ÁLGEBRA LINEAL. Examen final. Enero 2015

Problema 1.- $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow P_4[x]$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = d x^4 + (a-d)x^3 + (d-c)x^2 + (b-c)x + (a+b)$$

a)
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (d+d')x^4 + (a+a'-(d+d'))x^3 + (d+d'-(c+c'))x^2 + (b+b'-(c+c'))x + (a+a'+b+b') =$$

$$= \left[d x^4 + (a-d)x^3 + (d-c)x^2 + (b-c)x + (a+b)\right] +$$

$$+ \left[d' x^4 + (a'-d')x^3 + (d'-c')x^2 + (b'-c')x + (a'+b')\right] =$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right)$$ luego es verificada la 1ª condición de linealidad. Para la segunda:

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right) = (\alpha d)x^4 + (\alpha a - \alpha d)x^3 + (\alpha d - \alpha c)x^2 +$$

$$+ (\alpha b - \alpha c)x + (\alpha a + \alpha b) = \alpha\left[d x^4 + (a-d)x^3 + (d-c)x^2 + (b-c)x + (a+b)\right] =$$

$$= \alpha\, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

b) Para el núcleo: $d x^4 + (a-d)x^3 + (d-c)x^2 + (b-c)x + (a+b) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = 0 \;;\; (a-d) = 0 \;;\; d-c = 0 \;;\; b-c = 0 \;;\; a+b = 0$$

que es un sistema homogéneo de 5 ecuaciones con 4 incógnitas con solución única $a = b = c = d = 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} T = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$\text{Nulidad}(T) = \dim \operatorname{Ker} T = 0$

$rg(T) = \dim \mathbb{R}^{2\times 2} - \dim \operatorname{Ker} T = 4$

c) T es inyectiva porque $\text{nulidad}(T) = 0$

T no es suprayectiva porque $rg(T) < \dim P_4[x]$

$(\, rg(T) = 4$ y $\dim P_4[x] = 5 \,)$

Problema 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a) $Ax = b$ compatible $\Rightarrow$ (como $rg(A) = 1 \Rightarrow rg(A|b) = 1$) $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{b_2 - 2b_1 = 0} \text{ ó bien } \boxed{b_2 = 2b_1}$$

b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ que no verifica la condición anterior $\Rightarrow Ax = b$ es incompatible, luego se hallará la solución, $\tilde{x}$, de mínimos cuadrados:

$$(A^T A)\,\tilde{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 10 & -6 \\ 10 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{10x_1 + 5x_2 = -3}$$

que será la ecuación implícita del conjunto solución de mínimos cuadrados.

c) Sea $x \in S$: $x \perp b \Rightarrow x \cdot b = 0 \Rightarrow$

$x_1 - 2x_2 = 0$, luego $S = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}$

d) $v_1 \cdot v_2 = v_1^T (A^T A + I_2) v_2$

$A^T A + I_2 = \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ / $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$

$b \cdot c = 0 \Rightarrow (1 \quad -2) \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \end{pmatrix} = (1 \quad -2) \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \end{pmatrix} = 4 - 2\alpha =$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ como $4 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \boxed{c \in S}$

e) Ordinario: $\text{proy}_{e_1}(b) = \left(\dfrac{e_1 \cdot b}{e_1 \cdot e_1} \right) e_1 = \dfrac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Según el anterior:

$e_1 \cdot b = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (21 \quad 10) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1$

$e_1 \cdot e_1 = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (21 \quad 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 21$

$\text{proy}_{e_1}(b) = \dfrac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problema 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

a) El $rg(A)=3$ claramente $\Rightarrow$ ($\dim Col(A)=3$ y $\dim Nul(A)=0$ y, además, $\dim Fil(A)=3$ y $\dim Nul(A^T)=0$).

Base de $Col(A) = \{C_1, C_2, C_3\}$

Base de $Nul(A)$, no tiene por tener dimensión nula.

b) Se usará el proceso de Gram-Schmidt

$$w_1 = C_1$$

$$w_2 = C_2 - proy_{w_1}(C_2) = C_2 - \left(\frac{w_1 \cdot C_2}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_2$$

$$w_3 = C_3 - proy_{w_1}(C_3) - proy_{w_2}(C_3) = C_3 - \left(\frac{w_1 \cdot C_3}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1 - \left(\frac{w_2 \cdot C_3}{w_2 \cdot w_2}\right) w_2 =$$

$$= C_3 - \frac{-3}{13} w_1 - 0 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/13 \\ 0 \\ 6/13 \end{pmatrix}$$

Base ortogonal $= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (SE PODÍA HABER EVITADO EL PROCESO)

c) Es posible porque se trata de dos bases del mismo espacio vectorial, $\mathbb{R}^3$. Se calcularía escribiendo cada vector de la base estándar en combinación lineal de los vectores de la base obtenida; cada conjunto de escalares sería cada columna de la matriz del cambio. Es decir será la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

d) La matriz Q será la anterior normalizada, es decir,

$$Q = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 0 & -2/\sqrt{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{13} & 0 & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 0 & 2/\sqrt{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{13} & 0 & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/\sqrt{13} & 0 & -3/\sqrt{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

e) Polinomio característico

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

luego $m_{alg}(1) = 2$ y $m_{alg}(2) = 1$ con $\sigma(A) = \{1, 2\}$

f) $\boxed{E(1)}$ $\ Ker(A-I)$; $A - I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ con sistema asociado:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2, x_3 \text{ libres} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{geom}(1) = \dim E(1) = 2$$

$\boxed{E(2)}$ $\ Ker(A-2I)$; $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ con sistema asociado:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{array} \right\} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{geom}(2) = \dim E(2) = 1$$

g) A es diagonalizable con:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

que verifican $A = PDP^{-1}$

h) A tiene inversa porque todos sus autovalores son no nulos.

i) $A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. Para hallar P^{-1} se usará Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] = \left[I \mid P^{-1} \right]$$ luego

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

j) Como $R = Q^T A \Rightarrow R^{-1} = \left(Q^T A\right)^{-1} = A^{-1}\left(Q^T\right)^{-1} = A^{-1} Q$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 0 & -2/\sqrt{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{13} & 0 & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{13} & 0 & 3/2\sqrt{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13/2\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Problema 4

El sistema puede expresarse así: $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Así que se debe diagonalizar la matriz.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda - 5) \Rightarrow \text{Autovalores: } 0 \text{ y } 5$$

Para los autovectores

$\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{matrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{matrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución general será: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{con solución } C_1 = \frac{1}{5} \text{ y } C_2 = \frac{2}{5}$$

Luego la solución particular es: $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} e^{5t} \end{array} \right\}$