Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática
Examen Final Ordinario
09 de enero 2015

Nombre	Jorge Rodríguez Fraile	Grupo	81

Problema 1 (1.5 puntos) .
Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t} \;; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 1;$$

Se pide, resolver el PVI mediante los dos métodos siguientes:

M1) Aplicando la transformada de Laplace.

M2) Siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

Solución:

M1) Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la función $y(t)$. Aplicando la TL a la ecuación diferencial, se tiene

$$s^3F(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 4(sF(s) - y(0)) = \frac{4}{s-2}\,,$$

Sustituyendo los valores iniciales y despejando $F(s)$, se obtiene:

$$F(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 5s - 6}{s(s-2)(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{Cs + D}{s^2+4}$$

Calculando los coeficientes se obtiene: $A = 3/4$; $B = 1/4$, $C = 0$; $D = -1/2$.
Por tanto

$$F(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4}$$

Tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-4}) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4})$$

A partir de las tablas de la TL, conluimos que: $\boxed{y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}\sin(2t)}$

Problema 1 (1.5 puntos) .

Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t} \; ; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 1;$$

Se pide, resolver el PVI mediante los dos métodos siguientes:

M1) Aplicando la transformada de Laplace.

M2) Siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

$$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$\underline{s^3 F(s)} - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + 4\underline{sF(s)} - 4y(0) = 4\frac{1}{s-2}$$

$$F(s)(s^3+4s) - \overbrace{s^2 - 1 - 4}^{-s} = \frac{4}{s-2}$$

$$F(s) = \frac{4+5s-10+s^3-2s^2}{(s^3+4s)(s-2)} = \frac{s^3-2s^2+5s-6}{(s-2)s(s^2+4)} = \frac{(s+3)(s^2+s+2)}{(s-2)s(s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{s^3-2s^2+5s-6}{(s-2)s(s^2+4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$(s+3)(s^2+s+2) = As(s^2+4) + B(s-2)(s^2+4) + (Cs+D)s(s-2)$$

$$s=0 \Rightarrow (0-0+0-6) = 0 + B(-2)(4) + 0 \;; -6 = -8B \;; B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$s=2 \Rightarrow (8-2\cdot4+5\cdot2-6) = 2A(8)+0+0 \;; 4 = 16A \;; A = 1/4$$

$$s=1 \Rightarrow 1-2+5-6 = A(1+4) + B(-1)(1+4) + (C+D)(-1)$$

$$-2 = 5A - 5B - C - D \;; \quad C+D = -1/2$$

$$s=-1 \Rightarrow (-1-2-5-6) = -A(5) + B(-3)(5) + (-C+D)(+3)$$

$$-14 = -5A - 15B - 3C + 3D \;; -3C+3D = -3/2$$

$$\begin{cases} C+D = -1/2 \\ -3C+3D = -3/2 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 3C+3D = -3/2 \\ -3C+3D = -3/2 \\ \hline \cancel{} + 6D = -3 \end{array} \;; \; D = -\frac{1}{2} \qquad C = -1/2 - D = 0$$

$$F(s) = \frac{1/4}{s-2} + \frac{3/4}{s} + \frac{-1/2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{F(s)\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$2^2$$

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2t)$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{3}{4}}$$

M2) i) Sea $v(t) = y'(t) \implies v' = y'' \implies v'' = y'''$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea: $v'' + 4v = 4e^{2t}$; cuya solución es: $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$, donde $v_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$, es la solución general de la ecuación homegénea y $v_p(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t}$ es una solución particular. Así pues, la solución general de la ecuación de segundo orden resultante es: $\boxed{v(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{1}{2}e^{2t}}$

ii) Dado que $y'(t) = v(t) \implies y(t) = \displaystyle\int v(t)\mathrm{d}t = \frac{c_1}{2}\sin(2t) - \frac{c_2}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t} + C$;
y teniendo en cuenta que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0\,, y''(0) = 1$, se obtienen:
$c_1 = -\dfrac{1}{2}\,, c_2 = 0\,, C = \dfrac{3}{4}$, por tanto: $\boxed{y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}\sin(2t)}$

Problema 2 (1.5 puntos) .
Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO): $y'' - 4xy' - 4y = e^{\,x}$; se pide:

(a) Asumiendo que la solución de la EDO viene dada por la serie de potencias: $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$; encontrar la relación de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes a_n.

(b) Suponiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, hallar el valor aproximado de la solución de la EDO en el punto $x = 2$, usando solamente los cinco primeros términos de la serie de potencias del apartado (a).

NOTA: Puede ser útil el siguiente resultado: $e^{\,x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Solución:

(a) Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, por tanto

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas series en la EDO, se obtiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 4n\, a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\, x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

donde se ha utilizado el resultado que aparece en la *NOTA* del enunciado.

Para obtener la misma potencia de x en cada serie, cambiamos el índice del sumatorio en la primera serie, dando:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4n\, a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\, x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,;$$

esto equivale a:

$$(2a_2 - 4a_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 4(n+1)\, a_n - \frac{1}{n!} \right] x^n \;=\; 0\,.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x, se tiene que:

$$2a_2 - 4a_0 - 1 = 0\,, \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 4(n+1)\, a_n - \frac{1}{n!} = 0\,,$$

que se puede expresar en la forma:

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2} + 2a_0\,, \quad a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{4}{n+2}\, a_n}\,,$$

con $n = 1, 2, \ldots$.

(b) A partir de la relación de recurrencia obtenida en el apartado (a), obtenemos:

$$a_2 = \frac{1}{2} + 2a_0\,, \quad a_3 = \frac{1}{3!} + \frac{4}{3} a_1\,, \quad a_4 = \frac{13}{4!} + 2a_0\,.$$

Dado que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, se tiene:

$$a_2 = \frac{5}{2}\,, \quad a_3 = \frac{1}{6}\,, \quad a_4 = \frac{61}{24}\,.$$

Por lo que el valor aproximado pedido en el enunciado es:

$$\boxed{y(2) \;\approx\; a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 \;=\; 1 + 0 + 10 + \frac{4}{3} + \frac{122}{3} \;=\; 53}\,.$$

Problema 3 (1.5 puntos) .
Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ty + (t^2 + y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{array} \right. \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

Se pide:

i) Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}$

ii) Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t, y)$ y considerar el esquema numérico:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n))\,, \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n)\,.$$

Demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.

iii) Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

Solución:

i) Se trata de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden no lineal **exacta**, ya que la EDO puede expresarse en la forma $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$, donde $M(t,y) = 2ty$, $N(t,y) = t^2 + y$ y además se verifica $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2t = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.
Por otro lado, dado que el enunciado nos proporciona la solución del PVI, podemos seguir alguno de los siguientes caminos:

UNO.- Comprobamos directamente que, en efecto, la solución aportada satisface las condiciones del PVI.

DOS.- Obtenemos la solución tal como sigue:
Dado que la EDO es exacta, existe una función $F = F(t,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 2ty$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = t^2 + y$, donde $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = 0$.
Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, esto es

$$F = \int (2ty)\, dt = t^2 y + \phi(y) .$$

Para hallar la función $\phi(y)$ derivamos el resultado anterior respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y} = t^2 + y$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y) = y$ y así $\phi(y) = \dfrac{y^2}{2} + C_1$.
Por lo tanto $F = \dfrac{y^2}{2} + t^2 y + C_1$ y de $\dfrac{dF}{dt} = 0$ se llega a que

$$\frac{y^2}{2} + t^2 y = C \Longrightarrow \frac{(y(0))^2}{2} + 0^2 y(0) = C \Longrightarrow C = 2 ,$$

donde hemos tenido en cuenta que $y(0) = -2$.
Finalmente se concluye que $\boxed{y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}}$

ii) Siguiendo las indicaciones del enunciado,

$$y' = f(t,y) = -\frac{2ty}{t^2 + y} \quad \text{y además} \quad y(t_0 = 0) = -2 = y_0 = Y_0$$

Para demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$, calculamos primero $\tilde{Y}_1$ con lo que $\tilde{Y}_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = -2$.
Sustituyendo en el esquema numérico $f(t_1, \tilde{Y}_1) = f(h, -2) = \dfrac{4h}{h^2 - 2}$ junto con $f(t_0, Y_0) = f(0, Y_0) = 0$ se tiene que $Y_1 = -2 + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{4h}{h^2 - 2}\right) = \dfrac{4}{h^2 - 2}$.
Para hallar $Y_2^{h_1 = 0.5}$ que aproxima $y(1)$ sustituimos $h_1 = 0.5$ en la anterior expresión de Y_1 y calculamos una iteración más, con lo que $Y_2^{h_1} = -3.337$.

Problema 3 (1.5 puntos) .
Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} 2ty + (t^2 + y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases} , \quad 0 \le t \le 1$$

Se pide:

i) Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}$

ii) Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t, y)$ y considerar el esquema numérico:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n)\right), \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n).$$

Demostrar que $Y_1 = \frac{4}{h^2 - 2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.

iii) Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

Solución:

i) $\underbrace{2ty}_{M} + \underbrace{(t^2+y)}_{N} y' = 0 \; ; \; y(0) = -2$ EDO 1er orden Exacta

$$\frac{dM(t,y)}{dy} = 2t \qquad \frac{dN(t,y)}{dt} = 2t \qquad \frac{dM(t,y)}{dy} = \frac{dN(t,y)}{dx} \Rightarrow \text{Exacta}$$

$\exists F(t,y)$ que cumple:

$$\begin{cases} \dfrac{dF(t,y)}{dt} = M(t,y) \; ; \; F(t,y) = \int 2ty\,dt = 2y\dfrac{t^2}{\cancel{2}} + h(y) = yt^2 + h(y) \\ \dfrac{dF(t,y)}{dy} = N(t,y) \; ; \; \cancel{t^2} + h'(y) = \cancel{t^2} + y \; ; \; h'(y) = y \; ; \; h(y) = \dfrac{y^2}{2} + 0 \end{cases}$$

$F(t,y) = k \; ; \; yt^2 + \frac{y^2}{2} = k$ Sol. General.

$y(0) = -2 \Rightarrow -2\cdot 0 + \frac{4}{2} = k \; ; \; k = 2$

$$\boxed{\text{Sol. PVI}: \; yt^2 + \frac{y^2}{2} = 2}$$

iii) A partir del primer apartado podemos calcular que $y(1) = -3.236$.
Calculamos $E^{h_1}_{t=1} = \left|Y^{h_1}_2 - y(1)\right| = 0.101$ y $E^{h_2}_{t=1} = \left|Y^{h_2}_{10} - y(1)\right| = 0.003$.
Dado que entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 5$, tenemos que

$$E^{h_2}_{t=1} \approx C h_2^p = C \left(\frac{h_1}{5}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=1}}{5^p},$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 2.19$, con lo que la estimación del orden del método es $\boxed{p = 2}$.

Problema 4 (1.5 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t > 0\,, \;\; 0 < x < \pi/3 \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,, \;\; t > 0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = 2x + 1\,, \;\; 0 \le x \le \pi/3\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; \; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,; \; m \ne n \\ L/2\,; \; m = n \ne 0 \\ L\,; \; m = n = 0 \end{cases}$

Solución:

i) Al aplicar separación de variables, se obtiene que: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, siendo λ la constante de separación. Por tanto: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Problema 4 (1.5 puntos) .

Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t>0\,,\quad 0<x<\pi/3 \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t)=0\,,\quad t>0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0)=2x+1\,,\quad 0\le x\le \pi/3\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t)=X(x)\,T(t)\not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X''+\lambda X=0;\quad X'(0)=0;\; X'(\pi/3)=0;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda\ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2t}\cos(3nx)\,;\quad \text{con } A_n\in\mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6,1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0;\ m\ne n\\ L/2;\ m=n\ne 0\\ L;\ m=n=0\end{cases}$

Proponemos el cambio $u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$

$$\frac{d^2u(x,t)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(X(x)T(t))\right)=\frac{d}{dx}\left(X'(x)T(t)\right)=X''(x)T(t)$$

$$\frac{du(x,t)}{dt}=\frac{d}{dt}(X(x)T(t))=X(x)T'(t)$$

$X''(x)T(t)=X(x)T'(t)$ Para simplif. div. entre $X(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)\cancel{T(t)}}{X(x)\cancel{T(t)}}=\frac{\cancel{X(x)}T'(t)}{\cancel{X(x)}T(t)}\;;\quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda=\frac{T'(t)}{T(t)}$$

$\to \lambda$ es la manera de relacionar las dos var. independientes y por convenio $-\lambda$

P1) $X''(x)+\lambda X(x)=0$; $\lambda>0$; $a^2=\lambda$; $a>0$ EDO 2º orden homogenea coef. ctes.

$$\frac{du(0,t)}{dx}=X'(0)T(t)=0\Rightarrow X'(0)=0$$

$$\frac{du(\pi/3,t)}{dx}=X'(\pi/3)T(t)=0\Rightarrow X'(\pi/3)=0$$

$r^2+a^2=0$; $r=\pm ia$ $\quad B=\{\operatorname{sen}(ax),\cos(ax)\}$ Lin. Ind.

$X(x)=C_1\operatorname{sen}(ax)+C_2\cos(ax)$

$X'(x)=aC_1\cos(ax)-aC_2\operatorname{sen}(ax)$

$X'(0) = aC_1 = 0 \; ; \; C_1 = 0$

$X'(\pi/3) = -\underset{\neq 0}{a}\, \underset{\neq 0}{C_2}\, \text{sen}(a\pi/3) \; ; \; \text{sen}(a\pi/3) = 0 \; ; \; a\pi/3 = \pi n$

$a > 0$ Elijo $X(x) \neq 0$ $\qquad a = 3n \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$

$X_n(x) = C_n \cos(3nx) \qquad \lambda = a^2 ; \; \lambda_n = 9n^2 \; / \; n = 1, 2, 3 \ldots$

ii)

P2) $T'(t) + \lambda T(t) = 0$ EDO lineal 1er orden.

$$\mu(x) = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$$

$e^{\lambda t} T(t) = \int 0 \, dt \; ; \quad e^{\lambda t} T(t) = k \; ; \; T(t) = e^{-\lambda t} k \; / \; k \in \mathbb{R}$ de

$$u_n(x,t) = C_n \cos(3nx) \cdot e^{-9n^2 t} \cdot k$$

Para recoger todas las soluciones:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(3nx)\, e^{-9n^2 t}$$

$$\cancel{u(\pi/6, 1/9) = C_1 \underbrace{\cos(3 \cdot \pi/6)}_{\pi/2} e^{-1} + C_2 \underbrace{\cos(6\pi/6)}_{-1} e^{-4} + C_0}$$

$$\boxed{u(\pi/6, 1/9) = C_0 - \frac{C_2}{e^4} = \frac{\pi}{3} + 1}$$

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx = \frac{\pi}{3} + 1$$

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos(3nx)\, dx = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

Caso 1: $\lambda = 0$

$X'' = 0 \Longrightarrow X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$ Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\lambda = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

Caso 2: $\lambda > 0$

Tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)\,;$ además $X'(x) = -ac_1 \sin(ax) + ac_2 \cos(ax)\,,$ con $c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0\,;\quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1 \sin(a\pi/3) = 0\,,$ imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = (3n)^2 = 9n^2\,;\, n = 1, 2, 3, \cdots}$

ii) Debemos calcular:

$$u(\pi/6, 1/9) \approx A_0 + A_1 e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2 e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(3nx) = f(x) = 2x + 1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1 + \pi/3$$

$$(n \geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x) + \frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6, 1/9) \approx 1 + \frac{\pi}{3}}$