DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Teorema.- Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre el cuerpo de los números reales:

A es simétrica si, y sólo si, es ortogonalmente diagonalizable, ésto es, $D = P^T A P$, con P ortogonal y con los autovalores de A (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades) en la diagonal principal de D

Demostración de $\Rightarrow$ (inducción en el orden de la matriz).-

Las dos partes del teorema son claramente ciertas cuando el orden $k = 1$.

Supongamos el teorema válido para $k = n$.

Sea A, ahora, de orden $n + 1$.

Sea λ_1 un autovalor de A asociado al autovector v_1 normalizado; v_1 se puede usar para completar una base ortonormal.

Sea $\{v_1, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ortonormal, luego la matriz $U = [v_1\ w_1\ w_2 \ldots w_n] = [v_1\ \ W]$ es ortogonal.

Sea, ahora, $A' = U^T A U = [v_1 \; W]^T A \, [v_1 \; W] =$

$= [v_1 \;\; W]^T \, [Av_1 \;\; AW\,] = [v_1 \;\; W]^T \, [\lambda_1 v_1 \;\; AW\,] =$

$$= \begin{bmatrix} v_1^T \\ W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \lambda_1 v_1 & v_1^T AW \\ W^T \lambda_1 v_1 & W^T AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & v_1^T AW \\ 0 & C \end{bmatrix} =$$

Como A′ es semejante a A, tiene los mismos autovalores, incluyendo sus multiplicidades.

Luego

$$\det(A' - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda).\det(C - \lambda I)$$

Por lo tanto el espectro de A es el mismo de C, además de λ_1, por lo que la hipótesis inductiva es válida, ya que C es de orden n, luego existirá V, ortogonal tal que

$V^TCV = D'$ que será diagonal.

Sea ahora

$$P = U\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^T \end{bmatrix} U^T A U \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & CV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & V^T C V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{bmatrix}$$

que es diagonal.