

1. Решите системы уравнений. Найдите базисы в пространствах решений систем. Найдите размерности и базисы у суммы и пересечения пространств решений систем.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 10x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 16x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 30x_5 = 0 \end{array} \right. .$$

2. Пусть $U_1 \subset \mathbb{R}^3$ — подпространство, натянутое на строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- а) Найдите размерность подпространства U_1 .
- б) Покажите, что U_1 можно задать, как множество решений линейного уравнения. Какого?
- в) Пусть $U_2 \subset \mathbb{R}^3$ — подпространство размерности d (где $d = 0, 1, 2$ или 3). Чему может быть равна размерность подпространств $U_1 \cap U_2$ и $U_1 + U_2$ (ответ зависит от d)?

3. Подпространство $U_1 \subset \mathbb{R}^4$ натянуто на строки матрицы A_1 , а подпространство $U_2 \subset \mathbb{R}^4$ — на строки матрицы A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- а) Найдите размерности подпространств U_1 и U_2 .
- б) Задайте U_1 и U_2 уравнениями (то есть для каждого $i = 1, 2$ найдите такую матрицу B_i , что U_i является пространством решений системы $B_i X = 0$).
- в) Найдите размерности подпространств $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$.

4. Напишите систему из минимально возможного числа линейных уравнений, пространство решений которой совпадает с линейной оболочкой векторов $(1, 2, -1, -3), (-3, -6, 3, 10), (2, 4, -2, -7), (1, 2, -1, -1), (2, 5, -1, -9)$.

5. Докажите, что если A — это $m \times n$ матрица ранга r , то пространство решений системы уравнений $AX = 0$ является подпространством в \mathbb{R}^n размерности $n - r$.