ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

MATEMÁTICA DISCRETA

Junio 2006

Normas generales:

1. No se permite el uso de libros, apuntes, **calculadoras** ni cualquier tipo de dispositivo electrónico
2. Es necesario **justificar** todas las afirmaciones

Parte A: Esta parte consta de cuatro preguntas y es **obligatoria** para todos los alumnos. Su puntuación total es de **ocho puntos**.

Problema 1 (2 puntos)

(a) *¿Cuántas cadenas de 10 caracteres del alfabeto $\{a, b, c\}$ contienen exactamente tres aes o exactamente cuatro bes?*

(b) *¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de la palabra anglosajona PEPPERCORN si se utilizan todas las letras? ¿Cuántas de estas cadenas empiezan y terminan por la letra P?*

SOLUCIÓN.

El número de cadenas que contienen exactamente tres $a$es es simplemente

$$N_{3a} = 2^7 \binom{10}{3} = 15360$$

ya que puedo colocar las tres $a$es en las 10 casillas de $\binom{10}{3}$ maneras distintas y, una vez hecho ésto, puedo colocar las otras dos letras en las 7 casillas restantes de manera independiente, luego hay 2^7 maneras de hacerlo. Aplicando el principio del producto se llega a la fórmula final.

Usando el mismo razonamiento se obtiene que el número de cadenas que contienen exactamente cuatro $b$es es simplemente

$$N_{4b} = 2^6 \binom{10}{4} = 13440$$

El número de cadenas con exactamente tres $a$es y cuatro $b$es es simplemente

$$N_{3a+4b} = \frac{10!}{3!\,4!\,3!} = 4200$$

ya que en las tres casillas restantes debe ir colocada la letra c. Luego son permutaciones con repetición.

La solución pedida se obtiene aplicando el principio de inclusión-exclusión

$$\begin{aligned} N &= N_{3a} + N_{3b} - N_{3a+3b} \\ &= 2^7 \binom{10}{3} + 2^6 \binom{10}{4} - \frac{10!}{3!\,4!\,3!} \\ &= 24600 \end{aligned}$$

La palabra PEPPERCORN contiene tres Pes y dos ocurrencias de las letras E y R. El resto de las letras sólo aparecen una única vez. Luego, el número de palabras distintas de 10 letras que se pueden formar con estas letras está dado por las permutaciones con repetición

$$N = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151200$$

El número de estas palabras que empiezan y acaban por P también viene dado por permutaciones con repetición: si fijamos el comienzo y el final de la palabra, nos quedan 8 letras todas distintas salvo la E y la R que aparecen dos veces cada una. Luego,

$$N = \frac{8!}{2!\,2!} = 10080$$

□

Problema 2 (2 puntos)
Sea $\mathcal{R}$ la relación definida sobre $\mathbb{N}$ como sigue

$$x\mathcal{R}y \iff \frac{x}{y} = 2^n \quad \textit{para algún } n \in \mathbb{Z}$$

(a) *Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia*

(b) *Describir las clases de equivalencia y demostrar que existe una función biyectiva entre el conjunto cociente $\mathbb{N}/\mathcal{R}$ y el conjunto de los naturales impares.*

SOLUCIÓN.

Para demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia hay que demostrar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva:

- Reflexiva: para todo $x \in \mathbb{N}$, $x/x = 1$, luego $n = 0$ y $x\mathcal{R}x$
- Simétrica: si $x\mathcal{R}y$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x/y = 2^n$. Luego, $y/x = 2^{-n}$ con $-n \in \mathbb{Z}$. Luego, $y\mathcal{R}x$.
- Transitiva: Si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x/y = 2^n$ e $y/z = 2^m$. Luego, $x/z = 2^\ell$. Como $\ell = n + m \in \mathbb{Z}$, entonces se sigue que $x\mathcal{R}z$.

A cada número natural $n \in \mathbb{N}$ le corresponde una única descomposición en factores primos

$$n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{n_i}, \qquad p_i \geq 2 \text{ primo y } n_i \geq 1$$

Las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ estarán formadas por aquellos números cuya descomposición en factores primos difiera sólo en la potencia asociada a $p_1 = 2$. Es decir,

$$[k]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{N} \mid y = k2^n, n \in \mathbb{N}\}$$

donde k es un número impar. Luego el conjunto cociente se escribirá como

$$\mathbb{N}/\mathcal{R} = \{[2p-1]_{\mathcal{R}} \mid p \in \mathbb{N}\}$$

Luego a cada elemento del conjunto cociente le corresponde un único número impar $n \in \mathbb{N}$ y viceversa. □

Problema 3 (2 puntos)
Encontrar el menor número $b \in \mathbb{N}$ que satisfaga $7^{100} \equiv b \pmod{29}$

SOLUCIÓN.
Primero demostramos que 29 es primo: si fuese compuesto debería ser divisible por algún primo $n \leq \sqrt{29}$. Es decir, por 2, 3, 4 ó 5. Claramente no es divisible por ninguno de ellos, luego es primo.

El Teorema pequeño de Fermat nos asegura que $7^{28} \equiv 1 \pmod{29}$. Como $100 = 28 \cdot 3 + 16$, entonces obtenemos que

$$7^{100} \equiv 7^{16} \pmod{29}$$

Para simplifica 7^{16} nos fijamos en que

$$7^2 = 49 \equiv 20 \pmod{29} \equiv -9 \pmod{29}$$

Luego,

$$7^4 \equiv 81 \pmod{29} \equiv -6 \pmod{29}$$

ya que $81 \bmod 29 = 23$ y $23 \equiv -6 \pmod{29}$. El siguiente paso es

$$7^8 \equiv 36 \pmod{29} \equiv 7 \pmod{29}$$

y finalmente

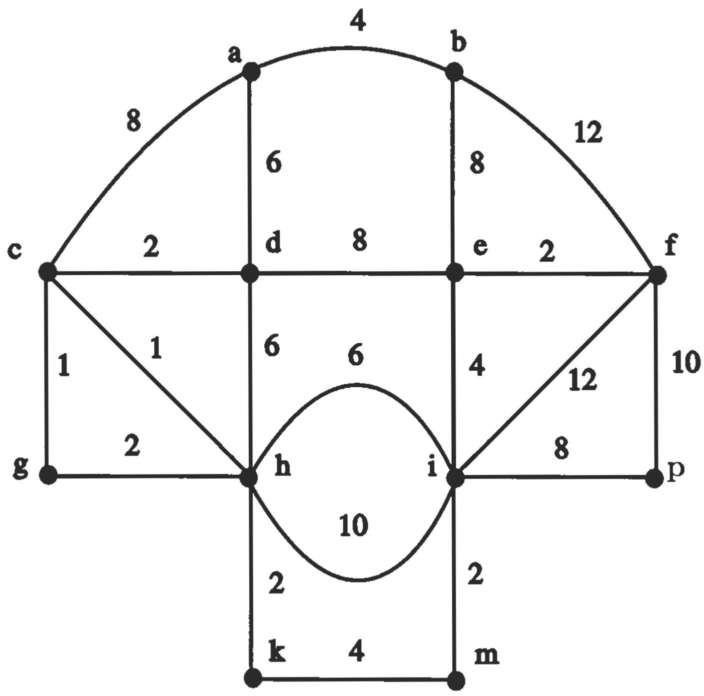
$$7^{16} \equiv 49 \pmod{29} \equiv 20 \pmod{29}$$

Luego, la solución pedida es

$$\boxed{b = 20}$$

□

Problema 4 (2 puntos)
Considérese el grafo G siguiente:



(a) *¿Es G un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo?*

(b) *Hallar el número de regiones, vértices y aristas del grafo dual G^*.*

(c) *¿Es G euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible.*

(d) *Hallar el árbol A generador mínimo de G y el peso total de dicho árbol.*

(e) *¿Cuántas coloraciones propias con 3 colores se pueden obtener en el árbol A?*

SOLUCIÓN.

No es un grafo simple, porque hay dos aristas entre los vértices h e i. Es plano, ya que su representación gráfica no tiene aristas que se crucen. No es bipartito porque tiene ciclos de longitud tres (por ejemplo, c-d-a-c). No es completo porque no todos los vértices están conectados entre sí (por ejemplo, los vértices a y m no son adyacentes). No es regular porque no todos los vértices tiene el mismo grado (por ejemplo, el grado de a es 3 y el de d, 4). Es conexo, porque dado cualquier par de vértices, existe un camino elemental que los une.

Al ser G plano, podemos definir su dual G^*. El número de vértices, aristas y regiones del grafo original es

$$|V| = 12, \quad |E| = 21, \quad R = 11$$

Estas cantidades satisfacen la ecuación de Euler: $|V| - |E| + R = 12 - 21 + 11 = 2$. Luego, las correspondientes cantidades para el grafo dual son

$$|V^*| = R = 11, \quad |E^*| = |E| = 21, \quad R^* = |V| = 12$$

No es euleriano porque hay vértices de grado impar (a y b). Sin embargo, es semi-euleriano ya que sólo hay dos vértices con grado impar. Luego admite un camino euleriano que comienza por ejemplo en a y acaba en b. Este camino de puede obtener mediante la modificación del algoritmo de Fleury: $a \to c \to d \to h \to c \to g \to h \xrightarrow{6} i \to m \to k \to h \xrightarrow{10} i \to f \to p \to i \to e \to f \to b \to e \to a \to b$, donde $h \xrightarrow{p} i$ significa la arista de peso p que une h con i.

El árbol de peso mínimo lo obtenemos por ejemplo usando el algoritmo de Kruskal. El resultado $A = (V, F)$ lo podemos escribir dando el conjunto F de las aristas del árbol

$$F = \{\{c,g\},\{c,h\},\{c,d\},\{h,k\},\{i,m\},\{e,f\},\{e,i\},\{k,m\},\{a,b\},\{a,d\},\{i,p\}\}$$

Hay $|F| = 11$ aristas, como es de esperar ($|F| = |V| - 1$). El peso total de este árbol es

$$\omega = \sum_{i \in F} \omega_i = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 8 = 36$$

El número de coloraciones propias con q colores de un árbol A de n vértices es $P_A(q) = q(q-1)^{n-1}$. Luego, como $q = 3$ y $n = 12$, entonces $P_A(3) = 3 \cdot 2^{11} = 6144$. □

Parte B: Esta parte consta de una pregunta, su puntuación total es de **dos puntos** y es **voluntaria**. Los alumnos que entreguen esta parte **renuncian** expresamente a la calificación obtenida en la **evaluación continua**.

Problema 5 (2 puntos)
Demostrar de dos maneras distintas la siguiente proposición

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $23^{3n+2} - 70n + 3$ *es múltiplo de* 7

(a) Usando el principio de inducción

(b) Sin usar el principio de inducción.

SOLUCIÓN.

Usando el principio de inducción, debemos primero comprobar que el paso base $n = 1$ se cumple

$$n = 1 \Rightarrow 23^5 - 70 + 3 \equiv 23^5 + 3 \pmod 7 = 2^5 + 3 = 32 + 3 = 35 \equiv 0 \pmod 7$$

ya que $23 \equiv 2 \pmod 7$. También se podría haber hecho la multiplicación $23^5 + 3 = 6436346$.

Ahora suponemos que $23^{3k+2} - 70k + 3 \mod 7 = 0$ es cierto para algún $k \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario y queremos demostrar que también es cierto para $k+1$, es decir, que $23^{3(k+1)+2} - 70(k+1) + 3 \mod 7 = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
23^{3(k+1)+2} - 70(k+1) + 3 &= 23^{3k+5} - 70(k+1) + 3 \\
&\equiv 23^{3k+5} + 3 \pmod 7 \\
&\equiv 2^{3k+5} + 3 \pmod 7 \\
&\equiv 2^3 \cdot 2^{3k+2} + 3 \pmod 7 \\
&\equiv 2^3 \cdot (2^{3k+2} + 3) - (2^3 - 1) \cdot 3 \pmod 7
\end{aligned}$$

ya que $23 \equiv 2 \pmod 7$. Por la hipótesis de inducción, $2^{3k+2} + 3 \mod 7 = 0$. Además, $2^3 - 1 = 7 \equiv 0 \pmod 7$.

Luego, se sigue que $23^{3(k+1)+2} - 70(k+1) + 3 \mod 7 = 0$. El principio de inducción nos garantiza que la proposición

$$\text{Para todo } n \in \mathbb{N}, \quad 23^{3n+2} - 70n + 3 \quad \text{es múltiplo de } 7$$

se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

La demostración de dicha proposición de manera directa (sin usar el principio de inducción) es parecida: como $23 \equiv 2 \pmod 7$, entonces

$$\begin{aligned} 23^{3k+2} - 70k + 3 \pmod 7 &\equiv 2^{3k+2} + 3 \pmod 7 \\ &\equiv 8^k \cdot 4 + 3 \pmod 7 \\ &\equiv 4 + 3 \pmod 7 \\ &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

ya que $8 \equiv 1 \pmod 7$. □
