Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Informática

Heurística y Optimización

Noviembre 2015

SAT/CSP

Problema 1

En un complejo industrial se quiere ahorrar en gastos de seguridad. En particular, existe una serie de agentes de seguridad que durante la noche patrullan la zona, y se lo que se quiere hacer es contratar cuantos menos agentes mejor sin comprometer la seguridad del complejo. El complejo industrial se divide en zonas adyacentes las unas con las otras, y cuando un agente está asignado a una zona patrulla su zona, las zonas adyacentes a ésta y las vías que comunican su zona con las zonas adyacentes. El objetivo es encontrar el mínimo número de agentes (y las zonas a las que se les asigna) de tal forma que no quede ninguna zona ni vía sin patrullar.

Este problema es equivalente a un conocido problema matemático: la cobertura mínima de vértices. El problema de la cobertura de vértices de un grafo consiste en elegir un subconjunto de vértices (o nodos) de tal modo que todas las aristas del grafo incidan en al menos un vértice perteneciente al subconjunto elegido. La dificultad de este problema radica en seleccionar un subconjunto mínimo, es decir, hallar una cobertura seleccionando un subconjunto con el menor número posible de vértices. La figura 1 muestra dos ejemplos de coberturas mínimas en los que los vértices seleccionados aparecen en rojo.

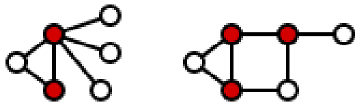

Figura 1: Dos ejemplos de cobertura mínima de vértices

Una de las formas más sencillas de resolver el problema es convirtiéndolo a SAT e iterativamente reducir el número máximo de vértices que se pueden seleccionar hasta encontrar un problema no satisfacible, en cuyo caso la última solución obtenida será una cobertura mínima. En este caso se pide transformar el problema que aparece en la figura 1 en una instancia de SAT permitiendo un máximo de dos vértices seleccionados y resolverlo con los algoritmos de Davis-Putnam y DPLL.

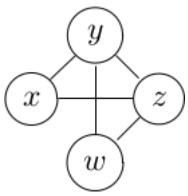

Figura 2: Grafo del problema

Problema 2

Seis alumnos (Juan, María, Alfredo, Yara, Rubén y Felisa) están en el mismo grupo de Ingeniería del Software. Tienen que realizar un documento dividido en tres partes haciéndolas en orden y hay que decidir quién hace cada cosa. Juan no tiene los conocimientos para realizar la primera parte, y María sólo puede participar en la tercera. Alfredo y Rubén se llevan mal y no quieren trabajar juntos, y Rubén y Felisa insisten en trabajar en la misma parte. Además Rubén le deja a Yara su portátil para que haga su parte cuando él acabe. ¿Qué parte debería hacer cada alumno? Reduce por arco consistencia y camino consistencia los dominios de las variables del problema y encuentra una solución factible.

Problema 3

Se desea elaborar un calendario de examenes de selectividad. Los examenes serán en tres días: viernes, sabado y domingo, bien en horario de mañana o de tarde. Las asignaturas se dividen en troncales o específicas de cada rama. Las troncales son: Matemáticas, Lengua e Inglés. Las específicas de ciencias son: Física, Química y Biología. Las específicas de letras son: Arte, Historia y Griego. Las asignaturas troncales no deben solaparse, ni entre sí ni con ninguna otra. Las específicas pueden solaparse aunque sólo con asignaturas de la otra rama.

Por otro lado, deben cumplirse varias restricciones sobre el orden de los exámenes:

- El examen de Física debe ser posterior al de Matemáticas y el de Inglés al de Lengua.
- Física y Química son controladas por el mismo profesor, por lo que no pueden ponerse el mismo día (ni siquiera en distintos turnos). Lo mismo ocurre con Historia y Lengua.
- El examen de Matemáticas debe ser el mismo día que el examen de Lengua.
- El profesor que vigila el examen de Inglés se va de viaje el sabado por la tarde y no puede asistir ni el sabado por la tarde ni el domingo.

Se pide:

1. Representar el problema formalmente como un problema de satisfacción de restricciones.
2. Aplicar arco-consistencia y determinar los dominios resultantes.
3. Aplicar camino-consistencia de longitud 2 y determinar los dominios resultantes.

Solución del problema 1

El primer paso es formalizar el problema como un instancia SAT. Hay que tener en cuenta dos cosas: la incidencia de las aristas y el máximo de vértices. Lo primero es sencillo: si existe una arista que conecta dos nodos, o uno u otro (o ambos) han de ser seleccionados. Asumiremos que cada vértice se corresponde con una variable que indica que ha sido seleccionado cuando la variable tiene un valor de *verdadero*. Por ejemplo, x e y están conectados, así que crearemos una cláusula que será $(x \vee y)$. Esto es así para cada arista, por lo que la instancia incluirá las siguientes cláusulas:

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee w) \wedge (z \vee w)$$

La restricción del número máximo de vértices se puede codificar de varias maneras. Las codificaciones más eficientes respecto al tamaño de la fórmula SAT usan variables auxiliares, aunque por simplicidad nosotros no lo haremos así. En nuestro caso tendremos en cuenta que si k es el máximo número de vértices, para ninguna combinación de $k+1$ variables es posible que todas sean ciertas. Si por ejemplo $k = 3$ entonces la única combinación de las 4 variables generaría la cláusula $\neg(x \wedge y \wedge z \wedge w)$, que en forma normal conjuntiva se transformaría en $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{w})$. En este caso, con $k = 2$ tendríamos las siguientes cláusulas en CNF:

$$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{w}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{w}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{w})$$

Resolución mediante Davis-Putnam

Ahora pasaremos a encontrar la solución con Davis-Putnam. Primero daremos nombre a las cláusulas:

$C_1 : (x \vee y)$ $C_6 : (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$

$C_2 : (x \vee z)$ $C_7 : (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{w})$

$C_3 : (y \vee z)$ $C_8 : (\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{w})$

$C_4 : (y \vee w)$ $C_9 : (\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{w})$

$C_5 : (z \vee w)$

Elegimos una variable de resolución, por ejemplo x. Las cláusulas relevantes son C_1 y C_2 con el literal x y C_6, C_7 y C_8 con el literal $\overline{x}$. Una vez eliminada la variable x, la fórmula lógica derivada de la resolución es $(C_1 \wedge C_2) \vee (C_6 \wedge C_7 \wedge C_8)$, aunque es más sencillo hacer la disyunción de cada cláusula en la que aparecía x con cada cláusula en la que aparecía $\overline{x}$. Las cláusulas resultantes son las siguientes:

$(y \vee \overline{y} \vee \overline{z})$ $(z \vee \overline{y} \vee \overline{z})$

$(y \vee \overline{y} \vee \overline{w})$ $(z \vee \overline{y} \vee \overline{w})$

$(y \vee \overline{z} \vee \overline{w})$ $(z \vee \overline{z} \vee \overline{w})$

Aquellas cláusulas en las que aparezca un literal y la negación de él mismo son tautologías, por lo que evalúan a *verdadero* y pueden ser ignoradas. Esto pasa en cuatro casos, por lo que tendremos dos cláusulas adicionales, C_{10} y C_{11}:

$C_{10} : (y \vee \overline{z} \vee \overline{w})$ $C_{11} : (z \vee \overline{y} \vee \overline{w})$

En total después de la primera iteración el conjunto de cláusulas incluye C_3, C_4, C_5, C_9, C_{10} y C_{11}. Suele ser buena idea elegir variables cuyos literales aparezcan con poca frecuencia en las cláusulas para evitar generar cláusulas adicionales, aunque en este caso no hay gran diferencia. Ahora escogemos y como variable de resolución. Las cláusulas relevantes son C_3, C_4, C_9, C_{10} y C_{11} y las únicas cláusulas no tautológicas generadas son $C_{12} : (z \vee \overline{w})$ y $C_{13} : (\overline{z} \vee \overline{w})$, quedando el conjunto de las cláusulas restantes como C_5, C_{12} y C_{13}.

El resto es trivial: en la iteración 3 elegimos z, quedándonos las cláusula $C_{14} : (\overline{w})$, lo que hace que en la iteración 4 elijamos w y comprobemos que la fórmula es satisfacible.

La segunda parte de Davis-Putnam consiste en asignar valores recorriendo variables y cláusulas en orden inverso. Primero, C_{14} fuerza $w = \bot$. A continuación, si resolvemos z en C_5, C_{12} y C_{13} vemos que C_5 y C_{12} son cierta y que en C_{13} se elimina w, por lo que $z = \top$. De igual manera recuperamos el valor de y del conjunto de cláusulas C_3, C_4, C_9, C_{10} y C_{11}: únicamente C_4 no es cierta después de asignar z y w, quedando y como única alternativa, por lo que $y = \top$. Por último repetimos el proceso con la variable x y las cláusulas C_1, C_2, C_6, C_7 y C_8, de lo que deducimos a partir de C_6 que $x = \bot$. La solución final es $x = \bot, y = \top, z = \top, w = \bot$, como se puede ver en la figura 3.

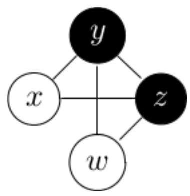

Figura 3: Solución gráfica del problema

Resolución mediante DPLL

Para solucionar el problema con DPLL, partimos de las cláusulas iniciales, dado que el valor para todas las variables es desconocido:

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{x =?, y =?, z =?, w =?} \\
C_1 : (x \vee y) & C_6 : (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \\
C_2 : (x \vee z) & C_7 : (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{w}) \\
C_3 : (y \vee z) & C_8 : (\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{w}) \\
C_4 : (z \vee w) & C_9 : (\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{w}) \\
C_5 : (y \vee w) &
\end{array}$$

Escogemos una variable, en este caso x. Nuestro modelo inicial será satisfacible si es satisfacible dado que x es cierto o es satisfacible dado que x es falso. Por lo tanto, comenzamos comprobando qué ocurre si x es cierto.

En dicho caso, las cláusulas 1 y 2 se satisfacen, por lo que podemos eliminarlas. Asimismo, sabemos que $\overline{x}$ no se cumple, por lo que podemos eliminarlo de las cláusulas en las que aparece:

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{x = \top, y =?, z =?, w =?} \\
 & C_6 : (\overline{y} \vee \overline{z}) \\
C_3 : (y \vee z) & C_7 : (\overline{y} \vee \overline{w}) \\
C_4 : (z \vee w) & C_8 : (\overline{z} \vee \overline{w}) \\
C_5 : (y \vee w) & C_9 : (\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{w})
\end{array}$$

A continuación seleccionamos la siguiente variable: y, y repetimos el proceso asignándole el valor verdadero. En este caso, satisfacemos las cláusulas 3 y 5 y simplificamos las cláusulas 6, 7 y 9.

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{x = \top, y = \top, z =?, w =?} \\
 & C_6 : (\overline{z}) \\
 & C_7 : (\overline{w}) \\
C_4 : (z \vee w) & C_8 : (\overline{z} \vee \overline{w}) \\
 & C_9 : (\overline{z} \vee \overline{w})
\end{array}$$

Dado que tenemos cláusulas con un único literal, sabemos que al asignar valor verdadero a z y w, el modelo se hará insatisfacible, por lo que es necesario asignar $\overline{z}$ y $\overline{w}$ pero esto causa que la cláusula $C_4 : (z \vee w)$ quede vacía por lo que el modelo es insatisfacible. Por lo tanto, hemos demostrado que el modelo es insatisfacible dado que $x = \top \wedge y = \top$. Debemos hacer backtracking para comprobar otros casos.

Revisamos por tanto la asignación de valor a la variable y, considerando ahora el valor falso. Esto hace que se saatisfagan las cláusulas 6, 7 y 9, mientras que se elimina el literal y de las cláusulas 3 y 5:

$x = \top, y = \bot, z =?, w =?$
$C_3 : (z)$
$C_4 : (z \vee w) \quad C_8 : (\overline{z} \vee \overline{w})$
$C_5 : (w)$

De nuevo, las cláusulas 3 y 5 harán que el modelo sea insatisfacible al probar los valores $\overline{z}$ y $\overline{w}$, mientras que la cláusula 8 restringe el resto de casos, por lo que el modelo es insatisfacible. Hemos probado por tanto que si asignamos el valor verdadero a x, el modelo resultante es insatisfacible en todos los casos, por lo que retrocedemos al inicio intentando asignar el valor $\overline{x}$.

$x = \bot, y =?, z =?, w =?$
$C_1 : (y)$
$C_2 : (z)$
$C_3 : (y \vee z)$
$C_4 : (z \vee w) \quad C_9 : (\overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{w})$
$C_5 : (y \vee w)$

De este modo se satisfacen las cláusulas 6, 7 y 8 y, al simplificar las cláusulas 1 y 2, estas nos establecen el valor de las variables y y z a verdadero. Esto hace que se satisfagan las cláusulas 1, 2, 3, 4 y 5, quedándonos únicamente la cláusula 9 que obliga a que el valor de w sea falso. Por lo tanto, se encuentra una posible asignación que satisface el modelo:

$$x = \bot, y = \top, z = \top, w = \bot$$

En la figura 4 se puede ver el árbol completo tal y como lo expandiría el algoritmo DPLL. Para simplificar la figura se han omitido aquellas ramas que contradicen directamente las restricciones unitarias.

Solución del problema 2

En este problema las variables se corresponden con cada una de las personas (denotadas aquí con su inicial) y el dominio es la parte del documento que realizarán. Así pues, las variables son $X = (J, M, A, Y, R, F)$ e inicialmente el dominio es $\forall i \in X, D_i = (1, 2, 3)$. Aunque implícitamente todas las partes tienen que tener que tener a alguien asignado, de momento ignoraremos dicha restricción por simplicidad. Juan no puede hacer la primera parte, por lo que $D_J = (2, 3)$, y María sólo puede hacer la tercera, así que $D_M = (3)$.

Si analizamos A y R vemos que $R_{A,R}$ incluye inicialmente todas las combinaciones entre los dominios de ambas variables, es decir, $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$. Al forzar arco consistencia sin embargo podemos eliminar todos los pares con valores idénticos, por lo que $R_{A,R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. De la misma manera, como Rubén y Felisa tienen que ir juntos, por arco consistencia deducimos que $R_{R,F} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Dado que hay restricciones entre Alfredo y Rubén por un lado y entre Rubén y Felisa por otro se puede comprobar si $R_{A,F}$ es camino consistente en relación a R. Teniendo en cuenta que tiene que existir un valor a_k tal que $(a_i, a_k) \in R_{A,R}$ y $(a_k, a_j) \in R_{R,F}$, al forzar la camino consistencia obtenemos que $R_{A,F} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

De nuevo, la restricción entre Rubén y Yara implica que $R_{R,Y} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Esto hace que $D_R = (1, 2)$ y $D_Y = (2, 3)$. Al haberse reducido D_R las restricciones que afectan a R también se ven afectadas, quedando

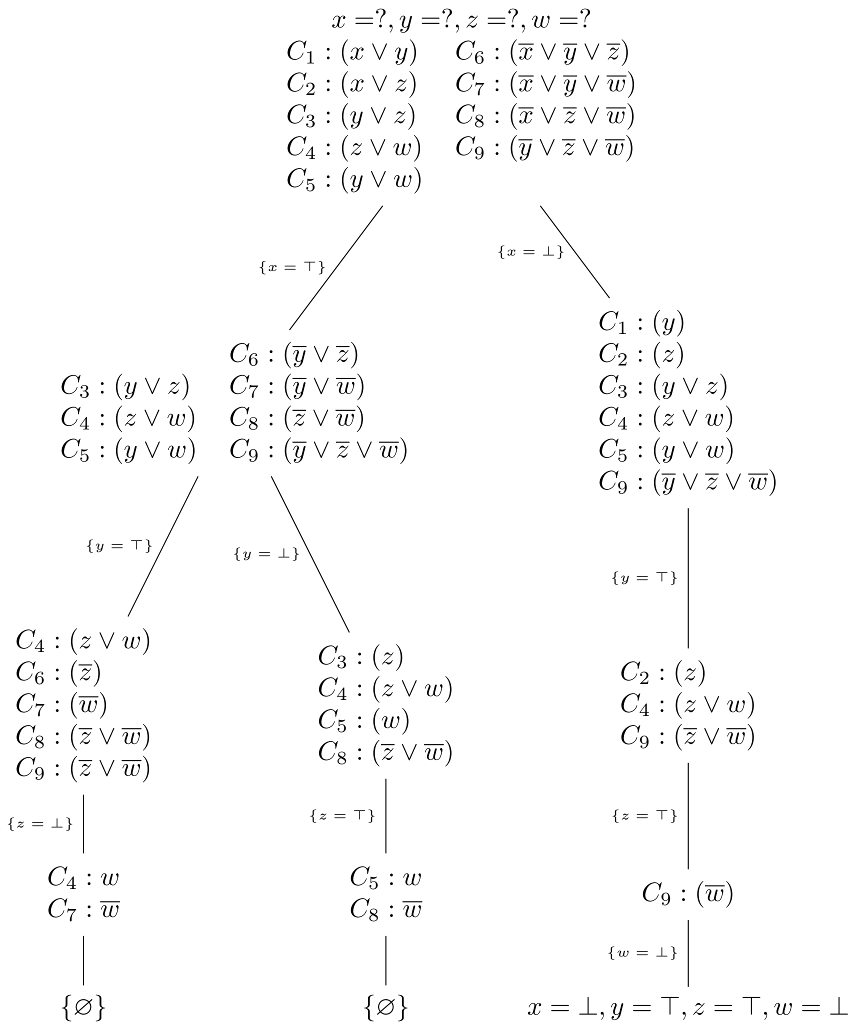

Figura 4: Resumen del procedimiento DPLL.

$R_{A,R} = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$ y $R_{R,F} = \{(1,1),(2,2)\}$. De nuevo esto afecta a D_F, que queda $D_F = (1,2)$. Esto mismo se habría logrado forzando camino consistencia entre Y y A y F.

Una vez resueltas las arco consistencias y camino consistencias del problema, se sigue un procedimiento similar a DPLL para obtener una solución al problema. Se escoge una variable, se prueba a asignarle un valor y se revisan las restricciones para limitar el dominio del resto de variables, hasta que o bien se encuentra una solución al problema o se demuestra que el modelo es insatisfacible (por lo que hacemos backtracking).

Por ejemplo, decidimos comenzar por A, $D_A = 1,2,3$ seleccionando el valor 1: $A = 1$. Actualizamos las restricciones relativas a A y al analizar $R_{A,R}$, eliminamos todos los valores con A distinto de 1: $R_{A,R} = \{(1,2)\}$, determinándonos el valor de $R = 2$. Dado que el dominio de R se ha visto modificado, revisamos las restricciones relativas a R: $R_{R,F} = \{(2,2)\}$ y por lo tanto $F = 2$ y $R_{R,Y} = \{(2,3)\}$, por lo que $Y = 3$. Sólo falta determinar el valor de $J, D_J = 2,3$ y dado que no hay más restricciones podemos escoger cualquier valor para ella: $J = 2$.

Por lo tanto, obtenemos que una posible asignación sería: $A = 1$, $R = 2$, $F = 2$, $Y = 3$, $M = 3$ y $J = 2$.

Solución del problema 3

1. Representación formal del problema de satisfacción de restricciones

Un problema de satisfacción de restricciones se define como una terna (X, D, C) donde $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de variables; $D = \{D_i\}_{i=1}^n$ representa los dominios de cada variable respectivamente y $C = \{C_i\}_{i=1}^m$ es el conjunto de restricciones del problema.

Tendremos una variable de decisión por cada asignatura. Por lo tanto, tenemos 9 variables distintas: Matemáticas x_M, Lengua x_L, Inglés x_I, Física x_F, Química x_Q, Biología x_B, Arte x_A , Historia x_H y Griego x_G. El dominio de todas las variables consta de 6 posibles valores referentes a los dos turnos (M - mañana, T - tarde) en los tres días (V - viernes, S - sabado, D - domingo): $D_i = \{\text{VM, VT, SM, ST, DM, DT}\}$.

Las restricciones, nos determinan las combinaciones de variables que son válidas. Las restricciones del problema son:

- No puede ponerse más de un examen troncal o de la misma rama en el mismo turno:

$$x_M \neq x_i, \forall i \neq M$$

$$x_L \neq x_i, \forall i \neq L$$

$$x_I \neq x_i, \forall i \neq I$$

$$x_F \neq x_Q, x_F \neq x_B, x_Q \neq x_B$$

$$x_G \neq x_A, x_G \neq x_H, x_A \neq x_H$$

- El examen de Física debe ser posterior al de Matemáticas y el de Inglés al de Lengua.

$$x_F > x_M, x_I > x_L$$

- Fisica/Quimica e Historia/Lengua son controladas por el mismo profesor, por lo que no pueden ponerse el mismo día (ni siquiera en distintos turnos). En este caso, establecemos la restricción como los pares de valores válidos:

$$\begin{array}{llllll} R_{x_F,x_Q} = R_{x_H,x_L} = \{ & \text{(VM, SM)}, & \text{(VM, ST)}, & \text{(VM, DM)}, & \text{(VM, DT)} \\ & \text{(VT , SM)}, & \text{(VT , ST)}, & \text{(VT , DM)}, & \text{(VT , DT)} \\ & \text{(SM , VM)}, & \text{(SM , VT)}, & \text{(SM , DM)}, & \text{(SM , DT)} \\ & \text{(ST , VM)}, & \text{(ST , VT)}, & \text{(ST , DM)}, & \text{(ST , DT)} \\ & \text{(DM, VM)}, & \text{(DM, VT)}, & \text{(DM, SM)}, & \text{(DM, ST)} \\ & \text{(DT , VM)}, & \text{(DT , VT)}, & \text{(DT , SM)}, & \text{(DT , ST)}\} \end{array}$$

- El examen de Matemáticas debe ser el mismo día que el examen de Lengua. En este caso, damos de nuevo la lista de tuplas, eliminando los valores que son iguales debido a la restricción $x_M \neq x_I$ considerada anteriormente.

$$\begin{array}{lll} R_{x_M,x_L} = \{ & \text{(VM, VT)}, & \text{(VT, VM)} \\ & \text{(SM , ST)}, & \text{(ST , SM)} \\ & \text{(DM, DT)}, & \text{(DT, DM)} \} \end{array}$$

- El profesor que vigila el examen de Inglés no puede asistir ni el sabado por la tarde ni el domingo.

$$x_I \neq \text{ST}, x_I \neq \text{DM}, x_I \neq \text{DT}$$

Como estas restricciones sólo se refieren a una única variable, directamente eliminamos los valores de su dominio. Por lo tanto, D_{x_I} (el dominio de x_I) queda reducido a $\{\text{VM, VT, SM}\}$.

2. Aplicar arco-consistencia y determinar los dominios resultantes

El dominio inicial de las variables es:

Variables	Dominio
x_I	{VM, VT, SM}
$x_M, x_L, x_F, x_Q, x_B, x_A, x_H, x_G$	{VM, VT, SM, ST, DM, DT}

Aplicamos la arco-consistencia relativa a cada restricción en orden. Las primeras restricciones son aquellas de tipo $x_i \neq x_j$, para distintas combinaciones de i y j. Sin embargo, en este caso ninguna de ellas puede podar ningún valor, porque todas las variables tienen más de un valor disponible. Por ejemplo, en la restricción $x_I \neq x_M$, todos los valores de x_I están correctamente soportados por algún valor de x_M y viceversa.

Arco-consistencia con restricción $x_I \neq x_M$			
Valor		Soportado por	
$x_I =$	VM	$x_M=$	{VT, SM, ST, DM, DT}
$x_I =$	VT	$x_M=$	{VM, SM, ST, DM, DT}
$x_I =$	SM	$x_M=$	{VM, VT, ST, DM, DT}
$x_M =$	VM	$x_I=$	{VT, SM}
$x_M =$	VT	$x_I=$	{VM, SM}
$x_M =$	SM	$x_I=$	{VM, VT}
$x_M =$	ST	$x_I=$	{VM, VT, SM}
$x_M =$	DM	$x_I=$	{VM, VT, SM}
$x_M =$	DT	$x_I=$	{VM, VT, SM}

La siguiente restricción es $x_F > x_M$:

Arco-consistencia con restricción $x_F > x_M$			
Valor		Soportado por	
$x_F =$	VM	$\varnothing$	
$x_F =$	VT	$x_M=$	{VM}
$x_F =$	SM	$x_M=$	{VM, VT}
$x_F =$	ST	$x_M=$	{VM, VT, SM}
$x_F =$	DM	$x_M=$	{VM, VT, SM, ST}
$x_F =$	DT	$x_M=$	{VM, VT, SM, ST, DM}
$x_M =$	VM	$x_F=$	{VT, SM, ST, DM, DT}
$x_M =$	VT	$x_F=$	{SM, ST, DM, DT}
$x_M =$	SM	$x_F=$	{ST, DM, DT}
$x_M =$	ST	$x_F=$	{DM, DT}
$x_M =$	DM	$x_F=$	{DT}
$x_M =$	DT	$\varnothing$	

En este caso, tras comprobar cada valor posible de x_F y x_M, vemos que no existe ningún valor de x_M que permita x_F =VM y lo mismo ocurre con x_M =DT.

Por lo tanto, el dominio de ambas variables se reduce:

Variables	Dominio
x_I	{VM, VT, SM}
x_M	{VM, VT, SM, ST, DM}
x_F	{VT, SM, ST, DM, DT}
$x_L, x_Q, x_B, x_A, x_H, x_G$	{VM, VT, SM, ST, DM, DT}

La siguiente restricción es $x_I > x_L$:

Arco-consistencia con restricción $x_I > x_L$			
Valor		Soportado por	
$x_I =$	VM		$\varnothing$
$x_I =$	VT	$x_L =$	{VM}
$x_I =$	SM	$x_L =$	{VM, VT}
$x_L =$	VM	$x_I =$	{VT, SM}
$x_L =$	VT	$x_I =$	{SM}
$x_L =$	SM		$\varnothing$
$x_L =$	ST		$\varnothing$
$x_L =$	DM		$\varnothing$
$x_L =$	DT		$\varnothing$

En este caso, se eliminan $x_I =$ DM, $x_L =$ SM, $x_L =$ ST, $x_L =$ DM y $x_L =$ DT, quedando los posibles valores:

Variables	Dominio
x_I	{VT, SM}
x_L	{VM, VT}
x_M	{VM, VT, SM, ST, DM}
x_F	{VT, SM, ST, DM, DT}
x_Q, x_B, x_A, x_H, x_G	{VM, VT, SM, ST, DM, DT}

Las últimas restricciones que nos queda por comprobar son R_{x_F,x_Q}, R_{x_H,x_L} y R_{x_M,x_L} que directamente nos daban una lista de pares de valores válidos, en la que podemos eliminar los valores que ya han sido descartados. En las siguientes tablas, los valores no válidos se marcan en rojo:

$$
\begin{array}{llllll}
R_{x_F,x_Q} = \{ & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{SM}),} & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{ST}),} & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{DM}),} & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{DT})} & \\
 & (\mathrm{VT}, \mathrm{SM}), & (\mathrm{VT}, \mathrm{ST}), & (\mathrm{VT}, \mathrm{DM}), & (\mathrm{VT}, \mathrm{DT}) & \\
 & (\mathrm{SM}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{SM}, \mathrm{VT}), & (\mathrm{SM}, \mathrm{DM}), & (\mathrm{SM}, \mathrm{DT}) & \\
 & (\mathrm{ST}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{ST}, \mathrm{VT}), & (\mathrm{ST}, \mathrm{DM}), & (\mathrm{ST}, \mathrm{DT}) & \\
 & (\mathrm{DM}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{DM}, \mathrm{VT}), & (\mathrm{DM}, \mathrm{SM}), & (\mathrm{DM}, \mathrm{ST}) & \\
 & (\mathrm{DT}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{DT}, \mathrm{VT}), & (\mathrm{DT}, \mathrm{SM}), & (\mathrm{DT}, \mathrm{ST}) & \}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
R_{x_H,x_L} = \{ & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{SM}),} & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{ST}),} & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{DM}),} & \color{red}{(\mathrm{VM}, \mathrm{DT})} & \\
 & \color{red}{(\mathrm{VT}, \mathrm{SM}),} & \color{red}{(\mathrm{VT}, \mathrm{ST}),} & \color{red}{(\mathrm{VT}, \mathrm{DM}),} & \color{red}{(\mathrm{VT}, \mathrm{DT})} & \\
 & (\mathrm{SM}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{SM}, \mathrm{VT}), & \color{red}{(\mathrm{SM}, \mathrm{DM}),} & \color{red}{(\mathrm{SM}, \mathrm{DT})} & \\
 & (\mathrm{ST}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{ST}, \mathrm{VT}), & \color{red}{(\mathrm{ST}, \mathrm{DM}),} & \color{red}{(\mathrm{ST}, \mathrm{DT})} & \\
 & (\mathrm{DM}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{DM}, \mathrm{VT}), & \color{red}{(\mathrm{DM}, \mathrm{SM}),} & \color{red}{(\mathrm{DM}, \mathrm{ST})} & \\
 & (\mathrm{DT}, \mathrm{VM}), & (\mathrm{DT}, \mathrm{VT}), & \color{red}{(\mathrm{DT}, \mathrm{SM}),} & \color{red}{(\mathrm{DT}, \mathrm{ST})} & \}
\end{array}
$$

En el segundo caso, vemos que para la variable x_H no queda ninguna tupla que soporte los valores VM o VT, por lo que se eliminan de su dominio:

Variables	Dominio
x_I	{VT, SM}
x_L	{VM, VT}
x_M	{VM, VT, SM, ST, DM}
x_F	{VT, SM, ST, DM, DT}
x_H	{SM, ST, DM, DT}
x_Q, x_B, x_A, x_G	{VM, VT, SM, ST, DM, DT}

$$
\begin{array}{llll}
R_{x_M,x_L} = \{ & (\mathrm{VM}, \mathrm{VT}), & (\mathrm{VT}, \mathrm{VM}) & \\
 & \color{red}{(\mathrm{SM}, \mathrm{ST}),} & \color{red}{(\mathrm{ST}, \mathrm{SM})} & \\
 & \color{red}{(\mathrm{DM}, \mathrm{DT}),} & \color{red}{(\mathrm{DT}, \mathrm{DM})} & \}
\end{array}
$$

En este caso, se acota el dominio de la asignatura de matemáticas, ya que solo le quedan los valores del Viernes como válidos.

Variables	Dominio
x_I	{VT, SM}
x_L	{VM, VT}
x_M	{VM, VT}
x_F	{VT, SM, ST, DM, DT}
x_H	{SM, ST, DM, DT}
x_Q, x_B, x_A, x_G	{VM, VT, SM, ST, DM, DT}

Es importante que, tras revisar la arco-consistencia de todas las variables no hemos terminado todavía, ya que hemos cambiado el valor de algunas variables, por lo que hay que revisar de nuevo todas aquellas restricciones cuya arco-consistencia fue comprobada antes del último cambio de cualquiera de las variables involucradas en la restricción.

Sin embargo, repitiendo el análisis anterior se puede ver que todas las restricciones siguen sin podar nada, por lo que hemos terminado.

3. Aplicar camino-consistencia y determinar los dominios resultantes

La camino consistencia (de longitud 2) entre dos variables x_i y x_j respecto de una tercera x_k, consiste en determinar si para cada asignación de valores $a_i \in D_i$ y $a_j \in D_j$ a las variables x_i y x_j respectivamente compatible con la restricción que las une, $R_{i,j}$, existe un valor $a_k \in D_k$ que sea consistente con las relaciones $R_{i,k}$ y $R_{j,k}$. Si no fuera así la asignación (a_i, a_j) puede eliminarse de la relación $R_{i,j}$.

En este caso, las restricciones del tipo $x_i \neq x_j$ pueden utilizarse para acotar el valor de x_I, teniendo en cuenta los valores de x_L y x_M.

Arco-consistencia con restricción $x_F > x_M$			
Valor		Soportado por	
$x_I =$	VT		$\varnothing$
$x_I =$	SM	(x_L, x_M)=	{(VM, VT), (VT, VM) }
$x_L =$	VM	(x_I, x_M)=	{(VT, VM), (SM, VM), (SM, VT) }
$x_L =$	VT	(x_I, x_M)=	{(VT, VM), (SM, VM), (SM, VT) }
$x_M =$	VM	(x_I, x_L)=	{(VT, VM), (SM, VM), (SM, VT) }
$x_M =$	VT	(x_I, x_L)=	{(VT, VM), (SM, VM), (SM, VT) }

En este caso, se elimina el valor x_I =VT.

Variables	Dominio
x_I	{SM}
x_L	{VM, VT}
x_M	{VM, VT}
x_F	{VT, SM, ST, DM, DT}
x_H	{SM, ST, DM, DT}
x_Q, x_B, x_A, x_G	{VM, VT, SM, ST, DM, DT}

Como hemos modificado una variable, habría que repetir la arco-consistencia. En este caso se ve involucrada la restricción $x_I \neq x_i \forall i \neq I$ que nos elimina SM de todos los dominios.

Variables	Dominio
x_I	{SM}
x_L	{VM, VT}
x_M	{VM, VT}
x_F	{VT, ST, DM, DT}
x_H	{ST, DM, DT}
x_Q, x_B, x_A, x_G	{VM, VT, ST, DM, DT}

Siguiendo el mismo razonamiento, por camino-consistencia en 2 pasos de x_L, x_M y x_F se elimina el valor x_F =VT. Aplicandolo a las variables x_Q, x_B, x_A, x_G, eliminamos sus valores VM y VT.

Variables	Dominio
x_I	{SM}
x_L	{VM, VT}
x_M	{VM, VT}
$x_F, x_H, x_Q, x_B, x_A, x_G$	{ST, DM, DT}