



CÁLCULO

22 de junio, 2017

EXAMEN EXTRAORDINARIO

Grado en Ingeniería Informática

APELLIDOS			
NOMBRE		GRUPO	

Problema 1. Considera la sucesión monótona *creciente* definida por la siguiente formula de recurrencia

$$a_0 = 1, \\ a_n = \sqrt{\frac{2 + 3a_{n-1}}{2}}, \quad n \geq 1.$$

(a) [1 punto] Demuestra que la sucesión es acotada.

(b) [1 punto] Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

SOLUCIÓN

Supongamos que la sucesión tiene límite finito, esto es $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Pues, tomando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados de la formula de recurrencia de la sucesión, tenemos

$$a = \sqrt{\frac{2 + 3a}{2}} \implies a^2 = \frac{3}{2}a + 1 \implies a = -\frac{1}{2}, 2,$$

donde el valor $a = -1/2$ debemos descartarlo porque la sucesión es creciente y tiene términos positivos. Entonces, $a = 2$ es el único *candidato* a ser el valor del límite.

Ahora, demostramos por *inducción* que la sucesión es acotada, esto es $0 \leq a_n \leq 2$ para $n \geq 0$. Primero, dicha propiedad vale para $n = 0$, pues $0 \leq a_0 = 1 \leq 2$. Luego, suponiendo que $0 \leq a_k \leq 2$ para $k \geq 0$ genérico, obtenemos

$$0 \leq a_{k+1} = \sqrt{\frac{2 + 3a_k}{2}} \leq \sqrt{\frac{2 + 6}{2}} = 2.$$

Por tanto, la sucesión es acotada y tiene límite finito cuyo valor es $a = 2$, como calculado anteriormente.

Problema 2. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x \neq 0 \\ \pi & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) [1 punto] Demuestra que la función f es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) [1 punto] Encuentra para que $x \in \mathbb{R}$ la función f es creciente.
-

SOLUCIÓN

Para $x \neq 0$, f es derivable siendo composición de funciones derivables y tenemos

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4 + 1},$$

mientras que, para $x = 0$, obtenemos

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi}{2} - \pi}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x^4 + 1} = 0,$$

donde la regla de l'Hôpital se ha usado en la penúltima igualdad. Entonces, f es derivable en $x = 0$ también. Además, f es creciente para $x < 0$ porque $f'(x) > 0$ cuando x es negativa.

Problema 3. Sea $F(x) = \int_0^{x^3} \ln \left(t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \right) dt$.

- (a) [1.5 puntos] Encuentra y clasifica los extremos *locales* de $F(x)$ para $x \in (0, 1)$.
- (b) [1.5 puntos] Usa el polinomio de Maclaurin de grado 3 de $F(x)$ para estimar $F(0,2)$.
-

SOLUCIÓN

- (a) Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos $F'(x) = 3x^2 \ln \left(x + \frac{1}{2} \right)$. Por tanto, el único punto crítico en el intervalo $(0, 1)$ es $x = 1/2$. Además, F es decreciente para $x < 1/2$ ($F' < 0$) y creciente para $x > 1/2$ ($F' > 0$). Entonces, $x = 1/2$ es un mínimo local.
- (b) El polinomio de Maclaurin de grado 3 para $F(x)$ es $P_3(x) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) x^3$, por tanto tenemos

$$F(0,2) \approx \ln \left(\frac{1}{2} \right) (0,2)^3 \approx -0,0055.$$

Problema 4. [1.5 puntos] Calcula $\int_e^5 \frac{dx}{x \ln(x)}$.

SOLUCIÓN

Aplicando el cambio de variable $u = \ln(x)$ ($du = dx/x$) tenemos

$$\int_e^5 \frac{dx}{x \ln(x)} = \int_1^{\ln(5)} \frac{du}{u} = \ln(\ln(5)) - 0 = \ln(\ln(5)).$$

Problema 5. [1.5 puntos] Estudia la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2} dx$.

SOLUCIÓN

La integral converge porque, por ejemplo, podemos escribir

$$\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2} dx = \int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2} dx,$$

donde la primera integral de la derecha converge gracias al criterio de comparación al límite con $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ y la segunda integral converge gracias al criterio de comparación al límite con $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$.