SCALAB

Universidad Carlos III de Madrid

Incertidumbre

En este tema

En este tema

En este tema

Incertidumbre

En este tema

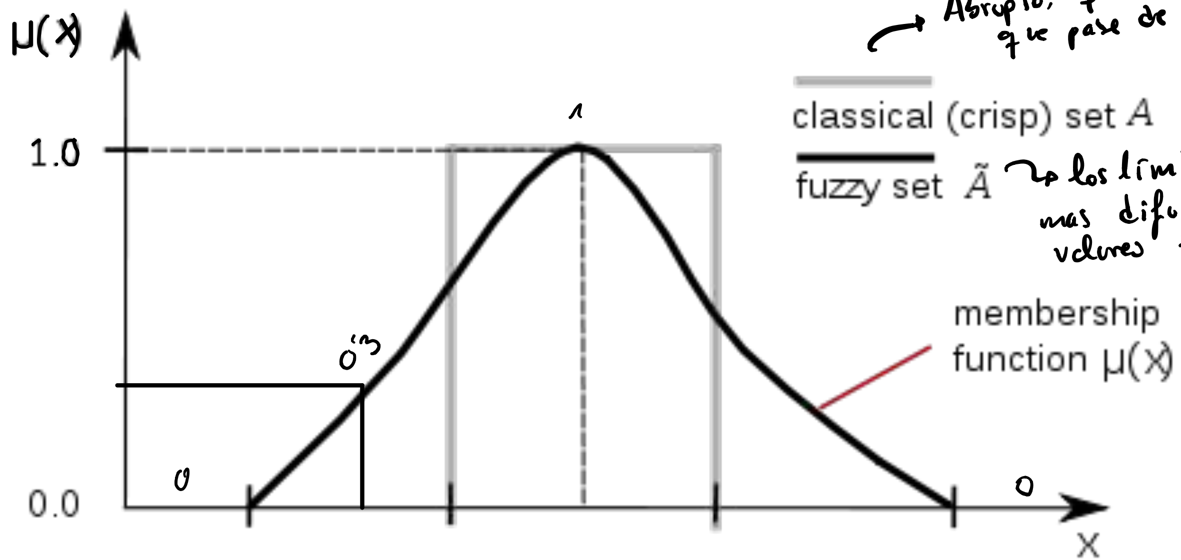
En este tema

Lógica Borrosa (Fuzzy)

- Lógica clásica: `true` o `false` Conjuntos nítidos.
- Lógica borrosa (Zadeh, 1965): conceptos que no son ciertos o falsos de forma clara
  → Tienen un grado de verdad, pero no son absoluto
  - → Son difusos
  - Concepto borroso: *cerca* de la puerta
  - Modificadores borrosos: **muy** cerca, **bastante** cerca, etc
- Representación
  - Conjunto borroso
  - **Función de pertenencia** a un conjunto borroso: define en qué grado es verdad que un elemento pertenece al conjunto → En que medida un elemento pertenece al conjunto.
    - Valores en el rango [0,1]
    - 0 representa absolutamente falso
    - 1 representa absolutamente verdadero

Función de pertenencia

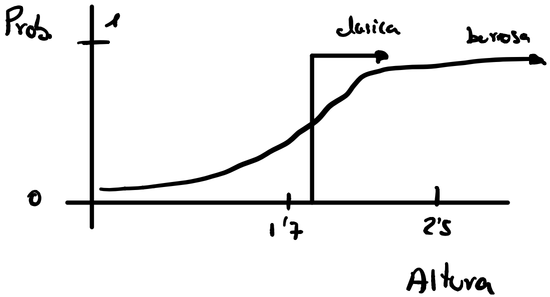
Abrupto, que hace que pase de 0 a 1



los límites estan mas difusos y tiene valores intermedios.

Lógica borrosa vs. probabilidad

- Probabilidades
  - Eventos que ocurren o no
  - **probabilidad de enfermar de gripe**
  - Expresan conocimiento parcial
- Lógica borrosa
  - Vaguedad de conceptos
  - **una persona de 2.5 metros es alta**
  - **una persona de 1.8 metros es alta**
  - Ambas personas poseen la propiedad “alta”
  - ... pero en distinto grado
  - Expresa grado de verdad parcial



Imprecisión del lenguaje

- Descripciones
  - El tiempo está siendo muy húmedo y bastante caluroso
- Instrucciones
  - Cuando estés cerca del cruce empieza a frenar lentamente

Sistema de reglas borrosas

- Descripción del problema borrosa (natural)
  - Si cerca del cruce entonces frenar lentamente
  - Si muy cerca de la derecha, girar rápido a la izquierda
  - Si cerca del carril izquierdo, girar rápido a la derecha

Sistema de reglas borrosas

- Descripción del problema borrosa (natural)
  - Si cerca del cruce entonces frenar lentamente
  - Si muy cerca de la derecha, girar rápido a la izquierda
  - Si cerca del carril izquierdo, girar rápido a la derecha
- ¿Cómo lo resolvemos? Necesitamos

  → aquellos terminos borrosos:
  - Definir términos: *cerca*, *rápido*, *muy*, etc.
  - Combinar términos: conjunción (Y), disyunción (O), etc
  - Combinar reglas: para generar una salida única

En este tema

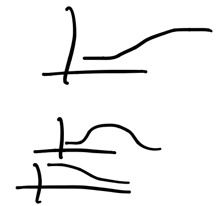
Variables lingüisticas

Var: altura

Valores: alto, medio, bajo

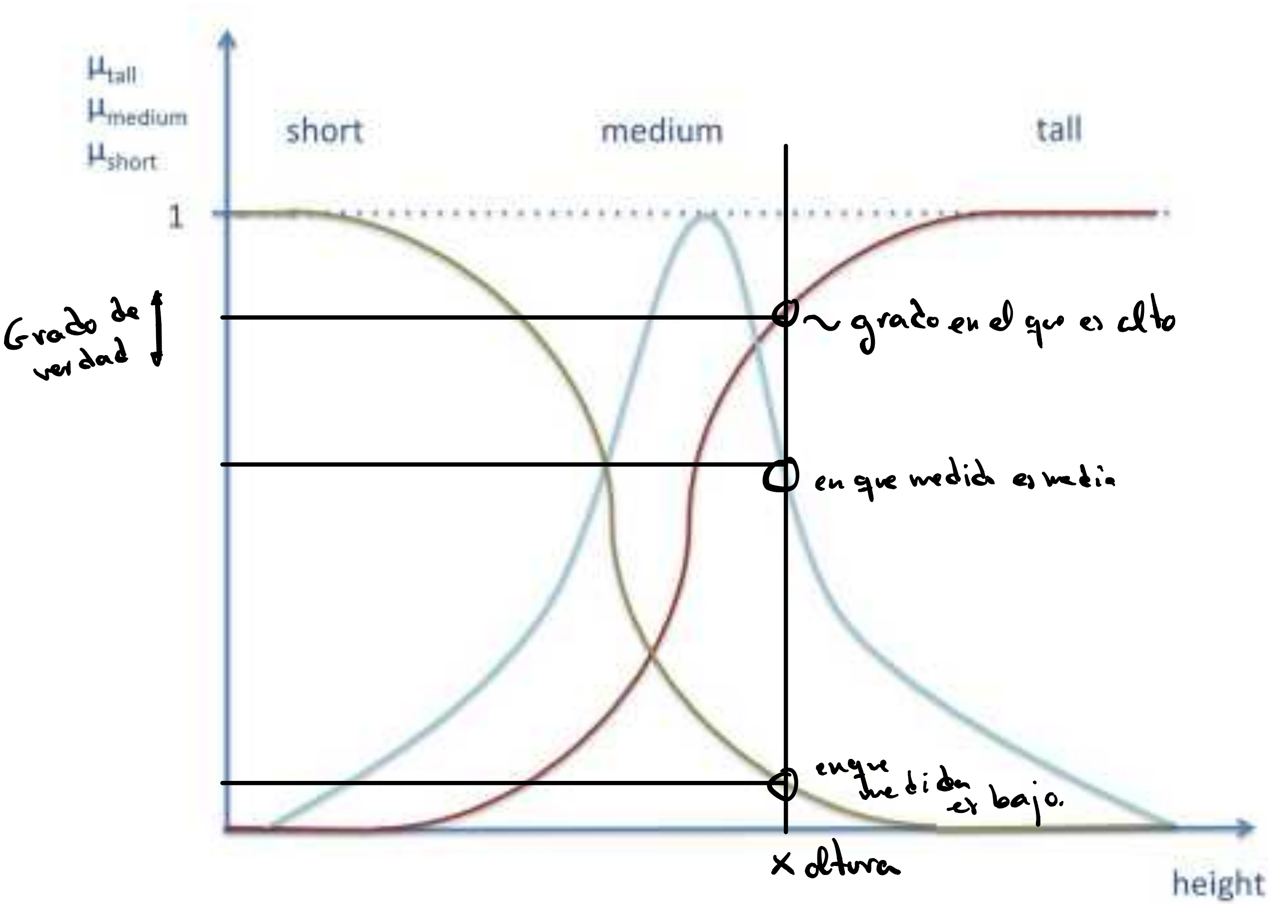
3 cjtos borrosos

límites:



- Las variables de los sistemas borrosos expresan cualidades (**altura**)
- Las variables toman valores en un dominio discreto $\{$**alto, medio, bajo**$\}$
- Los límites entre los valores del dominio son borrosos

Variables lingüisticas



Conjuntos borrosos

- Conjunto nítido A
  - Un elemento pertenece o no al conjunto: $A : S \to \{0, 1\}$
  - Función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es un elemento del conjunto } A \\ 0 & \text{si x no es un elemento del conjunto } A \end{cases}$$

  - Podemos definir: **Juan es una persona**

Conjuntos borrosos

- Conjunto nítido A
  - Un elemento pertenece o no al conjunto: $A : S \to \{0, 1\}$
  - Función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es un elemento del conjunto } A \\ 0 & \text{si x no es un elemento del conjunto } A \end{cases}$$

  - Podemos definir: **Juan es una persona**
  - Cómo definimos **Juan es alto**?

Conjuntos borrosos

- Conjunto nítido A
  - Un elemento pertenece o no al conjunto: $A : S \rightarrow \{0, 1\}$
  - Función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es un elemento del conjunto } A \\ 0 & \text{si x no es un elemento del conjunto } A \end{cases}$$

  - Podemos definir: **Juan es una persona**
  - Cómo definimos **Juan es alto**?
  - Con un conjunto nítido:

$$\text{Alto} = \{x | \text{altura}(x) > 1.8 \text{ metros}\}$$

Conjuntos borrosos

- Conjunto nítido A
  - Un elemento pertenece o no al conjunto: $A : S \rightarrow \{0, 1\}$
  - Función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es un elemento del conjunto } A \\ 0 & \text{si x no es un elemento del conjunto } A \end{cases}$$

  - Podemos definir: **Juan es una persona**
  - Cómo definimos **Juan es alto**?
  - Con un conjunto nítido:

$$\text{Alto} = \{x | \text{altura}(x) > 1.8 \text{ metros}\}$$

  - ¿Y si una persona mide 1.79?

Definición de conjunto borroso

Un conjunto borroso A se caracteriza por una función de pertenencia que define en qué grado un elemento x pertenece al conjunto

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

Definición de conjunto borroso

Un conjunto borroso A se caracteriza por una función de pertenencia que define en qué grado un elemento x pertenece al conjunto

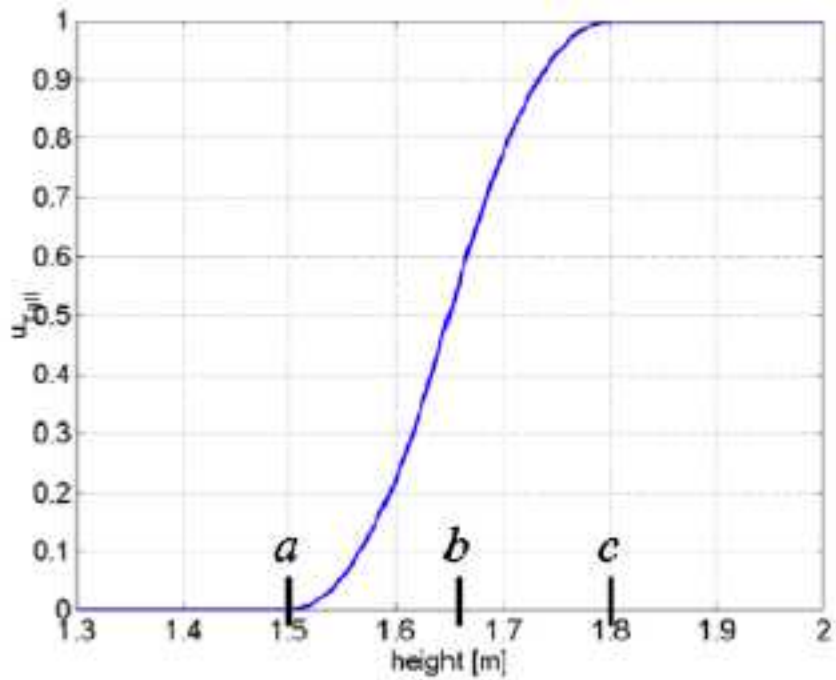
$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

entre 0 y 1

- Si $\mu_A(x) = 0$ entonces x no pertenece al conjunto
- Si $\mu_A(x) = 1$ entonces x pertenece al conjunto
- Si $\mu_A(x) = g \in (0, 1)$ entonces x pertenece al conjunto en grado g

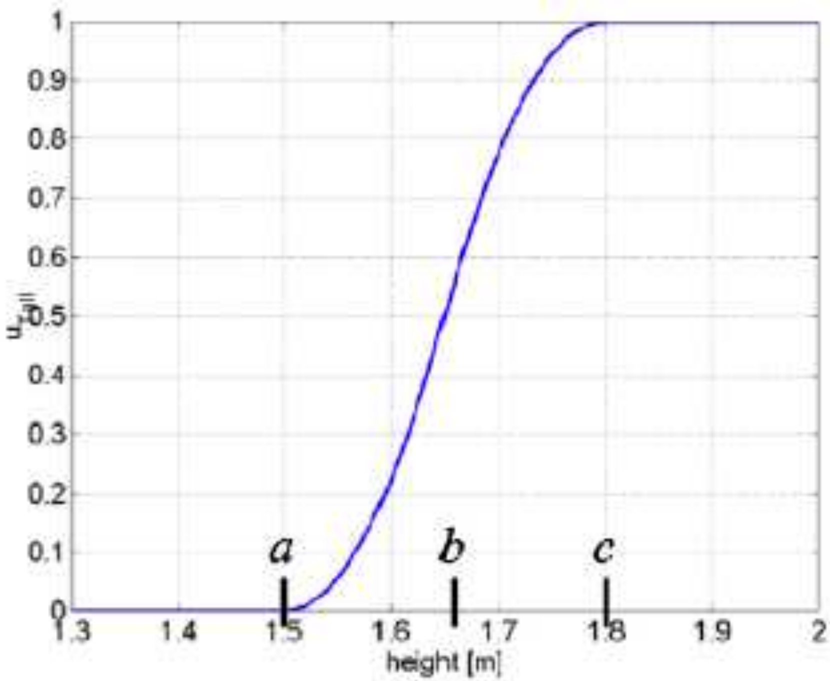
Ejemplo

- Una persona de 1.8 metros se considera alta con grado 1
- Una persona de 1.7 metros es alta pero en menor grado
- Podemos utilizar una función en forma de S



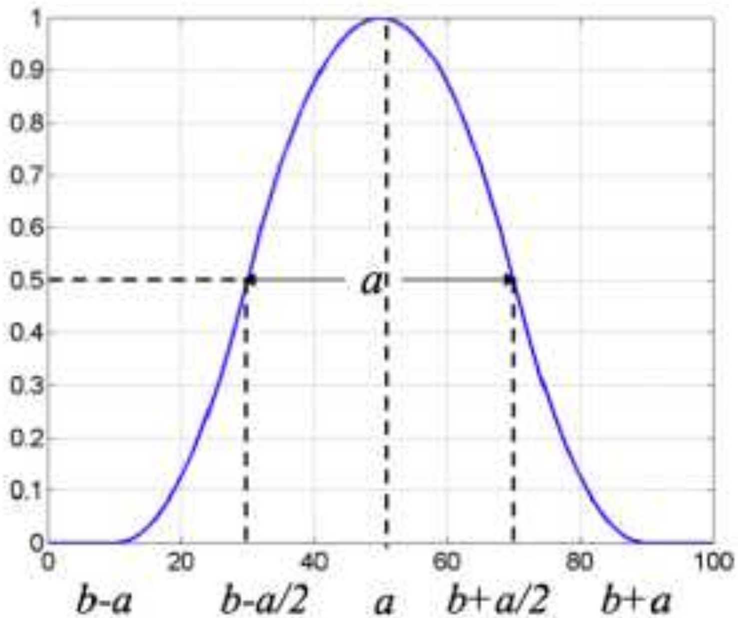
Funciones de pertenencia: función Sigmoidal

Una S



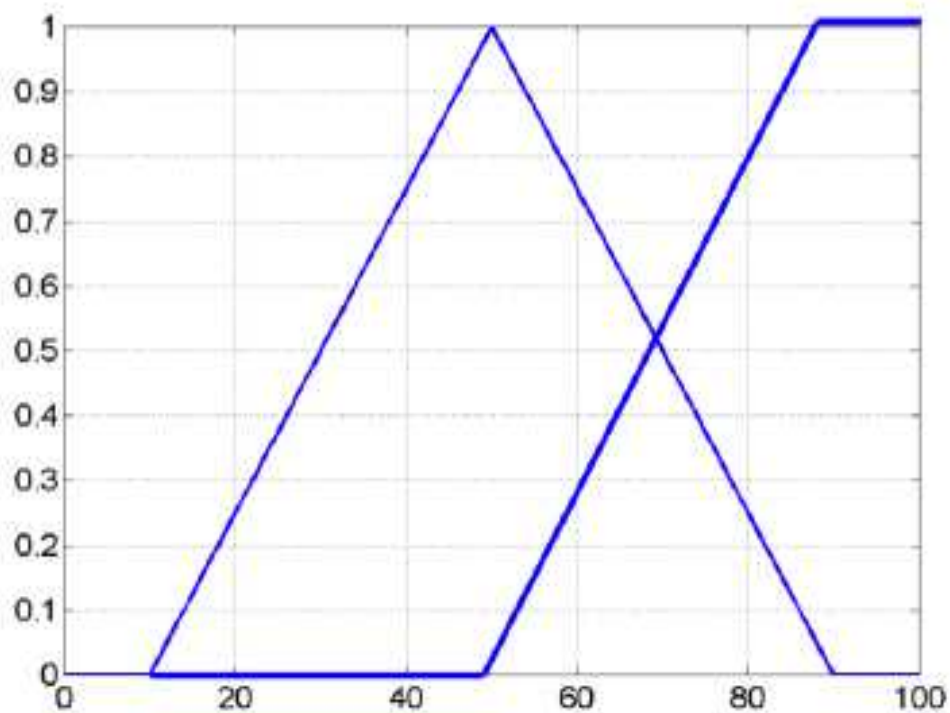
Funciones de pertenencia: función Gausiana

Ejemplo, cercano a a



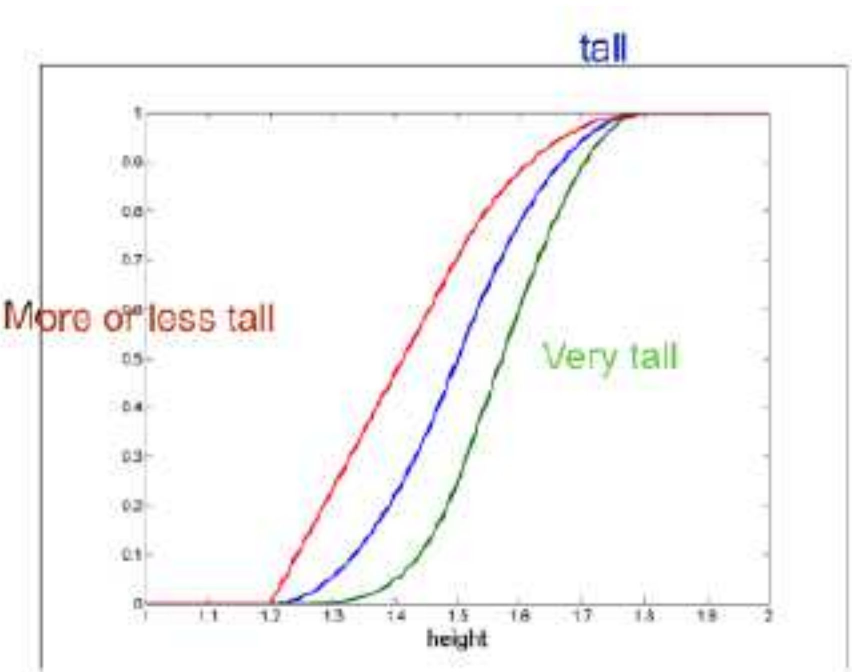
Funciones de pertenencia simples

- Triangular, trapezoidal ⇒ Las que usaremos, + sencillas de calcular.
- Más sencillas de representar y calcular



Modificadores lingüísticos : Operan sobre la función de pertenencia.

- Modifican el significado de un conjunto borroso   Por ejemplo: Al cuadrado, cubo, etc
  - Muy: $\mu(x)^2$
  - Más o menos: $\mu(x)^{1/2}$
  - Ligeramente: $\mu(x)^{1/3}$
  - Extremadamente: $\mu(x)^3$



En este tema

Operadores Borrosos Básicos

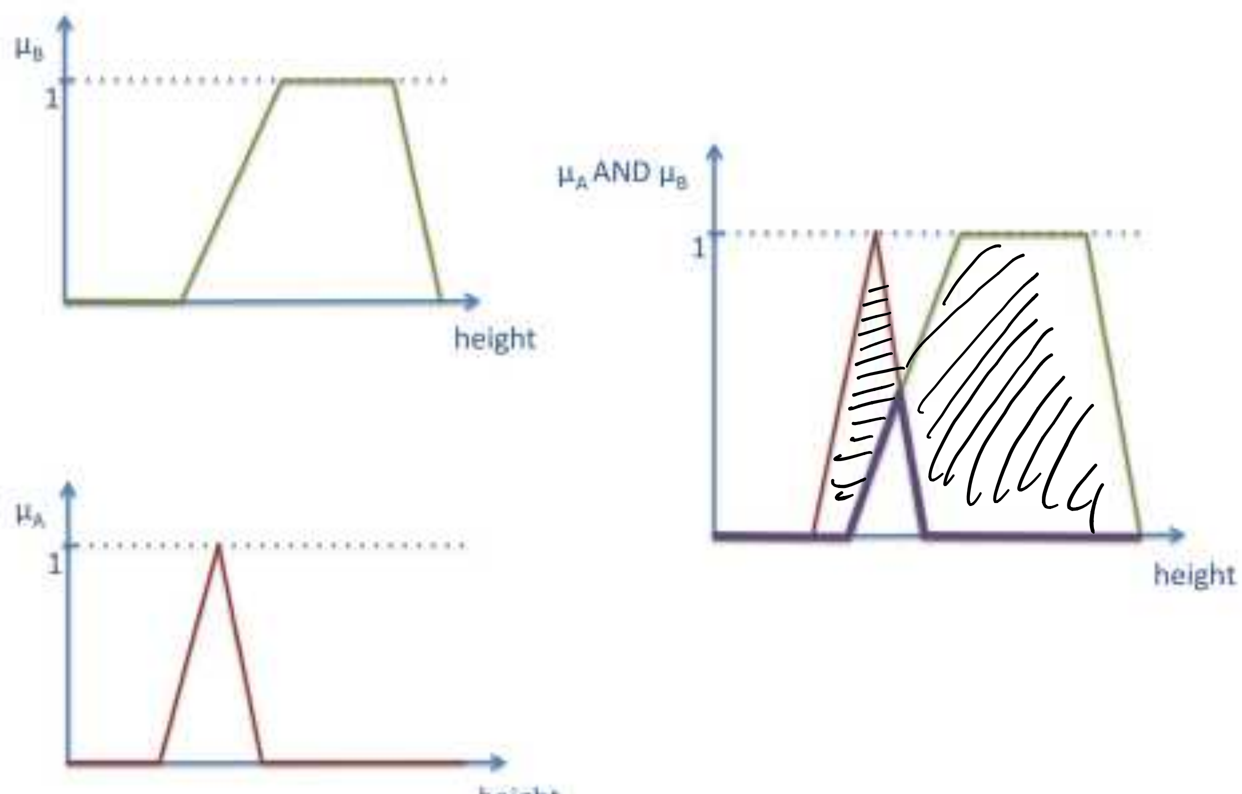
- Conjunción: intersección de conjuntos borrosos
  - El mínimo en cada una de las x
  - Lo que comparten, el area.
  - El menor de ambas para cada x
- Disyunción: unión de conjuntos borrosos
  - Las dos juntas, la suma de ambas.
  - El máximo en cada x de las dos.
- Negación: conjunto borroso complementario
  - Los valores inversos (1-valor) para cada posible x.
- Se pueden definir de distintas formas
  - Pero deben respetar ciertas propiedades
  - Es una generalización de la lógica clásica o de la teoría de conjuntos clásica

Intersección de conjuntos borrosos: operador AND

$$\mu_A \wedge \mu_B(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Intersección de conjuntos borrosos: operador AND

$$\mu_A \wedge \mu_B(x) = \underline{min}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

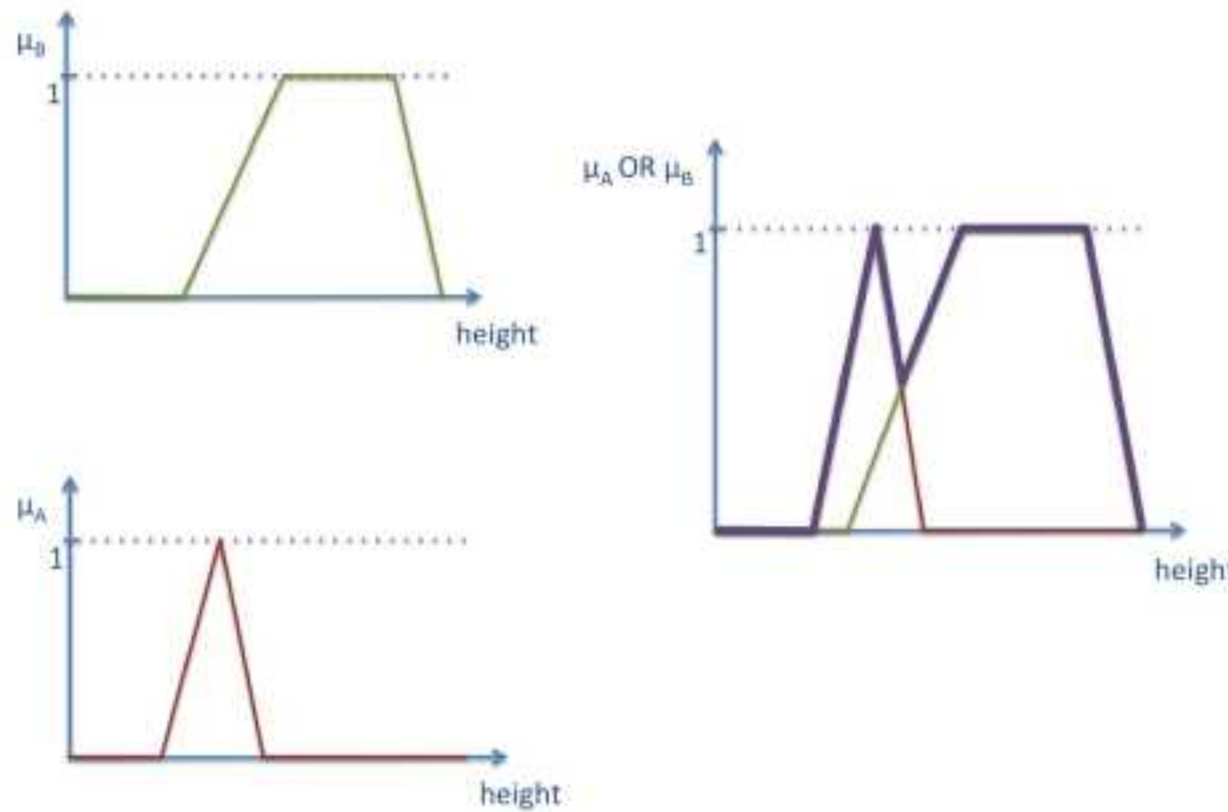


Unión de conjuntos borrosos: operador OR

$$\mu_A \vee \mu_B(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Unión de conjuntos borrosos: operador OR

$$\mu_A \vee \mu_B(x) = \underline{max}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

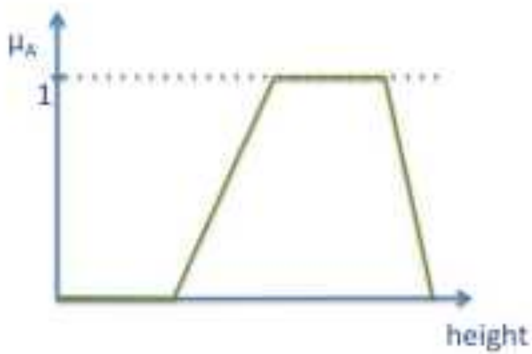


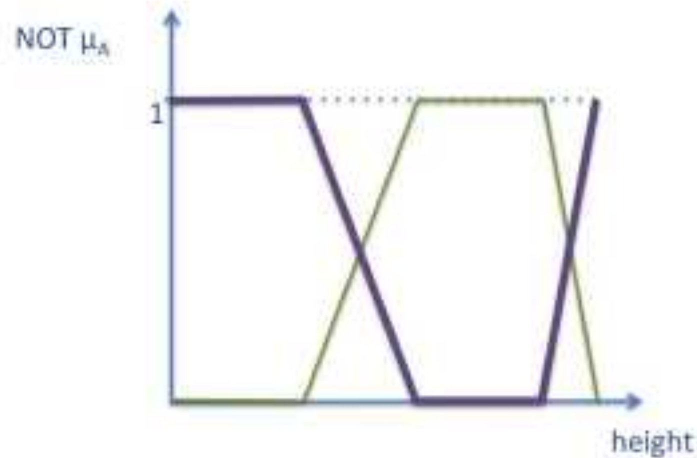
Complemento de conjuntos borrosos: operador NOT

$$\neg\mu_A = 1 - \mu_A(x)$$

Complemento de conjuntos borrosos: operador NOT

$$\neg\mu_A = 1 - \mu_A(x)$$





En este tema

Reglas Borrosas

SI p ENTONCES q

- Reglas Nítidas (modus ponens)
  - Si p es cierto, entonces q también es cierto
  - Ejemplo

SI el semáforo está rojo ENTONCES parar el coche

Reglas Borrosas

SI p ENTONCES q

- Reglas Nítidas (modus ponens)
  - Si p es cierto, entonces q también es cierto
  - Ejemplo

SI el semáforo está rojo ENTONCES parar el coche
el semáforo está rojo

Por lo tanto paro el coche

Reglas Borrosas

SI p ENTONCES q

- Reglas Nítidas (modus ponens)

  $p \to q$
  p es cierta
  ---
  q es cierta

  - Si p es cierto, entonces q también es cierto
  - Ejemplo

SI el semáforo está rojo **ENTONCES** parar el coche
el semáforo está rojo

Por lo tanto paro el coche

- Reglas Borrosas
  - Si p es cierto en un grado, entonces q también es cierto en un grado
  - Ejemplo

SI temperatura muy alta **ENTONCES** poner termostato muy bajo

Reglas Borrosas

SI p ENTONCES q

- Reglas Nítidas (modus ponens)
  - Si p es cierto, entonces q también es cierto
  - Ejemplo

SI el semáforo está rojo **ENTONCES** parar el coche
el semáforo está rojo

Por lo tanto paro el coche

- Reglas Borrosas
  - Si p es cierto en un grado, entonces q también es cierto en un grado
  - Ejemplo

SI temperatura muy alta **ENTONCES** poner termostato muy bajo
temperatura de 32 grados

Por lo tanto ¿termostato?

Reglas Borrosas

SI p ENTONCES q

- Reglas Nítidas (modus ponens)
  - Si p es cierto, entonces q también es cierto
  - Ejemplo

SI el semáforo está rojo **ENTONCES** parar el coche
el semáforo está rojo

Por lo tanto paro el coche

- Reglas Borrosas
  - Si p es cierto en un grado, entonces q también es cierto en un grado
  - Ejemplo

SI temperatura muy alta **ENTONCES** poner termostato muy bajo
temperatura de 32 grados

Por lo tanto ¿termostato?

temperatura alta

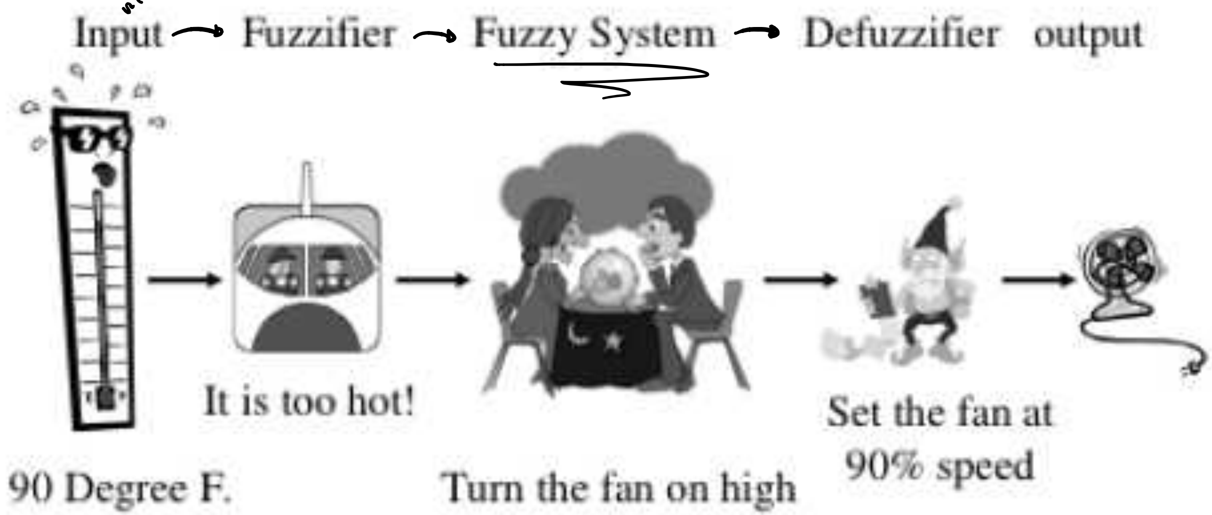
Por lo tanto ¿termostato?

Controlador Borroso

Sistema de reglas borrosos

Entra dato nitido ⇒ Borrosificar el dato ⇒ Base conocimiento Reglas borrosas.

Desborrosifiar Que debe hacer realmente.



Inferencia con reglas borrosas: 4 pasos

- Método de Mandami: el método típico de inferencia borrosa
  - Construyó un sistema de reglas borrosas para controlar el sistema de vapor de una caldera
  - Las reglas se obtuvieron de expertos experimentados

1. Fuzzificar (borrosificar) las entradas — Hallar los distintos valores que toma x en cada valor de la cualidad.
2. Evaluación de las reglas (inferencia)
   - 1° func minimo input y antec $\overset{\text{or}}{\text{máximo}}$ ant [illegible] [illegible]
   - 2° Cortar consecuente con la salida del anterior
3. Agregación de los consecuentes — Hallar func. maximo de los consecuentes
4. Defuzzificar (deborrosificar) el resultado — Coger el valor del centro de gravedad.

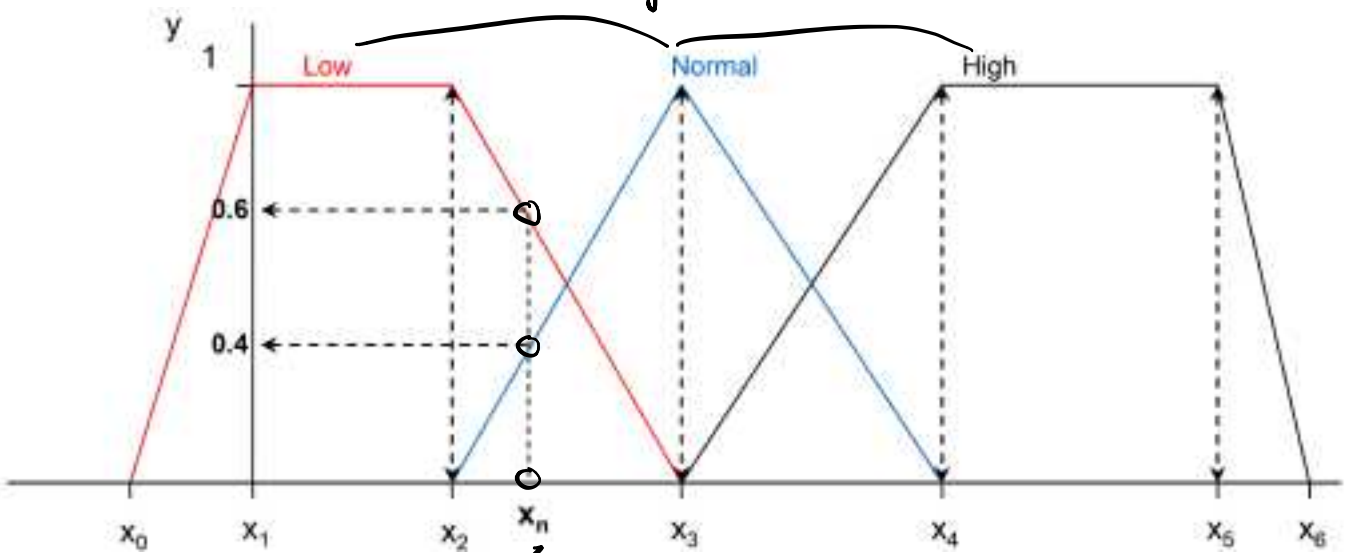
Paso 1: Fuzzificar las entradas

Determinar en que grado la entrada nitida pertenece a los conjuntos borrosos

Determinar en qué grado el valor de la variable de entrada pertenece a los conjuntos borrosos que definen esa variable

- Ejemplo: entrada x_n

Conjuntos



Entrada nitida ⇒ En que grado pertenece a los 3 conjuntos.

- Ejemplo: entrada fuzzificada: x_n **es baja en grado 0.6, normal en grado 0.4 y alta en grado 0.0**

Paso 2: Evaluación de reglas

Cálculo del antecedente

Paso 2: Evaluación de reglas

Cálculo del antecedente

- Determinar en qué medida las entradas fuzzificadas verifican el antedecente de las reglas
- Se cálcula la similitud S entre el antecedente y la entrada correspondiente

Paso 2: Evaluación de reglas

Cálculo del antecedente

- Determinar en qué medida las entradas fuzzificadas verifican el antedecente de las reglas
- Se cálcula la similitud S entre el antecedente y la entrada correspondiente
  - **Si la temperatura es caliente entonces poner el ventilador alto**
  - **La temperatura es tibia**

Paso 2: Evaluación de reglas

Cálculo del antecedente

- Determinar en qué medida las entradas fuzzificadas verifican el antedecente de las reglas
- Se cálcula la similitud S entre el antecedente y la entrada correspondiente
  - **Si la temperatura es caliente entonces poner el ventilador alto**
  - **La temperatura es tibia**

$$S = \max_T \{\min(caliente(T), tibia(T)\}$$

Paso 2: Evaluación de reglas

Si x es A $\wedge$ y es B
x es A' min y es B'
S_1 S_2

Cálculo del antecedente

- Determinar en qué medida las entradas fuzzificadas verifican el antedecente de las reglas
- Se cálcula la similitud S entre el antecedente y la entrada correspondiente
  - **Si la temperatura es caliente** **entonces poner el ventilador alto**
  - **La temperatura es tibia**

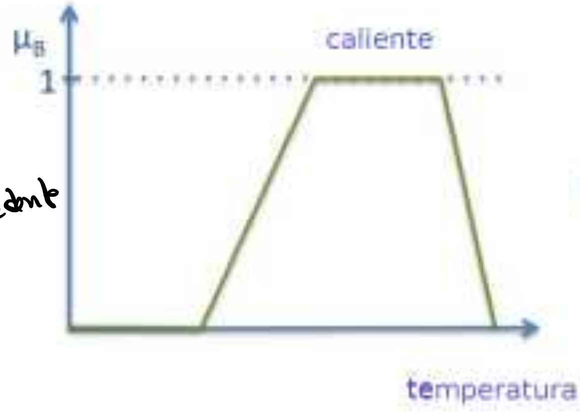
$$S = \max_{T}\{\min(caliente(T), tibia(T))\}$$

El pico mas alto del AND del input y consecuente.

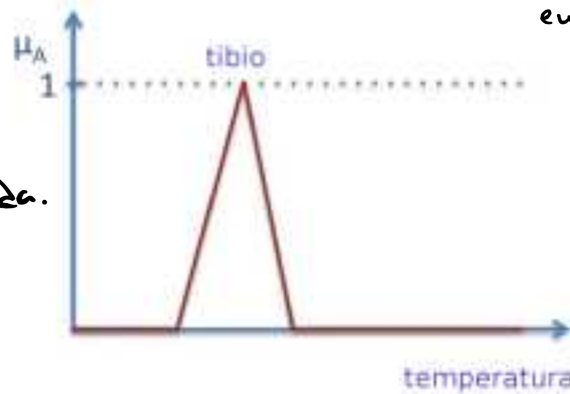
- Antecendentes múltiples
  - AND: conjunción de antecedentes $\rightarrow$ MIN de los antecedentes
  - OR: disyunción de antecedentes $\rightarrow$ MAX de los antecedentes

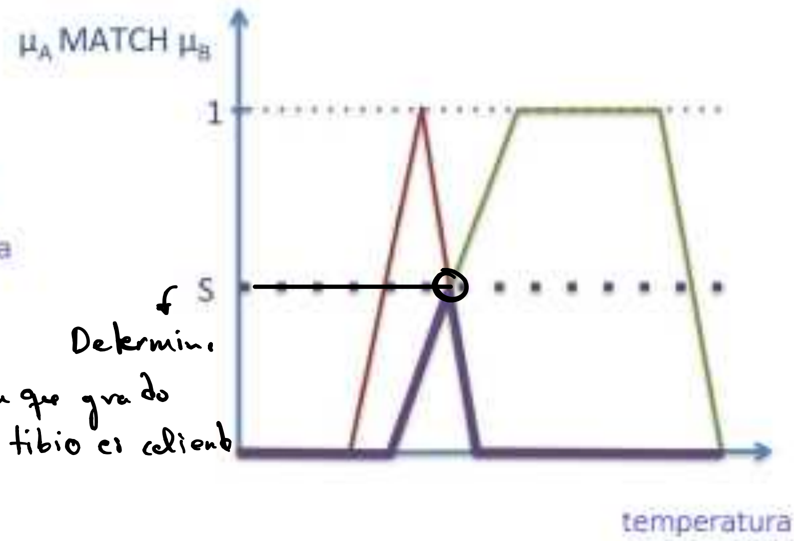
Paso 2: Evaluación de reglas

Antecedente



Entrada.





Determina en que grado tibio es caliente

Paso 2: Evaluación de reglas

Cálculo del consecuente

Paso 2: Evaluación de reglas

Si antecedente → consecuente

0'8 0'8

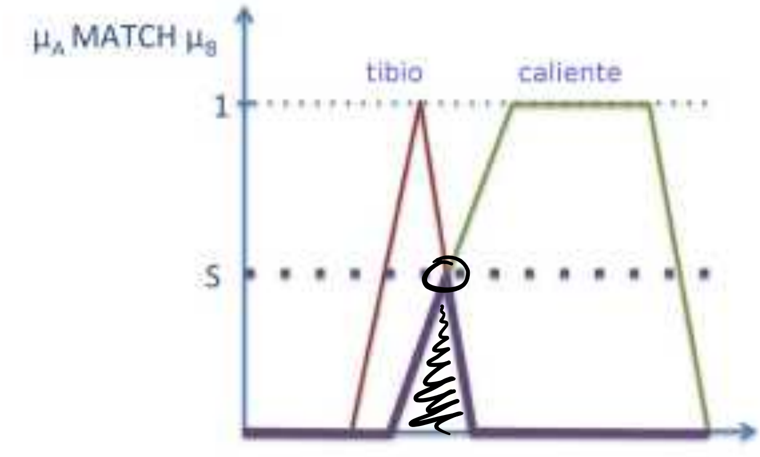
Cálculo del consecuente

- Método más común: cortar la función de pertenencia del consecuente al nivel que marca la similitud S del antecedente

$$Q(x) = \min(S, \mu_C(x))$$

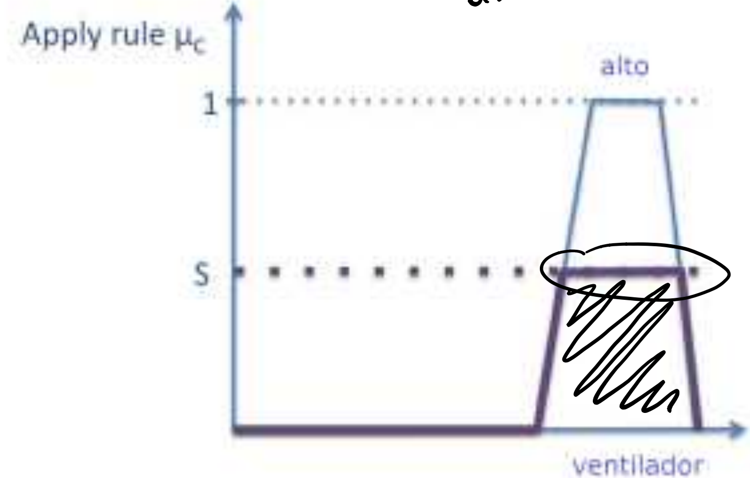
donde C es el conjunto borroso del consecuente

Paso 2: Evaluación de reglas



Antecedente

No puedo afirmar con mayor grado que el antecedente, then?



Paso 3: Agregación de consecuentes

- Agregación: unificación de las salidas de todas las reglas
  - Combina las funciones de pertenencia obtenidas para todos los consecuentes en un sólo conjunto borroso
- Se puede hacer de distintas formas
- Nosotros utilizaremos el *máximo*: unión de los consecuentes

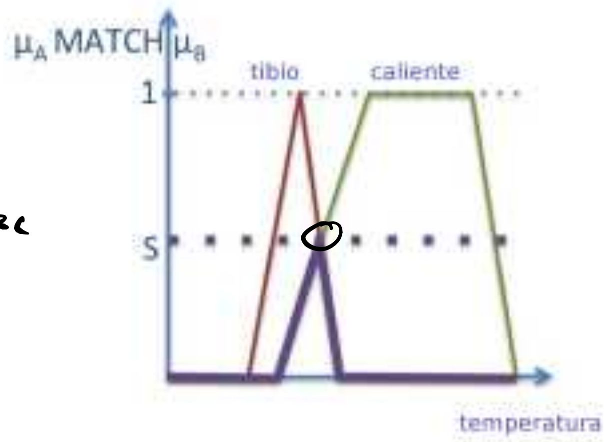
Paso 3: Agregación de consecuentes

- Agregación: unificación de las salidas de todas las reglas
  - Combina las funciones de pertenencia obtenidas para todos los consecuentes en un sólo conjunto borroso
- Se puede hacer de distintas formas
- Nosotros utilizaremos el *máximo*: unión de los consecuentes
- Ejemplo
  - **Si la temperatura es caliente entonces poner el ventilador alto**
  - **Si la temperatura es fría entonces poner el ventilador bajo**
  - **La temperatura es tibia**

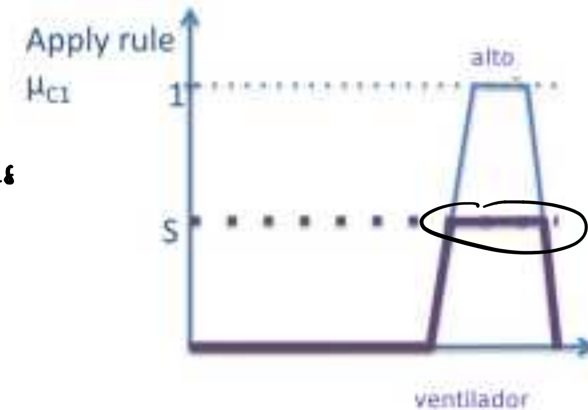
Paso 3: Agregación de consecuentes

Regla 1

Antec



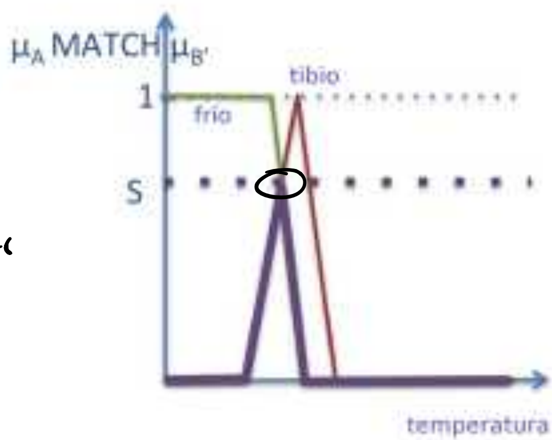
Cons



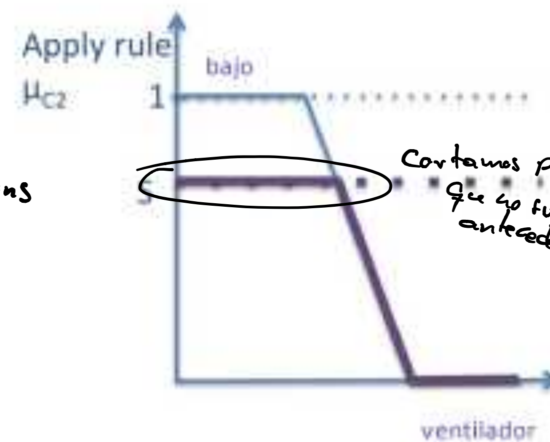
Cortamos

Regla 2

Antec

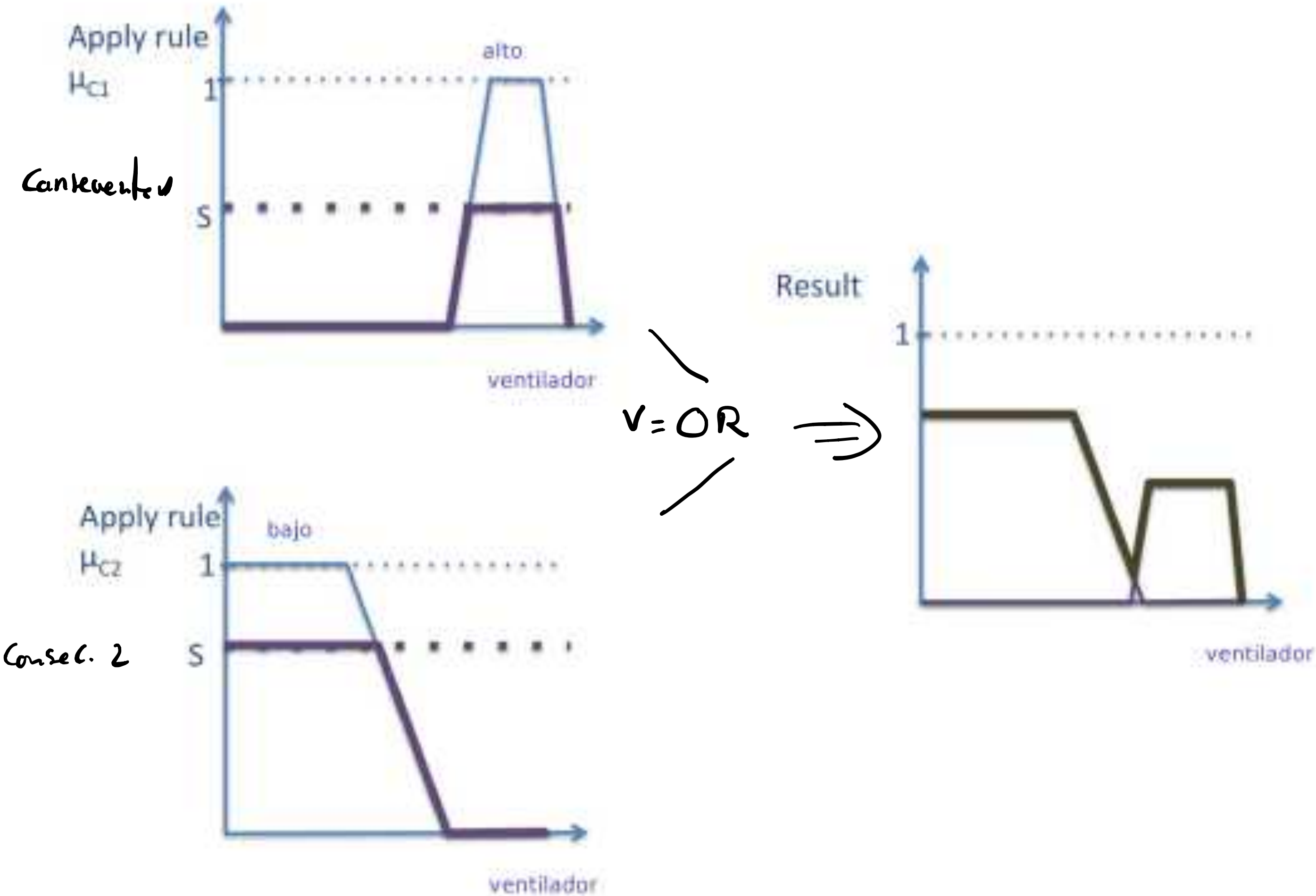


Cons



Cortamos para que no supere antecedente.

Paso 3: Agregación de consecuentes

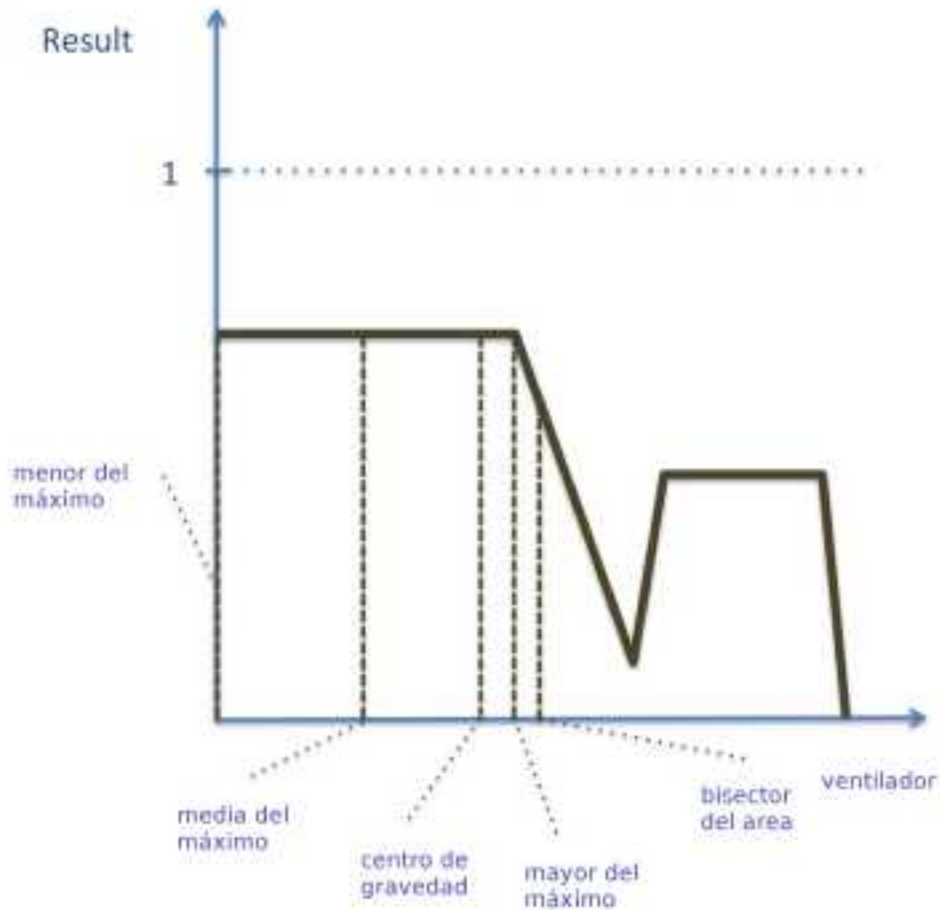


Paso 4: Defuzzificación

Convertir el resultado en un valor nítido

- Distintos métodos
  - Más común: centro de gravedad o centroide del área
    ↳ La x del centro de gravedad equilibrio.
  - Otros:
    - Bisector del área
    - Menor del máximo
    - Media del máximo
    - Mayor del máximo

Paso 3: Defuzzificación



Lógica Borrosa

- Ventajas
  - Representa la vaguedad del lenguaje de forma natural
  - Generaliza los conjuntos nítidos
  - Permite diseños flexibles desde el punto de vista ingenieril
  - Buen rendimiento
  - Métodos simples de implementar
  - ¡Normalmente funcionan bien!
- Desventajas
  - Hay que diseñar las funciones de pertenencia
  - Normalmente requiere de un ajuste fino de los parámetros
  - La defuzzificación puede producir resultados no deseados
- Herramientas
  - Matlab (Fuzzy Toolbox)
  - FuzzyClips