TRANSFORMACIONES (aplicaciones) LINEALES

1. Definiciones. Ejemplos.

Definición.- *"Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo conmutativo K, se llama transformación lineal de E en F, toda aplicación T que verifica las dos condiciones siguientes:*

(1) $\forall\ x, y \in E, T(x+y) = T(x) + T(y)$

(2) $\forall\ x \in E, \forall\ \alpha \in K, T(\alpha x) = \alpha T(x)$

2. Propiedades fundamentales de las transformaciones lineales.

Teorema 1.- *"Sea T una transformación lineal de E y F; se verifica:*

a) La imagen del vector nulo de E es el vector nulo de F: $T(o_E) = o_F$.

b) $\forall\ x \in E,\ T(-x) = -T(x)$

c) $\forall\ x, y \in E, T(x-y) = T(x) - T(y)$"

Teorema 2.- *"Para que una transformación T entre espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo conmutativo K sea lineal, es necesario y suficiente que:*

$$\forall\ x, y \in E, \quad \forall\ \alpha, \beta \in K; T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Definición y teorema 3.- *"Sea T una transformación lineal de E en F, y A un subconjunto de E entre espacios y B un subconjunto de F, se llama* ***conjunto imagen de A por T*** *y se escribe T(A) el subconjunto de F que está descrito por T(x) cuando x describe A:*

$$T(A)=\{T(x):x\in A\}\ .$$

Se llama ***imagen recíproca de B por T,*** *y se escribe* $T^{-1}(B)$ *al subconjunto de E definido por:*

$$T^{-1}(B)=\{x\in E:T(x)\in B\}.$$

a) Si A es un s.e.v. de E, T(A) es un s.e.v. de F.

b) Si B es un s.e.v. de F, $T^{-1}(B)$ *es un s.e.v. de E"* .

3. Núcleo e imagen de una transformación lineal

Definición .- *"Sea T una transformación lineal de E en F, se define* ***núcleo de la transformación T*** *y se le representa por KerT, al subespacio:*

$$\{x\in E\ /\ T(x)=0\in F\}=T^{-1}(0).$$

Se define ***imagen de la la transformación lineal T*** *y se representa por ImT, al subespacio:*

$$\{x'\in F\ /\ \exists\ x\in E, T(x)=x'\}=T(E)$$

Corolario .- *"Si T es transformación lineal de E en F:*

1. T es inyectiva $\Leftrightarrow$ *KerT = {0}*

2. T es suprayectiva $\Leftrightarrow$ *ImT = F"*

4. Imágenes de partes de E

Teorema 4.- *"Si T es una transformación lineal de E en F, si G es un sistema generador de E, entonces T(G) es sistema generador de ImT"*

5. Rango de una transformación lineal

Teorema 5 y definición.- *"Si T es una transformación lineal de E en F de dimensiones finitas sobre K, ImT es de dimensión finita sobre K y:*

$$\dim_K \operatorname{Im} T \leq \dim_K E \,.$$

La dimensión de ImT es el rango de la transformación T, se representa por rg(T), y además:

$$rg(T)=dim_K E - dim_K KerT$$

ó bien

$$dim_K E = dim_K KerT + dim_K ImT"$$

6. Matriz asociada a una transformación lineal

Lema y definición.- *"Si T es una transformación lineal de E en F de dimensiones finitas, n y m, sobre . Sean* $B_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $B_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *bases, respectivamente, de E y F, entonces la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right);\ i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$$

$$A = M\left(T\right)_{B_m \leftarrow B_n} = \left[\left[T\left(v_1\right)\right]_{B_m}, \ldots, \left[T\left(v_n\right)\right]_{B_m}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

O bien, de otra manera escrito:

$$\left[T\left(v_1\right) \quad \cdots \quad T\left(v_n\right)\right] = \left[u_1 \quad \cdots \quad u_m\right]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Verifica que: $\left[T(x)\right]_{B_m} = A[x]_{B_n} \quad \forall x \in E$ *. Puesto que si* *:* $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = \left[v_1 \quad \cdots \quad v_n\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$ *entonces, se verificará:*

Por una parte: $[y]_{B_m} = \left[T(x)\right]_{B_m} = \left[T\left(v_1\right) \quad \cdots \quad T\left(v_n\right)\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = \left[u_1 \quad \cdots \quad u_m\right]A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$.

Por otra: $[y]_{B_m} = \left[u_1 \quad \cdots \quad u_m\right]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m\end{bmatrix}$. Identificando igualdades se obtiene esa identidad.

Corolario.- Casos especiales

- *Dimensiones de espacios de salida y llegada iguales.* $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $M(T)_{B_n} \equiv M(T)_{B_n \leftarrow B_n}$
- *Matriz canónica o estándar: Las dos bases son las canónicas, entonces se verifica* $T(x) = Ax$
- *La aplicación identidad* $id: E \to E$ *entre el mismo espacio vectorial es una transformación lineal. La matriz asociada cuando las base de los espacios de partida y llegada coinciden es la matriz unidad de orden la dimensión de E. Si las bases no*

coinciden, la matriz se denomina MATRIZ CAMBIO DE BASE: $P_{B_2\leftarrow B_1} = M(id)_{B_2\leftarrow B_1}$

Ejemplo 1: Dada la transformación lineal definida como:

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & x_2 & x_1 + x_2\end{bmatrix}^T.$$

Calcular la matriz asociada respecto de las bases $B_2 = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ y $B_3 = \left\{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$

$$\begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

respecto de la base canónica del espacio de llegada. Ahora:

$$\begin{bmatrix} M_{B_3^c\leftarrow B_3} \vdots T(v_1) & T(v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} I_3 \vdots \begin{bmatrix} T(v_1)\end{bmatrix}_{B_3}, \begin{bmatrix} T(v_1)\end{bmatrix}_{B_3}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_3 \vdots M(T)_{B_3\leftarrow B_2}\end{bmatrix}$$

Así pues, la matriz pedida es

$$A = M(T)_{B_3\leftarrow B_2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Ejemplo 2: En el espacio vectorial $P_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 con indeterminada x $(\dim P_2[x] = 3)$, con bases $B_1 = \{1, x, x^2\}$ canónica, y $B_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$, la pregunta es: "Hállense las coordenadas de un vector (polinomio) $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ respecto de la segunda base hallando la matriz del cambio"

$$id: P_2[x]\to P_2[x];\quad \left[id(p)\right]_{B_1}=\left[id\left(\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2\end{bmatrix}^T\right)\right]_{B_1}=\left[\begin{bmatrix}a_0' & a_1' & a_2'\end{bmatrix}^T\right]_{B_2}=[p]_{B_2}$$

.

Si la base del espacio de llegada es la base estándar, el problema es directo. Puesto que: $[1+x]_{B_1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$; $\left[x+x^2\right]_{B_1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$; $\left[1+x^2\right]_{B_1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$; se obtiene directamente

$$P_{B_1\leftarrow B_2}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Ahora, la matriz pedida, que es $P_{B_2\leftarrow B_1}$ será la inversa de la calculada:

$$\left[P_{B_1\leftarrow B_2}\ \vdots\ I_3\right]\equiv\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\equiv\left[I_3\ \vdots\ P_{B_2\leftarrow B_1}\right]$$

Luego la matriz del cambio es $P_{B_2\leftarrow B_1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

Ahora, si $p(x) = 1 + 2x - x^2$, las coordenadas de p respecto de la base B_2, serán:

$$\left[p(x)\right]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \left[p(x)\right]_{B_2} = P_{B_2 \leftarrow B_1} \cdot \left[p(x)\right]_{B_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7. Espacios nulos, espacios columna de una matriz

Definición 1 (Espacio nulo y Nulidad).- *"Si A es una matriz de $K^{m\ x\ n}$, asociada a una transformación lineal T de E en F de dimensiones finitas, n y m, sobre K . Se define* ***espacio nulo de A*** *como:*

$$NulA = KerA = \left\{Soluciones\ de\ Ax = 0\right\} = KerT$$

y ***nulidad de A*** *a* $\dim NulA$ *"*

Definición 2 y teorema (Espacio columna).- *"Si A es una matriz de $K^{m\ x\ n}$, asociada a una transformación lineal T de E en F de dimensiones finitas, n y m, sobre K . Se define:*
$ColA = Gen\left\{a_1, \ldots, a_n\right\} = \operatorname{Im} T$ *s.e.v. de F. Luego se verifica:*

- *dim ColA = rg(T) = rg(A)*
- *dim ColA = dim K^n – dim Nul A*
- $n = rg(A) + \dim NulA$ *"*

Definición 3 (Espacio fila).- *"Si A es una matriz de $K^{m\ x\ n}$, asociada a una transformación lineal T de E en F de dimensiones finitas, n y m, sobre K . Se define:* $FilA = ColA^T$ *s.e.v. de K^m"*

OBERVACIONES:

- Si $A \sim B$,entonces, evidentemente, $FilA = FilB$
- No hay una relación simple entre $FilA = NulA$, aunque son ambos s.e.v. de E.
- $rg\left(A^T\right) = \dim ColA^T = \dim FilA$ y $m = rg\left(A^T\right) + \dim NulA^T$

EJEMPLO: Cálculo de bases del núcleo (espacio nulo), espacio columna y espacio fila de una matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tengamos en cuenta que:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$ColA = Gen\{c_1, c_2, c_4\}$, $FilA = Gen\{f_1, f_2, f_3\}$ $rg(A) = rg\left(A^T\right) = 3$

En cuanto al núcleo, el sistema homogéneo equivalente es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_5 \\ 2x_3 - 3x_5 \\ x_3 \\ 5x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2$$
, luego:

$NulA = Gen\{u_1, u_2\}$ con dimensión 2.