1. COLECCIÓN DE EXÁMENES

Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

28 de diciembre de 2000

CÁLCULO Ingeniería Informática. Primer Curso.

Tiempo: 3 horas
Los problemas se entregarán en hojas separadas

Problema 1. (3 puntos)

(a) (1.5 puntos) Demostrar el siguiente teorema de punto fijo:
"Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Entonces existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$."

(b) (1.5 puntos) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[(1+1/x)^x - e\right] .$$

Problema 2. (3 puntos) Dada la función

$$F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}-1}\, dt \,,$$

se pide

- (1 punto) escribir el polinomio de Taylor de grado dos en el punto $x = 1$;
- (1 punto) calcular un valor numérico aproximado de $F(5/4)$;
- (1 punto) calcular una cota superior del error cometido en la aproximación.

Problema 3. (4 puntos)

(a) (3 puntos) Calcular

$$\int \frac{3x-4}{(x^2+2x+4)^2}\, dx \,.$$

(b) (1 puntos) Esbozar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{\log x} \,.$$

¡¡Feliz Navidad!!

Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemática

5 de febrero de 2001

CÁLCULO — Ingeniería Informática. Primer Curso.

Tiempo: 3 horas

Los problemas se entregarán en hojas separadas

Problema 1. (3 puntos)

(a) (2 puntos) Calcular α para que el límite

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}\right)$$

sea finito y no nulo.

(b) (1 punto) Esbozar la gráfica de la función dada en coordenadas polares:

$$r = 1-\operatorname{sen}\theta\,, \quad \theta\in[0,2\pi]\,.$$

Problema 2. (3 puntos)

(a) (1 puntos) Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en el origen de la función $\log(1+\operatorname{sen}x)$.

(b) (2 puntos) Estimar el error cometido al aproximar la función por el polinomio de Taylor de grado dos en $x = 0{,}1$.

Problema 3. (4 puntos)

(a) (1 punto) Enunciar el teorema fundamental del cálculo.

(b) (1 punto) Discutir la continuidad y derivabilidad en $x = 1$ de la función

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\,, \quad f(t)=\begin{cases} e^{-t^2} & \text{si } t>1\\ e^{t^2} & \text{si } t\le 1;\end{cases}$$

(c) (2 puntos) Calcular

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx\,.$$

Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

10 de septiembre de 2001

CÁLCULO — Ingeniería Informática. Primer Curso.

Tiempo: 3 horas
Los problemas se entregarán en hojas separadas

Problema 1. (3 puntos)

- (1 punto) Calcular
$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right].$$
- (1 punto) Estudiar el dominio de la función $f(x)=\operatorname{arcsen}(1-x^2)$.
- (1 punto) Si f es una función derivable en $x=0$ que además cumple $f(0)=0$, calcular
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\log x\,.$$

Problema 2. (4 puntos) Dada la función
$$F(x)=\int_1^x e^{\sqrt[3]{t}-1}\,dt\,,$$
se pide:

- (1 punto) enunciar el teorema de Taylor;
- (1 punto) escribir el polinomio de Taylor de grado dos en el punto $x=1$;
- (1 punto) calcular el valor numérico aproximado de $F(5/4)$;
- (1 punto) calcular una cota superior del error cometido en la aproximación (no operar)

Problema 3. (3 puntos)

(a) (2 puntos) Calcular
$$\int \frac{\cos x}{(3+\cos^2 x)}\,dx\,.$$

(b) (1 punto) Calcular la longitud del tramo de curva $\quad r=3\sec\theta\,,\quad 0\le\theta\le\pi/3\,.$

Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemática

4 de febrero de 2002

CÁLCULO — Ingeniería Informática. Primer Curso.

Tiempo: 3 horas
Los problemas se entregarán en hojas separadas

Problema 1. (2 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)^x & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Problema 2. (2 puntos)

(a) (1 punto) Enunciar el teorema de Rolle.

(b) (1 punto) Calcular el número de soluciones que tiene la siguiente ecuación, dando una aproximación numérica de cada una de ellas.

$$x^3 + x^2 + x + 5 = 0\,.$$

Problema 3. (3 puntos) Dada la función

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} \cos t \, dt\,, \qquad \text{se pide :}$$

(a) (2 puntos) Calcular el polinomio de Taylor de grado 5 en el punto $x = 0$.

(b) (1 punto) Calcular el error que se comete al aproximar $F(0{,}1) \approx 0{,}1$.

Problema 4. (3 puntos)

(a) (2 puntos) Calcular

$$\int \frac{3x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} \, dx\,.$$

(b) (1 punto) Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = (x^2 - 1)\cos x$ y el eje X, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemática

29 de enero de 2003

CÁLCULO   Ingeniería Informática. Primer Curso.

Tiempo: 3 horas
Los problemas se entregarán en hojas separadas

---

1. **(2 puntos)**

(a) (1 punto) Si f es una función cualquiera definida en un entorno reducido de 0, calcular el límite
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x}\cos\left(f(x)\right) .$$

(b) (1 punto) Calcular el límite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\sqrt{x^2+5}}-1}{x} .$$

---

2. **(2 puntos)**

(a) (1 punto) Enunciar y demostrar el teorema del valor medio de Lagrange dando su interpretación geométrica.

(b) (1 punto) Hallar un punto en el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$ tal que la tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda AB.

---

3. **(2 puntos)**

(a) (1 punto) Calcular los cinco primeros términos del polinomio de Taylor en torno al origen, $P_5(x)$, de la función
$$f(x) = \frac{\log(\cos x)}{1-x^3} .$$

(b) (1 punto) Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_5(x)}{x^6} .$$

4. **(2 puntos)** Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}\,.$$

5. **(2 puntos)** Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemática

8 de septiembre de 2003

CÁLCULO   Ingeniería Informática. Primer Curso.

Tiempo: 3 horas
Los problemas se entregarán en hojas separadas

---

1. Calcular, si existen, los siguientes límites:

(a) **(1 punto)**

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\arctan\frac{1}{x}-\log(1+x^2)\right]$$

(b) **(1 punto)**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}$$

---

2. **(2 puntos)** Determinar si $g(x)=|x-1|\int_{-1}^{x}\operatorname{sen}(t^3)dt$ es derivable en $x=1$, y en caso afirmativo, hallar $g'(1)$.

---

3. **(2 puntos)** Calcular aproximadamente el valor $g(0)$ de la función del ejercicio anterior con un error menor que 10^{-3}.

(Nótese que en este ejercicio el punto es $\mathbf{x=0}$ no $\mathbf{x=1}$)

---

4. **(2 puntos)** Esbozar la gráfica y calcular la longitud de la cardioide

$$r(\theta)=a(1+\cos\theta),\theta\in[0,2\pi]\,.$$

---

5. **(2 puntos)** Hallar todos los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para los cuales la integral $\int_0^\infty(x+\operatorname{sen}\sqrt{x})^a dx$ es convergente.

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA
CÁLCULO

4 de Febrero de 2004

1. a) (1 punto) Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo T. Demostrar que la función
$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$$
es constante.

   b) (1 punto) Sea f derivable en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ y $c \in \mathbb{R}$.
¿ Existe
$$\lim_{x\to\infty} |f(x+c) - f(x)|?.$$
Justificar la respuesta.

2. a) (1 punto)Encontrar un valor de la constante a para que las funciones $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ se aproximen en un entorno de $x = 0$ con un error del orden o inferior a x^3.

   b) (1 punto) Calcular, haciendo uso de los desarrollos en serie de Taylor correspondientes, el siguiente límite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}.$$

3. (2 puntos) Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \alpha\, t\, \ln|t|\, dt$. ¿Para qué valores de $\alpha \neq 0$, tiene la función $F(x)$ al menos una raíz en el intervalo $[1, e]$?.

4. (2 puntos)Cacular el área entre la gráfica de la función
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$
y su asíntota.

5. (2 puntos) Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Se pide,

   a) Polinomio de Taylor $P_{3,0,F}(x)$ (de orden 3 en $x = 0$ de $F(x)$).

   b) Hallar un valor aproximado de $F(1/10)$, usando el anterior polinomio, y dar una estimación del error cometido.

INSTRUCCIONES

- La duración del examen es de 3 horas y media.
- Los problemas se entregarán en hojas separadas.
- No se permite el uso de ninguna calculadora.
- No se podrá entregar el examen hasta transcurridos 20 minutos desde el comienzo del mismo.
- El alumno no podrá salir del aula antes de haber finalizado su examen.

INGENIERÍA INFORMÁTICA

CÁLCULO

8 de septiembre de 2004

1. *a*) (**1 punto**) Sea f una función creciente en $[a, b]$ $(0 < a < b)$ tal que

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 4 \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\, dx = 5.$$

   Determinar en función de a y b el valor de $\displaystyle\int_1^4 f^{-1}(y)\, dy$.

   b) (**1 punto**) ¿Puede existir una función $f : [-2, 2] \longrightarrow (-2, 2)$ sobreyectiva y continua?. Justificar la respuesta.

2. (**2 puntos**) Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^4} - e^{\operatorname{sen}(x)}}{x^4 - \operatorname{sen}(x)}.$$

3. (**2 puntos**) Determinar los máximos y mínimos de

$$f(x) = \int_0^{x^5} \frac{dt}{5 + \cos^4(t)} \qquad \text{en } [0, \infty).$$

4. (**2 puntos**) Hallar la longitud de la curva $r = a(1 + \cos(\theta))$, $\quad \theta \in [0, 2\pi]$, $\quad a > 0$.

5. Sea

$$F(x) = \int_0^1 s^k \ \operatorname{sen}(sx)\, ds, \quad k > 0, \quad x \in [0, \infty).$$

   a) (**0,5 puntos**) Demostrar que para $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \ \operatorname{sen}(t)\, dt.$$

   b) (**0,75 puntos**) Determinar la derivada por la derecha de F en $x = 0$ y demostrar que F es derivable en $[0, \infty)$.

   c) (**0,75 puntos**) Demostrar que

$$xF'(x) + (k + 1)F(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad x \in [0, \infty).$$