Cálculo Diferencial Aplicado

Grado en Ingeniería Informática
12 Noviembre 2018

Nombre		Grupo	

Cuestión 1 (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\underline{xy^2 + x^2y + x^3 - x^3y'} = 0\,, \quad \text{con} \quad x > 0\,,$$

$x^3 \Rightarrow -y' + 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución en forma explícita que satisface $y(1) = 1$. $y' = F(\frac{y}{x})$ EDO Homogenea.

iii) Comprobar la solución obtenida.

Solución:

i) Es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal homogénea. Es homogénea porque la ecuación se puede escribir en la forma

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) + 1 = F(\frac{y}{x})\,,$$

siendo F una función que depende del cociente entre y y x.

ii) Para hallar la solución general, efectuamos el cambio de variable dependiente $y = xv$, donde $v = v(x)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + v + 1 \Longrightarrow \frac{dv}{v^2+1} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v^2+1} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Calculando las integrales se tiene que: $\arctan(v) = \ln(x) + C$, donde C es una constante de integración. Deshaciendo el cambio de variable la solución general, escrita en forma implícita es: $\arctan(\frac{y}{x}) - \ln(x) = C$.
Esta solución la podemos escribir en forma explícita:

$$\boxed{y(x) = x\,\tan(C + \ln(x))}$$

Para hallar la constante C imponemos la condición $y(1) = 1 \Longrightarrow 1 = \tan(K) \Longrightarrow C = \frac{\pi}{4}$
Por tanto la solución explícita pedida es:

$$\boxed{y(x) = x\,\tan(\frac{\pi}{4} + \ln(x))}$$

$xy^2+x^2y+x^3-x^3y'=0\ ,\ x>0$

i) ED Ordinaria (depende de x) 1er orden (hasta y') no lineal (y^2)

$$\frac{xy^2+x^2y+x^3-x^3y'=0}{y^3}\ \frac{}{y^3}\ ;\quad \frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^3}-\frac{x^3}{y^3}y'=0$$

$u=x/y\ ;\ y=ux;\ y'=u'x+u \qquad w=\frac{1}{u}=\frac{y}{x}=w$

$u+u^2+u^3-u^3y'=0\ ;\quad u'x=\frac{-u^3-u^2-u}{-u^3}-u=+1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{u}{u}$

$w'x=1+\cancel{w}+w^2-\cancel{w} \qquad x\frac{dw}{dx}=w^2+1\ ;\quad \frac{dw}{w^2+1}=\frac{dx}{x}$

$\int\frac{1}{w^2+1}dw=\int\frac{1}{x}dx;\quad \arctan(w)=\ln|x|+k$

$w=1/\cancel{x/y}=y/x\ ;\ \tan(\arctan(y/x))=\tan(\ln|x|+k)$

Sol implicita: $\boxed{y=x\tan(\ln|x|+k)\ /\ k\in\mathbb{R}}$

iii) Claramente $y(1) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.
Por otro lado,

$$y' = \tan(\frac{\pi}{4} + \ln(x)) + 1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} + \ln(x)) = \frac{y}{x} + 1 + (\frac{y}{x})^2 ,$$

que da lugar a la ecuación del enunciado: $x^2y' = y^2 + xy + x^2$.
También podemos hacer la comprobación por derivación implícita en la ecuación: $\arctan(\frac{y}{x}) - \ln(x) = C \quad \Longrightarrow \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x}$. Operando este resultado se obtiene la ecuación diferencial.

Cuestión 2 (1 punto) Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 2e^{2t} + e^{-2t}\cos(t) ;$$

se pide hallar su solución general utilizando el método de los coeficientes indeterminados.

Solución:
Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - 4y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - 4 = 0$, tiene por soluciones, $r = 2$, y $r = -2$,que son raíces reales distintas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^{-2t}\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} ,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(t)$:
Dada la forma que tiene el lado derecho de la ecuación diferencial y que el término $2e^{2t}$ es solución de la ecuación homegénea, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados proponiendo una solución particular de la forma: $y_p(t) = Ate^{2t} + Be^{-2t}\cos(t) + Ce^{-2t}\sin(2t)$.
Sustituyendo y_p en la ecuación diferencial e identificando términos del lado izquierdo con el lado derecho se obtiene que: $4A = 2 \Longrightarrow A = 1/2$, y que $-B - 4C = 1 ; 4B - C = 0 ; \Longrightarrow B = -\frac{1}{17} , C = -\frac{4}{17}$.

Con esto se obtiene la solución general de la ecuación:

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{17}e^{-2t}\cos(t) - \frac{4}{17}e^{-2t}\sin(t)}$$

$A = A/2 = A\,1/2$

$-2B + 6B -$

$y'' - 4y = 2e^{2t} + e^{-2t}\cos(t)$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \quad \lambda = \pm 2 \quad B = \{e^{2t}, e^{-2t}\}$

$y_h = Ae^{2t} + Be^{-2t} \ / \ A, B \in \mathbb{R}$

-4. $* \ y_p = \cancel{C}te^{2t} + te^{-2t} D\,\text{sen}(t) + te^{-2t}\cancel{E\cos(t)}$

$y_p' = Ce^{2t} + Cx \cdot 2e^{2t} + De^{-2t}\text{sen}(t) + Dx(-2)e^{-2t}\text{sen}(t) + Dxe^{-2t}\cos(t)$
$+ e^{-2t}E\cos(t) + x(-2)e^{-2t}E\cos(t) - xe^{-2t}E\,\text{sen}(t)$

$= Ce^t + 2Cte^{2t} + De^{-2t}\left((1-2t)\,\text{sen}(t) + t\cos(t)\right) + Ee^{-2t}\left((1-2t)\cos(t) - t\,\text{sen}(t)\right)$

$y_p'' = Ce^t + 4Cte^{2t} + 2Ce^{2t} + D(-2)e^{-t}\left((1-2t)\,\text{sen}(t) + t\cos(t)\right) + E(-2)e^{-2t}\left((1-2t)\cos(t) - t\,\text{sen}(t)\right) +$

$+ De^{-2t}\left(\cos(t) - 2\,\text{sen}(t) - 2t\cos(t) - t\,\text{sen}(t) + \cos(t)\right) +$
$Ee^{-2t}\left(-\text{sen}(t) - 2\cos(t) + 2\,\text{sen}(t) - \text{sen}(t) - t\cos(t)\right)$

$y_p' = Ce^{2t} + Cx2e^{2t} + (-2)e^{-2t}D\,\text{sen}(t) + e^{-2t}D\cos(t) - 2e^{-2t}E\cos(t) - e^{-2t}E\,\text{sen}(t)$

$-4De^{-2t}\cos(t)$

$* \ y_p'' = 2Ce^{2t} + 2Ce^{2t} + 4Cxe^{2t} + 4tD\,\text{sen}(t) - 2e^{-2t}D\cos(t) + (-2)e^{-2t}D\cos(t) -$

$+8e^{-2t}D\,\text{sen}(t)$ $\quad +3e^{-2t}\ldots$

$- 4e^{-2t}D\,\text{sen}(t) + 4e^{-2t}\cancel{E\cos(t)} + 2e^{-2t}E\,\text{sen}(t) + 2Ee^{-2t}\text{sen}(t) - e^{-2t}E\cos(t)$

$4Ce^{2t}$ $\quad -4e^{-2t}D\cos(t)$ $\quad +2e^{-2t}E\cos(t)$

$2Ce^{2t} + 2Ce^{2t} + 4tCe^{2t} - 2e^{-2t}D\cos(t) - 2e^{-2t}D\cos(t) + 4e^{-2t}E\cos(t) - e^{-2t}E\cos(t) =$

Mal simpl

$-4Ce^{2t} - 8Cte^{2t} - 4e^{-2t}D\cos(t) + 8e^{-2t}E\cos(t) = 2e^{2t} + e^{-2t}\cos(t)$

$-4tCe^{2t} - 8e^{-2t}D\cos(t) + 11e^{-2t}E\cos(t) = 2e^{2t} + e^{-2t}\cos(t)$

$4Ce^{2t} - De^{-2t}\cos(t) - 4Ee^{-2t}\cos(t) + 4De^{-2t}\text{sen}(t) - Ee^{-2t}\text{sen}(t) = 2e^{2t} + e^{-2t}\cos(t)$

$4C = 2 \ ; \ C = 1/2$

$-D - 4E = 1 \ ; \ -D - 4 \cdot 4D = 1 ; \ -17D = 1 ; \ D = -1/17$

$4D - E = 0 \ ; \ E = 4D = -4/17$

Sol:

$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{2t}t - \frac{1}{17}e^{-2t}\cos(t) - \frac{4}{17}e^{-2t}\text{sen}(t)$

$+$

$y_h(x) = Ae^{-2t} + Be^{2t}$

$\boxed{y(x) = y_p + y_h \ \text{Sol:}}$

Cuestión 3 (1 punto) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Solución:

Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene: $(s^2 - 2s + 5)F(s) = \dfrac{s}{s-2}$, por tanto,

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 - 2s + 5)(s-2)} = \frac{Ms + N}{s^2 - 2s + 5} + \frac{A}{(s-2)}\,,$$

Sumando las fracciones

$$\frac{s}{(s^2 - 2s + 5)(s-2)} = \frac{(M+A)s^2 + (-2M + N - 2A)s - 2N + 5A}{(s^2 - 2s + 5)(s-2)}\,,$$

e identificando numeradores se obtiene: $M = -2/5\,, N = 1\,, A = 2/5\,.$ Por tanto:

$$F(s) = \frac{2}{5}\frac{1}{s-2} - \frac{2}{5}\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{3}{10}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Finalmente,tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right) + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+4}\right) =$$

y la solución pedida es,

$$\boxed{y(t) = \tfrac{2}{5}e^{2t} + \tfrac{3}{10}e^{t}\sin(2t) - \tfrac{2}{5}e^{t}\cos(2t)}$$

$y'' - 2y' + 5y = 2e^{2t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1 \qquad F(s) = \mathcal{L}\{y\}$

$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5F(s) = 2\mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$s^2F(s) - s\underbrace{\cancel{y(0)}}_{0} - \overbrace{y'(0)}^{1} - 2(sF(s) - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{0}) + 5F(s) = 2\mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$(s^2 - 2s + 5)F(s) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{s-2} \quad ; \quad F(s) = \frac{2 + (s-2)}{(s^2-2s+5)(s-2)} = \frac{s}{(s-2)(s^2-2s+5)}$

$s = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{+2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 + \ldots$

$\frac{s}{(s-2)(s^2-2s+5)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{Bs+C}{(s^2-2s+5)} \; ; \; s = As^2 - 2As + 5A + Bs^2 - 2Bs + Cs - 2C$

$1 = -2A - 2B + C$

$A = -B; \quad 1 = -2(-B) - 2B + C$

$1 = \cancel{2B} - \cancel{2B} + C; \; C = 1$

$A = \frac{2C}{5} = \frac{2}{5} \qquad B = -\frac{2}{5}$

$\left.\begin{aligned} 1 &= -2A - 2B + C \\ 5A - 2C &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} C &= 1 \\ -B &= 2/5 \\ A &= +2/5 \end{aligned}$

$\frac{1}{1} : \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$

$y(x) = \frac{+2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2/5\, s + 1}{(s^2-2s+5)}\right\} = \frac{+2}{5}e^{2t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2/5\, s + 1}{(s-1)^2 + 2^2}\right\}$

$s^2 - 2s + 5 \Rightarrow (s-1)^2 + 5 - 1 \Rightarrow (s-1)^2 + 4$

$1 + \frac{-5}{2}$

$\frac{-2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1 + 1 + (-5/2)}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} = \frac{-2}{5}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2^2}\right\}\right)$

$\frac{1}{1} \cdot \frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$

$\frac{-2}{5}\left(e^t\cos(2t) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}\right) =$

$\frac{-3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$

$y(x) = \frac{-2}{5}e^t\cos(2t) + \frac{6}{20}e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{+2}{5}e^{2t}$

$3/10$

Cuestión 4 (1 punto) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ x_2'(t) = -5\,x_1(t) - 5\,x_2(t) \end{cases}$$

que satisface la condición inicial $x_1(0) = 2\,;\, x_2(0) = 5$, se pide:

i) Hallar la solución del sistema.

ii) Describir, razonadamente, el comportamiento de la solución cuando $t \to +\infty$.

Solución:

i) La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$. Calculamos los autovalores de A resolviendo, $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+8\lambda+25 = 0$, y se obtiene $\lambda_1 = -4+i3\,;\lambda_2 = -4-i3$
Los autovalores de A son complejos conjugados. Para hallar la solución del sistema de ecuaciones vamos a calcular un vector propio, $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, asociado al autovalor $\lambda_1 = -4 - i3$.
Para ello resolvemos la ecuación vectorial, $(A - \lambda_1 I)\vec{V} = \vec{0}$, y se obtiene : $\vec{V} = \begin{pmatrix} -1-i3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Ahora vamos a obtener la parte real e imaginaria de la solución fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales dada por :

$$\hat{X}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{V} = e^{-4t}e^{i3t}\begin{pmatrix} -1-i3 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + i\ \mathrm{Im}(\hat{X}(t))\,,$$

usando la fórmula de Euler, $e^{i3t} = \cos(3t) + i\sin(3t)$ y operando se tiene:

$$\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{-4t}(-\cos(3t) + 3\sin(3t)) \\ 5e^{-4t}\cos(3t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Im}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} -e^{-4t}(3\cos(3t) + \sin(3t)) \\ 5e^{-4t}\sin(3t) \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + c_2\,\mathrm{Im}(\hat{X}(t))$, donde las constantes c_1, c_2, se obtienen con el dato inicial $x_1(0) = 2\,;\, x_2(0) = 5$.
En efecto, $x_1(0) = 2 = -c_1 - 3c_2$, $x_2(0) = 5 = 5c_1 \implies c_1 = 1\,, c_2 = -1$. Finalmente la solución pedida es

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t}(2\cos(3t) + 4\sin(3t)) \\ 5e^{-4t}(\cos(3t) - \sin(3t)) \end{pmatrix}}$$

ii) Dado que las funciones $\cos(3t)$ y $\sin(3t)$ están acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$ y que $\lim_{t\to+\infty} e^{-4t} = 0$, podemos concluir que el

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} X(t) = \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cuestión 4 (1 punto) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ x_2'(t) = -5\,x_1(t) - 5\,x_2(t) \end{cases}$$

que satisface la condición inicial $x_1(0) = 2\,;\, x_2(0) = 5$, se pide:

i) Hallar la solución del sistema.

ii) Describir, razonadamente, el comportamiento de la solución cuando $t \to +\infty$.

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \vec{x}(t) \quad , \quad x_1(0) = 2 \; ; \; x_2(0) = 5$$

$$|A - \lambda I| = 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$$

$$0 = \lambda^2 + 8\lambda + 25$$

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2} = -4 \pm i\,3$$

Para $\lambda = -4 + i3$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \; ; \quad \begin{pmatrix} -3+4-i3 & 2 \\ -5 & -5+4-i3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1 - i3)x + 2y = 0 \; ; \quad y = \frac{1-i3}{-2}x$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1-i3}{-2}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-i3}{-2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow x\begin{pmatrix} -2 \\ 1-i3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = e^{(-4+i3)t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-i3}{-2} \end{pmatrix} = u(t) + i\,v(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t+i3t} \cdot 1 \\ e^{-4t+i3t}\,\frac{1-i3}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} \cdot e^{i3t} \\ e^{-4t} \cdot \frac{1}{-2} - e^{-4t}\,\frac{i3}{-2} + e^{i3t} \cdot \frac{1}{-2} - e^{i3t}\,\frac{i3}{-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t} + \cos(3t) + i\,sen(3t) \\ \frac{e^{-4t}}{-2} - i\frac{e^{-4t}\cdot 3}{-2} + \frac{\cos(3t)}{-2} + i\frac{sen(3t)}{-2} - i\frac{3\cos(3t)}{-2} - i\frac{3i\,sen(3t)}{-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t} + \cos(3t) \\ \frac{e^{-4t}}{-2} + \frac{\cos(3t)}{-2} + 3\frac{sen(3t)}{-2} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} sen(3t) \\ -\frac{3e^{-4t}}{-2} + \frac{sen(3t)}{-2} - \frac{3\cos(3t)}{-2} \end{pmatrix}$$

Sol. General: $\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix} e^{-t4} + \cos(3t) \\ \frac{e^{-4t}}{-2} + \frac{\cos(3t)}{-2} + \frac{3sen(3t)}{-2} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} sen(3t) \\ -\frac{3e^{-4t}}{-2} + \frac{sen(3t)}{-2} - \frac{3\cos(3t)}{-2} \end{pmatrix}$

$$x_1(t) = C_1 e^{-4t} + C_1 \cos(3t) + C_2\, \mathrm{sen}(3t)$$

$$x_1(0) = 2 = C_1 + C_1 \; ; \; C_1 = 1$$ Está bien

$$x_2(t) = C_1 \frac{e^{-4t}}{-2} + \frac{\cos(3t)}{-2} C_1 + C_1 \frac{3\,\mathrm{sen}(3t)}{-2} - C_2 \frac{3e^{-4t}}{-2} + \frac{\mathrm{sen}(3t)}{-2} C_2 - C_2 \frac{3\cos(3t)}{-2}$$

$$x_2(0) = 5 = \frac{1}{-2} + \frac{1}{-2} + 0 - C_2 \frac{3}{-2} + 0 - C_2 \frac{3}{-2} = -\frac{6}{-2} C_2 + \frac{2}{-2}$$

$$5 = -3C_2 - 1 \; ; \; C_2 = -2$$ está bien al mult. luego

Sol. PVI : $$\vec{x}(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{-t4} + \cos(3t) \\ \frac{e^{-4t}}{-2} + \frac{\cos(3t)}{-2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(3t)}{-2} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(3t) \\ -\frac{3e^{-4t}}{-2} + \frac{\mathrm{sen}(3t)}{-2} - \frac{3\cos(3t)}{-2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t4} + \cos(3t) \\ \frac{e^{-4t}}{-2} + \frac{\cos(3t)}{-2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(3t)}{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{sen}(3t) \\ -3e^{-4t} + \mathrm{sen}(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}}$$