Hoja 5

Transformaciones lineales

Problema 5.1 Decidir si las siguientes transformaciones son lineales:

a) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$, definida por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 x$.

b) $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones continuas que están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y $T(f)) = \displaystyle\int_1^x |f(t)|\, dt$.

c) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por $T(A) = A^t$.

d) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por $T(A) = A^t\, A$.

e) $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$, definida por $T(p) = \dfrac{dp}{dx}(x)$.

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $T\left((a_1, a_2)^t\right) = a_1 + a_2$.

g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = A\, v$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T((x, y)^t) = 2\,(x, y)^t + (x, -y)^t$.

Problema 5.2 Hallar el núcleo, la nulidad, la imagen y el rango de cada una de las aplicaciones del Problema 5.1 que sean efectivamente lineales. Indicar si son isomorfismos.

Problema 5.3 Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$$

y la aplicación $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(v) = A\,v$.

1. ¿Para qué valores de α el vector $u = (1, -1, 7)^t$ pertenece a la imagen de T?

2. ¿Para qué valores de α el vector $v = (2, 1, -5, 0)^t$ pertenece al núcleo de T?

Problema 5.4 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que asocia a $u = (1, 5)^t$ el vector $(2, 0)^t$ y asocia a $v = (3, 1)^t$ el vector $(1, -4)^t$. Hallar la imagen por T de $(2, 10)^t$, $(9, 3)^t$ y $(-7, 7)^t$.

Problema 5.5 Consideremos $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$, definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0, a_1 + 1, a_2, a_3)^t\,.$$

¿Es lineal la aplicación T?

Problema 5.6 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea T una aplicación lineal de V en sí mismo. Demostrar que T es un isomorfismo si y sólo si $\ker(T) = \{0\}$.

Obsérvese que esta propiedad se puede utilizar como alternativa para demostrar que una transformación lineal es o no un isomorfismo.

Problema 5.7 Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T((1, 0)^t) = (1, 1)^t$ y $T((0, 1)^t) = (1, -1)^t$.

1. Determinar la imagen de un elemento arbitrario $(x, y)^t$.

2. Indicar si T es inyectiva, suprayectiva, ambas cosas o ninguna.

3. Calcular las dimensiones de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Problema 5.8 Sea la aplicación $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por

$$T(A) = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n} I_n.$$

1. Demostrar que T es lineal.

2. Determinar el núcleo y la imagen de T.

3. Calcular las dimensiones de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.