

Листок 4
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Ряды

1. Найдите сумму ряда или докажите, что он расходится

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится ($+\infty$).

3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ расходится для всех $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

4. (a) Докажите, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

(b) Пусть $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Докажите, что

$$e - S_n \leq \frac{1}{n!n}.$$

(c) Пусть

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Найдите B_1, B_2, B_3 .

5. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ в зависимости от параметра $\alpha \geq 0$.

6. Исследуйте ряды на сходимость

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{3}}{2^n}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \arctan n + (-1)^n}{n\sqrt{n}},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + (-1)^n)^n}{7^n},$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + \frac{1}{n})^n}{n^{n+\alpha}}$$

7. Покажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

8. Докажите сходимость рядов

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1789n - 1640}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n},$$

9. На примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ покажите, что от условия монотонности в признаке Лейбница нельзя избавиться.

10. Выясните, сходятся ли ряды абсолютно, условно или расходятся

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \ln n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n^2}}{n!}.$$

11. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется *хвостом* (или *остатком*) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(a) Найдите хвосты следующих рядов

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} q^n, |q| < 1.$$

(b) Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Является ли это условие также достаточным?