CÁLCULO 2018/2019
HOJA #5: DERIVADAS I

Problema 5.1. Asumiendo que f y g son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, escribe las derivadas de las siguientes funciones en los puntos en los que sean derivables:

1) $F_1(x) = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$.
2) $F_2(x) = \arctan\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.
3) $F_3(x) = e^{f(x)} g(f(x))$.
4) $F_4(x) = \log\big(g(x)\cos(f(x))\big)$.
5) $F_5(x) = (g(x))^{f(x)}$.
6) $F_6(x) = \dfrac{1}{\log\big(f^2(x) + g^2(x)\big)}$.

Problema 5.2. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \sqrt{x+2}\,\mathrm{arc}\cos(x+2).$$

Problema 5.3. Sea

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestra que f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Discute la continuidad de la función derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Problema 5.4. Sean c, c_1 y c_2 constantes. Comprueba, en cada caso, que la función que se indica es solución de la correspondiente ecuación diferencial:

1)	$f(x) = c/x$	$xf' + f = 0$
2)	$f(x) = x\tan x$	$xf' - f - f^2 = x^2$
3)	$f(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2\cos 3x$	$f'' + 9f = 0$
4)	$f(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$	$f'' - 9f = 0$
5)	$f(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{5x}$	$f'' - 8f' + 15f = 0$
6)	$f(x) = \log\left(c_1e^{x} + e^{-x}\right) + c_2$	$f'' + (f')^2 = 1$

Problema 5.5. Demuestra las siguientes identidades:

$$
\begin{array}{lll}
1) & \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} & x > 0 \\
2) & \arctan \dfrac{1+x}{1-x} - \arctan x = \dfrac{\pi}{4} & x < 1 \\
3) & 2\arctan x + \operatorname{arc\,sen} \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi & x \geq 1
\end{array}
$$

Indicación: Calcula la derivada de la función que aparece en la parte izquierda de cada una de las identidades y evalúa dicha función en algún punto del intervalo indicado. Es importante señalar que el resultado no es válido fuera de los intervalos especificados.

Problema 5.6. Calcula el ángulo que forman las tangentes por la derecha y por la izquierda en $x = 0$ a la gráfica de la función

$$
\begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}
$$

Problema 5.7. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera las funciones

$$
f_1(x) = |x|^k, \quad f_2(x) = x|x|^{k-1}.
$$

- Para $x \neq 0$, calcula $f_1'(x)$ y $f_2'(x)$.
- Si $k > 1$, demuestra que ambas funciones son derivables en $x = 0$ y calcula su derivada.
- Demuestra que si f satisface $|f(x)| \leq |x|^k$, con $k > 1$, para todo x en un entorno de $x_0 = 0$, entonces f es derivable en $x_0 = 0$. Calcula $f'(0)$.
- Demuestra que la función

  $$
  f(x) = \begin{cases} x^2(1-x)^2 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}
  $$

  es derivable únicamente en dos puntos de $\mathbb{R}$.