TECNOLOGÍA DE COMPUTADORES
I. T. Informática de Gestión – Curso 2003/04

Solución de la hoja de Problemas Tema 2.
Álgebra de Boole y Funciones Lógicas

1.- Escribir en forma canónica la siguiente función de 4 variables:

$$F = DC$$

Si nos dicen que tiene cuatro variables, sean B y A las que faltan. En ese caso tendremos que extender la función con todos los términos que contengan *DC*:

$$F = DCBA + DCB\overline{A} + DC\overline{B}A + DC\overline{B}\overline{A}$$

2.- Escribir las siguientes funciones en forma canónica:

a) $F = CBA + CA + \overline{BC}A$

b) $F = \overline{E}DB + ED\overline{A} + ED\overline{CBA} + E\overline{BA} + \overline{EDBA}$

c) $F = BA$

Hay que proceder como en el primer ejercicio, extendiendo los términos que tenemos en la función. Un método seguro es pasar por la tabla de verdad de la función y luego transcribirla. En cualquier caso, las soluciones son:

a) $F = CBA + C\overline{B}A + \overline{B}\overline{C}A$

b) $F = \overline{E}\overline{D}\overline{C}\overline{B}\overline{A} + \overline{E}\overline{D}C\overline{B}A + \overline{E}DCBA + \overline{E}D\overline{C}BA + \overline{E}D\overline{C}B\overline{A} + \overline{E}DCB\overline{A} +$
$+ EDCB\overline{A} + EDC\overline{B}\overline{A} + ED\overline{C}B\overline{A} + ED\overline{C}\overline{B}\overline{A} + E\overline{D}C\overline{B}\overline{A} + E\overline{D}\overline{C}\overline{B}\overline{A}$

c) $F = BA$ pues esta función ya está en forma canónica: sólo tendrá dos variables.

3.- Simplificar utilizando las leyes del álgebra de Boole:

a) $F_1 = CA + \overline{C}BA = A\left(C + \overline{C}B\right) = AC$

b) $F_2 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{CBA} =$ (por De Morgan) $= \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

c) $F_3 = \overline{C}\,\overline{B}A + D\overline{C}\,\overline{B}A + \overline{B}A =$(todos los términos lo contienen, así que por absorción) $= \overline{B}A$

d) $F_4 = \left(\overline{C}A + C\right)\left(\overline{C + A}\right)\left(CB + A + \overline{A}\right) = \left(\overline{C}A + C\right)\left(\overline{C + A}\right)\left(CB + 1\right) =$
$= \left(\overline{C}A + C\right)\left(\overline{C + A}\right) = \left(A + C\right)\left(\overline{C + A}\right) = 0$

e) $F_5 = \overline{C}BA + D\overline{B}\,\overline{A} + \overline{B}A$

Aquí aprovechamos que $\overline{B}A = D\overline{C}\overline{B}A + \overline{D}\overline{C}\overline{B}A + \overline{D}C\overline{B}A + DC\overline{B}A$. De ellos, no hace falta hacer aparecer todos los términos, pero es lícito poner los que nos convengan, porque en todo caso los absorberá el último término de F_5.

- Los dos primeros términos se quedan como $\overline{C}\,\overline{B}A$. Unido al primer término de F_5 queda $\overline{C}A$.
- Si cogemos el primero y el último queda $D\overline{B}A$. Unido al segundo término de F_5 queda $D\overline{B}$.

En definitiva: $F_5 = \overline{C}A + D\overline{B} + \overline{B}A$

4.- Simplificar por el método de mapas de Karnaugh:

b) $F = \sum_4 (1,3,4,5,6,7,9,11,14,15)$

BA DC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	1	0

$$F = \overline{C}A + CB + \overline{D}C$$

c) $F = \sum_4 (2,3,5,7,13,15)$

BA DC	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11		1	1	
10				

$$F = CA + \overline{D}\overline{C}B$$

d) $F = \sum_4 (0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$

BA DC	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1			1
11	1			1
10	1	1	1	1

$$F = \overline{C} + \overline{A}$$

e) $F = \prod_4 (0,2,8,10,12)$

BA DC	00	01	11	10
00			0	
01		0	0	
11		0	0	
10				

$$F = \left(D + \overline{B} + \overline{A}\right)\cdot\left(\overline{C} + \overline{A}\right)$$

f) $F=\prod_4(1,3,4,5,6,7,9,11,14,15)$

BA / DC	00	01	11	10
00	0	0		
01	0			0
11	0			0
10	0	0	0	0

$F=(\overline{C}+A)\cdot(C+B)\cdot(\overline{D}+C)$, es la misma función que en c).

5.- Utilizando mapas de Karnaugh, simplificar "por unos" y "ceros":

a) $F_1=\sum_3(0,1,2,4,5)$

BA / C	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		

$$F_1=\overline{B}+\overline{C}\cdot\overline{A}$$
$$F_1=(\overline{B}+\overline{A})\cdot(\overline{C}+\overline{B})$$

b) $F_2=\sum_4(0,1,2,5,8,9,10)$

BA / DC	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1		
11				
10	1	1		1

$$F_2=\overline{C}\,\overline{B}+\overline{C}\,\overline{A}+\overline{D}\,\overline{B}A$$
$$F_2=(\overline{B}+\overline{A})\cdot(\overline{D}+\overline{C})\cdot(\overline{C}+\overline{B})\cdot(\overline{C}+A)$$

c) $F_3=\sum_4(2,3,5,7,13,15)$

BA / DC	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11		1	1	
10				

$$F_3=CA+\overline{D}\,\overline{C}B$$
$$F_3=(C+B)\cdot(\overline{C}+A)\cdot(\overline{D}+C)$$

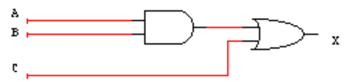
6.- ¿A qué puerta puede corresponder esta tabla de verdad, expresada en un mapa de Karnaugh?

BA / **DC**	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	1	0	1
01	1	0	1	0
11	0	1	0	1
10	1	0	1	0

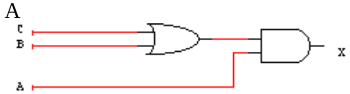
Se hace 1 cuando el número de 1 en las entradas es impar. Es una XOR de 4 entradas.

7.- Dibujar el circuito lógico correspondiente a las siguientes funciones. Disponemos sólo de puertas AND y OR de 2 entradas:

a) X = AB + C



b) X = (C + B) A

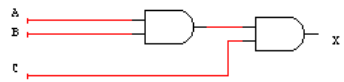


c) X = (C A) + A

Esta función es A, por la propiedad de absorción.

d) X = C B A

Aquí aplicamos la propiedad transitiva del producto.



8.- Dada la expresión:

$$F=(D+\overline{C}+B+A)(D+\overline{C}+\overline{B}+A)$$

a) Ponerla como suma de minterms.
b) Sintetizar optimizando el diseño: sólo disponemos de una puerta NAND de tres entradas y un par de inversores.

Si nos damos cuenta de que la función está expresada en forma canónica, como suma de maxterms, podemos reproducir su tabla de verdad, con estos dos maxterms como los que hacen 0 a la función. Estos maxterms son correspondientes (poniendo 1 donde esté negada la variable, 0 donde no lo esté) a 0100 y 0110. El resto de maxterms, es decir, de términos de la tabla de verdad, es 1.

D	C	B	A	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

La función a la que se refiere esta tabla de verdad puede simplificarse por Karnaugh:

BA DC	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

La función con grupos de 8 unos es:

$$F = D + \overline{C} + A$$

Obsérvese que esto era igualmente válido si se aplicaba la propiedad de absorción, es decir, la que se aplica continuamente en mapas de Karnaugh al agrupar; en este caso es la propiedad de absorción que se aplica al agrupar ceros la que nos descubre que los dos términos de F tienen las mismas variables en la misma forma, salvo una, negada en uno de los términos, que no está negada en el otro.

Ahora podemos sintetizar la función. Como nos hablan de inversores y NANDs, hay que intentar poner la función como un producto, para utilizar este tipo de puerta. Para ello, suele ser buena idea utilizar el teorema de De Morgan. Por ejemplo, así:

$$F = D + \overline{C} + A = \overline{\overline{D + \overline{C} + A}} = \overline{\overline{D} C \overline{A}}$$

Con la función puesta así, ya tenemos que podemos implementarla exactamente con una puerta NAND de tres entradas y dos inversores:

9.- Una función de tres variables F(C,B,A) ha de tomar el valor lógico "0" cuando la variable B se encuentre en estado "1" y la variable A no esté en el estado "1". En los demás casos posibles F ha de estar en estado "1".

a) Realizar la tabla de verdad de esta función.
b) Obtener las formas canónicas de sumas de productos y de productos de sumas.
c) Obtener la función simplificada.

a) Siguiendo el enunciado con detenimiento podemos obtener la siguiente tabla de verdad:

C	B	A	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

b) Para poner la función en forma canónica no tenemos más que ir escribiendo los minterms o maxterms que aparecen en la tabla de verdad:

- Como producto de sumas, deberé escribir los maxterms (sumas) que hagan 0 a la función (pues así, cuando uno de ellos es cero, su producto es cero). Así:
$$F = \left(C + \overline{B} + A\right) \cdot \left(\overline{C} + \overline{B} + A\right)$$
- Como suma de productos, deberé escribir los minterms (productos) que hagan 1 a la función (pues así, cuando uno de ellos es uno, su suma es uno). Así:
$$F = \overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A} + \overline{C}\,\overline{B}A + \overline{C}BA + C\overline{B}\,\overline{A} + C\overline{B}A + CBA$$

c) Ahora realizamos la tabla de Karnaugh y simplificamos.

BA C	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	1	0

Agrupando por unos, teniendo en cuenta que un 1 en la variable se toma como la variable tal cual, y un cero como la negada, queda: $F = \overline{B} + A$

Agrupando por ceros, teniendo en cuenta que un 1 en la variable se toma en este caso como la variable negada, queda: $F = \overline{B} + A$

Evidentemente, da lo mismo. Esto podría haberse sacado también a partir de la propiedad de absorción en el producto, en la forma canónica realizada como producto de sumas del apartado b).

10.- Intentar sintetizar (es decir, dibujar su implementación con puertas lógicas) el circuito lógico correspondiente a la expresión:

$$F = BA + \overline{C}D + \overline{E} + \overline{F}$$

utilizando únicamente puertas AND e inversores (Consejo: utilizar repetidamente el teorema de De Morgan).

En efecto podemos poner todas las operaciones como productos:

$$F = BA + \overline{C}D + \overline{E} + \overline{F} = BA + \overline{C}D + \overline{EF} = \overline{\overline{BA + \overline{C}D + \overline{EF}}} = \overline{\overline{BA} \cdot \overline{\overline{C}D} \cdot EF}$$

quedando, en definitiva: