

Листок 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

**Счётные и несчётные множества, иррациональные числа, упорядоченные поля,
аксиома Архимеда, ограниченные множества**

1. Докажите, что множества целых и рациональных чисел счётны.
2. Докажите континуальность следующих множеств:
 - (a) множество вещественных чисел;
 - (b) множество прямых на плоскости;
 - (c) множество треугольников на плоскости.
3. Докажите континуальность объединения континуального набора континуальных множеств.
4. Какова мощность множества всех возрастающих последовательностей натуральных чисел?
5. Пусть E — счётное подмножество числовой прямой. Докажите, что найдётся число a такое, что пересечение множеств $E + a$ и E пусто.
6. Докажите, что простых чисел бесконечно много.
7. Докажите иррациональность следующих чисел
 - (a) $\sqrt{2}$;
 - (b) $\cos 20^\circ$.
8. Докажите, что число \sqrt{N} , где $N \in \mathbb{N}$, является либо целым, либо иррациональным.
9. Докажите, что всякое упорядоченное поле содержит бесконечное количество элементов.
10. Докажите, что на поле комплексных чисел нельзя ввести отношение порядка.
11. Найдите точные верхние и нижние грани следующих множеств:
 - (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$;
 - (b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 2\}$;
 - (c) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
12. Докажите, что существует число $\sqrt[3]{7}$, то есть вещественное число, которое в кубе даёт 7.