FUNCIONES DERIVABLES: TEOREMAS

Teorema: Sea (x_1, x_2) un intervalo no necesariamente acotado (es decir, permitiremos que $x_1 = -\infty$ y/o $x_2 = \infty$)

Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2) \implies f(x) = C$
$\forall x \in (x_1, x_2)$
(función constante)
$\operatorname{Im} f = \{C\}$

Obs: Hay funciones no constantes que cumplen $f'(x) = 0$

Por ejemplo:

$$f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

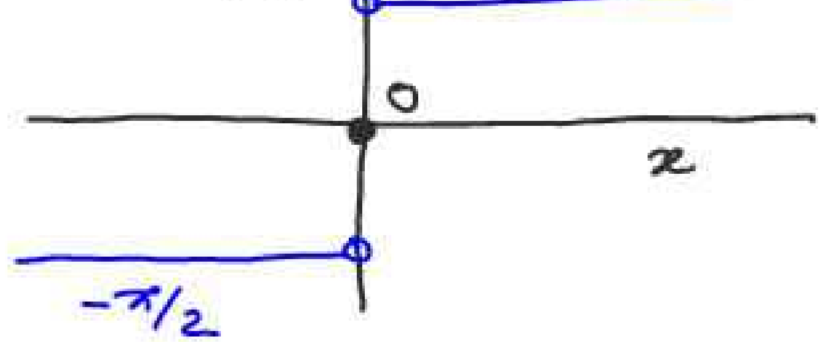
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$
$$\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Sin embargo:

$$f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$



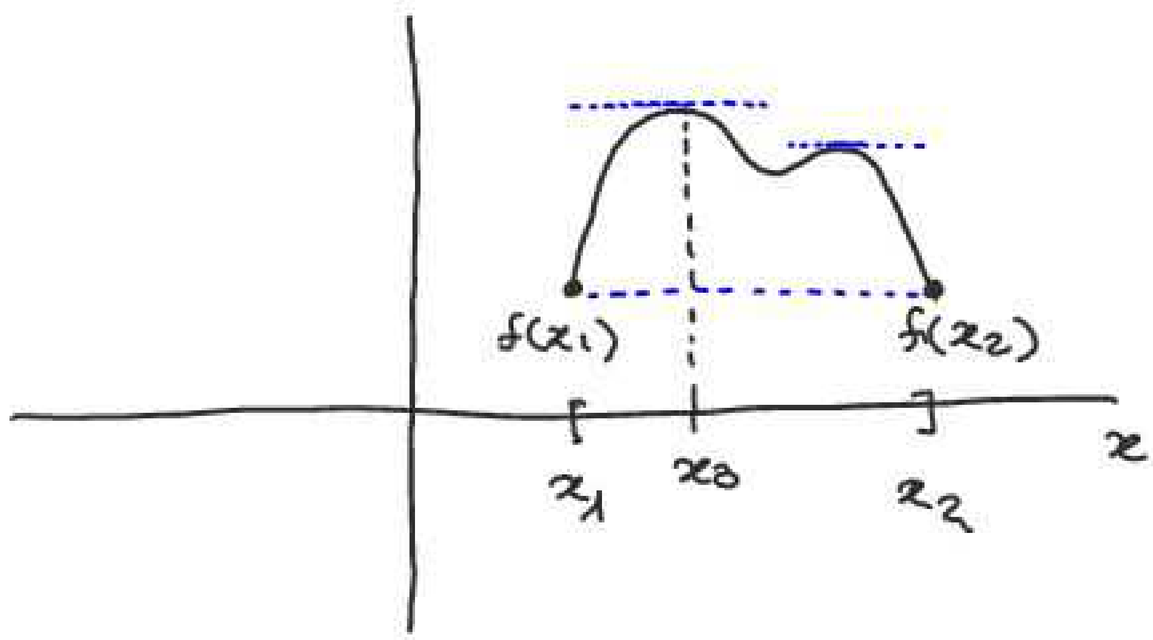
Teorema de Rolle:

$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$: continua en $[x_1, x_2]$

derivable en (x_1, x_2)

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) = 0$

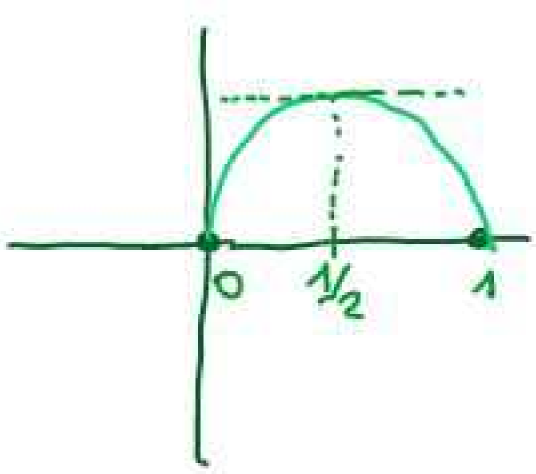


Ejemplo: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x(1-x)$ continua

$f'(x) = 1 - 2x \quad \forall x \in (0,1)$

$f(0) = f(1) = 0$



$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$

En efecto:

$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 1/2$

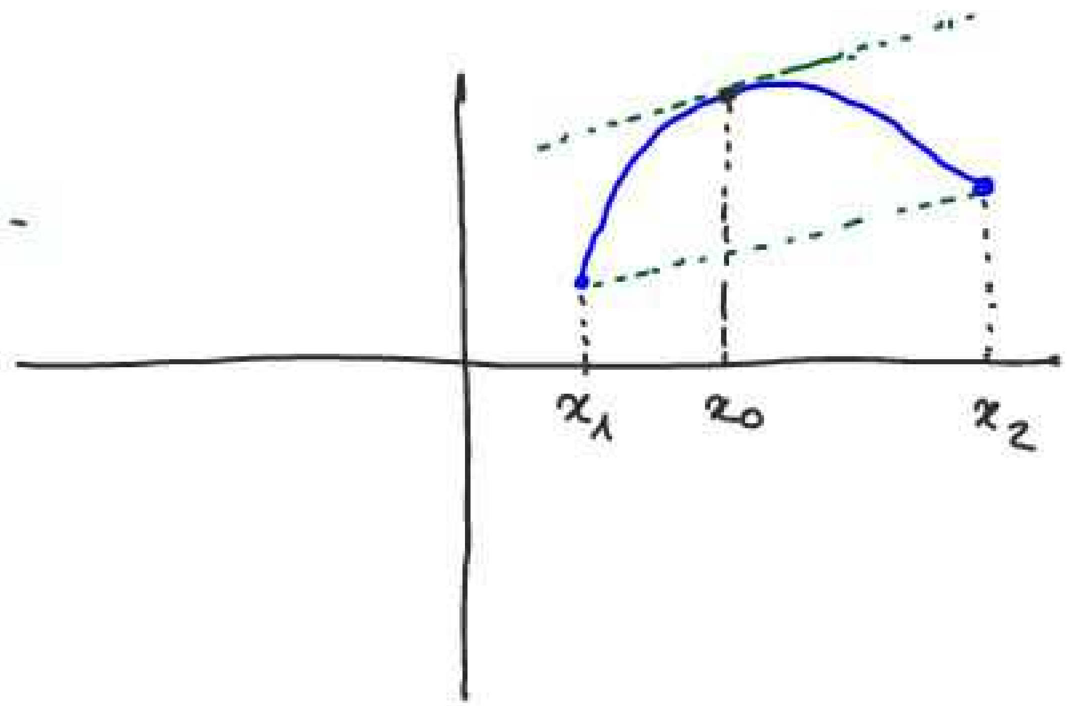
$\frac{1}{2} \in (0,1)$

Teorema del valor medio de Lagrange:

$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[x_1, x_2]$
derivable en (x_1, x_2)

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2) : \quad f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_0)(x_2 - x_1)$$



Ejemplo:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

continua en $[0,1]$ & derivable en $(0,1)$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,1) : \quad f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

En efecto:

$f(0) = 2$

$f(1) = 1$

$f'(x) = 6x^2 - 3$

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 6x^2 - 3 = -1$$

$$6x^2 = 2$$

$$x^2 = 1/3 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1).$$

Teorema del valor medio de Cauchy

$f, g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$: continuas en $[x_1, x_2]$
derivables en (x_1, x_2)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$(g(x_2) - g(x_1))\, f'(x_0) = (f(x_2) - f(x_1))\, g'(x_0)$$

Obs: Si $g'(x_0) \neq 0$ & $g(x_2) - g(x_1) \neq 0$
podemos escribir:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}$$

Este hecho permite demostrar el TEOREMA DE L'HOPITAL

Teorema de L'Hopital:

Sea $x_0 \in I = (x_1, x_2)$. Sean f y g dos funciones derivables en todos los puntos de $I \setminus \{x_0\}$.

Si
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs: El teorema también es válido si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

Ejemplos (L'Hopital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)\log(x)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\log x + 1 - 1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\log x}{x\log x + x - 1}$$

$$\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{1+\log x}{2+\log x} = \frac{1}{2}$$