Ejercicios Programación Dinámica y Programación Lineal

Javier García Polo

fjgpolo@inf.uc3m.es
2.1B16
-
Grupo de Planificación y Aprendizaje (PLG)
Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

21 de septiembre de 2020

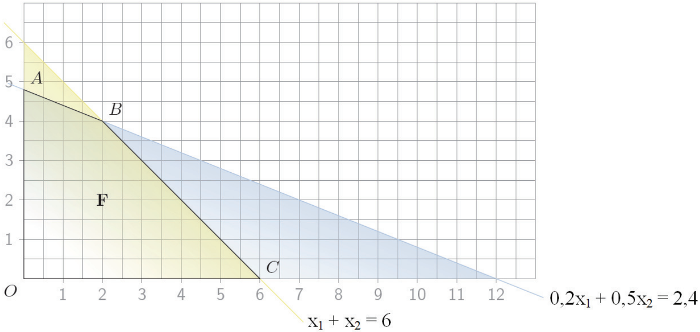
Programación Dinámica:

- Definir de forma recursiva la solución óptima
- Calcular la solución óptima de forma ascendente (bottom-up)
  - De problemas más pequeños a problemas más grandes
- **Memorización**: Se utiliza alguna estructura de datos (e.g., una tabla) para almacenar las soluciones intermedias

La empresa UniZumo fabrica y distribuye zumos de piña en las presentaciones Néctar de Piña y Unizumo de Piña. Ambos zumos se fabrican a base de concentrado de piña, de modo que en cada litro de zumo hay un 20 % y un 50 % de concentrado respectivamente. Para la fabricación del año se dispone de 2,4 millones de litros de concentrado de piña y se ha pactado con los mayoristas un precio de 1,25 euros por tetra brik (con una capacidad de un litro) de Néctar de Piña y 2,05 euros por el de Unizumo de Piña, bajo la condición de que no se saquen al mercado más de 6 millones de litros de zumo.
Se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal para obtener las cantidades de cada producto que UniZumo debe fabricar para maximizar los ingresos por ventas.
2. Resolver gráficamente el problema.
3. Representar el problema en *forma estándar*

$$\begin{aligned}
&\max z = 1{,}25x_1 + 2{,}05x_2 \\
&\quad 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 2{,}4 && \textit{20 \% en Nectar + 50 \% en Unizumo} \leq \textit{2.4} \\
&\quad x_1 + x_2 \leq 6 && \textit{Suma de litros} \leq \textit{6} \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0 && \textit{Numero de litros no negativo}
\end{aligned}$$



6
5
4
3
2
1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
A
B
C
F
0,2x1 + 0,5x2 = 2,4
x1 + x2 = 6

La región factible F está delimitada por los puntos O, A, B y C. Los tres primeros pueden leerse directamente en la gráfica y son $O(0,0)$, $\mathrm{A}(0,4{,}8)$ y $\mathrm{C}(6,0)$. El último se calcula como la intersección de las dos restricciones:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-\frac{3}{10}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculando la función objetivo en cada punto extremo obtenemos:

$$z_{\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = 9{,}84$$

$$z_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 10{,}7$$

$$z_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 7{,}5$$

$$\max z = 1{,}25x_1 + 2{,}05x_2$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0{,}2x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & x_3 & & & = & 2{,}4 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Se pide organizar un curso para empresarios que dure como máximo unas 20 horas distribuidas en varios días. Para tal fin, un hotel hace la oferta de su Aula Ejecutiva que cuesta 90 euros la hora y su Salón de Conferencias que cuesta 150 euros la hora. Esta oferta es válida siempre y cuando se contraten al menos 10 horas en el hotel y el tiempo en el Aula Ejecutiva sea mayor o igual que en el Salón de Conferencias. Por otra parte, para evitar problemas de espacio en las charlas más interesantes, el tiempo contratado en el Salón de Conferencias debe ser al menos el 20 % del total de horas contratadas.
Se pide:

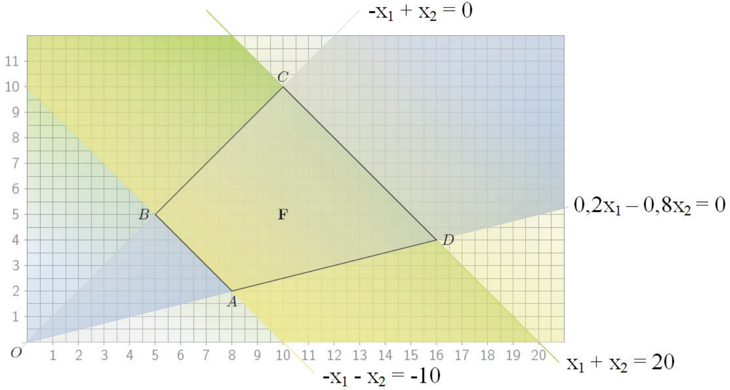
1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de minimizar el coste de contratación de los salones del hotel.
2. Representar el problema en *forma canónica*
3. Resolver el problema gráficamente. ¿Cuánto debe durar el curso?

$$
\begin{array}{ll}
\min z = 90x_1 + 150x_2 & \\
\quad x_1 + x_2 \leq 20 & \textit{El curso dura como máximo 20 horas} \\
\quad x_1 + x_2 \geq 10 & \textit{La oferta es válida si contratamos mas de 10h} \\
\quad x_1 \geq x_2 & \textit{\ldots más tiempo en el Aula Ejecutiva} \\
\quad x_2 \geq 0{,}2(x_1 + x_2) & \textit{al menos el 20\,\% en el Salón de Conferencias} \\
\quad x_1, x_2 \geq 0 & \textit{El número de horas debe ser no negativo}
\end{array}
$$

$$\text{máx } z' = -90x_1 - 150x_2$$

$$\begin{array}{rcccl}
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\
- & x_1 & - & x_2 & \leq & -10 \\
- & x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & 0{,}2x_1 & - & 0{,}8x_2 & \leq & 0
\end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$-x_1 + x_2 = 0$
$0{,}2x_1 - 0{,}8x_2 = 0$
$x_1 + x_2 = 20$
$-x_1 - x_2 = -10$
C
B
F
D
A
O

Evaluando la función objetivo en los puntos extremos resulta:

$$z'_{\mathrm{A}} = (-90 \quad -150)\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = -1020$$

$$z'_{\mathrm{B}} = (-90 \quad -150)\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -1200$$

$$z'_{\mathrm{C}} = (-90 \quad -150)\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = -2400$$

$$z'_{\mathrm{D}} = (-90 \quad -150)\begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = -2040$$

Un colegio privado ha enviado una oferta a un reconocido profesor de matemáticas y física para que imparta clases en su centro. El colegio da libertad total al profesor para que decida cuántas horas de cada asignatura debe impartir al día con la condición de que imparta un máximo de 8 horas diarias. La oferta realizada detalla que por cada hora impartida de matemáticas y física recibirá 7.5€ y 8.2€ respectivamente. El profesor no está dispuesto a invertir más de tres horas diarias para preparar todas las clases. Él sabe que preparar una hora de clase de matemáticas necesita una dedicación de 12 minutos, mientras que necesita hasta 40 para preparar cada hora de física. Además, con el paso del tiempo, la satisfacción personal que él mismo recibe al impartir clase ha ido decreciendo. De hecho, recibe la mitad de satisfacción personal por cada hora impartida de matemáticas que por cada hora de física. Esto es importante, puesto que el profesor desea recibir un mínimo de 5 unidades de satisfacción personal diaria.
Se pide:

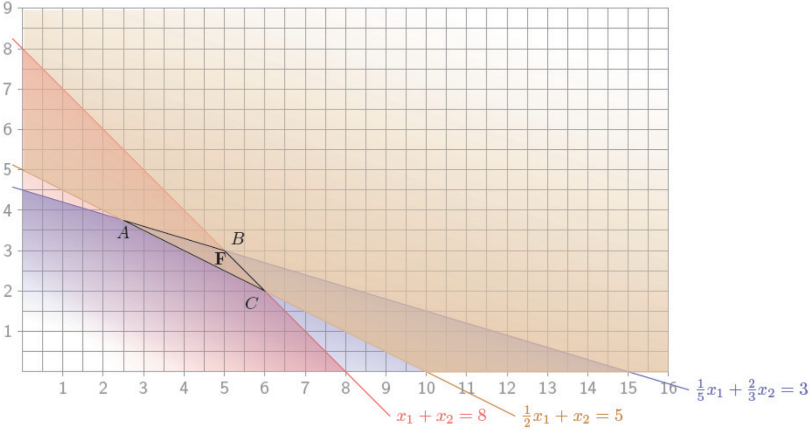
1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de maximizar el salario diario.

En este problema estamos calculando el número de horas diarias a impartir de cada asignatura, por lo que las variables serán:

x_1: número de horas impartidas de matemáticas
x_2: número de horas impartidas de física

La función objetivo debe maximizar el salario del profesor:
$\max z = 7{,}5x_1 + 8{,}2x_2$
Analizando las necesidades del colegio y del profesor, identificamos las siguientes restricciones en el problema:

$x_1 + x_2 \leq 8$	*El profesor no puede impartir más de 8 horas diarias*
$\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 3$	*El tiempo máximo para preparar las clases de cada día*
$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 5$	*La satisfacción personal diaria debe ser al menos de 5*



9
8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
A
B
F
C
$\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 3$
$x_1 + x_2 = 8$
$\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 5$

Evaluando la función objetivo en los puntos extremos resulta:

$$
\begin{aligned}
z'_{\mathrm{A}} &= (7,5 \quad 8,2)\begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/14 \end{pmatrix} = 49,5 \\
z'_{\mathrm{B}} &= (7,5 \quad 8,2)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 62,1 \\
z'_{\mathrm{C}} &= (7,5 \quad 8,2)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 61,4
\end{aligned}
$$

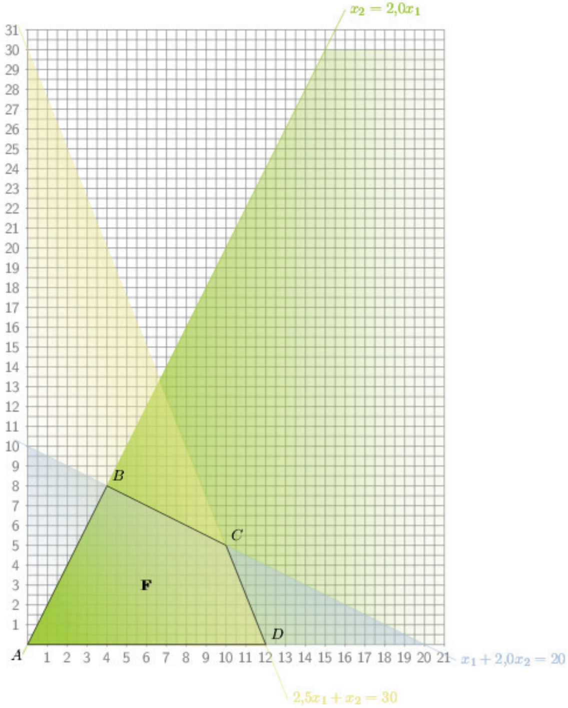
La compañía *FurnitureUC3M* produce sillas y mesas para las que requiere la utilización de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere 1 hora de trabajo en la sección de montaje y de 2 horas y 30 minutos en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de 2 horas en la sección de montaje y de 1 hora en la de pintura. La sección de montaje sólo puede estar como máximo 20 horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura sólo 30 horas. Además, la producción de mesas no debe superar en más del doble la producción de sillas. Teniendo en cuenta que el beneficio de las mesas es de 10 euros y el de las sillas de 6 euros, se pide:

1. Modelar el problema como un problema de Programación Lineal con el objetivo de maximizar el beneficio de la compañía.

La función objetivo debe maximizar el beneficio:
$\max z = 6x_1 + 10x_2$
Analizando las necesidades de la empresa, identificamos las siguientes restricciones en el problema:

$x_1 + 2x_2 \leq 20$	*Como maximo 20 horas montaje*
$2,5x_1 + x_2 \leq 30$	*Como maximo 30 horas de pintura*
$x_2 \leq 2x_1$	*Mesas no mas del doble sillas*

$x_1, x_2 \in \textit{Numeros naturales}$



$x_2 = 2{,}0x_1$
$x_1 + 2{,}0x_2 = 20$
$2{,}5x_1 + x_2 = 30$
A
B
C
D
F

Evaluando la función objetivo en los puntos extremos resulta:

$$z'_{\mathrm{A}} = (6 \quad 10)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$z'_{\mathrm{B}} = (6 \quad 10)\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} = 104$$

$$z'_{\mathrm{C}} = (6 \quad 10)\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix} = 110$$

$$z'_{\mathrm{C}} = (6 \quad 10)\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix} = 72$$