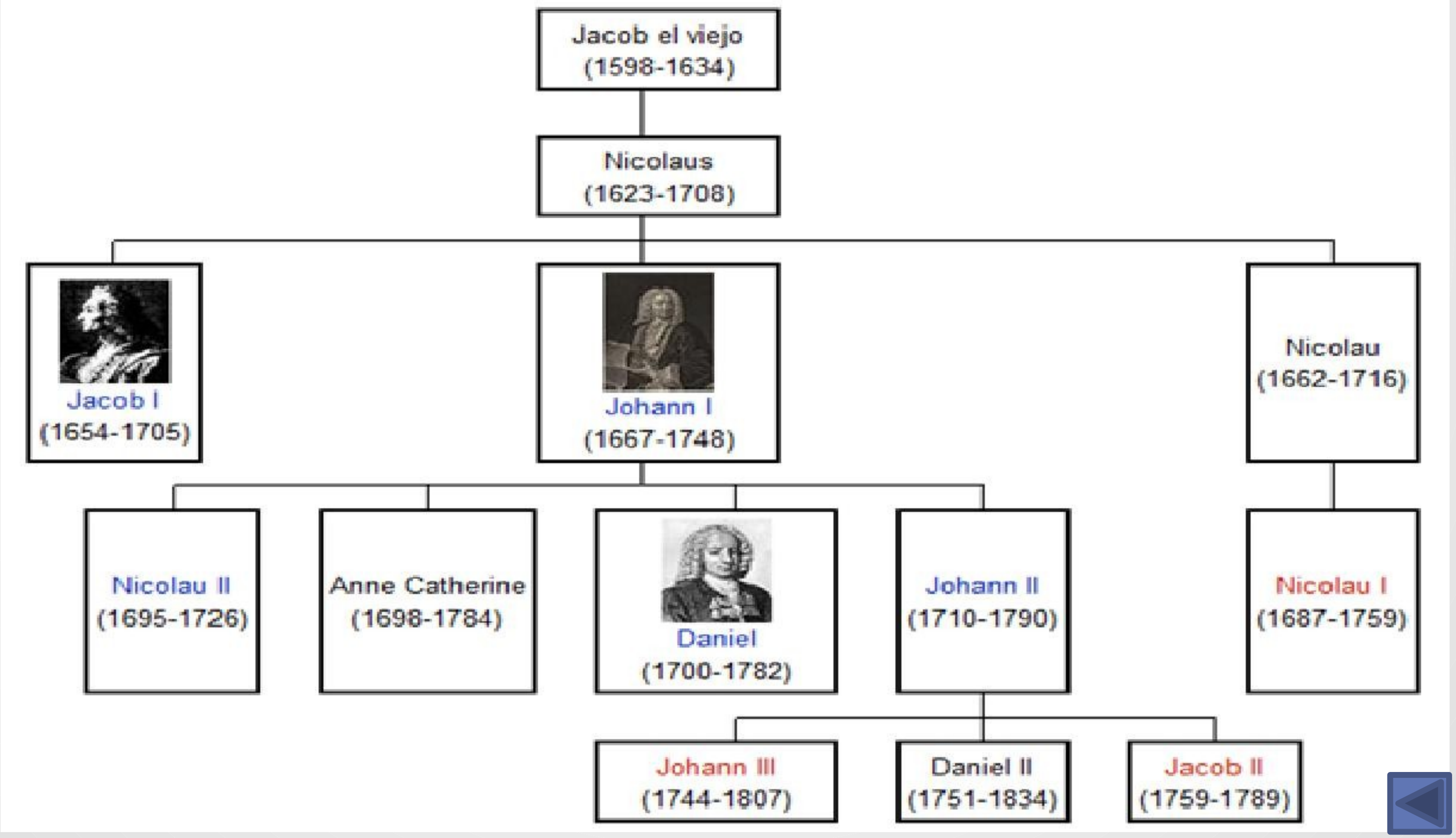
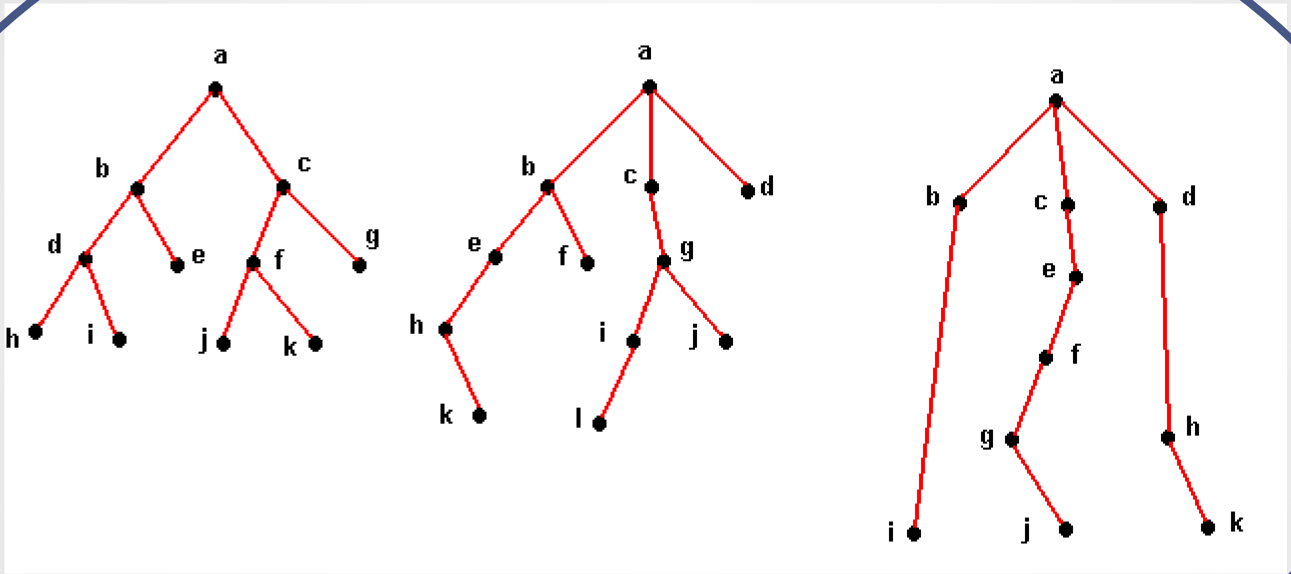
GRAFOS

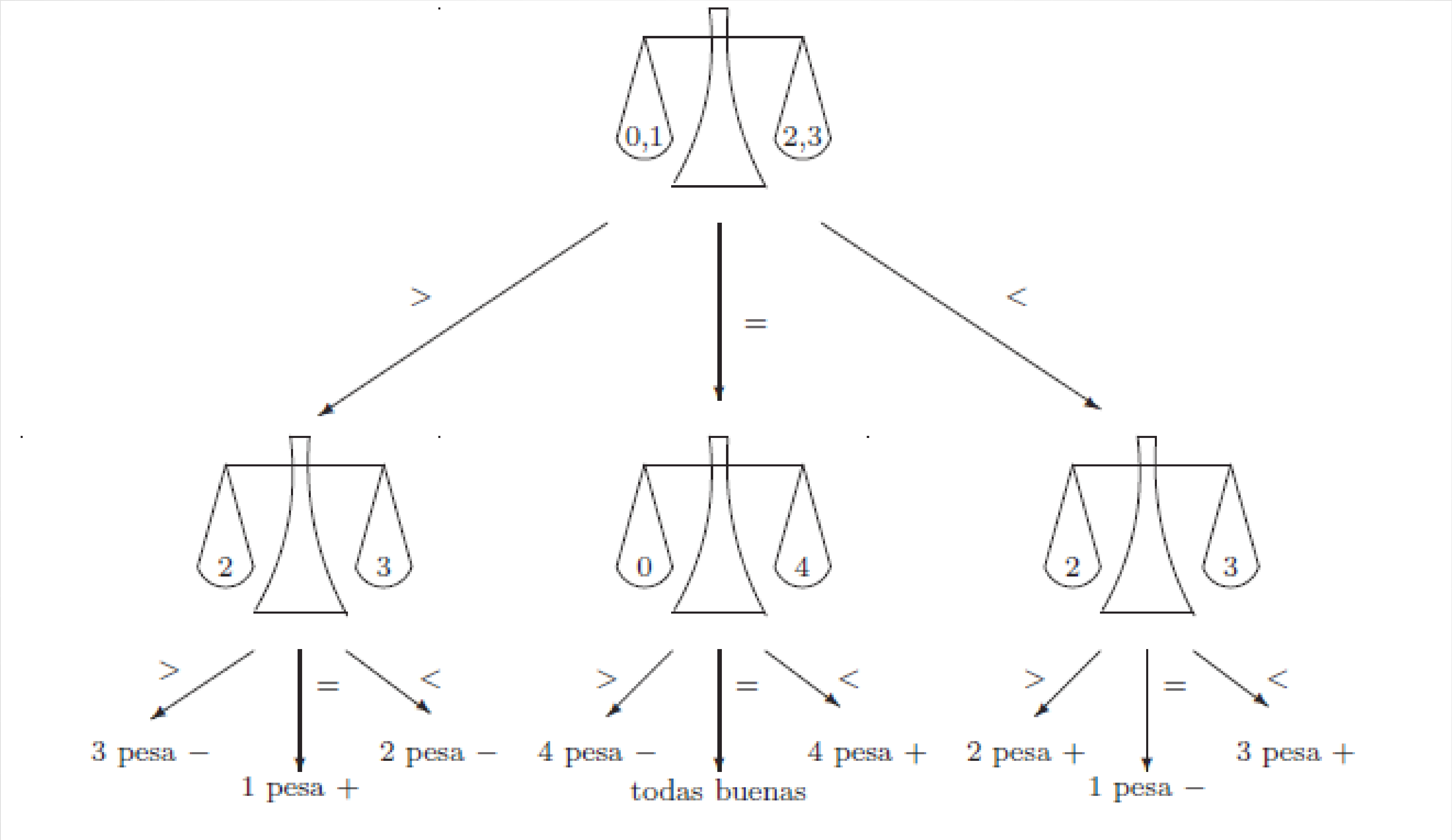

Jacob el viejo
(1598-1634)
Nicolaus
(1623-1708)
Jacob I
(1654-1705)
Johann I
(1667-1748)
Nicolau
(1662-1716)
Nicolau II
(1695-1726)
Anne Catherine
(1698-1784)
Daniel
(1700-1782)
Johann II
(1710-1790)
Nicolau I
(1687-1759)
Johann III
(1744-1807)
Daniel II
(1751-1834)
Jacob II
(1759-1789)

I. Árboles y bosques



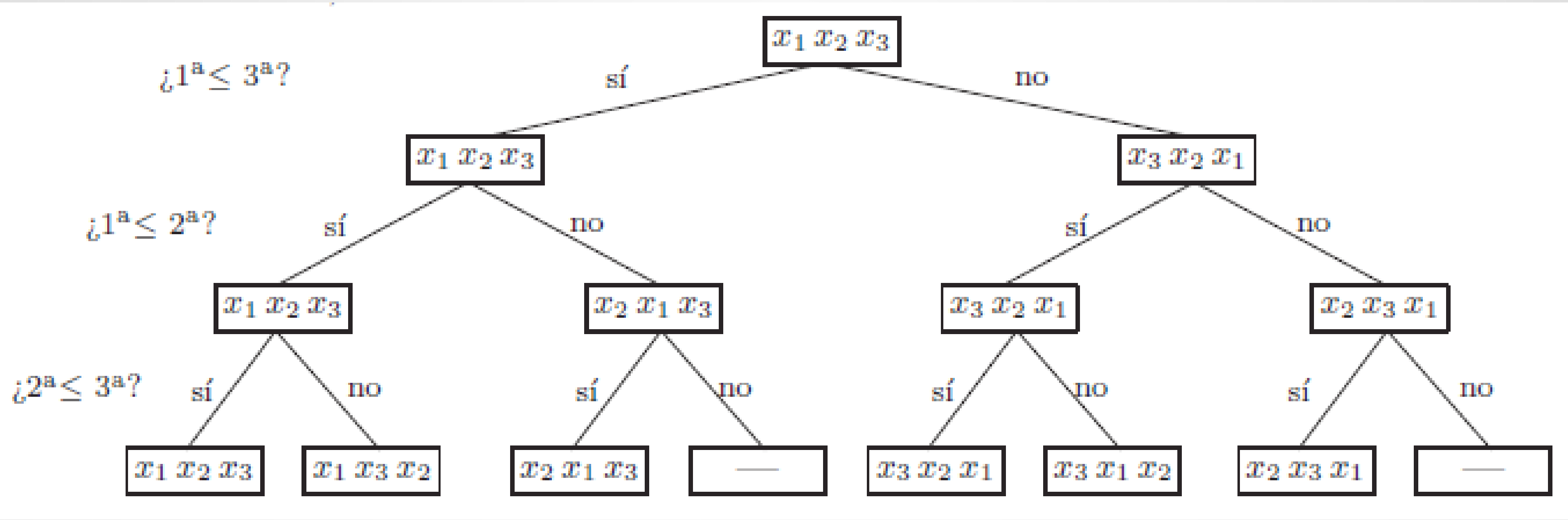
Ejemplos

1. Un árbol de decisión



Ejemplos

2. Un algoritmo de ordenación



A. Definiciones y caracterizaciones

Definición 1.- "Un **árbol** es un grafo simple conexo y sin ciclos"

Definición 2.- "Un **bosque** es un grafo simple sin ciclos. Cada componente conexa de un bosque es un árbol"

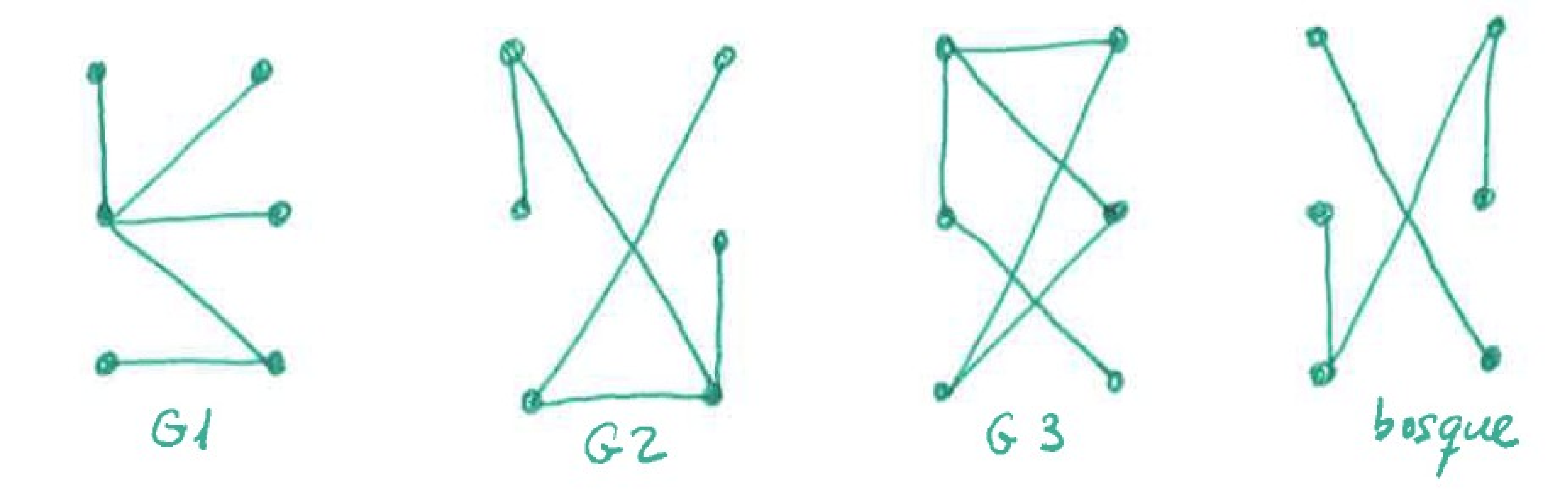
Raíz

Ejemplos.-

¿Los grafos lineales son árboles?

¿Los grafos C_n , K_n y $K_{r,s}$ lo son?

A. Definiciones y caracterizaciones



A. Definiciones y caracterizaciones

Teorema 1.-

i. "El grafo simple G es un árbol **si y sólo** si es conexo y al borrar cualquier arista se obtiene un grafo disconexo"

ii. "El grafo simple G es un árbol **si y sólo** no tiene ciclos y al añadir cualquier arista se obtiene un ciclo"

ii

A. Definiciones y caracterizaciones

Teorema 1 (demostración)

i. =>) **Supongamos que G es un árbol**. Sea a una arista de G y sea ahora, G\{a}. Si éste fuera conexo se podría conectar los dos vértices de la arista a por un caminos, y entonces G tendría un ciclo (no sería un árbol)

i. <=) **Supongamos que G es conexo que se desconecta al quitar una arista** . Entonces G no tiene ciclos (es un árbol), ya que si lo tuviera, se podría quitar una arista si desconectar.

A. Definiciones y caracterizaciones

Teorema 1 (demostración(cont.))

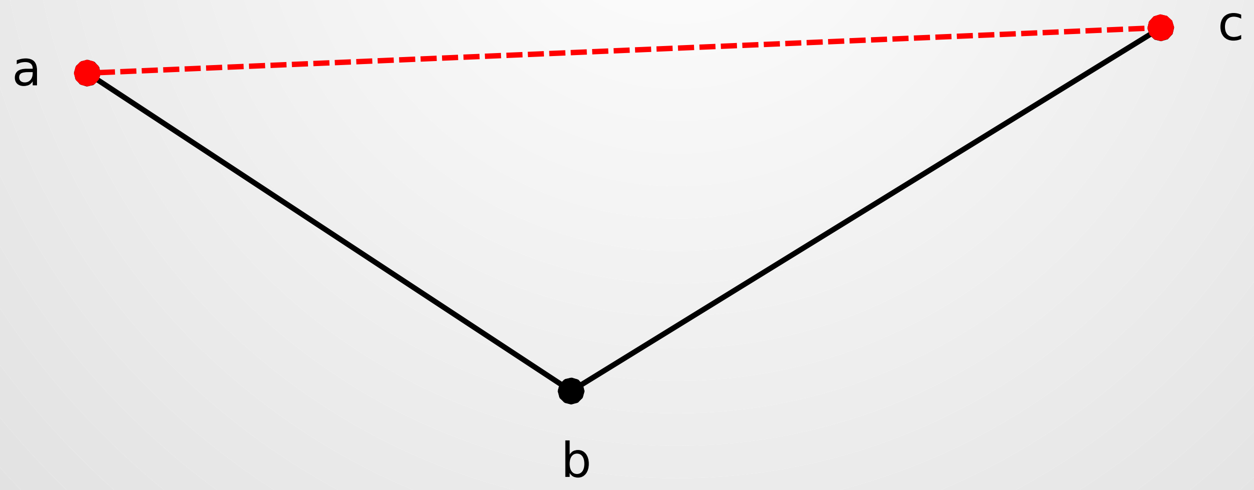
ii. =>) **Supongamos que G es un árbol**. Para cualquier pareja de vértices no adyacentes, existe un camino que los conecta, si se añade la arista que los une se formará un ciclo.

ii. <=) Supongamos que G no tiene ciclos, pero al añadir una arista se forma. Seguid el razonamiento para demostrar que es un árbol.

A. Definiciones y caracterizaciones

Teorema 2.- “Un grafo G = (V,E) es un árbol **si y sólo** si existe un único camino elemental entre cualquier par de vértices”

Demostración.- Debe ser único, porque si hubiera más de uno …



A. Definiciones y caracterizaciones

Teorema 3.- “Un grafo G = (V,A) es un árbol **si y sólo** es conexo y **|A| = |V| - 1**”

(árbol)

⇐) Sea G conexo con $|A| = |V| - 1$, veamos que no

Si tuviera un ciclo, podríamos quitar una arista, sin que se desconectara, y llegaríamos a un grafo $G \setminus \{a\}$ conexo, con:

Demostración

$$|A(G\setminus\{a\})| = |A(G)| - 1 \quad y \quad |V(G\setminus\{a\})| = |V(G)|$$

$$\Rightarrow |A(G\setminus\{a\})| = |V(G)| - 1 - 1 = |V(G\setminus\{a\})| - 2$$

$\Rightarrow$ es decir $|A| = |V| - 2$ (conexo) $|A| \geq |V| - 1$ contradicción

$$= |V(G)| - 1 \quad q.e.d.$$

B. Sucesión de grados de un árbol

Por el teorema de los saludos y como **|A| = |V| - 1:**

¿Qué forma tendrán los árboles con el menor y mayor número de vértices de grado 1?

Teorema 4.- “Todo árbol con dos o más vértices, tiene, al menos, dos vértices terminales (grado 1)”

Demostración (reducción al absurdo hasta encontrar una contradicción con (*)):

Dos casos:

1. Suponiendo que sólo tuviera uno …
2. Suponiendo que no tuviera ninguno …

C. Árboles con raíz

Raíz, generaciones y hojas

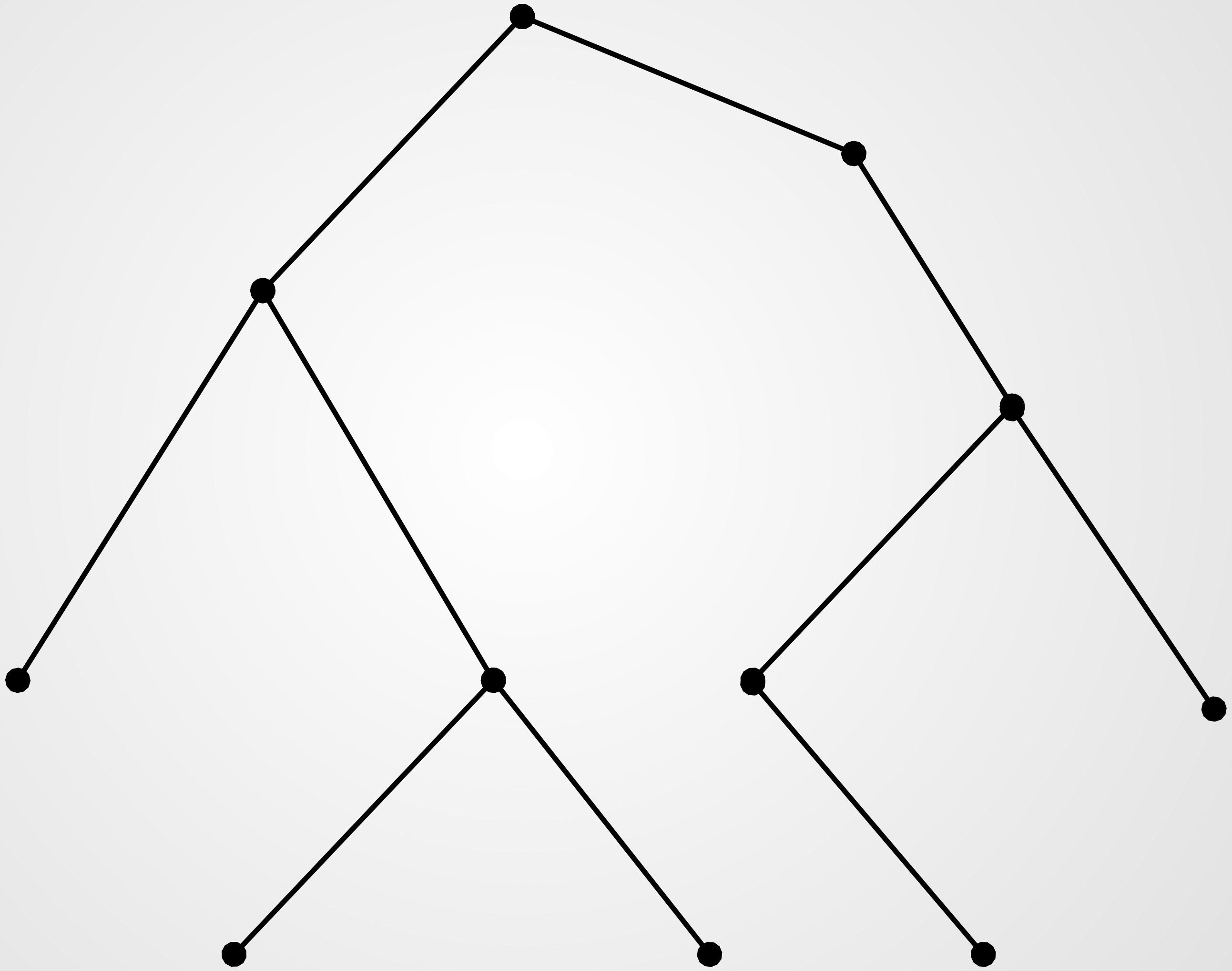
Definición 3

Procedimiento para hacer crecer un árbol:

1. *Comenzar con* $G = (\{r\}, \emptyset)$, *donde* r *es el vértice raíz.*
2. *Dado* $G = (V, E)$, *añadir un nuevo vértice* u *y una nueva arista* $\{u, v\}$ *donde* $v \in V$.

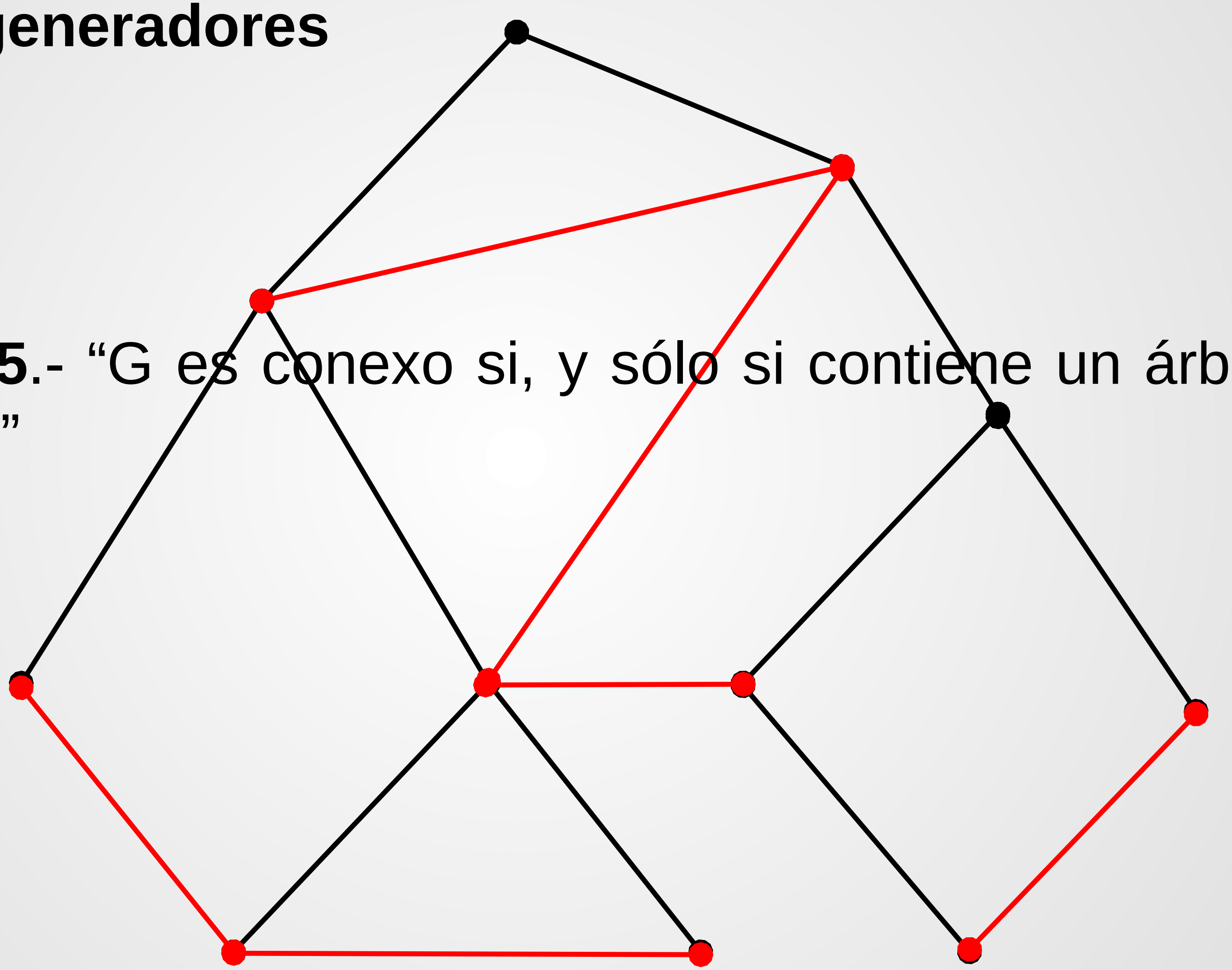
Teorema 5 *Todo grafo obtenido por este procedimiento es un árbol y todo árbol se puede construir de este modo.*

C. Árboles con raíz



C. Árboles con raíz

Árboles generadores



Teorema 5.- "G es conexo si, y sólo si contiene un árbol generador"

II. Grafos planares

Definición

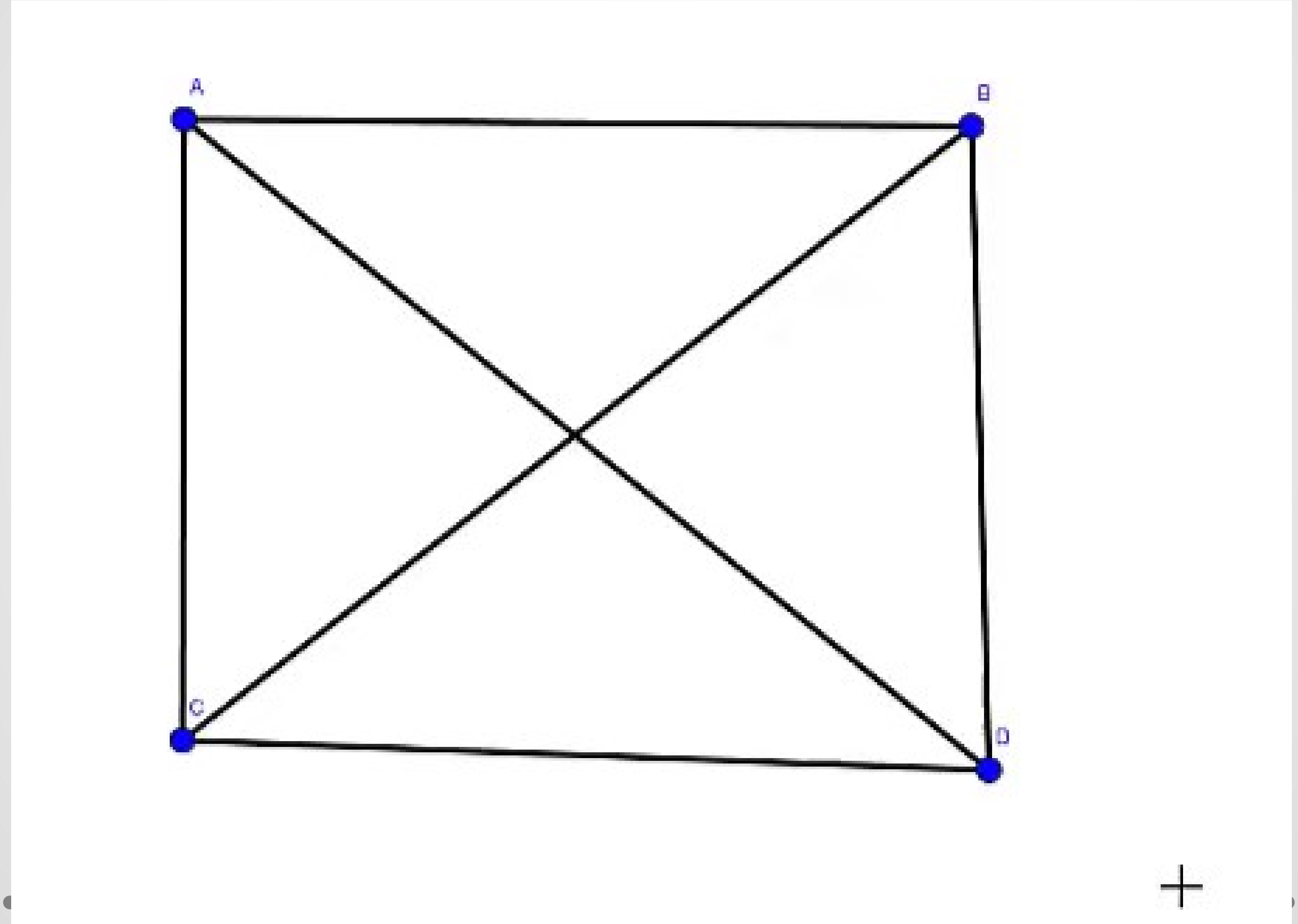
Un grafo es **planar** *si puede ser dibujado en el plano sin que sus aristas se crucen. Una representación de un grafo planar en la que las aristas no se crucen se denomina* **grafo plano**.

¿K_4 es planar?

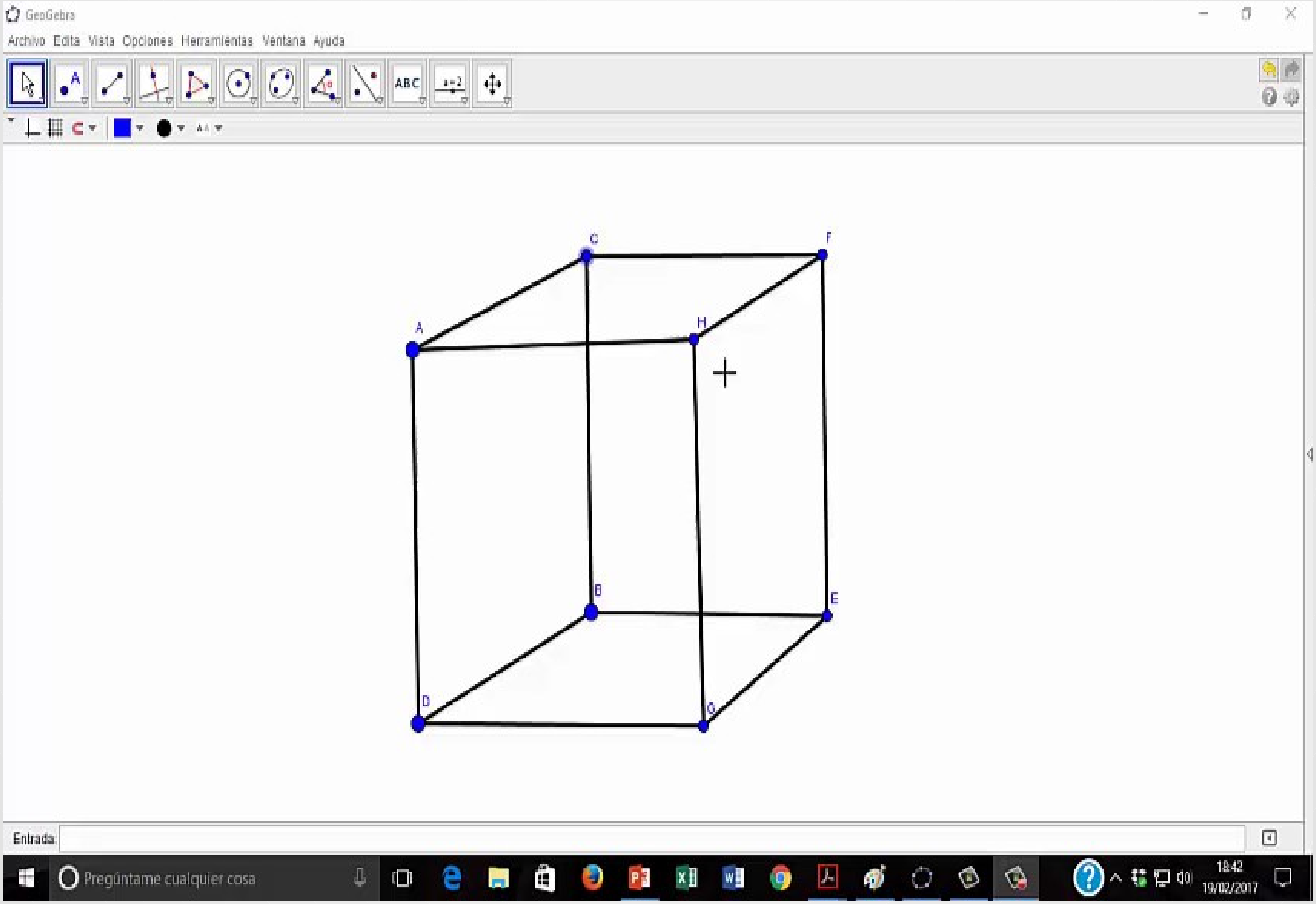
¿Q_3 es planar?

¿$K_{3,3}$ es planar?

II. Grafos planares



II. Grafos planares



II. Grafos planares

Teorema (Fórmula de Euler, 1752) *Un grafo* $G = (V, E)$ *plano y conexo divide al plano en* R *regiones de manera que*

$$|V| - |E| + R = 2 .$$

Un grafo G *plano (aunque no necesariamente conexo) divide al plano en* R *regiones tales que*

$$|V| - |E| + R = 1 + \text{Número de componentes conexas de } G.$$

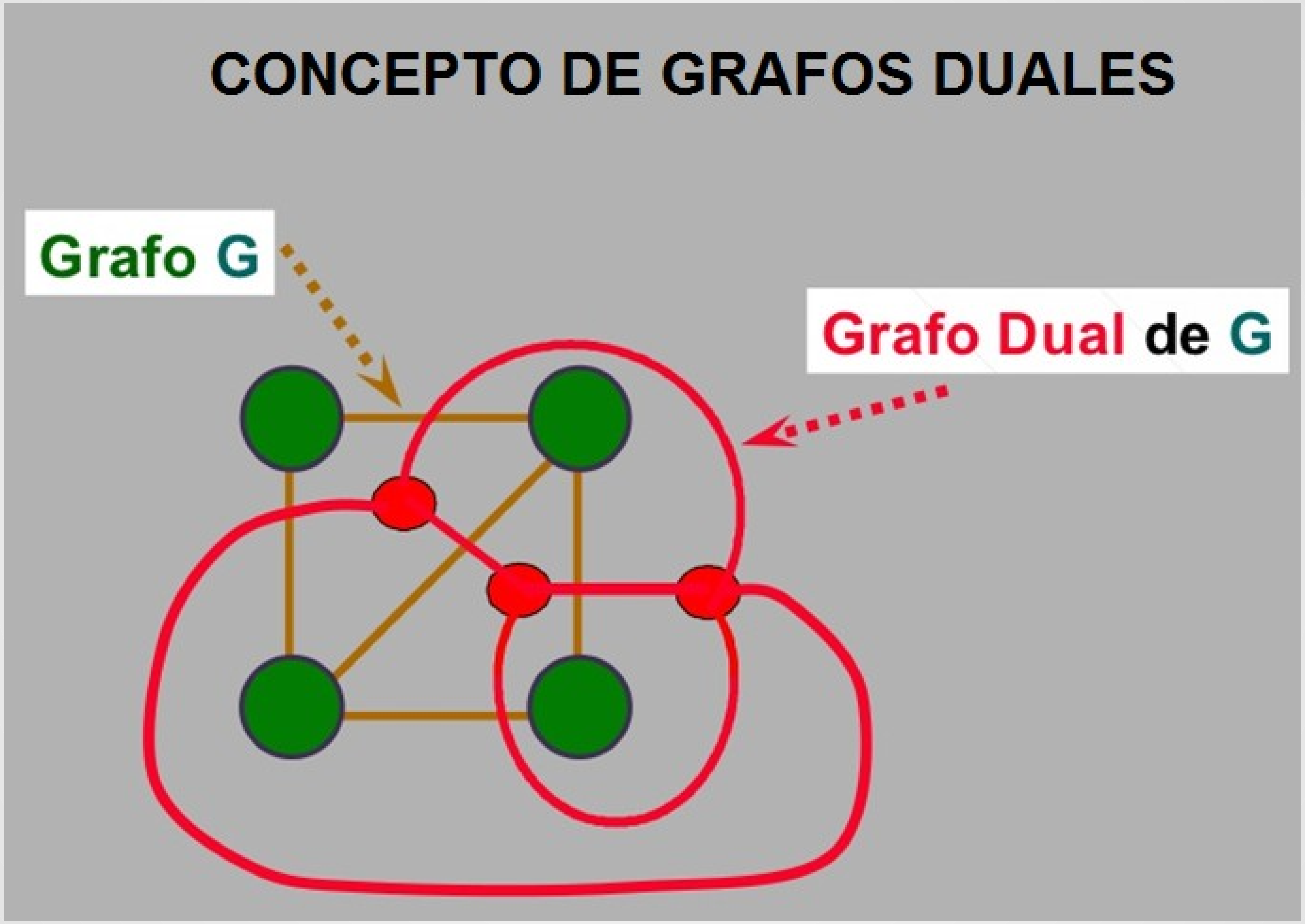
II. Grafos planares

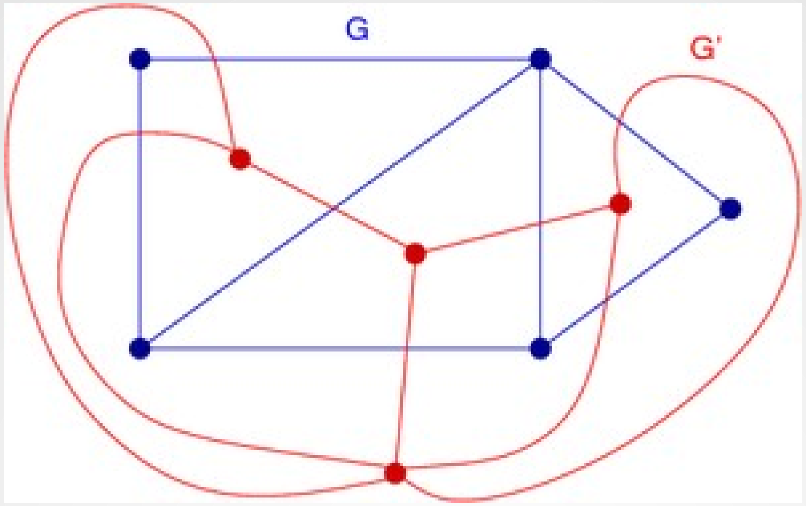
Definición

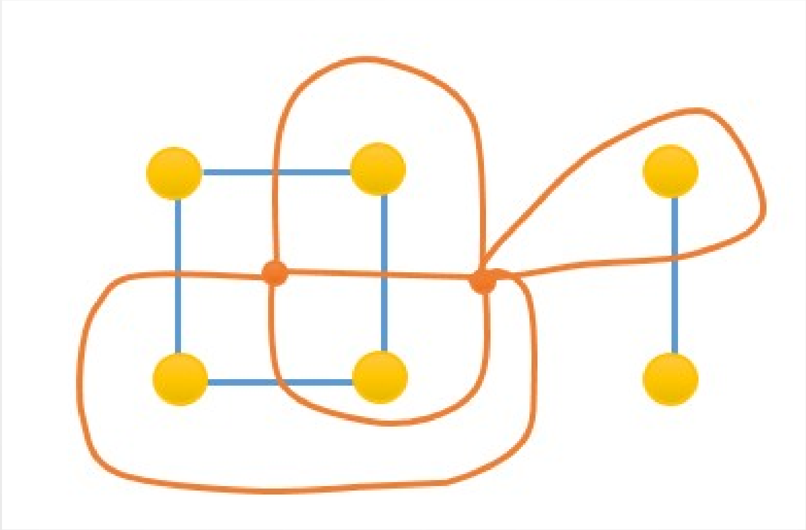
Dado un grafo $G = (V, E)$ *plano, su* **grafo dual** $G^\star = (V^\star, E^\star)$ *se define de la siguiente manera: a cada región* f *de* G *le corresponde un vértice dual* $f^* \in V^*$ *y por cada arista* $e \in E$ *existe una arista dual* $e^* \in E^*$. *Si la arista original* e *es la intersección de dos regiones* f, h *de* G *(siendo posible que* $f = h$*), entonces la correspondiente arista dual* e^* *es incidente a los vértices duales* $f^*, g^* \in V^*$.

Definición

El **grado de una región** r *de un grafo plano se define como el grado del vértice correspondiente* $r \in V^\star$ *en el grafo dual. El grado de la región* r *lo denotaremos por* d_r.


CONCEPTO DE GRAFOS DUALES
Grafo G
Grafo Dual de G


G
G'



II. Grafos planares

Teorema *En un grafo plano y conexo* G *se cumple que*

$$2|E| = \sum_{r \in R} d_r \,,$$

donde R es el conjunto de regiones del plano definidas por G.

II. Grafos planares

Corolario 1 *Si G es un grafo simple, conexo y plano con $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.*

Demostración

Como es un grafo simple plano, el grado mínimo de cada región es 3.
Es decir:

Donde R es el número de regiones que delimita el grafo.

Se ha de verificar también que (Euler) , por lo tanto

de lo que se deduce:

II. Grafos planares

Corolario 2 *Si G es un grafo simple, conexo y plano con $|V| \geq 3$ y no tiene ciclos de longitud 3, entonces $|E| \leq 2|V| - 4$.*

La demostración es similar, pero ahora el grado mínimo de cada región es 4.

Es decir:

etc.

II. Grafos planares

Definición
Insertar un nuevo vértice en una arista de un grafo se denomina **subdividir** *dicha arista. La subdivisión de una o más aristas de un grafo* G *da lugar a una* **subdivisión** *de* G.

Teorema **(Kuratowsky, 1930)** *Un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafo a ninguna subdivisión de* K_5 *ni de* $K_{3,3}$.