

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

## Конспект лекций

### I семестр

### Лекция 1

#### Элементы теории множеств

На первых порах мы будем использовать следующие множества:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \emptyset$ . Они знакомы вам со школьных времён. Также считаются известными операции включения элемента во множество  $a \in A$  и множества во множество  $A \subset B$ , пересечения и объединения множеств  $A \cap B, A \cup B$ , разности множеств  $A \setminus B$  и декартова произведения множеств  $A \times B$ . В школе вы также изучали отображения множеств  $f: A \rightarrow B$ . Напомним, что можно выделить несколько видов отображений множеств: *инъективное, сюръективное и биективное*. Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется инъективным или отображением "в если  $f(x)$  не совпадает с  $f(y)$  для всяких несовпадающих  $x, y \in A$ . Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется сюръективным или отображением "на если для всякого  $b \in B$  существует  $a \in A$  такой, что  $f(a) = b$ . Отображение называется биективным, или взаимно-однозначным, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Конечно же, есть отображения, которые не являются ни инъективными, ни сюръективными.

В матанализе активно используется язык кванторов. Нам понадобятся кванторы всеобщности  $\forall$  и существования  $\exists$ . Их пока следует понимать как символическое обозначение слов "для всякого, для любого" в случае квантора  $\forall$  и "существует" в случае квантора  $\exists$ . Например определение сюръективного отображения перепишется следующим образом:  $\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$ . Двоеточие читается как "такой что".

Напомним также, что мощностью конечного множества называется число элементов в нём. При этом мощность множества  $\emptyset$  равна 0. Для бесконечных множеств понятие мощности не определяется, но определяется понятие равномощных множеств: два множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

Нам понадобятся две следующие теоремы, которые будут доказаны в курсе "введение в дискретную математику и топологию".

**Теорема.** *Для любых двух множеств  $A$  и  $B$  верно следующее: они либо равномощны, либо нет. Причём в последнем случае верно, что либо  $A$  равномощно подмножеству  $B$ , либо  $B$  равномощно подмножеству  $A$ .*

**Теорема Кантора-Бернштейна.** *Если  $A$  равномощно подмножеству  $B$ , а  $B$  равномощно подмножеству  $A$ , то  $A$  и  $B$  равномощны.*

Счётным мы будем называть всякое множество, равномощное  $\mathbb{N}$ . Например,  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$  счётны. Докажем следующую теорему

**Теорема.** *Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчётно.*

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда последовательности из 0 и 1 можно занумеровать следующим образом: в первой строке выпишем первую последовательность, во второй строке - вторую и т.д. Предъявим последовательность из 0 и 1, которую нельзя вписать ни в какую строку. Её первый элемент отличен от первого элемента первой строки, второй элемент отличен от второго элемента второй строки и т.д. Эта последовательность не может стоять в  $n$ -ой строке, т.к. она отличается от этой строки  $n$ -м элементом.  $\square$

Множество называется континуальным, если оно равномощно множеству последовательностей из 0 и 1. Примеры континуальных множеств:  $\mathbb{R}$ ,  $[0, 1]$ ,  $(-2.5, 7)$ .

**Пример.** Покажем, что всякое бесконечное множество  $A$  равномощно его объединению со счётным (или конечным) множеством  $B$ . Действительно, найдём в  $A$  счётную часть  $S$  (почему она есть?). Рассмотрим разбиение  $A = (A \setminus S) \cup S$ . Тогда биекцию с  $A \cup B$  построим таким образом: на  $A \setminus S$  - это тождественное отображение, а на  $S$  есть биекция с  $S \cup B$ .

**Упражнение.** Покажите, что произведение континуальных множеств континуально, а счётных счётно.

## Теория вещественных чисел

Есть различные подходы к определению вещественного числа. Мы будем следовать аксиоматическому подходу, а именно предъявим такой набор аксиом, что множество, удовлетворяющее этому набору, будет называется множеством вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Корректность этого определения (т.е. что такое множество действительно существует и оно в некотором смысле единственно) будет доказана в начале второго модуля.

Мы начнём с определения группы. Множество  $G$  называется *группой* (точнее, *коммутативной* или *абелевой группой*) относительно операции  $*$ , если выполнены следующие условия:

- (i) Существует нейтральный элемент  $e \in G$  такой, что  $\forall x \in G$  справедливо  $x * e = e * x = x$ .
- (ii) Существует обратный элемент:  $\forall x \in G \exists y \in G$  такой, что  $x * y = y * x = e$ .
- (iii) Операция  $*$  ассоциативна: всегда  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
- (iv) Операция  $*$  коммутативна: всегда  $a * b = b * a$ .

При этом используют либо знак  $+$  сложения, либо знак  $\times$  (он же  $\cdot$ ) умножения. Если  $+$ , то группу называют *аддитивной группой*, или *группой по сложению*, если  $\times$ , — *мультипликативной группой*, или *группой по умножению*. В мультипликативной группе очень часто знак операции не пишут вообще. В аддитивной группе нейтральный элемент называется 0, обратный элемент к  $a$  обозначается  $-a$ . В мультипликативной группе нейтральный элемент называется 1, обратный элемент к  $a$  обозначается  $a^{-1}$ . Конечно же, есть и некоммутативные группы (они нам пока не понадобятся). Подробнее группы будут изучаться в курсе алгебры.

**Аксиомы операций.** На множестве вещественных чисел заданы 2 коммутативные бинарные операции, сложения и умножения. Вот аксиомы, которым они удовлетворяют:

- (i) Множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  — аддитивная коммутативная группа.
- (ii) Множество вещественных чисел  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  — мультипликативная коммутативная группа.
- (iii) Умножение дистрибутивно относительно сложения:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  верно, что  $(x + y)z = xz + yz$ .

Если выполнены такие аксиомы, то множество называется *полем* (т.е. заданы две коммутативных операции, связанные между собой законом дистрибутивности). Таким образом, первая аксиома вещественных чисел говорит, что на  $\mathbb{R}$  заданы 2 операции, относительно которых  $\mathbb{R}$  является полем. Примеры полей  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ . На  $\mathbb{Z}$  со стандартными  $+$  и  $\times$  нет структуры поля. Как и множества, поля бывают конечными и бесконечными. Например, поле  $\mathbb{F}_2$  состоит из двух элементов 0 и 1.

**Аксиомы порядка.** Говорят, что на множестве  $A$  определено *отношение*  $\leq$ , если в множестве пар  $(a, b)$ ,  $a \in A, b \in A$  выбрано некоторое подмножество. Если пара  $(a, b)$  принадлежит подмножеству, то будем говорить, что  $a \leq b$ .

Отношение называется отношением порядка, если выполнены следующие свойства:

- (i)  $a \leq a$ ;
- (ii)  $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$  (символ " $\wedge$ " читается как "и");
- (iii)  $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ .

Если дополнительно выполнено свойство  $\forall a, b \in A$  либо  $a \leq b$ , либо  $b \leq a$  (то есть все элементы множества  $A$  сравнимы), то множество называется линейно упорядоченным, если нет (не все элементы сравнимы) — частично упорядоченным. Наряду со знаком  $\leq$  употребляем знак  $\geq$ :  $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$ . Пример отношения на множестве натуральных чисел (помимо очевидного):  $m$  делится на  $n$ .

**Определение.** Поле  $F$  называется упорядоченным полем, если на этом поле задано отношение порядка,  $F$  линейно упорядочено, причём  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \ \forall c \in F$  и  $(0 \leq a) \wedge (0 \leq b) \Rightarrow 0 \leq ab$ .

Примеры упорядоченных полей:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , множество рациональных функций, т.е. функций вида  $R = P/Q$ , где  $P, Q$  — многочлены, причём  $Q$  не тождественно 0 (при этом полагается, что  $R > 0$ , если коэффициенты при старших степенях в  $P$  и  $Q$  имеют один и тот же знак, а соотношение порядка таково:  $R_1 \geq R_2 \Leftrightarrow R_1 - R_2 \geq 0$ ), множество  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  чисел вида  $a + b\sqrt{3}$ , где  $a, b \in \mathbb{Q}$ , множество вещественных алгебраических чисел (т.е. корней полиномов с целыми коэффициентами)

**Аксиома непрерывности (полноты).** Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $A, B \neq \emptyset$ , причём  $\forall a \in A, b \in B$  справедливо  $a \leq b$ . Тогда существует такое  $c \in \mathbb{R}$ , что  $\forall a \in A$  справедливо  $a \leq c$ , и  $\forall b \in B$  справедливо  $c \leq b$ .

Несмотря на кажущуюся очевидность аксиомы непрерывности, она позволяет отделить поле  $\mathbb{R}$  от всех остальных упорядоченных полей.

Итак, мы готовы сформулировать определение вещественных чисел.

**Определение.** Множеством вещественных чисел называется упорядоченное поле с аксиомой непрерывности.

Для всех приведённых выше упорядоченных полей за исключением  $\mathbb{R}$  аксиома непрерывности не выполняется. Действительно,

(i) для  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ : между множествами  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \pi\}$  и  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \pi\}$  нельзя вставить рациональное число. Аналогично для  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ : между множествами  $A = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid x < \pi\}$  и  $B = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid x > \pi\}$  нельзя вставить число из  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ . Иррациональность и трансцендентность числа  $\pi$  считается известной.

(ii) для поля рациональных функций: рассмотрим множество чисел и множество многочленов вида  $ax + b$ ,  $a > 0$ . Любой такой многочлен больше любого числа, однако нет рациональной функции, которая больше всех чисел и меньше всех таких многочленов.

**Модели множества вещественных чисел.** Под моделью мы будем понимать какое-то упорядоченное поле, на котором действует аксиома непрерывности. Рассмотрим некоторые из них.

- (i) Множество десятичных чисел. Это конструкция изучалась в школе.
- (ii) Множество чисел по заданному основанию (двоичные, троичные и т.д.). Также изучалась в школе.
- (iii) Числовая прямая. Также изучалась в школе.
- (iv) Дедекиндовы сечения. Ограничимся лишь определением: *сечением Дедекунда* называется разбиение множества  $\mathbb{Q}$  на два подмножества  $\mathbb{Q}_l$  и  $\mathbb{Q}_r$  таким образом, чтобы всякое число

из  $\mathbb{Q}_l$  было бы меньше всякого числа из  $\mathbb{Q}_r$ . На множестве таких сечений можно ввести структуру упорядоченного множества и проверить аксиому непрерывности (см. [2]).

- (v) Множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Здесь две фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их объединение - снова фундаментальная последовательность. Об этом речь пойдёт позже.

**Упражнение.** Проверьте аксиомы упорядоченного поля, а также аксиому непрерывности для моделей десятичных, двоичных чисел, а также для модели числовой прямой (как определить умножение?).

## Лекция 2

### Ограниченные множества

**Определение.** Множеством  $A \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным сверху, если существует такое число  $C \in \mathbb{R}$ , что для всякого  $a \in A$  верно, что  $a \leq C$ . Число  $C$  при этом называется верхней границей или гранью.

На языке кванторов это определение запишется следующим образом:  $A \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным сверху  $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$ . Отрицание этого определения даёт определение неограниченного сверху множества.

**Определение.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется неограниченным сверху  $\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \exists a \in A : a > C$ .

Аналогичным образом определяются ограниченные (существует нижняя граница  $C \in \mathbb{R}$ ) и неограниченные снизу множества (нижней границы не существует).

**Определение.** Множеством  $A \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу. Можно также сказать, что  $A \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным  $\Leftrightarrow \exists C > 0 \in \mathbb{R} \forall a \in A : |a| \leq C$ .

**Определение.** Число  $M \in A$  называется максимальным или наибольшим элементом множества  $A$ , если оно является верхней границей множества  $A$ , то есть для любого  $x \in A$  справедливо  $x \leq M$ . Число  $m \in A$  называется минимальным или наименьшим элементом множества  $A$ , если оно является нижней границей множества  $A$ , то есть для любого  $x \in A$  справедливо  $x \geq m$ .

**Обозначения.**  $M = \max\{x \in A\} = \max_{x \in A} x$ ;  $m = \min\{x \in A\} = \min_{x \in A} x$ .

**Упражнение.** Из аксиомы порядка выведите единственность наибольшего и наименьшего элементов ограниченного множества (при условии, что они есть).

**Примеры:** наибольшим элементов множества *неположительных вещественных чисел* является 0, наименьшего элемента нет (множество не ограничено снизу); множество же *отрицательных чисел* не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов (наибольшим элементом должен был бы быть 0, но он не является отрицательным числом), наименьшего элемента нет, т.к. множество не ограничено снизу.

Предыдущий пример показывает, что ограниченные множества не очень удобно описывать при помощи их наибольших и наименьших элементов (т.к. их может не быть). Однако, если множество ограничено, то всегда есть границы. Дадим следующие определения.

**Определение.** Число  $M \in \mathbb{R}$  называется *супремумом* или *точной верхней гранью* множества  $A \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \leq M) \wedge (\forall y < M : \exists x \in A : x > y)$ . Число  $m \in \mathbb{R}$  называется *инфимумом* или *точной нижней гранью* множества  $A \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \geq m) \wedge (\forall y > m : \exists x \in A : x < y)$ .

**Обозначения.**  $M = \sup A$ ;  $m = \inf A$ .

**Теорема.** У любого непустого ограниченного сверху множества есть супремум. У любого непустого ограниченного снизу множества есть инфимум.

**Доказательство.** Доказательство проведём для случая ограниченного сверху множества. Для ограниченного снизу множества доказательство аналогично.

Пусть  $A^+$  — множество верхних границ множества  $A$ . Оба множества  $A$  и  $A^+$  не пустые и при этом выполнено условие аксиомы непрерывности: все элементы множества  $A$  не больше всех элементов множества  $A^+$ . Значит, в силу аксиомы непрерывности существует число  $M$

такое, что  $\forall x \in A, y \in A^+ : x \leq M \leq y$ . По построению,  $M = \sup A$ , т.к.  $\forall x \in A : x \leq M$ . Это действительно наименьшая верхняя граница, т.к.  $\forall y \in A^+ : y \geq M$   $\square$ .

На самом деле верна следующая теорема

**Теорема.** *Теорема о существовании верхней грани эквивалентна аксиоме непрерывности. Иными словами, упорядоченное множество, у которого каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань есть  $\mathbb{R}$ .*

### Аксиома Архимеда

Несмотря на своё название, аксиома Архимеда в современном изложении является теоремой, выводящейся из аксиом вещественных чисел.

**Теорема (аксиома Архимеда).** *Для любых положительных вещественных чисел  $a$  и  $b$  верно, что среди чисел*

$$a, 2a(= a + a), 3a(= a + a + a), \dots, na, \dots$$

*найдутся числа, большие  $b$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $A$  чисел вида  $na$ . Предположим, что среди них нет ни одного числа, большего  $b$ . Рассмотрим множество  $B$  вещественных чисел, больших всех чисел из  $A$ . Множества  $A$  и  $B$  не пустые, т.к.  $b \in B$ . Все элементы множества  $A$  меньше всех элементов  $B$ . Значит, по аксиоме непрерывности между  $A$  и  $B$  найдется промежуточное число  $c$  такое, что  $x \leq c \leq y, x \in A, y \in B$ . Число  $c$  — точная верхняя грань  $A$  по построению. Однако,  $d = c - a \in B$  по построению. Действительно,  $c > a + \dots + a$  для любого количества слагаемых. Это противоречит тому, что  $c = \sup A$   $\square$ .

**Определение.** *Упорядоченное поле, удовлетворяющее аксиоме Архимеда, называется архимедовым.*

**Примеры:** архимедовы поля:  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ; неархимедово поле: множество рациональных функций.

**Упражнение.** Убедитесь в том, что предыдущие примеры справедливы (случай  $\mathbb{R}$  уже разобран).

### Лекция 3

#### Другие следствия из аксиом вещественных чисел

Сформулируем и докажем некоторые следствия из аксиом вещественных чисел.

- (i) Следующие элементы единственны: 0, 1, противоположный и обратный к данному элементу.

▷ Доказательство проведем лишь для 0 и противоположного элемента. Доказательство для 1 и обратного элемента аналогично. От противного. Пусть есть два нулевых элемента  $0_1$  и  $0_2$  и для данного  $x \in \mathbb{R}$  пусть есть два противоположных элемента  $(-x)_1$  и  $(-x)_2$ . Тогда

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

$$(-x)_1 = (-x)_1 + 0 = (-x)_1 + (x + (-x)_2) = ((-x)_1 + x) + (-x)_2 = 0 + (-x)_2 = (-x)_2. \triangleleft$$

- (ii) К обеим частям равенства можно добавлять число, сохраняя равенство. Обе части равенства можно умножать на число, сохраняя равенство.
- (iii) Уравнение  $a + x = b$  имеет решение  $x = b - a$ , причём единственное. Уравнение  $a \cdot x = b$  имеет при  $a \neq 0$  решение  $x = b \cdot a^{-1}$ , причём единственное.

$$\triangleright a + x = b \Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow a + (-a) + x = b - a \Leftrightarrow x = b - a. \triangleleft$$

- (iv) Для любого  $x \in \mathbb{R}$  справедливо  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ . Если  $x \cdot y = 0$ , то либо  $x = 0$ , либо  $y = 0$ .

$$\triangleright x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) \Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

Если  $x \cdot y = 0$  и  $y \neq 0$ , то  $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$ .  $\triangleleft$

- (v) Справедливы равенства  $-x = (-1) \cdot x$ ;  $(-1) \cdot (-1) = 1$ ;  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ .

▷ Докажем лишь первое равенство

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0. \triangleleft$$

- (vi)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ ;  $(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x < z$ ;  $(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$ .
- (vii)  $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ ;  $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ ;  $(a \geq b) \wedge (c \geq d) \Rightarrow a + c \geq b + d$ ;  $(a \geq b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d$ ;  $(a > b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d$ ;
- (viii)  $(x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0$ ;  $(x > 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow xy < 0$ ;  $(x > y) \wedge (z > 0) \Rightarrow xz > yz$ ;  $(x > y) \wedge (z < 0) \Rightarrow xz < yz$ ;
- (ix)  $1 > 0$ ;  $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$ ;  $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$ ;  $(x > 0) \wedge (y > x) \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$ .

▷ Если  $1 < 0$ , то  $1 \cdot 1 > 0$  и  $1 > 0$ . Если  $1 = 0$ , то  $x \cdot 1 = x$  и  $x \cdot 0 = 0$ , откуда  $x = 0$ . Значит,  $1 > 0$ . Из  $x > 0$  и  $x^{-1} < 0$  следует  $x \cdot x^{-1} < 0$ , что противоречит  $1 > 0$ .  $\triangleleft$

#### Натуральные числа

Нам понадобится более строгое определение натуральных чисел, чем то, которым вы пользовались в школе. Вообще говоря, натуральные числа определяются с помощью *аксиом Пеано*, о которых пойдёт речь в курсе по дискретной математике и топологии. Мы не будем вовсе касаться аксиоматики Пеано натуральных чисел. Корректность определения, которое следует ниже (т.е. то, что определённые нами натуральные числа действительно удовлетворяют аксиомам Пеано), будет доказана в курсе "Введение в дискретную математику и топологию".

Начнём с определения индуктивных множеств.

**Определение.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *индуктивным*, если  $\forall a \in A: a + 1 \in A$ .

**Примеры.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Лемма.** Пересечение любого числа индуктивных множеств или пусто или само является индуктивным множеством.

**Доказательство.** Пусть  $A = \bigcap A_\alpha$ , где  $\alpha$  пробегает некоторое множество. Тогда

$$a \in A \Rightarrow \forall \alpha: a \in A_\alpha \Rightarrow \forall \alpha: (a + 1) \in A_\alpha \Rightarrow (a + 1) \in A. \square$$

**Определение.** Множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  — это пересечение всех индуктивных подмножеств  $\mathbb{R}$ , содержащих 1.

**Следствие из определения (принцип математической индукции).** Если  $E \subset \mathbb{N}$ ,  $1 \in E$  и  $E$  — индуктивное множество, то  $E = \mathbb{N}$ .

Напомним, что множество называется линейно упорядоченным, если любые два его элемента сравнимы.

**Определение.** Назовём линейно упорядоченное множество вполне упорядоченным, если в каждом его непустом подмножестве есть наименьший.

**Теорема.** Множество  $\mathbb{N}$  вполне упорядочено.

**Доказательство.** Пусть  $A \subset \mathbb{N}$ . Если  $1 \in A$ , то  $\min A = 1$ . Если  $1 \notin A$ , то  $1 \in \mathbb{N} \setminus A$ . рассмотрим множество  $B = \mathbb{N} \setminus A$ . Покажем, что в  $B$  найдётся такой элемент  $n$ , что  $1, \dots, n \in B$ ,  $n + 1 \in A$ . В самом деле, если такого  $n$  не существует, то множество  $B$  индуктивно и, следовательно, совпадает с  $\mathbb{N}$ . Но тогда  $A = \mathbb{N} \setminus B = \emptyset$ . Противоречие. Тогда  $n$  существует и значит  $\min A = n + 1$   $\square$ .

**Замечание.** Множество  $\mathbb{Q}$  не является вполне упорядоченным.

**Теорема.** В любом непустом ограниченном сверху подмножестве  $\mathbb{N}$  есть наибольший элемент.

**Доказательство.** Пусть  $E \subset \mathbb{N}$  — такое подмножество. По теореме о верхней грани существует  $c = \sup E$ . По определению верхней грани, в  $E$  найдётся число  $n$  такое, что  $c - 1 < n \leq c$ . Тогда  $n = \max E$  т.к. все натуральные числа, большие  $n$ , не меньше  $n + 1$ , а  $n + 1 > c$ .  $\square$ .

**Следствие.** Множество натуральных чисел не ограничено сверху.

**Доказательство.** Иначе существовало бы наибольшее натуральное число. Но  $n < n + 1$ .  $\square$ .

Корректно определив  $\mathbb{N}$ , мы теперь сможем определить  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ . В первом случае это натуральные числа, 0, и противоположные к натуральным, во втором случае добавим к  $\mathbb{Z}$  ещё все обратные числа (кроме нуля) к числам из  $\mathbb{Z}$  и добавим все произведения обратных на натуральные.

**Следствие.** В любом непустом ограниченном снизу (сверху) подмножестве  $\mathbb{Z}$  есть наименьший (наибольший) элемент.

**Доказательство.** Аналогично теореме о наибольшем элементе непустого ограниченного сверху подмножества  $\mathbb{N}$ .  $\square$ .

**Аксиома Архимеда уточнённая (принцип Архимеда).** Для любого  $h > 0$  и для любого  $a \in \mathbb{R}$  найдётся такое  $n \in \mathbb{Z}$ , что справедливы неравенства  $(n - 1)h \leq a < nh$ .

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $E = \{n \in \mathbb{Z}: a/h < n\}$ . Оно ограничено снизу. Оно не пусто. В самом деле, если  $a > 0$ , то не пусто по аксиоме Архимеда. Если  $a < 0$ , то оно не пусто так как содержит ноль. Если  $a = 0$ , то  $E = \mathbb{N}$ . Пусть  $m = \min E$  (такой элемент обязательно есть по следствию об ограниченном снизу подмножестве  $\mathbb{Z}$ ). Тогда  $m - 1 \leq a/h < m$   $\square$ .



Вот несколько следствий из принципа Архимеда.

**Следствие 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $n^{-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^{-1} \in (0, \varepsilon)$ .

**Доказательство.** Применим принцип Архимеда к  $a = 1, h = \varepsilon$ . Тогда найдется  $n$  такое, что  $1 < \varepsilon n$ , отсюда  $0 < 1/n < \varepsilon$ .  $\square$

**Следствие 2.** Между двумя любыми вещественными числами есть рациональное число, т.е. для любых  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  существует такое  $r \in \mathbb{Q}$ , что  $a < r < b$ .

**Доказательство.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}, b > a$ . Выберем  $m$  так, чтобы  $0 < h = m^{-1} < \varepsilon = b - a$ . Найдется такое  $n \in \mathbb{Z}$ , что

$$\frac{n-1}{m} \leq a < \frac{n}{m}.$$

Теперь  $\frac{n}{m} < b$ , иначе получилось бы, что  $\frac{n-1}{m} \leq a < b \leq \frac{n}{m}$ , а это противоречит  $0 < 1/m < b - a$ . Таким образом,  $r = n/m$  - искомое рациональное число.  $\square$

**Следствие 3.** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  существует  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $k \leq x < k + 1$ .

Непосредственно следует из принципа Архимеда. Число  $k$  называется целой частью, число  $x - k$  называется дробной частью.

## Лекция 4

### Последовательности

**Определение.** Последовательность - функция натурального аргумента, т.е.  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ , где  $X$  - некоторое множество.

**Обозначение.** Когда говорят о последовательностях, то аргумент обычно пишут не в скобках, а в виде индекса:  $x_n$ . Часто саму последовательность обозначают таким образом  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Рассмотрим два вида последовательностей - последовательности вещественных чисел и последовательности множеств.

(i) Последовательности вещественных чисел:  $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(ii) последовательности множеств:  $A_n: \mathbb{N} \rightarrow 2^X$  (здесь  $2^X$  - обозначение множества всех подмножеств множества  $X$ ). Будем также говорить, что  $A_n$  - последовательность вложенных множеств, если  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ .

**Определение.** Будем говорить, что последовательность чисел  $x_n$ , стремится к нулю, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: |x_n| < \varepsilon.$$

**Обозначение.**  $x_n \rightarrow 0$

**Примеры.**  $x_n = 0, x_n = 1/n, x_n = q^n, |q| < 1$ .

**Теорема о вложенных промежутках.** В  $\mathbb{R}$  любая последовательность вложенных отрезков  $\Delta_n = [a_n, b_n]$  имеет непустое пересечение. Если их длины  $b_n - a_n$  стремятся к нулю, то это пересечение  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  состоит из единственной точки.

**Доказательство.** Рассмотрим два множества: множество  $A$ , состоящее из точек  $a_n$  (левых концов отрезков) и множество  $B$ , состоящее из точек  $b_n$  (правых концов отрезков). Заметим, что какое-то из этих множеств вполне может оказаться конечным. Множества  $A$  и  $B$  удовлетворяют условиям аксиомы непрерывности (они не пустые и каждое  $a_m$  не превосходит каждого  $b_n$ ), поэтому существует число  $c: a_m \leq c \leq b_n$  при всех  $m, n \in \mathbb{N}$ . Отсюда следует искомое включение  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ . Единственность точки  $c$  следует из  $b_n - a_n \rightarrow 0$ . Если бы было две таких различные точки  $c_1 < c_2$ , то из неравенств  $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$  следовало бы неравенство  $b_n - a_n > c_2 - c_1 > 0$ , которое противоречит  $b_n - a_n \rightarrow 0$ .  $\square$

**Замечание.** Последовательность вложенных интервалов не обязательно имеет общую точку. Например, пересечение вложенных интервалов  $(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset (0, 1/3) \supset \dots \supset (0, 1/n) \supset \dots$  является пустым множеством.

### Открытые и замкнутые множества

**Определение.** Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  - это интервал  $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

Заметим, что пересечение двух окрестностей точки  $x$  также является окрестностью этой точки.

**Определение.** Пусть дано множество  $A \subset \mathbb{R}$ . Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой  $A$ , если в любой окрестности точки  $x$  найдется  $y \in A, y \neq x$ .

Эквивалентно можно сказать, что точка  $x \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой множества  $A$ , если в любой окрестности точки  $x$  найдется бесконечное множество точек из  $A$ . Действительно, пусть в любой окрестности точки  $x$  найдется  $y \in A, y \neq x$ . Возьмём какую-то окрестность  $U'$  точки  $x$ , зафиксируем  $y' \in A \cap U', y' \neq x$ , потом возьмём окрестность  $U'' \subset U'$  точки  $x$ , не содержащую точку  $y'$  (почему так можно сделать?), в  $U''$  по предположению есть точка

$y'' \in A \cap U'', y'' \neq x$ . По такой схеме мы найдём бесконечное множество точек, принадлежащих  $A \cap U'$ .

**Определение.** Точки множества, не являющиеся предельными, называются изолированными. Изолированная точка  $A$  - точка, в некоторой окрестности которой кроме неё нет других точек из  $A$ .

**Лемма (о предельной точке).** Всякое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

**Доказательство.** Дано ограниченное бесконечное множество  $E$ . Пусть отрезок  $[a_1, b_1], b_1 > a_1$  содержит  $E$ . Разделим отрезок  $[a_1, b_1]$  пополам точкой  $(a_1 + b_1)/2$  на два отрезка:  $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$  и  $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$ . По крайней мере одно из множеств  $L_1 \cap E$  или  $R_1 \cap E$  содержит бесконечное множество точек. Пусть например, это будет множество  $R_1 \cap E$ . Обозначим отрезок  $R_1$  через  $[a_2, b_2]$ . Разделим его пополам на отрезки  $L_2$  и  $R_2$ , снова по крайней мере одно из множеств  $L_2 \cap E$  или  $R_2 \cap E$  содержит бесконечное множество точек, выберем его и повторим эту процедуру бесконечно много раз. Мы получим последовательность вложенных отрезков  $[a_n, b_n]$ , длины этих отрезков равны  $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \rightarrow 0$ . Итак, пересечение всех этих отрезков состоит из единственной точки  $c$ . Это есть предельная точка множества  $E$ : любая окрестность точки  $c$  содержит все отрезки  $[a_n, b_n]$  с достаточно большими номерами, на каждом такой отрезке есть бесконечное количество точек множества  $E$ .  $\square$ .

**Определение.** Множество  $U$  называется открытым, если для любой точки  $x \in U$  существует окрестность точки  $x$  целиком лежащая в  $U$ . Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Точка  $x \in U$  называется внутренней точкой множества  $U'$ , если найдётся окрестность  $U'$  точки  $x$ , целиком лежащая в  $U$ . Таким образом, множество  $U$  открытое, если все его точки являются внутренними.

**Примеры:**  $\emptyset, \mathbb{R}$  одновременно и замкнутые, и открытые;  $[a, b], [a, \infty), \mathbb{N}, \mathbb{Z}$  - замкнутые множества,  $(a, b), (-\infty, b)$  - открытые множества. Промежутки  $[a, b)$  и  $(a, b]$  не замкнуты и не открыты.

**Теорема.** Пусть  $A$  — открытое множество,  $B$  — замкнутое множество. Тогда 1)  $A \setminus B$  — открытое множество. 2)  $B \setminus A$  — замкнутое множество.

На самом деле верна следующее следствие, которое часто даётся в качестве определения открытого и замкнутого множества в курсе топологии.

**Следствие.** Пусть  $A$  — открытое множество, тогда  $\mathbb{R} \setminus A$  — замкнутое. Пусть  $B$  — замкнутое множество, тогда  $\mathbb{R} \setminus B$  — открытое.

Иными словами, дополнение замкнутого множества - это дополнение до открытого и наоборот.

**Упражнение.** Докажите это следствие.

**Определение.** Открытое множество называется  $A$  связным, если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств, каждое из которых не пусто и не совпадает с самим  $A$ .

**Примеры.**  $\mathbb{R}, (-\pi, \pi)$  связные, множество  $(0, 1) \cup (1, 2)$  не связно.

Вернёмся к связным множествам позднее, а сейчас рассмотрим множество предельных точек некоторого подмножества  $\mathbb{R}$ . Обозначим через  $A'$  множество предельных точек множества  $A$ . Заметим, что не верны включения  $A' \subset A, A \subset A'$  (почему?).

**Определение.** Замыкание множества  $A$  есть объединение  $A$  с множеством его предельных точек  $A'$ .

**Обозначение.** Замыкание будем обозначать символом  $\bar{A}$ , т.е.  $\bar{A} = A \cup A'$ .

### Всюду плотные и нигде не плотные множества

**Определение.** Подмножество  $A$  некоторого замкнутого множества  $X \subset \mathbb{R}$  называется всюду плотным в  $X$ , если замыкание  $\bar{A}$  множества  $A$  совпадает с  $X$ . Подмножество  $A$  некоторого замкнутого множества  $X \subset \mathbb{R}$  называется нигде не плотным, если внутри любого интервала  $U \subset X$  есть меньший интервал  $V \subset U$  такой, что  $A \cap V = \emptyset$ .

Иными словами, множество  $A$  всюду плотно на  $X$ , если внутри любого интервала  $U \subset X$  есть точка из  $A$ .

### Примеры.

1. Множества рациональных и иррациональных чисел всюду плотны в  $\mathbb{R}$ .
2. Существует множество обладающее следующими свойствами: дополнение к нему всюду плотно, само оно нигде не плотно. Бывают также замкнутые нигде не плотные множества и открытые всюду плотные множества. Не бывает открытых нигде не плотных множеств.
3. Дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно.

## Лекция 5

Продолжим обсуждение плотных множеств и нигде не плотных множеств. Начнём с определения покрытия.

**Определение.** Пусть дано множество  $A$  и дана система множеств  $U_\alpha$ , причём  $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ . Тогда говорят, что система этих множеств образует покрытие множества  $A$ :  $\forall x \in A \exists U_\alpha : x \in U_\alpha$ .

**Теорема Бэра о категориях.** Отрезок не может быть покрыт объединением счётного числа нигде не плотных множеств.

**Доказательство.** Пусть  $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ , где все множества  $U_n$  нигде не плотны в  $\mathbb{R}$ . Тогда выберем отрезок  $\Delta_1 \subset [0, 1]$ , на котором нет точек из  $U_1$ , потом выберем отрезок  $\Delta_2 \subset \Delta_1$ , на котором нет точек из  $U_2$  и так далее. Как это сделать? В определении нигде не плотного множества стоят интервалы, поэтому будем выбирать интервалы, а потом в каждом из них выберем отрезок, чуть поменьше. Последовательность вложенных отрезков  $\Delta_n$  имеет общую точку, эта точка не принадлежит ни одному из множеств  $U_n$ , следовательно предположение  $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n$  не верное.  $\square$ .

**Определение.** Множества, которые могут быть покрыты объединением счётного числа нигде не плотных множеств, называются множествами 1-й категории по Бэру, или ещё точными множествами. Остальные множества - множества 2-й категории, или тучными.

Таким образом, мы доказали, что отрезок - множество второй категории по Бэру.

### Канторво множество

Важную роль в разнообразных конструкциях играют множества, которые называют канторовыми множествами. Опишем их общую конструкцию. Возьмём отрезок  $\Delta_1$  и выберем интервал  $U_1$ , так, чтобы его концы не совпадали с концами отрезка  $\Delta_1$ . Множество  $\Delta_1 \setminus U_1$  — это два отрезка,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$ . Затем на каждом из этих отрезков выберем по интервалу  $U_2 \subset \Delta_2$  и  $U_3 \subset \Delta_3$  так, чтобы их концы не совпадали с концами отрезков  $\Delta_3$  и  $\Delta_1$ . Множество  $\Delta_1 \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)$  — объединение четырёх непересекающихся отрезков  $\Delta_4, \dots, \Delta_7$ . Снова на каждом из них выберем по интервалу  $U_k$  и так далее. Предположим ещё, что мы так будем выбирать интервалы, что длины оставшихся отрезков будут стремиться к нулю. В результате получится последовательность непересекающихся интервалов  $U_k$ , их объединение — открытое множество  $U$ . Множество  $\Delta_1 \setminus U_1$  — замкнутое. Например, оно содержит концы всех отрезков, мы их ни на каком шаге не выбросим. Этих концов отрезков — счётное число. Кроме того,  $\Delta_1 \setminus U_1$  содержит ещё континуальное множество точек (почему?). Прделав эту процедуру бесконечное число раз (как описать строго?), мы получим некоторое множество. Это и есть *канторово множество*. Самым знаменитым канторовым множеством является случай, когда  $\Delta_1 = [0, 1]$ , а в качестве каждого интервала берётся «средняя треть». Часто именно это множество называется канторовым, на английском языке оно называется *Middle Third Cantor Set*.

На семинарах и в ДЗ2 мы докажем, что любое канторово множество континуальное, замкнутое, нигде не плотное, не содержит изолированных точек.

### Замыкание множеств

На прошлой лекции были определены понятия множества предельных точек множества и замыкания множеств. Рассмотрим их основные свойства.

**Утверждение 1.** Множество  $A'$  предельных точек множества  $A$  замкнуто.

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $A'$  — множество предельных точек множества  $A$ . Пусть  $x$  — предельная точка множества  $A'$ . Тогда в любой окрестности  $U(x)$  точки  $x$  лежит точка  $y \in A'$ , предельная точка множества  $A$ . Возьмём окрестность  $U(y)$  точки  $y$ , целиком лежащую в  $U(x)$  и не содержащую  $x$ . По определению предельной точки там лежит точка  $z \in A$ . Эта точка лежит в  $U(x)$  и не совпадает с  $x$ . Мы доказали, что в любой окрестности точки  $x$  (предельной для  $A'$ ) лежит точка  $y \neq x, y \in A$ . Значит,  $x \in A'$ . Итак, каждая предельная точка множества  $A'$  ему принадлежит, множество  $A'$  — замкнуто.  $\square$

**Утверждение 2.** *Множество  $\bar{A}$  — замкнуто.*

**Доказательство.** Предельная точка множества  $A \cup B$  — либо предельная точка для  $A$ , либо для  $B$ , либо для обоих множеств (если не так, то она изолированная и для  $A$  и для  $B$ , поэтому и для  $A \cup B$ ). Поэтому предельная точка для  $\bar{A} = A \cup A'$  это либо предельная точка  $x$  для  $A$ , тогда  $x \in A'$ , либо  $x \in (A')'$ , тогда  $x \in A'$  по утверждению 1.  $\square$

**Утверждение 3.** *Объединение любого набора открытых множеств — открытое множество. Пересечение конечного набора открытых множеств — открытое множество. Объединение конечного набора замкнутых множеств — замкнутое множество. Пересечение любого набора замкнутых множеств — замкнутое множество.*

**Упражнение.** Докажите утверждение 3.

**Пример.**  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-n^{-1}, n^{-1}) = \{0\}$ , т.е. пересечение счётного набора открытых множеств не обязательно открытое множество.

На семинарах мы докажем

**Утверждение 4.** *Каждое непустое открытое множество  $U$  на прямой является объединением не более чем счётного набора непересекающихся открытых промежутков.*

## Компактные множества (компакты)

Нам понадобятся следующие определения.

**Определение.** Любое подмножество покрытия, если оно также является покрытием, называется подпокрытием. Покрытие называют открытым, если все множества  $U_\alpha$  открыты. Покрытие называют конечным, если оно содержит конечное множество множеств  $U_\alpha$ .

## Лекция 6

Докажем следующую фундаментальную лемму.

**Лемма Гейне – Бореля.** Любое открытое покрытие  $\cup_{\alpha} U_{\alpha}$  отрезка  $\Delta$  имеет конечное подпокрытие.

**Доказательство.** Пусть отрезок  $\Delta_1 = [a_1, b_1], b_1 > a_1$  покрыт бесконечной системой открытых множеств  $U_{\alpha}$ . Пусть у этой системы не существует конечного подпокрытия, т.е. нельзя выбрать конечный набор  $U_k, k = 1, 2, \dots, N$  открытых множеств, также покрывающее отрезок  $\Delta_1$ . Разделим отрезок  $[a_1, b_1]$  пополам точкой  $(a_1 + b_1)/2$  на два отрезка:  $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$  и  $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$ . По крайней мере для одного из отрезков  $L_1$  или  $R_1$  не существует конечного подпокрытия из изначального покрытия. Пусть например, это  $R_1$ . Обозначим отрезок  $R_1$  через  $[a_2, b_2]$ . Разделим его пополам на отрезки  $L_2$  и  $R_2$ , снова для одного из отрезков  $L_2$  или  $R_2$  не существует конечного подпокрытия из изначального покрытия. Выберем его и повторим эту процедуру бесконечно много раз. Мы получим последовательность вложенных отрезков  $[a_n, b_n]$ , длины этих отрезков равны  $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Эти отрезки строились так, чтобы ни один из них не мог быть покрыт конечным набором множеств из изначального покрытия. По лемме о вложенных отрезках пересечение всех этих отрезков состоит из единственной точки  $s$ . Эта точка  $s$  принадлежит какому-то открытому множеству  $U$  из изначального покрытия. Вместе с точкой  $s$  открытое множество  $U$  содержит и некоторую окрестность точки  $s$ . Теперь, при достаточно больших  $n$  отрезки  $[a_n, b_n]$  все покрыты одним единственным открытым множеством  $U$  из покрытия. Полученное противоречие доказывает лемму Гейне–Бореля.  $\square$

**Определение.** Подмножество  $A \subset \mathbb{R}$  называется компактным (или компактом), если из любого его покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

Таким образом, мы доказали, что отрезок компактен. Также из леммы Гейне–Бореля следует, что любое ограниченное замкнутое множество является компактом. Любой компакт на прямой – обязательно ограниченное замкнутое множество. Это будет доказано позднее.

## Предел последовательности

**Определение.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , если вне любой окрестности точки  $A$  лежит лишь конечное множество элементов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , или, что то же самое, все элементы  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  с достаточно большими номерами  $n$  лежат внутри этой окрестности.

**Обозначение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . Также часто пишут  $x_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ .

На языке кванторов:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$ .

**Определение.** Будем говорить, что последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к  $+\infty$ , если  $\forall C \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n > C$ . Аналогично определяется сходимость к  $-\infty$ :  $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall C \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n < C$ .

Заметим, что натуральное число  $N$  зависит от числа  $\varepsilon$  и от самой последовательности.

Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  может не сходиться ни к какому числу  $A$ . На языке кванторов это означает

$$\forall A \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |x_n - A| \geq \varepsilon$$

**Определение.** Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  называется сходящейся, если её предел равен какому-то числу. В остальных случаях последовательность называется расходящейся. Причём в случае расходящейся последовательности есть дихотомия: либо такого числа, которому последовательность сходилась бы не существует, либо предел последовательности равен  $\pm\infty$ .

**Утверждение.** Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.** Пусть  $x_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Выберем  $\varepsilon = 1$ , построим по этому  $\varepsilon$  число  $N$  по определению сходимости. Теперь все элементы последовательности с номерами больше  $N$  лежат в 1-окрестности точки  $A$ , конечное множество точек  $\{x_1, \dots, x_N\}$  ограничено, значит, вся последовательность ограничена.  $\square$

**Утверждение.** Если последовательность сходится, то её предел единственный.

**Доказательство.** В самом деле, пусть у последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  есть 2 разных предела,  $A$  и  $B$ . Без потери общности пусть, например,  $A < B$ . Положим  $\varepsilon = (B - A)/3$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестности  $U_\varepsilon(A)$  и  $U_\varepsilon(B)$  точек  $A$  и  $B$ . По построению, эти окрестности не пересекаются. По определению предела вне окрестности  $U_\varepsilon(A)$  лежит лишь конечное число элементов последовательности, и вне окрестности  $U_\varepsilon(B)$  лежит лишь конечное число элементов последовательности. Значит, их всего конечное число, а это противоречит определению последовательности.  $\square$

**Теорема.** Пусть заданы последовательности  $x_n$  и  $y_n$ , причём  $x_n \geq y_n$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть обе последовательности  $x_n$  и  $y_n$  сходятся:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ . Тогда  $A \geq B$ .

**Доказательство.** Пусть это не так. Тогда  $B > A$ . Положим  $\varepsilon = (B - A)/3$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестности точек  $A$  и  $B$ . По построению, эти окрестности не пересекаются, причём все точки из окрестности  $U_\varepsilon(B)$  строго больше (лежат правее) всех точек из окрестности  $U_\varepsilon(A)$ . Но  $x_n \rightarrow A$ ,  $y_n \rightarrow B$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому при достаточно больших значениях  $n$  справедливы включения  $x_n \in U_\varepsilon(A)$ ,  $y_n \in U_\varepsilon(B)$ . Отсюда  $x_n < y_n$  при достаточно больших  $n$ , что противоречит предположению теоремы.  $\square$

**Замечание 1.** Для справедливости утверждения теоремы достаточно, чтобы неравенство  $x_n \geq y_n$  было справедливо лишь для достаточно больших значений  $n$ .

**Замечание 2.** Если вместо  $x_n \geq y_n$  справедливо строгое неравенство  $x_n > y_n$ , то отсюда также следует  $A \geq B$  (из теоремы), но может не следовать  $A > B$ . Контрпример:  $x_n = n^{-1}$ ,  $y_n = -n^{-1}$ . Здесь  $x_n > y_n$ , однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

**Теорема о двух милиционерах.** Пусть даны три последовательности, причём  $x_n \geq y_n \geq z_n$  и пусть существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ . Тогда существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  и он также равен  $A$ .

**Доказательство.** Запишем определения  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : (|x_n - A| < \varepsilon) \wedge (|z_n - A| < \varepsilon).$$

Но тогда для этих  $\varepsilon$  и  $N$  имеем:  $A - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < A + \varepsilon$ . Это и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ .  $\square$



## Арифметические операции с пределами

Пусть заданы последовательности  $x_n$  и  $y_n$ . Тогда определены также следующие последовательности

$$(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left( \frac{x_n}{y_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Последняя последовательность определена, если  $y_n \neq 0$ .

**Теорема.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ . Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = \alpha A, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B, \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = AB,$$

и если  $y_n, B \neq 0$ , то 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{A}{B}$ .

**Следствие.** Операция взятия предела линейна, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha A + \beta B$ .

**Доказательство.** Докажем лишь 1) и 3) свойства.

1) По определению  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$ . Нужно показать, что  $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : |\alpha x_n - \alpha A| < \varepsilon_0$ . Если  $\alpha = 0$ , то утверждение очевидно. Пусть  $\alpha \neq 0$ . Выберем какое-то  $\varepsilon_0 > 0$ . Рассмотрим число  $\varepsilon_0/|\alpha|$ . Так как число  $\varepsilon$  было выбрано произвольно, возьмем в качестве него число  $\varepsilon = \varepsilon_0/|\alpha|$  и построим по нему соответствующее число  $N_0 = N(\varepsilon_0/|\alpha|)$ . При всех  $n > N_0$  будет справедливо неравенство  $|x_n - A| < \varepsilon_0/|\alpha|$ , эквивалентное  $|\alpha x_n - \alpha A| < \varepsilon_0$ .

3) Имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 : |x_n - A| < \varepsilon$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 : |y_n - B| < \varepsilon$ . Т.к. обе последовательности сходятся, то они ограничены и значит найдется такое  $C > 0$ , что  $|x_n|, |y_n| \leq C$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Отсюда следует, что также  $|A|, |B| \leq C$ . Выберем какое-то  $\varepsilon_0 > 0$  и рассмотрим число  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2C}$ . Построим по нему соответствующие числа  $N_1(\frac{\varepsilon_0}{2C})$  и  $N_2(\frac{\varepsilon_0}{2C})$ . Положим  $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ . Заметим, что при  $n > N_0$  верно, что  $|x_n - A| < \frac{\varepsilon_0}{2C}$  и  $|y_n - B| < \frac{\varepsilon_0}{2C}$ . Тогда

$$\begin{aligned} |x_n y_n - AB| &= |x_n y_n - A y_n + A y_n - AB| \leq |x_n y_n - A y_n| + |A y_n - AB| = \\ &= |y_n| |x_n - A| + |A| |y_n - B| \leq C |x_n - A| + C |y_n - B| < \frac{C \varepsilon_0}{2C} + \frac{C \varepsilon_0}{2C} < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $|x_n y_n - AB| < \varepsilon_0$  при  $n > N_0$ .  $\square$

**Упражнение.** Докажите свойства 2) и 4).

## Лекция 7

### Подпоследовательности

**Определение.** Последовательность строго возрастает, если  $x_{n+1} > x_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ .

Пусть у нас есть последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Предположим, задана строго возрастающая последовательность  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Тогда можно рассмотреть композицию отображений  $k \mapsto n_k$  и  $n \mapsto x_n$ , ставящую в соответствие каждому натуральному числу  $k$  элемент последовательности  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Такая последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Выбирая различные  $n_k$ : получаем различные подпоследовательности  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Теорема.** Если последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится, то и каждая подпоследовательность  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  сходится, причём к тому же самому пределу.

**Доказательство.** Это утверждение легко следует из определения сходимости  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  к числу  $A$  в виде «вне любой окрестности точки  $A$  лежит лишь конечное множество элементов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ». Ясно, что если вне окрестности лежит конечное множество элементов последовательности, то элементов подпоследовательности вне этой окрестности лежит также конечное множество, «ещё меньше» элементов.  $\square$

**Теорема.** Если подпоследовательность  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  содержит все элементы последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  кроме конечного их числа, то из сходимости подпоследовательности следует сходимость самой последовательности.

**Доказательство.** Это утверждение легко следует из того же определения сходимости «вне любой окрестности точки  $A$  лежит лишь конечное множество элементов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ». Если последовательности отличаются конечным множеством элементов, то ясно, что если одна из последовательностей сходится к  $A$ , то и другая тоже.  $\square$

**Теорема (лемма Больцано - Вейерштрасса).** Всякая ограниченная последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  имеет сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** Так как элементов последовательности бесконечное (счётное) множество, то либо множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно, либо какое-то из значений последовательность принимает бесконечное количество раз (возможно, таких значений много). В этом случае можно выбрать постоянную подпоследовательность, которая, очевидно, сходится. Если же множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно, то воспользуемся теоремой о том, что каждое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку  $A$ . Эта предельная точка и есть искомый предел подпоследовательности. Для указания конкретной подпоследовательности, сходящейся к этой предельной точке  $A$ , надо положить  $\varepsilon_1 = 1$ , выбрать  $\varepsilon_1$ -окрестность  $U_{\varepsilon_1}(A)$ , в ней найти элемент  $x_{n_1}$  (там лежит бесконечно много элементов последовательности), потом надо положить  $\varepsilon_2 = 1/2$ , выбрать меньшую  $\varepsilon_1$ -окрестность  $U_{\varepsilon_1}(A)$ , в ней найти элемент  $x_{n_2}$ , проследив, чтобы было  $n_2 > n_1$ , и так далее. Полученная подпоследовательность  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  сходится к  $A$ .  $\square$

### Фундаментальные последовательности

**Определение.** Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши* если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Перечислим основные свойства фундаментальных последовательностей

**Лемма 1.** *Всякая фундаментальная последовательность ограничена*

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon = 1$ , по определению фундаментальности найдется такое  $N$ , что при  $n, m > N$  расстояние между элементами последовательности меньше 1. Таким образом, все  $x_n, n > N + 1$  лежат в 1-окрестности числа  $x_{N+1}$ . Теперь конечное множество  $\{x_1, \dots, x_N\}$  ограничено, поэтому и вся последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ограничена.  $\square$

**Лемма 2.** *Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к числу  $A$ , то сама последовательность сходится к  $A$ .*

**Доказательство.** Зададимся  $\varepsilon > 0$ . По числу  $\varepsilon/2$  построим  $N$  из условия фундаментальности: при  $n, m > N$  справедливо соотношение  $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$ . По условию сходимости подпоследовательности  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  к пределу  $A$ , существует такое  $k_0$ , что при всех  $k > k_0$  справедливы соотношения  $|A - x_{n_k}| < \varepsilon/2$ . Теперь пусть число  $k_1 > k_0$  такое, что  $n_{k_1} > N$ . Тогда  $|A - x_{n_{k_1}}| < \varepsilon/2$  и при всех  $n > k_1$  справедливы неравенства  $|x_{n_{k_1}} - x_n| < \varepsilon/2$ , следовательно, справедливо неравенство

$$|A - x_n| \leq |A - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \square$$

**Теорема (Критерий Коши).** *Всякая фундаментальная последовательность сходится, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

**Доказательство.** В одну сторону доказательство простое. Пусть последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к  $A$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$ , начиная с некоторого  $N$  все элементы последовательности лежат в  $\varepsilon/2$ -окрестности точки  $A$ . Это значит, что начиная с этого  $N$  расстояние между элементами последовательности меньше  $\varepsilon$ . Фундаментальность сходящейся последовательности доказана.

Пусть  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность. Тогда по лемме 1 последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ограничена. Теперь, по теореме Больцано–Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . По лемме 2 вся последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к тому же пределу.  $\square$

### Монотонные последовательности и теорема Вейерштрасса.

**Определение.** *Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  монотонно возрастает, если  $x_{n+1} \geq x_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ , последовательность строго возрастает, если  $x_{n+1} > x_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Про монотонно возрастающую последовательность говорят «неубывающая последовательность». Аналогично, последовательность монотонно убывает, если  $x_{n+1} \leq x_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ , последовательность строго убывает, если  $x_{n+1} < x_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Про монотонно убывающую последовательность говорят «невозрастающая последовательность». Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  называется монотонной, если она монотонно возрастает или монотонно убывает. Последовательность называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает или строго монотонно убывает.*

**Теорема Вейерштрасса.** *Ограниченная монотонная последовательность сходится. Более точно, невозрастающая ограниченная снизу последовательность сходится, неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится.*

**Доказательство.** Докажем только одно утверждение, что неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится. Случай ограниченной снизу последовательности аналогичен. Пусть  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — наша последовательность и пусть  $x_{n+1} \geq x_n$ . Множество значений этой последовательности ограничено сверху, значит, определено число  $A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ . Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Среди чисел  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  есть числа, для которых  $x_n > A - \varepsilon$

(иначе число  $A$  не было бы точной верхней гранью чисел  $x_n$ ). Пусть  $x_N > A - \varepsilon$ , тогда при всех  $n > N$ , во-первых,  $x_n > A - \varepsilon$ , во-вторых,  $x_n \leq A$  (иначе  $A$  не было бы верхней границей для множества значений  $x_n$ ). Из  $x_n > A - \varepsilon$  и  $x_n \leq A$  следует  $|x_n - A| < \varepsilon$ .  $\square$

Также нам будет полезна следующее утверждение

**Утверждение.** *Всякая ограниченная возрастающая последовательность сходится к своей точной верхней грани, а всякая ограниченная убывающая последовательность сходится к своей точной нижней грани.*

**Доказательство.** Пусть  $x_n \leq x_{n+1}$  и  $A$  — точная верхняя грань последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Найдется такое число  $N$ , что  $x_N > A - \varepsilon$  (иначе  $A$  — не точная верхняя грань). Тогда  $x_n > A - \varepsilon$  при всех  $n \geq N$ . Кроме того,  $x_n \leq A$  при всех  $n$ .  $\square$

### Частичные пределы.

Мотивация: разные подпоследовательности одной и той же последовательности могут сходиться к разным пределам (если последовательность не сходится). Пределы подпоследовательностей называются *частичными пределами*. Частичный предел — это величина, в любой окрестности которой находится бесконечное количество элементов последовательности. Частичные пределы называют также *предельными точками последовательности*. **Не путать с предельными точками множеств, в частности с предельными точками множества значений последовательности!**

**Утверждение.** *Множество частичных пределов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  замкнуто.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $X$  — множество частичных пределов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Пусть  $x$  — предельная точка множества  $X$ . Тогда в любой окрестности  $U(x)$  точки  $x$  лежит точка  $y \in X$ , частичный предел последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Возьмём окрестность  $U(y)$  точки  $y$ , целиком лежащую в  $U(x)$ . По определению частичного предела там лежит бесконечно много элементов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Все эти элементы последовательности лежат в  $U(x)$ . Значит,  $x \in X$ .  $\square$

Среди частичных пределов можно выделить "наибольший" и "наименьший".

**Определение.** *Точная верхняя грань частичных пределов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  называется верхним пределом, точная нижняя грань частичных пределов последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  называется нижним пределом.*

**Обозначения.**  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  соответственно. Также используются обозначения  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Примеры.**  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n = +\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} n$ .

Более того, верно, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m) = \inf_n (\sup_{m \geq n} x_m) \text{ и } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} x_m) = \sup_n (\inf_{m \geq n} x_m).$$

Мы докажем эти утверждения на семинарах.

Очевидно также, что  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Заметим, что если последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится, то пределы всех частичных последовательностей равны между собой, и значит,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ . На самом деле верно и обратное, т.е. верно

**Теорема.** *Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится тогда и только тогда, когда  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим последовательности  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  такие, что  $y_n = \inf_{m \geq n} x_m$ ,  $z_n = \sup_{m \geq n} x_m$ . Имеем

$$y_n \leq x_n \leq z_n.$$

Применяя теорему о двух милиционерах получаем утверждение теоремы.  $\square$

## Лекция 8

### Числовые ряды

Важную роль играют последовательности, заданные в виде сумм элементов других последовательностей. Рассмотрим последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  и напомним «бесконечную сумму»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Это выражение называется числовым рядом или просто рядом. Однако, такое определение вряд ли можно считать строгим. Чтобы дать строгое определение ряда рассмотрим величину  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Она называется  $n$ -ой *частичной суммой*.

**Определение.** (Числовым) рядом называется предел частичных сумм, т.е.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , где  $a_n$  — элементы последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *сходящимся*, если сходится последовательность частичных сумм, иными словами, если существует предел  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Этот предел  $S$  (если он существует) называется *суммой ряда*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Если этот предел не существует, то ряд называется *расходящимся*, сумма ряда в этом случае не определена. Наконец, если предел равен  $\pm\infty$ , то ряд называется *расходящимся к  $\pm\infty$*  соответственно.

**Теорема.** Сходимость ряда не зависит от выбрасывания (добавления) конечного количества элементов.

**Доказательство.** Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  и  $\tilde{S}_n = \sum_{k=m+1}^{n+m} a_k$ . Замети, что  $\tilde{S}_n = S_{n+m} - S_m$ . Утверждение следует т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m}$ .  $\square$

**Замечание.** Выбрасывание конечного количества элементов меняет сумму ряда!

**Примеры.** 1) *Телескопический ряд*: пусть дана последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  называется *телескопическим*. Найдём его сумму

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) - a_1, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Таким образом, телескопический ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится образующая его последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2) *Геометрический ряд*: он определяется как предел *геометрической прогрессии*, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

где  $q \neq 1$ . Если  $|q| < 1$ , то геометрический ряд сходится и его сумма равна  $\frac{1}{1-q}$ .

3) *Гармонический ряд*: он определяется следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Мы покажем, что гармонический ряд является расходящимся (к  $+\infty$ ).

Сейчас мы займёмся вопросами сходимости рядов.

**Теорема (необходимое условие сходимости ряда).** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  инфинитезимальна, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0. \quad \square$$

**Замечание.** Как показывает пример гармонического ряда, обратное к предыдущей теореме утверждение не верно.

Непосредственно из предыдущей теоремы получаем

**Следствие (признак расходимости ряда).** Пусть последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  не инфинитезимальна, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

**Примеры.** Ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  расходятся.

Следующий критерий нужен для доказательства почти всех теорем о рядах, всех признаков сходимости и расходимости. Непосредственно к исследованию конкретных рядов критерий Коши, как правило, не применяется. Это просто перефразировка теоремы «последовательность сходится, если и только если она фундаментальна» для последовательности частичных сумм ряда.

**Теорема.** Для того, чтобы ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сошелся, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > 0, n > N \mid \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Достаточно заметить,  $|S_{n+m} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k|$  и воспользоваться критерием Коши для последовательностей.  $\square$

**Следствие.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Доказательство.** Применим дважды признак Коши в разные стороны. Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > 0, n > N \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

Поэтому,  $\forall \varepsilon > 0$  можно взять то же самое  $N$ :  $\forall m > 0, n > N$  справедливо  $|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k| < \varepsilon$ . Отсюда следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  $\square$

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится. Ряд сходится условно, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Следствие произносится теперь по-другому: абсолютно сходящийся ряд сходится. Заметим также, что если ряд сходится условно, то оба ряда, составленные из его членов одного знака, расходятся. Если бы ровно один из этих рядов сошелся, то весь ряд бы сошелся; если бы сошлись оба, исходный ряд сошелся бы абсолютно.

**Примеры.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n$  сходится абсолютно; мы скоро покажем, что знакопеременный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  сходится условно; ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  не сходится ни абсолютно, ни условно (он расходится).

**Теорема.** Гармонический ряд расходится.

**Доказательство.** Воспользуемся критерием Коши. Положим  $m = n$ , тогда для каждого натурального  $n$  справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По критерию Коши гармонический ряд расходится.  $\square$

### Арифметические свойства сходящихся рядов

**Теорема.** Пусть ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся. Тогда для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  тоже сходится.

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться линейностью предела, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

и взять в качестве  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  последовательности частичных сумм для рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  соответственно.  $\square$

Пусть  $K \subset \mathbb{N}$  — такое бесконечно подмножество натурального ряда, что  $\mathbb{N} \setminus K$  тоже бесконечно. Пусть есть две последовательности,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Составим из них общую последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  по следующему правилу. На места из  $K$  поставим по очереди элементы последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , на места из  $\mathbb{N} \setminus K$  — по очереди элементы последовательности  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Такое определение корректно.

**Утверждение.** Если два из рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходятся, то и третий тоже сходится.

**Упражнение.** Докажите это утверждение.

**Замечание.** В обратную сторону утверждение не работает: из сходимости  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  не следует сходимость рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Утверждение.** Если вставить в ряд на произвольные места сколько угодно нулей, то сходимость/расходимость ряда сохранится.

Это свойство эквивалентно следующему утверждению про последовательности: сходимость последовательности сохраняется, если повторить какие-то из её члены конечное число раз: последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $a_1, a_2, a_2, a_3, a_4, a_4, a_4, a_4, a_5, a_5, a_6, a_6, a_6, a_7, a_8, a_8, \dots$  стремятся к пределу  $A$  одновременно.

**Упражнение.** Докажите оба этих утверждения.



## Лекция 9

### Ряды с положительными (неотрицательными) членами

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n \geq 0$ . Заметим что последовательность его частичных сумм  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  является неубывающей. Тогда верна следующая теорема

**Теорема.** Для сходимости ряда с неотрицательными (положительными) членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм была ограничена.

**Доказательство.** Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами не убывает. Поэтому, если эта последовательность ограничена, то она сходится по теореме Вейерштрасса. Обратно, если эта последовательность сходится, то она ограничена.  $\square$

**Замечание.** (i) Сумма сходящегося ряда с положительными членами совпадает с точной верхней гранью частичных сумм.

(ii) Для ряда с неотрицательными (положительными) членами верна дихотомия: либо он сходится, либо он расходится к  $+\infty$ .

### Признаки сходимости рядов

**Теорема (признак сравнения).** Пусть даны два ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, a_n, b_n \geq 0$ . Пусть при некотором  $C > 0$  для всех  $n$  справедливо неравенство  $a_n \leq Cb_n$ . Тогда из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  вытекает сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  вытекает расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $S_n$  — частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а  $\tilde{S}_n$  — частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Имеем  $0 \leq S_n \leq C\tilde{S}_n$  для всех  $n$ . Тогда если последовательность  $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится, то сходится и последовательность  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Наоборот, если последовательность  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  расходится, то расходится и последовательность  $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Замечание.** (i) Как всегда, в условиях теоремы достаточно чтобы неравенство  $a_n \leq Cb_n$  выполнялось начиная с некоторого  $N$ .

(ii) В условиях теоремы ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется минорирующим рядом, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  называется мажорирующим рядом.

**Теорема (предельный признак сравнения).** Пусть даны два ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  с положительными членами и пусть существует конечный положительный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0.$$

Тогда ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся и расходятся одновременно.

**Доказательство.** В силу условия при достаточно больших  $n$  выполнены неравенства  $\frac{1}{2}Cb_n \leq a_n \leq 2Cb_n$ .  $\square$

Следующая теорема — весьма практичный метод исследования сходимости рядов с положительными членами.

**Теорема (конденсационный признак Коши).** Пусть последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n > 0$  монотонна и убывает к нулю. Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** Запишем неравенства

$$\begin{aligned} a_2 &\leq a_2 \leq a_1, \\ 2a_4 &\leq a_3 + a_4 \leq 2a_2, \\ 4a_8 &\leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4, \\ 8a_{16} &\leq a_9 + a_{10} + \dots + a_{15} + a_{16} \leq 8a_8, \\ &\dots \\ 2^{n-1}a_{2^n} &\leq a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n} \leq 2^{n-1}a_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

и сложим их. Положим  $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$ , получим  $\frac{1}{2}(\tilde{S}_n - a_1) \leq S_{2^n} - a_1 \leq \tilde{S}_n$ . Осталось воспользоваться признаком сравнения.  $\square$

Применяя эту замечательную теорему можно доказать, что

(i) Гармонический ряд расходится: он удовлетворяет условию конденсационного признака Коши и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

что является расходящимся рядом.

(ii)  $p$ -ряд расходится  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  при  $p \leq 0$  (признак расходимости, последовательность не инфинитезимальна). При  $p > 0$  ряд удовлетворяет условию конденсационного признака Коши и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{pn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)n}},$$

получили геометрический ряд; он сходится при  $p > 1$ .

(iii) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  удовлетворяет условию конденсационного признака Коши (почему?) и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

т.е. он расходится.

Рассмотрим два следующих важных признака

**Теорема (признак Даламбера).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с  $a_n > 0$ . Обозначим  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Тогда

- (i) если  $q > 1$ , то ряд расходится;
- (ii) если  $q < 1$ , то ряд сходится.

**Теорема (радикальный признак Коши).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с  $a_n \geq 0$ . Обозначим  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ . Тогда

- (i) если  $q > 1$ , то ряд расходится;
- (ii) если  $q < 1$ , то ряд сходится.

**Замечание.** В обоих признаках в случае  $q = 1$  вопрос о сходимости ряда остаётся открытым (например рассмотрите  $p$ -ряд при произвольном  $p$ ).

**Доказательство. Доказательство расходимости:** если  $q > 1$ , то существует  $N \in \mathbb{N}$  такое, что

- 1) для признака Даламбера:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n > N$  (т.е.  $a_n > a_N$ );
- 2) для радикального Коши:  $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1, \forall n > N$ .

В обоих случаях последовательность  $(a_n)_n$  не инфинитезимальна. Значит, ряд расходится.

**Доказательство сходимости:** если  $q < 1$ , то выберем  $r \in (q, 1)$ . Тогда

1) для признака Даламбера: найдём  $N$  такое, что  $a_{n+1} < ra_n$ ,  $\forall n \geq N$ , тогда

$$a_{N+k} < ra_{N+k-1} < r^2 a_{N+k-2} < \dots < r^k a_N, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

2) для радикального Коши: найдём  $N$  такое, что  $a_n < r^n$ ,  $\forall n \geq N$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  $\square$

### Знакопеременные ряды

В заключении рассмотрим следующий сходимости знакопеременного ряда специального вида

**Теорема (признак Лейбница).** Пусть дан знакопеременный ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ , где  $b_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $b_{n+1} \leq b_n$ . Тогда этот ряд сходится.

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность чётных частичных сумм  $(S_{2n})_n$ . Она не убывает

$$S_{2n} = S_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geq S_{2n-2}.$$

Рассмотрим последовательность чётных частичных сумм  $(S_{2n})_n$ . Она не возрастает

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} \leq S_{2n-1}.$$

Таким образом

$$S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \leq \dots \leq S_3 \leq S_1.$$

Следовательно, обе последовательности сходятся. Более того, т.к.  $S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$ , то переходя к пределу получаем, что предел обеих последовательностей один и тот же. Тогда и вся последовательность  $(S_n)_n$  (т.к. последовательность чётных сумм — это  $\limsup$ , а последовательность нечётных —  $\liminf$ ).  $\square$

**Пример.** Из признака Лейбница моментально получаем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  сходится. Заметим, что его абсолютный ряд расходится, т.е. ряд сходится условно.

### Компактность

Вернёмся к обсуждению компактов. Напомним, что множество называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

**Определение.** Множество  $E$  называется секвенциально компактным, если из любой последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к пределу, лежащему в  $E$ .

**Теорема.** (i) Множество  $E \subset \mathbb{R}$  компактно, если и только если оно секвенциально компактно.

(ii) Множество  $E \subset \mathbb{R}$  компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено.

Проведём доказательство теоремы по следующей схеме.

- 1) Если множество ограничено и замкнуто, то оно секвенциально компактно.
- 2) Если множество ограничено и замкнуто, то оно компактно.
- 3) Если множество не ограничено, то оно не компактно и не секвенциально компактно.
- 4) Если множество не замкнуто, то оно не компактно и не секвенциально компактно.

**Доказательство.** 1) Из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, она принадлежит множеству, так как множество замкнуто, то и предел принадлежит множеству.

2) Ранее мы доказали, что отрезок компактен (лемма Гейне–Бореля). Доказательство в основном опиралось на вложенные отрезки. Для любого замкнутого ограниченного множества проходит похожая конструкция, но мы пойдем другим путём. Пусть есть ограниченное и замкнутое множество  $E$  и его открытое покрытие  $\cup_{\alpha} U_{\alpha}$ . Множество  $E$  принадлежит некоторому отрезку  $[a, b]$ . Множество  $(a - 1, b + 1) \setminus E$  открыто. Рассмотрим покрытие отрезка  $[a, b]$ , состоящее из всех множеств  $U_{\alpha}$  и множества  $(a - 1, b + 1) \setminus E$ . Каждая точка отрезка покрывается, точки из  $E$  покрываются множествами из  $U_{\alpha}$ , точки не из  $E$  — точками из  $(a - 1, b + 1) \setminus E$ . Теперь выберем по лемме Гейне–Бореля из покрытия  $\cup_{\alpha} U_{\alpha} \cup (a - 1, b + 1) \setminus E$  отрезка  $[a, b]$  конечное подпокрытие. Оно состоит из конечного числа множеств  $U_{\alpha}$ :  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$  и множества  $(a - 1, b + 1) \setminus E$ , которое, заметим, с  $E$  не пересекается. Поэтому  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$  — конечное покрытие  $E$ .

3) Пусть множество  $E$  неограничено например сверху. Тогда есть последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ ,  $x_n \rightarrow +\infty$ . Без потери общности можно считать последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  монотонной. Из этой последовательности нельзя извлечь сходящуюся. Поэтому,  $E$  не секвенциально компактно. Рассмотрим счётную систему интервалов  $U_n = (-n, n)$ . По лемме Архимеда это есть открытое покрытие  $\mathbb{R}$ , следовательно, любого подмножества  $E \subset \mathbb{R}$ . Если  $E$  не ограничено, то из этого покрытия нельзя извлечь конечное подпокрытие: объединение конечной системы ограниченных множеств — ограниченное множество.

4) Пусть множество  $E$  ограничено, но не замкнуто. Это значит, что у него есть предельная точка  $x^*$ , которая не принадлежит множеству  $E$ . По определению предельной точки выберем последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ , сходящуюся к  $x^*$ . Любая её подпоследовательность сходится к той же точке  $x^* \notin E$ . Поэтому множество  $E$  не секвенциально компактно. Теперь построим открытое покрытие  $E$ , из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Его легко выписать в явном виде, например, в него можно включить все лучи вида  $(-\infty, x^* - 1/n)$  и все лучи  $(x^* + 1/n, +\infty)$ . Это покрытие множества  $\mathbb{R} \setminus \{x^*\}$ , следовательно, покрытие  $E$ . Любая конечная система множеств из такого покрытия не содержит некоторую окрестность точки  $x^*$ , но по определению предельной точки в ней обязательно есть точки множества  $E$ , то есть эта конечная система не является покрытием.  $\square$