Matemática Discreta

El polinomio cromático

Grado en Ingeniería en Informática

Universidad Carlos III de Madrid

El polinomio cromático

Dos cuestiones importantes:

1) ¿Se puede colorear un grafo con K colores? → Nº cromático

si $\chi(G) \leq K$ sí

2) ¿De cuántas formas se puede colorear con K colores?

Polinomio cromático

El polinomio cromático

Definición 131
Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple y sea* $q \geq 2$ *un número natural. El polinomio cromático* P_G *es un polinomio tal que* $P_G(q)$ *nos dice el número de coloraciones propias con* $q \in \mathbb{N}$ *colores que admite el grafo* G*.*

Veremos que $P_G(k) = \sum_j \alpha_j k^j$ (o sea, que es un polinomio)

Los coeficientes α_j contienen información importante sobre la estructura del grafo.

El polinomio cromático

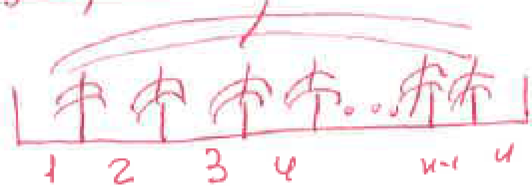
1ª observación.- "Puesto que si $G \sim G'$ $\Rightarrow$ traslada coloraciones $\Rightarrow$ $P_G(k) = P_{G'}(k)$" para cada $k \geq 1$

2º observación.- $P_G(k)$ permitirá "contar" listas con restricciones.

3º observación.- Será una manera adecuada de organizar los cálculos con el principio de inclusión/exclusión.

El polinomio cromático

Ejemplo 1.- ¿Cuántas n-listas con k símbolos con las restricciones



$\Rightarrow$ coloreado de C_n

Veremos que la respuesta será $P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$

El polinomio cromático

A. Polinomio cromático y número cromático

1. Con menos de $\chi(G)$, no se puede colorear $\Rightarrow P_G(k)=0$ si $k<\chi(G)$
2. Con exactamente $\chi(G)$ colorear, se puede colorear, al menos, de una forma $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P_G(\chi(G)) \geq 1$$

3. Si $k' > k$ (si disponemos de más colores) $\Rightarrow P_G(k) \leq P_G(k')$

El polinomio cromático

Ejemplo 2

G  H 

$P_G(k) = k(k-1)(k-2)$

$P_H(k) = k(k-1)$

para $k \to \infty$ $P_G(k) > P_H(k)$

→ Ahora puede haber muchas coloraciones de G que dan lugar a la misma en H

pero H'  (recubridor) $P_{H'}(k) = k(k-1)^2$

El polinomio cromático

Observación.- Si $V(G) = n \Rightarrow G$ es subgrafo recubridor de K_n

$$\Rightarrow P_{K_n}(k) \leq P_G(k) \qquad P_{K_n}(k) \leq P_G(k)$$

y $P_{K_n}(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$

y N_n (grafo vacío) es recubridor de $G \Rightarrow P_G(k) \leq P_{N_n}(k)$

$$P_{N_n}(k) = k^n \Rightarrow \boxed{k(k-1)\cdots(k-n+1) \leq P_G(k) \leq k^n}$$

El polinomio cromático

C. Conexión, "desconexión" y polinomios cromáticos

Como no hay aristas entre vértices de $\neq$ componentes conexas $\Rightarrow$ las coloraciones de ellas son independientes. $\Rightarrow$ Obtención de P_G a partir de los

$\rightarrow$ Si G tiene dos comp. conexas G_1 y G_2 $\Rightarrow$ se aplica la regla del producto y

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)$$

$\rightarrow$ Generalización $P_G(k) = \prod_{i=1}^{r} P_{G_i}(k)$

$\rightarrow$ Si G_1 y G_2 comparten <u>únicamente</u> un vértice $(G_1 \diamond G_2)$

El polinomio cromático

Colores prefijados $\{a_1, \dots, a_k\}$

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } H \\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } H \text{ con } k \text{ colores} \\ \text{que asignan } a_1 \text{ a } v\end{array}\right\} + \dots +$$

$$+ \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } H \text{ con } k \text{ colores} \\ \text{que asignan } a_k \text{ a } v\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$P_{G_1 \diamond G_2} = \frac{P_{G_1}(k)\, P_{G_2}(k)}{k}$$

El polinomio cromático

$\rightarrow$ Si G_1 y G_2 comparte sólo una arista $\qquad G_1 \ominus G_2$

Observación.- $\# \left\{ \begin{array}{l} \text{coloraciones de } F \text{ con } \{1,\dots,k\} \text{ en} \\ \text{los que } v \text{ recibe } 1 \text{ y } w \text{ recibe el } 2 \\ \qquad (v,w) \text{ arista} \end{array} \right\} = \dfrac{P_F(k)}{k(k-1)}$

$$\Rightarrow \qquad P_{G_1 \ominus G_2} = \frac{P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{k(k-1)}$$

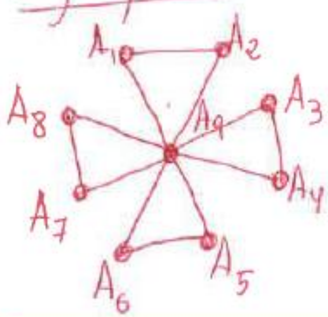
El polinomio cromático

Teorema 135 *Si G es un grafo que se puede dividir en dos partes G_1 y G_2 cuya intersección es K_n para algún $n \geq 1$, entonces*

$$P_G(q) = \frac{P_{G_1}(q) \times P_{G_2}(q)}{P_{K_n}(q)}.$$

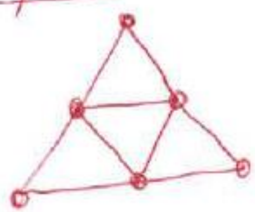
El polinomio cromático

Ejemplo 3   Colorear el grafo aspas de molino (horarios)



$$\Rightarrow P_G(k) = \frac{\left[P_{C_3}(k)\right]^4}{k^3} = \frac{\left[k(k-1)(k-2)\right]^4}{k^3} = k(k-1)^4(k-2)^4$$

Ejemplo 4



$$\Rightarrow P_G(k) = \frac{\left[k(k-1)(k-2)\right]^4}{\left[k(k-1)\right]^3} = k(k-1)(k-2)^4$$

El polinomio cromático

D. Algunas clases de grafos y sus polinomios cromáticos

1) $P_{L_n}(k)$

$$- \; P_{L_3}(k) \begin{cases} P_{L_3}(0) = 0 \\ P_{L_3}(1) = 0 \end{cases} \quad \cdots$$

(k) Una vez coloreado se disponen de $k-1$ colores para v_2 $\Rightarrow$

$$P_{L_3}(k) = k(k-1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$P_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \chi(L_n) = 2$$

El polinomio cromático

2) $P_{K_n}(k)$ $\quad - \; P_{K_3}(k) \longrightarrow P_{K_3}(0)=0$

$$P_{K_3}(1)=0$$

$$P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)$$

$$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!} \quad \left\{ \begin{array}{l} n\text{-listas} \\ \text{sin repetición} \end{array} \right.$$

3) $P_{N_n}(k) = k^n \quad \left\{ \begin{array}{l} n\text{-listas} \\ \text{con repetición} \end{array} \right\}$

El polinomio cromático

4) Árboles $\quad P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ para n vértices.

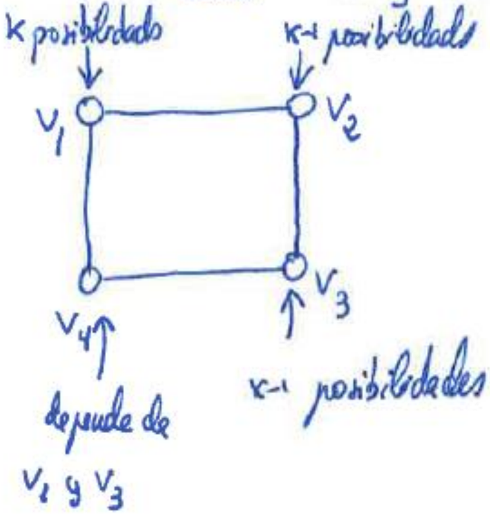
COTA GENERAL PARA GRAFOS CONEXOS

"Si H es árbol generador de $G \Rightarrow P_G(k) \le P_H(k) = k(k-1)^{n-1}$"

El polinomio cromático

5) $P_{C_4}(k)$ "empiezan las dificultades"

Para C_3 coincide con K_3



$\Rightarrow$ Idea para el algoritmo "come-aristas"

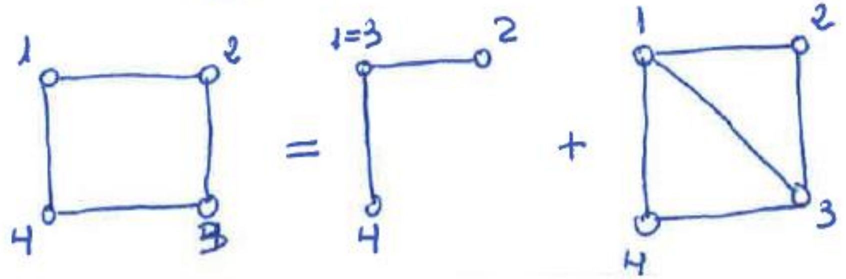
El polinomio cromático

Recuerdo: "El nº de 4-listas sin símbolos consecutivos iguales y tales que el 1^{er} y último símbolo distintos $\Longleftrightarrow$ colorear el grafo C_4

Dos opciones:

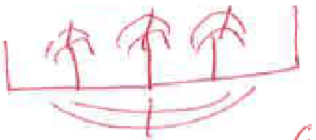
a) mismo símbolo en posiciones 1 y 3 (coloreado del L_3)

b) distinto " " " 1 y 3 (coloreado de C_4 con una diagonal añadida)



El polinomio cromático

Símbolos $\{1, \ldots, k\}$ 4-listas



a) k para 1ª posición, $k-1$ para la segunda y 4ª $\Rightarrow k(k-1)^2$

b) k $k-2$ para 3ª y 4ª $\Rightarrow k(k-1)(k-2)^2$

TOTAL $k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2)^2$

DISYUNTOS
Regla de la suma

El polinomio cromático

SITUACIÓN GENERAL (véase presentación)

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones}\\ \text{de } G-\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G-\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores que llevan}\\ \text{colores} \neq \text{ a los extremos de } a\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G-\{a\} \text{ con}\\ k \text{ colores que llevan el}\\ \text{mismo color a los extremos}\end{array}\right\}$$

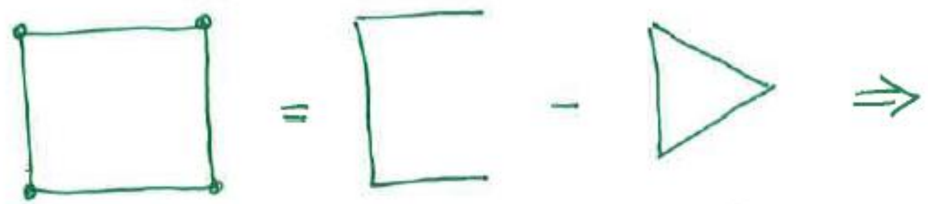
$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de}\\ G-\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G/\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad P_{G-\{a\}}(k) = P_G(k) + P_{G/\{a\}}(k)$$

$$\boxed{P_G(k) = P_{G-\{a\}}(k) - P_{G/\{a\}}(k)}$$

El polinomio cromático

Ejemplo 2



$$P_{C_4}(k) = P_{L_4}(k) - P_{C_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) =$$

$$= k(k-1)\left[(k-1)^2 - (k-2)\right] = k(k-1)(k^2-3k+3)$$

El polinomio cromático

Coeficientes del polinomio cromático

A] "¡El polinomio cromático es un polinomio! (de grado $|V|$)

Inducción en $|A|=m$

Supongamos que $P_G(k)$ es un polinomio en k con coeficientes enteros para grafos con $|A(G)| \leq m$

Sea, ahora, H un grafo con $m+1$ aristas. Si a es una arista de H

$$P_H(k) = \underbrace{P_{H-\{a\}}(k)}_{\substack{m \text{ aristas} \\ \text{polinomio}}} - \underbrace{P_{H/\{a\}}(k)}_{\substack{m \text{ aristas} \\ \text{polinomio}}} \Rightarrow \text{polinomio}$$

Supongamos, ahora, que G tiene n vértices ($|V|=n$). Puesto que los grafos vacíos que se puede obtener al aplicar el algoritmo es como máximo n

$$\Rightarrow \quad gr(P_G(k)) = n \quad y \quad P_G(k) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j k^j \quad \text{con } \alpha_j \in \mathbb{Z}$$

El polinomio cromático

Algunas propiedades

1) $\alpha_0 = P_G(0) = 0$ $\forall G$ (no se puede colorear un grafo con 0 colores)

2) Si $G_1, \ldots, G_r$ $(r \geq 2)$ son las componentes conexas de $G \Rightarrow$

$$P_G(k) = \prod_{j=1}^{r} P_{G_j}(k) = \alpha_r k^r + \alpha_{r+1} k^{r+1} + \cdots$$

es decir, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$

3) Si G tiene, al menos, una arista, no se puede colorear con 1 sólo color $\Rightarrow$

$P_G(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = P_G(1) = 0$ (Si G no es vacío)