P1 (1 punto) Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando de forma razonada las ciertas y dando un contraejemplo en las falsas:

a) (0.25 puntos) $[col(A)]^{\perp} = ker(A)$.

b) (0.25 puntos) $C = \{[1,0,1],[0,1,0],[1,2,1]\}$ es una base de $W = \{[x_1,x_2,x_3] \in R^3 \; : \; x_1 - x_3 = 0\}$.

c) (0.25 puntos) Si A es una matriz simétrica, la multiplicidad algebráica y la geométrica de sus autovalores son iguales.

d) (0.25 puntos) La solución de mínimos cuadrados de un sistema compatible determinado coincide con la solución exacta del sistema.

P2 (1 punto) Dada la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ¿Pertenece $\vec{x}$ al $Ker(A)$ ¿Y a $Im(A)$? En caso de que la respuesta sea afirmativa para alguna de las dos preguntas, dar las coordenadas del vector en una base del subespacio al que pertenezca.

P3 (1 punto) Calcular la matriz de la transformación lineal resultante de la composición de una proyección sobre la recta $y = x$, seguida de una simetría con respecto a la recta $y = -x$ y finalmente una rotación de $\pi/2 \; rad$.

P4 (1 punto) Extender el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ hasta formar una base ortogonal de R^4. Transformar la base obtenida en una base ortonormal.

P5 (1 punto) Con los siguientes datos, encontrar una matriz simétrica $A \in R^{2\times 2}$ con autovalores λ_1 y λ_2 y autovectores asociados $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -3 \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P6 (1 punto) Calcular la solución de mínimos cuadrados del sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ utilizando la descomposición en valores singulares. Calcular el error de la solución calculada.

---

1 Soluciones

P1 (1 punto)

a) (0.25 puntos) Es falsa. Para comprobarlo nos vale con poner un contraejemplo:
Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Es muy fácil ver que $col(A) = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ y que su núcleo (el espacio de las soluciones de $A\vec{x} = \vec{0}$) es $ker(A) = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ que son claramente distintos.

b) (0.25 puntos) Es falsa, ya que los vectores de C no son linealmente independientes.

c) (0.25 puntos) Es verdadera, ya que una matriz simétrica siempre se puede diagonalizar ortogonalmente, lo que implica que es diagonalizable, y por tanto las multiplicidades geométricas y aritméticas de cada autovalor coinciden.

d) (0.25 puntos) Es cierto. Si existe la solución exacta de un sistema de ecuaciones lineales se puede calcular como: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. La solución de mínimos cuadrados viene dada por la solución de las ecuaciones normales $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$. Como existe la solución exacta las columnas de A son linealmente independientes, y por tanto la solución de mínimos cuadrados se puede escribir como $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$. Como además existen A^{-1} y $(A^T)^{-1}$, tenemos que $\vec{x} = A^{-1}(A^T)^{-1}A^T\vec{b}$ y por tanto $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ que es la solución exacta.

P2 (1 punto)

Para comprobar si $\vec{x} \in Ker(A)$ sólo hay que comprobar si se cumple $A\vec{x} = \vec{0}$. Como no es así, $\vec{x} \notin Ker(A)$.

Para ver si el vector $\vec{x}$ pertenece o no al espacio imagen de la matriz A tenemos que calcular una base de este subespacio, y ver si podemos expresar el vector como una combinación lineal de los vectores de esa base.

Primero calculamos una base para el espacio columna. Para ver cual es la dimensión de este espacio, es decir el numero de vectores de la base, calculamos el rango de la matriz, calculando la forma escalonada reducida y contando el número de unos principales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como tenemos 3 unos principales, el rango de la matriz es 3. Por tanto buscamos tres columnas linealmente independientes, que serán las columnas de la matriz A que tengan un 1 principal en la matriz escalonada reducida. Por tanto: $col(A) = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. Ahora tenemos que ver si $\vec{x}$ se puede poner como combinación lineal de los vectores de esta base: $\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

o equivalentemente, comprobar si el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tiene solución. Para ellos calculamos su matriz escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como el rango de la matriz de coeficientes es 3 y el de la matriz ampliada es 4, podemos afirmar (Teorema del rango) que el sistema no tiene solución y por tanto $\vec{x}$ no pertenece a $col(A)$.

P3 (1 punto) Para calcular la matriz de la transformación lineal asociada a la composición de estas transformaciones lineales lo primero que tenemos que hacer es calcular las matrices asociadas a cada una de las transformaciones lineales.

La transformación lineal asociada a la proyección sobre la recta $y = x$ la podemos calcular fácilmente proyectando un vector genérico sobre el vector director de la recta, que en este caso es $[1, 1]^T$:

$$P\vec{x} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado la matriz asociada a la simetría con respecto a la recta $y = -x$ la podemos calcular fácilmente sabiendo que la imagen de cada vector de la base canónica nos da cada una de las columnas de la matriz asociada a la transformación lineal:

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada a la simetría es $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Con el mismo razonamiento es sencillo calcular la matriz de la transformación lineal de la rotación de $\pi/2\ rad$, $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Por tando la matriz de la composición es el producto de las matrices $R\,S\,P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

P4 (1 punto) Una manera de calcular una base ortogonal de R^4 que contenga los dos vectores dados sería utilizar Gram-Schmidt. Otra forma, quizás más sencilla, puede ser calcular una base ortogonal del complemento ortogonal del espacio generado por estos dos vectores, $W = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, y añadirla a los vectores dados. Es decir, una base de $W^{\perp} = \left\{\vec{x} \in R^4 \ : \left\{\begin{array}{c} \vec{x} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{array}\right.\right\}$ o equivalentemente $W^{\perp} = \left\{\vec{x} \in R^4 \ : \left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right.\right\}$.

La solución de este último sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nos da una base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $W^\perp$ que en este caso es también una base ortogonal, por lo que basta con unir la base de W con la de $W^\perp$ para obtener una base ortogonal de R^4: $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Para calcular una base ortonormal sólo tenemos que divir cada vector por su norma:

$$D = \left\{ 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

P5 (1 punto) La forma más sencilla de resolver este problema es darse cuenta de que con los autovalores y autovectores que nos dan es muy sencillo calcular las matrices de la diagonalización ortogonal de la matriz A. La matriz $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ y la matriz Q tiene como columnas los autovectores normalizados, por lo tanto $Q = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto, $A = QDQ^T = 1/5 \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

P6 (1 punto) Nos piden calcular la solución de mínimos cuadrados utilizando la descomposición en valores singulares, por lo que empezamos el problema calculando las matrices U, Σ y V. Para ello tenemos que calcular los autovalores y autovectores de la matriz $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$:

$det(A^TA - \lambda I) = \left\| \begin{bmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{bmatrix} \right\| = \lambda^2 - 25\lambda = 0$ por lo que los autovalores de A^TA son $\lambda = 0$ y $\lambda = 25$. Como los valores singulares son las raices cuadradas positivas de los autovalores distintos de cero, tenemos que $\sigma = 5$, y por tanto $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ahora tenemos que calcular los autovectores para $\lambda = 25$, es decir tenemos que calcular el $ker(A^TA - 25I)$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -20 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 = 1/2\alpha \\ x_2 = \alpha \end{array}$$

Por tanto, el autovector unitario que será la primera columna de V es $\vec{v}_1 = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para completar la matriz V necesitamos otro vector unitario perpendicular a $\vec{v}_1$. En este caso es muy sencillo de calcular $\vec{v}_2 = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, así que la matriz $V = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Para calcular los vectores columna de la matriz U utilizamos la fórmula $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$. En este caso sólo hay un valor singular, por lo que solo podemos calcular $\vec{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Como para la matriz V aquí también necesitamos otro vector unitario perpendicular a $\vec{u}_1$, y como en el caso anterior es muy sencillo calcular $\vec{u}_2 = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, por lo que la matriz $U = 1/\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Una vez que hemos calculado La descomposición en valores singulares, la pseudoinversa de A viene dada por la expresión $A^+ = V\Sigma^+U^T$, donde $\Sigma^+ \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que $A^+ = 1/25 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, y por tanto la solución de mínimos cuadrados $\vec{x} = A^+\vec{b} = 1/25 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

El error es $\left\| A\vec{x} - \vec{b} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} \right\| = 1/\sqrt{5}$.