Ejercicios 7: Modelos de markov

Departamento de Informática / Department of Computer Science
Universidad Carlos III de Madrid

Inteligencia Artificial
Grado en Ingeniería Informática
2019/20

Ejercicio 1: Evaluación de alumnos

- ¿Cómo podría aplicar HMMs (Modelos Ocultos de Markov) para decidir si un alumno está entendiendo o no una asignatura? Describa todos los componentes del HMM correspondiente, asignando razonadamente probabilidades numéricas.

Ejercicio 1) Estados, las preguntas que se hacen a lo largo de la clase. correct/incorrect

las observaciones, si atiende o se distrae.

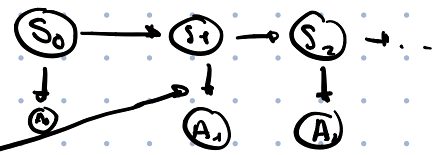
El estado inicial, es que ha respondido bien.

Si ha respondido bien la prob de que entienda es:

$$P(\text{correcta}_t / \text{correcta}_{t-1}) = 0'8$$

$$P(\text{correcta}_t / \neg\, \text{correcta}_{t-1}) = 0'7$$

Las observaciones:



$$P(\text{atento} / \text{correcta}) = 0'75$$

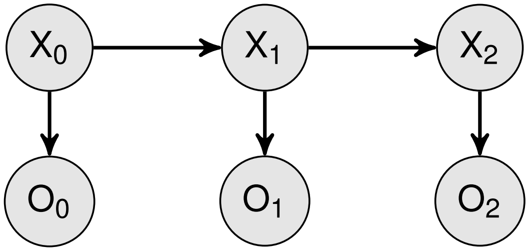
$$P(\text{atento} / \neg\, \text{correcta}) = 0'50$$

A priori:

$$P(\text{correcta}) = 0'6$$

Ejercicio 2: HMM

- A veces uno tiene un resfriado (cold) que le hace estornudar (sneeze). También puede tener alergia (allergy) y esto también le puede hacer estornudar. Otras veces uno se siente bien (well) y no estornuda. Se decide modelar esto como un HMM donde:
  - Los estados X_t representan el estado de la persona: $X_t \in \{well(w), allergy(a), cold(c)\}$
  - Las observaciones O_t representan los síntomas observables (si estornuda o no): $O_t \in \{s, \neg s\}$



  - Asumiremos que los instantes de tiempo representan días y que inicialmente la persona está bien

Ejercicio 2: HMM

Las distribuciones de probabilidad que caracterizan el HMM son las siguientes:

- $P(X_0) = (1, 0, 0)$ (es decir, $P(X_0 = w) = 1$)
- $P(X_{t+1}/X_t)$

X_t	$P(X_{t+1} = w/X_t)$	$P(X_{t+1} = a/X_t)$	$P(X_{t+1} = c/X_t)$
w	0.7	0.2	0.1
a	0.6	0.3	0.1
c	0.2	0.2	0.6

- $P(O_t/X_t)$

X_t	$P(O_t = s/X_t)$	$P(O_t = \neg s/X_t)$
w	0.1	0.9
a	0.8	0.2
c	0.7	0.3

1. ¿Cuál es la probabilidad de que uno esté bien (w) mañana?
2. ¿Cuál es la probabilidad de la secuencia w,c,c,w en los primeros 4 días?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que hoy (día 0) no se observen estornudos ($O_0 = \neg$s) y mañana se observen estornudos ($O_1 = s$)?

Ejercicio 2) Estados = { ω, a, c }   Observaciones = { s, ¬s }   El tiempo son días.
El $\mathcal{E}_0 = \omega$

1.) Prob. de estar $\overbrace{\text{bien } (\omega) \text{ mañana}}^{\mathcal{E}_1 = \omega}$.

$$P(\omega_1) = P(\omega_1, \mathcal{E}_0) = \sum_{\mathcal{E}_0} P(\omega_1 / \mathcal{E}_0) P(\mathcal{E}_0) =$$

$$= P(\omega_1/\omega_0)P(\omega_0) + P(\omega_1/c_0)P(c_0) + P(\omega_1/a_0)P(a_0) =$$

$$= 0'7 \cdot 1 + 0'2 \cdot 0 + 0'6 \cdot 0 = \boxed{0'7}$$

2.) Prob. de $\overset{\mathcal{E}_0}{\omega}, \overset{\mathcal{E}_1}{c}, \overset{\mathcal{E}_2}{c}, \overset{\mathcal{E}_3}{\omega}$ en 4 días.

$$P(\omega_0, c_1, c_2, \omega_3) = P(\omega_3/c_2) P(c_2/c_1) P(c_1/\omega_0) P(\omega_0) = 0'2 \cdot 0'6 \cdot 0'1 \cdot 1 = 0'012$$

3.) $$P(O_0 = \neg s, O_1 = s) = \sum_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1} P(\overset{O_0}{\neg s}, \mathcal{E}_0, \overset{O_1}{s}, \mathcal{E}_1) = \sum_{\mathcal{E}_1} P(s / \mathcal{E}_1) P(\mathcal{E}_1 / \omega) \underbrace{P(\neg s/\omega) P(\omega)}_{} =$$

Son 1,0p, por lo que no afecta los otros.

$$= P(s, \omega) P(\omega/\omega) P(\neg s/\omega) P(\omega) +$$

$$P(s/c) P(c/\omega) P(\neg s/\omega) P(\omega) +$$

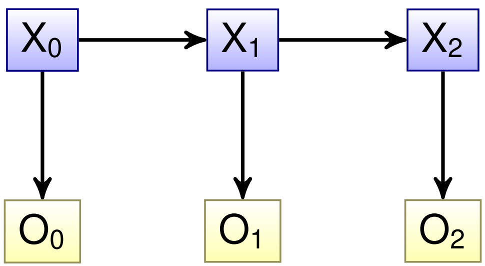
$$P(s/a) P(a/\omega) P(\neg s/a) P(\omega) = 0'1 \cdot 0'7 \cdot 0'9 \cdot 1 + 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0'9 \cdot 1 + 0'7 \cdot 0'1 \cdot 0'9 \cdot 1 = \boxed{0'27}$$

Ejercicio 3: Reconocimiento de voz

Supongamos que se quiere construir un sistema para reconocimiento automático del voz. En particular, se quieren reconocer palabras dada una señal acústica. Para simplificar, sólo consideraremos palabras de tres letras que contengan las letras (*a*, *r* y *t*).

El proceso se puede modelar con un HMM en el que los estados (ocultos) se definen con una variable que representa la letra, y las observaciones representan la señal acústica, en forma de un fonema extraído de la señal.

- Los estados X_t representan la letra $\{a, r, t\}$
- Las observaciones O_t representan el fonema $\{a, r, t\}$



Ejercicio 3: Reconocimiento de voz

Se conocen las siguientes probabilidades a priori y CPTs

- $P(X_0) = (0.3, 0.3, 0.4)$
- $P(X_{t+1}/X_t)$

X_t	$P(X_{t+1} = a/X_t)$	$P(X_{t+1} = r/X_t)$	$P(X_{t+1} = t/X_t)$
a	0.0	0.7	0.3
r	0.5	0	0.5
t	1.0	0.0	0.0

- $P(O_t/X_t)$

X_t	$P(O_t = a/X_t)$	$P(O_t = r/X_t)$	$P(O_t = t/X_t)$
a	0.9	0.1	0.0
r	0.1	0.8	0.1
t	0.0	0.2	0.8

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la letra inicial sea *a* cuando el sistema escucha el fonema *a*? ($P(X_0 = a/O_0 = a)$)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer fonema sea *a* ($P(O_0 = a)$)?
3. Si se observa la secuencia de fonemas *arr*, ¿Cuál es la palabra más probable?

Ejercicio 3) 3 letras $= \{a, r, t\}$

Estados, letras $\{a, r, t\}$. Observaciones, fonemas $\{a, r, t\}$

1.) Prob. de 1ª sea a si el fonema es a.

$$P(X_0 = a / O_0 = a) = \alpha P(X_0 = a, O_0 = a) = \alpha P(O_0 = a / X_0 = a) P(X_0 = a) =$$

$$= \alpha\, 0'9 \cdot 0'3 = \boxed{\alpha\, 0'27 = 0'9}$$

$$P(X_0 = r / O_0 = a) = \alpha P(X_0 = r, O_0 = a) = \alpha P(O_0 = a / X_0 = r) P(X_0 = r) =$$

$$= \alpha\, 0'1 \cdot 0'3 = \alpha\, 0'03$$

$$P(X_0 = t / O_0 = a) = \alpha\, 0 \cdot 0'4 = 0$$

$$\alpha(0'27 + 0 + 0'03) = 1; \quad \alpha = \frac{1}{0'3}$$

2.) 1er fonema sea a.

$$P(O_0 = a) = P(O_a = a, \mathcal{E}_0) = \sum_{\mathcal{E}_0} P(O_a = a / \mathcal{E}_0) P(\mathcal{E}_0) =$$

$$= P(a/a)P(a) + P(a/r)P(r) + P(a/t)P(t) =$$

$$= 0'9 \cdot 0'3 + 0'1 \cdot 0'3 + 0'0 \cdot 0'4 = \boxed{0'3}$$

3.) Se observa fon. arr. ¿Palabra $\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$ más prob.?

$$P(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 / O_0 = a, O_1 = r, O_2 = r) =$$

$$= \alpha \sum_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2} P(O_2 = r / \mathcal{E}_2) P(\mathcal{E}_2 / \mathcal{E}_1) P(O_1 = r / \mathcal{E}_1) P(\mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_0) P(O_0 = a / \mathcal{E}_0) P(\mathcal{E}_0)$$

$$P(a, r, a / a, r, r) = \alpha\, 0'1 \cdot 0'5 \cdot 0'8 \cdot 0'7 \cdot 0'9 \cdot 0'3 = \alpha\, 0'00756$$

Hacer con todos y quedarse con el mayor

a ~~a r~~	r ~~r a~~	t ~~a a~~	r t r	t ~~t t~~	t ~~t r~~
a r a	r ~~r r~~	t ~~a t~~	r ~~t t~~	a ~~a a~~	r a t
a ~~r r~~	a ~~a t~~	t ~~t a~~	t ~~r r~~	a r t	r t a
r ~~a a~~	a t a	t ~~t t~~	t ~~r t~~	a t r	
r a r	a ~~t t~~	r ~~r t~~	t ~~t r~~	t ~~r t~~	

Ejercicio 4: Seguimiento aviación

- Se tiene un radar que cada pocos segundos obtiene la posición y velocidad de un avión de combate F-16 Falcon. Denominamos estas observaciones O_t, para el instante de tiempo t. Se quiere construir un sistema para determinar si ese F-16 supone una amenaza inminente o no. Es decir para determinar si nos va a atacar o no.
- ¿Cuál de los modelos vistos en clase es el más adecuado para construir el sistema? ¿Cómo se realizaría el razonamiento para obtener la respuesta?

Ejercicio 4) Puesto que tenenemos observaciones como posicion y velocidad y los estados es si supone una amenaza. Sera un Modelo de Markov Oculto.

O_t : velociad y posición.

E_t : Si suponea amenaza de ataque.

$P(E_{t+1}/E_t)$ Si de un día a otro supone una mayor amenaza de ataque.

$P(O_t/E_t)$ Si supone una amenaza, cual es la prob. de ira acierta pos. y vel.

$P(E_0)$ Prob. desde un principio de que nos ataque.

Ejercicio 5: Tenis

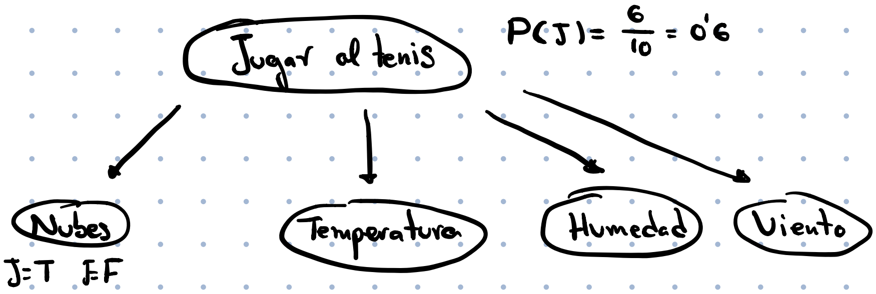
Se dispone de los datos de la figura sobre la conveniencia de jugar o no al tenis, en función de datos meteorológicos.

- Construya un clasificador Naive Bayes que nos aconseje sobre hacer o no la actividad, usando datos de los primeros 10 días para predecir los últimos 4.
- Construya Modelos de Markov que modelen de forma separada la evolución temporal de cada una las cuatro variables meteorológicas. ¿Qué pasaría si quisiéramos tener en cuenta todas ellas en un solo modelo?

Day	Clouds	Temp.	Hum.	Wind	Plays?
1	Sunny	Hot	High	Weak	No
2	Sunny	Hot	High	Strong	No
3	Overcast	Hot	High	Weak	Yes
4	Rain	Mild	High	Weak	Yes
5	Rain	Cool	Normal	Weak	Yes
6	Rain	Cool	Normal	Strong	No
7	Overcast	Cool	Normal	Strong	Yes
8	Sunny	Mild	High	Weak	No
9	Sunny	Cool	Normal	Weak	Yes
10	Rain	Mild	Normal	Weak	Yes
11	Sunny	Mild	Normal	Strong	Yes
12	Overcast	Mild	High	Strong	Yes
13	Overcast	Hot	Normal	Weak	Yes
14	Rain	Mild	High	Strong	No

Ejercicio 5)

1.)



$P(J) = \frac{6}{10} = 0'6$

$P(N/J)$	$J=T$	$J=F$
$N=S$	$1/10 = 0'1$	$3/10 = 0'3$
$N=O$	$2/10 = 0'2$	0
$N=R$	$3/10 = 0'3$	$1/10 = 0'1$

$P(T/J)$	T	F
H	$1/10$	$2/10$
M	$2/10$	$1/10$
C	$3/10$	$1/10$

$P(H/J)$	T	F
H	$2/10$	$3/10$
N	$4/10$	$1/10$

$P(V/J)$	T	F
W	$5/10$	$2/10$
S	$1/10$	$2/10$

2.)