Hoja 13

Mínimos cuadrados

Problema 13.1 Determinar si los siguientes sistemas $A\,x = b$ son compatibles o no y encontrar su solución de mínimos cuadrados:

a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\,, \\ -2x_1 + 3x_2 = 1\,, \\ 2x_1 - x_2 = 2\,. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = 0\,, \\ x_1 - x_2 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 = 2\,. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3\,, \\ x_1 - x_2 = 0\,, \\ -2x_1 + 4x_2 = 2\,. \end{cases}$$

Problema 13.2 Para cada solución de mínimos cuadrados del Problema 13.1:

1) Determinar la proyección del vector b en el espacio columna de la matriz A.

2) Calcular la diferencia $r = b - A\,x_0$ (conocida como *vector de residuos*).

3) Verificar que el vector de residuos r pertenece al espacio nulo de la traspuesta de A.

Problema 13.3 Sean los puntos experimentales $(x, y) = (2, 1)$, $(5, 2)$, $(7, 3)$ y $(8, 3)$.

1. Hallar la ecuación $y = a + bx$ que mejor los ajusta, utilizando mínimos cuadrados, y esbozar su gráfico.

2. Encontrar el ajuste de mínimos cuadrados cuadrático (de la forma $y = a + bx + cx^2$) y esbozar su gráfico.

Problema 13.4 Sea A una matriz y sea b un vector no nulo del espacio nulo de la traspuesta de A.

1. Demostrar que el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de $A^t\,A$.

2. Demostrar que el sistema $A\,x = b$ es incompatible.

Problema 13.5 Demostrar que, si se verifica la expresión matricial

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline 0 & A^t \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde las matrices están escritas *por bloques*, entonces x_0 es la solución de mínimos cuadrados del sistema $A\,x = b$ y r es el vector de residuos.

Problema 13.6 Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{C}[0, 1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

y sea S el subespacio generado por los vectores 1 y $2x - 1$.

1. Demostrar que 1 y $2x-1$ son ortogonales.

2. Determinar $\|1\|$ y $\|2x-1\|$.

3. Encontrar la aproximación de mínimos cuadrados de $f(x)=\sqrt{x}$ en $[0,1]$ utilizando una función de S.

Problema 13.7 Dado el espacio vectorial $\mathcal{C}[-1,1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$ con producto interno

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

1. Demostrar que los vectores 1 y x son ortogonales.

2. Calcular $\|1\|$ y $\|x\|$.

3. Encontrar la aproximación de mínimos cuadrados de $f(x)=x^{1/3}$ en $[-1,1]$ utilizando una función de la forma $l(x)=c_1+c_2\,x$.