Tema 3

Espacios vectoriales

3.1. Definición y propiedades

En este capítulo presentamos la definición formal de *espacio vectorial*. Los espacios vectoriales más elementales son los conocidos espacios $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, que ilustran claramente el concepto. No obstante ya estamos familiarizados con otros conjuntos que, como veremos, también cumplen las condiciones que caracterizan a los espacios vectoriales.

Comenzamos considerando el plano $\mathbb{R}^2$. Un vector no nulo $v = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado geométricamente en el plano mediante un *segmento dirigido* que va de $(0, 0)^t$ a $(v_1, v_2)^t$.

Esta representación nos ayuda a visualizar cómo funciona la bien conocida operación de *suma o adición*:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix},$$

y la multiplicación por *escalares* (números reales, en este caso):

$$\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix}.$$

La figura 3.1 ilustra ambas operaciones.

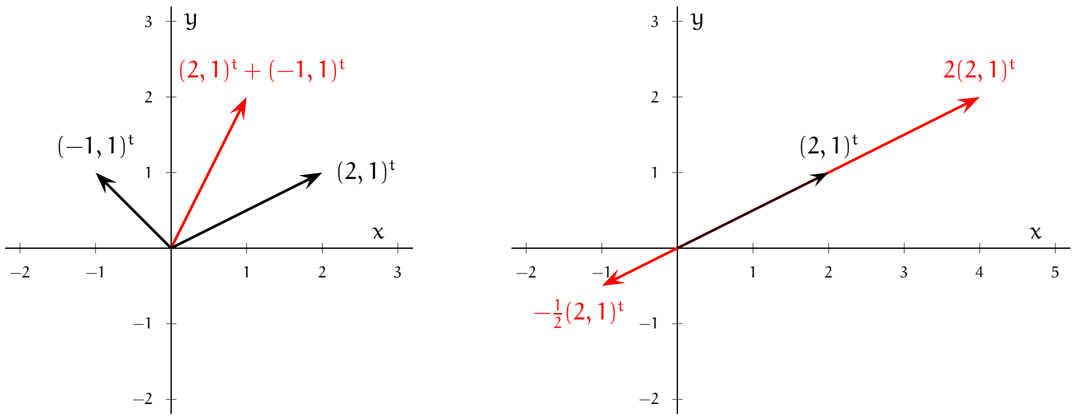

Figura 3.1: Suma de vectores y multiplicación por escalares.

En general, la suma y la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ se definen respectivamente mediante

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, \ldots, v_n)^t + (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)^t \\ \alpha \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t &= (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2, \ldots, \alpha \cdot v_n)^t\end{aligned}$$

donde el escalar α puede ser cualquier número real.

Comenzamos describiendo la *estructura* que poseen los escalares. Dicha estructura se denomina **cuerpo**.

Un **cuerpo** es un conjunto no vacío $\mathbb{K}$ en el que se definen dos operaciones: la *suma o adición*, denotada por $+$ y la *multiplicación o producto*, denotada por $\cdot$, y tales que, para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$, se verifican los siguientes axiomas:

- Grupo aditivo conmutativo
  - $a + b \in \mathbb{K}$, [clausura].
  - $a + b = b + a$, [conmutatividad].
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$, [asociatividad].

- $\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ tal que $a + 0 = a$, [elemento neutro].
- $\forall a\,,\ \exists(-a) \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = 0$, [elemento inverso].

- Grupo multiplicativo conmutativo
  - $a \cdot b \in \mathbb{K}$, [clausura].
  - $a \cdot b = b \cdot a$, [conmutatividad].
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, [asociatividad].
  - $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot 1 = a$, [elemento neutro].
  - $\forall a \neq 0\,,\ \exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot (a^{-1}) = 1$, [elemento inverso].
- Anillo
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, [distributiva].

Obsérvese que consideramos que los elementos neutros son distintos: $0 \neq 1$.

NOTA: Los elementos inversos respecto de la suma y el producto son únicos en un cuerpo; por ello, les denotamos por $-a$ y a^{-1} respectivamente.

Ejemplo

Si examinamos los distintos conjuntos de números, es trivial observar cuáles de las propiedades anteriores, de sobra conocidas, se verifican en cada uno de ellos:

- Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son cuerpos (ya que carecen de inversos multiplicativos).
- Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos.

NOTA: En lo que resta de curso, nos centraremos en el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ (salvo que se indique lo contrario).

Ejemplo

Sea el conjunto $A = \{0, 1\}$.

Vamos a $\boxed{\text{definir}}$ las siguientes operaciones entre los elementos del conjunto A.

1. **Suma**: $0 + 0 = 0;\ 0 + 1 = 1;\ 1 + 0 = 1$ y $1 + 1 = 0$.

   Es inmediato verificar que la operación así definida verifica las propiedades de grupo conmutativo. Por ejemplo:

   - Clausura: el resultado de sumar dos elementos cualesquiera de A es un elemento de A.
   - Conmutatividad: el único caso no trivial es $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.
   - Elemento neutro: obviamente, el elemento neutro es el 0.

2. **Producto**: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ y $1 \cdot 1 = 1$.

   De la misma manera, esta operación verifica las propiedades de grupo conmutativo. Veamos algunas:

   - Clausura: el resultado de multiplicar dos elementos cualesquiera de A es un elemento de A.
   - Conmutatividad: el único caso no trivial es $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$.
   - Elemento neutro: éste es el 1.

Puesto que además se cumple la propiedad distributiva, el conjunto A tiene estructura de cuerpo. Habitualmente se utiliza la notación $\mathbb{Z}_2$ para referirse al conjunto A. Intuitivamente, el elemento 0 representa a los enteros pares, mientras que el elemento 1 representa a los enteros impares, con lo que las definiciones dadas para la suma y el producto cobran sentido. Este ejemplo se generalizará en la asignatura de Matemática Discreta.

Una vez definida la estructura de cuerpo, pasamos a definir la estructura de *espacio vectorial*.

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, que denominaremos *conjunto de escalares*, consideremos un conjunto V no vacío en el que se definen las operaciones de suma y multiplicación por escalares. Si ambas operaciones satisfacen la propiedad de clausura, entonces diremos que el conjunto V con dichas operaciones es un **espacio vectorial** si se cumplen las siguientes propiedades para todo $u, v, w \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1. $u + v = v + u$, [conmutatividad de la suma].
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$, [asociatividad de la suma].
3. $\exists\, 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$, [elemento neutro para la suma].
4. $\exists\, (-u) \in V$ tal que $u + (-u) = 0$, [elemento inverso para la suma].
5. $\alpha\,(u + v) = \alpha\, u + \alpha\, v$, [distributiva respecto a la suma de vectores].
6. $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta\, u$, [distributiva respecto a la suma de escalares].
7. $(\alpha \cdot \beta)\, u = \alpha(\beta\, u)$, [asociatividad de la multiplicación por escalares].
8. $1 \cdot u = u$, [identidad].

Los elementos de un espacio vectorial V definido de la forma anterior se denominan **vectores**. Este término engloba mucho más que lo que hasta ahora hemos denominado vectores fila o columna, como un caso particular de matrices. Como veremos, los elementos de V pueden ser números, n-tuplas de números, matrices, polinomios, funciones, etc., ya que la definición de las operaciones de suma y multiplicación por escalares es lo que nos permitirá referirnos a ellos como “vectores”. En estas notas los vectores se denotarán por letras normales (p.e., a, v, etc.), aunque en otros libros se usan notaciones distintas (p.e., $\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$, etc.).

Ejemplo

Es inmediato verificar que $\mathbb{R}^2$, con la suma ordinaria y la multiplicación por los escalares de $\mathbb{R}$, es un espacio vectorial, ya que se verifican todas las propiedades de la definición anterior.

Ejemplo

Según vimos en el tema 1, el conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ de todas las matrices de dimensión $m\times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con la suma de matrices y la multiplicación por los escalares de $\mathbb{K}$, es un espacio vectorial.

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo escrito en forma matricial como $A\,x = b$, con A de dimensión $m \times n$ y elementos reales. Si el sistema es compatible, su conjunto de soluciones está formado por n-tuplas (de números reales). Podemos concluir que el conjunto de soluciones de dicho sistema de ecuaciones lineales homogéneo es un espacio vectorial sin más que tener en cuenta las siguientes dos observaciones:

- La suma y la multiplicación por escalares ($\mathbb{R}$) en $\mathbb{R}^n$ verifica los ocho axiomas de la definición de espacio vectorial.
- Como vimos en el tema 2, CUALQUIER COMBINACIÓN LINEAL DE DOS SOLUCIONES DE DICHO SISTEMA CON COEFICIENTES REALES ES TAMBIÉN SOLUCIÓN DEL SISTEMA [propiedades de clausura].

Ejemplo

Las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos $A\,v = b \neq 0$ **NO** forman un espacio vectorial, ya que no contienen el vector cero.

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{P}_n$ formado por todos los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que n

$$\mathbb{P}_n = \left\{ p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; p(x) = \sum_{a=0}^{n} \alpha_a\, x^a \,, \quad \alpha_a \in \mathbb{R} \right\}$$

es un espacio vectorial, pues la suma de polinomios y la multiplicación por escalares (reales) obviamente verifican todas las propiedades requeridas.

El siguiente teorema establece algunas propiedades fundamentales de los espacios vectoriales.

Teorema

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces para todo $u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se cumple que:

i) $0\,u = 0$.

ii) $\alpha\,0 = 0$.

iii) $u + v = 0$ implica que $v = -u$ (i.e., el inverso respecto de la suma de u es único).

iv) $(-1)\,u = -u$.

NOTA: a pesar de que usaremos la misma notación, obsérvese la distinta naturaleza de los términos de la expresión: $\underbrace{0}_{\text{escalar}}\, u = \underbrace{0}_{\text{vector}}$.

3.2. Subespacios vectoriales

Dado un espacio vectorial V, a menudo es posible formar otro espacio vectorial tomando un subconjunto (propio) S de V que hereda las operaciones de V. Puesto que V es un espacio vectorial, las operaciones de suma y multiplicación por escalares siempre producirán un vector de V. Para que el nuevo subconjunto $S \subseteq V$ sea también un espacio vectorial, el conjunto S debe ser cerrado con respecto a dichas operaciones, i.e., la suma de dos elementos de S debe ser un elemento de S y el producto de un escalar y un elemento de S debe ser un elemento de S. Si esto ocurre, dado que el resto de propiedades que definen un espacio vectorial se satisfarán automáticamente en S, tendremos que:

Un subconjunto no vacío S del espacio vectorial V es un **subespacio** de V si satisface las propiedades de clausura $u + v \in S$ y $\alpha u \in S$ para todo $u, v \in S$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

En otras palabras, S es un subespacio de V si es cerrado bajo las operaciones de V. Obsérvese que esta definición implica que $0 \in S$.

Ejemplo

El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$S = \left\{(x, 1)^t : x \in \mathbb{R}\right\}$$

NO verifica las propiedades de clausura:

$$(1, 1)^t + (3, 1)^t = (4, 2)^t \notin S, \qquad 3 \cdot (1, 1)^t = (3, 3)^t \notin S\,,$$

por lo que no es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo

El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$S = \left\{(x_1, x_2)^t \colon x_2 = 2x_1\right\}$$

verifica las propiedades de clausura:

$$\begin{aligned} (x, 2x)^t + (y, 2y)^t &= (x+y, 2x+2y)^t = (x+y, 2(x+y))^t \in S\,, \\ \alpha \cdot (x, 2x)^t &= (\alpha x, \alpha 2x)^t = (\alpha x, 2(\alpha x))^t \in S\,, \end{aligned}$$

por lo que S es subespacio de $\mathbb{R}^2$. En efecto, se ve fácilmente que S con las operaciones de $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial.

Los siguientes ejemplos establecen importantes resultados teóricos:

Ejemplo

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, su espacio nulo $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

Demostración. Claramente el espacio nulo es no vacío, puesto que el vector $v = 0$ de $\mathbb{K}^n$ es solución de $A\,v = 0$.

Si u e v son soluciones, entonces $A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$, por lo que el espacio nulo es cerrado bajo la suma.

Si α es un escalar, se tiene que $A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha 0 = 0$. Por ello, el espacio nulo es cerrado bajo la multiplicación por escalares, y en consecuencia, es un subespacio. □

Obviamente $N(A^t)$ es subespacio de $\mathbb{K}^m$.

Ejemplo

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, su espacio columna $\mathcal{C}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^m$.

Demostración. Claramente el conjunto es no vacío, pues contiene a todas las columnas de

A; también, si consideramos la combinación lineal:

$$0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \cdots + 0 \cdot A_n = 0\,,$$

el cero pertenece a $\mathcal{C}(A)$.

Además es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) + (\beta_1 A_1 + \cdots + \beta_n A_n) &= (\alpha_1 + \beta_1)A_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)A_n\,, \\
k(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) &= k\alpha_1 A_1 + \cdots + k\alpha_n A_n\,,
\end{aligned}$$

que son combinaciones lineales de las n columnas de la matriz. Por tanto $\mathcal{C}(A)$ es un subespacio. □

Obviamente $\mathcal{C}(A^t)$ es subespacio de $\mathbb{K}^n$.

3.3. Operaciones entre subespacios

Consideremos un espacio vectorial V y dos subespacios suyos S_1 y S_2. Además de la intersección y la unión de conjuntos arbitrarios, es posible definir entre S_1 y S_2 la suma de ellos, de la siguiente manera:

Dados los subespacios S_1 y S_2 del espacio vectorial V, definimos su **suma** mediante:

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \colon s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}\ .$$

Si la intersección entre S_1 y S_2 es $\{0\}$, entonces la suma se denomina **suma directa** y la representamos mediante $S_1 \oplus S_2$.

El siguiente resultado es fácil de demostrar:

Proposición

Dados los subespacios S_1 y S_2 de V (sobre $\mathbb{K}$), se tiene que:

1. $S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial.

2. $S_1 \cup S_2$ no es en general un subespacio vectorial.

3. $S_1 + S_2$ es un subespacio vectorial.

Demostración.

1. Sean $s_1, s_2 \in S_1 \cap S_2$. Tendremos que $s_1, s_2 \in S_1$ y también que $s_1, s_2 \in S_2$. De la primera condición se deduce que, puesto que S_1 es un espacio vectorial, $s_1 + s_2 \in S_1$; de la segunda condición resulta que $s_1 + s_2 \in S_2$, al ser S_2 un espacio vectorial. En consecuencia:
$$s_1 + s_2 \in S_1 \cap S_2 \,.$$
Por otro lado, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, tendremos que $\alpha s_1 \in S_1$ y $\alpha s_1 \in S_2$. Por consiguiente:
$$\alpha s_1 \in S_1 \cap S_2$$
y concluimos que $S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial de V.

2. Para probar que $S_1 \cup S_2$ no es en general un espacio vectorial consideramos por ejemplo $V = \mathbb{R}^2$ y los subconjuntos $S_1 = \{(v_1, 0)^t \colon v_1 \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{(0, v_2)^t \colon v_2 \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que S_1 y S_2 son subespacios de $\mathbb{R}^2$. Si tomamos los vectores $(1, 0)^t, (0, 1)^t \in S_1 \cup S_2$, su suma:
$$(1, 0)^t + (0, 1)^t = (1, 1)^t$$
no pertenece ni a S_1 ni a S_2, por lo que tampoco pertenece a su unión y, por tanto, la suma no verifica la propiedad de clausura.

3. Por último, consideremos los vectores $s_1, s_2 \in S_1 + S_2$. Tendremos que $s_1 = v_1 + v_2$, con $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$ y también que $s_2 = w_1 + w_2$, con $w_1 \in S_1$ y $w_2 \in S_2$.

   Por un lado, podemos escribir la suma como sigue:

$$s_1 + s_2 = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in S_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in S_2} \in S_1 + S_2$$

   y por otro, tenemos que:

$$\alpha s_1 = \alpha(v_1 + v_2) = \underbrace{\alpha v_1}_{\in S_1} + \underbrace{\alpha v_2}_{\in S_1} \in S_1 + S_2 \,.$$

   En consecuencia, $S_1 + S_2$ es subespacio vectorial. □

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, y sus subespacios: $S_1 = \{(v_1, v_2, v_3)^t \colon v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ y $S_2 = \{(v_1, v_2, v_3)^t \colon v_1 - v_3 = 0\}$. Representados geométricamente S_1 y S_2 son dos planos que pasan por el origen. La intersección de ambos espacios se calcula resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ v_1 - v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} ,$$

cuya solución es $v_1 = v_3$, $v_2 = -2v_3$ (una recta). Por tanto, podemos escribir:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{(v_3, 2v_3, v_3)^t \colon v_3 \in \mathbb{R}\right\} \,.$$

Como esta intersección contiene más elementos que el vector cero, el espacio suma $S_1 + S_2$ no será suma directa. Para calcular dicho espacio suma, observamos que los elementos de S_1 son vectores $(v_1, v_2, v_3)^t$ cuyas coordenadas cumplen que $v_1 = -v_2 - v3$; esto es lo mismo que escribir:

$$(v_1, v_2, v_3)^t = (-v_2 - v_3, v_2, v_3)^t = v_2(-1, 1, 0)^t + v_3(-1, 0, 1)^t \,.$$

También, un elemento de S_2 podrá ser descrito mediante:

$$(v'_1, v'_2, v'_3)^t = (v'_3, v'_2, v'_3)^t = v'_2(0, 1, 0)^t + v'_3(1, 0, 1)^t \, .$$

Entonces, calculamos el espacio suma mediante:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \{s_1 + s_2 \colon s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \\ &= \left\{v_2(-1, 1, 0)^t + v_3(-1, 0, 1)^t + v'_2(0, 1, 0)^t + v'_3(1, 0, 1)^t \colon v_2, v_3, v'_2, v'_3 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(-v_2 - v_3 + v'_3, v_2 + v'_2, v_3 + v'_3)^t \colon v_2, v_3, v'_2, v'_3 \in \mathbb{R}\right\} \, . \end{aligned}$$

Como puede observarse, no existe ninguna relación entre las tres coordenadas de los vectores en $S_1 + S_2$; por ello, podemos escribir simplemente:

$$S_1 + S_2 = \left\{(\alpha, \beta, \gamma)^t \colon \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^3 \, .$$