

# CÁLCULO 2018/2019

## HOJA #4: CONTINUIDAD

**Problema 4.1.** Identifica el dominio de las siguientes funciones, discute su continuidad y esboza su gráfica:

- 1)  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ .
- 2)  $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ .
- 3)  $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .
- 4)  $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .
- 5)  $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$ .
- 6)  $f(x) = \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}$ .

**Problema 4.2.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- 1)  $f(x) = \frac{e^x + 2 \cos x - 8x + 5}{e^x + \sin^2 x + 5}$ .
- 2)  $f(x) = \sqrt{x^4 + 3} + e^{-x^2 + \cos x} \sin(4x^5 + 3x^2 + 2x - 5 + \cos x) + 2 \arctan(3^x - 5)$ .
- 3)  $f(x) = e^{4/x} + x^4 - 7$ .
- 4)  $f(x) = (\arccos x)^5$ .
- 5)  $f(x) = (x - 3) \log(9x - 4)$ .
- 6)  $f(x) = (4x^6 + 3x^3 - 2x + 6) \log x + \arccos(x) \log(9x - 4)$ .

**Problema 4.3.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \cos(\pi|2 - x^2|) + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Problema 4.4.** Demuestra que la siguiente función está acotada:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } -7 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

**Problema 4.5.** Demuestra que la ecuación  $\cos x = x$  tiene alguna solución.

**Problema 4.6.** Demuestra los siguientes teoremas de punto fijo:

Teorema 1. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Entonces existe  $x_0 \in [0, 1]$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

Teorema 2. Sean  $f, g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas tales que  $f(x_1) > g(x_1)$ ,  $f(x_2) < g(x_2)$ . Entonces, existe un  $x_0 \in (x_1, x_2)$  tal que  $f(x_0) = g(x_0)$ .