Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática

22 enero 2018

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (2.0 puntos) :

Dada la ecuación diferencial

$$\alpha y'' + y' + \frac{1}{4} y = f(x)\,,$$

donde α es un parámetro real y $f(x)$ es una función, se pide:

i) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$

ii) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$.

iii) Usando dos métodos distintos para hallar soluciones particulares, resolver el problema de valor inicial que resulta cuando $\alpha = 1$ y $f(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$, sabiendo que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$.

Solución:

i) Tomando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ se obtiene la ecuación $y' + \frac{1}{4}y = e^{\frac{3x}{4}}$, que es una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, lineal.
Se resuelve mediante el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{4}\,dx} = e^{\frac{x}{4}}$.
Multiplicando la ecuación por el factor integrante se tiene:

$$e^{\frac{x}{4}}\,y' + \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\,y = e^{\frac{x}{4}}\,e^{\frac{3x}{4}} = e^{x} \quad\Longrightarrow\quad \left(e^{\frac{x}{4}}\,y\right)' = e^{x} \quad\Longrightarrow\quad e^{\frac{x}{4}}\,y = e^{x} + C\,,$$

donde C es una constante de integración. Despejando $y(x)$, se obtiene la solución:

$$\boxed{y(x) = C\,e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{3x}{4}}}$$

ii) Tomando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$, se obtiene la ecuación, $5y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, homogénea con coeficientes contantes.
Su ecuación característica es: $5r^2 + r + \dfrac{1}{4} = 0$, y tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = -\dfrac{1}{10} + i\,\dfrac{1}{5}$, $r_2 = -\dfrac{1}{10} - i\,\dfrac{1}{5}$. La solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y(x) = c_1\,e^{-\frac{x}{10}}\cos(\tfrac{x}{5}) + c_2\,e^{-\frac{x}{10}}\sin(\tfrac{x}{5})\,,}$$

donde $c_1\,, c_2$ son constantes.

iii) La ecuación a resolver ahora es: $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 2e^{\frac{x}{2}}$.
Su solución es $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea e $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.
La ecuación característica es: $r^2 + r + \frac{1}{4} = 0$, tiene por solución $r = -\frac{1}{2}$, raíz real doble. Por tanto: $y_h(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2\, x\, e^{-\frac{x}{2}}$.
Para hallar la solución particular debemos seguir dos métodos distintos, por ejemplo podemos seguir los siguientes.

Método de los coeficientes indeterminados:
Teniendo en cuenta el término no homogéno de la ecuación, proponemos que $y_p(x) = Ae^{\frac{x}{2}}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene que $Ae^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$, por lo que $A = 2$, y la solución particular es: $y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

Método de variación de los parámetros:
Suponemos que la solución particular es de la forma $y_p(x) = u_1(x)e^{-\frac{x}{2}} + u_2(x)xe^{-\frac{x}{2}}$, donde u_1 y u_2 son dos funciones que resuelven el sistema formado por las ecuaciones
$u_1' e^{-\frac{x}{2}} + u_2' x e^{-\frac{x}{2}} = 0\,,\ -(1/2)u_1' e^{-\frac{x}{2}} + u_2'(-x/2+1)e^{-\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$. Resolviendo este sistema se llega a la misma solución particular: $y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$.

Por tanto la solución general pedida es $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2\, x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}$. Las constantes $c_1 = -1\,,\ c_2 = -\frac{3}{2}$ se obtienen imponiendo las condiciones iniciales: $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$. Finalmente la solución es:

$$\boxed{y(x) = -e^{-\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}\, x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}}$$

Ordinario 2017-2018

1) $\alpha y''+y'+1/4\,y=f(x)$

i) $\alpha=0$, $f(x)=e^{3x/4}$ EDO 1er Orden lineal

$y'+1/4\,y=e^{3x/4}$

$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{4}dx}=e^{x/4}$

$\frac{d}{dx}(y\cdot e^{x/4})=e^{x/4}\cdot e^{3x/4}$; $y e^{x/4}=\int e^{x}\,dx=$ $y=\frac{e^x}{e^{x/4}}=e^{3x/4}+k$; $y(x)=e^{3x/4}+k/e^{x/4}=e^{3x/4}+e^{-x/4}\cdot k$

ii) $\alpha=5$ $f=0$

$y'+5y''+1/4\,y=0$; $5\lambda^2+\lambda+1/4=0$; $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot5\cdot1/4}}{2\cdot5}=$ $\begin{cases}-1/10+1/5\,i\\-1/10-1/5\,i\end{cases}$

$\mathcal{B}=\{e^{-x/10}\operatorname{sen}(x/5),\ e^{-x/10}\cos(x/5)\}$

$\frac{-1\pm\sqrt{1-5}}{10}=$ $\begin{cases}\frac{-1}{10}+\frac{\sqrt{5-1}}{10}i=\frac{-1}{10}+\frac{2}{10}i\\\frac{-1}{10}-\frac{\sqrt{5-1}}{10}i=-\frac{1}{10}-\frac{2}{10}i\end{cases}$

$\boxed{y(x)=A\,e^{-x/10}\operatorname{sen}(x/5)+B\,e^{-x/10}\cos(x/5)}$

$A,B\in\mathbb{R}$

iii) $y''+y'+1/4\,y=2e^{x/2}$

$\lambda^2+\lambda+1/4=0$; $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot1/4}}{2\cdot1}=$ $\begin{cases}\frac{-1+\sqrt{0}}{2}=-1/2\\\frac{-1-\sqrt{0}}{2}=-1/2\end{cases}$

$\mathcal{B}=\{e^{-x/2},\ xe^{-x/2}\}$

$y_p=Ae^{-x/2}+Bxe^{-x/2}\}$

$y_p=Ce^{x/2}$

$y_p''=\frac{C}{4}e^{x/2}$

$y_p'=\frac{C}{2}e^{x/2}$

$\frac{C}{4}e^{x/2}+\frac{C}{2}e^{x/2}+\frac{C}{4}e^{x/2}=2e^{x/2}$; $\left(\frac{C}{4}+\frac{2C}{4}+\frac{C}{4}\right)e^{x/2}=2e^{x/2}$; $C=2$

$\boxed{\text{Sol: } y(x)=Ae^{-x/2}+Bxe^{-x/2}+2e^{x/2}\ /\ A,B\in\mathbb{R}}$

$\frac{2e^{-x/2}}{4}\cdot\frac{x}{e^{-x}}$

$y_p=u_1y_1+u_2y_2$

$\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0\\u_1'y_1'+u_2'y_2'=2e^{x/2}\ (g(x))\end{cases}$

$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0&y_2\\g(x)&y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0&xe^{-x/2}\\2e^{x/2}&e^{-x/2}+x\frac{-1}{2}e^{-x/2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-x/2}&xe^{-x/2}\\\frac{-1}{2}e^{-x/2}&e^{-x/2}-x/2\,e^{-x/2}\end{vmatrix}}=\frac{-2e^{x/2}\,xe^{-x/2}}{e^{-x/2}\cdot\left(e^{-x/2}-\frac{xe^{-x/2}}{2}\right)-\left(\frac{-e^{-x/2}}{2}\cdot xe^{-x/2}\right)}=$

$=\frac{-2x}{\frac{2e^{-2x/2}}{2}-\frac{xe^{-2x/2}}{2}+\frac{e^{-x/2}\cdot xe^{-x/2}}{2}}=\frac{-2x}{2e^{-2x/2}-\cancel{xe^{-2x/2}}+\cancel{xe^{-2x/2}}}\cdot 2=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}e^{-2x/2}}=\frac{-2x}{e^{-2x/2}}=-2xe^{x}$

$u_1=\int u_1'\,dx=\int -2xe^{x}\,dx=-2xe^{x}-\int e^{x}(-2)\,dx=\underbrace{-2xe^{x}+2e^{x}}_{2e^{x}(-x+1)=2(1-x)e^{x}}+\cancel{k}^{\,0}$

$u=-2x$ $du=-2dx$

$dv=e^{x}dx$ $v=e^{x}$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x/2} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x/2} & 2e^{x/2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{2e^{x/2} \cdot e^{-x/2}}{e^{-x}} = 2e^{x} \qquad u_2 = \int 2e^{x}dx = 2\int e^{x}dx = 2e^{x} + \cancel{C}^{\,0}$$

Sol:

$$y(x) = \underbrace{Ae^{-x/2} + \cancel{C}Bxe^{-x/2}}_{h} + \underbrace{2(1-x)e^{x}e^{-x/2} + 2\cancel{e}^{x}xe^{-x/2}}_{par}$$

$$(2 - \cancel{2x} + \cancel{2x})e^{x}e^{-x/2} = 2e^{x/2}$$

$$\frac{2x}{2} - \frac{x}{2}$$

Solución general: $y(x) = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2} + 2e^{x/2}$

$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$y(0) = 1 = Ae^{-0/2} + B0e^{-0/2} + 2 \cdot e^{0/2} = A + 2; \quad A = -1$

$y'(x) = \frac{-A}{2}e^{-x/2} + Be^{-x/2} - \frac{Bx}{2}e^{-x/2} + e^{x/2}$

$y'(0) = 0 = \frac{-A}{2} + B + 1; \qquad B = 0 + \frac{-1}{2} - 1 = -1'5; \; B = -1'5$

$$\boxed{\text{Sol. PVI: } y(x) = -e^{-x/2} - 1'5\,xe^{-x/2} + 2e^{x/2}}$$

Cuestión 2 (1.0 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to +\infty$

Solución:

i) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, raíz real doble.

El vector propio asociado a $\lambda = -1$ es $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obtenemos una primera solución fundamental $\overrightarrow{X}_1(t) = \overrightarrow{V} e^{-t} = \begin{pmatrix} 2\,e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Dado que el autovalor se repite, buscaremos otra solución fundamental de la forma $\overrightarrow{X}_2(t) = \overrightarrow{V}\, t\, e^{-t} + \overrightarrow{W} e^{-t}$, donde $\overrightarrow{W}$ satisface que $(A + I)\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}$. Resolviendo el sistema podemos tomar $\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así pues, $\overrightarrow{X}_2(t) = \begin{pmatrix} (2\,t - 1)\, e^{-t} \\ t\, e^{-t} \end{pmatrix}$.

La solución general del sistema viene dada por $\overrightarrow{X}(t) = c_1\, \overrightarrow{X}_1(t) + c_2\, \overrightarrow{X}_2(t)$, donde c_1 y c_2 son constantes. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} (2\,c_1 - c_2 + 2\,c_2\,t)\, e^{-t} \\ (c_1 + c_2\,t)\, e^{-t} \end{pmatrix}}$$

ii) Dado que para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2 se verifica que $\lim\limits_{t\to+\infty} (2\,c_1 - c_2 + 2\,c_2\,t)\, e^{-t} = 0$, y que $\lim\limits_{t\to+\infty} (c_1 + c_2\,t)\, e^{-t} = 0$, se concluye que:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cuestión 2 (1.0 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to +\infty$

i) $\vec{X}(t) = C_1 \vec{\omega}_1 + C_2 \vec{\omega}_2$

$$|A - \lambda I| = 0 ; \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A| = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1 = \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{Raiz multiple real.}$$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} ; \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad -x + 2y = 0$$

$$x = 2y$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_2 = e^{-t} t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\vec{w} \Rightarrow \vec{\omega}_2 = e^{-t} t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{w} = \vec{v} ; \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -x + 2y = 1 \\ x = 2y - 1 \end{matrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2y-1 \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\text{Sol. General: } \vec{X} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ii) $t \to \infty$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{X} = C_1 \cancel{e^{-\infty}}^{0}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cancel{e^{-\infty} \cdot \infty}^{0}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cancel{e^{-\infty}}^{0}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 3 (2.0 puntos) :
Hallar la solución del siguiente modelo de ecuación del calor, siguiendo los pasos que se indican:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; \;\; t>0\,, \;\; 0<x<4\,, \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t)=0\,, \;\; u(4,t)=0\,; \;\; t>0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} &: \quad (\mathbf{i})\; u(x,0)=f(x)=4\sin(\frac{3\pi}{4}x)\,. \end{aligned}$$

Paso 1: Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables, llamando λ a la constante de separación.

Paso 2: Demostrar que la función $T(t)$ satisface la ecuación $T' + 4\lambda T = 0$, y resolverla.

Paso 3: Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; X(4) = 0\,;$$

y hallar los valores $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

Paso 4: Escribir la solución $u(x,t)$ en forma de serie, teniendo en cuenta las funciones $T(t)$ y $X(x)$ obtenidas en los pasos 2 y 3.

Paso 5: Usar la condición inicial (CI) para hallar, finalmente, la solución del modelo.

Solución:

Paso 1: Aplicado separación de variables a la ecuación en derivadas parciales se obtiene:

$$XT' = 4\,X''T \implies \frac{XT'}{4\,XT} = \frac{4\,X''T}{4\,XT} \implies \frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{T'}{4\,T}\,,$$

donde λ es la constante de separación.

Paso 2: Teniendo en cuenta la última igualdad del paso anterior se tiene inmediatamente que $T' + 4\lambda T = 0$, que es una ecuación diferencial ordinaria lineal y su solución general es: $T(t) = c\,e^{-4\lambda\,t}$, donde c es una constante.

Paso 3: Teniendo en cuenta la penúltima igualdad del paso 1, se deduce que $X'' + \lambda X = 0$. Por otro lado, aplicando las condiciones de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0\,, \forall t \implies X(0) = 0\,, \quad u(4,t) = X(4)T(t) = 0\,, \forall t \implies X(4) = 0\,,$$

por tanto X satisface $X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; X(4) = 0$; como se pedía.
Las soluciones no nulas del problema de contorno se obtienen para:
$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, siendo $X_n(x) = c_n \sin(\frac{n\pi x}{4})$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$, donde c_n son constantes no nulas.

Cuestión 3 (2.0 puntos) :
Hallar la solución del siguiente modelo de ecuación del calor, siguiendo los pasos que se indican:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,;\ t>0\,,\ 0<x<4\,,\\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t)=0\,,\ u(4,t)=0\,;\ t>0\,,\\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad \text{(i) } u(x,0)=f(x)=4\sin(\tfrac{3\pi}{4}x)\,.
\end{aligned}$$

Paso 1: Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables, llamando λ a la constante de separación.

Paso 2: Demostrar que la función $T(t)$ satisface la ecuación $T' + 4\lambda T = 0$, y resolverla.

Paso 3: Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0)=0\,;\ X(4)=0\,;$$

y hallar los valores $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

Paso 4: Escribir la solución $u(x,t)$ en forma de serie, teniendo en cuenta las funciones $T(t)$ y $X(x)$ obtenidas en los pasos 2 y 3.

Paso 5: Usar la condición inicial (CI) para hallar, finalmente, la solución del modelo.

$\frac{d u(x,t)}{dt} = 4\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2}$; $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ Cambio de func. incog.

$X(x)T'(t) = 4\,X''(x)T(t)$; Separar variables $\Rightarrow$ Mult. $\frac{1}{X(x)T(t)4}$

$\frac{\cancel{X(x)}\,T'(t)}{4\cancel{X(x)}T(t)} = \frac{\cancel{4}X''(x)\cancel{T(t)}}{\cancel{4}X(x)\cancel{T(t)}}$; $\underbrace{\frac{T'(t)}{4T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}}$

Ec. 1) $T'(t) + 4\lambda T(t) = 0$

$\mu(x) = e^{\int 4\lambda\, dt} = e^{4\lambda t}$; $T'(t)e^{4\lambda t} + 4\lambda e^{4\lambda t}T(t) = 0$; $\frac{d}{dt}\left(T(t)e^{4\lambda t}\right) = 0$

$T(t)\cdot e^{4\lambda t} = k \,/\, k$ cte ; $\underline{T(t) = k e^{-4\lambda t}}$

Ec. 2) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$; $\lambda > 0$ y cambiamos variable $\lambda = a^2$

$r^2 + a^2 = 0$; $r = \sqrt{-a^2} = \pm ia$ $\quad \mathcal{B} = \{\operatorname{sen}(ax), \cos(ax)\}$

$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(ax) + C_2\cos(ax)$

$u(0,t) = 0 = X(0)\underset{\neq 0}{T(t)} \Rightarrow \underline{X(0)=0}$; $X(0) = 0 = \cancel{C_1\operatorname{sen}(0)}^{\,0} + C_2\cos(0)$

$0 = C_2$

$u(4,t) = 0 = X(4)\underset{\neq 0}{T(t)} \Rightarrow \underline{X(4)=0}$; $X(4) = 0 = C_1\operatorname{sen}(a4) + 0$

$0 = \underset{\neq 0 \text{ Exijo}}{C_1}\underset{\neq 0}{\operatorname{sen}(4a)}$; $0 = \operatorname{sen}(4a)$ para $4a = n\pi \;/\, n = 1,2,3\ldots$

$$a=\frac{n\pi}{4} \; ; \qquad X(x)= C_1 \operatorname{sen}\left(x\frac{n\pi}{4}\right)+0\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$$

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{16} \qquad X_n(x)= C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}x\right) \;/\; n=1,2,3\ldots$$

$$u(x,t)=X(x)\,T(t)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}x\right)e^{-\frac{4n^2\pi^2}{16}t}\right)$$

Falta usar CI

$$CI \Rightarrow f(x) = 4\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}x\right)=u(x,0)$$

$$e^{-0}=1$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}x\right)\cdot 1\right) = 4\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}x\right)$$

Para $n=1$ $\quad n=2$ $\quad n=3$ $\quad n=4$

$C_1=0 \quad C_2=0 \quad C_3=4 \quad C_4=0 \;\ldots\; C_n=0$

$$\Rightarrow$$

$$u(x,t)=4\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}x\right)e^{-\frac{4\cdot 3^2\pi^2}{16}} = 4\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}x\right)e^{-\frac{9\pi^2}{4}}$$

Paso 4: La solución en forma de serie es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 4t} \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \, , \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, .$$

Paso 5: Usando la condición inicial (CI)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = f(x) = 4\sin(\frac{3\pi}{4}x)$$

Las constantes A_n se pueden obtener a partir de las fórmulas deducidas en la teoría del modelo de ecuación del calor, o bien, las podemos hallar de una forma más fácil en este problema concreto mediante identificación:

$$A_1 = 0 \, , A_2 = 0 \, , A_3 = 4 \, , A_n = 0 \quad \forall \; n \geq 4 \, .$$

Finalmente, la solución del problema es:

$$\boxed{u(x,t) = 4 \, e^{-\frac{9\,\pi^2}{4} \, t} \, \sin(\tfrac{3\pi}{4}x)}$$

Cuestión 4 (1.0 puntos) :
Consideremos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \, ; \;\; t > 0 \, , \;\; 0 < x < \pi \, , \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad u(0,t) = 0 \, , \;\; u(\pi,t) = 0 \, ; \;\; t > 0 \\ \text{Condiciones Iniciales (CI)} \quad &: \quad (\mathbf{i}) \; u(x,0) = 4\sin(x) - 2\sin(3x) \, , \quad (\mathbf{ii}) \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \, , \;\; 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) \sin(nx) \; ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, .$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

Solución:

Cuestión 4 (1.0 puntos) :
Consideremos el siguiente modelo:

$$\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \; : \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,; \;\; t>0\,, \;\; 0<x<\pi\,,$$

$$\text{Condiciones de Contorno (CC)} \; : \; u(0,t)=0\,, \;\; u(\pi,t)=0\,; \;\; t>0$$

$$\text{Condiciones Iniciales (CI)} \; : \; \textbf{(i)}\; u(x,0) = 4\sin(x) - 2\sin(3x)\,, \quad \textbf{(ii)}\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \;\; 0 \le x \le \pi$$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\,; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2}$$

Ec. ... ondas

i) Dado el tipo de ecuación en derivadas parciales (EDP), se trata de un modelo de la ecuación de ondas, que se puede aplicar a desplazamientos verticales de una cuerda unidimensional. En concreto las condiciones de contorno (CC) son de tipo Dirichlet y nos indican que la cuerda de longitud $L = \pi$ está anclada en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Además la condición inicial (CI) (i) describe la posición inicial de la cuerda y la condición inicial (ii) indica que la velocidad inicial de la cuerda es nula.

ii) Los coeficientes A_n se pueden calcular usando las fórmulas integrales para este tipo de modelos, pero en este ejemplo en concreto podemos hallar los coeficientes por simple identificación. En efecto, considerando (CI) (i),

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(0) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 4\sin(x) - 2\sin(3x)\,.$$

Identificando coeficientes se tiene: $A_1 = 4\,, A_2 = 0\,, A_3 = -2\,, A_n = 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.$
La solución del modelo es:

$$\boxed{u(x,t) = 4\cos(t)\sin(x) - 2\cos(3t)\sin(3x)\,,}$$

iii) Veamos primero las (CC):
$u(0,t) = 4\cos(t)\sin(0) - 2\cos(3t)\sin(0) = 0\,,$
$u(\pi,t) = 4\cos(t)\sin(\pi) - 2\cos(3t)\sin(3\,\pi) = 0\,,$
Veamos ahora las (CI):
$u(x,0) = 4\cos(0)\sin(x) - 2\cos(0)\sin(3\,x)\,,$ y se verifica (CI)(i).
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -4\sin(0)\sin(x) + 6\sin(0)\sin(3\,x) = 0\,,$ y se verifica (CI)(ii).
Por último, veamos si se verifica la (EDP):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -4\sin(t)\sin(x) + 6\sin(3t)\sin(3x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -4\cos(t)\sin(x) + 18\cos(3t)\sin(3x)\,.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 4\cos(t)\cos(x) - 6\cos(3t)\cos(3x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -4\cos(t)\sin(x) + 18\cos(3t)\sin(3x)\,.$$

Con esto queda probado lo que se pide en el enunciado.
