Problema 5.3 $\quad f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

CONTINUIDAD:

$\boxed{x \neq 0}$ Si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\text{continua}} \underbrace{\cos(1/x)}_{\text{composición de funciones continuas}} \Longrightarrow \text{continua } \forall x \neq 0$$

$\boxed{x = 0}$ $\quad f(0) = 0 \qquad ¿\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0?$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos(1/x) = 0$$

para $x \neq 0$
$f(x) = x^2\cos(1/x)$

- $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\cos(1/x)$ acotada
  $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1 \quad \forall x \neq 0$

$\Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$

En resumen: $\underline{f \text{ es continua en } \mathbb{R}}$

DERIVABILIDAD:

$\boxed{x \neq 0}$ $\quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\text{derivable}} \underbrace{\cos(1/x)}_{\text{composición de funciones derivables}} \Longrightarrow \text{derivable } \forall x \neq 0$$

En concreto, si $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\cos(1/x) + x^2 \operatorname{sen}(1/x) \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= 2x\cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)$$

$\boxed{x = 0}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{x}$$

$f(0) = 0$; $f(x) = x^2\cos(1/x)$ si $x \neq 0$

$$= \lim_{x\to 0} x \cdot \cos(1/x) = 0$$

- $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\cos(1/x)$ acotado

En resumen, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y se cumple que:

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) + 2x\cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la continuidad de f':

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) + 2x\cos(1/x) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{x \neq 0}$ Si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f(x) = \underbrace{\operatorname{sen}(1/x)}_{\substack{\text{composición} \\ \text{de funciones continuas}}} + \underbrace{2x}_{\text{continua}} \underbrace{\cos(1/x)}_{\substack{\text{composición} \\ \text{de funciones continuas}}}$$

$\Rightarrow f$ es continua $\forall x \neq 0$

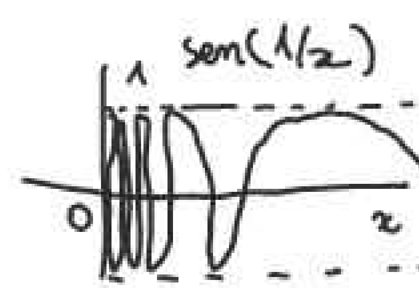
$\boxed{x = 0}$ $f(0) = 0$ ¿ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}(1/x) + 2x\cos(1/x)\right) =$$

$x \neq 0$: $f(x) = \operatorname{sen}(1/x) + 2x\cos(1/x)$

$$= \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\cos(1/x)}_{\text{acotado}} = 0$$



$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x) \ \nexists$$

- Si $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}; \ldots \Rightarrow x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi} \ldots \downarrow 0$

  $\Rightarrow \operatorname{sen}(1/x) = 1$

- Si $\frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}, \ldots \Rightarrow x = \frac{2}{3\pi}; \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots \downarrow 0$

  $\Rightarrow \operatorname{sen}(1/x) = -1$

En resumen $$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es una función : continua en $\mathbb{R}$
derivable en $\mathbb{R}$
con derivada discontinua en $x=0$

<u>Obs:</u> Al conjunto de funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$ cuya derivada es también continua en $\mathbb{R}$ se le suele denotar mediante $C^1(\mathbb{R})$.

Las funciones $C^1(\mathbb{R})$ son funciones más regulares que las funciones que son únicamente derivables en $\mathbb{R}$. En particular

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f \notin C^1(\mathbb{R})$$

a pesar de que $\exists f'(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.