Ejercicios

1. Dadas las siguientes interpretaciones en los diferentes dominios, indique si las siguientes fórmulas ∀xP(x), ∃xQ(x), ∀x(P(x)∧Q(x)), ∃x(P(x)∧Q(x)), ∀x(P(x)∨Q(x)) y ∃x(P(x)∨Q(x)) son o no verdaderas.

D={a}	P(x)	Q(x)
a	1	0

D={a}	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)	∀x(P(x)∧Q(x))	∃x(P(x)∧Q(x))	∀x(P(x)∨Q(x))	∃x(P(x)∨Q(x))
a	1	0	1	0	0	0	1	1

D={a,b}	P(x)	Q(x)
a	1	0
b	1	0

D={a,b}	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)	∀x(P(x)∧Q(x))	∃x(P(x)∧Q(x))	∀x(P(x)∨Q(x))	∃x(P(x)∨Q(x))
a	1	0	1	0	0	0	1	1
b	1	0						

D={a,b}	P(x)	Q(x)
a	0	1
b	1	0

D={a,b}	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)	∀x(P(x)∧Q(x))	∃x(P(x)∧Q(x))	∀x(P(x)∨Q(x))	∃x(P(x)∨Q(x))
a	0	1	0	1	0	0	1	1
b	1	0						

D={a,b,c}	P(x)	Q(x)
a	0	1
b	1	0
c	1	1

D={a,b,c}	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)	∀x(P(x)∧Q(x))	∃x(P(x)∧Q(x))	∀x(P(x)∨Q(x))	∃x(P(x)∨Q(x))
a	0	1	0	1	0	1	1	1
b	1	0						
c	1	1						

D={a,b,c}	P(x)	Q(x)
a	1	0
b	1	0
c	1	0

D={a,b,c}	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)	∀x(P(x)∧Q(x))	∃x(P(x)∧Q(x))	∀x(P(x)∨Q(x))	∃x(P(x)∨Q(x))
a	1	0	1	0	0	0	1	1
b	1	0						
c	1	0						

2. Dadas las siguientes interpretaciones en los diferentes dominios, indique si las siguientes fórmulas ∀xP(x,y), ∀yP(x,y), ∃xP(x,y) y ∃yP(x,y) son o no verdaderas.**(*)**

D={a} Considérese y=a cuando y es una variable libre; x=a cuando x es una variable libre

x	y	P(x,y)
a	a	1

x	y	P(x,y)	∀xP(x,y)	∀yP(x,y)	∃xP(x,y)	∃yP(x,y)
a	a	1	1	1	1	1

D={a,b} Considérese y=b cuando y es una variable libre; x=a cuando x es una variable libre

x	y	P(x,y)
a	a	1
b	a	0
a	b	1
b	b	1

x	y	P(x,y)	∀xP(x,y)	∃xP(x,y)	∀yP(x,y)	∃yP(x,y)
a	a	1	1	1	1	1
b	a	0				
a	b	1				
b	b	1				

D={a,b} Considérese y=a cuando y es una variable libre; x=a cuando x es una variable libre

x	y	P(x,y)
a	a	1
b	a	1
a	b	0
b	b	0

x	y	P(x,y)	∀xP(x,y)	∃xP(x,y)	∀yP(x,y)	∃yP(x,y)
a	a	1	1	1	0	1
b	a	1				
a	b	0				
b	b	0				

D={a,b} Considérese y=a cuando y es una variable libre; x=b cuando x es una variable libre

x	y	P(x,y)
a	a	0
b	a	0
a	b	1
b	b	1

x	y	P(x,y)	∀xP(x,y)	∃xP(x,y)	∀yP(x,y)	∃yP(x,y)
a	a	0	0	0	0	1
b	a	0				
a	b	1				
b	b	1				

D={a,b,c} Considérese y=c cuando y es una variable libre; x=b cuando x es una variable libre

x	y	P(x,y)
a	a	1
b	a	1
c	a	1
a	b	0
b	b	0
c	b	0
a	c	0
b	c	1
c	c	1

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>P(x,y)</th><th>∀xP(x,y)</th><th>∀yP(x,y)</th><th>∃xP(x,y)</th><th>∃yP(x,y)</th></tr>
<tr><td>a</td><td>a</td><td>1</td><td rowspan="9">0</td><td rowspan="9">0</td><td rowspan="9">1</td><td rowspan="9">1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>a</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c</td><td>a</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b</td><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>c</td><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>a</td><td>c</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c</td><td>c</td><td>1</td></tr>
</table>

D={a,b,c} Considérese y=a cuando y es una variable libre; x=c cuando x es una variable libre

x	y	P(x,y)
a	a	1
b	a	1
c	a	1
a	b	0
b	b	1
c	b	0
a	c	0
b	c	1
c	c	0

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>P(x,y)</th><th>∀xP(x,y)</th><th>∀yP(x,y)</th><th>∃xP(x,y)</th><th>∃yP(x,y)</th></tr>
<tr><td>a</td><td>a</td><td>1</td><td rowspan="9">1</td><td rowspan="9">0</td><td rowspan="9">1</td><td rowspan="9">1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>a</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c</td><td>a</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b</td><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>c</td><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>a</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c</td><td>c</td><td>0</td></tr>
</table>

3. Dado el dominio D = {a,b}, compruebe la validez de la siguiente fórmula usando tablas de verdad. **(*)**

$$(\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∀xQ(x)	∀xP(x) ∨ ∀xQ(x)	P(x) ∨ Q(x)	∀x(P(x) ∨ Q(x))	(∀xP(x) ∨ ∀xQ(x)) → ∀x(P(x) ∨ Q(x))
a	0	0	0	0	0	0	0	1
b	0	0				0		
a	0	0	0	0	0	0	0	1
b	0	1				1		
a	0	1	0	0	0	1	0	1
b	0	0				0		
a	0	1	0	1	1	1	1	1
b	0	1				1		
a	0	0	0	0	0	0	0	1
b	1	0				1		
a	0	0	0	0	0	0	0	1
b	1	1				1		
a	0	1	0	0	0	1	1	1
b	1	0				1		
a	0	1	0	1	1	1	1	1
b	1	1				1		
a	1	0	0	0	0	1	0	1
b	0	0				0		
a	1	0	0	0	0	1	1	1
b	0	1				1		
a	1	1	0	0	0	1	0	1
b	0	0				0		
a	1	1	0	1	1	1	1	1
b	0	1				1		
a	1	0	1	0	1	1	1	1
b	1	0				1		
a	1	0	1	0	1	1	1	1
b	1	1				1		
a	1	1	1	0	1	1	1	1
b	1	0				1		
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1				1		

La fórmula es verdadera para todas las interpretaciones y, por tanto, es válida en el dominio. Sobre la validez en general, no podemos afirmar nada.

4. Dado el dominio D = {a}, compruebe si es válida la siguiente fórmula utilizando tabla de verdad.

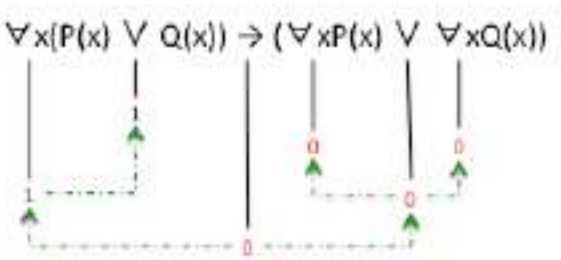
$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x(\sim P(x) \lor Q(x))$$

x	P(x)	Q(x)	P(x) → Q(x)	∀x(P(x) → Q(x))	~P(x) ∨ Q(x)	∀x(~P(x) ∨ Q(x))	Fórmula
a	0	0	1	1	1	1	1
a	1	0	0	0	0	0	1
a	0	1	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1	1	1

La fórmula es verdadera para todas las interpretaciones y, por tanto, es válida en el dominio. Sobre la validez en general, no podemos afirmar nada.

5. Compruebe si la fórmula que sigue es válida. **(*)**

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$$



En vista del gráfico anterior, el contraejemplo sería una interpretación que cumpliese lo siguiente:

- Para que el consecuente sea falso:
  - P(x) no puede ser verdadero para todos los elementos del dominio.
  - Q(x) no puede ser verdadero para todos los elementos del dominio.
- Para que el antecedente sea verdadero:
  - Dado cualquier elemento del dominio, bien P(x),Q(x) o ambos tienen que ser verdaderos.

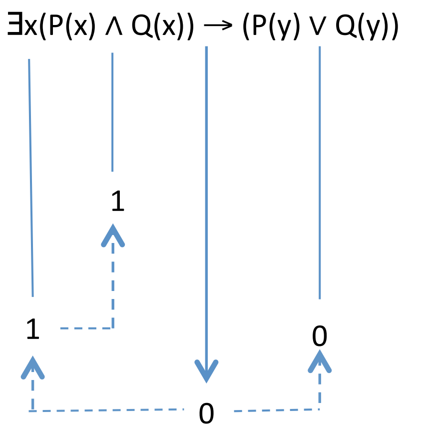
Como se puede ver, esto no es factible en un domino de un solo elemento, pero sí en uno de dos D:{a,b}

Contraejemplo

x	P(x)	Q(x)	$P(x) \vee Q(x)$	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	$\forall xP(x)$	$\forall xQ(x)$	$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$	$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$
a	1	0	1	1	0	0	0	0
b	0	1	1					

6. Compruebe si la fórmula que sigue es válida.

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (P(y) \vee Q(y))$$



En vista del gráfico anterior, el contraejemplo sería una interpretación que cumpliese lo siguiente:

- Para que el antecedente sea verdadero:
  Tiene que existir algún elemento del dominio para el cual P(x) y Q(x) sean verdaderos
- Para que el consecuente sea falso:
  Tiene que existir algún elemento del dominio para el cual P(x) y Q(x) sean falsos

Por tanto, tenemos que considerar un dominio con 2 elementos. Para un elemento de ese dominio P(x) y Q(x) verdaderos y para otro elemento, falsos

Un posible contraejemplo en el dominio D:{a,b} sería la definición de predicados

x/y	P(x)	Q(x)
a	1	1
b	0	0

haciendo la asignación a la variable libre y=b

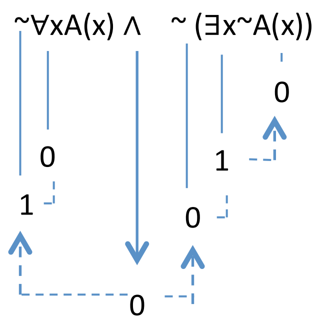
Dado que hay un contraejemplo en el dominio, la fórmula no sería válida en el dominio D:{a,b} y, por tanto, no sería válida.

7. Compruebe si es válida la siguiente fórmula[1].

$$\sim\forall x A(x) \wedge \sim(\exists x \sim A(x))$$

[1]Si la fórmula la escribimos como $\sim\forall x A(x) \wedge \forall x\ A(x)$, se observa que no es válida sin necesidad de buscar un contraejemplo, pero esta transformación exige el uso de teoría de la demostración, por lo que no podría realizarse esta transformación.

Para ver si la fórmula es válida estudiaremos si es posible encontrar alguna interpretación en algún dominio para la que sea falsa.



En vista del gráfico anterior, el contraejemplo sería una interpretación que cumpliese lo siguiente:

- Para que la fórmula sea falsa, bien el primer elemento de la conjunción, el segundo o ambos deben ser falsos. Explorando la primera posibilidad, podría ocurrir que ~∀xA(x) sea verdadera y ~(∃x~A(x)) falsa.
- ∀xA(x) debe ser falsa, es decir en algún elemento del dominio A(x) debe ser falso
- ∃x~A(x) debe ser verdadero, luego debe existe un elemento del dominio donde ~A(x) sea verdadero (A(x) falso)

Un posible contraejemplo en el dominio {a,b} y, por tanto, no podría ser semánticamente válida, sería:

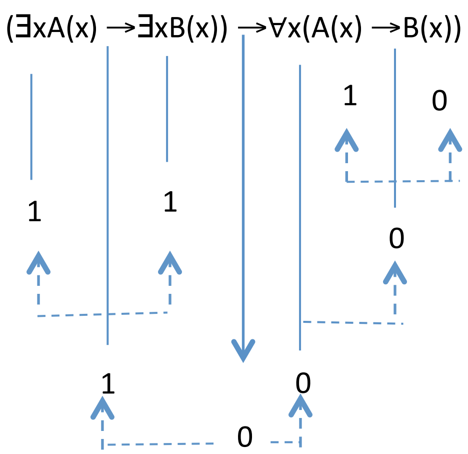
x	A(x)
a	1
b	0

Por tanto la fórmula no es válida en el dominio {a,b}.

8. Compruebe si es válida la siguiente fórmula. **(*)**

$$(\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

Para ver si la fórmula es válida estudiaremos si es posible encontrar alguna interpretación en algún dominio para la que sea falsa.



En vista del gráfico anterior, el contraejemplo sería una interpretación que cumpliese lo siguiente:

- Para que el consecuente sea falso, A(x) →B(x) tiene que ser falso en algún elemento del dominio, para lo cual A(a) debe ser verdadero y B(a) falso en ese elemento. En otros elementos, pueden tomar otros valores de verdad

- Para que el antecedente sea verdadero, puede ocurrir que ∃xA(x) y ∃xB(x) sean verdaderos (también hay otras opciones).

Si consideramos lo anterior, en el dominio {a,b}, un posible contraejemplo es:

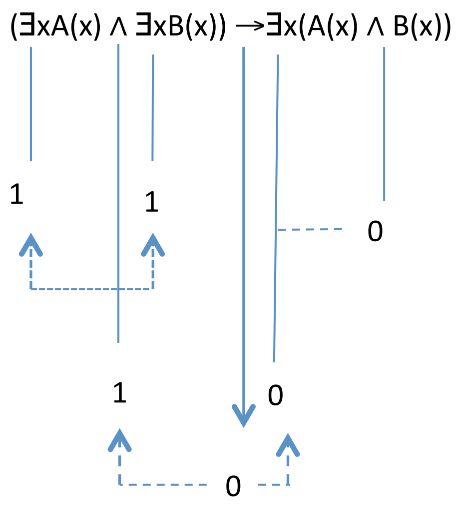
x	A(x)	B(x)
a	1	0
b	1	1

Por tanto la fórmula no es válida

9. Compruebe si la fórmula que sigue es válida.

$$(\exists x A(x) \land \exists x B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \land B(x))$$

Para ver si la fórmula es válida estudiaremos si es posible encontrar alguna interpretación en algún dominio para la que sea falsa.



En vista del gráfico anterior, el contraejemplo sería una interpretación que cumpliese lo siguiente:

- A(x) y B(x) deben ser V para algún elemento del dominio
- Pero para que A(x) ∧ B(x) sea F, esos elementos del dominio no deben ser el mismo.

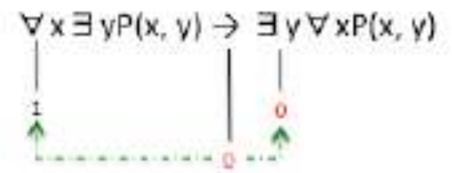
Un posible contraejemplo sería:

x	A(x)	B(x)
a	1	0
b	0	1

Por tanto la fórmula no es válida

10. Compruebe si la fórmula que sigue es válida. **(*)**

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$



En vista del gráfico anterior, el contraejemplo sería una interpretación que cumpliese lo siguiente:

- Para que el consecuente sea falso:
  - No puede existir un valor para y, que combinado con cualquier valor de x haga que el predicado P(x,y) sea siempre verdadero.
- Para que el antecedente sea verdadero:
  - Dado cualquier elemento del dominio en x, tiene que existir al menos un valor para y que haga el predicado P(x,y) verdadero.

Como se puede ver, esto no es factible en un domino de un solo elemento, pero sí en uno de dos D:{a,b}

Contraejemplo

x	y	P(x,y)	∃yP(x, y)	∀x∃yP(x, y)	∀xP(x, y)	∃y∀xP(x, y)	∀x∃yP(x, y) → ∃y∀xP(x, y)
a	a	1	1	1	0 (y=a)	0	0
a	b	0			0 (y=b)		
b	a	0	1				
b	b	1					

11. Compruebe si la deducción que sigue es correcta utilizando refutación. **(*)**

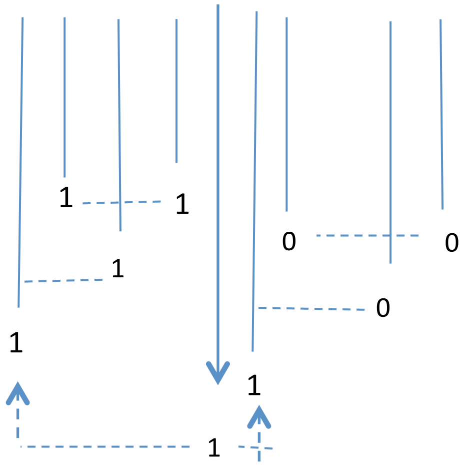
$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow \exists x \sim Q(x) \lor \forall x \sim P(x)$$

Por Refutación, la deducción es correcta si la siguiente fórmula es insatisfacible

$$F: \exists x(P(x) \land Q(x)) \land \sim(\exists x \sim Q(x) \lor \forall x \sim P(x))$$

Para comprobar que la fórmula es insatisfacible habría que comprobar que para cualquier interpretación en cualquier dominio, la fórmula sería Falsa. El proceso es infinito, por lo que intentamos buscar una interpretación que haga que la fórmula sea satisfacible (Verdadera)

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \land \sim(\exists x \sim Q(x) \lor \forall x \sim P(x))$$



En vista del gráfico anterior, una interpretación que hace que la fórmula sea Verdadera tendría que cumplir que:

- Exista algún elemento del dominio para el que P(x) y Q(x) sea 1
- ~Q(x) debe ser 0 para todo elemento del dominio, por lo que Q(x) debe ser 1 para todos los elementos del dominio.
- ~P(x) debe ser 0 al menos para algún elemento del dominio, por lo que P(x) debe ser 1 al menos para algún elemento del dominio

Teniendo en cuenta estas consideraciones, una interpretación que hace 1 la fórmula F es la siguiente:

<table>
<tr><td>x</td><td>P(x)</td><td>Q(X)</td><td>~P(x)</td><td>~Q(x)</td><td>∃x(P(x) ∧ Q(x))</td><td>∃x ~Q(x)</td><td>∀x~P(x)</td><td>~(∃x ~Q(x) ∨ ∀x~P(x))</td><td>F</td></tr>
<tr><td>a</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Como se ha encontrado una interpretación que hace que la fórmula sea Verdadera dominio D={a,b}, entonces la fórmula es satisfacible y por tanto la deducción es incorrecta