DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Grado en Informática

Heurística y Optimización

Mayo 2012

Normas generales del examen

- El tiempo para realizar el examen es de **4 horas**
- Cada pregunta debe responderse en páginas separadas
- No se responderá a ninguna pregunta sobre el examen
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz

Problema 1. (5 puntos)

Considera el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{rcccl} \multicolumn{5}{c}{\min z = -x_1 - 2x_2} \\ x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

y responde razonadamente las siguientes preguntas:

1. **(0,5 puntos)** Representa gráficamente las restricciones del problema anterior
2. **(0,5 puntos)** Resuelve gráficamente el problema anterior

Considerando ahora, en su lugar, el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{rcccl} \multicolumn{5}{c}{\max z = x_1 + 2x_3} \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\ \multicolumn{5}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

se pide responder razonadamente las siguientes cuestiones:

3. **(0,5 puntos)** Expresa el problema de Programación Lineal anterior en forma *estándar*
4. **(1 punto)** Resuelve el problema de Programación Lineal anterior con el algoritmo SIMPLEX. Indica claramente, en cada iteración, las variables escogidas en la base y su valor.
5. **(0,5 puntos)** Calcula el valor de la función de coste $\mathbf{z}$ en el punto óptimo calculado en la pregunta anterior
6. **(0,5 puntos)** ¿Cuál es el problema dual de este problema de Programación Lineal?
7. **(1 punto)** Resuelve el problema dual del problema de Programación Lineal mostrado
8. **(0,5 puntos)** ¿Cuál es la contribución por unidad del recurso que se corresponde con la segunda restricción al valor óptimo de la función de coste?

Problema 2. (2 puntos)

Un sistema de seguridad bastante común en la banca *on-line* consiste en preguntar al usuario tres dígitos aleatorios de una clave numérica. Por ejemplo, si la palabra clave es 52371, y se pregunta al usuario por los dígitos en las posiciónes primera, tercera y cuarta la respuesta debería ser: 537.

Si se consideran las variables x_i que representan la posición del dígito i en una palabra clave determinada, en el ejemplo anterior se tendría $x_5 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_7 = 4$ y $x_1 = 5$.

Asumiendo que se conocen las siguientes respuestas para una palabra clave en particular de longitud 5:

132 173 725

y que no existen dígitos repetidos en la palabra clave, se pide responder razonadamente las siguientes cuestiones:

1. **(0,5 puntos)** Representa convenientemente el dominio de todas las variables x_i para las tres respuestas mostradas anteriormente.
2. **(0,5 puntos)** ¿x_1 es arco consistente con x_2? Sí o no. ¿Cuál es el dominio resultante de estas dos variables después de aplicar la arco consistencia sobre ellas?
3. **(1 punto)** ¿x_1 es camino consistente con x_2? Sí o no. ¿Cuál es el dominio resultante de estas dos variables después de aplicar la camino consistencia sobre ellas?

Problema 3. (3 puntos)

Un brazo automático es capaz de soportar un número arbitrario de discos n, cada uno de ellos de un radio diferente, representado por un número entero de 1 a n, sin repetición. Por ejemplo, la secuencia $(4, 1, 3, 2)$, representa el hecho de que el brazo soporta hasta cuatro discos en el siguiente orden: primero el mayor, de radio 4; después el más pequeño, de radio 1; y por último los discos de radios 3 y 2 respectivamente. El brazo puede invertir una cantidad m cualquiera de discos, $m \leq n$, desde la segunda posición hasta una cualquiera convenientemente elegida. Por lo tanto, a partir de la posición anterior el robot podría disponer los discos en cualquiera de los siguientes órdenes: $(1, 4, 3, 2)$, $(3, 1, 4, 2)$ y $(2, 3, 1, 4)$.

Se desea construir un sistema que reordene los discos de menor a mayor radio: $(1, 2, 3, \ldots, n)$ Se pide:

1. **(0,5 puntos)** Para un problema en particular, con n discos, ¿cuál es el factor de ramificación? ¿Cuál es el tamaño del espacio de estados?

Como invertir más discos exige un mayor consumo de energía que cuando se invierten menos, se considera que el coste para invertir la posición de los m primeros discos es igual a m. Por lo tanto, el coste de generar la secuencia $(1, 4, 3, 2)$ en el ejemplo anterior sería de dos unidades, mientras que el coste de $(2, 3, 1, 4)$ sería de cuatro unidades. Un grupo de expertos ha sugerido el uso de las siguientes funciones heurísticas:

h_1 El radio del disco más grande que está fuera de su sitio

h_2 El número de discos que están fuera de su sitio

h_3 El radio del disco que está en la primera posición menos uno

Responde razonadamente las siguientes cuestiones:

2. **(0,5 puntos)** ¿La función h_1 es admisible? Si o no, y por qué
3. **(0,5 puntos)** ¿La función $h_1 + h_2$ es admisible? Si o no, y por qué
4. **(0,5 puntos)** ¿La función $h_2 + h_3$ es admisible? Si o no, y por qué
5. **(0,5 puntos)** ¿La función $\max(h_1, h_2, h_3)$ es admisible? Si o no, y por qué
6. **(0,5 puntos)** ¿Qué algoritmo de búsqueda emplearías para resolver problemas en este dominio?

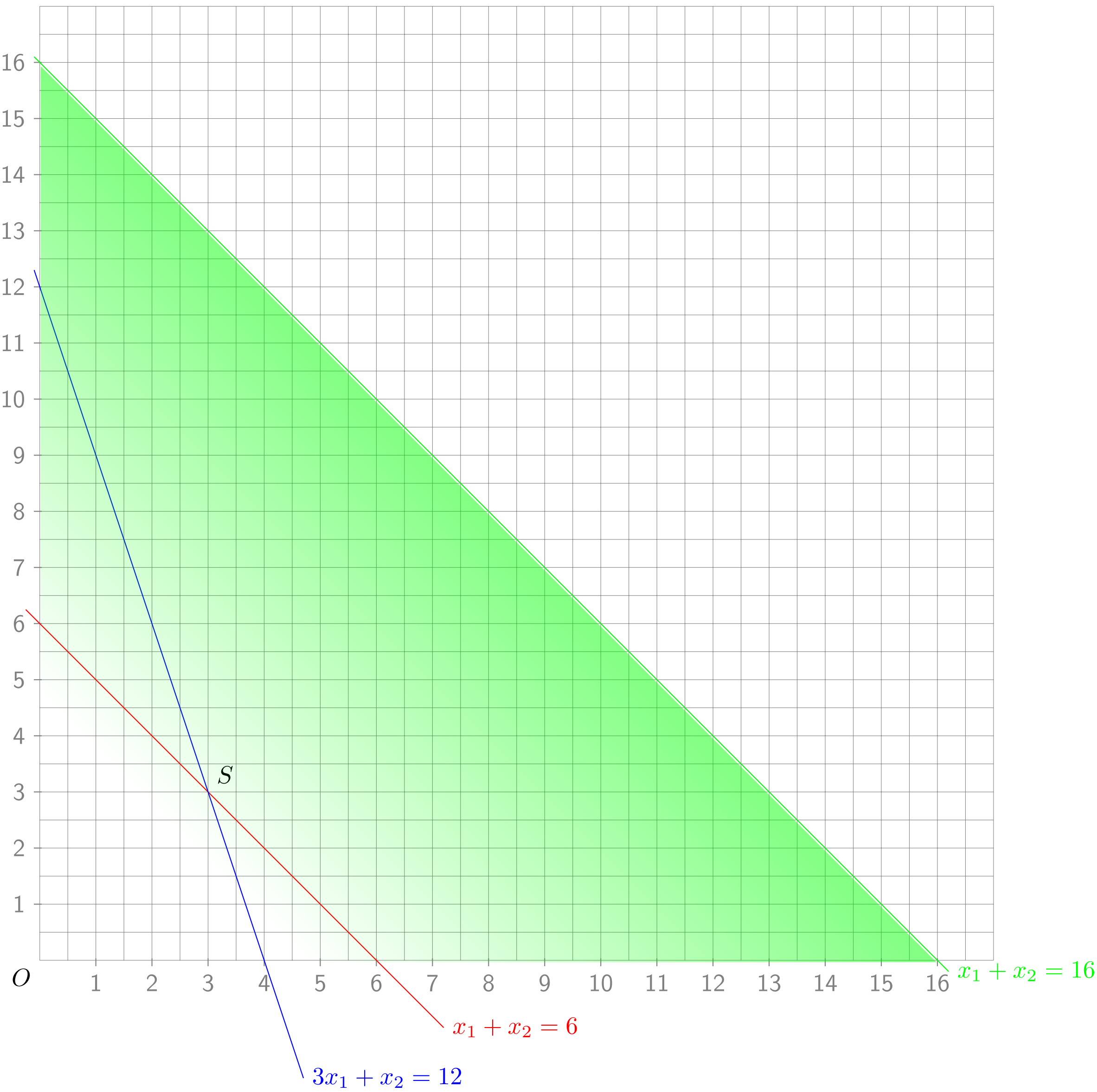
Soluciones del examen de Heurística y Optimización
Mayo 2012

Solución al problema 1

1. Para la representación gráfica del problema de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\multicolumn{5}{l}{\min z = -x_1 - 2x_2} \\
x_1 & + & x_2 & = & 6 \\
3x_1 & + & x_2 & = & 12 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

   no hace falta convertir el problema a ninguna forma en particular. Para representarlo basta con considerar el espacio bidimensional engendrado por las variables x_1 y x_2.



2. Puesto que las dos primeras restricciones son de igualdad, no definen otra región que las líneas mismas. En particular, la región factible que incluye a las dos primeras restricciones será, precisamente, su intersección,

el punto S. Como quiera que ese punto está definido asimismo en la región de la tercera restricción (señalada en verde), esa es la solución del primer problema.

La intersección de las dos primeras rectas se calcula simplemente como:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes de las dos primeras restricciones (las ecuaciones cuya interesección se quiere calcular) y $\mathbf{b}$ es su vector de términos independientes.

3. En el tercer apartado se pedía poner el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{rrrcl} \multicolumn{5}{c}{\max z = x_1 + 2x_3} \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\ \multicolumn{5}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

en forma *estándar*, precisamente en preparación a su resolución con el algoritmo SIMPLEX en el siguiente apartado.

Un problema de programación lineal está en forma *estándar* si todas las restricciones son de igualdad, las variables de decisión son no negativas y, por último, el vector de constantes o recursos $\mathbf{b}$ no contiene términos negativos. El problema, tal y como viene dado, ya verifica todas estas propiedades salvo la primera. Para convertir las desigualdades de la forma $\leq$ en igualdades, basta con añadir las *variables de holgura* x_4 y x_5 como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rrrrrcl} \multicolumn{7}{c}{\max z = x_1 + 2x_3} \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & 3 \\ \multicolumn{7}{c}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \end{array}$$

Como la función objetivo es de maximización, se dice que este problema está en forma *estándar* de maximización

4. Aunque no es estrictamente necesario, se iniciará la aplicación del SIMPLEX con una base factible inicial igual a la matriz identidad de 2×2 (puesto que el menor rango de la matriz de coeficientes es el de filas, 2), I_2, que es la que resulta de considerar en la base las variables de holgura x_4 y x_5. Con la selección de esa base, se aplicarán repetidamente las reglas de entrada y salida hasta que no sea posible mejorar el valor de la función objetivo.

Paso 0. Cálculo de una solución factible inicial

a) Cálculo de las variables básicas
Originalmente se consideran las variables x_4 y x_5 puesto que inducen una base que es igual a la identidad de dimensión 2.

$$B_0 = I_2, \quad B_0^{-1} = I_2$$

Con esta base, los valores de las variables básicas se calculan como sigue:

$$\mathbf{x_0^*} = B_0^{-1} b = I_2^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Selección de la variable de entrada
Como en este paso, la base es la matriz identidad, no hay ninguna necesidad de calcular los vectores $\mathbf{y}$ que, en todos los casos serán iguales a los vectores $\mathbf{a}$ de la matriz de coeficientes. A continuación se muestran los vectores $\mathbf{y}$ de las variables *no básicas*:

$$y_1{=}a_1 \quad y_2{=}a_2 \quad y_3{=}a_3$$

A partir de ellos, es posible calcular los *costes reducidos* de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(z_1-c_1)&=c_{B_0}^T y_1-c_1=(0\quad 0)\, y_1-1=-1\\
(z_2-c_2)&=c_{B_0}^T y_2-c_2=(0\quad 0)\, y_2-0=\ 0\\
(z_3-c_3)&=c_{B_0}^T y_3-c_3=(0\quad 0)\, y_2-2=-2
\end{aligned}
$$

donde $c_{B_0}^T$ denota los coeficientes del vector de costes **de las variables básicas** que, puesto que ahora son las variables de holgura, aparecen en la función de coste con coeficiente nulo.
De acuerdo con la regla de la variable de entrada, lo hará aquella más negativa, que en este caso es x_3.

c) Selección de la variable de salida
Según la regla de selección de salida, se escoge aquella variable con el mínimo coeficiente x/y con denominadores estrictamente positivos:

$$\theta=\min\left\{\frac{4}{1},\frac{3}{2}\right\}=\frac{3}{2}$$

que se corresponde con la segunda variable básica. Por lo tanto, sale x_5.

Paso 1 Mejora de la solución (iteración 1)

a) Cálculo de las variables básicas
En este paso, la base está formada por las variables x_3 y x_4. Por lo tanto, la base (y su inversa) son:

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad B_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

cuyo valor se calcula como sigue:

$$\mathbf{x_1^*}=B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

b) Selección de la variable de entrada
A diferencia de lo que ocurriera en el primer paso, ahora sí deben calcularse los vectores $\mathbf{y}$, puesto que la base ya no es igual a la identidad:

$$y_1=B_1^{-1}a_1=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$y_2=B_1^{-1}a_2=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$y_5=B_1^{-1}a_5=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

A partir de estos vectores, ya es posible calcular los *costes reducidos* de las variables no básicas, tal y como se indica a continuación:

$$(z_1-c_1)=c_{B_1}^T y_1-c_1=(2\quad 0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}-1=-2$$

$$(z_2-c_2)=c_{B_1}^T y_2-c_2=(2\quad 0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}-0=1$$

$$(z_5-c_5)=c_{B_1}^T y_1-c_1=(2\quad 0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}-0=1$$

y como la variable con el coste reducido más negativo es x_1, ésta es la variable que entra ahora.

c) Selección de la variable de salida
Como antes, la variable que salga será aquella que minimice el cociente siguiente:

$$\theta = \min\left\{ \cancel{\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}}, \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \right\} = 1$$

donde, como se puede observar, se ha descartado el primer cociente puesto que el denominador no es positivo. Por lo tanto, sale la segunda variable básica que es x_4.

Paso 2 Mejora de la solución (iteración 2)

a) Cálculo de las variables básicas
En la segunda iteración del proceso de mejora de la solución (que es el tercer paso del proceso completo), la base está formada por las variables x_1 y x_3. Por lo tanto, la base (y su inversa) son:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

y el valor de las nuevas variables básicas es:

$$\mathbf{x_2^*} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Selección de la variable de entrada
En primer lugar, se calculan los vectores $\mathbf{y}$:

$$y_2 = B_2^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$y_4 = B_2^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$y_5 = B_2^{-1} a_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

De donde resultan los *costes reducidos* de las variables no básicas que se muestran a continuación:

$$(z_2 - c_2) = c_{B_2}^T y_2 - c_2 = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{5}$$

$$(z_4 - c_4) = c_{B_2}^T y_4 - c_4 = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 0 = \frac{4}{5}$$

$$(z_5 - c_5) = c_{B_2}^T y_5 - c_5 = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} - 0 = \frac{3}{5}$$

de modo que esta vez entra la variable x_2

c) Selección de la variable de salida
La variable que salga será aquella que minimice el cociente siguiente:

$$\theta = \min\left\{ \cancel{\frac{1}{-\frac{3}{5}}}, \frac{2}{\frac{1}{5}} \right\} = 10$$

donde, como se puede observar, se ha descartado el primer cociente puesto que el denominador no es positivo. Por lo tanto, sale la segunda variable básica que es x_3.

Paso 3 Mejora de la solución (iteración 3)

a) Cálculo de las variables básicas
En esta ocasión, la base está formada por las variables básicas x_1 y x_2. Por lo tanto, su base (y su inversa) son:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyo valor se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{x_3^*} = B_3^{-1} b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b) Selección de la variable de entrada
En primer lugar, se calculan los vectores $\mathbf{y}$:

$$y_3 = B_3^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = B_3^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = B_3^{-1} a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De donde resultan los *costes reducidos* de las variables no básicas que se muestran a continuación:

$$(z_3 - c_3) = c_{B_3}^T y_3 - c_3 = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 = 1$$

$$(z_4 - c_4) = c_{B_3}^T y_4 - c_4 = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

$$(z_5 - c_5) = c_{B_3}^T y_5 - c_5 = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

con todas las variables siendo positivas, el problema ha acabado y la solución viene dada por el vector $\mathbf{x_3^*}$ calculado en el primer paso de esta iteración que, a continuación, se extiende también a las variables no básicas o *degeneradas*:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Si la función de coste se representa algebraicamente como:

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

entonces el valor óptimo resulta, simplemente, de sustituir en la expresión anterior el vector $\mathbf{x}$ por la solución óptima calculada en el paso anterior $\mathbf{x}^*$:

$$z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 7$$

Nótese que el vector de coeficientes de la función de coste se ha extendido con los coeficientes de las variables de holgura que siempre tendrán el valor 0.

6. El problema dual resulta de *transponer* la matriz de coeficientes y de intercambiar los vectores de coste y recursos independientes. Además, la nueva función de coste será de minimización si la del problema primal era de maximización y al contrario. Por último, las restricciones serán ahora del tipo $\geq$:

$$\begin{array}{rcrcl} & & \text{mín}\, w = 4x'_1 + 3x'_2 & & \\ & 2x'_1 & - & x'_2 & \geq & 1 \\ - & x'_1 & + & x'_2 & \geq & 0 \\ & x'_1 & + & 2x'_2 & \geq & 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

de modo que ahora hay tantas variables como restricciones había antes y tantas restricciones como variables había en el problema primal.

7. En vez de aplicar el Simplex a la resolución del problema de Programación Lineal mostrado en el apartado anterior es más razonable calcular la solución directamente a partir de la solución del problema primal ya calculada previamente.

En particular, para resolver el problema de esta manera, se usará un teorema que afirma que:

Si el problema de programación lineal en forma simétrica tiene una solución óptima correspondiente a una base $\mathbf{B}$, entonces $\mathbf{x'}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}$ es una solución óptima para el problema dual

En este teorema, los términos usados para el cálculo de la solución óptima del problema dual se refieren al problema primal, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Por lo tanto c_B^T es el vector de costes de las variables básicas en la solución del problema primal y B la base usada para el cálculo de la misma solución —que se mostró en el último paso de aplicación del Simplex. Por el contrario, x'^T es la solución del problema dual.

En particular:

$$x'^* = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 1)$$

8. Para la resolución del último apartado, basta con recordar la *interpretación económica* de las soluciones de un problema dual que advierte que:

La variable dual $x_i'^*$ indica la contribución por unidad del recurso i-ésimo b_i a la variación el en valor óptimo z^* actual del objetivo

de modo que el valor óptimo de la segunda variable, $x_2'^*$ es el valor pedido, 1.

Solución al problema 2

1. Si, tal y como advierte el enunciado, cada variable i representa la posición que ocupa el dígito i en una palabra clave entonces, teniendo en cuenta que las palabras clave constan de cinco posiciones:

$$D_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

donde D_i representa el dominio de la variable x_i. Como puede haber hasta diez dígitos diferentes, $0 \leq i \leq 10$

En particular, es factible acotar el dominio de cada una de estas variables para las tres pistas dadas en el enunciado. En particular:

- El dígito 1 aparece el primero en dos pistas (132 y 173) de modo que no podría estar nunca en ninguna de las dos últimas posiciones, $D_1 = \{1, 2, 3\}$. De la misma manera, el 7 aparece también primero en una pista (725), de modo que $D_7 = \{1, 2, 3\}$
- En una pista en particular (132), el 2 aparece en último lugar y, por ello no podría estar nunca en la solución en ninguna de las dos primeras posiciones, $D_2 = \{3, 4, 5\}$. Equivalentemente, el 3 aparece también el último en una pista (173) y, por ello, $D_3 = \{3, 4, 5\}$. Lo mismo ocurre con el 5 que aparece en último lugar en la pista 725 y, por ello, $D_5 = \{3, 4, 5\}$

  Con éstos, ya se han calculado los dominios de cinco variables, de modo que la palabra secreta no puede contener otros dígitos:

  $$D_0 = D_4 = D_6 = D_8 = D_9 = \varnothing$$

  Por supuesto que estos dominios pueden acotarse aún más, pero para ello debe forzarse la consistencia como se pedía en los siguientes apartados. En particular, es fácil observar que las pistas dadas ofrecen una solución, 17325, de modo que la respuesta a las siguientes preguntas debe ser siempre positiva ¡siempre debe haber una asignación de valores a las variables que garantice cualquier tipo de consistencia puesto que existe una solución! Durante el proceso de inferencia, se eliminarán aquellos valores de los dominios de cada variable que no pueden formar parte de la solución.

2. x_1 y x_2 serán arco consistentes si para cada valor de un dominio de la primera variable, existe otro en la segunda que aparezca en la restricción R_{12}. En particular, si hay algún valor en la primera variable que no sea consistente con ninguno de los valores del dominio de la segunda, entonces puede eliminarse. Sólo si el dominio resultante de este proceso para la primera variable da el conjunto vacío puede decirse que ambas variables no son arco consistentes.

   A partir de las consideraciones del apartado anterior, resulta obvio que el dígito 1 debe aparecer antes del dígito 2. Teniendo en cuenta los valores de los dominios calculados previamente, los valores permitidos simultaneamente para x_1 y x_2 son:

   $$\begin{array}{lll} R_{12} = & D_1 \otimes D_2 = & \{(1,3),(1,4),(1,5) \\ & & \ (2,3),(2,4),(2,5) \\ & & \ (3,4),(3,5) \qquad \} \end{array}$$

   donde $\otimes$ representa el producto escalar entre conjuntos. Intuitivamente, R_{12} representa el hecho de que el dígito 1 debe preceder en la palabra clave al dígito 2.

   Nótese que la tupla $(3, 3)$ se ha eliminado porque dos dígitos diferentes no pueden estar en la misma posición. Sin embargo, esta eliminación no sirve para eliminar ningún valor del dominio de las variables x_1 y x_2 que resultan inalteradas después de considerar la arco consistencia.

3. Por otra parte, la camino consistencia involucra a una tercera variable. De hecho, la restricción R_{12} es camino consistente en relación a la variable x_k ($k \in \{3, 5, 7\}$) si y sólo si para cada par $(a_i, a_j) \in R_{12}$, existe un valor $a_k \in D_k$ tal que $(a_i, a_k) \in R_{1k}$ y $(a_k, a_j) \in R_{k2}$.

   En el enunciado, la única variable que relaciona simultaneamente las variables x_1 y x_2 es x_3 como indica la primera pista, 132.

   Para calcular la camino consistencia de x_1 y x_2 respecto de x_3 se muestran primero las restricciones R_{13} y R_{32} (calculados como en el apartado anterior):

   $$\begin{array}{lll} R_{13} = & D_1 \otimes D_3 = & \{(1,3),(1,4),(1,5) \\ & & \ (2,3),(2,4),(2,5) \\ & & \ (3,4),(3,5) \qquad \} \end{array}$$

   $$\begin{array}{lll} R_{32} = & D_3 \otimes D_2 = & \{(3,4),(3,5) \\ & & \ (4,5), \qquad \} \end{array}$$

La primera restricción, R_{13} se ha calculado como antes. Por otra parte, la segunda representa el mismo concepto: que el dígito 3 debe preceder al dígito 2 como resulta de la pista 132, pero en este caso se han considerado dominios diferentes $D_2 = D_3 = \{3, 4, 5\}$. Como antes, se han eliminado todas las tuplas con elementos repetidos.

Basta con observar que R_{32} no contiene tuplas que comiencen por 5, de modo que todas aquellas (y sólo esas) que acaben con 5 en R_{13} violan la camino consistencia y pueden eliminarse.

Por lo tanto, x_1 y x_2 sí son camino consistentes respecto de x_3 y los dominios de x_1, x_2 y x_3 quedan ahora como sigue:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{1, 2, 3\} \\ D_2 &= \{3, 4, 5\} \\ D_3 &= \{3, 4\} \end{aligned}$$

Solución al problema 3

Aunque no se pedía en el enunciado, primero se mostrará la forma de representar los estados y la definición de operadores.

En este caso, la descripción del espacio de estados puede hacerse sencillamente con una lista ordenada que almacena, en cada posición, el radio del disco que ocupa precisamente esa posición. Por lo tanto, la secuencia $(4, 1, 3, 2)$ representa (como explicaba el enunciado) el estado que tiene, de izquiera a derecha, los discos de radios 4, 1, 3 y 2, respectivamente.

En este problema existe un único operador, `invertir`, con un único parámetro `m`, $(m \leq n)$, que invierte precisamente las primeras m posiciones del vector que caracteriza un estado.

El operador de inversión puede describirse como sigue:

`Invertir (m)`:

`SWAP` $(i, \mathtt{m} - i + 1), \forall i \quad 1 \leq i \leq \lfloor \frac{\mathtt{m}}{2} \rfloor$

donde `SWAP` intercambia las dos posiciones indicada en sus argumentos.

Las respuestas a las preguntas se muestran a continuación:

1. Mientras que sí es posible invertir todas las posiciones del brazo al mismo tiempo (pasando, por ejemplo, del estado $(4, 1, 3, 2)$ al estado $(2, 3, 1, 4)$), no tiene ningún sentido invetir *únicamente* la primera posición, puesto que esa inversión no altera el estado en absoluto.

   Por lo tanto, desde cualquier estado pueden alcanzarse otros $(n - 1)$, y ése será precisamente el factor de ramificación.

   En realidad no es tan fácil de demostrar, pero resulta razonable asumir que el operador `invertir` sirve para generar una cualquiera de todas las permutaciones posibles de discos. Por lo tanto, para n discos, el espacio de estados estará necesariamente acotado por $n!$

2. Deben considerarse dos casos diferentes:

   a) El disco más grande fuera de su lugar ocupa la primera posición del brazo. Por ejemplo, en la configuración $(4, 1, 3, 2)$, todos los discos están descolocados y, en particular, el más grande de ellos, el 4, ocupa la primera posición.

   En este caso, está claro que la forma más rápida de disponerlo en su posición final (la cuarta), consistirá en hacer un único movimiento que aplica la inversión a las primeras 4 posiciones. Tal y como explica el enunciado, el coste de ese operador es exactamente igual a 4 y, por lo tanto $h_1(\cdot) \leq h^*(\cdot)$

   b) El disco más grande fuera de su lugar ocupa cualquier posición, i, distinta de la primera —de modo que $i > 1$. Por ejemplo, en la configuración $(1, 4, 3, 2)$, los tres últimos discos están mal colocados y de ellos, el 4, es el de mayor radio.

   Tal y como se ve en la descripción del operador `invertir`, la posición i-ésima se intercambia siempre con la que ocupa la posición $(\mathtt{m} - i + 1)$. Por lo tanto, para devolver el disco de radio r desde la posición $i > 1$, a la que le corresponde (que será necesariamente r), es preciso aplicar una inversión con $\mathtt{m} = r + (i - 1)$ y como $i > 1$ por hipótesis, el coste de este operador será necesariamente mayor que r. Por ello, $h_1(\cdot) \leq h^*(\cdot)$

   En conclusión, h_1 es siempre admisible

3. Es muy fácil ver, con un ejemplo, que la respuesta es necesariamente negativa.

   Considérese el estado $(4, 3, 2, 1)$. En este caso, h_1 devolvería 4, puesto que el disco descolocado de mayor radio es precisamente 4; por otra parte, h_2 vale también 4, puesto que los cuatro discos (1, 2, 3 y 4) están mal dispuestos. En conclusión $h_1 + h_2 = 4 + 4 = 8$

   Sin embargo, el estado anterior puede resolverse con una aplicación de `invertir` (4) cuyo coste es de 4 unidades. Como quiera que $h_1 + h_2 = 8 > h^* = 4$, puede concluirse que la heurística sugerida es no admisible

4. Como antes, puede demostrarse con un ejemplo que la suma sugerida no verifica la admisibilidad.

   Considerando de nuevo el mismo estado de antes, h_2 vale 4. Por su parte, h_3 valdrá 3 puesto que el radio del disco en la primera posición es 4 y $(4 - 1) = 3$. Por lo tanto, $h_2 + h_3 = 4 + 3 = 7 > h^* = 4$.

   Y así queda demostrado que la suma sugerida resulta en una función heurística no admisible

5. Puesto que en este caso se devuelve el máximo de varias funciones heurísticas, el resultado será admisible si y sólo si, todas las funciones heurísticas son admisibles.

   a) En el segundo apartado ya se demostró que la función heurística h_1 es admisible

   b) Considérese un estado arbitrario con k discos mal dispuestos. De ellos, el disco más grande tendrá un radio necesariamente mayor o igual que k. Esta observación resulta del hecho de que en un estado con n discos el brazo contiene los discos con radios desde 1 hasta n, sin repetición.

      Por lo tanto, $h_2 \leq h_1$. Como quiera que h_1 es una función demostradamente admisible, también lo será h_2

   c) A propósito de la tercera función heurística, obsérvese que todas las configuraciones que comienzan con un disco de radio r tienen una estimación heurística $h_3 = (r - 1)$

      1) Si el primer disco es el de radio 1, la función heurística devuelve $h_3 = (1 - 1) = 0$ que es necesariamente una estimación admisible —y con frecuencia pobremente informada

      2) En cualquier otro caso, hará falta invertir al menos las primeras r posiciones para poner el disco en la posición correcta. Eso se hace con una aplicación del operador `invertir` (r), con un coste igual a $r > h_3 = (r - 1)$
         Por lo tanto, h_3 es también admisible

   Como el máximo de tres funciones heurísticas admisibles debe resultar necesariamente en una función admisible, la función sugerida en este apartado será efectivamente admisible.

6. Después de haber discutido profusamente diferentes heurísticas, no tendría ningún sentido sugerir la aplicación de un algoritmo de fuerza bruta. En su lugar, se sugiere la aplicación de un algoritmo de búsqueda heurística que sea *completo* y, puesto que las funciones heurísticas sugeridas son admisibles, que sea también *admisible*.

   En particular, el algoritmo A^* nos garantizaría una solución óptima. Si además, las restricciones de memoria son muy fuertes, el IDA* sería más adecuado.