Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Informática

Heurística y Optimización

Septiembre 2015

Resolución gráfica

Problema 1

La empresa UniZumo fabrica y distribuye zumos de piña en las presentaciones Néctar de Piña y Unizumo de Piña. Ambos zumos se fabrican a base de concentrado de piña, de modo que en cada litro de zumo hay un 20 % y un 50 % de concentrado respectivamente. Para la fabricación del año se dispone de 2,4 millones de litros de concentrado de piña y se ha pactado con los mayoristas un precio de 1,25 euros por tetra brik (con una capacidad de un litro) de Néctar de Piña y 2,05 euros por el de Unizumo de Piña, bajo la condición de que no se saquen al mercado más de 6 millones de litros de zumo.

Se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal para obtener las cantidades de cada producto que UniZumo debe fabricar para maximizar los ingresos por ventas.
2. Resolver gráficamente el problema.
3. Representar el problema en *forma estándar*

Problema 2

Se pide organizar un curso para empresarios que dure como máximo unas 20 horas distribuídas en varios días. Para tal fin, un hotel hace la oferta de su Aula Ejecutiva que cuesta 90 euros la hora y su Salón de Conferencias que cuesta 150 euros la hora. Esta oferta es válida siempre y cuando se contraten al menos 10 horas en el hotel y el tiempo en el Aula Ejecutiva sea mayor o igual que en el Salón de Conferencias. Por otra parte, para evitar problemas de espacio en las charlas más interesantes, el tiempo contratado en el Salón de Conferencias debe ser al menos el 20 % del total de horas contratadas.

Se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de minimizar el coste de contratación de los salones del hotel.
2. Representar el problema en *forma canónica*
3. Resolver el problema gráficamente. ¿Cuánto debe durar el curso?

Problema 3

Una comunidad de vecinos ha decidido instalar varias placas solares en un área de hasta dos metros cuadrados en su azotea con el objetivo de garantizar una generación constante de, al menos, 2400 wattios (W). Disponen, para ello, de dos tipos diferentes de placas solares que son siempre cuadrangulares. El primer tipo produce hasta 960 W/m^2, mientras que la segunda genera 1500 W/m^2. Obviamente, sus costes son diferentes y mientras que la primera sólo cuesta 600 euros por unidad, es preciso pagar hasta 850 euros por cada una de las segundas. Además, cada tipo de placa tiene un área diferente: las del primer tipo ocupan 0,5 m^2 y las del segundo tipo 0,8 m^2. Por último, cada una de estas placas generará unos residuos que son, para las primeras de 350 unidades y de 200 para la segunda. La ley establece que, en ningún caso, pueden generarse más de 700 residuos.

Se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de minimizar el coste de la nueva instalación solar
2. Resolver el problema gráficamente. ¿Cuántas placas de cada tipo deben instalarse?

Problema 4

Un colegio privado ha enviado una oferta a un reconocido profesor de matemáticas y física para que imparta clases en su centro. El colegio da libertad total al profesor para que decida cuántas horas de cada asignatura debe impartir al día con la condición de que imparta un máximo de 8 horas diarias. La oferta realizada detalla que por cada hora impartida de matemáticas y física recibirá 7.5€ y 8.2€ respectivamente. El profesor no está dispuesto a invertir más de tres horas diarias para preparar todas las clases. Él sabe que preparar una hora de clase de matemáticas necesita una dedicación de 12 minutos, mientras que necesita hasta 40 para preparar cada hora de física. Además, con el paso del tiempo, la satisfacción personal que él mismo recibe al impartir clase ha ido decreciendo. De hecho, recibe la mitad de satisfacción personal por cada hora impartida de matemáticas que por cada hora de física. Esto es importante, puesto que el profesor desea recibir un mínimo de 5 unidades de satisfacción personal diaria.

Se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de maximizar el salario diario del profesor.
2. Resuelve gráficamente el problema de Programación Lineal obtenido en el apartado anterior.
3. Representar el problema en *forma estándar*.
4. Representar el problema en *forma canónica*.

Problema 4

Un colegio privado ha enviado una oferta a un reconocido profesor de matemáticas y física para que imparta clases en su centro. El colegio da libertad total al profesor para que decida cuántas horas de cada asignatura debe impartir al día con la condición de que imparta un máximo de 8 horas diarias. La oferta realizada detalla que por cada hora impartida de matemáticas y física recibirá 7.5€ y 8.2€ respectivamente. El profesor no está dispuesto a invertir más de tres horas diarias para preparar todas las clases. Él sabe que preparar una hora de clase de matemáticas necesita una dedicación de 12 minutos, mientras que necesita hasta 40 para preparar cada hora de física. Además, con el paso del tiempo, la satisfacción personal que él mismo recibe al impartir clase ha ido decreciendo. De hecho, recibe la mitad de satisfacción personal por cada hora impartida de matemáticas que por cada hora de física. Esto es importante, puesto que el profesor desea recibir un mínimo de 5 unidades de satisfacción personal diaria.

Se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de maximizar el salario diario del profesor.
2. Resuelve gráficamente el problema de Programación Lineal obtenido en el apartado anterior.
3. Representar el problema en *forma estándar*.
4. Representar el problema en *forma canónica*.

Problema 5

Una compañía ha decidido ofrecer servicios de computación en la nube. Desean adquirir dos tipos de ordenadores de altas capacidades equipados con *Scientific Linux*, y denominados Type-I y Type-II por 3.500€ and 5.200€ por unidad respectivamente. Los primeros pueden ejecutar hasta 16.000 BogoMips, mientras que los segundos llegan hasta los 54.000 BogoMips, y la compañía desea asegurar una capacidad de cómputo al menos de 1.872.000 BogoMips. Para ello, desean comprar al menos un ordenador Type-II por cada dos ordenadores Type-I.

1. Modela el problema como una tarea de Programación Lineal con el objetivo de minimizar el gasto necesario para comprar los ordenadores que satisfagan todas las restricciones.

2. Transforma la tarea de Pogramación Lineal del apartado anterior a la *forma estándar*.

3. Se ha decidido reconfigurar el Centro de Computación, y ahora todos los ordenadores TYPE-I deben agruparse en grupos de 4, mientras que los TYPE-II deben agruparse de 6 en 6.

   Indica las modificaciones necesarias a la tarea de Programación Lineal del apartado (1) para resolver óptimamente el nuevo problema.

4. Por último, la demanda de potencia del Centro de Cálculo hace obligatoria la adquisición de un adaptador de potencia, con un coste de 18.000€ si y sólo si se adquieren al menos 20 unidades TYPE-II

   Indica las modificaciones necesarias a la tarea de Programación Lineal del apartado (1) para resolver óptimamente el nuevo problema.

Solución del problema 1

1. Para modelar el problema debemos identificar:

   a) Las variables y su unidad de medida
   b) La función objetivo
   c) Las restricciones

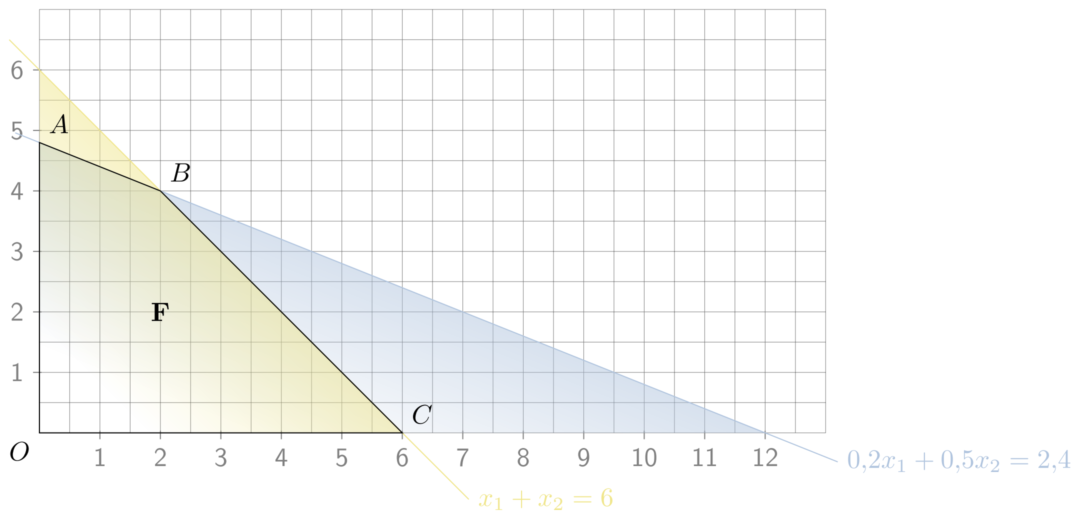
   Podemos ver que las cantidades se miden en millones de litros de zumo. Por tanto podemos representar las variables como:

   x_1: millones de litros de Néctar de Piña
   x_2: millones de litros de Unizumo de Piña

   De esta forma el problema estaría modelado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\max z = 1{,}25x_1 + 2{,}05x_2} \\ 0{,}2x_1 & + & 0{,}5x_2 & \leq & 2{,}4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

2. A continuación se muestra un eje de coordenadas con tantas dimensiones como variables de decisión tiene el problema:



   Como puede verse, la región factible F está delimitada por los puntos O, A, B y C. Los tres primeros pueden leerse directamente en la gráfica y son $O(0,0)$, A$(0, 4{,}8)$ y B$(6,0)$. El último se calcula como la intersección de las dos restricciones:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-\frac{3}{10}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Calculando la función objetivo en cada punto extremo obtenemos:

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{B}} &= (1{,}25 \quad 2{,}05) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ z_{\mathrm{A}} &= (1{,}25 \quad 2{,}05) \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = 9{,}84 \\ z_{\mathrm{C}} &= (1{,}25 \quad 2{,}05) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 10{,}7 \\ z_{\mathrm{D}} &= (1{,}25 \quad 2{,}05) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 7{,}5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, fabricando 2 millones de litros de Néctar de Piña y 4 millones de litros de Unizumo de Piña se obtiene el máximo ingreso por ventas, por valor de 10,7 millones de euros.

3. Para modelar el problema en forma estándar sólo hace falta introducir variables de holgura para transformar las desigualdades en igualdades como se indica a continuación:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{9}{c}{\text{máx } z = 1{,}25x_1 + 2{,}05x_2} \\
0{,}2x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & x_3 & & & = & 2{,}4 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

Puesto que ambas restricciones eran originalmente del tipo $\leq$, las variables de holgura se han sumado, en vez de restarse como correspondería con los casos en los que la restricción es del tipo $\geq$.

Solución del problema 2

1. En este problema estamos midiendo las horas contratadas en los salones del hotel, de modo que las variables pueden ser:

x_1: número de horas contratadas en el Aula Ejecutiva
x_2: número de horas contratadas en el Salón de Conferencias

La función objetivo es:

$\text{mín } z = 90x_1 + 150x_2$

Identificamos las restricciones del problema :

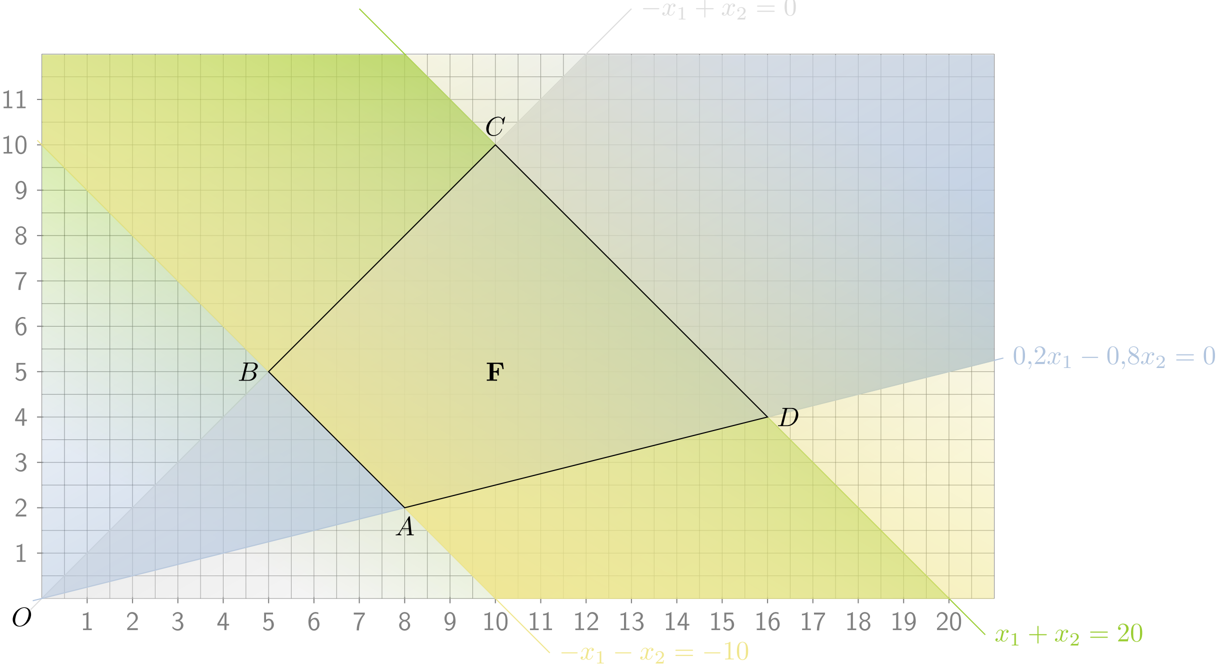
$x_1 + x_2 \leq 20$	*El curso dura como máximo 20 horas*
$x_1 + x_2 \geq 10$	*La oferta es válida si contratamos mas de 10h*
$x_1 \geq x_2$	*. . . más tiempo en el Aula Ejecutiva*
$x_2 \geq 0{,}2(x_1 + x_2)$	*al menos el 20 % en el Salón de Conferencias*
$x_1, x_2 \geq 0$	*El número de horas debe ser no negativo*

2. Ahora, representamos el problema en la forma canónica

$$
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{\text{máx } z' = -90x_1 - 150x_2} \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\
- & x_1 & - & x_2 & \leq & -10 \\
- & x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & 0{,}2x_1 & - & 0{,}8x_2 & \leq & 0 \\
\multicolumn{6}{c}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

3. La región factible F es el polígono circunscrito por los puntos A$(8,2)$, B$(5,5)$, C$(10,10)$ y D$(16,4)$[1] que se muestra en la siguiente figura:

[1] Los puntos se leen fácilmente en la gráfica resultante y, por ese motivo, no se calculan como la intersección de las rectas correspondientes



Evaluando la función objetivo en los puntos extremos resulta:

$$z'_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -90 & -150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = -1020$$
$$z'_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -90 & -150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -1200$$
$$z'_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} -90 & -150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = -2400$$
$$z'_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} -90 & -150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = -2040$$

Por tanto, la opción que minimiza los costes es hacer un curso de 10 horas contratando 8h en el Aula Ejecutiva y 2h el Salón de Conferencias.

Solución del problema 3

1. En el problema se pueden distinguir hasta cuatro conjuntos diferentes de información.

   Energía Mientras que el primer tipo de placas produce hasta 960 W/m^2, el segundo llega hasta 1500 W/m^2. Además, la cantidad mínima de energía que debe garantizarse es de 2400 wattios.

   Área Se sabe que la comunidad de vecinos dispone de 2 m^2 para instalar una cantidad arbitraria de placas solares de cada tipo. Mientras que las del primer tipo ocupan 0,5 m^2, las del segundo tipo ocupan 0,8 m^2.

   Residuos Los residuos generados por el uso de las placas solares no puede superar las 700 unidades. Cada placa solar del primer tipo genera hasta 350 residuos y las del segundo tipo sólo 200.

   Costes Se sabe que las placas del primer tipo cuestan 600 euros por unidad y las del segundo tipo 850 euros.

   Por otra parte, las variables de decisión del problema son:

   x_1: cantidad de placas solares del primer tipo
   x_2: cantidad de placas solares del segundo tipo

   de modo que las restricciones se pueden modelar como sigue:

Energía Las placas del primer tipo generan 960 W/m^2. Puesto que tienen una superficie de 0,5 m^2, se tiene que x_1 placas del primer tipo generan exactamente $960 \times 0{,}5x_1 = 480x_1$ W/m^2. De la misma manera, las placas del segundo tipo generan 1500 W/m^2, pero atendiendo al área que tienen, x_2 placas del segundo tipo generan $1500 \times 0{,}8x_2 = 1200x_2$ W/m^2.

Por último, el *recurso* dedicado a la energía es de, al menos, 2400 wattios:

$$480x_1 + 1200x_2 \geq 2400$$

Área En el enunciado no se hace ninguna consideración adicional sobre la forma del área disponible en la comunidad de vecinos, de modo que sólo debe asegurarse que el área total usada por x_1 placas del primer tipo y x_2 placas del segundo tipo no debe exceder los 2 metros cuadrados. Atendiendo al tamaño de cada placa, la segunda restricción será:

$$0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 \leq 2$$

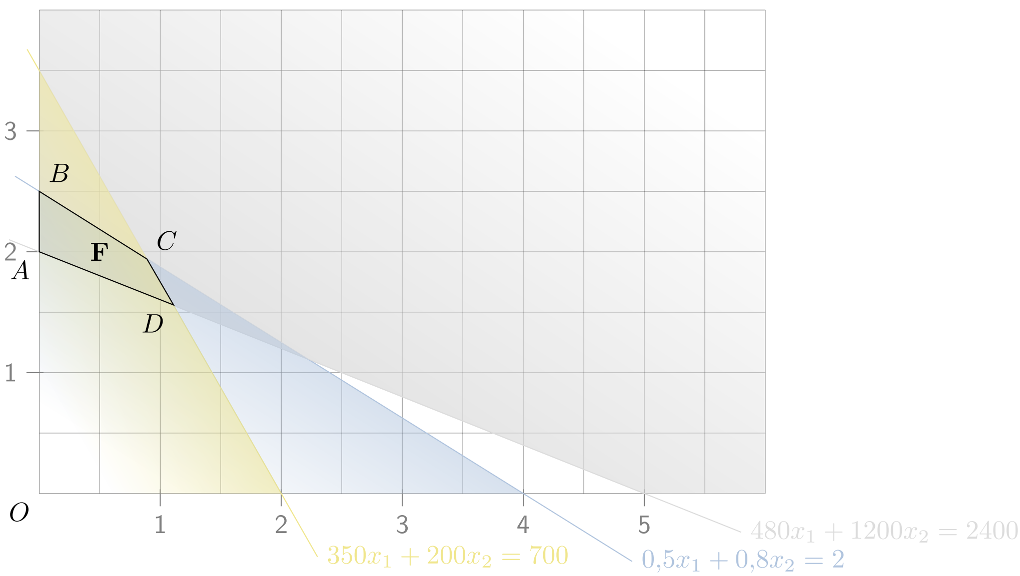
Residuos Por último, en cumplimiento de la ley vigente sobre residuos energéticos, no deben generarse más de 700. Como antes, el número total de residuos servirá para identificar la última restricción:

$$350x_1 + 200x_2 \leq 700$$

Por último, para completar la definición del problema es preciso identificar la función objetivo. Puesto que el enunciado pedía expresamente reducir los costes, y éstos se pueden calcular simplemente como: $600x_1 + 850x_2$, resulta el problema de Programación Lineal siguiente:

$$\begin{array}{rcrcr} \multicolumn{5}{c}{\min z = 600x_1 + 850x_2} \\ 480x_1 & + & 1200x_2 & \geq & 2400 \\ 350x_1 & + & 200x_2 & \leq & 700 \\ 0{,}5x_1 & + & 0{,}8x_2 & \leq & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

2. La siguente figura muestra las regiones que satisfacen cada una de las restricciones anteriores. Como se ve, la región factible F está delimitada por los puntos A, B, C y D.



Los dos primeros puntos pueden obtenerse directamente de la gráfica y son: A$(0, 2)$ y B$(0, 2{,}5)$

Los dos puntos adicionales deben calcularse como la intersección de dos rectas. En particular, C resulta de la intersección de las restricciones segunda y tercera. Por lo tanto:

$$\text{C} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 350 & 200 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 1{,}94 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, el punto D resulta de la intersección de las restricciones primera y segunda:

$$\text{D} = \begin{pmatrix} 480 & 1200 \\ 350 & 200 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2400 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}11 \\ 1{,}56 \end{pmatrix}$$

Ahora sólo resta evaluar la función objetivo sólo en los puntos extremos de la región factible y escoger, como se indica en la función objetivo, el mínimo:

$$\begin{aligned} z_{\text{A}} &= \begin{pmatrix} 600 & 850 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1700 \\ z_{\text{B}} &= \begin{pmatrix} 600 & 850 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 2125 \\ z_{\text{C}} &= \begin{pmatrix} 600 & 850 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 1{,}94 \end{pmatrix} = 2183 \\ z_{\text{D}} &= \begin{pmatrix} 600 & 850 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}11 \\ 1{,}56 \end{pmatrix} = 1992 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es el punto A que consiste en instalar dos placas del segundo tipo y ninguna del primer tipo.

Solución del problema 4

1. En este problema estamos calculando el número de horas diarias a impartir de cada asignatura, por lo que las variables serán:

   x_1: número de horas impartidas de matemáticas
   x_2: número de horas impartidas de física

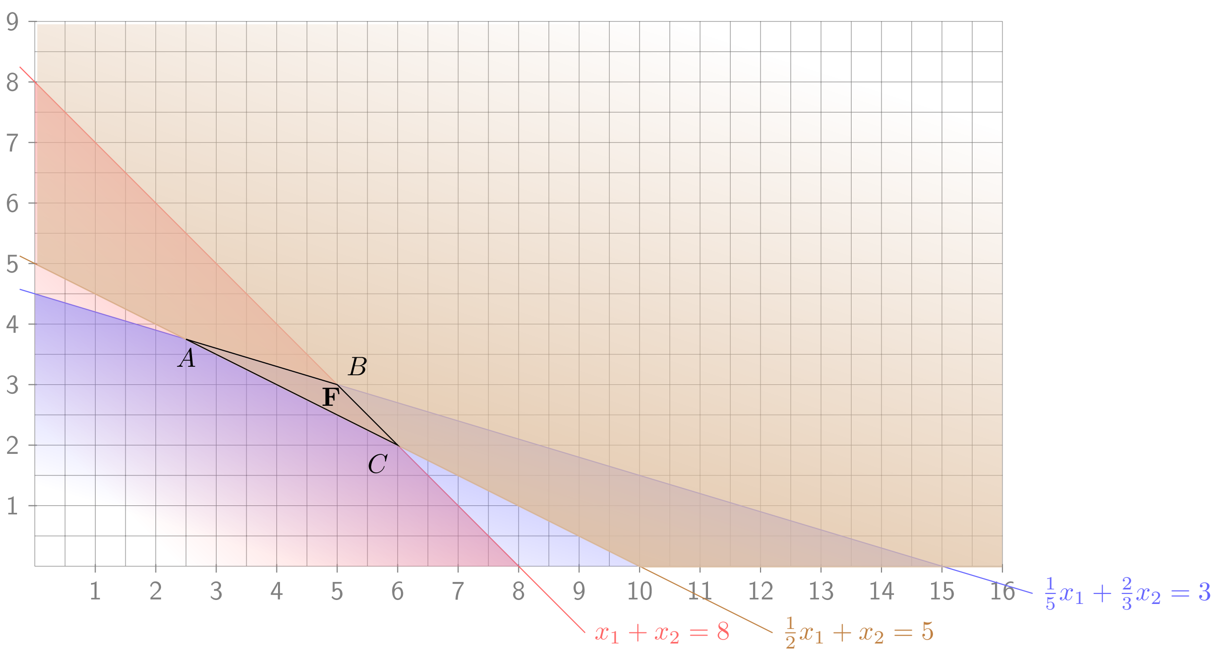
   La función objetivo debe maximizar el salario del profesor:

   $\text{máx}\, z = 7{,}5x_1 + 8{,}2x_2$

   Analizando las necesidades del colegio y del profesor, identificamos las siguientes restricciones en el problema:

$x_1 + x_2 \leq 8$	*El profesor no puede impartir más de 8 horas diarias*
$\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 3$	*El tiempo máximo para preparar las clases de cada día es de 3 horas*
$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 5$	*La satisfacción personal diaria debe ser al menos de 5 unidades*

2. La siguente figura muestra las regiones que satisfacen cada una de las restricciones anteriores. Como se ve, la región factible F está delimitada por los puntos A, B y C.



Los tres puntos deben calcularse como la intersección de dos rectas. En particular, A resulta de la intersección de las restricciones segunda y tercera. Por lo tanto:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-\frac{2}{15}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & \frac{10}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

De la misma manera, el punto B resulta de la intersección de las restricciones primera y segunda:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{7}{15}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & -\frac{15}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{15}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y el último punto, el punto C, resulta de la intersección de las restricciones primera y tercera:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora sólo resta evaluar la función objetivo en los puntos extremos de la región factible y escoger, como se indica en la función objetivo, el máximo:

$$z_{\mathrm{A}} = (7{,}5 \quad 8{,}2) \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = 49{,}5$$

$$z_{\mathrm{B}} = (7{,}5 \quad 8{,}2) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 62{,}1$$

$$z_{\mathrm{C}} = (7{,}5 \quad 8{,}2) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 61{,}4$$

Por lo tanto, la solución es el punto B que consiste en impartir 5 horas de matemáticas y 3 de física cada día.

3. Ahora, representamos el problema en *forma canónica*:

$$\begin{array}{rcrcl} & & \text{máx}\, z = 7{,}5x_1 + 8{,}2x_2 & & \\ & x_1 & + \quad x_2 & \leq & 8 \\ & \frac{1}{5}x_1 & + \quad \frac{2}{3}x_2 & \leq & 3 \\ - & \frac{1}{2}x_1 & - \quad x_2 & \leq & -5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

La única restricción que hay que trasformar es la tercera, pues en el modelo definido en el primer apartado ésta es del tipo $\geq$. Por lo tanto, para cambiar el sentido de la desigualdad, se multiplican ambos miembros por -1.

4. Para modelar el problema en *forma estándar* sólo hace falta introducir *variables de holgura* para transformar las desigualdades en igualdades como se indica a continuación:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \multicolumn{11}{c}{\text{máx}\, z = 7{,}5x_1 + 8{,}2x_2} \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\ \frac{1}{5}x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 5 \\ \multicolumn{11}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0} \end{array}$$

Puesto que las dos primeras restricciones eran originalmente del tipo $\leq$, las variables de holgura se han sumado, en vez de restarse como se ha realizado con la tercera restricción, la cual era del tipo $\geq$.

Solución del problema 5

1. La siguiente tabla muestra la misma información del enunciado pero presentando únicamente la información relevante para obtener la tarea de Programación Lineal pedida:

	Coste	BogoMips
Type-I	3.500€	16.000
Type-II	5.200€	54.000

El único parámetro que no se presenta en la tabla, es que la empresa demanda una capacidad total de 1.872.000 BogoMips sumando la de todos los ordenadores de un tipo y otro.

Se sugiere usar las siguientes variables de decisión:

$x_1 \fallingdotseq$ Número de unidades de Type-I
$x_2 \fallingdotseq$ Número de unidades de Type-II

Para la modelización de las restricciones se observa que:

- La capacidad total de cálculo adquiriendo x_1 unidades de ordenadores Type-I y x_2 unidades de ordenadores Type-II es $16{,}000x_1 + 54{,}000x_2$, y debe ser al menos igual a 1.872.000:

$$16{,}000x_1 + 54{,}000x_2 \geq 1{,}872{,}000$$

- Por otra parte, el número de máquinas Type-II debe ser al menos la mitad de las del primer tipo:

$$x_2 \geq \frac{1}{2}x_1$$

que puede reescribirse de la manera:

$$-x_1 + 2x_2 \geq 0$$

Por último, la función objetivo consiste en minimizar el gasto total que, de acuerdo a la información mostrada en la tabla superior se calcula como sigue:

$$\min z = 3{,}500x_1 + 5{,}200x_2$$

resultando entonces la siguiente tarea de Programación Lineal:

$$\begin{array}{c}\min z = 3{,}500x_1 + 5{,}200x_2 \\ \begin{array}{rcccccc} 16{,}000 & x_1 & + & 54{,}000 & x_2 & \geq & 1{,}872{,}000 \\ - & x_1 & + & 2 & x_2 & \geq & 0 \end{array} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{N}\end{array}$$

donde se advierte explícitamente que no sólo todas las variables de decisión deben tomar valores no nulos sino que, además, deben ser enteros, puesto que no tiene sentido comprar unidades por partes.

2. Para que la tarea de Programación Lineal del apartado anterior esté en forma *estándar de maximización* es preciso:

   - Que la función objetivo maximice, en vez de minimizar. Para ello, se propone la siguiente transformación:

     $$maxz = -3{,}500x_1 - 5{,}200x_2$$

   - Que las dos restricciones del problema se escriban como igualdades. Puesto que ahora están acotadas inferiormente, es preciso restar una variable de *holgura* a cada restricción que se suma a la función objetivo con coeficiente nulo:

     $$\begin{array}{c}\begin{array}{rcccccccc} 16{,}000 & x_1 & + & 54{,}000 & x_2 & - & x_3 & & & = & 1{,}872{,}000 \\ - & x_1 & + & 2 & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{N}\end{array}$$

   El resto de condiciones (esto es, que los recursos son cantidades no negativas, y que las variables de decisión son no nulas), ya se verificaban inicialmente y, por lo tanto, resulta la siguiente tarea de Programación Lineal en *forma estándar de maximización*:

   $$\begin{array}{c}\max z = -3{,}500x_1 - 5{,}200x_2 \\ \begin{array}{rcccccccc} 16{,}000 & x_1 & + & 54{,}000 & x_2 & - & x_3 & & & = & 1{,}872{,}000 \\ - & x_1 & + & 2 & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{N}\end{array}$$

3. En el tercer apartado se advierte que los ordenadores Type-I deben adquirirse en grupos de 4, mientras que los de Type-II deben agruparse de 6 en 6. La siguiente redefinición de las variables de decisión:

   x_1 ⇋ Cuarta parte de las unidades de Type-I
   x_2 ⇋ Sexta parte de las unidades de Type-II

   garantiza que la solución será, precisamente un múltipo de cuatro para los ordenadores del primer tipo, y un múltiplo de 6 para los ordenadores del segundo tipo puesto que el número óptimo de unidades que deben adquirirse es entonces de $4x_1$, y de $6x_2$ respectivamente.

   Puesto que ahora cada variable es sólo una parte de las unidades que deben comprarse, es preciso rehacer los cálculos del coste y potencia de las máquinas, así como del número de unidades que deben adquirirse de un tipo en relación con el otro. La siguiente tarea de Programación Lineal indica explícitamente las modificaciones a realizar:

   $$\begin{array}{c}\min z = 4 \times 3{,}500 \times x_1 + 6 \times 5{,}200 \times x_2 \\ \begin{array}{rcccccc} 4 \times 16{,}000 & x_1 & + & 6 \times 54{,}000 & x_2 & \geq & 1{,}872{,}000 \\ - & x_1 & + & 3 & x_2 & \geq & 0 \end{array} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{N}\end{array}$$

   donde la segunda restricción muestra el resultado después de operar con los nuevos coeficientes.

4. En el último caso se pide determinar si la solución consiste en la adquisición de 20 unidades TYPE.II o más, en cuyo caso es preciso adquirir un adaptador de potencia. Para ello, se introduce una nueva variable:

$$b = \begin{cases} 0, & \text{si hay estrictamente menos de 20 unidades TYPE-II} \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

que, como puede verse, es una variable binaria.

Para conseguir que la variable tome los valores deseados:

- Si se compran menos de 20 unidades, b debe tomar el valor 0:

$$x_2 \geq 20b$$

- Por el contrario, si se compran 20 unidades TYPE-II, o más, b debe tomar el valor 1. Intuitivamente, la idea consiste en restar 20 al valor de x_2, y compararlo con b:

$$b \geq x_2 - 20$$

que no acaba de funcionar como se desea, puesto que si $x_2 - 20 > 1$, entonces b deberá tomar valores arbitrariamente altos, lo cual no es posible. Sin embargo, multiplicando b por una costante cualquiera arbitrariamente grande:

$$bM \geq x_2 - 20$$

casi funciona. El único problema ahora es que si $x_2 = 20$, entonces b podrá valer también 0, mientras que deberá tomar el valor 1. Para ello, basta restar 19, en vez de 20:

$$bM \geq x_2 - 19$$

Nótese que si $x_2 \geq 20$, b podrá tomar entonces cualesquiera de los valores de su dominio $\{0, 1\}$ en la primera restricción, mientras que la segunda sólo puede tomar el valor 1; por el contrario, si $x_2 < 20$, b puede tomar cualquier valor en la segunda restricción, pero ahora la primera le obliga a tomar el valor 0.

Añadiendo las nuevas restricciones a las que ya habá antes, y considerando el gasto adicional del adaptador de potencia, resulta entonces la siguiente tarea de Programación Lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & \multicolumn{7}{l}{\min z = 3{,}500x_1 + 5{,}200x_2 + 18{,}000b} \\ 16{,}000 & x_1 & + & 54{,}000 & x_2 & & & \geq & 1{,}872{,}000 \\ - & x_1 & + & 2 & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_2 & - & 20b & \geq & 0 \\ & & - & & x_2 & + & bM & \geq & -19 \\ \multicolumn{9}{c}{\mathbf{x} \in \mathbb{N}, b \in \{0, 1\}} \end{array}$$