

Grupo ARCOS

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

Tema 2 (I)

Representación de la información

Estructura de Computadores
Grado en Ingeniería Informática



Contenidos

1. Introducción

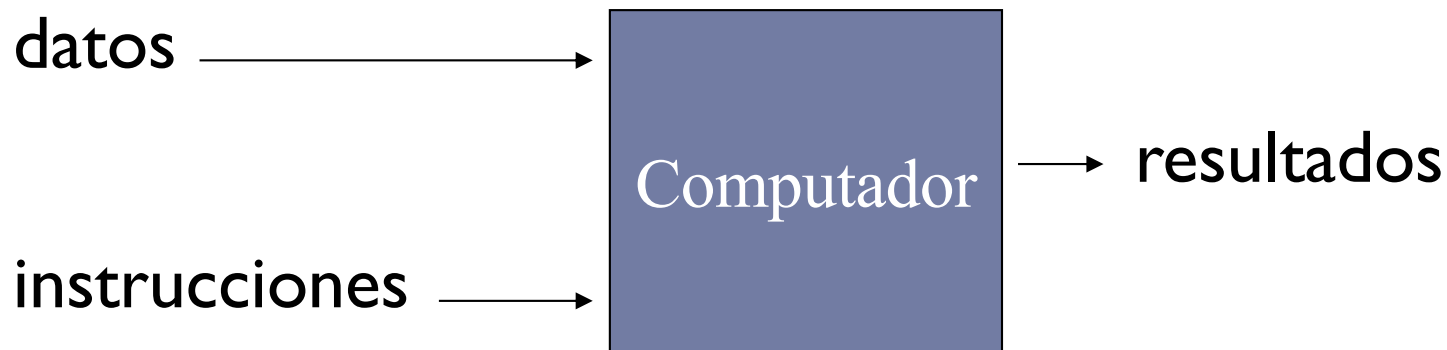
1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas: caracteres y cadenas
2. Numéricas: naturales y enteras
3. Numéricas: coma fija
4. Numéricas: coma flotante: estándar IEEE 754

Introducción: computador

- ▶ Un computador es una máquina destinada a procesar datos.



- ▶ Se aplican unas instrucciones y se obtiene unos resultados

Introducción: computador

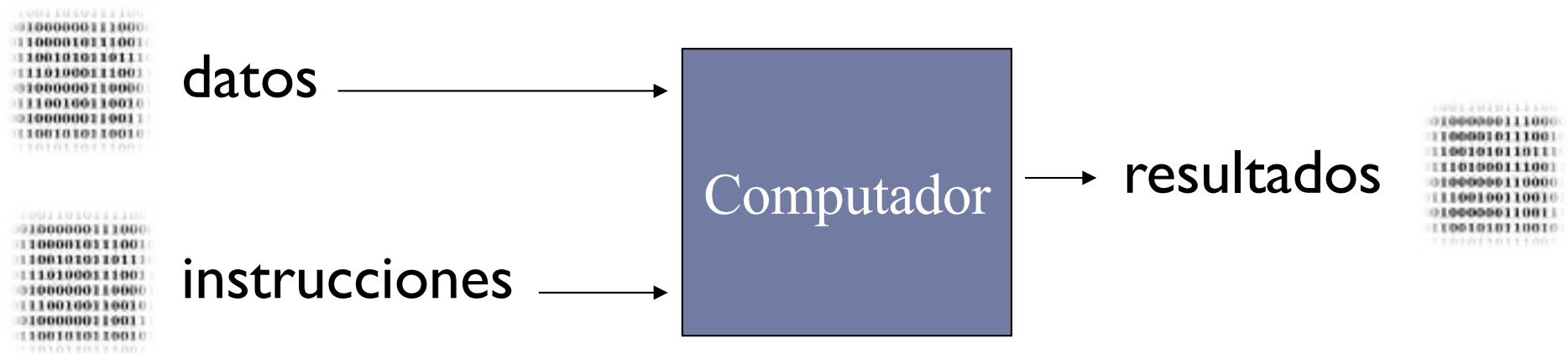
- ▶ Un computador es una máquina destinada a procesar datos.



- ▶ Se aplican unas instrucciones y se obtiene unos resultados
- ▶ Los datos/información pueden ser de **distintos tipo**

Introducción: computador

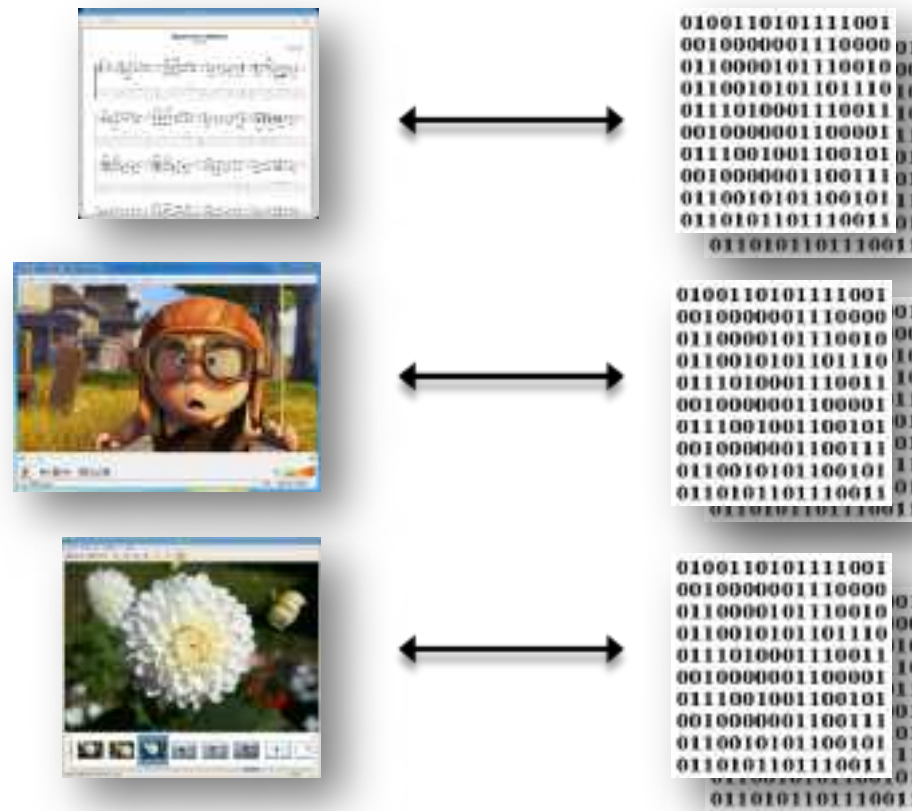
- ▶ Un computador es una máquina destinada a procesar datos.



- ▶ Se aplican unas instrucciones y se obtiene unos resultados
- ▶ Los datos/información pueden ser de **distintos tipo**
- ▶ Un computador solo usa una representación: **binario**.

Introducción: representación de la información

- El uso de una **representación** permite transformar los distintos tipos de información en binario (y viceversa)




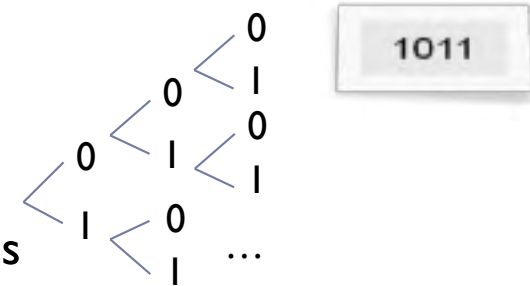
Necesitaremos...


- Conocer posibles representaciones:

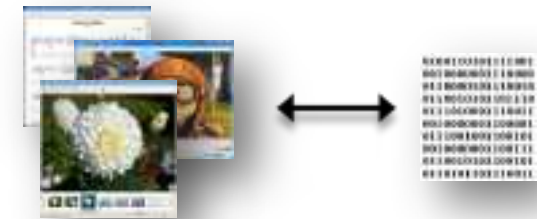


Introducción: características de la información

- ▶ Un computador maneja un conjunto finito de valores
 - ▶ Tipo binario (dos estados)
 - ▶ Finito (representación acotada)
 - ▶ N° de bits de palabra del computador
 - ▶ Con n bits se pueden codificar 2^n valores distintos
- 

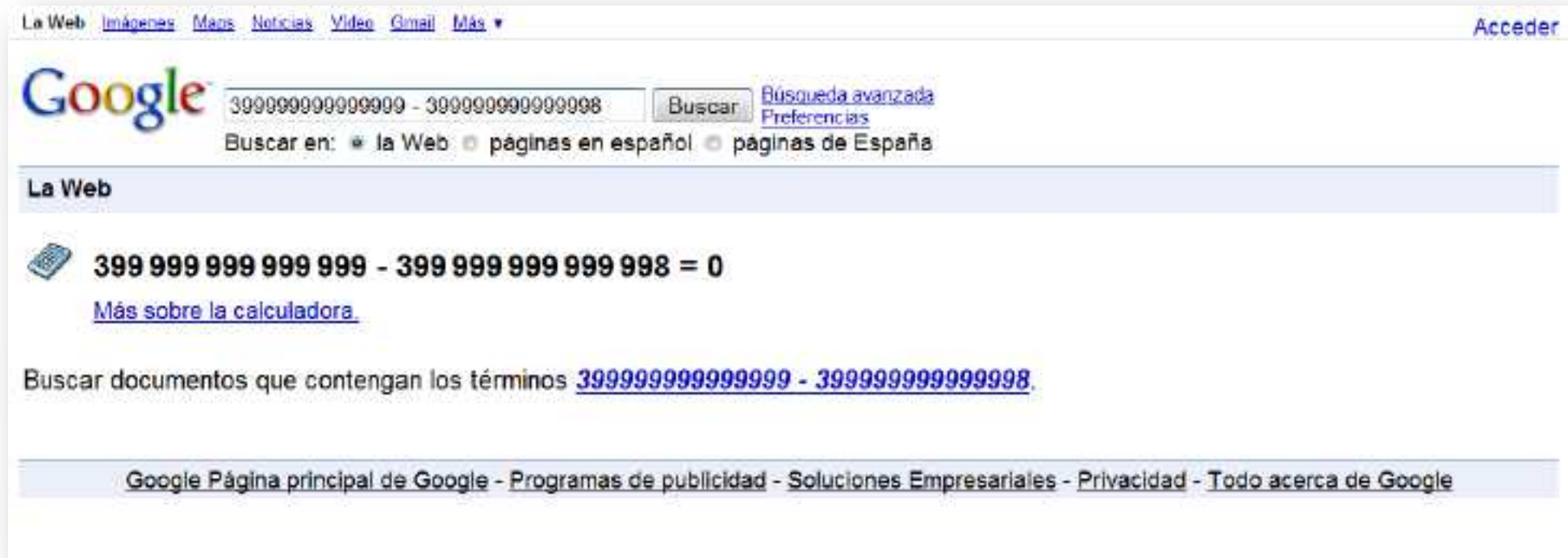


- ▶ Hay algunos tipos de información que son infinitos
 - ▶ Imposible representar todos los valores de los números naturales, reales, etc.
- 
- Three small, overlapping images are positioned in the bottom right corner of the slide. The top image shows a document or a webpage. The middle image shows a person's face. The bottom image shows a close-up of a white flower.



- ▶ La representación elegida tiene **limitaciones**

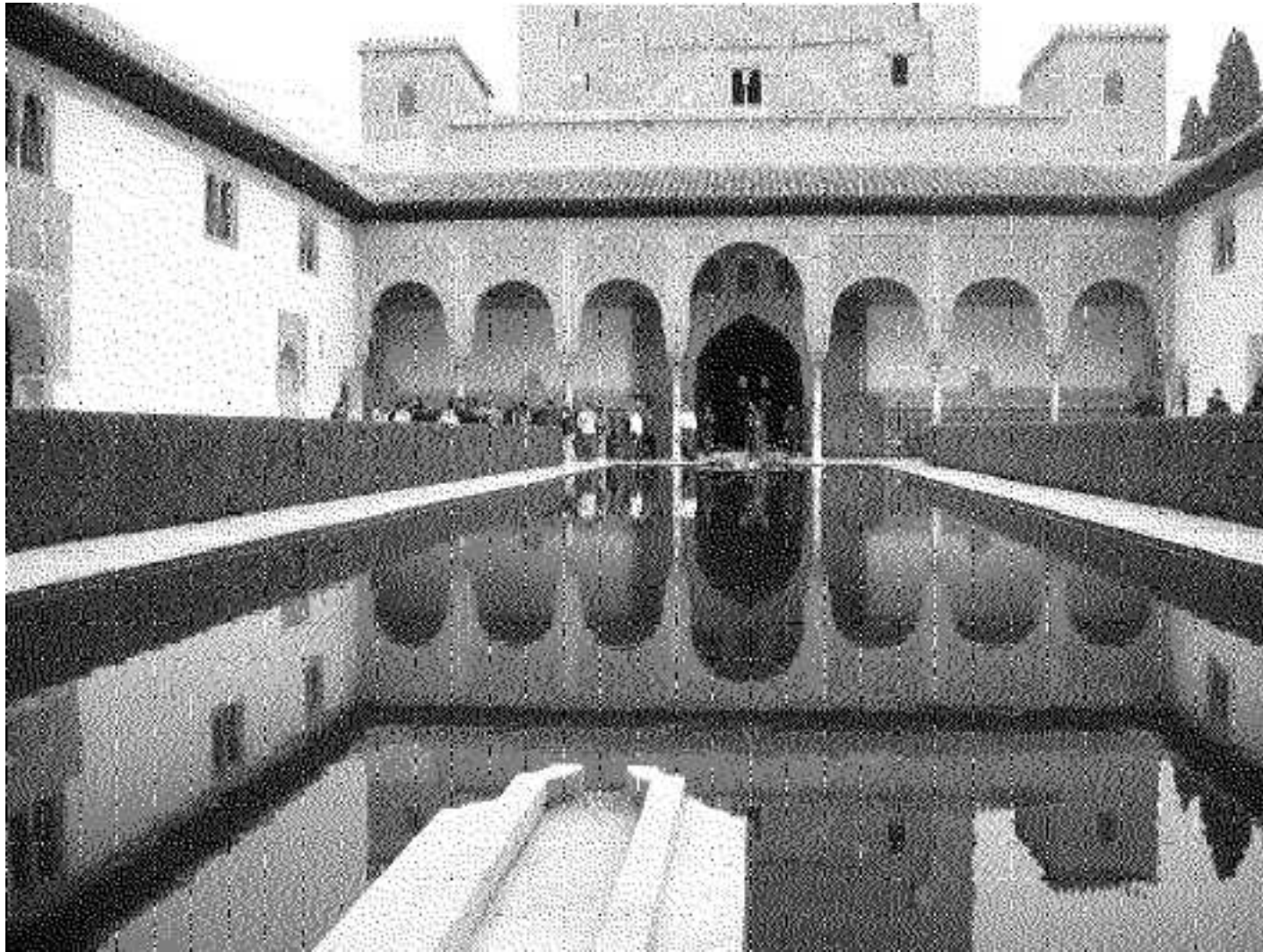
Ejemplo 1: la calculadora de Google con 15 dígitos...



<http://www.20minutos.es/noticia/415383/0/google/restar/error/>

Ejemplo 2: la profundidad de color...

1 bit	2 colores
4 bits	16 colores
8 bits	256 colores



<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/imagen/conceptos.html>

Ejemplo 2: la profundidad de color...

1 bit	2 colores
4 bits	16 colores
8 bits	256 colores



<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/imagen/conceptos.html>

Ejemplo 2: la profundidad de color...

1 bit	2 colores
4 bits	16 colores
8 bits	256 colores



<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/imagen/conceptos.html>

Necesitaremos...

- ▶ Conocer **posibles representaciones**:



- ▶ Conocer las **características** de las mismas:

- ▶ Limitaciones



Necesitaremos...

- ▶ Conocer **posibles representaciones**:

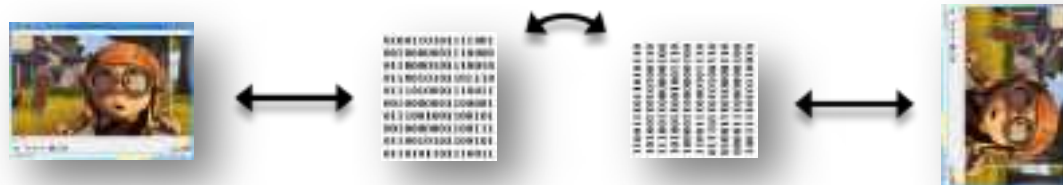


- ▶ Conocer las **características** de las mismas:

- ▶ Limitaciones



- ▶ Conocer **cómo operar** con la representación:



Contenidos

1. **Introducción**

1. Motivación y objetivos
2. **Sistemas posicionales**

2. **Representaciones**

1. Alfanuméricas: caracteres y cadenas
2. Numéricas: naturales y enteras
3. Numéricas: coma fija
4. Numéricas: coma flotante: estándar IEEE 754

Sistemas de representación posicionales

- ▶ Un número se define por una **cadena de dígitos**, estando **afectado** cada uno de ellos por un **factor de escala** que **depende** de la **posición** que ocupa en la cadena.

- ▶ Dada una base de numeración b , un número X se define como la cadena de dígitos:

$$X = (\dots x_2 x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \dots)_b \quad \text{Con } 0 \leq x_i < b$$

con una lista de pesos asociados:

$$P = (\dots b^2 b^1 b^0 \quad b^{-1} b^{-2} \dots)_b$$

Sistemas de representación posicionales

- ▶ Un número se define por una **cadena de dígitos**, estando **afectado** cada uno de ellos por un **factor de escala** que **depende** de la **posición** que ocupa en la cadena.

- ▶ Dada una base de numeración b , un número X se define como la cadena de dígitos:

$$X = (\dots x_2 x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \dots)_b \quad \text{Con } 0 \leq x_i < b$$

con una lista de pesos asociados:

$$P = (\dots b^2 b^1 b^0 \quad b^{-1} b^{-2} \dots)_b$$

- ▶ Su valor es:

$$V(X) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b^i \cdot x_i = \dots \underset{\text{peso}}{b^2} \cdot x_2 + \underset{\text{peso}}{b^1} \cdot x_1 + \underset{\text{peso}}{b^0} \cdot x_0 + \underset{\text{peso}}{b^{-1}} \cdot x_{-1} + \underset{\text{peso}}{b^{-2}} \cdot x_{-2} \dots$$

Sistemas de representación posicionales

► Decimal

$$X = \begin{array}{cccc} 9 & 7 & 3 & 1 \\ \dots & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \end{array}$$

► Binario

$$X = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

► Hexadecimal

$$X = \begin{array}{cccc} 1 & F & A & 8 \\ \dots & 16^3 & 16^2 & 16^1 & 16^0 \end{array}$$

Sistemas de representación posicionales

► Decimal

$$X = \begin{array}{cccc} 9 & 7 & 3 & 1 \\ \dots & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \end{array}$$

► Binario

$$X = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

► Hexadecimal

$$X = \begin{array}{cccc} 1 & F & A & 8 \\ \dots & 16^3 & 16^2 & 16^1 & 16^0 \end{array}$$

Paso de binario a hexadecimal:

- Agrupar de 4 en 4 bits, de derecha a izquierda
- Cada 4 bits es el valor del dígito hexadecimal

Ej.: $\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & A & & 5 & \end{array}$
0x A 5

Sistemas de representación posicionales

► Decimal

$$X = \begin{array}{cccc} 9 & 7 & 3 & 1 \\ \dots & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \end{array}$$

► Binario

$$X = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

► Hexadecimal

$$X = \begin{array}{cccc} 1 & F & A & 8 \\ \dots & 16^3 & 16^2 & 16^1 & 16^0 \end{array}$$

¿?

Ejercicio

- Representar 342 en binario:

256	128	64	32	16	8	4	2	1
?	?	?	?	?	?	?	?	?

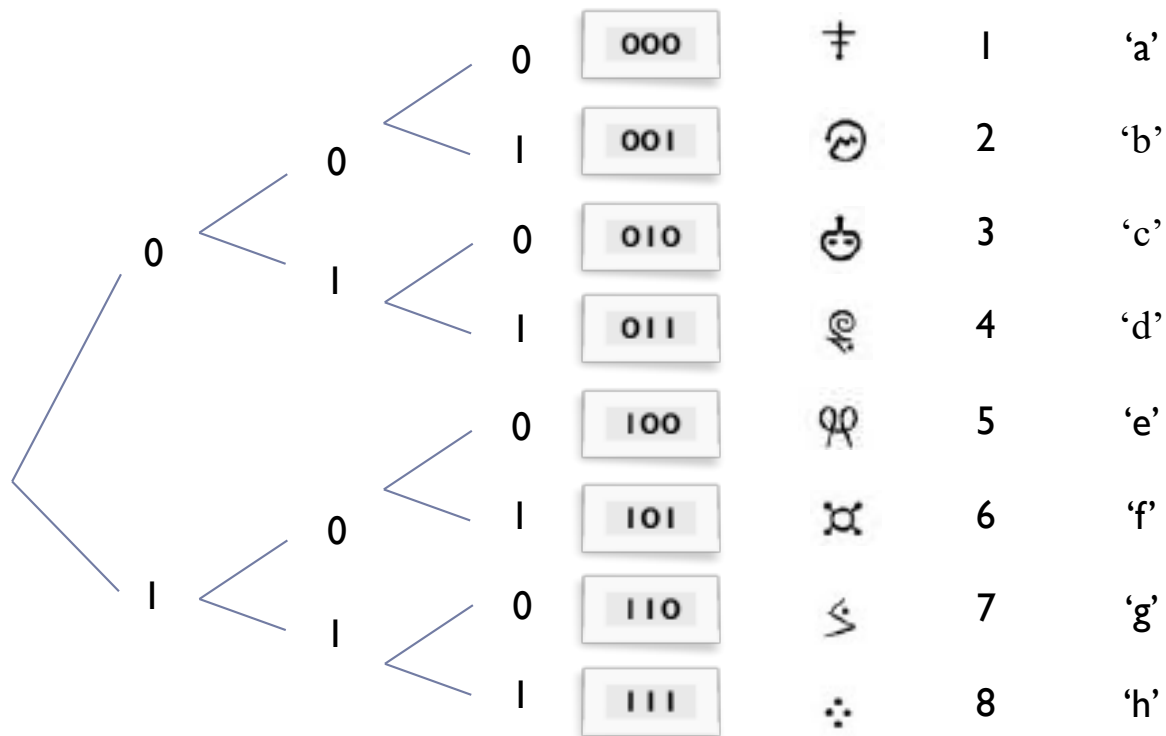
Ejercicio (solución)

- Representar 342 en binario:

256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0

Ejemplo

- Con 3 dígitos binarios, se pueden representar 8 símbolos:



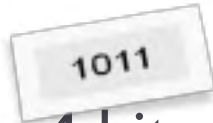
Sistemas de representación posicionales

- ▶ ¿Cuántos valores se pueden representar con n bits?
- ▶ ¿Cuántos bits se necesitan para representar m 'valores'?
- ▶ Con n bits,
si el valor mínimo representable corresponde al número 0,
¿Cuál es el máximo valor numérico representable?

Sistemas de representación posicionales

- ▶ ¿Cuántos valores se pueden representar con n bits?

- ▶ 2^n



- ▶ Ej.: con 4 bits se pueden representar 16 valores

- ▶ ¿Cuántos bits se necesitan para representar m 'valores'?

- ▶ $\log_2(m)$ por exceso

- ▶ Ej.: para representar 35 valores se necesitan 6 bits

- ▶ Con n bits,

si el valor mínimo representable corresponde al número 0,
¿Cuál es el máximo valor numérico representable?

- ▶ $2^n - 1$

Ejercicio

- Calcular el valor de (23 unos):

Ejemplo: operaciones

► Sumar en binario:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 10100 \\ + 11110 \\ \hline 110010 \end{array}$$

Ejemplo: operaciones

► Sumar en binario:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ + \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

► Restar en binario:

$$\begin{array}{r} 1 \rightarrow 1 \rightarrow \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ - \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. **Alfanuméricas: caracteres y cadenas**
2. Numéricas: naturales y enteras
3. Numéricas: coma fija
4. Numéricas: coma flotante: estándar IEEE 754

Representación alfanumérica

- ▶ Cada carácter se codifica con un byte.
- ▶ Para n bits $\Rightarrow 2^n$ caracteres representables:

# bits	# caracteres	Incluye...	Ejemplo
6	64	<ul style="list-style-type: none">• 26 letras: a...z• 10 números: 0...9• Puntuación: .,;:...• Especiales: + - [...	BCDIC
7	128	<ul style="list-style-type: none">• añade mayúsculas y caracteres de control	ASCII
8	256	<ul style="list-style-type: none">• añade letras acentuadas, ñ, caracteres semigráficos	EBCDIC ASCII extendido
16	34.168	<ul style="list-style-type: none">• Añade distintos idiomas (chino, árabe,...)	UNICODE

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▼	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	≡	DC3	051	3	083	S	115	s
020	≡	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	■	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	↑	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☐

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1982, Leading Edge Computer Products, Inc.

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

caracteres de control

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	🎵	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	🔦	DLE	048	0	080	P	112	p
017	📶	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019		DC3	051	3	083	S	115	s
020	≡	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	↑	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☑

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1982, Leading Edge Computer Products, Inc.

< 32

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

distancia mayúsculas-minúsculas

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▶	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	≡	DC3	051	3	083	S	115	s
020	≡	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	↑	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	↑	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☑

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1982, Leading Edge Computer Products, Inc.

$$97-65=32$$

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

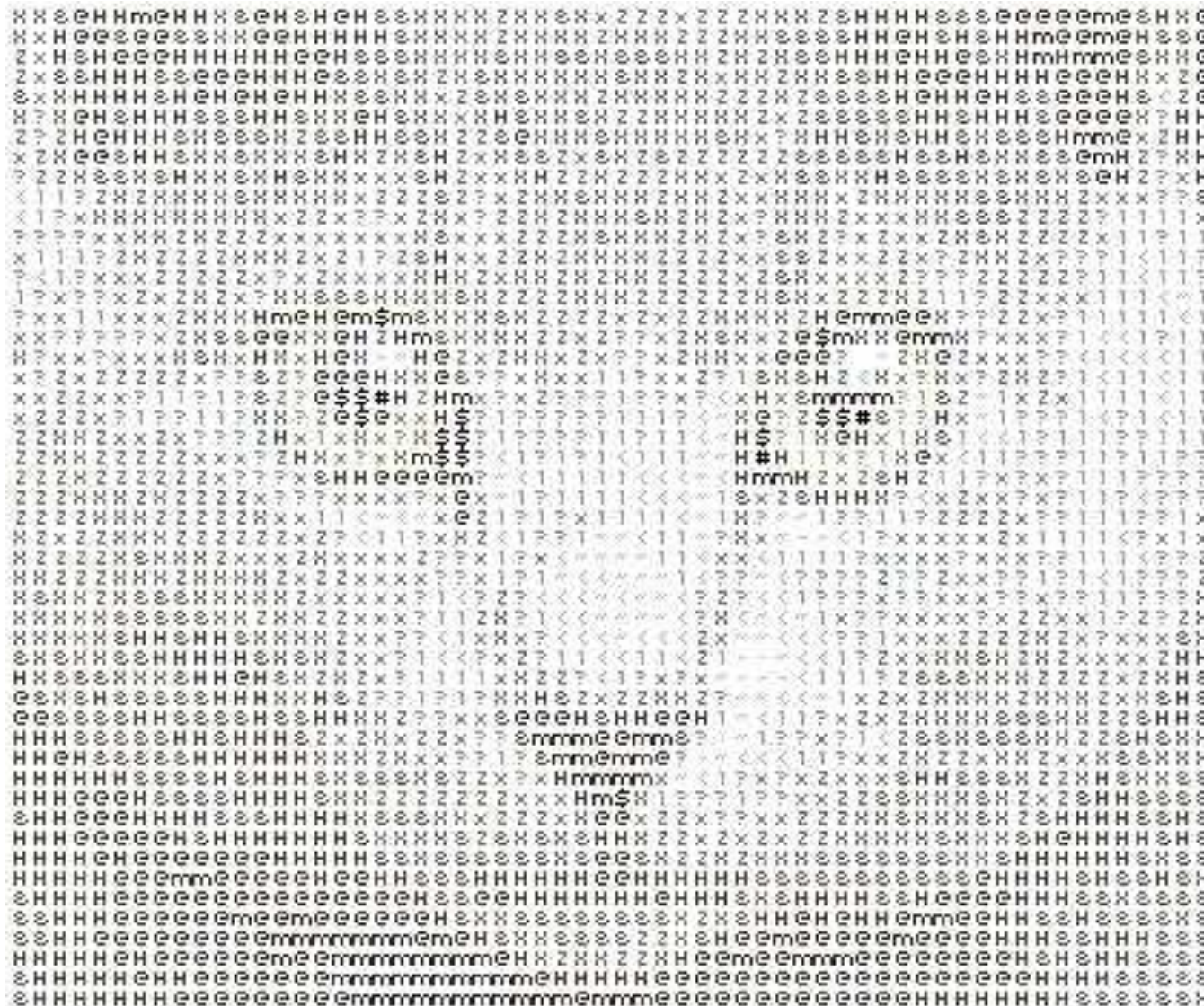
conversión de un número a carácter

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▶	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	≡	DC3	051	3	083	S	115	s
020	≡	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	↑	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	}
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	~
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☑

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1982, Leading Edge Computer Products, Inc.

6+48=54

Curiosidad:
Visualización ‘gráfica’ con caracteres

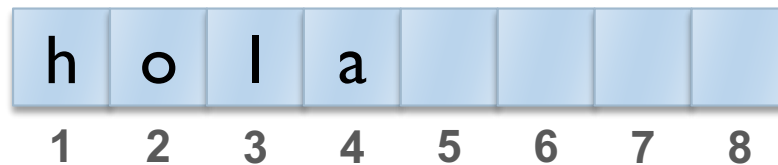


<http://www.typorganism.com/asciomatic/>

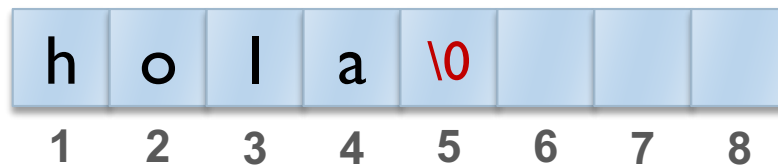
Cadenas de caracteres

1000	00110011
1001	01101100
...	
1008	10100011

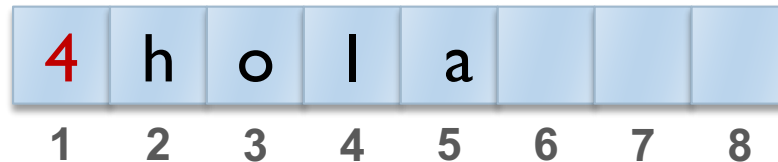
1. Cadenas de longitud fija:



2. Cadenas de longitud variable con separador:



3. Cadenas de longitud variable con longitud en cabecera:



Contenidos

1. Introducción

1. Objetivo
2. Motivación
3. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas: caracteres y cadenas
2. **Numéricas: naturales y enteras**
3. Numéricas: coma fija
4. Numéricas: coma flotante: estándar IEEE 754

Representación numérica

- ▶ Clasificación de números reales:
 - ▶ Naturales: 0, 1, 2, 3, ...
 - ▶ Enteros: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
 - ▶ Racionales: fracciones ($5/2 = 2,5$)
 - ▶ Irracionales: $2^{1/2}$, π , e, ...
- ▶ Conjuntos infinitos y espacio de representación finito:
 - ▶ Imposible representar todos
- ▶ Características de la representación usada:
 - ▶ Elemento representado:
Natural, entero, ...
 - ▶ Rango de representación:
Intervalo entre el menor y mayor n° representable
 - ▶ Resolución de representación:
Diferencia entre un n° representable y el siguiente.
Representa el máximo error cometido. Puede ser cte. o variable.

Sistemas de representación binarios más usados

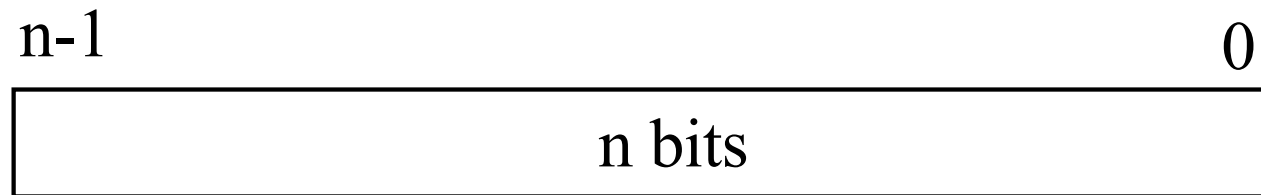
- A. Coma fija sin signo o binario puro naturales

- B. Signo magnitud
- C. Complemento a uno (Ca 1)
- D. Complemento a dos (Ca 2)
- E. Exceso $2^{n-1}-1$ enteros

- F. Coma flotante: Estándar IEEE 754 reales

Coma fija sin signo o binario puro [naturales]

- Sistema posicional con base 2 y sin parte fraccionaria.



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i$$

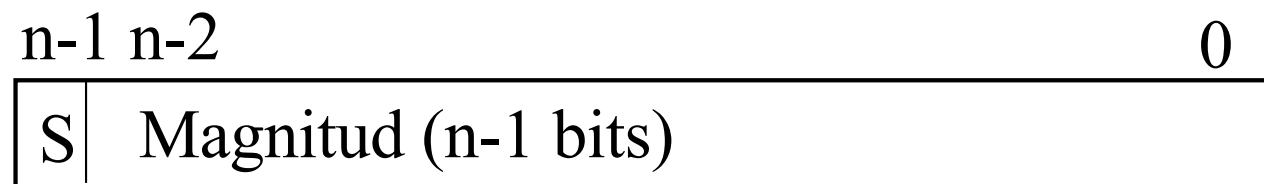
- Rango de representación: $[0, 2^n - 1]$
- Resolución: 1 unidad

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro
+7	111
+6	110
+5	101
+4	100
+3	011
+2	010
+1	001
+0	000
-0	N.D.
-1	N.D.
-2	N.D.
-3	N.D.
-4	N.D.
-5	N.D.
-6	N.D.
-7	N.D.

Coma fija con signo o signo magnitud [enteros]

- ▶ Se reserva un bit (S) para el signo ($0 \Rightarrow +$; $1 \Rightarrow -$)



$$\begin{array}{lcl}
 \text{Si } x_{n-1} = 0 & V(X) = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i & \\
 \text{Si } x_{n-1} = 1 & V(X) = -\sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i &
 \end{array}
 \left| \Rightarrow V(X) = (1 - 2 \cdot x_{n-1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i \right.$$

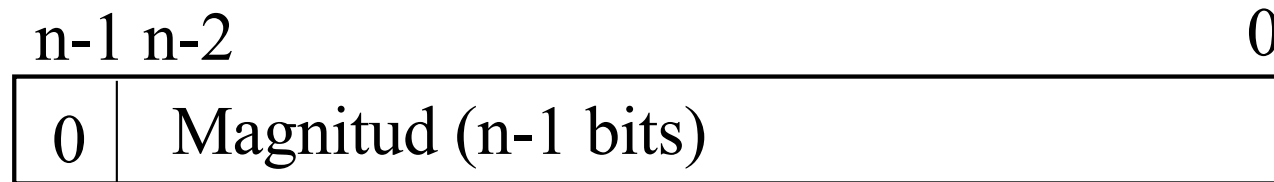
- Rango de representación: $[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$
- Resolución: 1 unidad
- Ambigüedad del 0

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud
+7	111	N.D.
+6	110	N.D.
+5	101	N.D.
+4	100	N.D.
+3	011	011
+2	010	010
+1	001	001
+0	000	000
-0	N.D.	100
-1	N.D.	101
-2	N.D.	110
-3	N.D.	111
-4	N.D.	N.D.
-5	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.

Complemento a uno (a la base menos uno) [enteros] (1/3)

- **Número positivo:**
se representa en binario puro con $n-1$ bits



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i$$

- Rango de representación (+): $[0, 2^{n-1} - 1]$
- Resolución: 1 unidad

Complemento a uno (a la base menos uno) [enteros] (2/3)

► **Número negativo:**

- Se complementa a la base menos uno
- El número $X < 0$ se representa como $2^n - X - 1$ con n bits

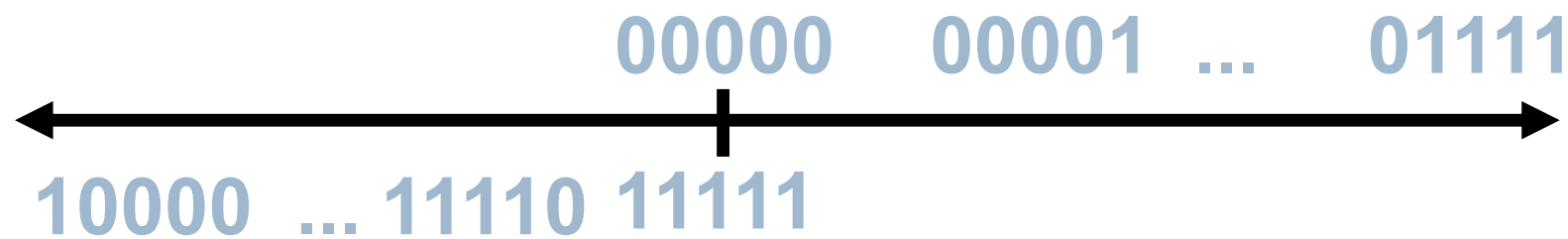


$$V(X) = -2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot y_i + 1$$

- Rango de representación (-): $[-(2^{n-1}-1), -0]$
- Resolución: 1 unidad

Complemento a uno

- ▶ Los números positivos tienen un 0 en el bit más significativo



- ▶ Los números negativos tienen un 1 en el bit más significativo

Complemento a uno (a la base menos uno) [enteros] (3/3)

Truco: $C a 1 (X) = X$

$C a 1 (-X) = \text{cambiar los 1 por 0 y los 0 por 1}$

- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow$ el valor $+3_{10} = 0011_2$
- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow$ el valor $-3_{10} = 1100_2$
 - ▶ $- \Rightarrow 1$ (bit signo y también parte de magnitud)
 - ▶ $C a 1(3) \Rightarrow 2^4 - 0011_2 - 1 = 2^4 - 3 - 1 = 12 \Rightarrow 1100_2$

- Rango de representación: $[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1]$
- Resolución: 1 unidad
- El 0 tiene doble representación (+0 y -0)
- Rango simétrico

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno
+7	111	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.
+3	011	011	011
+2	010	010	010
+1	001	001	001
+0	000	000	000
-0	N.D.	100	111
-1	N.D.	101	110
-2	N.D.	110	101
-3	N.D.	111	100
-4	N.D.	N.D.	N.D.
-5	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.

Ejemplo

- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ ¿Cómo se representa $X = 5$?
 - ▶ Como es positivo, en binario puro
 - ▶ 00101
- ▶ ¿Cómo se representa $X = -5$?
 - ▶ Como es negativo, se complementa el valor 5 (00101)
 - ▶ 11010
- ▶ ¿Cuál es el valor de 00111 en complemento a 2?
 - ▶ Como es positivo, su valor es directamente 7
- ▶ ¿Cuál es el valor de 11000 en complemento a 2?
 - ▶ Como es negativo, se complementa y se obtiene 00111 (7)
 - ▶ El valor es -7

Aritmética en complemento a uno

- ▶ Sumas y restas se realizan de igual forma
- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ Sea $X = 5$
 - ▶ En complemento a uno = 00101
- ▶ Sea $Y = 7$
 - ▶ En complemento a uno = 00111
- ▶ ¿ $X + Y$?
$$\begin{array}{rcl} X & = & 00101 \\ Y & = & \underline{00111} + \\ X+Y & = & 01100 \end{array}$$
- ▶ El valor de 01100 en complemento a uno es 12

Aritmética en complemento a uno

- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ Sea $X = -5$
 - ▶ En complemento a uno = complemento de 00101 : 11010
- ▶ Sea $Y = -7$
 - ▶ En complemento a uno = complemento de 00111 : 11000
- ▶ ¿ $X + Y$?

$$-X = 11010$$

$$-Y = \underline{11000+}$$

$$-(X+Y) = 110010$$

desprecia

Se produce un acarreo, se suma y se

$$\begin{array}{r} \underline{1} \\ 10011 \end{array}$$

- ▶ El valor de 10011 en complemento a uno es el valor negativo de su complemento $-01100 = -12$

¿Porqué se desprecia el acarreo y se suma al resultado?

- ▶ $-X$ se representa como $2^n - X - 1$
- ▶ $-Y$ se representa como $2^n - Y - 1$
- ▶ $-(X + Y)$ se representa como $2^n - (X+Y) - 1$
- ▶ Cuando sumamos directamente $-X - Y$ se obtiene

$$-X = 2^n - X - 1$$

$$-Y = \underline{2^n - Y - 1}$$

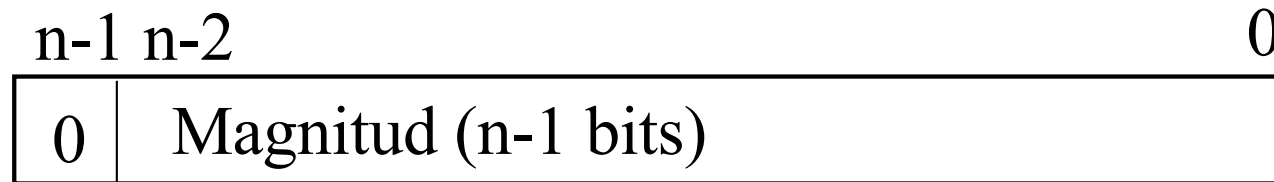
$$-(X+Y) = \cancel{2^n} + 2^n - (X + Y) - 2$$

Se corrige el resultado sumando el acarreo (2^n)
y despreciándolo

$$\Rightarrow 2^n - (X + Y) - 1$$

Complemento a dos (complemento a la base) [enteros] (1/3)

- **Número positivo:**
se representa en binario puro con $n-1$ bits



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i$$

- Rango de representación (+): $[0, 2^{n-1} - 1]$
- Resolución: 1 unidad

Complemento a dos (complemento a la base) [enteros] (2/3)

► **Número negativo:**

- Se complementa a la base
- El número $X < 0$ se representa como $2^n - X$ con n bits



$$V(X) = -2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot y_i$$

- Rango de representación (-): $[-2^{n-1}, -1]$
- Resolución: 1 unidad

Complemento a dos (complemento a la base) [enteros] (3/3)

$$\begin{aligned}\text{Truco: } C a 2 (X) &= X \\ C a 2 (-X) &= C a 1 (X) + 1\end{aligned}$$

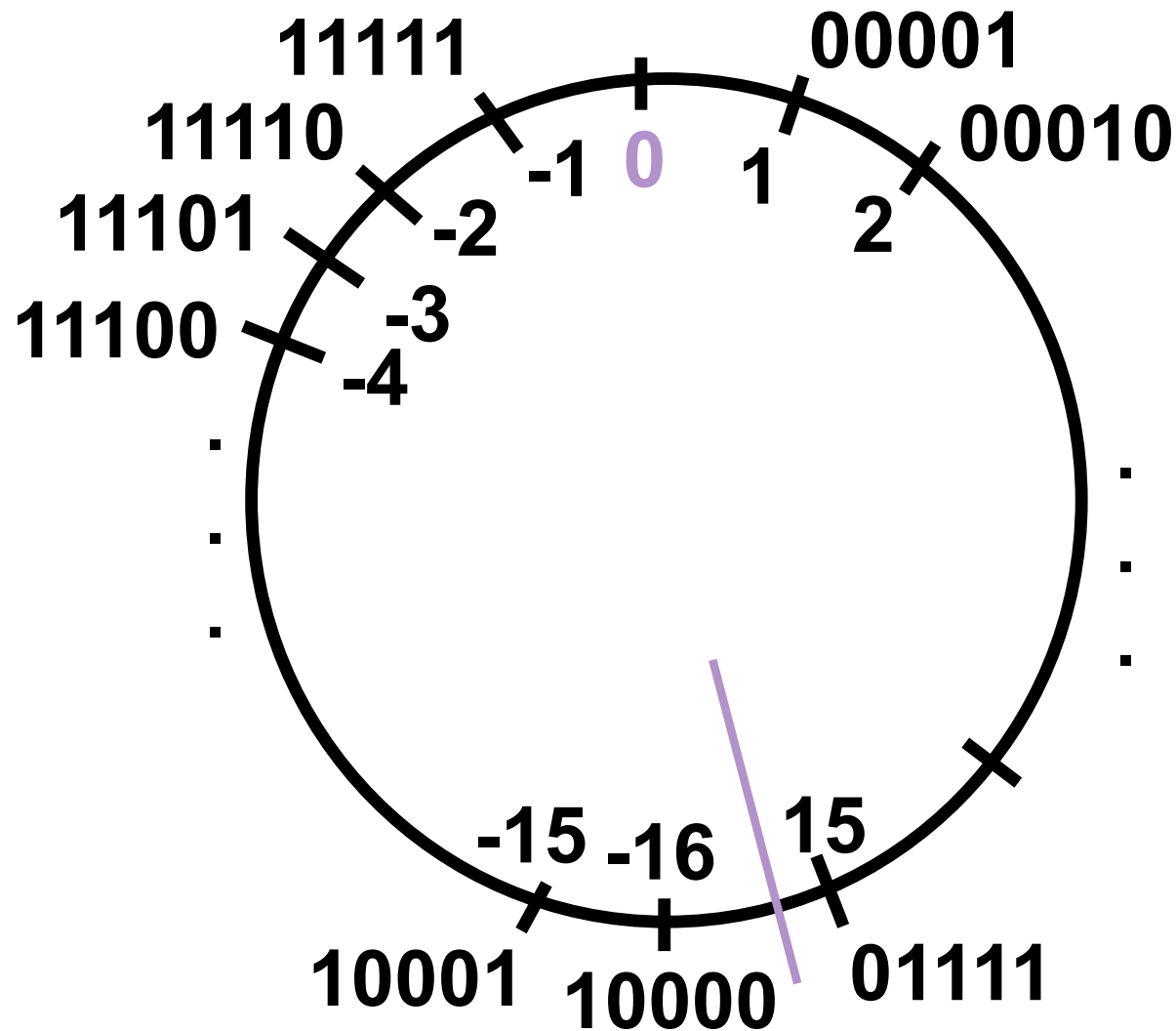
- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow +3 = 0011_2$
- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow -3 = 1101_2$
 - ▶ $1 \Rightarrow -$ (bit signo y también parte de magnitud)
 - ▶ $C a 2 (3) = C a 2(0011_2) = 2^4 - 3 = 13 \Rightarrow 1101_2$

- Rango de representación: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- Resolución: 1 unidad
- El 0 tiene una única representación (No $\exists -0$)
- Rango asimétrico

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno	Complemento a dos
+7	111	N.D.	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.	N.D.
+3	011	011	011	011
+2	010	010	010	010
+1	001	001	001	001
+0	000	000	000	000
-0	N.D.	100	111	N.D.
-1	N.D.	101	110	111
-2	N.D.	110	101	110
-3	N.D.	111	100	101
-4	N.D.	N.D.	N.D.	100
-5	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.

Complemento a dos



2^{N-1} no negativos

2^{N-1} negativos

Un cero

Complemento a dos para 32 bits

$$\begin{aligned}0000 \dots 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000_{\text{dos}} &= 0_{(10)} \\0000 \dots 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0001_{\text{dos}} &= 1_{(10)} \\0000 \dots 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0010_{\text{dos}} &= 2_{(10)} \\&\dots \\0111 \dots 1111 \ 1111 \ 1111 \ 1101_{\text{dos}} &= 2,147,483,645_{(10)} \\0111 \dots 1111 \ 1111 \ 1111 \ 1110_{\text{dos}} &= 2,147,483,646_{(10)} \\0111 \dots 1111 \ 1111 \ 1111 \ 1111_{\text{dos}} &= 2,147,483,647_{(10)} \\1000 \dots 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000_{\text{dos}} &= -2,147,483,648_{(10)} \\1000 \dots 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0001_{\text{dos}} &= -2,147,483,647_{(10)} \\1000 \dots 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0010_{\text{dos}} &= -2,147,483,646_{(10)} \\&\dots \\1111 \dots 1111 \ 1111 \ 1111 \ 1101_{\text{dos}} &= -3_{(10)} \\1111 \dots 1111 \ 1111 \ 1111 \ 1110_{\text{dos}} &= -2_{(10)} \\1111 \dots 1111 \ 1111 \ 1111 \ 1111_{\text{dos}} &= -1_{(10)}\end{aligned}$$

Aritmética en complemento a dos

- ▶ Sumas y
- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ Sea $X = 5$
 - ▶ En complemento a dos = 00101
- ▶ Sea $Y = 7$
 - ▶ En complemento a uno = 00111
- ▶ ¿ $X + Y$?

$$X = 00101$$

$$Y = \underline{00111} +$$

$$X+Y = 01100$$

- ▶ El valor de 01100 en complemento a uno es 12
- ▶ restas de igual forma

Aritmética en complemento a dos

- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ Sea $X = -5$
 - ▶ En complemento a dos = complemento de 00101: $11010 + 1 = 11011$
- ▶ Sea $Y = -7$
 - ▶ En complemento a uno = complemento de 00111: $11000 + 1 = 11001$
- ▶ ¿ $X + Y$?

$$-X = 11011$$

$$-Y = \underline{11001} +$$

$$-(X+Y) = 110100 \quad \text{Se produce un acarreo: se desprecia}$$

- ▶ El valor es 10100. Su valor en complemento a dos = el valor negativo de su complemento a dos = complemento a uno: $01011 + 1 = 01100 = >-12$

Aritmética en complemento a dos

- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ Sea $X = 8$
 - ▶ En complemento a dos = 01000
- ▶ Sea $Y = 9$
 - ▶ En complemento a uno = 01001
- ▶ ¿ $X + Y$?

$$X = 01000$$

$$Y = \underline{01001} +$$

$$X+Y = \textcolor{red}{1}0001$$

- ▶ Se obtiene un negativo \Rightarrow desbordamiento

Aritmética en complemento a dos

- ▶ Para $n = 5$ bits
- ▶ Sea $X = -8$
 - ▶ En complemento a dos = complemento de 01000: $10111 + 1 = 11000$
- ▶ Sea $Y = -9$
 - ▶ En complemento a uno = complemento de 01001: $10110 + 1 = 10111$
- ▶ ¿ $X + Y$?

$$-X = 11000$$

$$-Y = \underline{10111+}$$

$$-(X+Y) = 10111 \quad \text{Se produce un acarreo: se desprecia}$$

- ▶ El valor 01111, como es positivo \Rightarrow desbordamiento

¿Porqué se desprecia el acarreo?

- ▶ $-X$ se representa como $2^n - X$
- ▶ $-Y$ se representa como $2^n - Y$
- ▶ $-(X + Y)$ se representa como $2^n - (X + Y)$
- ▶ Cuando sumamos directamente $-X - Y$ se obtiene

$$-X = 2^n - X$$

$$-Y = \underline{2^n - Y}$$

$$-(X + Y) = \textcircled{2^n} + 2^n - (X + Y)$$

Se corrige el resultado despreciando el acarreo

$$\Rightarrow 2^n - (X + Y)$$

Desbordamientos en complemento a dos

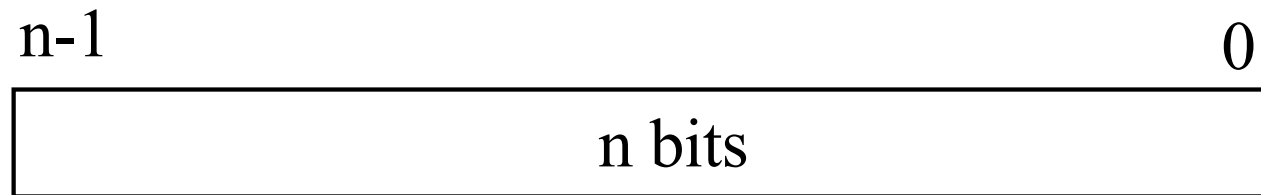
- ▶ Suma de dos negativos \Rightarrow positivo
- ▶ Suma de dos positivos \Rightarrow negativo

Extensión de signo en complemento a dos

- ▶ ¿Cómo pasar de n bits a m bits, siendo $n < m$?
- ▶ Ejemplo:
 - ▶ $n = 4, m = 8$
 - ▶ Si $X = 0110$ con 4 bits $\Rightarrow X = 00000110$ con 8 bits
 - ▶ Si $X = 1011$ con 4 bits $\Rightarrow X = 11111011$ con 8 bits

Representación en Exceso $2^{n-1}-1$ [enteros]

- ▶ El valor X con n bits se representa como $X + 2^{n-1}-1$
- ▶ Se denomina sesgo a la cantidad $2^{n-1}-1$



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i - (2^{n-1} - 1)$$

- Rango de representación: $[-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}-1]$
- Resolución: 1 unidad
- No existe ambigüedad con el 0

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno	Complemento a dos	Exceso 3
+7	111	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.	N.D.	111
+3	011	011	011	011	110
+2	010	010	010	010	101
+1	001	001	001	001	100
+0	000	000	000	000	011
-0	N.D.	100	111	N.D.	N.D.
-1	N.D.	101	110	111	010
-2	N.D.	110	101	110	001
-3	N.D.	111	100	101	000
-4	N.D.	N.D.	N.D.	100	N.D.
-5	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.

Ejercicio

Indique la representación de los siguientes números, razonando brevemente su respuesta:

1. **-32** en complemento a uno con **6 bits**
2. **-32** en complemento a dos con **6 bits**
3. **-10** en signo magnitud con **5 bits**
4. **+14** en complemento a dos con **5 bits**

Ejercicio (solución)

1. Con 6 bits **no es representable** en CI:
 $[-2^{6-1}+1, \dots, -0, +0, \dots, 2^{6-1}-1]$
2. CI + 1 -> **100000**
3. Signo=1, magnitud=1010 -> **11010**
4. Positivo -> CI=C2=SM -> **01110**

Ejercicio

- ▶ Usando 5 bits para representarlo, haga las siguientes sumas en complemento a uno:
 - a) $4 + 12$
 - b) $4 - 12$
 - c) $-4 - 12$

Ejercicio (Solución)

- Usando 5 bits en complemento a uno:

a) $4 + 12$

00100

01100

10000 \Rightarrow se obtiene un negativo $\Rightarrow -15 \Rightarrow$ overflow

Ejercicio (Solución)

- Usando 5 bits en complemento a uno:

b) 4 - 12

00100

10011

10111 \Rightarrow -8

Ejercicio (Solución)

► Usando 5 bits en complemento a uno:

c) -4 - 12

11011

10011

101110 \Rightarrow se obtiene un negativo \Rightarrow overflow