Soluciones # 11

El teorema espectral

Problema 11.1 Es fácil ver que

1. A es simétrica y de entradas reales.

2. $\sigma(A) = \{0, 1, -1\}$, $\quad m_a(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

3. $N(A) = \mathrm{Gen}\,((0,1,0)^t)$; $\quad N(A-I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,1)^t)$; $\quad N(A+I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,-1)^t)$;

   $m_g(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

4. Las matrices son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}\,, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \\ A_3 &= (-1)\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

5. Por ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 11.2 Podemos escribir las matrices como:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 11.3 Se tiene:

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & -3\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\,\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & -3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\,\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 11.4 Se tienen los siguientes resultados:

1. $\sigma(A) = \{0, 1, 3\}, \quad m_a(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

2. $N(A) = \mathrm{Gen}\,((1,1,1)^t) = \mathrm{Gen}\,(w_1)$;

   $N(A - I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,-1)^t) = \mathrm{Gen}\,(w_2)$;

   $N(A - 3I) = \mathrm{Gen}\,((1,-2,1)^t) = \mathrm{Gen}\,(w_3)$;

   $m_g(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

3. Es trivial ver que $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_2, w_3 \rangle = 0$.

4. $A = A_1 + A_2 + A_3$ con

$$\begin{aligned} A_1 &= 0\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}\,, \\ A_2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \\ A_3 &= 3\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

5. Las matrices buscadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\,,$$

aunque en este caso no es necesario que P sea ortogonal.

6. Las matrices buscadas son:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}\,, \qquad P_0 = P\,.$$