PROBLEMA 6.6

En la resolución del problema usaremos el siguiente corolario del teorema del valor medio:

Corolario: $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (x_1,x_2).

Si $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in(x_1,x_2) \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$

Si $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in(x_1,x_2) \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

Dem: El teorema del valor medio:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{para algún } x_0\in(x_1,x_2)$$

nos permite escribir:

$$f(x_2) = f(x_1)+f'(x_0)\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{\geq 0}$$

Por tanto,

- $f'(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x_0)\geq 0 \Rightarrow$
  $f(x_2)\geq f(x_1)$
- $f'(x)\leq 0 \Rightarrow f'(x_0)\leq 0 \Rightarrow$
  $f(x_2)\leq f(x_1)$ ∎

Obs: $f'(x)>0 \quad \forall x\in(x_1,x_2)\Rightarrow f$ es CRECIENTE en $[x_1,x_2]$

$f'(x)<0 \quad \forall x\in(x_1,x_2)\Rightarrow f$ es DECRECIENTE en $[x_1,x_2]$

- Número de soluciones de $x^7+4x=3$ en $\mathbb{R}$

La ecuación $x^7+4x=3$ con $x\in\mathbb{R}$ es equivalente a:

$f(x)=0$; $x\in\mathbb{R}$ siendo $f(x):=x^7+4x-3$

continua y derivable en $\mathbb{R}$

$f'(x) = 7x^6+4 > 0$

$\Rightarrow$ funcion creciente

Como
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^7+4x-3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^7+4x-3\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^7 = \infty$
- x^7+4x-3 es creciente

podemos concluir qe la ecuación $x^7+4x-3=0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

- Número de soluciones de $x^5 = 5x-6$ en $\mathbb{R}$

Consideremos la función $f(x) = x^5 - 5x + 6$

f es continua y derivable en $\mathbb{R}$

$f'(x) = 5x^4 - 5$

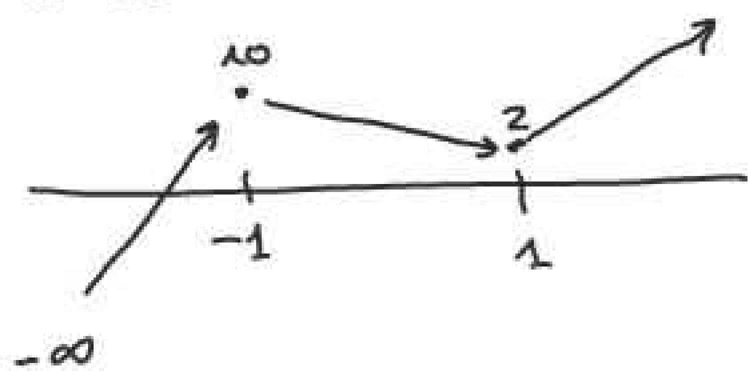
$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$

f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

f es decreciente en $(-1,1)$

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $f(-1) = -1+5+6 = 10 > 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $f(1) = 1-5+6 = 2 > 0$



$f(x) = 0$
sólo tiene una solución en $\mathbb{R}$

• Número de soluciones de $x^4 - 4x^3 = 1$ en $\mathbb{R}$:

Consideremos $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$ continua y derivable en $\mathbb{R}$

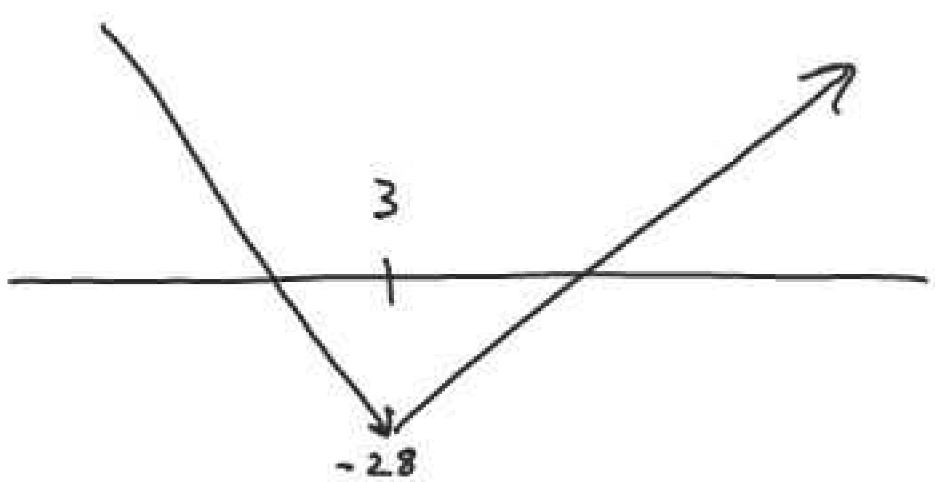
$f'(x) = 4x^3 - 4\cdot 3x^2 = 4x^2(x-3)$

- $x<3 \Rightarrow f'(x) < 0$ decreciente
- $x>3 \Rightarrow f'(x) > 0$ creciente
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^4 - 4x^3 - 1) =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \infty$$

- $f(3) = 3^4 - 4\cdot 3^3 - 1 = 3^3(3-4) - 1 =$

$$= -3^3 - 1 = -28 < 0$$



$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=0 \\ \text{tiene DOS soluciones en } \mathbb{R} \end{array}}$$

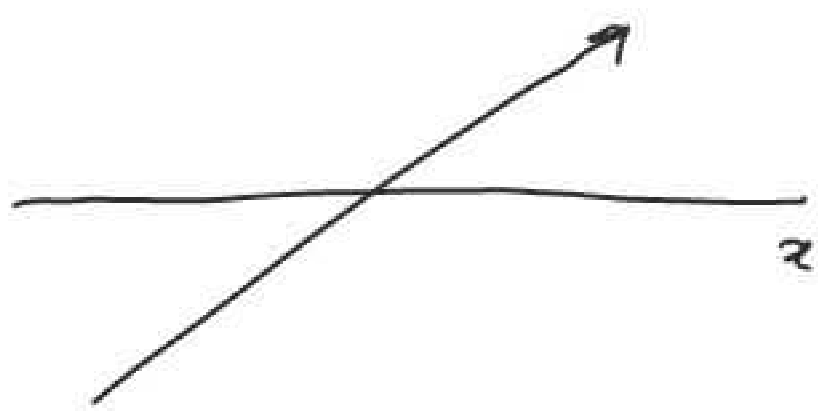
• Número de soluciones de $\operatorname{sen} x = 2x-1$ en $\mathbb{R}$:

Sea $f(x) = 2x-1-\operatorname{sen} x$ continua y derivable en $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2-\cos x \geq 2-1 = 1 > 0$ creciente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x-1-\operatorname{sen} x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (2x-1-\operatorname{sen} x) = \infty$$



$f(x)=0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$

- Número de soluciones de $x^x = 2$ en $[1, \infty)$:

Sea $f(x) = x^x - 2 = e^{x \log x} - 2$

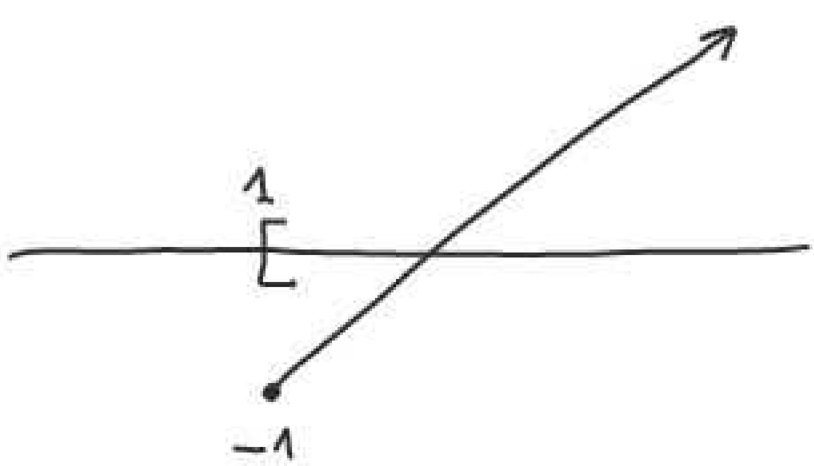
continua y derivable en $(0, \infty)$

- $f'(x) = e^{x \log x} (\log x + 1)$

  Por tanto : $x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$ creciente

- $f(1) = 1^1 - 2 = -1 < 0$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$



$f(x) = 0$
tiene una única solución en $\mathbb{R}$

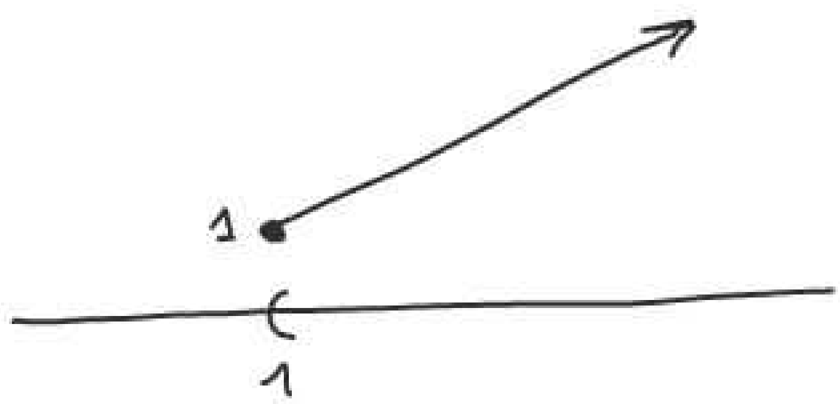
- Número de soluciones de $x^2 = \log(1/x)$ en $(1, \infty)$

Sea $f(x) = x^2 - \log(1/x) = x^2 + \log(x)$

continua y derivable en $(0, \infty)$

- $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$

- $f(1) = 1^2 + \log(1) = 1 > 0$



$f(x) = 0$

NO tiene soluciones en $(1, \infty)$