Exámenes Resueltos de

Álgebra Lineal

Grado en Ingeniería Informática

Versión : Diciembre 2013

Colección elaborada por

Pedro José Hernando Oter

Instituto Universitario "Gregorio Millán Barbany"
Grupo de Modelización, Simulación Numérica y Matemática Industrial
Dep. Ciencia e Ing. de Materiales e Ing. Química
Escuela Politécnica Superior
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Convocatoria Ordinaria

2009 - 13

P1 (1 pto) Definir de forma breve y concisa los siguientes conceptos:

a) (0.25 ptos) Vector linealmente independiente de un conjunto de vectores.

b) (0.25 ptos) Matriz asociada a una base de un subespacio vectorial.

c) (0.25 ptos) Factorización QR de una matriz.

d) (0.25 ptos) Teorema de la mejor aproximación de un vector a un subespacio vectorial.

P2 (0.75 ptos) Dado el siguiente subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$,

$$W = \text{gen}([1,1,0,1],\ [0,0,1,0],\ [1,1,1,1])$$

a) (0.25 ptos) Encontrar unas ecuaciones en forma general que definan W.

b) (0.25 ptos) Encontrar una base del complemento ortogonal de W.

c) (0.25 ptos) Descomponer ortogonalmente el vector $\vec{v} = [1,0,0,0]$ en el subespacio W.

P3 (0.75 ptos) Encontrar, en caso de que exista, una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con las siguientes características:

1. $\ker(A) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \ker(A) \subset \mathbb{R}^4$

2. $\ker(A^T) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \ker(A^T) \subset \mathbb{R}^3$

P4 (0.75 ptos) Encontrar las coordenadas en la base canónica del vector $\vec{v} \in W$, con $W \subseteq \mathbb{R}^4$, sabiendo que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos bases de W que cumplen:

$$P_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

P5 (0.75 ptos) Realizar el ajuste de los siguientes datos a la función dada, determinando el error del ajuste.

x	1	-1	0	0
y	1	1	1	0

; $y = a + bx + cx^2$

P6 (1 pto) Dada la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (0.75 ptos) Encontrar la descomposición en valores singulares de A, comprobando el resultado.

b) (0.25 ptos) Encontrar, si es posible, la descomposición espectral generalizada de A.

---

1 Soluciones

P1

- Un vector linealmente independiente de un conjunto de vectores es un vector que no se puede obtener mediante combinación lineal de los vectores de ese conjunto.
- La matriz asociada a una base es aquella cuyos vectores columna corresponden con los vectores de la base ordenados.
- Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con vectores columna linealmente independientes se puede expresar como:

$$A = QR$$

donde:

  - $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz con vectores columna ortonormales.
  - $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior invertible.

- Este teorema establece que la mejor aproximación de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ a un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W.

P2

a) Nos dan un conjunto generador y necesitamos una base. Vamos a determinar qué vectores son linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{B}_W = \{[1,1,0,1],\ [0,0,1,0]\}$$

Tenemos entonces un subespacio de dimensión 2 en un espacio de dimensión 4 y por tanto el número de ecuaciones linealmente independientes que definen W deben ser 2. Una posible solución es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{W : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right.}$$

b) Determinamos el complemento ortogonal de W, teniendo en cuenta que:

$$W : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A\vec{x} = \vec{0}$$

El subespacio W se puede entender como el núcleo de una matriz A, por tanto:

$$W = \ker(A) \quad \Longrightarrow \quad W^\perp = [\ker(A)]^\perp = \text{fil}(A) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{B}_{W^\perp} = \{[1,-1,0,0],\ [1,0,0,-1]\}}$$

c) La descomposición ortogonal de un vector sobre un subespacio se define como:

$$\vec{v} = \text{proy}_W(\vec{v}) + \text{perp}_W(\vec{v})$$

Vamos a calcular la proyección ortogonal sobre W. Necesitamos una base ortogonal y claramente $\mathcal{B}_W$ ya lo es, por tanto:

$$\vec{w} = \text{proy}_W(\vec{v}) = \frac{[1,0,0,0]\cdot[1,1,0,1]}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{[1,0,0,0]\cdot[0,0,1,0]}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Entonces:

$$\vec{w}^\perp = \vec{v} - \text{proy}_W(\vec{v}) = [1,0,0,0]^T - \frac{1}{3}[1,1,0,1]^T = \boxed{[2/3, -1/3, 0, -1/3]^T}$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^\perp}$$

P3

Como $[\ker(A)]^\perp = \mathrm{fil}(A)$, vamos a calcular su complemento ortogonal.

$$\ker(A): \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El subespacio $\ker(A)$ se define como el *núcleo* de una matriz particular. Su complemento ortogonal corresponde con el espacio fila de dicha matriz:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{fil}(A)} = \{[1,1,0,0],\ [1,0,-1,0]\}$$

De igual forma $[\ker(A^T)]^\perp = \mathrm{col}(A)$, por tanto:

$$\ker(A^T): \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{col}(A)} = \{[1,1,0],\ [1,0,1]\}$$

En base a esto $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Para definir A, necesitamos encontrar 3 filas que sean combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_{\mathrm{fil}(A)} = \{[1,1,0,0],\ [1,0,-1,0]\}$ y cuatro columnas que sean combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_{\mathrm{col}(A)} = \{[1,1,0],\ [1,0,1]\}$.

Hay infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

P4

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{v} = P_{\mathcal{C}}[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}\left(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}\right) = P_{\mathcal{C}}\left(P^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

P5

$$y = a + bx + cx^2 \to \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ a-b+c &= 1 \\ a &= 1 \\ a &= 0 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^TA\vec{p} = A^T\vec{b} \to \left\{ \begin{array}{l} A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \\ A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \to \boxed{\begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ c = 1/2 \end{cases}}$$

Error:

$$e = \|\vec{e}\| = \|A\vec{p} - \vec{b}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{2}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

P6

a)

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad ; \quad (3-\lambda)^2 = 1 \quad ; \quad 3-\lambda = \pm 1 \quad ; \quad \lambda = 3 \pm 1 = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2} \end{cases}} \quad ; \quad \boxed{\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Autovectores:

$\underline{\lambda_1 = 4}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matriz U:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Completamos la matriz U con un vector $\vec{u}_3$ ortonormal al resto, por ejemplo: $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 0, 1]^T$.

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Comprobación:

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \vec{u}_r \vec{v}_r^T$$

$$\boxed{A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Comprobación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P1 (2 puntos) Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciónes, justificando de forma razonada las ciertas y dando un contraejemplo en las falsas. (**0,5 puntos** cada una).

(a) Los subespacios imagen y núcleo de una matriz nunca pueden tener la misma dimensión.

(b) Los mínimos cuadrados sólo pueden aplicarse para ajustar datos a curvas definidas por funciones lineales en todas las variables.

(c) El determinante de toda matriz ortogonal es 1.

(d) Los valores singulares de toda matriz simétrica son los valores absolutos de los autovalores de la matriz.

P2 (2 puntos) Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ con matríz asociada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) (1 punto) Encontrar la nulidad, el rango y bases del núcleo y la imagen de T.

(b) (1 punto) Encontrar, en caso de que exista, la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [1, 1, 1, -1, -1, 0] \in \mathbb{R}^6$ sobre $[\ker(T)]^{\perp}$, (complemento ortogonal del núcleo de T).

P3 (2,5 puntos) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) (1 punto) Encontrar los autovalores y autoespacios asociados de A.

(b) (1,5 puntos) Encontrar, en caso de que existan, la descomposición espectral y la descomposición en valores singulares de A.

P4 (2 puntos) A partir de la siguiente tabla de valores:

x	-1	0	0	1	1
y	1	0	1	0	1

(a) (0,75 puntos) Encontrar, si es posible, el ajuste por mínimos cuadrados a la parábola: $y = a+bx+cx^2$.

(b) (0,75 puntos) Encontrar, si es posible, el ajuste por mínimos cuadrados a la función: $y = ax + b\sqrt[3]{x^2}$.

(c) (0,50 puntos) Analizar en base al error de mínimos cuadrados, cual de las dos funciones **(a)** ó **(b)** representa un mejor ajuste.

P5 (1,5 puntos) La matriz de cambio de una base $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{C}$ de un subespacio W es:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que expresados en la base canónica, los vectores de la base $\mathcal{B}$ son:

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = [1, 0, 1], \vec{u}_2 = [1, 1, 0], \vec{u}_3 = [0, 0, 1]\}$$

encontrar los vectores de la base $\mathcal{C} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

(a) **Falso**. El teorema del rango no establece que no puedan ser iguales. Por ejemplo en la matriz:

$$A\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{im}(A) = \operatorname{col}(A) & = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) & \to \dim = 1 \\ \\ \ker(A) & = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) & \to \dim = 1 \end{cases}$$

(b) **Falso**. La función de ajuste en principio puede ser cualquiera, aunque para que la solución del problema sea un SEL, la función del ajuste debe ser lineal en los parámetros, (no en las variables). Por ejemplo se pueden ajustar datos a parábolas:

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

siendo las parábolas funciones no lineales en la variable x y la solución del ajuste, a través de las ecuaciones normales, vendrá dada por un SEL.

(c) **Falso**. Por definición una matriz ortogonal Q cumple:

$$Q^{-1} = Q^T \implies QQ^T = I$$

Tomando determinantes y teniendo en cuenta que $|A| = |A^T|$, se tiene:

$$|QQ^T| = |I| \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} |QQ^T| = |Q|\,|Q^T| = |Q|^2 \\ |I| = 1 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad |Q|^2 = 1 \quad ; \quad \boxed{|Q| = \pm 1}$$

Ejemplo de matriz ortogonal con determinante -1:

$$\boxed{Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

(d) **Cierto**. Sea A una matriz simétrica y por tanto diagonalizable ortogonalmente:

$$A = A^T = QDQ^T$$

donde en la matriz diagonal D están los n autovectores de A: $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Los valores singulares de A son las raices cuadradas de los autovalores de A^TA.

$$A^TA = (QDQ^T)(QDQ^T) = QD^2Q^T$$

Por tanto los autovalores de A^TA son los cuadrados de los autovalores de A y los valores singulares serán:

$$\boxed{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|}$$

PREGUNTA 2

(a) Calculamos el núcleo de la matriz por el método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{F_3+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema escalonado por el método de sustitución hacia atrás:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & = & -x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = -t_1 - t_2 - t_3 - t_4 \\ x_2 & = & t_1 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & t_2 \\ x_5 & = & t_3 \\ x_6 & = & t_4 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto una base del núcleo de T puede ser:

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{ker}} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

De aquí claramente:

$$\boxed{\text{nul}(T) = \dim(\ker) = 4}$$

Del resultado del método de Gauss anterior vemos que:

$$\boxed{\text{rang}(A) = \text{rang}(T) = 2}$$

Y como la imagen coincide con el espacio columna, tenemos que sólo dos columnas de A son linealmente independientes. Del resultado del método de Gauss vemos que corresponde por ejemplo con las columnas 1 y 3. Una base de la imagen de T puede ser:

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{im}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}}$$

(b) Como:

$$(\ker(A))^{\perp} = \text{fil}(A)$$

Del resultado de Gauss sacamos que una base del espacio fila puede ser:

$$(\ker(A))^{\perp} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Para calcular la proyección ortogonal sobre este subespacio necesitamos una base ortogonal. Ortogonalizando por Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vec{u}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre el subespacio $(\ker(A))^{\perp}$ será:

$$\text{proy}_{\ker^{\perp}}(\vec{v}) = \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{proy}_{\ker^{\perp}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 3

(a) Autovalores:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(1-\lambda) + (-1-\lambda) = (-1-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda)+1] = -(1+\lambda)\lambda^2 = 0$$

Resolviendo:

$$\boxed{\lambda_1 = -1 \quad ; \quad \lambda_{2,3} = 0}$$

Autovectores:

$\underline{\lambda_1 = -1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \boxed{E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\underline{\lambda_{2,3} = 0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big| \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

(b)

Como A no es símetrica no se puede obtener la *descomposición espectral*.

Vamos a calcular la *descomposición en valores singulares*.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalores y Valores Singulares:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 4] = 0$$

Resolviendo:

$$\boxed{\lambda_1 = 4 \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \lambda_3 = 0} \Longrightarrow \boxed{\sigma_1 = 2 \quad ; \quad \sigma_2 = 1 \quad ; \quad \sigma_3 = 0} \quad ; \quad \boxed{\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Autovectores:

$\underline{\lambda_1 = 4}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

Reuniendo los autovectores normalizados:

$$\boxed{V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

Calculo de la matriz U:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_1 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $\sigma_3 = 0$ no podemos utilizar esta fórmula para calcular $\vec{u}_3$. Para ello basta con encontrar un vector ortonormal a los anteriores.

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

Teniendo en cuenta las matrices anteriores, la *descomposición en valores singulares* de A es:

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

PREGUNTA 4

(a) Las ecuaciones correspondientes a la parábola $y = a + bx + cx^2$ son:

$$\left.\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 1 \\ a &=& 0 \\ a &=& 1 \\ a+b+c &=& 0 \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Calculamos las ecuaciones normales de este problema:

$$A^T A\vec{p} = A^T\vec{b} \quad \Longrightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-3F_2]{F_1-5F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -14 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{1}{2} \;;\; b = -\frac{1}{4} \;;\; c = \frac{1}{4}}$$

(b) Las ecuaciones correspondientes a la función $y = ax + b\sqrt[3]{x^2}$ son:

$$\left.\begin{array}{rcl} -a-b &=& 1 \\ 0a+0b &=& 0 \\ 0a+0b &=& 1 \\ a+b &=& 0 \\ a+b &=& 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Calculamos las ecuaciones normales de este problema:

$$A^T A\vec{p} = A^T\vec{b} \quad \Longrightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1-3F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -8 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = -\frac{1}{4} \;;\; b = \frac{3}{4}}$$

(c) Vamos a calcular el error del ajuste en los dos casos (a) y (b).

Error caso (a)

$$\vec{e}_1 = \|A\vec{p} - \vec{b}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boxed{e_1 = \|\vec{e}_1\| = \sqrt{4\frac{1}{4}} = 1}$$

Error caso (b)

$$\vec{e}_2 = \|A\vec{p} - \vec{b}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boxed{e_2 = \|\vec{e}_2\| = \sqrt{1 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{3/2}}$$

Basándonos exclusivamente en el error, el primer ajuste es mejor que el segundo, ya que $e_1 < e_2$.

PREGUNTA 5

Como la matriz de cambio de base se calcula como:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\vec{u}_1]_{\mathcal{C}} & [\vec{u}_2]_{\mathcal{C}} & [\vec{u}_3]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

los elementos de la columna i de la matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son los coeficientes de la combinación lineal de los vectores $\vec{v}_i$ de la base $\mathcal{C}$ para obtener $\vec{u}_i$. Entonces:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 & = & \vec{u}_1 \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 & = & \vec{u}_2 \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 & = & \vec{u}_3 \end{array} \right\}$$

De forma matricial lo podemos expresar como:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} \implies \boxed{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Por tanto basta con calcular la inversa de la matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ y multiplicarla por la matriz con vectores columna $\vec{u}_i$ y se obtendrá una matriz con los vectores columna $\vec{v}_i$.

Calculamos primero la matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - 2F_2]{F1 + F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Y ahora calculamos los vectores $\vec{v}_i$:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Por tanto la solución es:

$$\boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 1 (15%)
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x-y+z-w &= -1 \\ x+y+z &= 2 \end{cases}$$

PREGUNTA 2 (15%)
En la ladera de una montaña que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con la llanura crece un árbol en dirección vertical. El árbol mide 5 metros y el Sol está justo en la dirección perpendicular a la ladera de la montaña. <u>Aplicando el concepto de proyección ortogonal</u> responder a las siguientes preguntas:

a) (8%) ¿Cuánto mide la sombra del árbol en la ladera?

b) (7%) ¿Cuál es la distancia entre la punta de la copa del árbol y la ladera?

PREGUNTA 3 (20%)
Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ con matriz asociada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) (7%) Encontrar una base del núcleo de A.

b) (6%) Encontrar una base ortogonal de la imagen de la transformación lineal.

c) (7%) Encontrar una base del complemento ortogonal del espacio columna de A.

PREGUNTA 4 (15%)
Dada la ecuación del plano $z = a + bx + cy$ y los puntos $(1, 1, 1)$, $(-1, 2, -1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$.

a) (5%) Escribir un sistema de ecuaciones lineales para estudiar si los cuatro puntos pueden ser coplanarios y analizar la compatibilidad del sistema.

b) (10%) Aproximar la solución del sistema, calculando los parámetros a,b y c de forma que el plano esté lo más próximo posible a todos los puntos, y calcular el error de la aproximación.

PREGUNTA 5 (15%)

a) (5%) Justificar las respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos autovectores linealmente independientes están asociados a un autovalor de multiplicidad algebraica m?
2. Si una matriz tiene un autovalor igual a cero, ¿significa que su autovector asociado es el vector nulo?

b) (10%) Razonar si las siguientes matrices A y B son semejantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(Continúa detrás)

PREGUNTA 6 (20%)

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (10%) Encontrar una descomposición en valores singulares de A.

b) (10%) Calcular la pseudoinversa de A.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

Por el método de Gauss-Jordan se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

cuya solución es: $\boxed{x = t,\ y = 2,\ z = -t,\ w = -1}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA 2

- Utilizando la proyección ortogonal tenemos que la longitud de la sombra del árbol es la norma de la proyección ortogonal del vector árbol sobre la dirección de la ladera $\left\|proy_{[1,1]}[0,5]\right\|$. Haciendo los cálculos $proy_{[1,1]}[0,5] = \frac{5}{2}[1,1]$. La longitud de la sombra será por tanto $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
- La distancia de la punta de la copa a la ladera es la norma del vector perpendicular del vector árbol a la ladera de la montaña $\left\|perp_{[1,1]}[0,5]\right\|$. Haciendo los cálculos $perp_{[1,1]}[0,5] = \frac{5}{2}[-1,1]$. Tanto la distancia desde la punta de la copa del árbol a la ladera es igual a $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

PREGUNTA 3

a) Por el método de Gauss-Jordan se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución del sistema homogéneo es $\{x_1 = t + s,\ x_2 = -2s,\ x_3 = t,\ x_4 = s\}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$. Por tanto una base del núcleo será:

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{ker}} = \{[1,0,1,0],[1,-2,0,1]\}}$$

b) La imagen de la transformación coincide con el espacio columna de la matriz A. Según la matriz reducida obtenida en el apartado a) deducimos que una base de espacio columna serán las dos primeras columnas de A.

$$\mathcal{B}_{\text{im}} = \{[1,0,1,1,0],[1,-1,2,0,2]\}$$

Aplicando Gram-Schmidt se obtiene una base ortogonal de la imagen:

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{o-im}} = \{[1,0,1,1,0],[0,-1,1,-1,2]\}}$$

c) Todo vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ pertenece a $[\text{col}(A)]^\perp$ si cumple:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo por Gauss se obtiene la solución $\{x_1 = -t - s,\ x_2 = t - s + 2w,\ x_3 = t,\ x_4 = s,\ x_5 = w\}$, $\forall t, s, w \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{col}^\perp} = \{[-1,1,1,0,0],[-1,-1,0,1,0],[0,2,0,0,1]\}}$$

Nota: Otra forma de resolverlo es tener en cuenta que $[\text{col}(A)]^\perp = \ker(A^T)$.

PREGUNTA 4

a) El sistema que describe la pertenencia de los puntos al plano es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 1 \\ a-b+2c &=& -1 \\ a+c &=& 2 \\ a+b &=& 0 \end{array}\right.$$

claramente incompatible.

b) Las ecuaciones normales del método de mínimos cuadrados $A^T A\vec{p} = A^T\vec{b}$ generan un sistema de ecuaciones lineales dado por la siguiente matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

cuya solución por Gauss es $\vec{p} = [1/6, 2/3, 1/6]$, siendo por tanto la ecuación del plano pedido:

$$\boxed{z = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y}$$

El error de la aproximación será:

$$\text{error} = \|A\vec{p} - \vec{b}\| = \left\|[0, \frac{5}{6}, -\frac{10}{6}, \frac{5}{6}\right\| = \boxed{\frac{\sqrt{150}}{6}}$$

PREGUNTA 5

a.1) Puede tener desde 1 hasta m, ya que como mucho una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede tener n autovectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes, que formarían una base del espacio $\mathbb{R}^n$.

a.2) No es posible ya que por definición un autovector es un vector (real o complejo) no nulo.

b) Las matrices semejantes tienen el mismo determinante, los mismos autovalores y el mismo rango y nulidad. Fácilmente se comprueba que $|A| = |B| = -12$. El rango de la matriz A es 4 y por tanto su nulidad es cero. Fácilmente se comprueba que el rango de B también es 4 y por tanto su nulidad también cero. Como A es triangular sus autovalores corresponden con los elementos de la diagonal principal $\lambda_A = \{1, 2, 3, -2\}$. Calculando los autovectores de la matriz B tenemos:

$$|B - \lambda I| = (1-\lambda)(3-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] = 0$$

comprobándose que todos los autovalores de A cumplen esta ecuación, por tanto tienen los mismos autovalores.

$\boxed{\text{Deducimos que las matrices } A \text{ y } B \text{ son semejantes.}}$

PREGUNTA 6

a) Primero se calcula A^TA y de esta matriz se hallan sus autovalores que son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$; los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = 1$. Los autovectores asociados unitarios correspondientes son $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.. Con estos tres vectores podemos escribir la matriz V.

Ahora se calcula la matriz U sus columnas son los vectores $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Además, el conjunto $\{u_1, u_2\}$ se completa con un vector $\overrightarrow{x}$ para formar una base para R^3 para ello podemos tomar $\overrightarrow{x} = (0,0,1)$ que es linealmente independiente de los vectores u_1, u_2 y mediante el proceso de Gram-Schmidt se consigue una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_3 = \overrightarrow{x} - \frac{u_1 \overrightarrow{x}}{u_1 u_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ cuya norma es $\|u_3\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Sean $U = [u_1 \;\; u_2 \; u_3]$, $V = [v_1 \;\; v_2 \;]$ y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces una descomposición en valores singulares de $A = U\Sigma V^T$ es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

b) Hay varias formas de calcular la pseudoinversa. Una de ellas es utilizando la *dvs* de A de forma: $A^+ = V\Sigma^+U^T$, donde Σ^+ es la matriz transpuesta con los inversos de la diagonal. Utilizando los resultados del apartado anterior se tiene:

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^+ = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

De igual forma se llega a este mismo resultado por el método tradicional $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$.

OPCIÓN 1: EVALUACIÓN CONTINUA

PREGUNTA 1 (1 pto)

a) (0.5 ptos) Encontrar, en caso de que exista, la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+w+t & = & -1 \\ -x-y-z+w-t & = & -5 \\ -x+y-z+w-t & = & -3 \\ 2x-y-z-w+t & = & -3 \\ x+y+z-w-t & = & -1 \end{array}\right.$$

b) (0.5 ptos) Determinar el valor de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ sabiendo que la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [1, -1, 1]$ sobre $\vec{u}$ es $\vec{p}_1 = [\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}]$ y que la proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{s} = [2, -1, 1]$ es $\vec{p}_2 = [\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}]$.

PREGUNTA 2 (1 pto)

a) (0.25 ptos) Definir qué es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Decir, justificando la respuesta, si las siguientes transformaciones son lineales:

$$\text{i)} \left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_2 - x_3 \\ y_2 & = & x_2 - 2 \\ y_3 & = & x_2 + x_3 \end{array}\right. \qquad \text{ii)} \left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 - x_3 \\ y_2 & = & 0 \\ y_3 & = & x_2 + x_3 \end{array}\right.$$

b) (0.25 ptos) Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal correspondiente a la reflexión de un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x = z$. Justifica la respuesta.

c) (0.5 ptos) Encontrar bases del núcleo y la imagen de la transformación lineal definida por la siguiente matriz A. ¿Cuál es la suma del rango y la nulidad de dicha transformación lineal? ¿Concuerda con lo esperado?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 3 (1 pto)

Se quiere ajustar por mínimos cuadrados los siguientes datos tabulados a una función de la forma, $y(t) = a + \frac{b}{t}$.

t	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
y	-8	-1	1	10

a) (0.2 puntos) Escribir el sistema de ecuaciones lineales, $A\vec{x} = \vec{b}$, que deben cumplir los parámetros a, b para que los datos satisfagan la ecuación dada, identificando A, $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

b) (0.4 puntos) Obtener la solución de mínimos cuadrados del problema

c) (0.4 puntos) Hallar la descomposición QR de la matriz del sistema del primer apartado.

PREGUNTA 4 (1 pto)

a) (0.75 ptos) Calcular la diagonalización ortogonal de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) (0.25 ptos) **Utilizar la diagonalización anterior** para calcular A^5.

(Continúa detrás)

OPCIÓN 2: SIN EVALUACIÓN CONTINUA

PREGUNTA 5 (2 ptos)
En un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita V se puede definir un producto escalar entre dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de la forma $\vec{x} \cdot \vec{y} = X^T MY$, donde X representa el vector columna de $\vec{x}$, y M es una matriz denominada *métrica*. Si definimos en $\mathbb{R}^3$ un producto escalar con una matriz *métrica* asociada:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (1 pto) Hallar **de forma razonada** α, β y γ para que la matriz M defina un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que cumpla la propiedad conmutativa.

b) (1 pto) Obtener una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ (**respecto del anterior producto escalar**), tal que $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ tengan iguales direcciones y sentidos que [0, 1, 0] y [0, 0, 1] respectivamente.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

a)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_4-2F_1 \\ F_5-F_1}]{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}F_5]{\substack{F_2+F_5 \\ F_3+F_5}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}F_3 \\ F_4-F_5}]{\substack{F_1+F_5 \\ -\frac{1}{2}F_2}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_5+F_4]{\substack{F_1-F_3-F_2 \\ -\frac{1}{2}F_4}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\boxed{x=-2 \quad ; \quad y=1 \quad ; \quad z=2 \quad ; \quad w=-1 \quad ; \quad t=3}$$

b) La proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$ da como resultado un vector en la dirección del vector $\vec{u}$, por tanto:

$$\vec{u} = \alpha\vec{p_1} \qquad ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Por otra parte:

$$\text{proy}_{\vec{s}}(\vec{u}) = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{\vec{s}\cdot\vec{s}}\vec{s} = \frac{\vec{s}\cdot(\alpha\vec{p_1})}{\vec{s}\cdot\vec{s}}\vec{s} = \alpha\frac{[2,-1,1]\cdot[\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}]}{[2,-1,1]\cdot[2,-1,1]}[2,-1,1] = \frac{\alpha}{18}[2,-1,1]$$

Este valor debe corresponder con $\vec{p_2} = \beta\vec{s}$ y por tanto:

$$\vec{p_2} = [\frac{-1}{3},\frac{1}{6},\frac{-1}{6}] = \frac{-1}{6}[2,-1,1]$$

Igualando ambos valores se obtiene:

$$\frac{\alpha}{18} = \frac{-1}{6} \qquad ; \qquad \alpha = -3$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{u} = \alpha\vec{p_1} = (-3)[\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}] = [1,2,-1]}$$

PREGUNTA 2

a) Una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una aplicación entre vectores del espacio $\mathbb{R}^n$ a vectores del espacio $\mathbb{R}^m$ que cumple la siguiente propiedad:

$$T(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2) \quad ; \quad \forall\vec{v}_1,\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Toda TL tiene una matriz asociada A tal que si $T(\vec{x}) = \vec{y}$, entonces $A\vec{x} = \vec{y}$, $\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

i) No lo es. Contraejemplo: $T(1,0,0) + T(0,1,0) \neq T(1,1,0)$.

$$\begin{cases} T(1,0,0)+T(0,1,0) & = & (0,-2,0)+(1,-1,1) = (1,-3,1) \\ T(1,1,0) & = & (1,-1,1) \end{cases}$$

ii) Sí lo es. La matriz asociada es:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

b) La reflexión en $\mathbb{R}^3$ de un vector $\vec{v}$ sobre un plano Π con vector normal $\vec{n}$ es:

$$\vec{r} = \vec{v} - 2\vec{p}$$

donde $\vec{p}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{n}$.

En nuestro caso, un vector normal al plano $x - z = 0$ es $\vec{n} = [1, 0, -1]$ y por tanto para un vector general $\vec{v} = [x, y, z]$ se tiene:

$$\vec{p} = \text{proy}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \frac{[1, 0, -1] \cdot [x, y, z]}{2}[1, 0, -1] = \frac{1}{2}[x - z, 0, -x + z]$$

Entonces:

$$\vec{r} = \vec{v} - 2\vec{p} = [x, y, z] - [x - z, 0, -x + z] = [z, y, x]$$

Finalmente, la matriz asociada a la transformación lineal $[x, y, z] \to [z, y, x]$ es:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

c) La forma reducida de A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

por tanto el núcleo es el espacio de los vectores que se pueden construir de la forma $t[0, -2, 1]$, siendo $t \in \mathbb{R}$. Una base de este núcleo es $\{[0, -2, 1]\}$.

La imagen viene dada por todas la combinaciones lineales de sus vectores columna. Por tanto, la imagen estará formada por todos los vectores de la forma:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_2 + 2x_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

luego una base de la imagen es: $\{[1, 1], [1, 2]\}$.

El rango de la aplicación es 2 y la nulidad 1, cuya suma es 3, como debe ser en una aplicación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ (la suma del rango y la nulidad coincide con la dimensión del espacio origen).

PREGUNTA 3

a)

$$\begin{cases} a - b &= -8 \\ a + 4b &= -1 \\ a + 2b &= 1 \\ a + b &= 10 \end{cases} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

b) Multiplicando ambas partes de la ecuación matricial por la transpuesta de A obtenemos las ecuaciones normales: $A^tAx = A^tb$, con $A^tA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 22 \end{bmatrix}$ y $A^tb = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$ y cuya solución es : $\boxed{a = -1}$ y $\boxed{b = 1}$.

c) Las columnas de A son linealmente independientes, pero no son ortogonales. Entonces, aplicaremos el método de Gram-Schmidt para ortogonalizar la base de $\text{col}(A)$.

El primer vector es $v = (1, 1, 1, 1)^t$.

El segundo vector: $w = (-1, 4, 2, 1)^t - \frac{(-1,4,2,1)(1,1,1,1)}{2}(1, 1, 1, 1)^t = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^t$.

Normalizando ambos vectores, obtenemos finalmente: $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ y $w = (-\frac{5}{\sqrt{52}}, \frac{5}{\sqrt{52}}, \frac{1}{\sqrt{52}}, -\frac{1}{\sqrt{52}})^t$.

La matriz Q tendrá como columnas los vectores v y w, la matriz R calcularemos como $R = Q^tA$.

Las matrices resultantes:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{\sqrt{52}} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{\sqrt{52}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{52}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{52}} \end{bmatrix} \quad ; \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 4

a) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_1 = 2$ triple.

$$E_4 = gen\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad E_2 = gen\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$A^5 = QD^5Q^T = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 528 & 0 & 496 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 496 & 0 & 528 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 5

a) Para que el producto escalar sea conmutativo, se debe cumplir:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x} \cdot \vec{y})^T = (X^T M Y)^T = Y^T M^T X = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

Por tanto, necesariamente debe ser $M = M^T$, luego $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$.

b) Por ser $\mathcal{B}$ una base ortonormal, se debe cumplir:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a^2 \Rightarrow a = 1,$$

ya que debe tener el mismo sentido que [0, 0, 1].

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = 2b^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}/2,$$

ya que debe tener el mismo sentido que [0, 1, 0].
Por otra parte, $\vec{u}_1$ debe ser ortogonal a $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ y tener módulo 1:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} c & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} c & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}(c/2 + d) = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} c & d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix} = 2(c^2 + dc + d^2) = 1$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos: $c = -\sqrt{6}/3$ y $d = \sqrt{6}/6$, o también $c = \sqrt{6}/3$ y $d = -\sqrt{6}/6$, por lo que la base es:

$$\vec{u}_1 = [-\sqrt{6}/3,\ \sqrt{6}/6,\ 0],\ \vec{u}_2 = [0,\ \sqrt{2}/2,\ 0],\ \vec{u}_3 = [0,\ 0,\ 1],$$

o también:

$$\vec{u}_1 = [\sqrt{6}/3,\ -\sqrt{6}/6,\ 0],\ \vec{u}_2 = [0,\ \sqrt{2}/2,\ 0],\ \vec{u}_3 = [0,\ 0,\ 1].$$

Duración: 3 horas

P1 (2 ptos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) (1 pto) Encontrar, en caso de ser posible, la inversa de la matriz de coeficientes, A^{-1}.

b) (1 pto) Encontrar, en caso de ser posible, la solución del sistema $\vec{x}$.

P2 (3 ptos) Dada la siguiente matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (1 pto) Encontrar el núcleo de A.

b) (1 pto) Encontrar una base ortogonal del espacio fila de A.

c) (1 pto) Encontrar el complemento ortogonal del espacio fila de A.

P3 (2 ptos) Dados la matriz A y el vector $\vec{w}$ siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) (1 pto) En caso de ser posible, diagonalizar la matriz A.

b) (1 pto) Encontrar el vector $\vec{x} = A^n \vec{w}$, para el valor $n = 100$.

P4 (1 pto) Ajustar por mínimos cuadrados la siguiente tabla de datos a la curva, $y = a + bx + cx^2$.

x	-1	0	1	2
y	2	1	0	1

(Continúa detrás)

P5 (2 ptos) Justificar **brevemente**, (máximo 3 líneas), si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS .
(Cada respuesta acertada y bien justificada vale +0'25 puntos, cada respuesta incorrecta, no contestada o mal justificada vale 0 puntos).

1. Un conjunto de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es linealmente independiente si uno de ellos está en el complemento ortogonal del subespacio generado por los otros dos.
2. Dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son simétricas si y sólo si la matriz $C = A + B$ también es simétrica.
3. Todo conjunto generador de un espacio vectorial V de dimensión $n > 0$, debe estar formado de n o más vectores de V linealmente independientes.
4. El método de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, sólo es válido cuando la dimensión del espacio fila de la matriz A es no nula, $\dim[\text{fil}(A)] \neq 0$.
5. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene rango k, entonces sólo hay k vectores fila pertenecientes a $\mathbb{R}^n$, linealmente independientes.
6. El conjunto de autovectores de toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es un conjunto ortogonal si y sólo si A es una matriz ortogonal.
7. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si el conjunto de sus autovectores es una base del espacio $\mathbb{R}^n$.
8. La solución de mínimos cuadrados de un sistema $A\vec{x} \approx \vec{b}$ es el vector $\vec{x}$ más cercano al subespacio ortogonal de $A^{-1}\vec{b}$.

SOLUCIONES

1.a)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right] \quad ; \quad \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}}$$

1.b)

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}}$$

2.a) El núcleo de una matriz son todas las soluciones del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_2 - x_3 - 2x_5 = x_5 - x_3 - 2x_5 = -x_3 - x_5 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 & = & -\frac{1}{2}x_5 \end{array} \right.$$

Llamando $x_3 = t$ y $x_5 = s$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, podemos expresar el núcleo de A como (por ejemplo):

$$\boxed{\ker(A) = \text{gen}([-1, 0, 1, 0, 0], [-2, 1, 0, -1, 2])}$$

2.b) Del apartado anterior sabemos que solamente las tres primeras filas de la matriz A son linealmente independientes, por tanto utilizando Gram-Schmidt sobre el resultado anterior:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= [0,0,0,2,1] \\
\vec{x}_2 &= [0,2,0,0,-1] - \tfrac{[0,0,0,2,1]*[0,2,0,0,-1]}{[0,0,0,2,1]*[0,0,0,2,1]}[0,0,0,2,1] = [0,2,0,0,-1] + \tfrac{1}{5}[0,0,0,2,1] = [0,2,0,2/5,-4/5] \\
\vec{x}_3 &= [1,-2,1,0,2] - \tfrac{[0,0,0,2,1]*[1,-2,1,0,2]}{[0,0,0,2,1]*[0,0,0,2,1]}[0,0,0,2,1] - \tfrac{[0,2,0,2/5,-4/5]*[1,-2,1,0,2]}{[0,2,0,2/5,-4/5]*[0,2,0,2/5,-4/5]}[0,2,0,2/5,-4/5] = \\
& [1,-2,1,0,2] - \tfrac{2}{5}[0,0,0,2,1] + \tfrac{7}{6}[0,2,0,2/5,-4/5] = [1,1/3,1,-1/3,2/3]
\end{aligned}$$

Por tanto, una posible base ortogonal del espacio fila de A es $\boxed{\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}}$.

2.c) Como $(\text{fil}(A))^{\perp} = \ker(A)$, se tiene:

$$\boxed{(\text{fil}(A))^{\perp} = \ker(A) = \text{gen}([-1,0,1,0,0],[2,-1,0,1,2])}$$

3.a) Autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 1 \\ \lambda_3 &=& 2 \end{array} \right.$$

Autovectores

$\boxed{\lambda_1 = 0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} v_1 &=& t \\ v_2 &=& t \\ v_3 &=& 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} v_2 &=& v_3 \\ v_1 &=& v_3 \\ v_3 &=& t \end{array} \right. \quad ; \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = 2}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} v_1 &=& 0 \\ v_2 &=& v_3 \\ v_3 &=& t \end{array} \right. \quad ; \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por ejemplo:

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad AP = PD}$$

3.b) Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son los autovalores distintos de A con vectores asociados $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ se tiene:

$$A^n \vec{w} = c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 + c_3 \lambda_3^n \vec{v}_3$$

donde $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$. Para calcular los coeficientes $\{c_1, c_2, c_3\}$ podemos resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \vec{w}$$

En nuestro caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_3 & = & 1 \\ c_2 & = & 2 - c_3 = 1 \\ c_1 & = & -c_2 = -1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$A^{100}\vec{w} = c_1\lambda_1^{100}\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^{100}\vec{v}_2 + c_3\lambda_3^{100}\vec{v}_3 = -0^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^{100} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 2^{100} \\ 1 + 2^{100} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 2^{100} \\ 1 + 2^{100} \end{bmatrix}}$$

4) El sistema a resolver será:

$$\left.\begin{array}{lcl} a - b + c & = & 2 \\ a & = & 1 \\ a + b + c & = & 0 \\ a + 2b + 4c & = & 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A\vec{c} = \vec{b}$$

La solución de mínimos cuadrados será la solución del sistema $A^T A\vec{c} = A^T\vec{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 18 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & -4 \\ 0 & 10 & 6 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a & = & \dfrac{4 - 2b - 6c}{4} = \dfrac{7}{10} \\ b & = & \dfrac{-4 - 10c}{10} = \dfrac{-9}{10} \\ c & = & \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

5)

1. FALSO. Esos *otros dos vectores* de los que habla el enunciado pueden ser linealmente dependientes, siendo por tanto el conjunto linealmente dependiente.
2. VERDADERO, porque $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. FALSO, debe estar formada por exactamente n vectores linealmente independientes.
4. FALSO. La dim[fil(A)] debe ser igual a n, siendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
5. VERDADERO. Si el rango de $A^{m\times n}$ es k, tendrá k vectores fila $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y k vectores columna $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ linealmente independientes.
6. FALSO. La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea ortogonalmente diagonalizable es que sea *simétrica* y por tanto no necesariamente A debe ser ortogonal.
7. VERDADERO. Si los autovectores forman una base de $\mathbb{R}^n$, entonces son linealmente independientes, y la matriz P de sus autovectores es invertible y por tanto $A = PDP^{-1}$, por lo que A es diagonalizable.
8. FALSO. La solución de mínimos cuadrados es la proyección ortogonal de vector $\vec{b}$ sobre el espacio columna de A, que es a su vez la mejor aproximación de $\vec{b}$ en col(A). Además, no es necesario que exista A^{-1}.

Convocatoria Extraordinaria

2009 - 13

P1 (2 ptos) Definir de forma breve y concisa los siguientes conceptos:

a) (0.5 ptos) Matrices Semejantes.

b) (0.5 ptos) Subespacio Vectorial.

c) (0.5 ptos) Matriz Diagonalizable.

d) (0.5 ptos) Isomorfismo.

P2 (1.5 ptos) Sea T una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que cumple:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) (0.5 ptos) Encontrar la matriz asociada a T.

b) (0.5 ptos) Determinar si T es inyectiva.

c) (0.5 ptos) Demostrar que T no es sobreyectiva y encontrar un vector de su imagen que no pertenezca al espacio imagen de T.

P3 (2 ptos) Dada la siguiente matriz A

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a) (1 ptos) En caso de ser posible, diagonalizar la matriz A.

b) (0.5 ptos) Calcular A^{100}.

c) (0.5 ptos) Determinar el vector $A^{1000}\vec{v}$, siendo $\vec{v} = [0, 1, 1]^T$.

P4 (1.5 ptos) Realizar el ajuste de los siguientes datos a la función dada, determinando el error de ajuste.

x	0	0	0	1
y	0	1	0	1

; $y = ax + bx^2$

P5 (1.5 ptos) Encontrar, en caso de que exista, la reflexión del vector $\vec{v} = [5, 4, -2]$ sobre el plano $2x + y - 2z = 0$.

P6 (1.5 ptos) Encontrar, en caso de ser posible, una matriz $A \in \mathbb{R}^{4\ x\ 2}$ con las siguientes características:

a) Sus valores singulares son: $\sigma_1 = 4$ y $\sigma_2 = 2$

b) La matriz V de la descomposición en valores singulares de $A = U\Sigma V^T$ es $V = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $B_{col(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

1 Soluciones

P1

a) **Matrices Semejantes:** Sean A, B matrices $\mathbb{R}^{n\,x\,n}$. Se dice que A es semejante a B si existe una matriz (real o compleja) $P \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ invertible tal que:

$$AP = PB \to P^{-1}AP = B$$

b) **Subespacio Vectorial:** Un subconjunto W de un espacio vectorial V, $W \subset V$, se denomina subespacio vectorial de V si cumple las siguientes tres propiedades:

1) W contiene el elemento nulo de V.
2) W es cerrado bajo la suma, es decir, si w_1, $w_2 \in W \to w_1 + w_2 \in W$
3) W es cerrado bajo el producto por un escalar, es decir, si $w \in W$ y $k \in \mathbb{R} \to kw \in W$

c) **Matriz Diagonalizable:** Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal $D \in \mathbb{K}^{n\,x\,n}$ tal que A sea semejante a D, es decir, que exista una matriz $P \in \mathbb{K}^{n\,x\,n}$ invertible tal que:

$$AP = PD \quad \Longrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

d) **Isomorfismo:** Se las denomina isomorfismo a las transformaciones lineales biyectivas (es decir, son inyectivas y sobreyectivas).

P2

a) Sabemos que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por lo que la matriz asociada debería tener la siguiente forma:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sustituyendo obtenemos el siguiente sistema

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} 2a = 2 \\ 2d = 10 \\ 2g = 8 \end{array} \to \begin{array}{c} a = 1 \\ d = 5 \\ g = 4 \end{array}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} 3b = -6 \\ 3e = -3 \\ 3h = 3 \end{array} \to \begin{array}{c} b = -2 \\ e = -1 \\ h = 1 \end{array}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} a - c = 0 \\ d - f = 2 \\ g - i = 2 \end{array} \to \begin{array}{c} c = 1 \\ f = 3 \\ i = 2 \end{array}$$

Finalmente, la matriz asociada nos queda

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

b) Para determinar si T es inyectiva calcularemos el núcleo de la TL definida por la matriz asociada A. Aplicando Gauss-Jordan se obtiene la matriz escalonada reducida equivalente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el sistema es compatible indeterminado $ker(T) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \boxed{T \text{ no es inyectiva}}$

c) Usando el resultado anterior se tiene que las dos primeras columnas de A son linealmente independientes, por lo que ellas son una base de la imagen de A

$$Im(T) = Im(A) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \forall s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Donde $\dim(\text{im}(T)) = 2 \neq 3$, por lo tanto $\boxed{T \text{ no es sobreyectiva}}$.

Un vector que no pertenezca al espacio debe ser linealmente independiente a los vectores de la base.
Probamos por ejemplo con el vector $\vec{v} = [0, 0, 1]^T$.
Resolvemos el SEL:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Es un sistema incompatible $\Rightarrow \boxed{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } \vec{v} \notin im(T)}$.

P3

a) Para diagonalizar la matriz A se tiene: $A = \frac{1}{2}B \Rightarrow$ si $B = PDP^{-1} \Rightarrow A = P\left(\frac{1}{2}D\right)P^{-1}$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \;\; ; \;\; \rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & -2 \\ \lambda_3 & = & -2 \end{cases}$$

Autovectores:
$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = -2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que los tres autovectores son linealmente independientes y pueden formar una matriz P de la forma:

$$P = [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De igual forma, la matriz D la construimos usando los autovalores como sigue:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Sabiendo que $A^{100} = \underbrace{\left(P\left(\frac{1}{2}D\right)P^{-1}\right)\cdots\left(P\left(\frac{1}{2}D\right)P^{-1}\right)}_{100 \text{ veces}} = P\left(\frac{1}{2}D\right)^{100}P^{-1}$,

calculamos la matriz inversa de P:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{100} = P\left(\frac{1}{2}D\right)^{100}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{-100} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{-100}-1 & 0 \\ 0 & 2^{-100} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

c) Sabemos que $A^k\vec{x} = \alpha_1\lambda_1^k\vec{v_1} + \alpha_2\lambda_2^k\vec{v_2} + \alpha_3\lambda_3^k\vec{v_3}$, donde $\vec{x} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \alpha_3\vec{v_3}$

Calculamos $\vec{\alpha}$

$$P\vec{\alpha} = \vec{x} \Longrightarrow \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & -1 \\ \alpha_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$A^{1000}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(1/2)^{1000}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{1000}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1)(-1)^{1000}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -(1/2)^{1000}-1 \\ -(1/2)^{1000} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

P4

$$y = ax + bx^2 \rightarrow \begin{cases} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^T A\vec{p} = A^T\vec{b} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A^T A\vec{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \boxed{\begin{cases} b & = & t \\ & & \\ a & = & 1-t \end{cases} \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

Error:

$$e = ||\vec{e}|| = ||A\vec{p} - \vec{b}|| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-t+t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \boxed{1}$$

P5

En este problema el vector normal del plano es $\vec{n} = [2, 1, -2]$

$$\vec{u} = \vec{v} - 2\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} - 2\frac{[2, 1, -2] \cdot [5, 4, -2]}{[2, 1, -2] \cdot [2, 1, -2]} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

P6

Como $A \in \mathbb{R}^{4\ x\ 2}$, entonces $\Sigma \in \mathbb{R}^{4\ x\ 2}$, por lo tanto

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de igual forma, sabemos que $U = [\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}]$ donde $B_{col(A)} = [\vec{u_1}, \vec{u_2}]$ y $B_{ker(A^T)} = [\vec{u_3}, \vec{u_4}]$.

Como $ker(A^T) = (col(A))^{\perp}$, calculamos el complemento ortogonal de $col(A)$:

$$[\vec{u_1}, \vec{u_2}]^T\vec{x} = \vec{0} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow B_{ker(A^T)} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{\vec{u_3}, \vec{u_4}\}$$

Ahora podemos construir la matriz U normalizando los vectores $\vec{u_i}$, $i = 1, ..., 4$, de la siguiente forma:

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = U\Sigma V^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

P1 (2 puntos) Sea la matriz $A \in \Re^{m\times n}$ tal que $rango(A) = n$, siendo $n < m$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas. Cada apartado vale **0.5 puntos**.

1. El $Ker(A^T)$ es un subespacio de $\Re^m$ y la nulidad de A^T es n.

2. Si λ es autovalor de A^TA, entonces λ es real positivo o cero.

3. $\lambda = 0$ es un autovalor de AA^T.

4. Los vectores columna de A forman una base de $\Re^m$.

P2 (2 puntos) Sabemos que una TL en el plano transforma el cuadrado formado por los vértices $\{A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)\}$ en los puntos $\{A'(0,1), B'(-1,0), C'(0,-1), D'(1,0)\}$ respectivamente, mediante la composición de una rotación y una homotecia con centro en el origen, con matrices asociadas R y H respectivamente.

1. **0.66 puntos** Se pide calcular las matrices R y H, así como la matriz asociada a la transformación total. Se recomienda dibujar un esquema del problema.

2. **0.66 puntos** La matriz asociada a una TL es ortogonal si dicha TL conserva las distancias entre puntos. Según este criterio, razonar cuáles de las tres matrices calculadas en el apartado anterior serían ortogonales. Comprobarlo algebraicamente.

3. **0.67 puntos** Razonar, desde el punto de vista geométrico, si la composición de una rotación y una homotecia es conmutativa en general y comprobarlo algebraicamente.

Nota: La matriz asociada a una rotación de ángulo α con centro en el origen es $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

La matriz asociada a una homotecia con centro en el origen y razón a es $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

P3 (2 puntos) Dada la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular la descomposición en valores singulares de la matriz, y utilizando los cálculos ya realizados, dar una base del $Ker(A)$

P4 (2 puntos)

(a) 1 punto Resolver, utilizando las ecuaciones normales, el problema de ajuste de datos para el conjunto de datos $P = \{(0,0), (1,1), (-1,1)\}$ con la función $f(x) = a + bx$ (a y b son las constantes que hay que calcular).

(b) 1 punto Calcula la solución de mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones lineales del apartado anterior utilizando el concepto de proyección ortogonal. (Pista: la solución de mínimos cuadrados del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{d}$ donde $\vec{d}$ se calcula como la proyección ortogonal de $\vec{b}$ sobre un cierto subespacio). Comprobar que la solución es la misma en ambos casos.

P5 (2 puntos) Supongamos que la población de tres tipos de bacterias en un cultivo de laboratorio evoluciona de acuerdo a la siguiente ley: $\vec{p}_{t+1} = A * \vec{p}_t$ donde $\vec{p}_t$ es el vector en el que se especifican las poblaciones a tiempo t, (el tiempo se mide en horas), $\vec{p}_{t+1}$ son las poblaciones a tiempo $t+1$, y A es la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. El biólogo que estudia las bacterias necesita al menos 100 bacterias del primer tipo (cuya población viene dada por la primera componente del vector $\vec{p}$) para hacer un experimento. El biólogo deja una población inicial $\vec{p}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ cuando se va a casa. Razonar si podrá hacer el experimento cuando vuelva a trabajar 6 horas después.

Soluciones:

Solución P1:

1. El $Ker(A^T)$ es un subespacio de $\Re^m$ y la nulidad de A^T es n.

   Falso: A^T será una matriz de n filas y m columnas. Como $rango(A) = n$ y $n < m$, el $Ker(A^T)$ será un subespacio de $\Re^m$ definido por n ecuaciones linealmente independientes, luego su dimensión será $m - n$.

2. Si λ es autovalor de $A^T A$, entonces λ es real positivo o cero.

   Falso: $A^T A$ será una matriz simétrica de $\Re^{n\times n}$, por lo que sus autovalores son reales no negativos. Pero como $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T A) = n$, $A^T A$ no puede ser singular, por lo que no puede tener el autovalor cero.

3. $\lambda = 0$ es un autovalor de AA^T.

   Verdadero: AA^T será una matriz simétrica de $\Re^{m\times m}$, por lo que sus autovalores son reales no negativos. Pero como $rango(A) = n$ y $m > n$, AA^T debe ser singular, por lo que tiene el autovalor cero.

4. Los vectores columna de A forman una base de $\Re^m$.

   Falso: Los vectores columna de A forman un sistema de n vectores linealmente independientes de $\Re^m$, pero como $n < m$ no pueden formar una base de $\Re^m$.

Solución P2:

1. Se pide calcular las matrices R y H, así como la matriz asociada a la transformación total.

   Solución:
   Se trata de un giro de 45^o y una homotecia de razón $1/\sqrt{2}$ respecto del origen. Las matrices R y H serán, por tanto:

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

   La matriz asociada a la TL total será, por tanto RH o HR, al ser conmutativos el giro y la homotecia, ya que es indiferente acortar o alargar un vector y después girarlo que hacer al revés:

$$RH = HR = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. La matriz asociada a una TL es ortogonal si dicha TL conserva las distancias entre puntos. Según este criterio, razonar cuáles de las tres matrices calculadas en el apartado anterior serían ortogonales. Comprobarlo algebraicamente.

   Solución:
   Es obvio que la rotación de un vector no modifica su módulo, por lo que conserva las distancias entre puntos, además es fácil comprobar que $RR^T = R^T R = I$, donde I es la matriz identidad. Por otro lado, la homotecia alarga o acorta los vectores según sea la razón mayor o menor que 1, por lo que obviamente no conserva las distancias (salvo en el caso $a = \pm 1$), además es fácil comprobar que $HH^T = H^T H = a^2 I$, por lo que H no es ortogonal si $a \neq \pm 1$. Finalmente, la matriz asociada a la TL total no puede ser ortogonal al ser composición de una homotecia que no conserva las distancias y un giro. Es fácil comprobar que $(RH)(RH)^T = RHH^T R^T = a^2 RR^T = a^2 I$, por lo que no es ortogonal.

3. Razonar, desde el punto de vista geométrico, si la composición de una rotación y una homotecia es conmutativa en general y comprobarlo algebraicamente.

   Solución:
   Desde el punto de vista geométrico, se ha demostrado en el apartado anterior que la composición de la homotecia y el giro son conmutativos ya que es indiferente acortar o alargar un vector y después girarlo que hacer al revés. La demostración algebraica en el caso general es trivial ya que $RH = aRI = aIR = HR$.

Solución P3:

Lo primero que tenemos que hacer es calcular los autovalores y autovectores de la matriz $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Siguiendo el procedimiento estándar, calculamos el polinomio característico $det(A^TA - \lambda I) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$, con lo cual obtenemos los autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$, con lo cual los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{3}$ y $\sigma_2 = 1$. Por tanto ya podemos decir que la matriz $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Seguidamente calculamos los autovectores correspondientes a λ_1, λ_2 y λ_3 resolviendo los sistemas $(A^TA - \lambda_i)\vec{v}_i = \vec{0}$ y normalizando los resultados. De esta manera obtenemos $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$. Así podemos construir la matriz $V = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/3 & 0 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$.

Para terminar tenemos que calcular los vectores columna de la matriz U mediante la fórmula $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$. Así obtenemos $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ y por tanto $U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.

Asi pues la descomposición en valores singulares de A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/3 & 0 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}^T.$$

Según se explicó en clase, el núcleo de la matriz $A \in \Re^{m\times n}$ está generado por los vectores $\vec{v}_{r+1}, ..., \vec{v}_n$ donde $r = rang(A) = 2$. De hecho estos vectores forman una base ortonormal. En este caso $ker(A) = gen\{\vec{v}_3\}$.

Solución P4:

(a) Al resolver el problema de ajuste de datos para el conjunto de datos $P = \{(0,0), (1,1), (-1,1)\}$ con la función $f(x) = a + bx$ generamos un sistema de ecuaciones lineales $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Se puede comprobar fácilmente que este sistema es incompatible, y por tanto no podemos calcular una solución exacta. Por tanto, tenemos que resolverlo utilizando mínimos cuadrados. Para ello tenemos que calcular sus ecuaciones normales $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ y resolverlas. En este caso las ecuaciones normales forman el sistema: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Resolviendolo obtenemos que $a = \frac{2}{3}$ y $b = 0$. Por tanto la función de la forma $f(x) = a + bx$ que mejor aproxima los datos es $f(x) = \frac{2}{3}$.

(b) **1 punto** La solución de mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones lineales del apartado anterior se puede calcular obteniendo la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el espacio imagen de la matriz A. El espacio $Im(A) = col(A)$ por lo que en este caso esta generado por los vectores $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Tenemos la suerte de que son ortogonales, por lo que podemos calcular la proyección de $\vec{b}$ sobre $Im(A)$ como la suma de las proyecciones de $\vec{b}$ sobre los vectores $\vec{c}_1$ y $\vec{c}_2$. Utilizando la fórmula habitual, obtenemos que $\vec{d} = proy_{Im(A)}\vec{b} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Solucionando el sistema $A\vec{x} = \vec{d}$ obtenemos nuevamente que $a = \frac{2}{3}$ y $b = 0$.

Solución P5: Este problema se puede resolver de forma simple multiplicando reiteradamente $\vec{p}_{i+1} = A\vec{p}_i$ hasta obtener $\vec{p}_6$, analizando los resultados obtenidos.

Alternativamente, podemos resolverlo utilizando la propiedad de las matrices diagonalizables que dice que $A^n = PD^nP^{-1}$ ya que en realidad lo que nos pide el problema es que calculemos $A^6\vec{p}(0)$. Para ello lo primero que tenemos que hacer es calcular los autovalores y autovectores de la matriz A. Para calcular los autovalores tenemos que resolver la ecuacion característica $det(A - \lambda I) = 0$. Esta ecuación, en este caso, tiene tres soluciones distintas: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$. Para cada uno de estos autovalores tenemos sus correspondientes autovectores $\vec{v}_i$ que se calculan solucionando los sistemas $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = 0$. En este caso tenemos que $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por tanto la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Para utilizar la fórmula mencionada al principio, calculamos $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & -0.25 \\ 0.75 & -0.25 & 0.25 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D^6 = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$ y vamos haciendo los productos de la expresión $PD^6P^{-1}\vec{p}(0)$ en el orden que más sencillas nos resulten las operaciones, obteniendo $\vec{p}_6 = \begin{bmatrix} 33.5 \\ 161.5 \\ 67 \end{bmatrix}$. Por tanto, según este, el biólogo podría quedarse en casa alguna hora más, ya que cuando llegue aún no tendrá el número suficiente de bacterias para hacer su experimento.

PREGUNTA 1 (20%)

a) (10%) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z + w &= 1 \\ x + y - z - w &= 1 \\ x - y + z &= 1 \end{cases}$$

b) (10%) Hallar el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sabiendo que si $\vec{u} = [-1, 1, 2]$ entonces la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es $[1/6, -1/6, -1/3]$ y la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es $[-1/3, 1/6, -1/6]$.

PREGUNTA 2 (15%)

a) (5%) Enunciar el Teorema Fundamental de las Matrices Invertibles.

b) (10%) Calcular, en caso de que exista, la inversa de la siguiente matriz comprobando el resultado obtenido.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 3 (15%)

Dada la siguiente transformación lineal:

$$T: \begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 \\ y_2 &= -x_1 + x_3 + x_4 \\ y_3 &= x_2 + x_3 \\ y_4 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \end{cases}$$

a) (10%) Encontrar:

- (2%) Dimensiones del espacio dominio y del espacio imagen de T
- (6%) Bases del núcleo y de la imagen de T.
- (2%) Nulidad y rango de T.

b) (5%) Enunciar el teorema del rango de las transformaciones lineales y comprobar su validez en la transformación lineal T.

PREGUNTA 4 (15%)

a) (5%) Explicar en qué consiste la factorización QR de una matriz y sus aplicaciones.

b) 10%) Encontrar, en caso de ser posible, la solución de mínimos cuadrados del siguiente sistema de ecuaciones, <u>utilizando la descomposición QR</u>.

$$\begin{cases} x &= 1 \\ x + y &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

(Continúa detrás)

PREGUNTA 5 (20%)
Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (7%) Calcular los autovalores de A.

b) (7%) Hallar los autovectores y los subespacios propios de A asociados a los autovalores calculados en el apartado anterior.

c) (6%) Apoyándose en los resultados anteriores, estudiar si A es diagonalizable. En caso de ser posible, diagonalizar la matriz A.

PREGUNTA 6 (15%)
Decir si es **verdadera** o **falsa** cada una de las siguientes afirmaciones.
(Cada respuesta correcta vale 3% y cada respuesta incorrecta vale -3%, blanco 0%. Puntuación mínima de la pregunta 6, 0%).
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $\operatorname{rang}(A) = n$

(1) La matriz de la proyección ortogonal sobre el espacio columna de A es AA^+.

(2) Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la correspondiente matriz $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede tener autovalores reales negativos.

(3) Se cumple que $(\alpha A)^+ = \alpha A^+$ para todo escalar $\alpha \neq 0$.

(4) La matriz A puede tener varias pseudoinversas.

(5) De cada autovalor positivo de A se obtiene únicamente un valor singular de A.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

a) Por el método de Gauss-Jordan se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir: $\boxed{x = 1,\ y = t,\ z = t,\ w = 0 \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

b) Si $\vec{v} = [x, y, z]$, entonces:

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{-x + y + 2z}{6}[-1, 1, 2] = [1/6, -1/6, -1/3]$$

Es decir: $-x + y + 2z = -1$.

Por otro lado,

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{-x + y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2}[x, y, z] = [-1/3, 1/6, -1/6]$$

Si llamamos $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ obtenemos: $x = \frac{r^2}{3}$, $y = \frac{-r^2}{6}$, $z = \frac{r^2}{6}$ Sustituyendo en $-x + y + 2z = -1$, se obtiene $r^2 = 6$, por lo que el vector pedido será:

$$\boxed{\vec{v} = [2, -1, 1]}$$

PREGUNTA 2

a) Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal definida por A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es invertible.
- $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\vec{x} = \vec{0}$ solo tiene la solución trivial $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$.
- La forma escalonada reducida de A es I_n.
- $rang(A) = n$.
- $ker(T) = ker(A) = \{\vec{0}\}$.
- T es biyectiva.
- Los vectores columna (fila) de A son lienalmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^n$.
- $det(a) \neq 0$.
- 0 no es una autovalor de A.

b) La matriz es invertible ya que $|A| = 6 \neq 0$.

Aplicando el método de Gauss-Jordan se obtiene que la inversa de la matriz es:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1/6 & 0 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7/6 & -1 & 7/6 & -1/6 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 3

a) La matriz A asociada a la transformación T es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, deducimos que:

$$\boxed{\text{Dimensión del espacio dominio} = 5 \quad ; \quad \text{Dimensión del espacio imagen} = 4}$$

Mediante el método de Gauss podemos obtener la siguiente matriz equivalente por filas de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El núcleo serán las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto una base del núcleo de T será:

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{ker}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\boxed{\text{Claramente la nulidad de } T \text{ (dimensión del núcleo) es 2.}}$

De la matriz equivalente de A deducimos que las columnas linealmente independientes de A son la 1, 2 y 4 y por tanto una base de la imagen de A será:

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{im}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\boxed{\text{Claramente el rango de } T \text{ (dimensión de la imagen) es 3.}}$

b) Teorema del Rango de la TL: Dada una TL, $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, con matriz asociada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces se verifica:

$$\text{rang}(T) + \text{nul}(T) = n$$

En nuestro caso podemos comprobar como el rango (3) más la nulidad (2) es igual a la dimensión del espacio dominio (5).

PREGUNTA 4

a) Factorización QR: Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con *columnas linealmente independientes* puede ser *factorizada* como $A = QR$, donde $Q_{m\times n}$ es una matriz con *columnas ortonormales* y $R_{n\times n}$ es una *matriz triangular superior invertible*, de la forma:

$$\boxed{A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n}}$$

Aplicaciones de la *factorización* QR:

- Resolución de SEL de forma numérica eficiente.
- Aproximación numérica de *autovalores*.
- Aproximación del problema de *mínimos cuadrados*.

b) Como la matriz A tiene vectores columna linealmente independientes, sí se puede obtener la factorización QR. Aplicando Gram-Schmidt ortonormalizamos las columnas obteniendo la matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $R = Q^T A$ se obtiene:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

La solución $\vec{p}$ de mínimos cuadrados del sistema $A\vec{x} \approx \vec{b}$ se puede obtener fácilmente resolviendo el sistema $R\vec{p} = Q^T\vec{b}$ cuya solución en este caso es:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 5

a) $\boxed{\text{Los autovalores son } \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ y } \lambda_3 = 1.}$

b) Resolviendo los sistemas homogéneos asociados a cada autovalor obtenemos:

$$\boxed{E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

c) Como la multiplicidad aritmética del autovalor 0 es 2 y su multiplicidad geométrica es sólo 1, no tenemos un conjunto completo de 3 autovectores linealmente independientes.

$\boxed{\text{Por lo tanto la matriz } A \textbf{ no} \text{ es diagonalizable.}}$

PREGUNTA 6

1. Verdadero
2. Falso
3. Falso
4. Falso
5. Falso

PREGUNTA 1 (15%)
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-2t-4w &=& 6 \\ 2x+y-z+t-3w &=& 1 \\ x-2y+z-5t+2w &=& 0 \\ 4x+3y+z-3t-11w &=& 13 \end{array}\right.$$

PREGUNTA 2 (15%)
Dados $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ probar las siguientes afirmaciones en el espacio $\mathbb{R}^n$ y explicarlas con un dibujo para el caso particular $\mathbb{R}^2$.

a) (7%) $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{u}-perp_{\vec{v}}\vec{u}$.

b) (8%) $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

PREGUNTA 3 (20%)
Sea $\mathcal{B}=\{[1,1,1,1],[1,0,1,1],[0,1,1,0]\}$ una base de un subespacio vectorial $W\subset\mathbb{R}^4$. Se pide:

a) (5%) Dar un sistema de ecuaciones lineales que defina el subespacio W.

b) (5%) Demostrar que $\mathcal{C}=\{[0,0,-1,0],[1,-2,0,1],[-3,0,-2,-3]\}$ también es una base de W.

b) (10%) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

PREGUNTA 4 (15%)
Dado el subespacio vectorial $W\subset\mathbb{R}^5$ definido por:

$$W:\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &=& 0 \\ x_2+x_4+x_5 &=& 0 \\ x_3+x_4+x_5 &=& 0 \\ x_4+x_5 &=& 0 \end{array}\right.$$

a) (10%) Encontrar la matriz de la proyección ortogonal de un vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^5$ sobre W.

b) (5%) Encontrar la proyección ortogonal del vector $\vec{v}=[1,0,0,1,0]$ sobre W

PREGUNTA 5 (20%)
Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (10%) En caso de ser posible, diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

b) (5%) Obtener, en caso de ser posible, la descomposición espectral de A.

c) (5%) Determinar el vector $A^n\vec{v}$, siendo $\vec{v}=[1,0,1]$.

(Continúa detrás)

PREGUNTA 6 (15%)

Decir si es **verdadera** o **falsa** cada una de las siguientes afirmaciones.
(Cada respuesta correcta vale 3% y cada respuesta incorrecta vale -3%, blanco 0%. Puntuación mínima de la pregunta 6, 0%).
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $\operatorname{rang}(A) = n$

(1) A^+ es simétrica.

(2) Siempre ocurre que $|A^+| \neq 0$.

(3) Siempre se cumple que $A = AA^+A$

(4) La única solución $x \in R^n$ de mínimos cuadrados del sistema $Ax \approx b$ es $x = A^+b$, $b \in R^m$.

(5) La matriz A no admite diferentes descomposiciones en valores singulares.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

La matriz del sistema tiene rango 3 y la matriz ampliada también, por tanto el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones constituyen un subespacio vectorial de dimensión 5-3=2. El sistema dado es equivalente al:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6+2t+4w \\ 2x+y-z & = & 1-t+3w \\ x-2y+z & = & 5t-2w \end{array}\right. \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ya que la cuarta ecuación es igual al doble de la primera más la segunda.
Por el método de Gauss-Jordan se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1+t+w \\ 0 & 1 & 0 & 2-t+2w \\ 0 & 0 & 1 & 3+2t+w \end{array}\right]$$

Es decir:

$$\boxed{x=1+\lambda+\mu,\ y=2-\lambda+2\mu,\ z=3+2\lambda+\mu,\ t=\lambda,\ w=\mu \quad ; \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$$

PREGUNTA 2

- Decir que dos vectores son paralelos es decir que $\vec{a}=\alpha\vec{b}$. Por tanto vamos a probar que $\vec{u}-perp_{\vec{v}}\vec{u}=\alpha\vec{v}$:

$$\vec{u}-perp_{\vec{v}}\vec{u}=\vec{u}-\vec{u}+proy_{\vec{v}}\vec{u}=proy_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}=\alpha\vec{v}$$

- Para poder probar esta afirmación tenemos que reescribirla en términos del producto escalar. Para ello lo primero que debemos hacer es darnos cuenta que podemos elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad y la igualdad se sigue cumpliendo: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

  Seguidamente aplicamos que la norma al cuadrado de un vector es el producto escalar del vector por si mismo: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

  operando nos queda: $\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

  lo que implica que: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\vec{u}\cdot\vec{v}$

  y por tanto $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

  es decir $\vec{u}\perp\vec{v}$.

PREGUNTA 3

a) El subespacio W se puede expresar de la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como la dimensión del espacio al que pertenece W es 4 y la dimensión de W es 3, el número de ecuaciones necesario para definir W es $4-3=1$. De forma paramétrica podemos definir W como:

$$\begin{cases} x &= t+s \\ y &= t+r \\ z &= t+s+r \\ w &= t+s \end{cases}$$

Para obtener la ecuación que define W tenemos que pasar estas ecuaciones paramétricas a única ecuación general donde no aparezca ningún parámetro. Fácilmente se ve que esta ecuación sería $x=w$, de forma que:

$$\boxed{W : \left\{ x - w = 0 \right.}$$

b) Tenemos que comprobar que cada vector de la base $\mathcal{C}$ se puede obtener por combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$ y forma un conjunto linealmente independiente. Para ello hay que resolver 3 sistemas de ecuaciones lineales que de forma conjunta se puede expresar como:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolviendo por Gauss-Jordan comprobamos que los sistemas son compatibles y determinados y con soluciones distintas, por tanto podemos asegurar que $\mathcal{C}$ es una base de W.

c) Para encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ tenemos que encontrar los vectores de coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{C}$. Para ello hay que resolver tres sistemas de ecuaciones lineales que coinciden con los resueltos en el apartado b). Por tanto la matriz de cambio de base es:

$$\boxed{P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 4

a) La matriz de la proyección ortogonal viene dada por $T = AA^+$, siendo A una matriz formada por una base de W en sus vectores columna y A^+ la pseudoinversa de A. Para calcular una base de W resolvemos el sistema dado en el enunciado directamente aplicando el método de sustitución hacia atrás:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = 2 \quad ; \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T = AA^+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

b)

$$\boxed{\vec{p} = T\vec{v} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 5

a) Como la matriz es simétrica, sí puede diagonalizarse ortogonalmente. Los autovalores de A son:

$$\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \lambda_3 = 2$$

Y los autovectores asociados son:

$$\vec{v}_1 = [1, 0, -1]^T \quad ; \quad \vec{v}_2 = [0, 1, 0]^T \quad ; \quad \vec{v}_3 = [1, 0, 1]^T$$

Por tanto:

$$\boxed{A = PDP^T \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

b) Llamando $\vec{v}_i$ a los vectores columna de la matriz P la descomposición espectral de la matriz A es:

$$\boxed{A = \lambda_1 \vec{v}_1 \vec{v}_1^T + \lambda_2 \vec{v}_2 \vec{v}_2^T + \lambda_3 \vec{v}_3 \vec{v}_3^T}$$

c) Como claramente $\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \sqrt{2}\vec{v}_3$ se tiene:

$$\boxed{A^n \vec{v} = 0\lambda_1^n \vec{v}_1 + 0\lambda_2^n \vec{v}_2 + \sqrt{2}\lambda_3^n \vec{v}_3 = 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 6

1. Falso
2. Falso
3. Verdadero
4. Verdadero
5. Falso

OPCIÓN 1: EVALUACIÓN CONTINUA

PREGUNTA 1 (1 pto)

a) (0.5 ptos) Definir los conceptos de **subespacio vectorial** y **complemento ortogonal de un subespacio vectorial**.

b) (0.5 ptos) Dadas las siguientes dos bases:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Demostrar que ambas bases generan el mismo subespacio vectorial.

PREGUNTA 2 (1 pto)

a) (0.25 ptos) Encontrar la matriz asociada a la siguiente transformación lineal. ¿Entre qué espacios vectoriales origen e imagen está definida la misma?

$$T([x_1, x_2, x_3]^T) = x_1[1, 2, 3]^T + x_3[4, 5, 6]^T$$

b) (0.25 ptos) Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal de un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XY, seguida de una reflexión respecto al eje Y.

c) (0.5 ptos) Encontrar el núcleo, imagen y nulidad de la transformación lineal definida por al siguiente matriz A. ¿Es inyectiva?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 3 (1 pto)

Sea W un espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido como $W = gen([1, 2, 1, 0]^T, [0, -1, 1, 0]^T)$.

a) (0.3 ptos) Calcular la matriz de proyección ortogonal sobre W.

b) (0.3 ptos). Encuentra la solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$, resolviendo las ecuaciones normales correspondientes, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) (0.4 ptos). Resolver el mismo problema del apartado (b), utilizando la matriz de proyección ortogonal calculada en el apartado (a). Comprobar que la solución es la misma que en apartado (b).

PREGUNTA 4 (1 pto)

Calcular la descomposición en valores singulares de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OPCIÓN 2: SIN EVALUACIÓN CONTINUA

PREGUNTA 5 (1.5 ptos)
Encontrar la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [\pi, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ sobre el subespacio generado por la base ortonormal que se obtiene a partir de los autovectores asociados a los dos autovalores más pequeños de la diagonalización ortogonal de la siguiente matriz simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

PREGUNTA 6 (2 ptos)
Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (0.2 ptos) Calcular $A^T A$ y $AA^T = B$.

b) (0.6 ptos) Demostrar que existe una matriz P invertible tal que $BP = PD$, siendo D diagonal. Calcular D y P.

c) (0.2 ptos) Probar que existe una matriz C tal que $C^2 = D$; calcular C.

d) (0.4 ptos) Probar que existe una matriz H simétrica tal que $H^2 = B$; calcular H.

e) (0.6 ptos) Probar que existe una matriz U ortogonal verificando $A = HU$. ¿Es A diagonalizable?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

a) – Un **subespacio vectorial** es un subconjunto W de un espacio vectorial V que cumple las siguientes propiedades:
   - W contiene el elemento nulo de V.
   - W es cerrado bajo la suma: si $w_1, w_2 \in W \implies w_1 + w_2 \in W$.
   - W es cerrado bajo el producto por un escalar: si $w \in W$ y k es un escalar, entonces $kw \in W$.

   – Sea W un subespacio vectorial de V. El conjunto de todos los vectores $\vec{v} \in V$ ortogonales a W se denomina **complemento ortogonal de** W, y se denota por $W^{\perp}$.

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \ : \ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad ; \quad \forall \vec{w} \in W\}$$

b) Las dos son bases de subespacios de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 (por tener cada una dos vectores linealmente independientes). Para demostrar que ambas generan el mismo subespacio basta con comprobar que todos los vectores de una de las bases se pueden obtener por combinación lineal de los vectores de la otra base.

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \\ \mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \end{cases} \implies \begin{cases} a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{w}_1 \\ c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2 = \vec{w}_2 \end{cases}$$

Si existieran valores únicos a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ entonces, todo vector $\vec{u}$ generado por la base $\mathcal{C}$ puede generarse por la base $\mathcal{B}$.

$$\vec{u} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = \alpha(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + \beta(c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) = (\alpha a + \beta c)\vec{v}_1 + (\alpha b + \beta d)\vec{v}_2$$

El mismo razonamiento se puede hacer intercambiando $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$. Resolvamos ambos sistemas a la vez mediante Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 - F_4]{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

de forma que la solución única es $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$, $d = -2$ y por tanto ambas bases generan el mismo subespacio vectorial.

PREGUNTA 2

a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Está definida de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$.

b) Proyección sobre XY:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y tras la reflexión respecto el eje Y:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La forma reducida de A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego el núcleo es $t[0, -2, 1]$. Una base de este núcleo es $\{[0, -2, 1]\}$. La imagen viene dada por $x_1[1, 1, 1] + x_2[2, 3, 1] + x_3[4, 6, 2] = x_1[1, 1, 1] + (x2 + 2x3)[2, 3, 1]$, luego una base de la imagen es: $\{[1, 1, 1], [2, 3, 1]\}$. La nulidad es 1, luego **no** es inyectiva.

PREGUNTA 3

a) Llamaremos A a la matriz cuyas columnas son vectores de una base de W. La matriz de proyección ortogonal sobre W es AA^+, donde $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ es la pseudoinversa de A:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & 6/11 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_W = A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Tenemos que resolver las ecuaciones normales: $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$. Como las columnas de A son linealmente independientes, la solución por mínimos cuadrados es única : $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$.

Utilizando $(A^TA)^{-1}$ calculado en el apartado anterior y $A^T\vec{b} = [3, -1]^T$. Finalmente $\boxed{\vec{x} = [\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}]}$.

c) Vamos a utilizar la matriz de proyección ortogonal sobre W calculada en el apartado (a) para determinar la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el dicho subespacio.

$$\text{proy}_W(\vec{b}) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/11 \\ 13/11 \\ 2/11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema $A\vec{x} = \text{proy}_W\vec{b}$ por el método de Gauss, se obtiene el mismo resultado que el obtenido en el apartado (b): $\boxed{\vec{x} = [\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}]}$.

PREGUNTA 4

$$A^TA = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 5

Una diagonalización ortogonal de A de la forma $A = QAQ^T$ es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores más pequeños son -3 y 1 y sus autovectores normalizados corresponden a los dos primeras columnas de A en esta representación. Por tanto hay que proyectar $\mathbf{v} = (\pi - \sqrt{2}, 2\sqrt{2})^T$ sobre el espacio $W = gen\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, en donde $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son la primera y segunda columna de Q respectivamente. El cálculo de la proyección será muy sencillo al formar $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ una base ortonormal:

$$proy_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_1} + (\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_2} = 3\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = (0, -2/\sqrt{2}, 4/\sqrt{2})^T$$

Duración: 3 horas

Pregunta 1 (2.5 puntos)
Dadas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definidas de la forma:

$$\begin{cases} T(\vec{x}) = A\vec{x} \\ W(\vec{y}) = B\vec{y} \end{cases} \quad : \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar:

a) (**1 punto**) La dimensión del núcleo de T y la dimensión de la imagen de T.

b) (**1.5 puntos**) El rango de la matriz que define la transformación lineal: $S = (W^{-1} \circ T)$, en caso de que exista.

Pregunta 2 (2.5 puntos)
Calcular la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [1, 0, 1] \in \mathbb{R}^3$ sobre el complemento ortogonal del espacio fila de la matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Pregunta 3 (2.5 puntos)

Dada la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) (**1.5 puntos**) En caso caso de ser posible, diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

b) (**1 punto**) Demostrar que A **no** es semejante a la matriz: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Pregunta 4 (2.5 puntos)
Dada la siguiente tabla de datos:

x	y	z	w
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	1	0
1	1	1	1

se quiere ajustar los mismos a una ecuación del tipo:

$$w = ax + by + cz + d \qquad ; \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) (**0.5 puntos**) Plantear el problema matricial de mínimos cuadrados correspondiente a este caso.

b) (**1 punto**) Resolver el problema de mínimos cuadrados del apartado a) utilizando la descomposición QR.

c) (**1 punto**) Resolver el mismo problema de mínimos cuadrados del apartado a) **sin** utilizar la descomposición QR.

SOLUCIONES

Pregunta 1

a) El núcleo de T será la solución del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$. Por tanto, mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y por tanto: $\ker(T) = \{[0,0,0]\} \implies \boxed{\dim(\ker(T)) = 0}$

La imagen de T estará formada por todos los vectores $\vec{y} \in \mathbb{R}^4$ pertenecientes al espacio imagen de T, es decir el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores columna de A. Como el rango de A es 3 por tanto los tres vectores columna de A son linealmente independientes y por tanto:

$$\boxed{\dim(\mathrm{im}(T)) = 3}$$

b) Primero vamos a calcular $W^{-1}(z) = B^{-1}(z)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, $S(\vec{x}) = (W^{-1} \circ T)(\vec{x}) = (B^{-1}A)(\vec{x})$, siendo:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss para calcular el rango de esta matriz se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{El rango de la matriz que define a } S \text{ es 3.}}$$

Pregunta 2

La forma más rápida de calcular el complemento ortogonal del espacio fila de una matriz es recordar que:

$$(\text{fil}(A))^{\perp} = \ker(A)$$

Aquí lo haremos paso a paso, sin utilizar la fórmula de arriba. Para determinar el espacio fila de A debemos conocer el conjunto de vectores fila linealmente independientes, para ello aplicamos el método de Gauss,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & -3/2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los vectores fila de A linealmente independientes son por ejemplo los dos primeros. Por tanto:

$$\text{fil}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

El complemento ortogonal de fil(A) está formado por todos aquellos vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a estos tres vectores, es decir, habrá que resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2t/3 \\ y & = & -4t/3 \\ z & = & t \end{array} \right. \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Es decir, el complemento ortogonal de fil(A) es la recta que pasa por el origen y con dirección dada por el vector $\vec{u} = [2, 4, -3]$.

Finalmente, la proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre esta recta será, (los productos escalares los expresamos como vectores fila por comodidad):

$$\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u} = \left(\frac{[2,4,-3] \cdot [1,0,1]}{[2,4,-3] \cdot [2,4,-3]} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \left(\frac{2+0-3}{4+16+9} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{1}{29} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

Pregunta 3

a) Tenemos que calcular los autovalores y autovectores asociados a la matriz A.

Cálculo de Autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)^3 - (1-\lambda)] - [(1-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 1] - [(1-\lambda)^2 - 1] = [(1-\lambda)^2 - 1][(1-\lambda)^2 - 1] =$$

$$= [(1-\lambda)^2 - 1]^2 = (\lambda^2 - 2\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0 \implies \text{Soluciones: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_4 = 2 \end{array} \right.$$

Cálculo de Autovectores

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ -s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Claramente son ortogonales y basta con normalizar:

$$E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \lambda_4 = 2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Claramente son ortogonales y basta con normalizar:

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Finalmente, $A = QDQ^T$ donde, por ejemplo, podemos elegir las matrices Q y D de la forma:

$$\boxed{Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}} \quad ; \quad \boxed{D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

b) En las matrices semejantes, entre otras propiedades, coinciden el valor de sus determinantes. Por tanto, una posible forma de demostrar que A y B no son semejantes es comprobar que poseen determinantes distintos.

El determinante de A será el mismo que el de la matriz D (al ser semejantes) y por tanto es cero.

Si A fuera semejante a B, el determinante de B debería ser también cero, pero como:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-1) + (1-2) = -1$$

$$\boxed{\text{Por tanto, } A \textbf{ no} \text{ es semejante a } B}$$

Pregunta 4

a) El sistema de ecuaciones lineales será:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & & & & + & d = & 1 \\ & & b & & & + & d = & 1 \\ & & & & c & + & d = & 1 \\ & & & & c & + & d = & 0 \\ a & + & b & + & c & + & d = & 1 \end{array} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buscamos la mejor aproximación al problema (sistema incompatible):

$$A\vec{x} \approx \vec{w} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Vamos a calcular la factorización QR de la matriz A.

La matriz Q la obtendremos aplicando el proceso de Gram-Schmidt a los vectores columna de A.

$$\begin{array}{lcllcl} \vec{v}_1 & = & \vec{c}_1 & & = & [1,0,0,0,1]^T \\ \vec{v}_2 & = & \vec{c}_2 - \left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{c}_2}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\right)\vec{v}_1 & & = & [0,1,0,0,1]^T - \frac{1}{2}\vec{v}_1 = [-\frac{1}{2},1,0,0,\frac{1}{2}]^T \\ \vec{v}_3 & = & \vec{c}_3 - \left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{c}_3}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\right)\vec{v}_1 - \left(\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{c}_3}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\right)\vec{v}_2 & & = & [0,0,1,1,1]^T - \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_2 = [-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,1,\frac{1}{3}] \\ \vec{v}_4 & = & \vec{c}_4 - \left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{c}_4}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\right)\vec{v}_1 - \left(\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{c}_4}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\right)\vec{v}_2 - \left(\frac{\vec{v}_3\cdot\vec{c}_4}{\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3}\right)\vec{v}_3 & & = & [1,1,1,1,1] - \vec{v}_1 - \frac{2}{3}\vec{v}_2 - \frac{5}{7}\vec{v}_3 = [\frac{4}{7},\frac{4}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7},-\frac{4}{7}] \end{array}$$

Normalizando estos vectores se obtiene:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{21} & 2/\sqrt{14} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{21} & 2/\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{21} & 1/\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{21} & 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{21} & -2/\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

Como $A = QR$ podemos obtener la matriz R como:

$$R = Q^TA = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{21} & -1/\sqrt{21} & 3/\sqrt{21} & 3/\sqrt{21} & 1/\sqrt{21} \\ 2/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 7/\sqrt{21} & 5/\sqrt{21} \\ 0 & 0 & 0 & 4/\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el problema de mínimos cuadrados $A\vec{x} \approx \vec{w}$ podemos calcularlo a través del sistema tridiagonal $R\vec{x} = Q^T\vec{w}$.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 7/\sqrt{21} & 5/\sqrt{21} \\ 0 & 0 & 0 & 4/\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{21} & -1/\sqrt{21} & 3/\sqrt{21} & 3/\sqrt{21} & 1/\sqrt{21} \\ 2/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{21} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de sustitución hacia atrás se obtiene fácilmente la solución:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}}$$

c) La solución al problema de mínimos cuadrados $A\vec{x} \approx \vec{w}$ del apartado *a)* se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{w}$$

donde:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Aplicando por ejemplo el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/3 & 7/3 & 4/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 8/7 & 6/7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right]$$

Y por tanto las soluciones son, al igual que en el caso anterior:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}}$$

PREGUNTA 6

a)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

b) B es una matriz simétrica y real, luego es diagonalizable ortogonalmente. Así que existe una matriz P ortogonal, tal que $BP = PD$, siendo D diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 3/2 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = (x-4)(x-\frac{1}{4})$$

Luego los autovalores son 4 y $1/4$, por lo tanto D$=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Para hallar P, calcularemos los autovectores asociados:

- Para el autovalor 4, Nul$\begin{bmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$, luego $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ autovector asociado.
- Para el autovalor $\frac{1}{4}$, Nul$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$, luego $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ autovector asociado.

Normalizando obtenemos $P = \frac{1}{\sqrt[2]{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ortogonal, que además es simétrica y por tanto:

$$P = P^T = P^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad PP^T = I = P^2$$

Fácilmente se puede verificar que: $B = AA^T = PDP^{-1} = PDP^T = PDP$.

c) Puesto que D es diagonal con autovalores positivos, existe una matriz C, que verifica $C^2 = D$ con $c_{ii} = \pm\sqrt[2]{d_{ii}}$. De forma que C puede ser por ejemplo $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, pero no es la única posibilidad.

d) Los resultados anteriores hacen plausible lo siguiente. Sea $H = PCP$ y por lo tanto:

$$H^2 = (PCP)(PCP) = PC^2P = PDP = B$$

Luego $H = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 17/10 \end{bmatrix}$

e) Sea $U = H^{-1}A$, entonces:

$$H^{-1} = (PCP)^{-1} = PC^{-1}P \quad ; \quad \left(H^{-1}\right)^T = PC^{-1}P = H^{-1} \quad ; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para demostrar que U es ortogonal basta comprobar que $U^TU = UU^T = I$.

$$U^TU = \left(H^{-1}A\right)^T\left(H^{-1}A\right) = \left[A^T\left(H^{-1}\right)^T\right]\left(H^{-1}A\right) = A^T\left[\left(H^{-1}\right)^T H^{-1}\right]A = A^T\left(H^{-1}\right)^2 A =$$

$$= A^T\left(AA^T\right)^{-1}A = \left[A^T\left(A^T\right)^{-1}\right]\left(A^{-1}A\right) = I$$

$$UU^T = \left(H^{-1}A\right)\left(H^{-1}A\right)^T = \left(H^{-1}A\right)\left(A^TH^{-1}\right) = \left(PC^{-1}P\right)(PDP)\left(PC^{-1}P\right) =$$
$$= P\left(C^{-1}DC^{-1}\right)P = P\left(C^{-1}CCC^{-1}\right)P = PP = I$$