

FORMULARIO DE PROPOSICIONES

Axiomas y Reglas Derivadas

A1.	$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$	<i>Introducción del antecedente</i>
A2.	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$	
A3.	$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$	<i>Regla del producto</i>
A4.	$\vdash A \wedge B \rightarrow A, A \wedge B \rightarrow B$	<i>Regla de simplificación</i>
A5.	$\vdash A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$	<i>Regla de la adición</i>
A6.	$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$	<i>Prueba por casos</i>
A7.	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$	<i>Reducción al absurdo</i>
A8.	$\vdash \sim \sim A \rightarrow A$	<i>Eliminación de la doble negación</i>

Teoremas

1. Identidad

$$\vdash A \rightarrow A$$

2. Contraposición

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$$

$$\vdash (A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow \sim A)$$

3. Permutación

$$\vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [B \rightarrow (A \rightarrow C)]$$

4. Importación-exportación

$$\vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$$

$$\vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$$

5. Producto condicional

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)]$$

6. Ex Contradictione Quodlibet

$$\vdash A \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$$

$$\vdash \sim A \rightarrow (A \rightarrow C)$$

7. Def. de implicación respecto conjunción

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \sim(A \wedge \sim B) \text{ directa}$$

$$\vdash \sim(A \wedge \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ recíproca}$$

8. Leyes de De Morgan

$$\vdash \sim(A \vee B) \rightarrow \sim A \wedge \sim B \text{ directa}$$

$$\vdash \sim A \wedge \sim B \rightarrow \sim(A \vee B) \text{ recíproca}$$

$$\vdash \sim(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B \text{ directa}$$

$$\vdash \sim A \vee \sim B \rightarrow \sim(A \wedge B) \text{ recíproca}$$

9. Implicación respecto a disyunción

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B \text{ directa}$$

$$\vdash \sim A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ recíproca}$$

10. Teoremas de la conjunción

$$\text{Conmutatividad}$$

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$$

$$\text{Asociatividad}$$

$$\vdash (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C) \text{ directa}$$

$$\vdash A \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \wedge C \text{ recíproca}$$

$$\text{Distributividad respecto de la disyunción}$$

$$\vdash A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$$

$$\text{Absorción}$$

$$\vdash A \wedge (A \vee B) \rightarrow A$$

$$\vdash A \rightarrow A \wedge (A \vee B)$$

$$\text{Idempotencia}$$

$$\vdash A \wedge A \rightarrow A$$

$$\vdash A \rightarrow A \wedge A$$

11. Teoremas de la conectiva disyunción

$$\text{Conmutatividad}$$

$$\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$\text{Asociatividad}$$

$$\vdash (A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$\vdash A \vee (B \vee C) \rightarrow (A \vee B) \vee C$$

$$\text{Distributividad respecto de la conjunción}$$

$$\vdash A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$\vdash A \wedge (A \vee B) \rightarrow A$$

$$\vdash A \rightarrow A \wedge (A \vee B)$$

$$\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$$

$$\text{Absorción}$$

$$\vdash A \rightarrow A \vee (A \wedge B)$$

$$\vdash A \vee (A \wedge B) \rightarrow A$$

$$\text{Idempotencia}$$

$$\vdash A \vee A \rightarrow A$$

$$\vdash A \rightarrow A \vee A$$

12. Silogismo

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

13. Teoremas de equivalencia

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$$

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$$

14. Silogismo disyuntivo

$$\vdash A \vee B \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$$

15. Tercio excluso

$$\vdash A \vee \sim A$$

$$\vdash \sim(A \wedge \sim A)$$

16. Modus Tollens

$$\vdash ((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$$

Regla de intercambio

1. Conjunción

$$1.1 \vdash (A \wedge A) \leftrightarrow A$$

$$1.2 \vdash A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$1.3 \vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

2. Disyunción

$$2.1 \vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$$

$$2.2 \vdash A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

$$2.3 \vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

3. Negación

$$3.1 \vdash \sim \sim A \leftrightarrow A$$

4. Interdefiniciones

$$4.1 \vdash \sim A \vee B \leftrightarrow (A \rightarrow B)$$

$$4.2 \vdash \sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$$

$$4.3 \vdash \sim(A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$$

$$4.4 \vdash \sim(A \wedge \sim B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$$

FORMULARIO DE PREDICADOS

Axiomas

- A1.** $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ *Introd. del antecedente*
A2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ *Regla del producto*
A4. $\vdash A \wedge B \rightarrow A, A \wedge B \rightarrow B$ *Regla de simplificación*
A5. $\vdash A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$ *Regla de la adición*
A6. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$ *Prueba por casos*
A7. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$ *Reducción al absurdo*
A8. $\vdash \sim \sim A \rightarrow A$ *Eliminación de la doble neg.*
A9. $\vdash \forall x B(x) \rightarrow B(t)$
A10. $\vdash B(t) \rightarrow \exists x B(x)$

Reglas de Inferencia

- $\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$ Modus Ponens
 $\frac{\vdash A \rightarrow B(y)}{\vdash A \rightarrow \forall x B(x)}$ Gen. Univ. Condicional
 $\frac{\vdash A(y) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B}$ Gen. Exist. Condicional

Reglas Derivadas

- $\frac{\vdash A(y)}{\vdash \exists x A(x)}$ Gen. Existencial
 $\frac{\vdash A(y)}{\forall x A(x)}$ Gen. Universal
 $\frac{\vdash \exists x A(x), \vdash A(y) \rightarrow B}{\vdash B}$ Esp. Existencial
 $\frac{\vdash \forall x A(x)}{\vdash A(y)}$ Esp. Universal

Teoremas

1. Modificación de la variable cuantificada

- $\vdash \forall x P(x) \leftrightarrow \forall y P(y)$
 $\vdash \exists x P(x) \leftrightarrow \exists y P(y)$

2. Descenso cuantificacional

- $\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$

3. Cuantificación múltiple. Propiedades conmutativas

a. Cuantificador universal

- $\vdash \forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$

b. Cuantificador existencial

- $\vdash \exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$

c. Conmutatividad de distintos tipos

- $\vdash \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

4. Negación de fórmulas cuantificadas

- $\vdash \sim \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$
 $\vdash \sim \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$

5. Cuantificación de las fórmulas con la conectiva conjunción

- $\vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
 $\vdash A \wedge \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x (A \wedge P(x))$
 - x no es libre en A (A es independiente de x) $\vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
 $\vdash \exists x (A \wedge P(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x P(x)$
 - x no es libre en A (A es independiente de x)

6. Cuantificación de las fórmulas con la disyunción

- $\vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
 $\vdash \forall x (A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \forall x P(x)$
 $\vdash \exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
 $\vdash \exists x (A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \exists x P(x)$

7. Cuantificación de las fórmulas con la conectiva implicación

- $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow A) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow A)$
 $\vdash \forall x (A \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x P(x))$
 $\vdash (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$
 $\vdash (\exists x P(x) \rightarrow A) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow A)$
 $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow A) \leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow A$
 $\vdash A \rightarrow \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x (A \rightarrow P(x))$
 $\vdash \exists x (A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall x A(x) \rightarrow B)$

8. Cuantificación de fórmulas con equivalencia material

- $\vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow A) \rightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow A)$

9. Otros teoremas

- $\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
 $\vdash (A \wedge \forall x P(x)) \rightarrow \exists x (A \wedge P(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \wedge A) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge A)$
 $\vdash (A \vee \forall x P(x)) \rightarrow \exists x (A \vee P(x))$
 $\vdash (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \vee A) \rightarrow (\exists x P(x) \vee A)$
 $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
 $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow A) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow A)$
 $\vdash (\forall x P(x) \rightarrow A) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow A)$