examenes-2008-2013.pdf

Exámenes 2008-2013

1º Cálculo

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Politécnica Superior
UC3M - Universidad Carlos III de Madrid

Exámenes de Cálculo I desde 2008 hasta 2013

H. Pijeira
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

(Actualizado hasta 29 de agosto de 2013)

Índice

1. Primer control de evaluación parcial. Cálculo I.

1.1. Curso 2008–2009

1.1.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función $f(x) = \left|\ln(2-x^2)\right|$, hallar dominio de $f(x)$, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x+3}{\sqrt[3]{8x^6+x^4+2}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

Problema 3. Hallar dos números reales no negativos tales que su suma es 2 y el producto de sus cuadrados sea máximo.

1.1.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función $f(x) = \left|\sqrt{9-x^2} - \sqrt{5}\right|$ hallar dominio, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{12x^6-1}+\sqrt{9x^4+1}}{2+\sqrt{x}+6x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot 2x)^{\dfrac{1}{\ln x}}$.

Problema 3. Hallar dos números no negativos tales que el producto de sus cuadrados es 16 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

1.1.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función $f(x) = \left|\operatorname{arcsen}\left(x^2-1\right)\right|$ hallar dominio, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} (\sec(2x))^{\dfrac{1}{\ln(\sec(x))}}$.

Problema 3. Un recipiente de forma cilíndrica, que no posee tapa, debe contener **2** litros de agua. Calcular les dimensiones del radio **R** y la altura **h** para que la cantidad de material utilizado sea mínima.

1.1.4. Variante 4

Problema 1. Dada la función $f(x) = \left|\ln(2-x^2)\right|$, hallar dominio de $f(x)$, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x+3}{\sqrt[3]{8x^6+x^4+2}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

Problema 3. Hallar dos números no negativos tales que el producto de sus cuadrados es 16 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

1.1.5. Variante 5

Problema 1. Dada la función $f(x) = \left|\sqrt{9-x^2} - \sqrt{5}\right|$ hallar dominio, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{12x^6-1}+\sqrt{9x^4+1}}{2+\sqrt{x}+6x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot 2x)^{\dfrac{1}{\ln x}}$.

Problema 3. Hallar dos números reales no negativos tales que su suma es 2 y el producto de sus cuadrados sea máximo.

1.1.6. Variante 6

Problema 1. Dada la función $f(x) = |\ln(|x|-1)|$ hallar dominio, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4^{\frac{x}{2}} + 2^{2x} + 5}{3^x + 8^{\frac{x}{2}} + 4^x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\dfrac{1}{\csc x}}$.

Problema 3. Hallar las dimensiones del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados y área máxima que se puede inscribir en una porción de la parábola $y^2 = 4x$ limitada por la recta $x = 4$.

1.1.7. Variante 7

Problema 1. Dada la función $f(x) = \left|\sqrt{9 - x^2} - \sqrt{5}\right|$ hallar dominio, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + x + 3}{\sqrt[3]{8x^6 + x^4 + 2}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

Problema 3. Hallar las dimensiones del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados y área máxima que se puede inscribir en una porción de la parábola $y^2 = 4x$ limitada por la recta $x = 4$.

1.2. Curso 2009–2010

1.2.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} |x^3 + 1| & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ |x - 1| & x > 0. \end{cases}$$

Hallar dominio de la función, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (4x^2 - 1)\sec(\pi x) =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^4}}\right)^{\left[\dfrac{3x+1}{3-2x}\right]} =$

Problema 3. Hallar la mínima distancia del punto $(4;2)$ a la parábola $y^2=8x$.

Problema 4. Determinar cuantos ceros tiene el polinomio $P(x)=6x-x^3+8$ en $\mathbf{R}$. En el caso en que existan ceros, especificar para cada cero un intervalo cerrado y acotado que lo contenga.

1.2.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función

$$g(x)=\begin{cases} |x^2-1| & x\in[-2,2], \\ x+1 & x\in\mathbf{R}\setminus[-2,2]. \end{cases}$$

Hallar dominio de la función, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x-4x^2)\operatorname{csch}(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5^{x+2}+2^{x+5}}{3^x-5^{x+1}}\right)^{\left[\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{1+4x^4}}\right]} =$

Problema 3. Calcule el área máxima del rectángulo que tiene su base inferior sobre el eje X y sus dos vértices restantes en la curva $y=12-x^2$.

Problema 4. Determinar cuantos ceros tiene el polinomio $P(x)=x^3-6x-8$ en $\mathbf{R}$. En el caso en que existan ceros, especificar para cada cero un intervalo cerrado y acotado que lo contenga.

1.2.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} |x^2-1| & x>0, \\ 0 & x=0, \\ |x+1| & x<0. \end{cases}$$

Hallar dominio de la función, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - x - 2)\, \csc(\pi x) =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{2 + x^5 + 8x^6}}{2x - 3x^2 + 1}\right]^{\left(\dfrac{3\, e^{x+1} + 2^x}{2^{x+3} + e^{x+1}}\right)} =$

Problema 3. Hallar el punto de la curva $y^2 = 4x$ más próximo al punto $(2; 1)$.

Problema 4. Determinar cuantos ceros tiene el polinomio $P(x) = x^5 + \dfrac{5}{4}x^4 - 2$ en $\mathbf{R}$. En el caso en que existan ceros, especificar para cada cero un intervalo cerrado y acotado que lo contenga.

1.2.4. Variante 4

Problema 1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} |x-1| & x \in [0,2], \\ (x-1)^3 & x \in \mathbf{R} \setminus [0,2]. \end{cases}$$

Hallar dominio de la función, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 + 2x)\, \coth(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3 + 2x + 1}{\sqrt[3]{x^7 + 1} + 2\sqrt{x^6 + 1}}\right)^{\left[\dfrac{3\, \pi^x - 4^{x+1}}{3\, 4^x - \pi^{x+3}}\right]} =$

Problema 3. Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto $(3, 4)$ y determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

Problema 4. Determinar cuantos ceros tiene el polinomio $P(x) = x^5 + \dfrac{5}{4}x^4 + 1$ en $\mathbf{R}$. En el caso en que existan ceros, especificar para cada cero un intervalo cerrado y acotado que lo contenga.

1.3. Curso 2010–2011

1.3.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2, \\ |x^2 - 1| & -2 < x < 2, \\ 4x - 5 & x \geq 2. \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\log\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \log\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x) + x\operatorname{sen}(x)}{4 - (2\cos(x))^2} =$

Problema 3. Una ventana está compuesta por una parte rectangular y otra, en la parte superior, formada por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 4 metros ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que el área sea máxima?.

1.3.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi, \\ |\operatorname{sen}(x)| & -\pi < x < \pi, \\ \pi - x & x \geq \pi. \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \log\left(1 + \tan(x)\right)^{\frac{3}{x}} =$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$

Problema 3. Un envase metálico de base circular debe almacenar 32 cm^3 de atún. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de metal utilizada sea mínima?.

1.3.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x > 1, \\ x - [x] & -1 \le x < 1, \\ x + 1 & x < -1. \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\log(x-3)^2}{\arctan(x-4)} =$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x} \right)^{x(3x+6)} =$

Problema 3. Se dispone de una plancha metálica de 32 cm^2 para construir una lata de conservas de atún de base circular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lata para que la cantidad de atún envasar sea máxima?.

1.3.4. Variante 4

Problema 1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < -1, \\ \mathrm{Sgn}(x) & -1 \le x < 1, \\ x^3 - 3x^2 + 3x & x > 1. \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \left(1 + \cot^2(3x)\right) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log\left(\mathrm{senh}(2x) + \cosh(2x)\right) - \log(2)}{\mathrm{sen}(x)} =$

Problema 3. El interior de un recipiente con el fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse de plomo. Si el volumen del recipiente es de 32 litros ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de plomo utilizada sea mínima?.

1.4. Curso 2011–2012

1.4.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, -1], \\ [x+1], & x \in (-1, 1), \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{1-\cosh(x)}} =$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{\log\left(\sqrt{1+x}\right)} =$

Problema 3. Hallar las dimensiones de una caja rectangular abierta de 64 cm^3 y base cuadrada, para que resulte más económica. Tenga en cuenta que el costo del material utilizado en la base es de 25 céntimos por cm^2 y el de las superficies laterales de 50 céntimos por cm^2. ¿Cuál es el coste de la caja más económica en euros?.

1.4.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in (-\infty, -1], \\ \operatorname{sgn}(x) + 1, & x \in (-1, 1), \\ 2x, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\frac{1}{4x-\pi}} =$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log\left(\sqrt[3]{1+x}\right)}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)} =$

Problema. Hallar las dimensiones de una caja cilíndrica abierta de 64 cm^3, para que resulte más económica. Tenga en cuenta que el costo del material utilizado en la base es de 25 céntimos por cm^2 y el de las superficies laterales de 50 céntimos por cm^2. ¿Cuál es el coste de la caja más económica en euros?.

1.4.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x), & x \in (-\infty, -1), \\ |x| - x, & x \in (-1, 1), \\ (x-1)^3, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{senh}(x))^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{\log(x^2+1)} =$

Problema 3. Hallar las dimensiones de una caja en forma de prisma triangular regular (prisma cuya base está formada por un triángulo equilátero) abierto de 64 cm^3, para que resulte más económica. Tenga en cuenta que el costo del material utilizado en la base es de 20 céntimos por cm^2 y el de las superficies laterales de 10 céntimos por cm^2. ¿Cuál es el coste de la caja más económica en euros?.

1.5. Curso 2012–2013

1.5.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+10}, & x \in (-\infty, -2], \\[2ex] \dfrac{-x-6}{64}, & x \in (-2, 2), \\[2ex] \dfrac{1}{x-10} & x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{2^{2x} + 2^x} - \sqrt{2^{2x}+1} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + x - \operatorname{senh}(x)}{\arctan(x) - x + x^2} =$

Problema 3. Se tiene un triángulo rectángulo del que conocemos que la suma de la hipotenusa y uno de sus catetos es igual a 2. Hallar las longitudes de cada uno de los catetos para que el área del triángulo sea máxima.

1.5.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+10}, & x \in (-\infty, -2), \\ x-4, & x \in [-2, 2], \\ \sqrt[3]{x-10} & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^3 - 3x + 1}} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2(x) - 1}{\cosh(x) - 1} =$

Problema 3. A la entrada de un teatro se desea colocar un cartel con una lona rectangular que contenga 18 m^2 de texto e imágenes impresas. Los márgenes laterales debe ser de 2 metros cada uno y los márgenes superiores e inferiores de un metro cada uno. Hallar las dimensiones del cartel para que el gasto de lona sea mínimo.

1.5.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}, & x \in (-\infty, -2), \\ \sqrt[3]{x-1}, & x \in [-2, 2], \\ e^{x-2} & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^{2x}\cos(x)}{27^x + 2^x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\arctan(x) + x^2 - x} =$

Problema 3. Una pista de entrenamientos se compone de dos semicírculos adosados a los lados opuestos de un rectángulo. Si su perímetro es de 400 m, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

1.5.4. Variante 4

Problema 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x + 2 - \pi), & x \in (-\infty, -1], \\ \operatorname{arcsen}(x), & x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi x) & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh(x))^{\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}} =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{3^{2x} + 3} - \sqrt{3^{2x} + 3^x} =$

Problema 3. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

1.5.5. Variante 5

Problema 1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x \in (-\infty, -1], \\ \arccos(x), & x \in (-1, 1), \\ \pi^x - \pi, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{senh}(x)} =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\,|\cos(x)|}}{2x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} =$

Problema 3. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones $6cm \times 3cm$ un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.

1.5.6. Variante 6

Problema 1. Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} |x+\pi|, & x \in (-\infty,-1), \\ \arctan(x), & x \in (-1,1), \\ \frac{1}{4}(2x+\pi-2), & x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Hallar dominio de definición, dominio de continuidad y dominio de derivabilidad.

Problema 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh(x))^{\frac{1}{\arctan(x)}} =$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{2x}\ \operatorname{sen}^2(x)}{e^{2x}+3^x} =$

Problema 3. Dos postes de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros entre si. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En que punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?.

2. Segundo control de evaluación parcial. Cálculo I.

2.1. Curso 2008–2009

2.1.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

a) Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 4.

b) Calcular aproximadamente el valor de $\operatorname{sen}^2(0,1)$.

Problema 2. Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4}{5}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}\ln(n+1)}(x+1)^n.$$

2.1.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función $f(x) = \cos^2(x)$

a) Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 4.

b) Calcular aproximadamente el valor de $\cos^2(0,1)$.

Problema 2. Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}} (x-3)^n.$$

2.1.3. Variante 3

Problema 1. Calcular aproximadamente el valor de $e^{0,1}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 3. Haga una estimación del error cometido con dicha aproximación.

Problema 2. Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{7u_n - 10}, \\ u_0 = 3. \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)} (x-2)^n$$

2.1.4. Variante 4

Problema 1. Calcular aproximadamente el valor de ln(1,1) utilizando el polinomio de Taylor de grado 3. Haga una estimación del error cometido con dicha aproximación.

Problema 2. Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 6}{5}, \\ u_0 = 1. \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} (x-3)^n.$$

2.1.5. Variante 5

Problema 1. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

a) Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 4.

b) Calcular aproximadamente el valor de $\operatorname{sen}^2(0,1)$.

Problema 2. Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+6}{5}, \\ \\ u_0 = 1. \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)} (x-2)^n$$

2.2. Curso 2009–2010

2.2.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x}\right)$

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}2)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Determinar la divergencia, convergencia absoluta o convergencia condicional de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt[n]{\pi}-1\right)^{2n}.$$

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n.$$

2.2.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Determinar la divergencia, convergencia absoluta o convergencia condicional de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n^2}{(n+1)^2\, 3^{n+1}}.$$

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^5\, 5^n}(x-1)^n.$$

2.2.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función $f(x)=\log\left(\sqrt[3]{1+x}\right)$

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Determinar la divergencia, convergencia absoluta o convergencia condicional de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\log(n^n)}.$$

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^{n^3} (x-e)^n.$$

2.2.4. Variante 4

Problema 1. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}2)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Determinar la divergencia, convergencia absoluta o convergencia condicional de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \arctan(n^{-3}).$$

Problema 3. Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n}} (x-2)^n.$$

2.3. Curso 2010–2011

2.3.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función $f(x) = e^{2x} - 1 - 2x$.

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

1.4.- Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{arcsen}^2(x)} =$$

Problema 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n}}\, x^n.$$

1.1.- Hallar el radio de convergencia.

1.2.- Hallar el intervalo de convergencia.

1.3.- Analizar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo.

2.3.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función $f(x) = \cosh(x) - 1 + x^3$.

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}2)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

1.4.- Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\tan^2(x)} =$$

Problema 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n-1}}{(2n-1)!}\, (x-1)^n.$$

1.1.- Hallar el radio de convergencia.

1.2.- Hallar el intervalo de convergencia.

1.3.- Analizar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo.

2.3.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función $f(x) = \operatorname{senh}(x) - x - x^2$.

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}3)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

1.4.- Calcular
$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos^2(x)} =$

Problema 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} (x-e)^n.$$

1.1.- Hallar el radio de convergencia.

1.2.- Hallar el intervalo de convergencia.

1.3.- Analizar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo.

2.3.4. Variante 4

Problema 1. Dada la función $f(x) = \log(1+2x) - 2x$.

1.1.- Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 3 en potencias de x.

1.2.- Calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}5)$ utilizando el polinomio de Taylor.

1.3.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

1.4.- Calcular
$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\cos(x)-1} =$

Problema 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2} x^n.$$

1.1.- Hallar el radio de convergencia.

1.2.- Hallar el intervalo de convergencia.

1.3.- Analizar la convergencia de la serie en los extremos del intervalo.

2.4. Curso 2011–2012

2.4.1. Variante 1

Problema 1. Dada la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{12}{\sqrt{x}}}$.

1.1.- Calcula aproximadamente el valor de $f(10)$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 2.

1.2.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{e}{n+1} \right)^n \right)^n$.

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, (1+n) \, n^{-\frac{3}{2}}$.

2.4.2. Variante 2

Problema 1. Dada la función $g(x) = \sqrt{2\sqrt{x}}$.

1.1.- Calcula aproximadamente el valor de $g(5)$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 2.

1.2.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{n+1} \right)^{n^2} \left(\frac{n!}{\sqrt{2n}} \right)^n$.

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \, \frac{n+1}{\log(n^n)}$.

2.4.3. Variante 3

Problema 1. Dada la función $h(x) = \sqrt{2\sqrt[3]{x}}$.

1.1.- Calcula aproximadamente el valor de $h(9)$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 2.

1.2.- Estimar el error cometido con la aproximación anterior.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^n\, n!}{\sqrt{n}\,(n+1)^n}\right)^n.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right).$

2.5. Curso 2012–2013

2.5.1. Variante 1

Problema 1

Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[5]{u_n}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1.1.- Estudiar su monotonía.

1.2.- Analizar si es acotada o no.

1.3.- En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\right)^n.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(1+n)\,n^{-\frac{3}{2}}.$

2.5.2. Variante 2

Problema 1

Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[5]{u_n}, \\ u_0 = -2. \end{cases}$$

1.1.- Estudiar su monotonía.

1.2.- Analizar si es acotada o no.

1.3.- En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\right)^n.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(1+n)\,n^{-\frac{3}{2}}.$

2.5.3. Variante 3

Problema 1

Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[5]{u_n}, \\ u_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1.1.- Estudiar su monotonía.

1.2.- Analizar si es acotada o no.

1.3.- En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\right)^n.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(1+n)\,n^{-\frac{3}{2}}.$

2.5.4. Variante 4

Problema 1

Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+4}{5}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1.1.- Estudiar su monotonía.

1.2.- Analizar si es acotada o no.

1.3.- En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n}\right)^{n}.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,(1+n)\,n^{-\frac{3}{2}}.$

2.5.5. Variante 5

Problema 1

Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n^2+4}{5}, \\ \\ u_0 &= 2. \end{cases}$$

1.1.- Estudiar su monotonía.

1.2.- Analizar si es acotada o no.

1.3.- En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n}\right)^{n}.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,(1+n)\,n^{-\frac{3}{2}}.$

2.5.6. Variante 6

Problema 1

Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+4}{5}, \\ \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1.1.- Estudiar su monotonía.

1.2.- Analizar si es acotada o no.

1.3.- En caso de ser convergente hallar su límite.

Problema 2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas:

2.1.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n}\right)^{n}.$

2.2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(1+n)\,n^{-\frac{3}{2}}.$

3. Tercer control de evaluación parcial. Cálculo I.

3.1. Curso 2008–2009

3.1.1. Variante 1

Calcula las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx =$

2. $\displaystyle\int \cos(\log x)dx =$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx =$

3.1.2. Variante 2

Calcula las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx =$

2. $\displaystyle\int e^x \cos 2x \; dx =$

3. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}dx =$

3.1.3. Variante 3

Calcula las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}+1}dx =$

2. $\displaystyle\int x(\log x)^2 dx =$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2e^x+2}dx =$

3.1.4. Variante 4

Calcula las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int \sqrt{2+e^x}dx =$

2. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx =$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx =$

3.2. Curso 2009–2010

3.2.1. Variante 1

Problema 1. Calcula las siguientes primitivas:

1.1.- $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx =$

1.2.- $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^3+4x}\, dx =$

Problema 2. Hallar el área acotada comprendida entre las curvas $y=-x$ e $y=2-x^2$.

3.2.2. Variante 2

Problema 1. Calcula las siguientes primitivas:

1.1.- $\displaystyle\int \cosh\left(\sqrt{x}\right) dx =$

1.2.- $\displaystyle\int \frac{x+9}{x^3-6x^2+9x}\, dx =$

Problema 2. Hallar el área acotada comprendida entre las curvas $y=x^3$ e $y=x$.

3.2.3. Variante 3

Problema 1. Calcula las siguientes primitivas:

1.1.- $\displaystyle\int \operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right) dx =$

1.2.- $\displaystyle\int \frac{x+9}{x^3+9x}\, dx =$

Problema 2. Hallar el área acotada comprendida entre las curvas $y=7-x$ e $y=(x-1)^2$.

3.2.4. Variante 4

Problema 1. Calcula las siguientes primitivas:

1.1.- $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx =$

1.2.- $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^3-4x^2+4x}\, dx =$

Problema 2. Hallar el área acotada comprendida entre las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

3.3. Curso 2010–2011

3.3.1. Variante 1

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx =$

2.- $\displaystyle\int (x^2+1)\cosh(x)\, dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+1}\, dx =$

3.3.2. Variante 2

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

2.- $\displaystyle\int x\arctan(x^2)\, dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x-3}{x^3-3x^2}\, dx =$

3.3.3. Variante 3

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}\, dx =$

2.- $\displaystyle\int \log(1+x^2)\,dx =$

2.- $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx =$

3.3.4. Variante 4

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx =$

2.- $\displaystyle\int (x-x^2)e^x dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx =$

3.4. Curso 2011–2012

3.4.1. Variante 1

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{\arctan^2(3x)}{1+9x^2}\,dx =$

2.- $\displaystyle\int x \operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right)\,dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-7x+6}\,dx =$

3.4.2. Variante 2

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,e^{2\cosh(x)}\,dx =$

2.- $\displaystyle\int \arctan\left(\sqrt{x}\right)\,dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-10x+25)}\,dx =$

3.4.3. Variante 3

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)}\, dx =$

2.- $\displaystyle\int (x+1)\log\left(\sqrt{x}\right)\, dx =$

2.- $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3+4x}\, dx =$

3.5. Curso 2012–2013

3.5.1. Variante 1

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

2.- $\displaystyle\int (2x-3)\, e^{\frac{x}{2}}\, dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}\, dx =$

3.5.2. Variante 2

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^3}\, dx =$

2.- $\displaystyle\int (2-3x)\ \mathrm{sen}(2-3x)\, dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-4x+3}\, dx =$

3.5.3. Variante 3

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3}\,dx =$

2.- $\displaystyle\int (4x+10)\,\cos(2x+5)\,dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^2+6x+9}\,dx =$

3.5.4. Variante 4

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \frac{\cosh^3(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}dx =$

2.- $\displaystyle\int (2x^2+3)\,\log\left(x^3\right)\,dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^3+2x}\,dx =$

3.5.5. Variante 5

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3(x)\,\left(\cosh^2(x)+1\right)dx =$

2.- $\displaystyle\int 2\arctan(3x)\,dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+4x-5}\,dx =$

3.5.6. Variante 6

Calcula las siguientes primitivas:

1.- $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2(x)\,\cosh^3(x)dx =$

2.- $\displaystyle\int (3x-7)\,e^{-x}\,dx =$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^2-8x+16}\,dx =$

4. Exámenes finales ordinarios con solución. Cálculo I.

4.1. Curso 2008–2009

Problema 1 (2 puntos) Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}+1}{2}, \\ \\ u_0 = 0 \quad . \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Solución

a) La sucesión es monótona creciente. La prueba se realiza por inducción. Sea n=0, tenemos que $u_0 < u_1$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_{k-1} < u_k$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < u_{k+1}$, luego la propiedad es valida para $n = k+1$. Por tanto la sucesión es monótona creciente.

b) Hallemos los puntos l tales que $l = \dfrac{\sqrt{l}+1}{2}$. Esta expresión es equivalente a $4l^2 - 4l + 1 = 0$ o $(4l-1)(l-1) = 0$ lo cual nos da, $l = \dfrac{1}{4}, \quad l = 1$. Probemos que $u_n < \dfrac{1}{4}$. Aplicando el principio de inducción tenemos que $u_0 < \dfrac{1}{4}$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_{k-1} < \dfrac{1}{4}$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < \dfrac{1}{4}$, luego la propiedad es valida para $n = k+1$. Por tanto la sucesión es acotada superiormente.

c) De a) y b) tenemos que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, por el teorema de Wiertrass tenemos que la sucesión es convergente y su limite es $\dfrac{1}{4}$

Problema 2 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{e^t - 1}{t} dt$:

2.1.- Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \quad \Rightarrow \quad \frac{e^t - 1}{t} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n - 1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^n.$$

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{e^t - 1}{t} dt &= \int_0^{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{\frac{x}{2}} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \, n \, (n!)}. \end{aligned}$$

2.2.- Hallar el dominio de convergencia absoluta de la serie obtenida en el apartado anterior.

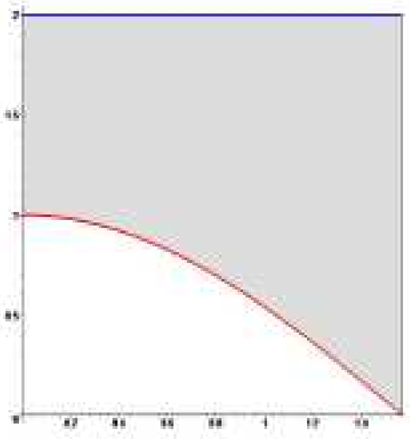
$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1} \, n+1 \, (n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{2^n \, n \, (n!)}\right|} = \left|\frac{2^n \, n \, (n!)}{2^{n+1} \, n+1 \, (n+1)!}\right| |x| = \left|\frac{n}{2 \, (n+1)^2}\right| |x| < 1$$

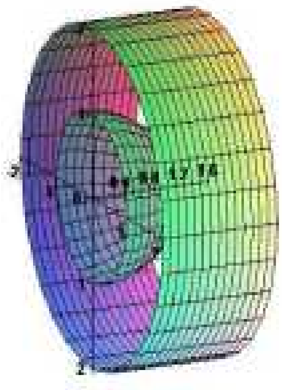
$$|x| < \frac{2 \, (n+1)^2}{n} \quad \therefore \quad R = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \, (n+1)^2}{n} = \infty$$

La serie es absolutamente convergente en todo $\mathbf{R}$.

Problema 3 (1 punto) Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje X la superficie encerrada por las curvas $y = \cos x$ e $y = 2$ con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En la siguiente figura aparece el gráfico de la región (figura de la izquierda) a rotar, comprendida entre $\cos x$ e $y = 2$ (región sombreada). A la derecha aparece la rotación de ambas fronteras de la región, el sólido (S) cuyo volumen debemos calcular es el comprendido entre ellas.





$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4-\cos^2(x)\right) dx \; = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \frac{7\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{7\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Problema 4 (3 puntos) Dada la función $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-4}$:

4.1.- Hallar el dominio de definición.

$$Dom\,[g(x)] = \mathbf{R} \setminus \{4\}.$$

4.2.- Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

$$g'(x) = \frac{x^2-8x+4}{(x-4)^2}. \qquad x^2-8x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4-2\sqrt{3} \\ x_2 = 4+2\sqrt{3} \end{cases}$$

$]-\infty, 4-2\sqrt{3}[$	$4-2\sqrt{3}$	$]4-2\sqrt{3}, 4[$	4	$]4, 4+2\sqrt{3}[$	$4+2\sqrt{3}$	$]4+2\sqrt{3}, \infty[$
$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$
Creciente	Pto. Máx	Decreciente	|||||	Decreciente	Pto. Mín.	Creciente
	$g(x_1) = 4(2-\sqrt{3})$		|||||		$g(x_2) = 4(2+\sqrt{3})$	

4.3.- Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

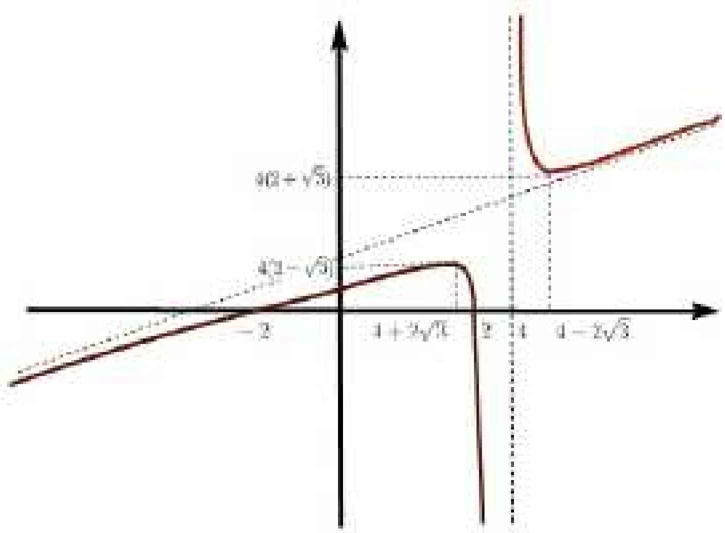
$$g''(x) = \frac{24}{(x-4)^3}.$$

$]-\infty, 4[$	4	$]4, \infty[$
$-$	∞	$+$
Cóncava	|||||	Convexa
$\cap$	|||||	$\cup$

4.4.- Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	$x = 4$		
Asíntota Oblicua ($x \to \infty$)	$y = x + 4$	$m_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x} = 1$	$b_1 = \lim\limits_{x\to\infty} 4\dfrac{x-1}{x-4} = 4$
Asíntota Oblicua ($x \to -\infty$)	$y = x + 4$	$m_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x} = 1$	$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4\dfrac{x-1}{x-4} = 4$

4.5.- Construir el gráfico de $g(x)$.



4.2. Curso 2009–2010

Problema 1 (1 puntos) Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}+1}{2}, \\ \\ u_0 = 0 \quad . \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

R/:

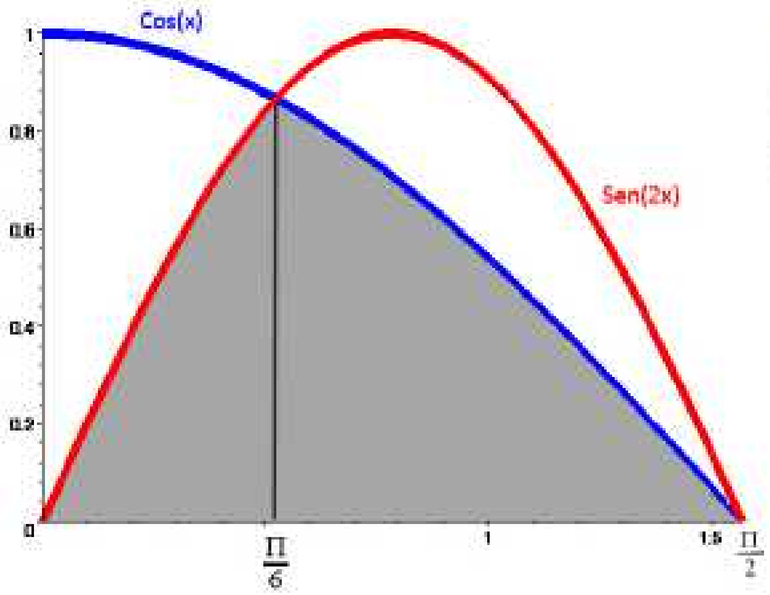
a) La sucesión es monótona creciente. La prueba se realiza por inducción. Sea n=0, tenemos que $u_0 < u_1$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_{k-1} < u_k$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < u_{k+1}$, luego la propiedad es valida para $n = k + 1$. Por tanto la sucesión es monótona creciente.

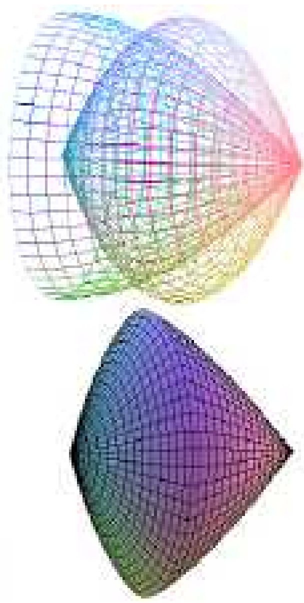
b) Hallemos los puntos l tales que $l = \dfrac{\sqrt{l}+1}{2}$. Esta expresión es equivalente a $4l^2 - 4l + 1 = 0$ o $(4l-1)(l-1) = 0$ lo cual nos da, $l = \dfrac{1}{4}, \quad l = 1$. Probemos que $u_n < 1$. Aplicando el principio de inducción tenemos que $u_0 < 1$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_{k-1} < 1$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < 1$, luego la propiedad es valida para $n = k + 1$. Por tanto la sucesión es acotada superiormente.

c) De a) y b) tenemos que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, por el teorema de Weierstrass tenemos que la sucesión es convergente y su limite es 1.

Problema 2 (1 puntos) Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje X el área encerrada por las curvas $y = \operatorname{sen}(2x)$, $y = \cos(x)$ e $y = 0$ cuando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

R/: Veamos el gráfico de la región limitada por la curvas y el sólido resultante de la rotación





Punto de intercepción $\operatorname{sen}(2x) = \cos(x) \quad \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
V(S) &= \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2(2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx\right)\\
&= \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(4x)}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}\right)dx\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos(4x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2x))\,dx\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\left(x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\right)\\
&= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}-\frac{3\sqrt{3}\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Volumen $\boxed{\frac{\pi^2}{4}-\frac{3\sqrt{3}\pi}{16}\ u^2.}$

Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\log(t+1)-t}{t^2}dt$:

3.1.- Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

R/:

$$\begin{aligned}
\log(t+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,t^n\\
\frac{\log(t+1)-t}{t^2} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,t^n - t}{t^2} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,t^n}{t^2}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\,t^n\\
f(x) = \int_0^x \frac{\log(t+1)-t}{t^2}dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\,t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\left(\int_0^x t^n dt\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,x^n}{(n+1)n}.
\end{aligned}$$

Entonces $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}.}$

3.2.- Hallar el dominio de convergencia absoluta de la serie obtenida en el apartado anterior.

R/:

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}\right|} = \left|\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right| |x| = \left|\frac{n}{n+2}\right| |x| < 1$$

$$|x| < \frac{n+2}{n} \quad \therefore \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

La serie es absolutamente convergente en el intervalo $[-1, 1]$.

3.2.- Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x\, f(x)}{1-\cos(x)}$.

R/: Infinitésimos equivalentes:

$$\begin{aligned} 1-\cos(x) &\approx \frac{x^2}{2} \\ f(x) &\approx -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{x\to 0} \frac{x\, f(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(-\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} = -1.$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $g(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x^2}$:

4.1.- (0,2 puntos) Hallar el dominio de definición.

R/: El dominio de definición de $g(x)$ es $\mathbf{R}$.

4.2.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

R/: $g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}}\right) e^{-x^2}$,

$$g'(x) = 0 \implies \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}}\right) e^{-x^2} = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}} = 0 \implies 1 - 6x^2 = 0 \implies x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Puntos críticos: $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\infty\right)$
Signo de $g'(x)$	-	0	+	No def.	+	0	-
Monot. y Extr.	Decrec.	Pto. Mín.	Crec.	///	Crec.	Pto. Máx.	Decrec.
$g(x)$		$-(6\,e)^{-1/6}$				$(6\,e)^{-1/6}$	

Extremos: un mínimo en $(-6^{-1/2},-(6\,e)^{-1/6})$ y un máximo en $(6^{-1/2},(6\,e)^{-1/6})$.

4.3.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

R/: $g''(x)=\left(-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{10}{3}x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{7}{3}}\right)\,e^{-x^2}$,

$$g''(x)=0 \implies \left(-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{10}{3}x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{7}{3}}\right)\,e^{-x^2}=0$$

$$-\frac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{7}{3}}=0 \implies 18x^4-15x^2-1=0 \text{ ecuación bicuadrada}$$

$$18y^2-15y-1=0 \implies y=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{33}}{12}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$$

Puntos críticos de $g''(x)$ $x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$, $x_2=0$ y $x_3=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$.

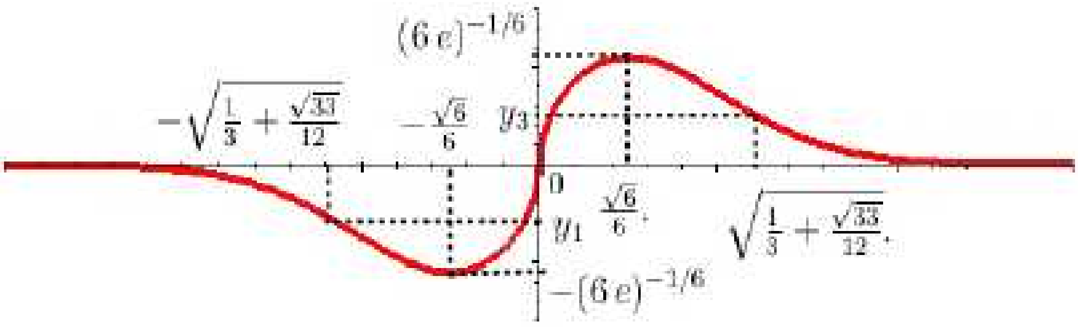
	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,0)$	0	$(0,x_3)$	x_3	(x_3,∞)
Signo de $g''(x)$	-	0	+	No def.	-	0	+
Curvat. e Inflex.	Cóncava	Pto. Infl.	Convexa	Pto. Infl.	Cóncava	Pto. Infl.	Convexa
$g(x)$	$\bigcap$	y_1	$\bigcup$	0	$\bigcap$	y_3	$\bigcup$

donde $y_1=-\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}\right)^{1/6} e^{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$ e $y_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}\right)^{1/6} e^{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$.

4.4.- (0,3 puntos) Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	No existen		
Asíntota Oblicua ($x\to\infty$)	$y=0$	$m_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{xe^{x^2}}=0$	$b_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}}=0$
Asíntota Oblicua ($x\to-\infty$)	$y=0$	$m_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{xe^{x^2}}=0$	$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}}=0$

4.5.- (0,5 puntos) Construir el gráfico de $g(x)$.



4.3. Curso 2010–2011

Problema 1 [1 punto] Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{12(u_n - 3)}{u_n}, \\ \\ u_0 = 8 \quad . \end{cases}$$

1.1.- [**0,1 puntos**] Calcular los 4 primeros términos de la sucesión.

Respuesta/: $u_0 = 8; u_1 = \dfrac{15}{2} = 7,5; u_2 = \dfrac{108}{15} = 7,2$ y $u_3 = 7$.

1.2.- [**0,4 puntos**] Analizar si es acotada o no.

Respuesta/: Notemos que si existiera límite de la sucesión, este tendría que satisfacer la relación $\ell = \dfrac{12(\ell - 3)}{\ell}$. De lo anterior se tiene que $(\ell - 6)^2 = 0$, es decir $\ell = 6$.

Inicio de inducción. $u_0 = 8 \geq 6$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $u_n \geq 6$.

Tesis de inducción. Demostrar que $u_{n+1} \geq 6$.

En efecto, si tomamos en cuenta la definición de la sucesión y la hipótesis de inducción se tiene que:

$$u_{n+1} = \frac{12(u_n - 3)}{u_n} = 12\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) \geq 12\left(1 - \frac{3}{6}\right) = 6$$

Luego la sucesión está acotada inferiormente por 6.

1.3.- [**0,3 puntos**] Estudiar su monotonía.

Respuesta/:

Inicio de inducción. $u_0 = 8 > u_1 = \frac{15}{2} = 7,5$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $u_n > u_{n+1}$.

Tesis de inducción. Demostrar que $u_{n+1} > u_{n+2}$.

En efecto, si tomamos en cuenta la definición de la sucesión, la hipótesis de inducción y el apartado **1.2.-** ,se tiene que:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{12(u_{n+1} - 3)}{u_{n+1}} - u_{n+1} = -\frac{(u_{n+1} - 6)^2}{u_{n+1}} < 0$$

Luego $u_{n+2} < u_{n+1}$ y por tanto la sucesión es monótona decreciente.

1.4.- **[0,2 puntos]** Analizar si es convergente o no. Si es convergente, hallar su límite.

Respuesta/: Por los apartados **1.2.-** y **1.3.-**, la sucesión es convergente (monótona y acotada) y entonces (como se observo al inicio de **1.2.-**)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell = 6.$$

Problema 2 [1,5 puntos] Dada la función $f(x) = \log\left((x+1)^{x^2}\right) - x^3$:

2.1.-[0,5] Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

Respuesta/:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left((x+1)^{x^2}\right) - x^3 = x^2\log(x+1) - x^3 = x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right) - x^3 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+2}\right) - x^3 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+2} \\ &= \sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-2}x^n. \end{aligned}$$

2.2.-[0.5] Hallar el dominio de convergencia de la serie obtenida en el apartado anterior.

Respuesta/:

- $R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\frac{(-1)^{n+1}}{n-2}|}{|\frac{(-1)^n}{n-1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n-2} = 1$. Luego la serie obtenida converge absolutamente en el intervalo $]-1,1[$.

- Si $x = 1$ se tiene $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-2}$. Luego se debe aplicar el criterio de comparación con paso al límite respecto a la serie armónica para probar que la serie de los valores absolutos es divergente, otra alternativa es el criterio de la integral. A continuación aplicar el criterio de Leibnitz para demostrar que la serie es CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.
- Si $x = -1$ se tiene $-\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n-2}$. Luego se debe aplicar el criterio de comparación con paso al límite respecto a la serie armónica para probar que la serie es divergente, otra alternativa es el criterio de la integral.

La serie es $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-2} x^n$ convergente en $]-1,1]$. La convergencia es absoluta en $]-1,1[$ y condicional en $x=1$.

2.3.-[0.5] Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(x^2)}{f(x)}$.

Respuesta/: Se tiene las siguiente equivalencias entre infinitesimales: $\operatorname{sen}(x^2) \approx x^2$, $1-\cos(x) \approx \dfrac{x^2}{2}$ y $f(x) \approx -\dfrac{x^4}{2}$. Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(x^2)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}x^2}{-\frac{x^4}{2}} = -1.$$

Problema 3 [**2 puntos**] Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x^2}{1-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} :$$

3.1.-[0,2] Hallar los dominios de definición, continuidad y derivabilidad.

Respuesta/: Dom Def$= \mathbf{R}\setminus\{1\}$, **Dom Cont**$= \mathbf{R}\setminus\{1\}$ y **Dom Deriv**$= \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$

3.2.-[0,5] Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

$$g'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x(2-x)}{(1-x)2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} :$$

Puntos críticos: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$.

	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)	x_3	(x_3, x_4)	x_4	(x_4, ∞)
Signo de $g'(x)$	+	0	-	No def.	+	No def.	+	0	-
Monot. y Extr.	Crec.	P. Máx.	Decr.	P. Mín.	Crec.	///	Crec.	P. Máx.	Decr.
$g(x)$	///	1	///	0	///	///	///	-4	///

3.3.-[0,5] Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

$$g''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{2}{(1-x)3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} :$$

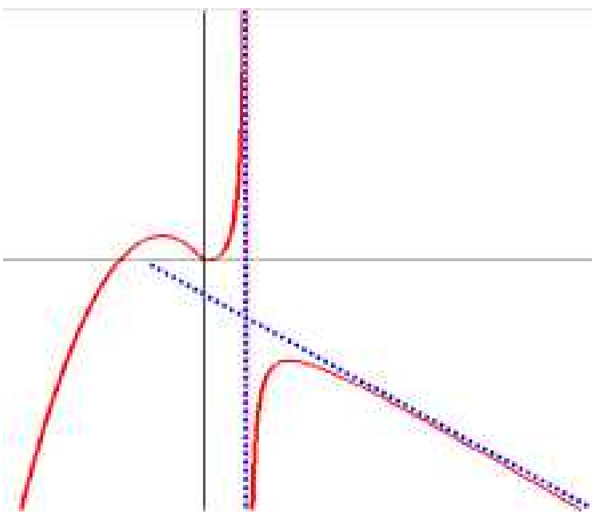
Puntos críticos de $g''(x)$: $y_1 = 0$ y $y_2 = 1$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo de $g''(x)$	-	No def.	+	No def.	-
Curvat. e Inflex.	Cóncava	Pto. Inflex.	Convexa	///	Cóncava
$g(x)$	$\cap$	0	$\cup$	///	$\cap$

3.4.-[0,4] Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	$x = 1$	$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1-x} = \infty$
Asíntota Oblicua $(x \to \infty)$	$y = -x - 1$	$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x - x^2} = -1$	$b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1-x} + x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$

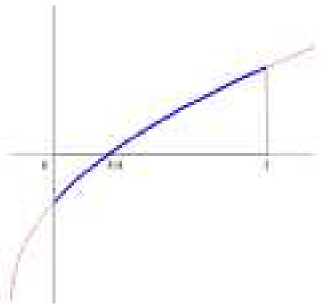
3.5.-[0,4] Construir el gráfico de $g(x)$.

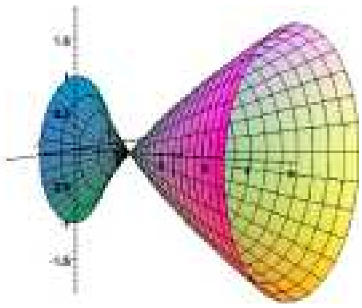


Problema 4 [1,5 puntos] Sea $\mathcal{C}$ la curva descrita por la función $y = 2\sqrt{x+1} - 3$ con $x \in [0, 5]$.

4.1- Hallar la longitud L de la curva $\mathcal{C}$.

4.2- Calcular el volumen V generado al girar alrededor del eje X el área encerrada entre la curva $\mathcal{C}$ y el eje horizontal.





Respuesta/:

4.1-[1] Dada la parabola $y = 2\sqrt{x+1} - 3$ con $x \in [0,5]$:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} dx \\
& \quad t^2 = \frac{x+2}{x+1}, \quad x = \frac{2-t^2}{t^2-1}, \quad dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt, \quad \begin{array}{l} x = 0 \longrightarrow t = \sqrt{2} \\ x = 5 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{7}{6}} \end{array} \\
&= 2 \int_{\sqrt{\frac{7}{6}}}^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\frac{7}{6}}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt \\
&= \left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \frac{t}{(t^2-1)} \right) \Bigg|_{\sqrt{\frac{7}{6}}}^{\sqrt{2}} = \overline{\underline{\log\left((\sqrt{2}-1)(\sqrt{7}+\sqrt{6})\right) + \sqrt{42} - \sqrt{2} \quad \mathbf{u}}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2}{(t^2-1)^2} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right)
\end{aligned}
$$

4.2-[0,5]

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^5 \left(2\sqrt{x+1} - 3\right)^2 dx = \pi \int_0^5 \left(4x - 12\sqrt{x+1} + 13\right) dx \\
&= \pi \left(2x^2 - 8\sqrt{(x+1)^3} + 13x\right) \Bigg|_0^5 = \overline{\underline{\pi(107 - 48\sqrt{6}) \quad \mathbf{u^3}}}
\end{aligned}
$$

4.4. Curso 2011–2012

Problema 1 [1 punto] Hallar el límite de las siguientes sucesiones

1.1.-(0,5 ptos.) $a_n = \dfrac{1+4+9+16+\cdots+n^2}{n^3}$.

Respuesta 1.1

Para calcular el límite de a_n aplicamos el criterio de Stolz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\cdots+(n-1)^2+n^2)-(1+\cdots+(n-1)^2)}{n^3-(n-1)^3}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-3n+1}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

1.2.-(0,5 ptos.) $b_1 = \sqrt[3]{4},\ b_2 = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4}},\ b_3 = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4}}},\ldots$.

Respuesta 1.2

La sucesión es recurrente con recurrencia $b_{n+1} = \sqrt[3]{4\,b_n}$ y $b_1 = \sqrt[3]{4}$.

- Si existiera el límite de b_n, es decir si $\lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbf{R}$, entonces debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}L &= \sqrt[3]{4L},\\ L^3 &= 4L,\\ L(L-2)(L+2) &= 0.\end{aligned}$$

  Luego si b_n tiene límite finito L, se cumple que $L = 0$, $L = -2$ o $L = 2$.

- ACOTACIÓN de b_n. Para probar la acotación utilizaremos el método de inducción.

  1.- $b_1 = \sqrt[3]{4} < 2$.

  2.- Supongamos que para $n = k$ se cumple que $b_k < 2$.

  3.- Demostremos que de lo anterior se deduce que $b_{k+1} < 2$.

  Note que $b_{k+1} = \sqrt[3]{4b_k} < \sqrt[3]{8} = 2$.

- MONOTONÍA de b_n. Para probar la monotonía utilizaremos nuevamente el método de inducción.

  1.- $b_1 = \sqrt[3]{4} < b_2 = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4}}$.

  2.- Supongamos que para $n = k$ se cumple que $b_{k-1} < b_k$.

  3.- Demostremos que de lo anterior se deduce que $b_k < b_{k+1}$.

  Note que $b_{k+1} - b_k = \sqrt[3]{4b_k} - \sqrt[3]{4b_{k-1}} > 0$.

- $\{b_n\}$ es un sucesión monótona creciente y acotada superiormente, por tanto es convergente, es decir tiene límite y como $b_1 = \sqrt[3]{4}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2.$$

Problema 2 [1,5 puntos] Dada la función $f(x) = \dfrac{1+x}{2-x}$.

2.1.-(0,5 ptos.) Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

Respuesta 2.1. Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$., luego

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1+x}{2-x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} + \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\right)x^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}x^n
\end{aligned}$$

2.2.-(0,5 ptos.) Hallar el dominio de convergencia de la serie obtenida en el apartado anterior.

Respuesta 2.2.

- RADIO DE CONVERGENCIA. $a_n = \dfrac{3}{2^{n+1}}$ para $n \geq 1$, luego:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\,2^{n+2}}{3\,2^{n+1}} = 2.$$

  La serie converge absolutamente para todo $x \in (-2, 2)$.

- Análisis de convergencia en $x = 2$. Sustituyendo $x = 2$ en la serie se tiene que:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}2^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}.$$

  Claramente la serie obtenida es divergente por la condición necesaria para convergencia de una serie numérica.

- Análisis de convergencia en $x = -2$. Sustituyendo $x = -2$ en la serie se tiene que:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}(-2)^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{2}.$$

Claramente la serie obtenida es divergente por la condición necesaria para convergencia de una serie numérica.

La serie converge absolutamente para todo $x \in (-2,2)$ y diverge para $x \in \mathbf{R} \setminus (-2,2)$

2.3.-(0,5 ptos.) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt}{\operatorname{sen}(x^2)(f(x)-\frac{1}{2})}$.

Respuesta 2.3. Se tienen las siguientes equivalencias de infinitesimales cuando $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x^2) &\sim x^2, \\ f(x) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} x^n &\sim \frac{3}{4}x, \\ \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt &\sim \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Para la última equivalencia tenga en cuenta que si $I(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$ $(I(0)=0)$, luego:

$$\begin{array}{rclcrcl} I'(x) &=& \operatorname{sen}(x^2) && I'(0) &=& 0 \\ I''(x) &=& 2x\cos(x^2) && I''(0) &=& 0 \\ I'''(x) &=& -4x^2\operatorname{sen}(x^2) + 2\cos(x^2) && I'''(0) &=& 2 \text{ luego } a_3 = \frac{1}{3}. \end{array}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt}{\operatorname{sen}(x^2)(f(x)-\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2\frac{3}{4}x} = \frac{4}{9}.$$

Problema 3 [1,5 puntos] Dadas las curvas:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : \ y = &\ -\frac{4}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3, \\ \mathcal{C}_2 : \ y = &\ \cos(x), \\ \mathcal{C}_3 : \ y = &\ (1-x)\cos(x). \end{aligned}$$

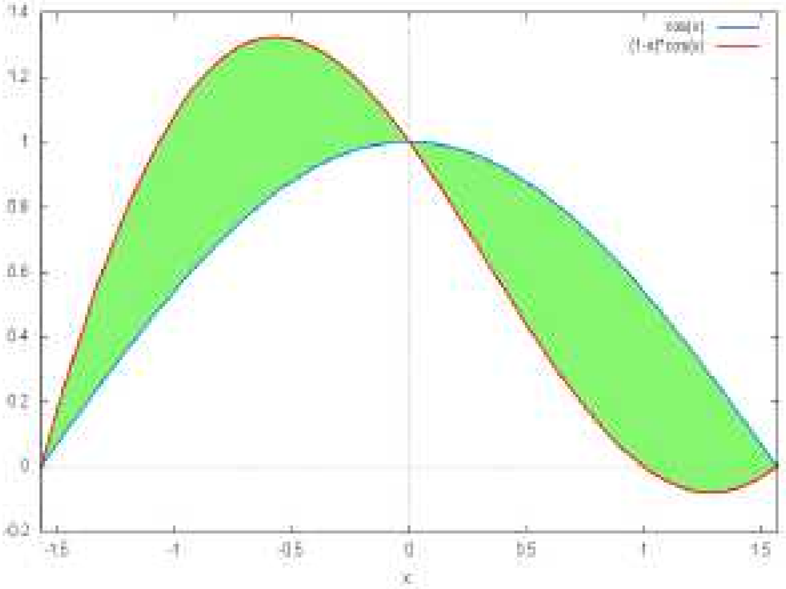
3.1.-(0,6 ptos.) Hallar la longitud de la curva $\mathcal{C}_1$, cuando $x \in [0{,}6]$.

Respuesta 3.1. $y'(x) = -2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^6 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^6 \sqrt{1+\left(-2\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^6 \sqrt{1+4x}\,dx \\ &\quad \text{cambio de variable } t^2 = 1+4x,\ dx = \tfrac{t}{2}\,dt \text{ y } t \in [1,5] \\ &= \frac{1}{2}\int_1^5 t^2\,dx = \left.\frac{t^3}{6}\right|_{t=1}^{t=5} = \frac{62}{3}\,u. \end{aligned}$$

3.2.-(0,9 ptos.) Calcular el área comprendida entre las curvas $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, cuando $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Respuesta 3.2. El problema consiste en calcular el área sombreada en la figura:



Puntos de intercepción de las curvas $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= (1-x)\cos(x) \\ x\cos(x) &= 0 \\ & \quad x = 0,\ x = -\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Área de la región sombreada:

$$A = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\cos(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$$

integrando por partes $\int x\cos(x)dx = x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$, luego

$$\begin{aligned} A &= -\cos(0) + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) - \cos(0) \\ &= \pi - 2\ u^2. \end{aligned}$$

Problema 4 [**2 puntos**] Dada la función

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } \ x<0 \\ \\ 3\sqrt[3]{(x-1)^2} & \text{si } \ 0\le x\le 9, \\ \\ \dfrac{-x^2+30x-45}{12} & \text{si } \ x>9 \end{cases}$$

4.1.-(0,3 ptos.) Hallar los dominios de definición, continuidad y derivabilidad.

Respuesta 4.1.

$$\textbf{Dom}\, g(x)=\mathbf{R}, \quad \textbf{DomCont}\, g(x)=\mathbf{R}\setminus\{0\}=\mathbf{R}^*, \quad \textbf{DomDer}\, g(x)=\mathbf{R}\setminus\{0,1\}.$$

Note que:

$$g'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } \ x<0 \\ \\ \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)}} & \text{si } \ 0<x\le 9, \ x\neq 1. \\ \\ \dfrac{-2x+30}{12} & \text{si } \ x>9 \end{cases}$$

4.2.-(0,5 ptos.) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

Respuesta 4.2.

$g'(x)=0 \Longrightarrow x=15$. Punto crítico $x=15$, puntos donde $g(x)$ no es derivable $x=0$ y $x=1$.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,15)$	15	$(15,+\infty)$
$\text{sgn}(g'(x))$	$+$	No der.	$-$	No der.	$+$	0	$-$
Monotonía	Crec.	/////	Decrec.	Pto. mín.	Crec.	Pto. máx.	Decrec.
$g(x)$	/////	No Cont.	/////	0	/////	15	/////

4.3.-(0,5 ptos.) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

Respuesta 4.3.

$$g''(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x^4} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}} & \text{si} \quad 0 < x < 9,\ x \neq 1. \\[2ex] -\dfrac{1}{6} & \text{si} \quad x > 9 \end{cases}$$

$g''(x) \neq 0$ y $g'(x)$ no es derivable $x = 0$, $x = 1$ y $x = 9$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,9)$	9	$(9,+\infty)$
$\text{sgn}(g''(x))$	$+$	No der.	$-$	No der.	$-$	No der.	$-$
Curvatura	$\bigcup$	/////	$\bigcap$	/////	$\bigcap$	/////	$\bigcap$
$g(x)$	/////	No Cont.	/////	/////	/////	/////	/////

$g(x)$ no tiene puntos de inflexión.

4.4.-(0,3 ptos.) Hallar las asíntotas.

Respuesta 4.4.

Asíntota Vertical

$x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Existe **asíntota vertical** por la izquierda en $x = 0$.

Asíntota Oblicua

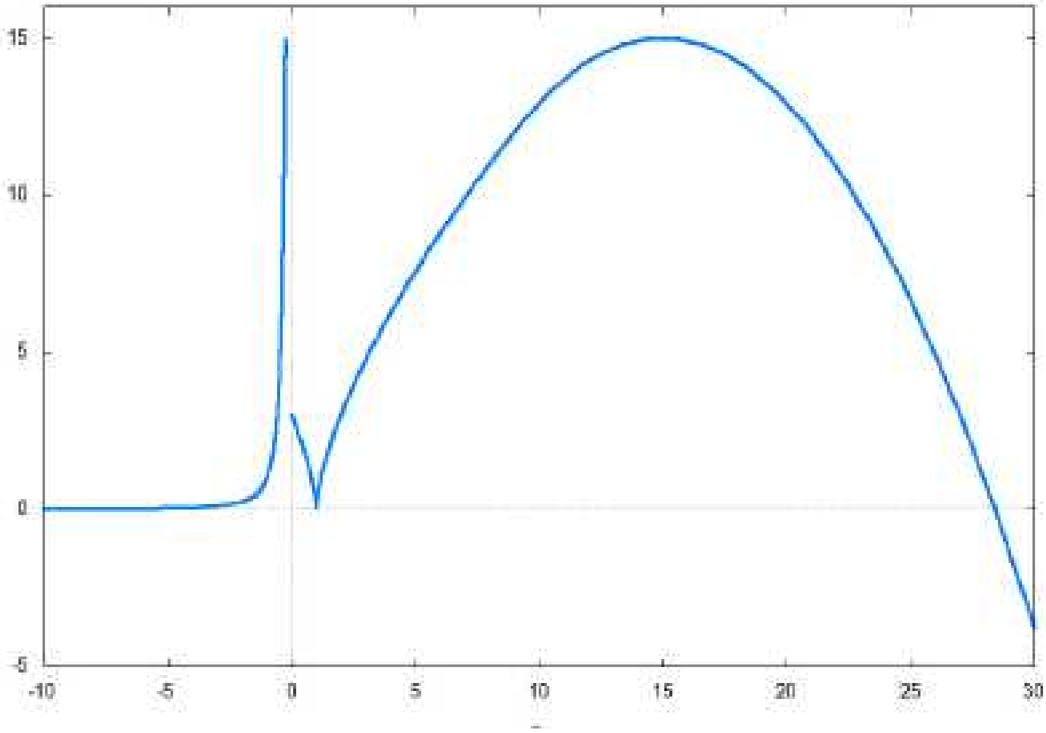
$(x \to \infty) \qquad m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2 + 30x - 45}{12x} = -\infty.$ No exite

$(x \to -\infty) \qquad m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^3} = 0 \qquad b = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - mx = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Existe **asíntota oblicua (caso particular horizontal)** cuando $x \to -\infty$ en $y = 0$.

4.5.-(0,4 ptos.) Construir el gráfico de $g(x)$.

Respuesta 4.5.



4.5. Curso 2012–2013

Problema 1: Calcular los siguientes límites:

1.1.-(0,3 ptos.)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt}{x-\operatorname{sen}(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}}{1-\cos(x)} \overset{(infinit.equiv.)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

1.2.-(0,3 ptos.)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\log(2+4n)-\log(4n)) &= \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{2+4n}{4n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}\\ &= \log e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.2.-(0,4 ptos.)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}}{3^n} &\overset{(Stolz)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{(1+3+\cdots+3^{n-1})-(1+3+\cdots+3^{n-2})}{3^n-3^{n-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{2\,3^{n-1}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Problema 2: Dada la función $f(x) = \log(\sqrt{3x+1})$.

2.1.-(0,3 ptos.) Hallar el polinomio de Taylor de grado $n = 3$ en $x_0 = 0$ y utilizarlo para calcular en valor aproximado de $f(0,1)$.

R:/

(0,2) $P_3(x) = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{9x^2}{4} + \dfrac{9x^3}{2}$.

(0,1) $P_3(0{,}1) = \dfrac{3}{20} - \dfrac{9}{400} + \dfrac{9}{2000} = \mathbf{\dfrac{33}{250}} = 0{,}132$.

2.2.-(0,4 ptos.) Hacer una estimación del error de dicha aproximación.

R:/

(0,2) $E_3(x) = \left|\dfrac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}x^4\right| = \left|-\dfrac{243}{4!(3\zeta+1)^4}x^4\right| = \left|\dfrac{81}{8(3\zeta+1)^4}x^4\right|$, $\zeta \in (0; 0,1)$.

(0,2) $E_3(0,1) = \dfrac{81}{80000}\dfrac{1}{(3\zeta+1)^4} < \mathbf{\dfrac{81}{80000}} = 0,0010125$, $\zeta \in (0; 0,1)$.

2.3.-(0,2 ptos.) Hallar la serie de Taylor de $f(x)$ en potencias de x.

R:/

$$\log(\sqrt{3x+1}) = \frac{1}{2}\log(3x+1) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{2n}x^n. \quad (1)$$

2.4.-(0,6 ptos.) Determinar el domino de convergencia de la serie obtenida.

R:/ $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{2n}$.

(0,2) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n(2n+2)}{3^{n+1}(2n)} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$, luego la serie **converge absolutamente** en $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ y **diverge** en $\mathbf{R} \setminus \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right] = \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$.

(0,2) Análisis de convergencia en $x = \dfrac{1}{3}$, es decir analizar la convergencia de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$.

- Como $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$, por el criterio de comparación con paso al límite de la divergencia de la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ se deduce que la serie valores absolutos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}$ también es divergente.

- Sea $\alpha_n = \dfrac{1}{2n}$, entonces $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n} = -\dfrac{1}{2n(n+1)} < 0$, luego α_n es una sucesión decreciente.
- Por el criterio de Leibniz, la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$ es **condicionalmente convergente**.

(0,1) Análisis de convergencia en $x = -\dfrac{1}{3}$, es decir analizar la convergencia de la serie numérica de términos negativos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n}$, lo que es equivalente a analizar la convergencia de la serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}$.

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, por el criterio de comparación con paso al límite de la divergencia de la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ se deduce que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}$ es divergente, al igual que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n}$.

(0,1) Conclusión: La serie de potencias (1) es divergente en $\mathbf{R} \setminus \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right] = \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right] \bigcup \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ y convergente en el para todo $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$. La convergencia es absoluta en $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ y condicional en $x = \dfrac{1}{3}$.

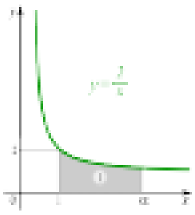
Problema 3: Dadas las curvas:

$$\Gamma_1 :\ y = \log(\cos(x)), \qquad \Gamma_2 :\ y = \frac{2}{x}, \qquad \Gamma_3 :\ x^2 + y^2 = 5.$$

3.1.-(0,4 ptos.) Hallar la longitud de la curva Γ_1, cuando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \\ \operatorname{Long}(\Gamma_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2(x)}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)dx = \log(\sec(x)+\tan(x))\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \log(1+\sqrt{2})\ u. \end{aligned}$$

3.2.-(0,2 ptos.) [1] Encontrar un número $\alpha > 1$ tal que el área comprendida entre la curva Γ_2 y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = \alpha$ sea igual a uno.



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^{\alpha} \frac{2}{x}dx = \log(\alpha^2) = 1, \\ \alpha &= \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Figura 1: El problema de Huygens.

3.3.-(0,4 ptos.) Calcular el volumen de revolución obtenido al rotar con respecto al eje de abscisas o eje X, el área encerrada entre las curvas Γ_2 y Γ_3 en el primer cuadrante.

[1]Problema análogo a uno propuesto en 1661 por el matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695).

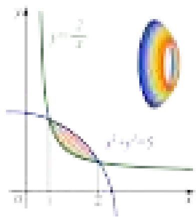


Figura 2: Volumen de revolución.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} &= \sqrt{5-x^2}, \quad x=\pm 1 \quad x=\pm 2 \\ &. \\ \text{Volumen} &= \pi\int_1^2\left(\left(\sqrt{5-x^2}\right)^2-\frac{4}{x^2}\right)dx \\ &= \pi\int_1^2\left(5-x^2-\frac{4}{x^2}\right)dx, \\ &= \pi\left(5x-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2\pi}{3}\,u^3. \end{aligned}$$

Problema 4: Dada la función

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)^2} & \text{si} \quad x<-1 \\[2ex] \dfrac{4}{\pi}\,|\arctan(x)| & \text{si} \quad -1\le x\le 1, \\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi}(x^2-6x+5-2\pi) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

4.1.-(0,3 ptos.) Hallar los dominios de definición, continuidad y derivabilidad.

R:/

- $g_3(x)=-\frac{1}{2\pi}(x^2-6x+5-2\pi)$ es una función polinomial definida, continua y derivable en $(1,+\infty)$.
- $g_2(x)=\frac{4}{\pi}\,|\arctan(x)|$ es el producto de una constante por la composición de dos funciones (valor absoluto y arctan) que están definidas y continuas en $(-1,1)$. Para analizar la derivabilidad, notemos que:

$$g_2(x)=\begin{cases} \frac{4}{\pi}\ \arctan(x), & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{-4}{\pi}\ \arctan(x), & \text{si } x\in[-1,0) \end{cases} \qquad g_2'(x)=\begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & \text{si } x\in(0,1) \\ \frac{-4}{\pi(1+x^2)}, & \text{si } x\in(-1,0) \end{cases}$$

  $g_2(x)$ no es derivable en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0_-} g_2'(x)=\lim_{x\to 0_-}\frac{-4}{\pi(1+x^2)}=-\frac{4}{\pi}\neq\frac{4}{\pi}=\lim_{x\to 0_+}\frac{4}{\pi(1+x^2)}=\lim_{x\to 0_+} g_2'(x).$$

- $g_1(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ es una función racional definida, continua y derivable en $(-\infty,-2)\bigcup(-2,-1)$. Notemos que g_1 no está definida en $x=-2$ y en consecuencia no es continua y derivable en dicho punto.

- Análisis para $x = -1$.
  - $g(x)$ está definida en $x = -1$ y por definición $g(-1) = \frac{4}{\pi}\,|\arctan(-1)| = \frac{4}{\pi}|\frac{-\pi}{4}| = 1$.
  - $g(x)$ es continua en $x = -1$ ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1_-} g(x) = \lim_{x\to -1_-} \frac{1}{(x+2)^2} &= 1, \\ g(-1) &= 1, \\ \lim_{x\to -1_+} g(x) = \lim_{x\to -1_+} \frac{4}{\pi}\,|\arctan(x)| &= 1. \end{aligned}$$

  - $g(x)$ no es derivable en $x = -1$ ya que:

$$\lim_{x\to -1_-} g'(x) = \lim_{x\to -1_-} \frac{-2}{(x+2)^3} = -2 \neq \frac{-2}{\pi} = \lim_{x\to -1_+} \frac{-4}{\pi(1+x^2)} = \lim_{x\to -1_+} g'(x).$$

- Análisis para $x = 1$.
  - $g(x)$ está definida en $x = 1$ y por definición $g(1) = \frac{4}{\pi}\,|\arctan(1)| = \frac{4}{\pi}|\frac{\pi}{4}| = 1$.
  - $g(x)$ es continua en $x = 1$ ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1_-} g(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{4}{\pi}\,|\arctan(x)| &= 1, \\ g(-1) &= 1, \\ \lim_{x\to 1_+} g(x) = \lim_{x\to 1_+} -\frac{1}{2\pi}(x^2 - 6x + 5 - 2\pi) &= 1. \end{aligned}$$

  - $g(x)$ es derivable en $x = 1$ ya que:

$$\lim_{x\to 1_-} g'(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{4}{\pi(1+x^2)} = \frac{2}{\pi} = \lim_{x\to 1_+} \frac{-1}{2\pi}(2x-6) = \lim_{x\to 1_+} g'(x).$$

En conclusión:

Dominio de g: $\mathbf{R}\setminus\{-2\} = (-\infty,-2)\bigcup(-2,\infty)$.

Dominio de continuidad de g: $\mathbf{R}\setminus\{-2\} = (-\infty,-2)\bigcup(-2,\infty)$.

Dominio de derivabilidad de g: $\mathbf{R}\setminus\{-2,-1,0\} = (-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$.

4.2.-(0,4 ptos.) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(2+x)^3} & \text{si } x \in (-\infty,-2)\bigcup(-2,-1), \\[2ex] \dfrac{-4}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \in (-1,0), \\[2ex] \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \in (0,1), \\[2ex] \dfrac{6-2x}{2\pi} & \text{si } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Luego g' no está definida en $x=-2$, $x=-1$ y $x=0$, mientras que $g'(x)=0$ si $x=3$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
$g'(x)$	+	No.def.	-	Cont. y no Der.	-	Cont. y no Der.	+	0	-
Monotonía	C	/////	D	No. Ext.	D	Pto. Mín.	C	Pto. Máx.	D
$g(x)$	/////	/////	/////	/////	/////	0	/////	$1+\frac{2}{\pi}$	/////

4.3.-(0,4 ptos.) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

$$g''(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{(2+x)^4} & \text{si } x \in (-\infty,-2)\bigcup(-2,-1), \\[2ex] \dfrac{8x}{\pi(1+x^2)^2} & \text{si } x \in (-1,0), \\[2ex] \dfrac{-8x}{\pi(1+x^2)^2} & \text{si } x \in (0,1), \\[2ex] -\dfrac{1}{\pi} & \text{si } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Luego g'' no está definida en $x=-2$, $x=-1$, $x=0$ y $x=1$, mientras que $g''(x)\neq 0$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$g''(x)$	+	No.def.	+	Cont. y no Der.	-	Cont. y no Der.	+	0	-
Curvatura	$\cup$	/////	$\cup$	Pto. Inf.	$\cap$	/////	$\cap$	/////	$\cap$
$g(x)$	/////	/////	/////	1	/////	/////	/////	/////	/////

4.4.-(0,2 ptos.) Hallar las asíntotas.

Asíntota vertical. En $x=-2$ hay una asíntota vertical.

Asíntota oblicua (horizontal). $y = mx+b$, donde $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} =$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(x+2)^2} = 0. \text{ y } b = \lim_{x\to-\infty} g(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x+2)^2} = 0.$$

Cuando $x \to -\infty$ hay una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ (eje x).

4.5.-(0,2 ptos.) Construir el gráfico de $g(x)$.

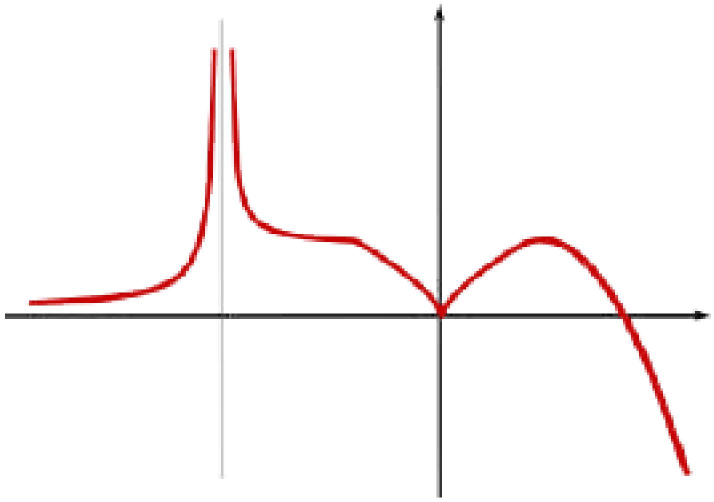


Figura 3: Gráfica de la función.

5. Exámenes finales extraordinarios con solución. Cálculo I.

5.1. Curso 2008–2009

Problema 1 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

1.1.-
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt}{x^3} = \; = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{3\,x^2} \qquad \text{[L'Hopital]}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{x^2}}{6\,x} \qquad \text{[L'Hopital]}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^{x^2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

1.2.- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad [e^x - 1 \approx x\ (x\to 0)]$

Problema 2 (2 puntos) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n\sqrt[3]{n}}$

2.1.- Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la serie.
$x_0 = 1, \quad a_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt[3]{n}}, \quad L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{3n}} = \frac{1}{2},$
$R = \dfrac{1}{L} = 2,$
la series es **absolutamente convergente** en el intervalo $[x_0 - R, x_0 + R] = [-1, 3]$.

2.2.- Analizar la convergencia de la serie anterior cuando $x = -1$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ la serie de los módulos es una serie de tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p = \dfrac{1}{3} \leq 1$, por tanto es divergente.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$
- $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} < 0$, ya que $\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{n}$. Por tanto la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Por el criterio de Leibnitz, la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ es **condicionalmente convergente**.

Problema 3 (1 punto) Calcular aproximadamente el valor de $24^{\frac{3}{2}}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3. Estimar la magnitud del error cometido en la aproximación.

Del enunciado del problema se deduce que $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ y $x_0 = 25$

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
f(x) & = & x^{\frac{3}{2}} & f(25) & = & 125 & a_0 & = & 125 \\
f'(x) & = & \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} & f'(25) & = & \frac{15}{2} & a_1 & = & \frac{15}{2} \\
f''(x) & = & \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} & f''(25) & = & \frac{3}{20} & a_2 & = & \frac{3}{40} \\
f'''(x) & = & -\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} & f'''(25) & = & -\frac{3}{2000} & a_3 & = & -\frac{1}{4000}
\end{array}
$$

El polinomio de Taylor de grado 3 es

$$P_3(x^{\frac{3}{2}}, x, 25) = 125 + \frac{15}{2}(x-25) + \frac{3}{40}(x-25)^2 - \frac{1}{4000}(x-25)^3,$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
24^{\frac{3}{2}} &\approx P_3(x^{\frac{3}{2}}, 24, 25) = 125 - \frac{15}{2} + \frac{3}{40} + \frac{1}{4000} \\
&= \frac{500000 - 30000 + 300 + 1}{4000} = \frac{470301}{4000} \\
&= \boxed{117{,}57525}.
\end{aligned}
$$

Fórmula para calcular el error:

$$R_{3,25}(x) = \frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}(x-25)^4 = \frac{3\;(x-25)^4}{128\,\sqrt{\zeta^5}} \qquad \zeta \in]24, 25[.$$

Estimación del error:

$$E = |R_{3,25}(24)| = \left|\frac{3}{128\,(\sqrt{\zeta})^5}\right| < \frac{3}{128\,(\sqrt{16})^5} = \frac{3}{2^{17}}.$$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $g(x) = e^{-x^2}(x^2+1)$:

4.1.- Hallar el dominio de definición.

$$Dom\,[g(x)] = \mathbf{R}.$$

4.2.- Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

$$g'(x) = -2e^{-x^2}x^3 \qquad\qquad x^3 = 0 \Rightarrow \left\{ \; x_1 \;=\; 0 \right.$$

$]-\infty,0[$	0	$]0,\infty[$
$+$	0	$-$
Creciente	Pto. Máx	Decreciente
	$g(x_1)=1$	

4.3.- Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

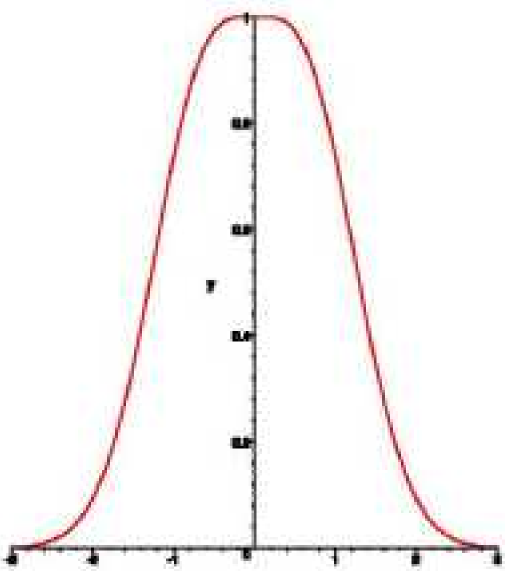
$g''(x) = 2x^2(2x^2-3)e^{-x^2}$.

$]-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}[$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$]-\sqrt{\frac{3}{2}},0[$	0	$]0,\sqrt{\frac{3}{2}}[$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$]\sqrt{\frac{3}{2}},\infty[$
$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
Convexa	|||||	Cóncava	|||||	Cóncava	|||||	Convexa
$\bigcup$	|||||	$\bigcap$	|||||	$\bigcap$	|||||	$\bigcup$
|||||	$g(-\sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	|||||	|||||	|||||	$g(-\sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	|||||

4.4.- Hallar las asíntotas.

Asíntota Horizontal $(x\to\infty)$	$y=0$
Asíntota Horizontal $(x\to-\infty)$	$y=0$

4.5.- Construir el gráfico de $g(x)$.



Problema 5 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

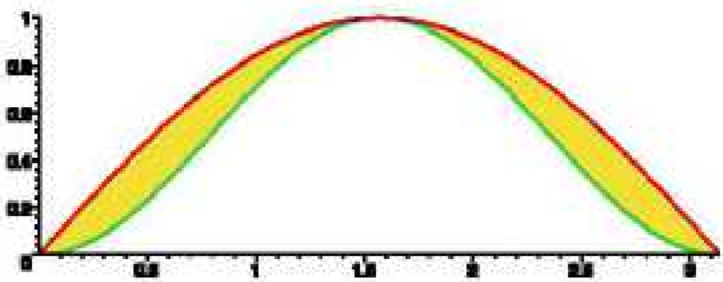
5.1.-

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-6x+5}{x^3-5x^2+8x-4}dx &= \int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx \\
&= \ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C \\
&= \ln|x^2-3x+2|-\frac{1}{x-2}+C.
\end{aligned}$$

5.2.- $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln\left(\sqrt{x}\right)\,dx = x^{\frac{3}{2}}\,\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)-\frac{1}{3}\int\sqrt{x}dx = x^{\frac{3}{2}}\left(\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)-\frac{2}{9}\right)+C.$

$$\begin{aligned}
u &= \ln\left(\sqrt{x}\right) & dv &= \sqrt{x}\,dx \\
du &= \frac{1}{2x}dx & v &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Problema 6 (1 punto) Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $g(x)=\operatorname{sen}^2 x$ cuando $0\le x\le\pi$.



Región $\quad R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0\le x\le\pi \ \wedge\ \operatorname{sen}^2 x\le y\le\operatorname{sen}x\}.$

Área

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^2 x\right)dx = \int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\
&= \left(\cos x-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\ u^2.
\end{aligned}$$

5.2. Curso 2009–2010

Problema 1 (1 punto) Hallar los siguientes limites

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2)-\ln n}{\ln(n+1)-\ln n}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x+2}{5x^2+20}\right)^{\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$

R/:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2)-\ln n}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x+2}{5x^2+20}\right)^{\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x+2}{5x^2+20}\right)^{1+\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$

Problema 2 (2 puntos) Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje X el área encerrada por las curvas $y = 1 - x^2$, $y = |x|$ cuando $x \in [-1, 1]$.

R/: Veamos el gráfico de la región limitada por la curvas y el sólido resultante de la rotación

Punto de intercepción $|x| = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = 1 - x^2 \quad x \geq 0 \qquad -x = 1 - x^2 \quad x < 0$.
Ambas ecuaciones dan como solución $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$
Usando la simetría de cuerpo basta calcular el volumen de revolución en el intervalo $x \in [0, 1]$ y multiplicar por 2

$$\begin{aligned}
V(S) &= \pi\left(\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (1-x^2)^2 - x^2 dx\right) + \pi\left(\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 x^2 - (1-x^2)^2 dx\right)\\
&= \pi\left(\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (1-2x^2+x^4) - x^2 dx\right) + \pi\left(\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 x^2 - (1-2x^2+x^4) dx\right)\\
&= \pi\left(\left(x - x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + (x^3 - x - \frac{x^4}{4})\Bigg|_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1\right) = \pi\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}$$

Volumen $\boxed{\dfrac{6\pi}{5}\ u^2.}$

Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$:

3.1.- Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

R/:

$$\begin{aligned} e^{-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \\ f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Entonces $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.}$

3.2.- Hallar el dominio de convergencia absoluta de la serie obtenida en el apartado anterior.

R/:

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\right|} = \left|\frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)}\right| |x| < 1$$

$$|x| < \frac{(n+1)(2n+3)}{2n+1} \quad \therefore \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{2n+1} = \infty$$

La serie es absolutamente convergente en $\mathbf{R}$.

3.2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - f(x)}{x - \text{sen}(x)}$.

R/: Infinitésimos equivalentes:

$$\begin{aligned} x - \text{sen}(x) &\approx \frac{x^3}{6} \\ x - f(x) &\approx \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - f(x)}{1 - \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = 2.$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $g(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$:

4.1.- (0,2 puntos) Hallar el dominio de definición.

R/: El dominio de definición de $g(x)$ es $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

4.2.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

R/: $g'(x) = \dfrac{(1-x)}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$

$$g'(x) = 0 \implies \frac{(1-x)}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} = 0$$
$$x = 1$$

Puntos críticos: $x = 0$ y $x = 1$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo de $g'(x)$	-	No def.	+	0	-
Monot. y Extr.	Decrec.	///	Crec.	Pto. Mín.	Dec
$g(x)$				$1/e$	

Extremos: un mínimo en $(1, 1/e)$.

4.3.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

R/: $g''(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^5}e^{-\frac{1}{x}}$

$$g''(x) = 0 \implies \frac{2x^2-4x+1}{x^5}e^{-\frac{1}{x}} = 0$$
$$\frac{2x^2-4x+1}{x^5} = 0 \implies 2x^2-4x+1 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Puntos críticos de $g'(x)$ $\;x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ y $x_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

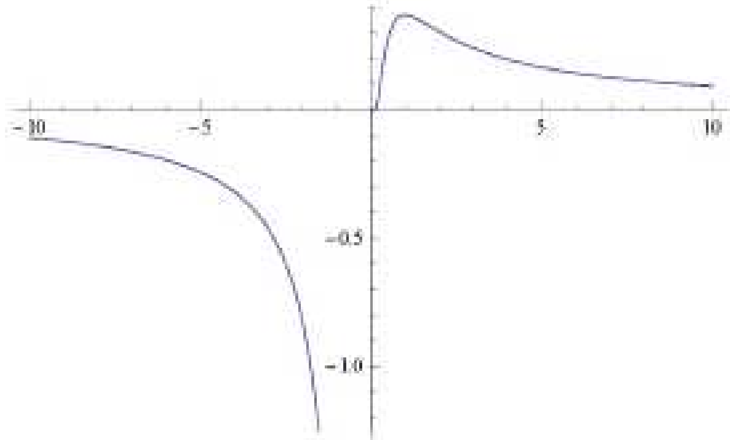
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, x_2)$	x_2	(x_2, x_3)	x_3	(x_3, ∞)
Signo de $g''(x)$	-	No def.	+	0	-	0	+
Curvat. e Inflex.	Cóncava	Pto. Infl.	Convexa		Cóncava	Pto. Infl.	Convexa
$g(x)$	$\bigcap$	0	$\bigcup$	y_1	$\bigcap$	y_3	$\bigcup$

donde $y_1 = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}}e^{\frac{2}{\sqrt{2}-2}}$ e $y_3 = \dfrac{2}{(2+\sqrt{2})}e^{-\frac{2}{(2+\sqrt{2})}}$.

4.4.- (0,3 puntos) Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	$x = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\infty$
Asíntota Horizontal ($x \to \pm\infty$)	$y = 0$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$

4.5.- (0,5 puntos) Construir el gráfico de $g(x)$.



Problema 5 (1 punto) Hallar aproximadamente $\sqrt{2\sqrt{2}}$ usando un polinomio de Taylor de grado 3. Estimar el error cometido

R/: Consideremos la función $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, notemos que $f(2) = \sqrt{2\sqrt{2}}$. El valor más cercano para el cual conocemos $f(x)$ junto con sus derivadas sin cometer ningún error es $x = 1$, luego desarrollando la función en un entorno de $x = 1$ tenemos que $f(x) = f(1) + f^{'}(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + e$. Calculemos

$$f^{'}(1) = \frac{3}{4}$$
$$f^{(2)}(1) = -\frac{3}{16}$$
$$f^{(3)}(1) = \frac{15}{64}$$

lo cual nos da $f(2) \approx 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2!16} + \frac{15}{3!64} = \frac{217}{128}$

Usando la fórmula del error tenemos que

$e = \dfrac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}, \quad \varepsilon(1,2)$

podemos estimarlo por $|e| \leq \dfrac{135}{4!256} = \dfrac{25}{2048}$

Problema 6 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$

R/:

1. Haciendo el cambio de variables $x = t^2$ tenemos $dx = 2tdt$ luego,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

2. Completando cuadrados tenemos $x^2+x+3 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$, luego

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C.\end{aligned}$$

5.3. Curso 2010–2011

Problema 1 [2 puntos] Las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen los siguientes desarrollos de Taylor en potencias de x:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt[3]{n+1}}x^n, \qquad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}x^n.$$

1.1.-[1.5] Hallar el intervalo de convergencia de cada una de las series anteriores.

1.2.-[0.5] Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{v(x)\,(u(x)-1)}{1-\cos(2x)}$.

Respuesta.

1.1.-

1.1.1. **Serie $u(x)$.**

a) $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\sqrt[3]{n+2}}{3^n\sqrt[3]{n+1}} = 3\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+2}{n+1}} = 3$. La serie converge absolutamente en $(-3,3)$.

b) $u(3) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$ es una serie armónica generalizada con $p = 1/3$, por tanto divergente y como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}} = 1$, esta serie y la serie $u(3)$ tiene el mismo carácter, es decir $u(3)$ es divergente.

c) $u(-3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, coincide con la serie del apartado anterior y es divergente.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = 0$.
- $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^{1/3}} - \frac{1}{(n+1)^{1/3}} = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n(n+1)}} > 0$.

Por el criterio de Leibnitz la serie $u(-3)$ es condicionalmente convergente.

R:/ La serie de potencias $u(x)$ es convergente en el intervalo $[-3, 3)$.

1.1.2. **Serie $v(x)$.**

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{2n}} \frac{(n+1)^{2n+2}}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \infty. \end{aligned}$$

R:/ La serie de potencias $u(x)$ es convergente absolutamente en todo R.

1.2.- Equivalencia de infinitésimos:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(2x) &\sim 2x^2, \\ u(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n+1}} x^n &\sim \frac{x}{3\sqrt[3]{2}}, \\ v(x) &\sim x. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x)\,(u(x)-1)}{1-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\frac{x}{3\sqrt[3]{2}}}{2x^2} = \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}.$$

Problema 2 [1,5 puntos] Dada la función $S(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Hallar aproximadamente $S(\frac{1}{2})$ usando un polinomio de Taylor de grado 4. Estimar el error cometido.

Respuesta.

$x_0 = 0$ y $n = 4$.

$$
\begin{array}{rclcrcrcrcr}
S(x) & = & \int_0^x e^{-t^2}dt & \quad & S(0) & = & 0 & a_0 & = & 0 \\
S^{(1)}(x) & = & e^{-x^2} & & S^{(1)}(0) & = & 1 & a_1 & = & 1 \\
S^{(2)}(x) & = & -2xe^{-x^2} & & S^{(2)}(0) & = & 0 & a_2 & = & 0 \\
S^{(3)}(x) & = & (4x^2-2)e^{-x^2} & & S^{(3)}(0) & = & -2 & a_3 & = & -\frac{1}{3} \\
S^{(4)}(x) & = & (-8x^3+12x)e^{-x^2} & & S^{(4)}(0) & = & 0 & a_4 & = & 0 \\
S^{(5)}(x) & = & (16x^4-48x^2+12)e^{-x^2} & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
P_4(x) & = & -\dfrac{1}{3}x^3 + x. \\
S(\dfrac{1}{2}) & \approx & P_4(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{24}.
\end{array}
$$

Estimación de error

$$
\begin{array}{rcl}
E_4(x) & = & \left|\dfrac{S^{(5)}(\zeta)}{5!}x^5\right| = \left|\dfrac{16\zeta^4-48\zeta^2+12}{120e^{\zeta^2}}x^5\right|; \quad \zeta \in [0, \dfrac{1}{2}] \\
E_4(\dfrac{1}{2}) & = & \left|\dfrac{16\zeta^4-48\zeta^2+12}{3840\, e^{\zeta^2}}\right| \leq \dfrac{12}{3840} = \dfrac{1}{320}
\end{array}
$$

Problema 3 [2,5 puntos] Dada la función

$$
g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } \; x \leq 0 \\ \cos(\pi x) & \text{si } \; 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \dfrac{x}{2x-3} & \text{si } \; x > \frac{3}{2} \end{cases} :
$$

3.1.-[0.5] Hallar los dominios de definición, continuidad y derivabilidad.

3.2.-[0.5] Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

3.3.-[0.5] Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

3.4.-[0.5] Hallar las asíntotas.

3.5.-[0.5] Construir el gráfico de $g(x)$.

Respuesta.

3.1.-

Dominio de definición $D = R$.

Dominio de continuidad, las funciones $e^x, \cos(\pi x), \dfrac{x}{2x-3}$ son continuas en los intervalos

$(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, +\infty)$ respectivamente. En os restantes puntos tenemos:

Para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

Como $g(0) = 1$ entonces la función es continua en $x = 0$

Para $x = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

Luego la función no es continua en $x = \frac{3}{2}$

Por tanto el dominio de continuidad es $D_c = R \setminus \{\frac{3}{2}\}$

Dominio de derivabilidad. Las funciones $e^x, \cos(\pi x), \dfrac{x}{2x-3}$ son diferenciables en los intervalos

$(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, +\infty)$ respectivamente. En los restantes puntos tenemos:

Para $x = 0$

$$g'_-(0) = 1$$

$$g'_+(0) = 0$$

Luego, la función es no es diferenciable en $x = 0$.

En $x = \frac{3}{2}$ la función no es diferenciable por no ser continua

Por tanto el dominio de diferenciabilidad es $D_d = R \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$

3.2.-

$$g'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ -\pi \sin(\pi x) & 0 < x < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{(2x-3)^2} & \frac{3}{2} < x \end{cases}$$

Puntos críticos: $x = 0, \quad x = 1, \quad x = 3/2.$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Signo de $g'(x)$	+		-	0	+		-
Monot. y Extr.	Crec.	Pto. Máx.	Dec.	Pto. Mín.	Crec.	///	Dec
$g(x)$		1		-1			

Extremos: un máximo en $(0,1)$, un mínimo en $(1,-1)$.

3.3.-

$$g''(x) = \begin{cases} e^x & x<0 \\ -\pi^2\cos(\pi x) & 0<x<\frac{3}{2} \\ \frac{12}{(-3+2x)^3} & \frac{3}{2}<x \end{cases}$$

Puntos críticos: $x=0$, $x=1/2$, $x=3/2$.

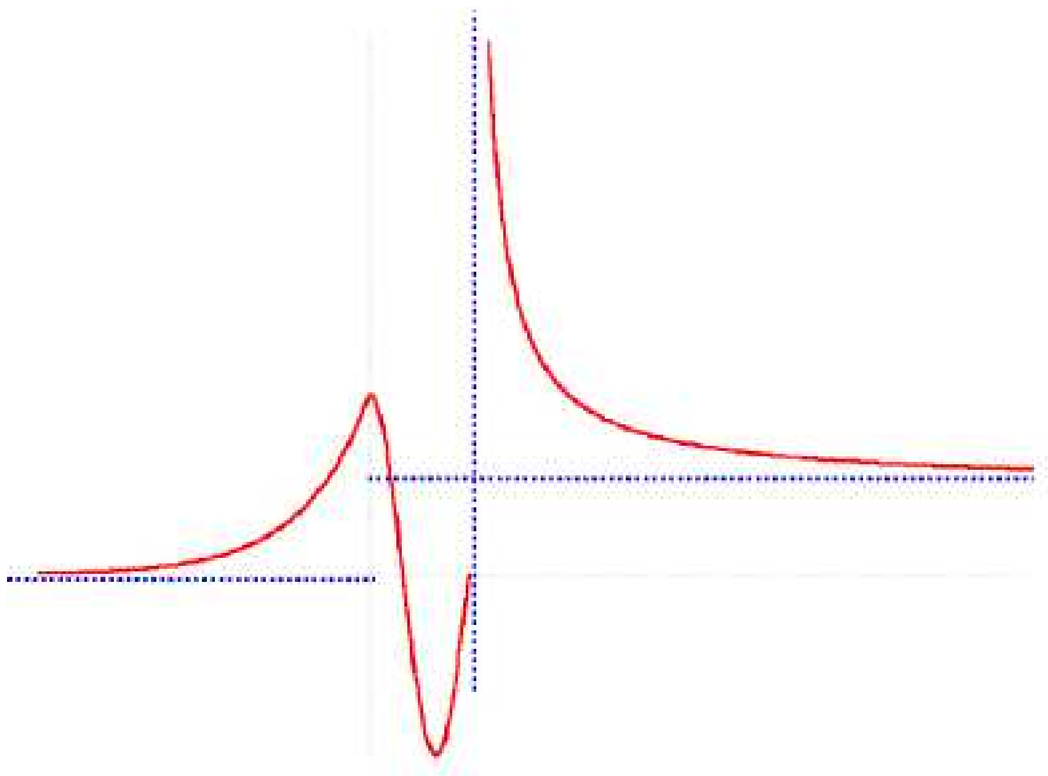
	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},\infty)$
Signo de $g'(x)$	+		-	0	+		-
Curvat. e Inflex.	Convexa		Cóncava	Pto. infl.	Convexa	///	Cóncava
$g(x)$		1		0			

Puntos de inflexión: $(0,1)$, $(1/2,0)$.

3.4.-

Asíntota Vertical	$x=3/2$	$\lim\limits_{x\to 3/2^-} g(x)=-1$	$\lim\limits_{x\to 3/2^+} g(x)=+\infty$
Asíntota Horizontal $(x\to\pm\infty)$	$y=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1/2$

3.5.-



Problema 4 [2 puntos] Sean

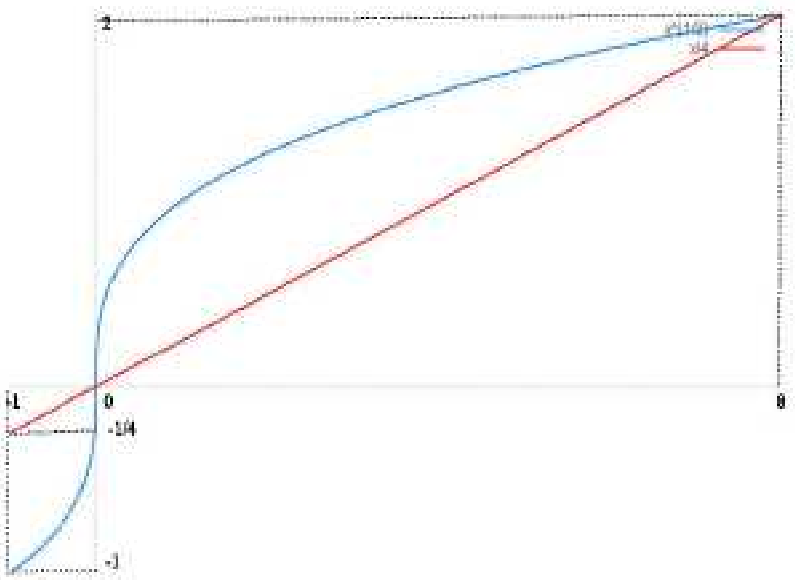
$\mathcal{C}_1$ la curva descrita por la función $y = \sqrt[3]{x}$.

$\mathcal{C}_2$ la curva descrita por la función $y = \dfrac{x}{4}$.

4.1.-[1] Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, cuando $x \in [-1, 8]$.

4.2.-[1] Calcular el volumen **V** generado al girar alrededor del eje X el área encerrada entre la curva $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, cuando $x \in [0, 8]$.

Respuesta.



4.1.-[1] En primer lugar calculamos los puntos de corte de las dos gráficas que hay en el interior del intervalo. Resolveremos $\sqrt[3]{x} = \dfrac{x}{4}$ en $(-1, 8)$. Elevando al cubo y operando se llega a $x^3 - 64x = 0$, luego la única solución en el intervalo es $x = 0$ (las otras dos son $x = \pm 8$). Por tanto el área pedida es

$$A = \left| \int_{-1}^{0} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{4} \right) dx \right| + \left| \int_{0}^{8} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{4} \right) dx \right|$$

y puesto que una primitiva es $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{4} \right) dx = \frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^2}{8}$ se concluye que el área es

$$A = \left| \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \right| + |12 - 8| = \frac{5}{8} + 4 = \boxed{\frac{37}{8} \text{ unidades cuadradas.}}$$

4.2.-[1] Calculamos el volumen pedido utilizando la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^8 \left[(\sqrt[3]{x})^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2 \right] dx = \pi \int_0^8 \left(x^{2/3} - \frac{x^2}{16} \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{x^3}{48} \right]_{x=0}^{x=8} = \pi \left(\frac{96}{5} - \frac{32}{3} \right) = \boxed{\frac{128\pi}{15} \text{ unidades cúbicas.}} \end{aligned}$$

Problema 5 [2 puntos] Calcular las siguientes integrales

5.1.-[1] $\displaystyle\int \left(\log^2(x) + x\,\log(x)\right)\, dx.$

Solución: Hacemos el cambio de variable $x = e^t$ y $dx = e^t\,dt$ y nos queda

$$\begin{aligned} \int \left(\log^2(x) + x\,\log(x)\right)\, dx &= \int \left(\left[\log\left(e^t\right)\right]^2 + e^t\,\log\left(e^t\right) \right) e^t dt \\ &= \int \left(t^2 + t\,e^t\right)\, e^t dt \\ &= \int t^2 e^t dt + \int t\,e^{2t} dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Para la primera integral de (2) aplicamos dos veces integración por partes

$$\begin{aligned} u = t^2 \quad &; \quad dv = e^t dt \\ du = 2t dt \quad &; \quad v = e^t. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t dt &= t^2 e^t - 2\int t e^t dt \\ &= t^2 e^t - 2\left[t e^t - \int e^t dt \right] \qquad (\text{pues} \quad \tilde{u} = t;\ d\tilde{u} = dt. \qquad d\tilde{v} = e^t dt;\ \tilde{v} = e^t) \\ &= t^2 e^t - 2e^t(t-1). \end{aligned} \tag{3}$$

Análogamente para la segunda integral de (2) aplicamos integración por partes

$$\begin{aligned} u = t \quad &; \quad dv = e^{2t} dt \\ du = dt \quad &; \quad v = \frac{e^{2t}}{2}, \end{aligned}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \int t e^{2t} dt &= \frac{t e^{2t}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2t} dt \\ &= \frac{t e^{2t}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2}\right) \\ &= \frac{t e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto, de (3) y (4) tenemos que la ecuación (2) la podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned}\int t^2e^tdt + \int t\,e^{2t} &= t^2e^t - 2e^t(t-1) + \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \\ &= e^t\left[t^2 - 2(t-1)\right] + e^{2t}\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right].\end{aligned}$$

Dado que $x = e^t$, recuperamos la variable inicial con $t = \log(x)$ y finalmente nos queda

$$\int \left(\log^2(x) + x\,\log(x)\right)\,dx = x\left[\log^2(x) - 2\log(x) + 2\right] + x^2\left[\frac{\log(x)}{2} - \frac{1}{4}\right] + c.$$

5.2.-[1]

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+6x+9)}\,dx &= -\frac{3}{100}\log(x^2+1) + \frac{3}{50}\log(x+3) \\ &\quad + \frac{2}{25}\arctan(x) - \frac{1}{10x+30}.\end{aligned}$$

Solución: Aplicamos descomposición en fracciones simples y nos queda

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+6x+9)} &= \frac{1}{(x^2+1)(x+3)^2} \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}1 &\equiv (Ax+B)(x+3)^2 + C(x^2+1)(x+3) + D(x^2+1) \\ &= (Ax+B)(x^2+6x+9) + C(x^3+3x^2+x+3) + D(x^2+1) \\ &= \left[Ax^3 + 6Ax^2 + 9Ax + Bx^2 + 6Bx + 9B\right] + \left[Cx^3 + 3Cx^2 + x + 3C\right] + Dx^2 + D \\ &= x^3[A+C] + x^2[6A+B+3C+D] + x[9A+6B+C] + [9B+3C+D]\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los polinomios obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 6A+B+3C+D &= 0 \\ 9A+6B+C &= 0 \\ 9B+3C+D &= 1 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} C &= -A \\ 3A+B+D &= 0 \\ 8A+6B &= 0 \\ -3A+9B+D &= 1 \end{aligned}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned} C &= -A \\ 3A+B+D &= 0 \\ B &= \tfrac{-4}{3}A \\ -3A+9B+D &= 1 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} C &= -A \\ B &= \tfrac{-4}{3}A \\ \tfrac{5}{3}A+D &= 0 \\ -15A+D &= 1 \end{aligned}\right.$$

Así los valores de las constantes A, B, C y D son:

$$A = -\frac{3}{50} \quad ; \quad B = \frac{2}{25}$$
$$C = \frac{3}{50} \quad ; \quad D = \frac{1}{10},$$

y podemos expresar la integral original de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+6x+9)}dx &= \int \frac{1}{(x^2+1)(x+3)^2}dx \\
&= \int \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}dx \\
&= \int \frac{-3x+4}{50(x^2+1)}dx + \int \frac{3}{50(x+3)}dx + \int \frac{1}{10(x+3)^2}dx \\
&= \frac{-3}{50}\int \frac{x}{(x^2+1)}dx + \frac{4}{50}\int \frac{1}{(x^2+1)}dx + \\
&+ \frac{3}{50}\int \frac{1}{x+3}dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{(x+3)^2}dx \\
&= -\frac{3}{100}\log(x^2+1) + \frac{2}{25}\arctan(x) + \frac{3}{50}\log(x+3) - \frac{1}{10(x+3)} + c
\end{aligned}$$

5.4. Curso 2011–2012

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Departamento de Matemáticas

Grado de Ingeniería Mecánica

CURSO 2011/2012 – 26 DE JUNIO DE 2012

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO I

Nombre y Apellidos: SOLUCIÓN Grupo: ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1.1-(0,5 ptos.) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+5+8+11+\cdots+(3n-1)}{3n} =$

1.2-(0,5 ptos.) $\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} =$

1.1. $A_n = 2+5+\cdots+(3n-1)$ | Por el criterio de Stolz:

$B_n = 3n \nearrow +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+5+\cdots+(3n-1)}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\cdot(n+1)-1}{3\cdot(n+1)-3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{3} = \boxed{+\infty}$$

1.2. $$\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}} \underset{1^{\pm\infty}}{=} e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x}\cdot((1+x^2)-1)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}} \underset{\substack{1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \\ \text{cuando } x\to 0}}{=} e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2/2}} = \boxed{e^2}$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \log(1+2x) - 2x$.

2.1.-(0,5 ptos.) Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

2.2.-(1 pto.) Hallar el dominio de convergencia de la serie obtenida en el apartado anterior.

2.3.-(0,5 ptos.) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt}{f(x)\ \operatorname{sen}(x)}$.

2.1: Es conocido que $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ cerca de $x=0$.

Así, $\log(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n} \cdot x^n$ cerca de $x=0$.

Luego $f(x) = \log(1+2x) - 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n} \cdot x^n - 2x$

$= 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n} \cdot x^n - 2x$

Así $\boxed{f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n} \cdot x^n = -2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \cdots}$

2.2: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n}$ luego $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n/n}{2^{n+1}/n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

El radio de convergencia es $R = \frac{1}{2}$

Converge absolutamente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Veamos en $x = -\frac{1}{2}$, que vale $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n}$ y diverge (es menos la armónica.

En $x = \frac{1}{2}$ queda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

que es una serie alternada convergente por el criterio de Leibniz. Dominio de convergencia $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y en $x = \frac{1}{2}$ la convergencia no es absoluta

(en valor absoluto queda $\sum \frac{1}{n}$)

23: Puesto que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$

se tiene que $e^{t^2} - 1 = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \cdots$

Así $\int_0^x (e^{t^2} - 1)\,dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \cdots$

Por otro lado como $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$,

se tiene $f(x) \operatorname{sen} x \sim f(x) \cdot x = -2x^3 + \frac{8}{3} x^4 + \cdots$ cuando $x \to 0$

Se tiene entonces que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1)\,dt}{f(x) \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-2x^3 + o(x^3)} =$$

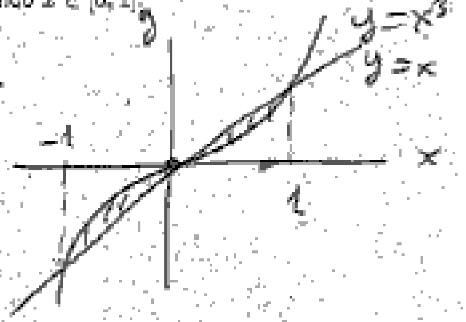
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-2 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1/3}{-2} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

Problema 3 Dadas las curvas:

$$A_1: \; y = x,$$
$$A_2: \; y = x^3.$$

3.1.-(1 pto.) Hallar el área encerrada entre A_1 y A_2.
3.2.-(1 pto.) Calcular el volumen generado por la rotación área encerrada entre A_1 y A_2 alrededor del eje x, cuando $x \in [0,1]$.

3.1



$x^3 = x \iff x^3 - x = 0$
$\iff x(x^2-1) = 0$
$\iff x=0 \text{ o } x = \pm 1$

Por simetría el área es $2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2\cdot\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$

Así, el área es $2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}\ u^2}$

3.2 El volumen pedido es:

$$V = \pi\cdot\int_0^1 \left[x^2 - (x^3)^2\right]dx = \pi\cdot\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 =$$
$$= \pi\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{21}\ u^3}$$

Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

4.1.-(1 pto.) $\int \frac{2e^x-5}{(e^x-1)^2(e^x+2)}\,dx =$

4.2.-(1 pto.) $\int (2x^2-3x+1)\,\mathrm{senh}(x)\,dx =$.

4.1: $\int \frac{(2e^x-5)e^x}{(e^x-1)^2(e^x+2)\cdot e^x}\,dx = \int \frac{2u-5}{(u-1)^2(u+2)u}\,du$

$u = e^x$

$du = e^x\,dx$

$$\frac{2u-5}{(u-1)^2(u+2)u} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{u+2} + \frac{D}{u}$$

$$= \frac{A(u-1)(u+2)u + Bu(u+2) + Cu(u-1)^2 + D(u-1)^2(u+2)}{(u-1)^2(u+2)u}$$

Evaluando en:

$u=0 \leadsto -5 = 2D \Longrightarrow \boxed{D = -\frac{5}{2}}$

$u=1 \leadsto -3 = 3B \Longrightarrow \boxed{B=-1}$

$u=-2 \leadsto -9 = -18C \Longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$

$u=-1 \leadsto -7 = +2A - B - 4C + 4D$

$-7 = 2A + 1 - 2 - 10 \;;\; -7 = 2A - 11 \;;\; \boxed{A=2}$

Ans $\int \frac{2e^x-5}{(e^x-1)^2(e^x+2)}\,dx = 2\log|u-1| + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\log|u+2| - \frac{5}{2}\log|u|$

$$= \boxed{2\log|e^x-1| + \frac{1}{e^x-1} + \frac{1}{2}\log(e^x+2) - \frac{5x}{2}}$$

(más constante si se prefiere).

4.2.

$$\int (2x^2-3x+1)\,\operatorname{senh} x \, dx = (2x^2-3x+1)\cosh x - (4x-3)\operatorname{senh} x + 4\cosh x = \boxed{(2x^2-3x+5)\cosh x - (4x-3)\operatorname{senh} x}$$

	u	dv
$+$	$2x^2-3x+1$	$\operatorname{senh} x$
$-$	$4x-3$	$\cosh x$
$+$	4	$\operatorname{senh} x$
	0	$\cosh x$

Por partes.

Problema 5 Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{e^x - e}{e^{x+1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

5.1.-(0,5 ptos.) Hallar los dominios de definición, continuidad y derivabilidad.

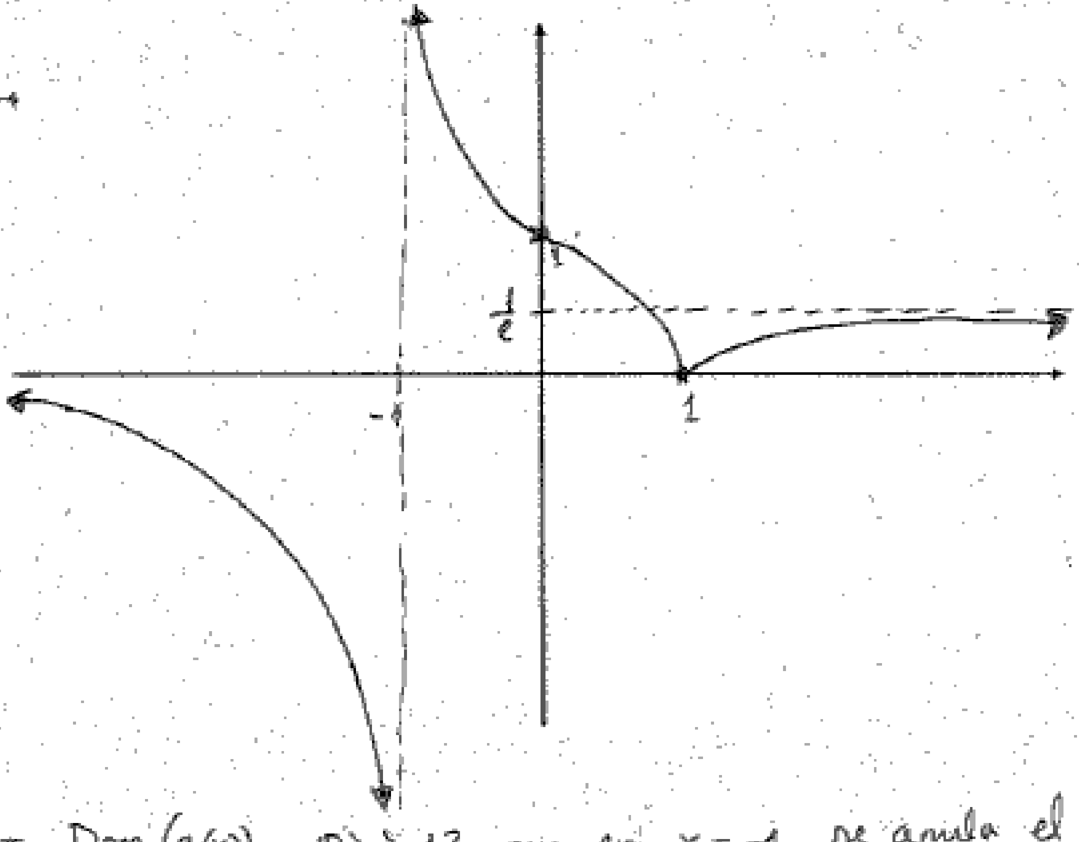
5.2.-(1 pto.) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

5.3.-(0,5 ptos.) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

5.4.-(0,5 ptos.) Hallar las asíntotas.

5.5.-(0,5 ptos.) Construir el gráfico de $g(x)$.

5.5



5.1 $\text{Dom}(g(x)) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ pues en $x=-1$ se anula el denominador de $\frac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-x^2) = g(0) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x^2) = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^x-e}{e^{x+1}} = g(1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Dom. Cont}(g(x)) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Derivando $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{para } x<0,\ x \neq -1 \\ -2x & \text{para } 0<x<1 \\ e^{-x} & \text{para } x>1 \end{cases}$

Los límites laterales de $g'(x)$ en $x=0$ y $x=1$ no coinciden, luego dominio de derivabilidad:

Dom. Deriv. $(g(x)) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

5.2

	$-\infty$ …	-1	…	0	…	1	… $+\infty$
g'	$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
g	$\searrow$	$\circ$	$\searrow$		$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Decreciente en $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ y $(0,1)$

Creciente en $(1,+\infty)$.

En $x=1$ hay un mínimo local estricto, punto $(1,0)$.

5.3 $g''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{para } x<0,\ x\neq -1 \\ -2 & \text{para } 0<x<1 \\ -e^{-x} & \text{para } x>1 \end{cases}$

	$-\infty$ …	-1	…	0	…	1	… $+\infty$
g''	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$-$
g	$\cap$	$\circ$	$\cup$		$\cap$	$\bullet$	$\cap$

Cóncava $(\cap)$ en $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ y $(1,+\infty)$

convexa $(\cup)$ en $(-1,0)$

Se aprecia un punto de inflexión (cambio de curvatura) en $x=0$, punto $(0,1)$. No lo hay en $x=-1$ ya que ahí la función no está definida.

5.4) Asíntotas verticales. Como el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ veamos qué ocurre en $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical con salto en $\boxed{x=-1}$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Asíntota horizontal $\boxed{y=0}$ cuando $x\to -\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e}{e\cdot e^x} = \frac{1}{e}$$

Asíntota horizontal $\boxed{y=\frac{1}{e}}$ cuando $x\to +\infty$

No hay asíntotas oblicuas por haberlas horizontales.

5.5. Curso 2012–2013

Problema 1 (1 pto.): Calcular los siguientes límites:

1.1.-(0,5 ptos.) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt}{\displaystyle\int_0^{x^2} \log(t+1)dt}.$

R:/

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt}{\displaystyle\int_0^{x^2} \log(t+1)dt} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{2x\log(x^2+1)} \overset{\text{Inf. Equiv.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

1.2.-(0,5 ptos.) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2+16+72+\cdots+n^2 2^n}{n^2 2^n}.$

R:/

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2+16+72+\cdots+n^2 2^n}{n^2 2^n} &\overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n}{\left(n^2 2^n\right) - \left((n-1)^2 2^{n-1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n}{2^{n-1}\left(2n^2-(n-1)^2\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n-1} = 2
\end{aligned}$$

Problema 2 (1,5 ptos.): Dada la función $f(x) = xe^{-3x}$.

2.1.-(1 pto.) Hallar el polinomio de Taylor de grado $n=3$ en $x_0=0$ y utilizarlo para calcular en valor aproximado de $f(0,1)$.

R:/

$$\begin{array}{rclrclrcl}
f(x) &=& xe^{-3x} & f(0) &=& 0 & a_0 &=& 0 \\
f'(x) &=& (1-3x)e^{-3x} & f'(0) &=& 1 & a_1 &=& 1 \\
f''(x) &=& 3(3x-2)e^{-3x} & f''(0) &=& -6 & a_2 &=& -3 \\
f'''(x) &=& 27(1-x)e^{-3x} & f'''(0) &=& 27 & a_3 &=& \frac{9}{2}
\end{array}$$

$$f^{IV}(x) = 27(3x-4)e^{-3x}$$

Polinomio de Taylor $\mathbf{P_3(x) = x - 3x^2 + \frac{9}{2}x^3}$.

Cálculo aproximado $\mathbf{f(0{,}1)} \approx P_3(0,1) = \frac{1}{10} - \frac{3}{100} + \frac{9}{2000} = \frac{149}{2000} = \mathbf{0,0745}$.

2.2.-(0,5 ptos.) Hacer una estimación del error cometido con la aproximación anterior aproximación.

R:/

$E_3(x) = \left|\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}x^4\right| = \left|\frac{27(3\zeta-4)}{4!\,e^{3\zeta}}x^4\right| = \left|\frac{9(3\zeta-4)}{8e^{3\zeta}}x^4\right|$, $\zeta \in (0;0,1)$.

$E_3(0,1) = \frac{9}{8\cdot 10^4}\left|\frac{3\zeta-4}{e^{3\zeta}}\right| < \frac{9\cdot 4}{8\cdot 10^4} = \frac{9}{2\cdot 10^4} = \frac{9}{20000} = \mathbf{0,00045}$, $\zeta \in (0;0,1)$.

Problema 3 (1,5 ptos): Halle el domino de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2}(x-1)^n.$$

R:/

- $a_n = \frac{(-3)^n}{n^2}$, luego $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-3)^n}{n^2}}{\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)^2}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$.
- La serie converge absolutamente en $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ y diverge en $\mathbf{R}\setminus\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$.
- Análisis de convergencia en $x = \frac{2}{3}$.
  $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, es una serie armónica convergente.
- Análisis de convergencia en $x = \frac{4}{3}$.
  $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, la serie de los valores absolutos es la serie del punto anterior que es convergente.
- **Respuesta final:** La serie es absolutamente convergente en el intervalo $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$ y divergente en $\mathbf{R}\setminus\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$.

Problema 4 (1,5 ptos.):

4.1.-(0,5 ptos.) Hallar la longitud de la curva plana cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = 2(\mathrm{sen}(\theta)+\cos(\theta))$, cuando $0 \le \theta \le 2\pi$.

R:/

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta))^2 + \left((\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta))'\right)^2}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta))^2 + (\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))^2}\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta = 4\sqrt{2}\pi \ \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

4.2.-(0,5 ptos.) Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ y la recta $x = 2$.

R:/

$$
\mathcal{A} = \int_0^2 \left(2^x - 2^{-x})\right) = \frac{1}{\log(2)}\left(2^x + 2^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{17}{4\log(2)} - \frac{2}{\log(2)} = \frac{9}{4\log(2)}\ \mathbf{u}^2
$$

4.3.-(0,5 ptos.) Calcular el volumen de revolución obtenido al rotar con respecto al eje de abscisas o eje X, la curva $y = \operatorname{sen}^2(x)$, en el intervalo $0 \le x \le \pi$.

R:/

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \pi\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(x)dx = \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)dx, \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos(2x)dx + \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\cos^2(2x)dx, \\
&= \frac{\pi}{4}\left(x + \operatorname{sen}(2x)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\left(1+\cos(4x)\right)dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{8}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}, \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{8}\ \mathbf{u}^3
\end{aligned}
$$

Problema 5 (2,5 ptos.): Dada la función

$$
g(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2, \\ \log(x-1) & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}
$$

5.1.-(0,4 ptos.) Hallar los dominios de definición, continuidad y derivabilidad.

R:/

$$\begin{aligned} \textbf{Dom Def} &= \mathbf{R} \\ \textbf{Dom Cont} &= \mathbf{R} \\ \textbf{Dom Der} &= \mathbf{R} \setminus \{2\} \end{aligned}$$

5.2.-(0,6 ptos.) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

R:/

$$g'(x) = \begin{cases} -2(x-1)e^{-(x-1)^2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2-2x & \text{si} \quad 1 < x < 2, \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Luego g' no está definida en $x = 2$ y $g'(x) = 0$ si $x = 1$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$g'(x)$	+	0	-	Cont. y no Der.	+
Monotonía	C	Pto. de Máx.	D	Pto. de Mín.	C
$g(x)$	/////	1	/////	0	/////

5.3.-(0,6 ptos.) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

R:/

$$g''(x) = \begin{cases} (4x^2-8x+2)e^{-(x-1)^2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x < 2, \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Luego g'' no está definida en $x = 2$ y $g''(x) = 0$ si $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

	$(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$	2	$(2, \infty)$
$g''(x)$	+	0	-	Cont. y no Der.	-
Curvatura	/////	Pto. de Inflex.	/////	/////	/////
$g(x)$	/////	$e^{-\frac{1}{2}}$	/////	0	/////

5.4.-(0,4 ptos.) Hallar las asíntotas.

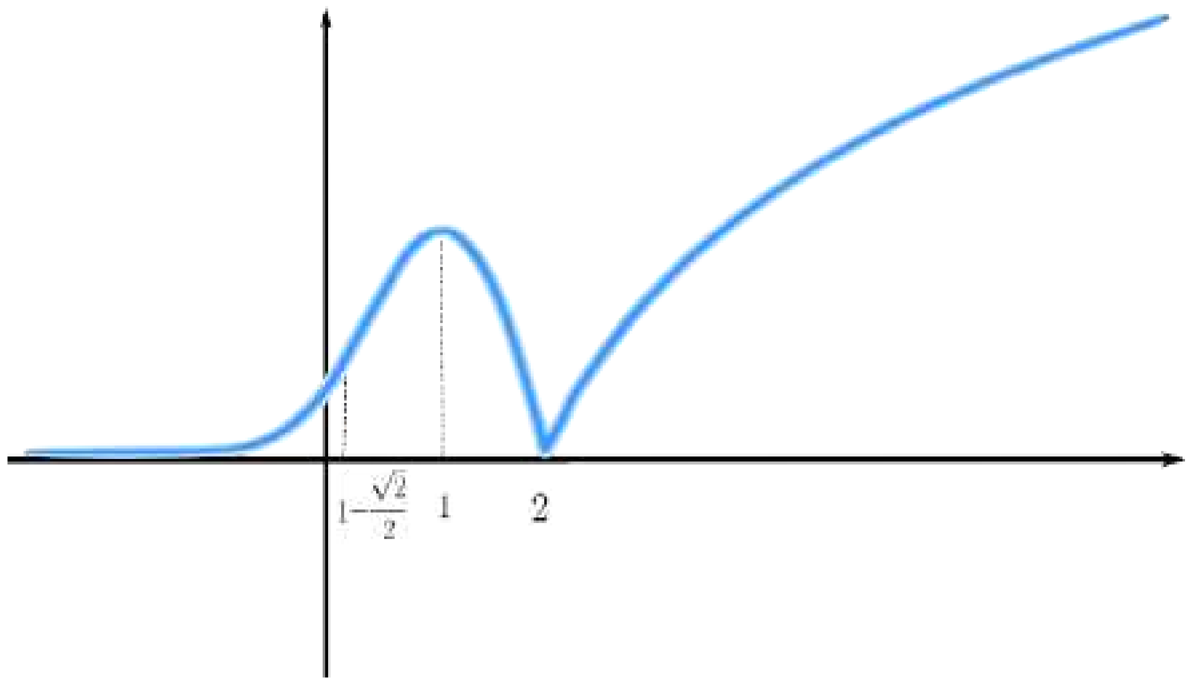
Asíntota vertical. No tiene asíntota vertical.

Asíntota oblicua (horizontal). $y = mx + b$, donde

- $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-(x-1)^2}}{x} = 0.$
- $b = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - mx = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-(x-1)^2} = 0.$

Cuando $x \to -\infty$ hay una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ (eje x).

5.5.-(0,5 ptos.) Construir el gráfico de $g(x)$.



Problema 6 (2 ptos.): Calcular las siguientes integrales:

6.1.-(1 pto.) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$

R:/

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}. \\
\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx &= 4\int \frac{1}{x-3}dx - 3\int \frac{1}{x-2}dx \\
&= 4\log|x-3| - 3\log|x-2| + C = \log\left|\frac{(x-3)^4}{(x-2)^3}\right| + C
\end{aligned}$$

6.1.-(1 ptos.) $\displaystyle\int (\cosh(x)+1)\log(\cosh(x))\operatorname{senh}(x)dx.$

R:/ Sea $y = \cosh(x)$ y $dy = \operatorname{senh}(x)dx$, entonces

$$\begin{aligned}
\int (\cosh(x)+1)\log(\cosh(x))\operatorname{senh}(x)dx &= \int (y+1)\log(y)dy \\
&\overset{\text{P.Part.}}{=} \left(\frac{y^2}{2}+y\right)\log(y) - \int \left(\frac{y}{2}+1\right)dy \\
&= \left(\frac{y^2}{2}+y\right)\log(y) - \left(\frac{y^2}{4}+y\right) + C \\
&= \left(\frac{\cosh^2(x)}{2}+\cosh(x)\right)\log(\cosh(x)) + C \\
&\quad - \left(\frac{\cosh^2(x)}{4}+\cosh(x)\right) + C
\end{aligned}$$