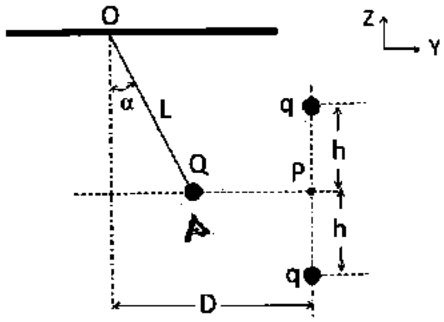
(P1.1)

**P1.** ***(2p)*** Una partícula de masa M y carga Q se encuentra suspendida del punto O por un hilo de masa despreciable y longitud L. Además se tienen dos partículas puntuales de carga q, que se encuentran fijas en las posiciones indicadas en la figura. Cuando el hilo del péndulo y la vertical forman un ángulo α, la partícula del péndulo está en equilibrio. Sabiendo que en esta situación el módulo de la tensión de la cuerda es T= 0.179 N




a) Calcular el valor de Q

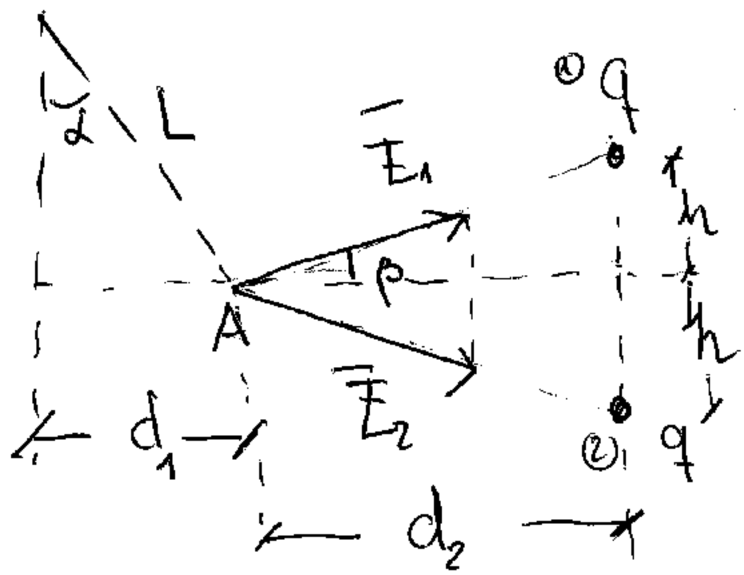
b) Calcular el trabajo necesario para traer una partícula de carga q' desde el infinito hasta el punto P indicado en la figura.

DATOS: q= -1.25 μC; M= 15 g; L= 2.4 m; α= 35º; D= 4 m; h= 1.2 m; q'= 8 μC; g=9.8 m/s$^2$

a) Cálculo de la fuerza eléctrica que experimenta Q ( A ≡ punto donde se localiza la partícula)

$\vec{F}_e = Q\,\vec{E}(A)$

De la figura (posición equilibrio) deducimos que $\boxed{Q > 0}$




Debido a la simetría del problema

$\vec{E}(A) = \vec{E}_1(A) + \vec{E}_2(A)$

$= E_y\,\vec{j}$

$E_y = 2E_{1y}$

$E_{1y} = E_1 \cos\beta$

$d_1 = L\,\text{sen}\,\alpha$

$d_2 = D - L\,\text{sen}\,\alpha$

$$\cos\beta = \frac{d_2}{(h^2 + d_2^2)^{1/2}}$$

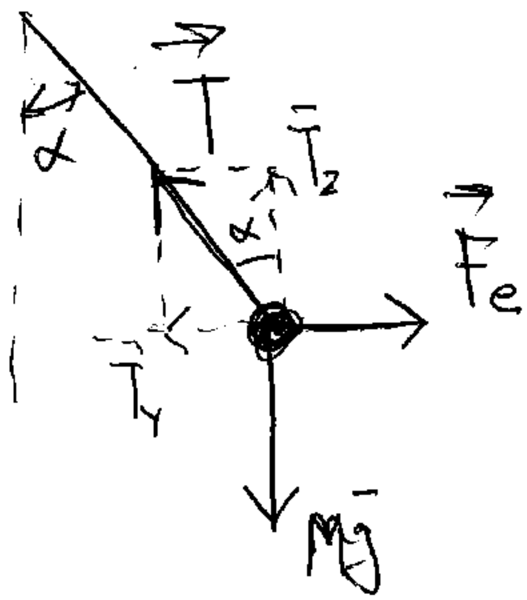
(Pl.2)

$$E_1 = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 (h^2+d_2^2)}$$

$$E_{1y} = E_1 \cos\beta = \frac{|q| d_2}{4\pi\epsilon_0 (h^2+d_2^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(A) = \frac{|q| d_2}{2\pi\epsilon_0 (h^2+d_2^2)^{3/2}} \vec{j}$$

$$\vec{F}_e(A) = \frac{|q| Q (D - L\,\mathrm{sen}\alpha)}{2\pi\epsilon_0 \left[h^2 + (D - L\,\mathrm{sen}\alpha)^2\right]^{3/2}} \vec{j}$$




$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{T} + \vec{F}_e + M\vec{g} = 0$$

A la vista del diagrama de fuerzas, se tiene que verificar

$$\begin{cases} T_y = F_e \\ T_z = Mg \end{cases}$$

P1.3

$$T_y = T \operatorname{sen}\alpha = \frac{|q| Q \,(D - L \operatorname{sen}\alpha)}{2\pi\varepsilon_0 \left[h^2 + (D - L\operatorname{sen}\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$\boxed{Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 T \left[h^2 + (D - L\operatorname{sen}\alpha)^2\right]^{3/2} \operatorname{sen}\alpha}{|q| \,(D - L\operatorname{sen}\alpha)}}$$

$$\boxed{Q = 4.18 \cdot 10^{-5}\ C}$$

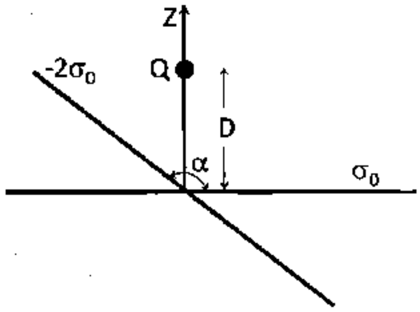
b) $W = q' \left[V(P) - V(\infty)\right] \qquad V(\infty) = 0$

$$V(P) = 2\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D - L\operatorname{sen}\alpha)}$$

$$\boxed{W = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{h} + \frac{Q}{2(D - L\operatorname{sen}\alpha)}\right]}$$

$$\boxed{W = 0.996\ J}$$

**P2.** ***(2p)*** Se tienen las siguientes distribuciones de carga:




- Un plano infinito, que coincide con el plano XY, cargado uniformemente con densidad de carga $\sigma_0$
- Un plano infinito, que forma un ángulo $\alpha$ con el plano anterior, tal y como indica la figura, cargado uniformemente con densidad de carga $-2\sigma_0$
- Una carga puntual de valor Q localizada en (0, 0, D)

a) Deducir la expresión general del campo eléctrico creado por un plano infinito cargado uniformemente con densidad de carga $\sigma$.

b) Calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P (0, D/2, D/2)

c) ¿Cuál debería ser el valor de Q para que el campo eléctrico en P fuera un vector $\vec{E} = E\,\vec{k}$ ?

DATOS: $\sigma_0 = 1.4\times10^{-6}$ C/m$^2$; $\alpha = 140°$; Q= $4.5\times10^{-5}$ C; D= 6 m

Solución:

a) La deducción de la expresión se puede encontrar en cualquier libro de texto. Por ejemplo, ver página 45 del libro "Física para Ciencias e Ingenierías. Vol II" de R.A. Serway . Editorial Thomson (2004).

b) El campo debido a la carga puntual será

$$\vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^3}\vec{r}\,;$$

donde

$$\vec{r} = \frac{D}{2}\vec{j} - \frac{D}{2}\vec{k};\quad r = \frac{D}{2}\sqrt{2}$$

El campo debido al plano de carga situado en el plano XY

$$\vec{E}_{\sigma_o} = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}\vec{k}$$

La contribución del plano oblicuo con respecto al anterior vendrá dado por

$$\vec{E}_{-2\sigma_o} = -\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} + sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\vec{k}\right]$$

El campo neto en P será

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_Q + \vec{E}_{\sigma_0} + \vec{E}_{-2\sigma_0}$$

Es decir

$$\vec{E}(P) = \left[\frac{Q}{2^{3/2}\pi\varepsilon_o D^2} - \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}\cos(\alpha - \pi/2)\right]\vec{j} + \left[\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} sen(\alpha - \pi/2) - \frac{Q}{2^{3/2}\pi\varepsilon_o D^2}\right]\vec{k}$$

Sustituyendo valores numéricos obtenemos

$$\vec{E}_T = -5.58 \cdot 10^4 \vec{j} - 5.80 \cdot 10^4 \vec{k} \ \text{ N/C}$$

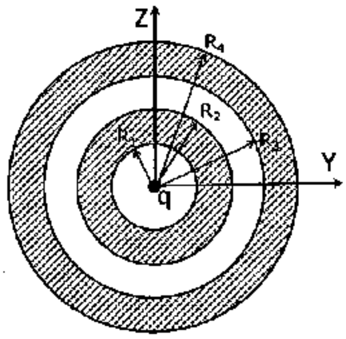
c)

$$\vec{E}_y(P) = 0 \Rightarrow \left[\frac{Q}{2^{3/2}\pi\varepsilon_o D^2} - \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}\cos(\alpha - \pi/2)\right] = 0 \Rightarrow Q = 2^{3/2}\pi D^2 \sigma_o \cos(\alpha - \pi/2)$$

Sustituyendo valores queda finalmente

$$Q = 2.89 \cdot 10^{-4} \ C$$

P3.1




**P3.** ***(2p)*** Se tienen dos esferas conductoras huecas, que se colocan de manera concéntrica tal y como se indica en la figura, con su centro situado en el origen de coordenadas. La esfera de radio interno $R_1$ y radio externo $R_2$ tiene una carga $Q_1$, mientras que la esfera de radio interno $R_3$ y radio externo $R_4$ tiene una carga $Q_2$. Además, se coloca una carga puntual q en el centro de las esferas. Dados los puntos A (0, 0, 2) y B(0, 0, 7), se sabe que la relación de los módulos del campo eléctrico en dichos puntos es $\frac{E(A)}{E(B)} = 37.69$

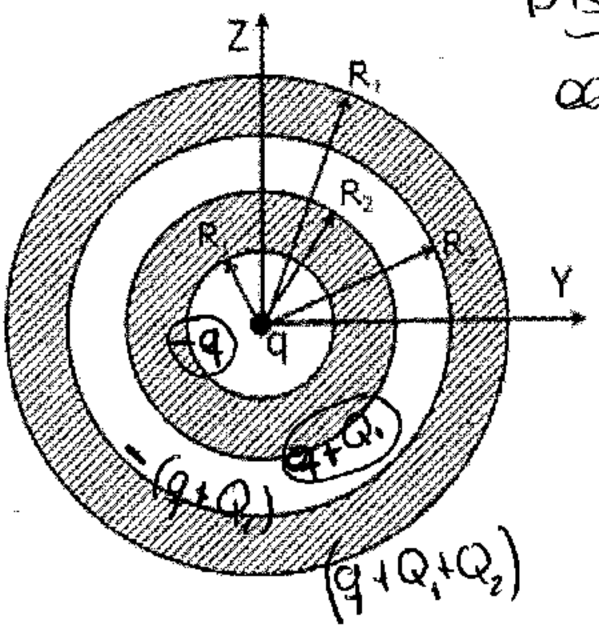
a) Calcular el valor de $Q_1$.

b) Calcular las densidades de carga en todas las superficies conductoras.

c) Dados los puntos P1 (0, 0, 15) y P2 (0, 0, 20) calcular la diferencia de potencial $(V(P2) - V(P1))$

DATOS: $R_1$ = 4 cm; $R_2$ = 6 cm; $R_3$ = 8 cm; $R_4$ = 12 cm; q= 8 μC; $Q_2$= 3 μC

NOTA: Todas las coordenadas están expresadas en cm




Distribuciones de carga en el equilibrio electrostático

A) Esfera interior: carga en cavidad

$Q_{CAV1} = q$

B) Esfera exterior: carga en cavidad

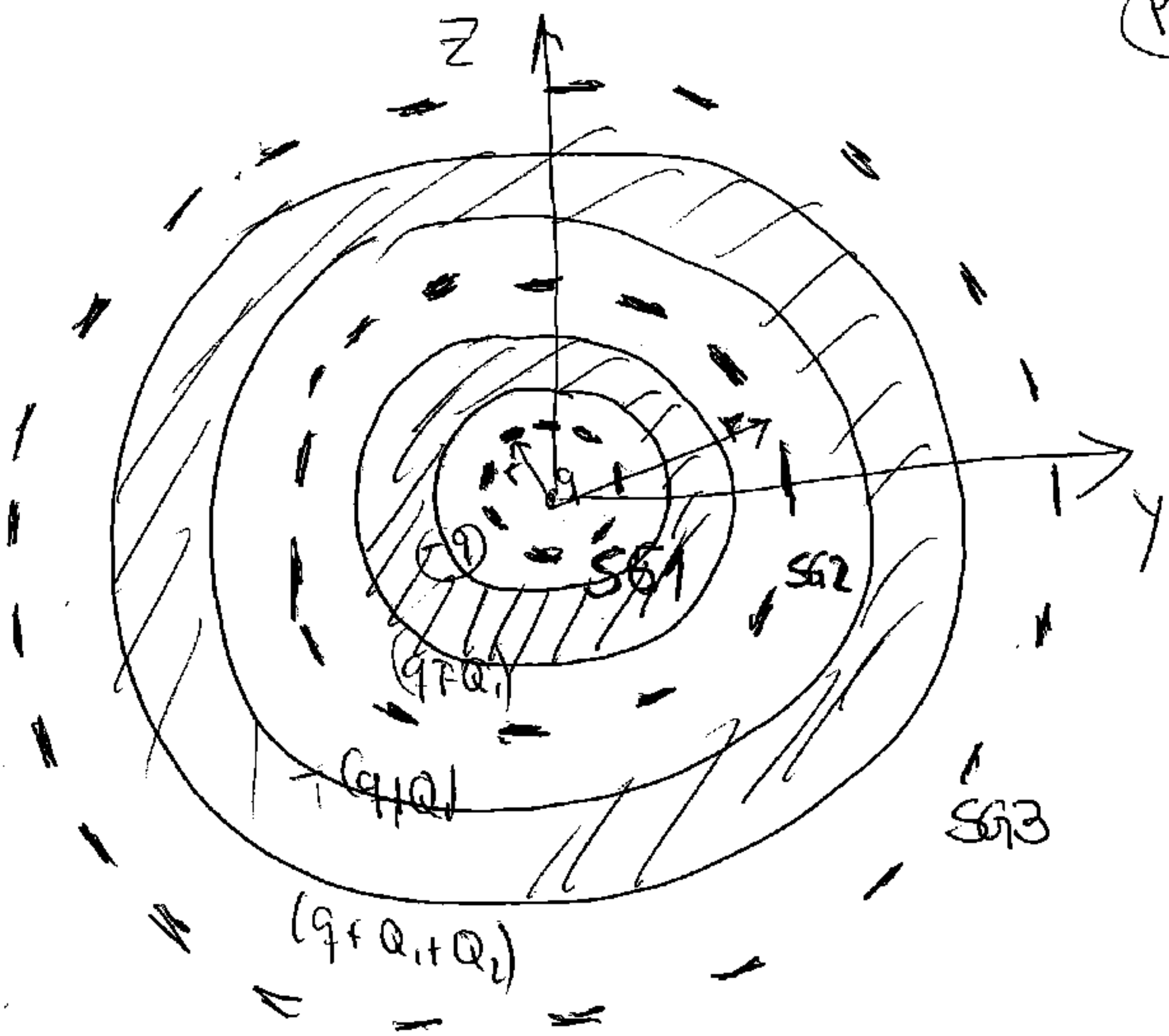
$Q_{CAV2} = (q + Q_1)$

Cálculo de campos eléctricos

$A \in \boxed{r < R_1}$

$B \in \boxed{R_2 < r < R_3}$

El problema tiene simetría gaussiana esférica




$\boxed{r < R_1}$ $\displaystyle\oiint_{SG1} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

$\boxed{R_2 < r < R_3}$ $\displaystyle\oiint_{SG2} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E\,4\pi r^2 = \frac{(q+Q_1-q+q)}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{(q+Q_1)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

P3.3

A: $r_A = 0.02\ m$ $\quad \vec{u}_{rA} = \vec{k}$

B: $r_B = 0.07\ m$ $\quad \vec{u}_{rB} = \vec{k}$

$$\frac{E(A)}{E(B)} = f = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A^2}\right)\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 r_B^2}{q+Q_1}\right)$$

$$(q+Q_1) = \frac{q\, r_B^2}{f\, r_A^2} = 2.6 \cdot 10^{-6}\ C$$

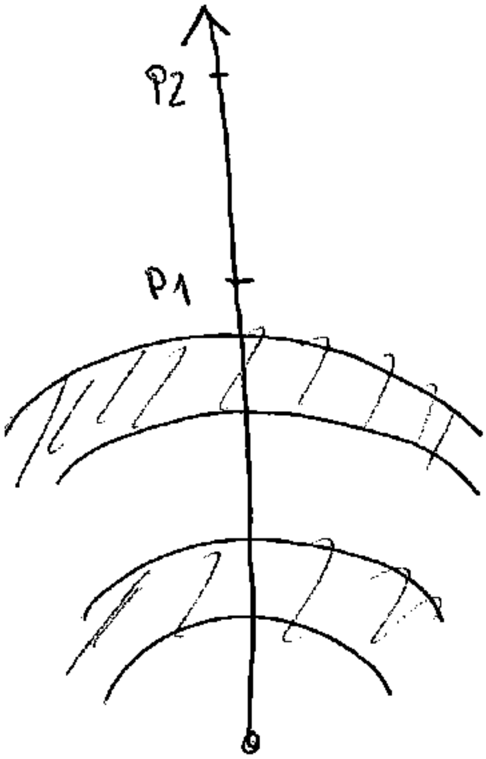
$$\boxed{Q_1 = -5.4 \cdot 10^{-6}\ C}$$

b) $$\sigma(R_1) = \frac{-q}{4\pi R_1^2} = -3.98 \cdot 10^{-4}\ C/m^2$$

$$\sigma(R_2) = \frac{q+Q_1}{4\pi R_2^2} = 5.75 \cdot 10^{-5}\ C/m^2$$

$$\sigma(R_3) = \frac{-(q+Q_1)}{4\pi R_3^2} = -3.23 \cdot 10^{-5}\ C/m^2$$

$$\sigma(R_4) = \frac{q+Q_1+Q_2}{4\pi R_4^2} = 3.09 \cdot 10^{-5}\ C/m^2$$

c) 

(P34)

Expresión general de $\vec{E}$ para un punto $P(0,0,z)$ con $z > R_4$

$\boxed{z > R_4}$ $\oint\!\!\oint_{SG3} \vec{E}\cdot\vec{dS} =$

$$= E\,4\pi r^2 = \frac{(q+Q_1+Q_2)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{(q+Q_1+Q_2)}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\vec{u}_r \quad \left\{ \begin{array}{l} P(0,0,z) \\ r = z \\ \vec{u}_r = \vec{k} \end{array} \right.$$

$$\vec{E}(P) = \frac{(q+Q_1+Q_2)}{4\pi\varepsilon_0\, z^2}\vec{k}$$

$$V(P2) - V(P1) = -\int_{P1}^{P2} \vec{E}\cdot\vec{dr}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{dr} = E\,dz = \frac{(q+Q_1+Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 z^2}dz$$

P3.5

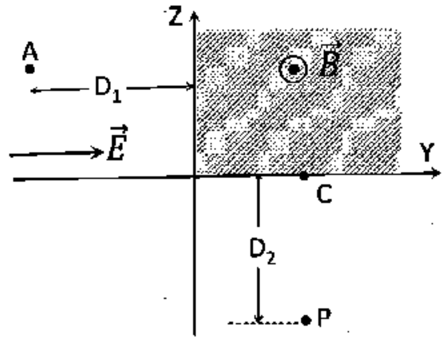
$$\boxed{V(P2) - V(P1)} = -\int_{z_{P1}}^{z_{P2}} \frac{(q+Q_1+Q_2)}{4\pi\epsilon_0 z^2}\, dz$$

$$= \frac{(q+Q_1+Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z}\right]_{z_{P1}}^{z_{P2}} =$$

$$= \boxed{\frac{(q+Q_1+Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z_{P2}} - \frac{1}{z_{P1}}\right]}$$

$$\boxed{V(P2) - V(P1) = -8.39 \cdot 10^4\ V}$$

**P4.** ***(2p)*** Una partícula $\alpha$ (un núcleo de He, compuesto de 2 protones y 2 neutrones) se coloca, inicialmente en reposo, en el punto A de la figura. En la región del espacio definida por y<0 se ha establecido un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\,\vec{j}$. Además, en la región del espacio definida por y>0 y z>0 (región sombreada de la figura) se ha establecido un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\,\vec{i}$. Sabiendo que el tiempo total que tarda la partícula $\alpha$ en ir del punto A al punto P es $t_{total}$ = 0.145 ms




a) Calcular el valor de $B_0$

b) Calcular las coordenadas cartesianas del punto C de la figura (punto por donde la partícula $\alpha$ atraviesa el eje Y)

DATOS: $E_0$= 2400 N/C; $D_1$= 450 m; $D_2$= 350 m

**a)**

Aplicando la segunda ley de Newton en la región 2 en la que existe el campo magnético

$$|q|vB_o = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow |q|B_o = m\frac{v}{R} \Rightarrow |q|B_o = m\omega \Rightarrow |q|B_o = m\frac{2\pi}{T}$$

De la expresión anterior obtenemos

$$B_o = \frac{2\pi m}{|q|T}$$

Ahora bien, como $m = 4m_p$ y $|q| = 2e$ la expresión anterior quedaría

$$B_o = \frac{4\pi m_p}{e\,T}$$

Para obtener el tiempo $t_1$ empleado en recorrer la región 1, hallamos la aceleración de la partícula

$$a = \frac{|q|E_o}{m}$$

Por otro lado

$$D_1 = \frac{1}{2} a\, t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2D_1}{a}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2mD_1}{|q|E}} = t_1 = \sqrt{\frac{4m_p D_1}{e\, E_o}}$$

Substituyendo

$$t_1 = 8.85 \cdot 10^{-5} s$$

El módulo de la velocidad con la que la partícula penetra en la región en la que existe un campo magnético será entonces

$$v = at_1 = \sqrt{\frac{2|q|\, D_1 E_o}{m}} = \sqrt{\frac{eD_1 E_o}{m_p}}$$

Sustituyendo valores numéricos en la expresión anterior obtenemos

$$v = 1.017 \cdot 10^7 \quad m/s$$

El tiempo empleado en alcanzar el punto P desde el C será

$$t_3 = \frac{D_2}{v} = 3.44 \cdot 10^{-5} \quad m/s$$

El tiempo total empleado por la partícula para ir de A a P lo podemos obtener a partir de una suma de tiempos asociados a cada una de las regiones: $t_1$ (región 1), $t_2$ (región) y $t_3$(región 3):

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \Rightarrow t = t_1 + \frac{T}{4} + t_3 \Rightarrow T = 4(t - t_1 - t_3)$$

Luego, sustituyendo en la expresión del periodo anteriormente obtenida

$$T = 4(t - t_1 - t_3) = 8.85 \cdot 10^{-5} s$$

Y por último, sustituyendo valores numéricos en la expresión del campo magnético que habíamos obtenido con anterioridad

$$B_o = \frac{4\pi m_p}{e\, T} = 1.48 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

**b)**

Primero obtenemos el radio de giro de la partícula en la región 2

$$|q|vB_o = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow |q|B_o = m\frac{v}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B_o} \Rightarrow R = \frac{2m_p v}{eB_o}$$

Sustituyendo valores numéricos queda

$$R = 143.5 \text{ m}$$

Luego las coordenadas cartesianas del punto C serán

$$C(0, R, 0) = C(0, 143.5, 0) \text{ m}$$