uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Hojas de Problemas de Matemática Discreta

Grado en Ingeniería en Informática

Doble Grado en Ingeniería en Informática y Administración de Empresas

Curso 2018–2019

Grupo de Modelización, Simulación Numérica y Matemática Industrial

Universidad Carlos III de Madrid
Avda. de la Universidad, 30
28911 Leganés

v1.0: Enero 2019

Índice

1. Conjuntos y funciones

Problema 1.1 Sea $A = \{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 < 16\}$. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$
2. $\{3, 1\} \in A$
3. $\{x \in \mathbb{Z}\colon |x| < 4\} \subset A$
4. $\varnothing \subset A$
5. $3 \in A$
6. $\{3\} \in A$
7. $A \subset \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Problema 1.2 Demostrar que se verifican las siguientes igualdades:

1. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
5. $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$
6. $\overline{(A \triangle B)} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B}$

Problema 1.3 Simplificar las expresiones

1. $[\overline{B} \cap (\overline{A} \cup C) \cap D] \cup \overline{[(A \cup B) \cap B]}$
2. $\overline{(\overline{[(A \cup B) \cap C]} \cup \overline{B})}$

Problema 1.4 Decir si son inyectivas las aplicaciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0, \\ -2x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}, \qquad g(x) \;=\; \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Problema 1.5 Calcular, si es posible, la inversa de la función $F\colon \mathbb{R} \setminus \{-1/2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$, definida como

$$F(x) = \frac{x + 3}{1 + 2x}.$$

Problema 1.6 Se consideran las funciones techo y suelo.

1. Calcular

$$\lfloor 1/2 \rfloor,\ \lceil 1/2 \rceil,\ \lfloor -1/2 \rfloor,\ \lceil -1/2 \rceil,\ \lfloor \pi \rfloor,\ \lceil \pi \rceil,\ \lfloor 1/2 + \lceil 1/2 \rceil \rfloor,\ \lceil \lfloor 1/2 \rfloor + \lceil 1/2 \rceil + 1/2 \rceil$$

2. Dibujar las gráficas de ambas funciones.

3. En cierto protocolo de comunicaciones los datos se transmiten en paquetes de 53 bytes. ¿Cuántos paquetes se pueden transmitir en un minuto a través de una conexión que transmite datos a una velocidad de 500 Kilobits por segundo?
   INDICACIÓN: Cada byte está compuesto por 8 bits.

Problema 1.7 Determinar si cada una de las siguientes funciones $f : A \to B$ es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o nada.

1. $A \neq \varnothing$, $B = \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$.
2. $A = B = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$, $f(X) = \overline{X}$.
3. $A = B = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$, $f(X) = X \cup \{a, b\}$.
4. $A = B = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$, $f(X) = X \cap \{a, b\}$.

Problema 1.8 ¿Cuál es el cociente y el resto cuando

1. 44 se divide entre 8?
2. 19 se divide entre 7?
3. -1 se divide entre 3?
4. -123 se divide entre 19?
5. -100 se divide entre -101?

Un nota sobre el máximo común divisor

Proposición 1 *Si $a, b \in \mathbb{N}$ se factorizan de la forma*

$$\begin{aligned} a &= p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}, \\ b &= p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}, \end{aligned}$$

con $n_i, m_i \geq 0$ y donde todos los factores primos de a y b aparecen en ambas factorizaciones, se cumple que:

$$\begin{aligned} \operatorname{mcd}(a, b) &= p_1^{\min(n_1, m_1)} \cdot p_2^{\min(n_2, m_2)} \cdots p_k^{\min(n_k, m_k)}, \\ \operatorname{mcm}(a, b) &= p_1^{\max(n_1, m_1)} \cdot p_2^{\max(n_2, m_2)} \cdots p_k^{\max(n_k, m_k)}. \end{aligned}$$

Problema 1.9 Encontrar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 500 y 120 mediante la factorización de ambos en números primos.

2. Combinatoria básica I

Problema 2.1 Los ordenadores representan la información mediante unidades de información llamadas **bits**. Un bit tiene dos valores posibles: 0 ó 1. Una **cadena de bits** de longitud n es una sucesión de bits $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$ de n bits.

1. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud n hay?
2. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud $n \geq 2$ empiezan y terminan con 1?
3. ¿Cuántas cadenas de bits tienen longitud menor o igual que n?
4. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud menor o igual que $n \in \mathbb{N}$ están formadas únicamente por unos?
5. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud $n \geq 6$ contienen al menos tres ceros y tres unos?
6. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud $n \geq 5$ o bien empiezan por dos ceros o bien acaban por tres unos?
7. Un **palíndromo** es una cadena de bits que al invertirse es idéntica a si misma (por ejemplo 0010110100). ¿Cuántas cadenas de bits de longitud n son palíndromos?

Problema 2.2 ¿De cuántas maneras puede el fotógrafo de una boda disponer en fila a 6 personas de un grupo de 10 invitados, entre los cuales están el novio y la novia, si

1. la novia tiene que estar en la foto?
2. tanto el novio como la novia tienen que estar en la foto?
3. exactamente uno de los dos (novio/a) tiene que estar en la foto?
4. el novio y la novia están en la foto y deben aparecer juntos?
5. el novio y la novia están en la foto y deben aparecer en posiciones separadas?
6. el novio y la novia aparecen juntos en la foto y la novia debe estar situada a la izquierda del novio?

Problema 2.3 Encontrar cuántos números de cinco dígitos se pueden formar con el conjunto $\{1, 2, 3\}$ tales que aparezcan los tres dígitos (es decir, que cada dígito aparezca al menos una vez).

Problema 2.4 Encontrar el número de palabras de tres letras que se pueden formar con el conjunto de diez letras $\{A, B, \ldots, J\}$ tales que todas las letras sean diferentes y además aparezcan en orden alfabético?

Problema 2.5 Un barco dispone de 12 banderas distintas y puede izar hasta 3 en su mástil de señales para indicar alguna circunstancia del barco.

- ¿Cuántos estados diferentes pueden describirse con al menos una bandera?
- ¿Cuántos estados diferentes pueden describirse con la menos una bandera si el barco dispone de 3 juegos iguales de banderas?

Problema 2.6 Encontrar el número de maneras de colocar tres A's y siete B's de manera que no haya dos A's consecutivas.

Problema 2.7 ¿Cuántas trayectorias posibles hay en el espacio tridimensional uniendo los puntos $(-1, 2, 0)$ y $(1, 3, 7)$ si sólo se admiten movimientos de longitud 1 en la dirección de los ejes? Es decir, cada trayectoria está compuesta por movimientos de los siguientes tipos:

(H) $(x, y, z) \to (x + 1, y, z)$,

(V) $(x, y, z) \to (x, y + 1, z)$,

(L) $(x, y, z) \to (x, y, z + 1)$.

¿Cuántas de ellas pasan por el punto $(0, 3, 4)$?

El principio del palomar

Proposición 2 (Principio del palomar) *Si $k+1$ ó más objetos se colocan en k cajas, existe al menos una caja que contiene dos o más objetos.*

Nota: Dada una función $f\colon A \to B$ con $|A| > |B|$, entonces f no puede ser inyectiva. Luego existen al menos dos elementos distintos $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b) \in B$.

Proposición 3 (Principio del palomar generalizado) *Si se colocan N objetos en k cajas, existe al menos una caja con al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.*

Problema 2.8 Demostrar que, dados cinco números enteros distintos cualesquiera, hay al menos de ellos que tienen el mismo resto al divirlos por cuatro.

3. Teoría de Grafos I

Problema 3.1 Sea V el conjunto de aquellas palabras de dos letras construidas sobre el alfabeto $\{w, x, y, z\}$ cuya primera letra es y ó z. Se define el grafo $G = (V, A)$ de forma que dos palabras de V determinan una arista de A si difieren exactamente en una letra.

1. ¿Cuántos vértices tiene G?
2. Dibujar el grafo G.
3. Demostrar que G es regular y calcular su grado.
4. Estudiar si G es bipartito.

Problema 3.2 Si un grafo G y su complementario $\overline{G}$ tienen respectivamente 20 y 25 aristas, ¿cuántos vértices tiene G?

Problema 3.3 Calcular el número de vértices de los grafos simples conexos G cuando

1. G es un grafo regular de grado 2 con 9 aristas
2. G es un grafo regular de 6 aristas

3. G tiene 10 aristas, 2 vértices de grado cuatro y el resto de grado 3.

Problema 3.4 Sea K_n el grafo completo de n vértices.

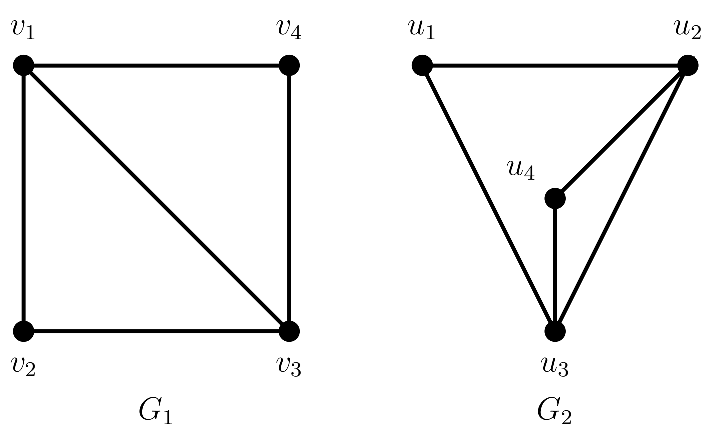
- Dibujar K_1, K_2, K_3, K_4 y K_5.
- ¿Cuál es el grado de los vértices de K_n?
- ¿Cuántas aristas tiene K_n?
- Demostrar que K_n es un subgrafo de K_m para todo $n < m$.

Problema 3.5 ¿Para qué valores de $n \geq 3$ son bipartitos K_n, P_n, Q_n y C_n?

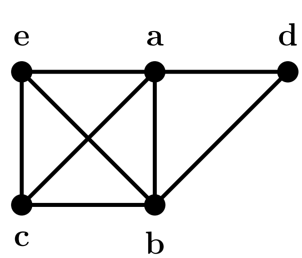
Problema 3.6 Demostrar que en cualquier grafo simple sin vértices aislados hay al menos dos vértices del mismo grado.

Problema 3.7 Hallar el mínimo número posible de vértices de un grafo con siete aristas si cada vértice tiene a lo sumo grado 3.

Problema 3.8 Escribir las matrices de adyacencia A_1 y A_2 de los grafos de la figura, y probar que estos son isomorfos encontrando una matriz de permutación P que verifique $A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$.



Problema 3.9 En el grafo G de la figura



se consideran los recorridos

1. $C_1 = (a, e, b, c, b)$

2. $C_2 = (e, b, a, d, b, e)$

3. $C_3 = (a, e, a, d, b, c, a)$

4. $C_4 = (c, b, d, a, e, c)$

Determinar cuáles son caminos, ciclos o circuitos y hallar sus longitudes.

4. Teoría de Grafos II

Problema 4.1 Sea K_n el grafo completo de n vértices.

1. ¿Cuántos ciclos de longitud tres contiene K_n?

2. ¿A cuántos triángulos pertenece cada arista de K_n?

Problema 4.2 Demostrar que las parafinas $C_n\,H_{2n+2}$ tienen moléculas de tipo árbol [Arthur Caley, 1857].

Problema 4.3 Demostrar que si en un árbol con raíz todos los vértices que no son hojas tienen grado tres, entonces el árbol tiene un número par de vértices

Problema 4.4 Demostrar que no existe ningún grafo plano conexo tal que todo vértice tenga grado al menos ocho y toda cara esté limitada por al menos ocho aristas.

Problema 4.5 Sean dos grafos conexos G y G'. G es un grafo plano de 10 vértices que divide el plano en 3 regiones y G' es un grafo de 10 vértices todos ellos de grado mayor o igual que 3. Explicar razonadamente si G y G' pueden o no ser isomorfos.

Problema 4.6 Dar un ejemplo, si es que existe, de

1. grafo regular y bipartito

2. grafo regular de grado 3 con 9 vértices

3. grafo de n vértices con $(n-1)(n-2)/2$ aristas

4. multigrafo conexo regular de grado 4

5. grafo isomorfo a su complementario

6. grafo isomorfo a su dual.

Problema 4.7 ¿Cuántos árboles tiene un bosque de 62 vértices y 51 aristas?

Problema 4.8 Sea el conjunto $X = \{A, B, C\}$. Definimos el grafo simple $G = (V, E)$ de la siguiente manera: el conjunto de vértices está formado por los subconjuntos de X ($V = \mathcal{P}(X)$) y dos vértices $R, S \in V$ son adyacentes si y sólo si $R \subset S$ ó $S \subset R$.

- ¿Cuántos vértices y aristas tiene G?

- ¿Cuál es el grado de los distintos vértices de G? ¿Es regular?

- Razonar si G es planar o no.
- ¿Es G bipartito?

Problema 4.9 Demuestra que si $G = (V, E)$ es un grafo simple y

$$|E| > \binom{|V| - 1}{2},$$

entonces G es conexo.

Problema 4.10 Si el grado medio de un grafo conexo es mayor que 2, demostrar que existen al menos dos ciclos independientes.

Problema 4.11 Sea $G = (V, E)$ un grafo cuya matriz de adyacencia A_G está dada por

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Contestar a las siguientes preguntas usando argumentos basados únicamente en la matriz A_G (y <u>sin usar</u> la representación gráfica de G que se puede obtener de A_G):

a) Decir si G es un pseudografo, multigrafo o un grafo simple.

b) Decir el número de vértices y aristas de G.

c) ¿Es G un grafo regular? Si lo es, decir el grado común de todos los vértices; en caso contrario, dar la secuencia de grados de G.

d) Sean $i \neq j$ dos vértices distintos de G ($i, j \in V$). Sea n_{ij} el número de caminos de i a j de <u>longitud 3</u>. Encontrar los posibles valores de n_{ij} en G.

e) ¿Cuál es el <u>ciclo</u> de menor longitud en G?

5. Teoría de Grafos III

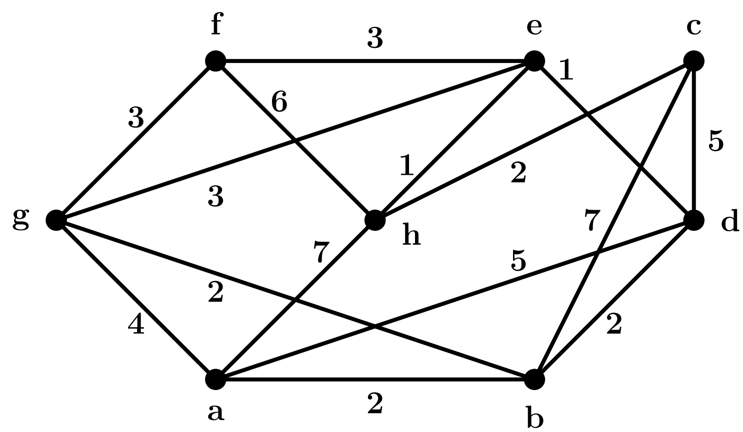
Problema 5.1 Sea el grafo $G = (V, E)$ definido por la siguiente matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

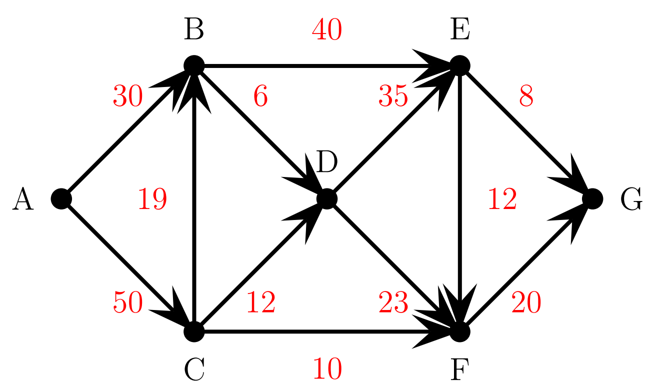
1. ¿Es bipartito? ¿Es planar?

2. Encontrar, si es posible, un árbol generador.

Problema 5.2 Estudiar si el siguiente grafo admite un árbol recubridor de peso menor o igual que 12



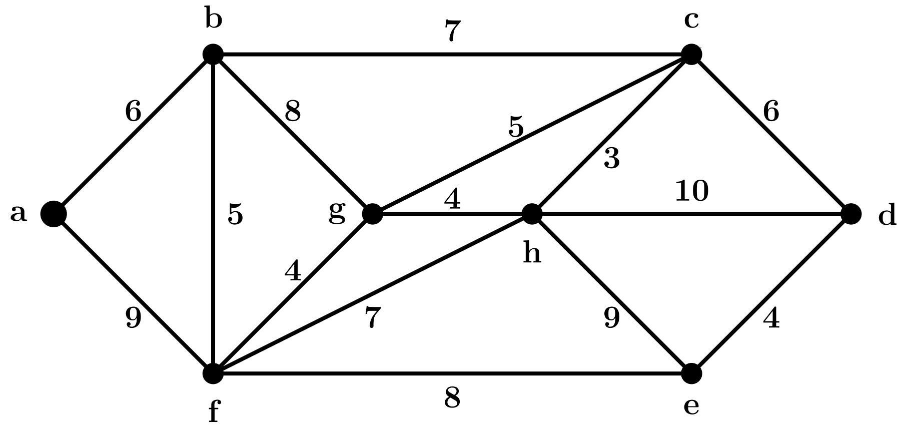
Problema 5.3 Dado el siguiente grafo dirigido:



1. Encontrar el camino más corto para ir de A a G

2. Encontrar el camino más corto para ir de A a G, suponiendo que los arcos CB y EF no están dirigidos, es decir, se pueden recorrer en cualquier sentido.

Problema 5.4 En el grafo ponderado de la figura calcular las distancias $d(a, h)$, $d(a, e)$, $d(d, a)$, $d(d, g)$ y $d(b, e)$.



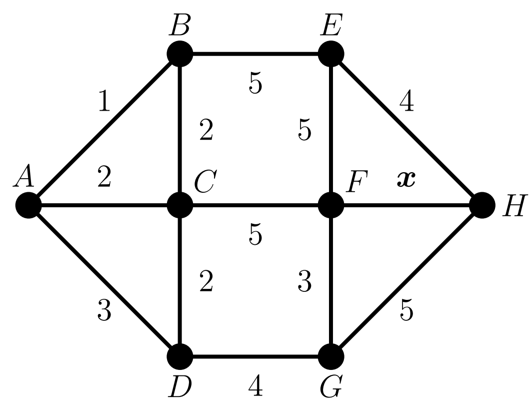
Problema 5.5 Sea $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ el conjunto de vértices del grafo ponderado $G = (V, E)$ cuya matriz de pesos se adjunta a continuación (por ejemplo $(C, D) \in E$; 'peso' de $(C, D) = 10$):

V	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
A	·	5	·	·	7	14	·	·	·	·	·	·	·
B	5	·	7	·	1	·	2	·	·	·	·	·	·
C	·	7	·	10	·	·	6	6	·	·	·	·	·
D	·	·	10	·	·	·	·	4	·	·	·	·	·
E	7	1	·	·	·	4	·	·	·	·	·	·	·
F	14	·	·	·	4	·	8	·	6	4	·	·	·
G	·	2	6	·	·	8	·	7	6	4	·	·	·
H	·	·	6	4	·	·	7	·	·	·	1	2	·
I	·	·	·	·	·	6	6	·	·	·	·	·	·
J	·	·	·	·	·	4	4	·	·	·	11	13	·
K	·	·	·	·	·	·	·	1	·	11	·	·	2
L	·	·	·	·	·	·	·	2	·	13	·	·	5
M	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	2	5	·

1. Determina un camino de 'peso' (o 'longitud') mínimo que una el vértice A con el vértice M. Calcula el peso total de dicho camino.

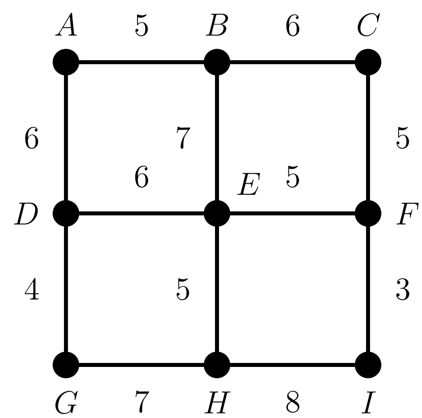
2. Encuentra un árbol generador de peso mínimo e indica su peso.

Problema 5.6 Sea $G = (V, E, \omega)$ el siguiente grafo ponderado (con el peso de la arista $\{F, H\}$ igual a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$):



Calcular el intervalo con los valores posibles del peso $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ para que el camino de longitud mínima que parte de A y llega a H pase por la arista $\{F, H\}$.

Problema 5.7 Un constructor está planificando una nueva urbanización compuesta por 9 chalés individuales y ahora quiere diseñar el abastecimiento de agua. Como sabe algunas nociones de la teoría de grafos, define un grafo ponderado $G = (V, E, \omega)$, donde los vértices $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ corresponden a los chalés; dos vértices son adyacentes si los correspondientes chalés se pueden conectar con una tubería para el agua y el peso de cada arista es el coste (en miles de euros) de colocar la tubería correspondiente. El grafo G viene dado por:

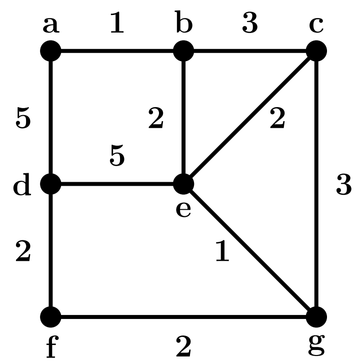


- Si el constructor coloca la toma principal de agua en el chalé A, calcula, usando el algoritmo de Dijsktra, el coste mínimo para hacer llegar el agua al chalé I (que es donde él vivirá). Calcular también el coste total del árbol generador con **raíz** en A que conecta este chalé con el resto de manera que el coste de la tubería que conecta A con cada chalé sea mínimo.

- El resto de vecinos, cuando se enteran de esta idea, se quejan del precio de esta posible instalación. Ellos prefieren colocar las tuberías usando un árbol generador de coste mínimo. Encuentra uno de estos subgrafos usando el algoritmo de Prim y calcula el coste total de esta instalación alternativa.

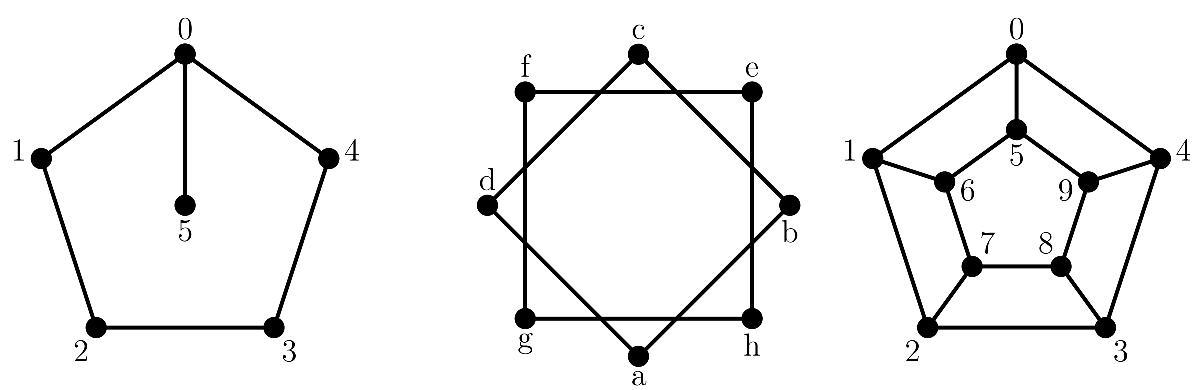
6. Teoría de Grafos IV

Problema 6.1 Sea el siguiente grafo ponderado G y sea H el grafo simple resultante de eliminar los pesos de G.

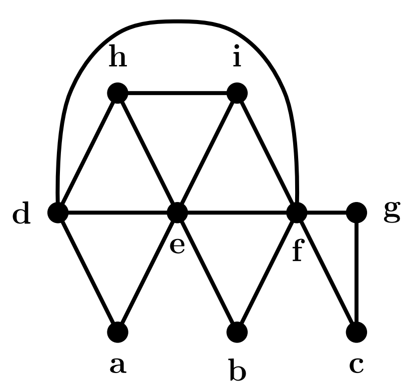


1. Encontrar un árbol recubridor mínimo de G.
2. Estudiar si H es o no bipartito y, en caso afirmativo, dar dos conjuntos de vértices que lo demuestre.
3. Estudiar la existencia de circuitos o caminos eulerianos y de ciclos o caminos hamiltonianos.
4. Encontrar un grafo con la misma secuencia de grados que H, pero que no sea isomorfo a H, y explicar por qué no es isomorfo.

Problema 6.2 Estudiar si son eulerianos, semi-eulerianos, hamiltonianos o semi-hamiltonianos los siguientes grafos:



Problema 6.3 Determinar si el siguiente grafo admite un circuito o un recorrido euleriano y encontrarlo (si es que existe).



Problema 6.4 En un festival de cine compiten seis películas en el día inaugural. Las películas 1, 3 y 5 son dramas, las películas 2, 4 y 6 son comedias, las películas 3 y 4 son independientes, mientras que las películas 5 y 6 son de Hollywood. Cada película dura dos horas. ¿Cuál es el número mínimo de horas que se necesitan para proyectar todas las películas de tal modo que las películas del mismo tipo no solapen?
NOTA: Este problema hay que hacerlo usando técnicas de Teoría de Grafos.

Problema 6.5 Dado un conjunto de intervalos de la recta real se puede construir un grafo asociado, llamado **grafo de intervalos**, de la siguiente manera: cada intervalo es un vértice del grafo y dos vértices son adyacentes si y sólo si los intervalos correspondientes tienen intersección no vacía.

1. Calcular el grafo de intervalos G asociado al conjunto de intervalos
$$\{(1,9),(7,8),(0,3),(4,10),(2,6),(5,11)\}$$
2. Analizar razonadamente si el grafo G es hamiltoniano, euleriano y bipartito. Construir, en caso de que existan, un circuito o recorrido euleriano y un ciclo hamiltoniano para el grafo.

Problema 6.6 Encontrar ejemplos de grafos **simples** G que satisfagan las siguientes condiciones:

- G tiene 7 vértices, es hamiltoniano y es euleriano.
- G tiene 8 vértices, es hamiltoniano y euleriano y el ciclo hamiltoniano no coincide con el circuito euleriano (y viceversa).
- G tiene 7 vértices, es hamiltoniano, no es euleriano y no tiene ninguna arista puente.
- G tiene 7 vértices, no es hamiltoniano y es euleriano.
- G tiene 7 vértices, es hamiltoniano, no es euleriano y es bipartito.

Problema 6.7 Sea el grafo $G = (V, E)$ definido por la siguiente matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Es bipartito? ¿Es planar?
2. Encontrar su número cromático mediante el uso de algún algoritmo de teoría de grafos.
3. Encontrar, si es posible, un árbol generador.

4. ¿Es G semi-euleriano? ¿Cuál es el número mínimo de aristas que necesitamos añadir a G para que sea euleriano?

Problema 6.8 Sea la familia de grafos $G_n = (V_n, E_n)$ con $n \in \mathbb{N}$ definida de la siguiente manera:

- Cada vértice $v \in V_n$ corresponde a una cadena de bits de longitud n con un número **par** de unos.
- Dos vértices $x, y \in V_n$ son adyacentes ($\{x, y\} \in E_n$) si y sólo si difieren exactamente en dos bits.

Si n es un natural fijo, calcular $|V_n|$ y $|E_n|$. ¿Es G_n un grafo regular? En caso afirmativo dar el grado común y, en caso negativo, dar la secuencia de grados. ¿Para qué valores de n es G_n euleriano?

7. Combinatoria básica II

Problema 7.1 Se tienen 4 pelotas de golf y 10 cajas distintas. Hallar de cuántas maneras distintas pueden distribuirse las pelotas en las cajas si

1. todas las pelotas son distintas y en ninguna caja cabe más de una pelota.
2. las pelotas son indistinguibles y en ninguna caja cabe más de una pelota.
3. las pelotas son indistinguibles y en cada caja caben cuantas se deseen.
4. todas las pelotas son distintas y en cada caja caben cuantas se deseen.

Problema 7.2 Si se lanzan simultáneamente 6 dados iguales, ¿cuántos resultados son posibles?

Problema 7.3 ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila a bolas blancas y b bolas negras de manera que haya $k + 1$ rachas de bolas negras?

Problema 7.4 Encontrar el número de subconjuntos de cuatro elementos tomados del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ que no contienen enteros consecutivos.

Problema 7.5 Encontrar el número de subconjuntos de p elementos tomados de un conjunto de n elementos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de manera que no contiene elementos consecutivos.

Problema 7.6 ¿Cuántas soluciones hay de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ en el conjunto de los enteros no negativos $\mathbb{Z}_+$?

Problema 7.7 ¿Cuántas soluciones hay de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ en el conjunto de los naturales?

Problema 7.8 ¿Cuántas soluciones hay de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ si cada $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Problema 7.9 ¿De cuántas formas se pueden elegir 25 objetos de entre siete categorías distintas, habiendo siempre entre 2 y 6 de cada categoría?

Problema 7.10

1. Ocho personas van a cenar y en la carta hay cuatro postres diferentes. ¿Cuántos pedidos diferentes puede tener el camarero?

2. ¿Cuántas soluciones con $x_i \in \mathbb{N}$ existen de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \;=\; r\,?$$

3. ¿Cuántas soluciones naturales existen de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \;=\; 21$$

   bajo la restricción $x_1 > 1$?

Problema 7.11 Una empresa de ventas tiene que inspeccionar las ventas en 20 ciudades. Se destinan para ello 5 miembros del personal, cada uno de los cuales supervisará 4 ciudades.

1. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar las ciudades en cinco grupos de cuatro?

2. ¿De cuántas maneras se pueden asignar las ciudades a los inspectores?

8. Relaciones de recurrencia

Problema 8.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera un conjunto de n rectas contenidas en el plano que cumplen las siguientes propiedades

P1. Ningún par de rectas del conjunto son paralelas

P2. Por cada punto de intersección sólo pasan dos rectas de dicho conjunto.

Si S_n es el número de regiones del plano que definen n rectas con las propiedades anteriores:

- Encontrar la relación de recurrencia para S_n.

- Resolverla.

Problema 8.2 Se consideran las cadenas de 10 dígitos formadas con 0, 1, y 2, repitiendo cada uno tantas veces como se quiera. ¿Cuántas de esas cadenas serán tales que la suma de sus 10 dígitos sea par?

Problema 8.3 Al resolver un problema, diremos que nos encontramos en la n-sima fase si nos faltan n pasos para encontrar la solución. Supongamos que en cada fase, se tienen 5 opciones. Dos de ellas conducen a la $(n-1)$-sima fase, mientras que las otras tres son mejores en el sentido de que conducen directamente a la $(n-2)$-sima fase. Supongamos que a_n denota de cuántas maneras se puede alcanzar la solución desde la n-sima fase. Si $a_1 = 2$, comprobar que $a_2 = 7$ y obtener una relación de recurrencia para a_n. Deducir que

$$a_n = \frac{1}{4}\left[3^{n+1} + (-1)^n\right] .$$

Problema 8.4 Calcular el número de cadenas de bits de longitud $n \geq 1$ que no tengan dos ceros consecutivos.

Problema 8.5 Existen 3^n secuencias de longitud n formadas por $\{0, 1, 2\}$. Calcular el número de ellas que tienen un número impar de ceros.

$$a_n \;=\; a_{n-1} + 3^{n-1}\,, \quad n \geq 2\,, \quad a_1 = 1\,.$$

Problema 8.6 Resolver la ecuación:

$$a_n \;=\; 4a_{n-1} - 4a_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,, \quad a_1 = a_2 = 1\,.$$

Problema 8.7 Sea a_n el número de cadenas de longitud n que puedo formar con los dígitos $\{0, 1, 2\}$ de manera que no haya dos 1's ó dos 2's seguidos.

1. Demostrar que $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}\,, \quad n \geq 3$.
2. Encontrar una expresión explícita para a_n.

Problema 8.8 Resolver la ecuación:

$$a_n \;=\; -a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}\,, \quad n \geq 2\,, \quad a_1 = 0\,.$$

Problema 8.9 Sea el siguiente algoritmo **recursivo** para calcular la exponencial a^n con $n \in \mathbb{N}$:

```
procedure exp1(a,n)
if (n = 1)
  return a
else
  m = floor(n/2)
  return exp1(a,m) ⋆ exp1(a,n-m)
```

Sea b_n el número de multiplicaciones necesario para calcular a^n:

- Calcular b_1, b_2, b_3 y b_4.
- Encontrar una relación de recurrencia para $\{b_n\}$.
- Resolver la recurrencia cuando n es una potencia de 2.
- Probar que $b_n = n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Funciones generatrices

Problema 9.1 Encontrar el número de soluciones de la ecuación lineal

$$x_1 + x_2 + x_3 \;=\; 17\,,$$

si las variables están sujetas a las condiciones

- $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.
- $x_1, x_2 \in 2\mathbb{N}$ son pares y $x_3 \geq 0$ es impar.

- x_i son impares no negativos.

Problema 9.2 Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia usando funciones generatrices:

1. $a_{n+1} - a_n = 3^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.
2. $a_{n+1} - a_n = n^2$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.
3. $a_n - a_{n-1} = 5^{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$.
4. $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$.
5. $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
6. $a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 2^n$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Problema 9.3 Demostrar que, dado un natural N, el número de *particiones* de N en naturales *distintos* coincide con el número de particiones de N en naturales *impares*.
Ejemplo: el entero $N = 4$ tiene dos particiones en naturales distintos $(3+1$ y $4)$ y dos particiones en naturales impares $(1+1+1+1$ y $3+1)$. El entero $N = 6$ tiene cuatro particiones en naturales distintos $(1+2+3,\ 2+4,\ 1+5$ y $6)$ y cuatro particiones en naturales impares $(1+1+1+1+1+1,\ 1+1+1+3,\ 3+3$ y $1+5)$.

Problema 9.4 Encontrar una ecuación que satisfaga la función generatriz F que resuelve la siguiente ecuación de recurrencia con coeficientes variables:

$$n\, a_n \ =\ 2(a_{n-1} + a_{n-2})\,, \quad n \geq 2\,, \quad a_0 = e\,, \quad a_1 = 2e\,.$$

AYUDA: La ecuación puede involucrar derivadas de F.

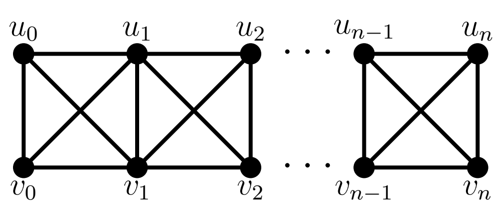
Problema 9.5 Encontrar el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 \ =\ N\,,$$

con $x_i \geq 0$ y usando funciones generatrices.

10. Teoría de grafos V

Problema 10.1 Sea el grafo G_n con $2(n+1)$ vértices



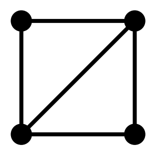
- ¿Es G_n bipartito? ¿Es planar?
- Calcular el número de emparejamientos completos de G_n.

- Demostrar que satisface: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$ con $a_1 = 3$ y $a_2 = 5$.
- Resolver la recurrencia y probar que $a_n = \frac{1}{3}\left[2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right]$.

Problema 10.2 Encontrar el polinomio cromático P_{C_n} de un ciclo de n vértices:

- Encontrar la relación de recurrencia que satisface P_{C_n} usando el teorema de contracción-borrado.
- Resolver dicha relación de recurrencia.
- ¿Cuál es el número cromático de P_{C_n}?

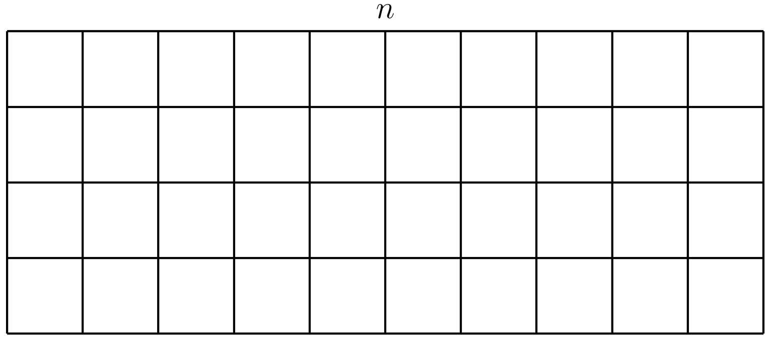
Problema 10.3 Encontrar el polinomio cromático P_G y el número cromático $\chi(G)$ del grafo G definido de la siguiente manera:



Problema 10.4 Tenemos un pasillo de tamaño $n \times 4$ y queremos cubrirlo con losetas de tamaños 4×1 y 4×3 de manera que el pasillo quede completamente cubierto de losetas sin que solapen en ningún punto. Cada tipo de loseta se puede poner de dos maneras distintas: horizontal y verticalmente.

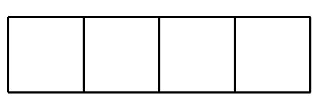
n

4



Pasillo de tamaño $n \times 4$

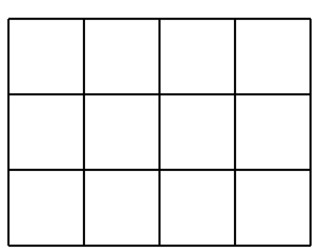
1



4

Loseta de tamaño 4×1

3



4

Loseta de tamaño 4×3

Sea a_n el número de maneras distintas de cubrir un pasillo de longitud $n \geq 1$ con losetas de las formas anteriores.

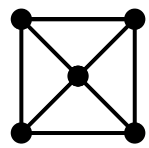
- Encontrar una ecuación de recurrencia para a_n y las condiciones iniciales para poder resolverla. **Nota**: ¡no tenéis que resolver esta ecuación de recurrencia!

- Resolver la relación de recurrencia

$$a_n \;=\; 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3 \times 2^n\,, \qquad n \geq 2\,,$$

  con condiciones iniciales $a_0 = 1/2$ y $a_1 = 6$.

Problema 10.5 Encontrar el polinomio cromático P_G y el número cromático $\chi(G)$ del grafo G definido de la siguiente manera:



Problema 10.6 Encontrar el número de emparejamientos perfectos del grafo W_n (recordad que tiene forma de rueda con n vértices en el exterior y un vértice extra en el eje).

Problema 10.7 Encontrar el polinomio cromático de un bosque con n vértices y k componentes conexas.

Problema 10.8 Sea $G_n = (V_n, E_n)$ la familia de grafos definida como sigue. El conjunto de vértices es $V_n = \{1, \ldots, n+1\}$ y el conjunto de aristas viene dado por

$$E_n \;=\; \{\{i, i+1\} \colon 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{n, 1\}\} \cup \{\{n+1, k\} \colon 1 \leq k \leq 3\}\,.$$

Calcular su polinomio cromático. `Ayuda:` dibujarlo como un ciclo de n vértices con el vértice $n+1$ en el centro de dicho ciclo.

11. Relaciones binarias de equivalencia

Problema 11.1 Sean A y B dos conjuntos y $f \colon A \to B$ una cierta función. Demostrar que la relación binaria definida en A según la regla

$$a\mathcal{R}b \;\Leftrightarrow\; f(a) \;=\; f(b)\,, \quad a, b \in A\,,$$

es de equivalencia para cualquier f. ¿Cuál es conjunto cociente $A/\mathcal{R}$?

Problema 11.2 En el conjunto $A = \{6, 10, 12, 18, 21, 40, 441, 1323\}$ se define la relación

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x \text{ e } y \text{ tienen los mismos divisores primos}\,.$$

Hacer una de estas dos cosas, según proceda: (a) si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, hallar las clases de equivalencia; (b) si no es de equivalencia, decir qué propiedades no cumple.

Problema 11.3 Sea A un conjunto y $B \subset A$ un subconjunto fijo. Se considera el conjunto $\mathcal{P}(A)$ y en él se define la relación

$$X\mathcal{R}Y \quad \Leftrightarrow \quad X \cap B \;=\; Y \cap B$$

entre dos subconjuntos cualesquiera X, Y de A.

1. Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
2. Calcular el conjunto cociente y verificar que existe una biyección entre éste y $\mathcal{P}(B)$.

Problema 11.4 Sea la relación $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de manera que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si y sólo si $a+b=c+d$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y que existe una biyección entre el conjunto cociente $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\mathcal{R}$ y $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Problema 11.5 En el conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ se considera la relación $a\,\mathcal{R}\,b$ si y sólo si $\lfloor\sqrt{a}\rfloor=\lfloor\sqrt{b}\rfloor$. Probar que es una relación de equivalencia, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Problema 11.6 En $\mathbb{R}_2=\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ se define la relación

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad ad=bc$$

Demostrar que una relación de equivalencia y obtener el conjunto cociente $\mathbb{R}_2/\mathcal{R}$.

Problema 11.7 Una relación $\mathcal{R}$ definida en un conjunto A se dice que es **circular** si verifica

$$a\mathcal{R}b \quad \text{y} \quad b\mathcal{R}c \quad \Rightarrow \quad c\mathcal{R}a\,.$$

Demostrar que una relación es de equivalencia si y sólo si es circular y reflexiva.

Problema 11.8 Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A recibe el nombre de **débilmente transitiva** si para todos los elementos $a,b,c,d\in A$, las relaciones $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$, y $c\mathcal{R}d$ implican $a\mathcal{R}d$. Una de las siguientes afirmaciones es falsa y la otra es cierta. Establecer cuál es verdadera y cuál falsa (demostrar la verdadera, y argumentar por qué la otra es falsa).

1. Toda relación simétrica y débilmente transitiva es transitiva.
2. Toda relación reflexiva, simétrica y débilmente transitiva es relación de equivalencia.

Problema 11.9 La matriz de adyacencia de una relación $\mathcal{R}$ viene dada por

$$A_{\mathcal{R}} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & a & c \end{pmatrix},$$

donde $a,b,c=0,1$. ¿Qué condiciones deben satisfacer a, b y c para que $\mathcal{R}$ sea una relación de equivalencia?

Problema 11.10 Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia. Encontrar las correspondientes clases de equivalencia y el conjunto cociente $V/\mathcal{R}$:

1. $V = \mathbb{Z}$ y $v\mathcal{R}w$ si $|v - w|$ es múltiplo de 2.
2. $V = \mathbb{Z}$ y $v\mathcal{R}w$ si $v^2 - w^2 = v - w$. Describir la clase de equivalencia de 2005.
3. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $xy = uw$.
4. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $(x - y)(x + y) = (u - w)(u + w)$.
5. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $x^2 + y^2 = u^2 + w^2$.

12. Aritmética modular

Problema 12.1 Dados $a = 92$ y $b = 84$, usar el algoritmo de Euclides para obtener $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, así como valores $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $ax + by = d$.

Problema 12.2 El producto de dos números naturales es 1260 y su mínimo común múltiplo es 630. ¿De qué números se trata?

Problema 12.3 ¿Cuantos divisores positivos tiene el número $29338848000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Y de 39?

Problema 12.4 Demostrar que $\log_2 3$ es un número irracional.

Problema 12.5 Demostrar que 101 es un número primo.

Problema 12.6 Demostrar que $6 \mid a(a + 1)(2a + 1)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Problema 12.7 Calcular las soluciones enteras de las ecuaciones diofánticas

1. $28x + 36y = 44$.
2. $66x + 550y = 88$.

Problema 12.8 Resolver las siguientes ecuaciones de congruencia:

1. $3x \equiv 5 \pmod{13}$.
2. $8x \equiv 2 \pmod{10}$.
3. $5x \equiv 7 \pmod{15}$.
4. $3x \equiv 9 \pmod{15}$.

Problema 12.9 Encontrar el resto de dividir 2^{68} entre 19.

Problema 12.10 Demostrar que $30 \mid (a^{25} - a)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Problema 12.11 Calcular los dos últimos dígitos de 3^{1492}.

Problema 12.12 Determinar el resto de dividir por 5 el número hexadecimal A1F05FFA01AFA0F.

13. Relaciones de orden

Problema 13.1 Dada la matriz de una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ e $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$.
2. Calcular su diagrama de Hasse.
3. Hallar un orden total que contenga a $\mathcal{R}$.

Problema 13.2 Sea $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$ y sea en él la relación de orden $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow (a + b) \mid (c + d)$. ¿Cuáles son los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de A?

Problema 13.3 En $\mathbb{R}^2$ se considera la relación de orden

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a \leq c \quad \text{y} \quad b \leq d\,.$$

Hallar, justificando la respuesta, los elementos maximales y minimales del conjunto

$$C \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

Calcular $\sup(C)$ e $\inf(C)$ considerando C como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Problema 13.4 Sea $A = \{n \in \mathbb{Z} \;:\; 2 \leq n \leq 12\}$. Sea en A la relación de orden $\mathcal{R}$ dada por

$$n\,\mathcal{R}\,m \Leftrightarrow n \text{ divide exactamente a } m, \text{ ó } n \text{ es primo y } n \leq m\,.$$

Decir sus elementos maximales, minimales, máximo y mínimo.

Problema 13.5 Se consideran las dos relaciones binarias en el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ de los números naturales

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}_1 b \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que } a = b^n\,, \\ a\mathcal{R}_2 b \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{tal que } a = b^n\,. \end{aligned}$$

1. Demostrar que $\mathcal{R}_1$ es una relación de orden. ¿Lo es también $\mathcal{R}_2$? ¿Es $\mathcal{R}_1$ un orden total?
2. Hallar, justificando la respuesta, el diagrama de Hasse de cada una de las dos relaciones sobre el conjunto
$$A = \{n \in \mathbb{N} \colon 1 \leq n \leq 9\}\,.$$
3. Hallar, para cada una de las relaciones, los elementos maximales y minimales de A, sus cotas superiores e inferiores en $\mathbb{N}$, así como el supremo y el ínfimo de A, en caso de que existan.

Problema 13.6 Sea el ciclo $C_4 = (V_4, E_4)$ en el que etiquetamos los vértices $V_4 = \{a, b, c, d\}$.

1. Si A es el conjunto de los subgrafos generadores de C_4:

$$A \;=\; \{G = (V_4, E) \colon E \subseteq E_4\}\,,$$

¿cuánto vale el cardinal de A?

2. Sobre el conjunto A definimos la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$: si $G_1, G_2 \in A$,

$$G_1 \,\mathcal{R}\, G_2 \quad\Leftrightarrow\quad G_1 \text{ es isomorfo a } G_2.$$

Encontrar las clases de equivalencia $[G]_{\mathcal{R}}$ y el conjunto cociente $C = A/\mathcal{R}$.

3. Sobre el conjunto cociente C definimos la siguiente relación de orden $\preceq$:

$[A]_{\mathcal{R}} \;\preceq\; [B]_{\mathcal{R}} \;\Leftrightarrow\; \exists$ grafos $G_1 = (V_4, E_1) \in [A]_{\mathcal{R}}$ y $G_2 = (V_4, E_2) \in [B]_{\mathcal{R}}$ tales que $E_1 \subseteq E_2$.

Encontrar el diagrama de Hasse del conjunto $(C, \preceq)$. ¿Es $(C, \preceq)$ un conjunto totalmente ordenado?

4. Sea $Z \subset C$ el subconjunto de C formado por las clases que contengan al menos un representante con dos aristas. Calcular $\sup(Z)$ e $\inf(Z)$.

Problema 13.7 Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$3 \;\mid\; \bigl(4^n - 1\bigr)\,.$$

Problema 13.8 Un polígono es **convexo** si, para dos puntos cualesquiera del mismo, el segmento que definen está totalmente contenido en el polígono. Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de $n \geq 3$ lados es $(n-2)\pi$.

Problema 13.9 Probar que $1 + 2^n < 3^n$ para todo $n \geq 2$.

Problema 13.10 Dado un grafo G, demostrar que el número de vértices de grado impar es par usando inducción.

Problema 13.11 Probar por inducción que los números de Fibonacci F_n y F_{n+1} son coprimos para todo entero $n \geq 0$:

$$F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2}\,, \qquad n \geq 2\,, \qquad F_0 \;=\; 0\,, \qquad F_1 \;=\; 1\,.$$

`Ayuda:` No hay que resolver la ecuación de recurrencia para hacer la demostración.

14. Retículos y álgebras de Boole

Problema 14.1 En $\mathbb{R}^2$ se considera la siguiente relación $\mathcal{R}$:

$$(x, y)\;\mathcal{R}\;(z, t) \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 \;=\; z^2 + t^2\,.$$

1. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, encontrar las clases de equivalencia y encontrar el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

2. En el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ se define la relación $\preceq$ de la manera siguiente

$$[(x,y)]_{\mathcal{R}} \preceq [(z,w)]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq z^2+w^2 .$$

   Demostrar que esta relación está bien definida; es decir, que es independiente de los representantes escogidos para cada clase.

3. Demostrar que $\preceq$ es una relación de orden.

4. Demostrar que $(\mathbb{R}^2/\mathcal{R}, \preceq)$ es un retículo.

Problema 14.2 ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$ son retículos con respecto al orden $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$?

1. $\{5, 10, 15, 30\}$.

2. $\{2, 3, 5, 6, 10, 30\}$.

3. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$.

4. $\{1, 3, 7, 15, 21, 105\}$.

Problema 14.3 Demostrar que el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, |)$ con las operaciones $\sup(a,b) = \text{mcm}(a,b)$ e $\text{ínf}(a,b) = \text{mcd}(a,b)$ es un retículo distributivo. ¿Es un álgebra de Boole?

Problema 14.4 Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ encontrar el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Demostrar que además $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un retículo.

1. Encontrar un subretículo no trivial de este retículo.

Se tiene que el conjunto $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \setminus, \varnothing, A)$ es un álgebra de Boole. Decir si los siguientes subconjuntos $S_i \subseteq \mathcal{P}(A)$ son álgebras de Boole, subálgebras de Boole del álgebra anterior o ninguna de ambas.

2. $S_1 = \{\varnothing, \{a,c\}, \{b\}, A\}$.

3. $S_2 = \{\{a,c\}, \{c\}, \{a\}, A\}$.

4. $S_3 = \{\varnothing, \{b,c\}, \{c\}, \{b\}\}$.

5. $S_4 = \{\varnothing, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$.

Problema 14.5 Sea el conjunto $A = \{1, 2\} \times \{1, 2, 4, 3, 12\}$. Sobre él definimos el siguiente **orden lexicográfico**:

$$(x,y)\ \mathcal{R}\ (u,w) \quad \Leftrightarrow \quad x < u \text{ ó } (x = u \text{ e } y \mid w) .$$

- Encontrar su diagrama de Hasse.
- Demostrar que $(A, \mathcal{R})$ es un retículo.
- ¿Es $(A, \mathcal{R})$ un retículo acotado? En caso afirmativo, decir cuáles son los elementos 1 y 0 de dicho retículo.
- ¿Es $(A, \mathcal{R})$ un álgebra de Boole?

A. Soluciones a los problemas

Hoja 1. Conjuntos y funciones

Problema 1.1 1. Verdadero. 2. Falso. 3. Falso. 4. Verdadero. 5. Verdadero. 6. Falso. 7. Falso.

Problema 1.2 `Ayuda`: usar diagramas de Venn o tablas de verdad.

Problema 1.3 1) $\overline{B}$. 2) $B \cap C$.

Problema 1.4

- f no es inyectiva ni sobreyectiva.
- g es inyectiva; pero no sobreyectiva.

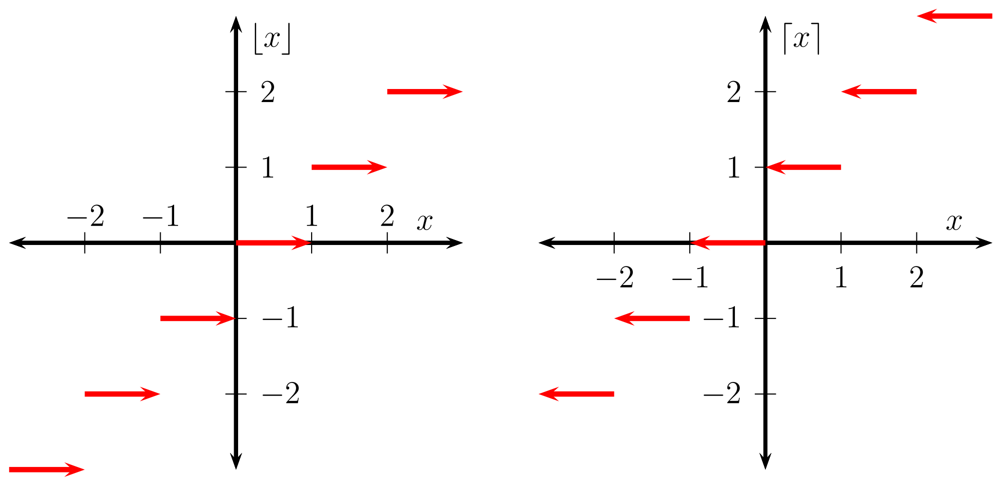
Problema 1.5 F es biyectiva y existe $F^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{1/2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ definida como

$$F^{-1}(x) = \frac{x-3}{1-2x}\,.$$

Problema 1.6

1. $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$. $\lceil 1/2 \rceil = 1$. $\lfloor -1/2 \rfloor = -1$. $\lceil -1/2 \rceil = 0$. $\lfloor \pi \rfloor = 3$. $\lceil \pi \rceil = 4$. $\lfloor 1/2 + \lceil 1/2 \rceil \rfloor = 1$. $\lceil \lfloor 1/2 \rfloor + \lceil 1/2 \rceil + 1/2 \rceil = 2$.

2. Las gráficas son:



3. 72 452 paquetes.

Problema 1.7

1. Inyectiva, no sobreyectiva y no biyectiva.
2. Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
3. No es ni inyectiva, ni sobreyectiva ni biyectiva.
4. No es ni inyectiva, ni sobreyectiva ni biyectiva.

Problema 1.8

1. $q = 5$ y $r = 4$.
2. $q = 2$ y $r = 5$.
3. $q = -1$ y $r = 2$.
4. $q = -7$ y $r = 10$.
5. $q = 1$ y $r = 1$.

Problema 1.9 $\text{mcd}(500, 120) = 2^2 \times 5 = 20$ y $\text{mcm}(500, 120) = 2^3 \times 3 \times 3^3 = 3000$.

Hoja 2. Combinatoria básica I

Problema 2.1

1. 2^n.
2. 2^{n-2} con $n \geq 2$.
3. $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$.
4. n.
5. $\sum_{k=3}^{n-3} \binom{n}{k}$ con $n \geq 6$.
6. $2^{n-2} + 2^{n-3} - 2^{n-5}$ con $n \geq 5$.
7. $2^{\lceil n/2 \rceil}$.

Problema 2.2

1. 90 720.
2. 50 400.
3. 80 640.
4. 16 800.
5. 33 600.
6. 8 400.

Problema 2.3 $3^5 - 3 \times 2^5 + 3 = 150$.

Problema 2.4 120.

Problema 2.5 Asumiendo que los espacios entre banderas no son significativos: 1) 1 464. 2) 1 884.

Problema 2.6 $\binom{8}{3}$.

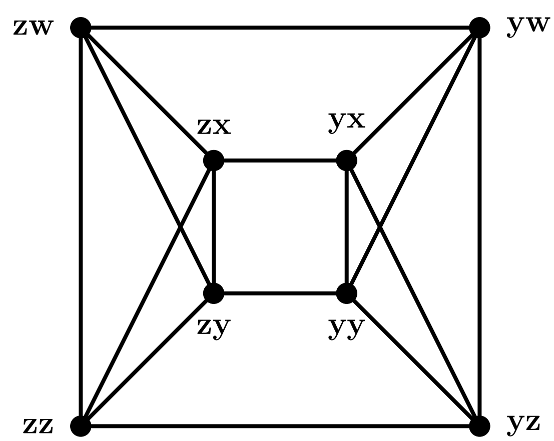
Problema 2.7 1) 360. 2) 120.

Problema 2.8 `Ayuda`: aplicar el principio del palomar.

Hoja 3. Teoría de grafos I

Problema 3.1

1. 8.
2. Una representación gráfica de G es la siguiente:



3. El grado común es 4.
4. No es bipartito.

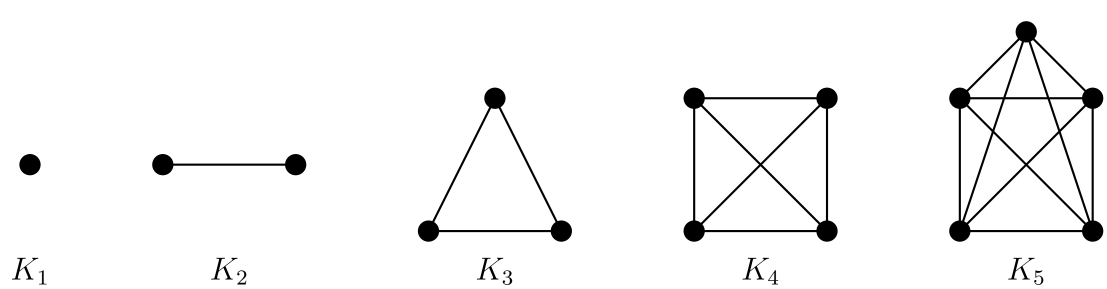
Problema 3.2 10.

Problema 3.3

1. $|V| = 9$.
2. Sólo hay dos casos posibles: si el grado es $d = 2$, $|V| = 6$; si el grado es $d = 3$, $|V| = 4$.
3. $|V| = 6$.

Problema 3.4

1. Una representación gráfica de los grafos K_n con $1 \leq k \leq 5$ es:



2. El grado de K_n es $n - 1$.

3. $|E_n| = \binom{n}{2}$.

4. `Ayuda`: hay que demostrar que $V_n \subset V_m$ y que $E_n \subset E_m$ cuando $n < m$.

Problema 3.5

1. Para ningún $n \geq 3$.

2. Para todo $n \geq 3$.

3. Para todo $n \geq 3$.

4. Para todo n par con $n \geq 4$.

Problema 3.6 `Ayuda`: aplicar el principio del palomar.

Problema 3.7 $|V|_{\min} = 5$.

Problema 3.8 Las matrices de adyacencia A_1 (con el orden (v_1, v_2, v_3, v_4)) y A_2 (con el orden (u_1, u_2, u_3, u_4)) y la matriz de permutación P son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3.9

1. Camino de longitud 4.

2. Camino cerrado de longitud 5.

3. Camino cerrado de longitud 6.

4. Ciclo de longitud 5.

Hoja 4. Teoría de grafos II

Problema 4.1

1. $n(n-1)(n-2)$ ciclos.

2. $n-2$ triángulos.

Problema 4.2 `Ayuda`: notar que las parafinas se pueden representar como grafos conexos simples con vértices de dos tipos: carbonos (con grado 4) e hidrógenos (con grado 1).

Problema 4.3 `Ayuda`: usar que $V = V_1 \cup V_3$ donde V_1 (resp. V_3) es el conjunto de vértices de grado 1 (resp. 3).

Problema 4.4 `Ayuda`: usar los teoremas del apretón de manos y el de Euler.

Problema 4.5 No son isomorfos.

Problema 4.6

1. C_{2n}.
2. No existe tal grafo.
3. Un grafo formado por dos componentes conexas: K_{n-1} y un vértice aislado.
4. Dos vértices unidos por cuatro aristas.
5. P_4.
6. C_2.

Problema 4.7 11 árboles.

Problema 4.8

- $|V| = 8$ y $|E| = 19$.
- $d(\varnothing) = d(X) = 7$. El resto tiene $d(v) = 4$. G no es regular.
- G no es planar.
- G no es bipartito.

Problema 4.9 `Ayuda`: ¿cuál es el grafo simple de n vértices con $\binom{n}{2}$ aristas?

Problema 4.10 `Ayuda`: El grado medio de un grafo $G = (V, E)$ se define como

$$\bar{d} \;=\; \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)\,.$$

Usar también el siguiente resultado: sea G un grafo conexo y tal que contiene un ciclo. Si le quitamos una arista de dicho ciclo, entonces el grafo resultante también es conexo.

Problema 4.11

a) G es simple.

b) $|V| = 8$ y $|E| = 12$.

c) G es regular con $d = 3$.

d) $n_{ij} \in \{0, 6, 7\}$.

e) La longitud mínima de un ciclo de G es $\ell_{\min} = 4$.

Hoja 5. Teoría de grafos III

Problema 5.1

1. No es bipartito. Sí es planar.
2. No existen árboles generadores.

Problema 5.2 No existe ningún árbol generador con peso ≤ 12.

Problema 5.3

1. El camino es (A, B, E, G) y tiene longitud 78.
2. Igual que en el caso anterior.

Problema 5.4 $d(a, h) = 16$, $d(a, e) = 17$, $d(d, a) = 19$, $d(d, g) = 11$ y $d(b, e) = 13$.

Problema 5.5

1. Un posible camino de peso mínimo es (A, B, G, H, K, M) con peso $\omega = 17$.
2. Un posible árbol generador de peso mínimo tiene por conjunto de aristas

$$E = \{\{B, E\}, \{H, K\}, \{B, G\}, \{K, M\}, \{h, L\}, \{F, E\}, \{G, J\}, \\ \{H, D\}, \{A, B\}, \{F, I\}, \{C, G\}, \{C, H\}\} .$$

   Su peso es $\omega = 43$.

Problema 5.6 $0 < x \leq 3$.

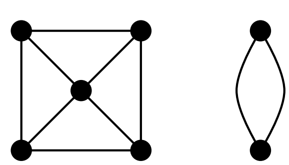
Problema 5.7

- El coste mínimo desde A hasta I es de 19. El coste total de la instalación del constructor depende del árbol encontrado: puede valer desde 40 a 43, ambos inclusive.
- El coste total de la instalación alternativa es de 39.

Hoja 6. Teoría de grafos IV

Problema 6.1

1. Usando Kruskal un árbol generador $T = (V, E)$ estaría dado por $E = \{\{a, b\}, \{e, g\}, \{b, e\}, \{e, c\}, \{f, g\}, \{f, d\}\}$ con peso total $\omega = 10$.
2. No es bipartito.
3. No es ni euleriano ni semi-euleriano. Es hamiltoniano.
4. Un ejemplo posible sería



Problema 6.2 De izquierda a derecha:

1. No es ni euleriano ni hamiltoniano. Es semi-euleriano y semi-hamiltoniano.
2. No es nada.
3. No es ni euleriano ni semi-euleriano. Es hamiltoniano.

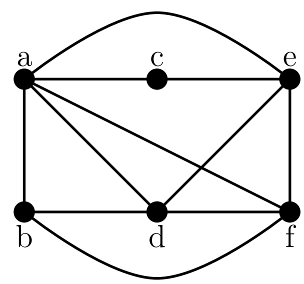
Problema 6.3 Es semi-euleriano. Un camino euleriano sería

$$(h, d, e, h, i, e, a, d, f, g, c, f, b, e, f, i)\,.$$

Problema 6.4 6 horas.

Problema 6.5

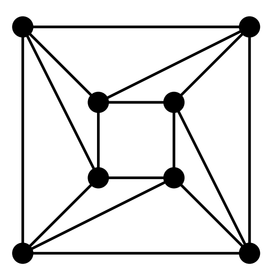
1. El grafo de intervalos pedido es



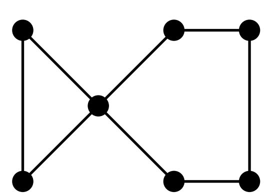
2. No es ni bipartito ni euleriano. Es hamiltoniano.

Problema 6.6

- C_7.
- Un ejemplo posible es:



- W_7.
- Un ejemplo posible es



- No existe ninguno.

Problema 6.7

1. No es bipartito, pero sí es planar.
2. $\chi(G) = 3$.
3. No existe tal árbol generador.
4. No es semi-euleriano. Necesito añadir un mínimo de tres aristas para que G sea euleriano.

Problema 6.8

- $|V_n| = 2^{n-1}$.
- G_n es regular con grado $d = \binom{n}{2}$.
- $|E_n| = 2^{n-2}\binom{n}{2}$.
- Los valores de n para que G_n sea euleriano son:

$$n = \begin{cases} 4p & \text{con } p \in \mathbb{N}, \\ 4p+1 & \text{con } p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Hoja 7. Combinatoria básica II

Problema 7.1

1. $10 \times 9 \times 8 \times 7$.
2. $\binom{10}{4}$.
3. $\binom{13}{4}$.
4. 10^4.

Problema 7.2 $\binom{11}{6}$.

Problema 7.3 $\binom{a+1}{k+1}\binom{b-1}{k}$.

Problema 7.4 $\binom{12}{4}$.

Problema 7.5 $\binom{n-p+1}{p}$.

Problema 7.6 $\binom{19}{2}$.

Problema 7.7 $\binom{16}{2}$.

Problema 7.8 $\binom{19}{2} - 3\binom{12}{2} + 3\binom{5}{2} = 3$.

Problema 7.9 $\binom{17}{6} - 7\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1} = 6055.$

Problema 7.10

1. 4^8.
2. $\binom{r-1}{n-1}$.
3. $\binom{19}{n-1}$.

Problema 7.11

1. $\dfrac{20!}{(4!)^5\, 5!}$.
2. $\dfrac{20!}{(4!)^5}$.

Hoja 8. Relaciones de recurrencia

Problema 8.1

- $a_n = a_{n-1} + n$ para todo $n \geq 2$ y $a_1 = 2$.
- $a_n = (n^2 + n + 2)/2$ para todo $n \geq 1$.

Problema 8.2 29525.

Problema 8.3 $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ para todo $n \geq 2$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Problema 8.4 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$ para todo $n \geq 1$.

Problema 8.5 $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ para todo $n \geq 1$.

Problema 8.6 $a_n = (3-n)\, 2^{n-2}$ para todo $n \geq 1$.

Problema 8.7 $a_n = \dfrac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$ para todo $n \geq 1$.

Problema 8.8 $a_n = 2^n + 2(-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

Problema 8.9

- $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$ y $b_4 = 3$.
- Si $n = 2p$ es par ($p \geq 1$), $b_{2p} = 2b_p + 1$. Si $n = 2p-1$ es impar ($p \geq 1$), $b_{2p-1} = b_p + b_{p-1} + 1$.
- $b_{2^k} = 2^k - 1$ para todo $k \geq 0$.
- Hay que usar el principio de inducción fuerte estudiado en Cálculo. Sin embargo, podéis volver a este problema cuando veamos el Tema 13 (relaciones de orden).

Hoja 9. Funciones generatrices

Problema 9.1

- $\binom{19}{2} - 3\binom{12}{2} + 3\binom{5}{2} = 3.$
- $\binom{8}{2} = 28.$
- $\binom{9}{2} = 36.$

Problema 9.2

1. $a_n = \frac{1}{2}\left(3^n + 1\right), \quad n \geq 0.$
2. $a_n = 4\binom{n+1}{1} - 5\binom{n+2}{2} + 2\binom{n+3}{3}, \quad n \geq 0.$
3. $a_n = \frac{1}{4}\left(5^n + 3\right), \quad n \geq 0.$
4. $a_n = 5 \times 2^n - 4, \quad n \geq 0.$
5. $a_n = 2^n, \quad n \geq 0.$
6. $a_n = -2^n - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}, \quad n \geq 0.$

Problema 9.3 Las dos funciones generatrices son

- $f_1(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n).$
- $f_2(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1 - x^{2n-1})}.$

Problema 9.4 $F'(x) = 2(1+x)\,F(x).$

Problema 9.5 $\binom{2+N}{2}.$

Hoja 10. Teoría de grafos V

Problema 10.1

- No es bipartito. Sí es planar.
- El resto de los resultados están en el enunciado.

Problema 10.2

- $P_{C_n}(q) = -P_{C_{n-1}}(q) + q(q-1)^{n-1}$ para $n \geq 4$ con $P_{C_3}(q) = P_{K_3}(q) = q(q-1)(q-2).$
- $P_{C_n}(q) = (q-1)^n + (-1)^n(q-1).$
- $\chi(C_{2n}) = 2$ y $\chi(C_{2n+1}) = 3.$

Problema 10.3

- $P_G(q) = q(q-1)(q-2)^2$.
- $\chi(G) = 3$.

Problema 10.4

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 3a_{n-4}$ para $n \geq 5$ y condiciones iniciales $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$ y $a_4 = 6$.
- $a_n = 2^{n-1}(1 + 2n + 3n^2)$ para todo $n \geq 0$.

Problema 10.5

- $P_G(q) = q(q-1)(q-2)(q^2 - 5q + 7)$.
- $\chi(G) = 3$.

Problema 10.6 La solución depende de la paridad de n:

$$N_{\text{e.p.}} = n\,(n \mod 2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Problema 10.7 $P_{B_{n,k}}(q) = q^k\,(q-1)^{n-k}$.

Problema 10.8 $P_{G_n} = (q-1)(q-2)[(q-2)(q-1)^{n-2} + 2(-1)^n]$ para todo $n \geq 3$.

Hoja 11. Relaciones binarias de equivalencia

Problema 11.1 El conjunto cociente es isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$.

Problema 11.2 Es de equivalencia (usar el Problema 11.1) y las clases de equivalencia son $[6]_{\mathcal{R}} = \{6, 12, 18\}$, $[10]_{\mathcal{R}} = \{10, 40\}$ y $[21]_{\mathcal{R}} = \{21, 441, 1323\}$.

Problema 11.3

1. Usar el Problema 11.1.
2. $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R} = \{[C]_{\mathcal{R}} \colon C \in \mathcal{P}(B)\}$ y es isomorfo a $\mathcal{P}(B)$.

Problema 11.4

1. Usar el Problema 11.1.
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{R} = \{[(N, 1)]_{\mathcal{R}} \colon N \geq 1\}$ y es isomorfo a $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ es obviamente isomorfo a $\mathbb{N} \setminus \{1\}$: basta usar la función biyectiva $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $f(n) = n + 1$.

Problema 11.5

1. Usar el Problema 11.1.
2. Las clases son $[1]_{\mathcal{R}} = \{1, 2, 3\}$, $[4]_{\mathcal{R}} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $[9]_{\mathcal{R}} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

3. $A/\mathcal{R} = \{[1]_\mathcal{R}, [4]_\mathcal{R}, [9]_\mathcal{R}\}$.

Problema 11.6

1. Usar el Problema 11.1.
2. $\mathbb{R}_2/\mathcal{R} = \{[(K,1)]_\mathcal{R} \colon K \in \mathbb{R}\}$.

Problema 11.7 Hay que demostrar la equivalencia en ambas direcciones:

1. Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia entonces $\mathcal{R}$ es circular y reflexiva.
2. Si $\mathcal{R}$ es circular y reflexiva entonces $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

Problema 11.8 1) Falsa. 2) Verdadera.

Problema 11.9 $a = b = 0$ y $c = 1$.

Problema 11.10

1. Es una relación de equivalencia por el Problema 1.1 con la función $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x \mod 2$. Como $\operatorname{Im} f = \{0,1\}$, hay dos clases de equivalencia:
$$\begin{aligned} [0]_\mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{Z} \colon x \text{ es par}\}\,, \\ [1]_\mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{Z} \colon x \text{ es impar}\}\,. \end{aligned}$$
y el conjunto cociente es
$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} \;=\; \{[0]_\mathcal{R}, [1]_\mathcal{R}\}\,.$$
2. Es una relación de equivalencia por el Problema 1.1 con la función $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2 - x$. Si v, w pertenecen a la misma clase de equivalencia deben satisfacer
$$v^2 - w^2 \;=\; (v-w)(v+w) \;=\; v - w \;\Rightarrow\; \begin{cases} v = w \\ v + w = 1 \quad \text{si } v \neq w \end{cases}$$
Luego las clases de equivalencia tienen dos elementos
$$[n]_\mathcal{R} \;=\; \{n, 1-n\}\,.$$
El conjunto cociente es
$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} \;=\; \{[n]_\mathcal{R} \colon n \in \mathbb{N}\}\,,$$
y es isomorfo a $\mathbb{N}$. La clase de equivalencia del elemento 2005 es
$$[2005]_\mathcal{R} \;=\; \{2005, -2004\}\,.$$
3. Es una relación de equivalencia por el Problema 1.1 con la función $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = xy$. Las clases de equivalencia vienen dadas por aquellos puntos de $\mathbb{R}^2$ con $xy = \alpha$ constante. En particular, $\alpha > 0$ corresponde a dos hipérbolas en los cuadrantes primero y tercero, $\alpha = 0$ a los ejes coordenados y $\alpha < 0$ a dos hipérbolas en los cuadrantes segundo y cuarto. Las clases de equivalencia son
$$[(1,\alpha)]_\mathcal{R} \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = \alpha\}\,.$$
El conjunto cociente es
$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R} \;=\; \{[(1,\alpha)]_\mathcal{R} \colon \alpha \in \mathbb{R}\}\,,$$
luego dicho conjunto es isomorfo a $\mathbb{R}$.

4. Es una relación de equivalencia por el Problema 1.1 con la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$. Las clases de equivalencia vienen dadas por aquellos puntos de $\mathbb{R}^2$ con $x^2 - y^2 = \alpha$ constante. Las clases de equivalencia vuelven a ser hipérbolas con asíntotas $x = \pm y$. En particular, $\alpha > 0$ corresponde a dos hipérbolas que cortan al eje horizontal, $\alpha = 0$ a las asíntotas $x = \pm y$ y $\alpha < 0$ a dos hipérbolas que cortan el eje vertical. Las clases de equivalencia son

$$\begin{aligned}[(\sqrt{\alpha},0)]_{\mathcal{R}} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 - y^2 = \alpha\}\,, \quad \alpha \geq 0 \\ \left[(0,\sqrt{-\alpha})\right]_{\mathcal{R}} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 - y^2 = \alpha\}\,, \quad \alpha < 0\end{aligned}$$

   El conjunto cociente es

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R} \;=\; \{[(0,\sqrt{-\alpha})]_{\mathcal{R}}\colon \alpha < 0\} \cup \{[(\sqrt{\alpha},0)]_{\mathcal{R}}\colon \alpha \geq 0\}$$

   luego dicho conjunto es isomorfo a $\mathbb{R}$.

5. Es una relación de equivalencia por el Problema 1.1 con la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Las clases de equivalencia vienen dadas por aquellos puntos de $\mathbb{R}^2$ con $x^2 + y^2 = \alpha^2 \geq 0$ constante. Las clases de equivalencia son circunferencias de radio $\alpha \geq 0$. Las clases de equivalencia son

$$[(\alpha,0)]_{\mathcal{R}} \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad \text{y} \quad \alpha \geq 0\}\,.$$

   El conjunto cociente es
$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R} \;=\; \{[(\alpha,0)]_{\mathcal{R}}\colon \alpha \geq 0\}\,,$$
   luego dicho conjunto es isomorfo a $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$.

Hoja 12. Aritmética modular

Problema 12.1 $\operatorname{mcd}(92,84) = 4 = 11 \cdot 84 - 10 \cdot 92$.

Problema 12.2 El conjunto de posibles soluciones es

$$\{(2,630),(10,126),(14,90),(18,70),(630,2),(126,10),(90,14),(70,18)\}\,.$$

Problema 12.3 1) 1728. 2) 576. 3) 0.

Problema 12.4 Usar el teorema fundamental de la aritmética.

Problema 12.5 Basta probar que $p \nmid 101$ para $p = 2,3,5,7$. ¿Por qué?

Problema 12.6 Como $a = 6q + r$ con $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$, basta demostrarlo para cada posible resto r.

Problema 12.7

- Las soluciones son para todo $k \in \mathbb{Z}$:

$$x_k \;=\; 11 \cdot 4 + \frac{36}{4}k \;=\; 44 + 9k\,, \tag{A.1}$$

$$y_k \;=\; 11 \cdot (-3) - \frac{28}{4}k \;=\; -33 - 7k\,. \tag{A.2}$$

- Las soluciones son para todo $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x_k &= 4 \cdot (-8) + \frac{550}{22}k = -32 + 25k\,, \\ y_k &= 4 \cdot 1 - \frac{66}{22}k = 4 - 3k\,. \end{aligned}$$

Problema 12.8

1. $x \equiv 6 \pmod{13}$.
2. Hay dos soluciones $x \equiv 4 \pmod{10}$ y $x \equiv 9 \pmod{10}$.
3. No hay soluciones.
4. Hay tres soluciones $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 8 \pmod{15}$ y $x \equiv 13 \pmod{15}$.

Problema 12.9 6.

Problema 12.10 `Ayuda`: probar primero que $p \mid (a^{25} - a)$ para $p = 2, 3, 5$.

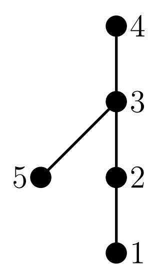
Problema 12.11 41.

Problema 12.12 2.

Hoja 13. Relaciones de orden

Problema 13.1

1. $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = A$.
2. El diagrama de Hasse es:



3. $1 \preceq 2 \preceq 5 \preceq 3 \preceq 4$.

Problema 13.2

1. maximales $= \{(1,8), (1,5), (0,8), (2,8), (2,5)\}$.
2. minimales $= \{(1,2), (0,2), (0,5), (2,5)\}$.
3. No existen ni $\max(A)$ ni $\min(A)$.

Problema 13.3

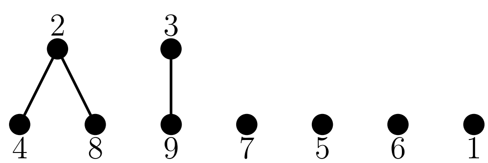
1. maximales $= \{(x, y) \in C \colon x, y \geq 0\}$.
2. minimales $= \{(x, y) \in C \colon x, y \leq 0\}$.
3. $\sup(C) = (1, 1)$ e $\inf(C) = (-1, -1)$.

Problema 13.4

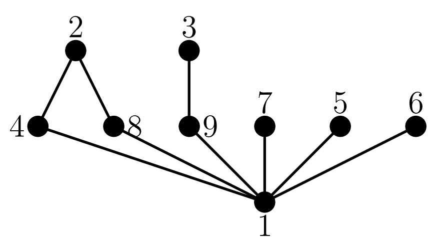
1. maximales $= \{8, 9, 10, 12\}$.
2. minimales $= \{2\}$.
3. No existe $\max(A)$ y $\min(A) = 2$.

Problema 13.5

1. La demostración es directa. $\mathcal{R}_2$ es una relación de orden. Ambas son un orden parcial.
2. El diagrama de Hasse para $\mathcal{R}_1$ es:



   El diagrama de Hasse para $\mathcal{R}_2$ es:

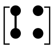


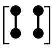
3. $\mathcal{R}_1$ tiene como maximales $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ y minimales $\{1, 4, 8, 9, 5, 6, 7\}$. No tiene ni máximo ni mínimo.
   $\mathcal{R}_2$ tiene como maximales $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ y minimales $\{1\}$. No tiene máximo y $\min(A) = 1$.
4. Para $\mathcal{R}_1$, $\text{mayor}(A) = \text{minor}(A) = \varnothing$, luego no existen $\sup(A)$ ni $\inf(A)$.
   Para $\mathcal{R}_2$, $\text{mayor}(A) = \varnothing$, luego no existe $\sup(A)$; $\text{minor}(A) = \{1\}$ e $\inf(A) = 1$.

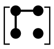
Problema 13.6

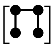
1. $|A| = 16$.
2. Hay seis clases de equivalencia (por simplicidad las llamaremos C_j):

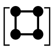
   a) $C_0 = [$$]_{\mathcal{R}} = \{H = (V_4, \varnothing)\}$.

b) $C_1 = [$$]_{\mathcal{R}} = \{H = (V_4, E) \colon |E| = 1\}$.

c) $C_{2a} = [$$]_{\mathcal{R}} = \{H = (V_4, E) \colon |E| = 2 \quad \text{y } H \text{ es un e.p. de } C_4\}$.

d) $C_{2b} = [$$]_{\mathcal{R}} = \{H = (V_4, E) \colon |E| = 2 \quad \text{y } H \text{ no es un e.p. de } C_4\}$.

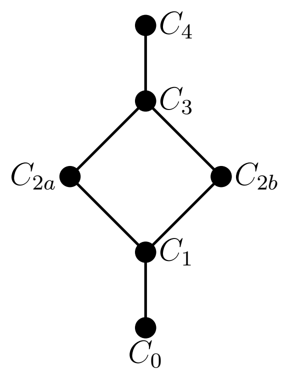
e) $C_3 = [$$]_{\mathcal{R}} = \{H = (V_4, E) \colon |E| = 3\}$.

f) $C_4 = [$$]_{\mathcal{R}} = \{H = (V_4, E) \colon |E| = 4\}$.

donde e.p. significa emparejamiento perfecto.

3. $C = A/\mathcal{R} = \{C_0, C_1, C_{2a}, C_{2b}, C_3, C_4\}$.

4. El diagrama de Hasse pedido es

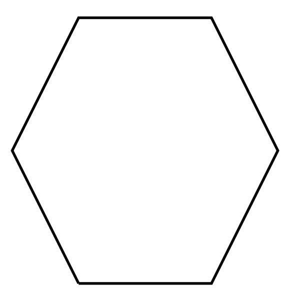


5. No es un conjunto totalmente ordenado.

6. $\sup(Z) = C_3$ e $\inf(Z) = C_1$.

Problema 13.7 `Nota:` se puede demostrar el resultado usando aritmética modular y sin usar inducción; pero se pide una demostración que involucre el principio de inducción.

Problema 13.8 El caso base es $n = 3$: la suma de los ángulos internos de un triángulo es $\pi = (3 - 2)\pi$ (axioma de Euclides). Un polígono convexo con $n = 6$ lados es el siguiente (hexágono):



Problema 13.9 Una vez usada la hipótesis de inducción, se llega al resultado final con las desigualdades $3 > 2 > 1$.

Problema 13.10 El caso base corresponde al grafo trivial de n vértices $G = (V, \varnothing)$ (con $|V| = n \geq 1$) y se hace inducción sobre el número de aristas $|E|$.

Problema 13.11 En el paso inductivo hay que usar un argumento por reducción al absurdo.

Hoja 14. Retículos y álgebras de Boole

Problema 14.1

1. Como
$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (z, t)\ \Leftrightarrow\ f(x, y)\ =\ f(z, t)\,,$$
con $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, $\mathcal{R}$ es de equivalencia. Las clases de equivalencia son
$$[(R, 0)]_{\mathcal{R}}\ =\ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = R^2\right\}\,,$$
con $R \geq 0$. El conjunto cociente es
$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R}\ =\ \{[(R, 0)]_{\mathcal{R}} \colon R \geq 0\}\,.$$

2. Es obvio:
$$[(x, y)]_{\mathcal{R}}\ \preceq\ [(z, w)]_{\mathcal{R}}\ \Leftrightarrow\ f(x, y)\ \leq\ f(z, w)\,.$$

3. De la caracterización anterior se sigue que es $\preceq$ una relación de orden.

4. Basta ver que $(\mathbb{R}^2/\mathcal{R}, \preceq)$ es un orden total.

Problema 14.2 1) Es retículo. 2) No es retículo. 3) No es retículo. 4) Es retículo.

Problema 14.3

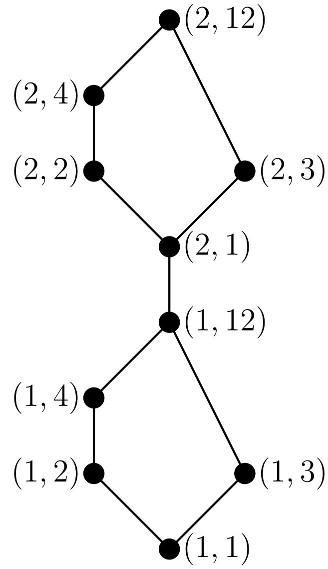
- Usar el teorema fundamental de la aritmética y la representación de $\mathrm{mcd}(a, b)$ y $\mathrm{mcm}(a, b)$ como producto de los factores primos que aparecen en a y b.
- La demostración de que es un retículo distributivo se basa en probar que $\mathrm{mín}(n, \mathrm{máx}(m, r)) = \mathrm{máx}(\mathrm{mín}(n, m), \mathrm{mín}(n, r))$ para todo $n, m, r \geq 0$.
- No es un álgebra de Boole.

Problema 14.4 Si $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \setminus, \varnothing, A)$, entonces

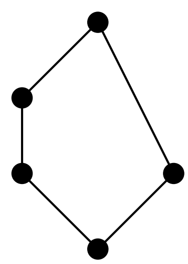
1. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
2. S_1 es una subálgebra de Boole de $\mathcal{A}$.
3. S_2 no ni subálgebra de Boole de $\mathcal{A}$ ni un álgebra de Boole.
4. S_3 no es subálgebra de Boole de $\mathcal{A}$; pero sí es un álgebra de Boole.
5. S_4 no es subálgebra de Boole de $\mathcal{A}$; pero sí es un álgebra de Boole.

Problema 14.5

- El diagrama de Hasse es



- Basta probar que dados dos elementos, existe su supremo y su ínfimo.
- Es acotado con $0 = (1, 1)$ y $1 = (2, 12)$.
- No es álgebra de Boole porque no es un retículo distributivo (contiene a N_5



  como subretículo).