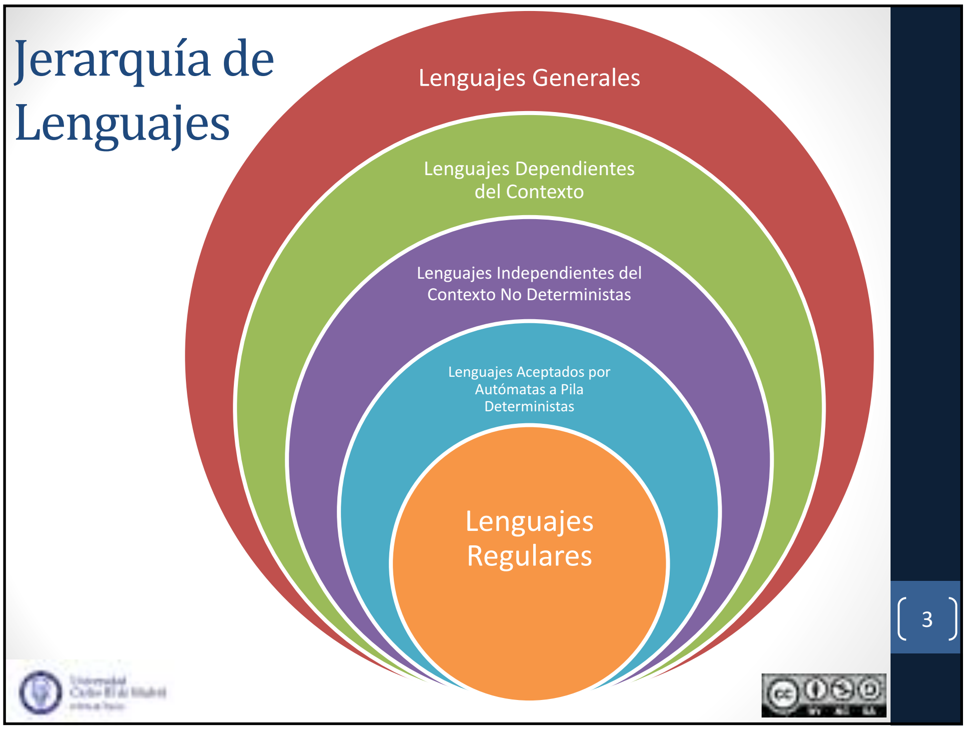
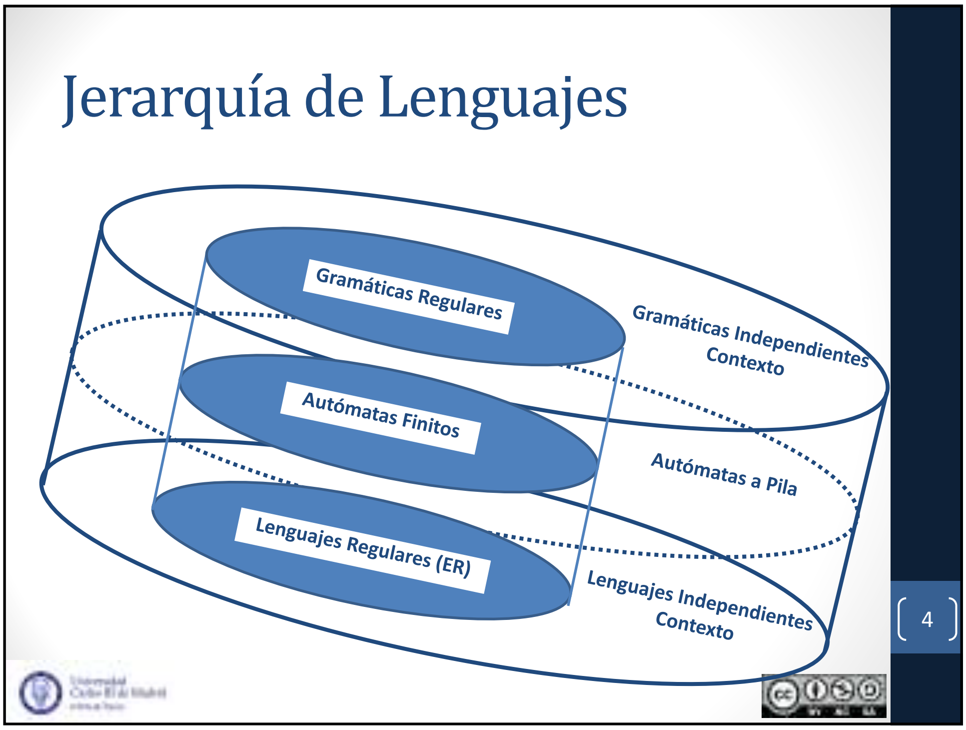
6. Autómatas a Pila

Grado Ingeniería Informática
Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

- Introducción
- Definición
- Equivalencias
- Lenguajes Tipo 2

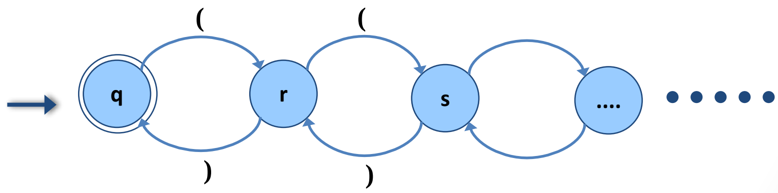

Jerarquía de
Lenguajes
Lenguajes Generales
Lenguajes Dependientes
del Contexto
Lenguajes Independientes del
Contexto No Deterministas
Lenguajes Aceptados por
Autómatas a Pila
Deterministas
Lenguajes
Regulares
3


Jerarquía de Lenguajes
Gramáticas Regulares
Autómatas Finitos
Lenguajes Regulares (ER)
Gramáticas Independientes
Contexto
Autómatas a Pila
Lenguajes Independientes
Contexto
4

Limitaciones de los AF

Falta de memoria

No pueden reconocer expresiones matemáticas, pej. `(2x+(2+n/25))`, mas general el lenguaje X^nY^n



5

Teoremas

1 Para cada gramática G independiente del contexto, existe un autómata de pila M tal que

L(G)=L(M)

2 Para cada autómata de pila M, existe una gramática G independiente del contexto tal que

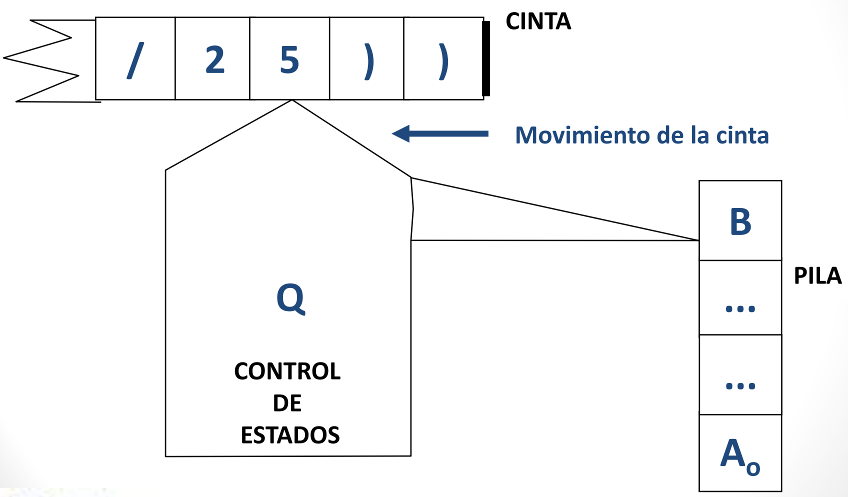
L(M)=L(G)

3 Existe un lenguaje independiente del contexto que no es el lenguaje aceptado por ningún autómata de pila determinista

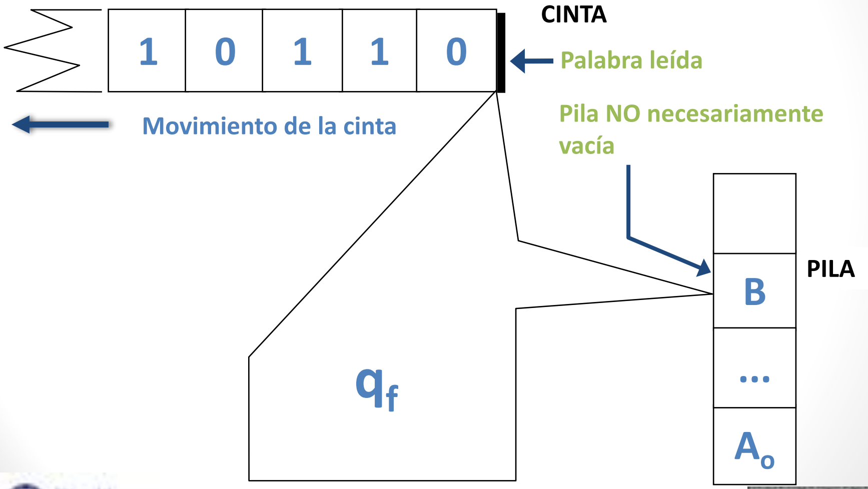
6

- Introducción
- Definición
- Equivalencias
- Lenguajes Tipo 2

Definición de AP

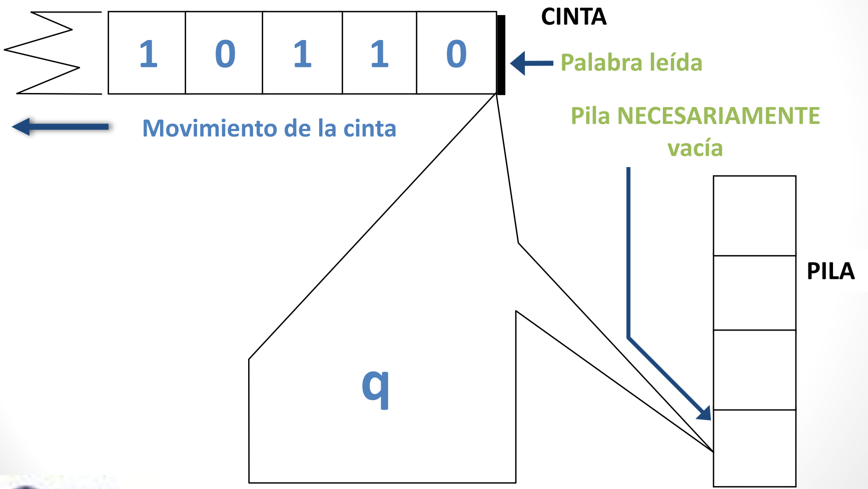


Aceptación por estados finales



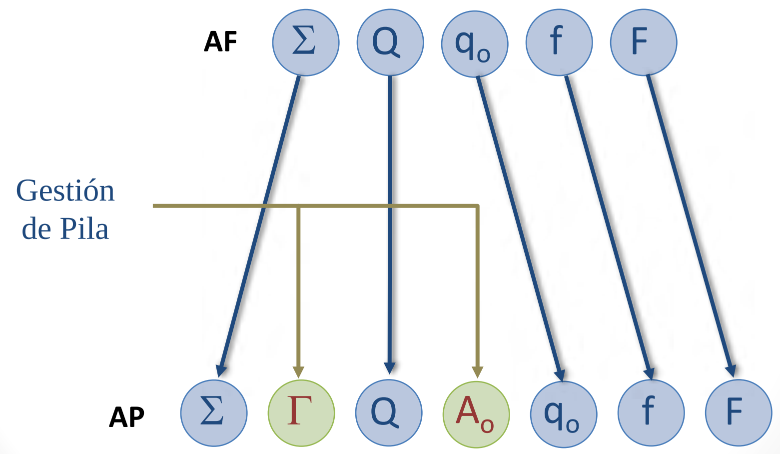
9

Aceptación por vaciado de pila



10

Definición formal



11

AP: $(\Sigma, \Gamma, Q, A_o, q_o, f, F)$

Σ : alfabeto de entrada — Palabras: x, y, z, ax, ay...

Γ : alfabeto de pila — Palabras: X, Y, Z, AX, AY...

Q : conjunto finito de estados — Q = {p,q,r,...}

$A_o \in \Gamma$: símbolo inicial de la pila

$q_o \in Q$: estado inicial del autómata

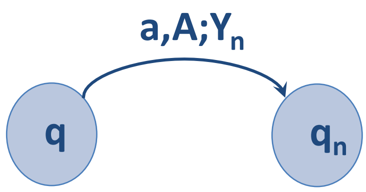
f : función de transición

$F \subset Q$: conjunto de estados finales

12

Transición

$f(q,a,A)=\{(q_1,Z_1),(q_2, Z_2),\ldots,(q_n, Z_n)\}$



$(q,a,A;q_n,Y_n)$

1. Leer un símbolo de la entrada
2. Extraer un símbolo de la pila
3. Insertar una palabra en la pila
4. Pasar a un nuevo estado

13

Función de Transición

$$f : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$$

Transiciones dependientes de la entrada
$Q \times \Sigma \times \Gamma$

Transiciones independientes de la entrada
$Q \times \lambda \times \Gamma$

AP Deterministas
$Q \times \Gamma^*$

AP No Deterministas
$P(Q \times \Gamma^*)$

14

T. independientes de la entrada

Sea la transición:

$f(q, \lambda, A) = \{(q_1, Z_1), (q_2, Z_2), \ldots, (q_n, Z_n)\}$

donde:

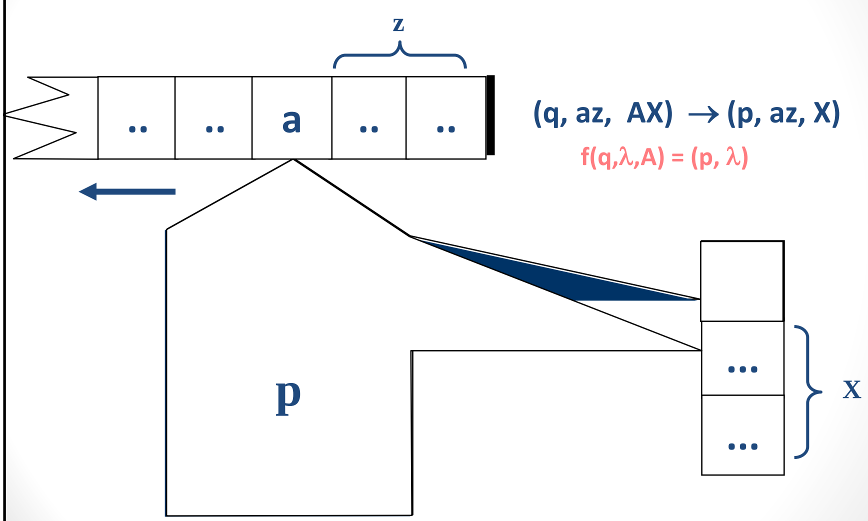
$q, q_i \in Q$

$A \in \Gamma$

$Z_i \in \Gamma^*$

15

T. independientes de la entrada



$(q, az, AX) \rightarrow (p, az, X)$

$f(q, \lambda, A) = (p, \lambda)$

16

T. dependientes de la entrada

Sea la transición:

$f(q,a,A) = \{(q_1,Z_1), (q_2,Z_2),\dots,(q_n,Z_n)\}$

donde:

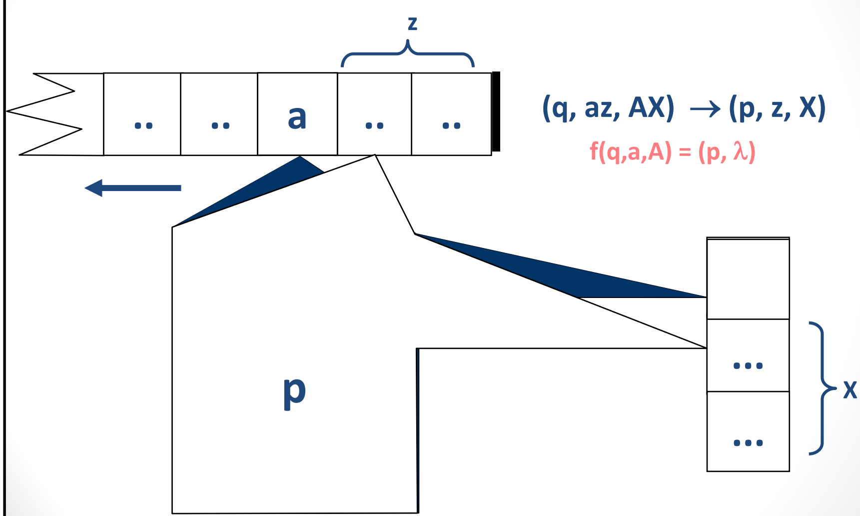
$q, q_i \in Q$

$a \in \Sigma$

$A \in \Gamma$

$Z_i \in \Gamma^*$

T. dependientes de la entrada



$(q, az, AX) \rightarrow (p, z, X)$

$f(q,a,A) = (p, \lambda)$

Descripción Instantánea

Permite describir sencillamente la configuración del AP en cada momento

Terna (q,x,z) donde:

$q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, $z \in \Gamma^*$

Contiene:
- el estado actual (**q**)
- lo que queda por leer de la entrada (**x**) y
- **el contenido de la pila (z) en un momento dado**

19

Descripción Instantánea

Movimiento: $(q,ay,AX) \vdash (p,y,YX)$
describe el paso de una descripción instantánea a otra

Sucesión de movimientos:
$(q,ay,AX) \vdash^* (p,y,YX)$
representa que desde la primera descripción instantánea se puede alcanzar la segunda

20

Autómatas a Pila Deterministas

$(\Sigma,\Gamma,Q,A_0,q_0,f,F)$ es determinista si verifica:

$\forall q\in Q,\ A\in\Gamma,\ |f(q,\lambda,A)|>0 \Rightarrow f(q,a,A)=\Phi\ \forall a\in\Sigma$

$\forall q\in Q,\ A\in\Gamma,\ \forall a\in\Sigma\cup\{\lambda\},\ |f(q,a,A)|<2$

Si $\exists\ f(q,\lambda,A)\ \nexists\ f(q,a,A)$ o
Si $\exists\ f(q,a,A)\ \nexists\ f(q,\lambda,A)$

si (p, x, y; q, z) y (p, x, y; r, w) son transiciones de un autómata a pila determinista entonces

$q\equiv r,\ z=w$

21

Lenguaje aceptado por un AP

Por vaciado de pila

$LV_{AP}=\{x\,|\,(q_0,x,A_0)\vdash^*(p,\lambda,\lambda),\ p\in Q,\ x\in\Sigma^*\}$

Por estado final

$LF_{AP}=\{x\,|\,(q_0,x,A_0)\vdash^*(p,\lambda,X),\ p\in F,\ x\in\Sigma^*,X\in\Gamma^*\}$

22

Ejemplo Alfonseca (viejo pp 224-225)

Dado el AP_V = ({0,1,2}, {A,0,1}, {p,q},A, p,f ϕ)

f(p,0,A) = (p,0A) ← **Transiciones de inicio (implican a A)**

f(p,0,0) = (p,00)

f(p,0,1) = (p,01) ← **Transiciones de apilamiento (leo 0 y recuerdo 00 o 01)**

f(p,1,A) = (p,1A) ← **Transiciones de inicio (implican a A)**

f(p,1,0) = (p,10)

f(p,1,1) = (p,11) ← **Transiciones de apilamiento (leo 1 y recuerdo 11 o 10)**

f(p,2,A) = (q,A) ← **Transiciones de inicio (implican a A)**

f(p,2,0) = (q, 0)

f(p,2,1) = (q, 1) ← **Transiciones de cambio de estado No afecta a la pila**

f(q,0,0) = (q, λ)

f(q,1,1) = (q, λ)

f(q, λ,A) = (q, λ) ← **Transiciones de desapilamiento (leo 0 o 1 y apilo λ)**

23

Ejemplo Alfonseca (viejo pp 224-225)

Es un AP por estado final

LF_{AP}={w 2 w^{-1}, w∈(0+1)*}

24

Ejemplo

LENGUAJE: algunas instrucciones

var ::= num; (asignación)

if cond
then
BLOQUE (asignación ó if)

if cond
then
BLOQUE (asignación ó if)
else
BLOQUE (asignación ó if)

25

Ejemplo

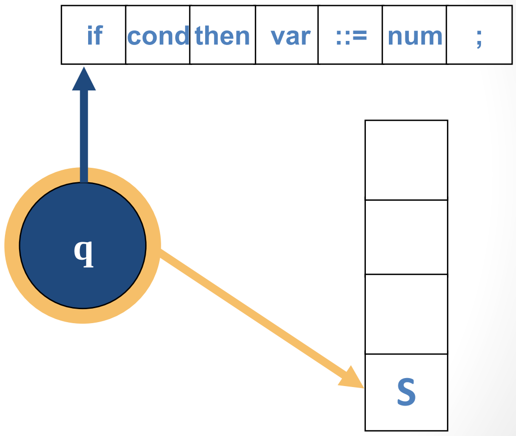
AP= ({if, then, else, ::=, var, num, cond, ;},
{S, B, C, F, N, P, T, E}, {q}, q, S, f, ϕ)

f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

ELEMENTOS DE Γ
S → Símbolo inicial
F → ::=
N → Numero
P → ;
C → Condición
T → Then
B → Bloque
E → Else

26

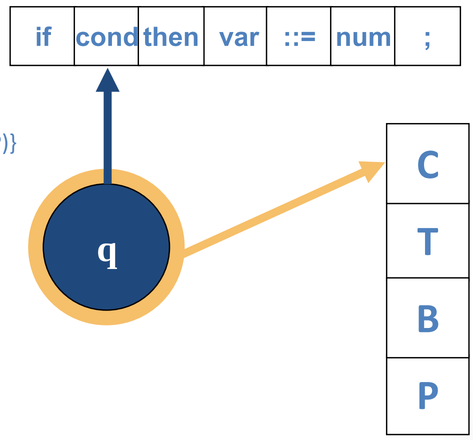
Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

27

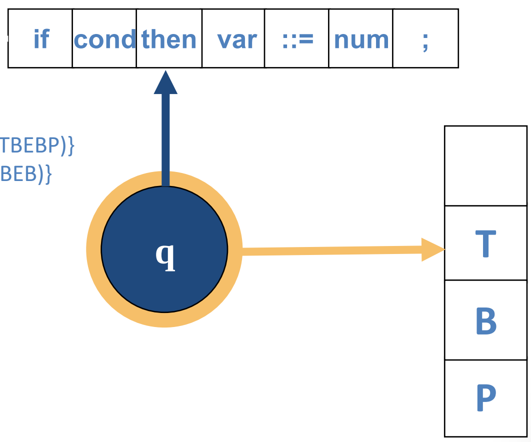
Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

28

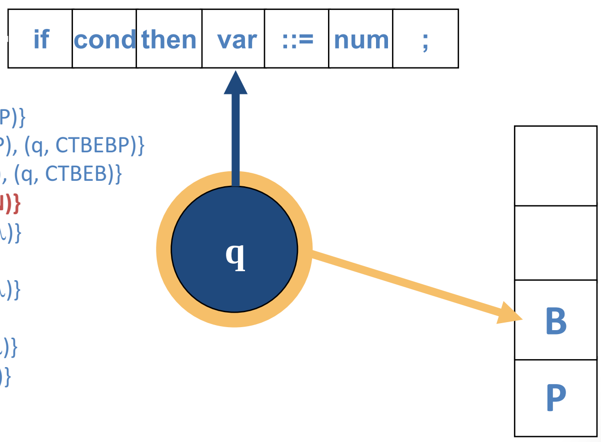
Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

29

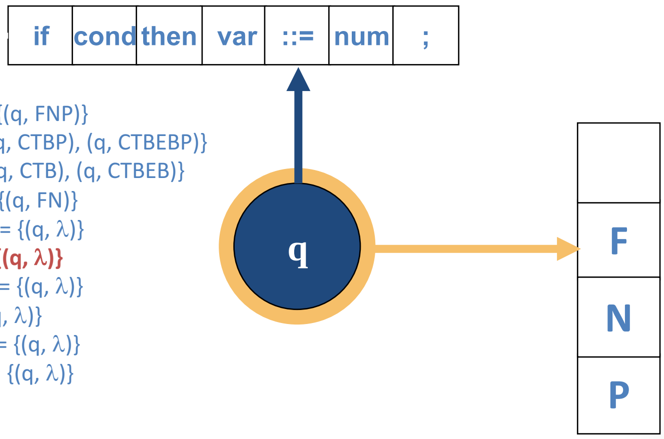
Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

30

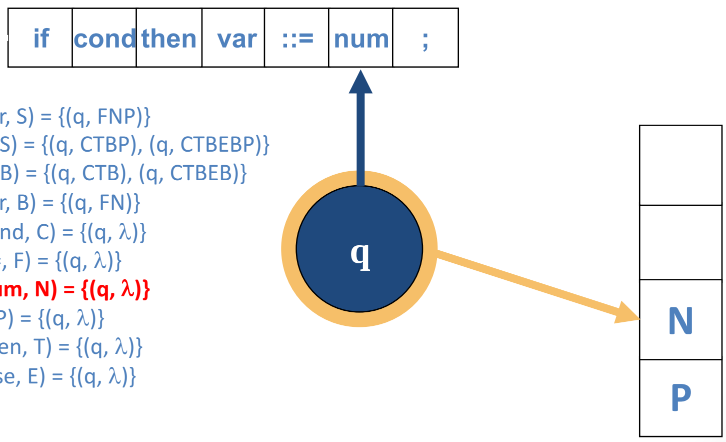
Ejemplo



f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

31

Ejemplo



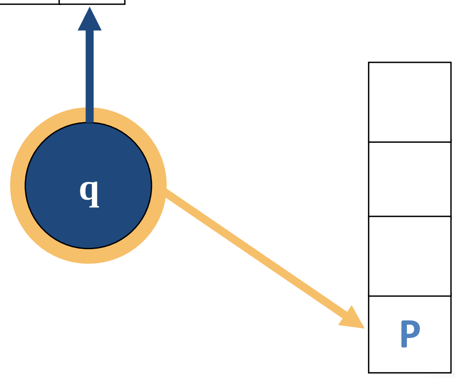
f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}

32

Ejemplo

if	cond	then	var	::=	num	;

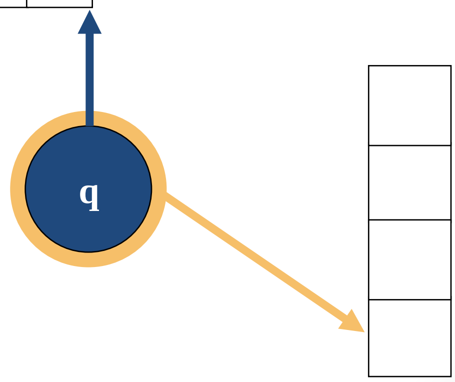
f(q, var, S) = {(q, FNP)}
f(q, if, S) = {(q, CTBP), (q, CTBEBP)}
f(q, if, B) = {(q, CTB), (q, CTBEB)}
f(q, var, B) = {(q, FN)}
f(q, cond, C) = {(q, λ)}
f(q, ::=, F) = {(q, λ)}
f(q, num, N) = {(q, λ)}
f(q, ;, P) = {(q, λ)}
f(q, then, T) = {(q, λ)}
f(q, else, E) = {(q, λ)}



33

Ejemplo

if	cond	then	var	::=	num	;



Pila vacía
Sentencia reconocida

34

- Introducción
- Definición
- Equivalencias
- Lenguajes Tipo 2

35

Equivalencias

Teorema

Para cada autómata de pila que acepte cadenas sin vaciar su pila, existe un autómata equivalente pero que vacía su pila antes de llegar a un estado de aceptación.

36

Paso de AP_F a AP_V

$AP_F = (\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, F)$

$AP_V = (\Sigma, \Gamma \cup \{B\}, Q \cup \{p,r\}, B, p, f', \phi)$

1. Nuevo símbolo para la pila
2. Dos estados nuevos
3. Valor inicial de la pila
4. Nuevo estado inicial
5. SIN estados finales

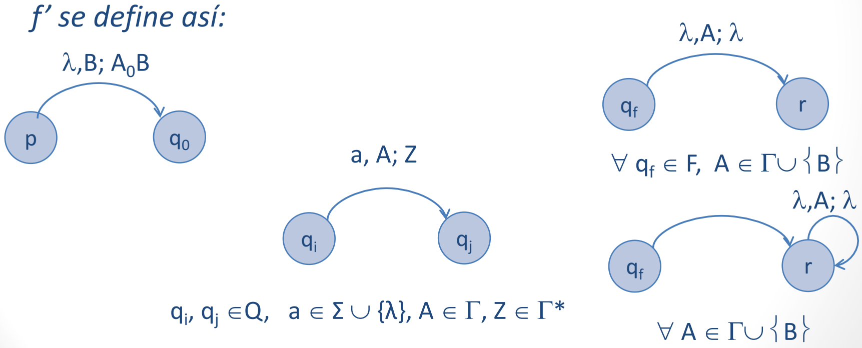
37

Paso de AP_F a AP_V

$AP_F = (\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, F)$

$AP_V = (\Sigma, \Gamma \cup \{B\}, Q \cup \{p,r\}, B, p, f', \phi)$

f' se define así:

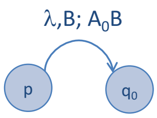


38

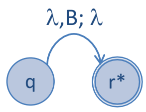
Paso de AP_V a AP_F

$AP_V=(\Sigma, \Gamma, Q, A0, q0, f, \phi) \rightarrow AP_F=(\Sigma, \Gamma \cup \{B\}, Q \cup \{p, r\}, B, p, f', \{r\})$

f' se define así:



$f'(p, \lambda, B) = (q_0, A_0B)$



$(r, \lambda) \in f'(q, \lambda, B) \quad \forall q \in Q,$

$f(q, a, A) = f'(q, a, A) \quad \forall q \in Q, \ a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, A \in \Gamma$

- Introducción
- Definición
- Equivalencias
- Lenguajes Tipo 2

40

De Gramática Tipo 2 a AP_V

Dada una G2 en FNG, construir un AP_V:

$$G = (\Sigma_T, \Sigma_N, S, P)$$

entrada pila inicial de pila

$$AP_V = (\Sigma_T, \Sigma_N, \{q\}, S, q, f, \phi)$$

Se obtiene un AP_V con un solo estado

41

De Gramática Tipo 2 a AP_V

f se define como:

$$(q, Z) \in f(q, a, A)$$

es decir:

f(q, a, A) = (q, Z) si existe una producción del tipo A ::= a Z

f(q, a, A) = (q, λ) si existe una producción del tipo A ::= a

f(q, a, A) = {(q, Z), (q, λ)}

dada una producción:

A::= aZ | aD | b $\Rightarrow$ f(q, a, A)= {(q, Z), (q, D)}

f(q, b, A) = (q, λ)

Si S::= $\lambda \Rightarrow$ (q,λ) $\in$ f(q,λ,S)

42

De AP_V a Gramática Tipo 2

Dado un AP_V, construir una G2 tal que $L(G2) = L(AP_V)$

$$AP_V = (\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, f, \phi)$$

$$G = (\Sigma_T, \underbrace{\Sigma_N}_{\{S\} \cup \{ (pAq) \mid p, q \in Q,\ A \in \Gamma\}}, S, P)$$

Para construir P:

1. S::= (q_0, A_0 ,q) $\forall$ q $\in$ Q (se eligen las que empiezan por q_0A_0)
2. De cada transición f(p,a,A) = (q, BB'B''....B''')
   donde:
   A,B,B',B'',...,B''' $\in \Gamma$; a $\in \Sigma \cup \{\lambda\}$
   se obtiene:
   (p A z) ::= a (q B r) (r B' s) s ... y (y B''' z)
3. De cada transición f(p, a, A) = (q, λ) se obtienen: (p,A,q) ::= a

45

Bibliografía

- Libro Básico 1 Bibliografía. Enrique Alfonseca Cubero, Manuel Alfonseca Cubero, Roberto Moriyón Salomón. Teoría de autómatas y lenguajes formales. McGraw-Hill (2007).
  Capítulo 4 y Apartado 8.1
- Libro Básico 2 Bibliografía. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D.Ullman. Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación (3ª edición). Ed, Pearson Addison Wesley.
  Capítulo 6
- Libro Básico 4 Bibliografía. Manuel Alfonseca, Justo Sancho, Miguel Martínez Orga. Teoría de lenguajes, gramáticas y autómatas. Publicaciones R.A.E.C. 1997
  Capítulo 10

46