uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

UC3M

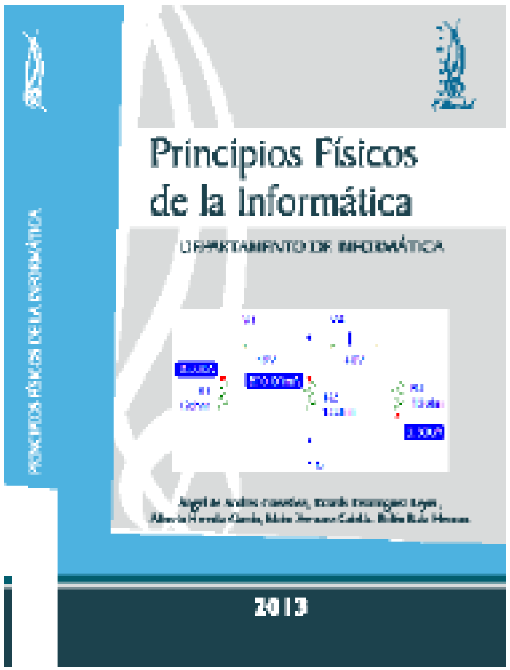
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

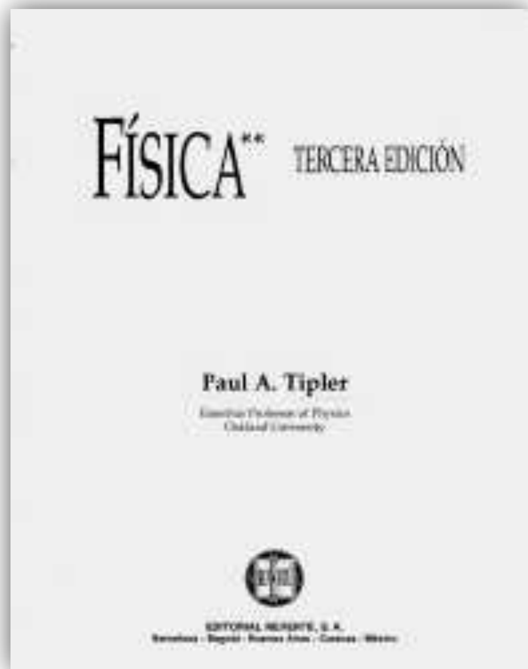
Principios Físicos de la Informática

Principios Físicos de la Informática

- Tema 1. Herramientas matemáticas básicas
- Tema 2. Corriente continua. Componentes básicos de un circuito de cc.
- Tema 3. Resolución de circuitos de corriente continua
- Tema 4. Técnicas y herramientas de análisis y simplificación de circuitos
- Tema 5. Inducción electromagnética. Ley de Faraday
- Tema 6. Corriente variables en el tiempo. Corriente alterna.
- **Tema 7. Resolución de circuitos de corriente alterna**

Bibliografía: tema 7





- A. de Andrea et al, Principios Físicos de la Informática. 2013
- Paul A. Tipler, *Física* (Ed. Reverte, 3ª ed.), Paul A. Tipler, Gene Mosca: *Física para la Ciencia y la Tecnología, vol. 2* (Ed. Reverte, 6ª ed.),

Índice

7.0 Repasando conceptos

CA: el sentido se invierte sucesivamente; en especial se limita el estudio de un tipo sencillo de corriente alterna.

- Caso Particular: Intensidad varia en forma sinusoidal: se trata de una corriente periódica que se repite cada cada periodo T, siendo este periodo la inversa de la frecuencia (1/f)
- Los Circuitos tienen comportamientos distinto que en CC
  - en la alterna a diferencia de la continua, puede variarse la intensidad sin modificar la fem, ni la resistencia, sin más que cambiar la autoinducción o la capacidad del circuito.

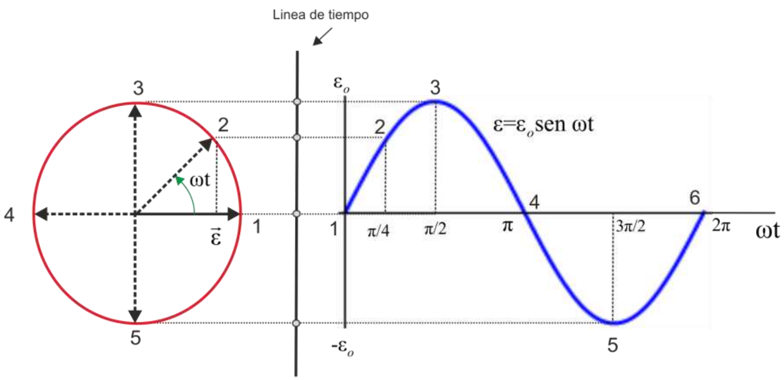


Diagrama vectorial

Diagrama cartesiano

7.0 Repasando conceptos

CA: Cuando varia sinusoidalmente se representa por un diagrama vectorial y para caracterizarlo es necesario:

Los vectores en sí. Sus longitudes respectivas deben ser proporcionales, al valor máximo de las magnitudes que representan, supuesto que hayan de utilizarse para la construcción de la senoide. Si se emplean únicamente como símbolos, la longitud se suele tomar como expresión de los valores eficaces cuando se trata de tensiones o intensidades.

La velocidad angular . Los vectores se dibujarán en el diagrama en una cualquiera de las muchas posiciones posibles. Idealmente no se hallan en reposo, sino en rotación alrededor de uno de sus extremos, con velocidad angular tal que el tiempo necesario para efectuar una revolución sea igual a la duración T *d*e un período de la senoide. Hay que recordar que se trata de vectores rotatorios.

7.0 Repasando conceptos

CA: Cuando varia sinusoidalmente se representa por un diagrama vectorial y para caracterizarlo es necesario:

El sentido de giro. Se tomará como positivo, lo mismo que se estila corrientemente en Matemáticas, el opuesto al de las agujas de un reloj: el sentido hacia la izquierda.

La recta del tiempo. Sirve como dirección de referencia sobre la cual se proyectan los vectores giratorios para hallar el valor instantáneo de la onda senoidal. En la aplicación simbólica de los vectores se supone, por lo general, sólo imaginada la recta del tiempo, que no se representará en los diagramas.

Vector	notación	compleja	Polar o Kennelly
ε	$\varepsilon = \varepsilon_{max} \cos(\omega t+\varphi_e)$	$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_o \, e^{j\omega t}$	$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_o \angle \omega t$
I	$\vec{i} = i_{max} \cos(\omega t+\varphi_i)$	$\vec{i}=i_0 e^{j\omega t}$	$\vec{i}=i_0<\omega t$

7.0 Repasando conceptos

Operaciones matemáticas:

- $\frac{d}{dt}$(sen ωt) = ω sen (ωt+Π/2) es decir supone un adelanto de Π/2 modulado por ω ;
- $\frac{d}{dt}$)$e^{j\omega t}$ =(j ω $e^{j\omega t}$ simplificando $\frac{d}{dt}$ ⟷ j ω

∫ sen ωt dt= $\frac{1}{j\omega}$ sen (ωt-Π/2)=- j $\frac{1}{\omega}$ sen (ωt-Π/2), es decir es un atraso modulado

∫ $e^{j\omega t}$dt= $\frac{1}{j\omega}$ $e^{j\omega t}$ -=j $\frac{1}{\omega}$ $e^{j\omega t}$ simplificando ∫ dt- ⟷ j $\frac{1}{\omega}$

7.1 CA en circuitos R

La siguiente figura muestra un circuito con una fuente de corriente alterna y una resistencia.

La fem de la fuente se puede expresar como $\varepsilon = \varepsilon_{max} \cos\omega t$

Si llamamos V a la caida de tensión en la resistencia y aplicamos la 1ª ley de Kirchoff a la malla, tendremos:

$$V = \varepsilon \qquad V = \varepsilon_{max} \cos\omega t$$

Aplicando la ley de Ohm: V=RI

Luego: $\varepsilon_{max} \cos\omega t = RI \Longrightarrow I = I_{max} \cos\omega t$

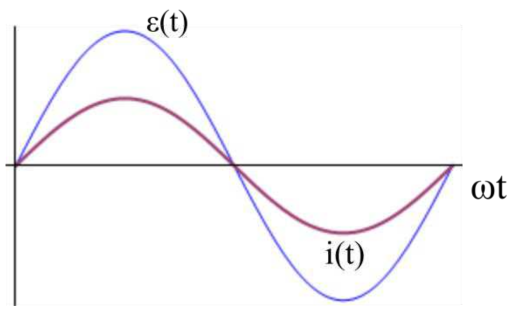
Donde: $\varepsilon_{max} = RI_{max}$

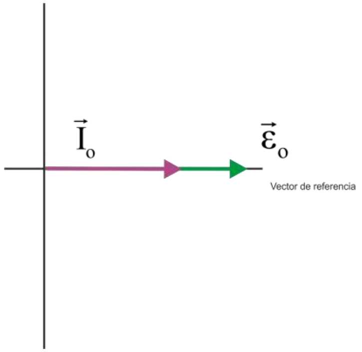
7.1 CA en circuitos R

La fem de la fuente se puede expresar como

- $\varepsilon = \varepsilon_{max} \cos\omega t$ y la Intensidad
- $i = i_{max} \cos\omega t$

Expresando el diagrama fasorial: están en fase

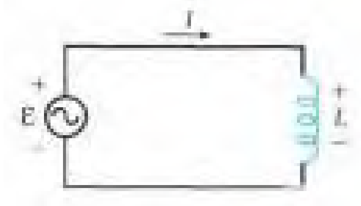




Los Circuitos se comportan con si fueran de cc, siendo la fase igual para la i y v

7.2 CA en circuitos RL: reactancia inductiva

La siguiente figura muestra un circuito con una fuente de corriente alterna y una bobina de inductancia L



La caída de tensión en la bobina se puede expresar como :

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

Luego: dI= (V/L)dt. sustituyendo

$$dI = \frac{\varepsilon_{\max}}{L}\cos\omega t \cdot dt \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega L} sen\,\omega t$$

Donde el término: $X_L = \omega L$

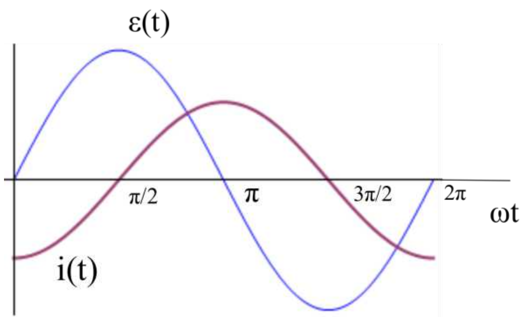
$$I_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega L}$$

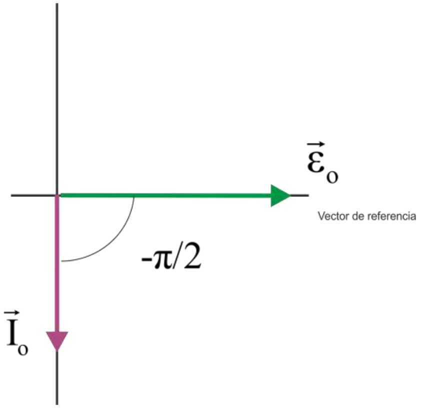
se llama **Reactancia Inductiva** o **Inductancia**

En estos circuitos, la intensidad se **retrasa** en el diagrama fasorial con respecto a la tensión.

7.2 CA en circuitos RL: reactancia inductiva

Es decir, además de introducir la autoinducción una resistencia no óhmica llamada reactancia inductiva, aquella hace posible que la corriente en la bobina siempre está atrasada respecto a la fem en 90º, haciendo que la intensidad vaya retrasada un cuarto de periodo respecto a la tensión aplicada entre sus extremos.





7.2 CA en circuitos RL (ejemplo)

La caida de potencial entre los extremos de una bobina de 40 mH es sinusoidal, con una amplitud de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente eficaz cuando la frecuencia es (*a*) 60 Hz y (*b*) 2000 Hz.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La corriente eficaz es igual a la caída de potencial eficaz dividida por la reactancia inductiva. La caída de potencial es igual a la fem:

$$I_{ef} = \frac{V_{L\,ef}}{X_L}$$

2. Calcular la reactancia inductiva a 60 Hz:

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60{,}0\text{ Hz})(40{,}0\times 10^{-3}\text{ H}) = \boxed{15{,}1\ \Omega}$$

3. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente eficaz a 60 Hz:

$$I_{1\,ef} = \frac{120\text{ V}}{15{,}1\ \Omega} = \boxed{7{,}95\text{ A}}$$

(*b*) 1. Calcular la reactancia inductiva a 2000 Hz:

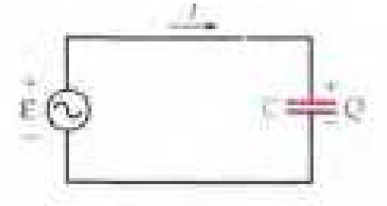
$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = (2\pi)(2000\text{ Hz})(40{,}0\times 10^{-3}\text{ H}) = \boxed{503\ \Omega}$$

2. Utilizar este valor de X_L para calcular la corriente eficaz a 2000 Hz:

$$I_{2\,ef} = \frac{120\text{ V}}{503\ \Omega} = \boxed{0{,}239\text{ A}}$$

7.2 CA en circuitos RC: reactancia capacitiva

La siguiente figura muestra un circuito con una fuente de corriente alterna y un condensador de capacidad C



La caída de tensión en el condensador se puede expresar como : $V = \dfrac{Q}{C}$

Luego: $Q = V * C = \varepsilon_{max} \cos \omega t * C$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega \varepsilon_{\max} C sen \omega t = -I_{\max} sen \omega t$$

$$I_{\max} = \omega C \cdot \varepsilon_{\max}$$

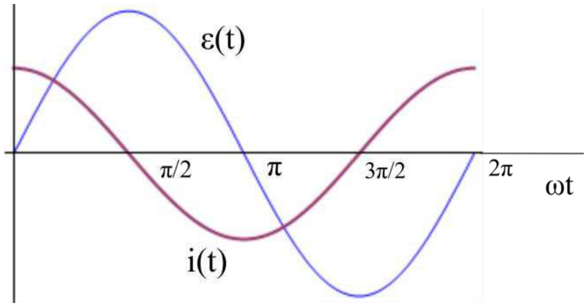
Donde el término: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

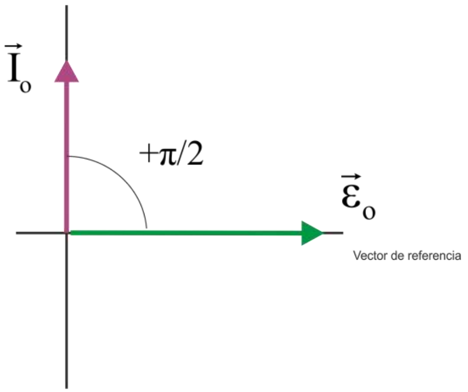
se llama **Reactancia Capacitiva** o **Capacitancia**

En estos circuitos, la intensidad se **adelanta** en el diagrama fasorial con respecto a la tensión

7.2 CA en circuitos RC: reactancia capacitiva

Es decir, además de introducir el condensador una resistencia no óhmica llamada reactancia capacitiva, produce un desfase de 90º haciendo que la intensidad vaya adelantada un cuarto de periodo respecto a la fem .





$$\varepsilon = \varepsilon_o \operatorname{sen} \omega t$$

$$i = I_o \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2)$$

7.2 CA en circuitos RC (ejemplo)

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador de ac que proporciona una caída de potencial de amplitud (valor máximo) de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (*a*) 60 Hz y (*b*) 6000 Hz.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular la reactancia capacitiva a 60 Hz y a 6000 Hz:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(60{,}0\ \text{Hz})(20{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{133\ \Omega}$$

$$I_{1\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_{C1}} = \frac{100\ \text{V}}{133\ \Omega} = \boxed{0{,}752\ \text{A}}$$

(*b*) Calcular la reactancia o impedancia capacitiva (capacitancia) a 6000 Hz y utilizar este valor para calcular la corriente máxima a 6000 Hz:

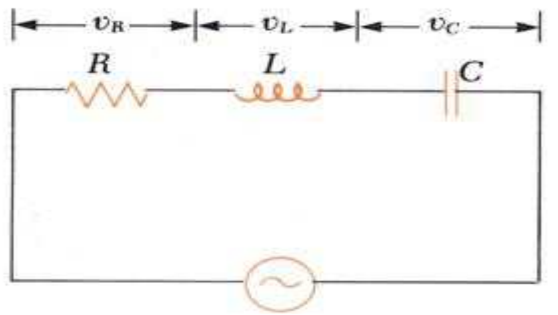
$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(6000\ \text{Hz})(20{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{1{,}33\ \Omega}$$

$$I_{2\,\text{máx}} = \frac{V_{C\,\text{máx}}}{X_{C2}} = \frac{100\ \text{V}}{1{,}33\ \Omega} = \boxed{75{,}2\ \text{A}}$$

7.4 Circuito RLC en serie

La siguiente figura muestra un circuito LCR en serie con un generador:



La caída de tensión en el conjunto del circuito se puede expresar:

$$V = V_R + V_L + V_C$$

Como, $\varepsilon = \varepsilon_o \, sen \; \omega t$

En el circuito aparecería una corriente que variará senoidalmente con el tiempo y cuya expresión general viene dada por . $i = I_o sen \; (\omega t - \varphi)$

7.4 Circuito RLC en serie

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a este circuito se tiene:

$$\varepsilon + \varepsilon_L = R\,i + \frac{q}{C} \Rightarrow \varepsilon - L\frac{di}{dt} = R\,i + \frac{q}{C} \Rightarrow L\frac{di}{dt} + R\,i + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

Por lo que $L\dfrac{di}{dt} + R\,i + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt = \varepsilon$

Aplicando la equivalencia $\dfrac{d}{dt} \Leftrightarrow j\omega,\quad \varepsilon \Leftrightarrow \vec{\varepsilon},\ i \Leftrightarrow \vec{i},\ \displaystyle\int\ dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$

Se tiene $L\omega j\,\vec{i} + R\,\vec{i} + \dfrac{\vec{i}}{jC\omega} = \vec{\varepsilon}$

Despejando de la expresión simbólica anterior

$$\vec{i} = \frac{\vec{\varepsilon}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Y al termino $\vec{Z} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$ Se le llama impedancia, y su

modulo $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$

7.4 Circuito RLC en serie

Donde

Z es la impedancia total con parte real e imaginaria

R es la resistencia (parte real de la impedancia)

$X_L - X_C$ es la reactancia total (parte imaginaria de la resistencia)

$$V = (R + X_L - X_C) \cdot I$$

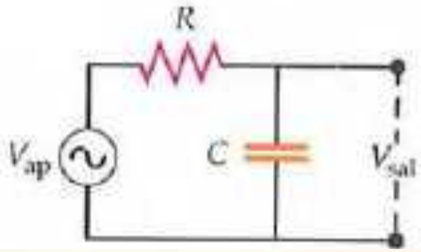
$$Z = R + (X_L - X_C)$$

$$V = R \cdot I + \omega L \cdot I + \frac{1}{\omega C} \cdot I$$

$$V = V_R + V_L + V_C$$

7.4 Circuito RLC en serie (ejemplo)

Una resistencia R y un condensador C se encuentran en serie con un generador, que tiene una tensión dada por $\sqrt{2}\, V_{ap\,ef} \cos \omega t$, como se ve en la figura 29.23. Hallar la tensión eficaz de salida en el condensador, $V_{sal\,ef}$ en función de la frecuencia ω.



SOLUCIÓN

1. El voltaje a través del condensador es igual al producto de I_{ef} por X_C: $\quad V_{sal\,ef} = I_{ef} X_C$

2. La corriente eficaz depende del voltaje eficaz aplicado y de la impedancia: $\quad I_{ef} = \dfrac{V_{ap\,ef}}{Z}$

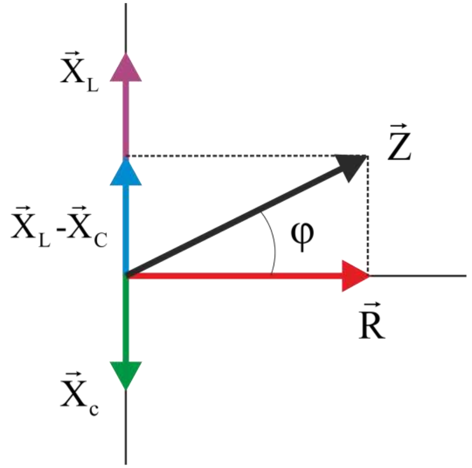
3. En este circuito, sólo R y X_C contribuyen a la impedancia total: $\quad Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

4. Sustituir estos valores y $X_C = 1/(\omega C)$ para determinar el voltaje eficaz de salida:

$$V_{sal\,ef} = I_{ef} X_C = \frac{V_{ap\,ef} X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{V_{ap\,ef}}{\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{X_C^2}}} = \boxed{\frac{V_{ap\,ef}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}$$

7.5 Expresión fasorial de la impedancia

Si representamos gráficamente la impedancia de un circuito RLC tendremos la siguiente figura:

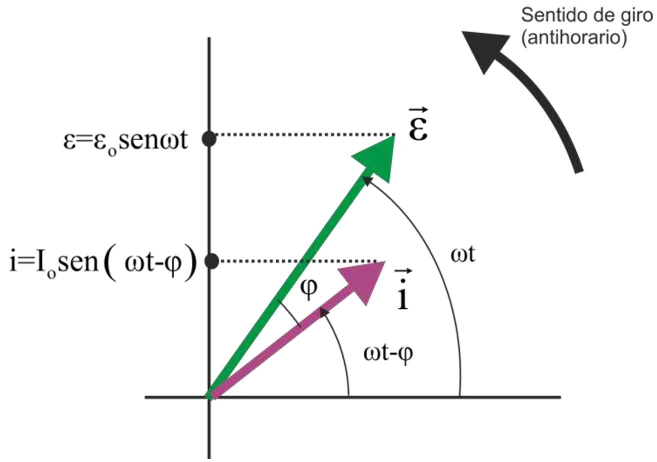


La suma vectorial de las impedancias constituye el llamado diagrama vectorial que proporciona directamente, y a escala, el valor de la impedancia real Z del circuito, así como el ángulo de fase . Obtenido Z puede calcularse la intensidad eficaz por simple aplicación de .

$$I_e = \varepsilon_e / Z$$

7.5 Expresión fasorial de la impedancia

Representado en el diagrama de fresnel la fem y la i



$$\vec{i} = I_o e^{j(\omega t - \varphi)} = \left(I_o e^{-j\varphi}\right) e^{j\omega t} = \bar{I}_o e^{j\omega t}$$

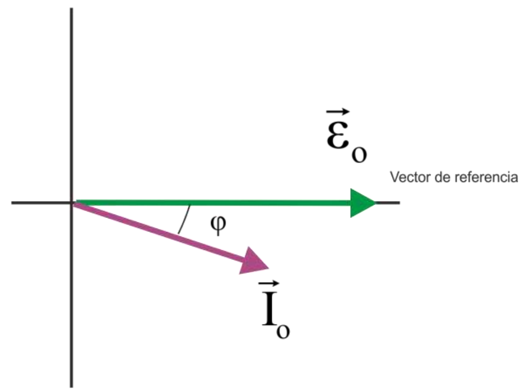
La parte interior es el valor en t=0 y se llama versor a $e^{j\omega t}$

Y se llama fasor a : $\bar{I}_o = I_o e^{-j\varphi}$

De esta nomenclatura se deduce de un modo inmediato, el tamaño del vector y su posición definida por el ángulo . Los fasores se representan en el plano de Gauss, y para el caso que nos ocupa la representación de los fasores de los valores máximos de la fem y la intensidad sería:

7.5 Expresión fasorial de la impedancia

Representado el fasor de la fem y la i



$$\vec{I}_e = I_e \angle \varphi_i; \quad \vec{\varepsilon}_e = \varepsilon_e \angle \varphi_\varepsilon$$

$$I_e = I_o / \sqrt{2}; \quad \varepsilon_e = \varepsilon_o / \sqrt{2}$$

El valor instantáneo de l fem es: $\varepsilon(t) = \sqrt{2}\varepsilon_e \, sen(\omega t - \varphi_\varepsilon)$

El desfase de los fasores y es , lo que indica que la tensión se adelanta a la corriente (o la corriente se retrasa a la tensión). En muchos casos en conveniente tomar una de las señales como referencia de fases, lo que simplifica el cálculo con los números complejos. Z es un número complejo

7.5 Expresión fasorial de la impedancia

Si representamos gráficamente la impedancia de un circuito RLC tendremos la siguiente figura:

Donde al coseno del ángulo δ se le denomina f **potencia** del circuito.

Así pues:

$$\delta = arctg\,\frac{X_L - X_C}{R}$$

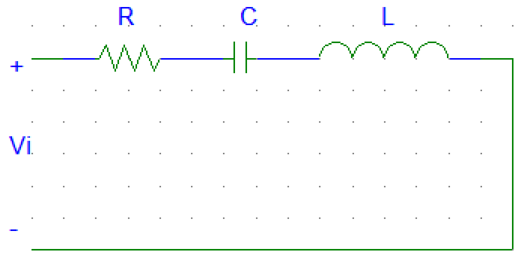
Cuando $X_L = X_C$ decimos que el circuito está en **resonancia.**

A la frecuencia a la que se produce dicho fenómeno se le llama **frecuencia de resonancia**, que por tanto valdrá:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

7.5 Ejemplo

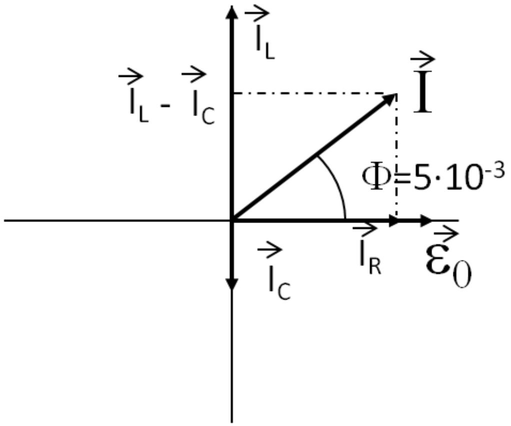
Para el circuito RLC serie de la figura calcular el desfase total que sufre la intensidad de corriente con respecto al voltaje si V=10sin(100t)R=10 kΩ C=100 μFL=500 mH



Como se ha visto, el desfase que provocan los elementos de un circuito RLC se puede obtener a partir de los parámetros R, L y C del circuito:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) =$$

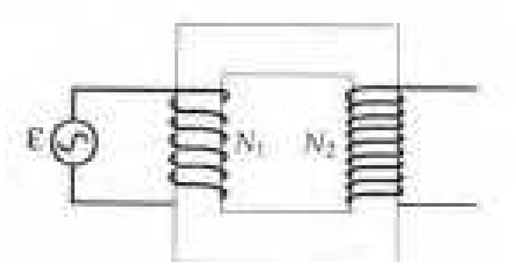
$$= \arctan\left(\frac{100 \cdot 500 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}}{10000}\right) = -5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad}$$



7.6 Transformadores (1)

Un transformador es un dispositivo utilizado para elevar o disminuir el voltage de un circuito sin que haya una pérdida de potencia apreciable.

Sigue un esquema como el mostrado en la figura:



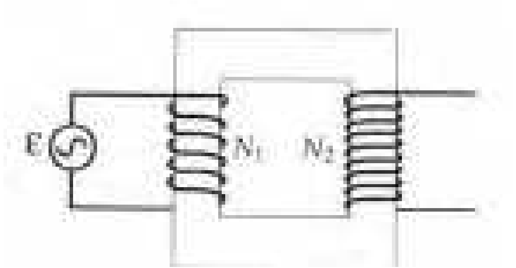
El arrollamiento de entrada de corriente conectado a la fuente (primario) tiene N_1 espiras y el de salida en el que una la corriente es inducida (secundario) N_2 espiras

Su funcionamiento se basa en que una corriente alterna, al circular por un arrollamiento genera un campo magnético que puede utilizarse en el secundario para generar una corriente inducida.

El núcleo de hierro, al tener una permeabilidad magnética muy baja tiene el fin de confinar el campo magnético creado por el primario para que el máximo flujo posible atraviese el secundario.

7.6 Transformadores (2)

Si consideramos que no hay pérdida de potencia en el trafo, podemos decir que la variación de flujo magnético en el primario es la misma que en el secundario



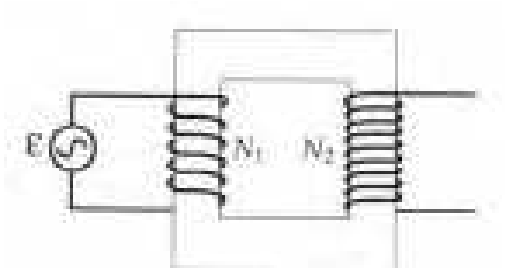
$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt}$$

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \qquad V_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

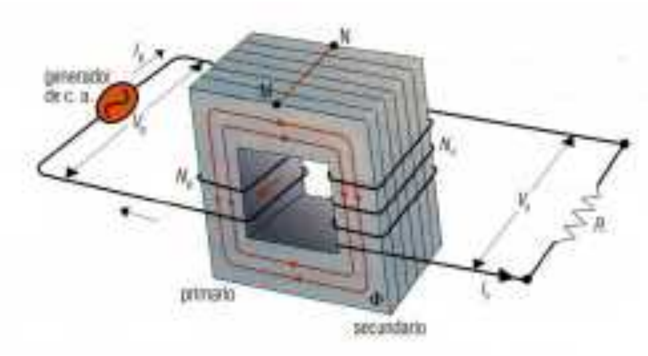
$$\boxed{\frac{V_2}{N_2} = \frac{V_1}{N_1}}$$

7.6 Transformadores (2)

Si consideramos que no hay pérdida de potencia en el trafo, podemos decir que la variación de flujo magnético en el primario es la misma que en el secundario



$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt}$$



$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \qquad V_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

$$\boxed{\frac{V_2}{N_2} = \frac{V_1}{N_1}}$$

7.6 Transformadores (ejemplo)

Un timbre funciona a 6,0 V con 0,40 A (en valores eficaces). Se conecta a un transformador cuyo primario contiene 2000 vueltas y está conectado a una ac de 120 V de tensión eficaz. (*a*) ¿Cuántas vueltas deberá tener el secundario? (*b*) ¿Cuál es la corriente en el primario?

SOLUCIÓN

(*a*) La relación de vueltas se deduce de la ecuación 29.30. Despejar el número de vueltas en el secundario, N_2:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

así

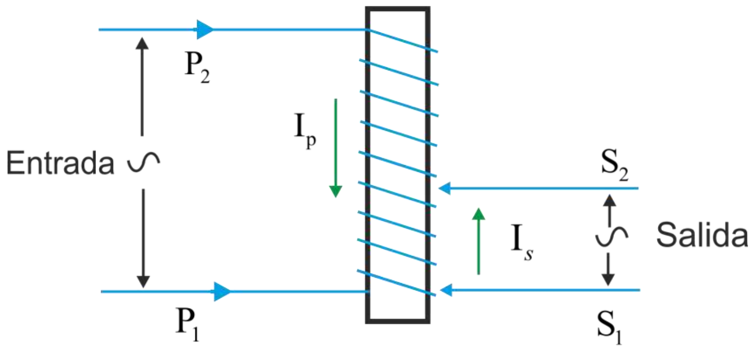
$$N_2 = \frac{V_{2\,ef}}{V_{1\,ef}} N_1 = \frac{6{,}0\ \text{V}}{120\ \text{V}} 2000\ \text{vueltas} = \boxed{100\ \text{vueltas}}$$

(*b*) Como suponemos que la transmisión de potencia tiene una eficacia del 100%,

$$V_{2\,ef} I_{2\,ef} = V_{1\,ef} I_{1\,ef}$$

$$I_{1\,ef} = \frac{V_{2\,ef}}{V_{1\,ef}} I_{2\,ef} = \frac{6{,}0\ \text{V}}{120\ \text{V}} (0{,}40\ \text{A}) = \boxed{0{,}020\ \text{A}}$$

7.6 Auto-Transformadores (ejemplo)



7.7 potencia de una corriente alterna

Para calcular la potencia es necesario conocer:

- La fem: $\varepsilon = \varepsilon_o \, sen \ \omega t$
- La i $i = I_o sen \ (\omega t - \varphi)$

Por lo tanto :

P(t)= i(t). ε (t),

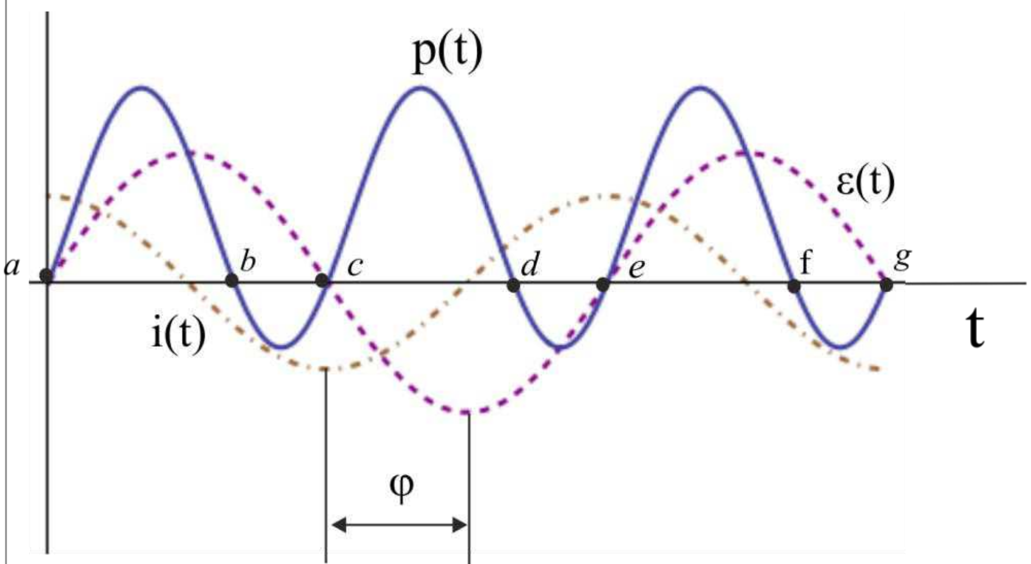
Sustituyendo: $p(t) = i(t)\,\varepsilon(t) = \varepsilon_o I_o sen\omega t \ sen(\omega t - \varphi)$

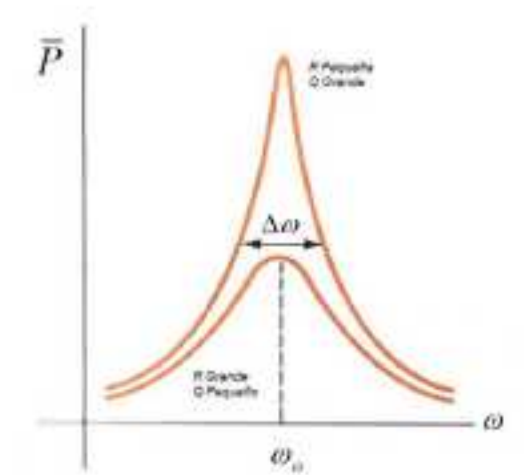
Aplicando la formula de la resta de senos de forma inversa:

$$p(t) = i(t)\,\varepsilon(t) = \varepsilon_o I_o \left[sen^2 \omega t \ \cos\varphi - \frac{1}{2} sen(2\omega t) \ sen\varphi \right]$$

7.7 potencia de una corriente alterna

Gráficamente:





La potencia media sería: $P = \frac{\varepsilon_o I_o}{2}\cos\varphi = \varepsilon_e I_e \cos\varphi$

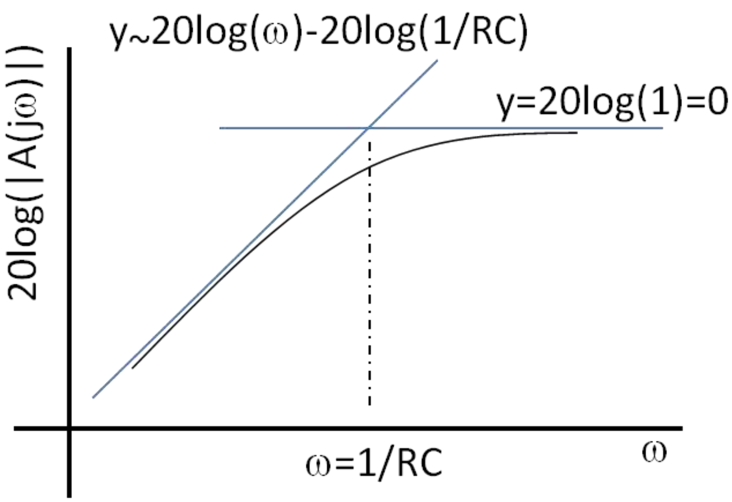
se denomina potencia media activa

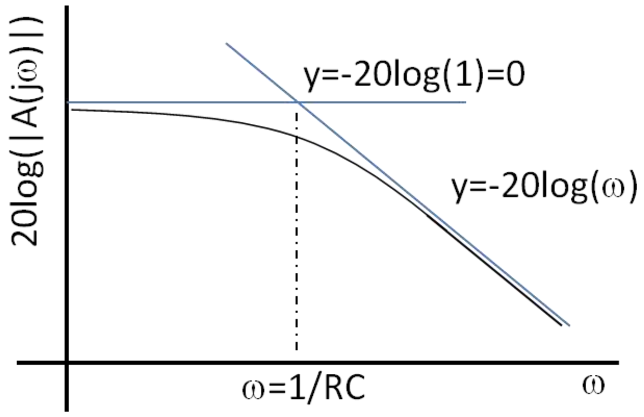
(El valor medio de sen 2ω t es cero y el valor medio de $sen^2 \omega t$ es ½, siendo

ε_e I_e los valores eficaces , cos φ es el factor de potencia

7.8 Diagrama de bode

El Diagrama de Bode es La representación en frecuencia, analizando la funcion de trasferencia (vsalida/ventrada)



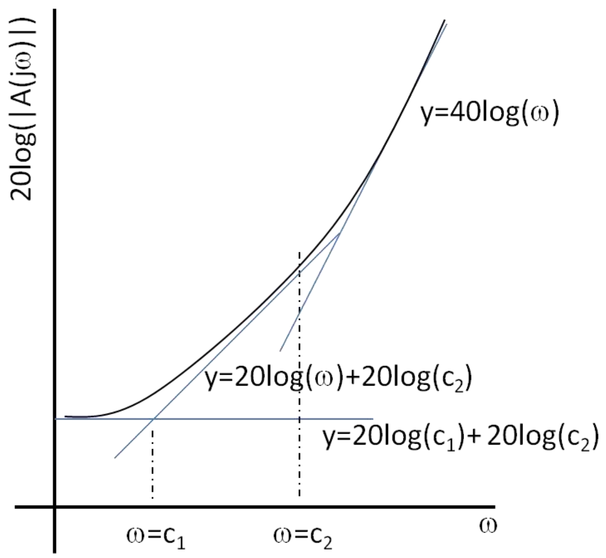


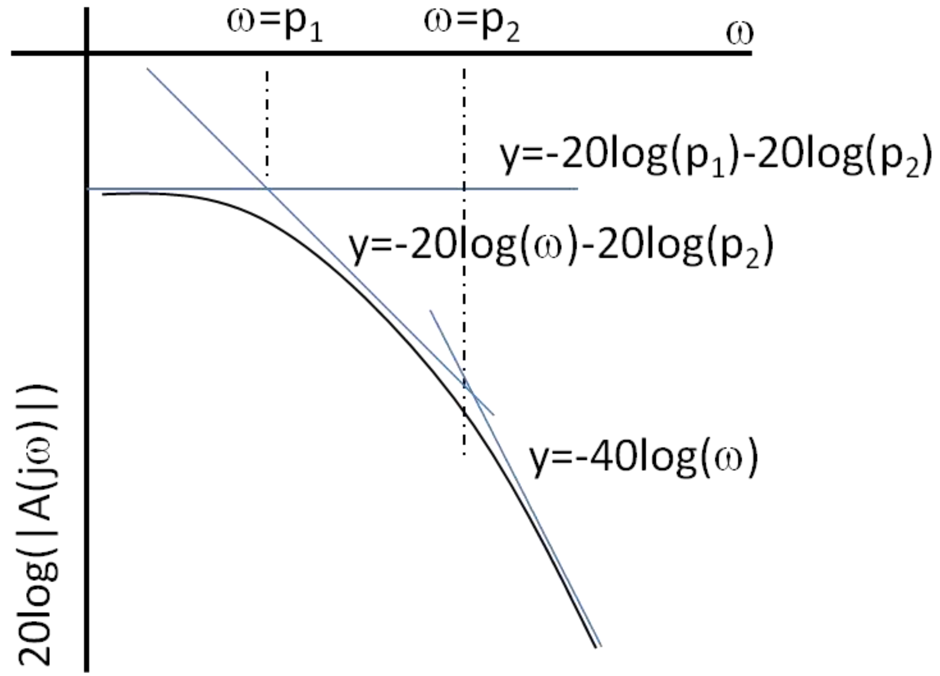
Con un cero: $A(jw)=K\cdot(jw+c_1)$. (circuito CR)
El módulo $|A(jw)|=(c_1^2+w^2)^{1/2}$
$|A(jw)|$ (db)$=20\cdot\log(|A(jw)|)= 20\cdot(1/2)\cdot\log(c_1^2+w^2)$

Con un polo: $A(jw)=1/(jw+p_1)$. (un circuito RC)
$|A(jw)|=(p_1^2+w^2)^{-1/2}$
$|A(jw)|$ (db)$=20\cdot\log(|A(jw)|)= -20\cdot(1/2)\cdot\log(p_1^2+w^2)$.

7.8 Diagrama de bode

El Diagrama de Bode es La representación en frecuencia, analizando la función de trasferencia (vsalida/ventrada)





Con dos ceros: $A(jw)=(jw+c_1)(jw+c_2)$

Se tiene su módulo expresado en decibelios:

$|A(jw)|$ (db)= $20\cdot(1/2)\cdot\log(c_1^2+w^2) + 20\cdot(1/2)\cdot\log(c_2^2+w^2)$ -

Con dos polosA $(jw)=1/(jw+p_1)\ 1/(jw+p_2)$

$|A(jw)|$ (db)= $-20\cdot(1/2)\cdot\log(p_1^2+w^2) -20\cdot(1/2)\cdot\log(p_2^2+w^2)$