Ćwiczenie 1: RRZ - metody jawne: Eulera, RK2, RK4

20 października 2025

1 Problem autonomiczny (testowanie dokładności metod)

Rozwiążemy numerycznie równanie różnieczkowe zwyczajne (RRZ):

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad f(t,y) = \lambda y \tag{1}$$

Jego rozwiązaniem analitycznym dla warunku początkowego $y_0 = y(0) = 1$ jest $y(t) = e^{\lambda t}$, przyda nam się ono do sprawdzenia poprawności rozwiązania numerycznego. W celu rozwiazania równania należy zastosować kolejno poniższe metody:

1. Metoda jawna Eulera

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n), \quad t_n = \Delta t \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

   daje przepis

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot \lambda y_n \tag{3}$$

   Rozwiązać równanie (1) przy użyciu schematu Eulera dla parametrów: $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $t \in [0, 5]$. Obliczenia wykonać dla trzech kroów czasowych $\Delta t = 0.01;\ 0.1;\ 1.0$. Na jednym rysunku pokazać trzy rozwiązania numeryczne i rozwiązanie analityczne. (5 pkt) Na drugim rysunku pokazać zmiany błędu globalnego $\delta(t) = y_{num}(t) - y_{dok}(t)$ dla trzech kroków czasowych (5 pkt)

2. Metoda jawna RK2 (trapezów)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) = \lambda y_n & (4)\\ k_2 &= f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_1) = \lambda\left(y_n + \Delta t k_1\right) & (5)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2) & (6) \end{aligned}$$

   Powtórzyć obliczenia jak w punkcie 1 stosując schemat RK2. Za komplet wyników (20 pkt).

3. Metoda jawna RK4

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n, y_n\right) = \lambda y_n & (7)\\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) & (8)\\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) = \lambda\left(y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) & (9)\\ k_4 &= f\left(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3\right) = \lambda\left(y_n + \Delta t k_3\right) & (10)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & (11) \end{aligned}$$

   Powtórzyć obliczenia jak w punkcie 1 stosując schemat RK4. Za komplet wyników (20 pkt).

1.1 RRZ 2 rzędu - Jednowymiarowe drgania w obecności tłumienia i siły wymuszającej

Chcemy opisać jednowymiarowy ruch ciała poddanego działaniu jednoczesnie siły sprężystej ($-\omega^2 x$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$), siły tarcia ($-\beta\frac{dx}{dt}$) zależnej od prędkości, oraz siły wymuszającej ruch ($F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \gamma)$), dla danych warunków poczatkowych $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = v_0$. Równanie opisujace zmiany w czasie położenia takiego ciała (tzw równanie ruchu) ma następującą postać:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) + \beta\frac{dx(t)}{dt} = F(t) \tag{12}$$

Jest to równanie RRZ 2 rzędu. Aby je rozwiązać numerycznie należy je najpierw przekształcić do układu RRZ 1 rzędu w następujący sposób: ($\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$ - prędkość ciała)

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x,v) = v(t) \tag{13}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = g(t,x,v) = -\omega^2 x(t) - \beta v(t) + F(t) \tag{14}$$

Do jego rozwiązania wykorzystamy przedstawiony wcześniej jawny schemat RK4. Oba równania musimy rozwiązywać w tym samym czasie, dlatego należy sukcesywnie wyznaczać pary funkcji:

$$(k_1^x, k_1^v) \to (k_2^x, k_2^v) \to (k_3^x, k_3^v) \to (k_4^x, k_4^v) \to (x_{n+1}, v_{n+1}) \tag{15}$$

zgodnie ze schematem:

$$k_1^x = f(t_n, x_n, v_n) = v_n \tag{16}$$

$$k_1^v = g(t_n, x_n, v_n) = -\omega^2 x_n - \beta v_n + F_n \tag{17}$$

$$k_2^x = f(t_{n+\frac{1}{2}}, x_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^x, v_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^v) = v_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^v \tag{18}$$

$$k_2^v = g(t_{n+\frac{1}{2}}, x_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^x, v_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^v) = -\omega^2\left(x_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^x\right) - \beta\left(v_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^v\right) + F_{n+\frac{1}{2}} \tag{19}$$

$$k_3^x = f(t_{n+\frac{1}{2}}, x_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^x, v_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^v) = v_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^v \tag{20}$$

$$k_3^v = g(t_{n+\frac{1}{2}}, x_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^x, v_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^v) = -\omega^2\left(x_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^x\right) - \beta\left(v_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^v\right) + F_{n+\frac{1}{2}} \tag{21}$$

$$k_4^x = f(t_{n+1}, x_n + \Delta t k_2^x, v_n + \Delta t k_3^v) = v_n + \Delta t\, k_3^v \tag{22}$$

$$k_4^v = g(t_{n+1}, x_n + \Delta t k_3^x, v_n + \Delta t k_3^v) = -\omega^2\left(x_n + \Delta t k_3^x\right) - \beta\left(v_n + \Delta t k_3^v\right) + F_{n+1} \tag{23}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x\right) \tag{24}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1^v + 2k_2^v + 2k_3^v + k_4^v\right) \tag{25}$$

Należy rozwiązać równanie (12) używając schematu RK4 i wyznaczyć następujące wielkości fizyczne:

- wykres 1: $x(t)$-położenie , $v(t)$-prędkość
- wykres 2:
  $E_{pot}(t) = 0.5kx^2(t)$ - energia potencjalna,
  $E_{kin}(t) = 0.5mv^2(t)$ - energia kinetyczna,
  $E_{tot}(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$ - energia całkowita

Przyjąc następujące parametry symulacji: $\Delta t = 10^{-4}$, $T_0 = 2\pi/\omega$, $t \in [0, 4T_0]$. Obliczenia wykonać dla czterech przypadków.

(a) drgania swobodne:

$$x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \omega = 1(k = 1, m = 1), \quad \beta = 0, \quad F_0 = 0$$

(b) drgania tłumione:

$$x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \omega = 1(k = 1, m = 1), \quad \beta = 0.5, \quad F_0 = 0$$

(c) drgania wymuszone:

$$x_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad \omega = 1(k = 1, m = 1), \quad \beta = 0, \quad F_0 = 0.5, \quad \Omega = 1$$

(d) drgania z uwzględnieniem wymuszenia i tłumienia:

$$x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \omega = 1(k = 1, m = 1), \quad \beta = 0.5, \quad F_0 = 0.5, \quad \Omega = 1$$

Za komplet wyników (50 pkt)