Домашнее задание 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Срок сдачи: 30 сентября

Количество сданных задач равняется оценке за листок.

1. Докажите континуальность интервала (a, b) для всяких $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Докажите иррациональность следующих чисел

$$(a)\ \sqrt{12}; \quad (b)\ 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}}.$$

3. Докажите, что не существует такого счётного набора P числовых последовательностей, что для всякой последовательности чисел $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ найдётся последовательность $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$, для которой $x_n \leqslant p_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

4. Используя теорему о вложенных промежутках, докажите несчётность отрезка.

5. Найти, при каких $a \in \mathbb{R}$ множество $\{a^n/n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено.

6. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ открыто, а $B \subset \mathbb{R}$ замкнуто. Докажите, что множество $A \setminus B$ открыто, а $B \setminus A$ замкнуто. Выведите отсюда, что множество открыто тогда и только тогда, когда дополнение к нему замкнуто и замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к нему открыто.

7. Докажите, что всякая система непересекающихся интервалов на прямой не более чем счётна.

8. Докажите, что интервал является связным.

9*. Докажите, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \forall M \in \mathbb{N}\ \exists p, q \in \mathbb{N}, q > M, |\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant q^{-2}$. Иными словами, любое вещественное число приближается с точностью до q^{-2} бесконечным множеством рациональных чисел вида p/q.

10. Доказать, что из всякого набора интервалов на прямой можно выбрать конечный или счетный поднабор с тем же объединением.

11. Пусть упорядоченное поле $\mathbb{F}$ связно. Докажите, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то есть в $\mathbb{F}$ выполнена аксиома непрерывности.

Звёздочкой помечены задачи повышенной сложности.