Cálculo Dif. Aplicado

Grado Ingeniería Informática y doble Grado ADE + Ing. Inf. **Soluciones**

Examen Convocatoria Extraordinaria. 22 Junio 2018

Cuestión 1 (2 puntos) :

a) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{x}{y}y' = 1 + \ln x - \ln y$$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $y(1) = 2$.

Solución:

a) Es una ecuación diferencial de primer orden, no lineal. Se puede resolver de dos modos:

1.- Es homogénea porque, reordenando términos, podemos expresarla como:

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{1}{\frac{y}{x}}) = F(\frac{y}{x})$$

2.- Es exacta, porque al expresarla como:

$$(1 + \ln x - \ln y)dx - \frac{x}{y}\ dy = 0$$

o bien como

$$(1 + \ln x - \ln y) - \frac{x}{y}\ y' = 0$$

se cumple que $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ con $M(x, y) = 1 + \ln x - \ln y\,; \quad N(x, y) = \dfrac{x}{y}$

La resolvemos de este segundo modo:

$$F(x, y) = \int M(x, y)\mathrm{d}x = \int (1+\ln x-\ln y)dx = x+(x\ln x-x)-x\ln y+h(y) = x\ln x-x\ln y+h(y)$$

Nota: la integral de $\ln x$ se obtiene fácilmente por integrando por partes.

Como se debe cumplir $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ hacemos la derivada parcial, igualamos y nos queda $h'(y) = 0$.

Por lo tanto $h(y) = C$ y nos queda como solución implícita $x\ln x - x\ln y = C$.

Despejamos para obtener la función solución $y(x)$ explícitamente:

$$x(\ln x - \ln y) = C \quad \Rightarrow \quad \ln(\frac{y}{x}) = \frac{C}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y(x) = x\, e^{\frac{C}{x}}}$$

Nota: Tras cambiar todo de signo usamos C en lugar de -C.

b) Con $y(1) = 2$ obtenemos $2 = e^C$ y por tanto la solución particular es $\boxed{y(x) = x\, 2^{\frac{1}{x}}}$

Cuestión 1 (2 puntos) :

a) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{x}{y}y' = 1 + \ln x - \ln y$$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $y(1) = 2$.

a) $x/y \cdot y' = 1 + \ln(x) - \ln(y)$ EDO 1^{er} orden, no lineal, ordinaria

$$\underbrace{(\ln(y) - \ln(x) - 1)}_{M(x,y)} + \underbrace{(x/y)}_{N(x,y)} y' = 0$$

$$\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} = \frac{1}{y}$$ Son iguales $\Rightarrow$ Es exacta.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta F(x,y)}{\delta x} = M(x,y) \Rightarrow \\ \dfrac{\delta F(x,y)}{\delta y} = N(x,y) \end{cases}$$

$$F(x,y) = \int \ln(y) - \ln(x) - 1 \, dx = x\ln(y) - \int \ln(x)\, dx - x =$$

$u = \ln(x)$ $du = 1/x\, dx$

$dv = 1\, dx$ $v = x$

$$\int \ln(x)\, dx = \ln(x) x - \int x \, 1/x \, dx = x\ln(x) - x + g(y)$$

$$F(x,y) = x\ln(y) - (x\ln(x) - \cancel{x}) - \cancel{x} + g(y) = x(\ln(y) - \ln(x)) + g(y)$$

$$\frac{\delta F(x,y)}{\delta y} = N(x,y) \Rightarrow x/y + g'(y) = x/y;\ g'(y) = 0;\ g(y) = \int 0\, dy = C$$

$$F(x,y) = x\ln(y) - x\ln(x) \Rightarrow \boxed{x\ln(y) - x\ln(x) = C}$$

Solución general

$$x(\ln(y) - \ln(x)) = C;\ \ln(y/x) = C/x;\ \boxed{y(x) = e^{C/x} \cdot x} = \sqrt[x]{e^C} \cdot x$$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $y(1) = 2$.

Sol. para $y(1)=2$

$$y(1)=2 \Rightarrow y(1)=\sqrt[1]{e^{c}}\cdot 1=2;\ e^{c}=2 \Rightarrow \boxed{y(x)=\sqrt[x]{2}\,x=x\,2^{1/x}}$$

Cuestión 2 (2 puntos) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de los parámetros:

$$y'' - y' - 6y = e^x + 1; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solución:

Solución de la ecuación homogénea:

Ecuación característica: $r^2 - r - 6 = 0$, tiene dos soluciones reales $r_1 = -2$ y $r_2 = 3$, por lo tanto $\quad y_h = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x}$

Solución particular:

Utilizamos, por ejemplo, el método de coeficientes indeterminados.

Consideramos $\quad y_p = Ae^x + B \quad \Rightarrow \quad y_p' = Ae^x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = Ae^x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos $\quad A = B = -1/6 \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{6}(e^x + 1)$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es: $\quad y = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x} - \dfrac{1}{6}(e^x + 1)$

En esta solución usamos las condiciones iniciales y resulta $\quad c_1 = \frac{23}{30} \quad c_2 = \frac{17}{30} \quad$ con lo que la solución del problema de valor inicial es:

$$\boxed{y = \frac{23}{30}\, e^{-2x} + \frac{17}{30}\, e^{3x} - \frac{1}{6}(e^x + 1)}$$

Cuestión 3 (2 puntos) :

Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' + 5y' - 6y = 7e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Solución:

Tomando la transformada de Laplace se obtiene:

$$(s^2 + 5s - 6)Y(s) - s - 5 = \frac{7}{s - 1}$$

Despejando y simplificando:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s - 1)(s^2 + 5s - 6)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s - 1)^2(s + 6)}$$

Se descompone en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{(s - 1)^2} + \frac{C}{s + 6} \quad \Rightarrow \quad A = 5/7 \quad B = 1 \quad C = 2/7$$

Y haciendo las antitransformadas se obtiene la solución

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{7}e^x + xe^x + \frac{2}{7}e^{-6x}}$$

Cuestión 2 (2 puntos) :

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de los parámetros:

$$y'' - y' - 6y = e^x + 1; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solución: $y(x) = y_p + y_h$

Metodo de Coeficientes indeterm.

$y_h(x) \Rightarrow y'' - y' - 6y = 0; \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$\lambda = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{+1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$\mathbb{B} = \{e^{3x}, e^{-2x}\}$

$y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \,/\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$g(x) = e^x + 1 \qquad y_p(x) = \underbrace{Ae^x}_{e^x} + \underbrace{B}_{1}$ No aparecen terminos de $g(x)$ en $\mathbb{B}$

$y_p'(x) = Ae^x \qquad y_p''(x) = Ae^x \qquad y_p'' - y_p' - 6y = e^x + 1$

$(\cancel{Ae^x}) - (\cancel{Ae^x}) - 6(Ae^x + B) = e^x + 1$

$-6Ae^x - 6B = e^x + 1; \quad -6A = 1; \; A = 1/-6 \quad B = -1/6$

$y_p(x) = -\frac{e^x}{6} - 1/6$

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + e^x/-6 - 1/6 \,/\, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + e^0/-6 - 1/6; \quad \underline{C_1 + C_2 = 8/6 = 4/3}$

$y'(x) = C_1 3e^{3x} - 2C_2 e^{-2x} + e^x/-6$

$y'(0) = C_1 3e^0 - 2C_2 e^0 + e^0/-6 = \underline{3C_1 - 2C_2 - \frac{1}{6} = 0}$

$$\begin{array}{r} 2C_1 + 2C_2 - 8/3 = 0 \\ + \quad 3C_1 - 2C_2 - 1/6 = 0 \\ \hline 5C_1 \quad / \; -17/6 = 0 \end{array}; \quad C_1 = \frac{17/6}{5} = 17/30$$

$C_2 = 4/3 - 17/30 = 23/30$

$$\boxed{y(x) = \frac{17e^{3x}}{30} + \frac{23e^{-2x}}{30} - \frac{e^x}{6} - 1/6}$$

Solución de la ED con valores iniciales.

Cuestión 3 (2 puntos) :

Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' + 5y' - 6y = 7e^{x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 5y' - 6y\} = \mathcal{L}\{7e^{x}\} \qquad \mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 5\mathcal{L}\{y'\} - 6F(s) = 7\mathcal{L}\{e^{x}\}$$

$$(s^2F(s) - sy(0) - \cancel{y'(0)}) + 5(sF(s) - y(0)) - 6F(s) = 7\cdot\frac{1}{s-1}$$

$$F(s)(s^2+5s-6) - s - 5 = \frac{7}{s-1}; \quad F(s)(s^2+5s-6) = \frac{s^2-s+7}{s-1} + 5$$

$$F(s) = \frac{s^2+4s+2}{(s^2+5s-6)(s-1)} = \frac{s^2+4s+2}{(s-1)^2(s+6)}$$

$$s = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$$

$$\frac{s^2+4s+2}{(s-1)^2(s+6)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s+6)}$$

$$s^2+4s+2 = A(s-1)(s+6) + B(s+6) + C(s-1)^2$$

$$s=1 \Rightarrow 1+4+2 = \cancel{A\,0} + B\cdot 7 + \cancel{C\cdot 0}; \quad B = 1$$

$$s=-6 \Rightarrow 36-24+2 = \cancel{A\,0} + \cancel{B\,0} + C(-7)^2, \quad C = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$$

$$2s+4 = A(s+6) + A(s-1) + B + 2C(s-1)$$

$$s=1 \Rightarrow 2+4 = A + 6A + \cancel{A\,0} + B + \cancel{2C\,0} \qquad A = \frac{6-B}{7} = \frac{5}{7}$$

$$F(s) = \frac{5/7}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2/7}{s+6}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{5}{7}\cdot e^{x} + \frac{2}{7}e^{-6x} + e^{x}\cdot x$$

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{7}e^{x} + \frac{2}{7}e^{-6x} + xe^{x}}$$ Solución de la ED mediante TL

Cuestión 4 (2 puntos) :

Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se pide:

a) Hallar la solución general cuando $\alpha = 2$.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (3,\ 2)^T$ cuando $\alpha = 0$.

Solución:

a) Calculamos en primer lugar los autovalores de la matriz de coeficientes.

Resolviendo la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ obtenemos $\lambda = \pm i$ como soluciones complejas conjugadas.

Para $\lambda = i$ un vector propio asociado es $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i$,
luego la solución general del sistema es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}}$$

b) Cuando $\alpha = 0$ la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ tiene por soluciones $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$

Para $\lambda_1 = 3$ se obtiene el autovector $\overrightarrow{v} = (1,\ \ 0)^T$, y para $\lambda_2 = -3 \quad \overrightarrow{w} = (5,\ \ 6)^T$

La solución general de la ecuación es, por lo tanto: $\overrightarrow{x(t)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Usando la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ los valores de las constantes son $c_1 = 4/3$ y $c_2 = 1/3$.

Por tanto la solución particular del sistema es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{3t} + 5e^{-3t} \\ 6e^{-3t} \end{pmatrix}}$$

Cuestión 4 (2 puntos) :

Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se pide:

a) Hallar la solución general cuando $\alpha = 2$.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (3,\ 2)^T$ cuando $\alpha = 0$.

$-9 + 10$

$$x(t) = C_1 \vec{\omega}_1 + C_2 \vec{\omega}_2$$

$$|A - \lambda I| = 0; \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$$

$$= \lambda^2 + 1 = 0 \; ; \lambda = \pm i$$

Raíces complejas conjugadas

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \; ; \begin{pmatrix} 3+i & -5 \\ 2 & -3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 2x - 3y + yi = 0$$

$$x = \frac{3y - iy}{2}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3y-iy}{2} \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} (3-i)/2 \\ 1 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3-i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_1 = e^{it}\begin{pmatrix} 3-i \\ 2 \end{pmatrix} = u(t) + i\,v(t)$$

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} e^{it}\,\frac{3-1i}{2} \\ e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-i}{2}(\cos(t) + i\,sen(t)) \\ \cos(t) + i\,sen(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{3i}{2}sen(t) - \frac{i}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}sen(t) \\ \cos(t) + i\,sen(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 1\,sen(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 3\,sen(t) - 1\cos(t) \\ 2\,sen(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Sol. General: } \vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix} 3\cos(t) - sen(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3\,sen(t) - \cos(t) \\ 2\,sen(t) \end{pmatrix}}$$

$$\vec{X}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \; ; \quad A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \; ; \quad \begin{vmatrix}3-\lambda & -5\\ 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0=\lambda^2-tr(A)\lambda+|A|$$

$$0=\lambda^2-9 \; ; \; \lambda=\pm 3 \; \begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=-3\end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}6 & -5\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \; ; \quad 6x-5y=0 \; ; \quad y=\frac{6x}{5}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \frac{6x}{5}\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1=e^{3t}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -5\\ 0 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \; ; \quad 0x-5y=0 \; ; \quad y=0$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2=e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}(t)=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad / \, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{X}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 5e^{3\cdot 0}+C_2e^{-3\cdot 0}\\ C_1 6e^{3\cdot 0}\end{pmatrix} \; ; \quad C_1\cdot 6=2 \; ; \quad C_1=2/6=1/3$$

$$C_1 5+C_2=3 \; ; \quad C_2=3-\frac{5}{3}=4/3$$

$$\boxed{\text{Sol. PVI} \quad \vec{X}(t)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5e^{3t}+4e^{-3t}\\ 6e^{3t}\end{pmatrix}}$$

Cuestión 5 (2 puntos) :

Dado el siguiente problema modelo de ecuación de ondas:

$$\begin{aligned}
&4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad 0 < x < \pi\ , \quad t > 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\ , \quad t > 0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)} \\
&u(x,0) = 3\cos x\ , \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(posición inicial)} \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \cos 4x\ , \quad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(velocidad inicial)}
\end{aligned}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.

Solución:

a) Aplicamos separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo esto en la EDP nos queda: $\quad 4X''T = XT'' \Rightarrow \dfrac{T''}{4T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda,\quad$ donde λ es la constante de separación.

Por lo tanto $T(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\underline{T'' + 4\lambda T = 0}$.

b) La función $X(x)$ debe ser solución de $\underline{X'' + \lambda X = 0}$ y cumplir las condiciones frontera.

Separamos variables en dichas condiciones. En $x = 0$ tenemos $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$. Si fuera $T(t) = 0$ tendríamos la solución $u(x,t) = 0$ que no cumpliría la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, luego debe ser $X'(0) = 0$.

En $x = \pi$ el razonamiento es similar, por lo que nos quedan las siguientes condiciones de contorno para $X(x)$: $\underline{X'(0) = 0 \qquad X'(\pi) = 0}$.

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

$\boxed{\text{Caso } \lambda = 0}$, entonces $X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi)$, por tanto se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

$\boxed{\text{Caso } \lambda > 0}$, sea $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ia$ por tanto $X(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax)$; luego $X'(x) = -ac_1\sin(ax) + ac_2\cos(ax)$

Aplicado las condiciones de contorno: $X'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.
Y con $X'(\pi) = 0 \Rightarrow -ac_1\sin(a\pi) = 0$.
Imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi) = 0 \Rightarrow a\pi = n\pi \Rightarrow \quad a = n$, con $n = 1, 2, 3, .$

Cuestión 5 (2 puntos) :

Dado el siguiente problema modelo de ecuación de ondas:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = 3\cos x, \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(posición inicial)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \cos 4x, \quad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(velocidad inicial)}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.

$$4\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} = \frac{d^2u(x,t)}{dt^2}; \quad 4X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\text{Mult. pr } \frac{1}{4X(x)T(t)} \Rightarrow \frac{X''(t)}{X(t)} = \frac{T''(t)}{T(t)4} = -\lambda$$ cte. separación

Ec.1) $X''(x) + \lambda X(t) = 0$; $\lambda > 0$; $\lambda = a^2$

$r^2 + a^2 = 0$; $r = \pm i a$ $\quad \mathcal{B} = \{\text{sen}(ax), \cos(ax)\}$

$X(x) = A\,\text{sen}(ax) + B\cos(ax)$

Ec.2) $T''(t) + 4\lambda T(t) = 0$; $\lambda > 0$, $n^2 = \lambda$

$r^2 + 4n^2 = 0$; $r = \sqrt{-4n^2} = \pm i2$ $\quad \mathcal{B} = \{\text{sen}(2nt), \cos(2nt)\}$

$T(t) = C\,\text{sen}(2nt) + D\cos(2nt)$

$X'(x) = Aa\cos(ax) - Ba\,\text{sen}(ax)$

$X'(0) = 0 = Aa\cos(0) - Ba\,\text{sen}(0) = Aa$; $\quad A = 0$

$X'(\pi) = 0 = 0 - \underset{\neq 0}{B}a\,\text{sen}(a\pi)$; $\quad a\pi = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

$a = n$

$\lambda = n^2$

$X(x) = -Bn\,\text{sen}(nx)$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -C_n\,\text{sen}(2nt)\,n\,\text{sen}(nx) +$

Por tanto obtenemos los autovalores: $\lambda_n = n^2$, con $n = 1, 2, 3,$ y las autofunciones asociadas a estos autovalores son : $X_n(x) = \cos(nx)$

La solución de esta ecuación $\underline{T'' + 4\lambda T = 0}$:

$\boxed{\text{Caso } \lambda = 0}$, entonces $T' = k_1$ y por lo tanto $T = k_1 t + k_2$.

$\boxed{\text{Caso } \lambda > 0}$, $T'' + 4\lambda T = 0$ entonces $T'' + (2n)^2 T = 0$, por lo que $T_n = a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt$

b) La solución general para este problema es

$$u(x,t) = c_1(k_1 t + k_2) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2nt)\cos(nx) + b_n \sin(2nt)\cos(nx))$$

Usando la primera condición inicial: $u(x,0) = c_1 k_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = 3\cos x,$

obtenemos los coeficientes $c_1 k_2 = 0, \quad a_1 = -3, \quad a_n = 0, \quad \forall n \neq 1$

Para la otra condición inicial:

$$u_t(x,t) = c_1 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(-a_n \sin(2nt)\cos(nx) + b_n \cos(2nt)\cos(nx))$$

Entonces

$$u_t(x,0) = 1 - \cos 4x = c_1 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n b_n \cos(nx)$$

y se obtienen los coeficientes: $c_1 k_1 = 1, \quad b_4 = -1/8, \quad b_n = 0, \quad \forall n \neq 4$

Teniendo en cuenta todo lo anterior resulta que la solución particular buscada es:

$$\boxed{u(x,t) = t + 3\cos 2t \cos x - 1/8 \sin 8t \cos 4x}$$
