ÁLGEBRA LINEAL

Examen Final. Enero 2014

Nombre		Grupo	

Normas:

- **NO** se permiten dispositivos electrónicos excepto calculadoras no programables.
- Cada respuesta debe ser justificada.
- No se puede abandonar el aula hasta transcurridos 30 minutos desde el inicio del examen.
- Este examen supone un 60% de la nota final.

Ejercicio 1 (1 punto) Consideremos el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0,1]$, que denotamos por $\mathcal{C}[0,1]$. Definamos

$$f_1 \cdot f_2 = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) dx, \quad \text{donde } f_1, f_2 \in \mathcal{C}[0,1].$$

Consideremos

$$f_1(x) = \frac{1}{x+5}, \quad f_2(x) = x.$$

a) Demostrar que la operación así definida es un producto escalar.

b) Determinar si f_1 y f_2 son ortogonales.

Ejercicio 2 (2 puntos) Consideremos la transformación lineal T de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ que satisface:

$$T(e_1) = (1,-1,0)^T, \quad T((1,1,0,0)^T) = (2,-1,2)^T,$$

$$T((1,0,1,0)^T) = (0,-3,1)^T, \quad T((0,0,1,2)^T) = (1,4,9)^T.$$

a) Determinar la matriz A_T asociada a esta transformación lineal.

b) Determinar la dimensión de cada uno de los cuatro subespacios vectoriales asociados a A_T. Encontrar una base B_1 para el espacio columna de A_T.

c) Justificar si T puede ser alguna de las siguientes transformaciones: i) isomorfismo, ii) transformación inyectiva, iii) transformación sobreyectiva.

d) Encontrar una base ortogonal B_2 del espacio columna de A_T, apoyando su construcción en la base B_1.

e) Encontrar la matriz del cambio de la base B_1 a la base B_2.

Ejercicio 3 (2 puntos) Consideremos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 4\,x(t) - 2\,z(t) \\ y'(t) & = & 2\,x(t) + 5\,y(t) + 4\,z(t) \\ z'(t) & = & 5z(t) \end{array}\right\}$$

a) Escribir el sistema en forma matricial: $X' = A\,X$.

b) Calcular los autovalores de A.

c) Determinar los autoespacios de A asociados a los autovalores obtenidos en el apartado b). ¿Coinciden las multiplicidades algebraicas y geométricas?

d) Resolver el sistema, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ y $z(0) = -1$.

e) Sin utilizar el producto de forma recursiva, encontrar A^4.

Ejercicio 4 (1 punto) Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el espacio columna de A y explicar por qué el sistema lineal

$$Ax = b,$$

con $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ no tiene solución.

b) Encontrar la solución de mínimos cuadrados del sistema anterior.