Problema 2.2

① $\sqrt{3} < \sqrt{3\sqrt{3}} < \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} < \cdots$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \sqrt{3\,a_{n-1}} \ ; \ n \geq 2 \\ a_1 = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Acotación:}}$

$a_1 = \sqrt{3} < 3$

$a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} < \sqrt{3\cdot 3} = 3$

$a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} < \sqrt{3\cdot 3} = 3$

. . . .

¿ $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

Inducción: 1) Base: ¿$a_1 < 3$? sí

2) $\boxed{\text{H.I. } a_k < 3}$ ¿ $a_{k+1} < 3$?

$$a_{k+1} = \sqrt{3\,a_k} \underset{HI}{<} \sqrt{3\cdot 3} = 3$$

1) & 2) $\Rightarrow a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Puesto que $0 \leq a_n \leq 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$: la sucesión es ACOTADA

$\boxed{\text{Monotonía:}}$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3a_n} - a_n = \left(\sqrt{3} - \sqrt{a_n}\right)\sqrt{a_n} > 0$$

$0 \leq a_n < 3 \Rightarrow \sqrt{a_n} < \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{a_n} > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$

$a_{n+1} > a_n$ estrictamente creciente

El teorema de B-W nos garantiza qe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite:

$$\exists\, a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Usando:

$$a_n = \sqrt{3a_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3 \lim_{n\to\infty} a_{n-1}}$$

$$a = \sqrt{3a}$$

Por tanto:

$$a = \sqrt{3a} \Rightarrow a^2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a(a-3) = 0 \;\; \begin{cases} \cancel{a=0} & \text{No: } a_1 = \sqrt{3};\ a_{n+1} > a_n \\ a = 3 & \end{cases}$$

---

(2)

$$\begin{cases} a_n = 5 + \dfrac{a_{n-1}}{4} \;;\; n \geq 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

- Si suponemos qe $\exists\, a = \lim_{n\to\infty} a_n$ se tiene qe:

$$\lim_n a_n = 5 + \frac{1}{4}\lim_n a_{n-1} \Rightarrow a = 5 + \frac{1}{4}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{20}{3}$$

- $\boxed{\text{Acotación:}}$ Veamos qe $0 \leq a_n \leq \frac{20}{3}$

Usamos inducción para demostrar qe $a_n < \frac{20}{3}$:

1) Base: $a_1 = 0 < \frac{20}{3}$

2) $\boxed{\text{H.I. } a_k < \frac{20}{3}}$ ¿ $a_{k+1} < \frac{20}{3}$?

$$a_{k+1} = 5 + \frac{a_k}{4} \underset{\text{H.I.}}{<} 5 + \frac{1}{4}\frac{20}{3} = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$$

1) & 2) $\Rightarrow a_n < \frac{20}{3}\ \forall n$ (trivialmente $a_n \geq 0$)

$\boxed{\text{Monotonía:}}$ $\begin{cases} a_n = 5 + \dfrac{a_{n-1}}{4} \\ a_1 = 0 \end{cases}$

$$a_{n+1} - a_n = 5 + \frac{a_n}{4} - a_n = 5 - \frac{3}{4} a_n > 5 - 5 = 0$$

$\Rightarrow \underline{a_{n+1} - a_n > 0}, \ \forall n$

estrictamente creciente

$a_n < \frac{20}{3} \quad \forall n$

$-\frac{3}{4} a_n > -\frac{3}{4} \cdot \frac{20}{3} = -5$

- El teorema de B-W garantiza la existencia del límite $\Rightarrow \quad a = \lim_n a_n = \frac{20}{3}$

---

③ $\begin{cases} a_n = \dfrac{1 + 3a_{n-1}^2}{4} \ ; \quad n \geq 2. \\ |a_1| < 1 \end{cases}$

- Si suponemos qe $\exists\, a = \lim_n a_n$ se tiene qe:

$$a = \frac{1 + 3a^2}{4} \Rightarrow 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \begin{cases} 1 \\ 1/3 \end{cases}$$

Por tanto, sólo hay dos posibles candidatos a límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a = 1/3$ ó $a = 1$.

$\boxed{\text{Acotación:}}$ Si $\frac{1}{3} \le a_1 < 1 \Rightarrow 1/3 \le a_n < 1 \quad \forall n$

Usamos inducción: HI: $1/3 \le a_k < 1$ ¿$1/3 \le a_{k+1} < 1$?

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3(1/3)^2}{4} \underset{HI}{\le} a_{k+1} = \frac{1+3a_k^2}{4} \underset{H.I.}{<} \frac{1+3}{4} = 1 .$$

Por tanto: Si $1/3 \le a_1 < 1 \Rightarrow 1/3 \le a_n < 1 \quad \forall n$

- Si $-1/3 < a_1 < 1/3 \Rightarrow 0 < a_n < 1/3 \quad \forall n \ge 2$

Usando inducción: $0 < a_2 = \frac{1+3a_1^2}{4} < \frac{1+1/3}{4} = 1/3$ (base)

$$0 < a_{k+1} = \frac{1+3a_k^2}{4} \underset{HI}{<} \frac{1+3(1/3)^2}{4} = \frac{1}{3}$$

- Si $-1 < a_1 \le -1/3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le a_n < 1 \quad \forall n \ge 2$

Usando inducción $\frac{1}{3} \le a_2 = \frac{1+3a_1^2}{4} < 1$ (Base)

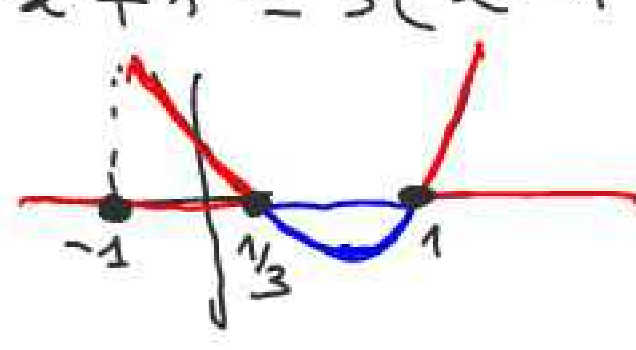
$$\frac{1}{3} \le \frac{1+3(1/3)^2}{4} \underset{HI}{\le} a_{k+1} = \frac{1+3a_k^2}{4} \underset{HI}{<} \frac{1+3}{4} = 1$$

$\boxed{\text{Monotonía:}}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1+3a_n^2}{4} - a_n = \frac{1+3a_n^2-4a_n}{4}$$

Consideremos el polinomio

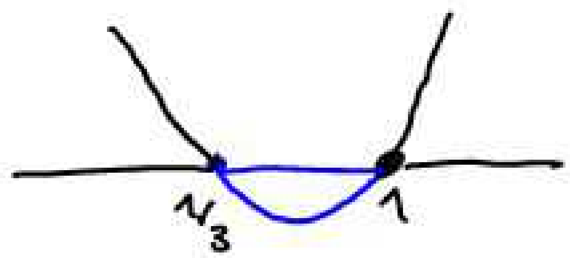
$$P(x) := 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x-1/3)$$



De esta manera:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}P(a_n) = \frac{3}{4}(a_n - 1)(a_n - 1/3)$$

- Si $1/3 \leq a_1 < 1$ sabemos que $1/3 \leq a_n < 1 \quad \forall n \geq 1$



Por tanto; $\forall n \geq 1$:

$P(a_n) \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$

SUCESIÓN MONÓTONA DECRECIENTE

- Si $-1/3 < a_1 < 1/3$ sabemos que $0 < a_n < 1/3 \quad \forall n \geq 2$

Por tanto: $P(a_n) > 0 \quad \forall n \geq 2$

$$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \geq 2$$

Además, es facil ver que $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \geq 1$

SUCESIÓN MONÓTONA CRECIENTE

- Si $-1 < a_1 \leq -1/3$ sabemos que $1/3 \leq a_n < 1 \quad \forall n \geq 2$

Por tanto: $P(a_n) \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \forall n \geq 2$

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow$ La sucesión $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ es MONÓTONA DECRECIENTE

- Nótese que, sin embargo, la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no es monótona ya que

$$a_1 < 0 < 1/3 \leq a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 2$$

Este hecho no tiene importancia a la hora de usar B-W ya que basta que $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ sea monótona y acotada para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

- El teorema de B-W garantiza $\exists\, a = \lim_n a_n$.

Además, la monotonía nos garantiza que, independientemente de $|a_1| < 1$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$.

---

(4) $a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ con $0 \leq y \leq x$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(x+y,\ (x^2+y^2)^{1/2},\ (x^3+y^3)^{1/3}, \dots \right)$$

Puesto que

$$a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n} = x \sqrt[n]{1 + (y/x)^n}$$

con $0 \leq y/x \leq 1$

estudiaremos en primer lugar la sucesión:

$$b_n = \sqrt[n]{1 + r^n} \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq 1$$

- $\boxed{\text{Monotonía}}$

$$(1+r^{n+1})^n \underset{1+r^{n+1} \geq 1}{\leq} (1+r^{n+1})^{n+1} \underset{0\leq r\leq 1 \Rightarrow r^{n+1} \leq r^n}{\leq} (1+r^n)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad (1+r^{n+1})^n \leq (1+r^n)^{n+1}$$

$$(1+r^{n+1})^{1/(n+1)} \leq (1+r^n)^{1/n}$$

$$b_{n+1} \leq b_n$$

sucesión monótona decreciente.

- $\boxed{\text{Acotación}}$:

$$1 \leq 1 + r^n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq (1+r^n)^{1/n} \leq 2^{1/n} \leq 2$$

sucesión acotada.

- Por el teorema de B-W:

$$\exists b = \lim_n b_n = \lim_n (1+r^n)^{1/n}$$

- Usando :

$$1 \leq (1+r^n)^{1/n} \leq 2^{1/n}$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1+r^n)^{1/n}}_{b} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$$

$$\Rightarrow \quad b = \lim_n (1+r^n)^{1/n} = 1$$

- Utilizando los resultados anteriores:

$$a_n = (x^n + y^n)^{1/n} = x(1+(y/x)^n)^{1/n}$$

es ACOTADA, MONÓTONA DECRECIENTE y se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \lim_{n\to\infty} (1+(y/x)^n)^{1/n} = x$$

---

5 $$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

Obs: $0! = 1$

$k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1$

$\boxed{\text{Monotonía}}$:

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$ sucesión estrictamente creciente

$\boxed{\text{Acotación:}}$

Puesto que $k! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 > \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot 2\cdot 1}_{k-1}$

$$\Rightarrow k! > 2^{k-1} \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

se tiene que:

$$0 \leq a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 2 \cdot \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$$

$$= 4\left(1-(1/2)^{n+1}\right) < 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq a_n \leq 4 \quad \forall n \quad \text{sucesión acotada}$$

- El teorema de B-W nos garantiza que

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ ; además } 0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 4$$

Más adelante veremos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e = 2.718\ldots$$