Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Grado y Doble Grado en Ingeniería Informática

Examen Final Ordinario

18 de enero 2016

Nombre		Grupo	

Problema 1 (1.0 puntos) .
Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial y escribir dicha solución de forma explícita:

$$\begin{cases} (1-\ln x)y' = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}, \quad 0 < x < e.$$

Solución:
La ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta, ya que si reordenamos los términos de la ecuación y la dejamos expresada en la forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, se obtiene:

$$(1 + \ln x + \frac{y}{x}) + (\ln x - 1)y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Dado que la ecuación es exacta, sabemos que su solución viene dada por $F(x, y(x)) = C$, donde C es una constante y F es una función que satisface $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Se puede obtener F del siguiente modo:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (1 + \ln x + \frac{y}{x})dx = x + x\ln x - x + y\ln x + h(y) = x\ln x + y\ln x + h(y)$$

donde $h = h(y)$ es una función a determinar. Por otro lado, dado que, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$, se obtiene $\ln x - 1 = \ln x + h'(y) \Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$, tomando nula la constante de integración. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$F(x, y(x)) = x\ln x + y(x)\ln x - y(x) = C$$

Imponiendo el valor inicial $y(1) = 1$ obtenemos la constante $C = -1$.

La solución del problema de valor inicial dada en forma explícita es: $\boxed{y(x) = \dfrac{x\ln x + 1}{1 - \ln x}\,,\ \text{con } 0 < x < e}$

Problema 1 (1.0 puntos) .
Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial y escribir dicha solución de forma explícita:

$$\begin{cases} (1-\ln x)y' = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x}, & 0 < x < e. \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(-1-\ln(x)-\frac{y}{x}\right)}_{M(x,y)} + \underbrace{(1-\ln(x))}_{N(x)}\, y' = 0 \quad \text{EDO } 1^{\underline{er}} \text{ orden exacta}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 - 0 - \frac{1}{x} = -1/x \qquad \frac{\partial N(x)}{\partial x} = 0 - \frac{1}{x} = -1/x$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x)}{\partial x} \quad \text{Exacta}$$

Al ser exacta $\exists F(x,y)$ que cumple:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \,;\ 0 - \cancel{y}\cancel{\frac{1}{x}} + h'(x) = -1-\ln(x) - \cancel{\frac{y}{x}} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x) \,;\ \displaystyle\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\, dy = \int 1-\ln(x)\, dy \end{cases}$$

$$F(x,y) = y - y\ln(x) + h(x)$$

$$h'(x) = -1-\ln(x)$$

$$h(x) = \int -1-\ln(x)\,dx = -x - \int \ln(x)\,dx = \cancel{-x} - \ln(x)x + \cancel{x} = -\ln(x)x$$

$$\int \ln(x)\,dx = \ln(x)x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \ln(x)x - x + k$$

$$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = 1dx \quad v = x$$

Sol. General: $F(x,y) = k \,;\ y - y\ln(x) - \ln(x)x = k \ / \ k \in \mathbb{R}$ cte

$$y(1) = 1 \,;\ 1 - 1\ln(1) - \ln(1)\cdot 1 = k \,;\ 1 - 0 - 0 = k \,;\ k = 1$$

$$\boxed{\text{Sol. PVI: } \ y - y\ln(x) - \ln(x)x = 1}$$

Problema 2 (1.0 puntos) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

hallar $\overrightarrow{X}(t)$ y obtener el siguiente límite: $\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}(t)$

Solución:

La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3\,, \lambda_2 = 2$.

Vectores propios asociados son: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dado que los autovalores son reales y distintos, su solución general se puede escribir en la forma:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

donde c_1, c_2 son constantes. Dado que $\lim_{t\to-\infty} e^{3t} = \lim_{t\to-\infty} e^{2t} = 0$ y que c_1, c_2, ξ_1, ξ_2, no dependen de t, se concluye que

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 3 (1.0 puntos) .

Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) aplicando el cambio de variable $x = e^z \Longleftrightarrow z = \ln(x)$

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + \frac{5}{2}y = 0\,, \quad x > 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación diferencial del PVI es del tipo Cauchy-Euler, por tanto para hallar su solución conviene hacer el cambio de variable propuesto en el enunciado.

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dz}$; $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right)$ Sustituyendo estos términos en el PVI se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que es de coeficientes contantes:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \frac{5}{2}y = 0$$

Su ecuación característica es: $r^2 + r + 5/2 = 0$, cuyas soluciones son complejas conjugadas $r_1 = -1/2 + i3/2\,; r_2 = -1/2 - i3/2$. Por tanto la solución general en términos de la variable z es:

$$y(z) = e^{-\frac{z}{2}} \left[a\cos(\frac{3}{2}z) + b\sin(\frac{3}{2}z)\right]$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la solución general en términos de la variable x:

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[a\cos(\frac{3}{2}\ln(x)) + b\sin(\frac{3}{2}\ln(x))\right]$$

Problema 2 (1.0 puntos) .

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

hallar $\overrightarrow{X}(t)$ y obtener el siguiente límite: $\lim_{t \to -\infty} \overrightarrow{X}(t)$

Solución de la forma $\vec{\omega} = e^{\lambda t}\vec{V}_\lambda$ siendo λ el autovalor y $\vec{V}$ el autovector.

Autovalores: $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \, ; \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

\# Raíces reales distintas.

Autovectores: $(A - \lambda I)\vec{V} = \vec{0}$

Para $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $-x + y = 0$; $x = y$.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_1 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $-x + 2y = 0$; $x = 2y$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Sol. General: } \vec{X}(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} \vec{X}(t) = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales del PVI se obtienen los valores de las constantes: $a = -1\,; b = 1/3$ Por tanto, la solución del PVI es:

$$\boxed{y(x) = x^{-1/2}\left[\frac{1}{3}\sin(3/2\ln(x)) - \cos(3/2\ln(x))\right]}$$

Problema 4 (1.0 puntos) .
Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Solución:
Sea $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$ la transformada de Laplace (TL) de la incógnita. Aplicando la TL a la ecuación, se tiene:

$$(s^2 + s - 2)F(s) - s = \frac{1}{s+1}\,,$$

por tanto,

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s^2 + s - 2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2},$$

donde se ha tenido en cuenta que $s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$. Calculando los coeficientes, se obtiene $A = -1/2\,, B = 1/2\,,$ y $C = 1$. Por tanto:

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s+2}.$$

Finalmente, tomando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, obtenemos la solución de problema

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}\left[-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) + e^{-2t}}$$

Problema 5 (1.0 puntos) .
Consideremos el siguiente modelo de ecuación de ondas:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,; \;\; t > 0\,, \;\; 0 < x < \pi \\
\text{Condiciones de Contorno} &: \quad u(0,t) = 0\,, \;\; u(\pi,t) = 0\,; \;\; t > 0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \quad (\mathbf{i})\; u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,, \quad (\mathbf{ii})\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \;\; 0 \le x \le \pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables y la condición (**ii**), la solución formal del modelo puede escribirse como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/4, \pi/4)$

Nota: En caso necesario, podría ser útil el siguiente resultado:

Problema 4 (1.0 puntos) .
Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$

Por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$\underline{s^2 F(s)} - s\,y(0) - y'(0) + \underline{s\,F(s)} - y(0) - \underline{2\,F(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)\,(s^2 + s - 2) - s \cancel{+1} \cancel{-1} = \frac{1}{s+1};$$

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s^2+s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$s^2 + s + 1 = A(s+1)(s+2) + B(s-1)(s+1) + C(s-1)(s+2)$$

$$s = 1 \Rightarrow 1+1+1 = A(2)(3); \quad 3 = 6A; \quad A = 1/2$$

$$s = -1 \Rightarrow 1 \cancel{-1} \cancel{+1} = C(-2)(1); \quad 1 = -2C; \quad C = -1/2$$

$$s = -2 \Rightarrow 4-2+1 = B(-3)(-1); \quad 3 = 3B; \quad B = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

- Dados $L > 0$ y $m\,,n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \end{cases}$

Solución:
Tomando $t = 0$ en la solución formal se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de los sumandos, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,,$$

implica que:

$$A_1 = 0\,, A_2 = 5\,, A_3 = 0\,, A_4 = 0\,, A_5 = -2\,, A_n = 0 \quad \forall\ n > 5\,.$$

Otra alternativa para calcular los coeficientes A_n consiste en fijar $m \in \mathbb{N}$ y utilizar la nota del enunciado en la siguiente igualdad:

$$5\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\pi} \sin(5x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

Recopilando los valores de los coeficientes se obtiene la solución del problema de ondas, esto es,

$$u(x,t) = 5\cos(2t)\sin(2x) - 2\cos(5t)\sin(5x)\,,$$

por lo que

$$\boxed{u(\pi/4, \pi/4) = 5\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) - 2\cos(5\pi/4)\sin(5\pi/4) = -1}$$

Problema 6 (1.0 puntos) .
Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + y \;=\; 2\,t^2 \\ y(0) \;=\; 5\,. \end{cases}$$

(i) Comprobar que $y(t) \;=\; e^{-t} + 2\,t^2 - 4\,t + 4$ es la solución exacta del PVI.

(ii) Usar el siguiente método de Runge–Kutta

$$Y_{n+1} \;=\; Y_n + \frac{1}{2}\,(\,K_1 \,+\, K_2\,)\,, \quad \text{con} \quad K_1 \;=\; h\,f(t_n, Y_n)\,,\;\; K_2 \;=\; h\,f(t_{n+1}, Y_n + K_1)\,,$$

y con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.2)$ con paso $h = h_1 = 0.1$.

(iii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con paso $h = h_2 = 0.01$, estimar el orden del método numérico descrito en el apartado (ii).

Problema 6 (1.0 puntos) .
Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + y = 2t^2 \\ y(0) = 5 \,. \end{cases}$$

(i) Comprobar que $y(t) = e^{-t} + 2t^2 - 4t + 4$ es la solución exacta del PVI.

(ii) Usar el siguiente método de Runge–Kutta

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad \text{con} \quad K_1 = h\,f(t_n, Y_n), \;\; K_2 = h\,f(t_{n+1}, Y_n + K_1),$$

y con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.2)$ con paso $h = h_1 = 0.1$.

(iii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con paso $h = h_2 = 0.01$, estimar el orden del método numérico descrito en el apartado (ii).

i) $\mu(x) = e^{\int 1 dt} = e^t$

$y e^t = \int 2 e^t t^2 dt = 2 \int e^t t^2 dt = t^2 e^t - \int e^t 2t dt \quad 2\left(t^2 e^t - 2\int t e^t dt\right) =$

$u = t^2 \quad du = 2t$
$dv = e^t \quad v = e^t$

$\int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + k$

$u = t \quad du = 1$
$dv = e^t \quad v = e^t$

$e^t y = 2t^2 e^t - 4t e^t + 4e^t + k$

$y(x) = 2t^2 - 4t + 4 + e^{-t} k$

$y(0) = 5 = 0 - 0 + 4 + k \;; \quad k = 1$

$$\boxed{y(x) = 2t^2 - 4t + 4 + e^{-t}}$$

Solución:

(i) Resolviendo la ecuación diferencial *lineal* dada (mediante el factor integrante $\mu(t) = e^{\,t}$) junto con la condición inicial $y(0) = 5$, se obtiene la solución propuesta en el enunciado. Por otro lado, la validez de dicha solución se puede comprobar sustituyendo sus expresiones en la ecuación diferencial y en la condición inicial del PVI.

(ii) Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma $y' = f(t,y) = 2\,t^2 - y$. Entonces, aplicando la fórmula del método numérico, con $h = h_1 = 0.1$, para $n = 0$ y $n = 1$, se obtienen $Y_1 = 4.52600$ e $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 4.10093}$, respectivamente. Concretamente, el valor recuadrado es la aproximación de $y(0.2)$ que nos piden.

(iii) Usando la solución exacta escrita en (i), calculamos $y(0.2) = 4.09873\,$. Por otro lado, se tiene que $E_{t=0.2}^{h_1} = \left| Y_2^{h_1} - y(0.2) \right| = 0.0022$ y que $E_{t=0.2}^{h_2} = \left| Y_{20}^{h_2} - y(0.2) \right| = 0.00002$.
Dado que $h_2 = h_1/10$, se tiene que

$$E_{t=0.2}^{h_2} \approx C\,h_2^p = C\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E_{t=0.2}^{h_1}}{10^p}\,,$$

donde p es el orden del método (C es una constante). De esta expresión se obtiene $p \approx 2.04$. Esto nos permite concluir que el orden del método numérico del apartado (ii) es $\boxed{p = 2}$.