POLINOMIO DE TAYLOR Y COMPORTAMIENTO LOCAL

- Para funciones suficientemente regulares, el comportamiento local de la función entorno a un cierto punto x_0 puede codificarse de una forma muy conveniente a través de los primeros términos no nulos del polinomio de Taylor en x_0.

- En lo que sigue, sólo nos interesará el comportamiento local de una función entorno a un cierto punto x_0 por lo que nos centraremos en funciones de forma $f \in C^n(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, con $n = 1, 2, \dots, \infty$.
(en los ejemplos $f \in C^\infty(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$).

- Recordemos que el teorema de Taylor nos dice que:

$$f(x) = P_n(x|f, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ ; \ c \in (x_0, x)$$

Para $n=0$ el teorema se reduce al teorema del valor medio de Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0) \quad ; \quad c \in (x_0, x).$$

TEOREMA: Sea $f \in C^1$ tal que $f'(x_0) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en un entorno de x_0 [es decir, existe un entorno $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ en el cual: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$]

Dem: Como f' es continua & $f'(x_0) > 0$ existe un entorno de x_0: $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ en el cual $f'(x) > 0$. Usando el teorema de Taylor para $n=0$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x-x_0)}_{>0 \text{ si } x > x_0} \quad \text{con } c \in (x_0, x)$$

concluimos que $x > x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$ ∎

Un razonamiento similar permite demostrar el siguiente:

TEOREMA: Sea $f \in C^1$ tal que $f'(x_0) < 0$. Entonces f es estrictamente decreciente en un entorno de x_0.
Es decir, existe un intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ en el cual dados dos puntos $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Definición: PUNTOS CRÍTICOS

Sea $f \in C^1$. Diremos que x_0 es un PUNTO CRÍTICO de f si $f'(x_0) = 0$

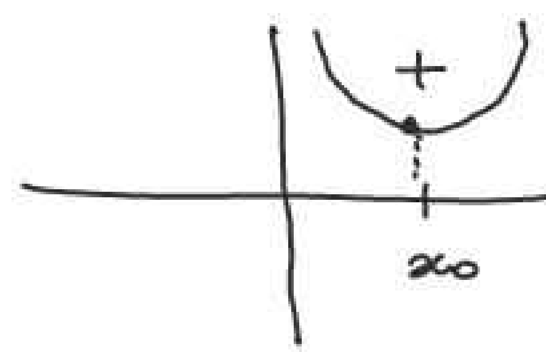
Por simplicidad, supongamos que x_0 es un punto crítico de una función C^∞ (es decir $f'(x_0)=0$). Sea $p>1$ orden de la primera derivada <u>no</u> nula en x_0. Entonces:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)$$

$$x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) > 0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}}_{>0}(x-x_0)^p$$

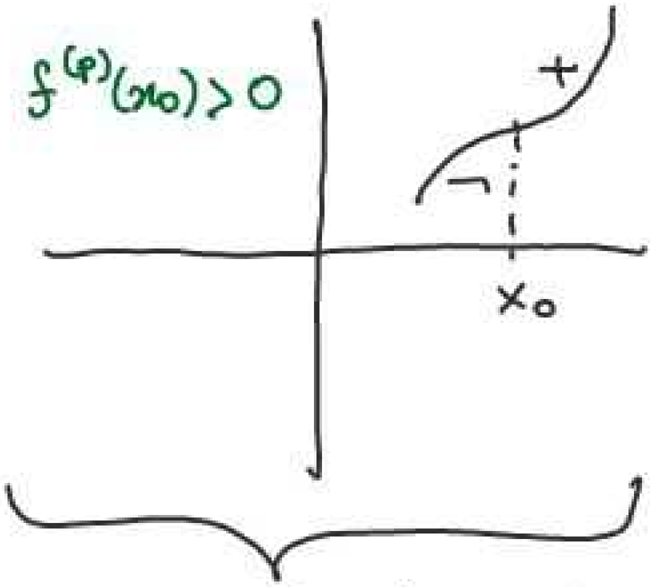


$\Rightarrow$ f es CONVEXA ⊕ en un entorno de x_0 y tiene un MÍNIMO LOCAL en x_0

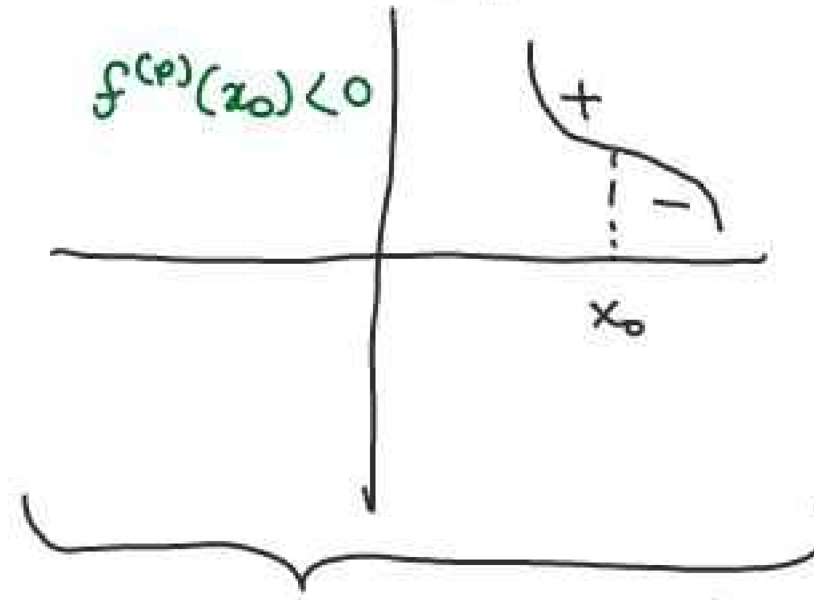
- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) < 0$

$\Rightarrow$ f es CÓNCAVA ⊖ en un entorno de x_0 y tiene un MÁXIMO LOCAL en x_0

• Si $p = \text{IMPAR}$: $f(x) \simeq f(x_0) + \dfrac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p$



Función estrictamente creciente en un entorno de x_0.



Función estrictamente decreciente en un entorno de x_0

En ambos casos, x_0 es un PUNTO de INFLEXIÓN, es decir, la función es convexa a un lado de x_0 y cóncava al otro lado.

<u>Observación</u>: Independientemente del valor de $f'(x_0)$, si f tiene un desarrollo de Taylor de la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + $$
$$+ o((x-x_0)^p) \quad \text{con} \quad \underset{(p>1)}{f^{(p)}(x_0) \neq 0}$$

podemos concluir que:

• Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) > 0$:
  $\Rightarrow f$ es CONVEXA (+) en un entorno de x_0

• Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) < 0$:
  $\Rightarrow f$ es CONCAVA (−) en un entorno de x_0

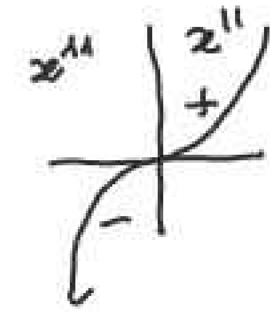
• Si $p = \text{IMPAR}$:
  $\Rightarrow f$ tiene un punto de INFLEXIÓN en x_0

<u>EJEMPLOS:</u>

- Comportamiento de $f(x) = x^7 \operatorname{sen}^4 x$ cerca de $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^7 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^4 = x^{11} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^4$$

$$= x^{11} + o(x^{12})$$



$\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en un entorno de $x_0 = 0$

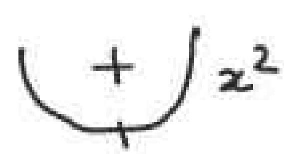
$\Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $x_0 = 0$

- Comportamiento de $f(x) = \cos^3 x \cdot \log^2(1+x)$ cerca de $x_0 = 0$:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 \cdot \left(x + o(x) \right)^2 =$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow$ f tiene un mínimo local en $x_0 = 0$



$\Rightarrow$ f es convexa en un entorno del 0.