UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Escuela Politécnica Superior

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA.

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA. 28 de junio de 2004.

INSTRUCCIONES

Por favor, antes de leer los enunciados del examen, lea *atentamente* estas intrucciones.

1. El examen consta de cuatro problemas.
2. El examen durará **tres horas**.
3. Deben escribirse **apellidos y nombre** (¡en ese orden!) en todas las hojas que se vayan a usar. **No se corregirán examenes anónimos.** Todas las hojas que estén en su poder durante el examen deben tener el nombre escrito, aunque aún no se haya empezado a escribir en ellas.
4. No está permitido utilizar apuntes de clase, ni libros, ni calculadoras.
5. **Si tiene teléfono móvil, apáguelo y déjelo fuera de su alcance. Tener un teléfono móvil, conectado o no, en sus proximidades puede suponer la expulsión del examen.**
6. **No se puede hacer el examen a lápiz.** El examen es un documento escrito con valor legal y, como tal, debe garantizarse su inalterabilidad. Así pues, responda con bolígrafo, a ser posible de tinta negra o azul, para facilitar la corrección.
7. Presentarse al examen supone la obligación de entregar al menos una hoja por problema al final, aunque ésta esté en blanco. **No se puede salir del examen antes de media hora.**
8. Identifíquese dejando el D.N.I. o el carné de la Universidad en lugar visible de su mesa.
9. Finalmente, una recomendación: **lea con cuidado los enunciados de los problemas antes de contestarlos.**

Respuestas al examen: estarán en Aula Global y en reprografía del Edificio Sabatini después del examen.
Notas: se publicarán como muy tarde el jueves 8 de julio.
Criterios de corrección: Los problemas se corregirán con el criterio de distribución de puntos especificado en la hoja de enunciados. Puntuarán 0 aquellos problemas que, aun estando bien la solución, no vayan acompañados de los cálculos o razonamientos necesarios para hallarla, o éstos sean incorrectos. No se calificará con la máxima nota ningún ejercicio cuya respuesta esté equivocada aunque se deba a un error de cálculo.
Revisión del examen: Ateniéndonos a la normativa de revisión de exámenes de la universidad, que puede consultarse en la página web `http://www.uc3m.es/uc3m/gral/IG/NOR/norm102.html`, ésta se solicitará mediante un escrito *razonado*, dirigido a los profesores de la asignatura, hasta el lunes 12 de julio inclusive. Los exámenes de aquellas personas que lo soliciten en este plazo serán revisados individualizadamente, atendiendo a los criterios arriba expuestos. El resultado de la revisión se publicará en un listado definitivo de notas antes de un plazo de 10 días desde la publicación de las notas provisionales.

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Escuela Politécnica Superior

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA.

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA. 28 de junio de 2004.

Problema 1.

1. **[0.75 puntos]** Resuélvase $3x = 4 \bmod 8$.
2. **[0.75 puntos]** Descríbase el conjunto de soluciones enteras de la ecuación $3x - 8y = 4$, y encuéntrese la que tenga el valor de x mínimo.
3. **[0.5 puntos]** Descríbase el conjunto de soluciones enteras de la ecuación $5x + 8z = 4$.
4. **[0.5 puntos]** Compárense las soluciones obtenidas en los dos apartados anteriores, y dígase, justificando la respuesta, si es posible encontrar una solución entera que lo sea simultáneamente de ambas.

Problema 2.

Sea el conjunto $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ y sus subconjuntos $V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{3,4,5\}$ y $V_3 = \{6,7,8\}$. Definamos la siguiente relación sobre V:

$$xRz \iff x \in V_i \text{ y } z \in V_i,\ i = 1,2,3,$$

es decir, x y z están relacionados si ambos pertenecen al mismo subconjunto V_1, o V_2, o V_3.

1. **[1 punto]** ¿Es R una relación de equivalencia sobre V?
2. **[0.5 puntos]** Represéntese R mediante una matriz usando el orden natural en los elementos de V.
3. **[0.5 puntos]** Elimínese un elemento de V_1 de forma que R sea una relación de equivalencia.
4. **[0.5 puntos]** Siendo V_1 el subconjunto obtenido en el apartado anterior hállense todas las clases de equivalencia de R.

Problema 3.

a) **[1 punto]** Demuéstrese que para n entero,

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^n.$$

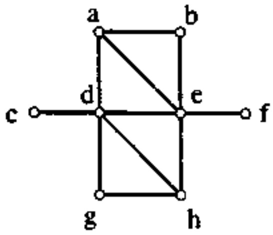
b) **[0.75 puntos]** ¿Cuántos subconjuntos de un conjunto de 10 elementos tienen un número impar de elementos?

c) **[0.75 puntos]** ¿Cuántas formas hay de poner n objetos idénticos en m contenedores distintos de tal forma que no quede ninguno vacío?

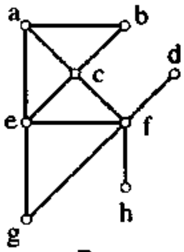
sigue al dorso

Problema 4.

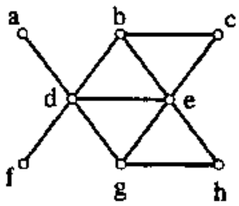
a) **[1.5 puntos]** Discútase si los grafos B, C y D pueden ser isomorfos a A, justificando la respuesta.



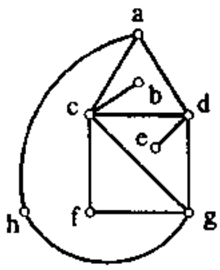
A



B

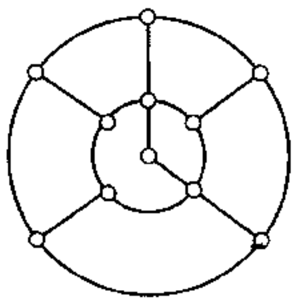


C



D

b) **[1 punto]** Determínese si el siguiente grafo es o no hamiltoniano, justificando su respuesta:



Clave 880.0.09 ©

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Escuela Politécnica Superior

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA.

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA. 28 de junio de 2004.

Soluciones detalladas

Problema 1.

a) En Z_8 al ser $mcd(3,8) = 1$ 3^{-1} existe. Por simple inspección se observa
$3*3 = 9 = 1 \; mod \; 8 \Rightarrow 3^{-1} = 3$
Luego despejando $x = 3*4 \; mod \; 8 = 12 \; mod \; 8 = 4 \; mod \; 8$

b) Cada solución de la ecuación se corresponde con x con $x = 4 \; mod 8$ luego $x = 4 + k8$ con $k \in Z$; despejando y se obtiene $8y = 3x - 4 \Leftrightarrow 8y = 3(4 + k8) - 4 \Rightarrow y = \frac{8+24k}{8} = 1 + 3k$

Soluciones $\begin{array}{l} x = 4 + k8 \\ y = 1 + 3k \end{array}$ la solución con la mínima x positiva se alcanza para $k = 0$

$x = 4$
$y = 1$

c) Resolviendo la segunda ecuación del mismo modo se tiene, como $mcd(5,8) = 1$ en Z_8 existe 5^{-1}. Al ser $5*5 = 25 = 1 \; mod \; 8$ $5^{-1} = 5$. Por tanto $x = 5^{-1}4 \; mod \; 8 = 4 \; mod \; 8$.

Así $x = 4 + k8$, con $k \in Z$; despejando z queda $z = \frac{4-5(4+k8)}{8} = -2 - 5k$ $k \in Z$

Así las soluciones de la segunda ecuación son $\begin{array}{l} x = 4 + k8 \\ z = -2 - 5k \end{array}$ $k \in Z$

d) Como en las dos ecuaciones la x toma los mismos valores, hay una solución común a ambas, dada por $\begin{array}{l} x = 4 + k8 \\ y = 1 - 3k \\ z = -2 - 5k \end{array}$ $k \in Z$

Una solución particular del sistema se encuentra por ejemplo para $k = 0$ $\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{array}$

Problema 2.

Apdo. 1.

1. R es reflexiva pues para todo $a \in V$ se cumple que $a \in V_i$ con $i = 1, 2$, o 3. Luego aRa.

2. R es simétrica: aRb si y sólo si $a \in V_i$ y $b \in V_i$, que es lo mismo que $b \in V_i$ y $a \in V_i$, es decir bRa.

3. R NO es transitiva. Contraejemplo: $1R3$ y $3R5$ pero 1 no está relacionado con 5.

Luego R NO es relación de equivalencia.

Apdo. 2. La matriz es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

/

Apdo. 3. R no es de equivalencia, no es transitiva, porque V_1 y V_2 no son disjuntos. Si elimino el 3 de V_1 entonces $V_1 = \{1,2\}$. En este caso V_1, V_2 y V_3 forman una partición de V, así ahora aRb y bRc significa $a,b,c \in V_i$, y por ello aRc. Notemos que antes de quitar el 3 de V_1 podía ocurrir que si aRb y bRc entonces $a,b \in V_i$ y $b,c \in V_j$ con $i \neq j$.

Apdo. 4. Las clases de equivalencia son precisamente V_1, V_2 y V_3.

Problema 3.

Apdo. 1.- Se resuelve en función del desarrollo del binomio de Newton particularizado a $(3+1)^n$:

$$(3+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$$

Como, obviamente, $(3+1)^n = 4^n$, la igualdad queda demostrada.

3.2

Apdo. 2.-

Las posibilidades de subconjuntos con números impares son: a) subconjuntos con 1 elemento, b) con 3 elementos, c) con 5 elementos, d) con 7 elementos y d) con nueve elementos. En cada caso, son las posibles combinaciones de 10 elementos, pues el orden de los elementos no importan en cada subconjunto formado. Así, las posibilidades serán:

1. C(10,1) = 10
2. C(10,3)= $\frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$=10·3·4 = 120
3. C(10,5)= $\frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$= 2·3·2·7·3=252
4. C(10,7) = C(10,3) = 120
5. C(10,19) = C(10,1) = 10

En total son 10 + 120 + 525 + 120 + 10 = 512

Apdo. 3.- Suponemos que $n \geq m$, en caso contrario la solución sería 0.

En primer lugar, para que no quede ningún recipiente vacío, colocamos una bola en cada uno de ellos, quedando por colocar $n-m$ bolas. En esta situación, es un problema clásico de disponer $n' = n-m$ bolas idénticas en m casilleros distintos. Son combinaciones con repetición, con n' elementos que distribuir en m posiciones diferenciadas. Es decir, C($n'+m-1$, n'):

$$C(n'+m-1,n') = C(n - m+m -1, n - m) = C(n -1, n - m) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}$$

2

Problema 4.

a) **B** y **D** no pueden ser isomorfos a **A**, porque ambos tienen vértices de grado 4 (c en **B**, g en **D**) mientras que en **A** no hay vértices de ese grado. **C** tampoco puede ser isomorfo a **A** porque **A** tiene dos vértices de grado 1 conectados cada uno a distintos vértices de grado 5, mientras que en **C** los dos vértices de grado 1 son adyacentes al mismo de grado 5.

b)