uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Ingeniería Informática
2018-2019

Apuntes

Cálculo

Jorge Rodríguez Fraile[1]

[1] Universidad: 100405951@alumnos.uc3m.es | Personal: jrf1616@gmail.com

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Tema 1. Números reales

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

$$\boxed{\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto f(x) \end{array}}$$

función real de variable real

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

x ↑ función de variable real

$f(x)$ ↑ función real

$D :=$ dominio de la función := números reales "x" para los que tiene sentido el cálculo de $f(x)$

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in D\}$$

= números reales "y" que son de la forma $y = f(x)$ para algún "x".

<u>Obs:</u> Normalmente nos referiremos a una función a través de una expresión del tipo "$f(x)$". En estos casos asumiremos, implícitamente, que el dominio de f es el conjunto más grande en el que la fórmula "$f(x)$" tenga sentido

<u>Ejemplo:</u> El dominio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es el conjunto:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

La imagen de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está formada por los $y \in \mathbb{R}$ tales que:

$y = \sqrt{1-x^2}$ para algún $x \in [-1,1]$

$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \geq 0$

$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

Por tanto $y \geq 0$ & $y \in [-1, 1]$

$\Rightarrow Im(f) = [0, 1]$

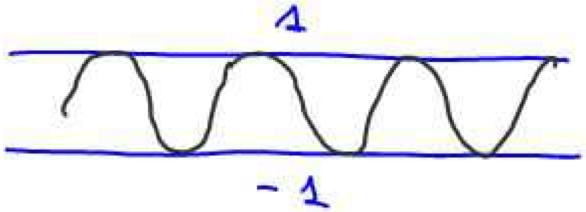
Ejemplos:

- $f(x) = x^n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impar} \\ [0, \infty) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

- $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $\cos x$

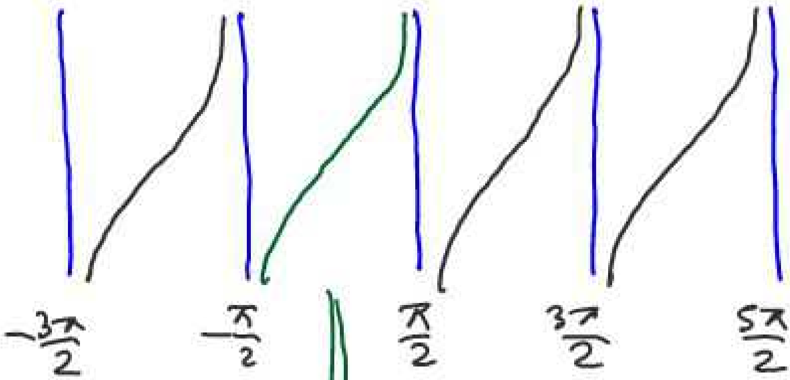
  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$



- $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm \pi/2, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots\}$

  $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$



- $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

  $\mathrm{Dom}(\arctan) = \mathbb{R}$

  $\mathrm{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

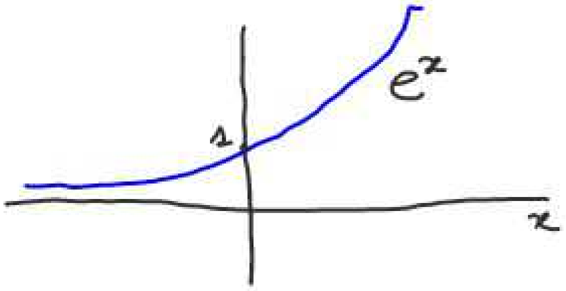
- $\mathrm{Dom}(\arccos) = [-1, 1]$

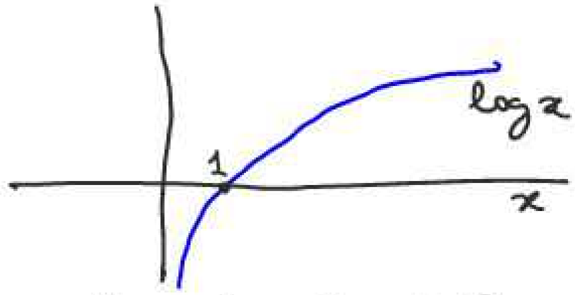
  $\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$

¿por qué?

- $\mathrm{Dom}(\operatorname{arcsen}) = [-1, 1]$

  $\mathrm{Im}(\operatorname{arcsen}) = [-\pi/2, \pi/2]$





$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$$
$$x \mapsto e^x$$

$\mathrm{Dom}(\exp) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(\exp) = (0,\infty)$

$$\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log x$$

$\mathrm{Dom}(\log) = (0,\infty)$

$\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$

- $\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{\log x} = x \quad \forall x \in (0,\infty)$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{2x-3}{5x+7}$ ¿Dom ; Im?

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 5x+7 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{7}{5}\}}$$

$\mathrm{Im}(f)$: $y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow y = \dfrac{2x-3}{5x+7}$ para algún $x \neq -\frac{7}{5}$

$y = \dfrac{2x-3}{5x+7}$ ¿x? $\Leftrightarrow (5x+7)y = 2x-3$

$\Leftrightarrow (5y-2)x = -7y-3$

$\underset{y \neq 2/5}{\Longrightarrow} x = \dfrac{7y+3}{2-5y}$ Es fácil ver que $x \neq -\frac{7}{5}$

$\underset{y = 2/5}{\Longrightarrow} 0 = -7 \cdot \frac{2}{5} - 3$ ¡¡

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{2}{5}\}}$$

Parte II

Tema 2. Sucesiones

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIBLE REAL

Sea $l \in \mathbb{R}$, diremos que $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |f(x) - l| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon}$$

Es decir:

$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$ Los valores de $f(x)$ se pueden acercar a l tanto como queramos sin más que tomar la x suficientemente cerca de x_0 (pero con $x \neq x_0$)

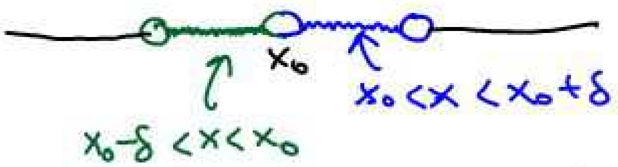
Observaciones:

(1) El valor de f en $x = x_0$ NO juega ningún papel a la hora de calcular el límite.
En particular, x_0 no necesita pertenecer al dominio de f.

(2) Los valores de x alejados de x_0 tampoco juegan ningún papel a la hora de calcular un límite.

(3) Es importante darse cuenta de que:

$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow$ o bien $x_0 < x < x_0 + \delta$
o bien $x_0 - \delta < x < x_0$



Este hecho invita a definir los LÍMITES LATERALES

LATERAL IZQUIERDA $\quad l_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_-| < \varepsilon$
si $x_0 - \delta < x < x_0$

LATERAL DERECHA $\quad l_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_+| < \varepsilon$
si $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

Teorema $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Ejemplo

- $\lim_{x \to 1/2} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to 1/2^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to 1/2^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$

  $\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$

Obs: En la práctica, casi nunca calcularemos los límites usando la definición

Obs: Propiedades de los límites:

Si $\ell_1 = \lim_{x \to x_0} f_1(x)$

$\ell_2 = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$

$\Rightarrow$

- $\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) = \ell_1 \pm \ell_2$
- $\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \cdot f_2(x) \right) = \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ (si $\ell_2 \neq 0$)
- $\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \right)^{f_2(x)} = \ell_1^{\ell_2}$ (si ℓ_1 y $\ell_2 \neq 0$)

  0^0 indeterminación

- $\lim_{x \to x_0} \log \left(f_1(x) \right) = \log \ell_1$

  (si $\ell_1 > 0$)

Obs: Si $f: D \to \mathbb{R}$ con $D = (x_1, x_2)$ ó $[x_1, x_2]$ ó $(x_1, x_2]$ ó ó $[x_1, x_2)$,

es decir, cuando el dominio de f sea un intervalo:

$$l_1 = \lim_{x \to x_1} f(x) \Leftrightarrow l_1 = \lim_{x \to x_1^+} f(x)$$

$$l_2 = \lim_{x \to x_2} f(x) \Leftrightarrow l_2 = \lim_{x \to x_2^-} f(x)$$

Es decir, si el dominio es un intervalo (cerrado o no), el límite en los extremos del intervalo se define a través de los límites laterales.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Si x_0 es un punto cualquiera del dominio de f podemos comparar el valor de $f(x_0)$ con el valor, si existe, de $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

<u>Def</u>: Función continua en x_0

Sea $x_0 \in \text{Dominio}(f)$.

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>Def</u>: Función continua:

Diremos que f es continua $\Leftrightarrow$ f es continua en x para todo x de su dominio

<u>Ejemplos</u>:
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es continua en $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- $f(x) = x$ es una función continua
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$

  <u>no</u> es continua en ningún punto

<u>TEOREMA</u>: FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS CERRADOS Y ACOTADOS

Sea $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (es decir, $f(x)$ es continua $\forall x$ en el intervalo <u>cerrado</u> y <u>acotado</u> $[x_1, x_2]$)

Entonces $\text{Im}(f) = [m, M] \leftarrow$ intervalo cerrado y acotado

<u>Corolario:</u> Si $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$\exists x_M \in [x_1, x_2]$ tal qe $f(x_M) \geq f(x)$ $\forall x \in [x_1, x_2]$

$\exists x_m \in [x_1, x_2]$ tal qe $f(x_m) \leq f(x)$ $\forall x \in [x_1, x_2]$

<u>Dem:</u> Puesto que $Im(f) = [m, M]$ existen

$x_m, x_M \in [x_1, x_2]$ tales qe $f(x_m) = m$

$f(x_M) = M$

$$\Rightarrow \quad m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_m) = M$$

$$\forall x \in [x_1, x_2].$$

<u>Corolario:</u> $f: [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua;

$f(x_1) < 0$ & $f(x_2) > 0$;

$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2)$ tal qe $f(x_0) = 0$

<u>Dem:</u> $Im(f) = [m, M]$

$m \leq f(x_1) < 0 < f(x_2) \leq M$

$\Rightarrow \quad m < 0 < M \Rightarrow 0 \in [m, M] = Im(f)$

Por tanto, puesto qe $0 \in Im(f)$:

$\exists x_0 \in D$ tal qe $f(x_0) = 0$.

Parte III

Tema 3. Series

DERIVADA: INTERPRETACIÓN Y PROPIEDADES

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in D$

Diremos que f es DERIVABLE en x_0 si

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

A dicho límite se le denomina la DERIVADA de f en x_0 y lo denotaremos mediante

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>Def</u>: Sea $D' = \{ x \in D : f \text{ es derivable en } x \}$

La función $f' : D' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

se denomina "función derivada de f".

<u>Ejemplos</u>:

1) $f(x) = x$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$f'(x) = 1 \quad \forall x$

2) $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{función continua}}}{=} x_0 + x_0 = 2x_0$$

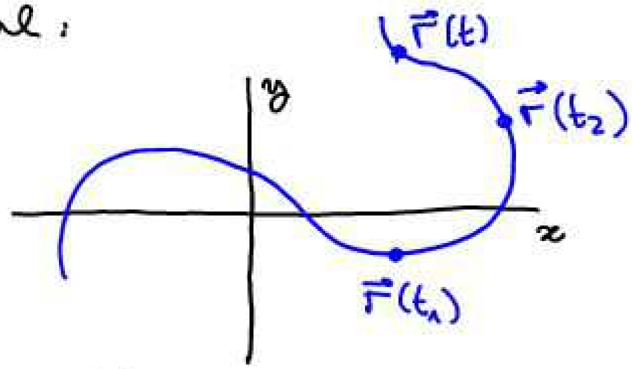
$f'(x) = 2x \quad \forall x$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA: VELOCIDAD

El movimiento de una PARTÍCULA PUNTUAL en $\mathbb{R}^2$ está descrito por una función vectorial:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t)$$

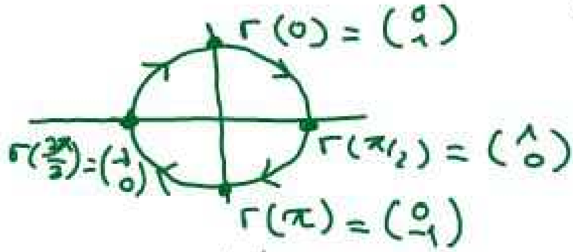
TIEMPO — POSICIÓN en el TIEMPO t



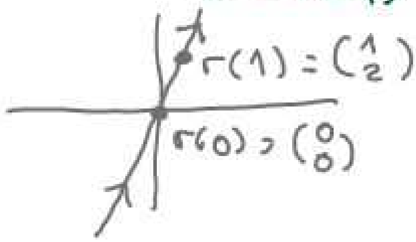
Puesto que $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, para describir la posición en el tiempo t necesitamos dar <u>dos</u> funciones reales de variable real: $x(t)$ & $y(t)$

<u>Ejemplos:</u>

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$



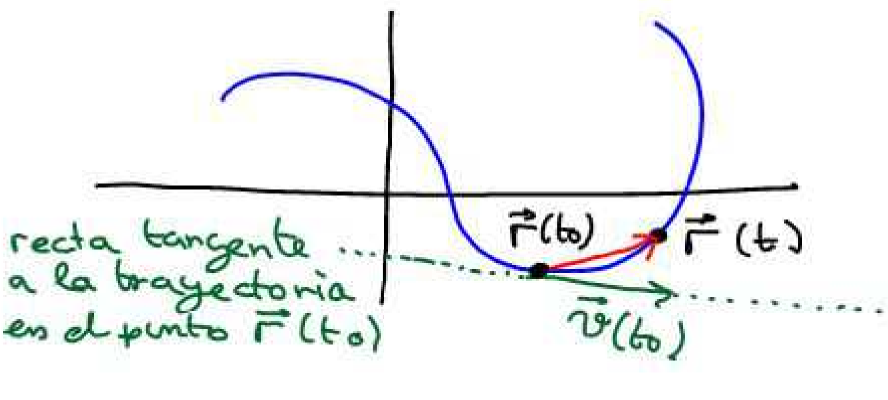
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$



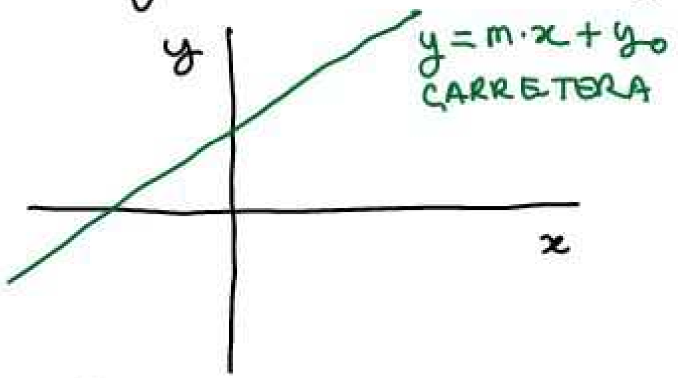
<u>Def</u>: VELOCIDAD en el INSTANTE t_0:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \right) =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$



• Para fijar ideas, supongamos que la partícula está obligada a moverse siguiendo una CARRETERA RECTA:



En ese caso, el movimiento viene dado por una función:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ m \cdot x(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

La velocidad en el instante t es, por tanto:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ m\,x'(t) \end{pmatrix}$$

En principio, el movimiento anterior puede ser muy complicado, pero si imponemos que la velocidad sea constante (independiente de t):

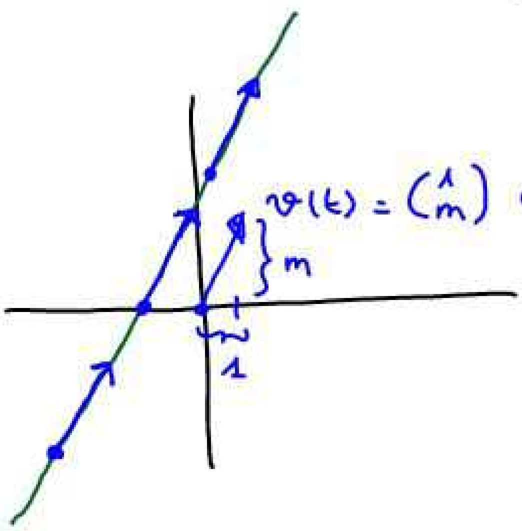
$$x(t) = \alpha t \Rightarrow x'(t) = \alpha$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ m\alpha \end{pmatrix}$$

En concreto, si $\alpha = 1 \Rightarrow x = t$ de manera que:

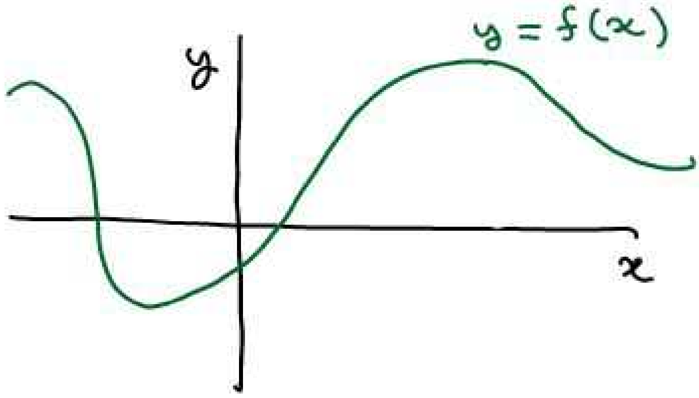
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \forall t$$

pendiente de la recta



$v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vector:
- constante
- "tangente" a la carretera
- su segunda componente es la pendiente de la carretera (recta)

• Supongamos ahora que la carretera por la que ha de moverse la partícula es la GRÁFICA de una FUNCIÓN $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



En este caso, el movimiento es de la forma:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{pmatrix}$$

Si además suponemos que $x(t) = t$ se tiene que:

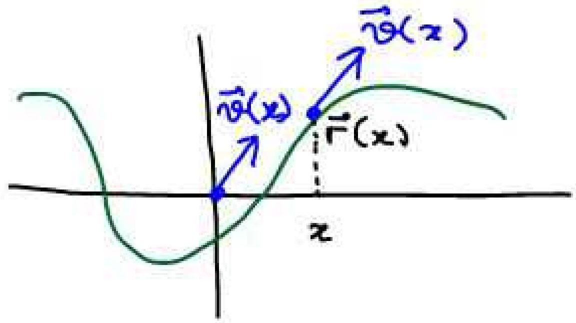
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \text{ ó bien } \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$
$(x = t)$

De esta manera, la velocidad en el "instante x" es:

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

- $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica (carretera) en el punto $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$

- El vector $\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$ es "tangente" a la gráfica en el punto $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$



PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Aunqe la derivada está definia a través de un límite, en muchos casos (aunqe NO en todos) podremos calcular la derivada de una función usando los siguientes teoremas:

TEOREMA 1: Si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0

$$\left[\text{Si } f \text{ no es continua en } x_0 \Rightarrow \nexists f'(x_0) \right]$$

TEOREMA 2: Supongamos qe $\exists f'(x_0)$ & $g'(x_0)$

entonces:

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$ (Leibniz)
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (si $g(x_0) \neq 0$)

TEOREMA 3: REGLA DE LA CADENA

Si $\exists f'(g(x_0))$ & $\exists g'(x_0)$, se cumple qe:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

obs: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
"f compuesta con g"

Aplicación: Derivada de la función inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in D$$

$$\underset{\substack{\text{Regla de la}\\ \text{cadena}}}{\Longrightarrow} \quad (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\underset{(f'(x) \neq 0)}{\Longrightarrow} \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Por tanto: $\boxed{(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

Ejemplos:

- $f(x) = x \implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2 = x \cdot x \underset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2 \underset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$
  $\forall x \in \mathbb{R}$
- Usando inducción:
  $f(x) = x^n = x \cdot x^{n-1} \implies f'(x) = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Asumiré que:
  $$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ \exp'(x) &= \exp(x) \end{aligned}\right. \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicios:

① Calcula $\arccos'(x)$ para los x's que tenga sentido:

Usando: $$\arccos(\cos(x)) = x$$

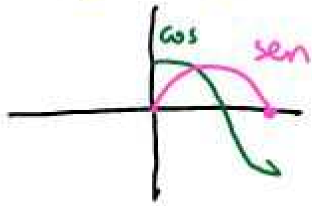
$$\arccos'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = 1$$

$$-\operatorname{sen}(x) \arccos(\cos(x)) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$(\operatorname{sen} x > 0)$

$$\boxed{\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (-1,1)}$$

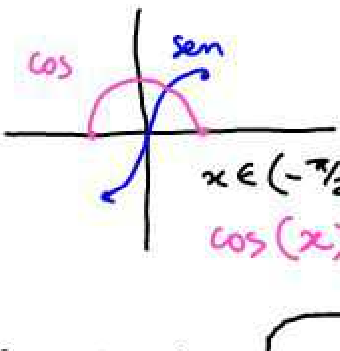


$x \in (0, \pi)$

② Calcula $\arcsin'(x)$ para los x's que tenga sentido:

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = x \Rightarrow \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen}' x = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) \cdot \operatorname{arcsen}'(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$



$x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\cos(x) > 0$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}$$

Por tanto: $$\boxed{\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (-1,1)}$$

③ Calcula $\arctan'(x)$ para los x's que tenga sentido:

$$\arctan(\tan x) = x \Rightarrow \arctan'(\tan x)\cdot \tan' x = 1$$

$$\Rightarrow \arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan' x}$$

<u>Obs:</u> $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}$

$$\Rightarrow \tan' x = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\right\}$$

$$\Rightarrow \arctan'(\tan x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Por tanto:

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

④ Calcula $\log'(x)$ para los x's que tenga sentido:

$$\log(e^x) = x \Rightarrow \log'(e^x)\cdot e^x = 1$$

$$\Rightarrow \log'(e^x) = \frac{1}{e^x}$$

Por tanto:

$$\boxed{\log'(y) = \frac{1}{y} \quad \forall y > 0}$$

Parte IV

Tema 4. Funciones de variable real y Continuidad

FUNCIONES DERIVABLES: TEOREMAS

Teorema: Sea (x_1, x_2) un intervalo no necesariamente acotado (es decir, permitiremos que $x_1 = -\infty$ y/o $x_2 = \infty$)

Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x) = C$
$\forall x \in (x_1, x_2)$
(función constante)
$\operatorname{Im} f = \{C\}$

Obs: Hay funciones no constantes que cumplen $f'(x) = 0$

Por ejemplo:

$$f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

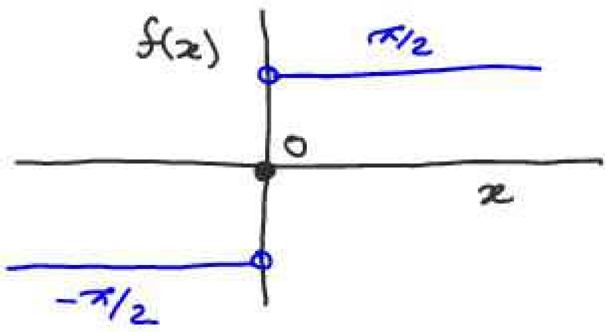
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$
$$\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Sin embargo:

$$f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

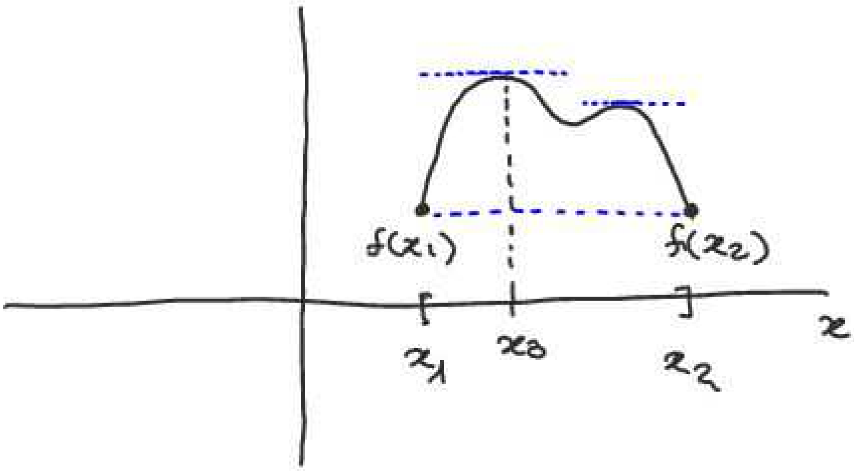
$$f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$



Teorema de Rolle:

$f: [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$: continua en $[x_1, x_2]$
derivable en (x_1, x_2)
$f(x_1) = f(x_2)$

$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) = 0$



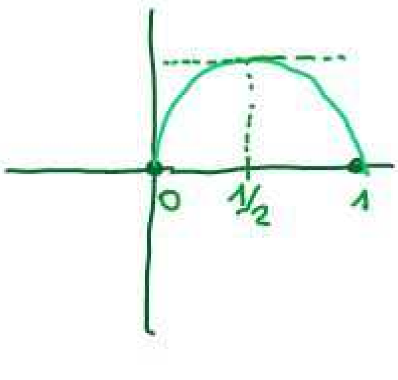
Ejemplo: $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x(1-x)$ continua

$f'(x) = 1 - 2x \quad \forall x \in (0,1)$

$f(0) = f(1) = 0$

$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$



En efecto:

$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 1/2$

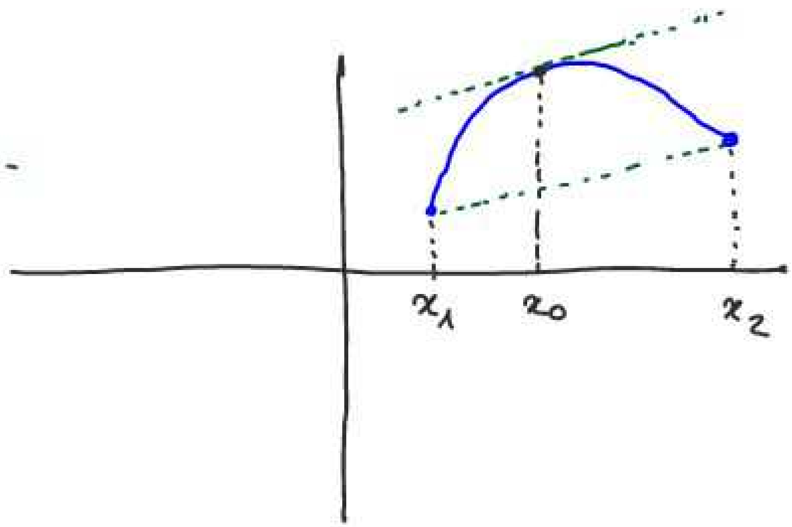
$\frac{1}{2} \in (0,1)$

Teorema del valor medio de Lagrange:

$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[x_1, x_2]$
derivable en (x_1, x_2)

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2) : \quad f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_0)(x_2 - x_1)$$



Ejemplo:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

continua en $[0,1]$ & derivable en $(0,1)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (0,1) : \quad f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

En efecto:

$f(0) = 2$

$f(1) = 1$

$f'(x) = 6x^2 - 3$

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \iff 6x^2 - 3 = -1$$

$6x^2 = 2$

$x^2 = 1/3 \iff x = \pm 1/\sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1).$

Teorema del valor medio de Cauchy

$f, g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$: continuas en $[x_1, x_2]$
derivables en (x_1, x_2)

$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$(g(x_2) - g(x_1))\, f'(x_0) = (f(x_2) - f(x_1))\, g'(x_0)$$

Obs: Si $g'(x_0) \neq 0$ & $g(x_2) - g(x_1) \neq 0$

podemos escribir:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}$$

Este hecho permite demostrar el TEOREMA DE L'HOPITAL

Teorema de L'Hopital:

Sea $x_0 \in I = (x_1, x_2)$. Sean f y g dos funciones derivables en todos los puntos de $I \setminus \{x_0\}$.

Si
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs: El teorema también es válido si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

Ejemplos (L'Hopital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)\log(x)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\log x + 1 - 1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\log x}{x\log x + x - 1}$$

$$\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{1+\log x}{2+\log x} = \frac{1}{2}$$

Parte V

Tema 5. Derivadas

$$\boxed{\text{FUNCIONES } f(x) = x^n \ ; \ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}}$$

$n = 1$: $f(x) = x$

$n = 2$: $f(x) = x^2 = x \cdot x$

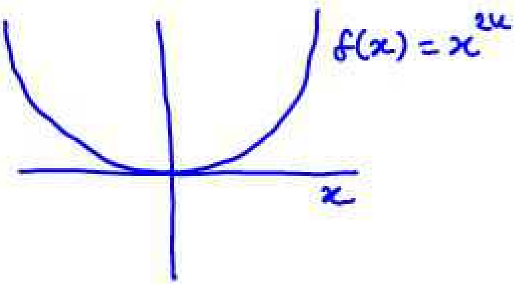
$n = 3$: $f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x$

etc.

$f(x) = x^n$:

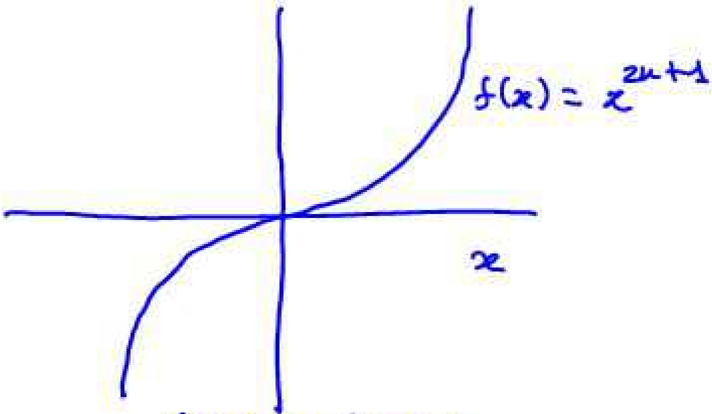
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- f es continua en $\mathbb{R}$
- f es derivable en $\mathbb{R}$
- $f'(x) = n x^{n-1}$; $x \in \mathbb{R}$
- f' es continua en $\mathbb{R}$.

$n = 2k$ PAR



función par

$f(-x) = f(x)$



función impar

$f(-x) = -f(x)$

FUNCIONES $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$n=1$: $\quad f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$; $\quad x \neq 0$

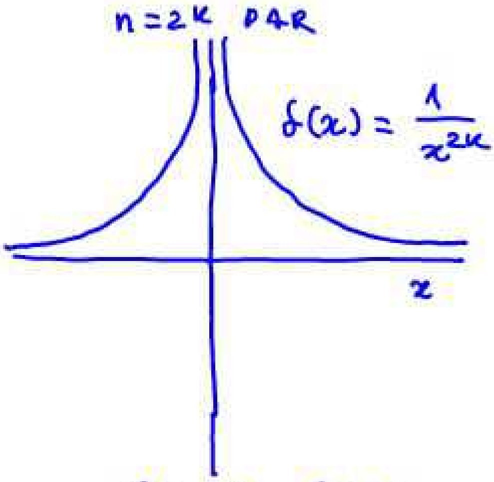
$n=2$: $\quad f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$; $\quad x \neq 0$

$n=3$: $\quad f(x) = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$; $\quad x \neq 0$

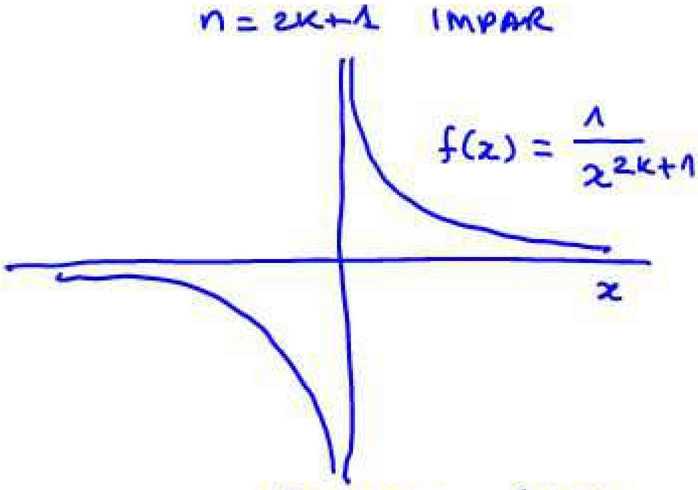
etc.

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

- $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f'(x) = -n\, x^{-n-1}$; $\quad x \neq 0$
- f' es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(-x) = f(x)$



$f(-x) = -f(x)$

$\boxed{\text{FUNCIONES} \quad f(x) = x^a \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}}$

$f(x) = x^{\sqrt{2}}$; $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{7}}}$; $f(x) = x^{1/6}$; ...

- PRIMERA DEFINICIÓN :

$$f(x) = x^a := e^{a \log(x)} \quad \text{si} \quad x > 0$$

Esta definición nos obliga a tomar $Dom(f) = (0, \infty)$

¿$\exists \lim_{x \to 0^+} f(x)$?

Puesto que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{x \to 0^+} e^{a \log(x)} =$

$$= e^{a \cdot (-\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

- SEGUNDA DEFINICIÓN :

Si $a > 0$: $f(x) = x^a = \begin{cases} e^{a \log x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$Dom\, f = [0, \infty)$

f es continua en $[0, \infty)$

Si $a < 0$: $f(x) = x^a = e^{a \log x}$ si $x > 0$

$Dom\, f = (0, \infty)$

f es continua en $(0, \infty)$

Supongamos $a<0$:

$f(x) = x^a = e^{a \log x}$ con $x \in (0,\infty)$

f es continua y derivable en $(0,\infty)$. En concreto:

$$f'(x) = e^{a\log x} \cdot \frac{a}{x} = a\,\frac{e^{a\log x}}{x} = a\,\frac{e^{a\log x}}{e^{\log x}} =$$

$$= a\, e^{(a-1)\log x} =: a x^{a-1} \quad ; \quad x>0$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = a x^{a-1} \quad \forall x \in (0,\infty)$

f' es continua en $(0,\infty)$.

Supongamos $a>0$:

$$f(x) = x^a = \begin{cases} e^{a\log x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Si $x>0$: $f(x) = x^a = e^{a\log x}$

f es derivable en $x>0$

$f'(x) = a x^{a-1}$

[mismo cálculo que para $a<0$

Si $x=0$: $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\log x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\log x}}{e^{\log x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{(a-1)\log x} = \begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ \infty & \text{si } 0<a<1 \end{cases}$$

En resumen:

- Si $0<a<1$:

  $f(x) = x^a$ es continua en $[0,\infty)$
  derivable en $(0,\infty)$

  $f'(x) = a x^{a-1}$ si $x \in (0,\infty)$

  f' es continua en $(0,\infty)$

  $\nexists\, f'(0)$ $[\, f'_+(0) = \infty \,]$

- Si $a>1$:

  $f(x) = x^a$ es continua en $[0,\infty)$
  es derivable en $[0,\infty)$

  $f'(x) = a x^{a-1}$ $\forall x \in [0,\infty)$

  En particular $f'(0) = 0$

  f' es continua en $[0,\infty)$.

Obs: Supongamos $x>0$; a,b arbitrarios:

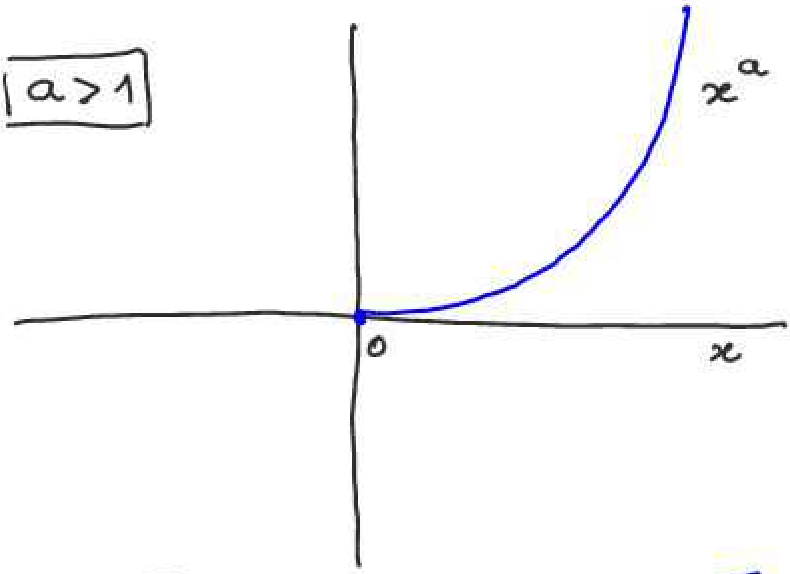
- $x^a \cdot x^{-a} = 1 \Rightarrow x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$

En efecto:

- $x^a \cdot x^{-a} = e^{a\log x} \cdot e^{-a\log x} = e^0 = 1$
- $x^a x^b = e^{a\log x} \cdot e^{b\log x} = e^{(a+b)\log x} = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = (e^{a\log x})^b = e^{b\log(e^{a\log x})} =$

  $= e^{b\cdot a\log x} = x^{ab}$

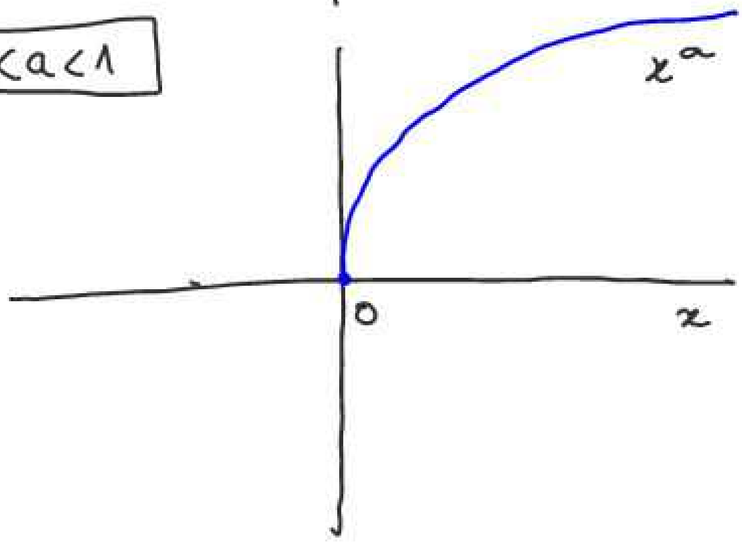
$\boxed{a > 1}$



$0^a = 0$

$1^a = 1$

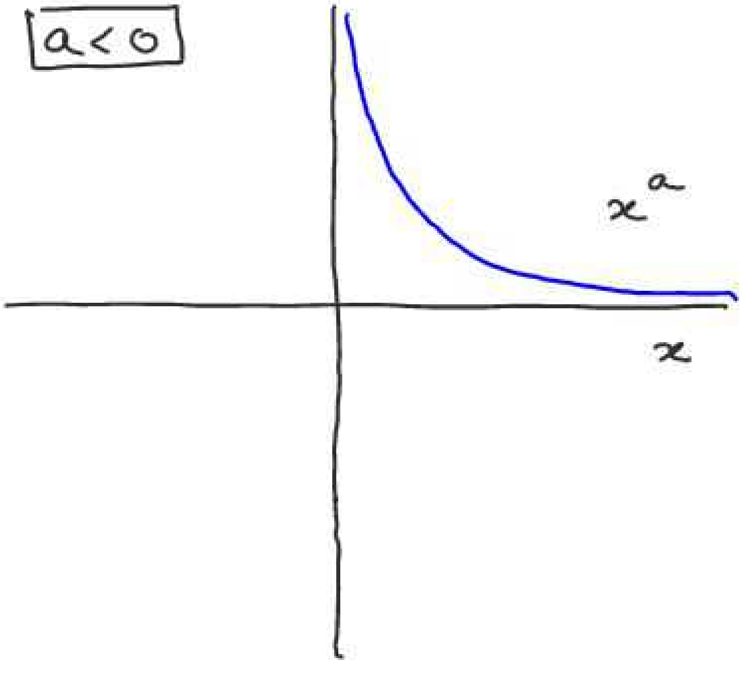
$\boxed{0 < a < 1}$



$0^a = 0$

$1^a = 1$

$\boxed{a < 0}$



$1^a = 1$

" $0^a = \infty$ "

$$\boxed{f(x) = x^a \quad \text{con } a = \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{1}{6};\ \cdots}$$

$a = 1/2$: $\quad (x^{1/2})^2 = x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow x^{1/2} = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ continua en $[0,\infty)$

derivable en $(0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \; ; \; x>0$$

$a = 1/4$: $\quad (x^{1/4})^4 = x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

$f(x) = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ continua en $[0,\infty)$

derivable en $(0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \; ; \quad x>0$$

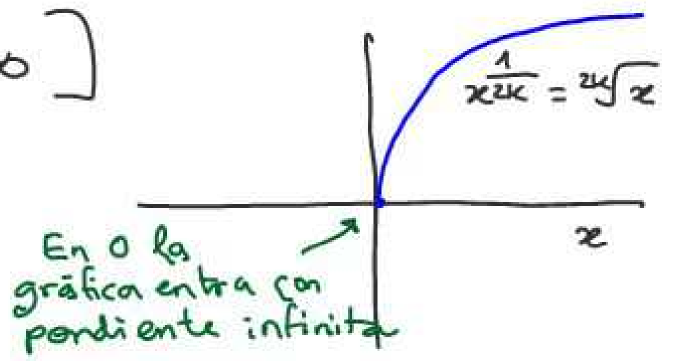
En general: $\quad (x^{1/2k})^{2k} = x \quad \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$$

$f(x) = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$ continua en $[0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2k}x^{\frac{1}{2k}-1} = \frac{1}{2k\, x^{\frac{2k-1}{2k}}} = \frac{1}{2k\sqrt[2k]{x^{2k-1}}} \; ; \; x>0$$

$\nexists f'(0) \quad [\, f'_+(0) = \infty \,]$



$$\boxed{f(x) = x^a \quad \text{con} \quad a = 1/3, 1/5, 1/7, \ldots}$$

En este caso conviene CAMBIAR la definición general para que x^a tenga como dominio TODO $\mathbb{R}$. En concreto, si $a = 1/3$ definimos:

$$f(x) = x^{1/3} = \begin{cases} e^{\frac{1}{3}\log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{1/3 \log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(La definición es tal que $f(-x) = -f(x)$: impar)

Esta nueva definición hace que se cumpla que:

$$(x^{1/3})^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto:

$$(x^{1/3})^3 = \begin{cases} e^{\frac{3}{3}\log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\frac{3}{3}\log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(x^{1/3})^3 = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por tanto: $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f es continua en $\mathbb{R}$

derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\nexists f'(0)$

En general, si $a = \frac{1}{2k+1}$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{2k+1}\log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\frac{1}{2k+1}\log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2k+1}}\right)^{2k+1} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

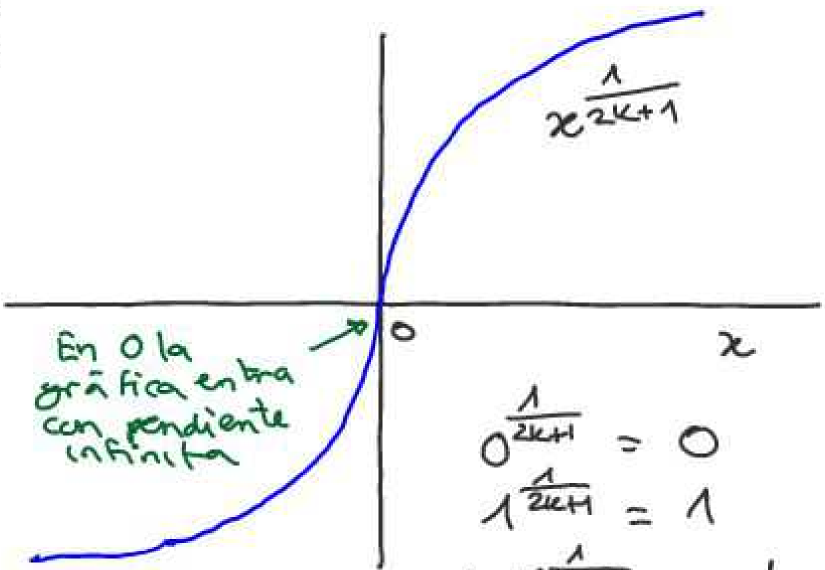
$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2k+1} x^{\frac{1}{2k+1}-1} = \frac{1}{(2k+1)\, x^{\frac{2k}{2k+1}}}$$

$$= \frac{1}{(2k+1)\sqrt[2k+1]{x^{2k}}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\nexists f'(0)$



$$0^{\frac{1}{2k+1}} = 0$$

$$1^{\frac{1}{2k+1}} = 1$$

$$(-1)^{\frac{1}{2k+1}} = -1$$

Parte VI

Tema 6. Teoremas sobre funciones derivables

POLINOMIO DE TAYLOR

- Un polinomio de grado n es una función de la forma

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n$$

con $p_n \neq 0$

p_i constantes

Ejemplo: $P(x) = 3 + 5x + 7x^2$
polinomio de grado 2.

- Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, cualquier polinomio de grado n puede escribirse en la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

con $a_n \neq 0$
a_i constantes

Ejemplo: $P(x) = 3 + 5x + 7x^2 =$

$\boxed{x = x - x_0 + x_0}$

$$= 3 + 5(x - x_0 + x_0) + 7(x - x_0 + x_0)^2$$

$$= 3 + 5x_0 + 7x_0^2 +$$
$$+ (5 + 14x_0)(x - x_0) +$$
$$+ 7(x - x_0)^2$$

$$\Rightarrow P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

con: $a_0 = 3 + 5x_0 + 7x_0^2$
$a_1 = 5 + 14x_0$
$a_2 = 7$

- Si $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$ es evidente que:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = P(x_0) \\ a_1 = P'(x_0) \\ 2a_2 = P''(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)}$$

$$P^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

derivada k-ésima

• Si $P(x)$ es un polinomio de grado n
x_0 es un número real arbitrario

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

• Sea $f:(x_1,x_2) \to \mathbb{R}$ una función $C^n(x_1,x_2)$
(aunque no hace falta tanta regularidad, todos los ejemplos que vamos a considerar serán de este tipo)

Sea $x_0 \in (x_1,x_2)$

El POLINOMIO de TAYLOR de ORDEN n de f en x_0 es el polinomio

$$P_n(x|f,x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

EL RESTO n-ÉSIMO de TAYLOR de f en x_0 se denota mediante $R_n(x|f,x_0)$ y se define como:

$$R_n(x|f,x_0) := f(x) - P_n(x|f,x_0)$$

Obs: $f(x)$ y $P_n(x|f,x_0)$ satisfacen:

$P(x_0|f,x_0) = f(x_0)$; $P'(x_0|f,x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0|f,x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Ejemplo: $f(x) = \cos x$; $x_0 = 0$

$P_4(x|f,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$

$R_4(x|f,0) = \cos x - (1 - x^2/2 + x^4/4!)$

TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f:(x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ una función $C^{n+1}(x_1, x_2)$

Sea $x_0 \in (x_1, x_2)$:

$\Rightarrow$ Si $x \neq x_0$ $\exists\, c \in (x_0, x)$ ó $c \in (x, x_0)$ tal que :

$$R_n(x|f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Obs: Para $n=0$ el teorema se reduce al teorema del valor medio de Lagrange

Corolarios: En las hipótesis del teorema de Taylor:

- $$\lim_{x \to x_0} R_n(x|f, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^2} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

NOTACIÓN de LANDAU

Sean f y g funciones definidas en un entorno de x_0

O-grande de Landau:

Diremos que $f = O(g)$ cuando $x \to x_0$ si $\exists M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ $\forall x$ en un entorno de x_0

o-pequeña de Landau:

Diremos que $f = o(g)$ cuando $x \to x_0$ si $\forall M > 0$ existe un entorno de x_0 tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para todo x en dicho entorno

Observación: Si $g(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$

$$f = o(g) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f = O(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \text{ acotado para } x \text{ cerca de } x_0$$

Ejemplo: En las hipótesis del teorema de Taylor,

$$R_n(x|f, x_0) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

o-pequeña

ya que:

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f,x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x|f,x_0)}{(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to x_0} R(x|f,x_0)$$

$\Rightarrow$ Muchas veces escribiremos simplemente:

$$f(x) = P_n(x|f,x_0) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

EJEMPLOS: Si $x \to 0$ se tiene que:

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}_{o(x^{2n+1})}$

- $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{o(x^{2n+2})}$

- $(1+x)^a = 1 + a + \dfrac{a(a-1)}{2} x^2 + \dfrac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dfrac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!} x^4$

Binomio Newton

$$+ \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$\dbinom{a}{n} := \dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$; $a \in \mathbb{R}$ (no necesariamente entero)

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x + x^3/6}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{5!}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (1-x)^{1/2}}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right)}{x + o(x)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Ejemplo: Aproxima el valor de } (1.1)^{1/3} \text{ mediante un polinomio de Taylor de grado 3 y estima el error cometido en la aproximación.}}$

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^{1/3}$.

Tanto el valor de f en $x_0=0$ como el de todas sus derivadas en $x_0=0$ son números racionales que se pueden calcular fácilmente:

$$f(x) = (1+x)^{1/3} \implies f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \implies f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3^2}(1+x)^{-5/3} \implies f''(0) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 5}{3^3}(1+x)^{-8/3} \implies f'''(0) = \frac{10}{27}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2^4\cdot 5}{3^4}(1+x)^{-11/3}$$

En este caso, puesto que $f(x) = (1+x)^{1/3}$ podríamos haber calculado dichas derivadas usando el binomio de Newton:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$$

En cualquier caso:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (1+x)^{1/3} \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_3(x|f,0) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3}$$

$$\boxed{(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + R_3(x|f,0)}$$

Usando el teorema de Taylor:

$$R_3(x|f,0) = -\frac{2^4 \cdot 5}{3^4\ 4!}\frac{x^4}{(1+c)^{11/3}} \quad \text{con } c\in(0,x)$$

Particularizando la ecuación

$$(1+x)^{1/3} = 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}x^3+R_3(x|f,0)$$

en $x=0.1$ se tiene:

$$\boxed{(1.1)^{1/3} = 1+\frac{0.1}{3}-\frac{(0.1)^2}{9}+\frac{5\cdot(0.1)^3}{81}-\frac{2^4\cdot 5}{3^4\cdot 4!}\frac{(0.1)^4}{(1+c)^{11/3}} \quad \text{con } c\in(0,0.1)}$$

Podemos aproximar $(1.1)^{1/3}$ mediante:

$$(1.1)^{1/3} \simeq 1+\frac{0.1}{3}-\frac{(0.1)^2}{9}+\frac{5(0.1)^3}{81} \doteq 1.03228395\ldots$$

El error cometido en la aproximación es:

$$\text{Error} = \left|\underbrace{(1.1)^{1/3}}_{\text{exacto}} - \underbrace{\left(1+\frac{0.1}{3}-\frac{(0.1)^2}{9}+\frac{5\cdot(0.1)^3}{81}\right)}_{\text{aproximación}}\right|$$

$$\Rightarrow \text{Error} = \left|\frac{2^4\cdot 5\,(0.1)^4}{3^4\cdot 4!\,(1+c)^{11/3}}\right| \underset{\text{si } c=0}{\leq} \frac{2^4\cdot 5\cdot(0.1)^4}{3^4\cdot 4!}$$

con $c\in(0,0.1)$

$$\Rightarrow \text{Error} \leq \frac{2^4\cdot 5\cdot(0.1)^4}{3^4\cdot 4!} < \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}}$$

La aproximación proporciona 5 cifras decimales exactas.

$$\boxed{(1.1)^{1/3} = \underbrace{1.03228}_{\text{cifras exactas}}\ldots}$$

Parte VII

Tema 7. Polinomio de Taylor

SERIES DE TAYLOR Y FUNCIONES ANALÍTICAS:

- Supongamos que $f:(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función $C^\infty(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ (es decir, las funciones $f^{(k)}(x)$ son continuas en $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $\forall k=0,1,2,\ldots$)

La SERIE:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

se denomina SERIE de TAYLOR de f centrada en x_0.

- Podemos pensar en $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ como una función cuyo dominio consiste en el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge:

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$$

En particular, x_0 pertenece al dominio ya que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^k=f(x_0)$$

¿Qué ocurre si $x\neq x_0$? Si $x\neq x_0$, en principio puede pasar cualquiera de las siguientes cosas:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ no sea convergente

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converja a un valor $\neq f(x)$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converja a $f(x)$

Dicha casuística depende del comportamiento de la sucesión $\left(f^{(k)}(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Aunque <u>no</u> vamos a estudiar el problema con detalle, en algunos casos es fácil demostrar la convergencia de la serie de Taylor (ver siguiente sección). En concreto:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad ; \quad |x|<1$
- $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad ; \quad |x|<1$
- $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad ; \quad |x|<1$

$$\binom{a}{0} = 1$$
$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

FUNCIÓN ANALÍTICA EN x_0:

- Diremos que f es analítica en x_0 si:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

para todo $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

- Ejemplo: Consideremos $f(x) = e^x$; x_0 arbitrario

Usando que $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k = 0,1,2,\dots$ se tiene que

$$e^x = \underbrace{e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x|f,x_0)} + \underbrace{\frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x|f,x_0)}$$

con $c_n \in (x_0, x)$

Tomando $\lim_{n\to\infty}$ se tiene:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k + \lim_{n\to\infty} e^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde $c_n \in (x_0, x)$

Ahora bien: $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ Stirling

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{c_n}}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0} = 0$$

Por tanto:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

e^x es ANALÍTICA en x_0 para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

Parte VIII

Tema 8. Comportamiento local

POLINOMIO DE TAYLOR Y COMPORTAMIENTO LOCAL

- Para funciones suficientemente regulares, el comportamiento **local** de la función entorno a un cierto punto x_0 puede codificarse de una forma muy conveniente a través de los primeros términos no nulos del polinomio de Taylor en x_0.

- En lo que sigue, sólo nos interesará el comportamiento local de una función entorno a un cierto punto x_0 por lo que nos centraremos en funciones de forma $f \in C^n(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, con $n = 1, 2, \dots, \infty$. (en los ejemplos $f \in C^\infty(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$).

- Recordemos que el teorema de Taylor nos dice que:

$$f(x) = P_n(x|f, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \; ; \; c \in (x_0, x)$$

Para $n=0$ el teorema se reduce al teorema del valor medio de Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0) \quad ; \quad c \in (x_0, x).$$

<u>TEOREMA:</u> Sea $f \in C^1$ tal que $f'(x_0) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en un entorno de x_0 [es decir, existe un entorno $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ en el cual: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$]

<u>Dem:</u> Como f' es continua & $f'(x_0) > 0$ existe un entorno de x_0: $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ en el cual $f'(x) > 0$. Usando el teorema de Taylor para $n=0$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x-x_0)}_{>0 \text{ si } x > x_0} \quad \text{con } c \in (x_0, x)$$

concluimos que $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ ■

Un razonamiento similar permite demostrar el siguiente:

TEOREMA: Sea $f \in C^1$ tal que $f'(x_0) < 0$. Entonces f es estrictamente decreciente en un entorno de x_0. Es decir, existe un intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ en el cual dados dos puntos $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

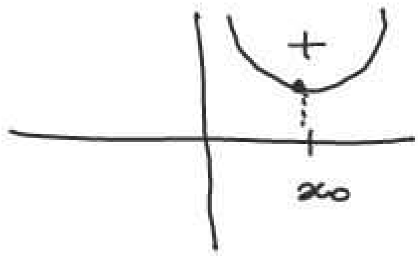
Definición: PUNTOS CRÍTICOS
Sea $f \in C^1$. Diremos que x_0 es un PUNTO CRÍTICO de f si $f'(x_0) = 0$

Por simplicidad, supongamos que x_0 es un punto crítico de una función C^∞ (es decir $f'(x_0)=0$). Sea $p>1$ orden de la primera derivada <u>no</u> nula en x_0. Entonces:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)$$
$$x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) > 0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}}_{>0}(x-x_0)^p$$

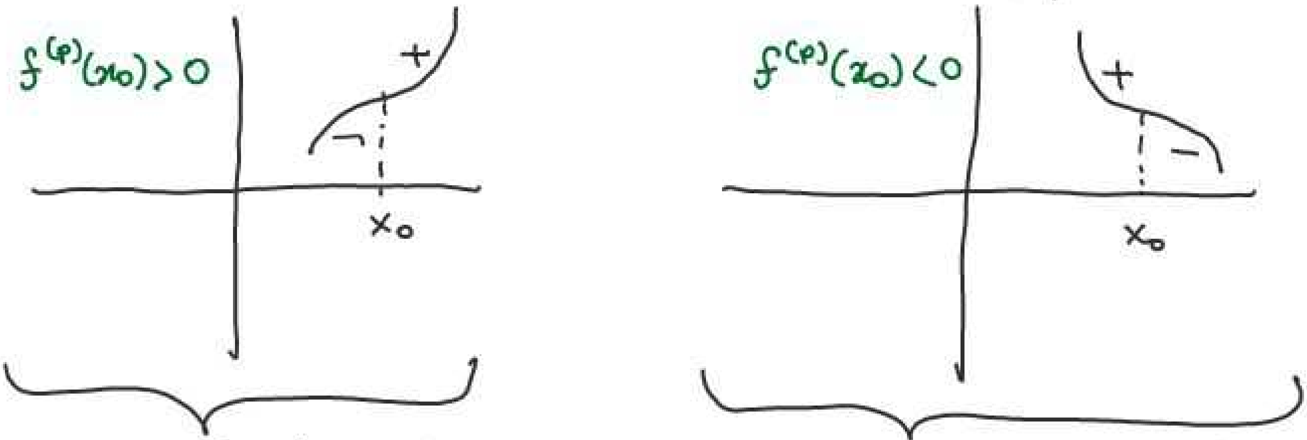


$\Longrightarrow$ f es CONVEXA (+) en un entorno de x_0 y tiene un MÍNIMO LOCAL en x_0

- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) < 0$

$\Longrightarrow$ f es CÓNCAVA (−) en un entorno de x_0 y tiene un MÁXIMO LOCAL en x_0

• Si $p = \text{IMPAR}$: $f(x) \simeq f(x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p$



Función estrictamente creciente en un entorno de x_0.

Función estrictamente decreciente en un entorno de x_0

En ambos casos, x_0 es un PUNTO de INFLEXIÓN, es decir, la función es convexa a un lado de x_0 y cóncava al otro lado.

Observación: Independientemente del valor de $f'(x_0)$, si f tiene un desarrollo de Taylor de la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p) \quad \text{con} \quad \underset{(p>1)}{f^{(p)}(x_0) \neq 0}$$

podemos concluir que:

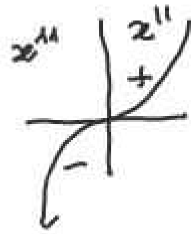
- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) > 0$:
  $\Rightarrow f$ es CONVEXA (+) en un entorno de x_0
- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) < 0$:
  $\Rightarrow f$ es CONCAVA (−) en un entorno de x_0
- Si $p = \text{IMPAR}$:
  $\Rightarrow f$ tiene un punto de INFLEXIÓN en x_0

EJEMPLOS:

- Comportamiento de $f(x) = x^7 \operatorname{sen}^4 x$ cerca de $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^7 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^4 = x^{11} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^4$$

$$= x^{11} + o(x^{12})$$



$\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en un entorno de $x_0 = 0$

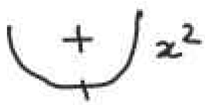
$\Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $x_0 = 0$

- Comportamiento de $f(x) = \cos^3 x \cdot \log^2(1+x)$ cerca de $x_0 = 0$:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 \cdot \left(x + o(x) \right)^2 =$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow$ f tiene un mínimo local en $x_0 = 0$



$\Rightarrow$ f es convexa en un entorno del 0.

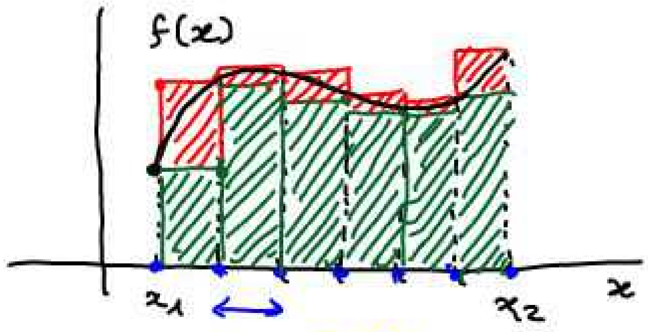
Parte IX

Tema 10. Teoremas fundamental del Calculo

INTEGRACIÓN en $\mathbb{R}$

Ingredientes:

- $[x_1, x_2]$: intervalo cerrado y acotado
  $0 \leq x_2 - x_1 < \infty$
- $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$: función acotada
  $m \leq f(x) \leq M, \ \forall x.$
- $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$: dividimos el intervalo $[x_1, x_2]$ en n intervalos de igual longitud:
  $$\Delta_n = \frac{x_2 - x_1}{n}$$
  (definición simplificada)



Definimos:
$$m_k(n) = \inf \{ f(x) : x_1 + (k-1)\Delta_n \leq x \leq x_1 + k\Delta_n \}$$
$$M_k(n) = \sup \{ f(x) : x_1 + (k-1)\Delta_k \leq x \leq x_1 + k\Delta_n \}$$

Suma interior:
$$I_n(f, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{n} m_k(n) \cdot \Delta_n$$

Suma superior:
$$S_n(f, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{n} M_k(n) \cdot \Delta_n$$

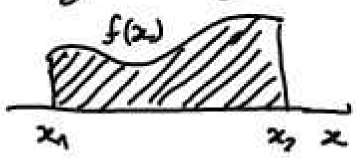
DEFINICIÓN: Diremos que f es INTEGRABLE en $[x_1, x_2]$ si
$$\exists \lim_{n \to \infty} I_n(f, x_1, x_2) = \lim_{n \to \infty} S_n(f, x_1, x_2).$$

Si f es integrable en $[x_1, x_2]$, el símbolo $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ denotará
$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\underbrace{dt}_{\text{"variable muda"}} := \lim_{n \to \infty} I_n(f, x_1, x_2) = \lim_{n \to \infty} S_n(f, x_1, x_2)$$
y se denomina INTEGRAL de f en $[x_1, x_2]$.

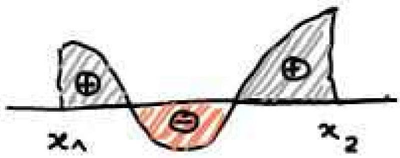
OBSERVACIONES:

- Si $f \geq 0$ el significado geométrico de $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ es claro:

  $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$: área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$

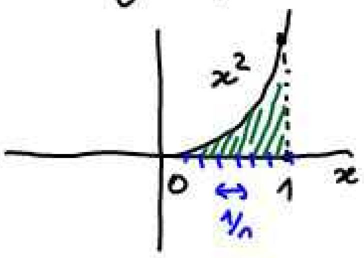


- En general, $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ representa la DIFERENCIA de las áreas qe qeden por encima y las qe qeden por debajo del eje x



- El cálculo de $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ usando la definición es difícil:

Por ejemplo, consideremos $f(x) = x^2$; $[x_1, x_2] = [0,1]$



En este caso:

$$m_k(n) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \quad ; \quad M_k(n) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

por tanto:

$$I_n(f; 0,1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

$$S_n(f; 0,1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

[Resultado conocido: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$]

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \\ S_n &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \text{ } f(x) = x^2 \text{ integrable en } [0,1]$$

Por tanto: $\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$ ■

Usando la definición de integral es posible demostrar las siguientes propiedades:

TEOREMA: Sean $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones integrables en $[x_1, x_2]$. Entonces:

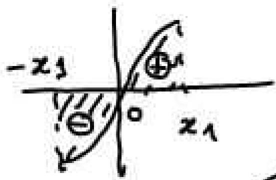
- $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ es integrable en $[x_1, x_2]$ y se cumple que:
$$\int_{x_1}^{x_2} \left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) dt = c_1 \int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt + c_2 \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt$$

- Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$:
$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt \leq \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt$$

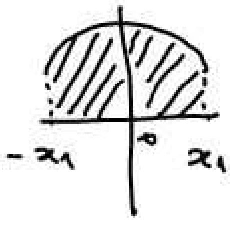
- Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [x_1, x_2]$:
$$m(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \leq M \cdot (x_2 - x_1)$$

- $|f(x)|$ es integrable en $[x_1, x_2]$ y se cumple que:
$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt$$

- Si f es IMPAR: $\displaystyle\int_{-x_1}^{x_1} f(t)\,dt = 0$



- Si f es PAR: $\displaystyle\int_{-x_1}^{x_1} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x_1} f(t)\,dt$

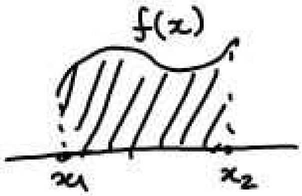


- $\displaystyle\int_{x_1}^{x_1} f(t)\,dt = 0$

Ejemplo:
$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} t\,dt = 0$$
$$\int_{-1}^{1} t^2\,dt = 2\int_{0}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}$$

Los siguientes teoremas nos garantizan que, en la práctica, casi nunca nos encontraremos con funciones <u>no</u> integrables:

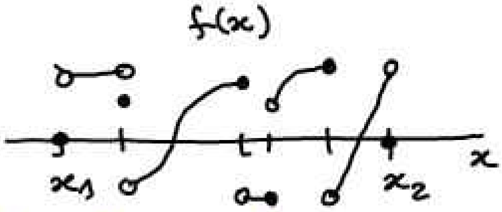
TEOREMA: Si f es continua en $[x_1, x_2]$ entonces:
f es integrable en $[x_1, x_2]$



$$\exists \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

TEOREMA: Si f es acotada y <u>continua a trozos</u> en $[x_1, x_2]$:

$\Rightarrow$ f es integrable en $[x_1, x_2]$

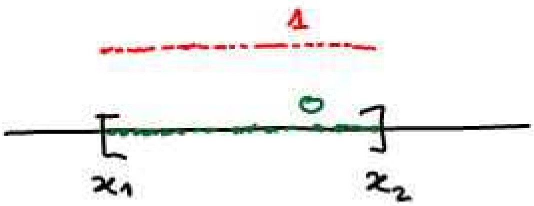


$$\exists \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

(continua salvo en un conjunto finito de puntos)

Ejemplo de función <u>no</u> integrable en $[x_1, x_2]$: $(x_1 < x_2)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$S_n = 1 \quad \forall n$

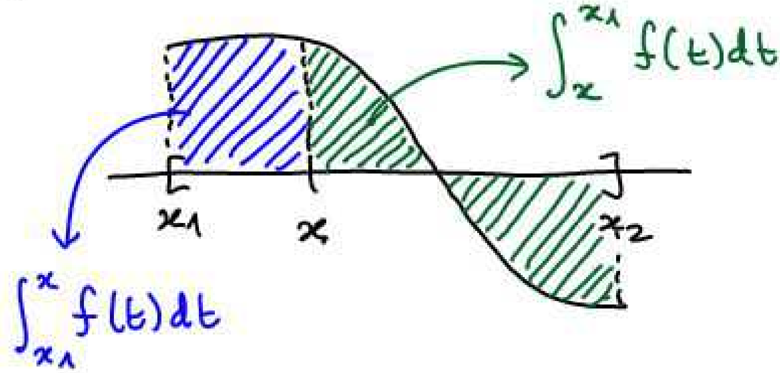
$I_n = 0 \quad \forall n$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f, x_1, x_2) = 1 \neq 0 = \lim_{n \to \infty} I_n(f, x_1, x_2)$$

Usando la definición, también es posible demostrar el siguiente resultado que usaremos frecuentemente:

TEOREMA: Sea f integrable en $[x_1, x_2]$ y sea $x \in [x_1, x_2]$. Entonces f es integrable en $[x_1, x]$ y en $[x, x_2]$ y se cumple que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x_2} f(t)\,dt$$



Ejemplo:

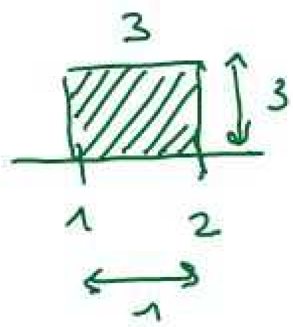
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 ; & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

continua a trozos $\Rightarrow$ integrable

$$\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{2} f(t)\,dt =$$

$$= \underset{\text{impar}}{\overset{0}{\cancel{\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} t\,dt}}} + \int_{1}^{2} 3\,dt =$$

$$= 3 \cdot (2-1) = 3$$

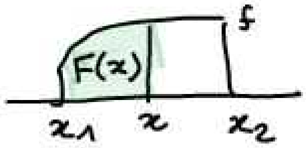


TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO (TFC)

Los siguientes teoremas nos permitirán calcular integrales sin necesidad de recurrir a la definición:

Primer TFC:
- Sea f INTEGRABLE en $[x_1, x_2]$. Entonces, la función

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt \; ; \quad x \in [x_1, x_2]$$



es una función CONTINUA en $[x_1, x_2]$.

- Si f es CONTINUA en $[x_1, x_2]$, entonces la función $F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ es CONTINUA en $[x_1, x_2]$, DERIVABLE en (x_1, x_2)

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: La integral tiene un "EFECTO REGULARIZADOR":

$f(x)$ integrable $\Longrightarrow$ $F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ continua

$f(x)$ continua $\Longrightarrow$ $F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ derivable, $F'(x) = f(x)$

Segundo TFC: Si f es integrable en $[x_1, x_2]$ y existe una función derivable g tal que $f(x) = g'(x)$ $\forall x \in [x_1, x_2]$ se tiene que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} g'(t)\,dt = g(x_2) - g(x_1)$$

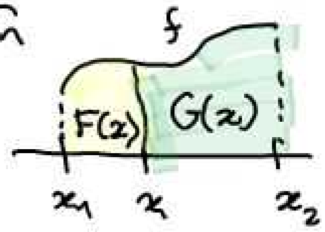
Definición (PRIMITIVA) Diremos que una función g es UNA PRIMITIVA de una función f en el intervalo (x_1, x_2) si
$$g'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: El primer TFC nos garantiza que si f es continua en $[x_1, x_2]$ la función:
$$F(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$$
es una PRIMITIVA de f en (x_1, x_2), es decir:
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: El segundo TFC nos permitirá calcular un buen número de integrales. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ cumplen:
$$f(x) = g'(x) \quad \forall x$$

Por tanto:
$$\int_{x_1}^{x_2} t^2\,dt = \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1^2$$
En particular:
$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$ (como ya sabíamos pero con menos sufrimiento)

Obs: Si f es continua, la función



$$G(x) = \int_x^{x_2} f(t)\,dt$$

cumple

$$G'(x) = -f(x)$$

La razón es evidente:

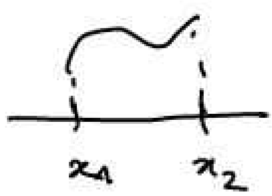
$$F(x) + G(x) = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt}_{\text{independiente de } x}$$

$$\xRightarrow[\text{derivando}]{} \quad F'(x) + G'(x) = 0$$

$$f(x) + G'(x) = 0 \Rightarrow G'(x) = -f(x) \quad \blacksquare$$

Notación: Para tener en cuenta dicho signo menos, si $x_1 \leq x_2$ definimos:

$$\int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt := -\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$



De esta manera, independientemente de si x es mayor o menor que x_1, la función

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} t^2\,dt$$

cumple $F'(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.