INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE GESTIÓN CURSO 06/07

EXAMEN DE FÍSICA

(1 de febrero de 2007)

Este examen consta de **cinco** problemas. Cada problema debe entregarse en una hoja por **separado**. Deben entregarse **todos** los problemas, aunque no se hayan resuelto (entregar hoja en blanco con el nombre y el número de problema no realizado). **Indicar nombre, apellidos y grupo en todas las hojas del examen**. La puntuación de cada problema viene indicada al principio del enunciado.

1) (20 puntos) Tres cargas puntuales q_1, q_2 y q_3 se hallan sobre los vértices de un triángulo equilátero de 60 cm de lado, de forma que q_1 y q_2 se sitúan sobre el eje Y y q_3 en el eje X positivo.

a) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre la carga $q_3 = 4 \times 10^{-6}$ C cuando $q_1 = q_2 = 2 \times 10^{-6}$ C.

b) Hallar la fuerza electrostática total sobre la carga q_3.

c) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre la carga $q_3 = 4 \times 10^{-6}$ C cuando $q_1 = 2 \times 10^{-6}$ C y $q_2 = -2 \times 10^{-6}$ C.

d) En este último caso, calcular el potencial eléctrico en el punto central entre el origen y q_3.

2) (20 puntos) Sea una distribución esférica de carga de radio R_1 = 10 cm y densidad volumétrica de carga $\rho = -1\mu C/m^3$ rodeada de una corona esférica conductora de radio interno R_2 = 25 cm y radio externo R_3 = 30 cm. Si la corona conductora está conectada a una batería de 50 V:

a) Determina el campo eléctrico en todas las regiones del espacio.

b) Determina el valor del potencial en el punto $r = R_2$ y en un punto $r > R_3$. Si la densidad de carga de la esfera interna fuera positiva ($\rho = +1\mu C/m^3$), ¿cuál sería el valor del potencial en $r = R_2$?

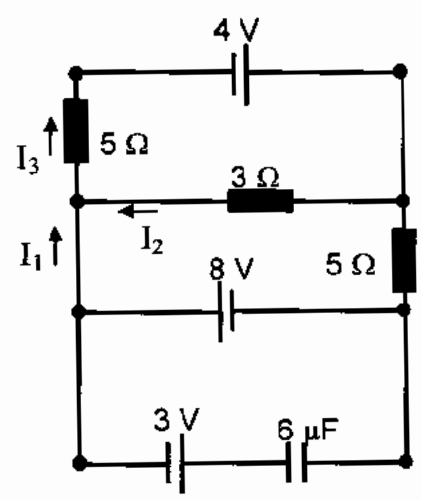
c) Desconectamos la batería de la corona y la conectamos con un hilo conductor a una esfera conductora alejada con un radio de 10 cm y una carga de 1nC. Determinar, una vez alcanzado el equilibrio, el potencial de la esfera y la corona conductora así como sus cargas.

d) En la condición de equilibrio anterior, determinar el valor del potencial en $r = R_1$ y el valor de la densidad de carga superficial en la superficie interna de la corona conductora.

3) (20 puntos) En el circuito de la figura se conocen los valores de las resistencias, los potenciales de las fuentes y la capacidad del condensador. Determinar:

a) el valor de las corrientes I_1, I_2 e I_3. Tener en cuenta que una vez alcanzado el equilibrio (condensador cargado) el condensador es un circuito abierto para el paso de la corriente continua; esto hace que en la rama inferior del circuito donde se encuentra conectado el condensador la corriente sea cero.

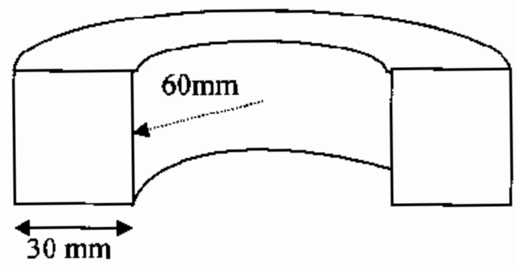
b) el valor de la carga en el condensador. Tener en cuenta que cuando se alcanza el equilibrio el condensador se ha cargado al máximo de su carga; suponer que las pérdidas en él mismo son despreciables.



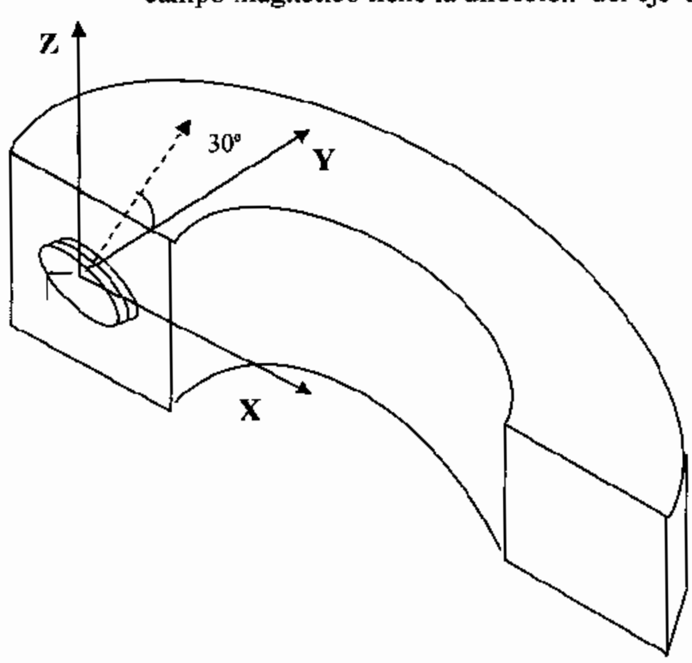
4) (20 puntos) Un condensador plano-paralelo, cuyas armaduras tienen un área de 20 cm^2 y están separadas 2 cm, se conecta a una fuente de 60 V. A continuación, se desconecta la fuente de alimentación y se introduce una lámina de mica de constante dieléctrica $\varepsilon_r = 5$ que llena completamente el espacio entre las placas del condensador. Calcula:

a) Capacidad del condensador antes y después de introducir la lámina de mica.
b) Diferencia de potencial existente entre las placas, una vez insertada la lámina de mica.
c) Campo electrostático en el interior del condensador antes de introducir la mica.
d) La diferencia de energía electrostática que sufre el condensador al introducir la mica.

5) (20 puntos) Un toroide de sección cuadrada, de 30 mm de lado y radio interior 60 mm, tiene 200 vueltas que portan una corriente de 1.5 mA cada una.



a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en el centro del toroide?
b) Supóngase ahora que la corriente en el toroide viene dada por $I = I_0 \cos \omega t$ y que situamos dentro de él una espira de sección circular de 3 vueltas y 10 mm de radio, de tal forma que el eje de la espira forma un ángulo de 30° con el campo magnético del toroide. Calcular la corriente inducida en la espira en el instante t = 8s, sabiendo que su resistencia es 0.2 Ω. Suponed que el campo en el interior del toroide tiene módulo constante e igual al obtenido en el apartado anterior. (Tomad I_0 = 5mA y ω = 50 rad/s)
c) Si la corriente en el toroide recobra su valor inicial de 1.5mA y en la espira se tiene, asimismo, una corriente estacionaria de 0.5mA, manteniendo su eje la orientación de 30° con respecto al campo magnético del toroide, hallar el momento del par que ejerce el toroide sobre la espira, para el sistema de coordenadas fijo a la sección del toroide que se indica en la figura, sabiendo que el eje de la espira está en el plano YZ y que el campo magnético tiene la dirección del eje Y positivo.



CONSTANTES:

Permitividad del vacío $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ $C^2 N^{-1} m^{-2}$

Permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $N A^{-2}$

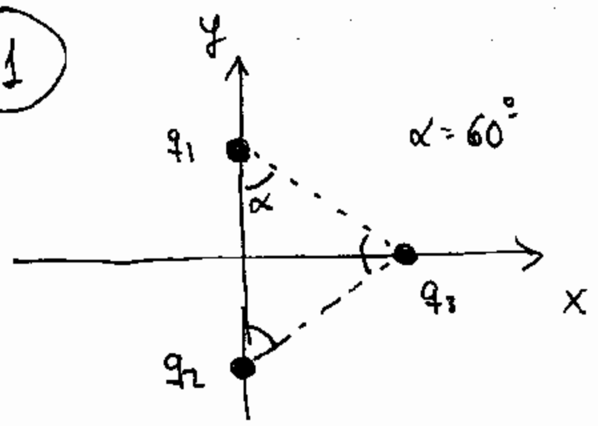
Carga del electrón: -1.6×10^{-19} C

Masa del electrón: 9.1×10^{-31} Kg

Carga del protón: $+1.6 \times 10^{-19}$ C

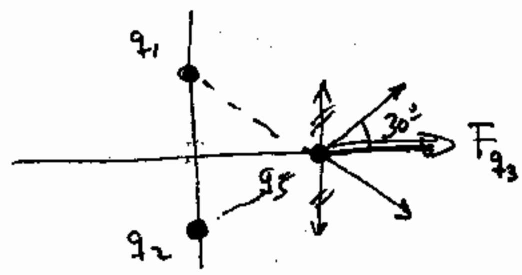
Masa del Protón: 1.67×10^{-27} Kg

1



$d(q_1,q_2) = 0'6$ m
$d(q_1,q_3) = 0'6$ m
$d(q_2,q_3) = 0'6$ m

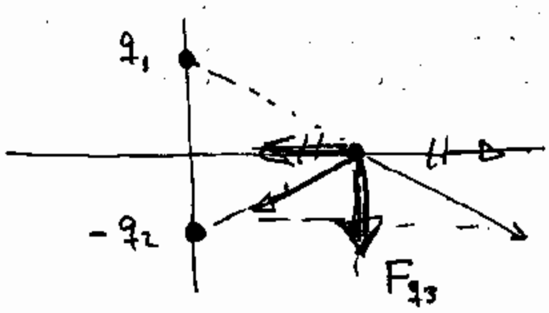
a) $q_1 = q_2 = 2\cdot 10^{-6}$ C
$q_3 = 4\cdot 10^{-6}$ C



b) $\vec{F}_{q_1} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{(0,6)^2} \cdot \cos 30° \; \vec{i} = \vec{F}_{q_2}$ ya que $q_1 = q_2$

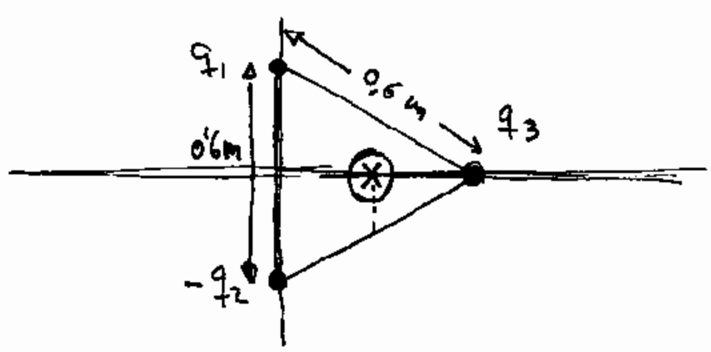
$$\vec{F}_{T(q_3)} = 2 \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{2\cdot 10^{-6} \cdot 4\cdot 10^{-6}}{(0,6)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \; \vec{i} = 0,346 \text{ N}$$

c)



Dirección $-Y$

d)



$$V_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1} \qquad V_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_2} \qquad V_3 = k \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

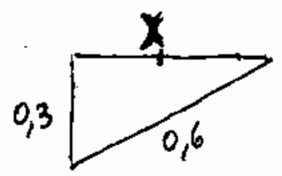
$$V_{TOTAL} = \sum V_i = V_1 + V_2 + V_3$$

$q_1 = 2 \cdot 10^{-6}\,C$ $\qquad r_1 =$

$q_2 = -2 \cdot 10^{-6}\,C$ $\qquad r_2 =$

$q_3 = 4 \cdot 10^{-6}\,C$ $\qquad r_3 = 0{,}26\ m$

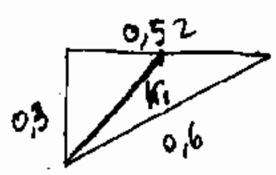
r_3



$x^2 + 0{,}3^2 = 0{,}6^2 \Rightarrow x = \sqrt{0{,}6^2 - 0{,}3^2} = 0{,}52\ m$

punto medio $r_3 = 0{,}52/2 = 0{,}26\ m$

r_1, r_2



$r_1^2 = 0{,}3^2 + 0{,}26^2 \Rightarrow r_1 = 0{,}40\ m$

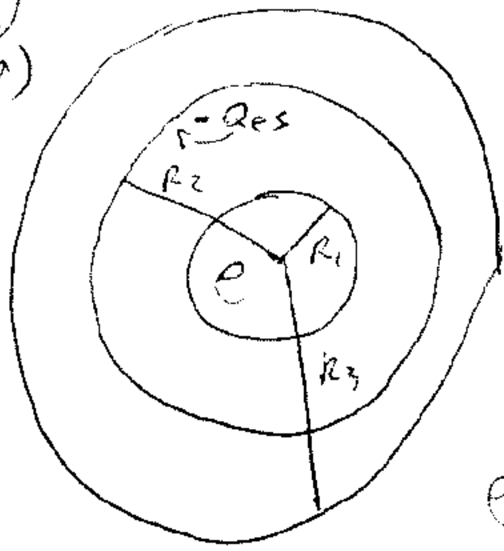
(hipotenusa)

$$V_{TOTAL} = k\left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}4} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}4} + \frac{4 \cdot 10^{-6}}{0{,}26}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\left(\cancel{\frac{1}{0{,}4}} - \cancel{\frac{1}{0{,}4}} + \frac{2}{0{,}26}\right) =$$

$$= 1{,}38 \cdot 10^5\ V$$

2

a)



La esfera interior no es conductora porque nos dan una distribución volumétrica de carga (ρ)

La carga total que contiene esta esfera es:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho\, dV$$

$$\boxed{Q_{es}} = \int \rho\, dV = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 = -10^{-6}\,\frac{4}{3}\pi\,(0{,}1)^3 = \boxed{-4{,}19\,nC}$$

La corona conductora está conectada a una batería de 50 V. Esto implica que la carga en su superficie externa (R_3) es:

$$V = K\frac{Q_{cor}}{R_3} \Rightarrow \boxed{Q_{cor}} = \frac{V R_3}{K} = \frac{50\cdot 0{,}3}{9\cdot 10^9} = \boxed{1{,}67\,nC}$$

Recordad que para que el campo eléctrico sea cero en el interior de la corona conductora se induce una carga igual a $-Q_{es}$ en la superficie interna (R_2) de dicha corona.

Con los datos anteriores pasamos a resolver el apartado a) aplicando la ley de Gauss.

$r < R_1$ $\Rightarrow$ estamos en el interior de la esfera interna

$$\int \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,\cancel{4\pi} r^{\cancel{2}} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r = -37664{,}8\, r\, \vec{u}_r \ N/C$$

1

Si $R_1 < r < R_2$

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r = \frac{-37{,}7}{r^2}\,\vec{u}_r \ N/C$$

Si $R_2 < r < R_3 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow$ Interior del <u>conductor</u>

Si $r > R_3$

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{\cancel{Q_{es}} - \cancel{Q_{es}} + Q_{cor}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q_{cor}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r = \frac{1{,}67\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r = \frac{15}{r^2}\,\vec{u}_r \ N/C$$

b) El punto $r = R_2$ está en la corona <u>conductora</u> y, por lo tanto, como el potencial es constante en un conductor en equilibrio tenemos que:

$$V(R_2) = 50\ V$$

Si $r > R_3$

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\, d\vec{r}$$

$$V(r) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, d\vec{r}$$

$$\boxed{V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{15}{r^2}\,dr = \frac{15}{r}\ V}$$

Cambiar la densidad de la esfera interna (el signo) no afecta a la corona conductora que sigue conectada a los 50 V de la batería. Por lo tanto, el potencial de $r = R_2$ será de nuevo $V(R_2) = 50\,V$

c) Cuando conectamos los dos conductores entre sí tenderán a igualar sus potenciales

$$\cancel{K}\frac{Q^f_{cor}}{R_3} = \cancel{K}\frac{Q^f_{es'}}{R_{es'}}$$

Además, como hemos desconectado la batería, el sistema está aislado y, por lo tanto, se tiene que cumplir la ley de conservación de la carga

$$Q^i_{cor} + Q^i_{es'} = Q^f_{cor} + Q^f_{es'}$$

$$1{,}67\cdot 10^{-9} + 10^{-9} = 2{,}67\cdot 10^{-9} = Q^f_{cor} + Q^f_{es'}$$

$$\frac{Q^f_{cor}}{R_3} = \frac{Q^f_{es'}}{R_{es'}}$$

Arriba tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (Q^f_{cor} y $Q^f_{es'}$). Al resolverlo obtenemos:

$$\boxed{Q^f_{cor} = 2\cdot 10^{-9}\,C} \qquad \boxed{Q^f_{es'} = 0{,}67\cdot 10^{-9}\,C}$$

y el potencial de equilibrio de ambos conductores es:

$$\boxed{V^f_{cor} = K \frac{Q^f_{cor}}{R_3} = K \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,3} = 60 \text{ V}}$$

d)

$$V(R_1) - \overset{60 \text{ V}}{V(R_2)} = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\, d\vec{r}$$

$$V(R_1) - 60 = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{-37,7}{r^2} dr = -\left.\frac{37,7}{r}\right|_{R_2}^{R_1}$$

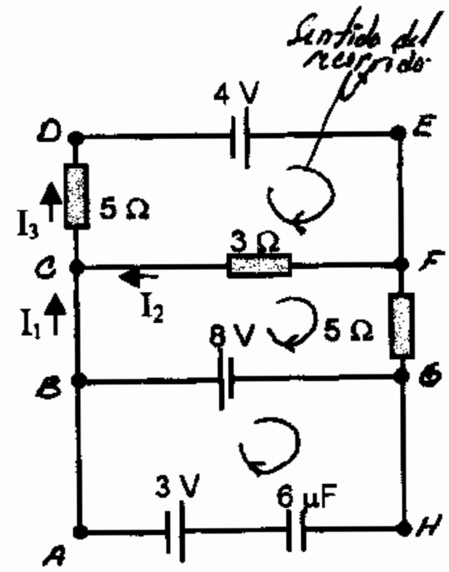
$$\boxed{V(R_1) = 60 - 37,7 \left(\frac{1}{\underset{0,1}{R_1}} - \frac{1}{\underset{0,25}{R_2}} \right) = -166,26 \text{ V}}$$

Se ha utilizado la referencia en R_2 porque al ser la corona conductora toda ella estará a 60 v.
En la superficie interna de la corona conductora se induce una carga $-Q_{es}$ para anular el campo eléctrico en su interior. En este caso tenemos:

$$Q_{sup.\,int} = +4,19 \text{ nC}$$

$$\boxed{\sigma_{sup.\,int} = \frac{4,19 \cdot 10^{-9}}{4\pi R_2^2} = \frac{4,19 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 0,25^2} = 5,3 \text{ nC/m}^2}$$

Solución | PROBLEMA 3 | 01/II/2007



(a) Ley de los nodos para el nodo C.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

Ley de las mallas (según el sentido de recorrido indicado)

MALLA ⇒ DEFCD ⟶ $4{,}0\,V - 3{,}0\,I_2 - 5{,}0\,I_3 = 0$ (2)

MALLA ⇒ CFGBC ⟶ $3{,}0\,I_2 - 5{,}0\,I_1 + 8{,}0\,V = 0$ (3)

• De (1) ⟶ $I_1 = I_3 - I_2$.

• Sustituyendo en (3) ⟶ $3{,}0\,I_2 - 5{,}0\,I_3 + 5{,}0\,I_2 + 8{,}0\,V = 0$

$8{,}0\,I_2 - 5{,}0\,I_3 + 8{,}0\,V = 0$ (4)

• Restando (4) con (3)

$$\begin{array}{l} (8{,}0\,I_2 - 5{,}0\,I_3 + 8{,}0\,V = 0) \\ -(-3{,}0\,I_2 - 5{,}0\,I_3 + 4{,}0\,V = 0) \\ \hline 11{,}0\,I_2 + 4{,}0\,V = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{I_2 = -\frac{4{,}0\,V}{11{,}0\,\Omega} = -0{,}364\,A} \quad R/$$

Como $I_2 < 0$ ⇒ Tiene un sentido contrario al escogido

Para I_1 ⇒ $5{,}0(-0{,}364\,A) - 5{,}0(I_1) + 8{,}0\,V = 0$ ⇒ $\boxed{I_1 = 1{,}38\,A}$ R/

Para I_3 ⇒ $I_3 = I_1 + I_2$ ⇒ $\boxed{I_3 = 1{,}02\,A}$ R/

(b) Para la MALLA ABGHA ⇒ $8{,}0\,V + \Delta V_c - 3{,}0\,V = 0$

$$\boxed{\Delta V_c = 11{,}0\,V}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V_c} \Rightarrow Q = C \cdot \Delta V_c = 6{,}0 \cdot 10^{-6}\,F \times 11{,}0\,V$$

$$Q = 66{,}0 \cdot 10^{-6}\,C = \boxed{66{,}0\,\mu C} \quad R/$$

PROBLEMA 4.- Un condensador plano-paralelo, cuyas armaduras tienen un área de 20 cm² y están separadas 2 cm, se conecta a una fuente de 60 V. A continuación, se desconecta la fuente de alimentación y se introduce una lámina de mica de constante dieléctrica $\varepsilon_r = 5$ que llena completamente el espacio entre las placas del condensador. Calcula: a) capacidad del condensador antes y después de introducir la lámina de mica; b) diferencia de potencial existente entre las placas, una vez insertada la lámina de mica; c) campo electrostático en el interior del condensador antes de introducir la mica; d) la diferencia de energía electrostática que sufre el condensador al introducir la mica.

a) La capacidad del condensador antes de introducir la lámina de mica es:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85\ 10^{-12}\ \frac{20\ 10^{-4}}{2\ 10^{-2}} = 8{,}85\ 10^{-13}\ \ F$$

Una vez insertada la lámina de mica, la capacidad del condensador es:

$$C = \varepsilon_r\, \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon_r\, C_0 = 5\,(8{,}85\ 10^{-13}\ F) = 4{,}425\ 10^{-12}\ F$$

b) Al desconectar la fuente, las placas del condensador quedan cargadas y aisladas. Al insertar la lámina de mica, la carga de las placas no varía, siendo ésta:

$$Q = C_0 \Delta V_0 = 8{,}85\ 10^{-13}(60) = 5{,}31\ 10^{-11}\ \ C$$

Como la capacidad del condensador ha variado, la tensión entre sus placas es:

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{5{,}31\ 10^{-11}\ \ F}{4{,}425\ 10^{-12}\ \ F} = 12\ V$$

c) El campo electrostático en el interior del condensador, antes de introducir la lámina de mica es:

$$E_0 = \frac{\Delta V_0}{d} = \frac{60\ V}{2\ 10^{-2}\ m} = 3000\ Vm^{-1}$$

d) La energía almacenada en el condensador, antes de introducir la lámina de mica es:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^{\,2} = \frac{1}{2} 8{,}85\ 10^{-13}(60)^2 = 1{,}593\ 10^{-9}\ \ J$$

Después de insertar la lámina, la energía que almacena el condensador es:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} 4{,}425\ 10^{-12}(12)^2 = 3{,}186\ 10^{-10}\ \ J$$

La diferencia de energía electrostática que sufre el condensador al introducir la mica, es:

$$\Delta U = U - U_0 = -1{,}2744\ 10^{-9}\ \ J$$

Problema 5:

a) Aplicamos la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

La amperiana será una circunferencia que pase por el centro de la sección cuadrada del toroide, por tanto nos queda

$$B\, 2\pi r = \mu_0 N I \quad , \quad \text{donde } r = R_{int} + \frac{l}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi (R_{int} + l/2)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 200 \cdot 1{,}5 \times 10^{-3}}{2\pi\,(60 + 15) \times 10^{-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 8 \times 10^{-7}\ T}$$

b)

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = N' B S \cos 30^\circ =$$

donde N' es el número de vueltas de la espira

$$= N' \frac{\mu_0 (I_0 \cos \omega t) N}{2\pi (R + l/2)} \pi r_{espira}^2 \cos 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} N N' \frac{\mu_0 r_{espira}^2 I_0}{R + l/2} \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} N N' \frac{\mu_0 r_{espira}^2 I_0}{R + l/2} \omega \, sen(\omega t) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} 200 . 3 \frac{4\pi \times 10^{-7} (10 \times 10^{-3})^2 . 5 \times 10^{-3}}{75 \times 10^{-3}} 50 \, sen(50.8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_{ind} = -9{,}26 \times 10^{-8} \, V$$

Finalmente,

$$\boxed{I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{-9{,}26 \times 10^{-8}}{0{,}2} = -4{,}63 \times 10^{-7} A}$$

c) $|\vec{m}| = N' I S = 3 . 0{,}5 \times 10^{-3} \pi r_{espira}^2 =$

$= 4{,}71 \times 10^{-7} \, A m^2$ que es el módulo del momento magnético de la espira

$$\vec{m} = m (\cos 30° \vec{j} + sen 30° \vec{k})$$

El momento del par ejercido por el campo magnético del toroide sobre la espira es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

con $\vec{B} = 8 \times 10^{-7} \, \vec{j} \, (T)$

Por tanto

$$\boxed{\vec{\tau} = m B \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos 30^\circ & \operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1{,}88 \times 10^{-13} \, \vec{i} \, (A \, m^2 T)}$$