

1. Пусть $F : U \rightarrow V$ некоторое линейное отображение. Докажите, что
 - а) $F(0) = 0$,
 - б) $F(-u) = -F(u)$ для любого $u \in U$.
2. Опишите все линейные отображения из прямой в прямую. Какое вычислить композицию двух отображений?
3. Найдите матрицы следующих линейных отображений на плоскости с координатами x и y :
 - а) отражение относительно прямой $\{x = y\}$,
 - б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,
 - в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,
 - г) проекция на ось x вдоль оси y .
4. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат.
 - а) Покажите, что композиция $S \circ T$ отображений S и T является отражением относительно некоторой прямой, и найдите эту прямую.
 - б) Найдите матрицы отображений S , T и $S \circ T$.
5. На плоскости с координатами (x, y) выпишите матрицу поворота против часовой стрелки на угол φ относительно начала координат.
6. В трёхмерном пространстве с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$.
7. Пусть V — векторное пространство многочленов степени не выше 3. Какие из следующих отображений $T : V \rightarrow V$ являются линейными?
 - а) $[T(f)](x) = f(x) + 2$;
 - б) $[T(f)](x) = f(x + 2)$;
 - в) $[T(f)](x) = f(x) + x$;
 - г) $[T(f)](x) = f(2x)$;
 - д) $[T(f)](x) = f(2x + 1)$.
8. Постройте графики отображений:
 - а) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2$.
 - б) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2$.
 - в) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.
 - г) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.Какие из этих отображений являются линейными?
9. Классифицируйте все линейные отображения из плоскости в прямую, из прямой в плоскость, из плоскости в другую плоскость, из трёхмерного пространства в плоскость и из плоскости в трёхмерное пространство.
10. Какие движения плоскости являются линейными преобразованиями?
11.
 - а) Докажите, что каждое линейное отображение трёхмерного пространства в себя переводит прямую либо в прямую, либо в нулевой вектор.
 - б) Дайте определение прямой в произвольном векторном пространстве и обобщите утверждение пункта а).
12. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC с центром в начале координат.

а) Опишите геометрически (как повороты, отражения, и т.п.) все движения плоскости, которые переводят треугольник ABC в себя.

б) Пусть S — отражение относительно оси симметрии треугольника, проходящей через вершину A , а T — поворот против часовой стрелки относительно центра треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$. Опишите геометрически движения ST , T^2 и STS .

в) Представьте каждое движение из пункта а) в виде композиции движений S и T .

г) Найдите матрицы движений из пункта а) в какой-нибудь системе координат.

д) Можно ли в пункте г) выбрать систему координат так, чтобы все матрицы имели целые коэффициенты?