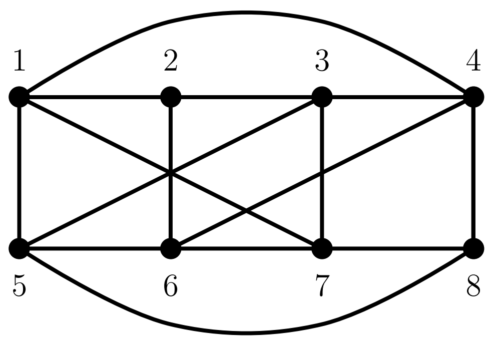
Problema 1 (Problema 6.3) Sea el siguiente grafo dado por su matriz de adyacencia

$$A_G = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Usando algún algoritmo de teoría de grafos, encontrar un circuito euleriano o un camino euleriano (si es que existen). En caso positivo, la solución debe describir correctamente dicho circuito o camino.

SOLUCIÓN.

El grafo pedido se puede representar como sigue si nombramos a los vértices del grafo (1,2,3,4,5,6,7,8):



Dado que todos los vértices tienen grado par (4), excepto dos de ellos (el 2 y el 8 que tienen grado impar = 3), no existe un circuito euleriano, pero si existe un camino euleriano. Si añadimos una arista $w = \{2, 8\}$ (en rojo y a trazos en la siguiente figura), entonces el grafo se convierte en euleriano y podemos encontrar un circuito euleriano usando el algoritmo de Fleury.

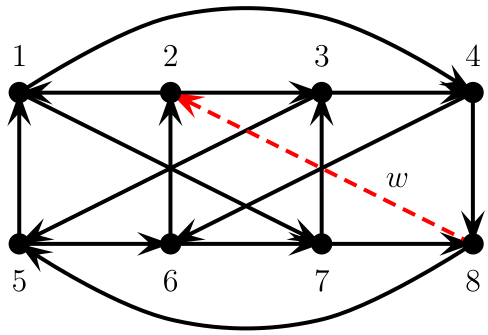
Si empezamos el circuito por un vértice que tenía grado impar (p.e., el vértice 2) e intentamos acabarlo usando la arista que hemos añadido a mano w, entonces el algoritmo nos da el circuito marcado en la figura de abajo:

$$C_E = (2, 1, 7, 8, 5, 6, 7, 3, 4, 6, 2, 3, 5, 1, 4, 8, w, 2).$$

Ahora eliminamos la arista w, por lo que el circuito euleriano C_E se rompe y se transforma en el siguiente camino euleriano

$$C'_E \;=\; (2,1,7,8,5,6,7,3,4,6,2,3,5,1,4,8)\,,$$

que empieza en uno de los vértices de grado impar (2) y acaba en el otro vértice de grado impar (8).



Problema 2 (Problema 7.2) Un científico tiene dos bolsas idénticas:

1. La primera contiene N dados idénticos; cada uno de los cuales tiene M caras distintas.

2. La segunda contiene P monedas distintas todas entre sí y cada una de ellas tiene los dos lados distintos.

Si el científico elije una de las dos bolsas y tira su contenido al suelo, ¿cuántos resultados distintos son posibles? **Nota:** los resultados pueden contener números, factoriales o coeficientes binomiales; pero no expresiones del tipo C_r, V_r, $V_{r,k}$, $\mathrm{CR}_{m,n}$, etc que no se han visto en clase.

<u>Solución.</u>

- Si escoge la bolsa que contiene los dados, el número de configuraciones distintas es equivalente a repartir N objetos idénticos en M cajas distinguibles ($= M-1$ barras móviles) de manera que en cada caja pueda haber cuantas monedas se quiera (incluso ninguna). La solución es $\binom{N+M-1}{N}$.

- Si escoge la bolsa que contiene los dados, la primera moneda puede tener dos opciones; la segunda, otras dos opciones, etc. El principio del producto implica que el número total de resultados es 2^P.

- Como tirar las bolsas son sucesos incompatibles (o se tira una o la otra), el principio de la suma nos dice que el resultado final es

$$\binom{N+M-1}{N} \; + \; 2^P \,.$$

Problema 3 (Problema 8.6) Resolver <u>usando técnicas de combinatoria</u> la siguiente recurrencia

$$a_n \;=\; 4\,a_{n-1} \;-\; 4\,a_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,, \qquad a_1 \;=\; 5\,, \qquad a_2 \;=\; -8\,.$$

<u>SOLUCIÓN.</u>

Es una recurrencia lineal, de orden 2, con coeficientes constantes y homogénea. El polinomio característico y sus raíces son:

$$x^2 - 4x + 4 \;=\; (x-2)^2 \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad x \;=\; 2 \quad (\text{doble})\,.$$

Luego la forma general de la solución es, según los teoremas vistos en clase,

$$a_n \;=\; (A + B\,n)\,2^n\,.$$

Si usamos la recurrencia con $n = 2$, obtendremos el término a_0:

$$a_2 \;=\; -8 \;=\; 4a_1 - 4a_0 \;=\; 20 - 4a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \;=\; 7\,.$$

Los valores de las constantes A by B se ontienen con las condiciones iniciales $a_0 = 7$ y $a_1 = 5$:

$$\begin{aligned} a_0 \;&=\; 7 \;=\; A \\ a_1 \;&=\; 5 \;=\; 2\,(A+B) \end{aligned}$$

La solución es $A = 7$ y $B = -\dfrac{9}{2}$. Luego la solución final es:

$$a_n \;=\; \left(7 - \frac{9}{2}\,n\right)\,2^n\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Problema 4 (Problema 8.8) Sea $X = \{A, B, C\}$ un conjunto y definimos el grafo simple $G = (V, E)$ de la siguiente manera:

- $V = \mathcal{P}(X)$ (es decir, el conjunto potencia de X).
- $e = \{R, S\} \in E$ si y sólo si $R \subset S$ ó $S \subset R$.

<u>Usando técnicas de teoría de grafos</u> y <u>sin usar ningún argumento basado en la representación gráfica de G</u>:

- Calcular $|V|$.
- Calcular los grados de cada vértice.
- Calcular $|E|$.
- ¿Es G planar?

<u>SOLUCIÓN.</u>

Dado que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, entonces $|V| = 2^3 = 8$. Los grados de cada vértice vienen dados por:

- El conjunto vacío $\varnothing \in V$ es subconjunto de cualquier conjunto, luego $d(\varnothing) = 7$.
- El conjunto $X \in V$ contine a cualquier subconjunto suyo, luego $d(X) = 7$.
- Los 3 subconjuntos con un sólo elemento $\{\alpha\} \in V$ con $\alpha = A, B$ ó C contienen al conjunto vacío $\varnothing$ y son contenidos por X y los dos subconjuntos de dos elementos que contienen a α (es decir, $\{\alpha, \beta\}$ con $\beta \neq \alpha$). Luego todos ellos satisfacen $d(\{A\}) = d(\{B\}) = d(\{C\}) = 4$.
- Los 3 subconjuntos de dos elementos $\{\alpha, \beta\} \in V$ con $\alpha, \beta = A, B, C$ y $\beta \neq \alpha$ contienen al conjunto vacío $\varnothing$, a los dos subconjuntos de un elemento $\{\alpha\}$ y $\{\beta\}$ y sólo son contenidos por X. Luego satisfacen $d(\{A, B\}) = d(\{A, C\}) = d(\{B, C\}) = 4$.

El número de aristas lo obtenemos usando el teorema del apretón de manos

$$2|E| \;=\; \sum_{x \in V} d_x \;=\; 2 \times 7 + 6 \times 4 \;=\; 38\,.$$

Luego $|E| = 19$.

Supongamos que G es planar. Como es conexo, simple y tiene más de 2 vértices, entonces debería satisfacer $|E| \leq 3|V| - 6$. Pero $|E| = 19$ y $3|V| - 6 = 24 - 6 = 18$, por lo que la última ecuación no se satisface. Esta contradicción implica que G no es planar.