Hoja 6

Transformaciones lineales y matrices

Problema 6.1 Demostrar que las siguientes aplicaciones T son transformaciones lineales encontrando una matriz apropiada A_T asociada a la transformación. Indicar si son inyectivas y encontrar una base y la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $T((x, y)^t) = x$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $T(v) = w^t v$, donde $w \neq 0$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^2$.

c) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $T(v) = 3v$.

d) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, definida por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 3a_2 x^2$.

Problema 6.2 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asocia a los vectores $v_1 = (1, 1)^t$ y $v_2 = (2, -1)^t$ (expresados respecto a la base canónica B_0) los vectores $w_1 = (2, -1)^t$ y $w_2 = (1, -5)^t$, respectivamente. Encontrar una matriz 2×2, A_{T,B_0}, asociada a T respecto a la base canónica B_0. Demostrar que A_T es no-singular (y, por tanto, un isomorfismo).

Problema 6.3 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Demostrar que T tiene inversa y encontrar la matriz asociada a T^{-1} respecto a la base canónica.

Problema 6.4 Consideremos los vectores

$$b_1 = (1, 0, 1)^t \ , \quad b_2 = (-1, 1, 2)^t \ , \quad b_3 = (0, 1, 5)^t \ , \quad u = (1, 2, 3)^t \ .$$

Demostrar que $B = (b_1, b_2, b_3)$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas de u con respecto a B.

Cierta transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifica que $T(b_1) = e_1, T(b_2) = e_2, T(b_3) = e_3$, siendo $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica. Escribir la correspondiente matriz A_{T,B_0} y hallar el núcleo y la imagen de T.

Problema 6.5 Sean los vectores

$$v_1 = (1, 0, -1)^t \ , \quad v_2 = (2, 1, 2)^t \ , \quad v_3 = (5, 1, -1)^t \ , \quad u = (u_1, u_2, u_3)^t \ .$$

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que verifica $T(e_1) = v_1$, $T(e_2) = v_2$, $T(e_3) = v_3$, $T(e_4) = u$. Supongamos que el vector u es tal que T verifica $\mathrm{rg}(T) = \mathrm{nul}(T)$. Encontrar la condición que deben cumplir las coordenadas de u para que esto ocurra. Encontrar una base de $\mathrm{Im}(T)$.

Problema 6.6 Encontrar una matriz A tal que $T(u) = A\,u$ (respecto a la base canónica), para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T((1,1)^t) = (1,-2)^t$ y $T((2,3)^t) = (-2,5)^t$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por una rotación de 30° en el sentido de las agujas del reloj.

Problema 6.7 Sean la base de $\mathbb{R}^2$, $B = (v_1, v_2)$, donde $v_1 = (1,1)^t$ y $v_2 = (-1,0)^t$, y la transformación lineal dada por $T((x,y)^t) = (4x - 2y, 2x + y)^t$, expresada respecto a la base canónica. Encontrar la matriz de T relativa a la base dada.

Problema 6.8 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar una base para el espacio fila y para el espacio columna de A.

2. Determinar la dimensión del espacio nulo de A y de su traspuesta.

3. ¿Para qué valores de a el vector $b = (-1, a, a^2)^t$ pertenece al espacio columna de A?

Problema 6.9 Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} T((1,0,0,0)^t) &= (1,0)^t\,, \\ T((1,1,0,0)^t) &= (-1,0)^t\,, \\ T((0,0,1,0)^t) &= (-2,0)^t\,, \\ T((1,2,3,4)^t) &= (3,0)^t\,. \end{aligned}$$

1. Determinar una matriz A_T que la represente (respecto a la base canónica). Hallar el núcleo y la imagen de T así como sus dimensiones.

2. Hallar los cuatro subespacios fundamentales asociados a la matriz A_T, sus dimensiones y una base para cada uno de ellos.

Problema 6.10 Sea la transformación $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1 + a_2, 0)^t.$$

Encontrar alguna matriz A_{T,B_2B_1} que represente T de manera que

$$[T(p)]_{B_2} = A_{T,B_2B_1}\,[p]_{B_1},$$

para ciertas bases B_1 y B_2. Determinar los subespacios fundamentales asociados a A_T.

Problema 6.11 Sea la transformación $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}.$$

Encontrar alguna matriz A_{T,B_2B_1} que represente T de manera que

$$[T(M)]_{B_2} = A_{T,B_2B_1}\,[M]_{B_1},$$

con respecto a las bases elegidas B_1 y B_2. Determinar los subespacios fundamentales asociados a A_{T,B_2B_1}.