Tema 4

Base y dimensión

4.1. Conjuntos generadores. Conjuntos generados

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores del espacio vectorial V. Recordemos que la suma de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares, se denomina *combinación lineal* de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Este concepto es esencial en la teoría de los espacios vectoriales y en él se apoyan numerosas ideas. Comenzamos el tema dando la siguiente definición:

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se denomina **conjunto generado** por $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Lo denotaremos por $\mathrm{Gen}(v_1, \ldots, v_n)$.

Ejemplo

Consideremos los vectores $(1,1,1)^t$ y $(1,1,0)^t$ de $\mathbb{R}^3$. El conjunto generado por dichos vectores viene dado por el conjunto de todas las combinaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned}\{\alpha(1,1,1)^t + \beta(1,1,0)^t \colon \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} &= \{(\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha)^t \colon \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha^*,\alpha^*,\beta^*)^t \colon \alpha^*,\beta^*\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Ahora consideremos los vectores $(-1,-1,2)^t$, $(1,1,1)^t$ y $(1,1,0)^t$. El conjunto generado por estos vectores se describe por

$$\{\alpha(-1,-1,2)^t + \beta(1,1,1)^t + \gamma(1,1,0)^t \colon \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(-\alpha+\beta+\gamma, -\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+\beta)^t \colon \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Sin embargo, si observamos la primera y la segunda coordenadas, vemos que éste también puede ser descrito por:

$$\{(\alpha^*,\alpha^*,\beta^*)^t \colon \alpha^*,\beta^*\in\mathbb{R}\}.$$

Así: $\quad \mathtt{Gen}((1,1,1)^t,(1,1,0)^t) = \mathtt{Gen}((-1,-1,2)^t,(1,1,1)^t,(1,1,0)^t).$

El siguiente resultado es esencial en temas posteriores.

Teorema

Si $v_1,\ldots,v_n$ son elementos de un espacio vectorial V, entonces $\mathtt{Gen}(v_1,\ldots,v_n)$ es un subespacio de V.

Demostración. Sea $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ un elemento arbitrario de $\mathtt{Gen}(v_1,\ldots,v_n)$ y λ cualquier escalar. Puesto que

$$\lambda v = \lambda(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = (\lambda\cdot\alpha_1)v_1 + \cdots + (\lambda\cdot\alpha_n)v_n\,,$$

se deduce que $\lambda v \in \mathtt{Gen}(v_1,\ldots,v_n)$.

Ahora consideremos $v, w \in \mathtt{Gen}(v_1,\ldots,v_n)$, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ y $w = \beta_1 v_1 + \cdots +$

$\beta_n v_n$. Puesto que

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \in \mathrm{Gen}(v_1, \ldots, v_n)$$

hemos probado que $\mathrm{Gen}(v_1, \ldots, v_n)$ es un subespacio de V. $\square$

Además, el teorema anterior motiva la siguiente definición:

El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un **conjunto generador de** V si cada vector de V puede escribirse como una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Ejemplo

Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, -1, 2)^t$, $v_2 = (-2, 3, 1)^t$ y $v_3 = (-1, 3, 8)^t$. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por v_1, v_2, v_3. Como $v_3 = 3v_1 + 2v_2$, cualquier combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 puede reducirse a una combinación lineal de v_1 y v_2:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3(3v_1 + 2v_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_3)v_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)v_2 \,.$$

Así, $\quad S = \mathrm{Gen}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Gen}(v_1, v_2)$.

Este ejemplo ilustra las siguientes proposiciones:

Proposición

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera un espacio vectorial V y uno de estos vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros $n-1$ vectores, entonces esos $n-1$ vectores generan V.

Demostración. Supongamos que v_n puede escribirse como combinación lineal de v_1, ..., v_{n-1}:

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \,.$$

Sea $v \in V$. Puesto que $v_1, \ldots, v_n$ genera V podemos escribir

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_n \alpha_1) v_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \end{aligned}$$

y cualquier vector $v \in V$ puede escribirse como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_{n-1}$, i.e., $V = \mathrm{Gen}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. $\square$

Proposición

Dados n vectores $v_1, \ldots, v_n$, es posible escribir uno de los vectores como combinación lineal de los otros $n-1$ si y sólo si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$, no todos cero, tales que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0\,.$$

Demostración. Supongamos que uno de estos vectores, digamos v_n, puede escribirse como combinación lineal de los otros:

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}\,.$$

Restando v_n a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0\,.$$

Si hacemos $c_1 = \alpha_1, \ldots, c_{n-1} = \alpha_{n-1}, c_n = -1$, se deduce que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0\,.$$

Inversamente, si

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$

y al menos uno de los c_i's, digamos c_n, es no nulo, entonces

$$v_n = \frac{-c_1}{c_n} v_1 + \cdots + \frac{-c_{n-1}}{c_n} v_{n-1} \, .$$

□

En virtud de las propiedades anteriores podemos dar las siguientes definiciones (ya conocidas):

Los vectores $v_1, \dots, v_n$ del espacio vectorial V se dicen **linealmente independientes** si

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \tag{4.1}$$

implica que todos los escalares $c_1, \dots, c_n$ son iguales a 0. Inversamente, los vectores $v_1, \dots, v_n$ del espacio vectorial V se denominan **linealmente dependientes** si existen ciertos escalares $c_1, \dots, c_n$, no todos nulos, tales que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \, .$$

Obsérvese que la expresión (4.1) representa un sistema lineal homogéneo, que siempre tiene solución trivial. Los vectores serán linealmente independientes si dicha solución es *única*.

El siguiente teorema se da sin demostración.

Teorema

Sean $v_1, \dots, v_n$ vectores de un espacio vectorial V. Un vector v de $\mathrm{Gen}(v_1, \dots, v_n)$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$ si y sólo si $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes.

4.2. Bases y dimensión

Los vectores $v_1, \dots, v_n$ forman una **base** del espacio vectorial V si y sólo si

1) $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes, y

2) $v_1, \dots, v_n$ generan V.

NOTA: es importante observar que las bases son conjuntos ordenados de vectores. Por lo tanto denotaremos una base como $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Ejemplo

La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $B_0 = (e_1, e_2)$ con $e_1 = (1, 0)^t$ y $e_2 = (0, 1)^t$. Verifiquemos que B_0 es efectivamente una base.

Claramente, e_1 y e_2 son linealmente independientes, puesto que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Además todo vector $v = (v_1, v_2)^t$ de $\mathbb{R}^2$ puede representarse como una combinación lineal de estos dos vectores de la forma

$$v = v_1 e_1 + e_2 v_2$$

y así $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Gen}(e_1, e_2)$. Por tanto, $B_0 = (e_1, e_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Veamos otras propiedades de los conjuntos generadores y de las bases de un espacio vectorial.

Teorema

Si $(v_1, \dots, v_n)$ es un conjunto generador de un espacio vectorial V, cualquier colección de m vectores de V con $m > n$ es linealmente dependiente.

Como consecuencia, si $(v_1, \dots, v_n)$ y $(u_1, \dots, u_m)$ son bases de un espacio vectorial V, entonces $n = m$. A la vista de este resultado, podemos referirnos al número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial dado V como la **dimensión** de dicho espacio vectorial. Si existe un conjunto finito de vectores que genera V, diremos que V es de dimensión finita. En caso contrario, diremos que V es de dimensión infinita. En este curso sólo nos ocuparemos de espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita $n > 0$:

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes genera V.
- Si n vectores generan V, son linealmente independientes.

Finalmente:

Proposición

Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ un conjunto de vectores de V (sobre $\mathbb{K}$). Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. B es una *base* de V.
2. B es un conjunto *linealmente independiente maximal* (es decir, si añadimos cualquier vector al conjunto, éste deja de ser linealmente independiente).
3. B es un *conjunto generador minimal* de V (es decir, si eliminamos cualquier vector de B, éste deja de ser generador de V).

Veamos el caso de algunos espacios vectoriales muy utilizados. Es fácil demostrar que:

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{K}^{m\times n}) = mn$.

- $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

Conocidos estos resultados, podremos determinar si un conjunto de vectores forma o no una base en el correspondiente espacio vectorial, observando si su cardinalidad coincide con la dimensión del espacio y, en tal caso, estudiando simplemente si son linealmente independientes.

Ejemplo

El espacio $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3 es generado por los vectores linealmente independientes $e_1 = (1,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0)^t$ y $e_3 = (0,0,1)^t$, los cuales forman la base canónica $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

El conjunto ordenado $((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,0)^t)$ también es una base de $\mathbb{R}^3$. Para probar esto, igualamos a cero una combinación lineal arbitraria de todos ellos

$$\alpha_1(1,1,1)^t + \alpha_2(1,1,0)^t + \alpha_3(1,0,0)^t = 0$$

que da lugar al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,,$$

lo que demuestra que los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Dada la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, los espacios fila y columna de A tienen la misma dimensión y ésta es igual al rango de la matriz $r = \mathrm{rg}(A)$. Se pueden encontrar bases para estos espacios entre las filas y columnas de la propia A. Los espacios nulos de A y

A^t tienen dimensiones $n - r$ y $m - r$.

Espacio Vectorial	Dimensión	Subespacio de
$N(A)$, espacio nulo	$n - rg(A)$	$\mathbb{K}^m$
$\mathcal{C}(A)$, espacio columna	$rg(A)$	$\mathbb{K}^n$
$\mathcal{C}(A^t)$, espacio fila	$rg(A)$	$\mathbb{K}^m$
$N(A^t)$, espacio nulo de A^t	$m - rg(A)$	$\mathbb{K}^n$

Para encontrar una base del espacio nulo de A, resolvemos el sistema $A\,x = 0$; si aplicamos el método de Gauss, tendremos que reducir A a forma escalonada.

Para encontrar una base del espacio columna, la forma escalonada de A nos permitirá identificar las columnas que forman un sistema linealmente independiente (las que corresponden a las variables pivote).

De igual modo, para encontrar una base del espacio fila, reducimos A a su forma escalonada; las filas no nulas corresponden a las que forman $\boxed{\text{(en la matriz } A)}$ un conjunto linealmente independiente.

Para el caso del espacio nulo de A^t, podemos encontrar una base resolviendo el sistema $A^t\,x = 0$. Sin embargo hay una alternativa más práctica: aplicar el método de Gauss a la matriz $\left(A \mid I \right)$ para obtener la matriz equivalente $\left(U \mid J \right)$. Las $m - rg(A)$ últimas filas de J forman una base del espacio nulo de la traspuesta de A. Esto se debe a que al realizar operaciones elementales sobre $\left(A \mid I \right)$, la matriz J, invertible, refleja las operaciones que se han realizado para obtener U, es decir, $J\,A = U$. Al realizar este producto, obtenemos que las últimas $m - rg(A)$ filas de A son vectores fila 0; es decir, las últimas $m - rg(A)$ filas de J, multiplicadas por A, producen el vector fila 0 y, por ello, forman una base del espacio nulo de A^t. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar sus cuatro espacios vectoriales asociados.

1) **Espacio Nulo**: $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^4 : A\,v = 0\}$. La condición $A\,v = 0$ se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que representa un sistema lineal con tres ecuaciones y cuatro incógnitas v_1, v_2, v_3 y v_4. Si obtenemos una forma escalonada de la matriz, resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que v_1 y v_2 serán variables pivote y v_3 y v_4 los parámetros. Por tanto el espacio nulo será

$$N(A) = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t \in \mathbb{R}^4 \colon v_1 = \frac{17}{3} v_3 - \frac{11}{3} v_4,\ v_2 = -4 v_3 + v_4 \right\}$$

y una base vendrá dada por

$$B = \left((17, -12, 3, 0)^t, (-11, 3, 0, 3)^t \right).$$

Obsérvese que de este resultado también se deduce que el rango de A es 2.

2) **Espacio columna**: $\mathcal{C}(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 \colon v = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4,\ a_i \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de vectores que son combinación lineal de las columnas de la matriz A. Para determinar una base, podemos reducir la matriz A a forma escalonada (como hicimos antes):

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Las variables pivote se corresponden con las columnas 1 y 2, por tanto, una base del espacio columna estará formada por las $\boxed{\text{correspondientes columnas de la matriz } A}$

$$B = \left((3,0,6)^t, (5,1,11)^t\right).$$

La dimensión del espacio columna es, obviamente, 2.

3) **Espacio fila**: $\mathcal{C}(A^t)$ es generado por dos filas de la matriz A, las que corresponden a las filas no nulas en la forma escalonada obtenida o, equivalentemente, las que contienen los coeficientes de las variables pivote en la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así $\mathcal{C}(A^t) = \{v \in \mathbb{R}^4 \colon v = b_1(3,5,3,6)^t + b_2(0,1,4,-1)^t, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}$. La dimensión del espacio fila es también 2.

4) **Espacio nulo de la traspuesta**: $N(A^t)$ es el conjunto de vectores de la forma

$v = (v_1, v_2, v_3)^t$ que satisfacen $A^t x = 0$ ó también

$$(v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0)\,.$$

Si escribimos la matriz ampliada del sistema lineal $A^t x = 0$ y hallamos su forma escalonada, resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 0 \\ 3 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -1 & 11 & 0 \end{array}\right) \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} N(A^t) &= \left\{v = (v_1, v_2, v_3)^t \colon v_1 = -2v_3, v_2 = -v_3\right\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \colon v = v_3(-2, -1, 1)^t, v_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, la dimensión del espacio nulo de la traspuesta es $3 - 2 = 1$.

Una manera alternativa para obtener el espacio nulo de la traspuesta simultáneamente a los otros espacios $\boxed{\text{(con menos cálculos)}}$ consiste en escribir

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y reducirla a forma escalonada:

$$(U|J) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La última fila de J, $(2, 1, -1)^t$ proporciona una base del espacio nulo de la traspuesta, como ya sabíamos.

4.2.1. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. El siguiente teorema es clave en muchos de los resultados que veremos en el curso:

Teorema de representación única

Sea $B = (b_1, \ldots, b_n)$ una base del espacio vectorial V. Todo vector $v \in V$ se puede expresar $\boxed{\text{de forma única}}$ como combinación lineal de los vectores de B:

$$v = c_1\, b_1 + \cdots + c_n\, b_n\,.$$

Como establece el teorema de representación única, si $v \in V$, podremos escribir v de la forma

$$v = v_1\, b_1 + \cdots + v_n\, b_n\,,$$

donde $v_1, \ldots, v_n$ son escalares ($\in \mathbb{K}$). Así, podemos asociar a cada vector $v \in V$ un $\boxed{\text{vector único con respecto a la base B}}$ $[v]_B \in \mathbb{K}^n$ dado por $[v]_B = (v_1, \ldots, v_n)^t$. Este vector se denomina **vector de coordenadas** de v $\boxed{\text{con respecto a la base B}}$. Nos referiremos a los escalares v_i $(i = 1, \ldots, n)$ como **coordenadas de v con respecto a** B.

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$. Es sencillo demostrar que $B = (1, x)$ es una base de este espacio. Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x$ puede representarse mediante el vector de coordenadas con respecto a la base B:

$$[p]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} .$$

Obsérvese que $p \neq [p]_B$; p es un polinomio y $[p]_B$ es un vector de $\mathbb{R}^2$: el segundo es una útil *representación* del primero.

Sea un espacio vectorial V de dimensión n. En él definimos una base $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Dado un vector cualquiera $a \in V$, existe una única combinación lineal

$$a = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n ,$$

que definen las coordenadas $[a]_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$ de a en la base B. Podemos recuperar el vector original escribiéndolo en forma de producto matricial:

$$a = B\,[a]_B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\,[a]_B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Nótese que, aunque definimos en el Tema 1 que las entradas de las matrices eran escalares, en la fórmula anterior los elementos del vector fila $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ no son escalares, sino vectores. Sin embargo, la regla del producto sigue siendo la misma; pero el resultado es un vector, no un escalar.

4.3. Cambio de base

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ existe una base canónica natural que viene dada por

$$B_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n) = \left((1,0,0,\ldots,0,0)^t, (0,1,0,\ldots,0,0)^t, \ldots, (0,0,0,\ldots,0,1)^t\right) .$$

Sin embargo, en muchas ocasiones es más eficiente trabajar en otras bases en $\mathbb{R}^n$. En otros espacios vectoriales no existe una base canónica natural y, en muchos cálculos prácticos, es conveniente elegir una base adecuada para realizarlos.

Es importante recordar que un vector $v \in V$ es un objeto abstracto que existe sin necesidad de establecer una base para el espacio vectorial V. Al fijar una base B en V podemos obtener las coordenadas de v con respecto a dicha base $[v]_B$. Estas coordenadas dependen obviamente de la base escogida: si elegimos otra base B', las coordenadas del vector v serán $[v]_{B'}$ y, en general, serán diferentes de $[v]_B$.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial V formado por los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales de grado menor que 5 y que sólo contienen potencias pares de x

$$V = \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 \,,\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \,.$$

Sea ahora el vector p dado por la expresión $p(x) = x^4 - 2x^2$. La gráfica de este polinomio está representada en la figura 4.1. Una base posible de V es la siguiente

$$B_1 = (p_1, p_2, p_3) = (1, x^2, x^4) \,.$$

y las coordenadas de p en esta base son obviamente

$$[p]_{B_1} = (0, -2, 1)^t \,,$$

ya que

$$p = (p_1, p_2, p_3)\, [p]_{B_1} = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2p_2 + p_3 = x^4 - 2x^2 \,.$$

Otra base posible de V es la siguiente

$$B_2 = (q_1, q_2, q_3) = \left(1, x^2 - 1, (x^2 - 1)^2\right) \,.$$

y las coordenadas de p en esta base son (después de un poco de álgebra)

$$[p]_{B_2} = (-1, 0, 1)^t\,,$$

ya que

$$p = (q_1, q_2, q_3)\,[p]_{B_2} = (q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -q_1 + q_3 = x^4 - 2x^2\,.$$

Como se puede observar, el vector p no depende de la base elegida para representarlo (en otras palabras, la gráfica del polinomio $p(x)$ no depende de la base). Sin embargo, las coordenadas de dicho vector sí dependen de la base elegida.

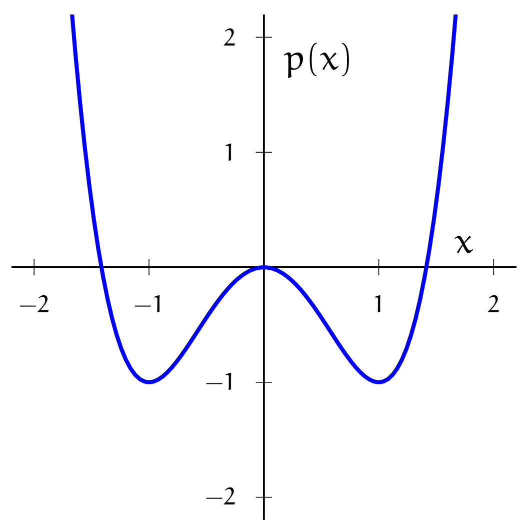

Figura 4.1: Gráfica del polinomio $p(x) = x^4 - 2x^2$.

Vamos a estudiar cómo varían las coordenadas de un vector $v \in V$ respecto a una base B_1 cuando usamos una nueva base B_2. Para ello definimos primero la **matriz de cambio de base** $T_{B_1 B_2}$. La definición de esta matriz **no** es universal, ya que en algunos libros se usa, en vez de $T = T_{B_1 B_2}$, su inversa T^{-1}.

Sea un espacio vectorial V de dimensión n. En él definimos dos bases distintas $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ y $B' = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$. La **matriz de cambio de base** $T_{BB'}$ (de dimensión $n \times n$) se define mediante la ecuación

$$B' = B\, T_{BB'} \quad \Leftrightarrow \quad (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\, T_{BB'}\,. \tag{4.2}$$

En otras palabras, la columna i-ésima T_i de la matriz $T = T_{BB'}$ contiene las coordenadas del vector b'_i de la "nueva" base B' respecto de la base "antigua" B: $\quad T_i = [b'_i]_B$. De otra manera:

$$T_{BB'} = \left([b'_1]_B, [b'_2]_B, \ldots, [b'_n]_B\right)\,.$$

La matriz $T_{BB'}$ se denotará simplemente por T cuando las bases B y B' estén bien definidas en el contexto del problema.

La matriz de cambio de base $T_{BB'}$ es una matriz no singular ($\det(T_{BB'}) \neq 0$), ya que sus columnas son linealmente independientes.

Ejemplo

Supongamos que queremos usar la base $B = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$, donde las coordenadas de los vectores u_1, u_2, respecto de la base canónica $B_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$, son

$$[u_1]_{B_0} = (3, 2)^t\,, \qquad [u_2]_{B_0} = (1, 1)^t\,.$$

La matriz asociada al cambio de base $B_0 \to B_1$ viene dada por la fórmula (4.2): cada columna contiene las coordenadas del vector correspondiente de la base B_1 en la base B_0

$$(u_1, u_2) = (e_1, e_2)\, T_{B_0 B_1} = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Si desarrollamos esta ecuación, vemos que es equivalente a:

$$\begin{aligned} u_1 &= 3e_1 + 2e_2 \\ u_2 &= e_1 + e_2 \,, \end{aligned}$$

tal y como ya sabíamos.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado 1 con coeficientes reales. Tenemos la base de este espacio

$$B_1 = (1, x)$$

y queremos expresar los polinomios de $\mathbb{P}_1$ en función de la base

$$B_2 = (1 + x, 1 - x) \,,$$

donde la demostración de que B_2 es efectivamente una base de $\mathbb{P}_1$ de deja como ejercicio.

La matriz asociada al cambio de base $B_1 \to B_2$ viene dada por la fórmula (4.2):

$$(1 + x, 1 - x) = (1, x)\, T_{B_1 B_2} = (1, x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si desarrollamos esta ecuación, vemos que es equivalente a las tautologías

$$\begin{aligned} 1 + x &= 1 + x \\ 1 - x &= 1 - x \,, \end{aligned}$$

tal y como debe ser.

Si tenemos un vector $x \in V$ en un espacio vectorial V de dimensión n y calculamos sus coordenadas $[x]_B = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y $[x]_{B'} = (x'_1, \ldots, x'_n)^t$ respecto a dos bases distintas $B = (b_1, \ldots, b_n)$ y $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ de V y que están relacionadas mediante la matriz de cambio de base $T_{BB'}$, entonces:

$$\begin{aligned} x &= B\,[x]_B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\ [x]_B \\ &= B'\,[x]_{B'} = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)\ [x]_{B'}\,. \end{aligned}$$

Dado que $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\,T_{BB'}$, entonces

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)\,[x]_B = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)\,[x]_{B'} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\,T_{BB'}\,[x]_{B'}\,.$$

De esta ecuación se ve cómo se transforman las coordenadas del vector x al cambiar de base $B \to B'$:

$$[x]_B = T_{BB'}\,[x]_{B'}\,.$$

Aunque la fórmula fundamental es (4.2), que define la matriz de cambio de base $B \to B'$, esta última fórmula nos dice cómo se transforman las coordenadas de cualquier vector $x \in V$ bajo dicho cambio de coordenadas. Si queremos escribir las coordenadas del vector x en la base "nueva" B' en función de sus coordenadas en la base "antigua" B, basta con multiplicar (por la izquierda) la ecuación anterior por $T^{-1}_{BB'}$:

$$[x]_{B'} = T^{-1}_{BB'}\,[x]_B\,.$$

Nótese que la matriz $T_{BB'}$ define el cambio de base (4.2), pero su inversa $T^{-1}_{BB'}$ es la que define el cambio de coordenadas.

Ejemplo

Supongamos que queremos cambiar de la base canónica $B_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ a una nueva base $B = (b_1, b_2)$ donde las coordenadas de los vectores b_1, b_2, respecto a B_0, son

$$[b_1]_{B_0} = (3, 2)^t\,, \qquad [b_2]_{B_0} = (1, 1)^t\,.$$

La matriz de cambio de base asociada a $B_0 \to B_1$ es, como ya vimos,

$$T_{B_0B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es no singular y su inversa es

$$T_{B_0B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos el vector x de coordenadas $[x]_{B_0} = (2, -1)^t$ en la base canónica B_0, sus coordenadas en la nueva base B serán

$$[x]_B = T_{B_0B_1}^{-1} [x]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Nótese que

$$x = (b_1, b_2)\,[x]_B = (b_1, b_2) \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = 2e_1 - e_2 = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2)\,[x]_{B_0}.$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado 1 con coeficientes reales. Queremos hacer el cambio de base desde la base $B_1 = (1, x)$ a la nueva base $B_2 = (1 + x, 1 - x)$.

La matriz de cambio de base $T_{B_1B_2}$ viene dada por

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es

$$T^{-1}_{B_1B_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos el vector $p(x) = 2 - 3x \in \mathbb{P}_1$, sus coordenadas en la base B_1 son obviamente $[p]_{B_1} = (2, -3)^t$. Sus coordenadas en la base B_2 vendrán dadas por:

$$[p]_{B_2} = T^{-1}_{B_1B_2}\,[p]_{B_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La comprobación de este resultado es trivial:

$$p = (1{+}x, 1{-}x)\,[p]_{B_2} = (1{+}x, 1{-}x)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2{-}3x = (1, x)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (1, x)\,[p]_{B_1}\,.$$

Hay dos propiedades importantes que cumplen las matrices de cambio de base:

1. Supongamos que hacemos el cambio de base $B \to B'$, lo que define la matriz de cambio de base $T_{BB'}$. Si hiciésemos el cambio de base inverso $B' \to B$, entonces la matriz de este cambio de base es simplemente

$$\boxed{T_{B'B} = T^{-1}_{BB'}\,.}$$

   Este resultado se obtiene de (4.2) multiplicando por la derecha por la matriz $T^{-1}_{BB'}$ (que siempre existe ya que $T_{BB'}$ es no singular). Esto implica que

$$[x]_{B'} = T^{-1}_{BB'}\,[x]_B = T_{B'B}\,[x]_B\,.$$

2. Supongamos que hacemos dos cambios sucesivos de base. Primero vamos de la base $B = (b_1, \ldots, b_n)$ a la base $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ con la matriz de cambio de base $T_{BB'}$:

$$(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\,T_{BB'}\,.$$

Después cambiamos de la base B' a otra base $B'' = (b''_1, \dots, b''_n)$ con la matriz $T_{B'B''}$:

$$(b''_1, b''_2, \dots, b''_n) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)\, T_{B'B''}\,.$$

Evidentemente podemos hacer este cambio de base en un solo paso $B \to B''$. La matriz de cambio de base $T_{BB''}$ vendría dada por:

$$(b''_1, b''_2, \dots, b''_n) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)\, T_{B'B''} = (b_1, b_2, \dots, b_n)\, T_{BB'}\, T_{B'B''}\,.$$

Es decir,

$$\boxed{T_{BB''} = T_{BB'}\, T_{B'B''}\,.}$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado 1 con coeficientes reales. Queremos hacer el cambio de base desde la base $B_1 = (1, x)$ a la nueva base $B_2 = (1+x, 1-x)$.

La matriz de cambio de base $T_{B_1B_2}$ y su inversa vienen dadas por

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}_{B_1B_2} = T_{B_2B_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora una nueva base $B_3 = (1+2x, 1-2x)$. Para calcular la matriz $T_{B_2B_3}$ debemos calcular las coordenadas de $1 \pm 2x$ en la base B_2. Para ello hay que resolver los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 1+2x \quad &= \quad \alpha(1+x) + \beta(1-x) = (\alpha+\beta) + x(\alpha-\beta) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 2 \end{array}\right\} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2} \\ 1-2x \quad &= \quad \alpha(1+x) + \beta(1-x) = (\alpha+\beta) + x(\alpha-\beta) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = -2 \end{array}\right\} \\ &\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Luego la matriz de cambio de base $T_{B_2B_3}$ y su inversa vienen dadas por

$$T_{B_2B_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T_{B_2B_3}^{-1} = T_{B_3B_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ya hemos visto que el vector $p(x) = 2-3x \in \mathbb{P}_1$ tiene coordenadas $[p]_{B_1} = (2,-3)^t$ en la base B_1 y coordenadas $(-1/2, 5/2)^t$ en B_2. Sus coordenadas en la base B_3 vendrán dadas por:

$$[p]_{B_3} = T_{B_3B_2}\,[p]_{B_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto este resultado es el correcto:

$$p = (1+2x, 1-2x)\,[p]_{B_3} = (1+2x, 1-2x)\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2-3x\,.$$

Si queremos hacer el cambio de base $B_1 \to B_3$ directamente, basta calcular

$$T_{B_1B_3} = T_{B_1B_2}\,T_{B_2B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

que es el resultado esperado, ya que las columnas de $T_{B_1B_3}$ contienen las coordenadas de los vectores de B_3 en la base B_1. La inversa de esta matriz es

$$T_{B_1B_3}^{-1} = T_{B_3B_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de p en la base B_3 vienen dadas por

$$[p]_{B_3} = T_{B_3B_1}\,[p]_{B_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La comprobación es simple:

$$p = (1+2x, 1-2x)\,[p]_{B_3} = (1+2x, 1-2x)\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2-3x\,.$$

4.3.1. Cambio de coordenadas usando la base canónica

Frecuentemente, una de las bases del espacio vectorial con las que trabajamos es la canónica, B_0. En este caso, la matriz de cambio de base $T_{B_0B_1}$ a otra base B_1 es particularmente sencilla, como hemos visto. En cambio, si trabajamos con bases arbitrarias B_1 y B_2, el cálculo de las coordenadas de los vectores de una base con respecto a la otra puede ser engorroso. Una alternativa habitual consiste en lo siguiente. Dada la base B_1, podemos calcular la matriz de cambio de base $T_{B_0B_1}$ de B_0 a B_1. De igual manera, dada la base B_2, podemos hallar su correspondiente matriz de cambio de base $T_{B_0B_2}$ de B_0 a B_2. La idea consiste en, en vez de hacer directamente el cambio de base $B_1 \to B_2$, hacer el cambio de base pasando por la base canónica B_0: $B_1 \to B_0 \to B_2$. Entonces

$$\boxed{T_{B_1B_2} = T_{B_1B_0}\, T_{B_0B_2} = T_{B_0B_1}^{-1}\, T_{B_0B_2}\,,}$$

de manera que ahora sólo tenemos que trabajar con las matrices $T_{B_0B_1}$ y $T_{B_0B_2}$ cuya obtención es sencilla. El precio a pagar es que hay que invertir una de ellas y efectuar una multiplicación entre dos matrices.