

CÁLCULO 2018/2019

HOJA #1: NÚMEROS REALES

Problema 1.1. Determina todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

- 1) $x^2 + \frac{2}{x} > 3.$
- 2) $|\sqrt{x} - 2| \leq 3.$
- 3) $-8 \leq |x - 5| - |x + 3| \leq 8.$
- 4) $|x - 3| \leq 8.$
- 5) $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}.$
- 6) $x^2 - 5x + 6 \geq 0.$
- 7) $x^3(x + 3)(x - 5) < 0.$
- 8) $\frac{2x + 8}{x^2 + 8x + 7} > 0.$
- 9) $|x - 1| + |x - 2| > 1.$
- 10) $|x - 1||x + 2| = 3.$
- 11) $|x^2 - 2x| < 1.$

Problema 1.2. Encuentra, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de cada uno de los siguientes conjuntos de números reales:

- 1) $A_1 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$
- 2) $A_2 = \{1/n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$
- 3) $A_3 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}.$
- 4) $A_4 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}.$
- 5) $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 < 0\}.$
- 6) $A_6 = \{x : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}.$
- 7) $A_7 = \{1/n + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}.$
- 8) $A_8 = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}.$
- 9) $A_9 = \{x \in \mathbb{R} : (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0\}, \quad a < b < c < d.$
- 10) $A_{10} = \{x = 2^{-p} + 5^{-q} : p, q \in \mathbb{N}\}.$
- 11) $A_{11} = \{x = (-1)^n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}\}.$

Problema 1.3. Demuestra las siguientes afirmaciones:

1) $\sqrt{2}$ no es un número racional.

$$2) \sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

$$3) \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

$$4) 0 < x < y \Rightarrow x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

$$5) 0 < x < y \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}, \quad \forall k > 0.$$

$$6) |x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$