SERIES DE TAYLOR Y FUNCIONES ANALÍTICAS:

- Supongamos que $f: (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función $C^\infty(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ (es decir, las funciones $f^{(k)}(x)$ son continuas en $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $\forall k=0,1,2,\dots$)

  La SERIE:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

se denomina SERIE de TAYLOR de f centrada en x_0.

- Podemos pensar en $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ como una función cuyo dominio consiste en el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge:

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$$

En particular, x_0 pertenece al dominio ya que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^k = f(x_0)$$

¿Qué ocurre si $x \neq x_0$? Si $x \neq x_0$, en principio puede pasar cualquiera de las siguientes cosas:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ <u>no</u> sea convergente

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converja a un valor $\neq f(x)$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converja a $f(x)$

Dicha casuística depende del comportamiento de la sucesión $(f^{(k)}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$. Aunque no vamos a estudiar el problema con detalle, en algunos casos es fácil demostrar la convergencia de la serie de Taylor (ver siguiente sección). En concreto:

- $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad ; \quad |x|<1$
- $\log(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad ; \quad |x|<1$
- $(1+x)^a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad ; \quad |x|<1$

$$\binom{a}{0} = 1$$
$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

FUNCIÓN ANALÍTICA EN x_0:

- Diremos que f es analítica en x_0 si:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

para todo $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

- Ejemplo: Consideremos $f(x) = e^x$; x_0 arbitrario

Usando que $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k = 0,1,2,\dots$ se tiene que

$$e^x = \underbrace{e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \cdots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x|f,x_0)} + \underbrace{\frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x|f,x_0)}$$

con $c_n \in (x_0, x)$

Tomando $\lim_{n\to\infty}$ se tiene:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k + \lim_{n\to\infty} e^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde $c_n \in (x_0, x)$

Ahora bien: $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ Stirling

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{c_n}}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0} = 0$$

Por tanto:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

e^x es ANALÍTICA en x_0 para todo $x_0 \in \mathbb{R}$