Problema 4.3

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- La función $x \mapsto x\cos(1/x)$ es una función elemental con dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- En $x=0$ se tiene que:

(ver observación)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0 = f(0)$$

para calcular el límite $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = x\cos(1/x)$

$\Rightarrow f$ también es continua en $x=0$

- La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Obs: Si $a(x)$ es una función acotada $\left(m \leq a(x) \leq M \;\; \forall x\right)$

$c(x)$ es tal que $\lim_{x\to x_0} c(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} c(x)\cdot a(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \in (0,1) \\ \cos(\pi|2-x^2|) + 1 & \text{si} \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$\boxed{x \in (-\infty, 0]}$ En esta región $g(x) = e^x$ es una función elemental. Por tanto:

- g es continua $\forall x \in (-\infty, 0)$

  puntos a los que nos podemos acercar por derecha e izquierda

- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x \underset{\substack{\uparrow \\ e^x \text{ es continua}}}{=} e^0 = 1$

$\boxed{x \in (0,1)}$ En esta región $g(x) = x^2 - x$ es una función elemental. Por tanto:

- $g(x)$ es continua en $x \in (0,1)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - x) \underset{\uparrow}{=} 0^2 - 0 = 0$

  $x^2 - x$ es continua

  $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - x) \overset{\downarrow}{=} 1^2 - 1 = 0$

$\boxed{x \in [1, \infty)}$ En esta región $g(x) = \cos(\pi|2-x^2|) + 1$ es composición de funciones continuas. Por tanto:

- $g(x)$ es continua en $x \in (1, \infty)$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\cos(\pi|2-x^2|) + 1 \right) \overset{\text{función continua}}{=}$

  $= \cos(\pi) + 1 = 0$

Usando los resultados anteriores se tiene que:

- $g(x)$ es continua en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- g es discontinua en $x=0$ ya que:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

- Nótese que g es continua en $x=1$ ya que:

$$g(1) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x)$$