Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
14 Noviembre 2016

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(3) = 1$.

Solución:

(i) Sean las funciones $M(x,y) = (x+y)^2$ y $N(x,y) = x^2 + 2xy - 1$.
La ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, de primer orden **exacta**, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 2(x+y) \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} \;=\; M(x,y) \;=\; (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; N(x,y) \;=\; x^2 + 2xy - 1\,. \tag{2}$$

Por tanto, integrando (1) respecto a x da $F(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + x^2y + y^2x + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de $F(x,y)$ con (2) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; x^2 + 2xy + \frac{dh}{dy} \;=\; x^2 + 2xy - 1\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} \;=\; -1 \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) \;=\; -y$$

donde hemos tomado igual a cero la constante de integración.
La solución general se puede escribir en la forma

$$F(x,y) \;=\; c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y \;=\; c\,,$$

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)y' = 0\,,$$

i) EDO 1er orden no lineal exacta

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(3) = 1$.

ii) $M(x,y) = (x+y)^2 \qquad N(x,y) = 2xy + x^2 - 1$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2(x+y) = 2x + 2y \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y + 2x \qquad \text{Exacta } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\exists F(x,y)$ que cumple:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)\,; \quad \cancel{y^2} + \cancel{2xy} - 0 + h'(x) = (x+y)^2 = x^2 + \cancel{2xy} + \cancel{y^2} \\ \qquad \hookrightarrow h'(x) = x^2\,;\ h(x) = x^3/3 \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\,; \quad F(x,y) = \int 2xy + x^2 - 1\, dy = \cancel{2}x\dfrac{y^2}{\cancel{2}} + x^2y - y + h(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x,y) = k \\ \text{Solución General: } xy^2 + x^2y - y + x^3/3 = k \,/\, k \in \mathbb{R} \text{ cte} \end{array}}$$

iii) $y(3) = 1$

$$3\cdot 1^2 + 3^2\cdot 1 - 1 + 3^3/3 = k = 3 + 9 - 1 + 9 = 20$$

$$\boxed{\text{Sol. PVI: } xy^2 + x^2y - y + x^3/3 = 20}$$

donde c es una constante arbitraria.
Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y \;=\; c}$$

(iii) En la solución general imponemos la condición $y(3) = 1$ y obtenemos $9 + 9 + 3 - 1 = 20 = c$.
La solución pedida es:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y - 20 \;=\; 0}$$

Cuestión 2 (1.5 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + 2y' + 2y = t + e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1\,,$$

Solución:
Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y''+2y'+2y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 + 2r + 2 = 0$, tiene por soluciones, $r = -1 \pm i$ raíces complejas conjugadas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\sin(t)\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:
Siguiendo el enunciado del problema, vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Dado que $g(t) = t + e^{2t}$,, proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = At + B + Ce^{2t}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene:
$A = 1/2\,, B = -1/2\,, C = 1/10$, por tanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}$$

La solución general de la ecuación es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}$$

Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales, $y(0) = 0,\; y'(0) = 1$, y se obtiene: $c_1 = 2/5\,; c_2 = 7/10$. Finalmente, la solución pedida es

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t) + \frac{7}{10}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}}$$

Cuestión 2 (1.5 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + 2y' + 2y = t + e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

EDO 2º orden no homogenea de coef. ctes.

Solución de la forma: $y(x) = y_h + y_p$

$y_p \Rightarrow$ Solución homogenea.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0\ ; \quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm i2}{2} = -1 \pm i$$

$$B = \{ e^{-t}\cos(t),\ e^{-t}\operatorname{sen}(t) \} \quad \text{L.I}$$

$$y_h(t) = C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

$y_p \Rightarrow$ Solución particular por el metodo de coef. indeterminados.

$y_p(x) = At + B + Ce^{2t}$ No coinciden con la base, no se modifican.

$$y_p'(x) = A + 2Ce^{2t} \qquad y_p''(x) = 4Ce^{2t}$$

$$4Ce^{2t} + 2(A + 2Ce^{2t}) + 2(At + B + Ce^{2t}) = t + e^{2t}$$

$$4Ce^{2t} + 2A + 4Ce^{2t} + 2At + 2B + 2Ce^{2t} = t + e^{2t}$$

$$e^{2t}(10C) + (2A)t + 2A + 2B = t + e^{2t}$$

$$10C = 1\ ; \quad C = 1/10 \qquad 2A + 2B = 0\ ; \quad B = -A = -1/2$$

$$2A = 1\ ; \quad A = 1/2$$

$$y_p(x) = t/2 - 1/2 + e^{2t}/10$$

$$y(x) = C_1 e^{-t}\operatorname{sen}(t) + C_2 e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{e^{2t}}{10} \ / C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ ctes.}$$

$$y(0) = 0 = C_1\cdot 1\cdot 1 + 0 - 1/2 + 1/10\ ; \quad C_1 = 2/5$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-t}\operatorname{sen}(t) + C_1 e^{-t}\cos(t) - C_2 e^{-t}\cos(t) - C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(t) + 1/2 + \frac{e^{2t}}{5}$$

$$y'(0) = 1 = -C_1 + 0 - 0 - C_2 + 1/2 + 1/5\ ; \quad C_2 = -7/10$$

$$\boxed{y(x) = 2/5\, e^{-t}\operatorname{sen}(t) - 7/10\, e^{-t}\cos(t) + 1/2\,(t-1) + \frac{e^{2t}}{10}}$$

Cuestión 3 (1.5 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Solución:

Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2 + 2s + 2)F(s) = \dfrac{s-1}{s-2}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+1}\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1\,.$
Calculando los coeficientes se obtiene: $A = 1/10\,, B = -1/10\,, C = 3/5\,.$ Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{10}\frac{s-6}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{10}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{7}{10}\frac{1}{(s+1)^2+1}.$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) + \frac{7}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) =$$

$$\frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(t) + \frac{7}{10}e^{-t}\sin(t)$$

entonces,

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{10}e^{2t} - \tfrac{1}{10}e^{-t}\cos(t) + \tfrac{7}{10}e^{-t}\sin(t)}$$

Cuestión 3 (1.5 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{2t}; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

$$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + 2sF(s) - 2y(0) + 2F(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$F(s)(s^2+2s+2) - 0 - 1 - 0 = \frac{1}{s-2} \ ; \ F(s) = \frac{1+s-2}{(s-2)(s^2+2s+2)}$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot1\cdot2}}{2} =$$ Raices Complejas con jugadas.

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$s-1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-2)$$

$$s=2 \Rightarrow 1 = A(4+4+2) + 0 \ ; \ A = 1/10$$

$$1 = A(2s+2) + B(s-2) + (Bs+C)$$

$$s=2 \Rightarrow 1 = A(4+2) + 0 + C \ ; \ C = 1 - \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$$

$$0 = 2A + B + B \ ; \ 2B = -2A \ ; \ B = -A = -1/10$$

Deshacemos la transformación:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s/10 + 2/5}{s^2+2s+2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s/10+2/5}{(s+2)^2+1}\right\} = \frac{-1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s+1)^2+1}\right\} = \frac{-1}{10}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} + \frac{-4-1}{1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}\right) =$$

$$(s-(-1))^2+1$$

$$= \frac{-1}{10}\left(e^{-t}\cos(t) - 5e^{-t}\,\text{sen}(t)\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{10}\left(e^{-t}\cos(t) - 6e^{-t}\,\text{sen}(t)\right)$$