

Problema 4.4

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } -7 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$f: [-7, 5] \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \in [0, 5]$ En esta región $f(x) = 0$. Por tanto:

① $f(x)$ es continua en $(0, 5]$

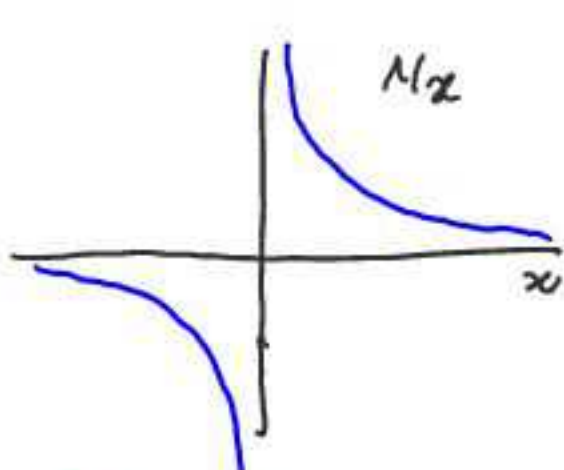
$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$x \in [-7, 0)$ En esta región $f(x) = e^{1/x}$ (dementado).

Por tanto:

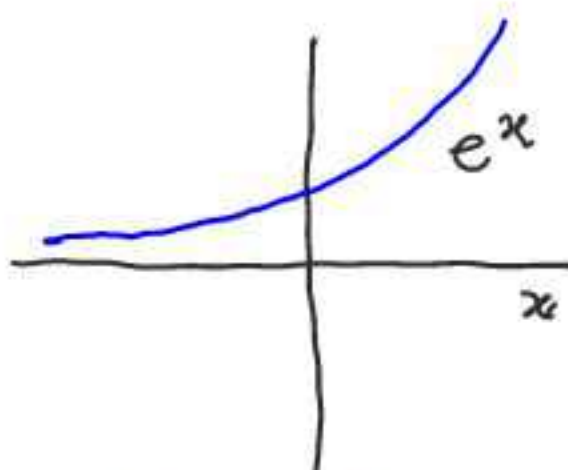
① $f(x)$ es continua en $[-7, 0)$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x} = e^{-\infty} = 0$$

En resumen, $f: [-7, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Por tanto $\text{Im}(f) = [m, M]$, $m, M \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [-7, 5]$$

f está acotada.