PROBLEMA 6.1

$$f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2 & \text{si} \quad x<1 \\ 1/x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad: • Si $x<1$, es decir, si $x \in (-\infty, 1)$

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \text{continua}$$

• Si $x>1$, es decir, si $x \in (1, \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{continua}$$

• En $x=1$: $f(1) = 1/1 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{3-x^2}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ f es continua en $x=1$.

$\Rightarrow$ f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad: • Si $x<1$, es decir, si $x \in (-\infty, 1)$

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f \text{ es derivable}$$

$$f'(x) = -x$$

• Si $x>1$, es decir, si $x \in (1, \infty)$

$$f(x) = 1/x \Rightarrow f \text{ es derivable}$$

$$f'(x) = -1/x^2$$

• En $x=1$:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$¿\exists \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}?$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3}{2}-\frac{x^2}{2}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{2(x-1)} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{2}$$

$$= -1$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -1$$

$\Rightarrow$ f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y se cumple qe:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -1/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0,2] \Rightarrow \exists x_0 \in (0,2)$ tal qe

$$f'(x_0) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{1/2 - 3/2}{2} = -1/2 .$$

En efecto: Si $x_0 \in [0,1]$

$$f'(x_0) = -1/2 \Leftrightarrow -x_0 = -1/2 \Leftrightarrow x_0 = 1/2$$

Si $x_0 \in (1,2]$:

$$f'(x_0) = -1/2 \Leftrightarrow -1/x_0^2 = -1/2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 2 \Rightarrow x_0 = +\sqrt{2}$$

$$\boxed{x_0 = 1/2 \;\&\; x_0 = \sqrt{2}}$$