Problema 2.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

① $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- sucesión acotada
- no monótona
- no convergente

② $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

$-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- sucesión acotada
- no monótona
- convergente $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

③ $a_n = \frac{n}{n+2}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \dots\right)$

- $a_n - a_{n-1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}$

$= \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow a_n - a_{n-1} > 0$

$a_n > a_{n-1}$

- monotona creciente

- $\frac{1}{3} \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ : sucesión acotada
- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

④ $a_n = \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \dots\right)$

$0 \le a_n \le \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- sucesión acotada
- <u>no</u> monotona
- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

⑤ $a_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$

Puesto que $z - 1 < \lfloor z \rfloor \le z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \le nx$$

$$\Rightarrow x - 1/n < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \le x$$

$$\Rightarrow x - 1 \le a_n \le x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- sucesión acotada
- si $x \notin \mathbb{Z}$; $a_n$ <u>no</u> es monótona
- Usando $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \le x$

  se tiene que:

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(x - 1/n\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \le x$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

(6) $a_n = \dfrac{n+\operatorname{sen}(n\pi/2)}{2n+1}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{6}{11}, \dots\right)$

$\frac{2}{3} > \frac{2}{5} > \frac{2}{7} < \frac{4}{9}$ $\underline{\underline{\text{no}}}$ monótona

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n+\operatorname{sen}(n\pi/2)}{2n+1} \leq \frac{n+2}{2n+1}$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$: sucesión acotada

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n\pi/2)}{2n+1} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = 1/2$$

$\Rightarrow \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

(7) $a_n = \sqrt[n]{\pi^n + 7^{n/2}} = \pi \sqrt[n]{1+(\sqrt{7}/\pi)^n}$

$(7^{1/2} < \pi)$

Estudiaremos la sucesión:

$b_n := \sqrt[n]{1+r^n}$ con $0 \leq r < 1$

Como:

$1 \leq 1+r^n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{1+r^n} \leq \sqrt[n]{2} \leq 2$

$\Rightarrow$ La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada

ver problema 2.2. $\leftarrow$ • Un cálculo directo muestra que $(b_n)$ es una sucesión monótona decreciente: $b_n > b_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

• $1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+r^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

$\Rightarrow b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Por tanto: $a_n = (\pi^n + (\sqrt{7})^n)^{1/n}$, con $0 \leq \sqrt{7} \leq \pi$

es una sucesión acotada, monótona decreciente y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} (\pi^n + (\sqrt{7})^n)^{1/n} = \pi .$$

(8)

$$a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{2n+1 - 2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}} >$$

$$> \frac{2n+1 - 2\sqrt{n^2+n+1/4}}{\sqrt{n+1}} = 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente

Para demostrar la acotación:

$$a_{k+1} - a_k = 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Por tanto:

$$a_n - \cancel{a_{n-1}} < \cancel{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} < \cancel{\frac{1}{\sqrt{n-2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\cancel{a_{n-2}} - \cancel{a_{n-3}} < \cancel{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n-2}}}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\oplus \quad \cancel{a_2} - a_1 < \frac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

---

$$a_n - a_1 < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$$

$$\Rightarrow a_n < 1 + \underbrace{a_1}_{1} = 2 \; ; \; \forall n.$$

Por tanto:

$$1 = a_1 < a_n < 2 \quad \forall n$$

sucesión acotada