**1.** Назовём последовательность $x_1, x_2, ..., x_n$ арифметической, если каждый её член, кроме первого и последнего, равен полусумме соседних. Составьте систему уравнений, задающую такие последовательности, и запишите её в матричной форме.

**2.** Какие из следующих систем линейных уравнений эквивалентны (то есть имеют одинаковые множества решений)?

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x+5y+2z=3 \\ x+y=-1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4x+7y+3z=5 \\ y+z=3 \end{cases} .$$

**3. а)** В трёхмерном пространстве с координатами $(x, y, z)$ даны три плоскости:

$$\Pi_1 = \{3x+2y+z=39\}, \quad \Pi_2 = \{2x+3y+z=34\}, \quad \Pi_3 = \{x+2y+3z=26\}.$$

Найдите их пересечение $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

**б)** Пусть $AX = B$ — система уравнений, задающая пересечение трёх плоскостей в трёхмерном пространстве. Для каждого комбинаторного типа ступенчатой формы матрицы $A$ опишите геометрически (точка, прямая,...) множество решений системы $AX = B$ (ответ будет зависеть также и от $B$).

**4.** Приведите матрицы к ступенчатой форме методом Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} .$$

**а)** Опишите все решения системы $AX = 0$.

**б)** Для каких столбцов $B$ система $AX = B$ имеет решение?

**5. а)** Найдите линейную зависимость между столбцами матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix} .$$

**б)** Многочлен $f(x)$ степени не выше три принимает в точках 1, 2, 3 и 4 значения $y_1$, $y_2$, $y_3$ и $y_4$, соответственно. Найдите $f(5)$.

**6.** Пусть $M$ — "таблица умножения", то есть матрица $10 \times 10$, у которой на пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца стоит произведение $i \cdot j$. Найдите размерность подпространства в $\mathbb{R}^n$, натянутого на столбцы матрицы $M$. (Эта размерность называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rk}(M)$.)

**7.** Найдите ранги матриц из задач 3 и 4.

**8. а)** Докажите, что если $m \times n$-матрица $A'$ получается из матрицы $A$ умножением $i$-той строки на число $d$, то $A' = DA$, где $D$ — это диагональная матрица с единицами на диагонали и $d$ на месте $i, i$.

**б)** Пусть $I = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{mm}$ единичная $m \times m$ матрица. Докажите, что если $m \times n$-матрица $A'$ получается из матрицы $A$ заменой $i$-той строки на сумму $i$-той строки и $j$-той строки, умноженной на $a$, то $A' = (I + aE_{ij})A$.

**в)** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для остальных элементарных преобразований столбцов.

**9.** Докажите, что преобразование типа $III$ (перестановка строк) можно получить в виде композиции преобразований типа $I$ и $II$.

**10.** **а)** Разложите матрицы $A$ ниже в произведение матриц вида $I + aE_{ij}$ и диагональных матриц. Как это помогает найти обратную матрицу по умножению, то есть такую матрицу $A^{-1}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

**б)** Обоснуйте следующий алгоритм поиска обратной матрицы $A^{-1}$ для $n \times n$ матрицы $A$:

1. Припишем к матрице $A$ справа единичную матрицу $I$ того же порядка. Получим матрицу $B$ размера $n \times 2n$.

2. Матрицу $B$ приведём элементарными преобразованиями строк к ступенчатой форме $B_1$.

3. Если все ведущие единицы матрицы $B_1$ оказались в левой половине матрицы, то дополнительно приведём матрицу $B_1$ к *стандартной* ступенчатой форме $B_2$ (то есть левая половина матрицы $B_2$ будет равна единичной матрице $I$).Тогда правая половина матрицы $B_2$ совпадёт с искомой матрицей $A^{-1}$.

4. Если хотя бы одна ведущая единица матрицы $B_1$ оказалась в правой половине матрицы, то исходная матрица $A$ необратима.

**11.** При каком условии на коэффициенты $2 \times 2$ матрица имеет обратную относительно умножения? Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы $A^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.