# CÁLCULO 2018/2019
# HOJA #7: POLINOMIO DE TAYLOR

**Problema 7.1.** Para cada una de las siguientes funciones, escribe la fórmula de Taylor de orden $n$ alrededor del punto que se indica:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/x \quad \text{en} \quad x_0 = -1\,, \\ f(x) &= xe^x \quad \text{en} \quad x_0 = 0\,, \\ f(x) &= (1+e^x)^2 \quad \text{en} \quad x_0 = 0\,. \end{aligned}$$

**Problema 7.2.** Encuentra la fórmula de Taylor de orden 5 alrededor del origen (serie de Maclaurin) para la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

**Problema 7.3.** Escribe el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ como una suma de potencias de $x - 4$.

**Problema 7.4.** Usando el teorema de Taylor, demuestra que $sen(x+\varepsilon)$ difiere de $sen x + \varepsilon cos x$ en no más de $\varepsilon^2/2$.

**Problema 7.5.** Calcula el coeficiente que multiplica a $x^4$ en el desarrollo de Taylor en $x_0 = 0$ de $f(x) = \log(\cos x)$.

**Problema 7.6.** Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor del origen de de cada una de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} \cos x \\ f(x) &= e^x \log(1-x) \\ f(x) &= e^{3x} \\ f(x) &= \operatorname{sen}(2x) \\ f(x) &= xe^{-x} \\ f(x) &= \operatorname{sen}^2 x \\ f(x) &= \cos(x^3) \\ f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen} x}{1+\log(1+x)} \end{aligned}$$

**Problema 7.7.** Calcula el polinomios de Taylor de orden $n$ en $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{ax^2} \\
f(x) &= \cos(ax) \\
f(x) &= \frac{1+x}{1-x} \\
f(x) &= xe^{-x^2} \\
f(x) &= \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \\
f(x) &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}
\end{aligned}$$

**Problema 7.8.** Aproxima la función $f(x) = \log(1 + \cos x)$ alrededor del origen mediante un polinomio de grado dos y encuentra una expresión para el de error de la aproximación.

**Problema 7.9.** Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden cuatro alrededor de $x_0 = 1$ de una cierta función $f(x)$ es $P(x) = 2(x-1)^3 - 3(x-1)^4$:

- Calcula la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.
- Calcula:
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$$
- Calcula $f^{(4)}(1)$.

**Problema 7.10.** Demuestra las siguientes afirmaciones:

$$\begin{aligned}
&\forall a < 1 : \quad \operatorname{sen} x = o(x^a) \quad \text{cuando} \quad x \to 0; \\
&\log(1 + x^2) = o(x) \quad \text{cuando} \quad x \to 0; \\
&\log x = o(x) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty; \\
&\tan x - \operatorname{sen} x = o(x^2) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

**Problema 7.11.** Calcula los siguientes límites utilizando el teorema de Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos(3x))}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + e^x - x - 2}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$
$$\lim_{x\to \infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$$
$$\lim_{x\to \infty} \left(x - x^2 \log(1+1/x)\right)$$

**Problema 7.12.** Encuentra un polinomio $P(x)$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - P(x)}{x^7} = 0\,.$$

¿Es único dicho polinomio?

**Problema 7.13.** Utilizando un polinomio de Taylor de grado 3, calcula aproximadamente el valor de

$$\frac{1}{\sqrt{1.1}}$$

¿Cuál es el error cometido?

**Problema 7.14.** Aproxima $\sqrt[3]{28}$ usando el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x_0 = 27$. ¿Cuál es el error cometido?

**Problema 7.15.** Aproxima la función $f(x) = \cos x + e^x$ mediante un polinomio de tercer grado alrededor del origen. Estima el error cometido cuando se utiliza dicha aproximación para $x \in [-1/4, 1/4]$.

**Problema 7.16.** ¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de Taylor alrededor del origen de la función $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que la aproxime en el intervalo $[-1, 1]$ con tres cifras decimales exactas?

**Problema 7.17.** ¿Cuántos términos de la serie de Taylor en el origen hay que tomar para calcular $\operatorname{sen}(1/2)$ con error menor que $10^{-12}$?

**Problema 7.18.** Utilizando polinomios de Taylor, determina con un error menor que $10^{-3}$ el valor de:

- $\cos 1$,
- $\operatorname{sen} 3$,
- $e$,
- $e^{-2}$,
- $\log(3/2)$,
- $\log(4/3)$,
- $\log 2$,
- $\log(1/2)$.