$$\boxed{\text{FUNCIONES } f(x) = x^n \;;\; n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}}$$

$n = 1$: $f(x) = x$

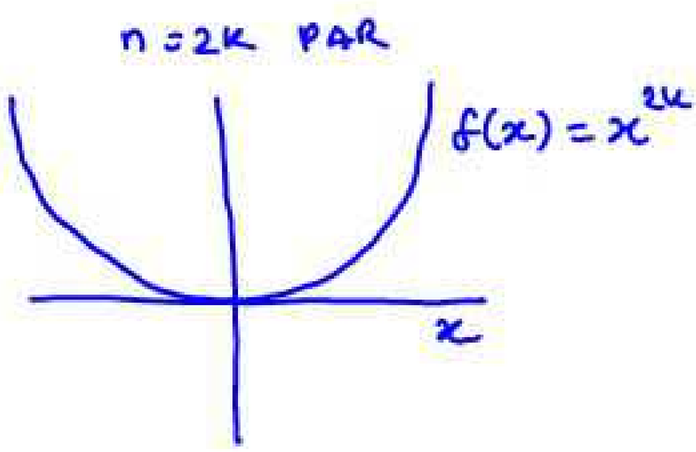
$n = 2$: $f(x) = x^2 = x \cdot x$

$n = 3$: $f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x$

etc.

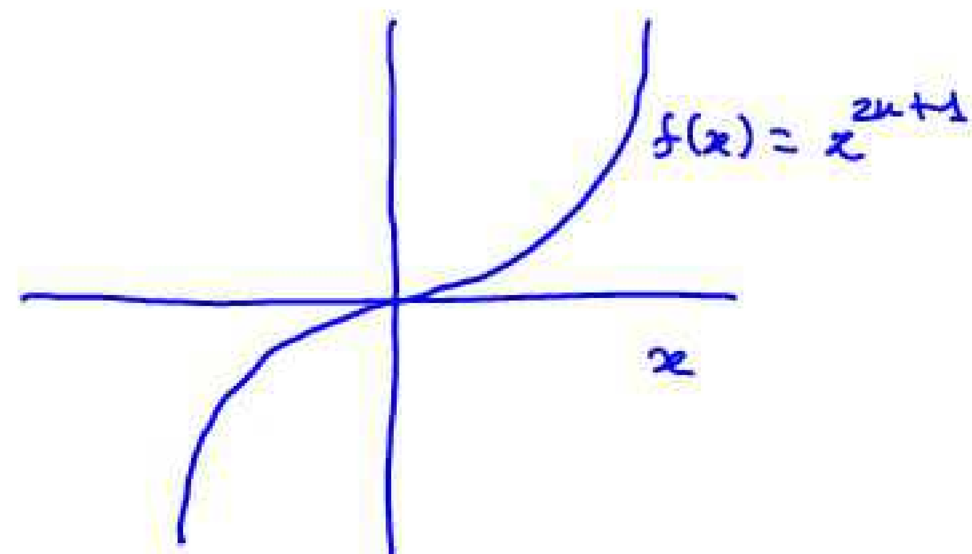
$f(x) = x^n$:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- f es continua en $\mathbb{R}$
- f es derivable en $\mathbb{R}$
- $f'(x) = n x^{n-1}$; $x \in \mathbb{R}$
- f' es continua em $\mathbb{R}$.



función par

$f(-x) = f(x)$



función impar

$f(-x) = -f(x)$

FUNCIONES $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$n=1$: $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

$n=2$: $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

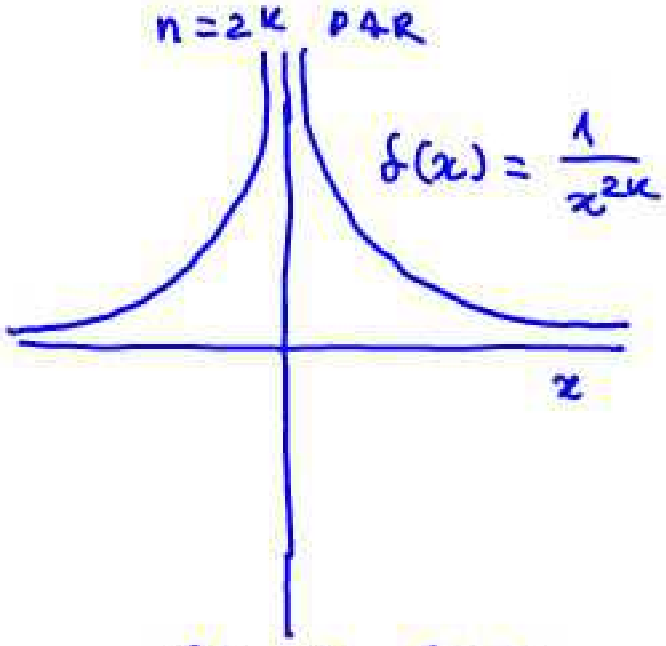
$n=3$: $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

etc.

$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

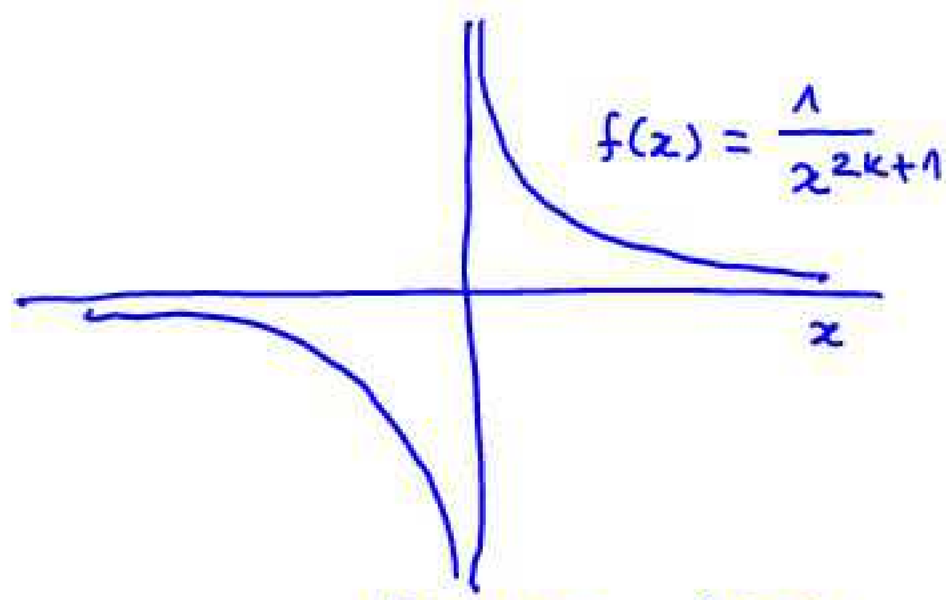
- $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f'(x) = -n\, x^{-n-1}$; $x \neq 0$
- f' es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$n = 2k$ PAR



$f(-x) = f(x)$

$n = 2k+1$ IMPAR



$f(-x) = -f(x)$

$$\boxed{\text{FUNCIONES} \quad f(x) = x^a \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}}$$

$f(x) = x^{\sqrt{2}}$; $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{7}}}$; $f(x) = x^{1/6}$; ...

- PRIMERA DEFINICIÓN :

$$f(x) = x^a := e^{a \log(x)} \quad \text{si} \quad x > 0$$

Esta definición nos obliga a tomar $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$

¿$\exists \lim_{x \to 0^+} f(x)$?

Puesto que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^a = \lim_{x \to 0^+} e^{a \log(x)} =$

$$= e^{a \cdot (-\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

- SEGUNDA DEFINICIÓN :

Si $a > 0$: $f(x) = x^a = \begin{cases} e^{a \log x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\text{Dom} f = [0, \infty)$

f es continua en $[0, \infty)$

Si $a < 0$: $f(x) = x^a = e^{a \log x}$ si $x > 0$

$\text{Dom} f = (0, \infty)$

f es continua en $(0, \infty)$

Supongamos $a<0$:

$f(x) = x^a = e^{a\log x}$ con $x \in (0,\infty)$

f es continua y derivable en $(0,\infty)$. En concreto:

$$f'(x) = e^{a\log x} \cdot \frac{a}{x} = a\,\frac{e^{a\log x}}{x} = a\,\frac{e^{a\log x}}{e^{\log x}} =$$

$$= a\,e^{(a-1)\log x} =: a x^{a-1} \quad ; \quad x>0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = a x^{a-1} \quad \forall x \in (0,\infty)$$

f' es continua en $(0,\infty)$.

Supongamos $a>0$:

$$f(x) = x^a = \begin{cases} e^{a\log x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Si $x>0$: $f(x) = x^a = e^{a\log x}$

f es derivable en $x>0$

$f'(x) = a x^{a-1}$

mismo cálculo que para $a<0$

Si $x=0$: $$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\log x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\log x}}{e^{\log x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{(a-1)\log x} = \begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ \infty & \text{si } 0<a<1 \end{cases}$$

En resumen:

- Si $0<a<1$:

$f(x) = x^a$ es continua en $[0,\infty)$

derivable en $(0,\infty)$

$f'(x) = a x^{a-1}$ si $x \in (0,\infty)$

f' es continua en $(0,\infty)$

$\nexists\, f'(0)$ $[\, f'_+(0) = \infty \,]$

- Si $a>1$:

$f(x) = x^a$ es continua en $[0,\infty)$

es derivable en $[0,\infty)$

$f'(x) = a x^{a-1}$ $\forall x \in [0,\infty)$

En particular $f'(0) = 0$

f' es continua en $[0,\infty)$.

<u>Obs:</u> Supongamos $x>0$; a,b arbitrarios:

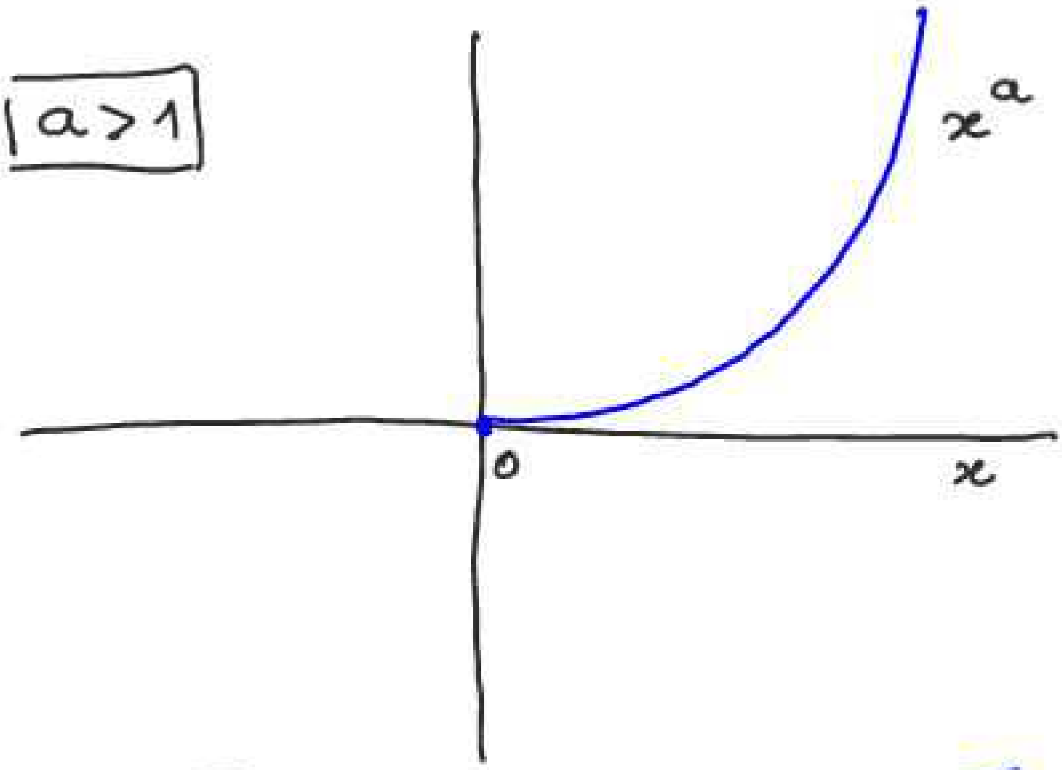
- $x^a \cdot x^{-a} = 1 \Rightarrow x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$

En efecto:

- $x^a \cdot x^{-a} = e^{a\log x} \cdot e^{-a\log x} = e^0 = 1$
- $x^a x^b = e^{a\log x} \cdot e^{b\log x} = e^{(a+b)\log x} = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = (e^{a\log x})^b = e^{b\log(e^{a\log x})} =$

$= e^{b\cdot a\log x} = x^{ab}$

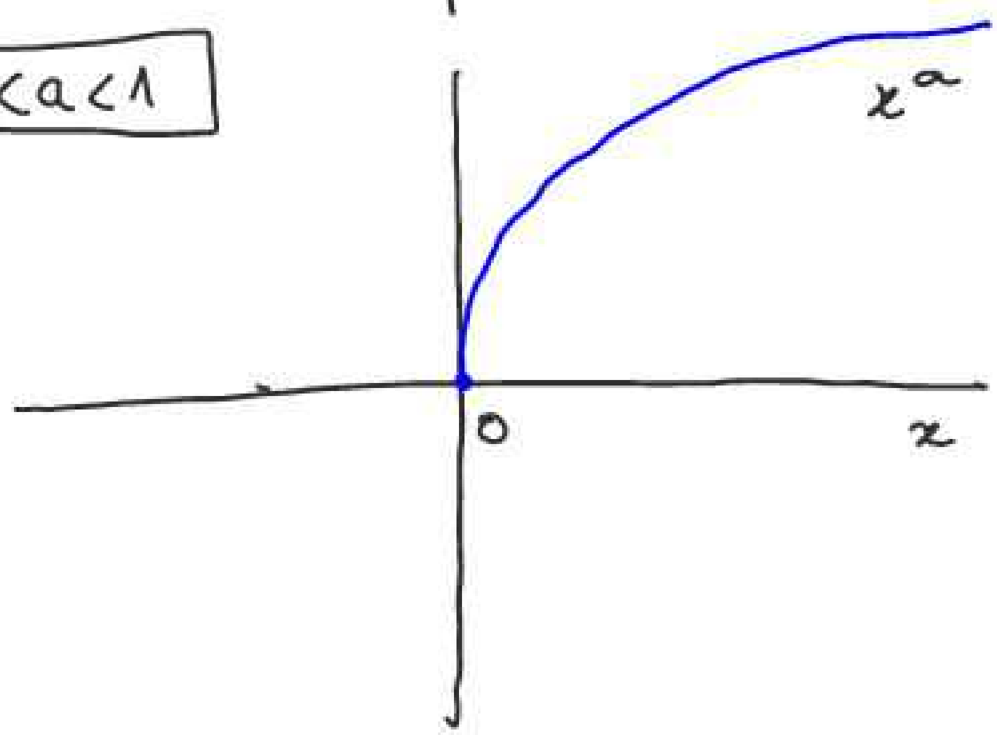
$\boxed{a>1}$



$0^a = 0$

$1^a = 1$

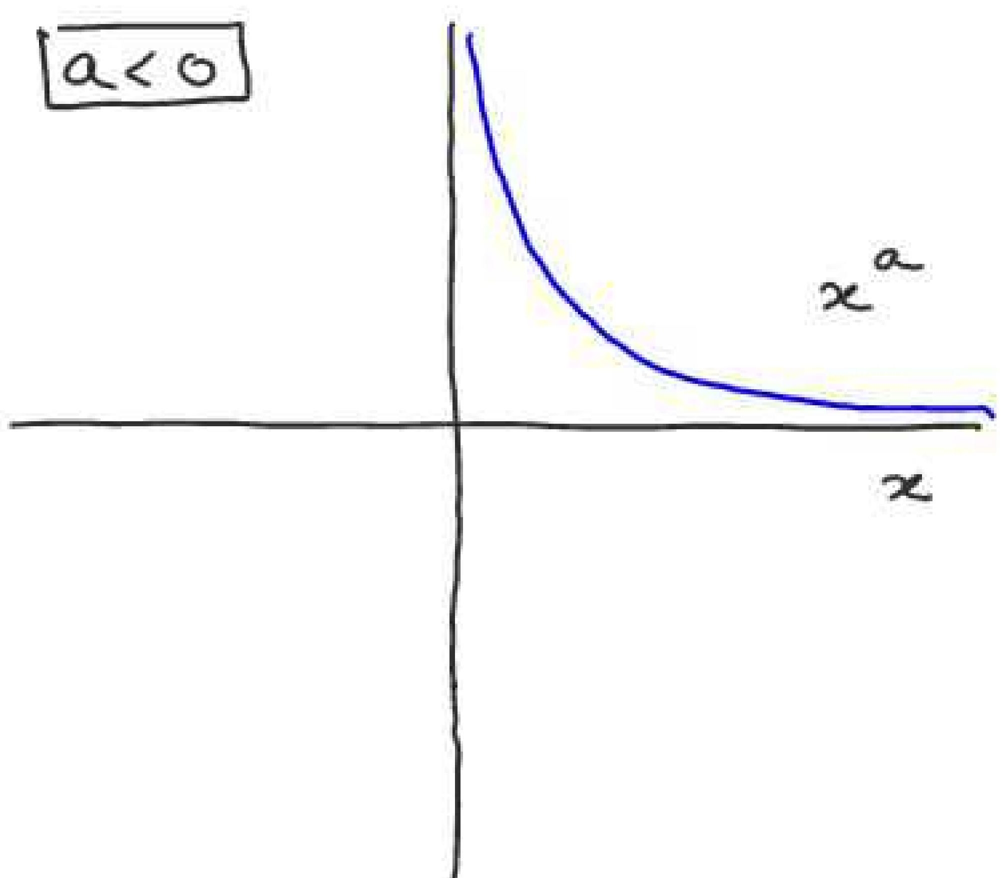
$\boxed{0<a<1}$



$0^a = 0$

$1^a = 1$

$\boxed{a<0}$



$1^a = 1$

"$0^a = \infty$"

$$\boxed{f(x) = x^a \quad \text{con } a = \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{1}{6};\ \cdots}$$

$a = 1/2$: $\quad (x^{1/2})^2 = x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow x^{1/2} = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ continua en $[0,\infty)$

derivable en $(0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ;\ x>0$$

$a = 1/4$: $\quad (x^{1/4})^4 = x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

$f(x) = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ continua en $[0,\infty)$

derivable en $(0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\ ; \quad x>0$$

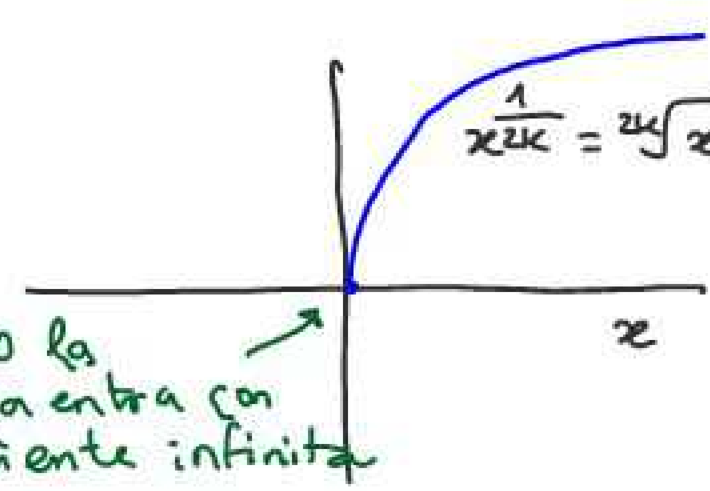
En general: $\quad (x^{1/2k})^{2k} = x \quad \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$$

$f(x) = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$ continua en $[0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2k}x^{\frac{1}{2k}-1} = \frac{1}{2k\,x^{\frac{2k-1}{2k}}} = \frac{1}{2k\sqrt[2k]{x^{2k-1}}}\ ;\ x>0$$

$\nexists f'(0) \quad [\, f'_+(0) = \infty \,]$



En 0 la gráfica entra con pendiente infinita

$$\boxed{f(x) = x^a \quad \text{con} \quad a = 1/3,\ 1/5,\ 1/7, \ldots}$$

En este caso conviene CAMBIAR la definición general para que x^a tenga como dominio TODO $\mathbb{R}$. En concreto, si $a = 1/3$ definimos:

$$f(x) = x^{1/3} = \begin{cases} e^{\frac{1}{3}\log(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -e^{1/3\log(-x)} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(La definición es tal que $f(-x) = -f(x)$: impar)

Esta nueva definición hace que se cumpla que:

$$(x^{1/3})^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto:

$$(x^{1/3})^3 = \begin{cases} e^{\frac{3}{3}\log(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -e^{\frac{3}{3}\log(-x)} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$(x^{1/3})^3 = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto: $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

f es continua en $\mathbb{R}$

derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\nexists f'(0)$

En general, si $a = \frac{1}{2k+1}$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{2k+1}\log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\frac{1}{2k+1}\log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2k+1}}\right)^{2k+1} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

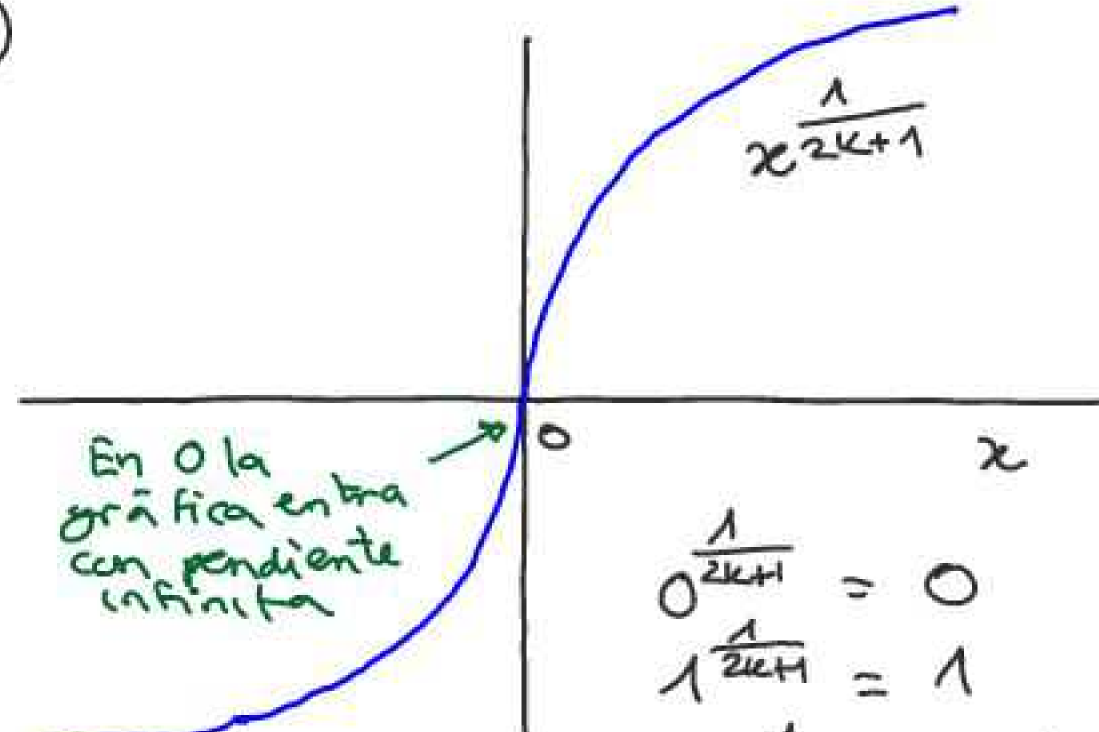
$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2k+1} x^{\frac{1}{2k+1}-1} = \frac{1}{(2k+1)\, x^{\frac{2k}{2k+1}}}$$

$$= \frac{1}{(2k+1)\sqrt[2k+1]{x^{2k}}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\nexists f'(0)$



$$0^{\frac{1}{2k+1}} = 0$$
$$1^{\frac{1}{2k+1}} = 1$$
$$(-1)^{\frac{1}{2k+1}} = -1$$