Листок 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Натуральные числа, аксиома непрерывности, архимедовы поля, теорема о вложенных отрезках, открытые и замкнутые множества, связность, плотность

1. Докажите неравенство Бернулли
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$
при $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что равенство возможно тогда и только тогда, когда либо $n = 1$, либо $x = 0$.

2. Докажите, что теорема о существовании верхней грани эквивалентна аксиоме непрерывности. Иными словами, упорядоченное множество, у которого каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань есть $\mathbb{R}$.

3. Докажите архимедовость полей $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и неархимедовость поля рациональных функций с отношением порядка определённым на лекции.

4. Докажите, что последовательность вещественных чисел $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $|q| < 1$, стремится к нулю.

5. Пусть F – упорядоченное поле, для которого выполнена аксиома Архимеда. Доказать, что для любого $x \in F$ последовательности $x_n = x/n, x_n = \frac{x}{2^n}$ стремятся к 0. Приведите пример неархимедова поля, для которого данное свойство не выполнено.

6. Пусть есть упорядоченное поле, удовлетворяющее следующим свойствам: каждая последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение и выполняется аксиома Архимеда. Докажите, что это поле – $\mathbb{R}$.

7. Назовем множество *чудесным*, если оно одновременно и открыто и замкнуто. Докажите, что в $\mathbb{R}$ есть единственное чудесное непустое подмножество – всё $\mathbb{R}$. Покажите, что $\mathbb{R}$ связно.

8. Докажите, что в если в упорядоченном поле $\mathbb{F}$ есть единственное чудесное (см. предыдущую задачу) непустое подмножество (всё $\mathbb{F}$), то $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

9. Пусть $\mathbb{F}$ – упорядоченное поле такое, что любое объединение интервалов вида (a, x) с общим левым концом a – это или интервал (a, b), или луч $\{x \in \mathbb{F} \mid x > a\}$. Докажите, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то есть в $\mathbb{F}$ выполнена аксиома непрерывности.

10. Система множеств называется *центрированной*, если каждая её конечная подсистема имеет непустое пересечение. Докажите, что на отрезке каждая центрированная система из замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

11. Докажите, что упорядоченное поле рациональных функций не связно.

12. Докажите, что множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, всюду плотно на прямой.

13. Докажите, что замкнутое множество на $\mathbb{R}$ совпадает со множеством всех предельных точек некоторой последовательности.