Tema 1

Matrices

1.1. Algunas definiciones básicas

En este tema de introducción a la asignatura de Álgebra Lineal definimos algunas nociones y enunciamos algunas propiedades de las matrices, en su mayoría conocidas de cursos anteriores.

- Una **matriz de dimensión** $m \times n$ es una disposición rectangular en m filas y n columnas de números, reales o complejos, denominados *elementos* o entradas. Las matrices se suelen indicar con letras mayúsculas, mientras que los elementos de las mismas se denotan con letras minúsculas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

  Así, el elemento (i, j) de la matriz, es decir, el que ocupa la posición dada por la i-ésima fila y la j-ésima columna, se representa mediante a_{ij}.

NOTA: en algunas ocasiones es más sencillo representar los elementos de la matriz A usando también letras mayúsculas; por ejemplo, $A = (A_{ij})$.

El conjunto de todas las matrices $m \times n$ con elementos reales se denota por $\mathbb{R}^{m\times n}$; el conjunto de todas las matrices $m \times n$ con elementos complejos se denota por $\mathbb{C}^{m\times n}$. Para referirnos en general a cualquiera de estos conjuntos escribiremos $\mathbb{K}^{m\times n}$.

También usaremos el término **escalar** para referirnos a un elemento del conjunto $\mathbb{K}$, ya sea éste $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. (El símbolo $\mathbb{K}$ representa en general un conjunto con la estructura algebraica de cuerpo. En este curso nos centraremos fundamentalmente en el cuerpo de los reales. La definición precisa de cuerpo se verá en el Tema 3).

- Una matriz de dimensión $m \times m$ se denomina **matriz cuadrada**.

- Una matriz de dimensión $m \times 1$, es decir, que consta de una única columna, a menudo se denomina *vector columna*; del mismo modo, una matriz de dimensión $1 \times m$, es decir, que consta de una única fila, se denomina *vector fila*. En ocasiones se simplifica la notación y escribiremos simplemente $A \in \mathbb{K}^m$.

- La **diagonal principal** de una matriz A de dimensión $m \times n$ está formada por los elementos de la forma a_{ii}, para $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$.

- Una matriz cuadrada en la que todas las entradas que no están en la diagonal principal son iguales a cero se denomina **matriz diagonal**. Es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

- Una matriz cuadrada cuyas entradas por encima de su diagonal principal son cero se llama **matriz triangular inferior**. Es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $j > i$. Una matriz cuadrada cuyas entradas por debajo de su diagonal principal son cero se llama **matriz triangular superior**. Es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $j < i$.

- Una matriz de dimensión $m \times n$ con todas las entradas iguales a cero se denomina **matriz cero** y la representamos por $0_{m\times n}$ (ó simplemente por 0 si las dimensiones se sobreentienden).

- Una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ con todas las entradas iguales a cero excepto las de la diagonal principal, que valen 1, se denomina **matriz identidad** y se representa mediante I_n (ó por I si las dimensiones se sobreentienden).

- Se llama **traza** de una matriz cuadrada A (y la denotamos por $\mathrm{tr}(A)$) a la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}\ .}$$

- Dados los vectores columna $v_1, \dots, v_p$, llamamos **combinación lineal** de estos vectores a una expresión de la forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son escalares. Decimos que los vectores $v_1, \dots, v_p$ son **linealmente independientes** si, de la expresión $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$, se deduce que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.

  Entonces, llamamos **rango de una matriz** A (y lo denotamos por $\mathrm{rg}(A)$) al número de columnas linealmente independientes de la matriz. Este número coincide con el número de filas linealmente independientes de A.

1.2. Operaciones con matrices

A continuación describimos distintas operaciones que involucran matrices y enunciamos algunas de sus propiedades más importantes.

1.2.1. Suma de matrices

Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, definimos la **suma** de A y B, y lo representamos por $A+B$, como la matriz cuyo elemento (i,j) es $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Propiedades de la suma de matrices:

Si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces la suma de matrices satisface las propiedades:

1. Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$.
2. Conmutativa: $A+B = B+A$.
3. Elemento neutro: $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$.
4. Elemento inverso: Para toda matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ existe el elemento inverso $-A$, dado por $-A = (-a_{ij})$, tal que $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$.

Por estas propiedades, se dice que $\mathbb{K}^{m\times n}$ con la operación suma tiene *estructura algebraica* de grupo conmutativo.

1.2.2. Producto por escalares

Dados el escalar (real o complejo) α y la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, definimos el **producto** del escalar α por A, y lo representamos por αA, mediante la matriz cuyos elemento (i,j) es $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Propiedades del producto de matrices por escalares:

Si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entoces el producto de matrices por escalares en $\mathbb{K}^{m\times n}$ satisface las siguientes propiedades:

1. (Pseudo)asociativa: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

2. Distributiva respecto a la suma de matrices: $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

3. Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

4. Identidad: dado $1 \in \mathbb{K}$, para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se tiene que $1A=A$.

1.2.3. Producto de matrices

Dadas las matrices $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, donde el número n de columnas de A es igual al número de filas de B, el **producto** $C = A\,B$ existe y tiene dimensión $m \times p$ (aunque $B\,A$ puede existir o no). Obsérvese que este producto normalmente se escribe sin el signo de multiplicación. Si $C=(c_{ij})$ escribimos:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\,.$$

Es decir el elemento c_{ij} del producto es el **producto escalar** de la i-ésima fila de A $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ y la j-ésima columna de B $(b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj})$.

Propiedades del producto de matrices:

- Asociativa: $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$.
- Elemento neutro (o unidad): $I_m\,A = A$ y $A\,I_n = A$ para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, siendo I_m, I_n las matrices identidad de dimensión $m\times m$ y $n\times n$ respectivamente.
- La multiplicación de matrices no es conmutativa en general, es decir *normalmente* $A\,B \neq B\,A$, incluso si las matrices A y B son cuadradas.
- No toda matriz tiene inversa. Para tener inversa, una matriz tiene que ser cuadrada, pero no toda matriz cuadrada tiene inversa.
- Propiedad distributiva respecto de la suma: $A\,(B+C)=A\,B+A\,C$ (por la izquierda) y $(B+C)\,A = B\,A + C\,A$ (por la derecha).

- $A\,O_{n\times p} = O_{m\times p}$ y $O_{p\times m}\,A = O_{p\times n}$ para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Una matriz A de dimensión $n \times n$ que verifica $A\,A = A$ (escrito también como $A^2 = A$) se denomina **idempotente**. Estas matrices están relacionadas con las aplicaciones lineales que se denominan **proyectores** (ver Tema 6).

1.3. Traspuesta de una matriz

Cualquier matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tiene una única matriz **traspuesta**, representada por A^t, de tamaño $n \times m$, cuyo elemento (i, j) se define por $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

Obviamente, la primera fila de A es la primera columna de A^t; la segunda fila de A es la segunda columna de A^t y así sucesivamente.

Propiedades de la traspuesta:

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
- $\boxed{(A\,B)^t = B^t\,A^t.}$

La matriz A se dice **simétrica** si $A = A^t$. La matriz A se dice **antisimétrica** si $A = -A^t$. Obviamente, las matrices simétricas y antisimétricas son cuadradas.

Dada la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, podemos calcular otras matrices relacionadas con ella.

Las matrices $A^t\,A$ y $A\,A^t$ son simétricas.

Demostración.

$$\begin{aligned}(A^t A)^t &= A^t (A^t)^t = A^t A\,,\\ (A A^t)^t &= (A^t)^t A^t = A A^t\,.\end{aligned}$$

□

La matriz $A^t A$ será de gran importancia en los Temas 13 y 14 del curso.

Además dada la matriz *cuadrada* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tiene que:

La matriz $A + A^t$ es simétrica y la matriz $A - A^t$ es antisimétrica.

Demostración.

$$\begin{aligned}(A + A^t)^t &= A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t\,,\\ (A - A^t)^t &= A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)\,.\end{aligned}$$

□

NOTA: A menudo escribiremos los vectores columna $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ en la forma $(v_1, \dots, v_m)^t$ para ahorrar espacio.

1.4. Inversa de una matriz cuadrada

Consideremos una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$. Si A tiene rango n, se dice que A es **no singular**; si su rango es menor que n, la llamaremos matriz **singular**. En el caso de que A sea no singular, podemos asociarle una matriz especial denominada *matriz inversa*.

Toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no singular (i.e., de rango n) tiene una matriz **inversa**, de dimensión $n \times n$, denotada por A^{-1}, que satisface:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n\,.$$

Una matriz con inversa se dice que es **invertible**.

Propiedades de la matriz inversa:

- Si la matriz A tiene inversa A^{-1}, ésta es única.
- Si A y B son matrices invertibles de dimensión $n \times n$, entonces $A\,B$ es invertible y $\boxed{(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}.}$
- Si A es invertible entonces A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A es invertible entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- Si A es invertible y α es un escalar no nulo, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}\,A^{-1}$ donde α^{-1} es el único elemento inverso (multiplicativo) de $\alpha \in \mathbb{K}$.
- A es no singular si y sólo si A es invertible.
- Si A y B son matrices cuadradas de dimensión $n \times n$, el producto $A\,B$ es no singular si y sólo si A y B son las dos no singulares.

Veamos algunas definiciones que necesitaremos en temas posteriores:

- Si A es una matriz de dimensión $m \times n$ tal que $A^t\,A = I_n$, decimos que A es **ortogonal**. Como consecuencia, si A es una matriz ortogonal cuadrada de dimensión $n \times n$, entonces A es no singular y $A^{-1} = A^t$.

- Dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ son **equivalentes** si existen matrices invertibles P y Q tales que $B = Q^{-1} A P$.

- Dos matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dicen **semejantes** si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1} A P$.

1.5. Determinantes de matrices cuadradas

Toda matriz *cuadrada* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene asociado un determinante, denotado por $\det(A)$ ó $|A|$, que es un elemento de $\mathbb{K}$ calculado a partir de los elementos de la matriz. El valor numérico del mismo se obtiene por medio de un algoritmo recursivo; esto quiere decir que el cálculo del determinante de una matriz de dimensión $n\times n$ está definida en función de los determinantes de matrices de dimensión $(n-1)\times(n-1)$ y éstos en función de los determinantes de matrices de dimensión $(n-2)\times(n-2)$ y así sucesivamente hasta alcanzar matrices de dimensión 2×2, para las que el determinante se calcula con una fórmula. Para describir con detalle el cálculo, necesitamos las siguientes definiciones.

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ el **menor** (i,j) **de** A, denotado por M_{ij}^A, es la matriz de $\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ que se obtiene de A al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna. El **cofactor de** a_{ij}, denotado por C_{ij}^A, se define mediante la fórmula

$$C_{ij}^A = (-1)^{i+j} \det\left(M_{ij}^A\right) .$$

Desarrollo de Laplace

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se tiene:

1. Para cualquier fila $1 \leq i \leq n$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}^{A}$.

2. Para cualquier columna $1 \leq j \leq n$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}^{A}$.

Este desarrollo nos proporciona el siguiente método para el cálculo del determinante.

- Para una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de dimensión 2×2 el determinante se calcula mediante:

$$\det(A) = ad - bc\,.$$

- Para una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión 3×3 el determinante se puede calcular mediante:

$$\det(A) = a_{11}\, C_{11}^{A} + a_{12}\, C_{12}^{A} + a_{13}\, C_{13}^{A}\,.$$

  Pero también puede calcularse con el mismo proceso aplicado a cualquier fila o columna: por ejemplo mediante $\det(A) = a_{21}\, C_{21}^{A} + a_{22}\, C_{22}^{A} + a_{23}\, C_{23}^{A}$ ó mediante $\det(A) = a_{13}\, C_{13}^{A} + a_{23}\, C_{23}^{A} + a_{33}\, C_{33}^{A}$.

- Para matrices de dimensión mayor se utiliza la misma fórmula de manera recursiva. Por ejemplo, si $A = (a_{ij})$ es 4×4, evaluando con la primera fila tendremos:

$$\det(A) = a_{11}\, C_{11}^{A} + a_{12}\, C_{12}^{A} + a_{13}\, C_{13}^{A} + a_{14}\, C_{14}^{A}\,,$$

  donde cada uno de los cofactores $C_{11}^{A}, C_{12}^{A}, C_{13}^{A}, C_{14}^{A}$ se obtiene con la definición del determinante de una matriz 3×3, etc.

- Este método no es muy eficiente. Un método mejor consiste en utilizar las siguientes propiedades.

Propiedades de los determinantes:

Dadas la matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se tiene:

1. Si A tiene dos filas o dos columnas iguales, $\det(A) = 0$.

2. $\det(I_n) = 1$.

3. Para todo $1 \leq i \leq n$, el determinante es una **función lineal** de la i-ésima columna. Es decir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha a_{1i} + \beta b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha a_{2i} + \beta b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha a_{ni} + \beta b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Igualmente, el determinante es una **función lineal** de la i-ésima fila.

De estas propiedades básicas se pueden probar muchas más: si $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

1. $\det(A) = 0$ si y sólo si A es singular.

2. $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$.

3. $\det(A^t) = \det(A)$.

4. Si la matriz D se obtiene al intercambiar entre sí dos filas o dos columnas de A, entonces $\det(D) = -\det(A)$.

5. Si la matriz D se obtiene al multiplicar una fila o columna de A por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\det(D) = \alpha \det(A)$. Luego $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

6. Si la matriz D se obtiene a partir de la matriz A sumando a una fila cualquiera de A una combinación lineal del resto de las filas de A, entonces $\det(D) = \det(A)$. Lo mismo ocurre si consideramos las columnas de A.

7. Si A^{-1} existe entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

8. Si A^{-1} existe entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \times \operatorname{adj}(A)$, donde $\operatorname{adj}(A)$ es la **matriz adjunta de** A que se obtiene sustituyendo cada entrada en A por su cofactor y después trasponiendo la matriz resultante.

1.6. Matrices por bloques

En ocasiones, es particularmente útil "descomponer" matrices con un gran número de filas o columnas en otras más pequeñas, a veces solamente para ahorrar espacio y a veces por la importante ventaja de que permite resolver problemas más pequeños que el original de manera más sencilla. Estas submatrices se denominan **bloques**, se denotan por A_{ij} y se construyen trazando rectas verticales y horizontales imaginarias entre las filas y columnas de A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{array}\right).$$

NOTA: Se ha usado la misma notación para los bloques A_{ij} que para los elementos de matriz (que se pueden considerar bloques de dimensión 1×1). Si el significado de la notación A_{ij} no está claro por el contexto, éste se hará explícito en cada caso (elementos o bloques de la matriz A).

Ejemplo

Podemos descomponer la matriz A de dimensión 5×4, por ejemplo, en 2×2 bloques, como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Esto permite, por ejemplo, realizar operaciones entre matrices descompuestas en bloques de dimensiones adecuadas:

- **Suma**: para sumar las matrices A y B, descompuestas en bloques A_{ij} y B_{ij} y cuyas dimensiones son iguales para todo i, j, entonces

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}\,.$$

- **Producto**: el producto de las matrices A y B, descompuestas en bloques, se puede efectuar siguiendo la regla usual de su multiplicación, considerando a las submatrices como elementos:

$$(A\,B)_{ij} = A_{i1}\,B_{1j} + A_{i2}\,B_{2j} + \cdots + A_{in}\,B_{nj}\,,$$

  siempre y cuando las operaciones estén bien definidas, es decir, cuando los bloques tengan las dimensiones adecuadas.

Ejemplo

Podemos multiplicar las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 8 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

por bloques como sigue:

$$A\,B = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 14 & -6 & 10 & 15 \\ \hline 34 & 7 & 55 & 42 \\ 18 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right).$$

Obviamente el resultado es el mismo que el que se obtiene sin usar bloques, pero se opera con matrices más pequeñas, lo cual supone una ventaja, por ejemplo, desde un punto de vista computacional.

De la misma manera, se pueden obtener la traspuesta o la inversa de una matriz por bloques o definir conceptos muy útiles en el álgebra lineal como las matrices diagonales por bloques.

- Una matriz cuadrada descompuesta en bloques en la que todas los bloques que no están en la diagonal principal son iguales a cero se denomina **matriz diagonal por**

bloques. Es decir, $A_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{array}\right).$$

En esta ecuación 0 representa bloques con la dimensión adecuada y cuyas entradas son todas iguales al escalar $0 \in \mathbb{K}$.

- Una matriz cuadrada descompuesta en bloques en la que los bloques por encima de su diagonal principal son cero se llama **matriz triangular inferior por bloques**. Es decir, $A_{ij} = 0$ para todo $j > i$. Una matriz cuadrada descompuesta en bloques en la que los bloques por debajo de su diagonal principal son cero se llama **matriz triangular superior por bloques**. Es decir, $B_{ij} = 0$ para todo $j < i$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ \hline 0 & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_{rr} \end{array}\right).$$

- Para las matrices triangulares (superior e inferior) por bloques A, así como para todas las matrices diagonales por bloques, se cumple que:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{r} \det(A_{kk}), \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{tr}(A_{kk}).$$

1.7. Conjuntos inducidos por una matriz

En esta sección vamos a estudiar cuatro importantes conjuntos asociados a cualquier matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$; dos de ellos, son subconjuntos de $\mathbb{K}^m$ y los otros dos son subconjuntos de $\mathbb{K}^n$. En temas posteriores, veremos muchas propiedades interesantes de estos conjuntos; de momento nos limitamos a aprender a calcularlos.

Espacio nulo

Dada una matriz A de dimensión $m \times n$, su **espacio nulo** $N(A)$ es el conjunto de todos los elementos v de $\mathbb{K}^n$ que verifican que el producto $A\,v$ es el elemento 0 de $\mathbb{K}^m$.

NOTA: Obsérvese que las dimensiones de las matrices/vectores mencionados en la definición son las necesarias para que la multiplicación tenga sentido.

Espacio columna

Dada la matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, con columnas denotadas por $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$, su **espacio columna**, denotado por $\mathcal{C}(A)$, es el subconjunto de $\mathbb{K}^m$ que contiene todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

Espacio fila

El **espacio fila** de $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es el conjunto de $\mathbb{K}^n$ formado por todas las combinaciones lineales de las filas de A. Lo denotamos por $\mathcal{C}(A^t)$.

NOTA: Obsérvese que usamos la notación anterior para enfatizar que el espacio fila de A es el espacio columna de su traspuesta. Finalmente:

Espacio nulo de la traspuesta

El **espacio nulo de la traspuesta** es, obviamente, el espacio nulo de la matriz traspuesta A^t y lo denotamos por $N(A^t)$. A veces se denomina *espacio nulo izquierdo*.

Si resolvemos $A^t\,v = 0$, podemos trasponer ambos miembros y obtener $v^t\,A = 0^t$. Esto indica que el espacio nulo de la traspuesta es el conjunto de vectores (fila) que al multiplicar a la matriz A por la izquierda producen el vector fila con todas las componentes nulas.

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Vamos a determinar los cuatro espacios asociados.

1) **Espacio Nulo**: $\mathrm{N}(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 \colon A\,v = 0\}$. Si escribimos $v = (v_1, v_2, v_3)^t$, la condición $A\,v = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

representa un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas v_1, v_2 y v_3 tal y como resulta al multiplicar las matrices e igualar componente a componente:

$$\left.\begin{aligned} v_1 - 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - 4v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Al resolver el sistema nos queda $v_3 = 0$ y $v_1 = -2v_2$, donde v_2 actúa como parámetro. Por tanto, el espacio nulo de A es:

$$\mathrm{N}(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \colon v = v_2\,(-2, 1, 0)^t\,, \quad v_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

es decir, los elementos de $\mathrm{N}(A)$ son aquellos elementos de $\mathbb{R}^3$ en los que la primera coordenada es igual al doble de la segunda y cambiada de signo y la tercera coordenada es cero.

2) **Espacio columna**: $\mathcal{C}(A) = \{v \in \mathbb{R}^2 \colon v = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3\,, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de vectores que son combinación lineal de las columnas A_i de la

matriz A. Si observamos las columnas 1 y 2, vemos que una es múltiplo de la otra, por tanto, una combinación lineal de todas las columnas puede ser reducida a una combinación lineal de sólo A_1 y A_3 (ó de sólo A_2 y A_3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(A) &= \{v \in \mathbb{R}^2 \colon v = \alpha_1 A_1 + \alpha_3 A_3\,,\, \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{R}^2 \colon v = \alpha_1 (1,2)^t + \alpha_3 (0,1)^t\,,\, \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{R}^2 \colon v = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_3)^t\,,\, \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\} .
\end{aligned}$$

Si observamos cada una de las componentes de los elementos de $\mathcal{C}(A)$ descubrimos que obviamente la primera, α_1, puede ser cualquier número real, pero también la segunda coordenada puede ser cualquier real. Por tanto, es fácil ver que $\mathcal{C}(A)$ coincide con $\mathbb{R}^2$.

3) **Espacio fila**: Los elementos de $\mathcal{C}(A^t)$ se describen como combinaciones lineales de las dos filas de la matriz A, ya que éstas no son una múltiplo de la otra:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(A^t) &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \colon v = \beta_1 (1,-2,0)^t + \beta_2 (2,-4,1)^t\,,\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \colon v = (\beta_1 + 2\beta_2, -2(\beta_1 + 2\beta_2), \beta_2)^t\,,\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\right\} .
\end{aligned}$$

Obsérvese que todos los elementos de este conjunto cumplen que la segunda coordenada es igual a la primera multiplicada por -2 y que la tercera coordenada puede ser cualquier valor. Esto significa que también podemos escribir:

$$\mathcal{C}(A^t) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \colon v = (\beta_1, -2\beta_1, \beta_2)^t\,,\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\right\} .$$

4) **Espacio nulo de la traspuesta**: $N(A^t)$ es el conjunto de vectores de la forma

$v = (v_1, v_2)^t$ que satisfacen $A^t\, v = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} N(A^t) &= \left\{ (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon v_1 + 2v_2 = 0\,, v_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon v_1 = v_2 = 0 \right\} = \left\{ (0,0)^t \right\}\,, \end{aligned}$$

esto es, el espacio nulo de la traspuesta sólo contiene un elemento: el vector 0 de $\mathbb{R}^2$.

En capítulos posteriores veremos formas sistemáticas para calcular estos conjuntos y para dar expresiones compactas de los mismos.