LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIBLE REAL

Sea $l \in \mathbb{R}$, diremos que $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |f(x) - l| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon}$$

Es decir:

$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff$ Los valores de $f(x)$ se pueden acercar a l tanto como queramos sin más que tomar la x suficientemente cerca de x_0 (pero con $x \neq x_0$)

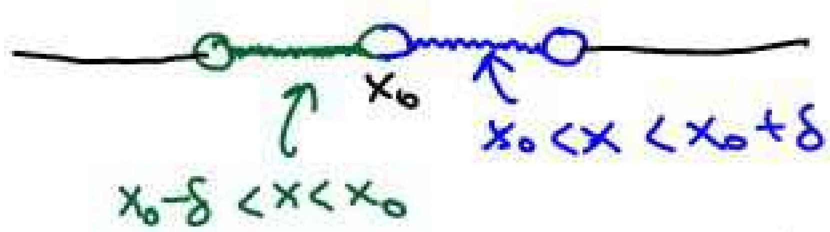
Observaciones:

(1) El valor de f en $x = x_0$ NO juega ningún papel a la hora de calcular el límite.
En particular, x_0 no necesita pertenecer al dominio de f.

(2) Los valores de x alejados de x_0 tampoco juegan ningún papel a la hora de calcular un límite.

(3) Es importante darse cuenta de que:

$0 < |x - x_0| < \delta \iff$ o bien $x_0 < x < x_0 + \delta$
o bien $x_0 - \delta < x < x_0$



Este hecho invita a definir los LÍMITES LATERALES

LATERAL IZQUIERDA $\quad l_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_-| < \varepsilon$ si $x_0 - \delta < x < x_0$

LATERAL DERECHA $\quad l_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_+| < \varepsilon$ si $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

Teorema $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Ejemplo
- $\lim_{x\to 1/2} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 1/2^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 1/2^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$

Obs: En la práctica, casi nunca calcularemos los límites usando la definición

Obs: Propiedades de los límites:

Si $\ell_1 = \lim_{x\to x_0} f_1(x)$

$\ell_2 = \lim_{x\to x_0} f_2(x)$

$\Rightarrow$
- $\lim_{x\to x_0} \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) = \ell_1 \pm \ell_2$
- $\lim_{x\to x_0} \left(f_1(x) \cdot f_2(x) \right) = \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ (si $\ell_2 \neq 0$)
- $\lim_{x\to x_0} \left(f_1(x) \right)^{f_2(x)} = \ell_1^{\ell_2}$ (si ℓ_1 y $\ell_2 \neq 0$)

  0^0 indeterminación
- $\lim_{x\to x_0} \log\left(f_1(x) \right) = \log \ell_1$ (si $\ell_1 > 0$)

Obs: Si $f: D \to \mathbb{R}$ con $D = (x_1, x_2)$ ó $[x_1, x_2]$ ó $(x_1, x_2]$ ó
ó $[x_1, x_2)$,

es decir, cuando el dominio de f sea un intervalo:

$$l_1 = \lim_{x \to x_1} f(x) \Leftrightarrow l_1 = \lim_{x \to x_1^+} f(x)$$

$$l_2 = \lim_{x \to x_2} f(x) \Leftrightarrow l_2 = \lim_{x \to x_2^-} f(x)$$

Es decir, si el dominio es un intervalo (cerrado o no), el límite en los extremos del intervalo se define a través de los límites laterales.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Si x_0 es un punto cualquiera del dominio de f podemos comparar el valor de $f(x_0)$ con el valor, si existe, de $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Def: Función continua en x_0

Sea $x_0 \in \text{Dominio}(f)$.

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def: Función continua:

Diremos que f es continua $\Leftrightarrow$ f es continua en x para todo x de su dominio

Ejemplos:
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es continua en $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- $f(x) = x$ es una función continua
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$

  no es continua en ningún punto

TEOREMA: FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS CERRADOS Y ACOTADOS

Sea $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (es decir, $f(x)$ es continua $\forall x$ en el intervalo cerrado y acotado $[x_1, x_2]$)

Entonces $\text{Im}(f) = [m, M]$ ← intervalo cerrado y acotado

Corolario: Si $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$\exists x_M \in [x_1, x_2]$ tal qe $f(x_M) \geq f(x) \ \forall x \in [x_1, x_2]$
$\exists x_m \in [x_1, x_2]$ tal qe $f(x_m) \leq f(x) \ \forall x \in [x_1, x_2]$

Dem: Puesto que $Im(f) = [m, M]$ existen
$x_m, x_M \in [x_1, x_2]$ tales qe $f(x_m) = m$
$f(x_M) = M$

$$\Rightarrow \quad m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_m) = M$$
$$\forall x \in [x_1, x_2].$$

Corolario: $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ es continua;
$f(x_1) < 0$ & $f(x_2) > 0$;
$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2)$ tal qe $f(x_0) = 0$

Dem: $Im(f) = [m, M]$

$m \leq f(x_1) < 0 < f(x_2) \leq M$

$\Rightarrow \quad m < 0 < M \Rightarrow 0 \in [m, M] = Im(f)$

Por tanto, puesto qe $0 \in Im(f)$:
$\exists x_0 \in D$ tal qe $f(x_0) = 0$.