Tema 2:
Teoría de la Demostración

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

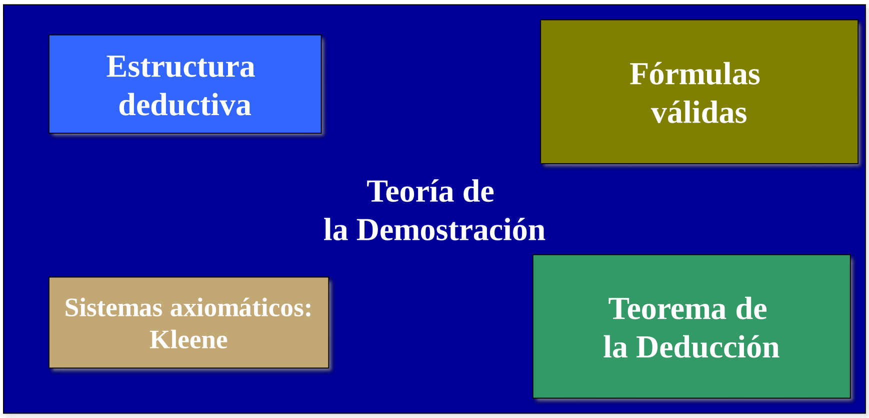
2018/19

uc3m

Una vez en este punto…

- Hasta este momento nos hemos limitado a simbolizar (representar nociones por medio de símbolos) pero no hemos formalizado la estructura deductiva.
- Es necesario representar matemáticamente los procesos de razonamiento mediante los cuales se obtienen conclusiones a partir de premisas
- Para esto abordaremos la Teoría de la Demostración (deducción axiomática)

Mapa conceptual



Introducción a la T. de la Demostración

- **Estructura deductiva:** es una representación formal de un proceso de razonamiento para obtener una **conclusión** a partir de unas **premisas**.

Premisas → Conclusión

- Las deducciones se demuestran fórmula a fórmula.
- Las conclusiones se apoyan en fórmulas previamente probadas o dadas por buenas

Introducción a la T. de la Demostración

- La formalización de las **estructuras deductivas** en teoría de la demostración requiere:
  - Un sistema de fórmulas válidas.
    - Una serie de fórmulas que se asumen como válidas por hipótesis (axiomas del sistema)
    - Unas reglas de demostración o inferencia que permiten obtener nuevas fórmulas válidas a partir de los axiomas.
  - Una definición de deducción que permita, aplicando las reglas, representar cualquier deducción correcta.

Teoría de la demostración

- **Definición:** un sistema de demostración formal S o sistema de pruebas se define matemáticamente mediante los siguientes cuatro elementos:
  - **A** es el alfabeto del sistema: el conjunto de símbolos que se pueden utilizar,
  - **F** es el conjunto de reglas de sintaxis: las reglas que permiten definir las fórmulas bien construidas,
  - **X** es el conjunto de axiomas: fórmulas válidas por definición,
  - **R** es el conjunto de reglas de inferencias: reglas de transformación que permiten inferir una fórmula, la conclusión, a partir de un conjunto de fórmulas, las condiciones o premisas.
- Es necesario que el conjunto de axiomas y reglas sea consistente (no contradictorio):
  - no pueda demostrarse una fórmula y su negación.

Teoría de la demostración

- Un sistema de demostración *S* como el anterior se puede representar en forma compacta como

S = (A, F, X, R)

- Existen varios sistemas, entre los que podemos mencionar:
  - Sistema L (Lukasiewizc y Church).
  - Sistema PM. (Principia Mathematica)
  - Sistema de Kleene.

Teoría de la demostración

- Sistemas de demostración se pueden dividir en dos clases:
  - Sistemas directos
  - Sistemas indirectos (o por refutación).
- **Sistemas directos:** los primeros aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar.
  - Los sistemas de demostración directos tienen interés histórico y además son los más naturales ya que son los más cercanos a la forma de razonamiento habitual.
  - Los sistemas directos son de difícil automatización.
  - El sistema de demostración directo que vamos a estudiar es el sistema axiomático de Kleene
- **Sistemas indirectos:** aplican la técnica de reducción al absurdo.

Teoría de la demostración

- Sistema L (Alfabeto A={prop., $\rightarrow$, ~, (,)}
  - Axiomas:
    - **A1.** $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
    - **A2.** $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
    - **A3.** $\vdash (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - Regla de demostración:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B, \ \vdash A}{\vdash B}$$

  - Reglas de interdefinición de conectivas:
    - $A \wedge B \ \leftrightarrows \ \sim(A \rightarrow \sim B)$
    - $A \vee B \ \leftrightarrows \ \sim A \rightarrow B$
    - $A \leftrightarrow B \ \leftrightarrows \ \sim((A \rightarrow B) \rightarrow \sim(B \rightarrow A))$

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, F, X, R**)**

- Definido por:
  1. A: Un alfabeto compuesto por:
     - Símbolos p, q, r, s, t, .. (proposiciones atómicas)
     - Símbolos de conectivas (~, ∧, ∨, →)
     - Paréntesis “(”, “)”.

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, **F**, X, R**)**

- Definido por:

  2. F: el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define recursivamente como:
     - At: toda proposición atómica es una fbc,
     - ~: si A es una fbc entonces ~A es una fbc,,
     - Resto: si A y B son fbc, entonces $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $B \to A$ son fbc.
     - Toda fbc se obtiene mediante las tres reglas anteriores.

Nota: en lo que se sigue usaremos también la conectiva de equivalencia (o bicondicional) entre dos fórmulas, $A \leftrightarrow B$: Esta conectiva se entenderá como una forma abreviada de representar la fórmula bien construida $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, F, **X**, R**)**

- Definido por:

  3. X: Axiomas

Fórmula válida

A1. $\vdash A \to (B \to A)$

A2. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

A3. $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$

A4. $\vdash A \wedge B \to A$, $\vdash A \wedge B \to B$

A5. $\vdash A \to A \vee B$, $\vdash B \to A \vee B$

A6. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

A7. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$

A8. $\vdash \sim\sim A \to A$

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, F, X, **R)**
- Definido por:
  4. R: Regla de demostración (Modus Ponens):

$$\frac{\vdash A \rightarrow B,, \vdash A}{\vdash B}$$

De A → B y A, se puede deducir B (como fórmula válida)

Concepto de demostración

- Una demostración de una fórmula A en el sistema, es una sucesión de fórmulas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ tales que:
  - Cada fórmula p_i, elemento de la sucesión es:
    - Un axioma.
    - Una fórmula válida obtenida a partir de las anteriores, aplicando la regla de demostración.
  - El **último elemento** de la sucesión: $\mathbf{p_n}$ es precisamente la **fórmula a demostrar** A.

Concepto de demostración

- Ejemplo de demostración I

T. Identidad: $\mathbf{A \to A}$

1. $\vdash A \to (A \to A)$ Axioma 1 de Kleene $B \Leftrightarrow A$
2. $\vdash (A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A))$

   Axioma 2 de Kleene, definiendo $B \Leftrightarrow A \to A$, $C \Leftrightarrow A$, $A \Leftrightarrow A$
3. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ Modus Ponens 1 y 2
4. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A))$ Axioma 1 de Kleene, definiendo $B \Leftrightarrow A \to A$
5. $\vdash (A \to A)$ Modus ponens 4,3

Concepto de demostración

- Ejemplo de demostración II

Commutatividad de la disyunción: $\mathbf{(A \vee B) \to (B \vee A)}$

1. $\vdash (A \to B \vee A) \to ((B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A))$

   Axioma 6, definiendo $C \Leftrightarrow B \vee A$
2. $\vdash A \to B \vee A$ Axioma 5
3. $\vdash (B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A)$ Modus Ponens 1,2
4. $\vdash B \to B \vee A$ Axioma 5
5. $\vdash (A \vee B \to B \vee A)$ Modus Ponens 3,4

Deducción

- Una deducción o estructura deductiva se describe mediante dos sucesiones separadas por el signo $\Rightarrow$

$$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,\ldots,q_m$$

- La sucesión p_i es el antecedente de la deducción y sus elementos se llaman premisas. La sucesión q_i es el consecuente de la deducción y sus elementos se llaman conclusiones.

Deducción

- Deducción correcta
  - Una estructura deductiva se define como correcta cuando la sucesión consecuente se obtiene de acuerdo con alguna de las reglas siguientes.
    - q_i es una de las premisas.
    - q_i es una fórmula válida del sistema (axioma o teorema[1]).
    - q_i se deduce de alguna premisa o alguna conclusión previa aplicando las reglas de inferencia.

[1]*Fórmula obtenida a partir de los axiomas mediante las reglas de inferencia con que se define el sistema.*

Deducción

- Ejemplo de deducción (I)

$$\mathbf{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A \Rightarrow C}$$

1 . $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Premisa 1
2. B	Premisa 2
3. A	Premisa 3
4. $B \rightarrow C$	Modus Ponens 3,1
5. C	Modus Ponens 2,4

Deducción

- Ejemplo de deducción (II)

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \Rightarrow C$$

1 . $A \rightarrow B$	Premisa 1
2. $B \rightarrow C$	Premisa 2
3. A	Premisa 3
4. B	Modus Ponens 3,1
5. C	Modus Ponens 2,4

Teorema de la deducción

- Permite definir una relación entre las estructuras deductivas correctas y las fórmulas válidas.
- Si $p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,..,q_m$ es una deducción correcta, existe una deducción correcta de $p_n \to q_m$ con premisas $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}$:

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow q_1,q_2,.., q_{m-1}, p_n \to q_m$$

- Es decir, si $q_1,q_2,..,q_m$ es deducible de $p_1,p_2,\ldots,p_n$, entonces $p_n \to q_m$ es deducible de $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}$

Teorema de la deducción

- De acuerdo con el concepto de demostración, la deducción

$$p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,..,q_m$$

se puede escribir como la secuencia

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}, p_n, q_1,q_2,.., q_m$$

o también (por teorema de la deducción)

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}, q_1,q_2,.., q_{m-1},p_n \to q_m$$

Teorema de la deducción

- Cuestiones clave:
  - De una estructura deductiva correcta siempre es posible encontrar una fórmula válida que la representa
    - Aplicar el teorema de la deducción de forma sucesiva hasta que desaparezca la secuencia antecedente).
  - Una estructura deductiva correcta es también una regla de demostración si se asumen como fórmulas válidas las premisas.

Teorema de la deducción

- Si $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es una deducción correcta, entonces

  $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q$ es también una deducción correcta

  $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{n-2} \Rightarrow p_{n-1} \rightarrow (p_n \rightarrow q)$ es también una deducción correcta

  .....

  $\vdash p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots (p_n \rightarrow q))$ es una fórmula válida

- También es válido el proceso inverso de fórmula válida a deducción correcta

Teorema de la deducción

- Ejemplo1:

  Si $A \wedge B, B \rightarrow C, C \rightarrow D \Rightarrow D$ es una deducción correcta, entonces:

  $A \wedge B, B \rightarrow C \Rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow D$ también lo es

  $A \wedge B \Rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow D)$ también lo es

  $\vdash A \wedge B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow D))$ es fórmula válida

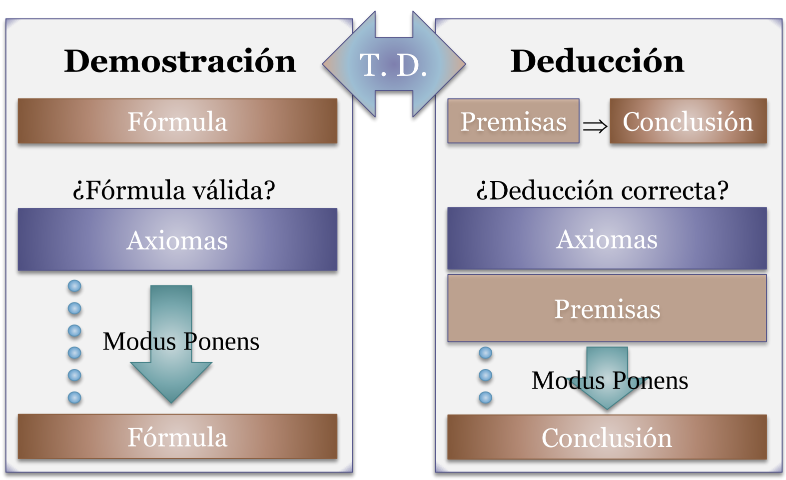
- Ejemplo2:

  Si $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ es fórmula válida, entonces:

  $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ es deducción correcta

  $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A \Rightarrow C$ es deducción correcta

Demostración vs deducción



Reglas derivadas (aplicando TD)

- Axiomas
  - **A1 .** $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - **A2.** $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - **A3.** $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
  - **A4.** $\vdash A \wedge B \rightarrow A$,, $\vdash A \wedge B \rightarrow B$
  - **A5.** $\vdash A \rightarrow A \vee B$,, $\vdash B \rightarrow A \vee B$
  - **A6.** $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
  - **A7.** $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$
  - **A8.** $\vdash \sim\sim A \rightarrow A$

Con el T. de la Deducción

$A \Rightarrow B \rightarrow A$

$A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \Rightarrow C$

$A, B \Rightarrow A \wedge B$

$A \wedge B \Rightarrow A$ $\quad$ $A \wedge B \Rightarrow B$

$A \Rightarrow A \vee B$ $\quad$ $B \Rightarrow A \vee B$

$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \Rightarrow C$

$A \rightarrow B, A \rightarrow \sim B \Rightarrow \sim A$

$\sim\sim A \Rightarrow A$

Reglas derivadas (aplicando TD)

- Axiomas
  - **A1 .** $A \Rightarrow B \rightarrow A$ — Introducción del antecente
  - **A2.** $A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \Rightarrow C$
  - **A3.** $A, B \Rightarrow A \wedge B$ — Regla del producto
  - **A4.** $A \wedge B \Rightarrow A$,, $A \wedge B \Rightarrow B$ — Regla de simplificación
  - **A5.** $A \Rightarrow A \vee B$,, $B \Rightarrow A \vee B$ — Regla de la adición
  - **A6.** $A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \Rightarrow C$ — Prueba por casos
  - **A7.** $A \rightarrow B, A \rightarrow \sim B \Rightarrow \sim A$ — Reducción al absurdo
  - **A8.** $\sim\sim A \Rightarrow A$ — Eliminación de la doble negación

Teoremas

Definición recursiva de **teorema**:

- Un teorema es una fórmula válida (demostrable) y tiene la siguiente definición recursiva:
  - Una fórmula bien construida *A* es un teorema si es un axioma o si se obtiene como conclusión de la aplicación de un conjunto de reglas de inferencias a otros teoremas.

Es un axioma
O
se obtiene como conclusión de otras reglas

- La demostración de un teorema es la demostración de una deducción cuyo conjunto de premisas es vacío.

Teoremas

T3: Modus ponens (T. Deducción)

$\vdash A \to ((A \to B) \to B)$

RD: A, A → B, ⇒ B

- De una implicación y de su premisa se deduce su conclusión.

Ejemplo:

P1. Luis es un hombre

P2. Si Luis es un hombre entonces es mortal

Q => Luis es mortal.

Teoremas

T1: Teorema de la identidad:

$$\vdash A \rightarrow A$$

RD: $A \Rightarrow A$

De toda fórmula se deduce ella misma.

Ya demostrado anteriormente.

Teoremas

T2: Regla del silogismo (prop. Transitiva)

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

RD: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$

De dos implicaciones ($A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$) tales que la conclusión de la primera es la premisa de la segunda se deduce la implicación de la premisa de la primera fórmula a la conclusión de la segunda. ($A \rightarrow C$).

Ejemplo:

P1. *Si como mucho entonces me duele la tripa.*

P2. *Si me duele la tripa entonces me tumbo en la cama*

Q => *Si como mucho entonces me tumbo en la cama*

Ya demostrado anteriormente.

Teoremas

T4: Excontradictione Quodlibet

$A \to (\sim A \to B)$ o bien, $\vdash \sim A \to (A \to B)$

RD: $A , \sim A \Rightarrow B$

- De una fórmula y de su negación se deduce **cualquier fórmula**.
- **Ejemplo**:
  - P1. Pedro es un hombre
  - P2. Pedro no es un hombre.
  - *Q* => Por lo tanto se deduce que el cielo es azul.

Ya demostrado anteriormente.

Teoremas

T5: Producto Condicional

$\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

RD: $A \to B, A \to C \Rightarrow A \to B \wedge C$

- De dos implicaciones con la misma premisa se deduce la implicación de esa misma premisa y conjunción de sus conclusiones.
- **Ejemplo**: si x es par, es divisible entre dos y si x es par entonces no es impar, por lo tanto, se deduce que si x es par, entonces x es divisible entre dos y no es impar.

Teoremas

T5: Producto Condicional

$$\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$$

$$A \to B,, A \to C,, A \Rightarrow B \wedge C$$

1.	$A \to B$	Premisa 1
2.	$A \to C$	Premisa 2
3.	A	Premisa 3
4.	B	Modus Ponens 3,1
5.	C	Modus Ponens 3,2
6.	$\vdash B \to (C \to B \wedge C)$	Ax 3
7.	$(C \to B \wedge C)$	Modus Ponens 4,6
8.	$B \wedge C$	Modus Ponens 5,7

Teoremas

T6: Contraposición

RD: $A \to B \Rightarrow \sim B \to \sim A$

$\vdash (A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$,

$\vdash (A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$, (Equivalente)

$\vdash (\sim A \to B) \to (\sim B \to A)$ (Equivalente)

- De una implicación se deduce su "contrapositiva".
- **Ejemplo**: de "voy en metro sólo si llueve", se deduce, que "si no llueve no voy en metro"

Teoremas

T7: Interdefinición (de conectivas) respecto conjunción

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim (A \wedge \sim B))$ (Directa) RD: $A \rightarrow B \Rightarrow \sim (A \wedge \sim B)$

- De una implicación se deduce la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.
- **Ejemplo**: de "voy en metro sólo si llueve" se deduce que no es posible que vaya en metro y no llueva.
- Y también el recíproco del anterior: una implicación se deduce de la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión:

$\vdash \sim(A \wedge \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Recíproca) RD: $\sim (A \wedge \sim B) \Rightarrow A \rightarrow B$

Teoremas

T8: Interdefinición (de conectivas) respecto disyunción

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B$ (Directa) RD: $A \rightarrow B \Rightarrow \sim A \vee B$

- De una implicación se deduce la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.
- **Ejemplo:** de "Una función derivable es continua" se deduce que "Una función o no es derivable, o es continua".

$\vdash \sim A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Recíproca) RD: $\sim A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$

Teoremas

T9: Leyes de De Morgan

$\vdash \sim(A \vee B) \rightarrow \sim A \wedge \sim B$ (Directa)

$\vdash \sim A \wedge \sim B \rightarrow \sim(A \vee B)$ (Recíproca)

RD: $\sim(A \vee B) \Rightarrow \sim A \wedge \sim B$
RD: $\sim A \wedge \sim B \Rightarrow \sim(A \vee B)$

De la negación de la disyunción de dos fórmulas se deduce la conjunción de las negaciones de las mismas.

- **Ejemplo**: de "no es posible que Pedro sea hermano de Marta o que sea hermano de Luis". De esto se deduce que "Pedro no es hermano de Marta y Pedro no es hermano de Luis".

T9b: Leyes de De Morgan

$\vdash \sim(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$ (Directa), $\vdash \sim A \vee \sim B \rightarrow \sim(A \wedge B)$ (Recíproca)

RD: $\sim(A \wedge B) \Rightarrow \sim A \vee \sim B$	RD: $\sim A \vee \sim B \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Teoremas

Propiedades conjunción $\wedge$

T10: Propiedad conmutativa

$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$, $\vdash (B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$

T11: Propiedad asociativa

$\vdash A \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $\vdash (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$

T12: Propiedad distributiva

$\vdash A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$

T13: Propiedad de absorción

$\vdash A \wedge (A \vee B) \rightarrow A$, $\vdash A \rightarrow A \wedge (A \vee B)$

T14: Idempotencia

$\vdash A \wedge A \rightarrow A$, $\vdash A \rightarrow A \wedge A$

Teoremas

Propiedades disyunción $\vee$

T15: Propiedad conmutativa

$\vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$, $\vdash (B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$

T16: Propiedad asociativa

$\vdash A \vee (B \vee C) \rightarrow (A \vee B) \vee C$, $\vdash (A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C)$

T17: Propiedad distributiva

$\vdash A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
$\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$

T18: Propiedad de absorción

$\vdash A \vee (A \wedge B) \rightarrow A$, $\vdash A \rightarrow A \vee (A \wedge B)$

T19: Idempotencia

$\vdash A \vee A \rightarrow A$, $\vdash A \rightarrow A \vee A$

Teoremas

T20: Coimplicación

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

- La coimplicación (doble implicación) entre dos fórmulas se deduce de las dos implicaciones que tienen estas dos fórmulas como premisa y conclusión y como conclusión y premisa, respectivamente.

Teoremas

T21: Eliminación de la Coimplicación

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$
$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

- De una coimplicación entre dos fórmulas se deducen las implicaciones de cada una a la otra.

T22: Propiedad Simétrica Coimplicación

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$$

Teoremas

T23: Importación-Exportación

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \quad \text{(Directa)}$$
$$\vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad \text{(Recíproca)}$$

- De una implicación cuya conclusión es una implicación $A \rightarrow B$ se deduce la implicación de la conjunción de las dos premisas a la conclusión B.

- **Ejemplo:** Sean
  - p = n es un número natural,
  - q = n es par,
  - r = el cuadrado de n es par.

  entonces,
  "si n es número natural, entonces, si n es par, su cuadrado es par.
  Se deduce que:
  "si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par"

Teoremas

T23: Importación-Exportación

$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ (Directa)

$\vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (Recíproca)

$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \wedge B \Rightarrow C$

- Demostración:
  1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ Premisa 1
  2. $A \wedge B$ Premisa 2
  3. $\vdash A \wedge B \rightarrow A$ Ax. 4
  4. A M.P 2,3
  5. $B \rightarrow C$ M.P. 4,1
  6. $\vdash A \wedge B \rightarrow B$ Ax. 4
  7. B M.P 2,6
  8. C M.P. 7,5

Regla de intercambio

- Sea F_A la notación correspondiente a una fórmula del cálculo proposicional en la que aparece la fórmula A. El teorema dice:

$$\text{Si } \vdash A \leftrightarrow B \text{ entonces } \vdash F_A \leftrightarrow F_B$$

- Siendo F_B la fórmula resultante de sustituir la ocurrencia de A en F_A por B

Regla de intercambio

- **1. Conjunción**

$\vdash (A \wedge A) \leftrightarrow A$

$\vdash A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- **2. Disyunción**

$\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$

$\vdash A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Regla de intercambio

- **3. Negación**

$\vdash \sim\sim A \leftrightarrow A$

- **4. Interdefiniciones**

$\vdash \sim A \vee B \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

$\vdash \sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

$\vdash \sim(A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

$\vdash \sim(A \wedge \sim B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

Regla de intercambio

- Ejemplo:

Transformación de ~(A → ~B) ∧ (B → ~(C ∨ D)) en una conjución de disyunciones donde A, B, C y D

1.	~(A → ~B) ∧ (B → ~(C ∨ D))	
2.	~(~A ∨ ~B) ∧ (B → ~(C ∨ D))	4.1
3.	~(~A ∨ ~B) ∧ (~B ∨ ~(C ∨ D))	4.1
4.	(~~A ∧ ~~B) ∧ (~B ∨ ~(C ∨ D))	4.2
5.	(~~A ∧ ~~B) ∧ (~B ∨ (~C ∧ ~D))	4.2
6.	(~~A ∧ ~~B) ∧ (~B ∨ ~C) ∧ (~B ∨ ~D)	2.3
7.	A ∧ B ∧ (~B ∨ ~C) ∧ (~B ∨ ~D)	3.1

- Modus Ponens
  $P, P \rightarrow Q \Longrightarrow Q$
- Silogismo
  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Longrightarrow P \rightarrow R$
- Mutación de premisas
  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Longrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$
- Introducción de antecedente
  $A \Longrightarrow B \rightarrow A$
- Conmutativa
  $A \wedge B \Longrightarrow B \wedge A$
- Contraposición en $\rightarrow$
  $A \rightarrow B \Longrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$
- Modus Tollens
  $A \rightarrow B, \sim B \Longrightarrow \sim A$
- Doble negación
  $A \Longrightarrow \sim\sim A$
- Tercio excluso
  $\Gamma \Longrightarrow A \vee \sim A$
- Ex contradictione quodlibet
  $A \wedge \sim A \Longrightarrow B$
- Simplificación
  $A \wedge B \Longrightarrow A$
- Asociativa
  $(A \wedge B) \wedge C \Longrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- Distributiva
  $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Idempotencia
  $A \wedge A \Longrightarrow A$
- Absorción
  $A \wedge (A \vee B) \Longrightarrow A$
- Reglas de Morgan
  $\sim (A \vee B) \Longrightarrow \sim A \wedge \sim B$
  $\sim A \wedge \sim B \Longrightarrow \sim (A \vee B)$
  $\sim (A \wedge B) \Longrightarrow \sim A \vee \sim B$
  $\sim A \vee \sim B \Longrightarrow \sim (A \wedge B)$
- Implicación
  $\sim A \vee B \Longrightarrow A \rightarrow B$
  $A \rightarrow B \Longrightarrow \sim A \vee B$
- Reflexiva
  $\Longrightarrow A \rightarrow A$
- Transitiva
  $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Longrightarrow A \rightarrow C$