

# 2. Teoría de Autómatas

Grado Ingeniería Informática  
Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

uc3m

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso




- Introducción
- Tipos de autómatas
- Aplicaciones
- Lenguajes Formales

uc3m

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

( 2 )



# Introducción y definiciones

- Se trata de saber qué (y qué no) se puede computar.

Y además...

**cómo de rápido,  
con cuánta memoria y  
con qué modelo de computación.**

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

{ 3 }

uc3m



# Introducción y definiciones

- Qué se entiende por **computación**?
- La Teoría de Autómatas se centra en la computación en sí, no en detalles sobre dispositivos de entrada y salida.  
(Así, no se trata de crear modelos matemáticos para un video juego, por ejemplo).

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

{ 4 }

uc3m



# Autómata

Definición RAE

## **autómata.**

(Del lat. automāta, t. f. de -tus, y este del gr. αὐτόματος, espontáneo).

1. m. Instrumento o aparato que encierra dentro de sí el mecanismo que le imprime determinados movimientos.
2. m. Máquina que imita la figura y los movimientos de un ser animado.
3. m. coloq. Persona estúpida o excesivamente débil, que se deja dirigir por otra.

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 5 ]

uc3m



# Modelo Matemático

## **Autómata:**

Modelo Matemático de computación.

Dispositivo abstracto con capacidad de computación.

## **Teoría de Autómatas:**

Abstracción de cualquier tipo de computador y/o lenguaje de programación.

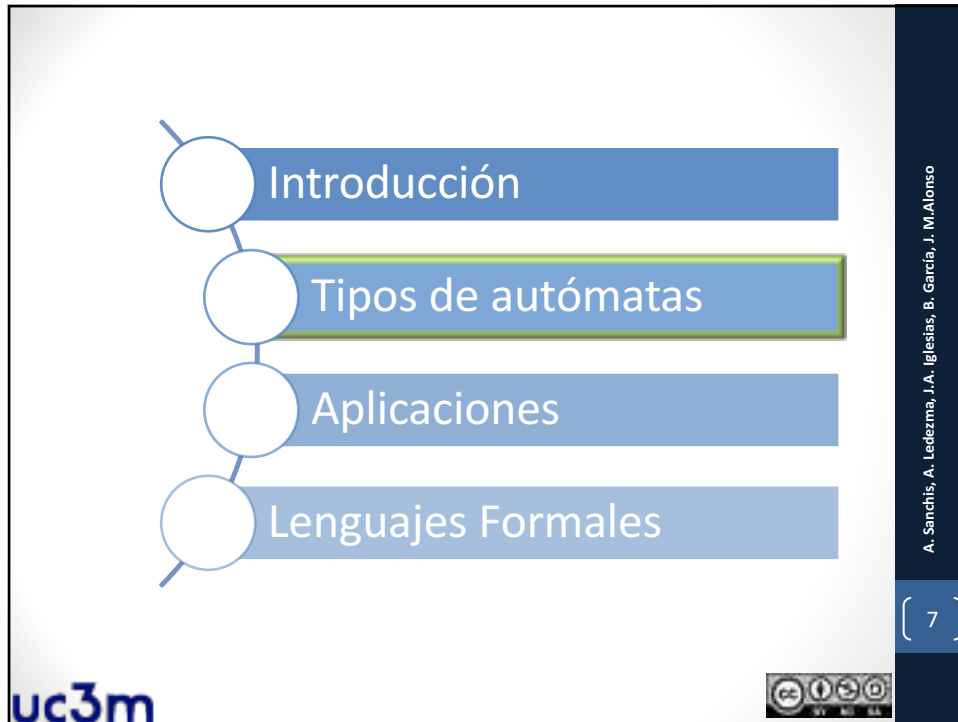
Desglose en sus elementos básicos (Entrada, Estado, Transición, Salidas y elementos auxiliares)

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 6 ]

uc3m





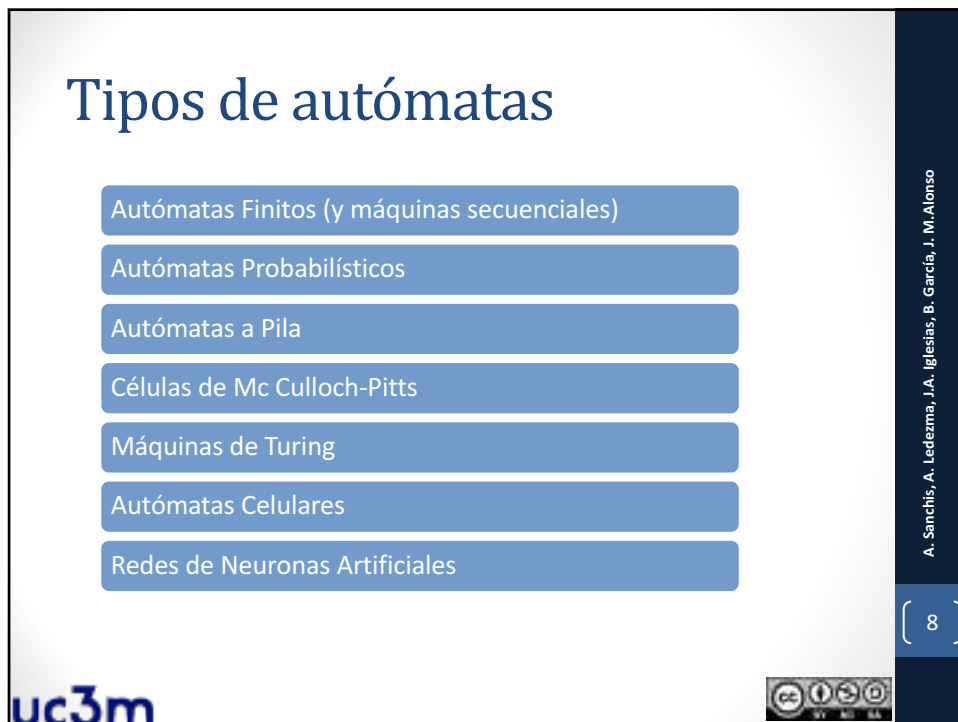
A vertical table of contents with four items, each preceded by a white circle connected by a line. The items are: 'Introducción', 'Tipos de autómatas' (highlighted with a green border), 'Aplicaciones', and 'Lenguajes Formales'. The slide includes a 'uc3m' logo at the bottom left, a Creative Commons license icon at the bottom right, and a vertical sidebar on the right with the authors' names and a page number '7' in brackets.

- Introducción
- Tipos de autómatas
- Aplicaciones
- Lenguajes Formales

uc3m

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 7 ]



A slide titled 'Tipos de autómatas' listing seven types of automata in blue rounded rectangles. The list includes: 'Autómatas Finitos (y máquinas secuenciales)', 'Autómatas Probabilísticos', 'Autómatas a Pila', 'Células de Mc Culloch-Pitts', 'Máquinas de Turing', 'Autómatas Celulares', and 'Redes de Neuronas Artificiales'. The slide includes a 'uc3m' logo at the bottom left, a Creative Commons license icon at the bottom right, and a vertical sidebar on the right with the authors' names and a page number '∞' in brackets.

## Tipos de autómatas

- Autómatas Finitos (y máquinas secuenciales)
- Autómatas Probabilísticos
- Autómatas a Pila
- Células de Mc Culloch-Pitts
- Máquinas de Turing
- Autómatas Celulares
- Redes de Neuronas Artificiales

uc3m

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ ∞ ]

## Tipos de autómatas

Autómatas Finitos

Autómatas Probabilísticos

Autómatas a Pila

Células de Mc Culloch-Pitts

Máquinas de Turing

Autómatas Celulares

Redes de Neuronas Artificiales

Turing estudió una máquina abstracta con la misma capacidad que los computadores actuales desde el punto de vista de lo que son capaces de hacer.



A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso



uc3m



## Tipos de autómatas

Autómatas Finitos (y máquinas secuenciales)

Autómatas Probabilísticos

Autómatas a Pila

Células de Mc Culloch-Pitts

Máquinas de Turing

Autómatas Celulares

Redes de Neuronas Artificiales

Mayor  
capacidad de  
cómputo.

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

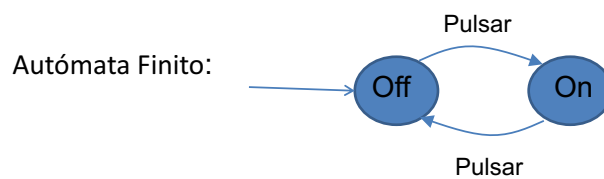


uc3m



# Autómatas y Algoritmos

- La máquina de Turing es un modelo matemático abstracto que formaliza el concepto de algoritmo
- Todo Autómata puede ser transformado en un algoritmo y a la inversa.



A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 11 ]

uc3m



# Autómatas Discretos, continuos e híbridos

Criterio: Entradas

- Suelen ser DISCRETOS:

Autómatas Finitos (y máquinas secuenciales)

Autómatas a Pila

Máquinas de Turing

- Son DISCRETOS, CONTÍNUOS Y/O HÍBRIDOS:

Autómatas Celulares

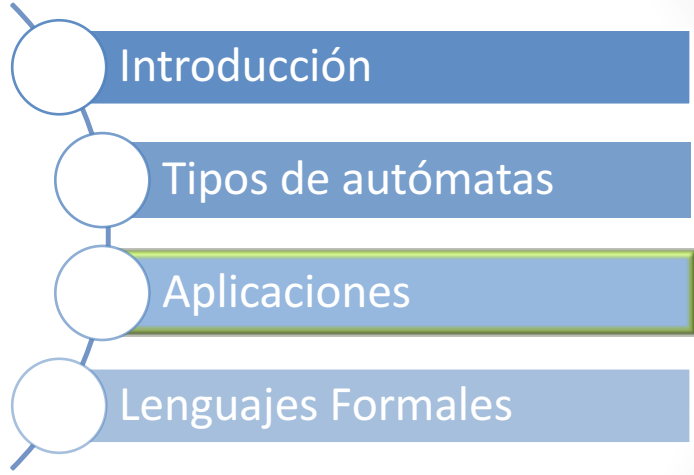
Redes de Neuronas Artificiales

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 12 ]

uc3m





Introducción

Tipos de autómatas

Aplicaciones

Lenguajes Formales

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

( 13 )

uc3m

## Aplicaciones de los autómatas

### El Juego de la Vida

- Ejemplo de un juego implementado usando un **autómata celular**. Diseñado por el matemático británico John Conway en 1970.
- El todo es más que la suma de las partes.
- Las transiciones dependen del número de células vecinas vivas:
  - Una célula muerta con exactamente 3 células vecinas vivas "nace" (al turno siguiente estará viva).
  - Una célula viva con 2 ó 3 células vecinas vivas sigue viva, en otro caso muere o permanece muerta (por "soledad" o "superpoblación").

<http://www.youtube.com/watch?v=XcuBvj0pw-E>

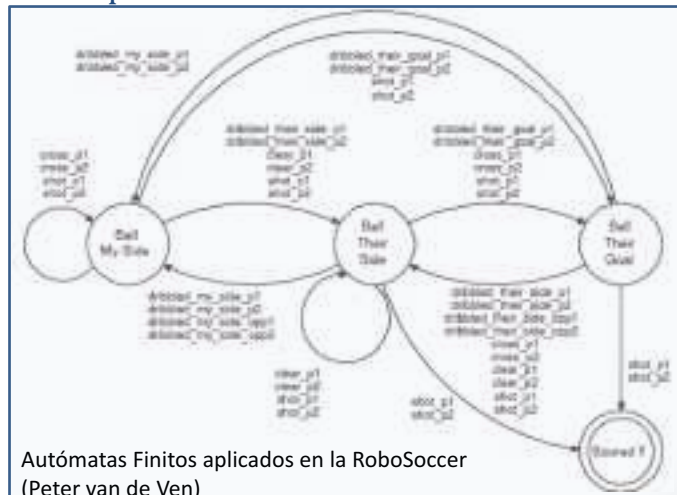
A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

( 14 )

uc3m

# Aplicaciones de los autómatas

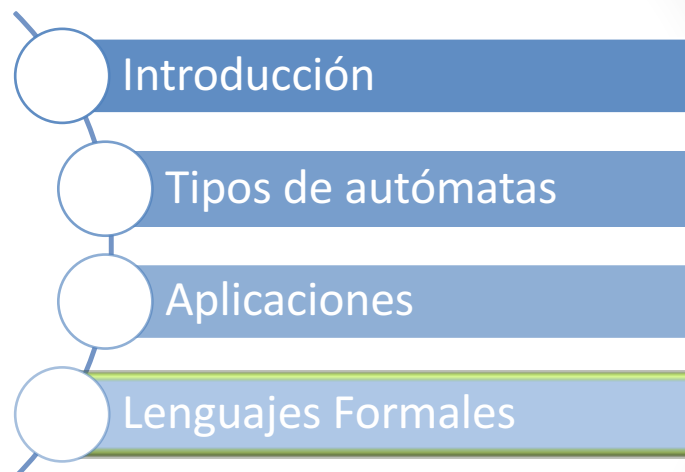
## Comportamiento de robots en la RoboSoccer



A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 15 ]

uc3m



A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

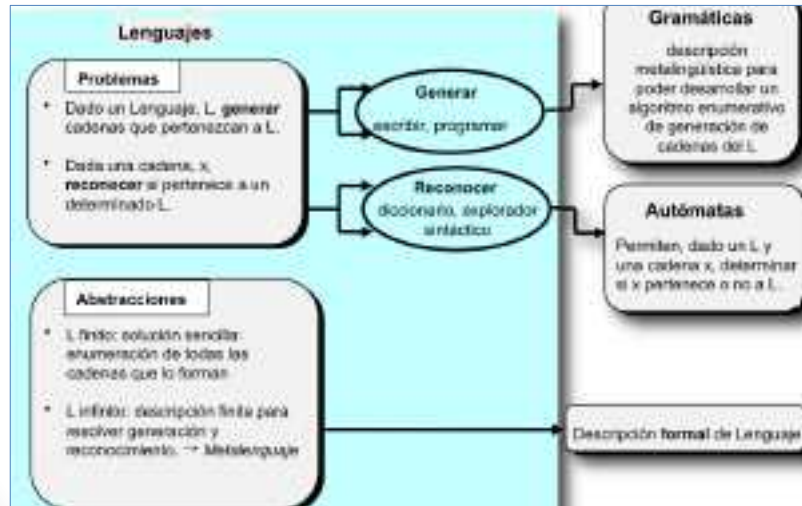
[ 16 ]

uc3m





# Lenguajes Formales



A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

uc3m



## Lenguajes Formales. Definiciones

**Símbolo:** Entidad abstracta, realmente no se define (análogo al punto en geometría). Son letras, dígitos, caracteres, etc. Forman parte de un alfabeto. También posible encontrar símbolos formados por varios caracteres, pej: IF, THEN, ELSE, ...

**Alfabeto ( $\Sigma$ ):** Conjunto finito no vacío de letras o símbolos.

Sea " $a$ " una letra y  $\Sigma$  un alfabeto, si  $a$  pertenece a ese alfabeto  $\Rightarrow$

$$a \in \Sigma$$

Ejemplos:

- $\Sigma_1 = \{A, B, C, \dots, Z\}$  alfabeto de las letras mayúsculas
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$  alfabeto binario
- $\Sigma_3 = \{IF, THEN, ELSE, BEGIN, END\}$  alfabeto de símbolos para programación.

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 18 ]

uc3m



## Lenguajes Formales. Definiciones

**Palabra:** toda secuencia finita de símbolos del alfabeto.

$\Sigma_1 = \{A, B, C, \dots, Z\}$ ; palabras sobre  $\Sigma_1$  JUAN, ISABEL, etc.

$\Sigma_2 = \{0, 1\}$ ; palabras sobre  $\Sigma_2$  00011101

$\Sigma_3 = \{IF, THEN, ELSE, BEGIN, END\}$ ;

palabras sobre  $\Sigma_3$  IFTHENELSEEND

Notación: se representan por letras minúsculas del final del alfabeto ( $x, y, z$ )

Ejem:  $x = \text{JUAN}$ ;  $y = \text{IFTHENELSEEND}$ ;  $z = 00001111111111$

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 19 ]

uc3m



## Lenguajes Formales. Definiciones

**Longitud de palabra:** número de símbolos que componen una palabra.

Se representa por  $|x|$

Ejemplos:

$\Sigma_1 = \{A, B, C, \dots, Z\}$ ;  $|x| = |\text{JUAN}| = 4$

$|y| = |\text{IFTHENELSEEND}| = 13$

$\Sigma_3 = \{IF, THEN, ELSE, BEGIN, END\}$ ;

$|y| = |\text{IFTHENELSEEND}| = 4$  **OJO!!!!**

**Palabra vacía  $\lambda$ :** Es aquella palabra cuya longitud es cero

Se representa por  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 0$

Sobre cualquier alfabeto es posible construir  $\lambda$

Utilidad: será el elemento neutro en muchas operaciones (concatenación, etc.) con palabras y lenguajes

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 20 ]

uc3m



## Lenguajes Formales. Definiciones

**Universo del discurso,  $W(\Sigma)$ :** conjunto de todas las palabras que se pueden formar con los símbolos de un alfabeto  $\Sigma$

También se denomina **Lenguaje Universal del alfabeto  $\Sigma$**

Se representa como  $W(\Sigma)$

Es un conjunto infinito (i.e. número infinito de palabras)

Ejemplo: sea  $\Sigma_4 = \{A,B\}$ ,  $W(\Sigma_4) = \{\lambda, A, B, AA, AB, BA, BB, AAA, \dots\}$  con un número  $\infty$  de palabras

### COROLARIO:

$\forall \Sigma, \lambda \in W(\Sigma) \Rightarrow$  La palabra vacía pertenece a todos los lenguajes universales de todos los alfabetos posibles

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

( 21 )

uc3m



## Lenguajes Formales. Operaciones

**Algunas operaciones importantes con palabras**, sobre palabras de un universo del discurso dado:

### Concatenación de palabras:

sean dos palabras  $x, y$  tal que  $x \in W(\Sigma)$ ,  $y \in W(\Sigma)$ , y sea

$|x| = i = |x_1x_2\dots x_i|$  e  $|y| = j = |y_1y_2\dots y_j|$ ,

se llama concatenación de  $x$  con  $y$ , a:

$x \cdot y = x_1x_2\dots x_i y_1y_2\dots y_j = z$ , donde  $z \in W(\Sigma)$

#### Propiedades de la concatenación:

- Operación cerrada
- Propiedad Asociativa
- Con elemento neutro
- No conmutativa

#### Definiciones:

- cabeza
- cola
- longitud de palabra

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

( 22 )

uc3m



## Lenguajes Formales. Operaciones

**Potencia de una palabra:** Reducción de la concatenación a los casos que se refieren a una misma palabra

- potencia *i-ésima* de una palabra es el resultado de concatenar esa palabra consigo misma *i* veces
- La concatenación es asociativa  $\Rightarrow$  no especificar el orden
- $x^i = x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$  ("x" *i* veces)
- $|x^i| = i \cdot |x|$  ( $i > 0$ )
- se cumple:
  - $x^1 = x$
  - $x^{1+i} = x \cdot x^i = x^i \cdot x$  ( $i > 0$ )
  - $x^{j+i} = x^j \cdot x^i = x^i \cdot x^j$  ( $i, j > 0$ )
- Si se define  $x^0 = \lambda$

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 23 ]

uc3m



## Lenguajes Formales. Definiciones

**Lenguaje (L):** Se denomina lenguaje sobre el alfabeto  $\Sigma$ :

- a todo subconjunto del lenguaje universal de  $\Sigma$ ,  $L \subset W(\Sigma)$
- a todo conjunto de palabras sobre un determinado  $\Sigma$   
(generado a partir del alfabeto  $\Sigma$ )

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 24 ]

uc3m



# Lenguajes Formales

## Lenguajes Especiales:

1.  $\phi$  = Lenguaje vacío,  $\phi \subset W(\Sigma)$
2.  $\{\lambda\}$  = Lenguaje de la palabra vacía
  - se diferencian en el número de palabras (cardinalidad) que los forman  $C(\phi) = 0$  mientras que  $C(\{\lambda\})=1$
  - se parecen en que  $\phi$  y  $\{\lambda\}$  son lenguajes sobre cualquier alfabeto
3. Un alfabeto es uno de los lenguajes generados por el mismo:  
 $\Sigma \subset W(\Sigma)$ , por ejemplo el chino

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 25 ]

uc3m



# Lenguajes Formales

## Concatenación de Lenguajes : Sobre un alfabeto dado $\Sigma$

Sean  $L_1$  y  $L_2$  definidos sobre el mismo alfabeto  $\Sigma$ ,  $L_1, L_2 \subset W(\Sigma)$ ;  
 se llama **concatenación** de dos lenguajes,  $L_1, L_2$  y se representa por  $L_1 \cdot L_2$  al lenguaje así definido:

$$L_1 \cdot L_2 = \{ x.y / x \in L_1 \text{ AND } y \in L_2 \}$$

Es el conjunto formado por palabras formadas por parte del primero seguidas de parte del segundo.

Operación cerrada Asociativa Elemento Neutro  $\{\lambda\}$  NO comutativa

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M. Alonso

[ 26 ]

uc3m



# Lenguajes Formales

**Unión de Lenguajes :** Sobre un alfabeto dado  $\Sigma$

Sean  $L_1$  y  $L_2$  definidos sobre el mismo alfabeto  $\Sigma$ ,  $L_1, L_2 \subset W(\Sigma)$ ;  
se llama **unión** de dos lenguajes,  $L_1, L_2$  y se representa por  $L_1 \cup L_2$  al  
lenguaje así definido:

$$L_1 \cup L_2 = \{ x / x \in L_1 \text{ ó } x \in L_2 \} =$$

Es el conjunto formado indistintamente por palabras de uno u otro  
de los dos lenguajes (equivale a la suma).  $L_1 + L_2 = L_1 \cup L_2$

Op. Cerrada, Asociativa, Conmutativa y Elemento neutro  $\phi$

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M.Alonso

[ 27 ]

uc3m



## 2.Teoría de Autómatas

Araceli Sanchis de Miguel  
Agapito Ledezma Espino  
José A. Iglesias Martínez  
Beatriz García Jiménez  
Juan Manuel Alonso Weber

Grado Ingeniería Informática  
Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

A. Sanchis, A. Ledezma, J.A. Iglesias, B. García, J. M.Alonso

uc3m

