CÁLCULO 2018/2019
HOJA #6: DERIVADAS II

Problema 6.1. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

¿Se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$? En caso afirmativo, encuentra el punto (o los puntos) de la tesis del teorema.

Problema 6.2. La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en $x = -1$ y en $x = 1$ y, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (-1,1)$. Explica esta aparente contradicción con el teorema de Rolle.

Problema 6.3. Sea $h \in C^2(\mathbb{R})$ y sea

$$f(x) = \begin{cases} h(x)/x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que $f \in C(\mathbb{R})$, calcula $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$.

Problema 6.4. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ una función tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} = 1.$$

Justifica que $f(0) = 0$. Demuestra que $f'(0) = 5/2$. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)}\,.$$

Problema 6.5. Demuestra los siguientes teoremas:

Teorema 1. Sea f una función derivable en $[x_1, x_2]$. Si f tiene $k \geq 2$ raíces en $[x_1, x_2]$, entonces f' tiene, al menos, $k-1$ raíces en $[x_1, x_2]$.

Teorema 2. Sea f una función k-veces derivable en $[x_1, x_2]$. Si f tiene $k+1 \geq 2$ raíces en $[x_1, x_2]$, entonces $f^{(k)}$ tiene al menos una raíz en $[x_1, x_2]$.

Problema 6.6. Determina el número de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones en los intervalos especificados:

$$\begin{array}{l} x^7 + 4x = 3 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \\ x^5 = 5x - 6 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \\ x^4 - 4x^3 = 1 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \\ \operatorname{sen} x = 2x - 1 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \\ x^x = 2 \quad \text{en} \quad [1, \infty) \\ x^2 = \log(1/x) \quad \text{en} \quad (1, \infty) \end{array}$$

Problema 6.7. Utiliza el teorema del valor medio para aproximar: a) $26^{2/3}$, b) $\log(3/2)$.

Problema 6.8. Utiliza el teorema del valor medio calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \left((1+x)^{1+1/(1+x)} - x^{1+1/x} \right)$$