



Universidad
Carlos III de Madrid

MATEMÁTICA DISCRETA

Control Marzo 2012

Apellidos		Hora	
Nombre		Grupo	

Normas generales:

- **NO** se permite ningún tipo de dispositivo electrónico (teléfonos móviles, calculadoras, etc).
 - Cada paso debe estar justificado.
 - Se puede abandonar el aula pasados 15 minutos del comienzo del control.
 - Este control corresponde al 20% de la nota de evaluación continua.
-

Pregunta 1 (1 punto) Sean los siguientes conjuntos de *intervalos* de la recta real:

$$X = \{\emptyset, (2, 4), (2, 5), (4, 5), (6, 8), (2, 8)\}$$

$$Y = \{\emptyset, [2, 4), [2, 5), [2, 8), [4, 5), [4, 8)\}$$

Determina si son retículos respecto a la relación de inclusión definida por:

$$ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$$

y halla un subretículo en caso de que la respuesta sea afirmativa. Prueba si X o Y son álgebras de Boole. Encuentra un subconjunto de Y que sea álgebra de Boole.

SOLUCIÓN.

Un conjunto es retículo respecto a una relación de orden si y sólo si cada par de sus elementos tiene un supremo y un ínfimo dentro del conjunto. La relación de orden del enunciado es la inclusión. El supremo de dos intervalos es la unión de ellos y el ínfimo es la intersección. Para verlo, hay que darse cuenta de que todos los conjuntos de la recta real que contienen a los dos intervalos (sus cotas superiores) contienen a su unión, por tanto, la unión es el inferior de todos ellos y por tanto es el supremo de los dos intervalos. En cuanto al ínfimo, la intersección de dos intervalos contiene a todos los conjuntos de la recta real que están contenidos en ambos intervalos (sus cotas inferiores), por tanto, es superior a todos ellos, y por tanto es el ínfimo de los dos intervalos.

X no es retículo, porque la unión de $(2, 4)$ y $(4, 5)$ no está en X . Y sí es retículo, las siguientes tablas dan todas las uniones e intersecciones, aunque hay más maneras de verlo que ésta.

\cup	\emptyset	$[2, 4)$	$[2, 5)$	$[2, 8)$	$[4, 5)$	$[4, 8)$
\emptyset	\emptyset	$[2, 4)$	$[2, 5)$	$[2, 8)$	$[4, 5)$	$[4, 8)$
$[2, 4)$		$[2, 4)$	$[2, 5)$	$[2, 8)$	$[2, 5)$	$[2, 8)$
$[2, 5)$			$[2, 5)$	$[2, 8)$	$[2, 5)$	$[2, 8)$
$[2, 8)$				$[2, 8)$	$[2, 8)$	$[2, 8)$
$[4, 5)$					$[4, 5)$	$[4, 8)$
$[4, 8)$						$[4, 8)$

\cap	\emptyset	$[2, 4)$	$[2, 5)$	$[2, 8)$	$[4, 5)$	$[4, 8)$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$[2, 4)$		$[2, 4)$	$[2, 4)$	$[2, 4)$	\emptyset	\emptyset
$[2, 5)$			$[2, 5)$	$[2, 5)$	$[4, 5)$	$[2, 5)$
$[2, 8)$				$[2, 8)$	$[4, 5)$	$[4, 8)$
$[4, 5)$					$[4, 5)$	$[4, 5)$
$[4, 8)$						$[4, 8)$

Hay muchas maneras de obtener subretículos de Y , una de ellas es extraer una serie de intervalos contenidos unos en otros, como $\{\emptyset, [2, 4), [2, 5), [2, 8)\}$.

X no es álgebra de Boole, porque ni siquiera es retículo. Y , aunque es retículo, tampoco es álgebra de Boole. Está claro que de serlo, el cero sería el intervalo vacío y el uno el $[2, 8)$, y entonces el elemento complementario de un intervalo I sería aquél que verificara $I \cup I^c = [2, 8)$, o sea $I^c = [2, 8) \setminus I$. Ahora bien, el complementario de $[2, 5)$ es un intervalo que no está en Y , así que Y no es álgebra de Boole.

Si tomamos el subconjunto de Y siguiente:

$$Y' = \{\emptyset, [2, 4), [4, 8), [2, 8)\}$$

vemos que sí es cerrado bajo uniones, intersecciones y complementarios. No es necesario demostrar que es distributivo, puesto que sabemos que las operaciones de unión e intersección de conjuntos poseen esa propiedad, de modo que este conjunto sí es un álgebra de Boole.

Otra solución posible es:

$$Y'' = \{\emptyset, [2, 4), [4, 5), [2, 5)\}$$

Y también una serie de álgebras de Boole triviales de dos conjuntos, siempre que uno esté contenido en el otro.

Pregunta 2 (1 punto)

- a) Sean las cadenas de n bits en las que no aparece la secuencia “101”. Plantea la ecuación de recurrencia que verifica el número de dichas cadenas y las condiciones iniciales que verifica.
Importante: No es necesario resolver la relación de recurrencia, sino sólo escribirla.
- b) Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n + 3 \cdot (-2)^{n+3}, \quad n \geq 1$$

con condiciones iniciales: $a_1 = 1, a_2 = 1$.

SOLUCIÓN.

- a) Para plantear la ecuación de recurrencia hay que suponer que se conoce el número de las cadenas de hasta $n - 1$ bits que cumplen la condición. Estudiando cómo se construiría la cadena de n bits con cadenas más cortas se puede obtener el número de ellas, es decir a_n a partir del de las cadenas más cortas que se supone conocido. Así resulta la relación de recurrencia.

Si tuviéramos que añadir un bit de más a las cadenas de $n - 1$ bits, sin que aparezcan secuencias “101”, y ese bit valiera cero, no habría ninguna posibilidad de que se formara el “101”: no lo hay en los $n - 1$ primeros bits, y el cero que ponemos no completa la secuencia prohibida. Sin embargo, si ponemos un 1, algunas de las cadenas de $n - 1$ bits (las que acaban en “10”) completarían la secuencia prohibida. De modo que hemos de evitar esa situación: hemos de asegurarnos de que en las cadenas que formamos añadiendo el 1 se da una de dos posibilidades, o bien completa la secuencia “11” o bien la “001”.

Hay a_{n-1} cadenas de $n - 1$ bits con las que formar la de n bits añadiendo el 0, más a_{n-2} cadenas de $n - 2$ bits con las que formar la de n bits añadiendo el grupo “11”, más a_{n-3} cadenas de $n - 3$ con las que construir la cadena de n bits con el grupo “001”. Haciendo el total se deduce la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

Realmente, cualquiera que sea la secuencia prohibida, la ecuación de recurrencia tiene los mismos términos, y tantos de ellos como dígitos tenga (daría lo mismo si la secuencia no permitida fuera “001”). En cuanto a las condiciones iniciales, serían $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$.

- b) Para resolver la relación de recurrencia de la segunda parte hay que empezar por formular la ecuación homogénea:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

Ésta es una ecuación lineal de orden 1 y ecuación característica $x^2 = x + 6$, cuyas raíces son $x = -2, 3$. La solución general de la homogénea es:

$$a_n^h = K_1 \cdot (-2)^n + K_2 \cdot 3^n$$

IMPORTANTE: No es ahora cuando se sustituyen las condiciones iniciales, sino cuando se tiene la solución general de la completa.

Ahora hay que hallar una solución particular de la ecuación completa. Nos fijamos en el término inhomogéneo $3 \cdot (-2)^{n+3}$. Su forma funcional es la de una constante por una potencia, y la base de la potencia es una raíz de multiplicidad 1 de la ecuación característica. Así que una solución particular es:

$$a_n^p = (C_1 \cdot n + C_0) \cdot (-2)^n$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación completa resulta ser $C_1 = -24/10$ y C_0 puede ser un número cualquiera, que elegimos que sea el cero. De modo que la solución general de la completa es:

$$a_n = K_1 \cdot (-2)^n + K_2 \cdot 3^n - \frac{24}{10} \cdot n \cdot (-2)^n$$

Para hallar la solución que verifica las condiciones iniciales del enunciado, particularizamos esta solución inicial para $n = 1, 2$ e igualamos a los valores.

$$a_1 = K_1 \cdot (-2) + K_2 \cdot 3 + \frac{24}{5} = 1$$

$$a_2 = K_1 \cdot 4 + K_2 \cdot 9 - \frac{96}{5} = 1$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $K_1 = 79/25$, $K_2 = 21/25$. Y la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = \frac{79}{25} \cdot (-2)^n + \frac{21}{25} \cdot 3^n - \frac{24}{10} \cdot n \cdot (-2)^n$$



Universidad
Carlos III de Madrid

MATEMÁTICA DISCRETA

Control Marzo 2012

Apellidos		Hora	
Nombre		Grupo	

Normas generales:

- **NO** se permite ningún tipo de dispositivo electrónico (teléfonos móviles, calculadoras, etc).
 - Cada paso debe estar justificado.
 - Se puede abandonar el aula pasados 15 minutos del comienzo del control.
 - Este control corresponde al 20% de la nota de evaluación continua.
-

Pregunta 1 (1 punto) Sean los siguientes conjuntos de *intervalos* de la recta real:

$$X = \{\emptyset, (1, 3), (2, 3), (2, 6), (5, 6), (1, 6)\}$$

$$Y = \{\emptyset, (1, 3], (1, 4], (1, 7], (3, 4], (3, 7]\}$$

Determina si son retículos respecto a la relación de inclusión definida por:

$$ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$$

y halla un subretículo en caso de que la respuesta sea afirmativa. Prueba si X o Y son álgebras de Boole. Encuentra un subconjunto de Y que sea álgebra de Boole.

SOLUCIÓN.

Un conjunto es retículo respecto a una relación de orden si y sólo si cada par de sus elementos tiene un supremo y un ínfimo dentro del conjunto. La relación de orden del enunciado es la inclusión. El supremo de dos intervalos es la unión de ellos y el ínfimo es la intersección. Para verlo, hay que darse cuenta de que todos los conjuntos de la recta real que contienen a los dos intervalos (sus cotas superiores) contienen a su unión, por tanto, la unión es el inferior de todos ellos y por tanto es el supremo de los dos intervalos. En cuanto al ínfimo, la intersección de dos intervalos contiene a todos los conjuntos de la recta real que están contenidos en ambos intervalos (sus cotas inferiores), por tanto, es superior a todos ellos, y por tanto es el ínfimo de los dos intervalos.

X no es retículo, porque la unión de $(1, 3)$ y $(5, 6)$ no está en X . Y sí es retículo, las siguientes tablas dan todas las uniones e intersecciones, aunque hay más maneras de verlo que ésta.

\cup	\emptyset	$[1, 3)$	$[1, 4)$	$[1, 7)$	$[3, 4)$	$[3, 7)$
\emptyset	\emptyset	$[1, 3)$	$[1, 4)$	$[1, 7)$	$[3, 4)$	$[3, 7)$
$[1, 3)$		$[1, 3)$	$[1, 4)$	$[1, 7)$	$[1, 4)$	$[1, 7)$
$[1, 4)$			$[1, 4)$	$[1, 7)$	$[1, 4)$	$[1, 7)$
$[1, 7)$				$[2, 8)$	$[2, 8)$	$[2, 8)$
$[3, 4)$					$[3, 4)$	$[3, 7)$
$[3, 7)$						$[3, 7)$

\cap	\emptyset	$[1, 3)$	$[1, 4)$	$[1, 7)$	$[3, 4)$	$[3, 7)$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$[1, 3)$		$[1, 3)$	$[1, 3)$	$[1, 3)$	\emptyset	\emptyset
$[1, 4)$			$[1, 4)$	$[1, 4)$	$[3, 4)$	$[3, 4)$
$[1, 7)$				$[1, 7)$	$[3, 4)$	$[3, 7)$
$[3, 4)$					$[3, 4)$	$[3, 7)$
$[3, 7)$						$[3, 7)$

Hay muchas maneras de obtener subretículos de Y , una de ellas es extraer una serie de intervalos contenidos unos en otros, como $\{\emptyset, [1, 3), [1, 4), [1, 7)\}$.

X no es álgebra de Boole, porque ni siquiera es retículo. Y , aunque es retículo, tampoco es álgebra de Boole. Está claro que de serlo, el cero sería el intervalo vacío y el uno el $[1, 7)$, y entonces el elemento complementario de un intervalo I sería aquél que verificara $I \cup I^c = [2, 8)$, o sea $I^c = [2, 8) \setminus I$. Ahora bien, el complementario de $[1, 4)$ es un intervalo que no está en Y , así que Y no es álgebra de Boole.

Si tomamos el subconjunto de Y siguiente:

$$Y' = \{\emptyset, [1, 3), [3, 7), [1, 7)\}$$

vemos que sí es cerrado bajo uniones, intersecciones y complementarios. No es necesario demostrar que es distributivo, puesto que sabemos que las operaciones de unión e intersección de conjuntos poseen esa propiedad, de modo que este conjunto sí es un álgebra de Boole.

Otra solución posible es:

$$Y'' = \{\emptyset, [1, 3), [3, 4), [1, 4)\}$$

Y también una serie de álgebras de Boole triviales de dos conjuntos, siempre que uno esté contenido en el otro.

Pregunta 2 (1 punto)

- a) Sea una avenida con n semáforos. Plantea la ecuación de recurrencia que verifica el número de configuraciones de las luces de los semáforos de manera que no haya dos rojos seguidos de uno amarillo. **Importante:** No es necesario resolver la relación de recurrencia, sino solamente escribirla.
- b) Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} + 5 \cdot a_n + 8 \cdot 3^{n-1}, \quad n \geq 1$$

con condiciones iniciales: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

SOLUCIÓN.

- a) Para hallar la ecuación de recurrencia hemos de suponer que tenemos resuelto el problema para todos los números hasta $n - 1$ incluido, es decir, que sabemos el número de maneras de disponer semáforos según la condición cuando hay $n - 1$ o menos semáforos, e intentar ver cómo se construye la solución para n semáforos.

Hay tres alternativas, rojo (R), amarillo (A) y verde (V), y una secuencia que debemos evitar, dos rojos seguidos de uno amarillo (RRA). Si el semáforo enésimo que vamos a colocar es R o V no hay modo de que se concluya una secuencia prohibida RRA, pero sí podría ocurrir si pusieramos uno A. Si ponemos el semáforo A, hemos de hacerlo bien como VA, AA, o como VRA o ARA. Éstas son todas las maneras posibles que evitan la secuencia prohibida. Ahora vamos a contarlas.

Hay a_{n-1} maneras de poner R, a_{n-1} maneras de poner V, a_{n-2} maneras de poner VA, a_{n-2} maneras de poner AA, a_{n-3} maneras de poner VRA y a_{n-3} maneras de poner ARA. En total,

$$a_n = 2 \cdot (a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3})$$

- b) Para resolver la relación de recurrencia de la segunda parte hay que empezar por formular la ecuación homogénea:

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} + 5 \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

Ésta es una ecuación lineal de orden 1 y ecuación característica $x^2 = 4 \cdot x + 5$, cuyas raíces son $x = -1$, 5 . La solución general de la homogénea es:

$$a_n^h = K_1 \cdot (-1)^n + K_2 \cdot 5^n$$

IMPORTANTE: No es ahora cuando se sustituyen las condiciones iniciales, sino cuando se tiene la solución general de la completa.

Ahora hay que hallar una solución particular de la ecuación completa. Nos fijamos en el término inhomogéneo $8 \cdot 3^{n-1}$. Su forma funcional es la de una constante por una potencia, y la base de la potencia no es una raíz de la ecuación característica. Así que una solución particular es:

$$a_n^p = K \cdot 3^n$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación completa resulta ser $K = -1/3$. De modo que la solución general de la completa es:

$$a_n = K_1 \cdot (-1)^n + K_2 \cdot 5^n - \frac{1}{3} \cdot 3^n = K_1 \cdot (-1)^n + K_2 \cdot 5^n - 3^{n-1}$$

Para hallar la solución que verifica las condiciones iniciales del enunciado, particularizamos esta solución inicial para $n = 1, 2$ e igualamos a los valores.

$$a_1 = K_1 \cdot (-1) + K_2 \cdot 5 - 3^0 = 1$$

$$a_2 = K_1 \cdot 1 + K_2 \cdot 25 - 3 = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $K_1 = -7/6$, $K_2 = 1/6$. Y la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = -\frac{7}{6} \cdot (-1)^n + \frac{5^n}{6} - 3^{n-1}$$