Tema 4:
Teoría de la Demostración en Cálculo de Predicados

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

Introducción a la T. de la Demostración

Estructura deductiva

Fórmulas válidas

Teoría de la Demostración

Sistemas axiomáticos: Kleene

Teorema de la Deducción

Introducción a la T. de la Demostración

- **Estructura deductiva:** es una representación formal de un proceso de razonamiento para obtener una **conclusión** a partir de unas **premisas**.
- Las deducciones se demuestran fórmula a fórmula.

Introducción a la T. de la Demostración

- La formalización de las **estructuras deductivas** en teoría de la demostración requiere:
  - Un sistema de fórmulas válidas.
    - Una serie de fórmulas que se asumen como válidas por hipótesis (axiomas del sistema)
    - Unas reglas de demostración o inferencia que permiten obtener nuevas fórmulas válidas a partir de los axiomas.
  - Una definición de deducción que permita, aplicando las reglas, representar cualquier deducción correcta.

Teoría de la demostración

- Es necesario que el conjunto de axiomas y reglas sea consistente (no contradictorio):
  - no pueda demostrarse una fórmula y su negación.
- **Definición:** un sistema de demostración formal S o sistema de pruebas se define matemáticamente mediante los siguientes cuatro elementos:
  - **A** es el alfabeto del sistema: el conjunto de símbolos que se pueden utilizar,
  - **F** es el conjunto de reglas de sintaxis: las reglas que permiten definir las fórmulas bien construidas,
  - **X** es el conjunto de axiomas: fórmulas válidas por definición,
  - **R** es el conjunto de reglas de inferencias: reglas de transformación que permiten inferir una fórmula, la conclusión, a partir de un conjunto de fórmulas, las condiciones o premisas.

Teoría de la demostración

Sistema axiomático KLEENE:

$$K = (A,F,X,R)$$

Definido por:

- **A: alfabeto**
  - **variables: x,y,z,.. O constantes: a,b,c,d...**
  - **Conectivas:** ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
  - **Cuantificadores:** universal ($\forall$), existencial ($\exists$)
  - **Símbolos de puntuación:** paréntesis y comas. (reglas)
  - **Símbolos propios (predicados):** $P(t_1,t_2,t_3...)$,$Q(t_1,t_2,t_3...)$, ...
  - **Funciones:** f, g, ...

Teoría de la demostración

- **F:** el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define como:

Fórmula atómica (predicado): Una fórmula atómica es una expresión de la forma:

- $R(t_1,...,t_n)$, donde R es un símbolo relacional n-ario (predicado) y $t_1...t_n$ son términos
- Los términos son:
  1. cada constante c es un término
  2. cada variable x es un término
  3. si f es una función n-aria y $t_1...t_n$ son términos, entonces $f(t_1,...,t_n)$ es un término
- Toda fórmula atómica es una fórmula bien construida

~ : si A es una fbc entonces (~ A) es una fbc
(∧, ∨, →, ↔): si A y B son fbc entonces (A* B) es una fbc, para toda conectiva binaria *
∀, ∃: si A es un fbc y x una variable libre entonces (∀xA) y (∃xA) son fbc
Toda proposición es una fbc.

Toda fbc se obtiene mediante las reglas anteriores.

Axiomas de Kleene y Reglas de demostración

3. X: Axiomas

A1 . $\vdash A \to (B \to A)$
A2. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
A3. $\vdash A \to (B \to A \land B)$
A4. $\vdash A \land B \to A$,, $\vdash A \land B \to B$
A5. $\vdash A \to A \lor B$,, $\vdash B \to A \lor B$
A6. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$
A7. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$
A8. $\vdash \sim\sim A \to A$
A9. $\vdash \forall x\, B(x) \to B(t)$ $\quad (\vdash \forall x\, B(x) \to B(y))$
A10. $\vdash B(t) \to \exists x\, B(x)$ $\quad (\vdash B(y) \to \exists x\, B(x))$

Axiomas de Kleene y Reglas de demostración

R: **Modus Ponens**

$$\frac{\vdash A \rightarrow B,, \vdash A}{\vdash B}$$

De A→B y A,
se puede deducir B
(como fórmulas válidas)

Generalización Universal Condicional

$$\frac{\vdash A \rightarrow B(y)}{\vdash A \rightarrow \forall x\, B(x)}$$

Regla de uso:
Es necesario que y no sea una variable libre de A

Generalización Existencial Condicional

$$\frac{\vdash A(y) \rightarrow B}{\vdash \exists x\, A(x) \rightarrow B}$$

Regla de uso:
Es necesario que y no sea una variable libre de B

A y B representan cualquier fórmula bien construida.
A(y) y B(y) representan fórmulas cualesquiera en las que la variable "y" está libre.
No tiene porqué ser la única variable: ej. : $A(y) = \forall x(P(x,y) \rightarrow \exists z Q(w,z))$

Concepto de demostración

- Una demostración de una fórmula A en el sistema, es una sucesión de fórmulas $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ tales que:
  - Cada fórmula p_i, elemento de la sucesión es:
    - Un axioma.
    - Una fórmula válida obtenida a partir de las anteriores, aplicando la regla de demostración.
  - El **último elemento** de la sucesión: $\mathbf{p_n}$ es precisamente la **fórmula a demostrar** A.

Concepto de deducción

- Una deducción o estructura deductiva se describe mediante dos sucesiones separadas por el signo $\Rightarrow$

$$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,\ldots,q_m$$

- La sucesión p_i es el antecedente de la deducción y sus elementos se llaman premisas. La sucesión q_i es el consecuente de la deducción y sus elementos se llaman conclusiones.

Deducción correcta

- Una estructura deductiva se define como correcta cuando la sucesión consecuente se obtiene de acuerdo con alguna de las reglas siguientes.
  - q_i es una de las premisas.
  - q_i es una fórmula válida del sistema (axioma o teorema).
  - q_i se deduce de alguna premisa o alguna conclusión previa aplicando las reglas de inferencia.

Teorema de la deducción

- Permite definir una relación entre las estructuras deductivas correctas y las fórmulas válidas.
- Si $p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_m$ es una deducción correcta, entonces $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q_m$ también lo es, *siempre que en p_n no existan variables libres con sentido genérico.*
  - A una deducción correcta no siempre le corresponde una fórmula válida

$A\rightarrow \exists z\, C(z) \Rightarrow A\rightarrow \forall x B(x)$ Correcta $\Rightarrow (A\rightarrow \exists z\, C(z)) \rightarrow (A\rightarrow \forall x B(x))$ Correcta
$A\rightarrow B(y) \Rightarrow A\rightarrow \forall x B(x)$ Correcta $\Rightarrow (A\rightarrow B(y)) \rightarrow (A\rightarrow \forall x B(x))$ No tiene porqué ser correcta

- Si $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q_m$ es una deducción correcta, entonces también lo es $p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_m$

Reglas derivadas

GENERALIZACIÓN		ESPECIFICACIÓN	
Universal	**Existencial**	**Universal**	**Existencial**
$\dfrac{\vdash A(y)}{\vdash \forall x\, A(x)}$	$\dfrac{\vdash A(y)}{\vdash \exists x\, A(x)}$	$\dfrac{\vdash \forall x\, A(x)}{\vdash A(y)}$	$\dfrac{\vdash \exists x\, A(x),,\ A(y)\rightarrow B}{\vdash B}$ (*y* no está libre en *B*)

- Especificación Universal (EU) y Generalización Existencial (GE) no tienen limitaciones
  - Ej: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)),\ A(a) \rightarrow B(a)$

Reglas derivadas

- Especificación Universal (EU):

$$\frac{\forall x\, A(x)}{A(y)}$$

1. $\vdash \forall x A(x)$ Premisa
2. $\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(y)$ Axioma 9
3. $\vdash A(y)$ MP 1,2

$$\begin{array}{c} \forall x\, A(x) \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ A(y) \end{array}$$ **(sin restricciones, *y* es un término genérico)**

Reglas derivadas

- Generalización Existencial (GE):

$$\frac{A(y)}{\exists x\, A(x)}$$

1. $\vdash A(y)$ Premisa
2. $\vdash A(y) \rightarrow \exists x A(x)$ Axioma 10
3. $\vdash \exists x A(x)$ MP 1,2

$$\begin{array}{c} A(y) \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ \exists x\, A(x) \end{array}$$ **(sin restricciones, *y* es un término genérico)**

Reglas derivadas

$$\frac{A(y)}{\forall x\, A(x)}$$

GU:

1. $\vdash$ A(y)	Premisa
2. $\vdash$ A(y) → (C→A(y))	Axioma 1 (B⇔C)
3. $\vdash$ C → A(y)	MP 1,2
4. $\vdash$ C → ∀xA(x)	G.U cond. en 3
5. $\vdash$ A(y) → (~C →A(y))	Axioma 1
6. $\vdash$ ~C →A(y)	MP 1,5
7. $\vdash$ ~C → ∀xA(x)	G.U. cond. en 6
8. $\vdash$ (C → ∀xA(x)) →((~C → ∀xA(x)) →((C v ~C)→ ∀xA(x)))	Ax. 6.
9. $\vdash$ (~C → ∀xA(x)) →((C v ~C)→ ∀xA(x))	MP 4,8
10. $\vdash$ (C v ~C)→ ∀xA(x)	MP 7,9
11. $\vdash$ C v ~C	Tercio excluso (cprop)
12. ∀xA(x)	M.P 10,11

Reglas derivadas

- Generalización Universal (GU):
  - No se puede hacer sobre variables libres que no tienen un sentido general.
  - En particular,
    - a) No se puede hacer sobre variables que hayamos introducido mediante EE.
    - b) No se puede hacer dentro de un supuesto, salvo en el caso en que, dentro del mismo supuesto, hubiéramos obtenido la variable libre haciendo EU de una variable con cuantificador universal.

Reglas derivadas

$$\frac{\exists x\, A(x),, A(y)\to B}{B}$$

Especificación Existencial (EE):

1. ├ ∃xA(x) Premisa
2. ├ A(y) → B Premisa
3. ├ ∃xA(x) → B Gen. ∃xist. Cond.
4. ├ B MP 1,3

∃x A(x), , A(y) → B
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓ (restricción: *y* no puede estar libre en B)
B

Reglas derivadas

- Especificación Existencial (EE)
  - El uso de esta regla suele hacerse mediante la introducción de supuestos (como en Cálculo de Proposiciones)

∃xA(x)		**∃xA(x)**	
A(y)		**A(y)**	**Supuesto x EE**
…		**…**	
B		**B**	
├A(y) →B	**TD**	**├B**	**Cancelacion sup. EE**
├B	**EE**		

  - La variable "y", objeto del supuesto de EE, no puede serlo también de GU.
  - Para cerrar el supuesto y concluir ├B, es necesario que en B, "y" no esté libre (desaparece del predicado o GE sobre ella)
  - La variable "y" que se introduce no se puede volver a usar en otra EE interna al supuesto

Reglas derivadas

- Errores típicos en EE

1- $\exists x P(x)$

2- $\exists y Q(y)$

3- $P(a)$ supuesto EE 1

4- $Q(b)$ supuesto EE 2

⋮

n- $\exists y Q(y)$ GE

⋮

El término que satisface 1 no tiene porqué ser el que satisface 2

~~Q(a) supuesto EE 1~~

~~∀yQ(y) GU~~

El término b viene de EE, no es "cualquier y"

Reglas derivadas

- Ejemplo del uso **correcto** de EE y EU:

  $\exists x P(x),\ \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall y Q(y)$

1.	$\exists x P(x)$	Premisa 1
2.	$\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))$	Premisa 2
3.	$P(x)$	Sup. T.D
4.	$\forall y (P(x) \rightarrow Q(y))$	E.U. en 2 (x)
5.	$P(x) \rightarrow Q(y)$	E.U. en 4 (y)
6.	$Q(y)$	M.P. 3,5
7.	$\forall y (Q(y))$	G.U. 6
8.	$P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$	Canc. T.D. 3-7
9.	$\forall y (Q(y))$	Regla E.E.

Reglas derivadas

- Ejemplo del uso **correcto** del EE:
  $\exists x P(x),\ \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \Rightarrow \forall y Q(y)$

1.	$\exists x P(x)$	Premisa 1
2.	$\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$	Premisa 2
3.	$P(z)$	Sup. E.E en 1
4.	$\forall y (P(z) \to Q(y))$	E.U. en 2 x=z
5.	$P(z) \to \forall y Q(y)$	Propiedad $\forall y$
6.	$\forall y Q(y)$	M.P. 3,5
7.	$\forall y Q(y)$	Cerramos el supuesto. z no libre

Nota: no salimos del supuesto $P(z) \to \forall y Q(y)$ porque "z" es libre. El problema se soluciona en 6.

Reglas derivadas

- Ejemplo uso **incorrecto** del EE:
  $\exists x A(x),\ \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$

1.	$\exists x A(x)$	Premisa 1
2.	$\exists x B(x)$	Premisa 2
3.	$A(y)$	Sup. E.E en 1 (I)
4.	$B(y)$	Sup. E.E en 2 (II)
5.	$A(y) \wedge B(y)$	Producto 3,4
6.	$\exists x (A(x) \wedge B(x))$	G.E. 5
7.	$\exists x (A(x) \wedge B(x))$	Cancelación supuesto (II)
8.	$\exists x (A(x) \wedge B(x))$	Cancelación supuesto (I)

Reglas derivadas

- Las reglas plantean un método para obtener deducciones cuantificadas a partir de premisas cuantificadas
  - Extraer los cuantificadores al comienzo de las fórmulas completas utilizando las equivalencias
  - Se aplican EU y/o EE a las premisas cuantificadas de forma que aparezcan no cuantificadas
  - Se aplican las reglas del cálculo proposicional a las variables hasta obtener una conclusión sin cuantificar
  - Se obtiene la conclusión cuantificada aplicando GU y/o GE

Resumen de reglas

- Generalización Universal (GU) no se puede hacer sobre variables libres que no tienen un sentido general.
  - Ej: no se pueden hacer sobre variables que hayamos introducido en EE o dentro de un supuesto (porque sólo se generalizaría en las condiciones del supuesto).
- Todas las reglas se aplican sobre cuantificadores que afectan a fórmulas completas, no a partes.
- Especificación Universal (EU) no tiene limitaciones.
- Generalización Existencial (GE) no tiene limitaciones.

Resumen de reglas

- Especificación Existencial (EE):
  - Se hace mediante la introducción del supuesto
  - La variable que se introduce no se puede volver a usar en otra EE interna al supuesto (sí en una EU).
  - Se puede cerrar el supuesto sólo cuando desaparece la variable libre que introdujimos en el mismo
  - La variable se hace desaparecer porque ya no aparece en el predicado que se quiere introducir, o porque se hace GE sobre ella. No se puede hacer GU sobre dicha variable.

Equivalencias

- Expresiones:
  - $\sim\forall x\, P(x) \quad \leftrightarrows \quad \exists x \sim P(x)$
  - $\sim\exists x\, P(x) \quad \leftrightarrows \quad \forall x \sim P(x)$
  - $\forall x\, P(x) \quad \leftrightarrows \quad \sim\exists x \sim P(x)$
  - $\exists x\, P(x) \quad \leftrightarrows \quad \sim \forall x \sim P(x)$
  - $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \leftrightarrows \quad \forall x\, (\sim P(x) \vee Q(x))$

Teoremas principales

- Derivados de los axiomas obtenemos los siguientes teoremas:

Equivalencias

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$$
$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$$
$$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$$
$$(\exists x A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x (A(x) \vee B)$$
$$(\forall x A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$
$$(\exists x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x (A(x) \wedge B)$$
$$(\forall x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B)$$
$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$$
$$\forall x (A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$$

Implicaciones

$$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$$
$$\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$$
$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$
$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$$

Teoremas principales

$$\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$$
$$(\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$$

(…)

Ejemplos

$\vdash \forall x P(x) \rightarrow \forall y P(y)$

$\forall x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$

1. $\forall x P(x)$	Premisa
2. $P(b)$	E.U. de 1 (x=b)
3. $\forall y P(y)$	G.U. de 2 (b no es variable libre en P(x))

$\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists z P(z)$

$\exists x P(x) \Rightarrow \exists z P(z)$

1. $\exists x P(x)$	Premisa
2. $P(y)$	Sup. T.D
3. $\exists z P(z)$	G.E de 2
4. $P(y) \rightarrow \exists z P(z)$	T.D. Canc. Sup. (en P(z) no es libre y)
5. $\exists z P(z)$	Regla E.E. 1,4

$$\frac{\exists x\, A(x),,\ A(y) \rightarrow B}{B}$$

y no está libre en B

Ejemplos

$\vdash \forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

$\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

1. $\forall x \forall y P(x,y)$	Premisa
2. $\forall y P(x,y)$	E.U. de 1 (respecto x)
3. $P(x,y)$	E.U. de 2 (respecto y)
4. $\forall x P(x,y)$	G.U de 3 (respecto x)
5. $\forall y \forall x P(x,y)$	G.U de 4 (respecto y)

Ejemplos

├ ∃x∀yP(x,y) → ∀y∃xP(x,y)
∃x∀yP(x,y) ⇒ ∀y∃xP(x,y)

1. ∃x∀yP(x,y) Premisa
2. ∀yP(a,y) Sup. T.D. de 1 (x=a)
3. P(a,y) E.U. de 2 (resp. y)
4. ∃xP(x,y) G.E de 3 (a=x)
5. ∀yP(x,y) → ∃xP(x,y). Canc. T.D.
6. ∃xP(x,y) Regla de E.E. (1,5)
7. ∀y∃xP(x,y) G.U de 6 (respecto y)

├ ∃x∀yP(x,y) → ∀y∃xP(x,y)
∃x∀yP(x,y) ⇒ ∀y∃xP(x,y)

1. ∃x∀yP(x,y) Premisa
2. ∀yP(a,y) Sup. E.E. de 1 (x=a)
3. P(a,y) E.U. de 2 (resp. y)
4. ∃xP(x,y) G.E de 3 (a=x)
5. ∃xP(x,y) Canc. Supuesto E. Exist.
6. ∀y∃xP(x,y) G.U de 6 (respecto y)

Con supuesto T.D

$$\frac{\exists x\, A(x),,\ A(y)\rightarrow B}{B}$$

y no está libre en B

Con supuesto Especificación Existencial (EE)

Ejemplos

La siguiente deducción no es correcta. Intentemos demostrarla

├ ∀y∃xP(x,y) → ∃x ∀yP(x,y)
∀y∃xP(x,y) ⇒ ∃x ∀yP(x,y)

1. ∀y∃xP(x,y) Premisa
2. ∃xP(x,y) E.U. de 1 (respecto de y)
3. P(a,y) Sup. T.D.
4. ∀yP(a,y) G.U de 3 (respecto de y)
5. ∃x∀yP(x,y) G.E. de 4 (a=x)
6. P(a,y) → ∃x∀yP(x,y) T.D NO "y" es libre en P(a,y)
7. ∃x∀yP(x,y) E.E. 2,6

├ ∀y∃xP(x,y) → ∃x ∀yP(x,y)
∀y∃xP(x,y) ⇒ ∃x ∀yP(x,y)

1. ∀y∃xP(x,y) Premisa
2. ∃xP(x,y) E.U. de 1 (respecto de y)
3. P(a,y) Sup. EE
4. ∀yP(a,y) G.U de 3 (respecto de y) (NO, GU no se puede aplicar porque y entra en el supuesto sin cuantificar)
5. ∃x∀yP(x,y) G.E. de 4
6. ∃x∀yP(x,y) Cierre Sup EE

Con supuesto T.D

Con supuesto Especificación Existencial (EE)

Ejemplos

$$\forall x\ (R(x) \rightarrow P(x)), \forall x\ (P(x) \rightarrow \sim S(x)), \forall x\ (R(x) \wedge Q(x) \rightarrow S(x))$$

$$\Longrightarrow \forall x\ (R(x) \rightarrow \sim (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Se especifican universalmente las premisas para la misma y genérica
- Se mantiene y constante y se aplican las reglas de cálculo proposicional
- Se obtiene una fórmula sin cuantificar con y libre
- Se puede aplicar GU ya que y es variable genérica por tener origen en EU

1	$\forall x(R(x) \rightarrow P(x))$	Premisa
2	$\forall x(P(x) \rightarrow \sim S(x))$	Premisa
3	$\forall x(R(x) \wedge Q(x) \rightarrow S(x))$	Premisa
4	$R(y) \rightarrow P(y)$	EU 1
5	$P(y) \rightarrow \sim S(y)$	EU 2
6	$R(y) \wedge Q(y) \rightarrow S(y)$	EU 3
7	$\sim S(y) \rightarrow \sim (R(y) \wedge Q(y))$	Contraposición (CP) 6
8	$\vdash \sim (R(y) \wedge Q(y)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\sim R(y) \vee \sim Q(y))$	Regla de De Morgan
9	$\sim S(y) \rightarrow (\sim R(y) \vee \sim Q(y))$	Intercambio 7, 8
10	$R(y) \rightarrow \sim S(y)$	SH 4, 5
11	$R(y) \rightarrow (\sim R(y) \vee \sim Q(y))$	SH 9, 10
12	$R(y)$	
13	$\sim R(y) \vee \sim Q(y)$	MP 12, 11
14	$\vdash (\sim R(y) \vee \sim Q(y)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (R(y) \rightarrow \sim Q(y))$	Definición de $\vee$ en función de $\rightarrow$
15	$R(y) \rightarrow \sim Q(y)$	Intercambio 13, 14
16	$\sim Q(y)$	MP 12, 15
17	$P(y)$	MP 12, 4
18	$P(y) \rightarrow (\sim Q(y) \rightarrow P(y))$	A 1
19	$\sim Q(y) \rightarrow P(y)$	MP 17, 18
20	$\vdash (\sim Q(y) \rightarrow P(y)) \rightarrow$ $\rightarrow (\sim P(y) \rightarrow Q(y))$	Teorema de contraposición
21	$\sim P(y) \rightarrow Q(y)$	MP 19, 20
22	$R(y) \rightarrow (\sim P(y) \rightarrow Q(y))$	TD 12, 21
23	$\forall x[R(x) \rightarrow (\sim P(x) \rightarrow Q(x))]$	GU 22

$\forall x(F(x) \rightarrow \sim E(x)), \exists x(F(x) \wedge A(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge \sim E(x))$

1	$\forall x[F(x) \rightarrow \sim E(x)]$	Premisa
2	$\exists x[F(x) \wedge A(x)]$	Premisa
3	$F(y) \wedge A(y)$	EE 2
4	$F(y) \rightarrow \sim E(y)$	EU 1
5	$\vdash F(y) \wedge A(y) \rightarrow F(y)$	Ax 4
6	$F(y)$	MP 3, 5
7	$\sim E(y)$	MP 6, 4
8	$\vdash F(y) \wedge A(y) \rightarrow A(y)$	Ax 4
9	$A(y)$	MP 3, 8
10	$\vdash A(y) \rightarrow$ $\rightarrow (\sim E(y) \rightarrow A(y) \wedge \sim E(y))$	Ax 3
11	$\sim E(y) \rightarrow A(y) \wedge \sim E(y)$	MP 9, 10
12	$A(y) \wedge \sim E(y)$	MP 7, 11
13	$\exists x(A(x) \wedge \sim E(x))$	GE 12
14	$\exists x(A(x) \wedge \sim E(x))$	Al ser independiente de y puede cancelarse la deducción subsidiaria.

Guía básica

1. Axiomas nuevos (9 y 10)

Todo lo anterior sigue valiendo, pero ahora las letras A, B, etc. significan "fórmulas del cálculo de predicados"

2. Reglas nuevas (GUC y GEC)

Hay que precisar que, cuando aparece en una "fórmula válida" una variable libre "y", tiene que entenderse siempre como una variable genérica ("cualquier y").

Si aparece A(y) nos referimos a cualquier fórmula de cálculo de predicados en la que hay una variable libre "y" (puede haber otras variables libres y todas las ligadas que se quiera).

Ej: $A(y) = \forall x(P(x,y) \rightarrow \exists z Q(w,z))$ (variables libres: y,w)

3. Concepto de demostración (= que en proposiciones)

Guía básica

4. Concepto de deducción (= que en proposiciones).
En las deducciones, las variables libres a veces son genéricas y a veces son particulares o condicionales

Al formalizar un enunciado en lenguaje natural no quedan variables libres. Todas las variables estarán cuantificadas, de manera que se sepa en qué sentido las usamos.

5. Teorema de la deducción
Mismo enunciado que en proposiciones, pero uso restringido

No hay una fórmula válida asociada a toda deducción correcta.

Ej: siendo $A \rightarrow B(y) \Rightarrow A \rightarrow \forall x\, B(x)$ una deducción correcta, $(A \rightarrow B(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x\, B(x))$ NO es fórmula válida (es uno de los casos en los que no se puede aplicar el T.D.).

Guía básica

6. Teorema de la deducción inverso

Se puede afirmar, con toda generalidad, que es válido el T.D. a la inversa:

Si $P_1 \ldots P_{n-1} \Rightarrow P_n \rightarrow Q$ deducción correcta,
Entonces $P_1 \ldots P_n \Rightarrow Q$ es también deducción correcta.

Esta propiedad se usa constantemente para demostrar los teoremas. Si no fuera válido el teorema, no podríamos dar por demostrado todos los teoremas que se ven en cálculo de proposiciones.

Guía básica

7. Reglas complementarias

EU: sin restricciones, pero cuidado con aplicarla a trozos de fórmula. El cuantificador debe afectar a toda la fórmula sobre la que se aplica. Esto es válido para las dos especificaciones.

Ejemplo mala aplicación:

1. $\forall x\ P(x) \rightarrow A$; Premisa
2. $P(y) \rightarrow A$; EU 1 (INCORRECTO)

Ejemplo buena aplicación:

1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow A)$; Premisa
2. $P(y) \rightarrow A$; EU 1 (CORRECTO)

Hay casos en las que las dos premisas son equivalentes, pero hay que aplicar primero la equivalencia necesaria para poner el cuantificador en el sitio correcto antes de aplicar EU o EE.

GE: sin restricciones

GU: sólo fuera de supuestos y sólo si la variable generalizada venía de EU

Guía básica

EE: es mejor usar la versión de la notación que utiliza un supuesto. Etiquetamos la primera línea como "supuesto" y al final introducimos la fórmula "B" de la regla.

- Ver lo dicho en EU sobre el ámbito del cuantificador
- Se tienen que usar variables distintas para cada supuesto.

  Ejemplo demostración falaz (si se incumple lo anterior):

  $\exists x A(x), \exists x\ B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$

- No se puede usar GU dentro del supuesto sobre la variable del supuesto (por la restricción del T.D.).

  Ejemplo demostración falaz (si se incumple lo anterior):

  $\exists x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$

- Sí se puede usar GE sobre la variable del supuesto
- El supuesto sólo se cierra cuando desaparece la variable introducida en el mismo.

Guía básica

8. Método general

El método consiste en:

- Cuando sepamos, pasar los cuantificadores a cabeza de la fórmula cuando se sepa.
- Aplicar Especificación a las fórmulas afectadas por cuantificadores en la cabeza de las mismas, empezando por los supuestos de EE.
- Resolver por cálculo de proposiciones hasta llegar a la conclusión.
- Cerrar los supuestos de EE (si es preciso usando GE)
- Generalizar mediante GE o GU según se pueda y según sea la conclusión a la que se quiera llegar.