Soluciones # 9

Producto interno y ortogonalidad en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$

Problema 9.1 Solo es producto interno la operación definida en (b). En el caso (a), no se cumple la propiedad de no negatividad; en el caso (c) no se cumple la propiedad conmutativa.

Para el caso (b) se tiene: $\|(1,0)^t\| = \sqrt{2}$, $\|(2,-1)^t\| = \sqrt{11}$, $\langle (1,0)^t, (2,-1)^t \rangle = 4$, $\cos(\alpha) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Problema 9.2 Calculamos primero una forma escalonada de A, por ejemplo:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato entonces responder a las cuestiones:

1. No existe inversa. A no puede ser ortogonal porque, si lo fuera, al ser cuadrada, su traspuesta sería su inversa y ésta no existe.

2. $B_{\mathcal{C}(A)} = ((1,1,0)^t, (0,1,-1)^t)$; $\quad B_{\mathcal{C}(A^t)} = ((1,0,1)^t, (1,1,2)^t)$.

3. $N(A) = \mathcal{Gen}\left((-1,-1,1)^t\right); \qquad \dim(N(A)) = 1.$

4. $\langle (1,0,1)^t, (-1,-1,1)^t \rangle = 0$ y $\quad \langle (1,1,2)^t, (-1,-1,1)^t \rangle = 0.$

5. Calculamos la forma escalonada de $(A|I)$ y obtenemos $N(A^t) = \mathcal{Gen}\left((-1,1,1)^t\right)$ y $\dim(N(A^t)) = 1$.

6. $\langle (1,1,0)^t, (-1,1,1)^t \rangle = 0$ y $\quad \langle (0,1,-1)^t, (-1,1,1)^t \rangle = 0.$

7. Como $b_1 \in \mathcal{C}(A)$, se trata de un sistema compatible. Como $b_2 \notin \mathcal{C}(A)$, es un sistema incompatible.

Problema 9.3 Tenemos que:

1) La dimensión de $N(A)$ es 1, por tanto $rg(A) = 3$.

2) Basta con ver que v_1 es ortogonal a todos los vectores de $N(A)$, es decir:

$$\left\langle (1,2,3,4)^t, v_1 \right\rangle = 0\,.$$

3) Podemos escoger $B = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_2 = (2,-1,0,0)^t$ y $v_3 = (3,0,-1,0)^t$, por ejemplo.

4) El $N(A^t)$ sólo consta del vector 0.

Problema 9.4 Para la definición dada:

1) Es inmediato comprobar que se verifican las cuatro propiedades que definen el producto interno.

2) $\langle A, B \rangle = 0 + 6 + 6 - 12 = 0.$

3) $P_A(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_A(C) = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Problema 9.5 Basta con probar las propiedades de clausura para la suma y el producto por escalares de los elementos de $W^\perp$: si $w_1, w_2 \in W^\perp$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $w_1 + w_2 \in W^\perp$ y $\alpha\, w_1 \in W^\perp$.

Problema 9.6 Para la operación dada:

1. Comprobamos las cuatro propiedades que definen un producto interno:

   i) $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$ por ser conmutativo el producto de polinomios.

   ii) $\alpha\langle p, q\rangle = \alpha \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \alpha\, p(t)\, q(t)\, dt = \langle \alpha\, p, q\rangle$.

   iii) $\langle p, q + r\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\, [q + r](t)\, dt = \int_{-1}^{1} p(t)\, [q(r) + r(t)]\, dt = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt + \int_{-1}^{1} p(t)\, r(t)\, dt = \langle p, q\rangle + \langle p, r\rangle$.

   iv) $\langle p, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p^2(t)\, dt \geqslant 0$ por ser el integrando una función no negativa. Además, el valor de la integral solo puede ser cero en el caso de que p sea el polinomio idénticamente nulo.

2. Es evidente que la suma de dos polinomios de S_1, que sólo constan de términos con potencias pares de x, es otro polinomio de potencias pares y que si multiplicamos uno de tales polinomios por un número real (incluido el 0), el resultado también tendrá sólo potencias pares. Por tanto S_1 es un subespacio vectorial.

3. Sean $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$; su producto es un polinomio de grado impar, que sólo contiene potencias impares de x, es decir, es una función impar. Al integrar dicho polinomio en el intervalo simétrico respecto del origen $[-1, 1]$, el resultado es 0. Por tanto, los vectores de S_1 y S_2 son ortogonales. Sin embargo, S_2 no es un subespacio vectorial pues no contiene el vector cero $p(x) = 0$ y no es, por tanto, el complementos ortogonal de S_1.