Matemática Discreta

PROBLEMAS 7.4 y 7.5

Problema 7.5 Encontrar el número de subconjuntos de p elementos tomados de un conjunto de n elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de manera que no contiene elementos consecutivos.

La consecutividad implica que los elementos del conjunto están ordenados con algún criterio establecido, lo que hace que se pueda considerar como conjunto de partida el de los n primeros números naturales, para luego realizar una extracción de p elementos, que estarán ordenados de manera natural. Este subconjunto será nombrado por: $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ donde cada x será un número natural extraído del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Se definen ahora las siguientes diferencias:

$$\begin{aligned} d_1 &= x_1 - 1 \\ d_2 &= x_2 - x_1 \\ d_3 &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ d_p &= x_p - x_{p-1} \\ d_{p+1} &= n - x_p \end{aligned}$$

Estas diferencias verifican que su suma es igual a:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{p+1} = (x_1 - 1) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_p - x_{p-1}) + (n - x_p) = n - 1$$

Para evitar que los elementos elegidos no sean consecutivos, se deben imponer las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} d_1 &\geq 0 \\ d_2 &\geq 2 \\ d_3 &\geq 2 \\ &\vdots \\ d_p &\geq 2 \\ d_{p+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el problema queda recodificado como el cálculo del número de soluciones de la ecuación diofántica siguiente con las restricciones citadas, es decir:

$$\#\left\{ \begin{array}{c} d_1 + d_2 + \ldots + d_{p+1} = n - 1 \\ d_1 \geq 0; d_i \geq 2, i = 2, \ldots, p; d_{p+1} \geq 0 \end{array} \right\}$$

Haciendo los p – 1 cambios de variable adecuados (tal y como se explicó en clase), se obtendrá:

$$\#\left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + \ldots + y_{p+1} = n - 1 - 2(p-1) = n - 2p + 1 \\ y_i \geq 0, i = 1, \ldots, p+1 \end{array} \right\} = \binom{n-p+1}{p}$$

El problema 7.4, es un caso particular de este, cuando n = 15 y p = 4, así pues el resultado será:

$$\binom{15-4+1}{4} = \binom{12}{4}$$

Alberto Vara