

## Recordatorio

**Demostración:** Cadena de **fórmulas válidas** que parte de **axiomas** y los combina usando **Modus Ponens** (más adelante, usando otras **Reglas Derivadas** de axiomas y teoremas). Se debe llegar a la fórmula pedida en la última línea.

**Deducción:** Cadena de **fórmulas** que o son **premisas**, o son **axiomas**, o son combinaciones de las anteriores líneas obtenidas al usar **Modus Ponens** (más adelante, usando **Reglas Derivadas**). Si se llega a la **conclusión** en la última línea, se **decide** que la deducción es **correcta**. Cada línea debe indicar con claridad la regla aplicada y las líneas a las que se aplica.

Las **letras mayúsculas** (A,B,...) indican esquemas de fórmula que **pueden reemplazarse por cualquier fórmula** sintácticamente correcta (  $p$ ,  $\sim q$ ,  $(p \vee \sim q \rightarrow r)$  , etc.)

Si el ejercicio lo permite, se puede **transformar una fórmula** en una **deducción** (usando el **Teorema de la Deducción**) y así **decidir** si la fórmula inicial era válida a partir de esta deducción, que suele ser más sencilla.

## Ejercicios de demostración

En estos ejercicios se parte de los axiomas y se debe llegar a la fórmula pedida. No se permite el uso del Teorema de la Deducción.

1. Comprueba la validez de la siguiente fórmula:

$$q \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow p)$$

1.  $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$                       A8 (Sustituyendo A:  $p$  )
2.  $\vdash (\sim\sim p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow p))$   
A1 ( Sustituyendo A:  $(\sim\sim p \rightarrow p)$ , B:  $q$ )
3.  $\vdash q \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow p)$               M.P. 1,2 - **Fórmula pedida**

2. Comprueba la validez de la siguiente fórmula:

$$(p \wedge q \rightarrow p) \vee p$$

1.  $\vdash p \wedge q \rightarrow p$                       A4 (Sustituyendo A:  $p$  , B:  $q$  )
2.  $\vdash (p \wedge q \rightarrow p) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow p) \vee p)$   
A5 (Sustituyendo A:  $p \wedge q \rightarrow p$ , B:  $p$  )
3.  $\vdash (p \wedge q \rightarrow p) \vee p$               M.P. 1, 2 - **Fórmula pedida**

3. (\*) Demostrar el siguiente teorema utilizando sólo los axiomas de Kleene y la regla de Modus Ponens. No está permitido usar ningún teorema adicional deducido en clase, ni siquiera el Teorema de la Deducción.

$$\vdash \sim(A \wedge \sim A) \text{ (Principio de No Contradicción)}$$

1.  $\vdash (A \wedge \sim A \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge \sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim(A \wedge \sim A))$   
A7 (Sustituyendo:  $A \wedge \sim A$ ,  $B: A$ )
2.  $\vdash A \wedge \sim A \rightarrow A$  A4.a (Sustituyendo  $A:A$ ,  $B:\sim A$ )
3.  $\vdash (A \wedge \sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim(A \wedge \sim A)$  MP 1,2
4.  $\vdash A \wedge \sim A \rightarrow \sim A$  A4.b (Sustituyendo  $A:A$ ,  $B:\sim A$ )
5.  $\vdash \sim(A \wedge \sim A)$  MP 3,4 - **Fórmula pedida**

4. Comprueba la validez de la fórmula que sigue:

- $$A \wedge C \rightarrow A \vee B$$
1.  $\vdash (A \wedge C \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge C \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow A \vee B))$   
A2 (Sustituyendo  $A: A \wedge C$ ,  
 $B: A$ ,  $C: A \vee B$ )
  2.  $\vdash A \wedge C \rightarrow A$  A4 (Sustituyendo  $A: A$ ,  $B: C$ )
  3.  $\vdash (A \wedge C \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow A \vee B)$  MP 1,2
  4.  $\vdash A \rightarrow A \vee B$  A5 (Sustituyendo  $A: A$ ,  $B: B$ )
  5.  $\vdash (A \rightarrow A \vee B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (A \rightarrow A \vee B))$   
A1 (Sustituyendo  $A: A \rightarrow A \vee B$ ,  $B: A \wedge C$ )
  6.  $\vdash (A \wedge C) \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)$  MP 5,4
  7.  $\vdash A \wedge C \rightarrow A \vee B$  MP 3,6 - **Fórmula pedida**

### Ejercicios de deducción

En estos ejercicios se empieza por las premisas y se intenta llegar a la conclusión.

5. Usando los axiomas A4 y A5 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

- |                                      |                     |
|--------------------------------------|---------------------|
| 1. $p \wedge q$                      | Premisa             |
| 2. $\vdash p \wedge q \rightarrow p$ | A4 (Simplificación) |
| 3. $p$                               | MP 2,1              |
| 4. $\vdash p \rightarrow p \vee q$   | A5 (Adición)        |
| 5. $p \vee q$                        | MP 4,3              |

6. (\*) Usando el axioma A6 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \Rightarrow r$$

- |  |            |
|--|------------|
| 1. $p \vee q$  | Premisa    |
| 2. $p \rightarrow r$   | Premisa    |
| 3. $q \rightarrow r$   | Premisa    |
| 4. $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$ | A6 (Casos) |
| 5. $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$  | MP 4,2     |
| 6. $p \vee q \rightarrow r$  | MP 5,3     |
| 7. $r$   | MP 6,1     |

7. Usando el axioma A1 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$p \wedge q, s \rightarrow p \wedge q \Rightarrow r \vee s \rightarrow p \wedge q$$

1. $p \wedge q$	Premisa
2. $s \rightarrow p \wedge q$	Premisa
3. $\vdash p \wedge q \rightarrow (r \vee s \rightarrow p \wedge q)$	A1 (Introducción antecedente)
4. $r \vee s \rightarrow p \wedge q$	MP 1,3

8. (\*) Usando los axiomas A2 y A3 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \Rightarrow p \wedge r$$

1. $p \rightarrow q$	Premisa
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisa
3. $p$	Premisa
4. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$	A2
5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	MP 4,1
6. $p \rightarrow r$	MP 5,2
7. $r$	MP 6,3
8. $\vdash p \rightarrow (r \rightarrow p \wedge r)$	A3 (Producto)
9. $r \rightarrow p \wedge r$	MP 8,3
10. $p \wedge r$	MP 9,7

9. (\*) Usando los axiomas A7 y A8 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$\sim p \rightarrow q, \sim p \rightarrow \sim q \Rightarrow p$$

1. $\sim p \rightarrow q$	Premisa
2. $\sim p \rightarrow \sim q$	Premisa
3. $\vdash (\sim p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim \sim p)$	A7 (Red. al absurdo)
4. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim \sim p$	MP 3,1
5. $\sim \sim p$	MP 4,2
6. $\vdash \sim \sim p \rightarrow p$	A8 (Doble negación)
7. $p$	MP 6,5

10. (\*) Usando los axiomas A3, A4 y A5 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$p \wedge q, s \Rightarrow (q \vee r) \wedge (p \wedge s)$$

1. $p \wedge q$	Premisa
2. $s$	Premisa
3. $\vdash p \wedge q \rightarrow q$	A4 (Simplificación)
4. $q$	MP 3,1
5. $\vdash q \rightarrow q \vee r$	A5 (Adición)

6. $q \vee r$	MP 5,4
7. $\vdash p \wedge q \rightarrow p$	A4 (Simplificación)
8. $p$	MP 7,1
9. $\vdash p \rightarrow (s \rightarrow p \wedge s)$	A3 (Producto)
10. $s \rightarrow p \wedge s$	MP 9,8
11. $p \wedge s$	MP 10,2
12. $\vdash q \vee r \rightarrow (p \wedge s \rightarrow (q \vee r) \wedge (p \wedge s))$	A3 (Producto)
13. $p \wedge s \rightarrow (q \vee r) \wedge (p \wedge s)$	MP 12,6
14. $(q \vee r) \wedge (p \wedge s)$	MP 13,11

11. Usando los axiomas A1, A7 y A8 comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$r, \sim r \Rightarrow q$

1. $r$	Premisa
2. $\sim r$	Premisa
3. $\vdash (\sim q \rightarrow r) \rightarrow ((\sim q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim \sim q)$	A7 (Red. al absurdo)
4. $\vdash r \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$	A1 (Introducción antecedente)
5. $\sim q \rightarrow r$	MP 4,1
6. $(\sim q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim \sim q$	MP 3,5
7. $\vdash \sim r \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim r)$	A1 (Introducción antecedente)
8. $\sim q \rightarrow \sim r$	MP 7,2
9. $\sim \sim q$	MP 6,8
10. $\vdash \sim \sim q \rightarrow q$	A8 (Doble Negación)
11. $q$	MP 10,9

**Ejercicios con Teorema de la Deducción y reglas derivadas vistas en teoría**

En estos ejercicios sí se permite el uso del Teorema de la Deducción (salvo indicación en contra) si se da una fórmula en el enunciado.

12. (\*) Indicar en la columna en blanco las fórmulas válidas y las deducciones correctas que podemos obtener aplicando el TD a la expresión dada de todas las formas posibles. Poner todos los paréntesis necesarios.

FÓRMULA VÁLIDA	DEDUCCIÓN CORRECTA
<b>Solución:</b> $\vdash (\sim q \rightarrow r) \rightarrow ((\sim q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim \sim q)$	$\sim q \rightarrow r, \sim q \rightarrow \sim r \Rightarrow \sim \sim q$
$\vdash (\sim p \vee q \rightarrow s) \rightarrow (r \rightarrow (q \rightarrow s))$	<b>Solución:</b> $\sim p \vee q \rightarrow s \Rightarrow r \rightarrow (q \rightarrow s)$ Sobre esta deducción también podríamos aplicar el TD ; serían igualmente correctas: $\sim p \vee q \rightarrow s, r \Rightarrow q \rightarrow s$ $\sim p \vee q \rightarrow s, r, q \Rightarrow s$
<b>Solución:</b> $\vdash s \rightarrow ((p \rightarrow \sim t) \rightarrow s \wedge (t \rightarrow \sim p))$	$s, (p \rightarrow \sim t) \Rightarrow s \wedge (t \rightarrow \sim p)$
$\vdash r \rightarrow (s \rightarrow (\sim p \rightarrow r \wedge s))$	<b>Solución:</b> $r \Rightarrow s \rightarrow (\sim p \rightarrow r \wedge s)$ Sobre esta deducción también podríamos aplicar el TD; serían igualmente correctas: $r, s \Rightarrow \sim p \rightarrow r \wedge s$ $r, s, \sim p \Rightarrow r \wedge s$
$\vdash \sim (r \rightarrow (s \rightarrow (\sim r \vee \sim s)))$	<b>Solución: No se puede aplicar</b>
<b>Solución:</b> $\vdash s \wedge \sim \sim p \rightarrow (\sim p \vee q \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow r))$ $\vdash s \wedge \sim \sim p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((\sim p \vee q) \rightarrow r))$ $\vdash \sim p \vee q \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (s \wedge \sim \sim p \rightarrow r))$ (y todas las combinaciones según el orden en que se vaya aplicando a las premisas)	$s \wedge \sim \sim p, \sim p \vee q, q \rightarrow r \Rightarrow r$

13. Comprueba que la deducción siguiente es correcta:

$$q \rightarrow p \wedge r, p \rightarrow s, p \wedge s \rightarrow t \Rightarrow q \rightarrow t$$

Podemos usar el TD para transformar en:  $q \rightarrow p \wedge r, p \rightarrow s, p \wedge s \rightarrow t, q \Rightarrow t$

1. $q \rightarrow p \wedge r$	Premisa
2. $p \rightarrow s$	Premisa
3. $p \wedge s \rightarrow t$	Premisa
4. $q$	Premisa (ver arriba)
5. $p \wedge r$	MP 1,4
6. $\vdash p \wedge r \rightarrow p$	A4 (Simplificación)
7. $p$	MP 6,5
8. $s$	MP 2,7
9. $\vdash p \rightarrow (s \rightarrow p \wedge s)$	A3 (Producto)
10. $s \rightarrow p \wedge s$	MP 9,7
11. $p \wedge s$	MP 10,8
12. $t$	MP 3,11

14. (\*) Comprueba la validez de la fórmula que sigue:

$$A \wedge C \rightarrow A \vee B$$

Por el TD transformamos en:  $A \wedge C \Rightarrow A \vee B$

1. $A \wedge C$	Premisa
2. $\vdash A \wedge C \rightarrow A$	A4 (Simplificación)
3. $A$	MP 2,1
4. $\vdash A \rightarrow A \vee B$	A5 (Adición)
5. $A \vee B$	MP 4,3

15. (\*) Demuestra el teorema de contraposición.

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$$

Por el TD transformamos en:  $A \rightarrow B, \sim B \Rightarrow \sim A$

1. $A \rightarrow B$	Premisa
2. $\sim B$	Premisa
3. $\vdash \sim B \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$	A1 (Introducción antecedente)
4. $A \rightarrow \sim B$	MP 3,2
5. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$	A7 (Reducción al absurdo)
6. $(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A$	MP 5,1
7. $\sim A$	MP 6,4

16. Comprueba si la siguiente deducción es correcta

$$\sim(p \vee q), r \rightarrow p, \sim r \rightarrow t, (x \rightarrow t) \rightarrow (q \wedge b) \Rightarrow s$$

1. $\sim(p \vee q)$	Premisa 1
2. $r \rightarrow p$	Premisa 2
3. $\sim r \rightarrow t$	Premisa 3
4. $(x \rightarrow t) \rightarrow (q \wedge b)$	Premisa 4
5. $\sim p \wedge \sim q$	De Morgan 1
6. $\sim p \rightarrow \sim r$	Contraposición 2
7. $\sim p$	Simplificación 5
8. $\sim r$	MP 6,7
9. $t$	MP 3,8
10. $x \rightarrow t$	Int. antecedente 9
11. $q \wedge b$	MP 4,10
12. $q$	Simplificación 11
13. $\sim q$	Simplificación 5
14. $q \wedge \sim q$	Producto 12,13
15. $s$	ECQ 14

17. En un laboratorio químico se pueden hacer las siguientes reacciones:

- $\text{MgO} + \text{H}_2 \rightarrow \text{Mg} + \text{H}_2\text{O}$
- $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$
- $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3$

Determinar si es correcto decir que, si se disponen de algunas cantidades de MgO, H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> y C se puede obtener H<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>.

Las proposiciones atómicas serían las siguientes:

p: se dispone de MgO  
q: se dispone de H<sub>2</sub>  
r: se dispone de Mg  
s: se dispone de H<sub>2</sub>O  
t: se dispone de C  
u: se dispone de O<sub>2</sub>  
v: se dispone de CO<sub>2</sub>  
w: se dispone de H<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>

Lo que se pide es deducir desde las reacciones químicas que conocemos, otra (es decir, deducir una implicación):

$$p \wedge q \rightarrow r \wedge s, t \wedge u \rightarrow v, v \wedge s \rightarrow w \Rightarrow p \wedge q \wedge u \wedge t \rightarrow w$$

**Opción 1:** Aplicando el teorema de la deducción podría quedarnos como sigue. Usaremos en esta primera solución reglas, para abreviar el proceso.

$$p \wedge q \rightarrow r \wedge s, t \wedge u \rightarrow v, v \wedge s \rightarrow w, p \wedge q \wedge u \wedge t \Rightarrow w$$

1. $p \wedge q \rightarrow r \wedge s$	Premisa
2. $t \wedge u \rightarrow v$	Premisa
3. $v \wedge s \rightarrow w$	Premisa
4. $p \wedge q \wedge u \wedge t$	Premisa
5. $p \wedge q$	Simplificación 4
6. $r \wedge s$	MP 1,5
7. $u \wedge t$	Simplificación 4
8. $t \wedge u$	Conmutativa 7
9. $v$	MP 2,8
10. $s$	Simplificación 6
11. $v \wedge s$	Producto 9,10
12. <b>w</b>	MP 3,11

**Opción 2:** Se puede suponer que “se disponen de algunas cantidades de los elementos p, q, u y t” son premisas adicionales. Para comparar, vamos a usar los axiomas y MP.

$$p \wedge q \rightarrow r \wedge s, t \wedge u \rightarrow v, v \wedge s \rightarrow w, p, q, u, t \Rightarrow w$$

1. $p \wedge q \rightarrow r \wedge s$	Premisa
2. $t \wedge u \rightarrow v$	Premisa
3. $v \wedge s \rightarrow w$	Premisa
4. $p$	Premisa
5. $q$	Premisa
6. $u$	Premisa
7. $t$	Premisa
8. $\vdash t \rightarrow (u \rightarrow t \wedge u)$	A3 (Producto)
9. $u \rightarrow (t \wedge u)$	MP 8,7
10. $t \wedge u$	MP 9,6
11. $v$	MP 2,10
12. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$	A3 (Producto)
13. $q \rightarrow p \wedge q$	MP 12,4
14. $p \wedge q$	MP 13,5
15. $r \wedge s$	MP 1,14
16. $\vdash r \wedge s \rightarrow s$	A4 (Simplificación)
17. $s$	MP 16,15
18. $\vdash v \rightarrow (s \rightarrow v \wedge s)$	A3 (Producto)
19. $s \rightarrow v \wedge s$	MP 18,11
20. $v \wedge s$	MP 19,17
21. <b>w</b>	MP 3,20