Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Extraordinario

Junio 2014

Nombre		Grupo	

Problema 1 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.5 puntos) .
Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad x > 0,$ se pide:

i) Efectuar el cambio de variable adecuado que permite transformarla en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación diferencial así obtenida sujeta a las condiciones $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

Solución:

i) Aplicando el cambio de variable independiente $x = e^t$, la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = t$$

ii) La anterior EDO es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. Resolviendo la ecuación homogénea, la correspondiente ecuación característica tiene una única raíz $r = 2$, por lo tanto la solución es:

$$y_h = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

Para la solución particular de la ecuación no homogénea $y_p = At + B$ se obtiene $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación anterior es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{1}{4}(t + 1)\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable efectuado se obtiene la solución general de la ecuación diferencial del enunciado:

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + \frac{1}{4}(\ln x + 1)\,.$$

Usando las condiciones iniciales $y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 1$ obtenemos $c_1 = \frac{1}{4}$ y $c_2 = \frac{1}{4}$ con lo que la solución es:

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x^2 \ln x + \ln x + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = 1/4(x^2 + 1)(\ln x + 1)}$$

Problema 2 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 16y = e^{4t}\,, \quad y(0) = 0\,,\, y'(0) = 1\,.$$

Solución:
Aplicando la transformada de Laplace a los términos de la EDO del enunciado,

$$\mathcal{L}[y''] + 16\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{4t}]\,,$$

se obtiene

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+16} + \frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s^2+16}$$

Un método para resolver el problema consiste en descomponer en fracciones simples,

$$\frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s^2+16} = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{s-4} - \frac{s}{s^2+16} - \frac{4}{s^2+16}\right)\,,$$

y así poder aplicar a cada término la transformada inversa de Laplace.
Otro método consiste en considerar el teorema de convolución. Aplicando directamente la transformada inversa de Laplace a la ecuación

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+16} + \frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s^2+16}$$

se obtiene

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + e^{4t} * \frac{1}{4}\sin(4t)\,,$$

donde el cálculo de la convolución da

$$e^{4t} * \sin(4t) = \int_0^t e^{4t-4\tau}\sin(4\tau)\,d\tau = \frac{1}{8}(e^{4t} - \cos(4t) - \sin(4t))\,.$$

Finalmente la solución es:

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{32}(e^{4t} - \cos(4t) + 7\sin(4t))\,.}$$

Problema 3 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

Problema 2 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 16y = e^{4t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

$\mathcal{L}\{y(x)\} = F(s)$; $\mathcal{L}\{y''\} + 16\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{4t}\}$

$$s^2F(s) - \cancel{sy(0)}^{\,0} - y'(0) + 16F(s) = \frac{1}{s-4}$$

$$(s^2+16)F(s) - 1 = \frac{1}{s-4} \ ; \quad F(s) = \frac{1+s-4}{(s-4)(s^2+16)} = \frac{s-3}{(s-4)(s^2+16)}$$

$s^2+16=0$; $s=\sqrt{-16}$ = RCS

$$\frac{s-3}{(s-4)(s^2+16)} = \frac{A}{(s-4)} + \frac{Bs+C}{(s^2+16)} \ ; \quad s-3 = As^2+16A+Bs^2+Cs-4Bs-4C$$

$1 = 2As+2Bs+C-4B$; $0 = 2A+2B$

$s-3 = A(s^2+16)+(Bs+C)(s-4)$ $\quad 2A+2B=0$; $\frac{2}{32} = -2B$; $B = -\frac{1}{32}$

$s=4 \Rightarrow 1 = 32A+0$; $A = \frac{1}{32}$ $\quad s=0 \Rightarrow C-4B=1$; $C = 1-\frac{4}{32} = \frac{28}{32}$

$$F(s) = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{(s-4)} + \frac{-\frac{1}{32}s+\frac{28}{32}}{(s^2+16)}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{32}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}}_{e^{4t}} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{s}{32}+\frac{28}{32}}{s^2+16)}\right\}$$

$$-\frac{1}{32}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-28}{(s^2+4^2)}\right\} = -\frac{1}{32}\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4^2}\right\}}_{\cos(4t)} - \underbrace{\frac{28}{4}}_{7}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\}}_{\text{sen}(4t)}\right.$$

$$y(x) = \frac{e^{4t}}{32} - \frac{\cos(4t)}{32} - \frac{7}{32}\,\text{sen}(4t)$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{32}\left(e^{4t} - \cos(4t) - 7\,\text{sen}(4t)\right)}$$

Problema 3 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

$$|A-\lambda I|=0 \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ \alpha & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - \lambda\, tr(A) + |A|$$

$$0 = \lambda^2 + 5\alpha - 4; \ \lambda = \sqrt{4-5\alpha}$$

Para que α sea real $\quad 4-5\alpha > 0; \ \alpha < 4/5 \ ; \boxed{\alpha = 4/5}$

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0,0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

$\lambda = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1} = \pm i$ Raices Complejas Conjugadas.

$$(A-\lambda I)\vec{V} = \vec{0} \quad \begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ 1x + y(-2+i) = 0$$

$\lambda = -i$ $\qquad x = (2-i)y$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} y \quad \Rightarrow \vec{w} = e^{-it} \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = u(t) + i\,v(t)$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} e^{-it}2 - e^{-it}i \\ e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(-t) + i2\,sen(-t) - i\cos(-t) + sen(-t) \\ \cos(-t) + i\,sen(-t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos(-t) + sen(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\,sen(-t) - \cos(-t) \\ sen(-t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos(-t) + sen(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\,sen(-t) - \cos(-t) \\ sen(-t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 = 2C_1 - C_2 \ ; \boxed{C_2 = -1} \\ 0 = C_1 \ ; \boxed{C_1 = 0} \end{matrix}$$

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0, 0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

Solución:

i) Los valores propios de la matriz de coeficientes son

$$r_1 = \sqrt{4 - 5\alpha}\ , \qquad r_2 = -\sqrt{4 - 5\alpha}\ .$$

Si $\alpha < 4/5$ los valores propios son reales con signos opuestos, por tanto las soluciones del sistema vienen dadas por combinaciones de funciones exponenciales.

Por otra parte, si $\alpha > 4/5$ los valores propios son complejos imaginarios puros conjugados, por lo que las soluciones son periódicas.

Por tanto el comportamiento cualitativo de las soluciones cambia para $\boxed{\alpha = 4/5}$

ii) Para $\alpha = 1$ los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz de coeficientes son

$$r_1 = i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución real del sistema es

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes arbitrarias. Si la partícula se mueve comenzando en el punto $(1, 0)$ en $t = 0$, entonces las constantes c_1 y c_2 satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. La distancia requerida está dada por

$$\boxed{d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\sin t\cos t + 1}}$$

Problema 4 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' &= 0 \\ y(0) &= g(\pi/2) \end{cases}$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \sin(x)\,, \quad g(0) = -1\,.$$

Problema 4 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' &= 0 \\ y(0) &= g(\pi/2) \end{cases}$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \sin(x), \quad g(0) = -1.$$

$y(0) = g(\pi/2)$

$g'(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow g(x) = \int \text{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + k$

$g(0) = -1 \Rightarrow -\cos(0) + k = -1 = -1 + k = -1;\ k = 0 \Rightarrow g(x) = -\cos(x)$

$y(0) = g(\pi/2) \Rightarrow -\cos(\pi/2) = y(0) = 0$

$\underbrace{x^2 + e^y}_{M(x,y)} + \underbrace{(xe^y + \cos(y))}_{N(x,y)} y' = 0$ No lineal, no var. separables.

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + e^y \qquad \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y + 0$ EDO Exacta $\Rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int x^2 + e^y\,dx = \dfrac{x^3}{3} + e^y x + h(y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow 0 + \cancel{xe^y} + h'(y) = \cancel{xe^y} + \cos(y);\ h'(y) = \cos(y) \end{cases}$$

$h(y) = \int \cos(y)\,dy = +\text{sen}(y);\ F(x,y) = x^3/3 + e^y x + \text{sen}(y)$

$x^3/3 + e^y x + \text{sen}(y) = k \ / \ k \in \mathbb{R}$

$0/3 + e^0 \cdot 0 + \text{sen}(0) = K \ / \ K \in \mathbb{R}$

$0 + 0 + 0 = K\ ;\ K = 0$

$$\boxed{x^3/3 + e^y x + \text{sen}(y) = 0}$$

Solución:
Es inmediato ver que $g(x) = -\cos(x)$, con lo que $g(\pi/2) = 0 = y(0)$.
Por otra parte, la ecuación diferencial del PVI es exacta. Por lo tanto existe una función $F(x, y(x))$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x^2 + e^y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \cos y$, donde

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x}$:

$$F = \int \left(x^2 + e^y\right) dx = \frac{x^3}{3} + xe^y + \phi(y)\,.$$

Para obtener el valor de la función $\phi(y)$ derivamos el anterior resultado respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \cos y$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y) = \cos y$ y así $\phi(y) = \sin y$ (tomando igual a cero la constante de integración). Por lo tanto

$$F = \frac{x^3}{3} + xe^y + \sin y$$

De $\dfrac{dF}{dx} = 0$ concluimos que $\frac{x^3}{3} + xe^y + \sin y = C$ Teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ se obtiene que $C = 0$. Por tanto, la solución es:

$$\boxed{\tfrac{x^3}{3} + xe^y + \sin y = 0}$$

Problema 5 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ \ t > 0\,,\ \ x \in (0, \pi/3)\\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,,\ \ t > 0\,,\\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = f(x)\,,\ \ x \in [0, \pi/3]\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t}\cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x + 1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Solución:

i) Al aplicar separación de variables, se obtiene que: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, siendo λ la constante de separación. Por tanto: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

Caso 1: $\lambda = 0$

$X'' = 0 \Longrightarrow X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\lambda = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

Caso 2: $\lambda > 0$

Tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax)\,;\ \text{además } X'(x) = -ac_1\sin(ax) + ac_2\cos(ax)\,,\ \text{con } c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0\,;\quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1\sin(a\pi/3) = 0$, imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = (3n)^2 = 9n^2\,;\ n = 1, 2, 3, \cdots}$

ii) Debemos calcular:

$$u(\pi/6, 1/9) \approx A_0 + A_1 e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2 e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(3nx) = f(x) = 2x + 1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1 + \pi/3$$

$$(n \geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x) + \frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6, 1/9) \approx 1 + \frac{\pi}{3}}$

Problema 6 (Eval. Cont. 1 punto. Exam. Extr. 1.7 puntos) .
Se quiere resolver numéricamente el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' &= t + \dfrac{y}{2} + 1\,, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

mediante el esquema numérico de Adams-Bashforth:

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, Y_n)$$

i) Calcula con paso $h_1 = 0.1$ la solución aproximada $Y^{h_1}_{t=0.3}$ de $y(0.3)$, sabiendo que Y_1 debe calcularse mediante el método de Euler explícito.

ii) Usando el paso $h_2 = 0.01$ se obtiene la aproximación $Y^{h_2}_{t=0.3} = 1.5327258$. Estima el orden del método a partir de $Y^{h_1}_{t=0.3}$, $Y^{h_2}_{t=0.3}$ y la solución exacta $y(t) = 7e^{t/2} - 2(t+3)$.

Solución:

i) De la condición inicial obtenemos que $Y_0 = 1$. Del esquema de Euler explícito obtenemos: $Y_1^{h_1} = 1.15$.
Las siguientes dos aproximaciones se obtienen del método de Adams-Bashforth:
$Y_2^{h_1} = 1.32625$, $\boxed{Y_3^{h_1} = 1.52197}$.

ii) Calculamos:
$E^{h_1}_{t=0.3} = \left|Y^{h_1}_{t=0.3} - y(0.3)\right| = 0.01087094$ y $E^{h_2}_{t=0.3} = \left|Y^{h_2}_{t=0.3} - y(0.3)\right| = 0.00011382$.
Entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 10$. Entonces tenemos que

$$E^{h_2}_{t=0.3} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=0.3}}{10^p}$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 1.98$, con lo que la estimación del orden del método es $\boxed{p = 2}$.
