**1.** На плоскости нарисованы (но не подписаны) векторы $u$, $v$, $u+2v$, $\frac{1}{2}(u+v)$, $u-v$ и $2u+v$. Эти вектора имеют координаты $(-1,1)$, $(-1,5)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(1,7)$ и $(2,2)$, но неизвестно, какие именно координаты какому вектору соответствуют. Найдите координаты векторов $u$ и $v$.

**2.** Никон выбрал два непропорциональных вектора $e_1$ и $e_2$ на плоскости и так сопоставил каждому вектору $v \in \mathbb{R}^2$ пару Н-координат $x_1,\ x_2$, чтобы выполнялось равенство $v = x_1e_1 + x_2e_2$. Родион выбрал два других непропорциональных вектора $f_1$ и $f_2$ и так сопоставил каждому вектору $v \in \mathbb{R}^2$ пару Р-координат $y_1,\ y_2$, чтобы выполнялось равенство $v = y_1f_1 + y_2f_2$. Известно, что векторы с Н-координатами $(1,2)$, $(3,4)$ имеют Р-координаты $(1,4)$ и $(2,3)$ соответственно. Найдите Р-координаты вектора, имеющего Н-координаты $(5,8)$.

**3.** Сформулируйте точные утверждения и докажите, что в векторном пространстве: $0v = 0$ и $\alpha 0 = 0$. Что означает $0$ в каждом из равенств?

**4.** Докажите, что в векторном пространстве есть ровно один нулевой вектор и ровно один вектор, обратный данному.

**5.** Сформулируйте точное утверждение и докажите, что в любом векторном пространстве: $(-1)v = -v$.

**6.** Рассмотрим множество квадратных трёхчленов (то есть функций вида $ax^2+bx+c$). Введём на нём сложение и умножение на число следующим образом: $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$, $(\alpha u)(x) = \alpha u(x)$. Проверьте, что на этом множестве с заданными операциями выполняются все аксиомы векторного пространства.

**7.** Пусть $X$ — произвольное множество. Обозначим через $V$ — множество всех отображений $V : X \to \mathbb{R}$.

**а)** Задайте на $V$ структуру вещественного векторного пространства.

**б)** Покажите, что если $X$ конечно, то $V$ можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ для некоторого $n$.

**8.** Пусть $V = \mathbb{R}^+$ множество всех строго положительных вещественных чисел. Попробуем задать на $V$ структуру вещественного векторного пространства определив сложение $u \oplus v := uv$ и умножение на число $\lambda \otimes u := u^\lambda$.

**а)** Вычислите $(\lambda \otimes u) \oplus (\mu \otimes v) \oplus (\nu \otimes w)$ для $\lambda = \mu = -1,\ \nu = u = 2,\ v = w = 3$.

**б)** Все ли аксиомы векторного пространства выполнятся в $V$?

**в)** Придумайте линейное отображение $V \to \mathbb{R}$ которое является биекцией.

**9.** Пусть $V$ множество единичных векторов на плоскости. Определим сложение векторов в $V$ так: если векторы $u,\ v \in V$ образуют с осью $X$ углы $\alpha$ и $\beta$, то их сумма $u \oplus v$ это единичный вектор, образующий с осью $X$ угол $\alpha + \beta$.

**а)** Проверьте, что $V$ образует абелеву группу относительно сложения.

**б)** Можно ли дополнить операцию сложения $\oplus$ какой-нибудь операцией умножения на скаляр, чтобы $V$ стало векторным пространством?

**10.** Пусть $V$ множество всех бесконечных последовательностей вещественных чисел.

**а)** Задайте на $V$ структуру вещественного векторного пространства.

**б)** Приведите пример инъективного, но не сюръективного линейного отображения $V \to V$.

**в)** Приведите пример сюръективного, но не инъективного линейного отображения $V \to V$.