Grado de Ingeniería Informática. Cálculo. Grupo 84. Control 1. Versión A.
17 de Octubre de 2011.

Problema 1: Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-2x}+2}$$

Problema 2: Dada la siguiente función:

$$f(x) = \ln\left((\sqrt{x}-2)^2\right)$$

1. **hallar su función derivada.**
2. **hallar sus máximos y mínimos relativos.**
3. **indicar los intervalos en que es creciente o decreciente.**

Grado de Ingeniería Informática. Cálculo. Grupo 84. Control 1. Versión B.
17 de Octubre de 2011.

Problema 1: Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

Problema 2: Dada la siguiente función:

$$f(x) = e^{-\frac{3}{x^2}}$$

1. **hallar su función derivada.**
2. **hallar sus máximos y mínimos relativos.**
3. **indicar los intervalos en que es creciente o decreciente.**

Grado de Ingeniería Informática. Cálculo. Grupo 84. Control 1. Versión A.
17 de Octubre de 2011.

Problema 1: Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-2x} + 2}$$

Solución. Se trata de una indeterminación del tipo infinito entre infinito, puesto que los exponentes de las exponenciales tienden realmente a más infinito. La solución consiste en multiplicar numerador y denominador por 2^x.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x} \cdot 2^x}{(2^{-2x} + 2) \cdot 2^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2^{-x} + 2^{x+1}} = 0$$

La primera exponencial del denominador tiende a infinito y la segunda a cero, de modo que la fracción tiende a cero. Alternativamente se hubiera podido emplear la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-2x} + 2} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2^{-x} \cdot \ln 2}{-2 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-2x+1}} = \\ &= \lim_{x \to -\infty} 2^{-x-(-2x+1)} = \lim_{x \to -\infty} 2^{x-1} = 0 \end{aligned}$$

Problema 2: Dada la siguiente función:

$$f(x) = \ln\left((\sqrt{x} - 2)^2\right)$$

1. **hallar su función derivada.**

   Solución: Se trata de un logaritmo neperiano, así que la derivada es el cociente de la derivada de la función partido por la propia función.

   $$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$$

2. **hallar sus máximos y mínimos relativos.**

   Solución. Igualando a 0 la derivada se puede ver que no hay puntos críticos, porque el numerador no se anula. Hay que notar, sin embargo, que la función está definida para $x \geq 0$, para que la raíz tenga sentido, con la excepción del valor $x = 4$, que hace cero la función de la que se ha de obtener el logaritmo, y donde ni f ni f' están definidas.

3. **indicar los intervalos en que es creciente o decreciente.**

   Solución. Como no hay puntos críticos, el crecimiento o decrecimiento será constante en el dominio, o, al menos el los distintos intervalos que lo componen, el $[0, 4)$ y el $(4, \infty)$. Sustituyendo valores en la derivada:

   $$f'(1) = -1 < 0$$

   $$f'(9) = \frac{1}{3} > 0$$

   La función es decreciente en $[0, 4)$ y creciente en $(4, \infty)$.

Grado de Ingeniería Informática. Cálculo. Grupo 84. Control 1. Versión B.
17 de Octubre de 2011.

Problema 1: Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x^2-9}}$$

Solución: Se pueden estudiar los dos polinomios, y resulta que $x^2+6x+9 = (x+3)^2$ y que $x^2-9=(x+3)(x-3)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x^2-9}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^2}{\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}/x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-3}/x^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1+3/x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1/x^2-3/x^3}} = \infty\end{aligned}$$

De modo más sencillo, si dividimos numerador y denominador por x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+6x+9)/x^2}{\sqrt{x^2-9}/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+6/x+9/x^2}{\sqrt{1/x^2-9/x^4}} = \infty$$

Problema 2: Dada la siguiente función:

$$f(x) = e^{-\frac{3}{x^2}}$$

1. **hallar su función derivada.**

   Solución:
   $$f'(x) = \frac{6}{x^3} e^{-\frac{3}{x^2}}$$

2. **hallar sus máximos y mínimos relativos.**

   Solución: La función derivada no se anula en ningún punto, de modo que no existen máximos ni mínimos relativos. Hay que darse cuenta de que ni la función f ni la derivada f' están definidas en $x=0$.

3. **indicar los intervalos en que es creciente o decreciente.**

   Solución: El crecimiento o decrecimiento de la función es constante en cada uno de los intervalos sobre los que está definida, ya que no hay máximos ni mínimos en que pueda cambiar de creciente a decreciente o viceversa. En $(-\infty,0)$ la derivada tendrá el mismo signo que en -1 y $f'(-1) = -6e^{-3} < 0$. Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty,0)$. En $x=1$ es $f'(1) = 6e^{-3} > 0$ y la función será creciente en todo el intervalo $(0,\infty)$.