Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
16 Noviembre 2015

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$e^x + y + (2 + x + ye^y)y' = 0\,,$$

se pide:

(i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

(ii) Hallar la solución general de la ecuación.

Solución:

(i) Sean las funciones $M(x,y) = e^x + y$ y $N(x,y) = 2 + x + ye^y$.
La ecuación es una ecucación diferencial ordinaria, no lineal, de primer orden **exacta**, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = e^x + y\,, \tag{1}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = 2 + x + ye^y\,. \tag{2}$$

Por tanto, integrando (1) respecto a x da $\psi(x,y) = e^x + yx + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de la expresión previa con (2) se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x + \frac{dh}{dy} = 2 + x + ye^y\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} = 2 + ye^y \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) = 2y + (y-1)e^y$$

donde hemos integrado el segundo sumando por partes y hemos tomado igual a cero la constante de integración. La solución general se puede escribir en la forma

$$\psi(x,y) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x + yx + 2y + (y-1)e^y = c\,,$$

donde c es una constante arbitraria.
Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{e^x + y(x+2) + (y-1)e^y = c}$$

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$e^x + y + (2 + x + ye^y)y' = 0,$$

se pide:

(i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

(ii) Hallar la solución general de la ecuación.

No lineal

No var. separables.

i) Ecuación Diferencial Ordinaria (y depende de una sola variable) no lineal ($y'y e^y$) de 1er orden (hasta y' 1ª derivada

ii) $\underbrace{e^x + y}_{M(x,y)} + (\underbrace{2 + x + ye^y}_{N(x,y)})y' = 0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 1$ $\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 + 1 + 0$ $\quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ Exacta.

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int e^x + y \, dx = e^x + yx + h(y) \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \cancel{x} + h'(y) = 2 + \cancel{x} + ye^y; \; h(y) = \int ye^y - 2\, dy \end{cases}$$

$$h(y) = \int ye^y dy - 2\int dy = \left(\underbrace{ye^y - \int e^y dy}_{ye^y - e^y}\right) - 2y = (y-1)e^y - 2y$$

$u = y \quad du = 1dy$
$dv = e^y dy \quad v = e^y$

$$F(x,y) = e^x + yx + (y-1)e^y - 2y$$

$$\boxed{\text{Sol. general} \Rightarrow e^x + (x-2)y + (y-1)e^y = K \,/\, K \in \mathbb{R}}$$

Cuestión 2 (1 punto) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y''-4y'+4y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:

La ecuación característica, $r^2 - 4r + 4 = 0$, tiene por solución, $r = 2$ raíz real doble, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$. Concluimos que

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:

Vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Observamos que la parte no homogénea de la ecuación diferencial, $g(x) = (x+1)e^{2x}$, es solución de la ecuación homogénea, por tanto vamos a proponer una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = x^2(A + Bx)e^{2x} = (Ax^2 + Bx^3)e^{2x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene: $A = 1/2\,, B = 1/6$, por tanto,

$$y_p(x) = (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})e^{2x}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación es

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})e^{2x}}$$

Cuestión 2 (1 punto) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ $\qquad$ $g(x) = xe^{2x} + e^{2x}$

$y(x) = e^{\lambda x}$; $\quad e^{\lambda x}\cdot(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$; $\quad \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 4}}{2} = 2$ Raiz Doble

$\mathbb{B} = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$ $\quad y_h(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} \,/\, A, B \in \mathbb{R}$

$y_p(x) = [(Ax+B)e^{2x}]\cdot x^2$ Aparecen las dos raices en g(x) de $\mathbb{B}$.

$y_p(x) = (Ax^3+Bx^2)e^{2x}$ $\qquad y_p'(x) = e^{2x}(3Ax^2+2Bx+2Ax^3+2Bx^2)$

$y_p''(x) = e^{2x}(6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2)$

$$\cancel{e^{2x}}\Big(6Ax+2B+\overset{1}{\cancel{6Ax^2}}+\overset{2}{\cancel{4Bx}}+\overset{1}{\cancel{6Ax^2}}+\overset{2}{\cancel{4Bx}}+\overset{3}{\cancel{4Ax^3}}+\overset{5}{\cancel{4Bx^2}}+$$
$$-\overset{1}{\cancel{12Ax^2}}-\overset{2}{\cancel{8Bx}}-\overset{3}{\cancel{8Ax^3}}-\overset{5}{\cancel{8Bx^2}}+\overset{3}{\cancel{4Ax^3}}+\overset{5}{\cancel{4Bx^2}}\Big) = (x+1)\cancel{e^{2x}}$$

$6Ax+2B = x+1$; $\quad 6A = 1$; $\quad A = 1/6$ $\qquad 2B = 1$; $\quad B = 1/2$

$y_p(x) = (1/6\, x^3 + 1/2\, x^2)e^{2x}$

$$\boxed{\text{Sol. general} \Rightarrow y(x) = (A+Bx)e^{2x} + (1/6\, x^3 + 1/2\, x^2)e^{2x}}$$

Cuestión 3 (1 punto) Sea la ecuación diferencial:

$$(x^2+1)y''+4y=0, \ ,$$

Suponiendo que la solución de la ecuación viene dada por la serie de potencias $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, se pide:

(i) Hallar la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes a_n .

(ii) Aplicando el apartado (i), escribir los tres primeros términos de la serie.

Solución:

(i) Sea $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, por tanto

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas series en la ecuación se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}+4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \;=\; 0\,.$$

Ahora, para tener la potencia x^n en todas las series, hacemos un cambio del índice en la serie central, esto es

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\, a_{n+2}\, x^n+4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \;=\; 0\,,$$

así pues,

$$2a_2+4a_0+(6a_3+4a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\,(n(n-1)+4)\, a_n+(n+2)(n+1)\, a_{n+2}\Big]\, x^n \;=\; 0\,.$$

Finalmente, se obtiene la relación de recurrencia igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x,

$$2a_2+4a_0 \;=\; 0\,,\quad 6a_3+4a_1 \;=\; 0\,,\quad (n(n-1)+4)\, a_n+(n+2)(n+1)\, a_{n+2} \;=\; 0\,,$$

que puede ser expresada como

$$\boxed{a_2=-2\, a_0\,,\quad a_3=-\frac{2}{3}\, a_1\,,\quad a_{n+2}=-\frac{n(n-1)+4}{(n+2)(n+1)}\, a_n}\,,$$

con $n=2,3,4,\ldots$.

(ii) Los tres primeros términos de las serie son $a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$.
Teniendo en cuenta la relación de recurrencia obtenida en (ii) se obtiene:

$$\boxed{a_0 + a_1\,x - 2\,a_0\,x^2 = a_0(1-2x^2) + a_1 x}$$

donde $a_0\,, a_1$ son constantes.

Cuestión 4 (1 punto) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

Solución:
Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2 - 2s + 2)F(s) - s + 2 = \dfrac{1}{s}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s(s^2 - 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s-1)^2 + 1}\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1$. Calculando los coeficientes se obtiene: $A = 1/2\,, B = 1/2\,, C = -1$. Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s-2}{(s-1)^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\cos(t) - \frac{1}{2}e^t\sin(t)$$

entonces,

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{2}\left[1 + e^t(\cos(t) - \sin(t))\right]}$$

Cuestión 4 (1 punto) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$

$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2F(s) = \mathcal{L}\{1\}$

$\underbrace{s^2 F(s)} - s y(0) - \cancel{y'(0)}^{\,0} - \underbrace{2sF(s)} + 2y(0) + \underbrace{2F(s)} = 1/s$

$(s^2 - 2s + 2)F(s) - s + 2 = 1/s \;;\; F(s) = \dfrac{1 + s^2 - 2s}{(s^2 - 2s + 2)s}$

$s = 0$

$s = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$ Raices Complejas simples.

$\dfrac{s^2 - 2s + 1}{s(s^2 - 2s + 2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs + C}{s^2 - 2s + 2} \;;\; s^2 - 2s + 1 = A(s^2 - 2s + 2) + (Bs + C)s$

$s = 0 \quad 0 - 0 + 1 = A(0 - 0 + 2) + 0 \;;\; 2A = 1 \;;\; A = 1/2$

$2s - 2 = A(2s - 2) + 2Bs + C$

$s = 1 \quad 2 - 2 = A \cdot 0 + 2B + C \;;\; 0 = 2B + C \;;\; C = -2B = -1$

$2 = 2A + 2B \;;\; 1 = A + B \;;\; B = 1 - A = 1 - 1/2 = 1/2$

$F(s) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{s} + \dfrac{s/2 - 1}{s^2 - 2s + 2}$

$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s/2 - 1}{\underbrace{s^2 - 2s + 2}_{\to (s-1)^2 + 1}}\right\}$

$y(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 1 + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s - 2}{(s - 1)^2 + 1^2}\right\}$

$y(x) = 1/2 + 1/2\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s - 1}{(s-1)^2 + 1^2}\right\}}_{\to e^t \cos(t)} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^2 + 1^2}\right\}}_{\to e^t \operatorname{sen}(t)}\right)$

$$\boxed{y(x) = 1/2 + \frac{e^t \cos(t)}{2} - \frac{e^t \operatorname{sen}(t)}{2}}$$