mathcal{P}(A) \setminus \{A, \varnothing\}$, no existe $\text{ínf}(\{a\}, \{b\})$ ya que $\text{minor}(\{a\}, \{b\}) = \varnothing$.

Problema 15.2 Sea el grafo completo $K_3 = (V_3, E_3)$ con $V_3 = \{a, b, c\}$ y $E_3 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$. Sea ahora el conjunto A de todos los subgrafos generadores de K_3:

$$A = \{G = (V_3, E) \colon E \subseteq E_3\}.$$

¿Cuál es el cardinal $|A|$ del conjunto A? Sea el conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$ donde la relación de orden $\preceq$ está dada por

$$\text{Para todo } G_1, G_2 \in A, \qquad G_1 \preceq G_2 \quad \Leftrightarrow \quad G_1 \text{ es un subgrafo de } G_2.$$

Justificar si el conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$ tiene estructura de álgebra de Boole o no.

<u>Solución.</u>

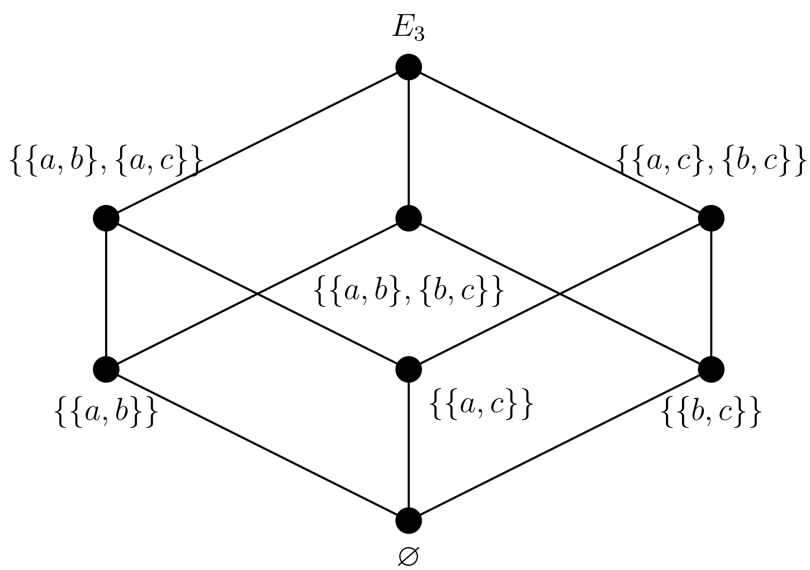
Dado que cada subgrafo generador $H = (V_3, E) \in A$ de $K_3 = (V_3, E_3)$ corresponde a un único subconjunto $E \subseteq E_3$ y viceversa, el cardinal de A será igual al del conjunto potencia $\mathcal{P}(E_3)$:

$$|A| \;=\; |\mathcal{P}(E_3)| \;=\; 2^{|E_3|} \;=\; 2^3 \;=\; 8\,.$$

Usando esta biyección, la relación de orden se puede reescribir como: para todo $G_1 = (V_3, F_1)$ y $G_2 = (V_3, F_2)$ de A,

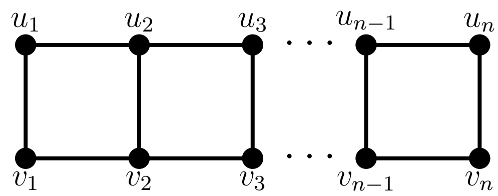
$$G_1 \preceq G_2 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \subseteq F_2\,.$$

El diagrama de Hasse de este conjunto parcialmente ordenado es



El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(E_3), \subseteq)$ es un retículo con $\sup(A, B) = A \cup B$ e $\text{ínf}(A, B) = A \cap B$. Además es un retículo distributivo, acotado y complementado con $\overline{A} = E_3 \setminus A$. Todos estos resultados están en las notas del curso. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E_3), \cup, \cap, \setminus, \varnothing, E_3)$ es un álgebra de Boole.

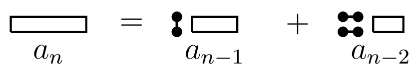
Problema 15.3 Sea G_n el grafo con $2n$ vértices que se muestra a continuación:



Un emparejamiento perfecto de un grafo con $2p$ vértices es un subgrafo generador formado por p aristas disjuntas entre sí. Calcular el número a_n de emparejamientos perfectos del grafo G_n usando relaciones de recurrencia.

SOLUCIÓN.

Las condiciones de contorno se calculan fácilmente: $a_1 = 1$ ( ) y $a_2 = 2$ (y). La recurrencia se puede obtener como sigue:



Es decir,

$$a_n \;=\; a_{n-1} + a_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,, \quad a_1 \;=\; 1\,, \quad a_2 \;=\; 2\,.$$

Esta recurrencia es idéntica a la de Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, pero con condiciones iniciales distintas. La secuencia de Fibonacci es $(f_n)_{n\geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$, luego las condiciones iniciales de nuestro problema corresponden a f_2 y f_3 respectivamente. Luego la solución final es $a_n = f_{n+1}$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 1\,.$$

---

16. Examen extraordinario junio 2018

Problema 16.1 **Nota:** los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

En una reunión hay n hombres y n mujeres. ¿De cuántas maneras se pueden emparejar los asistentes si cada pareja ha de constar de un hombre y una mujer? ¿De cuántas maneras se pueden emparejar los asistentes si las parejas pueden ser de cualquier tipo?

SOLUCIÓN.

La primera parte se puede hacer de la siguiente forma. Primero colocamos a los n hombres en fila de manera fija. Luego vamos colocando secuencialmente a las n mujeres en frente de los hombres. Habrá $n!$ maneras de colocarlas y por tanto $n!$ parejas hombre-mujer posibles.

La segunda parte no es más que buscar el número de particiones de tipo $\underbrace{(2, 2, \ldots, 2)}_{n \text{ parejas}}$ de un conjunto de $2n$ objetos distintos. La solución es

$$\frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

ya que, aunque hay en principio $(2n)!$ permutaciones distintas de los $2n$ objetos, el orden en cada pareja no importa (por lo que hay que dividir por un factor 2 por cada una de las n parejas) y, como el orden de las parejas es irrelevante, hay que dividir por el número de permutaciones de dichas parejas ($n!$).

Problema 16.2 Demostrar que no existe ningún grafo plano conexo tal que todo vértice tenga grado al menos ocho y toda cara esté limitada por al menos ocho aristas.

<u>SOLUCIÓN.</u>

Supongamos que dicho grafo $G = (V, E)$ existe. Entonces el teorema del apretón de manos nos garantiza que

$$\sum_{x \in V} d(x) \;=\; 2|E| \;\geq\; 8|V| \quad \Rightarrow \quad |E| \;\geq\; 4|V|\,.$$

Como G es plano y conexo existe su grafo dual G^*. Aplicando el teorema del apretón de manos a G^* obtenemos:

$$\sum_{r \in R} d_r \;=\; 2|E| \;\geq\; 8R \quad \Rightarrow \quad |E| \;\geq\; 4R\,.$$

Finalmente como G es plano y conexo, podemos aplicar el teorema de Euler:

$$|V| - |E| + R \;=\; 2\,, \quad 2 \;\leq\; |V| - |E| + \frac{1}{4}|E| \;=\; |V| - \frac{3}{4}|E|\,.$$

De aquí se deduce que

$$|E| \;\leq\; \frac{4}{3}|V| - \frac{8}{3} \;<\; 2|V|\,.$$

El conjunto de soluciones simultáneas de las desigualdades $|E| \geq 4|V|$ y $|E| < 2|V|$ es el conjunto vacío. Luego la hipótesis de partida es falsa y dicho grafo G no existe.

Problema 16.3 Nota: los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales.

¿Cuántas soluciones enteras hay de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ si cada $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? `Ayuda:` las funciones generatrices pueden ser útiles.

<u>SOLUCIÓN.</u>

La función generatriz $f_i(x)$ que codifica cada variable x_i es la misma para todo $i = 1, 2, 3, 4$ y viene dada por

$$f_i(x) \;=\; 1 + x + x^2 + \cdots + x^6 \;=\; \frac{1 - x^7}{1 - x}\,.$$

La función generatriz que codifica todo el problema es

$$F(x) \;=\; \prod_{i=1}^{4} f_i(x) \;=\; \frac{(1-x^7)^4}{(1-x)^4} \;=\; \left[\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-x^7)^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-x)^k\right]$$

donde hemos usado el binomio de Newton para desarrollar $(1-x^7)^4$ y el binomio de Newton generalizado para $(1-x)^{-4}$. Luego

$$F(x) \;=\; (1-4x^7+6x^{14}-4x^{21}+x^{28})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k\,.$$

La solución pedida es

$$[x^{21}]\,F(x) \;=\; \underbrace{\binom{24}{3}}_{k=21} - 4\underbrace{\binom{17}{3}}_{k=14} + 6\underbrace{\binom{10}{3}}_{k=7} - 4\underbrace{\binom{3}{3}}_{k=0} \;=\; 20\,.$$

Problema 16.4 Calcular el resto de dividir 3^{1492} entre 20.

<u>Solución.</u>

Como $\mathrm{mcd}(3,20)=1$, podemos aplicar el teorema de Euler para simplificar esta expresión:

$$3^{\Phi(20)} \;\equiv\; 1 \pmod{20}\,.$$

Como $20 = 2^2\times 5$,

$$\Phi(20) \;=\; 20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) \;=\; 8\,.$$

Además, $1492 = 186\times 8 + 4$, luego

$$3^{1492} \;=\; \left(3^8\right)^{186} 3^4 \;\equiv\; 3^4 \pmod{20} \;\equiv\; 81 \pmod{20} \;\equiv\; 1 \pmod{20}\,.$$

Luego el resto pedido es $3^{1492} \bmod 20 = 1$.

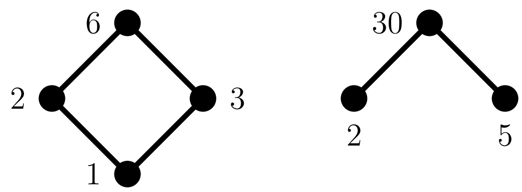
Problema 16.5 Sea el conjunto $X=\{1,2,3,6\}\times\{2,5,30\}$. En él se define la relación de orden lexicográfica $\mathcal{R}$

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \quad\Leftrightarrow\quad ((a\neq c)\wedge(a\mid c))\vee((a=c)\wedge(b\mid d))$$

donde $\wedge$ es el AND lógico y $\vee$ es el OR lógico. Encontrar el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $(X,\mathcal{R})$.

<u>Solución.</u>

Este es el producto lexicográfico de dos conjuntos parcialmente ordenados. El primero es $(\{1,2,3,6\},|)$ y el segundo, $(\{2,5,30\},|)$. Los diagramas de Hasse de ambos son:



El diagrama de Hasse de $(X, \mathcal{R})$ se obtiene sustituyendo cada punto del diagrama de Hasse de $(\{1, 2, 3, 6\}, |)$ por el diagrama de Hasse de $(\{2, 5, 30\}, |)$. El resultado es