Autovalores y autovectores

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

a) **Definición 1.-** *Sea A una matriz cuadrada con elementos de un cuerpo conmutativo K, se llama autovector (vector propio) de A todo vector x de* K^n *tal que existe un escalar* λ *de K verificando:*

$$Ax = \lambda x$$

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Definición 2.- “Si A es una matriz cuadrada con elementos de un cuerpo conmutativo K, se llama autovalor (valor propio) de A todo elemento de K tal que existe un vector x de K^n verificando:

$$Ax = \lambda x$$

Al conjunto de todos los autovalores de A se le llama espectro de A y se escribe

$$\sigma(A)$$

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Teorema 1.- Dada una matriz cuadrada A sobre K:

- A todo autovector de A corresponde un autovalor único, llamado autovalor asociado a x.

- A todo autovalor de f corresponde un subespacio vectorial $V(\lambda)$ de K^n, que está descrito por los vectores x de K^n que verifican $Ax = \lambda x$, se le llama el subespacio propio asociado a λ".

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

b) *Propiedades de los autovalores y de los autovectores de una matriz cuadrada. Polinomio característico y ecuación característica.*

Teorema 2.- *"Dado una matriz cuadrada A sobre K, para de K, las propiedades siguientes son equivalentes:*

1.- λ *es un autovalor de A.*

2.- $A-\lambda I_n$ *no es invertible.*

3.- $\det\left(A-\lambda I_n\right)=0$

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Definición 3.- *Si A es una matriz cuadrada de orden n con elementos de un cuerpo conmutativo K, se llama polinomio característico de A al polinomio en* λ *de grado n*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Y se llama ecuación característica a la ecuación

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Teorema 3.- *"Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal."*

Teorema 4.- *"Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si 0 no es autovalor de A."*

Teorema 5.- *"Si λ es autovalor de A y x un autovector asociado, entonces:*

a) Para n natural, λ^n es autovalor de A^n con autovector x.

b) Si A es invertible, entonces es λ^{-1} autovalor de A^{-1} con autovector x

c) Para n entero, λ^n es autovalor de A^n con autovector x.

AUTOVECTORES (VECTORES PROPIOS) Y AUTOVALORES (VALORES PROPIOS) DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Teorema 6.- *Los subespacios vectoriales* $V(\lambda_1)$ *y* $V(\lambda_2)$ *asociados a dos autovalores distintos de una matriz cuadrada A, sólo tienen en común el vector nulo.*

Teorema 7.- *Siendo A una matriz cuadrada, que admite m autovalores distintos dos a dos,* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, *el sistema de vectores* $\{x_i\}$ *(i = 1, ..., m), de autovalores no nulos asociados a* λ_i *es libre*

Corolario.- *"Toda matriz cuadrada de orden n tiene como máximo n autovalores distintos dos a dos"*

Teorema 8.- *"Si A es una matriz cuadrada de orden n, los autovalores de A son las raíces de su polinomio característico. Existen n como máximo. Si K es algebraicamente cerrado, A posee n autovalores distintos o confundidos"*

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

Definición 4 (matrices semejantes).- *Se dice que dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes, si están asociadas a la misma aplicación lineal f pero respecto a dos bases diferentes. Es decir, existe una matriz P de cambio de base que verifica:*

$$AP = PB \qquad \text{equivalente a} \qquad P^{-1}AP = B$$

Propiedades (inmediatas).-

(1) La relación de semejanza de matrices es de equivalencia.

(2) det(A) = det(B).

(3) A es invertible si y sólo si B es invertible.

(4) $rg(A) = rg(B)$.

(5) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

(6) $\sigma(A) = \sigma(B)$.

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

Definición 5 (matrices diagonalizables).- *"Se dice que una matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz diagonal D, del mismo orden, emejante a A. Es decir, existe una matriz P de cambio de base que verifica:*

$$AP = PD \qquad \text{equivalente a} \qquad P^{-1}AP = D\text{"}$$

Teorema 9.- *"A es diagonalizable si y sólo si, A tiene n autovectores linealmente independientes, es decir , se puede formar una base del espacio vectorial de referencia formado por autovectores de A"*

Demostración.- Sea A diagonalizable, es decir, existe una base respecto de la cual, la matriz A se puede escribir:

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

con polinomio característico $p_A(x) = (\mu_1 - x)\cdots(\mu_i - x)\cdots(\mu_n - x)$,

luego $\mu_i, i = 1,\ldots,n$ son los autovalores de A, y son las raíces de p,

que están en el cuerpo K. Además, existen $a_i, i = 1,\ldots,n$, tales que:

$$Aa_i = \mu_i a_i, i = 1,\ldots,n$$

o bien, en forma matricial:

$$\left[Aa_1\ Aa_2 \cdots Aa_n\right] = \left[a_1\ a_2 \cdots a_n\right] \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{bmatrix} \qquad (\ *\ )$$

Es decir son n vectores propios de A (base, pues, de E)

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

Recíprocamente, supongamos que se puede hallar una base de E formada por vectores propios de A, es decir que se verifique

$$Aa_i = \mu_i a_i,\ i = 1,\ldots,n$$

lo que es equivalente a la expresión (*) anterior, con matriz asociada diagonal.

Teorema 10.- *"Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son k autovalores distintos ($k \leq n$) de *A, y* B_i *es una base del subespacio propio , entonces* $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ es un sistema libre*"*

Teorema 11 y definición 6 .- *"Si A es una matriz cuadrada de orden n y si su polinomio característico admite una raíz múltiple* λ *de orden k, se tiene* $1 \leq \dim V(\lambda) \leq k$ *. El valor* $\dim V(\lambda)$ *recibe el nombre de multiplicidad geométrica del autovalor "*

Demostración.- Supongamos que $\lambda \in K$ es una raíz del polinomio característico asociado, es decir $p_A(\lambda) = 0$ y x un vector propio asociado ($Ax = \lambda x$). Sea $B = \{a_i\}_{i=1}^{n}$ una base del espacio vectorial de referencia E. Es decir: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ donde las x_i son las coordenadas de x respecto de la base B.

Así que x_i serán las soluciones del sistema homogéneo:

$$\left(A - \lambda I_n\right) x = 0$$

con soluciones no triviales, es decir que:

$$r = rg\left(A - \lambda I_n\right) < n \quad \text{y} \quad \dim V(\lambda) = n - r$$

Como $V(\lambda) \neq \{0\}$, entonces $1 \leq \dim V(\lambda)$

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

Supongamos que $\dim V(\lambda) = h$ (multiplicidad geométrica); sea $\{a_1, \ldots, a_h\}$ una base de $V(\lambda)$, que serán, por tanto, vectores propios asociados al valor propio λ.

Luego la matriz asociada a f respecto de la base será:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_h & A' \\ 0 & A'' \end{bmatrix}$$

escrita por bloques, donde A' es de orden h x (n-h) , y A'' es cuadrada de orden (n-h) .

Luego el polinomio característico será:

$$p_A(x) = (\lambda - x)^h \det(A'' - xI_{n-h})$$

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

Luego $$h \leq k \quad \Rightarrow \quad \dim V(\lambda) \leq k$$

Es decir la multiplicidad geométrica asociada a cada autovalor es menor o igual que la multiplicidad algebraica de ese autovalor.

Teorema 12 (teorema de la diagonalización).- *"Los enunciados siguientes son equivalentes*

(1) Una matriz cuadrada A de orden n, es diagonalizable.

(2) La unión B de las bases de los subespacios propios de A contiene n vectores.

(3) Las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para cada autovalor, es decir:

$$m_{alg}(\lambda_i) = m_{geom}(\lambda_i)$$

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

Teorema 13.- *"Si una matriz cuadrada de orden n sobre K, posee n autovalores distintos en K, A es diagonalizable".*

Corolario.- *"Siendo A una matriz cuadrada de orden n con elementos de K, si K es algebraicamente cerrado, para que A sea diagonalizable es suficiente que todas las raíces de su polinomio característico sean simples"*