uc3m

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

Leganés: 18 junio 2019

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (2.0 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 3y' + 2y \;=\; \sin(e^{x})$$

y comprobar el resultado obtenido.

Solución:
La ecuación característica de la ecuación homegénea asociada tiene dos raíces, $r_1 = -1$ y $r_2 = -2$. Por tanto, su solución general es

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Una solución particular de la ecuación no homogénea puede ser hallada por el método de variación de los parámetros tal como sigue:

$$y_p(x) = u_1(x)\, e^{-x} + u_2(x)\, e^{-2x}\,,$$

donde u_1 y u_2 son dos funciones a determinar. Sabemos que sus derivadas satisfacen el sistema

$$\left\{\begin{aligned} u_1'\, e^{-x} + u_2'\, e^{-2x} \;&=\; 0 \\ -u_1'\, e^{-x} - 2\, u_2'\, e^{-2x} \;&=\; \sin(e^{x})\,, \end{aligned}\right.$$

resolviendio obtenemos

$$\left\{\begin{aligned} u_1' \;&=\; e^{x}\, \sin(e^{x}) \\ u_2' \;&=\; -e^{2x}\, \sin(e^{x})\,. \end{aligned}\right.$$

por tanto, integrando se tiene que

$$\left\{\begin{aligned} u_1 \;&=\; -\cos(e^{x}) \\ u_2 \;&=\; e^{x}\, \cos(e^{x}) - \sin(e^{x})\,, \end{aligned}\right.$$

donde u_2 se obtiene integrando por partes. Finalmente, la solución general de la ecuación es solution of the given differential equation reads

$$\boxed{y(x) \;=\; y_h(x) + y_p(x) \;=\; c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x}\, \sin(e^{x})}\,,$$

Para comprobar su validez, basta sustituir en la ecuación original y comprobar que se satisface idénticamente.

Cuestión 1 (2.0 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$$

y comprobar el resultado obtenido.

$y(x) = y_p + y_h$

$y(x) = e^{\lambda t}$ $\quad \underset{\neq 0}{e^{\lambda t}}(\lambda^2 + 3\lambda + 2y) = 0$

$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$ $\quad \mathcal{B} = \{ e^{-2x}, e^{-x} \}$

$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} \;/\; A, B \in \mathbb{R}$ $\qquad \operatorname{sen}(e^x) \neq \operatorname{sen}(\alpha x) \;/\; \alpha \in \mathbb{R}$

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ Metodo variación de parametros

$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases}$ $\quad u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \operatorname{sen}(e^x) & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{-x}\operatorname{sen}(e^x)}{-e^{-3x} + 2e^{-3x}} = -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)$

$- \frac{e^{-x}}{e^{-3x}} \cdot \operatorname{sen}(e^x)$

$u_1 = -\int +\operatorname{sen}(e^x)e^{2x}\,dx = -\int \operatorname{sen}(w) \cdot \frac{e^{2x}}{e^x}\,dw = -\int \operatorname{sen}(w) \cdot w\,dw =$

$w = e^x \quad dw = e^x dx$ $\qquad e^x$ $\qquad u = w \quad du = 1\,dw$

$dx = \frac{1}{e^x}\,dw$ $\qquad dv = \operatorname{sen}(w) \quad v = -\cos(w)$

$= -\left(-w\cos(w) - \int -\cos(w)\,dw\right) = +w\cos(w) - \operatorname{sen}(w)$

$w = e^x \Rightarrow \; +e^x \cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x) = u_1$

$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \operatorname{sen}(e^x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}}\operatorname{sen}(e^x) = e^x \operatorname{sen}(e^x)$

$u_2 = \int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx = \int \operatorname{sen}(w) \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\,dw = -\cos(w) = -\cos(e^x)$

$w = e^x$

$dw = e^x dx \,;\; dx = \frac{dw}{e^x}$

$$\boxed{y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + \left(+e^{x}\cos(e^{x}) - \operatorname{sen}(e^{x})\right)e^{-2x} + \left(-\cos(e^{x})\right)e^{-x} \;/\; A,B \in \mathbb{R}}$$

$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$

$$\boxed{y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + \cancel{e^{-x}\cos(e^{x})} + e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x}) - \cancel{e^{-x}\cos(e^{x})}}$$

$$2\left(Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x}) - \cancel{2e^{-x}\cos(e^{x})}\right) + 3\left(-2Ae^{-2x} - Be^{-x} - 2e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x})\right.$$
$$\left. + e^{-2x}\cdot e^{x}\cos(e^{x}) + \cancel{2e^{-x}\cos(e^{x})} + \cancel{2e^{-x}e^{x}\operatorname{sen}(e^{x})}\right) + 4Ae^{-2x} + Be^{-x}$$
$$+ 4e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x}) - 2e^{-2x}\cdot e^{x}\cos(e^{x}) - e^{-x}\cos(e^{x}) + \operatorname{sen}(e^{x}) - \cancel{2e^{-x}\cos(e^{x})}$$
$$- \cancel{2e^{-x}\operatorname{sen}(e^{x})} + \cancel{2\cos(e^{x})} = \operatorname{sen}(e^{x})$$

$$2\overset{1}{\cancel{Ae^{-2x}}} + 2\overset{2}{\cancel{Be^{-x}}} + 2\overset{3}{\cancel{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x})}} - 4\cancel{e^{-x}\cos(e^{x})} - 6\overset{1}{\cancel{Ae^{-2x}}} - 3\overset{2}{\cancel{Be^{-x}}} - 6\overset{3}{\cancel{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x})}}$$
$$+ 3\overset{4}{\cancel{e^{-x}\cos(e^{x})}} + 6\cancel{e^{-x}\cos(e^{x})} + \cancel{6\operatorname{sen}(e^{x})} + 4\overset{1}{\cancel{Ae^{-2x}}} + \overset{2}{\cancel{Be^{-x}}} + 4\overset{3}{\cancel{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{x})}}$$
$$- \overset{4}{\cancel{2e^{-x}\cos(e^{x})}} - \overset{4}{\cancel{e^{-x}\cos(e^{x})}} + \operatorname{sen}(e^{x}) - 2\cancel{e^{-x}\cos(e^{x})} - 2\cancel{e^{-x}\operatorname{sen}(e^{x})} +$$
$$+ 2\cancel{\cos(e^{x})} = \operatorname{sen}(e^{x}) \qquad \operatorname{sen}(e^{x}) = \operatorname{sen}(e^{x}) \checkmark$$

Cuestión 2 (2.0 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

Solución:
Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sF(s) - y(0)) + 5F(s) = \frac{1}{s+3}\,,$$

Despejando $F(s)$, se obtiene:

$$F(s) = \frac{s^2+s-5}{(s+3)((s-1)^2+2^2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s-1)^2+2^2}$$

Calculando los coeficientes

$$F(s) = \frac{1}{20}\frac{1}{s+3} + \frac{\frac{19}{20}s - \frac{35}{20}}{(s-1)^2+2^2}$$

Por tanto, tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{20}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+3}) + \frac{19}{20}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}) - \frac{8}{20}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{(s-1)^2+2^2})$$

A partir de las tablas de la TL, conluimos que: $\boxed{y(t) = \frac{1}{20}e^{-3t} + \frac{19}{20}e^t\cos(2t) - \frac{2}{5}e^t\sin(2t)}$

Cuestión 3 (2.0 puntos) .
Considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentrar el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcular los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justificar la respuesta.

ii) Hallar la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$.

Cuestión 2 (2.0 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

$$\mathcal{L}\{y(x)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5F(s) = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}$$

$$\underbrace{s^2F(s)} - sy(0) - \cancel{y'(0)}^{0} - \underbrace{2sF(s)} + 2y(0) + \underbrace{5F(0)} = \frac{1}{s-(-3)}$$

$$(s^2 - 2s + 5)F(s) - s + 2 = \frac{1}{s-(-3)} \quad ; \quad F(s) = \frac{s^2+s-5}{(s-(-3))(s^2-2s+5)}$$

$$\frac{s^2+s-5}{(s+3)(s^2-2s+5)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+5} \quad ; \quad s^2+s-5 = A(s^2-2s+5) + (s+3)(Bs+C)$$

$$s = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot 5}}{2} = RCS$$

$$s = -3 \quad R \in \mathbb{R}$$

$$s=-3 \quad \underbrace{9-3-5}_{1} = A(\underbrace{9+6+5}_{20}) + 0 \; ; \; A = 1/20$$

$$2s+1 = A(2s-2) + Bs + C + Bs + 3B$$

$$2 = 2A + B + B \; ; \; 2 = 2A + 2B \; ; \; 1 = A + B$$

$$s=1 \quad \underbrace{2+1}_{3} = A(\underbrace{0}_{0}) + \underbrace{B + C + B + 3B}_{5B+C} \; ; \; 3 = 5B + C$$

$$B = 1 - A = 1 - 1/20 = 19/20 \qquad C = 3 - 5\cdot\frac{19}{20} = \frac{60}{20} - \frac{95}{20} = -35/20$$

$$F(s) = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{19/20\, s - 35/20}{s^2-2s+5}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{20}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\}}_{\rightsquigarrow e^{-3t}} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19/20\, s - 35/20}{s^2-2s+5}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19/20\, s - 35/20}{s^2-2s+5}\right\} = \frac{19}{20}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 35/19}{(s-1)^2+2^2}\right\} = \frac{19}{20}\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}}_{\rightsquigarrow e^{t}\cos(2t)} + \right.$$

$$\hookrightarrow (s-1)^2+4$$

$$\left.\frac{1-35/19}{2}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}}_{\rightsquigarrow e^{t}\,\mathrm{sen}(2t)}\right)$$

$$y(x) = \frac{e^{-3t}}{20} + \frac{19}{20}\left(e^{t}\cos(2t) - \frac{8}{19}e^{t}\,\mathrm{sen}(2t)\right)$$

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{-3t}}{20} + \frac{19}{20}e^{t}\cos(2t) - \frac{2}{5}e^{t}\,\mathrm{sen}(2t)}$$

Cuestión 3 (2.0 puntos) .
Considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentrar el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcular los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justificar la respuesta.

ii) Hallar la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$.

$$|A - \lambda I| = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ \alpha & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + 5\alpha - 4$$

$$\lambda = \sqrt{4 - 5\alpha}$$

Si $\alpha > \frac{4}{5} \Rightarrow$ Salen imaginarios

Si $\alpha < \frac{4}{5} \Rightarrow$ Salen reales

Si $\alpha = 4/5 \Rightarrow \lambda = \sqrt{0}$

$\lambda = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1} = \pm i$; Raíces imaginarias conjugadas.

Para $\lambda = i$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} ; \quad \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + (-2-i)y = 0 ; \quad x = (2+i)y ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} y$$

$$\vec{w} = e^{(-2-i)t}\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cdot e^{-it}\,(2+i) \\ e^{-2t} \cdot e^{it}\,(1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} e^{-2t}(2+i)\cos(-t) + i e^{-2t}(2+i)\,\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\cdot\cos(-t) + i\, e^{-2t}\,\mathrm{sen}(-t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos(-t) + i e^{-2t}\cos(-t) + i\, e^{-2t}\cdot 2\,\mathrm{sen}(-t) - e^{-2t}\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\cos(-t) + i\, e^{-2t}\,\mathrm{sen}(-t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos(-t) - e^{-2t}\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\cos(-t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(-t) + 2e^{-2t}\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\,\mathrm{sen}(-t) \end{pmatrix}$$

Sol. General: $\vec{X(t)} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos(-t) - e^{-2t}\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\cos(-t) \end{pmatrix} +$

$$+ C_2 \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(-t) + 2e^{-2t}\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\,\mathrm{sen}(-t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1 = C_1\, 2 - 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

$0 = C_1 \qquad \Rightarrow C_1 = 0$

$$\boxed{\text{Sol. PVI} \Rightarrow \vec{X(t)} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(-t) + 2e^{-2t}\mathrm{sen}(-t) \\ e^{-2t}\,\mathrm{sen}(-t) \end{pmatrix}}$$

Solución:

i) Los valores propios de la matriz de coeficientes son

$$r_1 = \sqrt{4-5\alpha}\ , \qquad r_2 = -\sqrt{4-5\alpha}\ .$$

Si $\alpha < 4/5$ los valores propios son reales con signos opuestos, por tanto las soluciones del sistema vienen dadas por combinaciones de funciones exponenciales.

Por otra parte, si $\alpha > 4/5$ los valores propios son complejos imaginarios puros conjugados, por lo que las soluciones son periódicas.

Por tanto el comportamiento cualitativo de las soluciones cambia para $\boxed{\alpha = 4/5}$

ii) Para $\alpha = 1$ los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz de coeficientes son

$$r_1 = i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes reales arbitrarias.
Aplicando la condición inicial $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$, entonces las constantes c_1 y c_2 satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ y la solución del sistema es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}$$

Cuestión 4 (2.0 puntos) .

Considerar el siguiente modelo de ecuación de ondas.

$$\begin{aligned} \text{Ecuación Derivadas Parciales} &: \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,, \ \ t > 0\,, \ \ 0 < x < \pi \\ \text{Condiciones Contorno} &: \ u(0,t) = 0\,, \ \ u(\pi,t) = 0\,, \ \ t \geq 0 \\ \text{Condiciones Iniciales} &: \ (\mathbf{i}) \ \ u(x,0) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)\,, \ \ (\mathbf{ii}) \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \ \ 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables la solución formal del modelo puede escribirse

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\, \sin(nx)\ , \quad \text{con} \ \ A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar los coeficientes $A_n\,, \forall n \geq 1$ y expresar $u(x,t)$ como una suma finita.

Solución.

Tomando $t = 0$ en la solución formal se obtiene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\ , \quad \text{con} \quad A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots,$ podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de sumandos, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx) = \sin(x) + 4\sin(2x) + 9\sin(3x) + 16\sin(4x)$$

implica que

$$\boxed{A_1 = 1\,,\ A_2 = 4\,,\ A_3 = 9\,,\ A_4 = 16\,,\ \ A_n = 0\ \ \forall\ n \geq 5}$$

Recopilando los valores de los coeficientes, se obtiene la solución del problema de ondas, esto es

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{4} A_n \cos(nt)\sin(nx) = \cos(t)\sin(x) + 4\cos(2t)\sin(2x) + 9\cos(3t)\sin(3x) + 16\cos(4t)\sin(4x)}$$

Cuestión 5 (2.0 puntos) .

Se considera el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 6\,y \ = \ 0 \\ y(0) \ = \ 1\,. \end{cases}$$

(i) Aplicar una iteración del método de Euler explicito con paso $h_1 = 0.05$.

(ii) Usar el valor Y_1 calculado en (i) y el siguiente método de orden 2

$$Y_{n+2} \ = \ Y_{n+1} + \frac{h}{2}\Big[\ f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \ + \ f(t_{n+2}, Y_{n+2})\ \Big]\,,$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots,$ para aproximar el valor $y(0.1)$ usando $h = h_1 = 0.05$.

(iii) Sabiendo que $E^{h_2}_{t=0.1} = 0.00112$ es el error cometido al aproximar $y(0.1)$ mediante el método en (ii) con paso $h_2 = h_1/q$, calcular el valor de h_2 (notar que $y(0.1) = 0.54881$ y $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso).

Solución.

(i) Mediante una iteración del método de Euler explicito (para $n = 0$) con paso $h_1 = 0.05$ se obtiene $Y_1 = Y_0 - 6\,h_1\,Y_0 = 1 - 0.3 = 0.7$. A pesar de que la ecuación diferencial lineal dada es *rígida*, el esquema numérico es estable, puesto que $h_1 = 0.05 < 2\,/\,6 \approx 0.33$.

(ii) Aplicando la formula del método numérico propuesto, con $h = h_1 = 0.05$, para $n = 0$ se obtiene $Y_2 = Y_1 + (h_1/2)\,[\,-6\,Y_1 - 6\,Y_2\,]$, esto es $Y_2 = Y_1\,(1 - 3\,h_1)\,/\,(1 + 3\,h_1) = 0.51739$. Por tanto, $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 0.51739}$ es la aproximación de $y(0.1)$ buscada.

(iii) Usando el valor $y(0.1) = 0.54881$, podemos calcular $E_{t=0.1}^{h_1} = \left|\,Y_2^{h_1} - y(0.1)\,\right| = 0.03142$. Entonces, siendo $p = 2$ el orden del método en (ii), resulta que

$$E_{t=0.1}^{h_2} \approx C\,h_2^2 = C\left(\frac{h_1}{q}\right)^2 \approx \frac{E_{t=0.1}^{h_1}}{q^2}\,,$$

donde $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso. Finalmente de la expresión anterior se calcula $q \approx 5$ y se puede concluir que $\boxed{h_2 = h_1/5 = 0.01}$.