Problema 1 (Problemas 12.5 y 12.8)

- ¿Es 127 un número primo?
- Resolver la congruencia lineal $32\,x \equiv 39 \pmod{127}$.

<u>SOLUCIÓN.</u>

- Supongamos que 127 no es un número primo, entonces existe un divisor primo p de 127 tal que $p \leq \sqrt{127}$. Como $12^2 = 144$, los candidatos posibles pertenecen al conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Claramente $2 \nmid 127$, $3 \nmid 127$ y $5 \nmid 127$. Por otra parte $127 \equiv 57 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$, luego $7 \nmid 127$. Finalmente, $127 \equiv 17 \pmod{11} \equiv 6 \pmod{11}$, luego $11 \nmid 127$. Dado que ninguno de los candidatos divide a 127, la hipótesis de partida es falsa y 127 es un número primo.

- Es obvio que $\mathrm{mcd}(32, 127) = 1$ y $1 \mid 39$, luego existe una única solución $\pmod{127}$ de esta congruencia. Un método posible para resolverla es obtener el inverso multiplicativo de $32 \pmod{127}$ (que existe al ser 127 y 32 coprimos entre sí). Como $32 \cdot 4 = 128 \equiv 1 \pmod{127}$, entonces el inverso multiplicativo de $32 \pmod{127}$ es $32^{-1} \equiv 4 \pmod{127}$. Luego,
$$32 \cdot 32^{-1} \cdot x \;\equiv\; 4 \cdot 39 \pmod{127} \;\equiv\; 156 \pmod{127}\,,$$
lo que implica que la solución buscada es:
$$x \;\equiv\; 29 \pmod{127}\,.$$

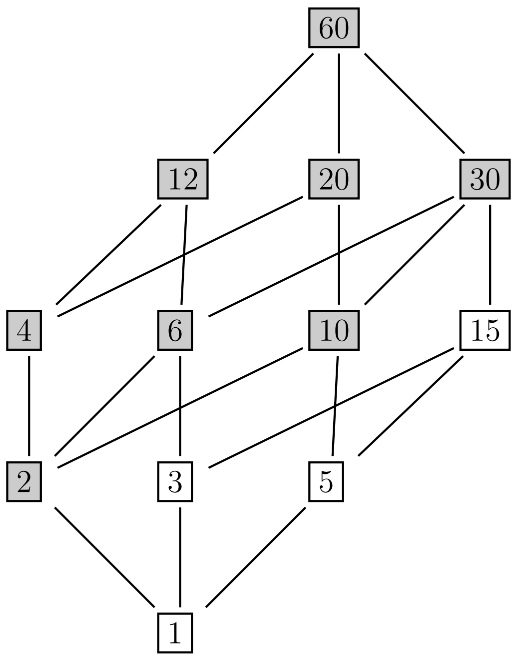
Problema 2 (Problemas 12.3 y 13.2) Sea D_n el conjunto de divisores enteros positivos de $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(D_{60}, |\,)$.

- Calcular $|D_{60}|$.
- Encontrar el diagrama de Hasse de $(D_{60}, |\,)$.
- Si $C = D_{60} \setminus D_{15}$, calcular $\sup(C)$ e $\inf(C)$.

<u>SOLUCIÓN.</u>

- Como $60 = 2^2\,3\,5$, cada divisor d de 60 será de la forma $d = 2^a\,3^b\,5^c$ con $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b, c \leq 1$. Si cada tarea es escoger cada potencia a, b, c de manera sucesiva, el principio del producto garantiza que $|D_{60}| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. El conjunto buscado es $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

- El método más eficiente de construir el diagrama de Hasse es hacerlo capa a capa, de manera que cada capa contenga los números de D_{60} cuya descomposición tenga un número fijo $0 \leq k \leq 4$ de números primos. El resultado esta dado por la siguiente figura. Los nodos blancos corresponden al subconjunto D_{15}, mientras que los nodos grises, al conjunto C.



- Si nos fijamos en los nodos coloreados en gris (que corresponden al conjunto C), tenemos que $\text{mayor}(C) = \{60\}$ y $\text{minor}(C) = \{2, 1\}$. Luego $\sup(C) = \min(\text{mayor}(C)) = 60$ e $\inf(C) = \max(\text{minor}(C)) = 2$.

Problema 3 (Problema 8.5) Calcular el número de cadenas de longitud n formadas por los elementos del conjunto $\{0, 1, 2\}$ y tales que tienen un número impar de ceros.

- Demostrar que, si a_n es el número de cadenas de este tipo, entonces satisface la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

- Resolver dicha recurrencia.

Solución.

Sea el conjunto A_n que contiene las cadenas de longitud n formadas por los elementos de $\{0, 1, 2\}$ y tales que tienen un número impar de ceros. Luego $a_n = |A_n|$. Sea B_n el conjunto que contiene las cadenas de longitud n formadas por los elementos de $\{0,1,2\}$ y tales que tienen un número par de ceros. Sea $b_n = |B_n|$. Obviamente, si usamos el principio del producto, tenemos que

$$a_n + b_n \; = \; 3^n \,, \quad n \geq 1 \,.$$

La recurrencia se obtiene como sigue: dado que toda cadena de A_n empieza por 0, 1, ó 2, entonces

$$\underset{a_n}{\boxed{\quad\quad}} \; = \; 0\, \underset{b_{n-1}}{\boxed{\quad}} \quad + \; 1\, \underset{a_{n-1}}{\boxed{\quad}} \quad + \; 2\, \underset{a_{n-1}}{\boxed{\quad}}$$

Cuando empieza por 0 para rellenar la parte vacía de la cadena podemos tomar cualquier elemento de B_{n-1}, mientras que si empieza por 1 ó 2, puede ser cualquier elemento de A_{n-1}. Es decir

$$a_n \; = \; 2\, a_{n-1} + b_{n-1} \; = \; a_{n-1} + 3^{n-1} \,, \quad n \geq 2 \,.$$

Como la recurrencia es de orden 1 necesitamos una condición inicial $a_1 = 1$, ya que $A_1 = \{0\}$.

Esta es una recurrencia no homogénea, por lo que su solución general es la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea.

La parte homogénea de la recurrencia es $a_n = a_{n-1}$, cuyo polinomio característico es $x = 1$. Luego su solución general es $a_n = A$.

La solución particular de la recurrencia total tiene la forma $a_n = B\, 3^n$. El valor de B se obtiene sustituyendo esta forma en la recurrencia

$$B\, 3^n \; = \; B\, 3^{n-1} + 3^{n-1} \,.$$

Dividiendo por 3^{n-1}, se obtiene

$$3B \; = \; B + 1 \quad \Rightarrow \quad B \; = \; \frac{1}{2} \,.$$

Luego la solución particular es $a_n = \dfrac{1}{2}\, 3^n$.

La solución general de la recurrencia es

$$a_n \; = \; A + \frac{1}{2}\, 3^n \,.$$

Usando la condición inicial $a_1 = 1 = A + \dfrac{3}{2}$ se obtiene $A = -\dfrac{1}{2}$. Luego la solución buscada es

$$a_n \; = \; \frac{1}{2}\, (3^n - 1) \,, \quad n \geq 1 \,.$$
