CÁLCULO 2018/2019
HOJA #10: Teorema Fundamental del Cálculo

Problema 10.1. Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

Calcula

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \quad x \in [0, \pi]\,,$$

y compara, donde exista, $F'(x)$ con $f(x)$.

Problema 10.2. Calcula la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ a la gráfica de

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4 - 4}\,dt\,.$$

Problema 10.3. Encuentra los intervalos en los que la función

$$F(x) = \int_1^x \arctan(e^t)\,dt$$

es inyectiva.

Problema 10.4. Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2 + 1}\,dt\,, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2 + 1}\,dt\,.$$

Problema 10.5. Calcula, en el caso de que existan, la primera y la segunda derivada de la función

$$H(x) = x \int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Problema 10.6. Demuestra que la función

$$H(x) = \int_{1-x}^{1+x} \log t\,dt$$

es decreciente en $[0, 1/2]$.

Problema 10.7. Encuentra los extremos absolutos de la función

$$H(x) = \int_{5-2x}^{1} e^{-t^4}\, dt$$

en el intervalo $[1, 3]$. Demuestra que el valor máximo de H es mayor que $2/3$.

Problema 10.8. Encuentra los extremos absolutos de la función

$$H(x) = \int_{0}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$$

en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Que ocurre si planteamos el mismo problema en el intervalo $[0, 2\pi]$?

Problema 10.9. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{3/2}} \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^{1/4}), \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \int_0^x e^{t^2}\, dt \right).$$

Problema 10.10. *a)* Sea

$$F(x) = \int_0^x \Big(1 + \operatorname{sen}\big(\operatorname{sen} t\big)\Big)\, dt\,.$$

Demuestra que F es inyectiva, que $F(0) = 0$ y calcula $(F^{-1})'(0)$.

b) Considera la función

$$G(x) = \int_1^x \operatorname{sen}\big(\operatorname{sen} t\big)\, dt\,.$$

Demuestra que G es una función par, es decir $G(x) = G(-x)$, y usa el resultado para justificar que no existe G^{-1}.

Problema 10.11. Escribe el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2)\, dt$$

y utiliza el resultado para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}\,.$$

Problema 10.12. Deriva las siguientes funciones:

$$1)\quad H(x) = \int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)} \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^6 t}\,,$$

$$2)\quad H(x) = \cos\left(\int_0^x \cos\left(\int_0^t \cos^3(s)\, ds \right)\, dt \right).$$