Cálculo Dif. Aplicado

Grado en Ingeniería Informática y doble Grado ADE

15 Junio 2017

Soluciones

Cuestión 1 (2 puntos) :
Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y + e^y y' = k - x(1 + y')\,; \qquad x > 0\,; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se pide:
a) Clasificarla razonadamente.
b) Hallar su solución general.
c) En función de k hallar todas las soluciones particulares que cumplen $y(1) = 1$.
d) Escribir la solución del apartado c) que se obtiene para $k = 1$.

Solución:

a) Es exacta, porque al expresarla como: $(y + x - k)dx + (e^y + x)dy = 0$

se cumple que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial(y + x - k)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial(e^y + x)}{\partial x}$

b) La resolvemos de este modo:

$$F(x, y) = \int M(x, y)\mathrm{d}x = \int (y + x - k)dx = yx + \frac{x^2}{2} - kx + h(y)$$

Como se debe cumplir $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$, calculamos la derivada parcial e igualamos a N, y nos queda $h'(y) = e^y$. Integrando (tomando nula la constante de integración), $h(y) = e^y$, con lo que se obtiene la solución implícita $yx + \dfrac{x^2}{2} - kx + e^y = C$.

c) Para $y(1) = 1$ resulta $\quad C = e + \dfrac{3}{2} - k \quad$ luego existe la solución particular $\forall k \in \mathbb{R}$

d) Con $k = 1$ la solución particular es $\boxed{yx + \dfrac{x^2}{2} - x + e^y = e + \dfrac{1}{2}}$

Cuestión 2 (2 puntos) :
Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = e^{-x} + \sin x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Solución:

Primero calculamos la solución de la ecuación homogénea.
Suponiendo soluciones del tipo $y(x) = e^{rx}$ llegamos a la ecuación característica $r^2 - 1 = 0$,

Cuestión 1 (2 puntos) :
Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y + e^y y' = k - x(1 + y'); \qquad x > 0; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se pide:
a) Clasificarla razonadamente.
b) Hallar su solución general.
c) En función de k hallar todas las soluciones particulares que cumplen $y(1) = 1$.
d) Escribir la solución del apartado c) que se obtiene para $k = 1$.

a) EDO 1^{er} orden no lineal Exacta

No lineal
No var sep.

b) $y + e^y y' - k + x + xy' = 0$; $y - k + x + (e^y + x)y' = 0$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 \qquad \text{Exacta } \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$\exists F(x,y)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y); \quad \cancel{y} + h'(x) = \cancel{y} - k + x; \quad h'(x) = x - k; \quad h(x) = \dfrac{x^2}{2} - kx \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y); \quad F(x,y) = \int e^y + x \, dy = e^y + xy + h(x) \end{cases}$$

$$F(x,y) = e^y + xy + x^2/2 - kx$$

$$\boxed{\text{Sol. General: } F(x,y) = C; \quad e^y + xy + x^2/2 - kx = C \ / \ C \in \mathbb{R} \text{ cte}}$$

c) $y(1) = 1$; $e + 1 \cdot 1 + 1^2/2 - k = C$; $k = e + 3/2 + C \quad \forall k$

d) $C = e + 3/2 - 1 = e + 1/2$

$$\boxed{\text{Sol. PVI: } e^y + xy + x^2/2 - x = e + 1/2}$$

Cuestión 2 (2 puntos) :
Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = e^{-x} + \sin x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Sol.G: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$\lambda^2 - 1 = 0; \; \lambda = \pm 1 \quad \beta = \{e^x, e^{-x}\} \quad y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Tiene la forma correcta para coeficientes indeterminados

$y_p(x) = Ae^{-x} + B\,\text{sen}(x) + C\cos(x)$ Como Ae^{-x} sale en β

$Y_p(x) = Axe^{-x} + B\,\text{sen}(x) + C\cos(x)$

$Y_p'(x) = Ae^{-x} - Axe^{-x} + B\cos(x) - C\,\text{sen}(x)$

$Y_p''(x) = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} - B\,\text{sen}(x) - C\cos(x)$

$-Ae^{-x} - Ae^{-x} + \cancel{Axe^{-x}} - B\,\text{sen}(x) - C\cos(x) - \cancel{Axe^{-x}} - B\,\text{sen}(x) - C\cos(x) = e^{-x} + \text{Sen}(x)$

$-2Ae^{-x} - 2B\,\text{sen}(x) - 2C\cos(x) = e^{-x} + \text{Sen}(x)$

$-2A = 1; \; A = -1/2 \qquad -2B = 1; \; B = -1/2 \qquad -2C = 0; \; C = 0$

$Y_p(x) = -1/2\, xe^{-x} - 1/2\,\text{sen}(x)$

Sol. General:

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1/2\, x e^{-x} - 1/2\,\text{sen}(x)$

$y(0) = 1 = C_1 + C_2$

$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1/2\, e^{-x} + 1/2\, x e^{-x} - 1/2\cos(x)$

$y'(0) = 1 = C_1 - C_2 - 1/2 - 1/2$

$C_1 + C_2 = 1 \qquad C_2 = 1 - \frac{3}{2} = -1/2$

$C_1 - C_2 = 2$

$2C_1 \;/\; = 3; \; C_1 = 3/2$

Sol. PVI:

$$\boxed{y(x) = 3/2\, e^x - 1/2\, e^{-x} - 1/2\, xe^{-x} - 1/2\,\text{sen}(x)}$$

cuyas raices son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$.

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea es: $\quad y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea podemos usar el método de coeficientes indeterminados y tener en cuenta que se cumple el principio de superposición.

Tomando $\quad y_p = Axe^{-x} + B\sin x + C\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = (-2A + Ax)e^{-x} - B\sin x - C\cos x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos $A = B = -1/6$ y $C = 0$

Luego la solución particular es $y_p = -\frac{1}{2}(xe^{-x} + \sin x)$

Y la solución general de la ecuación diferencial es: $\quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}(xe^{-x} + \sin x)$

Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ obtenemos $c_1 = 3/2 \;\; c_2 = -1/2$.

Y definitivamente la solución del problema de valor inicial es:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x}$$

Cuestión 3 (2 puntos) :
Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + y = \cos t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Solución:
Tomando la transformada de Laplace se obtiene:

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) - s = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Despejando y simplificando:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s}{(s^2 + 1)(s^2 - 2s + 1)} = \frac{s^3 + 2s}{(s-1)^2(s^2 + 1)}$$

Se descompone en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad A = 3/2 \quad B = 1 \quad C = 0 \quad D = -1/2\,,$$

Y haciendo las antitransformadas se obtiene la solución

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}te^t + e^t - \frac{1}{2}\sin t}$$

Cuestión 3 (2 puntos) :
Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + y = \cos t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$\mathcal{L}\{y\} = F(s)$

$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\cos(t)\}$

$s^2 F(s) - s y(0) - y'(0) - 2s F(s) + 2y(0) + F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 1^2}$

$(s^2 - 2s + 1) F(s) - s - \cancel{2} + \cancel{2} = \dfrac{s}{s^2+1}$; $F(s) = \dfrac{s + s^3 + s}{(s^2+1)(s^2-2s+1)}$

$s = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = 1$ Raiz doble real.

$F(s) = \dfrac{s^3 + 2s}{(s^2+1)(s-1)^2} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{C}{s-1} + \dfrac{D}{(s-1)^2}$

$s^3 + 2s = (As+B)(s-1)^2 + C(s^2+1)(s-1) + D(s^2+1)$

$s = 1 \Rightarrow 1 + 2 = D(1+1)$; $\underline{D = 3/2}$

Esta mal derivado: faltaba $\cdot 2(s-1)$

$3s^2 + 2 = A(s-1)^2 + (As+B) \overset{\cdot 2(s-1)}{+} C\,2s(s-1) + C(s^2+1) + 2Ds$

$s = 1 \Rightarrow 3 + 2 = \cancel{A} + \cancel{B} + C(1+1) + 2D$; $5 = \cancel{A+B} + 2C + 2D$

$s = 0 \Rightarrow 0 + 2 = B(-1)^2 + C(1)(-1) + D(0+1)$; $0 = B - C + D$

$s = 0 \Rightarrow 0 + 2 = A(-1)^2 + B + C(1)$; $2 = A + B + C$; $B = 2 - A - C = 2 - 3 - 0 = \underline{-1 = B}$

$6s = 2A(s-1) + A + 4Cs - 2C + 2Cs + 2D$

$s = 0 \Rightarrow 0 = 2A(-1) + A - 2C + 2D$; $0 = -A - 2C + 2D$

$\left.\begin{aligned} A + 2C &= 3 \\ 2A + 6C &= 6 \end{aligned}\right\}$; $-2A - 4C = -6$

$\cancel{\ } + 2C = 0$

$\underline{C = 0}$

$6 = 2A + 4C + 2C$; $6 = 2A + 6C$

$A = 6 - 6C/2 = 6/2 = \underline{3 = A}$

$F(s) = \dfrac{s^3 + 2s}{(s^2+1)(s-1)^2} = \dfrac{3s-1}{s^2+1} + \dfrac{0}{s-1} + \dfrac{3/2}{(s-1)^2}$

Revisar

Cuestión 4 (2 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución que cumple la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2 \;\; 0)^T$.

b) Comprobar la solución obtenida.

Solución:

a) La matriz A tiene autovalores $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = -9$.

Sus autovectores asociados son, respectivamente, proporcionales a $\vec{\xi}_1 = (5, 3)^T$ y $\vec{\xi}_2 = (1, -1)^T$.

La solución general, por lo tanto, viene dada por:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-9t}$$

.

Usando la condición inicial, obtenemos $c_1 = 1/4$ y $c_2 = 3/4$

Nos queda finalmente:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]}$$

b) Haciendo operaciones comprobamos que:

$$\overrightarrow{X'}(t) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]$$

$$A\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-9t}\right] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]$$

con lo que se comprueba que la solución es correcta.

Y para la condición inicial

$$\overrightarrow{X}(0) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 5 (2.0 puntos) :

Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \qquad 0 < x < \pi \;, \quad t > 0$$

Cuestión 4 (2 puntos) :

Dado el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución que cumple la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2 \;\; 0)^T$.

b) Comprobar la solución obtenida.

a) Autovalores: $|A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 10 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A| = \lambda^2+2\lambda-63$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-63)}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = -9 \end{cases}$$

Raices reales y distintas.

Autovectores: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

Para $\lambda=7$

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 6x-10y=0; \quad y=\frac{6x}{10}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{6}{10}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 6/10 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=-9$

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 6x+6y=0; \quad y=\frac{6x}{-6}=-x$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}x$$

$$\overrightarrow{X}(x) = C_1e^{7t}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + C_2e^{-9t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad / C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ cte.}$$

$$\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\cdot 10 + C_2 \\ C_1\cdot 6 - C_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} 10C_1 + C_2 &= 2 \\ 6C_1 - C_2 &= 0 \\ \hline 16C_1 \quad \cancel{\;} &= 2; \; C_1 = 1/8 \end{aligned} \quad ; C_2 = 6C_1 = 6/8 = 3/4$$

Sol. PVI:

$$\overrightarrow{X}(x) = 1/8\, e^{7t}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 3/4\, e^{-9t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1'(x) \\ X_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1X_1(x) + 10X_2(x) \\ 6X_1(x) - 3X_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{8}e^{7t} + \frac{3}{4}e^{-9t} + \frac{60}{8}e^{7t} - \frac{30}{4}e^{-9t} \\ \frac{60}{8}e^{7t} + \frac{18}{4}e^{-9t} - \frac{18}{8}e^{7t} + \frac{9}{4}e^{-9t} \end{pmatrix}$$

$$X_1'(x) = \frac{7\cdot1\cdot10}{8}e^{7t} + \frac{-9\cdot3\cdot1}{4}e^{-9t} = \frac{70}{8}e^{7t} - \frac{27}{4}e^{-9t}$$

$$X_2'(x) = \frac{7\cdot1\cdot6}{8}e^{7t} + \frac{9\cdot3}{4}e^{-9t} = \frac{42}{8}e^{7} + \frac{27}{4}e^{-9t}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{70}{10}e^{7t} - \frac{27}{4}e^{-9t} \\ \frac{42}{10}e^{7t} + \frac{27}{4}e^{-9t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'(x) = \frac{70}{10}e^{7t} - \frac{27}{4}e^{-9t} \\ X_2'(x) = \frac{42}{10}e^{7t} + \frac{27}{4}e^{-9t} \end{pmatrix}$$ Comprobado.

Cuestión 5 (2.0 puntos) :
Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0, \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(condición inicial)}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$, tomando como constante de separación $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

c) Escribir la solución general $u(x,t)$ del problema y obtener la solución concreta cuando $f(x) = 2(\sin(3x) - \sin(4x))$.

a) $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$2\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(X(x)T(t)\right)\right) = 2\frac{d}{dx}\left(X'(x)T(t)\right) = 2X''(x)T(t)$$

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(X(x)T(t)\right) = X(x)T'(t)$$

$X(x)T'(t) = 2X''(x)T(t)$ Dividimos entre $X(x)T(t)\cdot 2$ para simpl:

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

La cte de separación es la manera de relacionar dos variables independientes.
Por convenio será negativa.

P1) $T'(t) + 2\lambda T(t) = 0$ EDO 1er ord. lineal.

$$\mu(x) = e^{\int 2\lambda dt} = e^{2\lambda t}\ ; \quad \frac{d}{dt}\left(T(t)e^{2\lambda t}\right) = 0\ ; \quad T(t)e^{2\lambda t} = C$$

$$T(t) = Ce^{-2\lambda t}$$

P2) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$; $\lambda > 0$, $a^2 = \lambda$; $a > 0$ Para facilitar los cálculos.

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$

$r^2 + a^2 = 0$; $r = \pm ia$ $\quad \mathcal{B} = \{ sen(ax), cos(ax) \}$ L.I

$X(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \, sen(ax)$ / $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ cte

$X(0) = 0 = C_1$; $C_1 = 0$

$X(\pi) = 0 = \underbrace{C_2}_{\neq 0} \underbrace{sen(a\pi)}_{=0}$; $sen(a\pi) = 0$; $a\pi = n\pi$; $a = n$ / $n = 1,2,3 \ldots$

0 Exigimos para $X(x) \neq 0$

$X_n(x) = C_n \, sen(nx)$ $\quad \lambda_n = n^2$

c) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, sen(nx) e^{-2n^2 t}$

$u(x,0) = 2(sen(3x) - sen(4x))$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, sen(nx) = 0 + 0 + 2 sen(3x) - 2 \, sen(4x)$

$A_0 = 0 = A_1 = A_2$; $A_3 = 2$; $A_4 = -2$

$$\boxed{u(x,t) = 2 \, sen(3x) e^{-18t} - 2 \, sen(4x) e^{-32t}}$$

$u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0\ , \qquad t>0\ , \quad$ (condiciones de frontera)

$u(x,0)=f(x)\ , \qquad 0\leq x\leq \pi \qquad$ (condición inicial)

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$, tomando como constante de separación $\lambda\in\mathbb{R}$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda>0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

c) Escribir la solución general $u(x,t)$ del problema y obtener la solución concreta cuando $f(x)=2(\sin(3x)-\sin(4x))$.

Solución:

a) Aplicando separación de variables $\dfrac{T'(t)}{2T(t)}=-\lambda=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$, por tanto la ecuación diferencial que satisface $T(t)$ es: $\boxed{T'(t)+2\lambda T(t)=0}$

b) El problema de contorno que satisface $X(x)$ es: $\boxed{X''(x)+\lambda X(x)=0\,, \qquad X(0)=0=X(\pi)}$
El problema propuesto indica que $x\in[0,L=\pi]$, por tanto al resolver la ecuación diferencial anterior se obtienen soluciones no nulas cuando $\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2=n^2$, con $n=1,2,\cdots$ y las soluciones no nulas son de la forma $X_n(x)=a_n\sin(nx)$, siendo a_n constante.

c) La solución general del problema propuesto es:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-2n^2t}\sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n\in\mathbb{R}\,.}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(nx)=2(\sin(3x)-\sin(4x))=f(x)\,.;$$

Identificando coeficientes, $A_1=A_2=0\,;A_3=2\,;A_4=-2\,;A_n=0 \quad \forall n\geq 5$, por tanto la solución concreta pedida es:

$$\boxed{u(x,t)=2e^{-18t}\sin(3x)-2e^{-32t}\sin(4x)\ .}$$