Tema 5:
Teoría Semántica

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

uc3m

Teoría Semántica en cálculo proposicional

Introducción

- Utiliza la simbolización vista hasta el momento
- La diferencia principal es que el sistema de fórmulas y estructuras deductivas válidas ***no se construye a partir de los axiomas y reglas*** sino mediante una ***simbolización del significado*** de las proposiciones

Introducción

- Para esto, se necesita
  - Un conjunto de significados atribuibles a las proposiciones **{V,F} o {1,0}**
  - Definición semántica de las conectivas (tablas de verdad)
  - Una definición semántica de deducción correcta

Tablas de verdad

- Definición de conectivas

p	~p
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
v	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tablas de verdad

- El número de interpretaciones (filas) es 2^n, donde *n* es el número de proposiciones que intervienen en la fórmula.

Interpretaciones para 3 proposiciones

		p	q	r
7	$\rightsquigarrow$	1	1	1
6	$\rightsquigarrow$	1	1	0
5	$\rightsquigarrow$	1	0	1
4	$\rightsquigarrow$	1	0	0
3	$\rightsquigarrow$	0	1	1
2	$\rightsquigarrow$	0	1	0
1	$\rightsquigarrow$	0	0	1
0	$\rightsquigarrow$	0	0	0

Evaluación de Fórmulas

- Es posible construir la tabla de significado de cualquier fórmula a partir de las correspondientes fórmulas parciales que la integran
- **Interpretación:** asignación de significados a sus componentes básicas (una línea de la tabla de verdad)
  - **Modelo:** interpretación que hace cierta una fórmula
  - **Contramodelo (contraejemplo):** interpretación que hace falsa la fórmula

Tablas de verdad

- **Ejemplo:** $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2^2 interpretaciones

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

¿$A \rightarrow B$ <=> $B \rightarrow A$?

¿$A \rightarrow B$ <=> ~A v B?

Modelos

Contramodelos

Equivalencia

Considere las formulas que siguen:

$p \wedge q$ $\sim(\sim p \vee \sim q)$ $\sim(p \rightarrow \sim q)$ $\sim(q \rightarrow \sim p)$

- Si se construyen las tablas de verdad, se puede verificar que se obtienen columnas finales idénticas.

1
0
0
0

- Cuando se obtienen los mismos resultados para cualquier interpretación (fila) estamos ante un caso de ***equivalencia lógica***

Evaluación de Fórmulas

- De acuerdo con el resultado de las interpretaciones, las fórmulas pueden clasificarse en:
  - **Tautología:** siempre es verdad ($\models$)
  - **Contradicción:** siempre es falsa
  - **Contingencia:** valores distintos (ninguna de las anteriores)
- Una fórmula que tiene **al menos un modelo** es ***satisfacible*** (al menos una línea en la que todas las fórmulas son válidas).
- Una fórmula **sin contraejemplos** es ***semánticamente válida.***

Evaluación de Fórmulas

2^3 interpretaciones

			Fórmula 1	Fórmula 2	Fórmula 3
p	q	r	$(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

- F1 es insatisfacible (contradicción) (tautología negada)
- F2 es satisfacible
- F3 es una tautología (semánticamente válida)

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: tautologías

p	p → p
1	1
0	1

p	q	q → p	p → (q → p)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

p	q	~p → q	p → (~p → q)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: contradicciones y contingencia

p	~p	p ∧ ~p
1	0	0
0	1	0

p	q	p ∨ q	q ∧ ~(p ∨ q)
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

p	q	p ∧ q	(p ∧ q) → ~q
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Deducción Correcta

- Dada una estructura deductiva $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ se define como **correcta** cuando **no existe** una interpretación que haga $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ verdadero y q falso.

- Para comprobar que una estructura deductiva es **incorrecta**, basta con encontrar una interpretación que no cumpla la regla anterior.

Deducción Correcta

Ejemplo: Modus Ponens: A, A $\rightarrow$ B $\Rightarrow$ B

A	A $\rightarrow$ B	B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

No hay ninguna interpretación donde las premisas sean **V** y la conclusión **F**.

Por tanto, la deducción es correcta

Deducción Correcta

p	q	p $\rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** A $\rightarrow$ B, B $\rightarrow$ C $\Rightarrow$ A$\rightarrow$C

A	B	C	A $\rightarrow$ B	B $\rightarrow$ C	A$\rightarrow$C
1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	**1**

Deducción incorrecta

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** A → B, B → C ⇒ C→A

A	B	C	A → B	B → C	C→A
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	1

Teorema de la Deducción

- Es demostrable mediante la definición semántica de deducción

Si

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \Rightarrow q$$

Es una deducción correcta

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q$$

También es una deducción correcta

Tautologías asociadas una Deducción

- Si $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots (p_n \rightarrow q)\ldots)$ es una tautología

- Si $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ es una tautología

- Las fórmulas asociadas son equivalentes

Tautologías asociadas una Deducción

- Dos ideas importantes:
  - Mediante la TS podemos ***comprobar*** si una deducción es correcta, pero ***no demostrar*** dicha corrección.
  - Si una deducción es correcta, la fórmula asociada es una tautología. Lo recíproco también es cierto.

Comprobación de Deducciones

- Frente a los sistemas axiomáticos, TS permite definir un procedimiento ***sistemático*** para comprobar si una deducción es correcta o si una fórmula es semánticamente válida.
- Dos métodos principales
  - **Directo**
    - Construcción de una tabla de verdad completa
    - Problemático si hay muchas interpretaciones
  - **Contraejemplo**
    - Búsqueda de una interpretación específica

Comprobación de Deducciones

- Procedimiento contraejemplo
  - Construir una fórmula asociada
  - Generar interpretaciones y calcular significados para la fórmula
  - Buscando algún significado *falso* (contraejemplo)
- Alternativa: operar de forma análoga con una deducción completa buscando una interpretación tal que
    - *Todas las premisas* sean *verdaderas*
    - *Conclusión falsa*

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \lor \sim B) \Rightarrow \sim(A \land B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \lor \sim B) \rightarrow \sim(A \land B)$

Método directo

A	B	~A	~B	$A \land B$	$\sim A \lor \sim B$	$\sim(A \land B)$	$(\sim A \lor \sim B) \rightarrow \sim(A \land B)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

La formula asociada es una tautología (no hay contraejemplos), entonces la deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \lor \sim B) \Rightarrow \sim(A \land B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \lor \sim B) \rightarrow \sim(A \land B)$

Método del contraejemplo

- 1. $\underbrace{(\sim A \lor \sim B) \rightarrow \sim(A \land B)}_{\text{Falso}}$
- 2. $\underbrace{(\sim A \lor \sim B)}_{\text{Verdad}} \rightarrow \underbrace{\sim(A \land B)}_{\text{Falso}}$
- 3. $(\underbrace{\sim A}_{V} \lor \underbrace{\sim B}_{F}) \rightarrow \sim(A \land B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{F} \lor \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \land B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{V} \lor \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \land B)$

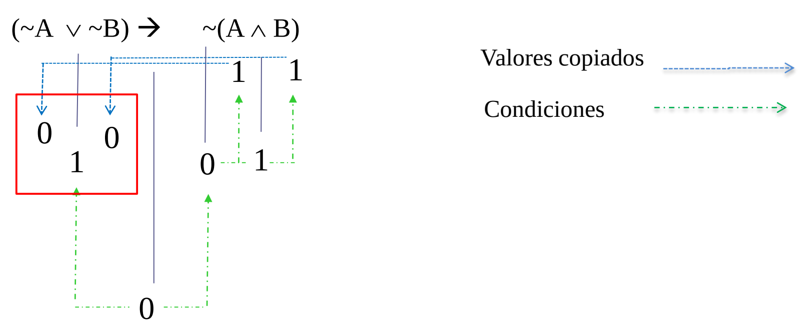
A=F, B=V, entonces $\sim(A \land B)$ es V
A=V, B=F, entonces $\sim(A \land B)$ es V
A=F B=F, entonces $\sim(A \land B)$ es V

La implicación no puede ser falsa, no hay contraejemplos, por lo que deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)

Método del contraejemplo. Otra representación



No hay un contraejemplo. La deducción es correcta

Comprobación de Deducciones

$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s \Rightarrow s$ **Método directo**

	p	q	r	s	p ∨ q	q → r	p → s
	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	1
	0	0	1	1	0	1	1
	0	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	1	0
	1	0	1	1	1	1	1
	1	1	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	1

Existe una interpretación en la que las premisas con V y la conclusión F
Deducción no correcta

Comprobación de Deducciones

$$\underbrace{p \vee q,\; q \rightarrow r,\; p \rightarrow s}_{1} \Rightarrow \underset{0}{s}$$

0 1 1 1 0 0

1 1 1

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una interpretación es un contraejemplo si:
premisas ***V*** *y conclusión* ***F***

Existe una interpretación que hace premisas V y conclusión F (contraejemplo):
p=0,q=1,r=1,s=0
Deducción incorrecta

Comprobación de Deducciones

- Analizamos la corrección de la deducción estudiando si la fórmula asociada es una tautología.

$$[p \rightarrow (q \vee r)]\;,\; (r \leftrightarrow s)\;,\; t \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\underbrace{([\overset{1}{p} \rightarrow (q \vee r)] \wedge (\overset{1}{r} \leftrightarrow \overset{1}{s}) \wedge \overset{1}{t})}_{1} \;\overset{0}{\rightarrow}\; \underbrace{(\overset{1}{p} \overset{0}{\rightarrow} \overset{0}{q})}_{0}$$

Intentamos identificar una interpretación para la cual el consecuente sea F, y el antecedente V. Para esto, *p* tiene que ser V *q* tiene que ser F. Para que el segmento proveniente de la primera premisa sea V, r tiene que ser V. Esto supone que s también deberá ser V. Si t fuese v, entonces todo el antecedente sería V, con lo que queda claro que existe un contraejemplo y NO ES UNA TAUTOLOGÍA

Comprobación de Deducciones

Refutación

- Otra vía potencial fundamentada en la misma idea que la del contraejemplo
- Negamos la conclusión, la unimos a las premisas y vemos si el conjunto resultante es satisfacible

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n \Rightarrow \mathbf{q}$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \mathbf{\sim q}$$

- La deducción es correcta si y sólo si la segunda expresión es insatisfacible.

Propiedades Formales de Cálculo Prop.

- El sistema formal de cálculo proposicional tiene como propiedades:
  - **Consistencia:** no es demostrable una fórmula y su negación
  - **Completitud:** toda fórmula válida es demostrable.
  - **Decidibilidad:** existe un procedimiento efectivo de comprobar si una fórmula es válida.

Teorema de Post: $\vdash B$ *es demostrable* $\leftrightarrow \models B$

Resumen Sem. Prop. Fórmulas

¿Fórmula válida?

Válida si tautología

Tautología si no contraejemplo

Contraejemplo si no interpret. falsa

Tabla de verdad

Coherencia de resultados

Método del Contraejemplo

Resumen Sem. Prop. Deducciones

¿Deducción correcta?

Correcta si **no** contraejemplo

$\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n \Rightarrow q}$

Si **no interpretación** tal que

$\mathbf{1 \quad 1 \ \ldots \ 1 \Rightarrow 0}$

Como deducción

- Tabla de verdad
- Met. Contraejemplo
- Refutación

Transformar en fórmula

$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q$

Deduc. correcta si fórmula

INSATISFACIBLE

Como fórmula

$\mathbf{(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q}$

Si **válida**, deducción **correcta**

Teoría Semántica en lógica de predicados

Introducción

- En la semántica proposicional se utilizan las tablas de verdad para fijar los conceptos de consecuencia lógica, validez y equivalencia.
- Para aprovechar estas mismas intuiciones basta considerar que ahora, para una fórmula cualquiera, existen las “tabla de verdad”, pero con infinitas líneas o interpretaciones distintas.
- Todos los esquemas utilizados en lógica de proposiciones siguen siendo válidos: así, una fórmula será consecuencia de otra si es verdadera en todas las líneas en que ésta lo es.
- Un conjunto de fórmulas será satisfacible si existe al menos una “línea” (una interpretación) donde coincidan en ser verdaderas.

Introducción

- Se construye en base a la atribución de significado a las fórmulas
- Al ser más complejas que en proposiciones, la evaluación requiere un mayor número de elementos
- Todos los esquemas utilizados en lógica de proposiciones (validez, satisfacibilidad etc.) siguen siendo válidos

Evaluación de Fórmulas

- La evaluación requiere lo siguiente:
  - Dominio de referencia, no vacío, para interpretar las letras de término (constantes, variables y funciones)
  - Definición del conjunto de significados a asignar a las fórmulas (**V** o **F**)
  - Definición semántica de conectivas $\sim$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ (iguales que en cálculo proposicional)

Evaluación de Fórmulas

- Interpretación de letras de término y función
  - A las constantes se les asigna un elemento concreto del dominio
  - A las variables se les puede asignar cualquier elemento del dominio
  - A las funciones se les puede asignar una aplicación concreta $f: D^n \rightarrow D$ de entre todas las posibles

$D = \{a,b,c\}$

x	f(x)
a	a
b	a
c	b

Evaluación de Fórmulas

- Definición de argumentos del predicado
  - A cada predicado se le asigna una relación concreta n-aria definida en el dominio de referencia
  - Una definición de predicado se establece mediante una correspondencia concreta

$D^n \rightarrow \{V,F\}$ o $\{1,0\}$

x	**y**	**P(x,y)**
a	a	V
a	b	V
a	c	F
b	a	V
b	b	F
b	c	F
c	a	V
c	b	F
c	c	V

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos definiciones de predicados P(x) y Q(x)

D={a}

x	P(x)	Q(x)
a	1	0

D={a,b}

x	P(x)	Q(x)
a	1	1
b	1	0

Evaluación de Fórmulas

- Definición semántica de cuantificadores
  - El significado de una fórmula cuantificada se obtiene de acuerdo con las siguientes consideraciones
    - A una fórmula con $\forall x$ se le asignará el valor de verdad **V** si para *todos* los elementos del dominio, la fórmula es verdadera (**V**).
    - A una fórmula con $\exists x$ se le asignará el valor de verdad **V** si para *algún* elemento del dominio la fórmula es verdadera (**V**). En caso contrario será falsa **F**.

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos definición de predicados cuantificados

D={a}

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∀xQ(x)
a	0	1	0	1

x	P(x)	Q(x)	∃xP(x)	∃xQ(x)
a	0	1	0	1

D={a,b}

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)
a	1	0	1	0
b	1	0		

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)
a	1	0	0	1
b	0	1		

x	P(x)	Q(x)	∃xP(x)	∀xQ(x)
a	1	0	1	0
b	1	0		

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplo: D^3 = {a,b,c}

x	y	P(x,y)
a	a	V
a	b	V
a	c	F
b	a	F
b	b	V
b	c	F
c	a	F
c	b	V
c	c	F

$\exists x \exists y P(x,y)$ **Verdadero**
$\forall x \exists y P(x,y)$ **Verdadero**
$\exists x \forall y P(x,y)$ **Falso**
$\forall x \forall y P(x,y)$ **Falso**

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 1:** **$\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \exists y Q(y)$**
- Proponemos la siguiente interpretación: D = {a,b,c}

Predicados básicos

x	P(x)	R(x)	Q(x)
a	1	0	0
b	1	1	0
c	0	0	0

Evaluamos por partes. ¿Si **$\exists y Q(y)$ es falso Podemos llegar a $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$** verdadero?

x	P(x)	R(x)	P(x)→R(x)	∀x(P(x)→R(x))
a	**1**	**0**	**0**	**No se cumple**
b	**1**	**1**	**1**	
c	**0**	**0**	**1**	

Por lo tanto el significado de la fórmula es **Verdadero** para la interpretación propuesta

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2:** **$P(x) \wedge (\forall x(R(x) \wedge P(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y))$**
- Proponemos la siguiente interpretación: D = {a,b}, y las variables libres, x=a e y=b.

Predicados básicos

x	y	Q(x,y)	P(x)	R(x)
a	a	**1**	**1**	**0**
a	b	**0**	**1**	**0**
b	a	**0**	**0**	**1**
b	b	**1**	**0**	**1**

Nota, variables libres en la fórmula:
P(a) vale 1 en esta interpretación
P(b) vale 0 en esta interpretación
Q(a,y) vale 1 o 0 dependiendo del valor de y

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2 (II):**

$$(P(a) \wedge (\forall x(R(x) \wedge P(b))) \rightarrow \exists y Q(a,y)$$

x	R(x)	R(x)∧P(b)	∀x(R(x)∧P(b))	P(a) ∧ ∀x(R(x)∧P(b))
a	0	0	0	0
b	1	0		

y	**Q(a,y)**	**∃yQ(a,y)**
a	1	Cierto
b	0	

Por lo tanto el significado de la fórmula es **Verdadero** para la interpretación propuesta

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2 (III): P(x) ∧ (∀x(R(x) ∧ P(y))→ ∃yQ(x,y))**
- Sea ahora esta otra interpretación en D = {a,b}, y las variables libres, x=a e y=b.

Predicados básicos

x	y	Q(x,y)	P(x)	R(x)
a	a	0	1	1
a	b	0	1	1
b	a	0	1	1
b	b	1	1	1

Nota, variables libres en la fórmula:
P(a) vale 1 en esta interpretación
P(b) vale 1 en esta interpretación
Q(a,y) vale 0 tanto para y=a como y=b

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2 (IV):**

$$(P(a) \wedge (\forall x(R(x) \wedge P(b))) \rightarrow \exists y Q(a,y)$$

x	R(x)	R(x)∧P(b)	∀x(R(x)∧P(b))	P(a) ∧ ∀x(R(x)∧P(b))
a	**1**	**1**	**1**	**1**
b	**1**	**1**		

y	**Q(a,y)**	**∃yQ(a,y)**
a	**0**	**0**
b	**0**	

Por lo tanto el significado de la fórmula es **Falso** para la interpretación propuesta

Definiciones Relacionadas con TS

- Una fórmula es *satisfacible* si tiene al menos una interpretación que la verifique
- Las interpretaciones que satisfacen una fórmula se denominan *modelos*
- Las interpretaciones que no satisfacen una fórmula se denominan *contraejemplos*

Fórmulas Semánticamente Válidas

- Una fórmula es *válida* en un dominio si cualquier interpretación que pueda plantearse en *ese* dominio satisface la fórmula
  - Una fórmula válida en un dominio D2 que incluye otro D1, es válida en D1
  - Una fórmula no válida en D1 no lo puede ser en D2
- Una fórmula es *semánticamente válida* cuando es válida en *cualquier* dominio
  - La comprobación de la validez semántica en predicados no es trivial
  - Consiste en buscar un dominio donde no sea válida

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 3:** dado el dominio {a} y la fórmula **$\forall x \forall y(P(x) \rightarrow P(y))$** averiguar si es satisfacible y válida en el dominio.

x	y	P(x)	P(x) →P(y)	∀y(P(x) →P(y))	∀x ∀y(P(x) →P(y))
a	a	**1**	**1**	**1**	**1**
		0	**1**	**1**	**1**

Es satisfacible y válida en D={a}

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo:** $\exists y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  $\forall y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  D = {a,b,c}

¿Satisfacibles?
¿Válidas en el dominio?
¿Semánticamente válidas?

- Responder a la segunda pregunta requeriría estudiar cualquier posible interpretación del predicado *P* en el dominio

x	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
a	1	1	1	0	0	0	1	0
b	1	1	0	1	0	1	0	0
c	1	0	1	1	1	0	0	0

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo (II):** $\exists y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  $\forall y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  D = {a,b,c}

¿Satisfacibles?
¿Válidas en el dominio?
¿Semánticamente válidas?

Interpretación P1

x	q	P(x)	$P(x) \rightarrow q$	$\forall x(P(x) \rightarrow q)$	$P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q)$
a	1	1	1	1	1
b		1	1		1
c		1	1		1
a	0	1	0	0	1
b		1	0		1
c		1	0		1

Ambas son satisfacibles (para la interpretación P1 son V)

▫ **Ejemplo (III):** $\exists y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

D = {a,b,c} $\forall y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

P	q	y	P(y)	$\forall x(P(x) \rightarrow q)$	$P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q)$	(1)	(2)
		a	V		V		
P_1	V	b	V	V	V	V	V
		c	V		V		
		a	V		V		
	F	b	V	F	V	V	V
		c	V		V		
		a	V		V		
P_2	V	b	V	V	V	V	V
		c	F		V		
		a	V		V		
	F	b	V	F	V	V	F
		c	V		F		
		a	V		V		
P_3	V	b	F	V	V	V	V
		c	V		V		
		a	V		V		
	F	b	F	F	F	V	F
		c	V		V		
		a	F		V		
P_4	V	b	V	V	V	V	V
		c	V		V		
		a	F		F		
	F	b	V	F	V	V	F
		c	V		V		

Fuente: Cuena, 1985

▫ **Ejemplo (IV):** $\exists y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

D = {a,b,c} $\forall y(P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q))$

(1) es válida en D
(2) no es válida en D

P	q	y	P(y)	$\forall x(P(x) \rightarrow q)$	$P(y) \lor \forall x(P(x) \rightarrow q)$	(1)	(2)
		a	F		V		
P_5	V	b	F	V	V	V	V
		c	V		V		
		a	F		F		
	F	b	F	F	F	V	F
		c	V		V		
		a	F		V		
P_6	V	b	V	V	V	V	V
		c	V		V		
	[illegible]	a	F	[illegible]	F	V	F
		a	V		V		
P_7	V	b	F	V	V	V	V
		c	F		V		
		a	V		V		
	F	b	F	F	F	V	F
		c	F		F		
		a	F		V		
P_8	V	b	F	V	V	V	V
		c	F		V		
		a	F		V		
	F	b	F	V	V	V	V
		c	F		V		

Fuente: Cuena, 1985

Evaluación de Deducciones

- Definición semántica de deducción correcta

- Dada una estructura deductiva $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ se define como correcta cuando no existe una interpretación que haga $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}$ verdadero y $\mathbf{q}$ falso

Deducción Semánticamente Correcta

- La definición de deducción semánticamente correcta es la misma que en proposiciones
  - Una estructura deductiva $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ se define como correcta cuando no hay una interpretación que haga $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}$ verdadero y $\mathbf{q}$ falso
  - O, lo que es lo mismo, $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ es válida si y solo si la fórmula $\mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge {\sim}q}$ es insatisfacible
  - Esto permite la comprobación a través de la búsqueda de contraejemplos.

Contraejemplos

- **Ejemplo:** $(A \rightarrow P(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x(P(x)))$ ¿Válida?

1. $\underbrace{(A \rightarrow P(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x(P(x)))}_{\text{Falso}}$
2. $\underbrace{(A \rightarrow P(y))}_{\text{Verdadero}} \rightarrow \underbrace{(A \rightarrow \forall x(P(x)))}_{\text{Falso}}$
3. $(\underbrace{A}_{V} \rightarrow \underbrace{P(y)}_{V}) \rightarrow (\underbrace{A}_{V} \rightarrow \underbrace{\forall x(P(x))}_{F})$

Tiene que haber algún predicado que no sea **V en P(x)**
para todos los elementos del dominio D, se puede pensar en un predicado
que sea **V** para algún valor de y ¿pero no para todos?
Salvo en dominios con un elemento, SI (contraejemplo a continuación)

Contraejemplos

- **Ejemplo (II):** $(A \rightarrow P(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x(P(x)))$

D = {a,b}

Variable libre y: y=a

A	x	P(x)	$\forall x$ P(x)	A $\rightarrow$P(y)	A $\rightarrow \forall x$ P(x)	(A $\rightarrow$P(y)) $\rightarrow$(A $\rightarrow \forall x$ P(x))
1	a	1	0	1	0	0
	b	0				

Se ha encontrado un contraejemplo en el dominio {a,b}, por tanto la fórmula no es válida

Contraejemplos

- **Ejemplo:** **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)** ¿Válida?

1. **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)**
   Falso
2. **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)**
   Verdadero — Falso
3. **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)**
   F F V F

Se puede pensar en un predicado P(y) que sea **falso** para algún valor de y pero NO para todos?

D={a,b}, Variable libre y=b

A	x	P(x)	P(y)→A	∃xP(x)	∃xP(x) →A	(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)
0	a	1	1	1	0	0
	b	0				

Se ha encontrado un contraejemplo en el dominio {a,b}, por tanto la fórmula no es válida

Propiedades Formales de Cálculo Pred

- El sistema de cálculo de predicados desarrollado tiene las siguientes propiedades:
  - **Consistencia:** no es posible demostrar una fórmula y su negación
  - **Completitud:** toda fórmula semánticamente válida es demostrable en el sistema axiomático
  - **Indecidibilidad:** no existe un procedimiento finito que permita decidir si una fórmula o deducción es demostrable