Soluciones de la hoja 1

Matrices

Problema 1.1 Las soluciones son directas:

1. $3\,D - 2\,A = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.
2. $B - C^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
3. $D + B\,C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{pmatrix}$.
4. $B^t\,B = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.
5. $E\,A\,F = 10$.
6. $B^t\,C^t - (C\,B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1.2 Las inversas son:

$$\text{a)} \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & -20 & -21 \end{pmatrix} ; \qquad \text{b)} \quad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -9 & 14 & -1 \end{pmatrix} .$$

Problema 1.3 La matriz A no tiene inversa $\det(A) = 0$.

Problema 1.4 Multiplicando la ecuación por A^{-1} por la izquierda, se obtiene

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Problema 1.5 Como $A\,A = A$, entonces $B\,B = (I - A)\,(I - A) = I + A - 2\,A = I - A = B$.

Problema 1.6 La demostración es simple: $(A\,B)^t = B^t\,A^t = B^{-1}\,A^{-1} = (A\,B)^{-1}$. Luego $A\,B$ es también una matriz ortogonal.

Problema 1.7 Para que se verifique, es necesario que B sea invertible, ya que en dicho caso podemos multiplicar por la derecha a la expresión dada:

$$A = A\,B\,B^{-1} = C\,B\,B^{-1} = C\,.$$

Luego debemos buscar un contraejemplo en la clase de matrices B que no son invertibles. Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

que satisface $\det(B) = 0$. Las matrices A y C pueden ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Problema 1.8 Si $B = I_n - A\,A^t$, entonces $B^2 = I_n - 2A\,A^t + A\,A^t\,A\,A^t = I_n - 2A\,A^t + A\,A^t = I_n - A\,A^t = B$. Luego B es idempotente. Además $C^2 = I_n - 4A\,A^t + 4A\,A^t\,A\,A^t = I_n - 4A\,A^t + 4A\,A^t = I_n$.

Problema 1.9 Si A es ortogonal, entonces $\det(A\,A^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2 = \det(A\,A^{-1}) = \det(I) = 1$. Luego $\det(A) = \pm 1$. Un contrejemplo para el resultado inverso puede ser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $\det(A) = 1$, pero no es ortogonal.

Problema 1.10 Claramente

$$(A\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}\,,$$

de manera que

$$\mathrm{tr}(A\,B) = \sum_{i=1}^{m} (A\,B)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki}\,.$$

Si intercambiamos las dos sumas,

$$\mathrm{tr}(A\,B) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\,b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}\,a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (B\,A)_{kk} = \mathrm{tr}(B\,A)\,.$$

Problema 1.11 Si calculamos $\det(A)$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & 0 & 1 \\ 2 & x & -2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)\,,$$

el determinante se anula en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 2$. Luego para dichos valores la matriz A no tiene inversa.