Tema 12

Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}$

12.1. Matrices y transformaciones ortogonales reales

Por lo aprendido en temas anteriores, sabemos que, además de a vectores y a subespacios vectoriales, el término “ortogonal” se aplica a ciertas matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: las que verifican $A^t A = I_n$. En este tema vamos a ver que podemos aplicarlo también a ciertas transformaciones lineales, siempre relacionado con algún producto interno, y también a cómo se relaciona, en estos casos, con el concepto geométrico de ortogonalidad.

Comenzamos introduciendo algunos resultados.

Teorema

Sea A una matriz $m \times n$ con columnas ortonormales y sean v y w elementos de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

1) $\|A\,v\| = \|v\|$.

2) $\langle A\,v, A\,w\rangle = \langle v, w\rangle$.

3) $\langle A\,v, A\,w\rangle = 0$ si y sólo si $\langle v, w\rangle = 0$.

Las propiedades 1) y 3) dicen que la transformación lineal asociada a A, $v \mapsto A\,v$, conserva la longitud y la ortogonalidad; además, la propiedad 2) garantiza que también se conserva el ángulo.

Veamos ahora qué significado e implicaciones tiene la ortogonalidad en las transformaciones lineales.

Una **transformación lineal** T de U en V se dice que es **ortogonal** si preserva el producto interno de los vectores; es decir, para todo $u_1, u_2 \in U$ se cumple que

$$\boxed{\langle T(u_1), T(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle.}$$

Proposición

Si $T : U \to V$ es ortogonal entonces preserva la longitud de los vectores:

$$\|T(u)\| = \|u\|\,, \quad \text{para todo } u \in U.$$

En consecuencia, a menudo se denomina a las transformaciones ortogonales **isometrías**.

El siguiente resultado es fundamental para entender una propiedad importante de las transformaciones lineales ortogonales.

Proposición

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre $\mathbb{R}$, toda isometría lineal $T\colon V \to V$ es un isomorfismo.

De aquí resulta que T transforma cualquier base de V en otra base de V; como además preserva la longitud y el ángulo, es claro que:

Proposición

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y el isomorfismo $T : V \to V$ es ortogonal (isometría), entonces T transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

Además, las matrices ortogonales están íntimamente relacionadas con las transformaciones ortogonales.

Proposición

Una transformación lineal $T \colon V \to V$ es ortogonal si y sólo si las columnas de la matriz A_T que representa a T, *relativa a cualquier base ortogonal*, forman una base ortonormal de V.

Proposición

Sea A_T una matriz cuadrada que representa una transformación lineal ortogonal $T \colon V \to V$, entonces $\det(A_T) = \pm 1$ y los valores propios de A_T satisfacen $|\lambda_i| = 1$.

Otras propiedades interesantes que comparten las matrices ortogonales y las transformaciones lineales que representan son las siguientes:

- El producto de dos matrices ortogonales es ortogonal. Equivalentemente, la composición de dos transformaciones ortogonales es ortogonal.
- La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal; equivalentemente, la inversa de una transformación ortogonal es una transformación ortogonal.

Ejemplo

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la transformación que consiste en rotar los vectores un ángulo de $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario a las agujas del reloj. Sabemos que podemos construir una matriz asociada a T, respecto a la base canónica, de la forma:

$$A_T = (T(e_1), T(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, esta matriz es ortogonal (podemos comprobarlo verificando que $A^t A = I$ o también observando que está formada por columnas ortonormales). La transformación T también es ortogonal, pues obviamente conserva la longitud de los vectores (basta comprobar que $\|v\| = \|A_T v\|$ para un vector arbitrario v).

Además, T es invertible y su inversa es la transformación S que rota los vectores de $\mathbb{R}^2$ un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en sentido horario. En este caso:

$$A_S = (S(e_1), S(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que

$$A_T^{-1} = A_S$$

y también que

$$A_T^t = A_T^{-1}.$$

Obsérvese que esta sencilla matriz no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ ya que sus valores propios $\lambda = \pm i$ no pertenecen a este conjunto de escalares. La situación cambia si consideramos el cuerpo $\mathbb{C}$.

12.2. Geometría de las aplicaciones lineales

Los gráficos de la figura 12.1 muestran aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; dos de ellas, $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = x^2$, no son lineales y se puede ver que distorsionan el dominio cuando lo trans-

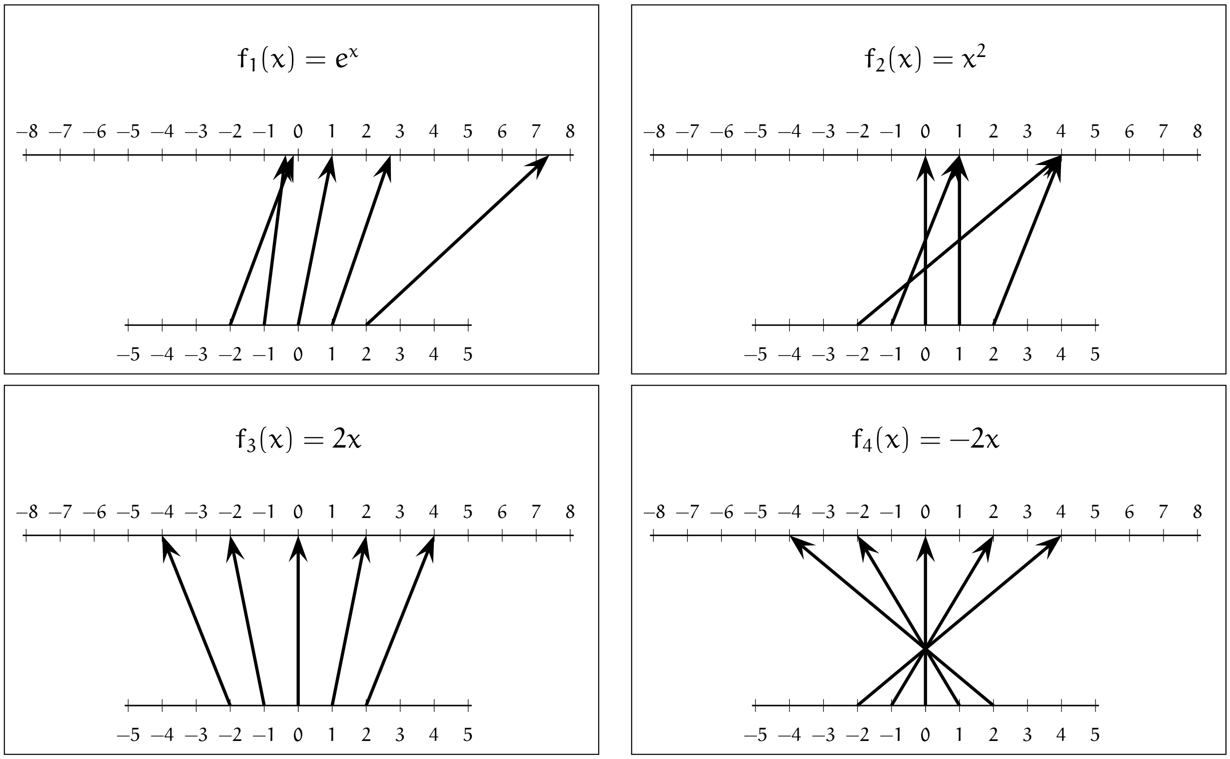


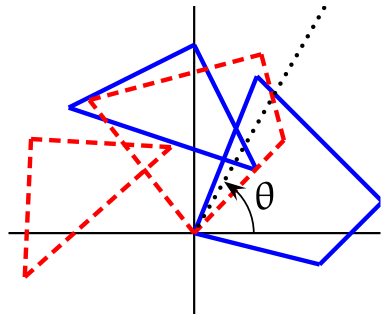
Figura 12.1: Transformaciones lineales y no lineales

forman en la imagen. Por otro lado, $f_3(x) = 2x$ y $f_4(x) = -2x$ son aplicaciones lineales y claramente expanden el dominio de manera uniforme, multiplicando siempre por el mismo factor.

Las únicas aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son multiplicaciones por escalares, pero en dimensiones mayores existe una variedad mayor de situaciones. Por ejemplo, la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

rota los vectores en sentido antihorario un ángulo θ.



En las siguientes secciones vamos a ver algunas transformaciones lineales de gran importancia geométrica. Aunque pueden ser generalizadas a otros espacios con producto interno, nos centraremos en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual, y analizaremos cuáles de ellas son transformaciones ortogonales.

12.2.1. Reflexiones

Una **reflexión** es una transformación lineal T de un espacio vectorial V en sí mismo, en el que existe un hiperplano de puntos fijos, es decir, de puntos cuyas imágenes por T coinciden con ellos mismos; tal conjunto se denomina **hiperplano de reflexión** (o bien **eje de reflexión** si V tiene dimensión 2 ó **plano de reflexión** en dimensión 3).

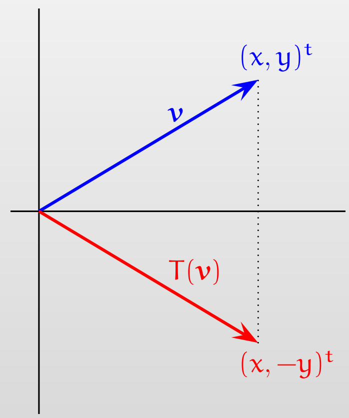
Intuitivamente, podemos visualizar la imagen de un vector por una reflexión mediante su imagen especular en el hiperplano de reflexión.

Veamos algunas reflexiones sencillas, donde todas las coordenadas se refieren a las bases canónicas:

Reflexión respecto al eje X en $\boxed{\mathbb{R}^2}$

Esta reflexión transforma el vector de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $(x, y)^t$ en el vector $(x, -y)^t$. Todos los puntos del eje X son puntos fijos. La matriz asociada a esta transformación lineal viene dada por $A_T = (T(e_1), T(e_2))$. Claramente,

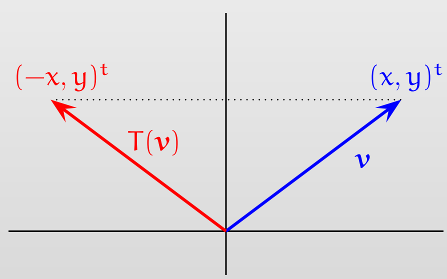
$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Reflexión respecto al eje Y en $\mathbb{R}^2$

Esta reflexión transforma el vector de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $(x, y)^t$ en el $(-x, y)^t$. Los puntos fijos son los del eje Y. La matriz asociada a esta transformación lineal en esta situación es

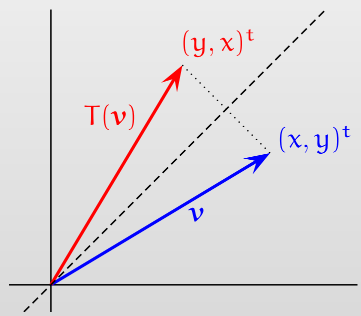
$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Reflexión respecto a la bisectriz en $\mathbb{R}^2$

Esta reflexión transforma el vector de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $(x, y)^t$ en el vector $(y, x)^t$, por lo que los puntos fijos son los de la recta $y = x$. La matriz asociada es

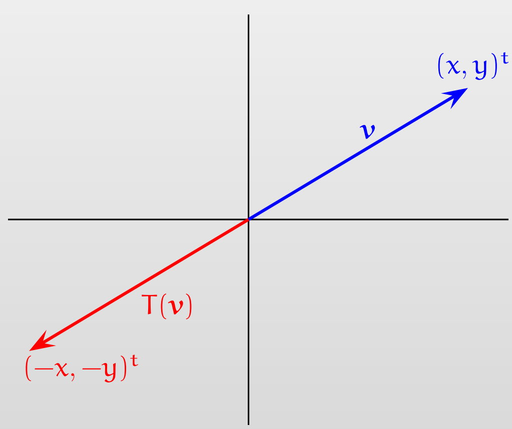
$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Reflexión respecto al origen en $\mathbb{R}^2$

Esta reflexión transforma el vector de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $(x, y)^t$ en el vector $(-x, -y)^t$; de manera que el conjunto de puntos fijos sólo contiene al origen. La matriz asociada es

$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Reflexión respecto al plano XY en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Los vectores "sobre" el plano XY se "mueven" al semiespacio bajo dicho plano y viceversa, cambiando el signo de la coordenada z. La matriz asociada es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Reflexión respecto al plano YZ en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Con un razonamiento semejante, se deduce que la matriz asociada es

$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reflexión respecto al plano XZ en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Por último, la matriz asociada a esta transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse fácilmente que todas las matrices anteriores representan transformaciones lineales ortogonales. Veámoslo con una de ellas:

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por la reflexión respecto al plano XY en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual.

Sean dos vectores arbitrarios $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ y $v = (v_1, v_2, v_3)^t$, con imágenes respectivas

$$T(u) = (u_1, u_2, -u_3)^t \ , \quad T(v) = (v_1, v_2, -v_3)^t \ .$$

Tenemos que

$$\langle T(u),\ T(v)\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + (-u_3)(-v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \langle u, v\rangle \ ,$$

por lo que es una transformación ortogonal.

Alternativamente, podemos observar que la matriz A_T (respecto a la base ortonormal canónica) es ortogonal, ya que tiene columnas ortonormales y también porque verifica que $A_T^t\, A_T = I_3$.

12.2.2. Contracciones y dilataciones

Estas transformaciones corresponden a multiplicaciones por escalares de la forma: $T(x) = c\, x$ donde c es un escalar no negativo. La transformación se denomina **contracción** si $0 \leqslant c < 1$ y **dilatación** si $c \geqslant 1$.

Contracciones y dilataciones en $\boxed{\mathbb{R}^2}$ y $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Obviamente, las coordenadas de un vector $(x, y)^t$ de $\mathbb{R}^2$ se transforman en $(cx, cy)^t$. Así, la matriz asociada a esta transformación lineal viene dada por:

$$A_T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} .$$

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a la dilatación/contracción es:

$$A_T = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

Es evidente que, para $c \neq 1$, las contracciones no son transformaciones ortogonales.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal T dada por una dilatación por un factor $c \neq 1$ en $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual. Consideremos dos vectores arbitrarios

$$u = (u_1, u_2)^t \ , \qquad v = (v_1, v_2)^t \ ,$$

cuyas imágenes respectivas son

$$T(u) = (cu_1, cu_2)^t \ , \qquad T(v) = (cv_1, cv_2)^t \ .$$

Tenemos que

$$\langle T(u),\ T(v) \rangle = c^2 u_1 v_1 + c^2 u_2 v_2 = c^2(u_1 v_1 + u_2 v_2) \neq u_1 v_1 + u_2 v_2 = \langle u, v \rangle \ ,$$

por lo que no es una transformación ortogonal.

12.2.3. Rotaciones

Rotación en sentido antihorario en $\boxed{\mathbb{R}^2}$ (respecto al origen)

Dado un vector v de coordenadas $(v_1, v_2)^t$ y dada la transformación lineal T que rota el espacio en sentido antihorario un ángulo θ, la matriz asociada está caracterizada por $T(e_1) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))^t$ y $T(e_2) = (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))^t$; así:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Rotación en sentido antihorario respecto al eje X en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Es sencillo observar que la matriz asociada viene dada por:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Rotación en sentido antihorario respecto al eje Y en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Del mismo modo, la matriz asociada viene dada por:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Rotación en sentido antihorario respecto al eje Z en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Finalmente, la matriz asociada en este caso viene dada por:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las rotaciones en el espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual son transformaciones lineales ortogonales (preservan dicho producto escalar).

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal dada por la rotación en sentido horario en $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, un ángulo θ. Las imagenes de los vectores $u = (u_1, u_2)^t$ y $v = (v_1, v_2)^t$ son:

$$\begin{aligned} T(u) &= (u_1 \cos(\theta) - u_2 \operatorname{sen}(\theta), u_1 \operatorname{sen}(\theta) + u_2 \cos(\theta))^t, \\ T(v) &= (v_1 \cos(\theta) - v_2 \operatorname{sen}(\theta), v_1 \operatorname{sen}(\theta) + v_2 \cos(\theta))^t. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= (u_1 \cos(\theta) - u_2 \operatorname{sen}(\theta))(v_1 \cos(\theta) - v_2 \operatorname{sen}(\theta)) \\ &\quad + (u_1 \operatorname{sen}(\theta) + u_2 \cos(\theta))(v_1 \operatorname{sen}(\theta) + v_2 \cos(\theta)) \\ &= u_1 v_1 \cos^2(\theta) + u_2 v_2 \operatorname{sen}^2(\theta) + u_1 v_1 \operatorname{sen}^2(\theta) + u_2 v_2 \cos^2(\theta) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 = \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

por lo que es una transformación ortogonal.

Se deja como ejercicio comprobar que la rotación dada preserva la longitud de los vectores.

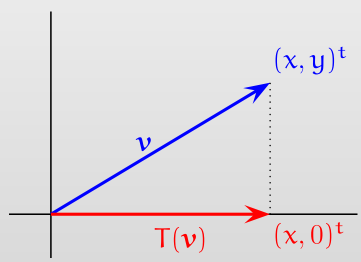
12.2.4. Proyecciones ortogonales

En el Tema 11 introdujimos un tipo especial de transformaciones lineales, los proyectores ortogonales, y estudiamos algunas de sus propiedades. En esta sección vamos a ver algunos ejemplos de proyecciones ortogonales en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Proyección sobre el eje X en $\boxed{\mathbb{R}^2}$

Esta proyección transforma cada vector de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $(x, y)^t$ en el vector $(x, 0)^t$. La matriz asociada a esta transformación lineal viene dada por:

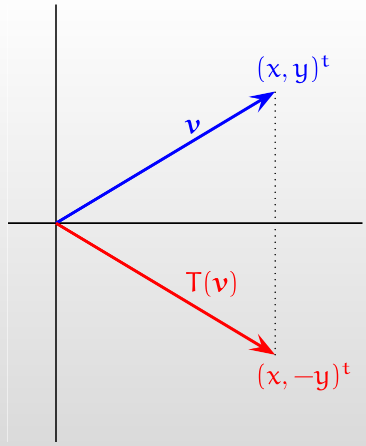
$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Proyección sobre el eje Y en $\boxed{\mathbb{R}^2}$

Esta proyección transforma cada vector de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas $(x, y)^t$ en el vector $(0, y)^t$ y tiene por matriz asociada

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Proyección sobre el eje X en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Esta proyección transforma el vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, z)^t$ en el vector $(x, 0, 0)^t$. La matriz asociada será

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proyección sobre el eje Y en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Del mismo modo, esta proyección transforma el vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, z)^t$ en el vector $(0, y, 0)^t$. Ahora, la matriz asociada a la transformación lineal será:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proyección sobre el eje Z en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Por último, esta proyección transforma el vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, z)^t$ en el vector $(0, 0, z)^t$ y tendrá por matriz asociada:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proyección sobre el plano XY en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Es claro que esta proyección sobre el plano transforma el vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, z)^t$ en el vector $(x, y, 0)^t$. Por tanto, la matriz asociada a esta transformación lineal será:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proyección sobre el plano XZ en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Ahora la proyección transforma cada vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, z)^t$ en el vector $(x, 0, z)^t$. Su matriz asociada vendrá dada por:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proyección sobre el plano YZ en $\boxed{\mathbb{R}^3}$

Esta proyección transforma cada vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, z)^t$ en el vector $(0, y, z)^t$. La matriz asociada a esta transformación lineal será:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que todas las transformaciones descritas verifican las condiciones de proyección ortogonal y que las correspondientes matrices que las representan son idempotentes. No obstante, las proyecciones ortogonales *no son transformaciones lineales ortogonales*, es decir, no son isometrías, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Consideremos en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, la proyección ortogonal T que proyecta ortogonalmente sobre el plano XY. T transforma los vectores $u_1 = (1, 1, 1)^t$ y $u_2 = (0, 0, 1)^t$ en los vectores $T(u_1) = (1, 1, 0)^t$ y $T(u_2) = (0, 0, 0)^t$, respectivamente. Es inmediato comprobar que T no es ortogonal pues no se verifica la definición:

$$\langle T(u_1), T(u_2) \rangle = 0 \neq 1 = \langle u_1, u_2 \rangle .$$

Alternativamente, también podríamos haber observado que T no preserva la longitud:

$$\|T(u_1)\| = \sqrt{2} \neq \sqrt{3} = \|u_1\| .$$

Otras opciones para probar que no es transformación ortogonal serían calcular el determinante de A_T (que vale 0) u observar que las columnas de A_T no forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.