Soluciones # 12

Geometría de las transformaciones lineales

Problema 12.1 Para cada una de las transformaciones dadas se tiene:

a) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{0\}, \quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^2$.

b) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,((1,-2)^t), \quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,((2,1)^t)$.

c) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{0\}, \quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^2$.

d) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{0\}, \quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^2$.

e) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = \mathrm{Gen}(e_2)$, $\mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}(e_1), \quad N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\left((4,3)^t\right), \quad \mathcal{C}(A_T) = \mathrm{Gen}\left((-3,4)^t\right)$.

En todos los casos, la transformación adjunta T^* tiene la matriz asociada $A_{T^*} = A_T^t$.

Problema 12.2 Se tiene:

a) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (5,2,1)^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \mathrm{Gen}(e_1, e_3)$.

b) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (5, -2, -1)^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = Gen(e_1, e_2)$.

c) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (5, 0, 0)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = Gen(e_1)$.

d) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (5, 2, 0)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = Gen(e_1, e_2)$.

e) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (1, -2, 5)^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = Gen(e_2)$.

f) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (2\sqrt{2}, -2, 3\sqrt{2})^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = Gen(e_2)$.

g) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = (0, -8, 0)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \{0\}$.

h) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = \frac{1}{4}\left(8 - \sqrt{3}, 8 - \sqrt{3}, 2 - 4\sqrt{3}\right)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \{0\}$.

Problema 12.3 Se tiene que

a) La matriz asociada a la transformación y su forma escalonada son

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T sí es ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{0\}$; $\mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^3$.

b) La matriz asociada a la transformación y su forma escalonada son

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

T no es ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,(e_3)$, $\mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,(e_1, e_2)$.

c) La matriz asociada a la transformación y su forma escalonada son

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T sí es ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{0\}$; $\mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^3$.

En todos los casos, la transformación adjunta T^* tiene la matriz asociada $A_{T^*} = A_T^t$.