1.3

① "$\sqrt{2}$ no es un número racional"

REDUCCIÓN AL ABSURDO

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces podemos escribir

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \,\&\, q \text{ enteros}$$

SIN FACTORES COMUNES

Como $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}\,q = p \Rightarrow p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow p^2$ es PAR $\Rightarrow p$ es PAR

$\Rightarrow p = 2P$

luego:

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2P)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4P^2 = 2q^2$

$\Rightarrow q^2 = 2P^2 \Rightarrow q^2$ es PAR

$\Rightarrow q$ es PAR $\Rightarrow q = 2Q$

En resumen:

$p = 2P$
$q = 2Q$ ¡¡ lo cual no es posible ya que $p \,\&\, q$ no deberían tener factores comunes.

Puesto que la contradicción surge al asumir que $\sqrt{2}$ es racional podemos concluir que $\sqrt{2}$ <u>no</u> es racional ∎

② " $\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$ "

DEM 1

Llamamos $S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = 1 + r + \cdots + r^N$

$\Rightarrow \ominus \quad r S_N = r + r^2 + \cdots + r^N + r^{N+1}$

$S_N - r S_N = 1 - r^{N+1} \underset{(r\neq 1)}{\Rightarrow} S_N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$

{ Si $r=1$ se tiene que (trivialmente) $S_N = N+1$

DEM 2 Inducción sobre $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

1. Base de inducción Para $N=0$ ¿ $\sum_{n=0}^{0} r^n = \frac{1-r^{0+1}}{1-r}$?

¿ $1 = 1$? sí ✓

2. Paso inductivo:

$\boxed{\text{HIP: } \sum_{n=0}^{k} r^n = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}}$ ¿ $\sum_{n=0}^{k+1} r^n = \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$?

$$\sum_{n=0}^{k+1} r^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{k} r^n}_{\text{HIP}} + r^{k+1} \underset{\text{HIP}}{=} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + r^{k+1}$$

$$= \frac{1-r^{k+1} + (1-r) r^{k+1}}{1-r}$$

$$= \frac{1-r^{k+2}}{1-r} \quad ✓$$

1. & 2. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r} \quad \forall N = 0, 1, 2, \ldots$

3 " $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$; $N \in \mathbb{N}$ "

DEM 1 INDUCCIÓN

1. Base: $N=1$ ¿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{1} n = \frac{1(1+1)}{2}$?

¿ $1 = 1$? Sí ✓

2. Paso inductivo:

$$\boxed{\text{HIP} \quad \sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}} \qquad ¿ \sum_{n=1}^{k+1} n = \frac{(k+1)(k+2)}{2} ?$$

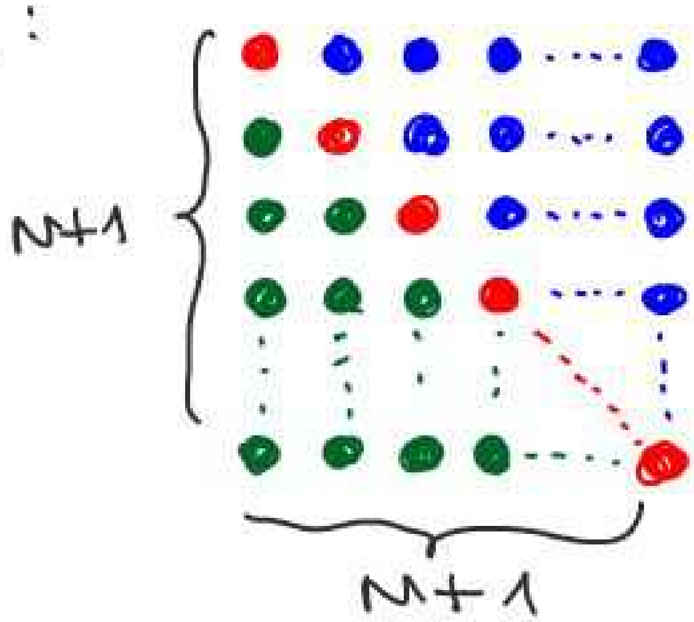
$$\sum_{n=1}^{k+1} n = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} n}_{\text{HIP}} + k+1 \underset{\text{HIP}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + k+1 =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad ✓$$

$$1. \,\&\, 2. \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \quad \forall N = 1, 2, \ldots$$

DEM 2:



$$(N+1)^2 = \sum_{n=1}^{N} n + N+1 + \sum_{n=1}^{N} n$$

$$\Downarrow$$

$$(N+1)^2 - (N+1) = 2 \sum_{n=1}^{N} n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{(N+1)^2 - (N+1)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \quad ✓$$

4 "$0<x<y \Rightarrow x<\sqrt{xy}<\dfrac{x+y}{2}<y$"

a $$x \underset{0<x}{=} |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} \underset{x<y}{<} \sqrt{xy} \underset{x<y}{<} \sqrt{y \cdot y} = \sqrt{y^2} = |y| \underset{0<y}{=} y$$

b $$x = \frac{x+x}{2} \underset{x<y}{<} \frac{x+y}{2} \underset{x<y}{<} \frac{y+y}{2} = y$$

c $$0 \underset{x<y}{<} y-x \Rightarrow 0<(y-x)^2 = x^2+y^2-2xy$$

$$\Rightarrow 4xy < x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$$

$$\Rightarrow 0 \underset{0<x<y}{<} 4xy < (x+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{4xy} < \sqrt{(x+y)^2} = |x+y| \underset{0<x<y}{=} x+y$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{xy} < x+y$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$$

Usando a, b y c se tiene que, si $0<x<y$:

$$x<\sqrt{xy}<\frac{x+y}{2}<y$$

⑤ "$0<x<y \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}, \ \forall k>0$"

Sea $k>0$ y supongamos $0<x<y$. Vamos a usar la expresión $\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}$ como una <u>ECUACIÓN</u> en la cual las incógnitas son x e y. Vamos a encontrar todos los (x,y) que cumplen la ecuación:

$$\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k} \underset{\boxed{\text{Hip: } y>0,\ k>0}}{\Longleftrightarrow} x(y+k) < y(x+k)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{xy} + kx < \cancel{xy} + ky$$

$$\Longleftrightarrow kx < ky$$

$$\underset{\boxed{\text{Hip: } k>0}}{\Longleftrightarrow} x<y.$$

En resumen: $\left.\begin{array}{c} x<y \\ \& \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k} \quad \forall k>0$

■

⑥ "$|x+y| = |x|+|y| \Leftrightarrow xy \geq 0$"

($\Leftarrow$) Hip: $xy \geq 0$.

Es decir; o bien $x=0$ ó $y=0$ ó $x,y>0$ ó $x,y<0$

Si $x=0$ ó $y=0$ la demostración es trivial. ✓

Si $x,y>0 \Rightarrow$ $x=|x|$, $y=|y|$, $x+y=|x+y|$ $\Rightarrow |x+y| = |x|+|y|$ ✓

Si $x,y<0 \Rightarrow$ $x=-|x|$, $y=-|y|$, $x+y=-|x+y|$ $\Rightarrow |x+y| = |x|+|y|$ ✓

($\Rightarrow$) Hip: $|x+y| = |x|+|y|$

$$\Rightarrow |x+y|^2 = (|x|+|y|)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = (|x|+|y|)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy = |x|^2+|y|^2+2|x||y|$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy = x^2+y^2+2|xy|$$

$$\Rightarrow 2xy = 2|xy|$$

$$\Rightarrow xy = |xy| \geq 0$$ ✓

Por tanto:

$$|x+y| = |x|+|y| \Leftrightarrow xy \geq 0 \qquad \blacksquare$$