Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales
Ejercicios de Autómatas a Pila
Tema 6

1. Diseñar un Autómata a Pila para cada uno de los siguientes lenguajes:
   a. $L = \{ a^n \bullet b^n \mid n \geq 0\}$
   b. $L = \{ a^n \bullet b^{2n} \mid n > 0\}$
   c. $L = \{ a^{2n} \bullet b^n \mid n \geq 0\}$
   d. $L = \{ a^{2n} \bullet b^n \mid n > 0\}$
2. Diseñar un Autómata a Pila para cada uno de los siguientes lenguajes:
   a. $L = \{ a^{n+1} \bullet b^n \mid n > 0\}$
   b. $L = \{ a^{2n+1} \bullet b^n \mid n > 0\}$
3. Diseñar un Autómata a Pila para el lenguaje: $L = \{ a^{n+m} \bullet b^{m+t} \bullet a^t \bullet b^n \mid n, t > 0, m \geq 0\}$
4. Diseñar un Autómata a Pila para el lenguaje: $L = \{ a^{n+m} \cdot b^{m+t} \cdot a^t \cdot b^n \mid n, t, m > 0\}$
5. Diseñar, directamente y sin pasar por una AP, una gramática diferente que genere cada uno de los siguientes lenguajes:
   1.a. $L = \{ a^n \bullet b^n \mid n \geq 0\}$
   1.b. $L = \{ a^n \bullet b^{2n} \mid n > 0\}$
   1.c. $L = \{ a^{2n} \bullet b^n \mid n \geq 0\}$
   1.d. $L = \{ a^{2n} \bullet b^n \mid n > 0\}$
   2.a. $L = \{ a^{n+1} \bullet b^n \mid n > 0\}$
   2.b. $L = \{ a^{2n+1} \bullet b^n \mid n > 0\}$
   3. $L = \{a^{n+m} \cdot b^{m+t} \cdot a^t \cdot b^n \mid n, t > 0\ m \geq 0\}$
   4. $L = \{ a^{n+m} \cdot b^{m+t} \cdot a^t \cdot b^n \mid n, t, m > 0\}$

Demuestra que una palabra cualquiera perteneciente a $L(G_i)$ es generada por la gramática, indicando la ruta de derivación entre formas sentenciales; y que la misma palabra es reconocida por el autómata AP_i equivalente de los ejercicios anteriores, indicando los movimientos entre descripciones instantáneas.

6. Diseñar un autómata a pila que reconozca el lenguaje de las expresiones aritméticas con el siguiente alfabeto $\Sigma=\{ 0, 1 , + , * , (,) \}$

7. Obténgase el AP_V correspondiente a la gramática G_{FNG}=({a,b,c,d}, {S,A,B}, S, P), con las siguientes reglas de producción:

   S ::= a S B | b A | b | d
   A ::= b A | b
   B ::= c

8. Obtener formalmente el AP_f equivalente para cada uno de los AP_V indicados:

   a. [Isasi, Martínez, Borrajo; págs. 258] APv_a=({1,2}, {A,B,B',C}, {q}, A, q, f, {Φ}), donde f viene dada por:

      f(q,2,A) = (q, BC)
      f(q,1,A) = (q,B)
      f(q,λ,A) = (q, λ)
      f(q,1,B) = {(q,B'), (q,C), (q, λ)}
      f(q,2,B') = {(q,B'), (q,C)}
      f(q,2,C) = (q, λ)

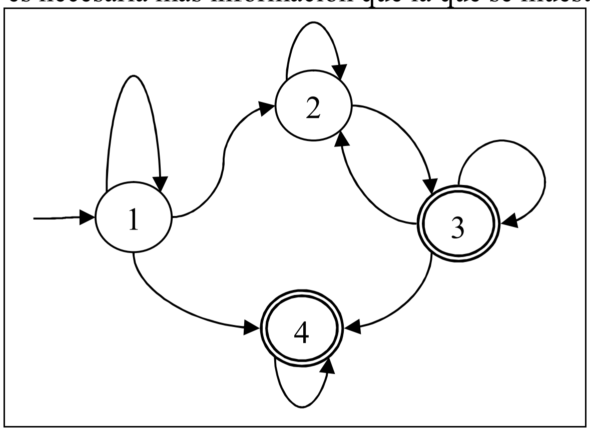
   b. [Isasi, Martínez, Borrajo; págs. 272-73] APv_b=({x,y}, {A,B,C,S}, {q}, S, q, f, {Φ}), donde f viene dada por:

      f(q,x,S) = {(q,AC), (q,BCC), (q,C), (q,CC)}
      f(q,λ,S) = (q, λ)
      f(q,x,A) = {(q,AA), (q,C)}
      f(q,x,B) = {(q,BCC), (q,CC)}
      f(q,x,C) = (q, λ)

9. Obtener formalmente el APv equivalente para cada uno de los AP_f indicados:

   a. APf_a=(Σ, {0,1,A0}, {1,2,3,4}, A0, 1, f, {3,4}), donde f viene dada por:

      Nota: no es necesaria más información que la que se muestra en el grafo.



   b. [Fragmento problema examen Febrero 1999] APf_b=({a,b}, {A,B}, {q1,q2,q3,q4}, A, q1, f, {q4}), donde f viene dada por:

      f(q1,a,A) = {(q2,BA), (q4,A)}
      f(q1,λ,A) = {(q4, λ)}
      f(q2,a,B) = {(q2,BB)}
      f(q2,b,B) = {(q3, λ)}
      f(q3,λ,A) = {(q4,A)}
      f(q3,b,B) = {(q3, λ)}

10. Obtener formalmente la G2 que genera el mismo lenguaje que reconoce cada uno de los APv indicados:
    a. [Alfonseca – Libro básico 4 págs. 230-231] APv_a=({a,b}, {A,B}, {p,q}, A, p, f, {Φ}), donde f viene dada por:

       f(p,a,A) = (p,BA)
       f(p,a,B) = (p,BB)
       f(p,b,B) = (q, λ)
       f(q,b,B) = (q, λ)
       f(q,λ,B) = (q, λ)
       f(q,λ,A) = (q, λ)

    b. [Isasi, Martínez, Borrajo; AP_1, págs. 250 y 261] APv_b=({0,1}, {A,1,0}, {q0,q1}, A, q0, f, {Φ}), donde f viene dada por:

       f(q0,1,A) = (q0,1A)
       f(q0,1,1) = (q0,11)
       f(q0,0,1) = (q1, λ)
       f(q1,0,1) = (q1, λ)
       f(q1,λ,A) = (q1, λ)

Demostrar que una palabra cualquiera perteneciente a $L(AP_i)$ es reconocida por el autómata, indicando los movimientos entre descripciones instantáneas; y que la misma palabra es generada por la gramática obtenida, indicando la ruta de derivación entre formas sentenciales.

11. Obtener formalmente el APv que reconoce el mismo lenguaje que genera cada una de las G2 indicadas:
    a. [Isasi, Martínez, Borrajo; G_{13}'', págs. 258] G_a=({1,2}, {A,B,B',C}, A, p), donde p viene dada por:

       p={ A::=2BC | 1B | λ
       B::=1B' | 1C | 1
       B'::=2B' | 2C
       C::=2
       }

    b. [Isasi, Martínez, Borrajo; Ejercicio 4.9, págs. 272-274] G_b=({x,y}, {A,B,C,S}, S, p), donde p viene dada por:

       p={ S::=xAC | xBCC | xC | xCC | λ
       A::=xAA | xC
       B::=xBCC | xCC
       C::=y
       }

Demostrar que una palabra cualquiera perteneciente a $L(G_i)$ es generada por la gramática, indicando la ruta de derivación entre formas sentenciales; y que la misma palabra es reconocida por el autómata AP_i obtenido, indicando los movimientos entre descripciones instantáneas.

12. Marque las afirmaciones verdaderas:
    a. Al obtener una G2 a partir de un APf, ésta se encontrará en FNG.
    b. Es posible que una G3 pueda ser transformada a APv.
    c. Dado un AP no determinista, existen algoritmos para transformarlo en AP determinista.
    d. En un AP determinista, dado un estado, un símbolo leído y un símbolo en la cima de la pila, transitaremos al mismo estado, pudiendo apilar dos conjuntos diferentes de símbolos.
13. Marque las afirmaciones verdaderas:
    a. Dado un movimiento en un AP, es posible determinar el par (imagen, antiimagen) de la función de transición correspondiente.
    b. Los autómatas de pila por vaciado no pueden transformarse en autómatas de pila por estados finales.
    c. Los autómatas de pila por estados finales reconocen una palabra cuando la pila está vacía y no queda nada por leer en la entrada.
    d. Los autómatas de pila por estados finales no son nunca deterministas.
14. Marque las afirmaciones verdaderas:
    a. (p,a,A;p,Z) indica que se apila un solo símbolo Z.
    b. (p,a,A;p,Z) indica que se desapila A.
    c. (p,a,A;p,A) indica que la pila queda igual tras la transición.
    d. (p,a,λ;p,λ) indica que la pila queda igual tras la transición.

15. Marque las afirmaciones verdaderas:
    a. f(q, λ,A) = {(q, λ)}es una transición independiente de la entrada.
    b. La descripción instantánea (q, λ,□ λ) en un autómata de pila que reconoce por vaciado indica que hemos llegado al final de la palabra con la pila vacía.
    c. El alfabeto de pila y el alfabeto de entrada de un autómata de pila son conjuntos disjuntos.
    d. La transición f(q,a, A)={ (q2, z1),(q1, z1) } nos indica que el autómata de pila es no determinista.
16. Describa las funciones de transición que dan lugar a los siguientes movimientos:

    (p,1001, A) |- (p, 001,1A) |- (p, 01, 01A) |- (q, 1, 1A) |- (q, λ, A) |- (q, λ, λ)

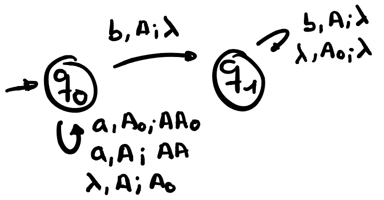
17. [Isasi, Martínez, Borrajo; págs. 272-320] Ejercicios del 4.9 al 4.25. Transformaciones entre APv, APf y G.

18. Obtener el AP correspondiente a la siguiente gramática.

    G = (Σ_T, Σ_N, A, P), P= { A ::= a B A | b , B ::= b A B | a}

1) AP

a) $L = \{a^n b^n / n \geq 0\}$



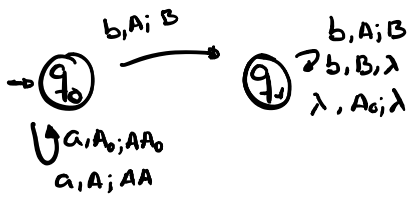
$AP = (\{a, b\}, \{A, A_0\}, A_0, \{q_0, q_1\}, q_0, f, \emptyset)$

$F = \{ f(q_0, a, A) = (q_0, AA), f(q_0, b, A) = (q_1, \lambda)$

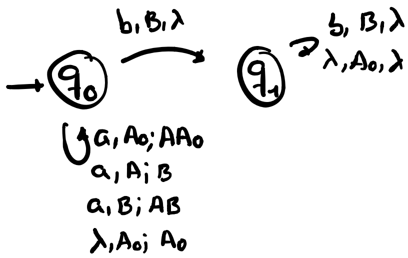
$f(q_0, a, A_0) = (q_0, AA_0), f(q_1, b, A) = (q_1, \lambda)$

$f(q_0, \lambda, A_0) = (q_0, \lambda), f(q_1, \lambda, A_0) = (q_1, \lambda) \}$

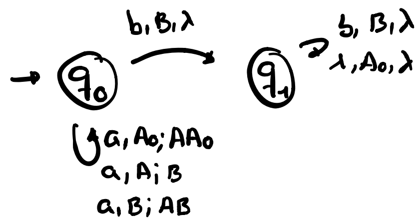
b) $L = \{a^n \cdot b^{2n} / n > 0\}$



c) $L = \{a^{2n} \cdot b^n / n \geq 0\}$

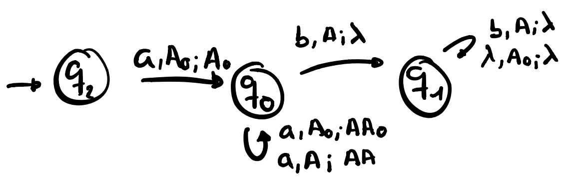


d) $L = \{a^{2n} \cdot b / n > 0\}$

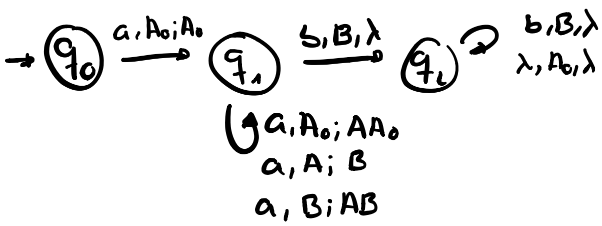


2)

a) $L = \{a^{n+1} \cdot b^n / n > 0\}$ aab

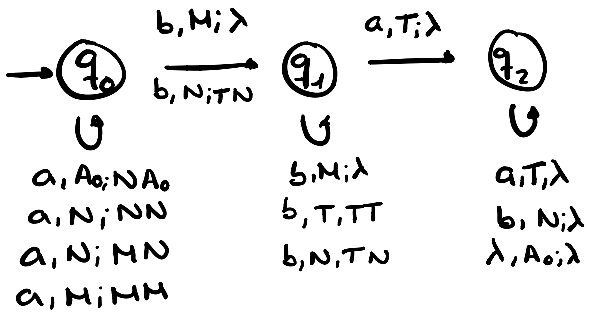


b) $L = \{a^{2n+1} \cdot b^n / n > 0\}$



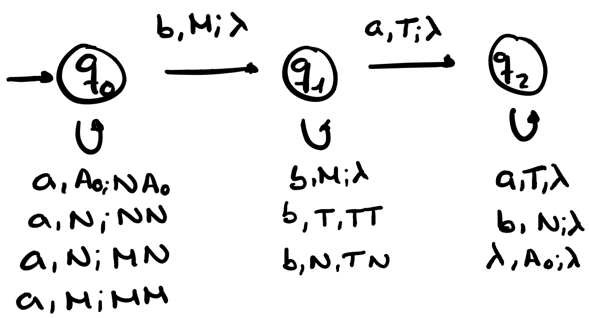
3) $L = \{ a^{n+m} \cdot b^{m+t} \cdot a^{t} \cdot b^{n} \,/\, n,t>0,\ m\geq 0 \}$ $\quad a\,\underbrace{b\,\underbrace{}\,a}\,b$

$a^{n} \cdot a^{m} b^{m} \, b^{t} a^{t} \, b^{n}$



4) $L = \{ a^{n+m} \cdot b^{m+t} \cdot a^{t} \cdot b^{n} \,/\, n,t,m>0 \}$ $\quad aab\,bab$

$a^{n} \cdot a^{m} b^{m} \, b^{t} a^{t} \, b^{n}$



5)

1.a) $a^n b^n / n\geq 0$ $\quad S \to \lambda / aSb$

1b) $a^n b^{2n} / n>0$ $\quad S \to abb / aSbb$

1c) $a^{2n} b^n / n\geq 0$ $\quad S \to \lambda / aaSb$

1d) $a^{2n} b^n / n>0$ $\quad S \to aab / aaSb$

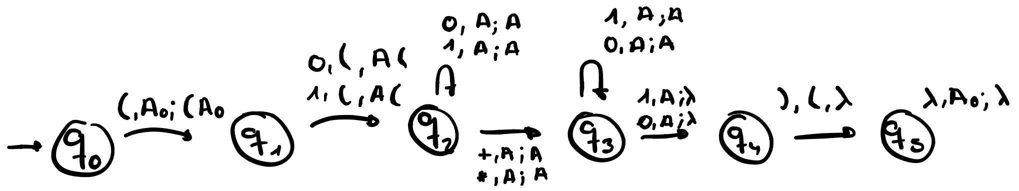
2a) $a^{n+1} b^n / n>0$ $\quad S \to aA \quad A \to aAb / ab$

2.b) $a^{2n+1} b^n / n>0$ $\quad S \to aA \quad A \to aab / aaAb$

3) $a^{n+m} b^{m+t} a^t b^n / n,t>0,\ m\geq 0$ $\quad S \to aXb / aSb \quad X \to B / AB \quad A \to ab / aAb \quad B \to ba / bBa$

4) $a^{n+m} b^{m+t} a^t b^n / n,t,m>0$ $\quad S \to aXb / aSb \quad X \to AB \quad A \to ab / aAb \quad B \to bBa / ba$

6)



7) GFNG → AP_v

$GFNG = (\{a, b, c, d\}, \{S, A, B\}, S, P\}$ $AP_v = (\{a, b, c, d\}, \{S, A, B\}, S, \{q\}, q, f, \emptyset\}$

$P = \{ S \to aSB / bA / b / d,$

$A \to bA / b,$

$B \to c \}$

$f = \{ f(q, a, S) = f(q, SB)$ $f(q, b, S) = (q, A),$

$f(q, b, S) = f(q, \lambda),$ $f(q, d, S) = (q, \lambda),$

$f(q, b, A) = f(q, A),$ $f(q, b, A) \to f(q, \lambda),$

$f(q, c, B) = f(q, \lambda) \}$

8)

a) $AP_f = (\{1, 2\}, \{A, B, B', C, D\}, \{q, p, r\}, D, p, f, \{r\})$

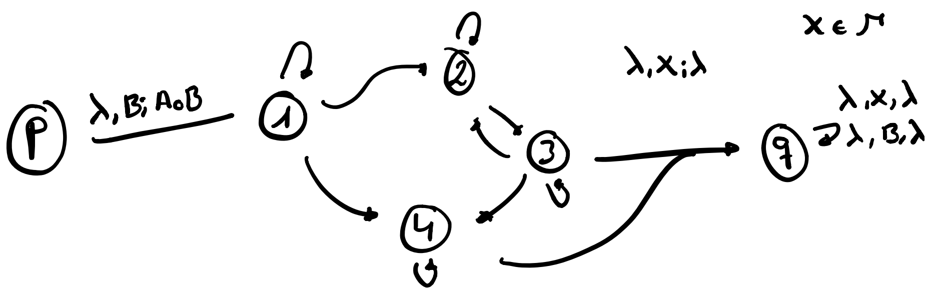
$f = \{$ Las de antes $\} \cup \{ f(p, \lambda, D) = f(q, AD), f(q, \lambda, D) = f(r, \lambda) \}$

b) $AP_f = (\{x, y\}, \{A, B, C, S, D\}, \{q, p, r\}, D, p, f, \{r\})$

$f = \{$ Anteriores $\} \cup \{ f(p, \lambda, D) = (q, S, SD), f(q, \lambda, D) = (r, \lambda) \}$

9) $AP_f \to AP_v$

a) $AP_v = (\Sigma, \{0, 1, A0, B\} \{1, 2, 3, 4, p, q\}, B, p, \{\emptyset\})$



b) $AP_v = (\{a, b\}, \{A, B, C\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4, p, r\}, C, p, f, \{q_4\})$

$f = \{$ Anteriores $\} \cup \{ f(p, \lambda, C) = (q_1, AC), f(q_4, \lambda, X) = (r, \lambda), f(r, \lambda, x) = (r, \lambda) \}$

$X \in \Gamma$

10) $AP_v \to G2 = (\Sigma_T, \Sigma_{NT}, S, F)$

a) $G2 = (\{a, b\}, \{\overset{A}{pAp}, \overset{B}{pAq}, \overset{C}{qAp}, \overset{D}{qAq}, \overset{E}{pBp}, \overset{F}{pBq}, \overset{G}{qBp}, \overset{H}{qBq}, S\}, S, F\}$

$F = \{\ S \to \overset{A}{pAp} / \overset{B}{pAq},$ $\qquad S \to A/B$

$pAp \to a(pBp)(pAp) / a(pBq)(qAp)$ $\qquad A \to aEA / aFC$

$pAq \to a(pBp)(pAq) / a(pBq)(qAq)$ $\qquad B \to aEB / aFD$

$pBp \to a(pBp)(pBp) / a(pBq)(qBp)$ $\qquad E \to aEE / aFG$

$pBq \to a(pBp)(pBq) / a(pBq)(qBq)$ $\qquad F \to aEF / aFH$

$pBq \to b$ $\qquad F \to b$

$qBq \to b$ $\qquad H \to b/\lambda$

$qBq \to \lambda$ $\qquad D \to \lambda$

$qAq \to \lambda$

b) $G2 = (\{0, 1\}, \{S, \overset{A}{q_0Aq_0}, \overset{B}{q_0Aq_1}, \overset{C}{q_1Aq_0}, \overset{D}{q_1Aq_1}, \overset{E}{q_01q_0}, \overset{F}{q_01q_1}, \overset{G}{q_11q_0}, \overset{H}{q_11q_1},$
$\overset{I}{q_00q_0}, \overset{J}{q_00q_1}, \overset{K}{q_10q_0}, \overset{L}{q_10q_1}\}, S, F\}$

$F = \{\ S \to q_0Aq_0 / q_0Aq_1,$ $\qquad S \to A/B$ Rede

$q_0Aq_0 \to 1(q_01q_0)(q_0Aq_0) / 1(q_01q_1)(q_1Aq_0)$ $\qquad A \to 1EA / 1FC$

$q_0Aq_1 \to 1(q_01q_0)(q_0Aq_1) / 1(q_01q_1)(q_1Aq_1)$ $\qquad B \to 1EB / 1FH$

$q_01q_0 \to 1(q_01q_0)(q_01q_0) / 1(q_01q_1)(q_11q_0)$ $\qquad E \to 1EE / 1FG$

$q_01q_1 \to 1(q_01q_0)(q_01q_1) / 1(q_01q_1)(q_11q_1)$ $\qquad F \to 1$

$q_01q_1 \to 0$ $\qquad F \to 0$

$q_11q_1 \to 0$ $\qquad H \to 0$

$q_1Aq_1 \to \lambda$ $\qquad D \to \lambda$

11)

a) $AP_v = (\{1, 2\}, \{A, B, B', C\}, \{q\}, A, q, f, \{\emptyset\})$

$f = \{ f(q, 2, A) = (q, BC),\ f(q, 1, A) = (q, B),\ f(q, \lambda, A) = (q, \lambda),$
$f(q, 1, B) = (q, B'),\ f(q, 1, B) = (q, C),\ f(q, 1, B) = (q, \lambda),$
$f(q, 2, C) = (q, \lambda) \}$

b) $AP_v = (\{x, y\}, \{A, B, C, S\}, \{q\}, S, q, f, \{\emptyset\})$

$f = \{ f(q, x, S) = (q, AC),\ f(q, x, S) = (q, BCC),\ f(q, x, S) = (q, C),$
$f(q, x, S) = (q, CC),\ f(q, \lambda, S) = (q, \lambda),\ f(q, x, A) = (q, AA)$
$f(q, x, A) = (q, C),\ f(q, y, C) = (q, \lambda) \}$

12)

a) b) ~~c)~~ ~~d)~~

13)

a) ~~b)~~ ~~c)~~ ~~d)~~

14)

~~a)~~ b) c) d)

15)

a) b) ~~c)~~ d)

16)

$f(p, 1, A) = (p, 1A),\ f(p, 0, 1) = (p, 01),\ f(p, 0, 0) = (q, \lambda),\ f(q, 1, 1) = (q, \lambda),$
$f(q, \lambda, A) = (q, \lambda)$

17) Libro

18) $G \to AP$

$AP = (\Sigma_T, \Sigma_{NT}, \{q\}, A, q, f, \{\emptyset\})$

$f = \{ f(q, a, A) = (q, BA), f(q, b, A) = (q, \lambda), f(q, b, B) = (q, AB),$

$f(q, a, B) = (q, \lambda) \}$