Tema 4
Variable aleatoria

Carlos Montes – uc3m

1. Concepto

a) Ortodoxo

- Variable cuyo valor numérico está determinado por el resultado de un experimento aleatorio.

b) Ligeramente heterodoxo

- Variable que cuantifica la magnitud de interés, y cuya realización numérica concreta depende del azar(cada valor o intervalo de valores tendrá una probabilidad de aparición).

1. Concepto

Lanzamos 2 dados no trucados.

Nos interesa estudiar el experimento aleatorio: "suma de puntuaciones".

¿Cómo definimos la variable aleatoria?

1. Concepto

Probabilidad de
cada resultado:

1/36

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Carlos Montes – uc3m

1. Concepto

Suma de puntuaciones
de los dos dados.

¿Cómo definimos la variable aleatoria?

X: "Suma de puntos
obtenidos
al lanzar dos dados".

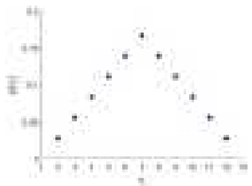
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

1. Concepto

X: "Suma de puntos obtenidos
al lanzar dos dados"

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

x	p(x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



1. Concepto

X: "Suma de puntos obtenidos
al lanzar dos dados"

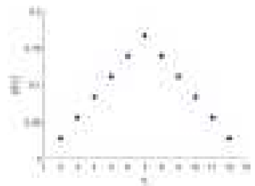
Probabilidad de
obtener 8 puntos:

5/36

Probabilidad de obtener
menos de 6 puntos:

1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 =
10/36

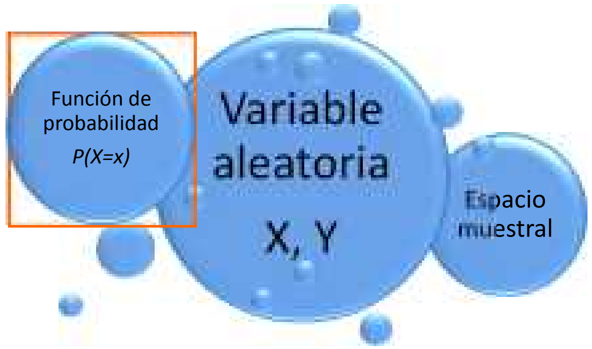
x	p(x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



1. Concepto

- ~~*Fallo de una maquinaria.*~~
- *Número de artículos defectuosos en un lote.*
- *Número de bits transmitidos correctamente.*
- *Distancia recorrida con determinada cantidad de combustible.*
- *Número de averías de un sistema.*
- *Número de clientes que llegan a un puesto de servicio por unidad de tiempo.*

1. Concepto



2.1. Función de probabilidad

Función de probabilidad, de cuantía o de masa de una variable aleatoria

Es la función *p(x)* de una variable **discreta** *X* que asigna a cada valor diferente de *X*: $x_1, x_2 \ldots, x_k$ la probabilidad de ser obtenido en el experimento aleatorio.

$$p(x_0) = P(X = x_0)$$

$$\sum_{E} p(x_i) = 1$$

ej. 17

Sea una variable aleatoria discreta que toma los valores X={a, 1, 2, 3} y con función de probabilidad p(x)= x/10. ¿Qué valor debe tomar a?

X ={a, 1, 2, 3} *p(x)=x/10*

Los valores 1,2,3 suman una probabilidad de: $\frac{1+2+3}{10} = \frac{6}{10}$

Para que la probabilidad total sea 1.

a = 4

***Función de distribución* F(x)**

(*Cumulative probability function*)

Función de distribución de la variable aleatoria *X* en el punto *x*= x_0 es la probabilidad de que **X tome un valor menor o igual** que x_0.

$$F(x_0) = P(x \le x_0)$$

$$F(x_0) = P(-\infty < x \le x_0)$$

$$F(x_0) = P(-\infty, x_0]$$

Propiedades

$$1)\ F(+\infty) = 1 \qquad F(-\infty) = 0$$

$$\boldsymbol{2)\ P(x_0, x_{0+h}) = F(x_{0+h}) - F(x_0)}$$

$$3)\ Es\ una\ función\ monótona\ no\ decreciente{:}\ F(x_0) \le F(x_{0+h})$$

***Variable aleatoria discreta**:*

toma un número de valores cuantitativos discretos

$$F(x_0) = p(X \le x_0) = \sum_{x_i \le x_0} p(X = x_i)$$

En una distribución discreta, la probabilidad se concentra en los puntos de discontinuidad x_i

2.3. Variables aleatorias discretas y continuas

***Variable aleatoria continua**:*

puede tomar cualquier valor en un intervalo

$$p(X = x_i) = 0$$

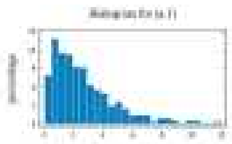
$$p(X \leq x_i) = p(X < x_i)$$

La probabilidad de cada punto concreto es nula.

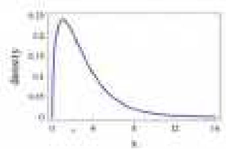
2.4. Función de densidad

Función que describe la **densidad de probabilidad** en cualquier intervalo.

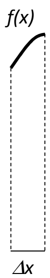
$$f(x) = \frac{P(x_0 < X < x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$



Haciendo las clases del histograma cada vez más pequeñas, éste tenderá a una curva f(x), capaz de describir el comportamiento de la variable.

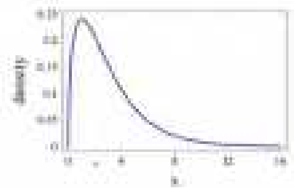


2.4. Función de densidad



$$f(x) = \frac{P(x_0 < X < x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

La probabilidad de cualquier intervalo vendrá dada por el área que *f(x)* encierra en ese intervalo.



2.4. Función de densidad

$$f(x) = \frac{P(x_0 < X < x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

Tomando un intervalo tan pequeño como queramos ($\Delta x \rightarrow 0$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = F'(x_0)$$

$$f(x) = F'(x)$$

Propiedades

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_x$

2) $f(x) = 0 \quad \forall x \notin D_x$

3) $P(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$

5) $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$
$= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

La duración de la batería de un iPad mini (medida en días) viene dada por una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} (2+kx)/6 & si\ 0 < x < 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Calcule:

a) El valor de k para que f(x) sea función de densidad

b) La duración media de la batería.

c) Se considera admisible un iPad cuya batería tenga una duración superior a 1.5 días. Sabiendo que la batería ha durado más de un día ¿cuál es la probabilidad de que ese iPad sea admisible?

$$a)\ \int_0^2 \frac{(2+kx)}{6} dx = 1$$

$$\frac{1}{6}\left[2x + \frac{kx^2}{2}\right]_0^2 = 1 \qquad \frac{1}{6}[4+2k] = 1 \qquad [4+2k] = 6 \qquad k = 1$$

Media o esperanza matemática: μ, E(x)

Caso discreto: $\mu = E(x) = \sum_i x_i P(x_i)$

Caso continuo: $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

Mediana

Caso discreto: el *m* más pequeño que satisfaga:

$$F(m) \geq 0.5$$

Caso continuo: el m tal que:

$$F(m) = 0.5$$

Moda

Es el valor de mayor probabilidad o densidad.

Varianza: σ², var(x)

Caso discreto: $\sigma^2 = var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(x_i)$

Caso continuo: $\sigma^2 = var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$

Equivale a $E(X-\mu)^2$

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left(X^2 - 2X\mu + \mu^2\right) =$$
$$= E\left(X^2\right) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) =$$
$$= E\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2$$

Fórmula de cálculo: $\boxed{\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$

Percentil p

Es el valor x_p que verifica:

$$F(x_p) = p$$

ej. 22

La duración de la batería de un iPad mini (medida en días) viene dada por una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} (2+kx)\big/_{6} & si\ 0 < x < 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Calcule:

a) El valor de k para que f(x) sea función de densidad

b) La duración media de la batería.

c) Se considera admisible un iPad cuya batería tenga una duración superior a 1.5 días. Sabiendo que la batería ha durado más de un día ¿cuál es la probabilidad de que ese iPad sea admisible?

$$b)\ \int_0^2 x \cdot \frac{(2+x)}{6} dx = \frac{1}{6}\left[\frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}2\\0\end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\left[4 + \frac{8}{3}\right] = \frac{20}{18} = 1.11$$

ej. 22

La duración de la batería de un iPad mini (medida en días) viene dada por una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} (2+kx)\big/_{6} & si\ 0 < x < 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Calcule:

a) El valor de k para que f(x) sea función de densidad

b) La duración media de la batería.

c) Se considera admisible un iPad cuya batería tenga una duración superior a 1.5 días. Sabiendo que la batería ha durado más de un día ¿cuál es la probabilidad de que ese iPad sea admisible?

$$c)\ P(X > 1.5 | X > 1) = \frac{P[(X > 1.5) \cap (X > 1)]}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 1.5)}{P(X > 1)}$$

$$P(X > 1.5) = \int_{1.5}^2 \frac{(2+x)}{6} dx = \frac{1}{6}\left[2x + \frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}2\\1.5\end{matrix} = 0.3125$$

$$P(X > 1) = \frac{1}{6}\left[2x + \frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}2\\1\end{matrix} = 0.5833$$

$$\frac{0.3125}{0.5833} = 0.5357$$

4. Covarianza y correlación

La covarianza y correlación poblacionales tienen la misma interpretación que las muestrales.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$\rho = corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}$$

5. Transformaciones y medidas características

En el caso de la media:

$$E(a + bX) = \; a + bE(X)$$

Para dos variables:

$$E(aX + bY) = \; aE(X) + bE(Y)$$

5. Transformaciones y medidas características

En el caso de la varianza:

$$var\,(a + bX) = \; b^2 var(X)$$

Para dos variables:

$$var\,(aX + bY) = \; a^2 var(X) + b^2 var(Y) + 2abcov(X,Y)$$

Si X e Y están incorreladas:

$$var\,(aX + bY) = \; a^2 var(X) + b^2 var(Y)$$

5. Transformaciones y medidas características

De la misma manera:

$$var(aX - bY) = \; a^2 var(X) + b^2 var(Y) - 2abcov(X,Y)$$

Si X e Y están incorreladas:

$$var(aX - bY) = \; a^2 var(X) + b^2 var(Y)$$

En ambos casos
es la SUMA de las varianzas.

$$independencia \Rightarrow incorrelación$$

$$incorrelación \nRightarrow independencia$$

(salvo en una normal bidimensional)