Tema 1:
Introducción al Cálculo de Proposiciones

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

uc3m

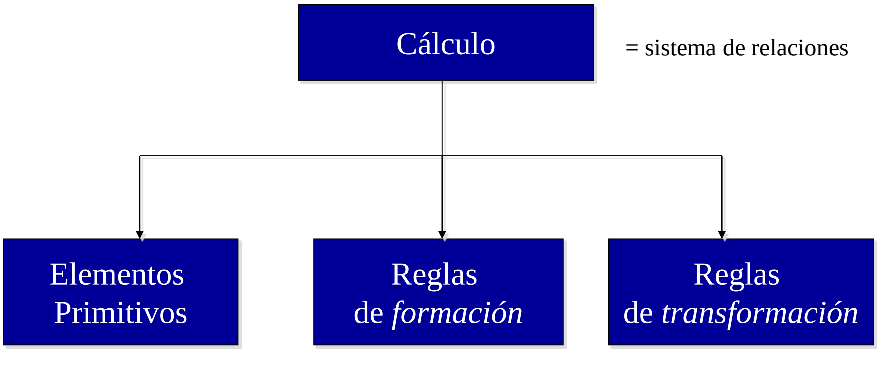
- Introducción a los Sistemas Formales
- Representación y sintaxis en Cálculo Proposicional

Introducción al concepto de cálculo

- Un cálculo es una estructura pura, un sistema de relaciones.
- Un cálculo se compone de lo siguiente:
  - Un conjunto de elementos primitivos (*símbolos elementales*).
  - Un conjunto de reglas de *formación* o de *construcción*.
  - Un conjunto de reglas de *transformación*.

Introducción al concepto de cálculo

- **Mapa conceptual:**



Introducción al concepto de cálculo

1. Elementos primitivos:

- Constituyen las piezas a manejar dentro del sistema.
- El conjunto ha de estar definido de un modo efectivo.
  - Enumeración exhaustiva. (Ej: los símbolos {0; 1;+; -})
  - Definición a través de una propiedad lo suficientemente precisa. (Ej: "las letras minúsculas)

Introducción al concepto de cálculo

2. Reglas de formación:

- Establecen cuáles son las combinaciones correctas posibles de estos símbolos elementales.
- Proporcionan una definición efectiva de la noción de "expresión bien formada de cálculo".
- En los lenguajes naturales no están formuladas (hasta que se establece una gramática) y además son defectivas (se permiten expresiones que pueden no tener sentido desde el punto de vista del lenguaje).
  - El perro corre; Corre perro el; el perro recita molinos

Introducción al concepto de cálculo

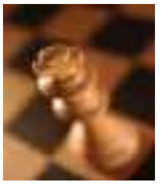
3. Reglas de transformación:

- Aplicándolas, podemos transformar una combinación bien construida de símbolos en otra combinación que resultará igualmente bien construida.
- El concepto de transformación ha de quedar definido de manera efectiva.

¿"el niño juega" = "juega el niño" = "juega niño el"?

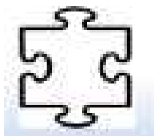
Ejemplo

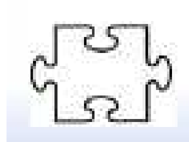
- **Símil ajedrez:**
  - **Símbolos primitivos:** piezas del juego.
  - **Reglas de formación:** instrucciones sobre las posiciones que pueden ocupar las piezas.
  - **Reglas de transformación:** reglas sobre los movimientos que se pueden efectuar con las piezas.



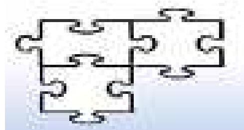
Ejemplo

- **Símil puzle:**
  - **Símbolos primitivos:**





  - **Reglas de formación:**



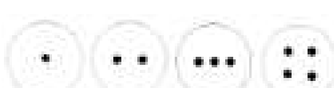
  - **Reglas de transformación:**

Ejemplo de cálculo

- **Símbolos primitivos:**
  - Tipo A) *Triángulos con un número cualquiera de puntos en su interior*

etc.

  - Tipo B) *Círculos con un número cualquiera de puntos en su interior*



etc.

  - Una operación, que escribiremos como ζ, mediante la cual ponemos en relación los elementos de A con los de B o viceversa.

Fuente: Deaño, A. "Introducción a la lógica formal"

Ejemplo de cálculo

- **Reglas de formación:**
  - RF1: Un triángulo solo con un número cualquiera de puntos en su interior es una expresión bien formada del cálculo
  - RF2: Un círculo solo con un número cualquiera de puntos en su interior es una expresión bien formada del cálculo
  - RF3: Una expresión compuesta por un símbolo cualquiera de tipo A, seguido del símbolo ‘ζ’ y de una expresión cualquiera de tipo B es una expresión bien formada
  - RF4: Una expresión compuesta por un símbolo cualquiera de tipo B, seguida del símbolo ‘ζ’ y de un símbolo cualquiera de tipo A es una expresión bien formada
  - RF5: Nada es una expresión bien formada a no ser en virtud de las reglas 1-4

Ejemplo de cálculo

- **Reglas de transformación:**
  - RT1
    - RT1 a:
      - Dada una fórmula compuesta por un **símbolo** determinado de tipo A, seguido del símbolo ‘ζ’ y de un símbolo determinado de tipo B, podemos transformarla en otra fórmula compuesta por este símbolo determinado de tipo B seguido del símbolo ‘ζ’ y de ese símbolo determinado por A
    - RT1 b:
      - Dada una fórmula compuesta por un **símbolo** determinado de tipo B, seguido del símbolo ‘ζ’ y de un símbolo determinado de tipo A, podemos transformarla en otra fórmula compuesta por este símbolo determinado de tipo A seguido del símbolo ‘ζ’ y de ese símbolo determinado por B

Ejemplo de cálculo

- **Reglas de transformación (y II):**
  - RT2
    - RT2 a:
      - Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo A, seguido del símbolo 'ζ' y de un símbolo determinado de tipo B, se puede pasar a otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo A, seguido del símbolo 'ζ' y de otro símbolo **cualquiera** de tipo B.
    - RT2 b:
      - Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo B, seguido del símbolo 'ζ' y de un símbolo determinado de tipo A, se puede pasar a otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo B, seguido del símbolo 'ζ' y de otro símbolo **cualquiera** de tipo A.

Consideraciones sobre cálculos

- Los cálculos se caracterizan porque no hacen referencia a nada ajeno a ellos.
- No atenerse a las reglas significa simplemente dejar de operar con ese determinado cálculo.
- Lo esencial de un cálculo es su carácter formal (naturaleza puramente sintáctica).
- Acerca de un cálculo sólo se pueden hacer consideraciones de pura sintaxis
  - *"La expresión 'X' está mal formada",*
  - *"La transformación de la expresión 'X' en la expresión 'Y' es correcta", etc.*

Consideraciones sobre cálculos

- Operar con un cálculo no es otra cosa que manipular un conjunto de entidades según unas reglas establecidas explícitamente de antemano.
- Se trata de un lenguaje formalizado, un lenguaje con estructura de cálculo, un lenguaje en el que no es sólo artificial el vocabulario, sino también la sintaxis.

Consideraciones sobre cálculos

- Un cálculo no es un lenguaje, en la medida que no es un medio de comunicación, sino un puro armazón sintáctico.
- Sus elementos carecen de significado, son entidades opacas que manipulamos de acuerdo a una serie de reglas.
- Podemos transformar un cálculo en un lenguaje interpretando sus símbolos (dotando a sus símbolos de un significado).

Por ejemplo, los triángulos o círculos pueden representar individuos humanos (triángulo, masculino y círculo femenino, y 'ζ' puede significar contraer matrimonio)

Consideraciones sobre cálculos

- Aunque en la práctica los cálculos se construyen a menudo pensando en sus posibles aplicaciones, desde el punto de vista teórico, son independientes del lenguaje o lenguajes formalizados que se puedan obtener interpretándolos.
- De entre todos los cálculos posibles, hay algunos que por su especial estructura y su buen rendimiento son particularmente aptos para ser aplicados a un ámbito específico de problemas.

Definición de *Lógica*

La **lógica** se puede entender como:

- Un conjunto de cálculos
- La teoría de construcción de cálculos

Cálculo proposicional

Cálculo de predicados

Introducción al cálculo proposicional

- Nuestras posibilidades de uso del lenguaje son muy amplias:
  - Hacer preguntas, elevar súplicas, para dar órdenes, insultar, expresar deseos… y también para hacer afirmaciones acerca de los objetos (enunciar hechos o describir situaciones).
- Las preguntas, las órdenes o las súplicas no tienen valor de verdad. Sí lo tienen las afirmaciones que hacemos acerca del mundo.

Introducción al cálculo proposicional

- La lógica actual se ocupa principalmente del discurso caracterizado por enunciados que tienen forzosamente un valor de verdad o falsedad.
- A este tipo de discurso se le llama también enunciativo, declarativo, representativo, indicativo, descriptivo, asertórico, aseverativo, etc.
- El conocimiento tiene su reflejo en frases de tipo declarativo: p. ej: afirmaciones y declaraciones.

Introducción al cálculo proposicional

- El lenguaje natural se analiza en este curso en dos niveles de complejidad:
  - **Cálculo proposicional:** basado en la representación de frases declarativas simples denominadas *proposiciones*
    - Limitada habilidad para expresar conocimiento
  - **Cálculo de predicados:** basado en fórmulas que permiten hacer afirmaciones sobre sujetos (*predicados*) apoyándose en variables susceptibles de cuantificación

Introducción al cálculo proposicional

- El **cálculo base** sobre el que se apoya la lógica es el **cálculo de proposiciones**.
- Es una lógica que simboliza y describe razonamientos basados en enunciados declarativos (**proposiciones**).
- Trata sobre el análisis lógico, dispuesto como un cálculo, de las relaciones de inferencia entre proposiciones.

Introducción al cálculo proposicional

- Mediante esta representación, el lenguaje está formado por:
  - **Enunciados simples** o **proposiciones atómicas:** unidad mínima del lenguaje con una información.
  - **Conectivas:** elementos del lenguaje que permiten construir frases nuevas a partir de otras (relacionan proposiciones).

Proposiciones atómicas

- Hay tres tipos:
  - **De acción:** sujeto no determinado.
    - Ej: Nieva, Hace fría
  - **De atribución:** atribuyen propiedades a sujetos.
    - Ej: Juan es alto
  - **De relación:** establecen relaciones entre sujetos.
    - Ej: Juan es hermano de Luis

Proposiciones atómicas

- En cálculo proposicional los sujetos no tienen información propia (distinto cálculo predicados)
- Las proposiciones no se pueden dividir en elementos con información propia
- Las proposiciones se simbolizan mediante letras de variables, normalmente, **p,q,r,s..**

Ejemplos de proposiciones

Proposiciones simples:

- *"El cielo es azul*
- *"La nieve es fría"*
- *"12*12=144"*
- *"Vicente Fox es el presidente de la Republica Mexicana"*
- *"La Segunda Guerra Mundial duró desde 1939 hasta 1945"*
- *"8+99=231"*
- *"Los Insectos crean su comida a través de la fotosíntesis"*
- *"Atenas es la capital de Italia"*

Conectivas

- Elementos del lenguaje que permiten construir una nueva frase mediante dos proposiciones, cuyo contenido de información es el de cada frase aislada pero añadiendo la característica de simultaneidad a ambas

- Hay cuatro tipos:
  - Negación ($\sim$)
  - Conjunción ($\wedge$)
  - Disyunción ($\vee$)
  - Condicional ($\rightarrow$)

Conectivas

- Negación ($\sim$)

  Permite construir una frase a partir de otra

  - "No p"
  - "Es falso que p"
  - "No es cierto que p"

Si p es "Juan es alto", entonces "No es cierto que Juan sea alto" sería $\sim$p

Conectivas

- Conjunción ($\wedge$)

  Permite unir dos frases

  - "p y q"
  - "p pero q"
  - "p sin embargo q"
  - "p no obstante q"
  - "p a pesar de q"

Si p es "Hay sol"
Si q es "Hace frío"
Entonces "Hay sol, pero hace frío"
sería $p \wedge q$

Conectivas

- Disyunción ($\vee$)

  - "O p o q o ambas cosas"
  - "Al menos p o q"
  - p o q (se asume que es incluyente)
  - "Como mínimo p o q"

Si p es "Hace sol"
Si q es "Hace frío"
Entonces "O hace sol o hace
frío" sería $p \vee q$

Conectivas

- Condicional (→)

  Representa la relación causa/efecto
  - “Si p entonces q”
  - “p sólo si q”
  - “q si p”
  - “q necesario para p”
  - “p suficiente para q”
  - “No p a menos que q”
  - “Solo si q entonces p”

Si p es “Está nublado”
Si q es “Llueve”
Entonces “Si llueve está nublado” sería $q \rightarrow p$

Conectivas

- Bicondicional (↔)
  - $p \leftrightarrow q$ es una forma equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - p si y solo si q
  - p es lo mismo que q
  - p es equivalente a q

Conectivas. Otras notaciones

$\neg p$	"no p"	negación	$\sim p$
$p \wedge q$	"p y q"	conjunción	p&q
$p \vee q$	"p o q"	disyunción	
$p \rightarrow q$	"si p, entonces q"	condicional	$p \supset q$, $p \Rightarrow q$
$p \leftrightarrow q$	"p si y sólo si q"	bicondicional	$p \equiv q$, $p \Leftrightarrow q$

Sintaxis. Reglas de formación

- Las frases del lenguaje generalmente son más complejas aunque siempre se pueden descomponer en enunciados simples unidos por conectivas
- Para escribir estas frases complejas mediante el cálculo proposicional, existen unas reglas de formación (sintaxis)
- Dichas reglas están inspiradas en las reglas del lenguaje natural (teoremas)

Sintaxis. Reglas de formación

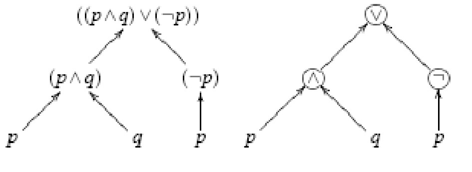
- Se dice que una frase o **fórmula es sintácticamente correcta (fsc)** si se forma mediante las siguientes reglas:
  - Las proposiciones **p**, **q**, **r...** son **fsc**
  - Si **A** y **B** son **fsc**, también lo son
    - $\sim A$, $\sim B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$
  - Sólo son **fsc** las que cumplen las condiciones anteriores

Sintaxis. Reglas de formación

- En ocasiones hay margen para la ambigüedad

$$p \wedge q \vee \sim p$$

- Esto se puede solucionar con paréntesis
- Fijados los paréntesis adecuados, a cada fórmula le corresponde un único árbol sintáctico (y viceve



Reglas de Sintaxis para Desambiguación

- Una conectiva afecta a la proposición que le sigue o al conjunto de proposiciones y conectivas inmediata a ellas entre paréntesis
- Es posible la eliminación de paréntesis. Para ello se define la siguiente jerarquía

Nivel 1 $\sim$ $\sim p \vee \sim q$ equiv. $(\sim p) \vee (\sim q)$

Nivel 2 $\wedge$ $p \wedge q \vee r$ equiv. $((p \wedge q) \vee r)$

Nivel 3 $\vee$ $p \wedge q \rightarrow r \vee s$ equiv. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

Nivel 4 $\rightarrow$ $(r \wedge s) \vee p \rightarrow \sim p \wedge q$ equiv. $[(r \wedge s) \vee p] \rightarrow [(\sim p) \wedge q]$

Nivel 5 $\leftrightarrow$ $p \leftrightarrow q \rightarrow r$ equiv. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

- Las conectivas (a igualdad de prioridad) se evaluarán de izquierda a derecha, (así como los paréntesis)

$p \rightarrow q \rightarrow r$ equiv. $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

Proceso de formalización

- Reconocer las **proposiciones simples** (tb. **atómicas**) y **etiquetarlas** claramente
- Reconocer las **proposiciones compuestas** en el texto, que agrupamos con paréntesis
- Añadir las conectivas que unen dichos bloques, reconociendo qué conectivas son mediante las **frases tipo**

Formalización: ejemplos

- No es cierto que María tenga 50 años
  - No es cierto que **María tenga 50 años (a)**
  - ~ a
- Pedro tiene un CI de 140, pero suspende siempre
  - **Pedro tiene un CI de 140 (ci)**, pero **suspende siempre (s)**
  - ci ^ s
- Si una sustancia orgánica se descompone, sus componentes se transforman en abono y fertilizan el suelo.
  - Si **una sustancia orgánica se descompone (desc)**, **sus componentes se transforman en abono (a)** y **fertilizan el suelo (f)**.
  - desc →(a ^ f)

Formalización: ejemplos

- *"If p then q else r"*

(p → q)^(~ p → r)

- *"Antonio, Blanca y Carmen vienen a la fiesta si y solo si David no viene, pero, si no vienen ni Antonio ni Blanca, entonces David viene sólo si Carmen lo hace."*

((a^b^c)↔~d)^((~a^~b)→(d→c))

Formalización: ejemplos

Frase	Formalización
No es cierto que María tenga 50 años	~a
Pedro tiene un CI de 140, pero suspende siempre	i ∧ s
A pesar de que estaba lloviendo, asistieron cien personas	l ∧ c
O viene Ana o Carmen, o ambas	a ∨ c
Si lo deseas entonces lo conseguirás	d → c
Tener pasaporte es necesario para pasar la frontera	f → p
Ser habilidoso es suficiente para poder instalar un enchufe	h → e
Te creeré sólo si traes los originares	c → o
Si la temp. baja de 10º, me quedaré en casa y dormiré	t → c ∧ d
Ganaremos el partido sólo si jugamos	g → j

Resumen Formalización Conectivas

- Negación ($\sim p$):
  - No p
  - Es falso que p
  - No es cierto que p
- Conjunción ($p \wedge q$):
  - p y q
  - p pero q
  - p sin embargo q
  - p no obstante q
  - p a pesar de q
- Disyunción ($p \vee q$):
  - O p o q o ambas cosas
  - Al menos p o q
  - Como mínimo p o q
- Condicional ($p \to q$):
  - Si p entonces q
  - p sólo si q
  - q si p
  - q necesario para p
  - p suficiente para q
  - No p a menos que q