Tema 8

Valores y vectores propios

8.1. Introducción

En este capítulo continuamos con el estudio de matrices cuadradas y las transformaciones lineales que representan. Los principales conceptos que abordaremos, valores y vectores propios, poseen muchas aplicaciones prácticas y desempeñan un papel fundamental en muchos campos de las matemáticas.

Una transformación $x \mapsto A\,x$, con A cuadrada, puede transformar los vectores x de muy diversas maneras, pero para cada matriz existen algunos vectores "especiales" en los que la "acción" de la transformación es particularmente simple.

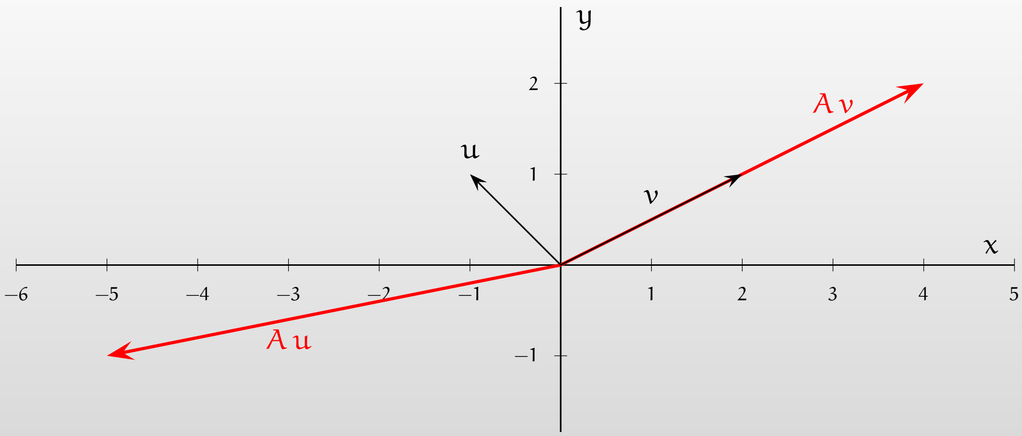
Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores $u = (-1, 1)^t$ y $v = (2, 1)^t$. Sus imágenes son $T(u) = A\,u = (-5, -1)^t$ y

$T(v) = A\,v = (4,2)^t = 2v$; es decir, a diferencia con u, A dilata el vector v un factor 2.



Este ejemplo ilustra el concepto de *vector propio*.

Diremos que v es un **vector propio** (o *autovector*) de la matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si es un $\boxed{\text{vector no nulo}}$ tal que

$$A\,v = \lambda\,v\,, \quad \text{para algún escalar } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dicho escalar se denomina **valor propio** (o *autovalor*) de A.

El conjunto de valores propios de una matriz A recibe el nombre de **espectro de** A y se representa por $\sigma(A)$.

En otros términos, los valores propios de la matriz A son los escalares para los que existe una solución no trivial v de $A\,v = \lambda v$ y nos referiremos a v como el *vector propio correspondiente al valor propio* λ. Obsérvese que v proporciona las "direcciones" en las que la acción de la matriz produce un "estiramiento puro" y que nos estamos restringiendo al caso en el que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es fácil VERIFICAR si un vector dado es o no un vector propio de A: basta con calcular $A\,v$ y comprobar si es un múltiplo de v. En cambio, para CALCULAR todos los posibles vectores propios de una matriz dada A, tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$A\,v = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A\,v = \lambda\, I_n\, v \quad \Rightarrow \quad A\,v - \lambda\, I_n\, v = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(A - \lambda\, I_n)\, v = 0.}$$

Así, λ es un valor propio de A si y sólo si el sistema homogéneo $(A - \lambda\, I_n)\, v = 0$ tiene una solución no trivial. El conjunto de todas las soluciones de este sistema es simplemente el espacio nulo de la matriz $A - \lambda\, I_n$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y se denomina **espacio propio** (o *autoespacio*) de A asociado a λ. Por tanto, el espacio propio está formado por el vector cero y el conjunto de todos los vectores propios correspondientes a λ.

Ejemplo

Consideremos de nuevo la matriz

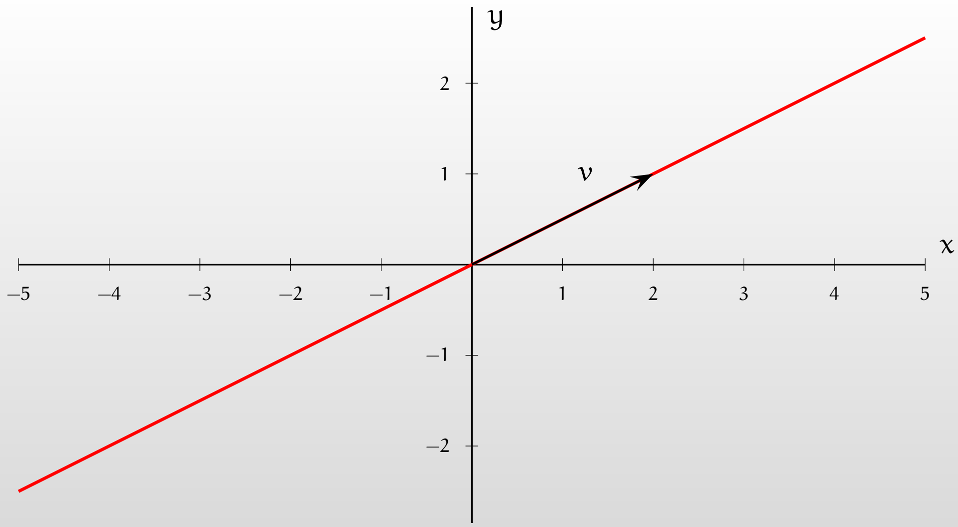
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya sabemos que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio de A; el correspondiente espacio propio es

$$N(A - 2\,I_2) = \left\{(v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon v_1 - 2v_2 = 0\right\} = \left\{(2v_2, v_2)^t, v_2 \in \mathbb{R}\right\} = Gen\left((2,1)^t\right).$$

Es decir, obviamente, $\boxed{\text{cualquier múltiplo no nulo de } v = (2,1)^t \text{ es vector propio de } A}$ asociado al mismo valor propio $\lambda_1 = 2$.

También sabemos que $(-1,1)^t$ (o cualquier múltiplo suyo) no es un vector propio de A.



Ejemplo

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que $\lambda_1 = 2$ es también un valor propio de A y encontremos una base para el correspondiente espacio propio. Nótese que, a diferencia con el ejemplo anterior, en este caso NO conocemos ningún vector propio. Entonces, para comprobar que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio, tendremos que comprobar que efectivamente $(A - \lambda_1 I_3)v = 0$. Es decir, el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

debe tener solución no trivial, lo cual implica que $\operatorname{rg}(A - 2\, I_3) < 3$, como obviamente es el caso. Por tanto, concluimos que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio.

Por otra parte, toda solución del sistema cumple $2v_1 - v_2 + 6v_3 = 0$, es decir:

$$
\begin{aligned}
N(A-2\,I_3) &= \left\{ v = \left(\frac{1}{2}v_2 - 3v_3, v_2, v_3\right)^t \in \mathbb{R}^3 \colon v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ v = v_2 \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)^t + v_3\,(-3,0,1)^t \in \mathbb{R}^3 \colon v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Gen}\left(\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)^t, (-3,0,1)^t \right).
\end{aligned}
$$

Tras estos ejemplos es inmediato formularse la pregunta de cuántos valores propios tiene una matriz dada. En la siguiente sección responderemos a esta cuestión y aprenderemos a calcularlos todos.

8.2. La ecuación característica

Acabamos de ver que los valores propios son aquellos escalares que hacen que el sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)v = 0$ tenga solución no trivial. Para ello, la matriz $A - \lambda I_n$ debe ser singular y consecuentemente, su determinante ha de ser 0; esto conduce a la siguiente definición:

Llamaremos **ecuación característica** de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a la ecuación:

$$\boxed{\det(A - \lambda\, I_n) = 0.}$$

Obsérvese que $\det(A - \lambda\, I_n)$ es un polinomio (en λ) de grado n, cuyo coeficiente del término en λ^n es $(-1)^n$. En cambio, el polinomio $\det(\lambda\, I_n - A)$ tiene el coeficiente del término en λ^n igual a 1.

Llamamos **polinomio característico** de A al polinomio $c_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

Obviamente, las soluciones de la ecuación característica (o las raíces del polinomio característico) son los valores propios de A y su multiplicidad recibe el nombre de **multiplicidad algebraica del valor propio**.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Vamos a encontrar los valores propios y los correspondientes espacios propios.

En primer lugar, calculamos la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda\, I_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0\,,$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 0, \text{ con multiplicidad algebraica 1, y}$$

$$\lambda_2 = 1, \text{ con multiplicidad algebraica 2.}$$

El espacio propio correspondiente a $\lambda_1 = 0$ coincide con el espacio nulo de A, por lo que si calculamos la forma escalonada de A resulta

$$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

y el espacio propio será:

$$N(A) = \left\{ x = x_3(1, 1, 1)^t \in \mathbb{R} \colon x_3 \in \mathbb{R} \right\} ,$$

que es un espacio vectorial de dimensión 1. Finalmente, para obtener el espacio propio correspondiente a $\lambda_2 = 1$ calculamos el espacio nulo de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

que es

$$\left\{ x = x_2(3,1,0)^t + x_3(-1,0,1)^t \in \mathbb{R}^3 \colon x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

y tiene dimensión 2.

Obsérvese que los tres vectores propios encontrados en el ejemplo anterior son linealmente independientes y por ello forman una base de $\mathbb{R}^3$.

El siguiente resultado es fundamental:

Dada la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, su traza es igual a la suma de sus valores propios, $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ (incluyendo multiplicidades algebraicas mayores que 1):

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.}$$

Ejemplo

Es inmediato comprobar que en el ejemplo anterior, la traza de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

coincide con la suma de sus valores propios: $0 + 1 + 1 = 2$.

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0\,.$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, todos con multiplicidad algebraica 1. Se observa que los valores propios de la matriz A vienen dados por los términos de la diagonal principal (por lo que obviamente la traza coincide con la suma de éstos). Es inmediato probar que este hecho es cierto para todas las matrices triangulares.

Ejemplo

Consideremos ahora la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sus valores propios son las raíces de la ecuación característica:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0\,.$$

Así los valores propios son $\lambda_1 = 3$, con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidad algebraica 2. Obsérvese que la traza de A coincide con la suma de los valores propios. Vamos a determinar los espacios propios.

Para $\boxed{\lambda = 3}$ tenemos:

$$A - 3\,I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{\equiv} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto:

$$N(A - 3\,I_3) = \left\{ v = (0, 0, v_3)^t \in \mathbb{R}^3 \colon v_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

es decir, de dimensión 1 y con base $B_{\lambda=3} = ((0,0,1)^t)$.

Para $\boxed{\lambda = 1}$ calculamos el espacio nulo de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss}}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es

$$\left\{ v = (v_1, v_1, 0)^t \in \mathbb{R}^3 \colon v_1 \in \mathbb{R} \right\},$$

que tiene una base dada por $B_{\lambda=1} = ((1,1,0)^t)$, también de dimensión 1.
En resumen, ambos espacios propios son de dimensión 1 y por tanto sólo podemos encontrar dos vectores propios linealmente independientes, por lo que $\mathbb{R}^3$ no tendrá una base formada por vectores propios linealmente independientes de la matriz A.

Además tenemos el siguiente resultado, que relaciona los valores propios con otra característica de las matrices cuadradas: su determinante.

Dada una matriz cuadrada A, de dimensión $n \times n$, se tiene que el producto de sus valores propios coincide con su determinante (incluyendo multiplicidades algebraicas mayores que 1):

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.}$$

Ejemplo

Consideremos de nuevo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Es trivial comprobar que su determinante es 6, que coincide con el producto de sus valores propios.

Los resultados que enunciamos a continuación (sin demostración) son fundamentales para comprender en profundidad las secciones siguientes.

Dadas las matrices semejantes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene que:

1. A y B tienen los mismos valores propios. En consecuencia:
   - $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
   - $\det(A) = \det(B)$.
2. A y B tienen el mismo polinomio característico.
3. A^k y B^k son semejantes.

8.3. El problema de la diagonalización

Hemos visto que existen casos en los que el número de vectores propios linealmente independientes no coincide con la multiplicidad algebraica del correspondiente valor propio. Nos referiremos al número de vectores propios linealmente independientes asociados a un valor propio como la **multiplicidad geométrica** de tal valor propio. Si la multiplicidad geométrica de algún valor propio es menor que su multiplicidad algebraica, diremos que la matriz es **defectiva**.

Ejemplo

Consideremos de nuevo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que un valor propio es $\lambda_1 = 2$, con vector propio $v_1 = (2,1)^t$, y fácilmente se obtiene que $\lambda_2 = 1$ es el otro valor propio, con vector propio $v_2 = (1,1)^t$. También podemos probar de manera sencilla que $B = ((2,1)^t, (1,1)^t)$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces, cada vector $u \in \mathbb{R}^2$ puede ser escrito como combinación lineal de v_1 y v_2 de la forma

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \underbrace{(v_1, v_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = u}_{\text{sistema lineal}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

y

$$Au = A\,(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 A\, v_1 + c_2 A\, v_2 = 2c_1 v_1 + c_2 v_2 = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que

$$A\,(v_1, v_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente

$$A\,(v_1, v_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

$$\left[A\,(v_1, v_2) - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto, debe ser

$$A\,(v_1, v_2) - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\,(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si escribimos $P = (v_1, v_2)$, puesto que v_1 y v_2 forman una base, las columnas de P son linealmente independientes, P tiene rango 2 y es invertible. Así, podemos escribir

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}\,A\,P\,.$$

Obsérvese que los elementos de la diagonal principal de D son los valores propios de A y que las columnas de P son los correspondientes vectores propios asociados.

El ejemplo anterior ilustra el siguiente teorema:

Teorema

Si A es una matriz $n \times n$, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, no necesariamente distintos, y con vectores propios correspondientes $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes, entonces

$$P^{-1}\,A\,P = D\,,$$

donde

$$P = (v_1, \ldots, v_n)\,, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Este resultado motiva la siguiente definición:

Una matriz A de dimensión $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}\,A\,P$ es una matriz diagonal.

En otras palabras, si A es diagonalizable es semejante a una matriz diagonal.

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable, entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene valores propios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y vectores propios correspondientes $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, entonces $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

Además, tenemos el siguiente resultado:

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable de la forma $A = P\,D\,P^{-1}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz semejante a A, entonces B es diagonalizable de la forma $B = Q\,D\,Q^{-1}$.

Demostración. Si B es semejante a A, existe una matriz invertible R tal que $B = R\,A\,R^{-1}$;

además, si $A = P\,D\,P^{-1}$, tendremos:

$$B = R\,P\,D\,P^{-1}\,R^{-1} = \underbrace{(R\,P)}_{Q}\,D\,(R\,P)^{-1} = Q\,D\,Q^{-1}\,.$$

□

Así, aunque dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios, en general, sus vectores propios no son los mismos.

8.3.1. El polinomio característico

Sea A una matriz $n \times n$. Como sabemos, el polinomio característico de A es el polinomio de grado n dado por

$$c_A(x) = \det(x\,I_n - A)$$

y las raíces del polinomio característico de A son los valores propios de A. (Nótese que hemos cambiado la variable de λ a x.) Además de permitir el cálculo de valores propios, el polinomio característico tiene otras aplicaciones. El siguiente teorema indica una de éstas.

Teorema de Caley-Hamilton

Dada una matriz A, de dimensión $n \times n$ y polinomio característico $c_A(x)$, se tiene que

$$\boxed{c_A(A) = 0_{n\times n}.}$$

Ilustremos este resultado con el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$c_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc\,.$$

Si “evaluamos” c_A en A –introduciendo convenientemente la matriz identidad para el término independiente– resulta:

$$\begin{aligned}
c_A(A) &= A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,I_2 \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}\,,
\end{aligned}$$

tal y como indica el teorema de Caley-Hamilton.

También se puede usar el teorema para calcular A^2, pues sabemos que

$$A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,I_2 = 0$$

y por tanto

$$A^2 = (a+d)\,A - (ad-bc)\,I_2 = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, podemos usar el teorema de Caley-Hamilton para calcular la inversa de A, ya que si multiplicamos ambos miembros de $A^2-(a+d)\,A+(ad-bc)\,I_2 =$

$0_{2\times 2}$ por A^{-1}, resulta:

$$A^2\,A^{-1} - (a+d)\,A\,A^{-1} + (ad-bc)\,A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}[(a+d)\,I - A] = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

como es bien sabido.

8.4. Valores y vectores propios de aplicaciones lineales

Hasta ahora nos hemos centrado en el estudio de los valores y vectores propios de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. En esta sección vamos a relacionar los resultados que hemos obtenido con las aplicaciones lineales.

Como las matrices semejantes comparten, entre otras características, el polinomio característico y los valores propios, podemos trasladar las definiciones y los resultados anteriores a las transformaciones lineales.

Dada una trasformación lineal T del espacio vectorial V en sí mismo, diremos que un vector no nulo v de V es un **vector propio** de T, con **valor propio** λ si $T(v) = \lambda\, v$. El conjunto de los vectores propios de T asociados a λ, junto con el vector cero, forman el **espacio propio** de T asociado a λ.

Obviamente, los valores propios de la transformación T son los de cualquier matriz cuadrada A_T que la represente. Del mismo modo:

La **traza** $\mathrm{tr}(T)$ **de una transformación lineal** $T : V \to V$ es la traza de cualquier matriz A_T que la represente.

El **determinante** $\det(T)$ **de una transformación lineal** $T : V \to V$ es el determinante de cualquier matriz A_T que la represente.

El **polinomio característico** $c_T(x)$ **de una transformación lineal** T es el polinomio característico de cualquier matriz A_T que la represente.

Una transformación lineal T sobre el espacio vectorial V se dice **diagonalizable** si existe una base de V relativa a la cual la matriz que representa a T es una matriz diagonal.

Obsérvese que aunque dos matrices semejantes, que representan la misma transformación T, en general tienen vectores propios diferentes, los vectores propios de T se obtienen de forma única a partir de cualquiera de sus representaciones. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p(x)) = T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_2 + 2a_1 x + (a_0 + a_1)x^2 \,.$$

Si fijamos, por ejemplo, la base $B = (1, x, x^2)$, la matriz que representa dicha transformación respecto a la base B es:

$$A_{T,B} = \big([T(1)]_B \,,\ [T(x)]_B \,,\ [T(x^2)]_B\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Los valores propios de $A_{T,B}$ (y por tanto los de T) se calculan mediante la ecuación característica:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0\,.$$

Así, el espectro de T será

$$\sigma(T) = \{-1, 1, 2\}$$

y su determinante viene dado por

$$det(T) = -2\,.$$

Calculemos los vectores propios de $A_{T,B}$.

Para $\lambda = -1$:

$$N(A_{T,B} - \lambda\, I) = N\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = Gen\left((-1, 0, 1)^t\right)\ .$$

Para $\lambda = 1$:

$$N(A_{T,B} - \lambda\, I) = N\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = Gen\left((1, 0, 1)^t\right)\ .$$

Para $\lambda = 2$:

$$N(A_{T,B} - \lambda\, I) = N\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right] = Gen\left((1, 3, 2)^t\right)\ .$$

Cada uno de estos vectores propios de la matriz $A_{T,B}$ corresponde a un vector propio de T. Las coordenadas $(-1, 0, 1)^t$ en la base B hacen referencia al vector

$$p_1(x) = x^2 - 1; \quad \text{cuya imagen es} \quad T(p_1) = -(x^2 - 1)\,;$$

análogamente, para $(1,0,1)^t$ tenemos

$$p_2(x) = x^2 + 1; \quad \text{con} \quad T(p_2) = x^2 + 1$$

y para $(1,3,2)^t$ será:

$$p_3(x) = 2x^2 + 3x + 1; \quad \text{con} \quad T(p_3) = 4x^2 + 6x + 2 = 2(2x^2 + 3x + 1)\,.$$

Si consideramos una base distinta de $\mathbb{P}_2$, por ejemplo $B_1 = (1, 1+x, 1+x+x^2)$, la matriz que representa a T respecto a esta base será:

$$A_{T,B_1} = \left([T(1)]_{B_1}\,,\ [T(1+x)]_{B_1}\,,\ [T(1+x+x^2)]_{B_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

como es fácil comprobar. Esta matriz también tiene valores propios -1, 1 y 2. Si calculamos los vectores propios (de la matriz) asociados, resulta que:

$$\begin{aligned} N(A_{T,B_1} + I) &= \mathrm{Gen}\left((-1,-1,1)^t\right)\,, \\ N(A_{T,B_1} - I) &= \mathrm{Gen}\left((1,-1,1)^t\right)\,, \\ N(A_{T,B_1} - 2\,I) &= \mathrm{Gen}\left((-2,1,2)^t\right) \end{aligned}$$

y se observa que los espacios propios de A_{T,B_1} no coinciden con los de $A_{T,B}$. No obstante, sí representan los mismos vectores propios de T, ya que de las correspondientes coordenadas se obtiene

$$[p_1]_{B_1} = (-1,-1,1)^t\,, \quad \text{pues} \quad -1 - (1+x) + (1+x+x^2) = x^2 - 1 = p_1(x)$$

y también

$$[p_2]_{B_1} = (1,-1,1)^t\,, \qquad [p_3]_{B_1} = (-2,1,2)^t\,.$$

Obviamente T es diagonalizable, ya que $B' = (p_1, p_2, p_3)$ es una base de $\mathbb{P}_2$ y la matriz que representa a T con respecto a dicha base es

$$A_{T,B'} = ([T(p_1)]_{B'}, [T(p_2)]_{B'}, [T(p_3)]_{B'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, el siguiente resultado es fácil de entender:

Proposición

Una transformación lineal T sobre V es diagonalizable si y sólo si existe una base de V que consiste en vectores propios de T.

Así, diagonalizar una transformación lineal $T : V \to V$ consiste en encontrar una base B_d de V en la que la matriz asociada A_{T,B_d} sea diagonal. A_{T,B_d} será *semejante* a cualquier otra matriz A_{T,B_1} que represente a T. En efecto, si T es diagonalizable existe una base B_d de V formada por vectores propios de T.

Para cualquier otra base B_1, la matriz A_{T,B_1} puede escribirse como $A_{T,B_1} = P\,D\,P^{-1}$, donde las columnas de $P = T_{B_1 B_d}$ *representan* tales vectores propios en la base B_1. Así, $P = T_{B_1 B_d}$ es la matriz de cambio de base para pasar de la base B_1 a la base B_d y $D = A_{T,B_d}$ es la matriz de la transformación T cuando los vectores de V están expresados en términos de la base B_d, como se indica en el siguiente diagrama:

$$D = A_{T,B_d} = T^{-1}_{B_1 B_d}\, A_{T,B_1}\, T_{B_1 B_d}$$

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{B_1}} \arrow[r, "A_{T,B_1}"] & {[T(v)]_{B_1}} \arrow[d, "T_{B_d B_1}"'] \\
{[v]_{B_d}} \arrow[u, "T_{B_1 B_d} = P"'] \arrow[r, "D"'] & {[T(v)]_{B_d}}
\end{tikzcd}$$

Ejemplo

Sabemos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(que representa una transformación lineal S respecto a la base canónica B_0 de $\mathbb{R}^2$) puede ser diagonalizada de la forma:

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = T_{B_0 B_d} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = T_{B_d B_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde B_d es la base de $\mathbb{R}^2$ con respecto a la cual la matriz asociada a S es D.

Si consideramos, por ejemplo, el vector $u = (5, -3)^t$, la transformación lineal S lo transforma en $w = S(u)$, cuyas coordenadas son $w = (21, 5)^t$.

Por otra parte, sabemos que las columnas de P son vectores propios linealmente independientes de A y que forman una base B_d de $\mathbb{R}^2$. Si expresamos u y $S(u)$ en términos de tales vectores se obtiene:

$$[u]_{B_d} = (8, -11)^t\,, \quad [S(u)]_{B_d} = (16, -11)^t\,.$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} [u]_{B_d} &= T_{B_d B_0}\, u = P^{-1}\, u\,, \\ [S(u)]_{B_d} &= T_{B_d B_0}\, [S(u)]_{B_0} = P^{-1}\, [S(u)]_{B_0}\,, \\ [S(u)]_{B_d} &= D\, [u]_{B_d}\,. \end{aligned}$$

Teorema

Una transformación lineal T sobre V es diagonalizable si y sólo T se puede escribir de la forma

$$T = \lambda_1\, T_1 + \cdots + \lambda_n\, T_n$$

donde λ_i son los valores propios de T y las T_i son transformaciones que verifican $T_i \circ T_i = T_i$, $T_1 + \cdots + T_n = I$ (aplicación identidad) y $T_i \circ T_j = 0$ (aplicación nula) para todo $i \neq j$.