Soluciones # 13

Mínimos cuadrados

Problema 13.1

a) Es incompatible y $x_0 = \dfrac{1}{50}(83, 71)^t$.

b) Es incompatible y $x_0 = \dfrac{1}{27}(36, 22)^t$.

c) Es compatible con $x_1 = x_2 = 1$ y $x_0 = (1, 1)^t$.

Problema 13.2

1) Las proyecciones son

   a) $\dfrac{1}{50}(154, 47, 95)^t$.

   b) $\dfrac{1}{27}(2, 14, 50)^t$.

   c) $(3, 0, 2)^t$.

2) Las diferencias $r = b - A\,x_0$ son

   a) $r = \dfrac{1}{50}(-4, 3, 5)^t$.

   b) $r = \dfrac{1}{27}(-2, -14, 4)^t$.

c) $r = (0,0,0)^t$.

3) Claramente se cumple que $r \in N(A)$:

a) $N(A) = \mathrm{Gen}\,((-4,3,5)^t)$.

b) $N(A) = \mathrm{Gen}\,((1,7,-2)^t)$.

c) $N(A) = \mathrm{Gen}\,((-2,8,3)^t)$.

Problema 13.3

1. $y = \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{14}\,x$.
2. $y = \dfrac{19}{132} + \dfrac{19}{44}\,x - \dfrac{1}{132}\,x^2$.

Problema 13.4

1. Si $x \in N(A)$, entonces $A^t\,A\,x = A^t\,0 = 0$. Luego $x \in N(A^t\,A)$ y $N(A) \subset N(A^t\,A)$.

   Al contrario, si $x \in N(A^t\,A)$, entonces $A^t\,A\,x = 0$. Si hacemos el producto escalar de esta expresión por x, tenemos que $\langle x, A^t\,A\,x\rangle = x^t\,A^t\,A\,x = 0$. Pero esto es equivalente a $\|A\,x\| = 0$, luego $A\,x = 0$, $x \in N(A)$ y $N(A^t\,A) \subset N(A)$.

   Las dos inclusiones implican que $N(A) = N(A^t\,A)$.

2. Si multiplicamos por A^t a la izquierda, $A^t\,A\,x = A^t\,b = 0$. Luego $x \in N(A^t\,A) = N(A)$ y por tanto el sistema $A\,x = b$ debe ser incompatible si $b \neq 0$.

Problema 13.5 El sistema se lee

$$A\,x_0 + r = b\,, \quad A^t\,r = 0\,.$$

De aquí se deduce que, si $A^t\,A$ es invertible, la solución de mínimos cuadrados buscada es:

$$x_0 = (A^t\,A)^{-1}\,A^t\,b\,.$$

Problema 13.6 Si $f_1 = 1$ y $f_2 = 2x - 1$, entonces

1. $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

2. $\|f_1\| = 1$ y $\|f_2\| = 1/\sqrt{3}$.

3. $\sqrt{x} \approx \dfrac{4}{15} + \dfrac{4}{5}\, x$ en $[0, 1]$.

Problema 13.7 Si $f_1 = 1$ y $f_2 = x$, entonces

1. $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

2. $\|f_1\| = \sqrt{2}$ y $\|f_2\| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3. $x^{1/3} \approx \dfrac{9}{7}\, x$ en $[-1, 1]$.