Soluciones # 14

SVD y pseudo-inversa

Problema 14.1

a) La descomposición SVD de A_1 y su pseudo-inversa A_1^+ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
A_1^+ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

b) La descomposición SVD de A_2 y su pseudo-inversa A_2^+ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
A_2^+ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

c) La descomposición SVD de A_3 y su pseudo-inversa A_3^+ son las siguientes:

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) La descomposición SVD de A_4 y su pseudo-inversa A_4^+ son las siguientes:

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) La descomposición SVD de A_5 y su pseudo-inversa A_5^+ son las siguientes:

$$A_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) La descomposición SVD de A_6 y su pseudo-inversa A_6^+ son las siguientes:

$$A_6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_6^+ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 14.2 Si escribimos la descomposición SVD de A, de dimensión $n \times n$, de la forma:

$$A = U\,S\,V^t\,,$$

donde U y V tienen determinante ± 1 por ser ortogonales y S es $n \times n$ y tiene en la diagonal principal los valores singulares de A, es evidente que

$$\det(A) = \pm\det(S) = \pm\prod_{i=1}^{n} \sigma_i\,,$$

Problema 14.3 Son $\sigma_1 = \sqrt{1+\operatorname{sen}(2\alpha)}$ y $\quad \sigma_2 = \sqrt{1-\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

Problema 14.4 Se tienen las soluciones:

a) $x_0 = (1,1,1)^t$ (solución de norma mínima).

b) $x_0 = \dfrac{1}{35}\,(43,22)^t$ (solución única).

Problema 14.5 Las matrices tienen columnas linealmente independientes en los siguientes apartados:

a) La descomposición $A = Q\,R$ y $P_{\mathcal{C}(A)}(e_1)$ son:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}(A)}(e_1) = \frac{1}{2}\,(1,1,0)^t\,.$$

c) La descomposición $A = Q\,R$ y $P_{\mathcal{C}(A)}(e_1)$ son:

$Q = I_2; \quad R = A; \quad P_{\mathcal{C}(A)}(e_1) = e_1.$

e) La descomposición $A = Q\,R$ y $P_{\mathcal{C}(A)}(e_1)$ son:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}(A)}(e_1) = \frac{1}{2}\,(1,0,1)^t\,.$$