

Ejercicios

1. Transformar la siguiente fórmula a forma PRENEX:

$$\forall x \exists y \exists z ((\sim \forall x Q(x) \vee R(x,y,z)) \wedge \sim \forall x \exists z S(x,z))$$

1. $\forall x \exists y \exists z ((\sim \forall x Q(x) \vee R(x,y,z)) \wedge \sim \forall x \exists z S(x,z))$
2. $\forall x \exists y \exists z ((\exists x \sim Q(x) \vee R(x,y,z)) \wedge \exists x \sim \exists z S(x,z))$
3. $\forall x \exists y \exists z ((\exists x \sim Q(x) \vee R(x,y,z)) \wedge \exists x \forall z \sim S(x,z))$
4. $\forall x \exists y \exists z ((\exists u \sim Q(u) \vee R(x,y,z)) \wedge \exists v \forall w \sim S(v,w))$
5. $\forall x \exists y \exists z \exists u \exists v \forall w ((\sim Q(u) \vee R(x,y,z)) \wedge \sim S(v,w))$

2. Transformar la siguiente fórmula a forma PRENEX:

$$\exists x (\sim (\exists y P(x,y)) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$$

1. $\exists x (\sim (\exists y P(x,y)) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$
2. $\exists x (\sim \sim (\exists y P(x,y)) \vee (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$
3. $\exists x (\sim \sim (\exists y P(x,y)) \vee (\sim \exists z Q(z) \vee R(x)))$
4. $\exists x (\exists y P(x,y) \vee (\forall z \sim Q(z) \vee R(x)))$
5. $\exists x \exists y \forall z (P(x,y) \vee \sim Q(z) \vee R(x))$

3. Transformar a la forma PRENEX cada una de las fórmulas de la siguiente deducción:

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y (P(x,y) \vee \sim Q(x,y) \rightarrow R(x,y)), \\ &\exists x \forall y (\exists y Q(x,y) \rightarrow R(x,y)) \\ &\Rightarrow \exists x \exists y R(x,y) \end{aligned}$$

1. $\forall x \exists y (P(x,y) \vee \sim Q(x,y) \rightarrow R(x,y))$
2. $\forall x \exists y (\sim (P(x,y) \vee \sim Q(x,y)) \vee R(x,y))$
3. $\forall x \exists y ((\sim P(x,y) \wedge Q(x,y)) \vee R(x,y))$

1. $\exists x \forall y (\exists y Q(x,y) \rightarrow R(x,y))$
2. $\exists x \forall y (\sim \exists y Q(x,y) \vee R(x,y))$
3. $\exists x \forall y (\forall y \sim Q(x,y) \vee R(x,y))$
4. $\exists x \forall y (\forall z \sim Q(x,z) \vee R(x,y))$
5. $\exists x \forall y \forall z (\sim Q(x,z) \vee R(x,y))$

1. $\exists x \exists y R(x,y)$

4. Transformar a la forma PRENEX cada una de las fórmulas de la siguiente deducción:

$$\forall x (\exists y (A(x,y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists y (C(y) \wedge D(x,y))) \\ \Rightarrow (\forall x \sim C(x) \rightarrow \forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow \sim B(y)))$$

1. $\forall x (\exists y (A(x,y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists y (C(y) \wedge D(x,y)))$
2. $\forall x (\sim \exists y (A(x,y) \wedge B(y)) \vee \exists y (C(y) \wedge D(x,y)))$
3. $\forall x (\forall y \sim (A(x,y) \wedge B(y)) \vee \exists y (C(y) \wedge D(x,y)))$
4. $\forall x (\forall y (\sim A(x,y) \vee \sim B(y)) \vee \exists y (C(y) \wedge D(x,y)))$
5. $\forall x (\forall y (\sim A(x,y) \vee \sim B(y)) \vee \exists z (C(z) \wedge D(x,z)))$
6. $\forall x \forall y \exists z (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee (C(z) \wedge D(x,z)))$

1. $\forall x \sim C(x) \rightarrow \forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow \sim B(y))$
2. $\sim \forall x \sim C(x) \vee \forall x \forall y (\sim A(x,y) \vee \sim B(y))$
3. $\exists x C(x) \vee \forall x \forall y (\sim A(x,y) \vee \sim B(y))$
4. $\exists x C(x) \vee \forall z \forall y (\sim A(z,y) \vee \sim B(y))$
5. $\exists x \forall z \forall y (C(x) \vee \sim A(z,y) \vee \sim B(y))$

5. Transformar a la forma PRENEX cada una de las fórmulas de la siguiente deducción (*):

$$\forall x \exists y (\sim Es(x) \wedge Eu(x) \rightarrow \sim S(y, x)) \\ \Rightarrow \forall x ((\forall y S(y, x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \rightarrow \sim Eu(x))$$

1. $\forall x \exists y (\sim Es(x) \wedge Eu(x) \rightarrow \sim S(y, x))$
2. $\forall x \exists y (\sim (\sim Es(x) \wedge Eu(x)) \vee \sim S(y, x))$
3. $\forall x \exists y ((Es(x) \vee \sim Eu(x)) \vee \sim S(y, x))$
4. $\forall x ((\forall y S(y, x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \rightarrow \sim Eu(x))$
5. $\forall x (\sim (\forall y S(y, x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \vee \sim Eu(x))$
6. $\forall x ((\sim \forall y S(y, x) \vee \exists y Es(y)) \vee \sim Eu(x))$
7. $\forall x ((\exists y \sim S(y, x) \vee \exists y Es(y)) \vee \sim Eu(x))$
8. $\forall x ((\exists y \sim S(y, x) \vee \exists z Es(z)) \vee \sim Eu(x))$
9. $\forall x \exists y \exists z (\sim S(y, x) \vee Es(z) \vee \sim Eu(x))$

6. Obtener la Forma Normal de Skolem (FNS) equivalente de la siguiente fórmula:

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w [P(x, y, z) \wedge Q(u,v) \wedge \sim R(w)]$$

- 1) En la fórmula anterior (que ya se encuentra en FNP), es necesario eliminar los cuantificadores existenciales ($\exists x$, $\exists u$, $\exists w$).
- 2) $\exists x$ no se encuentra precedido por cuantificadores universales, se sustituye por una constante (a):

$$\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w [P(a, y, z) \wedge Q(u, v) \wedge \sim R(w)]$$

3) $\exists u, \exists w$ están precedidos por varios cuantificadores universales, por lo que serán sustituidos por las fórmulas $f(y, z)$ y $g(y, z, v)$ respectivamente:

$$\forall y \forall z \forall v [P(a, y, z) \wedge Q(f(y, z), v) \wedge \sim R(g(y, z, v))]$$

7. Obtener la Forma Normal de Skolem (FNS) equivalente de la siguiente fórmula:

$$\forall x \exists y \exists z [(\sim P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z)]$$

1) En primer lugar se transforma la fórmula a Forma Norma Conjuntiva:

$$\forall x \exists y \exists z [(\sim P(x, y) \vee R(x, y, z)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, z))]$$

2) Los cuantificadores $\exists y, \exists z$ están precedidos por el cuantificador universal $\forall x$ por lo que se sustituyen por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente:

$$\forall x [(\sim P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x)))]$$

8. Obtener la Forma Normal de Skolem (FNS) equivalente de la siguiente fórmula:

$$\forall x \exists y \exists z [(\sim P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, w)]$$

1) Se transforma F a FNC:

$$\forall x \exists y \exists z [(\sim P(x, y) \vee R(x, y, w)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, w))]$$

2) Cierre existencial de las variables libres:

$$\exists w \forall x \exists y \exists z [(\sim P(x, y) \vee R(x, y, w)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, w))]$$

3) Skolemización:

$$\forall x \exists y \exists z [(\sim P(x, y) \vee R(x, y, a)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, a))]$$

$$\forall x \exists z [(\sim P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), a)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, f(x), a))]$$

$$\forall x [(\sim P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), a)) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), a))]$$

9. Obtener la Forma Normal de Skolem (FNS) equivalente de la siguiente fórmula:

$$\forall x [\sim P(x, a) \rightarrow \exists y (P(y, g(x)) \wedge \forall z (P(z, g(x)) \rightarrow P(y, z)))]$$

- Obtención de la FNP:

$$\forall x [\sim \sim P(x, a) \vee \exists y (P(y, g(x)) \wedge \forall z (P(z, g(x)) \rightarrow P(y, z)))]$$

$$\forall x [P(x, a) \vee \exists y (P(y, g(x)) \wedge \forall z (\sim P(z, g(x)) \vee P(y, z)))]$$

$$\forall x [P(x, a) \vee \exists y \forall z (P(y, g(x)) \wedge (\sim P(z, g(x)) \vee P(y, z)))]$$

$$\forall x \exists y \forall z [P(x, a) \vee (P(y, g(x)) \wedge (\sim P(z, g(x)) \vee P(y, z)))]$$

$$\forall x \exists y \forall z [(P(x, a) \vee P(y, g(x))) \wedge (P(x, a) \vee \sim P(z, g(x)) \vee P(y, z))]$$

- No existen variables libres...

- Skolemización:

$$\forall x \forall z [(P(x, a) \vee P(f(x), g(x))) \wedge (P(x, a) \vee \sim P(z, g(x)) \vee P(f(x), z))]$$

10. Obtener la Forma Normal de Skolem (FNS) equivalente de la siguiente fórmula (*):

$$\forall x[(P(x) \rightarrow \sim \forall y(Q(x, y) \rightarrow \exists zP(z))) \wedge \forall t(Q(x, y) \rightarrow R(t))]$$

1) Obtención de la FNP:

$$\begin{aligned} &\forall x[(\sim P(x) \vee \sim \forall y(Q(x, y) \rightarrow \exists zP(z))) \wedge \forall t(Q(x, y) \rightarrow R(t))] \\ &\forall x[(\sim P(x) \vee \sim \forall y(Q(x, y) \rightarrow \exists zP(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[(\sim P(x) \vee \sim \forall y(\sim Q(x, y) \vee \exists zP(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[(\sim P(x) \vee \exists y(\sim \sim Q(x, y) \vee \exists zP(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[(\sim P(x) \vee \exists y(\sim Q(x, y) \wedge \sim \exists zP(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[(\sim P(x) \vee \exists y(Q(x, y) \wedge \forall z \sim P(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[(\sim P(x) \vee \exists y \forall z(Q(x, y) \wedge \sim P(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[\exists y \forall z(\sim P(x) \vee (Q(x, y) \wedge \sim P(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x[\exists u \forall z(\sim P(x) \vee (Q(x, u) \wedge \sim P(z))) \wedge \forall t(\sim Q(x, y) \vee R(t))] \\ &\forall x \exists u \forall z \forall t[(\sim P(x) \vee (Q(x, u) \wedge \sim P(z))) \wedge (\sim Q(x, y) \vee R(t))] \end{aligned}$$

2) Cierre existencial de las variables libres:

$$\exists y \forall x \exists u \forall z \forall t[(\sim P(x) \vee Q(x, u)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x, y) \vee R(t))]$$

3) Skolemización:

$$\begin{aligned} &\forall x \exists u \forall z \forall t[(\sim P(x) \vee Q(x, u)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x, a) \vee R(t))] \\ &\forall x \forall z \forall t[(\sim P(x) \vee Q(x, f(x))) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x, a) \vee R(t))] \end{aligned}$$