Hoja 8

Valores y vectores propios

Problema 8.1 Consideremos la transformación lineal $T^{X,\theta}$ que consiste en rotar $\mathbb{R}^3$ en sentido antihorario, con respecto al eje X, un ángulo θ.

a) Hallar los valores propios de la matriz asociada.

b) Hallar los correspondientes valores propios para $\theta = \pi$. ¿Cuáles son las multiplicidades algebraicas y geométricas en este caso?

c) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que se encuentren tantos vectores propios de $T^{X,\pi}$ como sea posible.

Problema 8.2 Elegir la última fila de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

para que A tenga autovalores 1, 2 y 3.

Problema 8.3 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $a + b = c + d$. Demostrar que $(1, 1)^t$ es un vector propio y hallar ambos valores propios.

Problema 8.4 Dada una matriz A de dimensión $n \times n$, con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, no necesariamente diferentes, probar que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \, .$$

Problema 8.5 Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar los valores propios de A y de A^2 y sus multiplicidades algebraicas.
2. Usar los valores propios del apartado (a) para calcular los determinantes de A y A^2.

Problema 8.6 Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables, encontrar tantos vectores propios linealmente independientes como sea posible y calcular su determinante.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Problema 8.7 Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 8.8 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea el polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + x - 3$. Utilizar el teorema de Caley-Hamilton para hallar A^2 y para evaluar p en A.

Problema 8.9 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p) = x\, p'(x)\,.$$

Calcular los valores propios de T y una colección de tantos vectores propios linealmente independientes como sea posible.

Problema 8.10 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p) = p(x) + p'(x)\,.$$

Calcular los valores propios de T y decidir si T es diagonalizable.

Problema 8.11 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p) = p(2x+1)\,.$$

Encontrar una base con respecto a la cual la representación de T es diagonal.

Problema 8.12 Decidir si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En tal caso, encontrar P (invertible) y D (diagonal) tales que $A = P\,D\,P^{-1}$.