Hoja 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 2.1 Expresar el vector a, si es posible, como una combinación lineal de los vectores incluidos en el conjunto S:

1. $a = (2,3)^t$ con $S = \{(1,4)^t, (1,5)^t\}$.

2. $a = (-1,0,1)^t$ con $S = \{(2,1,0)^t, (1,0,1)^t\}$.

3. $a = (1,3,0)^t$ con $S = \{(1,0,4)^t, (2,1,5)^t, (3,3,0)^t, (4,2,1)^t\}$.

4. $a = (1,0,1,1)^t$ con $S = \{(2,1,0,1)^t, (3,0,0,2)^t\}$.

Problema 2.2 Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación *gaussiana* aplicada a las ECUACIONES. Dibujar el conjunto de soluciones como los puntos de intersección de las líneas que representa cada ecuación. Usar las soluciones para expresar el vector de constantes (términos independientes) como una combinación lineal de vectores.

a) $\begin{cases} x - 6y = 12\,, \\ x + 2y = 6\,. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1\,, \\ x - y = -1\,. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2(1 - 3y) = 4(x - 2)\,, \\ x + y = 4(x - y - 3)\,. \end{cases}$

Problema 2.3 Para cada uno de los siguientes sistemas, escribir la matriz ampliada correspondiente y usar la eliminación *gaussiana* en dicha matriz para obtener el conjunto de soluciones. Utilizar el concepto de rango para determinar la cardinalidad de dicho conjunto y describirlo mediante vectores columna.

a) $\begin{cases} x + z = 4\,, \\ x - y + 2z = 5\,, \\ 4x - y + 5z = 17\,. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + b - c = 2\,, \\ 2a + c = 3\,, \\ a - b = 0\,. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 3\,, \\ 2x + y = 4\,, \\ x - y + z = 1\,. \end{cases}$

Problema 2.4 Ciertos números de tres dígitos tienen dos propiedades: a) el dígito de las decenas y el de las unidades suman 5; b) si los dígitos se escriben en orden inverso y se resta el número que resulta al número original se obtiene 792. Encontrar todos los números de tres cifras que verifiquen estas propiedades.

Problema 2.5 Calcular el espacio nulo de la matriz y el espacio columna de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Problema 2.6 Escribir en forma escalonada reducida las matrices que corresponden a los siguientes sistemas y determinar su solución:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 0\,, \\ x + 2y + z = 3\,, \\ x + 3y + 3z = 7\,. \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = 4\,, \\ 2x + 6y - 4z = -1\,, \\ x + 3y - 3z = 4\,. \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 = -2\,, \\ 3x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 5x_4 = 6\,, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -10\,. \end{cases}$$

Problema 2.7 Calcular la inversa de las siguientes matrices utilizando operaciones *gaussianas*:

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$

Problema 2.8 Resolver el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\,x = 0$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar la cardinalidad del conjunto de soluciones del sistema no homogéneo $A\,x = b$, con $b = (0, 0, -2, 2)^t$. Encontrar dicho conjunto.