Tema 3:
Introducción al Cálculo de Predicados

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

uc3m

Motivación

Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre
Luego Sócrates es mortal

Propiedades

Juan enseña a Pedro
Algunos hombres enseñan a Pedro
Todos los hombres enseñan a alguien

Relaciones

Motivación

- Limitación de la lógica proposicional: su **unidad mínima** es la **proposición**, que tiene información propia y se contempla como un todo.

  Ej: para decir que todos los humanos son mortales habría que decir

  "Pepe es humano" →"Pepe es mortal"
  "Juan es humano" →"Juan es mortal"
  (y así sucesivamente…)

Motivación

- En lógica de predicados (Gottob Frege, 1879) se simbolizan los componentes de una proposición (no se trata como un todo)
- La idea es simbolizar:
  - Qué se afirma (predicado)
  - De quien o quienes (sujetos o términos)

  Ej: Pepe es humano
    - "Pepe" es el sujeto
    - "es humano" el predicado
- El predicado es atribuible a varios sujetos
  - Dominio. Ej: D={alumnos UC3M}, D={alumnos gr84}

Simbolización

- **Términos o sujetos pueden ser:**
  - Constantes, representados por **a, b, c..** representan objetos concretos. Las constantes son individuos o elementos distinguidos del universo del discurso, que es la colección de objetos sobre los cuales queremos razonar.
  - Variables, representados por **x, y, z...** sirven para representar objetos, cuyo dominio hay que especificar.
- **Predicados:**
  - Símbolos para los predicados: **P**, **Q**, **R**,...
  - Se utiliza la notación funcional $P(p_1,\ldots,p_n)$, donde p_i representa el lugar "*i*" en el predicado a ocupar por una variable o constante.
  - A cada lugar se le asigna un sujeto o término, que puede ser constante o variable

Simbolización

- Los predicados tienen un número *n* de argumentos. El número *n* es la aridad del predicado.

1. Predicados *constantes*, $n = 0$: representan proposiciones atómicas. Para representar las proposiciones atómicas se suelen usar los símbolos *p, q, r, s, t* ...
2. Predicados *monádicos*, $n = 1$: representan propiedades de objetos.
3. Predicados poliádicos, $n > 1$: representan relaciones entre objetos.

Ejemplos :

- $P(x)$: la raíz cuadrada de x es irracional (monádico),
- $P(x, y)$: *x* es el hermano de *y* (predicado binario),
- $P(a, b, c)$: *la media de a y b es c* (predicado ternario).

Simbolización

- Es posible asignar a un lugar un conjunto de términos dentro del dominio.
- Para simbolizar esta diferencia se usan los **cuantificadores**.
  - Asignar a una variable **todos** los elementos del dominio:

    (cuantificador universal ∀) **∀xHumano(x)**

    - Ej: para cualquier/todo x, x es humano,
  - Asignar a una variable un **subconjunto** del dominio

    (cuantificador existencial ∃) **∃xRojo(x)**

    - Ej: hay/existen uno (o más) x que son de color rojo
- Las variables afectadas por cuantificadores se definen como ***ligadas***, y **libres** en caso contrario

  Amigo(x,y): x es amigo de y

  En ∀xAmigo(x,y): x es variable ligada o cuantificada; y es variable libre

Simbolización

- La asignación de valores a las plazas puede hacerse de varias formas:

Sea por ejemplo: P(x,y,z): x se sienta en clase entre y y z

- **Sustitución de términos:** Juan se sienta en clase entre Manuela y José

  P(a,b,c)
- **Sustitución variable genérica:** un alumno cualquiera se sienta en clase entre Manuela y José

  P(x,b,c)
- **Sustitución variable incógnita:** un alumno se sienta en clase entre Manuela y José

  P(x,b,c)
- **Cuantificación universal:** todos los alumnos se sientan en clase entre Manuela y José

  ∀xP(x,b,c)
- **Cuantificación existencial:** algunos alumnos se sientan en clase entre Manuela y José

  ∃xP(x,b,c)

Construcción de fórmulas: alfabeto

- Símbolos para los términos
  - Variables: **x**, **y**, **z**, **t**…
  - Constantes: **a**, **b**, **c**,…
- Símbolos para los predicados: **P, Q, R**, …
- Símbolos para las conectivas: **~, ∧, ∨, →** y paréntesis*
- Símbolos de cuantificación:
  - Universal ∀
  - Existencial ∃

*(también se considera válida la coimplicación ↔)

Construcción de fórmulas: sintaxis

- Una fórmula sintácticamente correcta (fsc) en el cálculo de predicados es una sucesión de símbolos del alfabeto que verifica las siguientes reglas de formación:
  - Toda proposición (del cálculo proposicional) es una fsc
  - Si **P** es un predicado de **n** lugares/variables, $\mathbf{P(t_1,\ldots,t_n)}$ entonces es una fsc, siendo $\mathbf{t_i}$ símbolos de términos (objetos/sujetos)
  - Si **A** es una fsc (hechos relativos a objetos o términos) con $\mathbf{x_i}$ variable libre, también son fsc
    - $\forall \mathbf{x_i A(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n)}$
    - $\exists \mathbf{x_i A(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n)}$
  - Si **A y B** son fsc, también lo son **~A, ~B, A∧B, A∨B, A→B**
  - Toda fórmula del cálculo proposicional es sintácticamente correcta en el cálculo de predicados

Construcción de fórmulas: sintaxis

- ¿Están bien construidas?
  - **$\forall y P(x,a) \to Q(z)$** — **No**
  - **$\forall x P(x,a) \to Q(z)$** — **Si**
  - **$\forall x P(x,a) \to \exists x Q(z)$** — **No**
  - **$P(x, \forall y) \to Q(z)$** — **No**
  - **$\exists x(P(x) \to \forall y R(y,z))$** — **Si**

Construcción de fórmulas

- Colocación de paréntesis
  - En cuanto a las conectivas, las reglas son iguales a las utilizadas en el cálculo de proposiciones
  - Los cuantificadores sólo afectan a las variables libres inmediatamente siguientes. Para cambiar esto es necesario incluir paréntesis

$$\forall x P(x) \to Q(x) \text{ vs. } \forall x (P(x) \to Q(x))$$

  - Cuando hay varios cuantificadores seguidos, el proceso de cuantificación se realiza en el **orden de mayor a menor proximidad** a la fórmula
  - **El cambio de orden de un cuantificador puede alterar el significado de la frase:**

$$\forall x \exists y F(x,y) \text{ vs. } \exists y \forall x F(x,y)$$

$\forall x \exists y F(x,y)$: Todos son amigos de alguien

$\exists y \forall x F(x,y)$: Hay alguna persona de la que todos son amigos de dicha persona

Construcción de fórmulas

- Ejemplos de ligado en función del paréntesis
  - En $\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$
    - la variable ***x*** aparece **ligada** en las dos componentes de la disyunción, ya que el cuantificador existencial la afecta en los dos casos.
  - En $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x))$
    - la variable x está **ligada** en el primer paréntesis y **libre** en el segundo, y el cuantificador existencial solo afecta a la primera parte de la disyunción. Se podría escribir:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(y) \wedge Q(y))$$

Construcción de fórmulas

- Ejemplos:
  - 1) *Sócrates es un filósofo, sin embargo no es un deportista*
    - *F*(x): x es un filósofo
    - D(x): x es un deportista
    - a: Sócrates

D: personas

$$\boldsymbol{F(a) \wedge \sim(D(a))}$$

  - 2) *Sócrates es un filósofo o Sócrates es un deportista*

$$\boldsymbol{F(a) \text{ v } D(a)}$$

  - 3) *La luna es de papel si y sólo si Carlos lee muchos Libros*
    - P(x): x es de papel
    - L(x): x lee muchos libros
    - a: luna
    - b: Carlos

D: entes

$$\boldsymbol{P(\mathrm{a}) \leftrightarrow L(\mathrm{b})}$$

Construcción de fórmulas

- Ejemplos:
  - *Todo número primo y mayor que 2 es impar*
    - $P(x)$: x es primo,
    - $Q(x)$: x es mayor que 2
    - $R(x)$: x es impar.

D: números

$$\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$$

  - *Todo hombre es mortal y hay hombres que no son filósofos*
    - $P(x)$: x es un hombre,
    - $Q(x)$: x es mortal
    - $R(x)$: x es filósofo.

D: entes

$$(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge (\exists x(P(x) \wedge (\sim(R(x))))$$

Construcción de fórmulas

- Funciones. Generalizando el concepto de término
  - Los términos, además de constantes y variables, pueden ser también funciones ($f:D^n \rightarrow D$, siendo **D** el **dominio de referencia** o dominio del término)
  - Son una ayuda para la expresión de relaciones. **No presentan propiedades entre los argumentos interpretables como V o F**
  - Es usual utilizar la notación **f, g, h** y **letras griegas**

Construcción de fórmulas

- Funciones. Generalizando el concepto de término
  - Una vez consideramos las funciones, el concepto de término se puede definir de forma recursiva de la siguiente manera:
    - Son términos las variables y constantes
    - Si φ es una **función**, son términos las expresiones $\boldsymbol{\varphi(t_1, t_2,..,t_n)}$ siendo $\mathbf{t_i}$ términos y **n** el número de variables de la función

Ejemplo: $\boldsymbol{\varphi(x_1, a_1, \psi[x_2, a_2,\sigma(x_3)])}$

Construcción de fórmulas

- Funciones. Generalizando el concepto de término
  - *Ejemplos de términos:* x, a, $f(x)$, $g(x, y)$, $g(x, f(x))$
    - donde x es una variable, a es una constante, f es una función monádica.
    - g es una función binaria.
    - Los primeros dos términos de la lista son atómicos y los restantes son compuestos.

Construcción de fórmulas

- El uso de funciones permite simplificar la estructura de las fórmulas.
  - Ej: ningún producto de dos números naturales es primo
    - **Dominio:** números naturales
    - **Predicados:**
      - R(x,y,z): z es el producto de x e y
      - P(w): w es primo

$$\forall x\ \forall y\ \forall z(R(x,y,z) \rightarrow \sim P(z))$$

    - Si se considera la función $\psi(x,y)=x*y$, la frase se puede escribir de la forma

$$\forall x\ \forall y\ \sim P(\psi(x,y))$$

- Deben ser funciones que tomen valores en el dominio, es decir, funciones que se aplican sobre un conjunto de términos para dar otro término

Importancia del dominio

- A la hora de formalizar en lógica de predicados es fundamental establecer el **dominio de definición** (universo)
- En función de éste, se pueden asignar fórmulas distintas a las mismas frases del lenguaje natural

Ej: "todas las águilas vuelan alto"

  - Dominio de definición: las águilas
    - V(x) x vuela alto

$$\forall x V(x)$$

  - Dominio de definición: las aves
    - A(x) x es águila
    - V(x) x vuela alto

$$\forall x(A(x) \rightarrow V(x))$$

CP de orden superior

Cálculo de predicados

- **Primer orden:** los cuantificadores se aplican exclusivamente a las variables
  - **P(x,y) :** **x=y**
  - $\forall x \, \exists y \, P(x,y)$
- **Orden superior:** los cuantificadores se aplican a **funciones o predicados**

Ej: existe al menos una función tal que φ(a)=b

$$\exists \varphi P(\varphi(a),b)$$

Ej: algunas relaciones entre pares de alumnos de la clase son simétricas

$$\exists P \, \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

Ejemplos

- Frases simples:
  - Todos son de color azul — $\forall x \, Azul(x)$
  - Juan es rubio — $Rubio(j)$
  - Juan es amigo de todos — $\forall x Amigo(j,x)$
  - Algunos son amigos de Juan — $\exists x Amigo(x,j)$
  - Todos son amigos — $\forall x \forall y Amigo(x,y)$

En cálculo de predicados cuando se formaliza una frase las variables aparecen cuantificadas

Ejemplos

Generalmente los cuantificadores existenciales van con conjunción y los universales con implicación

- Frases compuestas:
  - Algunos republicanos son ricos
    - Existen algunas personas en las que se da simultáneamente la condición de ser republicanos y ricos

$$\exists x(P(x) \wedge Rep(x) \wedge Rico(x))$$

$$\exists x(Rep(x) \wedge Rico(x))$$

$$\cancel{\exists x(Rep(x) \rightarrow Rico(x))}$$

  - Todos los republicanos son ricos
    - No existe nadie que sea republicano y no sea rico
    - Para cualquier x del dominio, si x es republicano, entonces x es rico

$$\sim\exists x(Rep(x) \wedge \sim Rico(x))$$

$$\forall x(Rep(x) \rightarrow Rico(x))$$

$$\cancel{\forall x(Rep(x) \wedge Rico(x))}$$

Ejemplos

- En toda pareja de vecinos existe algún envidioso
  - Cualquiera que sean x e y, si x e y son vecinos, entonces, o x o y o ambos, son envidiosos

$$\forall x\forall y(V(x,y) \rightarrow E(x) \vee E(y))$$

- Todos los que son vecinos se odian entre sí
  - Para cualquier x e y del dominio, si x e y son vecinos, se odian mutuamente

$$\forall x\forall y(Vec(x,y) \rightarrow (O(x,y) \wedge O(y,x)))$$

- Todos los estudiantes de informática son amigos de los aficionados a la lógica
  - Cualquiera que sean x e y, si x es un estudiante de inf., e y es aficionado a la lógica, entonces x es amigo de y

$$\forall x\forall y((EstInf(x) \wedge AficLog(y)) \rightarrow A(x,y))$$

Ejemplos

- Algunos estudiantes de informática tienen amigos aficionados a la lógica
  - Existen algunos elementos de *x* e *y* en los que se dan simultáneamente las circunstancias de "*x* ser estudiante de informática", "*y* aficionado a la lógica" y "*x* ser amigo de *y*"

$$\exists x \exists y((\mathbf{EstInf}(x) \land \mathbf{AficLog}(y)) \land \mathbf{A}(x,y))$$

- Algunos estudiantes de informática sólo son amigos de los aficionados a la lógica.
  - Existe algún *x* del dominio que es estudiante de informática y sólo es amigo de *y* si *y* es aficionado a la lógica

$$\exists x(\mathbf{EstInf}(x) \land \forall y(\mathbf{A}(x,y) \rightarrow \mathbf{AficLog}(y)))$$

Ejemplos

- Algunos franceses son amigos de cualquier español
  - En el dominio de referencia existen individuos *x* en los que se da simultáneamente la condición de ser francés y la de ser amigo de cualquier *y* que sea español

$$\exists x(\mathbf{F}(x) \land \forall y(\mathbf{E}(y) \rightarrow \mathbf{A}(x,y)))$$

- Solo los futbolistas admiran a los futbolistas
  - Cualquiera que sean *x* e *y*, si *x* admira a *y* e *y* es futbolista, entonces *x* es futbolista

$$\forall x \forall y(\mathbf{Admira}(x,y) \land \mathbf{F}(y) \rightarrow \mathbf{F}(x))$$

Ejemplos

- Todos los futbolistas admiran solo a los futbolistas
  - Para cualquier x del dominio de referencia, si x es futbolista entonces, cualquiera que sea y, si x admira a y, entonces y es futbolista

$$\forall x(F(x) \rightarrow (A(x,y) \rightarrow F(y)))$$

- Sólo los tontos se dejan engañar por los vendedores ambulantes
  - Para todo x e y del dominio de referencia, si x se deja engañar por y e y es vendedor ambulante, entonces x es tonto

$$\forall x \forall y\ (E(x,y) \land Vend(y) \rightarrow T(x))$$

Ejemplos

- Frases con constantes
  - Juan engaña a Antonio

$$E(j,a)$$

  - Algunos abogados y obreros admiran a López

$$\exists x \exists y\ (AB(x) \land OB(y) \land A(y,l) \land A(x,l))$$

  - Todos los que ayudan a Juan trabajan en casa de Manolo

$$\forall x(A(x,j) \rightarrow T(x,m))$$

Ejemplos

- Otros
  - Algunas plantas no tienen flores

$$\exists x(P(x) \land \sim F(x))$$

  - Cualquier edificio es habitable

$$\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$$

  - Algunas personas son insoportables

$$\exists x(P(x) \land I(x))$$

  - Existen personas que no comen carne

$$\exists x(P(x) \land \sim C(x))$$

Notas prácticas

- Generalmente los cuantificadores existenciales van con conjunción y los universales con implicación.
- Esto puede no ser así dependiendo de que la frase sea hipotética.
- Depende del dominio. El cuantificador $\exists$ va con $\rightarrow$ cuando, la relación $P(x)\rightarrow Q(x)$ no tiene que cumplirse siempre

Hay algún artículo que si se cayese al suelo, se rompería

$$\exists x(Caerse(x) \rightarrow Romperse(x))$$