1. а) Докажите, что линейные отображения из $V = \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ образуют векторное пространство. Оно называется *двойственным пространством* и обозначается через V^*.

б) Докажите, что если V конечномерно, то $\dim V^* = \dim V$.

в) Что можно сказать, если V бесконечномерно?

2. Докажите, что если $\dim V = n$, то имеется ЕСТЕСТВЕННАЯ биекция между m-мерными подпространствами V и $(n-m)$-мерными подпространствами V^*.

3. Какие пространства в V^* соответствуют сумме и пересечению подпространств в V?

4. Найдите сумму и пересечение (задайте их базис) для подпространств $U = \langle (1,2,3,4,5), (0,1,2,1,0) \rangle$, $V = \langle (1,1,0,0,0), (0,0,1,1,1) \rangle$ в $\mathbb{R}^4$.

5. Пусть вектор в $\mathbb{R}^n$ имеет в базисе $v_1, v_2, ..., v_n$ координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. Как вычислить его координаты в "стандартном" базисе $e_1 = (1,0,...,0), ..., e_n = (0,...,0,1)$? Покажите, что результат имеет вид AX для некоторой матрицы A. Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{v_i\}$.

6. а) Покажите, что матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{v_i\}$ – обратная для матрицы перехода от $\{v_i\}$ к $\{e_i\}$.

б) Покажите, что матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{w_i\}$ – произведение матриц перехода от $\{e_i\}$ к $\{v_i\}$ и от $\{v_i\}$ к $\{w_i\}$.

7. Пусть отображение из $\mathbb{R}_n$ в $\mathbb{R}_m$ задано в некоторых базисах матрицей. Выберем новые базисы в этих пространствах. Как изменится матрица отображения?

8. а) Линейный оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (т.е. из пространства в себя) в базисе $f_1 = (0,1,-2)$, $f_2 = (1,-1,-1)$, $f_3 = (-2,7,-7)$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите его матрицу в стандартном базисе.

б) Линейный оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите его матрицу в базисе $f_1 = (1,2,-1)$, $f_2 = (1,2,0)$, $f_3 = (-1,-1,-1)$

9. а) Выберем в $\mathbb{R}_n$ какой-нибудь базис $v_1, v_2, ..., v_n$. Совершим элементарное преобразование с базисными векторами (т.е. либо прибавим к одному вектору другой, умноженный на число, либо умножим один из векторов на ненулевое число, либо поменяем два базисных вектора местами). Как при этом изменится двойственный базис?

б) Пусть матрица перехода от одного базиса к другому A. Какой матрицей связаны двойственные базисы?

10. а) Докажите, что билинейную форму можно задать в виде XAY, где X – один вектор, записанный в строчку, Y – вектор, записанный в столбик, а A – некоторая матрица (называемая *матрицей Грама*).

б) Как меняется матрица Грама при смене базиса?

11. Запишите стандартное скалярное произведение в базисе $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $v_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.