# Problema 5.4

1) $f(x) = c/x$ es solución de $xf' + f = 0$

En efecto:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= c/x \\ f'(x) &= -c/x^2 \\ xf'(x) &= -c/x \end{aligned}\right\} \Rightarrow xf' + f = -\frac{c}{x} + \frac{c}{x} = 0$$

2) $f(x) = x\tan(x)$ es solución de $xf' - f - f^2 = x^2$

En efecto:

$f(x) = x \cdot \tan(x) \Rightarrow f^2(x) = x^2 \tan^2(x)$

$f'(x) = \tan(x) + x(1 + \tan^2(x))$

$xf'(x) = x\tan(x) + x^2 + x^2\tan^2(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xf'(x) - f - f^2 &= \cancel{x\tan(x)} + x^2 + \cancel{x^2\tan^2(x)} \\ &- \cancel{x\tan(x)} \\ &- \cancel{x^2\tan^2(x)} = x^2 \end{aligned}$$

3) $f(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x$

es solución de $f'' + 9f = 0$

En efecto:

$$f(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x$$

$$f'(x) = 3c_1 \cos 3x - 3c_2 \operatorname{sen} 3x$$

$$f''(x) = -9c_1 \operatorname{sen} 3x - 9c_2 \cos 3x$$

$$\Rightarrow f''(x) + 9f(x) = -9c_1 \operatorname{sen} 3x - 9c_2 \cos 3x + \\ + 9c_1 \operatorname{sen} 3x + 9c_2 \cos 3x = 0$$

4) $f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

es solución de $f'' - 9f = 0$

En efecto:

$$f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

$$f'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$f''(x) = 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x}$$

$$\Rightarrow f''(x) - 9f(x) = 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x} - \\ - 9c_1 e^{3x} - 9c_2 e^{-3x} = 0$$

5) $f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$

es solución de $f'' - 8 \cdot f' + 15 f = 0$

En efecto:

$$f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$$
$$f'(x) = 3c_1 e^{3x} + 5c_2 e^{5x}$$
$$f''(x) = 9c_1 e^{3x} + 25 c_2 e^{5x}$$

$$\Rightarrow f'' - 7f' + 10 f = 9c_1 e^{3x} + 25c_2 e^{5x} -$$
$$- 8 \left( 3c_1 e^{3x} + 5c_2 e^{5x} \right)$$
$$+ 15 \left( c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} \right)$$
$$= c_1 \cdot (9 - 8 \cdot 3 + 15) e^{3x} +$$
$$+ c_2 \cdot (25 - 8 \cdot 5 + 15) e^{5x}$$
$$= 0$$

6) $f(x) = \log(c_1 e^{x} + e^{-x}) + c_2$

es solución de $f'' + (f')^2 = 1$

En efecto:

$$f(x) = \log(c_1 e^{x} + e^{-x}) + c_2$$

$$f'(x) = \frac{c_1 e^{x} - e^{-x}}{c_1 e^{x} + e^{-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2 - (c_1 e^{x} - e^{-x})^2}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4c_1}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow f'' + (f')^2 = \frac{4c_1}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2} + \frac{(c_1 e^{x} - e^{-x})^2}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4c_1 + c_1^2 e^{2x} + e^{-2x} - 2c_1}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{c_1^2 e^{2x} + e^{-2x} + 2c_1}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2}{(c_1 e^{x} + e^{-x})^2} = 1.$$