IDENTIDAD DE VANDERMONDE

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{q=0}^{k} \binom{m}{q}\binom{n}{k-q}$$

Demostración:

La técnica algebraica de la demostración es muy costosa y poco elegante. Si que lo es, sin embargo, la argumentación combinatoria. Es como sigue a continuación:

Se trabaja con un conjunto de m + n elementos, por ejemplo: {1, 2, 3, …,m, m+1, m+2, … , m+n}
considerando los m primeros como de **Tipo I** , y los n últimos como de **Tipo II** .

Se clasifican, ahora, los **k-subconjuntos** (subconjuntos de k elementos) dependiendo del número de elementos de tipo I (**q**) y del tipo II (**k – q**) que contienen. Está claro que q debe tomar valores desde 0 hasta k.

Veamos cómo se realiza la partición:

$$\left\{ \begin{matrix} k-subconjuntos\ extraidos \\ de \quad \{1,2,...,m+n\} \end{matrix} \right\} = \bigcup_{q=0}^{k} \left\{ \begin{matrix} k-subconjuntos\ de \quad \{1,2,...,m+n\} \\ con\ q\ elementos\ de\ tipo\ I \end{matrix} \right\}$$

Obsérvese que si q > m, el conjunto es vacío.

El número de subconjuntos de cada conjunto de la unión, será, usando la regla del producto, el número de subconjuntos q elementos de entre los m primeros (tipo I) $\binom{m}{q}$, por el número de subconjuntos de k - q elementos de entre los n últimos (tipo II) $\binom{n}{k-q}$.

Y puesto que se trata de una partición (conjuntos disjuntos), aplicando la regla de la suma, se obtiene el sumatorio extendido a los valores posibles de q (de 0 a k).

De esta manera queda demostrada la identidad de Vandermonde.

Matemática Discreta

Alberto Vara