Tema 3
Probabilidad

Carlos Montes – uc3m

1. Definiciones y notación

- ***Experimento aleatorio***

observación de una propiedad de interés que proporciona distintos resultados, sin que pueda precisarse cuál de ellos aparecerá.

Para su análisis debe conocerse el conjunto de todos los resultados posibles: espacio muestral (*E, Ω)*

1. Definiciones y notación

- ***Suceso elemental (A, B)***

cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio que verifican:

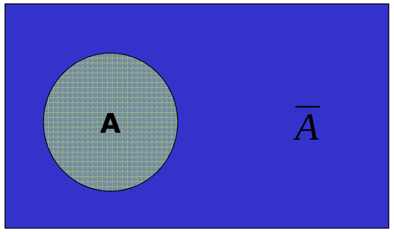
- Siempre ocurre alguno de ellos.
- Son mutuamente excluyentes.

- ***Suceso compuesto***

aquel construido a partir de uniones de sucesos elementales.

• ***Espacio muestral (E)***
unión de todos los sucesos elementales.

• **Suceso contrario o complementario de A** $(\overline{A})$
suceso que ocurre cuando no ocurre A.

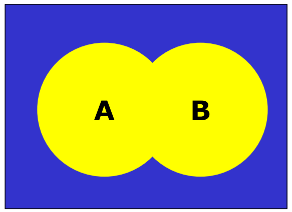


• **Suceso seguro**
el que siempre se observa.

• ***Suceso imposible (∅)***
suceso que nunca se puede observar
(está fuera del espacio muestral)

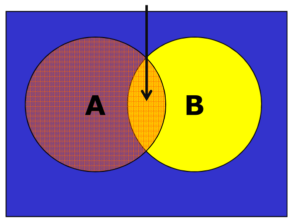
• **Suceso unión de A y B**
es el que se observa si ocurre
el suceso A o el suceso B.

$$A \bigcup B$$



• **Suceso intersección de A y B**
es el que se observa si sucede
A y B a la vez.

$$A \bigcap B$$

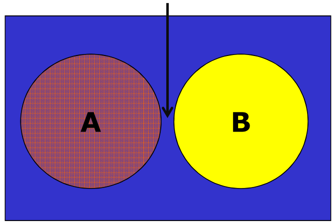


1. Definiciones y notación

- ***Sucesos mutuamente excluyentes o disjuntos***

Sucesos sin elementos comunes

$$A \cap B = \varnothing$$



1. Definiciones y notación

La unión e intersección verifican las siguientes propiedades:

- *Conmutativa*
- *Asociativa*
- *Distributiva*
- *Idempotente*
- *Elemento neutro*
- *Simplificación*
- *Absorción*

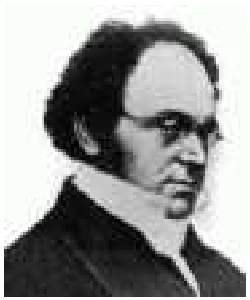
ÁLGEBRA
DE
BOOLE

1. Definiciones y notación

Leyes de De Morgan

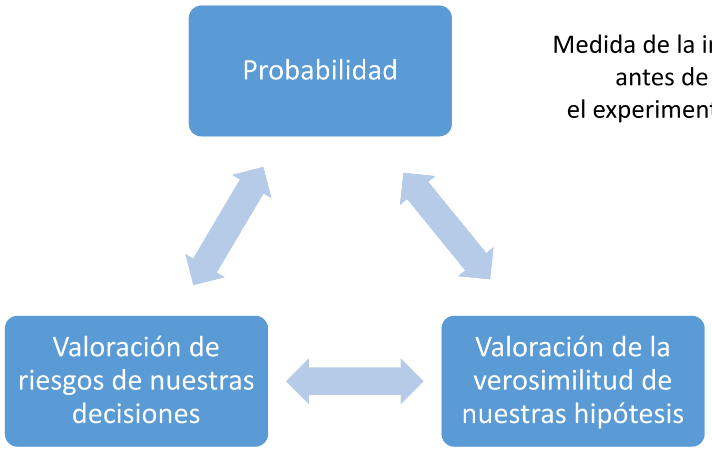
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



Augustus De Morgan
(1806-1871)

2.1. Probabilidad. Definición clásica



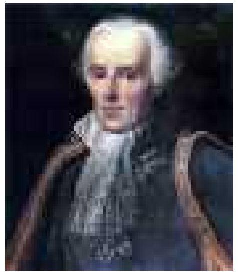
Medida de la incertidumbre
antes de realizar
el experimento aleatorio.

2.1. Probabilidad. Definición clásica

$$P(A)=\frac{n^{o}\,de\;casos\;\;favorables}{n^{o}\,de\;casos\;\;posibles}$$

si todos los casos son
igualmente posibles
(equiprobables)

(1812)



Pierre Simon Laplace
(1749-1827)

2.1. Probabilidad. Definición clásica

Limitaciones:

- Requiere que todos los casos sean igualmente probables.

- *Requier*e que el número de casos posibles sea finito.

2.2. Probabilidad. Definición frecuentista

Probabilidad de un suceso
es su frecuencia relativa de aparición
si repetimos indefinidamente
el experimento.

Richard von Mises
(1883-1953)

2.2. Probabilidad. Definición frecuentista

Pero la experimentación “indefinida” es imposible…

3. Propiedades fundamentales

$$1)\quad 0 \le P(A) \le 1$$

$$2)\quad P(E) = 1$$

$$3)\quad P(\emptyset) = 0$$

$$4)\quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

3. Propiedades fundamentales

$$5)\quad Si\ \ A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

4. Probabilidad condicionada

Es la probabilidad de un suceso sabiendo (condicionada a) la ocurrencia de otro suceso.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

ej. 7

Sean A y B dos sucesos tales que la probabilidad de que ocurra A es 0.6, la de que ocurra A o B es igual a 0.8 y, si se sabe que ha ocurrido B, la probabilidad de que ocurra A es igual a 0,5. ¿Puede determinarse de forma única el valor de P(B)? En caso afirmativo, determínese dicho valor, y, en caso negativo, justificar por qué no es posible su determinación única.

$P(A) = 0.6 \qquad P(A \cup B) = 0.8 \qquad P(A|B) = 0.5$

$$P(A \cup B) = 0.8 = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = 0.5 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A \cap B) = 0.5 \cdot P(B)$$

$$0.8 = 0.6 + P(B) - 0.5 \cdot P(B)$$

$$0.2 = 0.5 \cdot P(B) \qquad P(B) = {}^{0.2}/_{0.5} = 0.4$$

5. Independencia e incompatibilidad

Dos sucesos A y B son ***independientes***
si el conocimiento de la ocurrencia de uno
no modifica la probabilidad del otro.

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

5. Independencia e incompatibilidad

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si son independientes:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

condición de independencia

5. Independencia e incompatibilidad

Dos sucesos A y B son incompatibles
si no pueden verificarse simultáneamente.

$$A \cap B = \varnothing$$

LOS SUCESOS INCOMPATIBLES
NO SON INDEPENDIENTES

5. Independencia e incompatibilidad

Sean A y B incompatibles:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

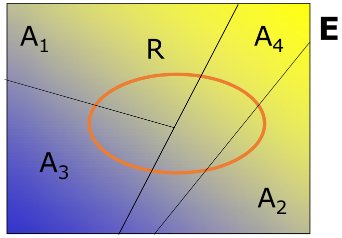
Si uno se da,
el otro no puede darse.

6. Teorema de la probabilidad total

Sea A_1, A_2… A_k una partición del espacio muestral E:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \backslash A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = E$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j$$

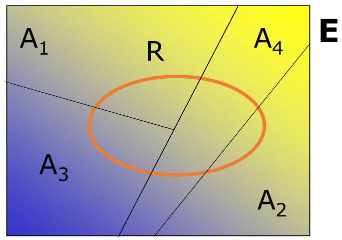


Sea R un suceso cualquiera de ese espacio muestral:

6. Teorema de la probabilidad total

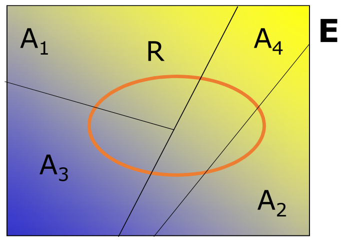
$$P(R) = P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2) + \cdots + P(R \cap A_k)$$

$$P(R) = P(R|A_1)P(A_1) + P(R|A_2)P(A_2) + \cdots + P(R|A_k)P(A_k)$$



6. Teorema de la probabilidad total

$$\boldsymbol{P(R) = \sum_{1}^{k} P(R|A_i) \cdot P(A_i)}$$



ej. 9

Una empresa ha adquirido memorias USB a dos proveedores diferentes, Al proveedor A se le compran 1000 memorias con un porcentaje de defectuosos del 4%. Al proveedor B se le compran 500 memorias con un porcentaje de defectuosos del 1%. Con estas condiciones, se pide:

a) Probabilidad de elegir una memoria defectuosa entre todas las unidades adquiridas.

b) Se ha elegido una memoria que resulta defectuosa. Calcule la probabilidad de que sea del proveedor B.

ej. 7

D: “memoria defectuosa”
A: “memoria del proveedor A”
B: “memoria del proveedor B”

$$P(A) = \frac{1000}{1500} = 0.6666$$

$$P(B) = \frac{500}{1500} = 0.3333$$

$P(D|A) = 0.04$
$P(D|B) = 0.01$

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) =$$

$$= 0.04\frac{1000}{1500} + 0.01\frac{500}{1500} = 0.03$$

7. Teorema de Bayes

Se aplica para calcular la probabilidad de cada una de las posibles causas, una vez observado el efecto.

$$P(A_i \backslash R) = \frac{P(R \backslash A_i) \cdot P(A_i)}{P(R)}$$

7. Teorema de Bayes

$$P(A_i \mid R) = \frac{P(R \cap A_i)}{P(R)} \qquad P(R \mid A_i) = \frac{P(R \cap A_i)}{P(A_i)}$$

$$P(A_i \mid R) \cdot P(R) = P(R \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

$$P(A_i \mid R) = \frac{P(R \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(R)}$$

Una empresa ha adquirido memorias USB a dos proveedores diferentes, Al proveedor A se le compran 1000 memorias con un porcentaje de defectuosos del 4%. Al proveedor B se le compran 500 memorias con un porcentaje de defectuosos del 1%. Con estas condiciones, se pide:

a) Probabilidad de elegir una memoria defectuosa entre todas las unidades adquiridas.

b) Se ha elegido una memoria que resulta defectuosa. Calcule la probabilidad de que sea del proveedor B.

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{\boxed{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}}$$

$P(D)$

$$= \frac{0.01 \cdot \frac{500}{1500}}{0.03} = 0.11$$

En el fondo,
la teoría de la probabilidad
es solo sentido común
expresado con números.

Pierre Simon Laplace