Hoja 9

Producto interno y ortogonalidad en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$

Problema 9.1 Dados los vectores $u = (u_1, u_2)^t, v = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2$ decidir si las siguientes operaciones definen productos internos:

a) $\langle u, v \rangle = -2u_1v_1 + 3u_2v_2$.

b) $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$.

c) $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2$.

Para cada una de las operaciones que sí lo sean:

1. Calcular la longitud de los vectores $(1, 0)^t$ y $(2, -1)^t$.
2. Hallar su producto interno.
3. Determinar el ángulo entre ellos.

Problema 9.2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular su inversa, si existe. ¿Es A es ortogonal? ***Basar la respuesta en el cálculo de la inversa.***

2. Hallar una base para el espacio fila y una base para el espacio columna de A.

3. Hallar el espacio nulo de A y su dimensión.

4. Comprobar que los vectores de la base del espacio nulo son ortogonales a los vectores de la base del espacio fila A.

5. Determinar el espacio nulo de la traspuesta de A y calcular su dimensión.

6. Comprobar que los vectores de la base del espacio nulo de la traspuesta de A son ortogonales a los vectores de la base del espacio columna de A.

7. Sin resolver sus ecuaciones, determinar si los sistemas $A\,x = b_1$ y $A\,x = b_2$ son compatibles, siendo $b_1 = (1, -1, 2)^t$ y $b_2 = (2, 1, 3)^t$.

Problema 9.3 Sea A una matriz 3×4 cuyo espacio nulo es

$$N(A) = \left\{ x = \alpha\,(1, 2, 3, 4)^t : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Determinar el rango de A.

2. Consideremos el espacio fila de A. Probar que el vector $v_1 = (4, 0, 0, -1)^t$ pertenece a $\mathcal{C}(A^t)$.

3. Extender (v_1) a una base de $\mathcal{C}(A^t)$.

4. Hallar una base del espacio nulo de la traspuesta.

Problema 9.4 Sea la operación definida en el espacio vectorial de las matrices de dimensión 2×2 con componentes reales, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, mediante:

$$\langle A, B\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}\,.$$

1. Probar que esta operación es un producto interno en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. Probar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   son ortogonales entre sí.

3. Hallar la proyección ortogonal de las matrices B y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   sobre la matriz A.

Problema 9.5 Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $W^\perp$ su complemento ortogonal. Demostrar que $W^\perp$ también es un subespacio.

Problema 9.6 Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_n$, con la operación

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt\,.$$

1. Probar que esta operación es un producto interno.

2. Probar que el subconjunto $S_1 \subset \mathbb{P}_n$ formado por los polinomios que sólo contienen términos de grado par es un subespacio de $\mathbb{P}_n$.

NOTA: asumir que el polinomio idénticamente nulo $p(x) = 0$ es un polinomio de grado cero.

3. Consideremos el subconjunto $S_2 \subset \mathbb{P}_n$ formado por los polinomios de $\mathbb{P}_n$ que sólo contienen términos de grado impar. Probar que los vectores de S_1 son ortogonales a todos los vectores de S_2. ¿Son S_1 y S_2 complementos ortogonales?