PROBLEMA 1

a) Como ρ es constante y uniforme se cumple:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho\, dv$$

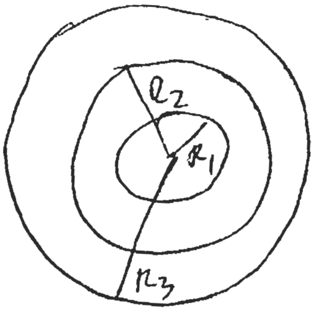
CLAVE 461

0'40€.

$$\int dQ = \int_{V_{es}} \rho\, dv \overset{\rho = cte}{=} \rho \int_{V_{es}} dv = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{4}{3}\rho R_1^3 \pi = \frac{-4}{3}\pi \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1^3 = -4{,}19 \cdot 10^{-8} C}$$

b)



$R_1 = 10cm \quad R_2 = 25cm \quad R_3 = 30cm.$

Q_2 Para calcular el campo eléctrico en todas las regiones del espacio usamos la ley de Gauss:

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0}$$

En las distintas regiones tenemos:

$r < R_1$

$$E\, 4\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = \frac{\overbrace{\rho \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}^{Q_{en}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r \ N/C}$$

$$\vec{E} = -376647{,}8 \cdot r\ \vec{u}_r\ N/C$$

$R_1 < r < R_2$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r \ N/C}$$

$$\vec{E} = -\frac{377{,}1}{r^2}\,\vec{u}_r \ N/C$$

$R_2 < r < R_3$

Como estamos en el interior de la corona conductora se cumple: $\boxed{\vec{E} = 0}$

$r > R_3$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r \ N/C} \qquad \vec{E} = \frac{-360}{r^2}\,\vec{u}_r \ N/C$$

Ahora calculamos el potencial a partir de los campos eléctricos anteriores

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\,d\vec{r}$$

$r > R_3$

$$V(r) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_{\infty}^{r} \frac{-360}{r}\,dr = \boxed{\frac{-360}{r}\ V}$$

$\underline{R_2 < r < R_3}$

Como estamos en la corona conductora se cumple $V = cte$.

$$\boxed{V = \frac{-360}{R_3} = -\frac{360}{0{,}3} = -1200\,V}$$

$\underline{R_1 < r < R_2}$

$$V(r) - \cancel{V(R_2)}^{\,-1200V} = -\int_{R_2}^{r} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{V(r) = -1200 - 377{,}1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{0{,}25}\right)V}$$

$\underline{r < R_1}$

$$V(r) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\Big|_{R_1}^{r} = \frac{-\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - R_1^2)$$

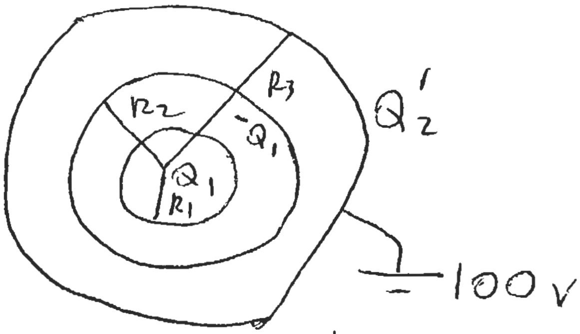
$$V(R_1) = -1200 - 377{,}1\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}25}\right) = -3462{,}6\,V$$

$$\boxed{V(r) = -3462{,}6 + 1{,}88 \cdot 10^5 (r^2 - R_1^2)\,V}$$

c) Para $r > R_3$ cambia la carga encerrada porque ahora en la corona tenemos una carga distinta de valor.

$$100 = \frac{K Q_2'}{R_3} \Rightarrow \boxed{Q_2' = \frac{100 \cdot 0{,}3}{9 \cdot 10^9} = 3{,}33 \cdot 10^{-9}\, C}$$

Ahora las cargas que tenemos son:



Aplicando la ley de Gauss tenemos:

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} = \frac{\cancel{Q_1} - \cancel{Q_1} + Q_2'}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \vec{u}_r \ N/C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \vec{u}_r \ N/C = \frac{29{,}9}{r^2}\, \vec{u}_r \ N/C}$$

El potencial en $R_1 < r < R_2$

$$V(r) - \cancel{V(R_2)}^{100} = -\int_{R_2}^{r} \vec{E}\, d\vec{r}$$

$$\boxed{V(r) = 100 + 29{,}9 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) V}$$

d) El electrón se encuentra fuera de las distribuciones esféricas. Si conectamos la corona conductora a tierra ésta se pone a un potencial de 0V, y el campo eléctrico en el exterior de las distribuciones de carga también es cero.

A 50cm $\Rightarrow$ $V=0$

Muy alejado $\Rightarrow$ $V=0$

Como $\Delta V = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_f = 5 \cdot 10^5 \vec{u}_r$ m/s

Luego la velocidad no cambia, es la misma.

5 3

INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE GESTIÓN CURSO 05/06

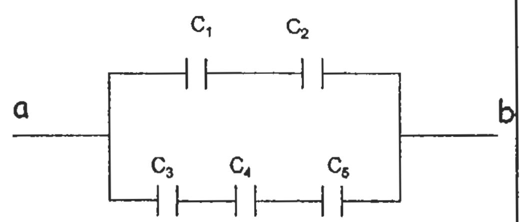
EXAMEN DE FÍSICA

(8 de septiembre de 2006)

2) (20 puntos) Sea la distribución de condensadores de la figura:

a) Si la capacidad de los condensadores es de 2 nF ¿Cuánto vale la capacidad equivalente del sistema?

b) Si conectamos una batería de 100 V entre los puntos a y b, ¿cuánto vale la carga en cada uno de los condensadores? ¿Y la energía del condensador 4?

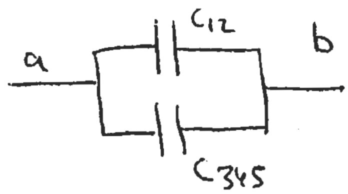


c) Si introducimos los dieléctricos indicados en la tabla en los condensadores, ¿cuál es el potencial máximo al que podemos situar los puntos a y b para que no se produzca la ruptura dieléctrica de ningún condensador?

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
ε_r	2	3	4	2	3
V_R (V)	100	150	50	100	150

SOLUCIÓN:

a) Primero hacemos un circuito equivalente al anterior agrupando los condensadores en serie :



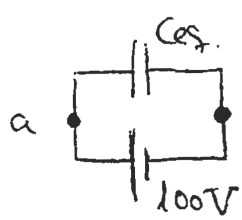
$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow C_{12} = 1 nF$$

$$\frac{1}{C_{345}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow C_{345} = \frac{2}{3} nF$$

Finalmente, calculamos el C_{eq} del sistema calculando la capacidad de dos condensadores en paralelo C_{12} y C_{345}

$$C_{eq} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} nF$$

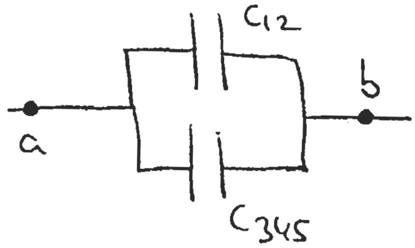
b) Si conectamos una batería de 100V nos queda el siguiente circuito:



El 1^{er} paso es calcular la Q_{eq} total del sistema.

$$Q_{eq} = C_{eq} \cdot V = \frac{5}{3} nF \cdot 100 V = \frac{500}{3} nC$$

El $2°$ paso consiste en ir deshaciendo el circuito que hemos agrupado en el apartado anterior, esto es,



$V_{12} = V_{345} = 100 V$, ya que están en paralelo.

C_{12} y C_{345} ya los conocemos

$$Q_{12} = V_{12} \cdot C_{12} = 100 V \cdot 1 nF = 100 nC$$

$$Q_{345} = V_{345} \cdot C_{345} = 100 V \cdot \frac{2}{3} nF = \frac{200}{3} nC$$

Nota: evidentemente $Q_{12} + Q_{345} = 100 + \frac{200}{3} = \frac{500}{3} nC = Q_{eq}$.

Finalmente, como C_1 y C_2 están en serie, ambos tendrán $100 nC$, y como C_3, C_4 y C_5 están en serie, ambos tendrán $\frac{200}{3} nC$.

¿Cuál es la energía del Condensador 4?

$C_4 = 2 nF$

$Q_4 = \frac{200}{3} nC$

$$E_4 = \frac{1}{2} Q_4^2 / C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{200}{3} nC\right)^2}{2 nF} = \frac{10}{9} \mu J.$$

c) El efecto de los dieléctricos es aumentar la capacidad de los condensadores por un factor ε_r, de esta forma

$C_1 = 4 nF$, $C_2 = 6 nF$, $C_3 = 8 nF$, $C_4 = 4 nF$, $C_5 = 6 nF$

Si calculamos las capacidades de las distintas agrupaciones de condensadores, siguiendo el mismo procedimiento del apartado a), obtenemos:

$$C_{12} = \frac{12}{5} nF \qquad C_{345} = \frac{276}{65} nF$$

Por otra parte, veamos que Voltaje de ruptura en el Condensador 1:

$$V_{R1} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{V_{ab} \cdot C_{12}}{C_1} = V_{ab} \cdot \frac{12/5}{4} = V_{ab} \cdot \frac{3}{5}$$

donde hemos utilizado que:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{12} = V_{ab} \cdot C_{12}$$

Porque están en serie

potencial que conectamos entre a y b.

A partir de la ecuación anterior vemos que:

Condensador 1: $V_{ab} = \frac{5 \cdot V_{R1}}{3} = \frac{5 \cdot 100}{3} = 167\ V$

Potencial máximo para que no se produzca ruptura en el Condensador 1

Repetimos el mismo cálculo para los otros 4 condensadores

Condensador 2: $V_{R2} = V_{ab} \cdot \frac{(12/5)}{6} \Rightarrow V_{ab} = 150 \cdot \frac{5}{2} = 375\ V$

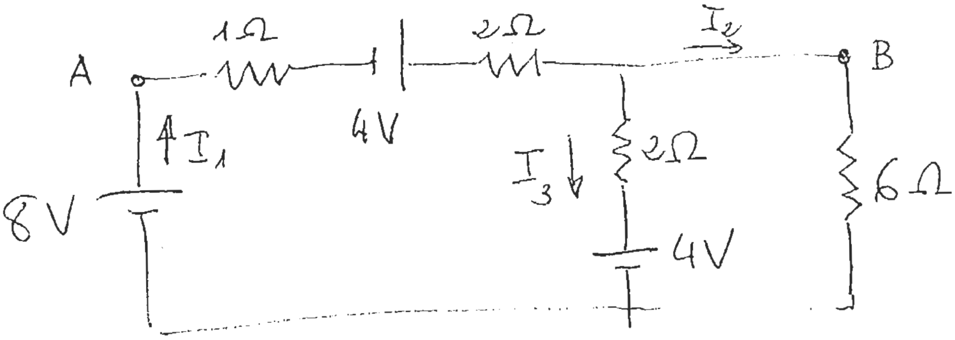
Condensador 3 $V_{R3} = V_{ab} \frac{(24/13)}{8} \Rightarrow V_{ab} = 50 \cdot \frac{13}{3} = 217\ V$

Condensador 4 $V_{R4} = V_{ab} \frac{(24/13)}{4} \Rightarrow V_{ab} = 100 \cdot \frac{13}{6} = 217\ V$

Condensador 5 $V_{R5} = V_{ab} \frac{(24/13)}{6} \Rightarrow V_{ab} = \frac{150 \cdot 13}{4} = 487.5\ V$.

V_{max} (V) será el mínimo potencial que podemos someter entre a y b para que se produzca la rotura de alguno de los condensadores.
En este caso $\underline{\underline{167\ V}}$

Problema nº 3:



a) Ley de los nudos: $I_1 = I_2 + I_3$

Ley de las mallas
Izda: $8 - I_1 + 4 - 2I_1 - 2I_3 - 4 = 0$
Dcha: $-6I_2 + 4 + 2I_3 = 0$

$\rightarrow \quad I_3 = \dfrac{6I_2 - 4}{2} = 3I_2 - 2$

La introducimos en la 1ª ecuación

$I_1 = I_2 + 3I_2 - 2$

$I_1 = 4I_2 - 2$

Sustituimos en la 2ª ecuación

$8 - 4I_2 + 2 + \cancel{4} - 2(4I_2 - 2) - 2(3I_2 - 2) - \cancel{4} = 0$

$10 - 4I_2 - 8I_2 + 4 - 6I_2 + 4 = 0$

$\boxed{I_2 = \dfrac{18}{18} = 1\,A}$

$$\boxed{I_3 = 3.1 - 2 = 1\,A}$$

$$\boxed{I_1 = 4.1 - 2 = 2\,A}$$

b) $V_A - I_1 + 4 - 2I_1 = V_B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V_B - V_A = -3I_1 + 4 = -2V}$$

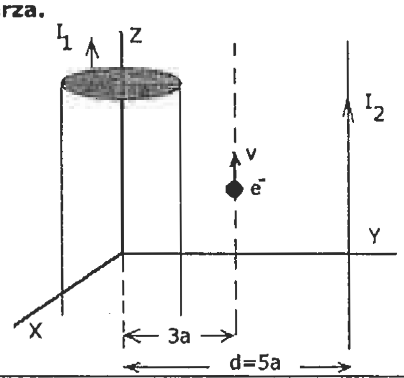
o bien

$$\boxed{V_A - V_B = 2V}$$

c) La potencia disipada en una resistencia R es $P = I^2 R$. Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} P(1\Omega) &= I_1^2 . 1\Omega = 4\,W \\ P(2\Omega) &= I_1^2 . 2\Omega = 8\,W \\ P(2\Omega) &= I_3^2 . 2\Omega = 2\,W \\ P(6\Omega) &= I_2^2 . 6\Omega = 6\,W \end{aligned}}$$

Por un cilindro infinito de radio a desconocido, cuyo eje coincide con el eje Z, circula una corriente I_1=3 A en el sentido positivo del eje Z. A una distancia d=5a del eje del cilindro se coloca un hilo largo y recto por el que circula una corriente I_2=4 A, también en el sentido positivo del eje Z. Sabiendo que un haz de electrones se mueve en el plano YZ a una distancia 3a del eje del cilindro sin desviarse y con velocidad v=500 m/s y el campo eléctrico en la región comprendida entre los dos conductores es 0.01 V/m, determina el radio a del cilindro, así como la fuerza por unidad de longitud que el cilindro ejerce sobre el hilo, especificando la dirección, sentido y módulo de dicha fuerza.



Fuerza de Lorentz sobre el haz

Como el haz de electrones no desvía su trayectoria (se mueve en línea recta, paralelamente al eje Z), la fuerza de Lorentz (fuerza electromagnética) sobre el haz ha de ser nula, es decir:

$$\vec{F}_{haz} = -|q_e|(\vec{E} + \vec{v}_{haz} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

Campo magnético en la dirección del haz

Despejando el campo eléctrico en la expresión anterior, obtenemos:

$$\vec{E} = -\vec{v}_{haz} \times \vec{B}$$

Tomando el módulo en ambos miembros:

$$|\vec{E}| = |-\vec{v}_{haz} \times \vec{B}| \Rightarrow E = v_{haz}\, B\, sen 90 = v_{haz}\, B$$

por tanto:

$$B = \frac{E}{v_{haz}} = \frac{0.01\ Vm^{-1}}{500\ ms^{-1}} = 2\ 10^{-5}\ T$$

El valor de B anterior coincide con el módulo del campo magnético creados por el cilindro y el hilo en cualquier punto de la dirección del haz.

Campos magnéticos creados por el cilindro y el hilo mediante la ley de Ampere

Los módulos de los campos magnéticos creados por el cilindro y el hilo en un punto genérico del haz (a una distancia r=3a del eje Z), son (aplicando la ley de Ampere):

CILINDRO:

$$B_{cilindro}\, 2\pi(3a) = \mu_o I_1 \Rightarrow B_{cilindro} = \frac{\mu_o I_1}{6\pi a}$$

sustituyendo los datos del problema:

$$B_{cilindro} = \frac{2\ 10^{-7}}{a}$$

HILO:

$$B_{hilo}\, 2\pi(5a - 3a) = \mu_o I_2 \Rightarrow B_{hilo} = \frac{\mu_o I_2}{4\pi a}$$

sustituyendo los datos del problema:

$$B_{hilo} = \frac{4\ 10^{-7}}{a}$$

Expresando los campos magnéticos en forma vectorial, y sumándolos, obtenemos:

$$\vec{B} = \vec{B}_{cilindro} + \vec{B}_{hilo} = \frac{10^{-7}}{a}(-2+4)\vec{i} = \frac{2\ 10^{-7}}{a}\vec{i}$$

Cálculo de la distancia a

Igualando los módulos del campo magnético anteriormente calculados, obtenemos:

$$2\ 10^{-5} = \frac{2\ 10^{-7}}{a}$$

despejando a:

$$a = 10^{-2}\ m = 1\ cm$$

Fuerza por unidad de longitud que ejerce el cilindro sobre el hilo

Si tomamos un segmento de corriente en el hilo, de longitud L, la fuerza magnética que siente debido al campo magnético producido por el cilindro es:

$$\vec{F}_{hilo} = I_{hilo}(\vec{L} \times \vec{B}_{cilindro})$$

siendo:

$$\vec{L} = L\vec{k};\ I_{hilo} = 4\ A$$

$$\vec{B}_{cilindro} = -\frac{\mu_o I_{cilindro}}{2\pi(5a)}\vec{i} = -1.2\ 10^{-5}\ \vec{i}\ T$$

entonces:

$$\vec{F} = 4\left(L\vec{k} \times (-1.2\ 10^{-5}\ \vec{i})\right) = -4.8\, L\ 10^{-5}\ \vec{j}$$

dividiendo ambos miembros por L, obtenemos la fuerza por unidad de longitud sobre el hilo:

$$\frac{\vec{F}}{L} = -4.8\ 10^{-5}\ \vec{j}\ Nm^{-1}$$

Módulo: 4.8 10^{-5} N/m

Dirección: eje Y

Sentido: hacia la izquierda (el hilo se ve atraído por el cilindro)

Problema 5

Para cualquiera de las dos espiras de radio generico r:

$$\phi = B \cdot A, \quad V = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \;\Rightarrow\; V = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot A, \quad A = \pi r^2 \;\Rightarrow\; V = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2$$

$$R = \rho \frac{L}{S}, \quad L = 2\pi r \;\Rightarrow\; R = \rho \frac{2\pi r}{S}$$

$$I = \frac{V}{R} \;\Rightarrow\; I = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{S \cdot r}{2\rho}$$

$$r_{al} = 2a \Rightarrow I_{al} = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{S \cdot 2a}{2\rho_{al}}$$

$$r_{cu} = a \Rightarrow I_{cu} = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{S \cdot a}{2\rho_{cu}}$$

$$\frac{I_{al}}{I_{cu}} = \frac{\cancel{\partial B/\partial t} \cdot \cancel{S} \cdot 2\cancel{a} \cdot \cancel{2}\rho_{cu}}{\cancel{\partial B/\partial t} \cdot \cancel{S} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{2}\rho_{al}} = \frac{2\rho_{cu}}{\rho_{al}} = \frac{2}{1.65}$$

$$\boxed{\frac{I_{al}}{I_{cu}} = 1,\widehat{21}}$$

ϕ = flujo A = Area espira V = Voltaje L = perimetro espira r_{al} = radio espira aluminio

R = resistencia espira S = seccion del cable r = radio generico r_{cu} = radio espira cobre