Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

Leganés: 21 enero 2019

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (1 punto) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y' - 6y = 5xe^{-2x}; \qquad \underline{y(0) = 2,} \quad y'(0) = 1.$$

$\sim y_p(x) = (Ax+B)e^{-2x}$

Como aparece Axe^{-2x} $5xe^{-2x}$ se multiplica por x

$y_p(x) = (Ax^2+Bx)e^{-2x}$

$y_p'(x) = (2Ax+B-2Ax^2-2Bx)e^{-2x}$

$y_p''(x) = \sim$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$

$y_h(x) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$

Solución:
Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - y' - 6y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - r - 6 = 0$, tiene por soluciones, $r = -2, r = 3$, que son dos raíces reales distintas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{-2x}, e^{3x}\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} \, ,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(t)$:
Podemos seguir dos procedimientos: el método de variación de los parámetros o el de coeficientes indeterminados.
Dada la forma de la función $g(x) = 5xe^{-2x}$, vamos a aplicar el segundo método.
Proponemos una solución particular de la forma $y_p(x) = x(Ax+B)e^{-2x} = (Ax^2+Bx)e^{-2x}$, dado que la función e^{-2x} forma parte del conjunto fundamental de soluciones $\mathcal{B}$, siendo A y B dos coeficientes que debemos determinar.
Imponiendo que $y_p(x)$ es solución de la ecuación diferencial no homogénea se obtiene que:

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = (-10Ax + 2A - 5B)e^{-2x} \equiv 5xe^{-2x}$$

Identificando términos se tiene $A = -\frac{1}{2}\, , B = -\frac{1}{5}$ por tanto $y_p(x) = -(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{5})e^{-2x}$.
NOTA: En este problema, también podemos hallar una solución particular usando el método de variación de los parámetros pero en el proceso final hay que resolver dos integrales.

Finalmente la solución general es:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} - (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{5})e^{-2x}$$

Cuestión 1 (1 punto) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y' - 6y = 5xe^{-2x}; \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0 \;; \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \not\exists \text{ Raiz red.}$$

$$\mathcal{B} = \{ e^{3x}, e^{-2x} \} \quad y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} / A, B \in \mathbb{R}$$

$$y_p = [(Cx + D)e^{-2x}]x \qquad e^{-2x} \text{ aparece en } \mathcal{B} \text{ y se llega con } De^{-2x}$$

$$y_p' = (2Cx + D - 2Cx^2 - 2Dx)e^{-2x}$$

$$y_p'' = (2C - 4Cx - 2D - 4Cx - 2D + 4Cx^2 + 4Dx)e^{-2x}$$

$$e^{-2x}(\cancel{2C} - \cancel{4Cx} - \cancel{2D} - \cancel{4Cx} - \cancel{2D} + \cancel{4Cx^2} + \cancel{4Dx} - \cancel{2Cx} - \cancel{D} + \cancel{2Cx^2} + \cancel{2Dx}$$
$$- \cancel{6Cx^2} - \cancel{6Dx}) = 5x\,e^{-2x}$$

$$\cancel{e^{-2x}}(2C - 10Cx - 5D) = 5x\cancel{e^{-2x}} \;; \quad -10C = 5 \;; \quad C = -1/2$$

$$2C - 5D = 0 \;; \quad D = \frac{-2\cdot 1/2}{5} = -1/5$$

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} - 1/2\, x^2 e^{-2x} - 1/5\, x\, e^{-2x}$$

$$y(0) = 2 = A + B - 0 - 0 \;; \qquad A + B = 2$$

$$y'(x) = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x} - 1/2 \cdot 2xe^{-2x} + 1/2\, x^2 \cdot 2e^{-2x} + 1/5 \cdot 2xe^{-2x} - 1/5\, e^{-2x}$$

$$y(0) = 1 = 3A - 2B - 0 + 0 + 0 - 1/5 \;; \quad 3A - 2B = 6/5$$

$$A = 2 - B \;; \qquad 6 - 3B - 2B = 6/5 \;; \quad B = \frac{6/5 - 6}{-5} = 24/25 \;; A = 2 - \frac{24}{25} = \frac{26}{25}$$

$$\boxed{\text{Sol. PVI}: \; y(x) = \frac{26}{25}e^{3x} + \frac{24}{25}e^{-2x} - 1/2\, x^2 \cdot e^{-2x} - 1/5\, x\, e^{-2x}}$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales $y(0) = 2, y'(0) = 1$, se obtiene $c_1 = \dfrac{24}{25}, c_2 = \dfrac{26}{25}$
Por tanto la solución de problema de valor inicial pedida es:

$$\boxed{y(x) = \frac{24}{25}e^{-2x} + \frac{26}{25}e^{3x} - (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{5})e^{-2x}}$$

Cuestión 2 (1 punto) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$ la transformada de Laplace de la solución del problema.
Aplicando la transformada a la ecuación diferencial y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se tiene

$$(s^2 - 6s + 8)\, Y(s) \;=\; \frac{s^2 - 6s + 11}{s - 2}\,,$$

por tanto,

$$Y(s) \;=\; \frac{s^2 - 6s + 11}{(s-2)^2(s-4)} \;=\; \frac{A}{(s-2)^2} \;+\; \frac{B}{s-2} \;+\; \frac{C}{s-4}\,,$$

donde hemos usado que $s^2 - 6s + 8 \;=\; (s-2)(s-4)$.
Los coeficientes se calculan por idientificación y se obtiene: $A = -3/2$, $B = 1/4$ y $C = 3/4$.
Finalmente, aplicando la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$y(x) \;= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) \;=\; -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} \;+\; \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \;+\; \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}\,,$$

por tanto

$$\boxed{y(x) \;=\; -\frac{3}{2}\,xe^{2x} + \frac{1}{4}\,e^{2x} + \frac{3}{4}\,e^{4x}}$$

Cuestión 2 (1 punto) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 8F(s) = 3\mathcal{L}\{e^{2x}\}$$

$$\underbrace{s^2F(s)} - s\,\overset{-s}{\cancel{y(0)}} - \overset{2}{\cancel{y'(0)}} \underbrace{- 6sF(s)} + \overset{6}{\cancel{6y(0)}} \underbrace{+ 8F(s)} = \frac{3}{s-2}$$

$$(s^2 - 6s + 8)F(s) - s + 4 = \frac{3}{s-2}; \quad (s^2 - 6s + 8)F(s) = \frac{3 + s^2 - 2s - 4s + 8}{s-2}$$

$$F(s) = \frac{s^2 - 6s + 11}{(s-2)(s^2 - 6s + 8)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

$s = 2$

$$s = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \begin{cases} 4 & s = 4 \\ 2 & s = 2 \end{cases}$$

Raices reales y 2 doble

$$s^2 - 6s + 11 = A(s-2)^2 + B(s-4)(s-2) + C(s-4)$$

$s = 2 \quad 4 - 12 + 11 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-2); \quad C = -3/2$

$s = 4 \quad 16 - 24 + 11 = A(2)^2 + B \cdot 0 + C \cdot 0; \quad A = 3/4$

$s = 0 \quad 11 = 4A + B(+8) - 4C; \quad B = \dfrac{11 - 12/4 - 12/2}{8} = 1/4$

$$F(s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

$a = 2$, $n + 1 = 2$, $n = 1$

$$y(x) = 3/4 \cdot e^{4x} + 1/4\, e^{2x} - 3/2 \cdot x e^{2x}$$

Cuestión 3 (1 punto) :

Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Hallar la solución general.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (1,\ -1)^T$.

SOLUTION

a) Para resolver el sistema, calculamos los autovalores de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},$$

que son $\lambda_1 = 3 + i2$ y $\lambda_2 = 3 - i2$ (complejos conjugados).
Un vector propio asociado a λ_1 es

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i2 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora la solución compleja

$$\overrightarrow{W}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{V}_1 = e^{3+i2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i2 \end{pmatrix},$$

Descomponiendo $\overrightarrow{W}(t)$ en la forma $\overrightarrow{W}(t) = \mathrm{Re}(\overrightarrow{W}(t)) + i\,\mathrm{Im}(\overrightarrow{W}(t)) = \mathcal{U}(t) + i\mathcal{V}(t)$, donde

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}(2\sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\sin(2t) \\ -e^{3t}(\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución general del sistema se puede expresar como

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1\,\mathcal{U}(t) + c_2\,\mathcal{V}(t)\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales arbitrarias.

b) Calculamos las constantes del apartado anterior imponiendo la condición inicial

$$\overrightarrow{X}(0) = c_1\,\mathcal{U}(0) + c_2\,\mathcal{V}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

obteniendo $c_1 = 1, c_2 = 0$. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}(2\sin(2t) - \cos(2t)) \end{pmatrix}}$$

Cuestión 3 (1 punto) :

Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Hallar la solución general.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (1, \ -1)^T$.

a) Hallamos los autovalores:

$$|A-\lambda I| = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 6\lambda + 13$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1} = 3 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = 3 \pm i\,2$$ Raices complejas conjugadas.

Hallamos el autovector asociado:

$$(A-\lambda I)\vec{V} = \vec{0} \ ; \ \begin{pmatrix} 2-3-i2 & -1 \\ 5 & 4-3-i2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-1-i2)x - y = 0 \ ; \ y = (-1-i2)x \ ; \ \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = e^{(3+i2)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i2 \end{pmatrix} = u(t) + i\,v(t)$$

$$\begin{pmatrix} e^{(3+i2)t} \\ e^{(3+i2)t}(-1-i2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) + ie^{3t}\operatorname{sen}(2t) \\ -e^{3t}\cdot e^{i2t} - i2e^{3t}\cdot e^{i2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) + ie^{3t}\operatorname{sen}(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) - ie^{3t}\operatorname{sen}(2t) - i2e^{3t}\cos(2t) + 2e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) + 2e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \\ -e^{3t}\operatorname{sen}(2t) - 2e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Sol. General: } \vec{X}(t) = C_1\begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) + 2e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \\ -e^{3t}\operatorname{sen}(2t) - 2e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}}$$

b) $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1 \begin{pmatrix} \cos(0) \\ -\cos(0) + \cancel{2\,\text{sen}(0)}^{\,0} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cancel{\text{sen}(0)}^{\,0} \\ -\cancel{\text{sen}(0)}^{\,0} - 2\cos(0) \end{pmatrix}$$

$1 = C_1 \; ; \; C_1 = 1$

$-1 = -C_1 + C_2(-2) \; ; \; C_2 = \dfrac{-1+1}{-2} = 0$

$$\boxed{\text{Sol. PVI: } \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) + 2e^{3t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix}}$$

Cuestión 4 (2.0 puntos) :

Dado el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 16\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ , \qquad 0 < x < \frac{\pi}{4}\ , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{4},t) = 0\ , \qquad t > 0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x) \not\equiv 0 \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \qquad \text{(condición inicial)}$$

Se pide:

a) Se sabe que solamente una de las dos siguientes series es la solución formal del problema dado. Explicar, razonadamente, cuál de ellas es dicha solución.

$$\text{(Serie 1)} \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(4nx)\,; \quad b_n \in \mathbb{R}\,.$$

$$\text{(Serie 2)} \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(4nx)\,; \quad a_n \in \mathbb{R}\,.$$

b) Sabiendo que $f(x) = 1 + 3\cos(8x) - 2\cos(12x)$, hallar el valor de $u(\frac{\pi}{8}, 1)$

SOLUCIÓN

a) En este apartado podemos seguir dos razonamientos principalmente:
Razonamiento 1: Aplicamos separación de variables al problema propuesto y demostramos que la solución es la dada por la (Serie 2).
Razonamiento 2: Si probamos que la (Serie 1) no satisface al menos una de las condiciones de contorno del problema, entonces, dado que nos aseguran que solamente una de las dos series es la solución formal, concluiremos que dicha solución es la (Serie 2).
En efecto, asumiendo en la (Serie 1) que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4nb_n e^{-n^2 t}\cos(4nx) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4nb_n e^{-n^2 t}\,.$$

Para que se cumpla la condición de frontera $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, para todo $t > 0$ es necesario que $\sum_{n=1}^{+\infty} 4nb_n e^{-n^2 t} = 0$, para todo $t > 0$, y esto implica que los coeficientes $b_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$ y por tanto $u(x,t)$ es la función idénticamente nula. Pero esto es una contradicción ya que la condición inicial asegura que $u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$ y por tanto u no puede ser idénticamente nula. Por tanto la (Serie 1) no es solución del problema y debe serlo la (Serie 2).

Cuestión 4 (2.0 puntos) :

Dado el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 16\frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{4},t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x) \not\equiv 0 \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \quad \text{(condición inicial)}$$

Se pide:

a) Se sabe que solamente una de las dos siguientes series es la solución formal del problema dado. Explicar, razonadamente, cuál de ellas es dicha solución.

$$\text{(Serie 1)} \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(4nx); \quad b_n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(Serie 2)} \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2 t}\cos(4nx); \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

b) Sabiendo que $f(x) = 1 + 3\cos(8x) - 2\cos(12x)$, hallar el valor de $u(\frac{\pi}{8}, 1)$

Se podría hacer directo con las cond. de contorno, pero para practicar.

a) Proponemos el cambio de la func. incognita $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(X(x)T(t))\right) = \frac{d}{dx}\left(X'(x)T(t)\right) = X''(x)T(t)$$

$$16\frac{d u(x,t)}{dt} = 16\frac{d}{dt}(X(x)T(t)) = 16\, X(x)T'(t)$$

$16\,X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$ Para simplificar dividimos entre: $X(x)T(t)16$

$$\frac{\cancel{16 X(x)}T'(t)}{\cancel{16 X(x)}T(t)} = -\lambda \quad \frac{X''(x)\cancel{T(t)}}{16\,X(x)\cancel{T(t)}}\ ; \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{16\,X(x)}$$

Ponemos $-\lambda$ ya que al ser dos funciones que dependen de variables independientes entre ellas es la manera de relacionarlas con una constante y por convenio es $-\lambda$.

P1) $T'(t) + \lambda T(t) = 0$ EDO 1er orden lineal

P2) $X''(x) + 16\lambda X(x) = 0$ EDO 2° orden lineal, homogenea, coef. ctes

P1) $T'(t)+\lambda T(t)=0$

$$\mu(x)=e^{\int \lambda dt}=e^{\lambda t} \; ; \quad e^{\lambda t}T'(t)+\lambda e^{\lambda t}T(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}T(t)\right)=0 \; ; \quad e^{\lambda t}T(t)=C \; ; \quad T(t)=Ce^{-\lambda t} \quad / C\in\mathbb{R} \text{ cte}$$

P2) $X''(x)+16\lambda X(x)=0 \; ; \; \lambda>0 \; ; \; \lambda=a^2 \; ; \; a>0$

$$\frac{d}{dx}u(0,t)=\frac{d}{dx}\left(X(0)T(t)\right)=X'(0)T(t)=0 \Rightarrow X'(0)=0$$

$$\frac{d}{dx}u\left(\frac{\pi}{4},t\right)=\frac{d}{dx}\left(X\left(\frac{\pi}{4}\right)T(t)\right)=X'\left(\frac{\pi}{4}\right)T(t)=0 \Rightarrow X'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$r^2+16a^2=0 \; ; \quad r=\pm\sqrt{-16a^2}=\pm i4a \quad \mathcal{B}=\{\operatorname{sen}(4ax),\cos(4ax)\}$$

$$X(x)=C_1\operatorname{sen}(4ax)+C_2\cos(4ax) \quad / C_1,C_2\in\mathbb{R} \text{ ctes.}$$

$$X'(x)=4aC_1\cos(4ax)-4aC_2\operatorname{sen}(4ax)$$

$$X'(0)=0=4aC_1 \; ; \quad C_1=0$$

$$X'(\pi/4)=0=\underset{\substack{\neq\\0}}{-4}\,\underset{\substack{\neq\\0\\a>0}}{a}\,\underset{\substack{\neq\\0}}{C_2}\,\underset{\substack{\|\\0}}{\operatorname{sen}\left(\cancel{4}a\frac{\pi}{\cancel{4}}\right)} \; ; \quad \operatorname{sen}(a\pi)=0$$

$$a\pi=n\pi \; ; \quad n=1,2,3,\dots$$

$$a=n \qquad a>0 \Rightarrow n>0$$

$$X_n(x)=C_n\cos(4nx)$$

$$\lambda_n=n^2$$

$$u_n(x,t)=C_n\cos(4nx)\cdot e^{-n^2t}C \qquad / C_n, C\in\mathbb{R} \text{ ctes } n=1,2,3,\dots$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-n^2t}\cos(4nx) \qquad \text{La Serie B)}$$

¿ es $n=0$? $a>0 \; ; a=n \Rightarrow n>0 \rightsquigarrow$ cuando se hace $\lambda=0$ se ve que es constante por eso el $n=0$

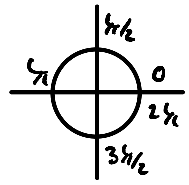
b) $$f(x)=1+3\cos(8x)-2\cos(12x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(4nx)$$

$$C_0+C_1\cos(4x)+C_2\cos(8x)+C_3\cos(12x)+C_4\cos(16x)$$

$C_0=1 \qquad C_1=0 \qquad C_2=3 \qquad C_3=-2 \qquad C_4=0 \qquad C_k=0$ para $k>4$

$$u(x,t) = 1 + 3e^{-2^2 t}\cos(8x) - 2e^{-3^2 t}\cos(12x)$$

$$u\left(\frac{\pi}{8}, 1\right) = 1 + 3e^{-2}\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - 2e^{-3}\underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=0}$$



$$\boxed{u\left(\frac{\pi}{8}, 1\right) = 1 - 3e^{-4}}$$

b) Nos piden calcular

$$u(\frac{\pi}{8},1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2} \cos(4n\frac{\pi}{8}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2} \cos(n\frac{\pi}{2})$$

Para ello, es necesario encontrar las constantes a_n. La forma más fácil consiste en aplicar la condición inicial:
$f(x) = 1+3\cos(8x)-2\cos(12x) = u(x,0) = a_0+a_1\cos(4x)+a_2\cos(8x)+a_3\cos(12x)+a_4\cos(16x)+\cdots$.
Identificando términos se tiene:
$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = -2$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 4$.
Obtenemos finalmente:

$$\boxed{u(\tfrac{\pi}{8},1) = 1-3e^{-4}}$$

Cuestión 5 (1 punto) :
Sea el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y + y' = 2\,t^2 \\ y(0) = 5\,, \end{cases}$$

cuya solución exacta viene dada por $y(t) = e^{-t} + 2\,t^2 - 4\,t + 4$.

(i) Usar el siguiente método

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\,(K_1 + K_2)\,, \quad \text{with } K_1 = f(t_n, Y_n)\,,\ K_2 = f(t_{n+1}, Y_n + K_1)\,,$$

con $n = 0,1,2,\ldots$, para aproximar el valor de $y(0.2)$ tomando $h = h_1 = 0.1$.

(ii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con $h = h_2 = 0.01$, estimar el orden del método numérico dado en el apartado (i).

SOLUCIÓN

(i) Podemos escribir la ecuación diferencial dada como $y' = f(t,y) = 2\,t^2 - y$.
Entonces, aplicando la fórmula del método numérico, con $h = h_1 = 0.1$, para $n = 0$ y $n = 1$ obtenemos por un lado $Y_1^{h_1} = 4.52600$ y por otro la aproximación pedida

$$y(0.2) \approx Y_2^{h_1} = 4.10093\,.$$

.

(ii) Usando la expresión de la solución exacta, calculamos$y(0.2) = 4.09873$. Además, se tiene que $E_{t=0.2}^{h_1} = \left|Y_2^{h_1} - y(0.2)\right| = 0.0022$ y $E_{t=0.2}^{h_2} = \left|Y_{20}^{h_2} - y(0.2)\right| = 0.00002$. Dado que $h_2 = h_1/10$, obtenemos

$$E_{t=0.2}^{h_2} \approx c\,h_2^p = c\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E_{t=0.2}^{h_1}}{10^p}\,,$$

donde p es el orden del método y $c \in \mathbb{R}$.
La expresión previa da $p \approx 2.04$. Por tanto, podemos concluir que el orden del esquema numérico dado es $p = 2$.