Tema 6:
Formas Normales y Resolución

Lógica

Grado en Ingeniería Informática
2018/19

Introducción

- Los muchos métodos de demostración automática (entre ellos el método de Resolución) utilizan lo que se conoce como estandarización de fórmulas.
- Esta estandarización se basa en el teorema de intercambio para convertir las fórmulas originales a otras fórmulas con una sintaxis especial denominada **forma clausular** o **forma normal de Skolem**.
- Con ello se evita la complejidad que supondría tener que tratar con cualquier fórmula de primer orden.
- Para definir esta clase especial de fórmulas son necesarios dos conceptos: **<u>literal</u>** y **<u>cláusula</u>**.

Introducción

Definición: se llama **literal** a cualquier fórmula que sea

- Una fórmula atómica (en cuyo caso la fórmula se denomina literal positivo).
- La negación de una fórmula atómica (en cuyo caso la fórmula se denomina literal negativo).

Definición: se llama **cláusula** a cualquier disyunción de literales, es decir, a cualquier fórmula de la forma $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ donde cada L_i es un literal.

- Cuando $n = 0$, la cláusula se denomina cláusula vacía y se denota $\boldsymbol{\lambda}$
- Las cláusulas que tienen como mucho un literal positivo se denominan *cláusulas de Horn*.

Teorema de intercambio

- Sea F_A la notación correspondiente a una fórmula del cálculo proposicional en la que aparece la fórmula A. El teorema dice:

$$\text{Si } \vdash A \leftrightarrow B \text{ entonces } \vdash F_A \leftrightarrow F_B$$

- Siendo F_B la fórmula resultante de sustituir la ocurrencia de A en F_A por B

Teorema de intercambio

- **Ejemplo:** $\mathbf{(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)}$

a) $(C \vee B) \leftrightarrow (B \vee C)$ $\mathbf{A \leftrightarrow C}$
b) $((A \rightarrow C) \vee B) \leftrightarrow (B \vee (A \rightarrow C))$ $\mathbf{A \leftrightarrow A \rightarrow C}$
c) $((A \rightarrow C) \vee (B \wedge D)) \leftrightarrow ((B \wedge D) \vee (A \rightarrow C))$

$\mathbf{A \leftrightarrow A \rightarrow C}$ **and** $\mathbf{B \leftrightarrow B \wedge D}$

Teorema de intercambio

También se puede utilizar la regla de intercambio en cálculo de predicados:

Lema 1: Si $\vdash A(y) \Leftrightarrow B(y)$ entonces $\rightarrow \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x B(x)$

Lema 2: Si $\vdash A(y) \Leftrightarrow B(y)$ entonces $\rightarrow \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x B(x)$

Como consecuencia de la aplicación de esta regla de intercambio, por ejemplo, la fórmula

$$\exists x[C(x) \rightarrow \forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y))]$$

Se corresponde con:

$$\exists x[\sim C(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))]$$

Teorema de intercambio

Ejemplo: $\exists x[C(x) \rightarrow \forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y))]$

1. $\sim(B(y) \wedge \sim A(y)) \Leftrightarrow B(y) \rightarrow A(y)$
2. $\forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y)) \Leftrightarrow \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$
3. $C(x) \rightarrow \forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y)) \Leftrightarrow C(x) \rightarrow \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$
4. $C(x) \rightarrow \forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y)) \Leftrightarrow \sim C(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$
5. $\exists x[C(x) \rightarrow \forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y))] \Leftrightarrow \exists x[\sim C(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))]$

Forma Normal PRENEX

- Estructura de fórmula en cálculo de predicados caracterizada por las siguientes propiedades:
  - Todos los cuantificadores aparecen en cabeza de una expresión a la que afectan en su totalidad
  - La expresión afectada por el conjunto de cuantificadores se denomina matriz de la fórmula y está constituida por predicados y conectivas $(\wedge, \vee, \sim)$

$$\forall x \forall y \exists z[\sim A(x,y) \vee P(x,y,z) \vee R(w,x)]$$

$$\exists x \forall y \forall z[\sim A(x,y,z) \wedge (R(x,w) \vee P(x,w))]$$

Forma Normal PRENEX

- Dada una fórmula cualquiera, A, en cálculo de predicados, siempre existe otra fórmula FP(A) en forma PRENEX, tal que $\vdash A \leftrightarrow FP(A)$ es una fórmula válida

- Toda fórmula en cálc. pred. es equivalente a otra en forma PRENEX que se puede obtener en tres etapas usando la regla de intercambio

  1. Eliminación de conectivas distintas de $\wedge,\vee,\sim$
  2. Eliminación del signo $\sim$ aplicado a fórmulas compuestas
  3. Situación de los cuantificadores en cabeza de la fórmula

Forma Normal PRENEX

Paso 1.

Eliminación de conectivas distintas de $\wedge,\vee,\sim$

- Teniendo en cuenta que

$$\vdash (A\rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$$

$$\vdash (A\rightarrow B) \leftrightarrow \sim(A \wedge \sim B)$$

- Si la fórmula A contiene ...R→S...

$$\vdash \ldots\overbrace{(R\rightarrow S)}^{A}\ldots \leftrightarrow \ldots\overbrace{(\sim R\vee S)}^{A'}\ldots$$

$$\vdash \ldots(R\rightarrow S)\ldots \leftrightarrow \ldots\sim(R\wedge\sim S)\ldots$$

Forma Normal PRENEX

Paso 2.

Eliminación del signo ~ aplicado a fórmulas compuestas

- Basta con aplicar la regla intercambio y las siguientes equivalencias apoyadas en las leyes de Morgan

$$\vdash \ldots\sim(R\wedge S)\ldots \leftrightarrow \ldots(\sim R\vee\sim S)\ldots$$

$$\vdash \ldots\sim(R\vee S)\ldots \leftrightarrow \ldots(\sim R\wedge\sim S)\ldots$$

$$\vdash \ldots\sim\forall xR(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\exists x\sim R(x)\ldots$$

$$\vdash \ldots\sim\exists xR(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\forall x\sim R(x)\ldots$$

Forma Normal PRENEX

Paso 3.

Situación de los cuantificadores en cabeza de la fórmula (dos casos)

a) Fórmula parcial conectada no contiene libre la variable cuantificada

$$\vdash \ldots A\vee\forall xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\forall x(A\vee P(x))\ldots$$

$$\vdash \ldots A\wedge\forall xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\forall x(A\wedge P(x))\ldots$$

$$\vdash \ldots A\vee\exists xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\exists x(A\vee P(x))\ldots$$

$$\vdash \ldots A\wedge\exists xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\exists x(A\wedge P(x))\ldots$$

Forma Normal PRENEX

b) Fórmula parcial conectada contiene libre la variable cuantificada

$\vdash \ldots A(x) \vee \forall x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \vee \forall y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \forall y(A(x) \vee P(y)) \ldots$

$\vdash \ldots A(x) \wedge \forall x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \wedge \forall y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \forall y(A(x) \wedge P(y)) \ldots$

$\vdash \ldots A(x) \vee \exists x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \vee \exists y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \exists y(A(x) \vee P(y)) \ldots$

$\vdash \ldots A(x) \wedge \exists x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \wedge \exists y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \exists y(A(x) \wedge P(y)) \ldots$

Forma Normal PRENEX

Ejemplo 1: $\sim\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$

1. $\sim\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \Leftrightarrow \sim\exists x(\sim P(x) \vee \forall y Q(y))$
2. $\sim\exists x(\sim P(x) \vee \forall y Q(y)) \Leftrightarrow \forall x\sim(\sim P(x) \vee \forall y Q(y))$
3. $\forall x\sim(\sim P(x) \vee \forall y Q(y)) \Leftrightarrow \forall x(\sim\sim P(x) \wedge \sim\forall y Q(y))$
4. $\forall x(\sim\sim P(x) \wedge \sim\forall y Q(y)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge \exists y\sim Q(y))$
5. $\forall x(P(x) \wedge \exists y\sim Q(y)) \Leftrightarrow \forall x\exists y(P(x) \wedge \sim Q(y))$

Eliminar →

Eliminar ~

Unir cuantificadores

Forma Normal PRENEX

Ejemplo 2: $\forall xA(x) \rightarrow \sim\exists z(B(w,z)\rightarrow \forall yC(w,y))$

1. $\forall xA(x) \rightarrow \sim\exists z(B(w,z)\rightarrow \forall yC(w,y)) \Leftrightarrow \sim\forall xA(x) \vee \sim\exists z(B(w,z)\rightarrow \forall yC(w,y))$
2. $\sim\forall xA(x) \vee \sim\exists z(B(w,z)\rightarrow \forall yC(w,y)) \Leftrightarrow \sim\forall xA(x) \vee \sim\exists z(\sim B(w,z) \vee \forall yC(w,y))$
3. $\sim\forall xA(x) \vee \sim\exists z(\sim B(w,z) \vee \forall yC(w,y)) \Leftrightarrow \exists x\sim A(x) \vee \forall z\sim(\sim B(w,z) \vee \forall yC(w,y))$
4. $\exists x\sim A(x) \vee \forall z\sim(\sim B(w,z) \vee \forall yC(w,y)) \Leftrightarrow \exists x\sim A(x) \vee \forall z(\sim\sim B(w,z) \wedge \sim\forall yC(w,y))$
5. $\exists x\sim A(x) \vee \forall z(B(w,z) \wedge \sim\forall yC(w,y)) \Leftrightarrow \exists x\sim A(x) \vee \forall z(B(w,z) \wedge \exists y\sim C(w,y))$
6. $\exists x\sim A(x) \vee \forall z(B(w,z) \wedge \exists y\sim C(w,y)) \Leftrightarrow \exists x\sim A(x) \vee \forall z\, \exists y(B(w,z) \wedge \sim C(w,y))$
7. $\exists x\sim A(x) \vee \forall z\exists y(B(w,z) \wedge \sim C(w,y)) \Leftrightarrow \exists x\forall z\exists y(\sim A(x) \vee (B(w,z) \wedge \sim C(w,y)))$

1. Eliminar $\rightarrow$ ➡ **2. Eliminar ~** ➡ **3. Unir cuantificadores**

Forma Normal PRENEX

Ejemplo 3:

$$\forall x(P(x)\rightarrow[\sim\forall y(Q(x,y)\rightarrow \exists zP(z)) \wedge \forall y(Q(x,y) \rightarrow R(t))])$$

1. $\forall x(P(x)\rightarrow[\sim\forall y(Q(x,y)\rightarrow \exists zP(z)) \wedge \forall y(Q(x,y) \rightarrow R(t))])$
2. $\forall x(\sim P(x) \vee [\sim\forall y(\sim Q(x,y) \vee \exists zP(z)) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee R(t))])$
3. $\forall x(\sim P(x) \vee [\exists y\sim(\sim Q(x,y) \vee \exists zP(z)) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee R(t))])$
4. $\forall x(\sim P(x) \vee [\exists y(Q(x,y) \wedge \sim \exists zP(z)) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee R(t))])$
5. $\forall x(\sim P(x) \vee [\exists y(Q(x,y) \wedge \forall z\sim P(z)) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee R(t))])$
6. $\forall x(\sim P(x) \vee [\exists y\forall z(Q(x,y) \wedge \sim P(z)) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee R(t))])$
7. $\forall x\exists w\forall z(\sim P(x) \vee [(Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee R(t))])$
8. $\forall x\exists w\forall z\forall y(\sim P(x) \vee [(Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee R(t))])$

1. Eliminar $\rightarrow$ ➡ **2. Eliminar ~** ➡ **3. Unir cuantificadores**

Forma Normal de SKOLEM

- Está en la base de varios procedimientos de demostración automática.
- Es una estructura de fórmula con las siguientes características:
  - Todos los cuantificadores están en cabeza de la fórmula.
  - Sólo existen cuantificadores universales.
  - La matriz de la fórmula es una conjunción de disyunciones de los átomos de las fórmulas, es decir una conjunción de cláusulas (cláusula: disyunción de literales)

$$\forall x \forall z[(\underline{P(f(a),x) \vee Q(y,z)}) \wedge (\underline{Q(g(x),x) \vee R(w,y) \vee P(x,z)}]$$

Forma Normal de SKOLEM

- Dada una fórmula A, se le puede asociar una fórmula en FNS usando el procedimiento:
  1. Se pone A en prenex (FNP).
  2. Las **variables libres** se ligan pasando a la cabeza de FNP cuantificadores existenciales (se denomina **cierre existencial**).
  3. La expresión de la matriz se transforma empleando la equivalencia:

     $$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
  4. Se suprimen los cuantificadores existenciales.

Forma Normal de SKOLEM

- La supresión de cuantificadores existenciales se hace de la forma que sigue:
  - Se va mirando de izquierda a derecha.
  - Si el $\exists$ no tiene ningún $\forall$ a la izquierda, reemplazar las variables por constantes:

    $$\exists x \forall y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)) => \forall y \forall z(P(a,y) \vee Q(a,z))$$
  - Por cada existencial que se reemplaza de esta manera debe usarse una constante distinta.
  - Si $\exists$ tiene un $\forall$ a la izquierda, reemplazar la variable por una función de tantos argumentos como $\forall$s tenga a la izquierda, con esas variables como argumento:

    $$\forall y \forall z \exists x(P(x,y)) \vee Q(x,z)) => \forall y \forall z(P(f(y,z),y) \vee Q(f(y,z),z))$$
  - Por cada existencial que se reemplaza por una función se introduce una letra (de función) distinta.

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo: $\forall x(P(x) \rightarrow \sim \forall y(Q(x,y) \rightarrow \exists z P(z)) \wedge \forall y(Q(x,y) \rightarrow R(t)))$

Prenex

1. $\forall x \exists w \forall z \forall y(\sim P(x) \vee [(Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee R(t))])$

Cierre Existencial

2. $\exists t \forall x \exists w \forall z \forall y(\sim P(x) \vee [(Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee R(t))])$

Propiedad Distributiva

3. $\exists t \forall x \exists w \forall z \forall y((\sim P(x) \vee (Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim P(x) \vee (\sim Q(x,y) \vee R(t)))$
4. $\exists t \forall x \exists w \forall z \forall y((\sim P(x) \vee Q(x,w)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim Q(x,y) \vee R(t)))$

Eliminación de Cuantificaciones Existenciales

5. $\forall x \forall z \forall y((\sim P(x) \vee Q(x,f(x)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim Q(x,y) \vee R(a)))$

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo:

$\forall x[\sim P(x,a) \rightarrow \exists y[P(y,g(x)) \wedge \forall z(P(z,g(x)) \rightarrow P(y,z))]]$

Prenex

1. $\forall x \exists y \forall z[P(x,a) \vee [P(y,g(x)) \wedge (\sim P(z,g(x)) \vee P(y,z))]]$

Cierre Existencial

2. No hay variables libres

Propiedad Distributiva

3. $\forall x \exists y \forall z[(P(x,a) \vee P(y,g(x))) \wedge (P(x,a) \vee \sim P(z,g(x)) \vee P(y,z))]$

Eliminacion del Cuantificador Existencial

4. $\forall x \forall z[(P(x,a) \vee P(f(x),g(x))) \wedge (P(x,a) \vee \sim P(z,g(x)) \vee P(f(x),z))]$

Forma Normal de SKOLEM

De hecho, los pasos para SKOLEM se podrían resumir en:

1. **Convertir la fórmula en PRENEX:**
   1. Eliminar condicionales.
   2. Gestionar negaciones.
   3. Extraer los cuantificadores al principio de la fórmula.
2. **Cerrar las variables libres: cierre existencial**
   1. Ejemplo: $\forall x \forall y(P(x) \vee Q(y) \vee R(z)) => \exists z \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y) \vee R(z))$
3. **Aplicar la propiedad distributiva si es necesario:**

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

4. **Suprimir los cuantificadores existenciales**
   1. Ejemplo: $\exists x \forall y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)) => \forall y \forall z(P(a,y) \vee Q(a,z))$
   2. Ejemplo: $\forall y \forall z \exists x(P(x,y)) \vee Q(x,z)) => \forall y \forall z(P(f(y,z),y) \vee Q(f(y,z),z))$

Introducción a la Resolución

- Es un método de demostración automática de teoremas.
- Permite comprobar si una estructura deductiva es correcta a través del estudio de la validez de una fórmula.
- El algoritmo no tiene porqué terminar siempre (indecibilidad).
- Permiten la verificación formal de programas.

Resolución

- El procedimiento general consiste en demostrar que $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es correcta.
- Para esto se comprueba si la fórmula

  $\mathbf{F = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q}$ es **insatisfacible**
- Es posible elegir unas funciones de **Skolem** *f* tales que la FNS sea satisfacible o insatisfacible en las mismas condiciones que la fórmula original.
  - *Tanto las funciones como las constantes tienen que satisfacer el predicado.*
- Si de una fórmula F se deduce una **contradicción**, entonces la fórmula es **insatisfacible.**

Regla de resolución

- Se escribe la forma clausular correspondiente a la FNS(F).
- Se intenta llegar a una cláusula vacía (la llamaremos **λ**) mediante la aplicación reiterada de la **regla de resolución** (L∨A, ~L∨B ⇒ A∨B) para obtener **resolventes**.
- La obtención de una cláusula vacía **λ** implica la **existencia** de una **contradicción**, con ello la **insatisfacibilidad** de la fórmula y la **corrección de la estructura deductiva**.

Regla de resolución

- **Regla de resolución**

L∨A, ~L∨B ⇒ A∨B

Ejemplo1:

C1: P(a) ∨Q(x)

C2: ~ P(a) ∨Q(x)

Resolvente: Q(x)

Ejemplo2:

C1: P(y) ∨Q(x)

C2: ~ P(w) ∨Q(x)

Resolvente: ??

Unificar Predicados

Regla de resolución

- La obtención de **resolventes** puede exigir sustituciones de **variables por:**
  - **Constantes**: x cambia por a (x/a)
  - **Variables:** x cambia por y (x/y)
  - **Funciones en las que no aparece esa variable**:
    - x cambia por f(y,z,a)

Regla de resolución

- No se puede cambiar una variable por una función donde aparece esa misma variable:
    - **x** cambia por f(**x**,z,a), **x**/f**(x,**z,a)
- Hay que hacer un cambio (si es posible) a otra variable distinta:

Ejemplo:

A(x)   ~A(f(x)) ∨ B(x)

x/f(t)   x/t

A(f(t))   ~A(f(t)) ∨ B(t)

B(t)

Regla de resolución

- La sustitución de variables debe hacerse teniendo en cuenta lo siguiente:
  - Aunque la **misma variable** aparezca en **dos cláusulas distintas**, se trata de **dos variables distintas**, por lo tanto pueden sustituirse por dos términos distintos.
  - Una cláusula se puede utilizar tantas veces como sea necesario y con sustituciones de variables distintas.
  - Las sustituciones **afectan a las cláusulas completas**, no a los predicados de una cláusula. Dentro de una cláusula se sustituyen todas las apariciones de una variable por un mismo término:
    - Ejemplo: $\sim A(f(x)) \vee B(x,y) \xrightarrow{x/t} \sim A(f(t)) \vee B(t,y)$

Regla de resolución

Ejemplo I: Obtención de resolventes

Cláusulas:

C1:~ p(a,x) ∨ p(b,x)

C2: p(a,c)

C3:~ p(b,y)

Resolventes:

C4: ~ p(b,x)	y/x en C3
C5: ~ p(a,x)	Regla de resolución C1 y C4
C6: ~ p(a,c)	x/c en C5
C7: vacía	Regla resolución C2 y C6

Regla de resolución

Ejemplo II: Obtención de resolventes.

C1: $\sim r(x) \vee q(x)$

C2: $\sim p(y) \vee \sim q(y)$

C3: $p(a)$

C4: $q(a)$

C5: $\sim q(z) \vee r(z)$

Resolventes:

C6: $\sim q(a) \vee r(a)$	z/a en C5
C7: $r(a)$	Regla resolución C4 y C6
C8: $\sim r(a) \vee q(a)$	x/a en C1
C9: $q(a)$	Regla resolución C7 y C8
C10: $\sim p(a) \vee \sim q(a)$	y/a en C2
C11: $\sim p(a)$	Regla resolución C9 y C10
C12: vacía	Regla resolución C3 y C11

Resolución

- Si se encuentra una contradicción, F es insatisfacible (deducción correcta).
- Si tras ***todas*** las pruebas posibles no hay una contradicción, **F es satisfacible** = **deducción no correcta**.
- Si el algoritmo no termina (no podemos asegurar haber probado todas las posibilidades), entonces **no podemos afirmar nada**.
- Al componer la fórmula $\mathbf{F = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q}$, se debe **negar la conclusión** y hacerlo con **todos sus cuantificadores**.

Resolución

Los pasos para la Resolución se podrían resumir en:

1. **Unir las premisas con conjunciones y la conclusión <u>negada</u>:**
   $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q,$
2. **Convertir la fórmula en PRENEX:**
   1. Eliminar condicionales.
   2. Gestionar negaciones.
   3. Extraer los cuantificadores al principio de la fórmula.
3. **Cerrar las variables libres: cierre existencial**
   1. Ejemplo: $\forall x \forall y(P(x) \vee Q(y) \vee R(z)) \Rightarrow \exists z \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y) \vee R(z))$
4. **Aplicar la propiedad distributiva si es necesario:**
   $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. **Suprimir los cuantificadores existenciales**
   1. Ejemplo: $\exists x \forall y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)) \Rightarrow \forall y \forall z(P(a,y) \vee Q(a,z))$
   2. Ejemplo: $\forall y \forall z \exists x(P(x,y)) \vee Q(x,z)) \Rightarrow \forall y \forall z(P(f(y,z),y) \vee Q(f(y,z),z))$
6. **Realizar sustituciones de variables necesarias para obtener la cláusula vacía mediante la regla de resolución.**

Resolución

Ejemplo 1: $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

1. $\exists x P(x) \wedge \sim \forall x P(x)$
2. $\exists x P(x) \wedge \exists x \sim P(x)$
3. $\exists x \exists y (P(x) \wedge \sim P(y))$

Prenex

4. $P(a) \wedge \sim P(b)$

Skolem

5. $C_1 \Rightarrow P(a)$

   $C_2 \Rightarrow \sim P(b)$

No son unificables, F es satisfacible, deducción no correcta

Puedo cambiar a/b?? o b/a??... Y ¿a/x y b/x?

Resolución

Ejemplo 2: $\forall x(p(a,x) \rightarrow p(b,x)),\ p(a,c) \Rightarrow \exists x p(b,x)$

1. $\forall x(p(a,x) \rightarrow p(b,x)) \wedge p(a,c) \wedge \sim \exists x p(b,x)$
2. Forma Skolen: $\forall x \forall y\ ((\sim p(a,x) \vee p(b,x)) \wedge p(a,c) \wedge \sim p(b,y))$

Cláusulas:

C1: $\sim p(a,x) \vee p(b,x)$

C2: $p(a,c)$

C3: $\sim p(b,y)$

Resolventes:

C4: $\sim p(b,x)$	y/x en C3
C5: $\sim p(a,x)$	Regla de resolución C1 y C4
C6: $\sim p(a,c)$	x/c en C5
C7: vacía	Regla resolución C2 y C6

Por lo tanto, la fórmula es insatisfacible
y la
deducción correcta

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo 3:

$\forall x[\exists y(A(x,y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge D(x,y))] \Rightarrow \forall x \sim C(x) \rightarrow \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow \sim B(y))$

$\forall x[\exists y(A(x,y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge D(x,y))] \wedge \sim[\forall x \sim C(x) \rightarrow \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow \sim B(y))]$

F1: $\forall x[\exists y(A(x,y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge D(x,y))]$

F2: $\sim[\forall x \sim C(x) \rightarrow \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow \sim B(y))]$

1. $\forall x[\sim \exists y\ (A(x,y) \wedge B(y)) \vee \exists y(C(y) \wedge D(x,y))]$
2. $\forall x[\forall y\ (\sim A(x,y) \vee \sim B(y)) \vee \exists y(C(y) \wedge D(x,y))]$
3. $\forall x[\forall y\ (\sim A(x,y) \vee \sim B(y)) \vee \exists z(C(z) \wedge D(x,z))]$
4. $\forall x \exists z\ [\forall y\ (\sim A(x,y) \vee \sim B(y)) \vee (C(z) \wedge D(x,z))]$
5. $\forall x \exists z\ \forall y\ [\ (\sim A(x,y) \vee \sim B(y)) \vee (C(z) \wedge D(x,z))]$
6. $\forall x \exists z\ \forall y\ [\ (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))]$

F2: $\sim[\forall x \sim C(x) \rightarrow \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow \sim B(y))]$

7. $\sim[\sim \forall x \sim C(x) \vee \forall x \forall y(\sim A(x,y) \vee \sim B(y))]$
8. $\sim[\exists\ x C(x) \vee \forall x \forall y(\sim A(x,y) \vee \sim B(y))]$
9. $\forall\ x \sim C(x) \wedge \exists\ x\ \exists\ y(\ A(x,y) \wedge B(y))$
10. $\forall\ u \sim C(u) \wedge \exists\ x\ \exists\ y(\ A(x,y) \wedge B(y))$
11. $\exists\ x\ \exists\ y\ \forall\ u\ [\sim C(u) \wedge\ A(x,y) \wedge B(y)]$

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo 3: (Continuación)

$F1 \wedge F2$:

$\forall x \exists z \forall y\, [\, (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))]$

$\wedge\, \exists x \exists y \forall u\, [\sim C(u) \wedge A(x,y) \wedge B(y)]$

12. $\forall x \exists z \forall y\, [\, (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))]$
$\wedge\, \exists w \exists v \forall u\, [\sim C(u) \wedge A(w,v) \wedge B(v)]$

13. $\exists w \exists v \forall u \forall x \exists z \forall y [(\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))$
$\wedge \sim C(u) \wedge A(w,v) \wedge B(v)]$ Prenex

14. $\forall u \forall x \forall y ((\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,f(u,x)))$
$\wedge \sim C(u) \wedge A(a,b) \wedge B(b))$

Claúsulas:

$\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))$; $\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,f(u,x))$; $\sim C(u)$; $A(a,b)$; $B(b)$

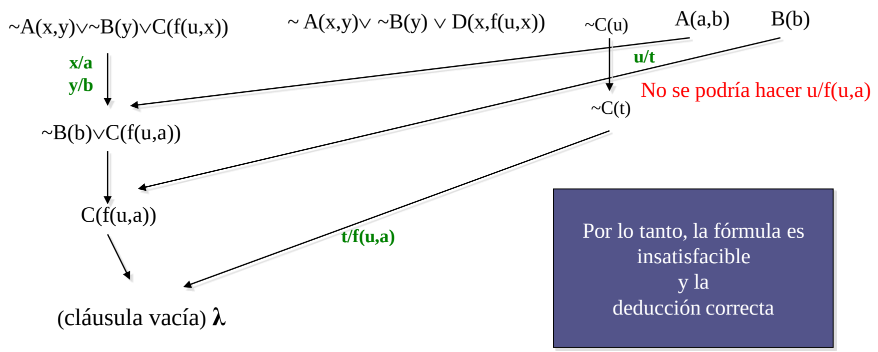
O:

$\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))$; $\sim A(v,w) \vee \sim B(w) \vee D(v,f(u,v))$; $\sim C(t)$; $A(a,b)$; $B(b)$

Resolución

Ejemplo 3: (continuación)

$\forall u \forall x \forall y ((\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,f(u,x))) \wedge \sim C(u) \wedge A(a,b) \wedge B(b))$



Resolución

Ejemplo 3: (continuación)

$\forall u \forall x \forall y \forall v \forall w \forall z \forall t((\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))) \wedge (\sim A(v,w) \vee \sim B(w) \vee D(v,f(u,v))) \wedge \sim C(t) \wedge A(a,b) \wedge B(b))$

$\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))$ $\quad$ $\sim A(v,w) \vee \sim B(w) \vee D(v,f(u,v))$ $\quad$ $\sim C(t)$ $\quad$ $A(a,b)$ $\quad$ $B(b)$

x/a
y/b

$\sim B(b) \vee C(f(u,a))$

$C(f(u,a))$

t/f(u,a)

(cláusula vacía) λ

Por lo tanto, la fórmula es insatisfacible y la deducción correcta

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo 4:

$\exists x(F(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow A(x,y))), \forall x \forall y(F(x) \wedge C(y) \rightarrow \sim A(x,y)) \Rightarrow \forall x(E(x) \rightarrow \sim C(x))$

1. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(F(x) \wedge C(y) \rightarrow \sim A(x,y)) \wedge \sim(\forall x(E(x) \rightarrow \sim C(x)))$
2. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(\sim(F(x) \wedge C(y)) \vee \sim A(x,y)) \wedge \sim(\forall x(\sim E(x) \vee \sim C(x)))$
3. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(\sim F(x) \vee \sim C(y) \vee \sim A(x,y)) \wedge \exists x(E(x) \wedge C(x))$
4. $\exists x \forall y(F(x) \wedge (\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(\sim F(x) \vee \sim C(y) \vee \sim A(x,y)) \wedge \exists x(E(x) \wedge C(x))$
5. $\exists x \forall y(F(x) \wedge (\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall w \forall z(\sim F(x) \vee \sim C(y) \vee \sim A(w,z)) \wedge \exists v(E(v) \wedge C(v))$
6. $\exists x \forall y \forall w \forall z \exists v((F(x) \wedge (\sim E(y) \vee A(x,y)) \wedge (\sim F(w) \vee \sim C(z) \vee \sim A(w,z)) \wedge (E(v) \wedge C(v)))$
7. $\forall y \forall w \forall z((F(a) \wedge (\sim E(y) \vee A(a,y)) \wedge (\sim F(w) \vee \sim C(z) \vee \sim A(w,z)) \wedge (E(f(y,w,z)) \wedge C(f(y,w,z))))$

Resolución

Ejemplo 4 (II):

∀y∀w∀z((F(a) ∧ (~ E(y) ∨ A(a,y)) ∧ (~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)) ∧ (E(f(y,w,z)) ∧ C(f(y,w,z))))

F(a)   ~ E(y) ∨ A(a,y)   ~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)   E(f(y,w,z))   C(f(y,w,z))

w/a

f(y,w,z) / z??

~C(z) ∨ ~A(a,z)

z / f(y,w,z) ??

¿~A(a,f(y,w,z)) o ~A(a,z)?

Problema en este caso

Problema en este caso:

~A(a,f(y,w,f(y,w,z)))

~A(a,f(y,w,f(y,w,f(y,w,z)))) … α

No se pueden sustituir funciones por variables ni variables por funciones que contengan esa misma variable

Resolución

Ejemplo 4 (III):

∀y∀w∀z((F(a) ∧ (~ E(y) ∨ A(a,y)) ∧ (~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)) ∧ (E(f(y,w,z)) ∧ C(f(y,w,z))))

F(a)   ~ E(y) ∨ A(a,y)   ~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)   E(f(y,w,z))   C(f(y,w,z))

w/a

y/t

~C(z) ∨ ~A(a,z)

~E(t) ∨ A(a,t)

z/t

~C(t) ∨ ~A(a,t)

t/f(y,w,z)

t/f(y,w,z)

~A(a,f(y,w,z))

~E(f(y,w,z))

(cláusula vacía) λ

Por lo tanto, la fórmula es insatisfacible y la deducción correcta

Resolución

Ejemplo 4 (III). Otra forma de escribirlo

C1: F(a)

C2:~ E(y) ∨ A(a,y)

C3: ~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)

C4: E(f(y,w,z))

C5: C(f(y,w,z))

C6: ~C(z) ∨ ~A(a,z)	w/a en C3 y RR con C1
C7: ~C(t) ∨ ~A(a,t)	z/t en C6
C8: ~A(a, f(y,w,z))	t/f(y,w,z) en C7 y RR con C5
C9: ~ E(t) ∨ A(a,t)	y/t en C2
C10: ~ E(f(y,w,z))	t/f(y,w,z) en C9 y RR con C8

C11: vacía RR C4 y C10