Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Extraordinario

25 de junio 2015

Nombre		Grupo	

Problema 1 (2.5 puntos) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

NOTA: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, ...$

Solución:

a) Para hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales calculamos los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes A. Resolviendo la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se obtiene el autovalor doble $\lambda = 3$.

Un vector propio asociado a $\lambda = 3$ es $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dando lugar a la primera solución fundamental

$$\overrightarrow{X}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

y resolviendo el sistema $(A - 3I)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}$, se obtiene la segunda solución fundamental

$$\overrightarrow{X}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t},$$

por tanto la solución general del sistema es:

$$\overrightarrow{X}(t) = C_1\overrightarrow{X}^1(t) + C_2\overrightarrow{X}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t} \right],$$

Problema 1 (2.5 puntos) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

NOTA: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

De ejem:

$$x_1(t) = y \qquad \begin{cases} x_1'(t) = y' = x_2(t) \\ x_2'(t) = y'' = 6x_2 - 9x_1(t) \end{cases}$$
$$x_2(t) = y'$$

$$\overrightarrow{X'(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \overrightarrow{X(t)}$$

Se ve que es la misma ecuación que el b)

a) $|A - \lambda I| = 0$; $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = 3 \pm \frac{0}{2} = 3 \quad \text{Raiz real doble.}$$

Solución de la forma: $\vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{V} + C_2 t e^{\lambda t}\vec{V} + C_2 e^{\lambda t}\vec{W}$ / $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ cte.

Para $\lambda = 3$:

$$(A - \lambda I)\vec{V} = \vec{0}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0;\ x = -y;\ \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)\vec{W} = \vec{V}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 1;\ x = 1 - y;\ \vec{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Sol. General: $\overrightarrow{X(t)} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{X(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}(0) = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 = -C_1 + C_2;\ C_2 = 2 + C_1 = 2 + 1 = 3$$

$$1 = C_1$$

$$\boxed{\text{Sol. PVI: } \vec{X}(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{3t} t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) $y'' - 6y + 9 = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 6$

Por la linedidad, podemos separar y sacar los coef. constantes:

$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = 0$ Sustituimos los terminos de Laplace por su equivalente y $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0) - 6s\,\mathcal{L}\{y\} + 6y(0) + 9\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\underline{s^2 F(s)} - s \cancel{-6} - \underline{6s\,F(s)} \cancel{+6} + \underline{9F(s)} = 0$$

$$F(s)(s^2 - 6s + 9) = s \;;\quad F(s) = \frac{s}{s^2 - 6s + 9}$$

Simplificamos F(s) para poder ajustarlo a los terminos conocidos de Laplace:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 6s + 9} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2} \;;\quad s = A(s-3) + B$$

$$s = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2} = 3 \pm 0 \text{ Raiz real doble.}$$

$$s = A(s-3) + B \Rightarrow s = 3 \qquad 3 = B$$

$$s = 4 \Rightarrow 4 = A + B;\quad A = 4 - B = 4 - 3 = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{3}{(s-3)^2}$$ Deshacemos el Laplace:

$$\mathcal{L}\{F(s)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 3\,\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = e^{3t} + te^{3t}}$$

Usando la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtienen las constantes $C_1 = 2$ y $C_2 = -3$ y la solución del sistema es:

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-3t)e^{3t} \\ (1+3t)e^{3t} \end{pmatrix},$$

b) Mediante la transformada de Laplace obtenemos que

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = 0$$

donde hemos denotado la transformada de $y(t)$ como $\mathfrak{L}(y(t)) = Y(s)$.

A partir de las condiciones iniciales y despejando la función $Y(s)$ se llega a que:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 6s + 9}$$

descomponiendo en fracciones simples obtenemos que

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{3}{(s-3)^2},$$

con lo que aplicando la antitransformada obtenemos la solución

$$\boxed{y(t) = e^{3t} + 3te^{3t}}$$

c) La segunda ecuación del sistema es $X_2'(t) = X_1(t) + 4X_2(t)$, derivando resulta $X_2''(t) = X_1'(t) + 4X_2'(t)$.

Por la primera ecuación del sistema sabemos que $X_1'(t) = 2X_1(t) - X_2(t)$.

Por otra parte, despejando en la segunda ecuación tenemos $X_1(t) = X_2'(t) - 4X_2(t)$.

Sustituyendo nos queda:

$$X_2''(t) = 2X_1(t) - X_2(t) + 4X_2'(t) = 2(X_2'(t) - 4X_2(t)) - X_2(t) + 4X_2'(t) = 6X_2'(t) - 9X_2(t)$$

Haciendo el cambio $X_2(t) = y(t)$, y transponiendo términos nos queda: $y'' - 6y' + 9y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = X_2(0) = 1$ y $y'(0) = X_2'(0) = X_1(0) + 4X_2(0) = 2 + 4 = 6$, es decir exactamente el problema de valor inicial planteado en el apartado (b).

En cuanto a las soluciones se observa que $y(t)$ coincide con $X_2(t)$ y también, como $X_1(t) = X_2'(t) - 4X_2(t)$, resulta que:

$$\boxed{X_1(t) = y'(t) - 4y(t) = (6+9t)e^{3t} - 4((1+3t)e^{3t}) = (2-3t)e^{3t}}$$

Problema 2 (2.5 puntos) .
Sea la función $f(x) = 27 + (x^2 + 1)\, y'$, donde y' es la derivada primera de la función $y = y(x)$ respecto de la variable independiente x. Sabiendo que y es suficientemente derivable, se pide:

(a) Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0$.

(b) Resolver la ecuación diferencial del apartado (a) mediante series de potencias de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(c) Imponer la condición inicial $y(0) = \beta\,,\ y'(0) = 1$. Hallar para qué valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución impar, esto es, $y = y(x)$ satisface que $y(-x) = -y(x)$.

Solución:

(a) Tenemos que

$$f'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\left[y'\,(x^2+1) + 27 \right] \;=\; (x^2+1)y'' + 2xy'\,.$$

Por tanto, la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $\boxed{(x^2 + 1)y'' + 2xy' \;=\; 0}$

(b) Suponiendo que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, se tiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial del apartado (a), se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, a_n\, x^n \;=\; 0\,.$$

Con objeto de obtener la misma potencia de x en cada una de las series, se efectúa un cambio de índices en la segunda serie, dando lugar a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, a_n\, x^n \;=\; 0$$

esto equivale a

$$2a_2 + (6a_3 + 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n+1)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} \right] x^n \;=\; 0\,.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias de x, encontramos que

$$2a_2 = 0\,, \quad 6a_3 + 2a_1 = 0\,, \quad n(n+1)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} = 0\,,$$

y se obtiene

$$a_2 = 0\,, \quad a_3 = -\frac{1}{3}\, a_1\,, \quad a_{n+2} = -\frac{n}{n+2}\, a_n\,,$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Finalmente, calculando los primeros coeficientes en función de a_0 y a_1 se llega a que

$$\boxed{y(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \right) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}}\,,$$

donde se observa que todos los coeficientes de las potencias de x con exponente par son nulos.

(c) Aplicando la condición inicial se obtiene: $\boxed{a_0 = \beta \text{ y } a_1 = 1}$. Se concluye fácilmente que para que la función $y = y(x)$ sea una función impar hay que tomar $\boxed{\beta = 0}$.

Problema 3 (2.5 puntos) .
Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + ky = k \sin t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad t \geq 0\,,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \sin t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

Solución:

(a) Es una EDO de primer orden lineal. La resolveremos por factor integrante donde $\mu = e^{kt}$. Por lo tanto

$$(e^{kt}y)' = e^{kt}(k \sin t + \cos t) \Rightarrow e^{kt}y = k \int e^{kt} \sin t \, dt + \int e^{kt} \cos t \, dt + C$$

Como $\int e^{kt} \cos t \, dt = e^{kt} \sin t - k \int e^{kt} \sin t \, dt$ más una constante, directamente se obtiene que

$$y = \sin t + Ce^{-kt}\,.$$

Aplicado la condición inicial obtenemos que $C = 1$, con lo que la solución del PVI es:

$$\boxed{y = y(t) = \sin t + e^{-kt}}$$

Problema 3 (2.5 puntos) .
Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + ky = k\sin t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad t \geq 0,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \sin t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

a) Ec. Diferencial Ordinaria, lineal, no homogenea, 1er orden.

$$y' + ky = k\,\text{sen}(t) + \cos(t)$$

No var. separables
No exacta
No homogenea.

$$\mu(x) = e^{\int k\,dx} = e^{kx}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y e^{kx}\right) = e^{kt} k\,\text{sen}(t) + e^{kt}\cos(t)$$

$$y e^{kt} = \int k e^{kt}\,\text{sen}(t)\,dt + \cancel{\int e^{kt}\cos(t)\,dt} + K$$

$u = \text{sen}(t)$ $\quad du = \cos(t)\,dt$
$dv = k e^{kt}$ $\quad v = e^{kt}$

$$\int k e^{kt}\,\text{sen}(t)\,dt = \text{sen}(t) e^{kt} \cancel{- \int e^{kt}\cos(t)\,dt} =$$

$u = e^{kt}$ $\quad du = k e^{kt}\,dt$
$dv = \cos(t)$ $\quad v = \text{sen}(t)$

$$= \cancel{\text{sen}(t) e^{kt}} - \cancel{e^{kt}\,\text{sen}(t)} + \int \text{sen}(t)\, k e^{kt}\,dt$$

$$\int e^{kt}\cos(t)\,dt = e^{kt}\,\text{sen}(t) - \int \text{sen}(t)\, k e^{kt}$$

$u = e^{kt}$ $\quad du = k e^{kt}\,dt$
$dv = \cos(t)\,dt$ $\quad v = \text{sen}(t)$

$$y(x) = \frac{\text{sen}(t)\,\cancel{e^{kt}}}{\cancel{e^{kt}}} + \frac{K}{e^{kt}} = \text{sen}(t) + K e^{-kt} \,/\, K \in \mathbb{R} \text{ cte}$$

$$y(0) = 1 = \cancel{\text{sen}(0)}^{0} + \cancel{e^{0}}^{1} K; \quad K = 1; \quad \boxed{y(x) = \text{sen}(t) + e^{-kt}}$$

(b) El valor aproximado de $y(\pi/4)$ obtenido mediante la primera iteración del método de Euler explícito es: $Y_1^{h=\frac{\pi}{4}} = 1+h(1-k) = 1+\dfrac{\pi}{4}(1-3) = -0.571$. El valor exacto es $y(\pi/4) = 0.802$. Por tanto, teniendo en cuenta los decimales que estamos considerando, el error cometido en la aproximación es: $|y(\pi/4) - Y_1^{h=\frac{\pi}{4}}| = 1.373$

(c) Tal y como se constata en el apartado anterior, el valor exacto es positivo y su correspondiente aproximación es negativa, por tanto no parece que dicha aproximación sea admisible. Para encontrar una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible hacemos el siguiente análisis:
Al examinar la solución exacta, $y = \sin t + e^{-3t}$, se aprecia el carácter rígido del problema debido al término e^{-kt} con $k = 3$, por tanto existirá una cota superior para los posibles valores de h a la hora de garantizar la estabilidad de la solución numérica. A raíz de los resultados del apartado anterior se infiere que el paso $h = \dfrac{\pi}{4}$ está por encima de esa cota.
En lo que sigue se proporcionará una acotación del paso h.

Del PVI se tiene que $f(t,y) = -ky+k\sin t+\cos t$. Por claridad llamamos $g_n = k\sin t_n+\cos t_n$, con lo que $f(t_n,Y_n) = -kY_n+g_n$. Partiendo del esquema numérico de Euler explícito se tiene:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + hf(t_n, Y_n)\\
&= (1-hk)Y_n + h\,g_n\\
&= (1-hk)^2Y_{n-1} + h(g_n + (1-hk)g_{n-1})\\
&= (1-hk)^3Y_{n-2} + h(g_n + (1-hk)g_{n-1} + (1-hk)^2g_{n-2})\\
&= ...\\
&= (1-hk)^{n+1}Y_0 + h\sum_{p=0}^{p=n}(1-hk)^p g_{n-p}
\end{aligned}$$

Las potencias $(1-hk)^{n+1}$ tienden a cero cuando $n\to\infty$ si $|1-kh| < 1$. Dado que $k > 0$ se obtiene que $\boxed{h < \dfrac{2}{k} = \dfrac{2}{3}}$. Por tanto, el paso $h = \pi/4 > 2/3$ y esto justifica la aproximación no admisible.
Por otro lado, si tomamos por ejemplo $h = \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{2}{3}$, se tiene que en dos iteraciones se llega al valor $Y_2^{h=\frac{\pi}{8}} = 0.775$, el cual es un valor aproximado admisible para $y(\pi/4)$.

Problema 4 (2.5 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\;\; t>0\,,\;\; 0<x<\pi/3\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,,\;\; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) &= 0\,,\;\; t>0\,,\\
u(x,0) &= 2x+1\,,\;\; 0\le x\le \pi/3\,.
\end{aligned}$$

(a) Aplicando el método de separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, demostrar que $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y α la constante de separación.

Problema 4 (2.5 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \; t>0, \; 0<x<\pi/3 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \; \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) &= 0, \; t>0, \\ u(x,0) &= 2x+1, \; 0 \le x \le \pi/3. \end{aligned}$$

(a) Aplicando el método de separación de variables $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$, demostrar que $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y α la constante de separación.

(b) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \alpha X = 0; \quad X'(0) = 0; \; X'(\pi/3) = 0;$$

y hallar los valores de $\alpha \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

(c) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx); \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R},$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0; & m \ne n \\ L/2; & m=n\ne 0 \\ L; & m=n=0 \end{cases}$

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = \frac{d u(x,t)}{dt}$$

Realizamos el cambio de variable:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(u(x,t))\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(X(x)T(t))\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(X'(x)T(t)\right) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{d u(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}(X(x)T(t)) = X(x)T'(t)$$

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

Dividimos entre $X(x)T(t)$:

$$\frac{X''(x)\cancel{T(t)}}{X(x)\cancel{T(t)}} = \frac{\cancel{X(x)}T'(t)}{\cancel{X(x)}T(t)} \; ; \; \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Cte. de separación

Es la unica solución posible para relacionar dos funciones con variables independientes.

P1) $T'(t) + \lambda T(t) = 0$

$$\mu(x) = e^{\int \alpha dt} = e^{\alpha t} \; ; \; e^{\alpha t}T'(t) + \lambda e^{\alpha t}T(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}T(t)) = 0 \; ; \; e^{\alpha t}T(t) = k \; ; \; T(t) = ke^{-\alpha t} \; k \in \mathbb{R} \text{ cte}$$

P2) $X''(x) + \alpha X(x) = 0$; $\alpha > 0$; $\alpha = a^2$; $a > 0$

$$\frac{du}{dx}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \; ; \; X'(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \; ; \; X'(\pi/3) = 0$$

$$r^2 + a^2 = 0 \; ; \; r = \pm ia \qquad \mathcal{B} = \{\text{sen}(ax), \cos(ax)\}$$

$$X(t) = C_1 \,\text{sen}(ax) + C_2 \cos(ax) \; / C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ cte.}$$

$$X'(t) = C_1 a\cos(ax) - C_2 a \operatorname{sen}(ax)$$

$$X'(0) = 0 = C_1 a \;;\; C_1 = 0$$

$$X'(\pi/3) = 0 = -\underset{\substack{\neq \\ 0 \\ \text{Exijo}}}{C_2}\,\underset{\substack{\neq \\ 0 \\ a>0}}{a} \operatorname{sen}(\pi/3\, a) \;;\; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} a\right) = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{3} a = \pi n$$

$$a = 3n \;;\; a^2 = \alpha \;;\; \alpha_n = (3n)^2$$

$$X_n(t) = C_n \cos(3nx) \quad / \; C_n \in \mathbb{R} \text{ cte} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$T(t) = k e^{-\alpha t}$$

$$u_n(x,t) = C_n \cos(3nx)\, k e^{-\alpha t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(3nx)\, e^{-9n^2 t}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 2x+1 \\ u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(3nx) \end{aligned}\right\} \text{Todavia nada}$$

(b) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \alpha X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\alpha \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

(c) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Solución:

(a) Al aplicar separación de variables en la EDP se obtiene: $X''T = XT' \Longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\alpha$, donde α es la constante de separación. Tomando el primer término de la igualdad $\dfrac{T'}{T} = -\alpha$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden $T' + \alpha T = 0$, cuyas soluciones no nulas son: $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante.

(b) Del apartado anterior se tiene que: $\dfrac{X''}{X} = -\alpha$, por tanto: $X'' + \alpha X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:
Caso 1: $\alpha = 0$
$X'' = 0 \implies X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\alpha = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.
Caso 2: $\alpha > 0$
Tomamos $\alpha = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax)\,;\ \text{además } X'(x) = -ac_1\sin(ax) + ac_2\cos(ax)\,,\ \text{con } c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0\,;\quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1\sin(a\pi/3) = 0$, imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1,2,3,\cdots$ Por tanto $\boxed{\alpha = (3n)^2 = 9n^2\,;\, n = 1,2,3,\cdots}$

(c) Debemos calcular:

$$u(\pi/6, 1/9) \approx A_0 + A_1 e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2 e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(3nx) = f(x) = 2x+1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1+\pi/3$$

$$(n\geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x) + \frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6, 1/9) \approx 1 + \frac{\pi}{3}}$

$$\frac{12}{\pi}\int_0^0 x\cos(6x)\,dx = \frac{12}{\pi}\left[x\cdot\frac{1}{6}\,\text{sen}(6x) + \int + \frac{1}{6}\,\text{sen}(6x)\,dx\right]$$

$u = x \qquad du = 1\,dx$

$dv = \cos(6x) \qquad v = -\frac{1}{6}\,\text{sen}(6x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^0 6\cos(6x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\text{sen}(6x)\Big]_0^0$$

$+$

$$\frac{\cancel{12}^{\,2}}{\pi}\left[-\frac{x\,\text{sen}(6x)}{\cancel{6}_{\,1}} - \frac{1}{\cancel{36}_{\,6}}\cos(6x)\right] = \frac{1}{\pi}\left[-2x\,\text{sen}(6x - \frac{1}{3}\cos(6x)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left((1-2x)\,\text{sen}(6x) - \frac{1}{3}\cos(6x)\right)_0^{\pi/3}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\left(\cancel{\left(1-\frac{2\pi}{3}\right)\text{sen}(2\pi)}^{\,0}\right) - \frac{1}{3}\underbrace{\cos(2\pi)}_{1}\right) - \left(\cancel{(0+1)\,\text{sen}(0)}^{\,0} - \frac{1}{3}\underbrace{\cos(0)}_{1}\right)$$

$\pi\ \phi\ 0\ 2\pi$

$$\left(0 - \frac{1}{3}\right)^{1} \mathrel{\overset{+}{-}} \left(0 \overset{+}{-} \frac{1}{3}\right) = 0$$