Soluciones de la hoja 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 2.1 Las solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales correspondientes:

1. $(2, 3)^t = 7\,(1, 4)^t - 5\,(1, 5)^t$.

2. No es posible.

3. $(1, 3, 0)^t = -10\,(1, 0, 4)^t + 8\,(2, 1, 5)^t - \frac{5}{3}\,(3, 3, 0)^t + 0\,(4, 2, 1)^t$.

4. No es posible.

Problema 2.2 Las soluciones pedidas son:

a) $(12, 6)^t = \frac{15}{2}\,(1, 1)^t - \frac{3}{4}\,(-6, 2)^t$.

b) $(1, -1)^t = 0\,(1, 1)^t + 1\,(1, -1)^t$.

c) $10, 12)^t = \frac{122}{23}\,(1, 3)^t + \frac{18}{23}\,(6, -5)^t$.

Problema 2.3

a) $S = \{(x, y, z)^t \colon x = 4 - z\,, y = z - 1\,, z \in \mathbb{R}\}$; $\mathrm{rg}(A) = 2$; sistema compatible indeterminado.

b) $S = \{(1,1,1)^t\}$; $\mathrm{rg}(A) = 3$; sistema compatible determinado.

c) $S = \left\{(x,y,z)^t \colon x = \frac{5-z}{3}\,, y = \frac{2+2z}{3}\,, z \in \mathbb{R}\right\}$; $\mathrm{rg}(A) = 2$; sistema compatible indeterminado.

Problema 2.4 Si el número se escribe como $10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$ con $9 \leq a_i \leq 0$, entonces las ecuaciones son: $a_0 + a_1 = 5$ y $10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 - (10^2 a_0 + 10 a_1 + a_2) = 792$. La solución es $a_2 = 8 + a_0$ y $a_1 = 5 - a_0$. Luego las soluciones al problema son 850 y 941.

Problema 2.5 El espacio nulo se calcula resolviendo el sistema $A\,x = 0$ y la solución es

$$N(A) = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^t = \alpha(-13,6,5,0)^t + \beta(1,-2,0,5)^t \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} .$$

El espacio columna tiene dimensión 2 ya que $\mathrm{rg}(A) = 2$ y viene dado por

$$\mathcal{C}(A) = \left\{(x_1, x_2, x_1 + x_2)^t \colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\} .$$

Problema 2.6 Las soluciones son:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -58/18 \\ 0 & 0 & 1 & -9/2 \end{array}\right)$.

c) $\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Problema 2.7 Las inversas buscadas son:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) B no es invertible.

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$

Problema 2.8 Es un sistema compatible determinado por lo que la única solución será la trivial $S = \{(0,0,0,0)^t\}$. La cardinalidad del conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es 1: $S = \{(3,-3,1,-1)^t\}$.