FORMULARIO DE PREDICADOS

Axiomas

A1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ *Introd. del antecedente*
A2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ *Regla del producto*
A4. $\vdash A \wedge B \rightarrow A$,, $A \wedge B \rightarrow B$ *Regla de simplificación*
A5. $\vdash A \rightarrow A \vee B$,, $B \rightarrow A \vee B$ *Regla de la adición*
A6. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$ *Prueba por casos*
A7. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$ *Reducción al absurdo*
A8. $\vdash \sim\sim A \rightarrow A$ *Eliminación de la doble neg.*
A9. $\vdash \forall x B(x) \rightarrow B(t)$
A10. $\vdash B(t) \rightarrow \exists x B(x)$

Reglas de Inferencia

$\dfrac{\vdash A,\ \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$ Modus Ponens

$\dfrac{\vdash A \rightarrow B(y)}{\vdash A \rightarrow \forall x B(x)}$ Gen. Univ Condicional

$\dfrac{\vdash A(y) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B}$ Gen. Exist Condicional

Reglas Derivadas

$\dfrac{\vdash A(y)}{\vdash \exists x A(x)}$ Gen. Existencial

$\dfrac{\vdash A(y)}{\forall x A(x)}$ Gen. Universal

$\dfrac{\vdash \exists x A(x),\ A(y) \rightarrow B}{\vdash B}$ Esp. Existencial

$\dfrac{\vdash \forall x A(x)}{\vdash A(y)}$ Esp. Universal

Teoremas

1. **Modificación de la variable cuantificada**
   $\vdash \forall x P(x) \leftrightarrow \forall B P(y)$
   $\vdash \exists x P(x) \leftrightarrow \exists y P(y)$

2. **Descenso cuantificacional**
   $\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$

3. **Cuantificación múltiple. Propiedades conmutativas**
   a. **Cuantificador universal**
      $\vdash \forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$
   b. **Cuantificador existencial**
      $\vdash \exists x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$
   c. **Conmutatividad de distintos tipos**
      $\vdash \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

4. **Negación de fórmulas cuantificadas**
   $\vdash \sim\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$
   $\vdash \sim\exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$

5. **Cuantificación de las fórmulas con la conectiva conjunción**
   $\vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
   $\vdash A \wedge \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x (A \wedge P(x))$
   - x no es libre en A (A es independiente de x)

   $\vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
   $\vdash \exists x (A \wedge P(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x P(x)$
   - x no es libre en A (A es independiente de x)

6. **Cuantificación de las fórmulas con la disyunción**
   $\vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
   $\vdash \forall x (A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \forall x P(x)$
   $\vdash \exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
   $\vdash \exists x (A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \exists x P(x)$

7. **Cuantificación de las fórmulas con la conectiva implicación**
   $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow A) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow A)$
   $\vdash \forall x (A \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x P(x))$
   $\vdash (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$
   $\vdash (\exists x P(x) \rightarrow A) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow A)$
   $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow A) \leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow A$
   $\vdash A \rightarrow \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x (A \rightarrow P(x))$
   $\vdash \exists x (A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall x A(x) \rightarrow B)$

8. **Cuantificación de fórmulas con equivalencia material**
   $\vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow P(Q)) \rightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow A) \rightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow A)$

9. **Otros teoremas**
   $\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
   $\vdash (A \wedge \forall x P(x)) \rightarrow \exists x (A \wedge P(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \wedge A) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge A)$
   $\vdash (A \vee \forall x P(x)) \rightarrow \exists x (A \vee P(x))$
   $\vdash (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \vee A) \rightarrow (\exists x P(x) \vee A)$
   $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \rightarrow A) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow A)$
   $\vdash (\forall x P(x) \rightarrow A) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow A)$