Soluciones # 4

Bases y dimensión

Problema 4.1 Basta ver que

$$(3,4,4)^t = 2(1,2,3)^t - (-1,0,2)^t \,.$$

Problema 4.2 El sistema

$$a(1,0,0)^t + b(0,1,0)^t + c(0,0,1)^t + d(1,2,3)^t = (0,0,0)^t$$

es compatible indeterminado ($a = -d, b = -2d, c = -3d$). El sistema

$$b(0,1,0)^t + c(0,0,1)^t + d(1,2,3)^t = (0,0,0)^t$$

tiene sólo la solución trivial $b = c = d = 0$.

Problema 4.3 Si resolvemos el sistema

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0 \,,$$

obtenemos un sistema compatible indeterminado: $p_1 - p_2 + p_3 = 0$. Luego $p_3 = -p_1 + p_2$.

Problema 4.4 Son linealmente dependientes ya que:

$$a(A + 2B - C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Problema 4.5

1. $B' = (v_1, v_2)$ es una base de W con $\dim(W) = 2$.

2. $p \notin W$ y $q \in W$. Además, $[q]_{B'} = (0, -1)^t$.

3. $[p]_{B''} = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)^t$ y $[q]_{B''} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)^t$.

Problema 4.6

1. Si $B = \{B_1 B_2\}$, entonces el sistema

$$aB_1 + cB_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   sólo tiene la solución trivial $a = c = 0$.

2. Es fácil ver que

$$A = 3B_1 - 5B_2 \,.$$

3. Obviamente $B' = (B_1, B_2)$ y $[A]_{B'} = (3, -5)^t$.

Problema 4.7

- $N(A) = \{(0, 0)^t\}$ con $\dim(N(A)) = 0$.

- $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Gen}\left((3, 2, -1)^t, (1, 0, -1)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A)) = 2$.

- $N(A^t) = \mathrm{Gen}\left((1, -1, 1)^t\right)$ con $\dim(N(A^t)) = 1$.

- $\mathcal{C}(A^t) = \mathrm{Gen}\left((3, 1)^t, (2, 0)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A^t)) = 2$.

Problema 4.8

1. $N(A) = \mathrm{Gen}\left((3,-1,0,-3,1)^t, (3,-2,1,0,0)^t\right)$ con $\dim(N(A)) = 2$.
2. $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Gen}\left((1,0,-1,0)^t, (2,1,3,1)^t, (1,1,1,0)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A)) = 3$.
3. $\mathcal{C}(A^t) = \mathrm{Gen}\left((1,2,1,1,2)^t, (0,1,2,1,4)^t, (0,1,2,0,1)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A^t)) = 3$.
4. $N(A^t) = \mathrm{Gen}\left((1,-2,1,-3)^t\right)$ con $\dim(N(A^t)) = 1$.

Problema 4.9

1. Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, entonces el sistema $ab_1 + bb_2 + cb_3 = (0,0,0)^t$ tiene sólo la solución trivial $a = b = c = 0$. Luego son linealmente independientes y $B' = (b_1, b_2, b_3)$ es una base. Como $\mathrm{card}(B') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, B' genera $\mathbb{R}^3$.
2. $[v]_{B'} = (-10, 1, 6)^t$.
3. $[w]_{B_0} = (15, 7, -1)^t$.
4. Las matrices buscadas son
$$T_{B_0B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{B'B_0} = T_{B_0B'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. $[v]_{B'} = T_{B_0B'}\,[w]_{B_0}$ y $[w]_{B_0} = T_{B'B_0}\,[v]_{B'}$.

Problema 4.10

1. $T_{B_0B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $T_{B_0B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $T_{B_1B_2} = T_{B_0B_1}^{-1}\, T_{B_0B_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $[p]_{B_0} = (0, -2, 0, 1)^t$; $[p]_{B_1} = T_{B_0B_1}^{-1}\, [p]_{B_0} = (-1, -1, 1, 1)^t$; $[p]_{B_2} = T_{B_0B_2}^{-1}\, [p]_{B_0} = (2, -2, -1, 1)^t$ y además se cumple que $[p]_{B_2} = T_{B_1B_2}^{-1}\, [p]_{B_1} = (2, -2, -1, 1)^t$.