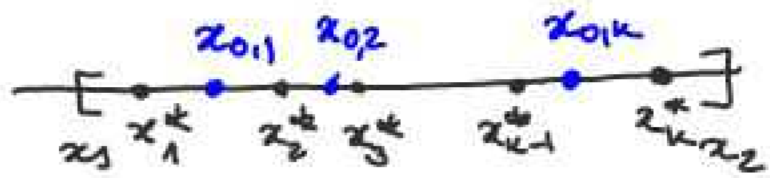
PROBLEMA 6.5 Demuestra los siguientes teoremas:

Teorema 1: f derivable en $[x_1, x_2]$. Si f tiene $k \geq 2$ raices en $[x_1, x_2] \Rightarrow f'$ tiene, al menos, $k-1$ raices en $[x_1, x_2]$.

Dem: f se anula en $k \geq 2$ puntos: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$



$f(x_i^*) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k$

Aplicando el teorema de Rolle:

$$\exists\, x_{0,1} \in (x_1^*, x_2^*) : \quad f'(x_{0,1}) = 0$$

$$\exists\, x_{0,2} \in (x_2^*, x_3^*) : \quad f'(x_{0,2}) = 0$$

$$- - - - - - - - - - - - - \ldots$$

$$\exists\, x_{0,k-1} \in (x_{k-1}^*, x_k^*) : \quad f'(x_{0,k-1}) = 0$$

$\Rightarrow$ La ecuación $f'(x) = 0$ tiene, al menos, $k-1$ soluciones ya que $f'(x_{0,i}) = 0$
$i = 1, \ldots, k-1$ ∎

Teorema 2 f k-veces derivable en $[x_1, x_2]$.

Si f tiene $k+1 \geq 2$ raices en $[x_1, x_2]$ entonces $f^{(k)}$ tiene, al menos, una raiz en $[x_1, x_2]$

Dem: Usando el teorema 1:

$f(x) = 0$ $(k+1)$-soluciones en $[x_1, x_2]$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ al menos k-soluciones en $[x_1, x_2]$

Aplicando ahora el teorema 1 a f':

$f'(x) = 0$ k-soluciones en $[x_1, x_2]$ $\Rightarrow$ $f''(x) = 0$ al menos $(k-1)$-soluciones en $[x_1, x_2]$

Repitiendo el razonamiento:

$f^{(3)}(x) = 0$ al menos $(k-2)$-soluciones en $[x_1, x_2]$

$f^{(4)}(x) = 0$ " " $(k-3)$-soluciones en $[x_1, x_2]$

\- -

$f^{(k)}(x) = 0$ " " $(k-(k-1)) = 1$ soluciones en $[x_1, x_2]$

■