Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Extraordinario
16 de Junio 2016

Nombre		Grupo	

Problema 1 (2.0 puntos) .

$y(x)$
x

Dada la ecuación diferencial $xy^2y' + x^3 = y^3$, con $0 < x < 2$, se pide:

(a) Clasificarla razonadamente.

$u = \frac{x}{y}$; $y = \frac{x}{u} \Rightarrow y' = \frac{u - xu'}{u^2}$

(b) Resolverla sujeta a la condición $y(1) = 2$.

$u = \frac{y}{x}$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

Solución.

(a) Es una ecuación diferencial de primer orden, no lineal, y homogénea, porque dividiendo por xy^2 ($x > 0$, suponiendo que $y(x) \neq 0$ para $x \in (0, 2)$) y despejando y' se puede expresar como

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-2},$$

siendo el lado derecho una función de y/x . Otra forma de ver que es homogénea consiste en despejar $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \equiv F(x, y)$ y observar que ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha x} - \frac{(\alpha x)^2}{(\alpha y)^2} = \frac{\alpha y}{\alpha x} - \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 y^2} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = F(x, y).$$

(b) Haciendo el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$, que implica $y' = v'x + v$, la ecuación se convierte en una ecuación de variables separables

$$v'x + v = v - v^{-2} \implies v^2 dv = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando se obtiene $\frac{v^3}{3} = -\ln x + C$ y deshaciendo el cambio $\frac{y^3}{3x^3} = -\ln x + C$, donde C es una constante. Finalmente, usando la condición inicial $y(1) = 2$, obtenemos $C = 8/3$. Por lo tanto la solución deseada es

$$\frac{y^3}{3x^3} = -\ln x + \frac{8}{3} \implies \boxed{y^3 = x^3(8 - 3\ln x)}.$$

Problema 1 (2.0 puntos) .

Dada la ecuación diferencial $xy^2y' + x^3 = y^3$, con $0 < x < 2$, se pide:

(a) Clasificarla razonadamente.

(b) Resolverla sujeta a la condición $y(1) = 2$.

a) Ec. Diferencial ordinaria, no lineal, 1er orden, homogenea.

b) $\frac{\cancel{x}y^2}{x^{\cancel{3}2}}y' + \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \frac{y^3}{x^3}$; $u = y/x \Rightarrow u^2y' + 1 = u^3$

$y' = \frac{u^3 - 1}{u^2}$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$;

$u'x = \frac{\cancel{u^3} - 1 - \cancel{u^3}}{u^2} = -1/u^2$; $\frac{du}{dx}x = -1/u^2$

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{-1/u^2}$; $\frac{dx}{x} = -u^2du$; $\int \frac{1}{x}dx = -\int u^2du$

$\ln(x) + k = -u^3/3$; $u^3 = -3\ln(x) - 3k$

$y^3/x^3 = -3\ln(x) - 3k$; $y(1) = 2 \Rightarrow 2^3/1 = -\cancel{3\ln(1)}^{0} - 3k$

$k = \frac{8}{-3}$; $\boxed{y^3(x) = -3\ln(x)x^3 + 8x^3}$

Problema 2 (1.0 punto) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$.

(b) Encontrar <u>una</u> solución del sistema que esté acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Solución.

(a) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores y vectores propios asociados a la matriz A . Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0$, obteniendo $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 5$ (reales y distintos). Además, unos vectores propios asociados son $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Por lo tanto la solución general del sistema se puede escribir en la forma

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

(b) A la vista de la solución general y, más especificamente, considerando las exponenciales que aparecen en su expresión podemos encontrar <u>una</u> solución acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$, tomando las constantes $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, obteniendo

$$\boxed{\overrightarrow{X}_p(t) = \xi_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t}},$$

Problema 2 (1.0 punto) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$.

(b) Encontrar <u>una</u> solución del sistema que esté acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$.

a) Autovalores:

$$|A-\lambda I|=0; \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - \lambda - 20$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{81}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$ Raices reales distintas.

La solución será de la forma: $\overrightarrow{X(t)} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{V}_{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{V}_{\lambda_2}$

Autovectores: $(A-\lambda I)\vec{V} = \vec{0}$

Para $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x+2y=0; \quad x = 2y$

$\vec{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -4$: $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$4x+y=0; \quad y=-4x$

$\vec{V}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -4x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Sol. General: $\overrightarrow{X(t)} = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \,/\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ctes

b) $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \overrightarrow{X(t)} = \underset{\substack{\wr \\ 0}}{C_1}\,\infty\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\wr \\ 1}}{C_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ¿?$$

$\overrightarrow{x(t)} = e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Problema 3 (1.5 puntos) .

Comprueba que las funciones $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y \;=\; 2(t-1)^2 e^{-t}$$

con $0 < t < 1$. Además, calcula a partir de y_1 , y_2 una solución particular de la ecuación no-homogénea dada, usando el método de variación de parámetros.

Solución.

Omitimos la comprobación, pero efectivamente y_1 , y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial dada. Para calcular una solución particular de la no-homogénea, reescribimos la ecuación como

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y \;=\; 2(1-t)e^{-t}\,.$$

Según el método de variación de parámetros, suponemos que la solución buscada tiene la forma $y(t) \;=\; u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, donde u_1 y u_2 son funciones a determinar. Sabemos que sus derivadas verifican el sistema

$$\begin{aligned} u_1'e^t + u_2't \;&=\; 0 \\ u_1'e^t + u_2' \;&=\; 2(1-t)e^{-t}\,, \end{aligned}$$

o sea tenemos $u_1' \;=\; -2t\,e^{-2t}$, $u_2' \;=\; 2\,e^{-t}$. Finalmente, después de integrar, obtenemos que $u_1 \;=\; (t+\frac{1}{2})\,e^{-2t}$, $u_2 \;=\; -2\,e^{-t}$. Por lo tanto una solución particular es

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{2}(1-2t)e^{-t}}\,.$$

Problema 3 (1.5 puntos) .

Comprueba que las funciones $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y \;=\; 2(t-1)^2 e^{-t}$$

con $0 < t < 1$. Además, calcula a partir de y_1, y_2 una solución particular de la ecuación no-homogénea dada, usando el método de variación de parámetros.

$$y_h = 0 \cdot e^t + t \cdot 1 = t \qquad y_h' = 1 \qquad y_h'' = 0$$

$$0 + t \cdot 1 - t = 0 \; ; \; t = t \text{ Comprobado}$$

Normalizar:

$$\frac{(1-t)y'' + ty' - y}{1-t} = \frac{\overbrace{2(t-1)^2}^{-2(1-t)(t-1)} e^{-t}}{1-t} \; ; \; y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y = -2(t-1)e^{-t}$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases} \qquad u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t \\ -2(t-1)e^{-t} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & t \\ e^t & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2t(t-1)e^{-t}}{e^t - te^t}$$

$$u_1' = \frac{2t(t-1)e^{-t}}{-(t-1)e^t} = -2te^{-2t} ; \; u_1 = \int -2te^{-2t}\,dt = te^{-2t} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & -2(t-1)e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & t \\ e^t & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2(t-1)}{e^t - te^t} = \frac{2\cancel{(1-t)}}{\cancel{(1-t)}e^t} = 2e^{-t}$$

$$u_2 = \int 2e^{-t}\,dt = -2e^{-t} \; ; \; y_p(x) = (t + 3/2)e^{-2t} - 2e^{-t} = (t - 1/2)e^{-t}$$

$$y(x) = Ae^t + Bt + (t + 1/2)e^{-t} - 2e^{-t} \cdot t \quad / \; A, B \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y(x) = Ae^t + Bt + (1/2 - t)e^{-t} \quad / \; A, B \in \mathbb{R}}$$

Problema 4 (2.0 puntos) .

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace

$$y'' - 2y' + 5y \;=\; t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,.$$

Solución.

Sea $\mathcal{L}\{y\} \;=\; F(s)$ la transformada de Laplace de la incógnita. Aplicando la transformada a la ecuación dada, se obtiene $(s^2 - 2s + 5)F(s) - s \;=\; s^{-2}$, por tanto

$$F(s) \;=\; \frac{s^3 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 5)} \;=\; \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{(s-1)^2 + 4}\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 - 2s + 5 \;=\; (s-1)^2 + 4$. Siendo los coeficientes $A = 2/25$, $B = 1/5$, $C = 23/25$, $D = -1/25$, se tiene

$$F(s) \;=\; \frac{2}{25}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{25}\frac{23s - 1}{(s-1)^2 + 4}\,.$$

Finalmente, reescribiendo $23s - 1 \;=\; 23(s-1) + 22$ y aplicando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, resulta que

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \;&=\; \frac{2}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{23}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}\right\} + \frac{11}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2 + 4}\right\} \\ &= \frac{1}{25}\Big[\,2 + 5t + 23\,e^t\cos(2t) + 11\,e^t\sin(2t)\,\Big]\,. \end{aligned}$$

Entonces la solución buscada es

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{25}\Big[\,2 + 5t + 23\,e^t\cos(2t) + 11\,e^t\sin(2t)\,\Big]}\,.$$

Problema 4 (2.0 puntos) .

Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace

$$y'' - 2y' + 5y = t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,.$$

$\mathcal{L}^{-1}\{y\} = F(s)$

$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}$

$\underline{s^2 F(s)} - s\,y(0) - y'(0) - \underline{2s\,F(s)} + 2y(0) + \underline{5F(s)} = \frac{1}{s^2}$

$(s^2 - 2s + 5)F(s) - s - \cancel{2} + \cancel{2} = 1/s^2$

$F(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2-2s+5}$

$s = \pm 0$ Doble raiz

$s = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot1\cdot5}}{2} = RCS$

$s^2+1 = As(s^2-2s+5) + B(s^2-2s+5) + Cs^3 + Ds^2$

$s=0 \quad 1+0 = A0 + B(5) + 0 + 0\,; \quad \underline{B = 1/5}$

$2s = A(s^2-2s+5) + As(2s-2) + B(2s-2) + 3Cs^2 + 2Ds$

$s=0 \quad 0 = A(5) + A\cdot0 + B(-2) + 0 + 0\,;\ 5A = 2B\,;\ \underline{A = \frac{2/5}{5} = 2/25}$

$2 = A(2s-2) + A(2s-2) + As(2) + B(2) + 6Cs + 2D$

$s=1 \quad 2 = \cancel{A0} + \cancel{A0} + 2A + 2B + 6C + 2D\,; \quad 2 = 2A + 2B + 6C + 2D$

$2 = 4/25 + 2/5 + 6C + 2D\,; \quad 36/25 = 6C + 2D$

$2 = 2A(2s-2) + 2As + 2B + 6Cs + 2D$

$s=0 \quad 2 = 2A(-2) + \cancel{2A\cdot0} + 2B + \cancel{6C0} + 2D\,; \quad 2 = -4A + 2B + 2D$

$D = \frac{2 + 4\cdot2/25 - 2\cdot1/5}{2} = 1 + 4\cdot1/25 - 1/5 = \underline{24/25}$

$C = \frac{2 - 2\cdot2/25 - 2\cdot1/5 - 2\cdot24/25}{6} = \underline{-2/25}$

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-2s+5)} = \frac{2/25}{s} + \frac{1/5}{s^2} + \frac{-\frac{2}{25}s + \frac{24}{25}}{s^2-2s+5}$$

$$\frac{24}{38} \cdot \frac{25}{-2}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{2}{25}s + \frac{24}{25}}{s^2-2s+5}\right\}$$

$\hookrightarrow (s-1)^2+4$

$$y(x) = \frac{2}{25} + \frac{t}{5} - \frac{2}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-12}{(s-1)^2+2^2}\right\}$$

$$y(x) = \frac{2}{25} + \frac{t}{5} - \frac{2}{25}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} + \frac{-12+1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}\right)$$

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{25} + \frac{t}{5} - \frac{2}{25}e^t\cos(2t) + \frac{11}{25}e^t\,\text{sen}(2t)}$$

Md

Problema 5 (1.5 puntos) .

Consideremos el siguiente modelo de ecuación de ondas.

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,, \;\; t>0\,, \;\; 0<x<\pi \\
\text{Condiciones Contorno} &: \quad u(0,t)=0\,, \;\; u(\pi,t)=0\,, \;\; t\geq 0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \quad (\mathbf{i}) \;\; u(x,0)=\sum_{k=1}^{4} k^2\sin(kx)\,, \;\; (\mathbf{ii}) \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,, \;\; 0\leq x\leq \pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables la solución formal del modelo puede escribirse

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\,\sin(nx)\;, \quad \text{con} \;\; A_n\in\mathbb{R}\,.$$

Hallar los coeficientes $A_n\,, \forall n \geq 1$ y expresar $u(x,t)$ como una suma finita.

Solución.

Tomando $t=0$ en la solución formal se obtiene

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\;, \quad \text{con} \;\; A_n\in\mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial ($\mathbf{i}$) $u(x,0)=\sum_{k=1}^{4} k^2\sin(kx)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n=1,2,3,\ldots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de sumandos, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sum_{k=1}^{4} k^2\sin(kx) = \sin(x)+4\sin(2x)+9\sin(3x)+16\sin(4x)$$

implica que

$$\boxed{A_1=1\,,\; A_2=4\,,\; A_3=9\,,\; A_4=16\,,\;\; A_n=0 \;\;\forall\; n\geq 5}$$

Recopilando los valores de los coeficientes, se obtiene la solución del problema de ondas, esto es

$$\boxed{u(x,t) \;=\sum_{n=1}^{4} A_n\cos(nt)\sin(nx) = \cos(t)\sin(x)+4\cos(2t)\sin(2x)+9\cos(3t)\sin(3x)+16\cos(4t)\sin(4x)}$$

Problema 6 (2.0 puntos) .

Se considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 6\,y \;=\; 0 \\ y(0) \;=\; 1\,. \end{cases}$$

(i) Aplicar una iteración del método de Euler explicito con paso $h_1 = 0.05$. Además analizar si el método es estable con el paso sugerido.

(ii) Usar el valor Y_1 calculado en (i) y el siguiente método de Adams–Moulton de orden 2

$$Y_{n+2} \;=\; Y_{n+1} + \frac{h}{2}\Big[\; f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \;+\; f(t_{n+2}, Y_{n+2}) \;\Big]\,,$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.1)$ usando $h = h_1 = 0.05$.

(iii) Sabiendo que $E^{h_2}_{t=0.1} = 0.00112$ es el error cometido al aproximar $y(0.1)$ mediante el método en (ii) con paso $h_2 = h_1/q$, calcular el valor de h_2 (notar que $y(0.1) = 0.54881$ y $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso).

Solución.

(i) Mediante una iteración del método de Euler explicito (para $n = 0$) con paso $h_1 = 0.05$ se obtiene $Y_1 \;=\; Y_0 - 6\,h_1\,Y_0 \;=\; 1 - 0.3 \;=\; 0.7$. A pesar de que la ecuación diferencial lineal dada es *rígida*, el esquema numérico es estable, puesto que $h_1 = 0.05 \;<\; 2\,/\,6 \;\approx\; 0.33$.

(ii) Aplicando la formula del método numérico propuesto, con $h = h_1 = 0.05$, para $n = 0$ se obtiene $Y_2 = Y_1 + (h_1/2)\,[\,-6\,Y_1 - 6\,Y_2\,]$, esto es $Y_2 = Y_1\,(1 - 3\,h_1)\,/\,(1 + 3\,h_1) = 0.51739$. Por tanto, $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 0.51739}$ es la aproximación de $y(0.1)$ buscada.

(iii) Usando el valor $y(0.1) = 0.54881$, podemos calcular $E^{h_1}_{t=0.1} \;=\; \Big|\,Y_2^{h_1} - y(0.1)\,\Big| \;=\; 0.03142$. Entonces, siendo $p = 2$ el orden del método en (ii), resulta que

$$E^{h_2}_{t=0.1} \;\approx\; C\,h_2^2 \;=\; C\,\left(\frac{h_1}{q}\right)^2 \;\approx\; \frac{E^{h_1}_{t=0.1}}{q^2}\,,$$

donde $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso. Finalmente de la expresión anterior se calcula $q \approx 5$ y se puede concluir que $\boxed{h_2 = h_1/5 = 0.01}$.