Algunas aplicaciones combinatorias de los coeficientes binómicos

En este documento vamos a analizar unas cuantas cuestiones combinatorias en cuya respuesta intervienen, de una manera u otra, los coeficientes binómicos.
Las primeras aplicaciones tienen que ver con contar el **número de soluciones de la ecuación diofántica:**

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Aquí, los datos son n y k. Y utilizamos el adjetivo *diofánticas* porque las soluciones de la ecuación anterior han de ser números enteros no negativos. Es decir, una solución es una lista $(x_1, \ldots, x_n)$ de números enteros no negativos. En las aplicaciones habituales, además, los x_j suelen tener condiciones adicionales, como ser todos mayores o iguales que 1 o similares.

El enunciado anterior es pura abstracción que recoge los ingredientes fundamentales de diversos problemas combinatorios, algunos de los cuales pasamos a enunciar.

Cuestión 1. *Composiciones del entero n de longitud k.*

Una composición de n es una manera de escribir n como suma (ordenada) de números naturales. La composición tendrá longitud k si hay exactamente k sumandos. Así que, si llamamos $x_1, \ldots, x_k$ a estos sumandos, contar el número de estas composiciones es lo mismo que calcular el número de soluciones de

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 1, \ldots, x_k \geq 1 \end{gathered}$$

Cuestión 2. *Distribuciones (repartos) de n bolas idénticas en k cajas numeradas.*

Como iremos viendo, este concepto (reparto) es extremadamente útil para representar múltiples cuestiones. Como podréis comprobar, en unos casos las bolas serán idénticas (indistinguibles), y en otros numeradas (distinguibles). Lo mismo ocurrirá con las cajas. De nuevo, todo esto es una abstracción que describe una gran variedad de problemas combinatorios.

En el caso que nos ocupa, como las bolas son idénticas, lo único relevante es decidir *cuántas* bolas van en cada caja. Así que, si llamamos x_j al número de bolas que va en cada caja j, contar el número de distribuciones (biyección al canto) es lo mismo que contar el número de soluciones de

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0 \end{gathered}$$

o quizás de

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 1, \ldots, x_k \geq 1 \end{gathered}$$

si es que permitimos cajas vacías (primer caso), o si no permitimos que queden cajas vacías (segundo caso). Por supuesto, podéis imaginar otras restricciones sobre las distribuciones de bolas que se traducen, de manera inmediata, en condiciones sobre los x_j.

Cuestión 3. *Multiconjuntos de tamaño k extraídos de {1, . . . , n}.*

Claro, ¡no podían faltar!, supongo que os preguntaréis: si en las listas distinguíamos entre aquellas en las que se permite repetición de las que no, ¿por qué no hacer lo mismo con los conjuntos?

En un subconjunto, de manera natural, la repetición de símbolos está **prohibida**. Y aunque suene algo forzado, definiremos un **multiconjunto** de tamaño k extraído de {1, . . . , n} como una colección de k símbolos escogidos de {1, . . . , n} donde se permite que aparezca varias veces cada símbolo.

Antes de caer en el desánimo por la vertiginosa proliferación de problemas con y sin repetición, con y sin orden, con y sin. . ., observad (o meditad un rato hasta convencerse) que, para describir un multiconjunto, lo único relevante es decidir cuántas veces aparece cada símbolo. Es decir, podemos representar un multiconjunto general de la siguiente manera:

$$\{1, (x_1.\text{veces}), 2, x_2.\text{veces}, \ldots, n, x_n.\text{veces}, n\} \longleftrightarrow \{1_{x1}, 2_{x2}, \ldots, n_{xn}\} .$$

Los x_j son enteros no negativos, y su suma ha de valer k (que es el tamaño total del multiconjunto). Así que el número de multiconjuntos coincide con el número de soluciones de

$$\#\text{ soluciones de: } \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0 \end{array}$$

El mismo tipo de problema, salvo que los papeles de n y k están cambiados con respecto a los anteriores.