EXAMEN DE CÁLCULO

1^o Ingeniería Informática

1 de Febrero de 2006

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

APELLIDOS			
NOMBRE		GRUPO	

---

1. Calcula los valores de α para los que la ecuación $x^3 - 3x + \alpha = 0$ posee dos únicas soluciones reales.

   SOLUCIÓN:

   Sea $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$, dado que es un polinomio, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Por otra parte como es de grado impar sabemos que, independientemente del valor de α, la ecuación $f(x) = 0$ tiene como mínimo una solución.

   Si atendemos a su derivada, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, vemos que la función tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$. De esta forma la única posibilidad de que $f(x) = 0$, tenga dos raíces reales, y no una o tres, es que el valor de f en los extremos locales sea 0, así pues:

   - La raíz está en el mínimo local $f(-1) = 0$, $\alpha = -2$
   - La raíz está en el máximo local $f(1) = 0$, $\alpha = 2$

---

2. Calcula el valor de los siguiente límites:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\tan(x)\operatorname{sen}(2x)} \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{\sin(x)}^{0} \cos(t^2)dt + \operatorname{sen}(x)}{x^5}$$

   SOLUCIÓN:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\tan(x)\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x \cdot 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(b) } \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{\sin(x)}^{0} \cos(t^2)dt + \operatorname{sen}(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)\cos(\sin^2(x)) + \cos(x)}{5x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)(1 - \cos(\operatorname{sen}^2(x)))}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\dfrac{\operatorname{sen}^4(x)}{2}}{5x^4} = \frac{1}{10}$$

3. Para la siguiente función,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} & si \quad x < 0 \\[2mm] \dfrac{2x - 1}{(x + 1)^2} & si \quad x \geq 0, \end{cases}$$

se pide:

(a) Determina el dominio, puntos de corte y asíntotas.

(b) Estudia la monotonía, indicando intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) Representa gráficamente dicha función.

(d) Calcula los extremos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 3]$.

SOLUCIÓN:

(a) Dado que tenemos una función de definida a trozos realizaremos el estudio de la misma forma:

$(x < 0)$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ está definida en todo el intervalo y no tiene ningún punto de corte con el eje X, además vemos que da lugar a una asíntota oblicua por la izquierda $y = x+1$, pues

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} = \frac{x^2+1}{x-1} - x = 1$$

$(x \geq 0)$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ esta definida en todo el intervalo, presenta un punto de corte con el eje X en $(1/2, 0)$, además tiene una asíntota horizontal $y = 0$, dado que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{(x+1)^2} = 0$.

En resumen: dominio=$\mathbb{R}$, ceros en (1/2,0), asíntota oblicua $y = x$ para $x \to -\infty$ y asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \infty$.

(b) Derivando tenemos:

$(x < 0)$ $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, que se anula en $x = 1-\sqrt{2}$

$(x > 0)$ $f'(x) = \dfrac{-2(x^2-x+2)}{(x+1)^4}$, que se anula en $x = 2$. Notar que en $x = 0$ la función no es derivable.

Así tenemos para el intervalo $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ $f'(x) > 0$, $f(x)$ creciente,$(1-\sqrt{2}, 0)$ $f'(x) < 0$, $f(x)$ creciente, $(0, 2)$ $f'(x) > 0$, $f(x)$ creciente,$(2, \infty)$ $f'(x) < 0$, $f(x)$ decreciente.
La función presenta máximos locales en $x = 1-\sqrt{2}$ y en $x = 2$, y un mínimo local en $x = 0$.

(c) Reuniendo los datos anteriores tenemos la siguiente gráfica:

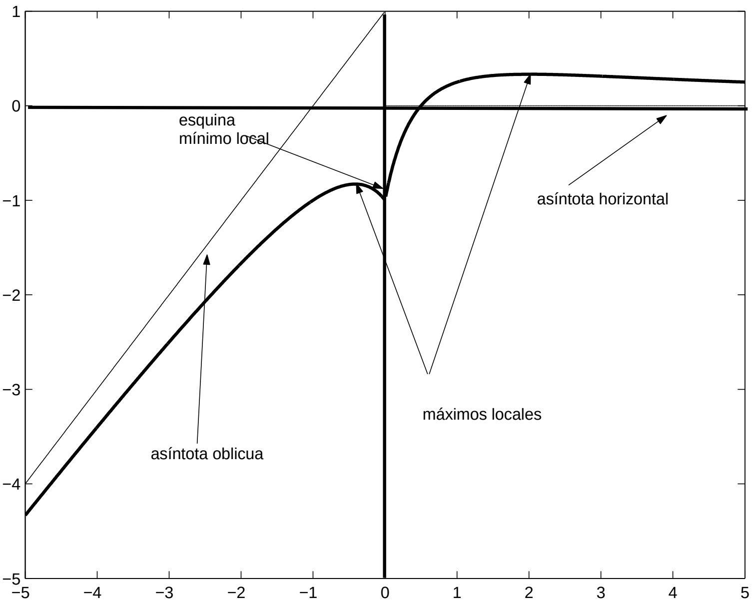

Figure 1: Gráfica del ejercicio 3.

(d Dado que la función es continua en el intervalo cerrado [-1/2,3], debe alcanzar en él máximo y el mínimo. A la vista de la gráfica anterior, queda claro que el máximo es $f(2) = 1/3$ (máximo local) y respecto al mínimo debemos chequear cuál de los valores $f(1/2)$(valor en extremo del intervalo) y $f(0)$ (valor en el punto esquina) es más pequeño, concluyendo que el mínimo es $f(0) = -1$.

---

4. Sea $f(x) = e^{x^2}\cos x$:

   (a) ¿Cuál es el polinomio Taylor centrado en $x_0 = 0$ de orden 4 ?

   (b) Estima el error que comentemos si aproximamos $f(0.1) \approx 1$.

   SOLUCION:

   (a) Teniendo presente los desarrollos de Taylor de la exponencial y el coseno tenemos:,

   $$f(x) = e^{x^2}\cos x = \{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + ...\} \cdot \{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ...\}$$

   Operando y quedándonos hasta el orden 4 llegamos a :

   $$P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

   (b) Al aproximar $f(0.1) \approx 1.$, despreciamos términos de orden 2, por lo que error cometido lo podemos estimar como

   $$E \leq |f''(\xi)|\frac{(0.1)^2}{2!} < e^{0.1^2}\Big(\cos(0.1) + 4(0.1)^2\cos(0.1) - 4(0.1)\sin(0.1)\Big) \approx 0.005$$

---

5. Calcula las siguientes primitivas:

$$\text{(a)} \int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)dx \qquad \text{(b)} \int \ln(x^2-4x+9)dx$$

SOLUCIÓN:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)dx = \int \operatorname{sen}^4(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)dx = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7(x) + c$

(b) $\displaystyle\int \ln(x^2-4x+9) = x\ln(x^2-4x+9) - \int x\frac{2x-4}{x^2-4x+9}dx$

Tras aplicar integración por parte, aparece una integral racional. Dividimos

$$\int x\frac{2x-4}{x^2-4x+9}dx = \int 2dx + \int \frac{4x-18}{x^2-4x+9}dx.$$

La última integral la podemos expresar como

$$\int \frac{4x-18}{x^2-4x+9}dx = 2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+9}dx - 10\int \frac{dx}{(x-2)^2+5} = 2\ln(x^2-4x+9) - \frac{10}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + c$$

Así pues,

$$\int \ln(x^2-4x+9) = (x-2)\ln(x^2-4x+9) - 2x + \frac{10}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + c$$

---

6. Calcula el volumen de revolución en girar alrededor de el eje Y la función,

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad |x| \leq 1 \\ 4-x^2 & si \quad 1 < |x| < 2 \\ 0 & si \quad |x| \geq 2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El volumen vendrá dado por

$$V = 2\pi\int_0^2 xf(x)dx = 2\pi\left(\int_0^1 3xdx + \int_1^2 x(4-x^2)dx\right) = \frac{15\pi}{2}$$
