ALGEBRA LINEAL — Examen Final — Enero 2014

Ejercicio 1.-

$$f_1, f_2 \in C[0,1]$$

$$f_1 \cdot f_2 = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$$

a) Es un producto escalar porque verifica los 5 axiomas siguientes:

(1) Es conmutativo porque $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx = \int_0^1 f_2(x) f_1(x)\, dx$

(2) Es distributivo frente a la suma porque:

$$f_1 \cdot (f_2 + f_3) = \int_0^1 f_1(x)\left[f_2(x) + f_3(x)\right] dx = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx + \int_0^1 f_1(x) f_3(x)\, dx =$$

$$= f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_3$$

(3) $$f_1 \cdot (\alpha f_2) = \int_0^1 f_1(x)\left[\alpha f_2(x)\right] dx = \int_0^1 \left[\alpha f_1(x)\right] \cdot f_2(x)\, dx = \alpha \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx =$$

$$= \alpha (f_1 \cdot f_2)$$

(4) Similar al anterior $(\alpha f_1) \cdot f_2 = \alpha (f_1 \cdot f_2)$

(5) $$f_1 \cdot f_1 = \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \geq 0 \quad \text{y, además,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f_1 = 0 \Rightarrow \int_0^1 0\, dx = 0 \\ \text{Si } \int_0^1 f_1^2(x)\, dx = 0 \Rightarrow f_1 = 0 \end{array} \right\}$$

b) $$f_1 \cdot f_2 = \int_0^1 \frac{1}{x+5} \cdot x\, dx = \int_0^1 \frac{x}{x+5}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{5}{x+5}\right) dx =$$

$$= \Big[x - 5 \ln|x+5| \Big]_0^1 = 1 - 5\ln 6 + 5 \ln 5 \neq 0$$

Luego no son ortogonales

Ejercicio 2.- $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ la matriz asociada A_T será de $\mathbb{R}^{3\times 4}$. A la vista de los datos, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} T(e_1) = v_1 \\ T(e_1) + T(e_2) = v_2 \\ T(e_1) + T(e_3) = v_3 \\ T(e_3) + 2\,T(e_4) = v_4 \end{array}\right\} \quad \text{Siendo: } \begin{array}{l} v_1 = (1,-1,0)^T \\ v_2 = (2,-1,2)^T \\ v_3 = (0,-3,1)^T \\ v_4 = (1,4,9)^T \end{array}$$

Se trata de un S.E.L. con incógnitas $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$, que resolviéndolo se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} T(e_1) = v_1 \quad = (1,-1,0)^T \\ T(e_2) = v_2 - v_1 = (1,0,2)^T \\ T(e_3) = v_3 - v_1 = (-1,-2,1)^T \\ T(e_4) = \frac{1}{2}(v_4 - v_3 + v_1) = (1,3,4)^T \end{array}\right\} \text{ que en forma matricial será:}$$

$$\left[T(e_1)\ \ T(e_2)\ \ T(e_3)\ \ T(e_4)\right] = \left[e_1\ \ e_2\ \ e_3\right]\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Por lo tanto:
$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \left[a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\right]$$

b) Es evidente que $\boxed{rg(A_T) = rg(T) = Im(T) = 3 = \dim Col(A)}$

$\Rightarrow \boxed{\dim Ker A = \dim Nul A = 4 - 3 = 1}$ por el teorema del rango

$\boxed{\dim Fil A = 3}$ y $\boxed{\dim Ker A^T = 3 - \dim Col A^T = 3 - \dim Fil A = 0}$

Una base para $Col A$ puede ser $\{e_1, e_2, e_3\}$ por ser de rango completo.

c)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } \operatorname{Ker} T \neq 0 \ \underline{\text{no es inyectiva}} \\ \text{Como } \dim \operatorname{Col} A = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \underline{\text{es sobreyectiva}}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\text{no es biyectiva}}$$

Luego no es un isomorfismo

d) La base B_1 es canónica luego ortonormal $\Rightarrow$ La base B_2 puede ser la misma.

e) Evidentemente la matriz de cambio de base será I_3

Ejercicio 3.-

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 4x(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 5y(t) + 4z(t) \\ z'(t) = 5z(t) \end{array}\right\}$$

a) $\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(4-\lambda) \Rightarrow \sigma(A) = \{4, 5_2\}$

c) $m_{alg}(4) = 1$ y $m_{alg}(5) = 2$

– Subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 4$; $E_4 = \mathrm{Ker}\,(A - 4I)$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con sistema asociado } \left\{ \begin{array}{c} x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 \text{ libre} \end{array} \right\}$$

y solución particular $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_1 \text{ libre} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = (1, -2, 0)^T$

luego $E_4 = \langle \{ (1, -2, 0)^T \} \rangle \Rightarrow \boxed{\dim E_4 = m_{geom}(4) = 1}$

– Subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 5$; $E_5 = \mathrm{Ker}\,(A - 5I)$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con sistema asociado } \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2, x_3 \text{ libres} \end{array} \right\}$$

y soluciones particulares $v_2 = (2, 0, -1)^T$ y $v_2 = (0, 1, 0)^T$

luego $E_5 = \langle \{ v_2, v_3 \} \rangle \Rightarrow \boxed{\dim E_5 = m_{geom}(5) = 2}$

Así que <u>coinciden</u> las multiplicidades $\Rightarrow$ A es diagonalizable

con $D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = [v_1 \; v_2 \; v_3]$

d) $x(0)=3$; $y(0)=1$; $z(0)=-1$

Puesto que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineal y homogéneo la solución general será:

$$X = C_1 e^{4t} V_1 + C_2 e^{5t} V_2 + C_3 e^{5t} V_3 \quad , \text{ es decir,}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que aplicando las condiciones iniciales, dará:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con solución } \begin{cases} C_1 = C_2 = 1 \\ C_3 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución es:

$$\begin{cases} x(t) = e^{4t} + 2e^{5t} \\ y(t) = -2e^{4t} + 3e^{5t} \\ z(t) = -e^{5t} \end{cases}$$

e) Ya se sabe que $A^4 = P D^4 P^{-1}$ y $D^4 = \begin{pmatrix} 4^4 & & \\ & 5^4 & \\ & & 5^4 \end{pmatrix}$

Así que simplemente habrá que calcular P^{-1} y luego multiplicar.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(P\,:\,I)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$I \;\vdots\; P^{-1}$$

Luego

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^4 & & \\ & 5^4 & \\ & & 5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^4 & 0 & 2\cdot 4^4 \\ 0 & 0 & 4\cdot 5^4 \\ 2\cdot 5^4 & 5^4 & 4\cdot 5^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^4 & 0 & 2\cdot 4^4 + 8\cdot 5^4 \\ -2\cdot 4^4 + 2\cdot 5^4 & 5^4 & -4\cdot 4^4 + 4\cdot 5^4 \\ 0 & 0 & -4\cdot 5^4 \end{pmatrix}$$

---

4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Col A = \langle (2,1,1)^T ; (-1,2,1)^T \rangle$$

a) El vector $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin Col A$ porque $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ se trata de un <u>sistema incompatible</u>

b) La solución de mínimos cuadrados debe verificar $(A^T A)\tilde{x} = A^T b \Rightarrow$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad y \quad A^T b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así pues

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -35 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2/7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 1 & 2/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 9/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$