Ejercicios

Convención para los ejercicios de Teoría Semántica

1. Es indiferente usar la notación 0/1, F/V, o F/T
2. Cuando se pide Tabla de Verdad:
   - para una fórmula, **la escribimos completa**, incluso cuando encontremos un contraejemplo, para así poder analizar cuántos hay (si hay alguno).
   - para una deducción, **podemos calcular los valores de las premisas, y continuar la tabla solamente en las líneas donde esos valores son V para todas las premisas**. Como antes, esas líneas las escribimos todas, para analizar cuántos contraejemplos hay (si hay alguno).
3. Cuando se pide Método del Contraejemplo para una fórmula o deducción **es obligatorio**:
   - **indicar cuál es la contradicción** en la que se incurre y que en ese caso, por no existir contraejemplo, la fórmula sería válida o la deducción correcta; o bien
   - **indicar al menos uno de los contraejemplos por separado**, especificando los valores de verdad de cada proposición que hacen la fórmula F (en deducciones sería la conclusión F siendo todas las premisas V). En este caso, al haber contrajemplo, queda claro que la fórmula no es válida o la deducción no es correcta.

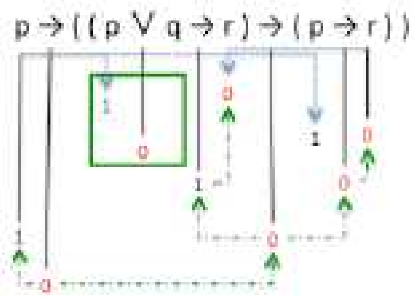
Notación para contraejemplos

1- Valores copiados
2 - Condiciones

1. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos **(*)**:

$$p \rightarrow ((p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

p	q	r	p ∨ q	p ∨ q → r	p → r	(p ∨ q → r) → (p → r)	p → ((p ∨ q → r) → (p → r))
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

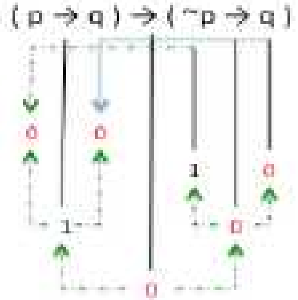


La expresión p v q no puede hacerse falsa porque exigiría valores opuestos en p. No hay un contraejemplo. Por lo tanto la fórmula es válida.

2. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$

p	q	p → q	~p → q	(p → q) → (~p → q)
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

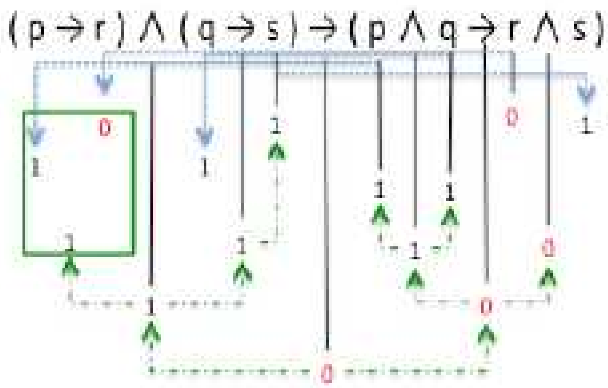


Hemos encontrado una interpretación (p:0 q:0) que hace la fórmula falsa (es decir, un contrajemplo). Por tanto, la fórmula no es una tautología (no es semánticamente válida).

3. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)$$

p	q	r	s	p → r	q → s	p ∧ q	r ∧ s	(p → r) ∧ (q → s)	p ∧ q → r ∧ s	(p → r) ∧ (q → s) → (p ∧ q → r ∧ s)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1



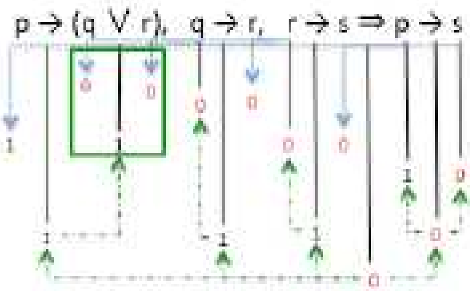
La expresión p →r no puede hacerse VERDADERA porque exigiría valores opuestos en r. No hay un contraejemplo. Por lo tanto la fórmula es válida.

4. Comprobar si la siguiente deducción es correcta usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

$$p \to (q \vee r),\ q \to r,\ r \to s \Rightarrow p \to s$$

					Premisas			Concl.
p	q	r	s	(q ∨ r)	p → (q ∨ r)	q → r	r → s	p → s
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	1	0	1	
0	1	1	0	1	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	1	0	1	
1	1	1	0	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1

No hay ningún contraejemplo. La deducción es correcta. No es necesario calcular el valor de la conclusión para las filas en las que no todas las premisas son V.

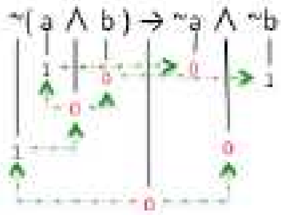


De nuevo vemos que no hay ningún contrajemplo. La contradicción encontrada consiste en que el valor q ∨ r debería ser 1 para que la primera premisa fuera 1 (porque p tiene que ser 1 para que la conclusión sea 0); sin embargo los valores encontrados en función del resto de las premisas obligarían a que fuera 0.

5. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos **(*)**:

~(a ∧ b) → ~a ∧ ~b

a	b	a ∧ b	~a	~b	~(a ∧ b)	~a ∧ ~b	~(a ∧ b) → ~a ∧ ~b
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1



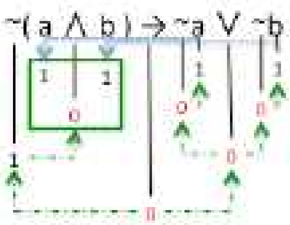
Hemos encontrado una interpretación (a:1 b:0), entre varias posibles, que hace la fórmula falsa y, por tanto, no es una tautología y la fórmula no es válida.

6. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

~(a ∧ b) → ~a ∨ ~b

a	b	a ∧ b	~a	~b	~(a ∧ b)	~a ∨ ~b	~(a ∧ b) → ~a ∨ ~b
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

La fórmula es válida porque ninguna interpretación es un contraejemplo.

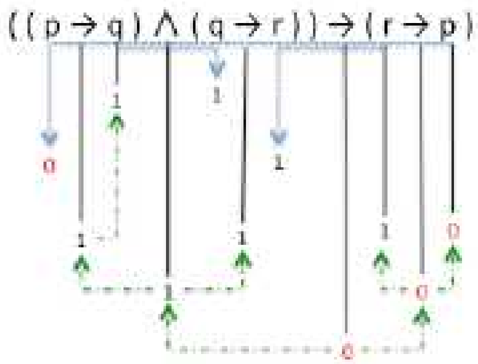


La expresión a ^ b no puede hacerse falsa porque exigiría valores opuestos en a o b a los que se encuentran en la conclusión. No hay contraejemplo, por lo que la fórmula es válida.

7. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos **(*)**:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (r \rightarrow p)$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$r \rightarrow p$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (r \rightarrow p)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

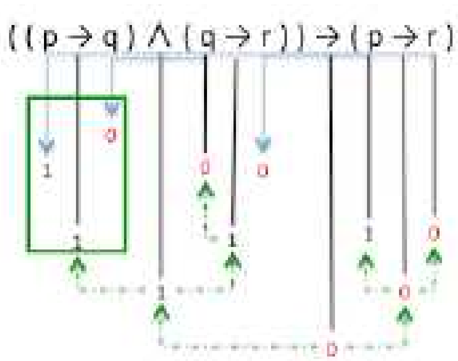


Hay una interpretación (p:0 q:1 r:1), entre varias posibles, que hace la fórmula falsa y, por tanto, no es una tautología y la fórmula no es válida.

8. Comprobar si la siguiente fórmula es válida usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1



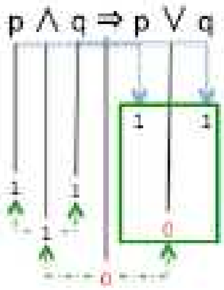
La expresión p →q no puede hacerse VERDADERA porque exigiría valores opuestos en q. No hay un contraejemplo. Por lo tanto la fórmula es válida.

9. Comprobar si la siguiente deducción es correcta usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos (*):

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

p	q	p ∧ q	p ∨ q
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

No hay contraejemplos, pues solamente interesan los valores de la conclusión cuando las premisas son verdaderas (es decir, las tres primeras líneas no se tienen en cuenta). Por lo tanto la deducción es correcta.



La conclusión (p ∨ q) no puede hacerse FALSA cuando la premisa es verdadera. No hay un contraejemplo. Por lo tanto la deducción es correcta.

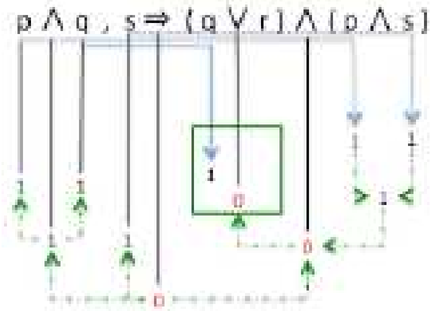
10. Comprobar si la siguiente deducción es correcta usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos (*):

$$p \wedge q,\ s \Rightarrow (q \vee r) \wedge (p \wedge s)$$

		Premisas				**Conclusión**
p	q	p ∧ q	s	q ∨ r	p ∧ s	(q ∨ r) ∧ (p ∧ s)
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			

0	1	0	0			
0	1	0	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0			
1	1	1	1	1	1	1

La conclusión no puede hacerse F cuando las premisas son V. No hay un contraejemplo. Por lo tanto la deducción es correcta.



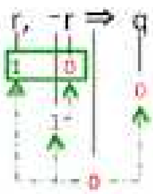
No puede generarse un contraejemplo: la contradicción en que se incurre es que la proposición simple **q** tendría que ser simultáneamente V (por la premisa 1) y F (en la conclusión). Por lo tanto la deducción es correcta.

11. Comprobar si la siguiente deducción es correcta usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

$$r, \sim r \Rightarrow q$$

r	~r	q
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1

Las premisas no pueden ser verdaderas simultáneamente. Por lo tanto, no es posible generar un contraejemplo: la deducción es correcta.



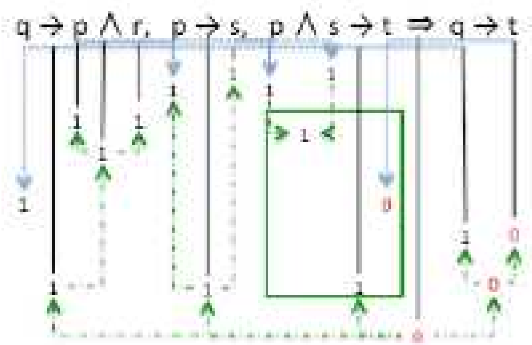
Para que las premisas fuesen verdaderas, tendríamos una interpretación en que el valor de la proposición simple **r** es simultáneamente V y F. Como ello es una contradicción, no puede existir un contraejemplo. Por lo tanto la deducción es correcta.

12. Comprobar si la siguiente deducción es correcta usando por un lado tabla de verdad y por otro búsqueda de contraejemplos:

$$q \rightarrow p \wedge r,\ p \rightarrow s,\ p \wedge s \rightarrow t \Rightarrow q \rightarrow t$$

							Premisas			
p	q	r	s	t	p ∧ r	p ∧ s	q → p ∧ r	p → s	p ∧ s → t	q → t
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0			
0	1	0	0	1	0	0	0			
0	1	0	1	0	0	0	0			
0	1	0	1	1	0	0	0			
0	1	1	0	0	0	0	0			
0	1	1	0	1	0	0	0			
0	1	1	1	0	0	0	0			
0	1	1	1	1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	1	0		
1	0	0	0	1	0	0	1	0		
1	0	0	1	0	0	1	1	0		
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0		
1	0	1	0	1	1	0	1	0		
1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0			
1	1	0	0	1	0	0	0			
1	1	0	1	0	0	1	0			
1	1	0	1	1	0	1	0			
1	1	1	0	0	1	0	1	0		
1	1	1	0	1	1	0	1	0		
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Hemos calculado las premisas columna a columna. Cualquier interpretación que dé como resultado una premisa F ya nos evita calcular el resto. Finalmente, para las once interpretaciones donde las premisas son V resulta una conclusión V, luego no hay contraejemplos, y la deducción es correcta.



La expresión p ∧ s → t no puede hacerse **V**, como requeriría la condición sobre la conclusión, dados los valores para **p**, **s** y **t** que vienen forzados de hacer las premisas **V**. Por lo tanto, no es posible encontrar un contrajemplo, lo que quiere decir que la deducción es correcta.

13. Evaluar semánticamente la siguiente fórmula indicando el número de interpretaciones, las que son modelo y/o contramodelo y la clasificación semántica de la fórmula atendiendo al conjunto de las interpretaciones:

$$p \rightarrow p \vee (q \wedge \sim q)$$

p	q	q ∧ ~q	p ∨ (q ∧ ~q)	p → p ∨ (q ∧ ~q)
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	1	1

Todas las interpretaciones son modelos y por lo tanto la fórmula es una tautología.