Листок 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Открытые множества, компактность, канторово множество, предел последовательности, фундаментальные последовательности

1. Докажите, что каждое непустое открытое множество U на прямой является объединением не более чем счётного набора непересекающихся открытых промежутков.

2. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.

3. Множество называется совершенным, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Докажите, что канторово множество совершенно.

4. Докажите, что канторово множество нигде не плотно, а дополнение к нему плотно.

5. Рассмотрим поле рациональных функций над $\mathbb{R}$. Приведите пример фундаментальной последовательности, которая не сходится.

6. Пусть $a > 0$. Докажите, что $a^{1/n} \to 1$ при $n \to \infty$. Более общо, пусть $x_n \in [\varepsilon, M]$, тогда $\sqrt[n]{x_n} \to 1$.

7. Найдите пределы последовательностей

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+7n+7} - \sqrt{n^2+5n+5}, \quad (b)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^n+7^n}{2}\right)^{1/n}, \quad (c)\ \lim_{n\to\infty} n^{1/n}$$

8. Найдите пределы последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$(a)\ x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}, \quad (b)\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, x_1 = 1.$$

9. (a) Докажите, что последовательность $(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ является возрастающей, а последовательность $(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ является убывающей.

(b) Докажите, что пределы обеих последовательностей из пункта (a) совпадают. Это число есть основание натуральных логарифмов $e \approx 2,71828\ldots$.

(c) Докажите неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и покажите что оно влечёт

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

10. Докажите, что если $x_n/x_{n-1} \to A$, при $n \to \infty$, то $\sqrt[n]{x_n} \to A$, при $n \to \infty$.

11. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N > 0$. Найдите, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + \ldots + x_N^n}$.

12. Найдите пределы

$$\limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}, \quad \liminf_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}$$