Hoja 11

El teorema espectral

Problema 11.1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justificar que A es ortogonalmente diagonalizable.

2. Calcular los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.

3. Hallar los correspondientes espacios propios. Determinar la multiplicidad geométrica de estos valores propios.

4. Hallar la descomposición espectral de A, es decir, escribir $A = \sum_{i=1}^{3} A_i$, con $A_i = \lambda_i v_i v_i^t$, siendo λ_i los valores propios de A y v_i los vectores propios apropiados.

5. Hallar una matriz diagonal D semejante a A y una matriz P tales que $A = P\,D\,P^t$.

Problema 11.2 Hallar una diagonalización ortogonal de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 11.3 Calcular la descomposición espectral de la matriz del Problema 11.2.

Problema 11.4 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.
2. Hallar los correspondientes espacios propios. Determinar la multiplicidad geométrica de estos valores propios.
3. Verificar que los vectores propios asociados a los valores propios forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
4. Hallar la descomposición espectral de A.
5. Hallar una matriz diagonal D semejante a A y una matriz P tales que $A = P\,D\,P^{-1}$.
6. Hallar una matriz diagonal D_0 semejante a A^{10} y una matriz P_0 tales que $A^{10} = P_0\,D_0\,P_0^{-1}$, determinar los valores propios de A^{10} y hallar A^{10}.