Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática y Doble Grado

Examen extraordinario

28 Junio 2013

Nombre		Grupo	

Problema 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 5\,x\,y' - 21y = 5\,x\,\cos\left(\,\ln(x)\,\right);$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la ecuación.

ii) Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

iii) Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es

$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$

iv) Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

Solución:

i) Es una EDO lineal de segundo orden no homogénea de coeficientes variables, también conocida como ecuación de Euler no homogénea.

ii) Realizaremos el cambio $x = e^t$ en la ecuación diferencial y obtendremos una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Ésta quedará en función de los nuevos operadores $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{d^2y}{t^2}$. Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}\,;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \frac{dy}{dx}e^t = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

La ecuación diferencial entonces queda

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

Problema 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 5\,x\,y' - 21y = 5\,x\,\cos\left(\ln(x)\right);$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la ecuación.

ii) Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

iii) Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es

$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$

iv) Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

i) Ec. Diferencial Ordinaria (y solo depende de t), no lineal (y''), 2º orden (hasta y''), no homogenea de coef. variables.

ii) $e^{2t}y'' + 5e^t y' - 21y = 5e^t\cos(\ln(x))$

iii)

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{d^2y}{dt^2}(t) & = & 49Ae^{-7t} + 9Be^{3t} + \dfrac{e^t}{65}(34\sin(t) + 12\cos(t)) \\
& + & \\
4\left(\dfrac{dy}{dt}(t)\right) & = & 4\left(-7Ae^{-7t} + 3Be^{3t} + \dfrac{e^t}{65}(23\sin(t) - 11\cos(t))\right) \\
& + & \\
-21\,(y(t)) & = & -21\left(Ae^{-7t} + Be^{3t} + \dfrac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\right) \\
\hline
& & 5\cos(t)e^t
\end{array}$$

iv) Aplicando el cambio de variable propuesto en ii) $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$, obtenemos la solución a la ecuación del problema:

$$y(x) = Ax^{-7} + Bx^3 + \frac{x}{65}\left[6\sin(\ln(x)) - 17\cos(\ln(x))\right]$$

Problema 2 (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

Solución:
Resolveremos la ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.
Si resolvemos la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial obtenemos la solución

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2xe^x\,.$$

Obtenemos una solución particular a partir de las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, donde $y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$. Calculamos el wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x(1+x) \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{-x}{1+x^2} \rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,, \\
u_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow u_2(x) = \arctan(x)
\end{aligned}$$

Sumando la solución homogénea más la particular concluimos que

$$y(x) = (-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1)e^x + (\arctan(x) + C_2)xe^x$$

Problema 2 (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$e^{x\lambda}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0\ ; \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ Raiz doble.}$$

$$\mathcal{B}\{e^x, e^x x\} \quad y_h(x) = A e^x + B x e^x$$

Variación de parametros: ($\frac{e^x}{1+x^2}$ no cumple para coef. indeterminado)

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x\,e^{2x}}{1+x^2}}{\cancel{xe^{2x}} + e^{2x} - \cancel{xe^{2x}}}$$

$$u_1' = \frac{\frac{-x\cancel{e^{2x}}}{1+x^2}}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{-x}{1+x^2}\ ; \quad u_1 = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\cancel{e^{2x}}}{1+x^2}}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{1}{1+x^2}\ ; \quad u_2 = \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$$

$$\boxed{y(x) = A e^x + B x e^x - \frac{e^x}{2}\ln(x^2+1) + x e^x \arctan(x) \quad / \ A, B \in \mathbb{R}}$$

Problema 3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{array} \right. ,$$

Se pide:

i) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$.

ii) Comprobar la solución obtenida en i)

Solución:
Los valores propios de la matriz son $r = -1 \pm 3i$ y los vectores propios correspondientes $v = (1\,,\,1 \pm i)^T$.
Un conjunto fundamental de soluciones es:

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(-1+3i)t} \quad , \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(-1-3i)t} .$$

Para encontrar un conjunto de soluciones reales, debemos encontrar la parte real e imaginaria $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ de $\vec{X}_1(t)$ ó $\vec{X}_2(t)$.

$$\vec{X}_1(t) = \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix}}_{\vec{u}(t)} + \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix}}_{\vec{v}(t)} i$$

Para comprobar que las partes real e imaginaria son linealmente independientes, calculamos el wronskiano:

$$W(\vec{u}, \vec{v})(t) = -e^{-2t} \neq 0\,,\ \forall t\,.$$

Por la condición inicial $\vec{X}(0) = (1,1)^T$ tenemos que $C_1\vec{u}(0) + C_2\vec{v}(0) = (1,1)^T$ y se obtiene que $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Finalmente,

$$\vec{X}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix} .$$

Para que comprobar que la solución es correcta vemos si se cumplen las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{array} \right.$:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = e^{-t}(2\cos(3t) - 3\cos(3t) - 3\sin(3t)) = -e^{-t}(\cos(3t) + 3\sin(3t)) = x_1' \\ 6x_1 - 4x_2 = e^{-t}(6\cos(3t) - 4\cos(3t) - 4\sin(3t)) = e^{-t}(2\cos(3t) - 4\sin(3t)) = x_2' \end{array}$$

Problema 4 (2 puntos) Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI) \left\{ \begin{array}{l} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, \quad x \in [0, +\infty) \\ \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Problema 3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{cases},$$

Se pide:

i) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1,1)$.

ii) Comprobar la solución obtenida en i)

i $\quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$

$|A - \lambda I| = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + 2\lambda + 10$

$\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{-36}}{2} = -1 \pm i3$

Para $\lambda = -1 + i3$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 2-1-i3 & -3 \\ 6 & -4-1-i3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; (1-i3)x - 3y = 0$

$y = \dfrac{1-i3}{3} x$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1-i3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 1+i3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 1+i3 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = e^{(-1+i3)t} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1+i3 \end{pmatrix} = \vec{u}(t) + i\,\vec{v}(t)$

$\begin{pmatrix} e^{-t} \cdot e^{i3t} \cdot 3 \\ e^{-t} e^{i3t}(-1+i3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(3t)\,3 + i\,e^{-t}\operatorname{sen}(3t)\,3 \\ e^{-t}(-1+i3)\cos(3t) + i\,e^{-t}(-1+i3)\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3e^{-t}\cos(3t) + i3e^{-t}\operatorname{sen}(3t) \\ -e^{-t}\cos(3t) + i3e^{-t}\cos(3t) - i\,e^{-t}\operatorname{sen}(3t) - 3e^{-t}\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3e^{-t}\cos(3t) \\ -e^{-t}\cos(3t) - 3e^{-t}\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3e^{-t}\operatorname{sen}(3t) \\ 3e^{-t}\cos(3t) - e^{-t}\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix}$

Sol. General: $\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3e^{-t}\cos(3t) \\ e^{-t}(-\cos(3t) - 3\,\mathrm{sen}(3t)) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3e^{-t}\mathrm{sen}(3t) \\ e^{-t}(3\cos(3t) - \mathrm{sen}(3t)) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_1(t) = C_1 3e^{-t}\cos(3t) + C_2 3e^{-t}\mathrm{sen}(3t)$

$\quad x_2(t) = C_1 e^{-t}(-\cos(3t) - 3\,\mathrm{sen}(3t)) + C_2 e^{-t}(3\cos(3t) - \mathrm{sen}(3t))$

$x_1(0) = 1 = C_1 \cdot 3 \quad ; C_1 = 1/3$

$x_2(0) = 1 = C_1(-1) + C_2(3) ; \quad C_2 = \dfrac{1 + 1/3}{3} = \dfrac{4}{9}$

Sol. PVI $\Rightarrow \vec{X(t)} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(3t) \\ e^{-t}(-\frac{1}{3}\cos(3t) - \mathrm{sen}(3t)) \end{pmatrix} + \dfrac{4}{9} \begin{pmatrix} 3e^{-t}\mathrm{sen}(3t) \\ e^{-t}(3\cos(3t) - \mathrm{sen}(3t)) \end{pmatrix}$

Mal hecho

Repasar desde el inicio. (el -1 en autovector)

Problema 4 (2 puntos) Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI)\begin{cases} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, & x \in [0, +\infty) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} \; ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} \; ; \quad y\,dy = \frac{\alpha x^2}{(1+x^3)}\,dx$$

$$\int y\,dy = \alpha \int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \; ; \quad \frac{y^2}{2} = \frac{\alpha}{3} \ln(x^3+1) + k \quad / \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{0^2}{2} = \frac{\alpha}{3} \cdot \ln(0^3+1) + k \; ; \quad k = 0 - \frac{\alpha}{3} 0 = 0$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{\alpha}{3} \ln(x^3+1) \; ; \quad \boxed{y(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{3} \ln(x^3+1)}}$$

Solución:

La EDO es separable $\Rightarrow y dy = \dfrac{\alpha x^2}{1+x^3} dx$.

Integrando obtenemos $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{\alpha}{3}\ln(1+x^3) + C$.

Sustituyendo el dato inicial, $y(0) = 0$, se obtiene $C = 0$.

Obtenemos la solución

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{3}\ln(1+x^3)}$$

Problema 5 (2 puntos) Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\
u(0,t) &= 0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \text{ (condiciones frontera)} \\
u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)}
\end{aligned}$$

Se pide:

i) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$

ii) Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

Solución:

i) Aplicamos la técnica de separación de variables.
Descompenemos u como producto de dos funciones

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

y sustituimos en la EDP del enunciado. Multiplicamos la ecuación resultante por $\frac{1}{4XT}$ obteniendo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{4T(t)} = -\lambda\,,$$

donde λ es la constante de separación.
La ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$ es:

$$T'(t) + 4\lambda T(t) = 0$$

Problema 5 (2 puntos) Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t) &= 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0\,, \quad t>0\,, \text{(condiciones frontera)} \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0\le x\le \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)} \end{aligned}$$

Se pide:

i) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t)=X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$

ii) Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0; \quad X(0)=0; \quad X'(\pi)=0;$$

iii) Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

i) $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$\frac{d\,u(x,t)}{dt} = 4\,\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \Rightarrow X(x)T'(t)=4\,X''(x)T(t)$$

Multiplicamos por $\dfrac{1}{X(x)T(t)\,4} \Rightarrow \dfrac{T'(t)}{T(t)\,4} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ constante de separación.

Ec. 1) $T'(t)+4\lambda T(t)=0$ EDO 1er ord. lineal.

$$\mu(x) = e^{\int 4\lambda dt} = e^{4\lambda t}\,; \quad T(t)\,e^{4\lambda t} = C$$

$$\boxed{T(t) = C e^{-4\lambda t}}$$

ii) $\boxed{\text{Ec. 2)}\ X''(x)+\lambda X(x)=0;}$ $\lambda>0$, $\lambda=a^2$

$r^2+a^2=0\,;\ r=\pm ia\,.\ \beta=\{\operatorname{sen}(ax), \cos(ax)\}$

$X(x)=C_1\operatorname{sen}(ax)+C_2\cos(ax)\ ;\ X'(x)=C_1 a\cos(ax)-C_2 a\operatorname{sen}(ax)$

$0=u(0,t)=X(0)\,T(t)\Rightarrow X(0)=0=C_2\ ;\ C_2=0$

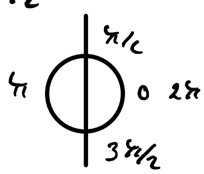
$$0=\frac{d\,u(\pi,t)}{dx}=X'(\pi)T(t)\Rightarrow X'(\pi)=0=-C_1\,a\cos(a\pi)$$

$C_1 \neq 0$, $a \neq 0$ Exijo $\lambda>0$, $\lambda=a^2$

$\cos(a\pi)=0 \Rightarrow a\pi=\pi/2+n\pi$

$a=1/2+n$

$\lambda_n=(1/2+n)^2$



iii) $\boxed{\begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_n=(1/2+n)^2 \\ \text{Autofuncion:} \\ X_n(x)=C_1\operatorname{sen}(1/2\,x+nx) \\ n=1,2,3,\dots \end{array}}$

ii) De la ecuación $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{4T(t)} = -\lambda$ obtenemos el problema de contorno

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Resolvamos la EDO

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

donde las constantes de integración se deducirán de las condiciones de contorno $X(0) = 0$, $X'(\pi) = 0$. De la ecuación característica $r^2 + \lambda = 0$ se obtiene que

$$r = \pm\sqrt{-\lambda}\,.$$

Debemos considerar casos con los posibles valores de λ.
Si $\lambda = 0$ las raíces de la ecuación característica son iguales y nulas, con lo que se obtiene

$$X(x) = Ae^{0\cdot x} + Bxe^{0\cdot x} = A + Bx$$

Al aplicar las condiciones de contorno se obtiene que $A = 0 = B$, con lo que $X(x) = 0$. Decartamos el valor de $\lambda = 0$ por darnos la solución trivial.
Si $\lambda < 0$ las raíces de la ecuación característica son $r = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$, con lo que se obtiene

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

Al aplicar las condiciones de contorno se obtiene que $A = 0 = B$, con lo que $X(x) = 0$. Descartamos el valor de $\lambda < 0$ por darnos la solución trivial.
Si $\lambda > 0$ las raíces de la ecuación característica son $r = \pm i\sqrt{\lambda}$, con lo que se obtiene la solución

$$X(x) = A\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right).$$

De $X(0) = 0$ se obtiene que $A = 0$.
Calculemos ahora $X'(x)$ para aplicar la condición $X'(\pi) = 0$:

$$X'(x) = B\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda})$$

$$X'(\pi) = 0 = B\sqrt{\lambda}\cos(\pi\sqrt{\lambda})\,,$$

con lo que

$$B\sqrt{\lambda}\cos(\pi\sqrt{\lambda}) = 0\,.$$

B debe ser distinto de cero para no volver a obtener la solución trivial.
Por lo tanto $\cos(\pi\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \pi\sqrt{\lambda} = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Los autovalores son :

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

con lo que las autofunciones quedan :

$$X_n = B_n \sin\left((n + 1/2)x\right)$$