1. а) Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ есть порождающий набор из n векторов. Есть ли порождающий набор из $n+1$ вектора?
б) Докажите, что любые два неколлинеарных вектора в $\mathbb{R}^2$ являются порождающим набором.
в) Придумайте порождающий набор в пространстве бесконечных последовательностей вещественных чисел.

2. а) Докажите, что если набор векторов линейно зависим, то один из векторов выражается в виде линейной комбинации через другие.
б) Приведите пример линейно зависимой системы векторов, в которой какой-нибудь вектор не выражается через остальные.

3. Докажите, что минимальная система порождающих векторов всегда линейно независима.

4. а) Постройте какой-нибудь базис в пространстве всех многочленов от одной переменной.
б) Можно ли выбрать в этом пространстве конечный базис?

5. Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — базис в пространстве V. Покажите, что следующие наборы векторов — тоже базисы в V:
а) $(\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые скаляры.
б) $(v_1, v_2 + \lambda_2 v_1, v_3 + \lambda_3 v_1, \ldots, v_n + \lambda_n v_1)$, где $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые скаляры.
в) $(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_n})$, где $\sigma : (1, 2, \ldots, n) \to (1, 2, \ldots, n)$ произвольная биекция.

6. Постройте изоморфизм между произвольным n-мерным векторным пространством V и $\mathbb{R}^n$. Покажите, что изоморфизмам взаимно-однозначно соответствуют базисы в пространстве V.

7. Рассмотрим множество $\mathbb{R}[x]$ многочленов с вещественными коэффициентами как вещественное векторное пространство.
а) Представьте вектор x^3 как линейную комбинацию векторов 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$.
б) Являются ли векторы 1, $(x-1)^2$, $(x-2)^3$, x^3 линейно зависимыми?
в) Отождествите с $\mathbb{R}^n$ (для какого-то n) следующие пространства: пространство многочленов степени не выше 5; пространство многочленов степени не выше 5, зануляющихся в точке 0; пространство многочленов степени не выше 5, зануляющихся в -1 и 1; пространство многочленов степени не выше 5, чья производная в нуле равна 0.

8. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$.
а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?
б) Тот же вопрос для функций 1, x^2, $\mathrm{tg}(x)$, $\sin^2(x)$, e^x, $\cos^2(x)$.

9. Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу $n \times n$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит 1, а все остальные коэффициенты равны 0.
а) Для каждой матрицы E_{ij} при $n = 3$ опишите геометрически линейное отображение трёхмерного пространства в себя, заданное матрицей E_{ij} (например, представьте E_{ij} в виде композиции проекционного оператора и вращения).
б) Докажите матричные тождества: $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$; $\quad E_{ij}E_{j'k} = 0$ при $j \neq j'$. Каков геометрический смысл этих тождеств?

10. а) Введите на множестве $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ матриц размера $m \times n$ структуру вещественного векторного пространства.
б) Предъявите базис и вычислите размерность пространства $\mathrm{Mat}_{m\times n}$.

11. Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется диагональной, если все её коэффициенты кроме, возможно, a_{11}, a_{22},…, a_{nn} равны нулю.

а) Проверьте, что диагональные матрицы образуют подпространство в пространстве $\mathrm{Mat}_{n\times n}$, и найдите размерность этого подпространства.

б) Для диагональной матрицы $D = 2E_{11} + \frac{1}{3}E_{22} + \frac{1}{2}E_{33}$ при $n = 3$ опишите геометрически линейное отображение трёхмерного пространства в себя, заданное матрицей D.

в) Проверьте, что произведение двух диагональных матриц — снова диагональная матрица.

г) Пусть $D = \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \ldots + \lambda_n E_{nn}$. Найдите все матрицы A, которые коммутируют с D (то есть $AD = DA$).

12. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — векторное пространство многочленов степени не выше n. Зафиксируем $n+1$ число $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что многочлены $f_i(x) = \dfrac{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} x - a_j}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} a_i - a_j}$, $i = 0, \ldots, n$ образуют базис $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$. Каковы координаты произвольного многочлена $g(x)$ в этом базисе?