Universidad Carlos III de Madrid

ALGEBRA LINEAL

Examen Final. Enero 2016

Problema 1 (3 puntos). Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular sus autovalores. Basándonos en éstos, determinar razonadamente las dimensiones del espacio columna y del espacio nulo de A. [0.5 puntos]

b) Calcular una base para $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores *ortogonales* de A. [1.5 puntos]

c) Encontrar la matriz del cambio de base para pasar de la base canónica $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ a la base hallada en b). [0.5 puntos]

d) Encontrar dos matrices P y D, con D diagonal, de manera que $A^3 = PDP^T$. [0.5 puntos]

Es una matriz simétrica y real, luego es ortogonalmente diagonalizable, luego habrá una base ortogonal de autovectores.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

a) Así que los autovalores son 1 y -2. Como ambos son no nulos, det(A) tampoco lo es, luego A es invertible. Es decir, dimCol(A) = rg(A) = 3, y dim Nul(A) = 0.

b) Para los autovectores hay que hallar los subespacios propios V(1) y V(-2):

V(1) = Nul(A - I)

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ con ecuación implícita $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, de la que se debe encontrar dos soluciones particulares ortogonales. Una puede ser $v_1 = [0\ 1\ -1]^T$, y la otra debe verificar la ecuación implícita y, además, que sea ortogonal a ella, por ejemplo $v_2 = [2\ -1\ -1]^T$.

V(-2) = Nul(A + 2I)

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ con ecuaciones implícitas: $x_1 - x_3 = 0$ y $x_2 - x_3 = 0$, de las que se obtiene la solución particular $v_3 = [1\ 1\ 1]^T$, que es ortogonal a los dos anteriores.

Así pues una base ortogonal de autovectores de R^3 es $B_1 = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$.

c) La matriz de cambio de base de B_1 a B_0 podría ser la propia matriz $P = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Así que la matriz de cambio de base de B_0 a B_1 será su inversa $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

d) Como la matriz A^3 tiene los mismos autovectores, y los autovalores elevados a 3, La matriz P pedida será la misma que la anterior pero normalizada, $P = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, y la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

Problema 2 (1 punto). Sea u un vector unitario de $\mathbb{R}^n$, es decir, tal que $u^T u = 1$, y sea H la matriz de dimensión $n \times n$ definida por $H = I_n - 2uu^T$. Demostrar que $H^2 = I_n$.

$$H = I - 2uu^T$$

$$H^2 = \left(I - 2uu^T\right)\left(I - 2uu^T\right) = I^2 - 2uu^T - 2uu^T + 4\left(uu^T\right)\left(uu^T\right) =$$

$$= I - 4uu^T + 4u\left(u^T u\right)u^T = I - 4uu^T + 4uu^T = I$$

Problema 3 (1.5 puntos). Resolver la ecuación diferencial $x''(t) + 4x(t) = 0$, expresando el resultado mediante funciones reales, con condiciones iniciales $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 + 4 = 0$, con soluciones 2i y – 2i, luego la solución general de la ecuación será:

$$x(t) = C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it}$$

Derivando se obtiene:

$$x'(t) = 2iC_1 e^{2it} - 2iC_2 e^{-2it}$$

E imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2iC_1 - 2iC_2 = 0 \end{cases}$$

Con solución $C_1 = C_2 = 1$, que sustituyendo en la solución general, se obtiene:

$$x(t) = e^{2it} + e^{-2it} = 2\cos 2t$$

Problema 4 (2 puntos). Dados los puntos experimentales $(0,6)$, $(1,3)$, $(2,0)$:

1. Ajustar por mínimos cuadrados la curva $y = a_0 + a_1 2^x$ a los puntos dados. [1.5 puntos]
2. ¿Cuál es el valor del residuo? [0.5 puntos]

Sustituyendo en cada punto, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 6 \\ a_0 + 2a_1 = 3 \\ a_0 + 4a_1 = 0 \end{cases} \text{ que, escrito matricialmente será: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que es un sistema incompatible, la solución por mínimos cuadrados será la solución del sistema $\left(A^T A\right)\tilde{x} = A^T b$. Realizando cálculos se obtiene:

$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$ y $A^T b = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$, lo que da lugar a la siguiente solución: $\widetilde{a_0} = \frac{15}{2}$ y $\widetilde{a_1} = -\frac{27}{14}$

Así que la curva ajustada tendrá por ecuación: $y = \frac{15}{2} - \frac{27}{14}\left(2^x\right)$.

El residuo será el valor de la siguiente norma:

$$\left\|b - A\tilde{x}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 15/2 \\ -27/14 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39/7 \\ 51/14 \\ -3/14 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3/7 \\ -9/14 \\ 3/14 \end{pmatrix} \right\| \simeq 1.26$$

Problema 5 (2.5 puntos). Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales, y sea T la transformación de P_2 en sí mismo definida mediante:

$$T(p(x)) = xp'(x) + p'(0).$$

1. Demostrar que T es lineal. [0.75 puntos]
2. Hallar $ker(T)$. [0.75 puntos]
3. Determinar si T es inyectiva, suprayectiva o biyectiva. [0.5 puntos]
4. Hallar la matriz asociada respecto a la base estándar y la dimensión del espacio nulo. [0.5 puntos]

---

1. Linealidad

$$\begin{aligned}
&T\left(\alpha p(x)+\beta q(x)\right)=\\
&=x\left(\alpha p(x)+\beta q(x)\right)'+\left(\alpha p(0)+\beta q(0)\right)'=\\
&=x\left(\alpha p'(x)+\beta q'(x)\right)+\left(\alpha p'(0)+\beta q'(0)\right)=\\
&=\alpha\left(xp'(x)+p'(0)\right)+\beta\left(xq'(x)+q'(0)\right)=\\
&=\alpha T\left(p(x)\right)+\beta T\left(q(x)\right)
\end{aligned}$$

2. El núcleo lo formarán todos los polinomios $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, que verifiquen

$$\begin{aligned}
&T\left(p(x)\right)=T(a_0+a_1x+a_2x^2)=x(a_0+a_1x+a_2x^2)'+\left(a_1\right)=\\
&=x\left(a_1+2a_2x\right)+a_1=a_1+a_1x+2a_2x^2=0
\end{aligned}$$

Que será cierto si, y sólo si, $a_1 = a_2 = 0$, es decir, el núcleo lo conforman los polinomios de grado 0 (números reales). Luego el núcleo es isomorfo a R, así que la dim KerT =1.

3. T no es inyectiva porque KerT no se reduce a 0. La dimensión de Im T, será 2 (usando el teorema del rango), y puesto que dim P_2 es 3, T no es suprayectiva. Por lo tanto no biyectiva.
4. La matriz asociada será cuadrada de orden 3, y cada columna estará formada por los coeficientes de 1, x y x^2, polinomios que forman la base estándar de P2, de las imágenes de esos polinomios:

T(1) = x. (1)'(x) + (1)'(0) = 0 = 0.1 + 0.x + 0. x^2

T(1) = x. (x)'(x) + (x)'(0) = x + 1 = 1.1 + 1.x + 0. x^2

T(1) = x. (x^2)'(x) + (x^2)'(0) = $2x^2$ = 0.1 + 0.x + 2. x^2

Luego la matriz será $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Claramente es de rango 2, luego la dimensión del espacio nulo es 1 como había quedado establecido en el apartado 2.