Problema 5.7 $\qquad f_1(x) = |x|^k \ ; \ f_2(x) = x|x|^{k-1}$

con $k \in \mathbb{R}$

$\boxed{x \neq 0 : f_1'(x)}$

Si $x > 0$: $\quad f_1(x) = x^k \Rightarrow f_1'(x) = k\,x^{k-1} = k|x|^{k-1}$

Si $x < 0$: $\quad f_1(x) = (-x)^k \Rightarrow f_1'(x) = -k(-x)^{k-1}$

$$= -k|x|^{k-1}$$

$$x > 0: \quad f_1'(x) = k|x|^{k-1}$$

$$x < 0: \quad f_1'(x) = -k|x|^{k-1}$$

$\boxed{x \neq 0 : f_2'(x)}$

Si $x > 0$: $\quad f_2(x) = x \cdot x^{k-1} = x^k$

$$\Rightarrow f_2'(x) = k\,x^{k-1} = k|x|^{k-1}$$

Si $x < 0$: $\quad f_2(x) = x \cdot (-x)^{k-1}$

$$\Rightarrow f_2(x) = (-x)^{k-1} - (k-1)x(-x)^{k-2}$$

$$= (-x)^{k-1} + (k-1)(-x)^{k-1} =$$

$$= k(-x)^{k-1} = k|x|^{k-1}$$

$$x > 0: \quad f_2'(x) = k|x|^{k-1}$$

$$x < 0: \quad f_2'(x) = k|x|^{k-1}$$

Obs: De manera equivalente:

$$x \neq 0: \quad f_1'(x) = k \cdot x|x|^{k-2}$$

$$x \neq 0: \quad f_2'(x) = k|x|^{k-1}$$

$\underline{\text{Si } k>1}$: $f_1(x) = |x|^k \Rightarrow f_1(0) = 0$

Por tanto: $f_1'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{|x|^k}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^k}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^k}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\overbrace{k-1}^{>0}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^k}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^k}{x} = -\lim_{x\to 0^-} (-x)^{\overbrace{k-1}^{>0}} = 0$$

$$\Rightarrow f_1'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^k}{x} = 0$$

$\underline{\text{Si } k>1}$: $f_2(x) = x\cdot|x|^{k-1} \Rightarrow f_2(0) = 0$

Por tanto: $f_2'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x|x|^{k-1}}{x} = \lim_{x\to 0} |x|^{\overbrace{k-1}^{>0}} = 0$

En resumen: $k>1 \Rightarrow f_1'(0) = f_2'(0) = 0$

■ Supongamos qe $|f(x)| \leq |x|^k$ con $k>1$
$\forall x$ en un entorno de $x_0 = 0$.

Puesto qe $0 \leq |f(x)| \leq |x|^k \Rightarrow 0 \leq |f(0)| \leq 0$
$\Rightarrow f(0) = 0$

Por tanto: $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ (si el límite existe)

Ahora bien, $\forall x \neq 0$ en un entorno de $x_0 = 0$:

$$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^k}{|x|} = |x|^{\overbrace{k-1}^{>0}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0} |x|^{k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 = f'(0)$$

<u>Obs:</u> El resultado anterior se generaliza trivialmente a $x_0 \neq 0$

$|f(x)| \leq c \cdot |x-x_0|^k$ con $k>1$ & $c>0$
$\forall x$ en un entorno de x_0

$\Rightarrow f(x_0) = 0$ & $f'(x_0) = 0$.

■ Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1-x)^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Evidentemente:

$$f(x) = |f(x)| \leq x^2(1-x)^2 = |x|^2 |1-x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

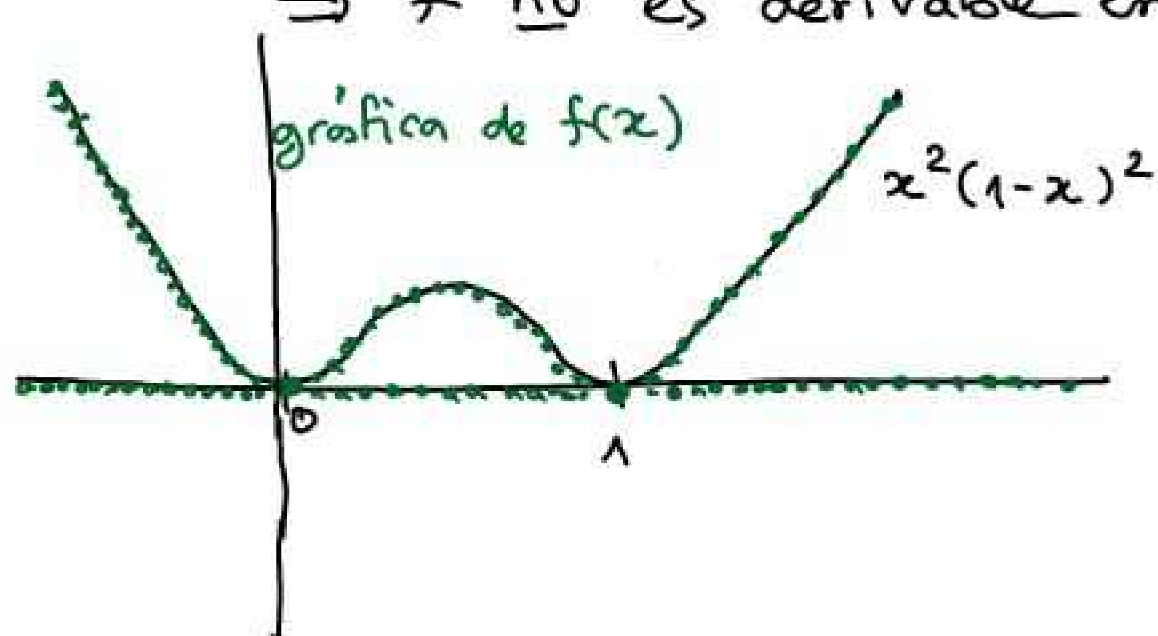
- En un entorno de $x_0 = 0$ podemos conseguir $|1-x| \leq 2$

  $\Rightarrow |f(x)| \leq 2|x|^2 \Rightarrow f'(0) = 0$
  en un entorno de $x_0 = 0$

- En un entorno de $x_0 = 1$ podemos conseguir $|x| \leq 2$

  $\Rightarrow |f(x)| \leq 2|x-1|^2 \Rightarrow f'(1) = 0$
  en un entorno de $x_0 = 1$

- Si $x_0 \neq 0, 1 \Rightarrow f$ no es continua en x_0
  $\Rightarrow f$ no es derivable en x_0



Obs: En este caso, $f'(0)$ y $f'(1)$ se pueden calcular fácilmente a través de la definición de derivada.