OPCIÓN 1: EVALUACIÓN CONTINUA

PREGUNTA 1 (1 pto)

a) (0.5 ptos) Definir los conceptos de **subespacio vectorial** y **complemento ortogonal de un subespacio vectorial**.

b) (0.5 ptos) Dadas las siguientes dos bases:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Demostrar que ambas bases generan el mismo subespacio vectorial.

PREGUNTA 2 (1 pto)

a) (0.25 ptos) Encontrar la matriz asociada a la siguiente transformación lineal. ¿Entre qué espacios vectoriales origen e imagen está definida la misma?

$$T([x_1, x_2, x_3]^T) = x_1[1, 2, 3]^T + x_3[4, 5, 6]^T$$

b) (0.25 ptos) Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal de un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XY, seguida de una reflexión respecto al eje Y.

c) (0.5 ptos) Encontrar el núcleo, imagen y nulidad de la transformación lineal definida por al siguiente matriz A. ¿Es inyectiva?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 3 (1 pto)

Sea W un espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido como $W = gen([1, 2, 1, 0]^T, [0, -1, 1, 0]^T)$.

a) (0.3 ptos) Calcular la matriz de proyección ortogonal sobre W.

b) (0.3 ptos). Encuentra la solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$, resolviendo las ecuaciones normales correspondientes, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) (0.4 ptos). Resolver el mismo problema del apartado (b), utilizando la matriz de proyección ortogonal calculada en el apartado (a). Comprobar que la solución es la misma que en apartado (b).

PREGUNTA 4 (1 pto)

Calcular la descomposición en valores singulares de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OPCIÓN 2: SIN EVALUACIÓN CONTINUA

PREGUNTA 5 (1.5 ptos)
Encontrar la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [\pi, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ sobre el subespacio generado por la base ortonormal que se obtiene a partir de los autovectores asociados a los dos autovalores más pequeños de la diagonalización ortogonal de la siguiente matriz simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

PREGUNTA 6 (2 ptos)
Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (0.2 ptos) Calcular $A^T A$ y $AA^T = B$.

b) (0.6 ptos) Demostrar que existe una matriz P invertible tal que $BP = PD$, siendo D diagonal. Calcular D y P.

c) (0.2 ptos) Probar que existe una matriz C tal que $C^2 = D$; calcular C.

d) (0.4 ptos) Probar que existe una matriz H simétrica tal que $H^2 = B$; calcular H.

e) (0.6 ptos) Probar que existe una matriz U ortogonal verificando $A = HU$. ¿Es A diagonalizable?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

a) – Un **subespacio vectorial** es un subconjunto W de un espacio vectorial V que cumple las siguientes propiedades:

  * W contiene el elemento nulo de V.
  * W es cerrado bajo la suma: si $w_1, w_2 \in W \implies w_1 + w_2 \in W$.
  * W es cerrado bajo el producto por un escalar: si $w \in W$ y k es un escalar, entonces $kw \in W$.

– Sea W un subespacio vectorial de V. El conjunto de todos los vectores $\vec{v} \in V$ ortogonales a W se denomina **complemento ortogonal de** W, y se denota por $W^{\perp}$.

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \ : \ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad ; \quad \forall \vec{w} \in W\}$$

b) Las dos son bases de subespacios de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 (por tener cada una dos vectores linealmente independientes). Para demostrar que ambas generan el mismo subespacio basta con comprobar que todos los vectores de una de las bases se pueden obtener por combinación lineal de los vectores de la otra base.

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \\ \mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \end{cases} \implies \begin{cases} a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{w}_1 \\ c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2 = \vec{w}_2 \end{cases}$$

Si existieran valores únicos a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ entonces, todo vector $\vec{u}$ generado por la base $\mathcal{C}$ puede generarse por la base $\mathcal{B}$.

$$\vec{u} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = \alpha(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + \beta(c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) = (\alpha a + \beta c)\vec{v}_1 + (\alpha b + \beta d)\vec{v}_2$$

El mismo razonamiento se puede hacer intercambiando $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$. Resolvamos ambos sistemas a la vez mediante Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 - F_4]{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

de forma que la solución única es $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$, $d = -2$ y por tanto ambas bases generan el mismo subespacio vectorial.

PREGUNTA 2

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Está definida de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$.

b) Proyección sobre XY:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y tras la reflexión respecto el eje Y:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La forma reducida de A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego el núcleo es $t[0, -2, 1]$. Una base de este núcleo es $\{[0, -2, 1]\}$. La imagen viene dada por $x_1[1, 1, 1] + x_2[2, 3, 1] + x_3[4, 6, 2] = x_1[1, 1, 1] + (x2 + 2x3)[2, 3, 1]$, luego una base de la imagen es: $\{[1, 1, 1], [2, 3, 1]\}$. La nulidad es 1, luego **no** es inyectiva.

PREGUNTA 3

a) Llamaremos A a la matriz cuyas columnas son vectores de una base de W. La matriz de proyección ortogonal sobre W es AA^+, donde $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ es la pseudoinversa de A:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & 6/11 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_W = A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Tenemos que resolver las ecuaciones normales: $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$. Como las columnas de A son linealmente independientes, la solución por mínimos cuadrados es única : $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$.

Utilizando $(A^TA)^{-1}$ calculado en el apartado anterior y $A^T\vec{b} = [3, -1]^T$. Finalmente $\boxed{\vec{x} = [\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}]}$.

c) Vamos a utilizar la matriz de proyección ortogonal sobre W calculada en el apartado (a) para determinar la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el dicho subespacio.

$$\text{proy}_W(\vec{b}) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/11 \\ 13/11 \\ 2/11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema $A\vec{x} = \text{proy}_W\vec{b}$ por el método de Gauss, se obtiene el mismo resultado que el obtenido en el apartado (b): $\boxed{\vec{x} = [\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}]}$.

PREGUNTA 4

$$A^TA = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 5

Una diagonalización ortogonal de A de la forma $A = QAQ^T$ es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores más pequeños son -3 y 1 y sus autovectores normalizados corresponden a los dos primeras columnas de A en esta representación. Por tanto hay que proyectar $\mathbf{v} = (\pi - \sqrt{2}, 2\sqrt{2})^T$ sobre el espacio $W = gen\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, en donde $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son la primera y segunda columna de Q respectivamente. El cálculo de la proyección será muy sencillo al formar $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ una base ortonormal:

$$proy_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_1} + (\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_2} = 3\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = (0, -2/\sqrt{2}, 4/\sqrt{2})^T$$

PREGUNTA 6

a)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

b) B es una matriz simétrica y real, luego es diagonalizable ortogonalmente. Así que existe una matriz P ortogonal, tal que $BP = PD$, siendo D diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 3/2 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = (x-4)(x-\frac{1}{4})$$

Luego los autovalores son 4 y 1/4, por lo tanto D$=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Para hallar P, calcularemos los autovectores asociados:

- Para el autovalor 4, Nul$\begin{bmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$, luego $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ autovector asociado.
- Para el autovalor $\frac{1}{4}$, Nul$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$, luego $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ autovector asociado.

Normalizando obtenemos $P = \frac{1}{\sqrt[2]{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ortogonal, que además es simétrica y por tanto:

$$P = P^T = P^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad PP^T = I = P^2$$

Fácilmente se puede verificar que: $B = AA^T = PDP^{-1} = PDP^T = PDP$.

c) Puesto que D es diagonal con autovalores positivos, existe una matriz C, que verifica $C^2 = D$ con c$_{ii} = \pm\sqrt[2]{d_{ii}}$. De forma que C puede ser por ejemplo $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, pero no es la única posibilidad.

d) Los resultados anteriores hacen plausible lo siguiente. Sea $H = PCP$ y por lo tanto:

$$H^2 = (PCP)(PCP) = PC^2P = PDP = B$$

Luego $H = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 17/10 \end{bmatrix}$

e) Sea $U = H^{-1}A$, entonces:

$$H^{-1} = (PCP)^{-1} = PC^{-1}P \quad ; \quad \left(H^{-1}\right)^T = PC^{-1}P = H^{-1} \quad ; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para demostrar que U es ortogonal basta comprobar que $U^TU = UU^T = I$.

$$U^TU = \left(H^{-1}A\right)^T \left(H^{-1}A\right) = \left[A^T \left(H^{-1}\right)^T\right] \left(H^{-1}A\right) = A^T \left[\left(H^{-1}\right)^T H^{-1}\right] A = A^T \left(H^{-1}\right)^2 A =$$

$$= A^T \left(AA^T\right)^{-1} A = \left[A^T \left(A^T\right)^{-1}\right] \left(A^{-1}A\right) = I$$

$$UU^T = \left(H^{-1}A\right)\left(H^{-1}A\right)^T = \left(H^{-1}A\right)\left(A^TH^{-1}\right) = \left(PC^{-1}P\right)(PDP)\left(PC^{-1}P\right) =$$
$$= P\left(C^{-1}DC^{-1}\right)P = P\left(C^{-1}CCC^{-1}\right)P = PP = I$$