EL BINOMIO DE NEWTON

El binomio de Newton (versión general)

Reescribamos el teorema del binomio, que es válido para cualquier n natural (además de para todo x real), de la siguiente manera:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

Obsérvese que el numerador del coeficiente de x^k tiene k factores. Se ha escrito que la suma se extiende hasta ∞, aunque en realidad se sabe que es un polinomio (los coeficientes se anulan si k > n). El teorema general del binomio de Newton afirma que la expresión anterior es también cierta sustituyendo n por un α real cualquiera:

Teorema (binomio de Newton)

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ si\ |x| < 1, \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} x^k$$

¡Cuidado!, la expresión es la misma, pero mientras que en el caso en el que α sea un entero positivo la suma es finita (un polinomio), en el caso general tendremos una serie de potencias infinita. Por esto se debe ser cuidadoso de incluir, en el enunciado del teorema, los valores de x para los que la serie converge con seguridad. La demostración requiere conocimientos de series de potencias.

El multinomio de Newton

Escribamos ahora el binomio de Newton de una manera alternativa:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{a,b\geq 0, a+b=n} \frac{n!}{a!b!} x^a y^b$$

que sale de observar, en la primera suma, que, para cada k, los exponentes de x e y suman siempre n. A la vista de esta expresión, quizás podíais aventurar que la **fórmula del trinomio** debería ser

$$(x+y+z)^n = \sum_{a,b,c\geq 0, a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!\mathrm{c}!} x^a y^b z^c = \sum_{a,b,c\geq 0, a+b+c=n} \binom{n}{a,b,c} x^a y^b z^c$$

A la derecha se ha utilizado una nueva notación,

$$\binom{n}{a,b,c} = \begin{cases} \dfrac{n!}{a!b!c!} & si \quad a+b+c=n \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

que permite escribir la suma triple de manera más sencilla: se suman en todos los $a, b, c \geq 0$, pero los términos son nulos a menos que $a + b + c = n$. A este número se le conoce, por razones obvias, como un **coeficiente multinómico**. El caso general del multinomio de Newton sería

$$\boxed{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a_1,\ldots,a_k \geq 0} \binom{n}{a_1,\ a_2, \ldots ,\ a_k} {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \cdots {x_k}^{a_k}}$$

Las expresiones anteriores son correctas: os podéis animar a probar la última expresión general por inducción en k, partiendo de la fórmula del binomio habitual, que es el caso $k = 2$. Pero quizás protestéis por la súbita irrupción de estos números, que han aparecido como caídos del cielo. Tened paciencia, pues de la misma manera en que los coeficientes binómicos aparecían en el desarrollo del binomio por razones combinatorias, también estos coeficientes multinómicos tienen su razón de ser combinatoria (**permutaciones con repetición**):

Proposición 33 (Permutaciones con repetición) *El número de maneras distintas de ordenar n objetos clasificados en k grupos de objetos idénticos entre sí (con n_1 elementos el primero, n_2 elementos el segundo, etc) es*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \equiv \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}, \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n\,.$$

Matemática Discreta

Alberto Vara