Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Ingeniería Informática

Inteligencia Artificial

Abril 2019. Examen 2

Normas generales del examen

- El tiempo para realizar el examen es de **2 horas**
- No se responderá a ninguna pregunta sobre el examen
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz

Problema 1. (2 puntos)

En una habitación cerrada hay 3 urnas con bolas. En la habitación hay una persona que elige una urna y saca una bola. A continuación devuelve la bola a la urna y repite el proceso N veces. Se conoce que la elección de urna es un proceso estocástico y depende de la urna elegida en el paso anterior siguiendo la siguiente distribución condicionada, donde las filas representan la urna anterior y las columnas la siguiente:

	u1	u2	u3
u1	0.1	0.4	0.5
u2	0.6	0.2	0.2
u3	0.3	0.4	0.3

Se pide:

1. Explica qué tipo de modelo se puede utilizar para responder preguntas relacionadas con las urnas que elige la persona. Define formalmente este modelo y sus parámetros.

   Sería un modelo de Markov el que los estados representarían la urna elegida en cada momento, $U_t \in \{u1, u2, u3\}$.

   Los parámetros serían:

   - $P(U_{t=0})$: probabilidad a priori del estado inicial. Si no hay información asumiremos una distribución equiprobable.
   - $P(U_t/U_{t-1})$: probabilidad del estado siguiente dado el estado anterior, que viene dada por la tabla del enunciado.

2. Si asumimos que la urna elegida en primer lugar siempre es u1, ¿Qué es más probable, que la tercera urna sea la u3 o que sea la u2? Realiza los cálculos necesarios.

   Simulación hacia delante

   $P(s_t) = \sum P(s_t/s_{t-1})P(s_{t-1})$

   $P(U_0) = (1, 0, 0)$

   $P(U_1) = \sum_{U_0} P(U_1/U_0)P(U_0) = (0{,}1,\ 0{,}4,\ 0{,}5)$

   $P(U_2) = \sum_{U_1} P(U_2/U_1)P(U_1) = (0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}5,\ 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}5,\ 0{,}5 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}5) = (0{,}4,\ 0{,}32,\ 0{,}28)$

   Luego es más probable que la tercera urna sea u2, con una probabilidad de $0{,}32$.

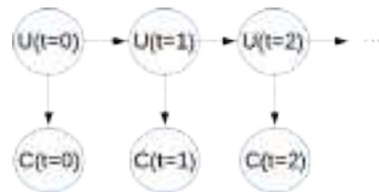
Problema 2. (3 puntos)

En el contexto del ejercicio anterior, ahora consideraremos que las urnas tienen bolas de tres colores: verde, azul y rojo. Cuando la persona saca una bola de una urna informa sobre el color de la bola, de manera que en todo momento se conocen los colores de las bolas que va sacando.

Se pide:

1. Explica qué tipo de modelo se puede utilizar para responder preguntas relacionadas con la secuencia de urnas que elige la persona y/o la secuencia de colores de bolas. Define formalmente el modelo.

   Sería un modelo oculto de Markov (HMM) en el que los estados ocultos serían las urnas, $U_t \in \{u1, u2, u3\}$, y las observaciones serían los colores de las bolas $C_t = \{rojo, verde, azul\}$.

   Los parámetros serían:

   - $P(U_{t=0})$: probabilidad a priori del estado inicial. Si no hay información asumiremos una distribución equiprobable.
   - $P(U_t/U_{t-1})$: probabilidad del estado siguiente dado el estado anterior, que viene dada por la tabla del enunciado.
   - $P(C_t/U_t)$: el modelo de observaciones, que determina la probabilidad de que la bola extraída tenga un determinado color dada la urna.

2. Supongamos que sabemos que la urna 1 sólo tiene bolas rojas, la urna 2 sólo tiene bolas verdes y la urna 3 sólo tiene bolas azules.

   - Si se observa una secuencia de bolas: *roja - verde*. ¿Cómo se determinaría cuál es la secuencia de dos primeras urnas más probable? Razona la respuesta. En este caso el modelo de observaciones es perfecto, por lo que nos informa con total precisión del estado. Por lo tanto la secuencia de urnas más probable es u1 - u2 (con probabilidad 1). Estaríamos observando directamente el estado. El modelo reduce el MM del ejercicio anterior.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera bola sea azul sabiendo que la primera bola se extrae siempre de la urna u1? ¿Por qué? Sería 0.28 calculada en un apartado anterior porque asumiendo el MM anterior sería equivalente a la probabilidad de que la tercera urna sea u3.

3. Supongamos ahora que la urna 1 tiene: 50 bolas rojas, 20 verdes y 30 azules; la urna 2 tiene: 30 bolas rojas, 60 verdes y 10 azules; y la urna 3 tiene: 10 bolas rojas, 40 verdes y 50 azules.

   - Si se observa una secuencia de bolas: *roja - verde*. Determina cual es la secuencia más probable para las dos primeras urnas, asumiendo que se sabe a priori que la primera urna siempre es u1.

     En este caso el modelo de observaciones no es perfecto. Tendremos la siguiente distribución $P(C_t/U_t)$:

	rojo	verde	azul
u1	0.5	0.2	0.3
u2	0.3	0.6	0.1
u3	0.1	0.4	0.5

     La probabilidad de todas las secuencias que no empiezan por $u1$ es cero, ya que se sabe que la primera urna es $u1$.

     $P(U_0 = u1, U_1 = u3/C_0 = rojo, C_1 = verde) = \alpha P(U_0 = u1, U_1 = u3, C_0 = rojo, C_1 = verde) = P(U_0 = u1)P(U_1 = u3/U_0 = u1)P(C_0 = rojo/U_0 = u1)P(C_1 = verde/U_1 = u3) = \alpha \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}4 = \alpha 0{,}1$

$P(U_0 = u1, U_1 = u1/C_0 = rojo, C_1 = verde) = \alpha P(U_0 = u1, U_1 = u1, C_0 = rojo, C_1 = verde) = P(U_0 = u1)P(U_1 = u1/U_0 = u1)P(C_0 = rojo/U_0 = u1)P(C_1 = verde/U_1 = u1) = \alpha \times 0{,}1 \times 0{,}5 \times 0{,}2 = \alpha 0{,}01$

$P(U_0 = u1, U_1 = u2/C_0 = rojo, C_1 = verde) = \alpha P(U_0 = u1, U_1 = u2, C_0 = rojo, C_1 = verde) = P(U_0 = u1)P(U_1 = u2/U_0 = u1)P(C_0 = rojo/U_0 = u1)P(C_1 = verde/U_1 = u2) = \alpha \times 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}6 = \alpha 0{,}12$

Por lo tanto la secuencia de urnas más probable es u1-u2

Problema 3. (3 puntos)

Para regular la temperatura en un CPD (Centro de Procesamiento de Datos) se pueden realizan tres acciones: regular el flujo de aire frío de los equipos de frío, distribuir la carga de trabajo entre los ordenadores del CPD y cambiar la posición de los ordenadores. Lo deseable es que la temperatura se mantenga en una franja entre 18 y 24 grados. Cuando la temperatura baja de 18 grados hay que disminuir el flujo de aire frío. Cuando se hace esto, el 70 % de las veces la temperatura se mantiene en la franja deseable, el 20 % de las veces la temperatura supera los 24 grados y el 10 % sigue quedándose a menos de 18 grados. El coste de disminuir el flujo de aire frío es 1.

Cuando la temperatura sube de 24 grados, se puede aumentar el flujo de aire frío, distribuir la carga de trabajo o cambiar la posición de los ordenadores. Las probabilidades de conseguir la temperatura deseable son de 0'9, 0'7 y 0'6 respectivamente. En los otros casos la temperatura sigue superando los 24 grados. El coste de estas acciones varía cada día, por eso se decide modelar el problema como un MDP para poder calcular una política óptima diaria.

Para representar el MDP asumiremos que cuando se alcanza la temperatura deseable ya no se puede salir de ese estado (es un estado absorbente o meta).

Se pide:

1. Define formalmente el MDP con todos sus parámetros.

   Un MDP se define formalmente como: MDP=$< S, A, P, C >$, donde
   Estados: S={t-,t+,t}, t-:temperatura menor que 18, t+:mayor que 24 y t: entre 18-24
   Acciones: A={subir, bajar, distribuir, cambiar}
   Tabla de probabilidades: P

S=t-	t-	t	t+
bajar	0'1	0'7	0'2

S=t+	t	t+
subir	0'9	0'1
distribuir	0'7	0'3
cambiar	0'6	0'4

   Costes: C, c(b)=1, c(s), c(d), c(c)

2. Especifica las ecuaciones de Bellman para el MDP definido.

   V(t)=0
   V(t-)=1+0'1V(t-)+0'2V(t+)
   V(t+)=min[c(s)+ 0'1V(t+), c(d) + 0'3V(t+), c(c)+0'4V(t+)]

3. Ejecuta dos iteraciones (la inicialización no es una iteración) del algoritmo iteración de valor, asumiendo que el coste de aumentar el flujo de aire frío es 100, el de distribuir la carga de trabajo 10 y el de cambiar la posición de los ordenadores 20. Explica cuál es la política tras esas dos iteraciones y razona sobre si es una política óptima o no.

   V(t-)=1+0'1V(t-)+0'2V(t+)
   V(t+)=min[100+ 0'1V(t+), 10 + 0'3V(t+), 20 + 0'4V(t+)]

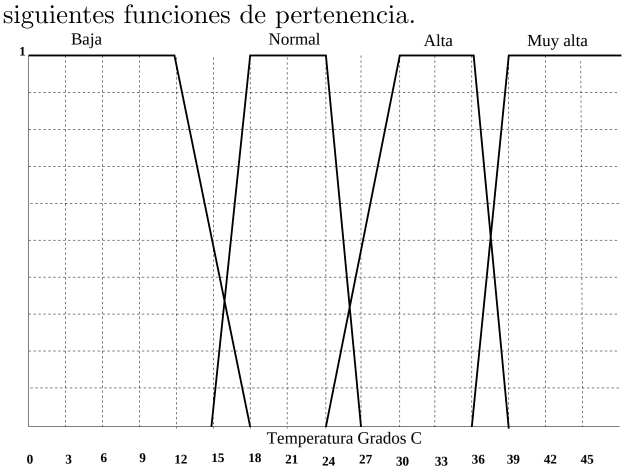
   iteracion 0 V(t)=0, V(t-)=0, V(t+)=0
   iteracion 1 V(t)=0, V(t-)=1, V(t+)=10
   iteracion 2 V(t)=0, V(t-)=1+0'1+2=3'1, V(t+)= min[100+1, 10+3, 20+4]=13

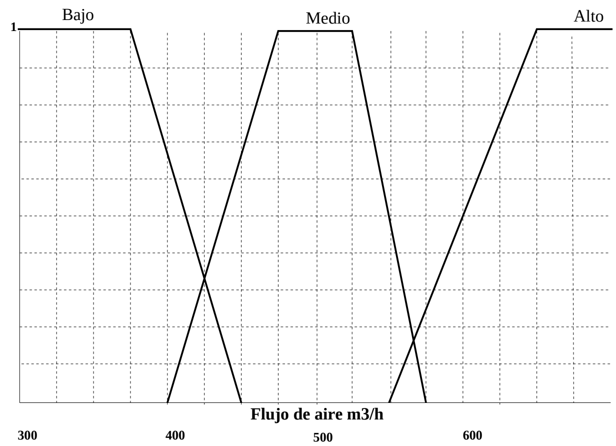
   La política para V(t-) es bajar y para V(t+) es distribuir. Aunque no haya convergido el algoritmo parece que es la política óptima, entre distribuir y cambiar siempre será menor distribuir (tanto el coste como la probabilidad son menores) la duda surgiría si en alguna iteracción se podría llegar a que 100+0'1V(t+) fuera menor que 10+0'3(Vt+), para ello V(t+) tendría que ser mayor que 450 pero eso no se cumple, antes se estabiliza y por tanto, se puede concluir que es la política óptima aunque estemos en la iteración 2

Problema 4. (2 puntos)

Se quiere utilizar un controlador borroso para regular el flujo de aire de los equipos de frío midiendo la temperatura en varios puntos, en un CPD con un único equipo de frío y 3 puntos donde tomar la temperatura. El comportamiento del sistema borroso se basa en las siguientes condiciones: (1) Cuando la temperatura es muy alta en un punto o es alta en dos puntos, el flujo de aire debe ser alto; (2) cuando la temperatura es alta en un punto y normal o baja en los otros, el flujo de aire debe ser medio; y (3) cuando la temperatura es baja en dos puntos el flujo de aire debe ser bajo.

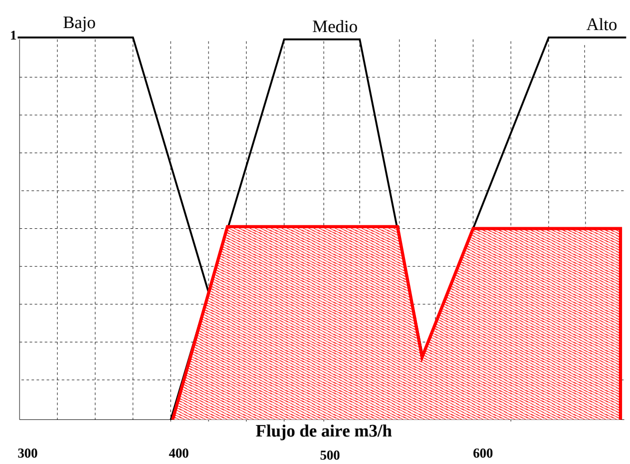
Aplica el método de inferencia de Mandami, explicando la salida de cada paso, para calcular el flujo de aire que habría que aplicar ante la siguiente lectura de temperaturas: T1=37'5 C, T2= 25'5 C y T3=18 C, considerando las siguientes funciones de pertenencia.





La salida de cada paso del método de inferencia de Mandami será:

1. Fuzzificar: T1=37'5: Alta 0'5 y Muy Alta 0'5
   T2=25'5: Alta 0'3 y Normal 0'3
   T3=18: Normal 1
2. Evaluar reglas: La condición (1) se cumple de dos maneras, por T1(0'5) muy alta o por dos altas T1(0'5) and T2(0'3), en el primer caso la similitud sería 0'5 y en el otro 0'3, al hacer la unión se toma el máximo y por tanto tenemos: 0'5 FLUJO ALTO
   La condición (2) de 3 maneras: T1(0'5) and T2(0'3); T1(0'5) and T3(1); T2(0'3) and T3(1) al ser reglas con AND hay que tomar el mínimo y luego quedarnos con el máximo, por tanto, del segundo caso sale 0'5 FLUJO MEDIO
   La condicion (3) no se cumple
3. Agregar consecuentes: Ver figura rayada rojo
4. Desfuzzificar: Habría que calcular el centroide de la figura roja que estaría sobre el 560.



1.)

1. Modelo de Markov, en el que los estados y tiempo son la urna escogida en ese momento.

$$P(S_0) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

$$P(S_1 / S_0) \text{ Tabla dada.}$$

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r] & S_1 \arrow[dr] & \\ & & S_2 \end{tikzcd}$$

2. $S_0 = u_1$

$$P(S_0 = u_1, S_2 = u_2) = \sum_{S_1} P(u_2 / S_1) P(S_1 / u_1) P(u_1) =$$

$$= [(0'4 \cdot 0'1 \cdot 1) + (0'2 \cdot 0'4 \cdot 1) + (0'4 \cdot 0'5 \cdot 1)] = 0'32$$

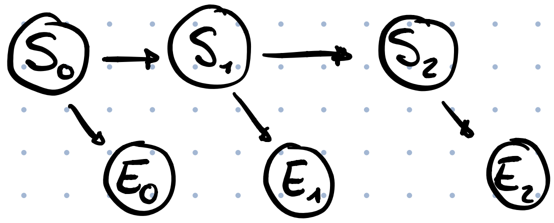
$$P(S_0 = u_1, S_2 = u_3) = \sum_{S_1} P(u_3 / S_2) P(S_2 / u_1) P(u_1) =$$

$$= [(0'5 \cdot 0'1 \cdot 1) + (0'2 \cdot 0'4 \cdot 1) + (0'3 \cdot 0'5 \cdot 1)] = 0'28$$

La más probable de 3^a es u_2 con un $0'32$.

2.)

1. Modelo Oculto de Markov, donde los estados son las urnas y las evidencias el color que sacamos.



$P(S_0) = (1/3, 1/3, 1/3)$

$P(S_t / S_{t-1})$ tabla

$P(E_t / S_t)$

2. u_1 Solo rojas
u_2 Solo verdes
u_3 Solo azules.

- ¿roja-verde? Se sabe que la secuencia ha sido u_1 y u_2 dado que la probabilidad de rojas para u_1 es 1 y de verdes para u_2 tambien. u_3 no puede dar esos colores.

- $E_2 = \text{azul}$ $S_0 = u_1$ Como azul solo lo da u_3 es lo mismo que hallar $P(S_0 = u_1, S_2 = u_3)$ que sabemos es: 0'28

$$\sum_{E_1, \cancel{E_2}} P(\text{azul} / \overset{E_2}{u_3})\, P(\overset{E_2}{u_3} / E_1)\, P(E_1 / u_1)\, P(u_1)$$

3. $P(E_t / S_t)$

$E_t \backslash S_t$	u_1	u_2	u_3
rojo	0'5	0'3	0'1
verde	0'2	0'6	0'4
azul	0'3	0'1	0'5

- ¿ roja - verde? $S_0 = u_1$ $P(S_0 = u_1, \underset{\sim}{S_1} / \text{verde}, \text{roja})$

$\alpha P(S_0 = u_1, S_1 = u_1, \mathcal{E}_0 = \text{roja}, \mathcal{E}_1 = \text{verde}) = \alpha\, 0'01$

$\alpha P(S_0 = u_1, S_1 = u_2, \mathcal{E}_0 = \text{roja}, \mathcal{E}_1 = \text{verde}) = \alpha\, 0'12$] $S_1 = u_2$ El más probable.

$\alpha P(S_0 = u_1, S_1 = u_3, \mathcal{E}_0 = \text{roja}, \mathcal{E}_1 = \text{verde}) = \alpha\, 0'1$

$u_1 - u_2$

3.)

1. **Acciones:**

3 acciones: frío (subir / bajar), distribuir, posición

Costes:

Costes { frío bajar = 1, frío subir, distribuir, posición }

Transiciones:

18 < Temp < 24

$P_{\text{frío bajar}}(\rightarrow / \downarrow)$	18 > Temp	18 < T < 24	Temp > 24
18 > Temp	0'1	0'7	0'2

$P_{\text{frío subir}}(A/B)$

B \ A	18 < Temp < 24	T > 24
T > 24	0'9	0'1

$P_{\text{posición}}(A/B)$

B \ A	18 < T < 24	T > 24
T > 24	0'6	0'4

$P_{\text{distribuir}}(A/B)$

B \ A	18 < Temp < 24	T > 24
T > 24	0'7	0'3

Estados { T < 18, T > 24, 18 < T < 24 }

$18 < T < 24 = M$

$T < 18) = D$

2. $T > 24 = S$

$V_{t+1}(\overset{=M}{18 < T < 24}) = 0$

$V_{t+1}(\overset{=D}{T < 18}) = \underset{1}{\text{coste(bajar frio)}} + 0'1\, V_t(18 > T) + \cancel{0'7 \cdot 0} + 0'2\, V_t(T > 24)$

$V_{t+1}(\overset{=S}{T > 24}) = \min_a \Big[\text{coste (subir frio)} + 0'1 \cdot V_t(T > 24),$

$\text{coste (posicion)} + 0'6\, V_t(T > 24),$

$\text{coste(distribuir)} + 0'3\, V_t(T > 24) \Big]$

3. Costes { bajar frio = 1, subir frio = 100, distribuir = 10, posicion = 20 }

$V_0(M) = 0$	$V_1(M) = 0$	$V_2(M) = 0$
$V_0(D) = 0$	$V_1(D) = 1$	$V_2(D) = 3'1$
$V_0(S) = 0$	$V_1(S) = 10$	$V_2(S) = 101$

$V_2(D) = 1 + 0'1 \cdot 1 + 0'2 \cdot 10 = 3'1$

$V_2(S) = \Big[100 + 0'1 \cdot 10 = 101,$

$20 + 0'6 \cdot 10 = 26,$

$10 + 0'3 \cdot 10 = 13 \Big] = 13$

La política optima es:

Cuando $T > 24$ la accion es bajar frio

Cuando $T < 18$ la accion es distribuir

Para $T > 24$ es seguro la optima y en vista del coste y prob de distribuir a pesar de que no se haya estabilizado parece que tambien.

4.) Reglas:

Temp. muy alta en 1 punto o Temp. alta en 2 puntos ⇒ Aire alto

Temp. alta y (Temp. normal o Temp. baja en los otros) ⇒ Aire medio

Temp. baja en 2 puntos ⇒ Aire bajo.

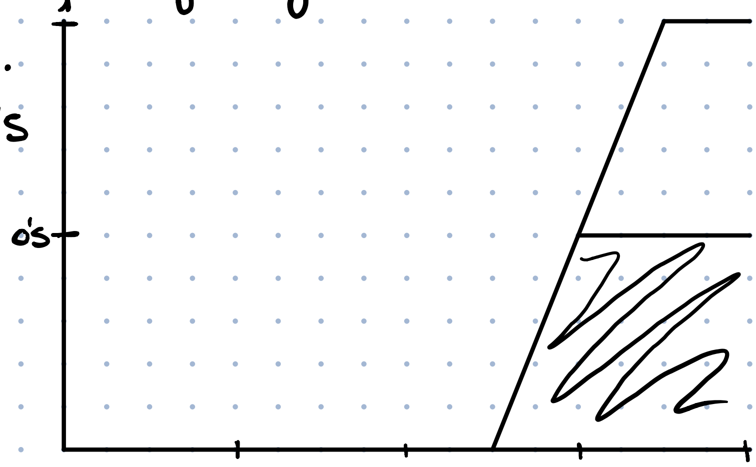
Entradas: $T1 = 37'5°C$ $T2 = 25'5°C$ $T3 = 18°C$ en valores reales.

Borrosificar: Pasar los valores reales al grado en el que son ciertos esos valores para los valores de la variable temp.

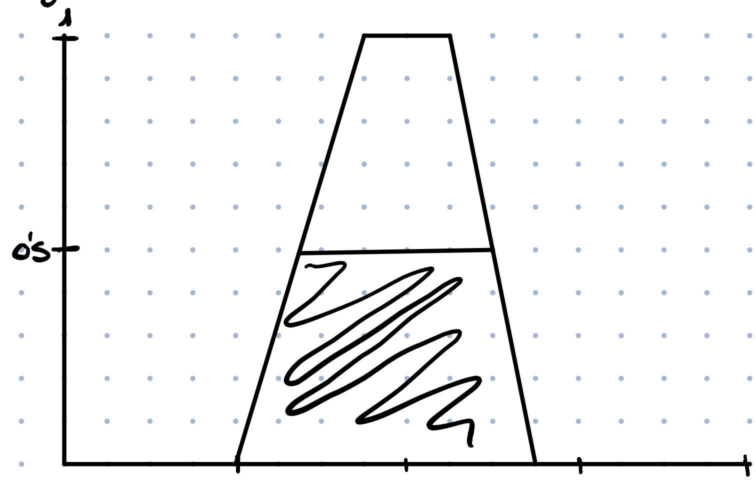
°C \ Valores temp	Baja	Normal	Alta	Muy alta
37'5	0	0	0'5	0'5
25'5	0	0'3	0'3	0
18	0	1	0	0

Evaluación de reglas: Hallamos el grado en el que son ciertas las precondiciones, la similitud, y ese grado es en el que será cierto el consecuente.

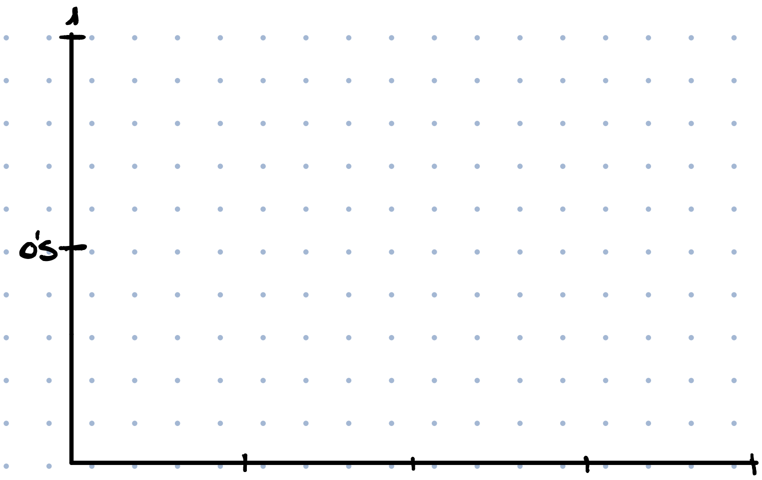
R1: $\max(0'5, \min(0'5, 0'3)) = 0'5$



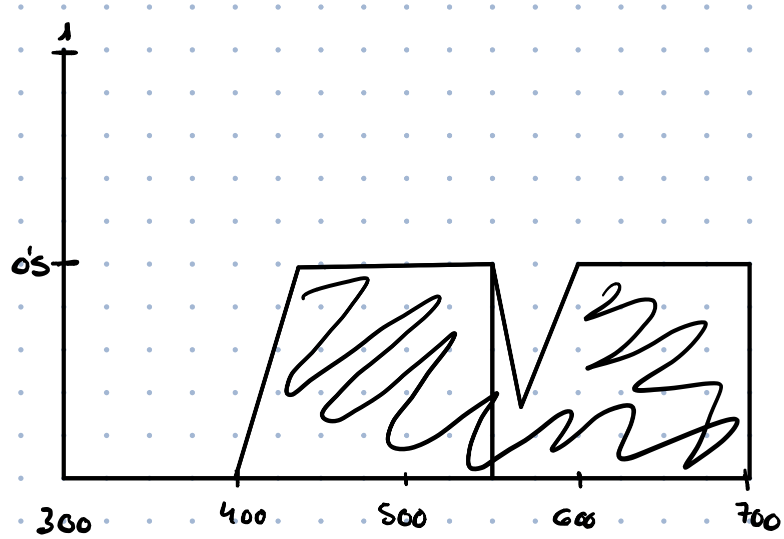
$R2: \max\left(\vec{\begin{matrix}0'5\\0'3\\0\end{matrix}}, \min\left(\vec{\begin{matrix}0\\0'3\\0\end{matrix}}, \vec{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}}\right)\right) = \begin{matrix}0'5\\0'3\\0\end{matrix} \quad 0'5$



$R3: \min(0, 0) = 0$



Agregación de consecuente: Consiste en hacer OR o unión de todos los consecuentes.



560

Desborrosificamos: Pasar la func. de pertenencia a valor, entre 550 y 575