Practica 10 Solucionada.pdf

Practicas

1º Lógica

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Politécnica Superior
UC3M - Universidad Carlos III de Madrid

Practica 10

NOMBRE / NIE:
NOMBRE / NIE:
NOMBRE / NIE:

1. Comprobar que la siguiente deducción no es correcta utilizando el método de Resolución.

$\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

(1) $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \sim\exists y \forall x P(x,y)$
(2) $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists x \sim P(x,y)$
(3) $\forall x (\exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists u \sim P(u,y))$
(4) $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge \forall v \exists u \sim P(u,v))$
(5) $\forall x \exists y \forall v (P(x,y) \wedge \exists u \sim P(u,v))$
(6) $\forall x \exists y \forall v \exists u (P(x,y) \wedge \sim P(u,v))$ (Prenex)
(7) $\forall x \forall v \exists u (P(x,f(x)) \wedge \sim P(u,v))$
(8) $\forall x \forall v (P(x,f(x)) \wedge \sim P(g(x,v),v))$ (Skolem)

Cláusula 1: $P(x,f(x))$
Cláusula 2: $\sim P(g(x, v),v))$

No se puede hacer ninguna sustitución que unifique las dos cláusulas anteriores. Es importante ver que hay que sustituir una variable cada vez que aparece en una cláusula: es decir, en P(x,f(x)) la sustitución debe hacerse igual en los dos sitios donde aparece x. En las dos cláusulas sí que se puede reemplazar la x por variables distintas si se desea.

2. Comprobar, mediante el método de Resolución, si la siguiente deducción es correcta **(*)**:

$\exists x \forall y (A(x,y) \rightarrow B(y,x) \vee C(y))$
$\forall x \forall y (D(x,y) \rightarrow \sim C(x))$
$D(a, b) \wedge \forall x \forall y A(x,y)$

$\exists x B(a,x)$

Premisa 1:

(1) $\exists x \forall y (A(x, y) \rightarrow B(y, x) \vee C(y))$ $\leftrightarrow$ Interdef.
(2) $\exists x \forall y (\sim A(x, y) \vee B(y, x) \vee C(y))$

Premisa 2:

(1) $\forall x \forall y (D(x, y) \rightarrow \sim C(x))$ $\leftrightarrow$ Interdef.
(2) $\forall x \forall y (\sim D(x, y) \vee \sim C(x))$

Premisa 3: No requiere más transformación.

Conclusión:

(1) $\sim\exists x B(a, x) \leftrightarrow$ Interdef

(2) $\forall x \sim B(a, x)$

Pasamos a forma PRENEX la fórmula P1 $\wedge$ P2 $\wedge$ P3$\wedge\sim$ Q, que comprobaremos si es insatisfacible:

(1) $\exists x\forall y(\sim A(x,y) \vee B(y,x) \vee C(y)) \wedge \forall x\forall y(\sim D(x, y) \vee \sim C(x)) \wedge D(a,b) \wedge \forall x\forall y A(x,y) \wedge \forall x \sim B(a,x)$

(2) $\exists x\forall y(\sim A(x,y) \vee B(y,x) \vee C(y)) \wedge \forall u\forall v(\sim D(u,v) \vee \sim C(u)) \wedge D(a,b) \wedge \forall r\forall s A(r,s) \wedge \forall t\sim B(a,t)$

(3) $\exists x\forall y\forall u\forall v\forall r\forall s\forall t((\sim A(x,y) \vee B(y,x) \vee C(y)) \wedge (\sim D(u,v) \vee \sim C(u)) \wedge D(a,b) \wedge A(r,s) \wedge \sim B(a,t))$

Transformamos a forma de Skolem y extraemos las cláusulas. No hay que hacer cierre existencial porque no hay variables libres. Luego sustituir los existenciales que están en cabeza por constantes:

(1) $\exists x\forall y\forall u\forall v\forall r\forall s\forall t((\sim A(x,y) \vee B(y,x) \vee C(y)) \wedge (\sim D(u,v) \vee \sim C(u)) \wedge D(a,b) \wedge A(r,s) \wedge \sim B(a, t))$

(2)$\forall y\forall u\forall v\forall r\forall s\forall t((\sim A(c,y) \vee B(y,c) \vee C(y)) \wedge (\sim D(u,v) \vee \sim C(u)) \wedge D(a,b) \wedge A(r, s) \wedge \sim B(a,t))$

Cláusula 1: $\sim A(c,y) \vee B(y,c) \vee C(y)$
Cláusula 2: $\sim D(u,v) \vee \sim C(u)$
Cláusula 3: $D(a,b)$
Cláusula 4: $A(r,s)$
Cláusula 5: $\sim B(a,t)$

Resolventes:

Cláusula 6: $B(s, c) \vee C(s)$	Cambios y/s r/c	en 1 y 4
Cláusula 7: $C(a)$	Cambios s/a t/c en 6 y 5	
Cláusula 8: $\sim D(a,v)$	Cambios u/a en 2 y 7	
Cláusula vacía:	Cambios v/b en 3 y 8	

La deducción es correcta porque la fórmula que comprobamos es insatisfacible.

3. Comprobar, mediante el método de Resolución, si la siguiente deducción es correcta **(*)**:

$$\forall x \exists y([(\sim P(x,a) \lor P(y,x)) \rightarrow (Q(y) \land \sim P(y,x))] \land [Q(y) \rightarrow R(x)])$$

$$\exists x \sim (R(x) \rightarrow P(x,a))$$

a) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la premisa, y la ponemos en forma conjuntiva de cara a la transformación en Skolem.

1. $\forall x \exists y([(\sim P(x,a) \lor P(y,x)) \rightarrow (Q(y) \land \sim P(y,x))] \land [Q(y) \rightarrow R(x)])$
2. $\forall x \exists y([\sim(\sim P(x,a) \lor P(y,x)) \lor (Q(y) \land \sim P(y,x))] \land [\sim Q(y) \lor R(x)])$
3. $\forall x \exists y([(P(x,a) \land \sim P(y,x)) \lor (Q(y) \land \sim P(y,x))] \land [\sim Q(y) \lor R(x)])$
4. $\forall x \exists y([(P(x,a) \lor Q(y)) \land \sim P(y,x)] \land [\sim Q(y) \lor R(x)])$ (Distributiva $A \land (B \lor C)$)
5. $\forall x \exists y([P(x,a) \lor Q(y)] \land \sim P(y,x) \land [\sim Q(y) \lor R(x)])$ (Asociativa)

b) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la conclusión negada:

1. $\sim \exists x \sim (R(x) \rightarrow P(x,a))$
2. $\forall x (R(x) \rightarrow P(x,a))$
3. $\forall x (\sim R(x) \lor P(x,a))$

c) Pasamos a skolem $P \land \sim Q$

1. $\forall x \exists y([P(x,a) \lor Q(y)] \land \sim P(y,x) \land [\sim Q(y) \lor R(x)]) \land \forall x[\sim R(x) \lor P(x,a)]$
2. $\forall x(\exists y([P(x,a) \lor Q(y)] \land \sim P(y,x) \land [\sim Q(y) \lor R(x)]) \land \forall z[\sim R(z) \lor P(z,a)])$
3. $\forall x \exists y([P(x, a) \lor Q(y)] \land \sim P(y,x) \land [\sim Q(y) \lor R(x)] \land \forall z[\sim R(z) \lor P(z,a)])$
4. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \lor Q(y)] \land \sim P(y,x) \land [\sim Q(y) \lor R(x)] \land [\sim R(z) \lor P(z,a)])$

5. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \lor Q(y)] \land \sim P(y,x) \land [\sim Q(y) \lor R(x)] \land [\sim R(z) \lor P(z,a)])$ (Prenex)
6. $\forall x \forall z([P(x,a) \lor Q(f(x))] \land \sim P(f(x),x) \land [\sim Q(f(x)) \lor R(x)] \land [\sim R(z) \lor P(z, a)])$

(“y” cambia a la función “f(x)”)

Cláusulas de la forma de Skolem

$P(x, a) \lor Q(f(x))$, $\sim P(f(x),x)$, $\sim Q(f(x)) \lor R(x)$, $\sim R(z) \lor P(z,a)$

d) Resolución

(1) $P(x, a) \lor Q(f(x))$	Cláusula 1
(2) $\sim P(f(x), x)$	Cláusula 2
(3) $\sim Q(f(x)) \lor R(x)$	Cláusula 3
(4) $\sim R(z) \lor P(z, a)$	Cláusula 4
(5) $P(x, a) \lor R(x)$	Resolución 1,3

(6) P (x, a)	Resolución (z/x) 4,5
(7) P (f(a), a)	Resolución (x/a en 2 ,x/f(a) en 6) 2,6
(8) Cláusula vacía	Resolución (x/a) 2,7

En la línea 7 se usa una sustitución diferente para la "x" en la cláusula 2 (x2) y en la cláusula 6 (x6). Como es posible obtener la cláusula vacía, la deducción original es correcta.

4. Comprobar, mediante el método de Resolución, si la siguiente deducción es correcta:

$\forall x \exists y(E(x) \rightarrow E(y) \land M(y,x))$

$\forall x(\sim \exists y M(y, x) \rightarrow \sim E(x))$

(1) $\forall x \exists y(E(x) \rightarrow E(y) \land M(y,x)) \land \sim \forall x(\sim \exists y M(y,x) \rightarrow \sim E(x))$

(2) $\forall x \exists y(E(x) \rightarrow E(y) \land M(y,x)) \land \exists x \sim(\sim \exists y M(y,x) \rightarrow \sim E(x))$

(3) $\forall x \exists y(E(x) \rightarrow E(y) \land M(y,x)) \land \exists x(\sim \exists y M(y,x) \land E(x))$

(4) $\forall x \exists y(\sim E(x) \lor (E(y) \land M(y,x))) \land \exists x(\sim \exists y M(y,x) \land E(x))$

(5) $\forall x \exists y((\sim E(x) \lor E(y)) \land (\sim E(x) \lor M(y,x))) \land \exists x(\forall y \sim M(y,x) \land E(x))$

(6) $\exists u(\forall x \exists y((\sim E(x) \lor E(y)) \land (\sim E(x) \lor M(y,x))) \land \forall y \sim M(y,u) \land E(u))$

(7) $\exists u \forall x(\exists y((\sim E(x) \lor E(y)) \land (\sim E(x) \lor M(y,x))) \land \forall y \sim M(y,u) \land E(u))$

(8) $\exists u \forall x \exists y((\sim E(x) \lor E(y)) \land (\sim E(x) \lor M(y,x)) \land \forall v \sim M(v,u) \land E(u))$

(9) $\exists u \forall x \exists y \forall v((\sim E(x) \lor E(y)) \land (\sim E(x) \lor M(y,x)) \land \sim M(v,u) \land E(u))$ (Prenex)

(10) $\forall x \exists y \forall v((\sim E(x) \lor E(y)) \land (\sim E(x) \lor M(y,x)) \land \sim M(v,a) \land E(a))$

(11) $\forall x \forall v((\sim E(x) \lor E(f(x))) \land (\sim E(x) \lor M(f(x),x)) \land \sim M(v,a) \land E(a))$ (Skolem)

Resolución:

(1) $\sim E(x) \lor E(f(x))$	Cláusula	1
(2) $\sim E(x) \lor M(f(x),x)$	Cláusula	2
(3) $\sim M(v,a)$	Cláusula	3
(4) E(a)	Cláusula	4
(5) M(f(a),a)	Resolución (x/a)	2,4
(6) Cláusula vacía	Resolución (v/f(a)) 3,5	