FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

$$\boxed{\begin{aligned} f: D\subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}}$$

función real de variable real

$$f: D\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

función de variable real — función real

$D :=$ dominio de la función $:=$ números reales "x" para los que tiene sentido el cálculo de $f(x)$

$\mathrm{Im}(f) = \{ y\in\mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x\in D \}$
$=$ números reales "y" que son de la forma $y=f(x)$ para algún "x".

<u>Obs:</u> Normalmente nos referiremos a una función a través de una expresión del tipo "$f(x)$". En estos casos asumiremos, implícitamente, que el dominio de f es el conjunto más grande en el que la fórmula "$f(x)$" tenga sentido

<u>Ejemplo:</u> El dominio de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ es el conjunto:

$D = \{x\in\mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x^2\leq 1\} =$
$= \{x\in\mathbb{R} : |x|\leq 1\} = [-1,1]$

La imagen de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ está formada por los $y\in\mathbb{R}$ tales que:

$y=\sqrt{1-x^2}$ para algún $x\in[-1,1]$
$\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}\geq 0$

$\Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2$
$x = \pm\sqrt{1-y^2}$
Por tanto $y\geq 0$ & $y\in[-1,1]$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = [0,1]$

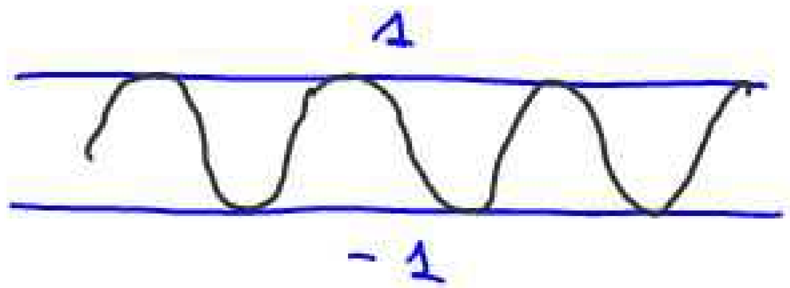
Ejemplos:

- $f(x) = x^n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

  $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impar} \\ [0, \infty) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

- $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $\cos x$

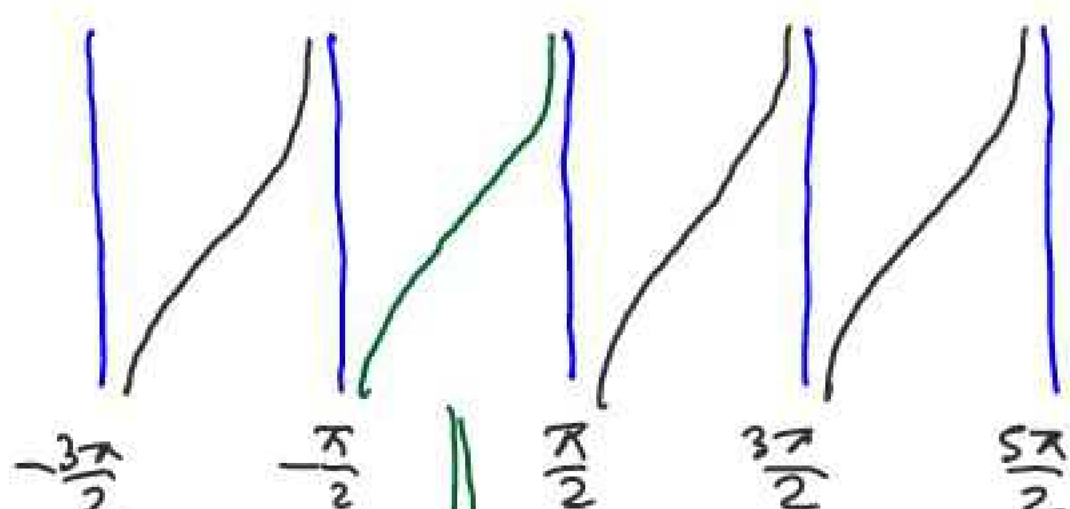
  $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-1, 1]$



- $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

  $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \pm \pi/2, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \}$

  $Im(f) = \mathbb{R}$



- $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

  $Dom(\arctan) = \mathbb{R}$

  $Im(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

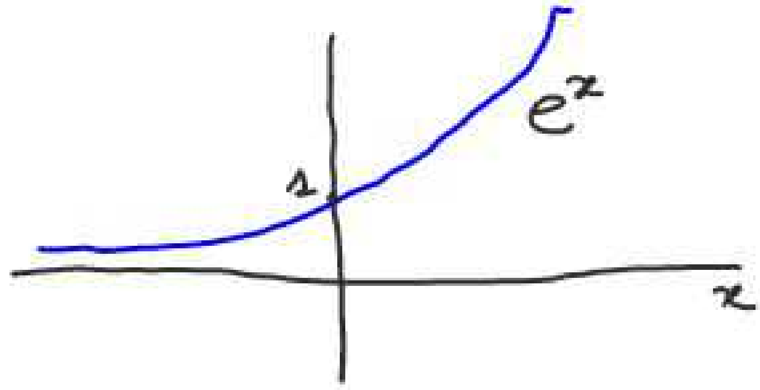
- $Dom(\arccos) = [-1, 1]$

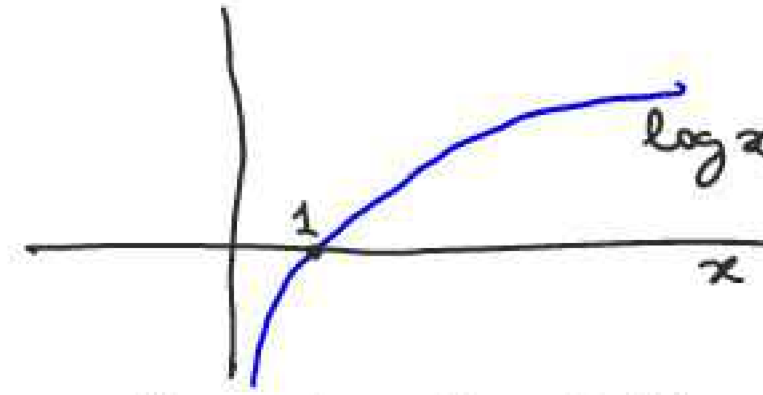
  $Im(\arccos) = [0, \pi]$

¿por qué?

- $Dom(\operatorname{arcsen}) = [-1, 1]$

  $Im(\operatorname{arcsen}) = [-\pi/2, \pi/2]$





$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$$
$$x \mapsto e^x$$

$\mathrm{Dom}(\exp) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(\exp) = (0,\infty)$

$$\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log x$$

$\mathrm{Dom}(\log) = (0,\infty)$

$\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$

- $\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{\log x} = x \quad \forall x \in (0,\infty)$

<u>Ejemplo:</u> $f(x) = \dfrac{2x-3}{5x+7}$ ¿Dom ; Im?

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 5x+7 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{7}{5}\}}$$

$\mathrm{Im}(f)$: $y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow y = \dfrac{2x-3}{5x+7}$ para algún $x \neq -\frac{7}{5}$

$y = \dfrac{2x-3}{5x+7}$ ¿x? $\Leftrightarrow (5x+7)y = 2x-3$

$\Leftrightarrow (5y-2)x = -7y-3$

$\underset{y \neq 2/5}{\Longrightarrow} x = \dfrac{7y+3}{2-5y}$

Es fácil ver que $x \neq -\frac{7}{5}$

$\underset{y = 2/5}{\Longrightarrow} 0 = -7\cdot\frac{2}{5} - 3$!!

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{2}{5}\}}$$