Soluciones # 5

Transformaciones lineales

Problema 5.1 Son lineales las transformaciones (a), (c), (e), (f), (g) y (h).

Problema 5.2 Los apartados hacen referncia a las transformaciones del Problema 5.1 que son lineales:

a) $\mathrm{ker}(T) = \{a_0 + a_2x^2 \colon a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{nul}(T) = 2$, $\mathrm{Im}(T) = \{a_1 x \colon a_1 \in \mathbb{R}\}$ y $\mathrm{rg}(T) = 1$.

c) $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathrm{rg}(T) = n^2$. Es un isomorfismo.

e) $\mathrm{ker}(T) = \mathbb{P}_0$, $\mathrm{nul}(T) = 1$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_{n-1}$ y $\mathrm{rg}(T) = n$.

f) $\mathrm{ker}(T) = \mathrm{Gen}((1, -1)^t)$, $\mathrm{nul}(T) = 1$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{rg}(T) = 1$.

g) $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{rg}(T) = 2$. Es un isomorfismo.

h) $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{rg}(T) = 2$. Es un isomorfismo.

Problema 5.3

1. Siempre que $\alpha \neq -5$.

2. Para ningún valor de α.

Problema 5.4 Las imágenes son

$$T((2,10)^t) = (4,0)^t\,, \quad T((9,3)^t) = (3,-12)^t\,, \quad T((-7,7)^t) = (1,12)^t\,.$$

Problema 5.5 La aplicación T no es lineal.

Problema 5.6 Si $T\colon V \to V$ es isomorfismo, es, en particular, inyectiva, por lo que $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$. En sentido inverso, si $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, T es inyectiva; por otra parte, también será $\mathrm{nul}(T) = 0$, y por tanto $\mathrm{rg}(T) = \mathrm{dim}(V) - \mathrm{nul}(T) = \mathrm{dim}(V)$, es decir, es suprayectiva. En consecuencia, T es isomorfismo.

Problema 5.7

1. $T((x,y)^t) = (x+y, x-y)^t$.
2. T es un isomorfismo.
3. $\mathrm{nul}(T) = 0$ y $\mathrm{rg}(T) = 2$.

Problema 5.8

1. T es combinación lineal de aplicaciones lineales (la traza es un operador lineal).
2. $\mathrm{ker}(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon A = k\, I_n, k \in \mathbb{R}\}, \quad \mathrm{Im}(T) = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon \mathrm{tr}(B) = 0\}$.
3. $\mathrm{nul}(T) = 1, \quad \mathrm{rg}(T) = n^2 - 1$.