Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
Primer examen de evaluación continua
11 Noviembre 2019

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\cos(x)\cos(y) + 4x^3 + 2xy^2 + (4y^3 + 2x^2y - \sin(x)\sin(y))y' = 0\,,$$

se pide:

i) [**0.2 puntos**] Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) [**0.7 puntos**] Hallar la solución general de la EDO.

iii) [**0.1 puntos**] Comprobar la solución obtenida en el apartado anterior.

Solución:

i) Es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden (la máxima derivada de la función incógnita es la derivada primera), no lineal (la ecuación tiene términos no lineales, por ejemplo y^2).
Por otro lado, la EDO es de la forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, donde:
$M(x,y) = \cos(x)\cos(y) + 4x^3 + 2xy^2$ y $N(x,y) = 4y^3 + 2x^2y - \sin(x)\sin(y)$.
Se verifica que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4xy - \cos(x)\sin(y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \text{la EDO es exacta.}$$

ii) Como la EDO es exacta, existe una función $F(x,y)$ que satisface:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= M(x,y) = \cos(x)\cos(y) + 4x^3 + 2xy^2 \\
(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= N(x,y) = 4y^3 + 2x^2y - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

Integrando la ecuación (1) en la variable x se obtiene: $F(x,y) = \sin(x)\cos(y) + x^4 + x^2y^2 + g(y)\,.$
Derivando F parcialmente respecto de y e igualando el resultado al proporcionado por la ecuación (2) se tiene que: $\dfrac{dg}{dy}(y) = 4y^3 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = y^4$, donde hemos tomado la constante de integración igual a cero.

Por tanto, $F(x,y) = \sin(x)\cos(y) + x^4 + x^2y^2 + y^4$ y la solución general, en forma implícita, pedida es:

$$\boxed{\sin(x)\cos(y) + x^4 + x^2y^2 + y^4 = C\,,}$$

donde C es una constante.

iii) Teniendo en cuenta que $y = y(x)$, derivamos la ecuación implícita respecto de la variable independiente x y se obtiene:

$$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)y' + 4x^3 + 2xy^2 + 2x^2yy' + 4y^3y' = 0\,,$$

por tanto:

$$\cos(x)\cos(y) + 4x^3 + 2xy^2 + (4y^3 + 2x^2y - \sin(x)\sin(y))y' = 0\,.$$

Cuestión 2 (1 punto) Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 4y' + 5y = 5e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Se pide:

i) [**0.5 puntos**] Hallar la solución del PVI utilizando la transformada de Laplace.

ii) [**0.5 puntos**] Hallar la solución del PVI obteniendo una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados.

Solución:

i) Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2 - 4s + 5)F(s) = \dfrac{s+3}{s-2}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s^2 - 4s + 5)(s-2)} = \frac{Ms + N}{s^2 - 4s + 5} + \frac{A}{(s-2)}\,,$$

Sumando las fracciones

$$\frac{s+3}{(s^2 - 4s + 5)(s-2)} = \frac{(M+A)s^2 + (-2M + N - 4A)s - 2N + 5A}{(s^2 - 4s + 5)(s-2)}\,,$$

e identificando numeradores se obtiene: $M = -5\,, N = 11\,, A = 5\,.$ Por tanto:

$$F(s) = 5\frac{1}{s-2} - 5\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2 + 1}\right) =$$

y la solución del PVI es,

$$\boxed{y(t) = 5e^{2t} + e^{2t}\sin(t) - 5e^{2t}\cos(t) = (5 + \sin(t) - 5\cos(t))e^{2t}}$$

ii) Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - 4y' + 5y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, tiene por soluciones, $\lambda_1 = 2 + i$, y $\lambda_2 = 2 - i$,que son raíces complejas conjugadas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2t}\cos(t), e^{2t}\sin(t)\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1 e^{2t}\cos(t) + c_2 e^{-2t}\sin(t)\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(t)$:
Dado que el lado derecho de la ecuación diferencial es de la forma $g(t) = 5e^{2t}$y que además no forma parte del conjunto de soluciones de la ecuación homegénea, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados proponiendo una solución particular de la forma: $y_p(t) = Ae^{2t}$.
Sustituyendo y_p en la ecuación diferencial e identificando términos del lado izquierdo con el lado derecho se obtiene que: $Ae^{2t} = 5e^{2t} \Longrightarrow A = 5$

Con esto se obtiene la solución general de la ecuación:

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t}\cos(t) + c_2 e^{2t}\sin(t) + 5e^{2t}}$$

Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales y se obtiene: $y(0) = c_1 + 5 = 0\,, \quad y'(0) = 2c_1 + c_2 + 10 = 1$, por tanto $c_1 = -5\,; c_2 = 1$. Finalmente, la solución del PVI es

$$\boxed{y(t) = 5e^{2t} + e^{2t}\sin(t) - 5e^{2t}\cos(t) = (5 + \sin(t) - 5\cos(t))e^{2t}}$$