PROBLEMA 6.4

$f \in C^1(\mathbb{R})$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} = 1$

¿ $f(0)=0$; $f'(0) = 5/2$?

¿ $\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)}$?

- Como $f(x)$ & x^3 son funciones continuas:

$$\lim_{x\to 0} f(2x^3) = f(2 0^3) = f(0)$$

- Por tanto, si $1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3}$ es necesario que $\boxed{f(0)=0}$ ya que si $f(0)\neq 0$ $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3}$.

En ese caso:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{f'(2x^3)\cdot 6x^2}{15x^2}$$

$$= \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} f'(2x^3) \underset{\text{continua}}{=} \frac{2}{5} f'(0)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{5} f'(0) \Rightarrow \boxed{f'(0) = \frac{5}{2}}$$

- Calculemos ahora $\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)}$

$$\lim_{x\to 0} f(f(2x)) \underset{\text{continua}}{=} f(f(0)) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f^{-1}(x) \underset{\text{continua}}{=} f^{-1}(0) = 0$$

$0 = f(0) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$

$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{f'(f(2x))\, f'(2x)\cdot 2}{3\,(f^{-1})'(x)}$$

$$= \frac{f'(f(0))\, f'(0)\cdot 2}{3\,(f^{-1})'(0)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(f'(0))^2}{(f^{-1})'(0)}$$

Ahora bien:

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3(f^{-1})(x)} = \frac{2}{3}\,(f'(0))^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{5^3}{2^3} = \frac{5^3}{2^2\cdot 3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3(f^{-1})(x)} = \frac{125}{12}}$$