PROBLEMA 7.12

Puesto que $\sqrt{1-z} = 1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + o(z^2)$

se tiene que: $\sqrt{1-x^4} = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7)$

Por tanto, si queremos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - P(x)}{x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7) - P(x)}{x^7} = 0$$

podemos tomar $P(x) = 1 - \frac{x^4}{2}$.

La elección de $P(x)$ no es única. Por ejemplo, independientemente del valor de $a_8, a_9, a_{10}, \dots, a_n$:

$$P(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + a_8 x^8 + a_9 x^9 + \cdots + a_n x^n$$

satisface:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - P(x)}{x^7} = 0 .$$