DERIVADA: INTERPRETACIÓN Y PROPIEDADES

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in D$

Diremos que f es DERIVABLE en x_0 si

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

A dicho límite se le denomina la DERIVADA de f en x_0 y lo denotaremos mediante

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>Def</u>: Sea $D' = \{ x \in D : f \text{ es derivable en } x \}$

La función $f' : D' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

se denomina "función derivada de f".

<u>Ejemplos</u>:

1) $f(x) = x$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$f'(x) = 1 \quad \forall x$

2) $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) \underset{\text{función continua}}{=} x_0 + x_0 = 2x_0$$

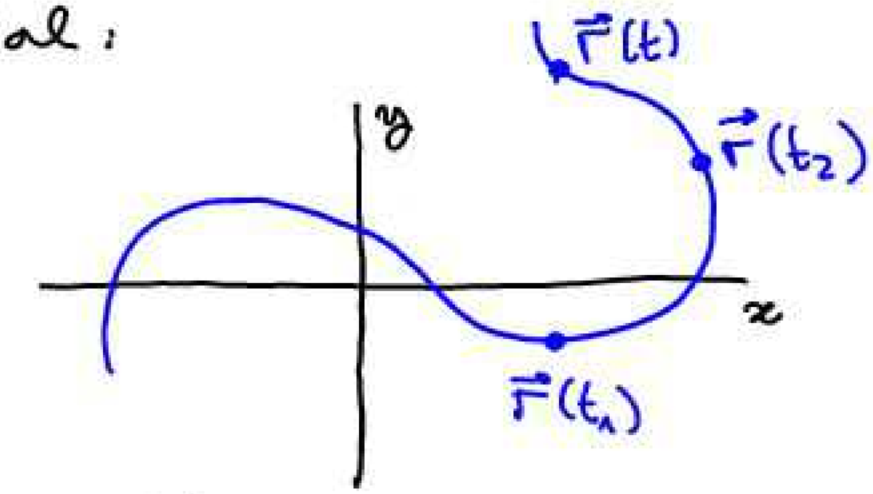
$f'(x) = 2x \quad \forall x$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA: VELOCIDAD

El movimiento de una PARTÍCULA PUNTUAL en $\mathbb{R}^2$ está descrito por una función vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}(t) \end{aligned}$$

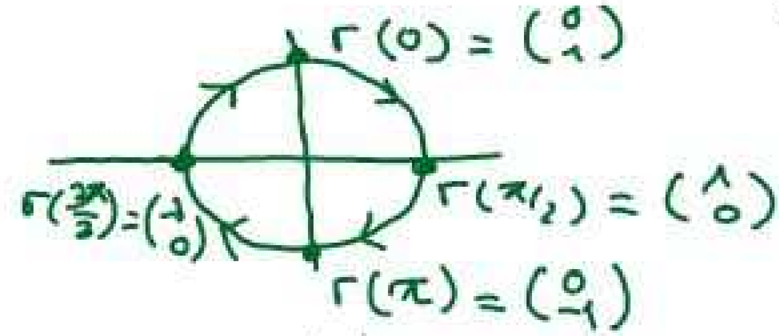
TIEMPO — POSICIÓN en el TIEMPO t



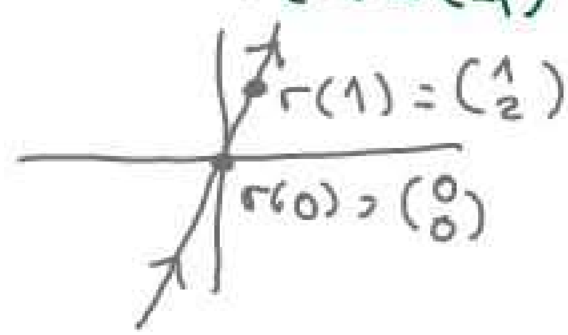
Puesto que $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, para describir la posición en el tiempo t necesitamos dar <u>dos</u> funciones reales de variable real: $x(t)$ & $y(t)$

<u>Ejemplos:</u>

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$



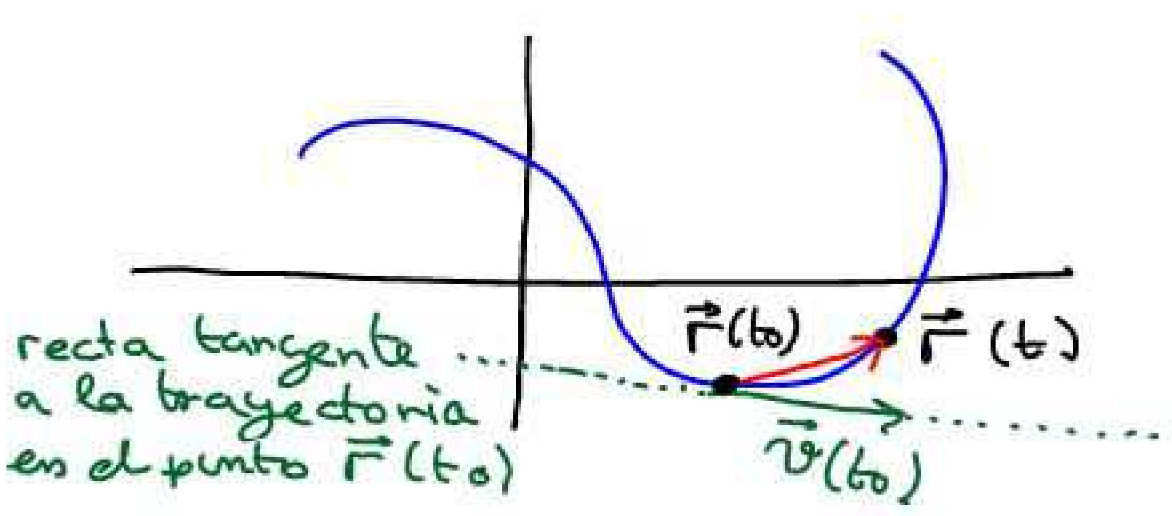
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$



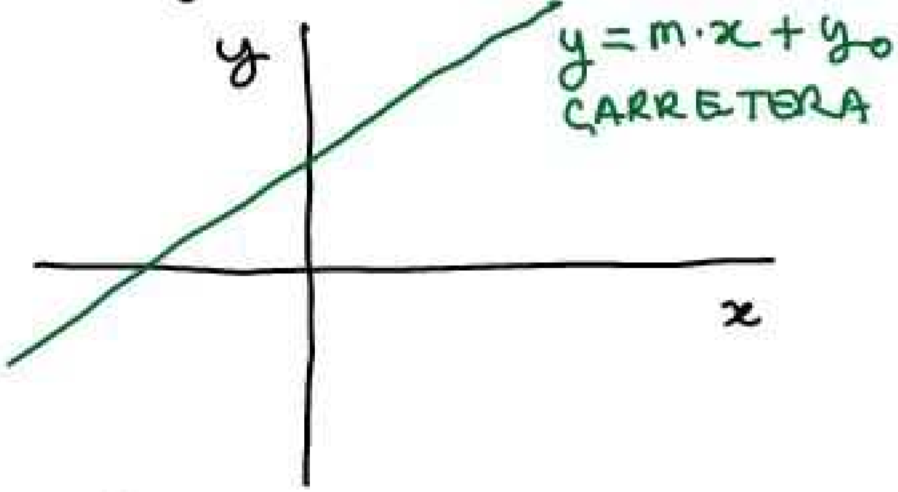
<u>Def</u>: VELOCIDAD en el INSTANTE t_0:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \right) =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$



• Para fijar ideas, supongamos que la partícula está obligada a moverse siguiendo una CARRETERA RECTA:



En ese caso, el movimiento viene dado por una función:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ m\cdot x(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

La velocidad en el instante t es, por tanto:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ m\,x'(t) \end{pmatrix}$$

En principio, el movimiento anterior puede ser muy complicado, pero si imponemos que la velocidad sea constante (independiente de t):

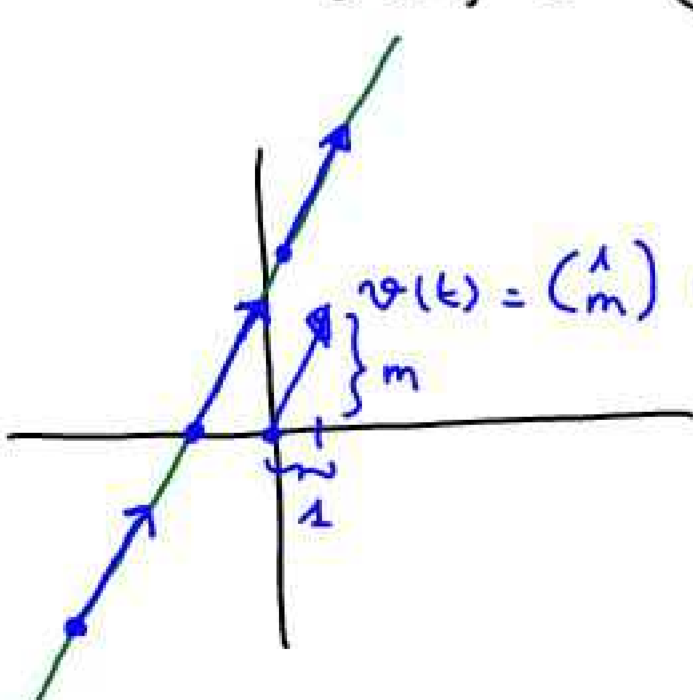
$$x(t) = \alpha t \Rightarrow x'(t) = \alpha$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ m\alpha \end{pmatrix}$$

En concreto, si $\alpha = 1 \Rightarrow x = t$ de manera que:

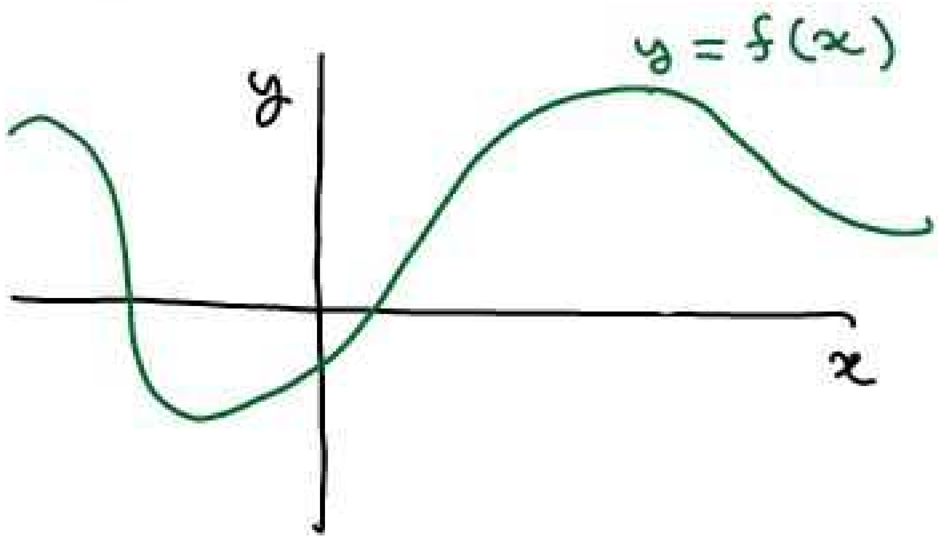
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \forall t$$

pendiente de la recta



$v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vector:
- constante
- "tangente" a la carretera
- su segunda componente es la pendiente de la carretera (recta)

• Supongamos ahora que la carretera por la que ha de moverse la partícula es la GRÁFICA de una FUNCIÓN $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



En este caso, el movimiento es de la forma:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{pmatrix}$$

Si además suponemos que $x(t) = t$ se tiene que:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \text{ó bien} \quad \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

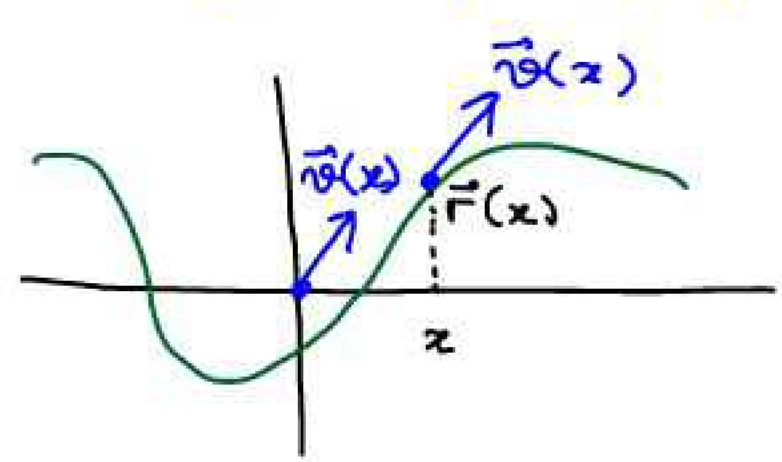
$(x = t)$

De esta manera, la velocidad en el "instante x" es:

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

- $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica (carretera) en el punto $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$

- El vector $\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$ es "tangente" a la gráfica en el punto $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$



PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Aunque la derivada está definida a través de un límite, en muchos casos (aunque NO en todos) podremos calcular la derivada de una función usando los siguientes teoremas:

TEOREMA 1: Si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0

$$\left[\text{Si } f \text{ no es continua en } x_0 \Rightarrow \nexists f'(x_0) \right]$$

TEOREMA 2: Supongamos que $\exists f'(x_0)$ & $g'(x_0)$

entonces:

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Leibniz)
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (si $g(x_0) \neq 0$)

TEOREMA 3: REGLA DE LA CADENA

Si $\exists f'(g(x_0))$ & $\exists g'(x_0)$, se cumple que:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

obs: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
"f compuesta con g"

Aplicación: Derivada de la función inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in D$$

$$\underset{\substack{\text{Regla de la}\\ \text{cadena}}}{\Longrightarrow} \quad (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\underset{(f'(x)\neq 0)}{\Longrightarrow} \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Por tanto: $\boxed{(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

Ejemplos:

- $f(x) = x \implies f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2 = x \cdot x \underset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2 \underset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$

  $\forall x \in \mathbb{R}$
- Usando inducción:

  $f(x) = x^n = x \cdot x^{n-1} \implies f'(x) = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Asumiré que:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ \exp'(x) &= \exp(x) \end{aligned}\right. \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicios:

① Calcula $\arccos'(x)$ para los x's que tenga sentido:

Usando: $\arccos(\cos(x)) = x$

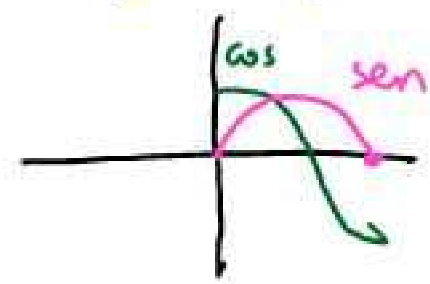
$$\arccos'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = 1$$

$$-\operatorname{sen}(x) \arccos(\cos(x)) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$(\operatorname{sen} x > 0)$

$$\boxed{\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in (-1, 1)}$$

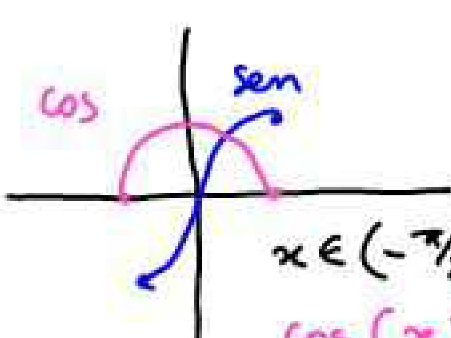


$x \in (0, \pi)$

② Calcula $\operatorname{arcsen}'(x)$ para los x's que tenga sentido:

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = x \Rightarrow \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen}' x = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) \cdot \operatorname{arcsen}'(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$



$x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\cos(x) > 0$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}$$

Por tanto: $\boxed{\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in (-1, 1)}$

③ Calcula $\arctan'(x)$ para los x's que tenga sentido:

$$\arctan(\tan x) = x \Rightarrow \arctan'(\tan x)\cdot \tan' x = 1$$

$$\Rightarrow \arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan' x}$$

Obs: $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$$\Rightarrow \tan' x = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \arctan'(\tan x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Por tanto:

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

④ Calcula $\log'(x)$ para los x's que tenga sentido:

$$\log(e^x) = x \Rightarrow \log'(e^x)\cdot e^x = 1$$

$$\Rightarrow \log'(e^x) = \frac{1}{e^x}$$

Por tanto: $\boxed{\log'(y) = \dfrac{1}{y} \quad \forall y > 0}$