Problema 4.6

Teorema 1: Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua.

$\exists x_0 \in [0,1] : f(x_0) = x_0$

Dem: Sea $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) - x$

- F es continua en $[0,1]$
- $F(0) = f(0) \in [0,1] \Rightarrow F(0) \geq 0$
- $F(1) = f(1) - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq f(x) \leq 1}}{\leq} 1 - 1 = 0 \Rightarrow F(1) \leq 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [0,1]$ tal que $F(x_0) = 0$

$f(x_0) - x_0 = 0$

$f(x_0) = x_0$ ■

<u>Teorema 2</u>: Sean $f, g : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f(x_1) > g(x_1)$ & $f(x_2) < g(x_2)$
$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

<u>Dem:</u> Consideremos la función:

$$F : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = f(x) - g(x)$$

- F es continua en $[x_1, x_2]$
- $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) > 0$
- $F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) < 0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $F(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$ $\blacksquare$