Universidad Carlos III de Madrid

# Cálculo Diferencial Aplicado

**Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática**

Solución Examen Final Ordinario

Enero 2013

| Nombre | | Grupo | |
|---|---|---|---|

**Problema 1 (1 punto)** Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$$

Se pide:

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

---

**Solución:**

i) Resolvemos la ecuación homogénea. Las raíces de la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$ son $\pm i$, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$
Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea y aplicando el principio de superposición probamos con $y_p = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$
Obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$. Luego la solución general de la ecuación es:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$$

ii) Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ obtenemos $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 2$ con lo que la solución pedida es:

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2}\cos(x) + 2\sin(x) + \tfrac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}}$$

---

**Problema 2 (1 punto)** Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}\,; \quad y(0) = 1\,; \quad y'(0) = 5$$

Se pide:

i) Hallar la solución del PVI aplicando la transformada de Laplace.

ii) Calcular $f(\frac{1}{4})$ sabiendo que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t)$

---

**Solución:**

**Problema 1 (1 punto)** Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$$

Se pide:

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x} \; ; \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \; ; \quad \lambda = \sqrt{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases} \quad \mathcal{B} = \{ \operatorname{sen}(x), \cos(x) \}$$

$$y_h(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) \; / \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_p = e^x(Ax+B) + Ce^{-x} \qquad y_p' = \underbrace{Ae^x + (Ax+B)e^x}_{(Ax+A+B)e^x} - Ce^{-x}$$

$$y_p'' = \underbrace{Ae^x + (Ax+A+B)e^x}_{(Ax+2A+B)e^x} + Ce^{-x}$$

$$(Ax+2A+B)e^x + Ce^{-x} + e^x(Ax+B) + Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}$$

$$(2Ax + 2A + 2B)e^x + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}$$

$$2A = 1 \; ; \quad A = 1/2$$

$$2C = 2 \; ; \quad C = 1$$

$$2A + 2B = 0 \; ; \quad 2A = -2A \; ; \quad B = -1/2$$

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) + (1/2\, x - 1/2)e^x + e^{-x} / C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

$$y'(x) = C_1 \cos(x) - C_2 \operatorname{sen}(x) + 1/2\, e^x + (1/2\, x - 1/2)e^x - e^{-x}$$

$$1 = \cancel{C_1 \operatorname{sen}(0)} + C_2 \cos(0) + (\cancel{1/2\, 0} - 1/2)e^0 + e^{-0}$$

$$1 = C_2 - 1/2 \cdot 1 + 1 \; ; \quad C_2 = 1 - 1 + 1/2 = 1/2$$

$$1 = C_1 \cos(0) - \cancel{C_2 \operatorname{sen}(0)} + 1/2\, e^0 + (\cancel{1/2\, 0} - 1/2)e^0 - e^0$$

$$1 = C_1 + \cancel{1/2} - \cancel{1/2} - 1 \; ; \quad C_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Sol: } y(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 1/2 \cos(x) + (1/2\, x - 1/2)e^x + e^{-x}}$$

**Problema 2 (1 punto)** Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 5$$

Se pide:

i) Hallar la solución del PVI aplicando la transformada de Laplace.

ii) Calcular $f(\frac{1}{4})$ sabiendo que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t)$

$$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}; \quad \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2F(s) = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}$$

$$\underline{s^2 F(s)} - s\,y(0) - y'(0) - 3(\underline{sF(s)} - y(0)) + \underline{2F(s)} = \frac{1}{s+4}$$

$$F(s)(s^2 - 3s + 2) - s - 5 + 3 = \frac{1}{s+4}, \quad F(s) = \frac{1 + s^2 + 4s + 2s + 8}{(s+4)(s^2 - 3s + 2)}$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s+4)(s^2 - 3s + 2)} \qquad s = -4$$

$$s = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s+4)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}$$

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s-1) + B(s+4)(s-1) + C(s+4)(s-2)$$

$$s = 2 \quad 4 + 12 + 9 = A \cdot 0 + B(6)(1) + C \cdot 0 \quad B = \frac{25}{6} = 25/6$$

$$s = 1 \quad 1 + 6 + 9 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(5)(-1); \quad C = \frac{16}{-5} = -16/5$$

$$s = -4 \quad 16 - 24 + 9 = A(-6)(-5) + B \cdot 0 + C \cdot 0; \quad A = 1/30$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$\frac{1}{s-(-4)}$$

$$\boxed{y(t) = 1/30 \cdot e^{-4t} + 25/6 \cdot e^{2t} - 16/5 \cdot e^{t}}$$ Solución.

ii) Calcular $f(\frac{1}{4})$ sabiendo que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t)$

$$f(t) = 6\left(\frac{e^{-4t}}{30} + \frac{25 \cdot e^{2t}}{6} - \frac{16 \cdot e^{t}}{5}\right) - 9\left(\frac{-4e^{-4t}}{30} + \frac{50e^{2t}}{6} - \frac{16e^{t}}{5}\right) + 3\left(\frac{+16e^{-4t}}{30} + \frac{100e^{2t}}{6} - \frac{16e^{t}}{5}\right);$$

$$f(1/4) = 16'63 - \overset{44'92}{83'23} + 70'69 = 4'\cancel{308} \text{ Mal ¿?}$$

i) Sea $F(s) = \mathcal{L}[y]$ la transformada de Laplace de la función incógnita $y$. Aplicando la transformada a la ecuación diferencial se tiene:

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-4t}] \Longrightarrow s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sF(s) - y(0)) + 2F(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$\Longrightarrow (s^2 - 3s + 2)F(s) = s + 2 + \frac{1}{s+4} = \frac{s^2 + 6s + 9}{s+4} \Longrightarrow$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s^2 - 3s + 2)(s+4)} = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$F(s) = -\frac{16}{5}\frac{1}{s-1} + \frac{25}{6}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{30}\frac{1}{s+4}$$

Aplicado la transformada inversa de Laplace se tiene la solución:

$$\boxed{y(t) = -\tfrac{16}{5}e^{t} + \tfrac{25}{6}e^{2t} + \tfrac{1}{30}e^{-4t}}$$

ii) Si multiplicamos la ecuación diferencial por 3 se tiene que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t) = 3e^{-4t}$ por tanto

$$\boxed{f(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3}{e}}$$

Nota: Otra forma, mucho más larga, de resolver este apartado consiste en hallar $f(t)$ a partir de la solución $y(t)$ encontrada en el apartado i)

---

**Problema 3 (1 punto)** Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t > 0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo $t$ tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

---

**Solución:**

i) Resolvemos el sistema calculando los autovalores $\lambda$ de la matriz de los coeficientes. Dichos autovalores son reales y repetidos: $\lambda = -2$. Un vector propio asociado es: $\vec{u} = (1, 2)^T$, donde el símbolo $^T$ indica transposición. Por tanto, la solución general del sistema viene dada por:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} e^{-2t} \right],$$

**Problema 3 (1 punto)** Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t > 0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo $t$ tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

$$|A - \lambda I| = 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$$

$$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \; ; \; \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = -2$$

Raices reales iguales.

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda t} \vec{v}_\lambda + C_2 e^{\lambda t} t \vec{v}_\lambda + C e^{\lambda t} \vec{w}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \; ; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; 4x - 2y = 0$$

$$y = \frac{4x}{2} = 2x$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \; 4x - 2y = 1$$

$$y = \frac{4x - 1}{2} = 2x - 1/2$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1/2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 8x_1 - 6x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} \\ C_1 2 e^{-2t} + C_2 2 e^{-2t} - \frac{C_2}{2} e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{-2t} \\ x_2'(t) = -4C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{-2t} - 4C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} \\ +8C_1 e^{-2t} + 8C_2 e^{-2t} - 12C_1 e^{-2t} - 12C_2 e^{-2t} + 3C_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{-2t} \\ -4C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-2t} \\ -4C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

¿?

donde $c_1$, $c_2$ son constantes arbitrarias y el vector $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 8 & -6-\lambda \end{pmatrix} \vec{w} = \vec{u}\,,$$

siendo $\lambda$ y $\vec{u}$ como antes. Resolviendo, tenemos $\vec{w} = (1/2, 1/2)^T$. Finalmente, haciendo las derivadas pertinentes, se comprueban los resultados.

ii) Teniendo en cuenta que

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0\,; \quad \text{y que} \quad \lim_{t\to+\infty} te^{-2t} = 0\,;$$

podemos concluir que, independientemente de los valores que toman las constantes $c_1$ y $c_2$, el comportamiento de la solución general cuando $t$ tiende a infinito es:

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{X}(t) = \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la condición inicial determina las constantes $c_1$, $c_2$ y que el comportamiento descrito es indepediente de ellas, concluimos que la posible condición inicial del sistema no puede afectar al comportamiento cuando $t$ tiende a infinito.

---

**Problema 4 (1 punto)** Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y+x}{y+x}y' &= \dfrac{2y}{x^2}(1+g)\,, \quad x \geq 1\,, \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

---

**Solución:**
Sustituimos $g(x)$ en el PVI y se obtiene:

$$-\frac{2y+x}{y+x}y' = \frac{2y}{x^2}(1+g) \Longrightarrow -\frac{2y+x}{y+x}y' = \frac{y}{x^2}\,(-x) \Longrightarrow \frac{-2y-x}{y+x}y' = -\frac{y}{x}$$

Se trata de una EDO de primer orden no lineal homogénea. Para resolverla aplicamos el cambio de variable $v = y/x$, con $xv' + v = y'$:

$$\frac{-2y-x}{y+x}y' = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{-\dfrac{2y}{x}-1}{\dfrac{y}{x}+1}y' = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{-2v-1}{v+1}(xv'+v) = -v \Longrightarrow xv' = -\frac{v^2}{2v+1} \Longrightarrow -\frac{2v+1}{v^2}v' = \frac{1}{x}$$

Resolviendo esta ecuación de variables separables, se tiene:

$$-2\ln|v| + \frac{1}{v} - \ln x = c$$

donde $c$ es una constante arbitraria. Finalmente, deshaciendo el cambio mediante $v = \dfrac{y}{x}$ y la condición inicial $y(1) = 1$, obtenemos una expresión implícita de $y(x)$,

$$\boxed{-2\ln\left|\tfrac{y}{x}\right| + \tfrac{x}{y} - \ln x = 1}$$

**Problema 4 (1 punto)** Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y+x}{y+x}y' = \dfrac{2y}{x^2}(1+g), & x \geq 1, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$-\frac{2y+x}{y+x}y' = \frac{2y}{x^2}(\cancel{1}\cancel{-1}-x/2)$; $-\frac{2y+x}{y+x}y' = -\frac{2\cancel{x}y}{\cancel{2}x^2}$;

$-\frac{2y+x}{y+x}y' = -y/x$ No lineal ( $y'+p(x)y=g(x)$ )

No variables separables ( $y' = \frac{F(x)}{G(y)}$ )

$(2y+x)x\,y' = -y^2 - yx$

$\underbrace{2yx+x^2}\,y' + \underbrace{y^2+yx}=0$ $\quad 2y+2x \neq 2y+x$ No exacta

$y' - \frac{2\frac{y}{x}+\cancel{\frac{x}{x}}^{1}}{\frac{y}{x}+\cancel{\frac{x}{x}}^{1}} = -\frac{y}{x}$; $u=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{-2u-1}{u+1}y' = -u$

$-u^2/(2u+1) = u'x$

$\frac{u^2\cancel{+u}-2u^2\cancel{-u}}{2u+1} = u'x$

$y=ux$; $y'=u'x+u$ $\quad -\frac{2u+1}{u+1}(u'x+u) = -u$; $\frac{u^2+u}{2u+1} - u = u'x$

$y' = -u\cdot\frac{u+1}{-2u-1} = \frac{-u^2-u}{-2u-1}$; $u'x = \frac{-u^2-u}{-2u-1} - u = \frac{-u^2\cancel{-u}+2u^2\cancel{+u}}{-2u-1}$

$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{-2u-1}$; $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2/_{-2u-1}} = \frac{-2u-1}{u^2}\,du$

$\int\frac{1}{x}dx = \int\frac{-2u-1}{u^2}du$; $\ln|x|+C = -2\ln(u)+\frac{1}{u}$

$-\int\frac{2u+1}{u^2}du = -\int\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}du = -\left(2\int\frac{1}{u}du + \underbrace{\int\frac{1}{u^2}du}\right)$

$u^2=0$; $u=0$ Doble $\qquad \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$

$2u+1 = Au^2+Bu \xRightarrow{du/dx} 2 = 2Au+B$

$u=0$; $2=A\cdot 0+B$; $B=2$

$\cancel{2}+1 = A+\cancel{B}$ $\quad A=1$

$$\frac{1}{u} - 2 \cdot \ln|u| - \ln|x| = C \quad ; \quad u = y/x$$

$$x/y - 2\ln|y/x| - \ln|x| = C \quad \text{para } y(1) = 1, \; C \in \mathbb{R}$$

$$1/1 - 2\ln|1/1| - \ln|1| = C$$

$$1 - \cancel{2}\ln|1| - \cancel{\ln|1|} = C \quad ; \quad 1 - \ln|1| = C = 1$$

$$\boxed{x/y - 2\ln|y/x| - \ln|x| = 1}$$

**Problema 5 (1 punto)** Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t>0\,, \;\; x \in (0,\pi) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad u(0,t)=0\,, \;\; u(\pi,t)=0\,, \;\; t>0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} \quad &: \quad u(x,0)=f(x)\,, \;\; x\in[0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $\lambda$ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0)=0\,; \, X(\pi)=0\,;$$

y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar los coeficientes $A_n\,, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \sin^3(x)$

**Nota:** Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L>0$ y $m\,,n\in\mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m\neq n \\ L/2\,, & m=n \end{cases}$
- $\sin(3x) = \sin(x)(3-4\sin^2(x))\,,\forall x\in\mathbb{R}\,;$

---

**Solución:**

i) Al aplicar separación de variables en la EDP se obtiene: $X''T = XT' \Longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, donde $\lambda$ es la constante de separación. Tomando el primer término de la igualdad $\frac{T'}{T} = -\lambda$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden $T' + \lambda T = 0$, cuya solución no nula es: $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ constante.

ii) La segunda igualdad del método de separación de variables, $\dfrac{X''}{X} = -\lambda$, da lugar a la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t)\not\equiv 0$$

**Problema 5 (1 punto)** Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \quad t>0, \quad x \in (0,\pi) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0, \quad t>0, \\ \text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0)=f(x), \quad x\in[0,\pi]. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \neq 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $\lambda$ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0)=0;\ X(\pi)=0;$$

y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx); \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R},$$

hallar los coeficientes $A_n, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \sin^3(x)$

**Nota:** Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L>0$ y $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L/2, & m=n \end{cases}$
- $\sin(3x) = \sin(x)(3-4\sin^2(x)), \forall x \in \mathbb{R};$

$X''(x)T(t) = T'(t)X(x)$

$\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$

cte de separación.

$T'(t) + \lambda T(t) = 0$

$\mu(x) = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$

i) $T(x)\,e^{\lambda t} = C;\ T(x) = Ce^{-\lambda t}$

$C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ii) $X''(x) + \lambda X(x) = 0;\ \lambda > 0 \qquad a^2 = \lambda$

$r^2 + a^2 = 0;\ r = \pm ia \qquad \mathcal{B} = \{\operatorname{sen}(ax), \cos(ax)\}$

$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$

$u(\pi,t) = 0 = X(\pi)T(t) \Rightarrow X(\pi) = 0$

$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(ax) + C_2\cos(ax)$

$X(0) = C_1\operatorname{sen}(0) + C_2\cos(0) = 0;\quad C_2 = 0$

$X(\pi) = C_1\operatorname{sen}(a\pi) + C_2\cos(a\pi) = 0;\ 0 = \underset{\neq 0}{C_1}\operatorname{sen}(a\pi);\ a\pi = n\pi$

$a = n;\ n = 1,2,3\ldots$

$X_n(x) = C_n\operatorname{sen}(nx);\ a = n \Rightarrow \lambda = n^2$

iii) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\operatorname{sen}(nx)e^{-n^2 t} \qquad f(x) = -\operatorname{sen}^3(x) = u(x,0)$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\operatorname{sen}(nx) \qquad u(x,0) = -\operatorname{sen}^3(x)$

$C_1\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad C_n = 0$

$C_1 = -\operatorname{sen}^2(x)$ ¿?

$$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \Longrightarrow X(\pi) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas cuando $\lambda > 0$, tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)\,; \qquad c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0\,;\quad X(\pi) = 0 \Longrightarrow c_2 \sin(a\pi) = 0\,,$ imponiendo que $c_2 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi) = 0 \Longrightarrow a\pi = n\pi \Longrightarrow a = n\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = n^2\,;\, n = 1, 2, 3, \cdots}$

iii) Aplicando la CI se tiene que:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = f(x) = \sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

donde hemos usado la segunda parte de la nota del enunciado del problema. Identificando términos de la serie con el lado derecho de la igualdad, concluimos que:

$$\boxed{A_1 = \tfrac{3}{4}\,; \qquad A_2 = 0\,; \qquad A_3 = -\tfrac{1}{4}\,; \qquad A_n = 0\,, \forall n \geq 4}$$

Otra forma mucho más larga de resolver este apartado consiste en hallar los coeficientes mediante la fórmula $A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$, que se obtiene usando la primera parte de la nota del enunciado, tomando $L = \pi$.

---

**Problema 6 (1 punto)** Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' &= 1 + \dfrac{y}{2}\,, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

al que se le aplica el siguiente esquema numérico (Euler mejorado):

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left( f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n)) \right)$$

i) Calcular, usando los pasos $h_1 = 0.2$ y $h_2 = 0.1$, las soluciones aproximadas $Y^{h_1}_{t=0.4}$, $Y^{h_2}_{t=0.4}$ de $y(0.4)$.

ii) Estimar el orden del método a partir de los resultados anteriores, sabiendo que la solución exacta del PVI es: $y(t) = 2(e^{t/2} - 1)$.

---

**Solución:**

i) Del esquema numérico $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\, f(t_n, Y_n) + f(t_n, Y_n + hf(t_n, Y_n))\,)$ y de la EDO del PVI obtenemos que $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left(1 + \frac{Y_n}{2} + 1 + \frac{1}{2}\left(Y_n + h(1 + \frac{Y_n}{2})\right)\right)$, con lo que $Y_{n+1} = Y_n + h\left(1 + \frac{Y_n}{2}\right) + \frac{h^2}{4}\left(1 + \frac{Y_n}{2}\right)$.

De la condición inicial obtenemos que $Y_0 = 0$ .
Para el paso $h = 0.2$ obtenemos $Y_1^{h_1} = 0.21$ , $Y_2^{h_1} = 0.44205$.
Para el paso $h = 0.1$ obtenemos $Y_1^{h_2} = 0.1025$ , $Y_2^{h_2} = 0.21025$ , $Y_3^{h_2} = 0.32353$ , $Y_4^{h_2} = 0.44261$.

ii) Calculamos $E^{h_1}_{t=0.4} = \left|Y^{h_1}_{t=0.4} - y(0.4)\right| = 7.55516 \times 10^{-4}$ y $E^{h_2}_{t=0.4} = \left|Y^{h_2}_{t=0.4} - y(0.4)\right| = 1.96078 \times 10{-}4$. Entre los pasos $h_1$ y $h_2$ hay un factor de reducción $q = 2$. Entonces tenemos que

$$E^{h_2}_{t=0.4} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{2}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=0.4}}{2^p}$$

donde $p$ es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 1.92$ , con lo que la estimación del orden del método es $p = 2$ .