
P1 (2 ptos) Definir de forma breve y concisa los siguientes conceptos:

a) (0.5 ptos) Proyección ortogonal de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^n$.

b) (0.5 ptos) Matrices equivalentes por filas.

c) (0.5 ptos) Imagen de una transformación lineal.

d) (0.5 ptos) Autovalor de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

P2 (2 ptos) Dado el siguiente subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^5$:

$$W = \text{gen}([1,0,0,0,1],\ [1,1,0,0,1],\ [0,1,1,0,0],\ [1,1,1,0,1])$$

a) (1 pto) Encontrar un sistema de ecuaciones lineales que defina W.

b) (1 pto) Encontrar una base del complemento ortogonal de W.

P3 (2 ptos) Encontrar una descomposición QR de la siguiente matriz A y comprobar el resultado.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P4 (2 ptos) Obtener una descomposición en valores singulares de la siguiente matriz A y comprobar el resultado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

P5 (2 ptos) Dada la siguiente tabla de valores:

x	1	-1	0	0
y	1	1	1	0
z	1	-1	0	0

a) (1.5 ptos) Encontrar el ajuste por mínimos cuadrados a la función: $z = a + bx + cy^2$.

b) (0.5 ptos) Obtener el error del ajuste.

---

1 Soluciones

P1

a) La proyección ortogonal de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^n$ es el vector $\vec{w} \in W$ correspondiente a la mejor aproximación de $\vec{v}$ a W. Su valor viene determinado por:

$$\vec{w} = \text{proy}_W(\vec{v}) = \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + \cdots + \text{proy}_{\vec{u}_k}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(\frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k}\right)\vec{u}_k$$

donde $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k\}$ es una *base ortogonal* de W.

b) Se dice que una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a otra matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si podemos obtener una a partir de la otra, aplicando únicamente operaciones elementales por fila (intercambio de filas, multiplicación de una fila por una constante no nula y adición del múltiplo de una fila a otra).

c) Sea una transformación lineal T entre un **espacio dominio** X a otro **espacio imagen** Y.

$$T : X \longmapsto Y \qquad ; \qquad \vec{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \xrightarrow{T} [y_1, y_2, \cdots, y_m] = \vec{y} \qquad ; \qquad \vec{y} = T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Se denomina **imagen** de T al subespacio vectorial del espacio imagen Y formado por el conjunto de vectores $\vec{y} \in Y$ que son *imagen* de algún vector $\vec{x}$ del *espacio dominio* X.

$$\text{im}(T) = (\vec{y} \in Y : \ \ \vec{y} = T(\vec{x}) \ \ \text{para algún } \vec{x} \in X)$$

d) Sea una matriz *cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Un *escalar* real o complejo $\lambda \in \mathbb{K}$ se denomina **autovalor** o **valor propio** de A si existe un vector (real o complejo) no nulo $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ tal que:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

P2

a) Primero determinamos una base de W.

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\1&1&1&0&1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{[1,0,0,0,1],\ [0,1,0,0,0],\ [0,0,1,0,0]\}$$

Por tanto $\vec{x} \in W$ si:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = t\\ x_2 = s\\ x_3 = r\\ x_4 = 0\\ x_5 = t \end{cases}$$

Como dim(W)=3 en $\mathbb{R}^5$, necesitamos un sistema de 2 ecuaciones linealmente independientes para definir W. Por ejemplo:

$$\boxed{W : \begin{cases} x_1 - x_5 = 0\\ x_4 = 0 \end{cases}}$$

b) Determinamos el complemento ortogonal de W, teniendo en cuenta que:

$$W : \begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A\vec{x} = \vec{0}$$

El subespacio W se puede entender como el núcleo de una matriz A, por tanto:

$$W = \ker(A) \quad \Longrightarrow \quad W^\perp = [\ker(A)]^\perp = \text{fil}(A) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{B}_{W^\perp} = \{[1,0,0,0,-1],\ [0,0,0,1,0]\}}$$

P3

$$A = QR$$

Calculamos Q mediante G-S:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = [0,0,1,0]$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como ya están normalizados:

$$\boxed{Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Calculamos R:

$$\boxed{R = Q^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Comprabamos el resultado

$$QR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

P4

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz es diagonal, los autovalores son los elementos de la diagonal princial. Los ordenamos de mayor a menor y obtenemos los valores singulares haciendo la raíz cuadrada:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \implies \sigma_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \implies \sigma_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \implies \sigma_3 = 1 \end{array}\right\} \implies \boxed{\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Calculamos los autovectores (vectores columna de la matriz V):

$\underline{\lambda_1 = 4}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = t \\ v_3 = 0 \end{cases} \implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_{2,3} = 1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = 0 \\ v_3 = s \end{cases} \implies \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Finalmente calculamos los vectores de la matriz U:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sigma_3} A\vec{v}_3 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Comprobamos el resultado:

$$U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

P5

a) Con los datos de la tabla formamos el sistema de ecuaciones lineales:

$$z = a + bx + cy^2 \rightarrow \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ a-b+c &= -1 \\ a+0+c &= 0 \\ a+0+0 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Buscamos la solución de mínimos cuadrados del sistema mediante las ecuaciones normales:

$$A^T A\vec{s} = A^T\vec{b} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \\ A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}}$$

b) Error:

$$e = \|\vec{e}\| = \|A\vec{p} - \vec{b}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \boxed{0}$$