Геометрия 1-й модуль
Листок для устной сдачи № 1

24.09.2021 - 22.10.2021

1. а) Введём на множестве пар натуральных чисел отношение $(a,b) \sim (c,d)$, если $a+d=b+c$. Докажите, что оно является отношением эквивалентности. Как выглядят пары, входящие в один класс эквивалентности?

б) Введём на этом множестве операции сложения и умножения таким образом:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), (a,b)(c,d)=(ac+bd,ad+bc).$$

Докажите, что эти операции согласованы с отношением эквивалентности (иными словами, если мы в операции заменим оба элемента на эквивалентные, то и результат операции заменится на эквивалентный). Покажите, что эти операции естественным образом задают операции на множестве классов эквивалентности.

в) Докажите, что сложение на множестве классов коммутативно, ассоциативно, есть нулевой элемент и обратный, а умножение коммутативно, ассоциативно, есть единичный элемент и выполняется дистрибутивность (иными словами, мы получили коммутативное кольцо с единицей).

г) Постройте изоморфизм этого кольца с кольцом целых чисел.

2. (*Ключевая лемма для формулы Пика*) На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника. Решение не должно опираться на формулу Пика.

3. Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a,b,c \in \mathbb{C}$ (1) из $a>b$ следует $a+c>b+c$; (2) из $a>0$ и $b>0$ следует, что $ab>0$.) Решение должно содержать определения сложения и умножения комплексных чисел.

4. (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2,z_1,z_0) := \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$.

(б) Докажите, что четыре точки z_0, z_1, z_2 и z_3 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0,z_1,z_2)}{V(z_0,z_1,z_3)} = \frac{(z_0-z_2)(z_1-z_3)}{(z_1-z_2)(z_0-z_3)}$$

является вещественным числом. Решение должно содержать определения модуля и аргумента комплексного числа.

5. а) Докажите, что существует многочлен T_n, такой что $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва первого рода*).

б) Докажите, что существует многочлен U_n, такой что $\sin(nx) = \sin(x)U_{n-1}(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва второго рода*).

6. Докажите теорему Шаля: любое движение плоскости есть композиция не более трёх отражений.

7. а) Докажите, что композиция двух отражений — это либо поворот, либо параллельный перенос.

б) Докажите, что каждый поворот можно представить в виде композиции двух отражений.

в) Докажите, что каждый параллельный перенос можно представить в виде композиции двух отражений.

8. Композиция двух поворотов — это либо поворот, либо параллельный перенос. Пусть R_1 — это поворот на угол α вокруг точки A, а R_2 — поворот на угол β вокруг точки B.

а) При каких условиях на α, β, A и B композиция $R_1 \circ R_2$ окажется параллельным переносом? На какой вектор?

б) Постройте центр и угол поворота $R_1 \circ R_2$, если это поворот.

9. Сформулируйте и докажите трехмерный аналог теоремы Шаля.