Formelsammlung SW 01 - 03

Sunday, 9 October 2022 15:31

formelsam... reihen,...

ANLIS_ZF

Funktionen

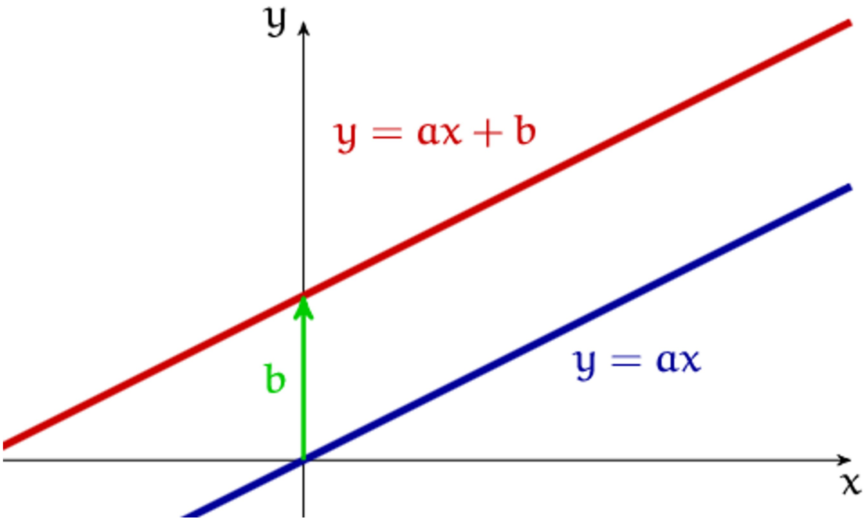
Verschieben, stauchen & strecken von Funktionen

Merkregel:

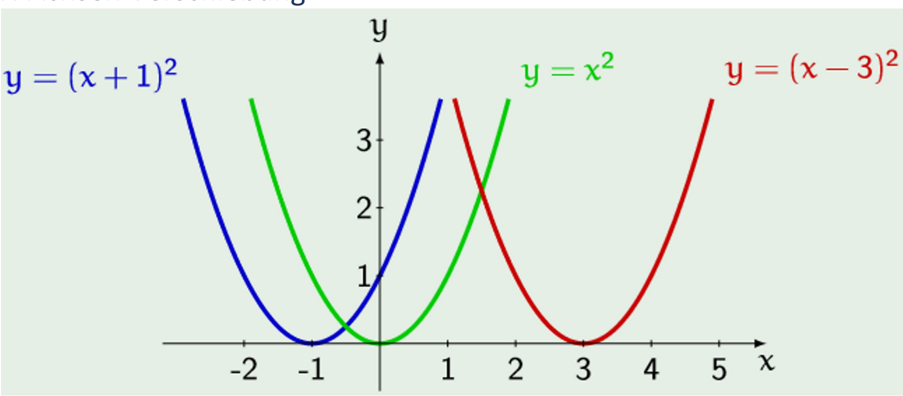
Will man den Graph der Funktion $y = f(x)$ vom Ursprung in den Punkt (a, b) verschieben und zusätzlich in Richtung der x Achse um den Faktor α skalieren (stauchen/strecken), dann lautet die neue Funktion:

$$y - b = \alpha f(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \alpha f(x - a) + b.$$

Y-Achsen Verschiebung



X-Achsen Verschiebung

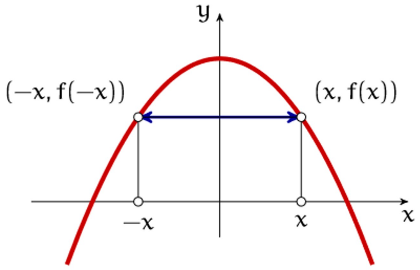


Steigende & Fallende Funktionen

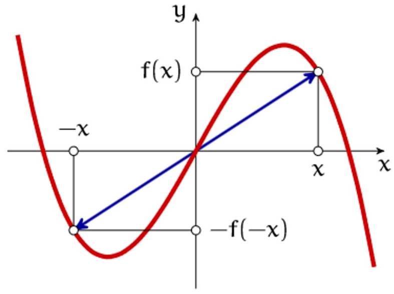
Definition (Steigende, fallende und monotone Funktionen)

- Die Funktion f heisst **steigend** (**zunehmend** oder **wachsend**), falls $f(x)$ grösser wird, wenn x vergrössert wird. Der Graph einer solchen Funktion steigt von links nach rechts.
- Die Funktion f heisst **fallend** (**abnehmend**), falls $f(x)$ kleiner wird, wenn x vergrössert wird. Der Graph einer solchen Funktion fällt von links nach rechts.
- Die Funktion f heisst **monoton**, falls sie für alle x steigt oder fällt.

Gerade & ungerade Funktionen



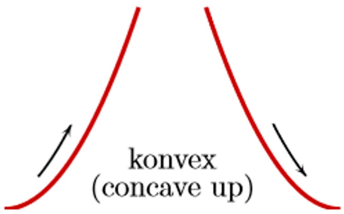
Gerade Funktion

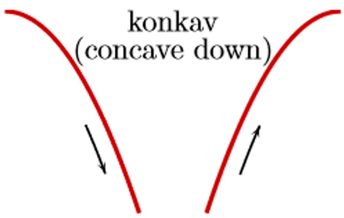


Ungerade Funktion

Konvex & Konkav

Konvex = Linkskurve
Konkav = Rechtskurve





Folgen

Arithmetische Folge (AF)

Distanz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern:
$a_{n+1} - a_n = d$

Berechnung des Folgenglieds:
$a_{n+1} = a_0 + (n + 1)d$ **oder** $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Geometrische Folge (GF)

Distanz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Berechnung des Folgenglieds:
$a_{n+1} = a_0 q^{n+1}$ **oder** $a_n = a_1 q^{n-1}$

Reihen

https://www.symbolab.com/solver/series-calculator

Arithmetische Reihe (AR)

Summe:
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{a_1 + a_n}{d}$$

Geometrische Reihe (GR)

Summe:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 q^k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \textbf{oder} \quad s_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Summe falls $|q| < 1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 q^k = \frac{a_1}{1 - q}$$

Grenzwerte

https://www.symbolab.com/solver/limit-calculator

Nützliche Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k e^{-n} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad (a > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_p^n} = \max\{a_1, \ldots, a_p\}, \quad (a_k > 0,\ k = 1, \ldots, p)$$

Regel von de l'Hopital

Wir nehmen an, dass f und g in einer Umgebung von $x = a$ differenzierbar sind und $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ sind. Dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls die rechte Seite existiert oder $\pm\infty$ ist.

Vorgehen

Vorgehen für die Anwendung der Regel von de l'Hôpital:

1. Überprüfe, ob $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck der Form 0/0 ist.
2. Wenn ja, leite f und g separat ab und
3. bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wenn dieser endlich ist, oder $\pm\infty$, dann ist dies der gesuchte Grenzwert!

Example (Unbestimmter Ausdruck der Form 0/0)

Man berechne den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Lösung: Man hat nacheinander

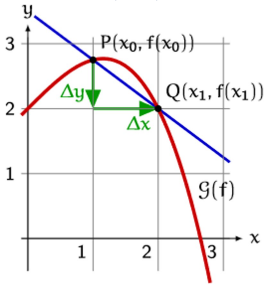
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Formelsammlung Differential

Tuesday, 3 January 2023 15:46

Sekante

Die Sekante (blau) ist eine Gerade die durch 2 Punkte (P und Q) einer Funktion (rot) geht.



Gleichung

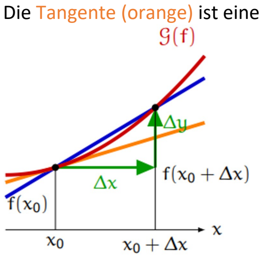
$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Steigung (Differen**zen**quotient)

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \textit{oder} \quad m = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tangente

Die Tangente (orange) ist eine Gerade mit gleichen Steigung wie die Funktion (rot) am Punkt x_0 hat und durch x_0 verlaeuft.



Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Steigung (Differen**tial**quotient)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ableitungen

https://www.symbolab.com/solver/calculus-calculator
https://www.ableitungsrechner.net/

Formel	Bedeutung
$(x)' = 1$	Ableitung einer Variablen
$(a \cdot x)' = a$	Ableitung einer Variablen mit Faktor
$(ax^2)' = 2ax$	Ableitung einer Quadratfunktion
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	Ableitung eines Bruches
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Ableitung einer Wurzel
$(ax^n)' = anx^{n-1}$	Allgemeine Ableitungsregel für Potenzfunktionen

Formel	Bedeutung
$(e^x)' = e^x$	Ableitung von e (Eulersche Zahl)
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	Ableitung einer Exponentialfunktion
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	Ableitung des Logarithmus
$(\sin x)' = \cos x$	Ableitung des Sinus
$(\cos x)' = -\sin x$	Ableitung des Cosinus
$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	Ableitung des Tangens

Faktorregel
Eine Konstante c darf vor die Ableitung einer Funktion gezogen werden.
$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

Summenregel
Die Summe zweier Funktionen darf summandenweise abgeleitet werden.
$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

Produktregel
Bei der Ableitung einer Multiplikation zweier Funktionen gilt folgende Regel:
$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel
Für die Ableitung von Funktionen welche durcheinander geteilt werden gilt folgende Regel:
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \quad \textit{kurz} \quad \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kettenregel
Zusammengesetzte Funktionen werden wie folg abgeleitet:
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktionen
Ableitung
$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Implizite Ableitung
https://www.symbolab.com/solver/implicit-derivative-calculator
Bei einer Kurve in implizier Form kann man wie folgt nach y' ableiten.
$F(x, y) = 0$

1. Zuerst nach x ableiten wobei man anstelle von $y \ = y(x)$ verwendet.
2. Löse die entstehende Gleichung nach $y' = y'(x)$ auf.

Das Differential
Das Differential ist gleich der Ableitung einer Funktion. Damit ist das Verhältnis zwischen x und y ersichtlich indem man sieh wieviel sich der wert in y ändert, wenn ich x ändere.
$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$
$$dy = f'(x_0)dx.$$
$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)dx.$$

Monotonie
Die erste Ableitung einer Funktion liefert deren Steigung an diesem Punkt. Ist die Steigung positiv nimmt die Funktion zu andernfalls nimmt sie ab.

- Gilt $f'(x) > 0$ in einem Intervall I, dann ist f dort **streng monoton wachsend**, im Fall $f'(x) \geqslant 0$ **monoton wachsend**.
- Gilt $f'(x) < 0$ in einem Intervall I, dann ist f dort **streng monoton fallend**, im Fall $f'(x) \leqslant 0$ **monoton fallend**.

Lokale (oder relative) Extrema
https://www.symbolab.com/solver/calculus-function-extreme-points-calculator
Durch die 1. und 2. Ableitung einer Funktion lassen sich das Minimum und Maximum oder sogar einen Sattelpunkt berechnen.
Von links nach rechts gesehen, ist ein **Minimum eine Linkskrümmung (konvex)** und das **Maximum eine Rechtskrümmung (konkav)**.

- Ist $f''(x_0) > 0$, dann liegt ein lokales (oder relatives) Minimum vor;
- ist $f''(x_0) < 0$, dann liegt ein lokales (oder relatives) Maximum vor.

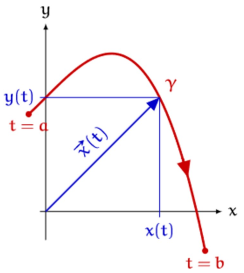
Vorgehen:
1. $f(x)$ *nach* $f'(x)$ ableiten.
2. $f'(x) = 0$ setzen und Nullpunkte berechnen.
3. $f'(x)$ *nach* $f''(x)$ ableiten.
4. Die berechneten Nullpunkte aus Schritt 2 in $f''(x)$ einsetzen.

Krümmung
Mit folgender Formel lässt sich die Krümmung an Punkt x berechnen.
Für $\boldsymbol{k} \ > \ \mathbf{0}$ **hat man eine Links**- und für $\boldsymbol{k} \ < \ \mathbf{0}$ **eine Rechtsrümmung**.

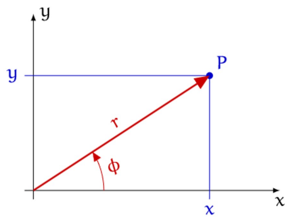
$$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}}; \quad \text{Krümmungskreisradius } \rho(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|}$$

Parameterdarstellung von Kurven

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$



Polar- und kartesische Koordinaten



Polar- zu kartesischen Koordinaten:

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$

Kartesische zu Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

Ableitung eines Vektors (Tangentialvektor)

Ein Vektor $\vec{x}(t)$ leitet man nach dem Parameter t ab, indem man jede Komponente des Vektors nach t ableitet.

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

Ableitung einer Polarkoordinaten Funktion

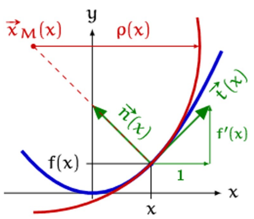
Die (gewöhnliche) Ableitung einer Funktion wird bestimmt, indem man die Polarkoordinaten in die Parameterform transformiert:

$$x = x(\phi) = r(\phi)\cos\phi$$
$$y = y(\phi) = r(\phi)\sin\phi$$

Hier ist ϕ der Parameter der Kurve. Dann wendet man die bereits bekannte Formel $y'(x) = \dot{y}/\dot{x}$ an, wobei der Punkt die Ableitung nach dem Parameter bedeutet:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}} = \frac{\dot{r}(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi}{\dot{r}(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi}$$

Krümmungskreismittelpunkt



Punkt auf der Kurve $\vec{x}(x) = [x, y(x)]^T$, Tangente $\vec{t}(x) = [1, y'(x)]^T$, Normale $\vec{n}(x) = [-y'(x), 1]^T$. Mittelpunkt des Krümmungskreises (rot):

$$\vec{x}_M(x) = \vec{x}(x) + \frac{1}{\kappa(x)}\frac{\vec{n}(x)}{|\vec{n}(x)|}$$

Dabei ist $\kappa(x)$ die Krümmung im Punkt $(x, f(x))$ und $\rho(x) = 1/\kappa(x)$ der Radius des Krümmungskreises.

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist

$$\vec{x}_M(x) = \begin{bmatrix} x_M(x) \\ y_M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y'(x)\dfrac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} \\ y(x) + \dfrac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} \end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \kappa(x) = \frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}.$$

Kurvendiskussion

Zur Kurvendiskussion gehört die Untersuchung folgender Punkte:

- **Definitions- und Wertebereich**, **Definitionslücken**, **Unstetigkeitsstellen**
- **Symmetrien:** ist f gerade ($f(x) = f(-x)$), ungerade ($f(x) = -f(-x)$) oder T-periodisch ($f(x+T) = f(x)$).
- **Nullstellen** ($f(x) = 0$); **Schnittpunkt mit y-Achse** ($f(0) = y$).
- **Pole** (Stellen, an denen der Nenner verschwindet), **senkrechte Asymptoten** (Polgeraden).
- **Ableitungen** (in der Regel bis zur 3. Ordnung)
- **Relative Extremwerte** (Maxima und Minima): Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$, Überprüfung mit der 2. Ableitung.
- **Monotonieeigenschaften**, **Wendepunkte**, **Krümmung**, etc.
- **Asymptotisches Verhalten** für $x \to \pm\infty$.
- **Krümmungskreismittelpunkt** (optional: **Evolute** und **Evolvente** [1], etc.)
- **Skizze** des Graphen $\mathcal{G}(f)$ der Funktion f.

[1] Die Evolute ist die Menge aller Krümmungsmittelpunkte. Die Evolventenverzahnung liegt fast allen Zahnrädern zugrunde.

https://www.mathepower.com/kurvendiskussion.php

Optimierungsprobleme

Bei Extremwertproblemen (oder Extremwertaufgaben) sucht man den Extremwert einer Funktion für ein bestimmtes Problem, z. B. maximales Volumen, minimale Distanz, etc.

1. Zuerst bestimmt man die Funktion, welche das Problem beschreibt.
2. Aus den Nullstellen der Ableitung ($f'(x) = 0$) erhält man Kandidaten für Stellen (x_0), an denen die Funktion Extremwerte ($f(x_0)$) annimmt.
3. Mit Hilfe der höheren Ableitungen an diesen Stellen überprüft man, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt:

$$\begin{aligned} \textbf{Relatives Maximum:}\quad & f^{(n)}(x_0) < 0,\ n \text{ gerade und } f^{(k)}(x_0) = 0, \text{ für } 1 \leqslant k < n \\ \textbf{Relatives Minimum:}\quad & f^{(n)}(x_0) > 0,\ n \text{ gerade und } f^{(k)}(x_0) = 0, \text{ für } 1 \leqslant k < n \\ \textbf{Sattelpunkt:}\quad & f^{(n)}(x_0) \neq 0,\ n \text{ ungerade und } f^{(k)}(x_0) = 0, \text{ für } 2 \leqslant k < n \end{aligned}$$

4. Die Funktionswerte der gefundenen relativen Maxima (Minima) werden mit den Werten der Funktion an ihren Rändern verglichen. Das grösste (kleinste) Wert ist der gesuchte Extremwert.

Formelsammlung Integral

Monday, 9 January 2023 13:22

Stammfunktion

Die Stammfunktion ist die Ableitung einer Funktion:

$$F'(x) = f(x).$$

Eigenschaften:

1. Zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ gibt es unendlich viele Stammfunktionen.
2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine **additive** Konstante, d. h.

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const}.$$

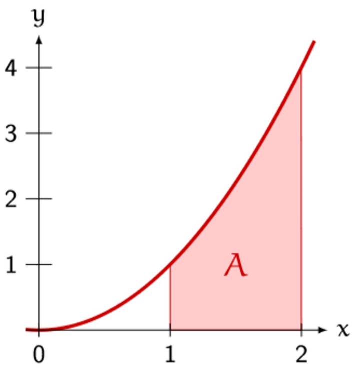
3. Ist $F_1(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$, dann ist auch $F_2(x) = F_1(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher hat die **Menge aller Stammfunktionen** die Form

$$F(x) = F_1(x) + C, \quad \text{wobei } C \text{ eine beliebige (reelle) Konstante ist.}$$

Integration

Das **Bestimmen sämtlicher Stammfunktionen** $F(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ bezeichnet man als **Integration.**

Bestimmtes Integral



1. Das Intervall $[1, 2]$ wird in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = 1/n$ unterteilt.
2. In jedem Teilintervall wird die Funktion durch eine (geeignete) Konstante ersetzt.
3. A ist dann ungefähr gleich der Summe dieser Rechteckflächen.
4. Je grösser n gewählt wird, desto genauer ist die Approximation.
5. Für $n \to \infty$ erwarten wir die exakte Fläche A.

Schreibweise für das Integral von a bis b sieht wie folgt aus:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Berechnung des **Teilintervalls**:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

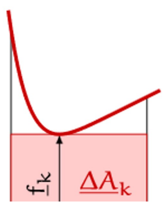
Untersumme

(1) Zerlege $[a, b]$ in n Teilintervalle der Breite $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$.
Die Δx_k müssen nicht notwendigerweise alle gleich sein.

(2) Für die n-te Untersumme wählt man im k-ten Teilintervall als Höhe des k-ten Rechtecks den kleinsten Funktionswert $\underline{f}_k$.
Die k-te Rechteckfläche:

$$\Delta \underline{A}_k = \underline{f}_k \Delta x_k$$

Die n-te Untersumme U_n:



$n \quad n$

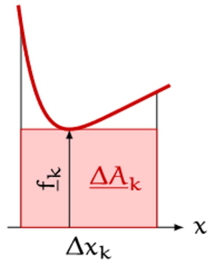
(1) Zerlege $[a, b]$ in n Teilintervalle der Breite Δx_1, Δx_2, ..., Δx_k, ..., Δx_n.
Die Δx_k müssen nicht notwendigerweise alle gleich sein.

(2) Für die n-te Untersumme wählt man im k-ten Teilintervall als Höhe des k-ten Rechtecks den kleinsten Funktionswert $\underline{f}_k$.
Die k-te Rechteckfläche:

$$\underline{\Delta A}_k = \underline{f}_k \Delta x_k$$

Die n-te Untersumme U_n:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \underline{\Delta A}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{f}_k \Delta x_k$$



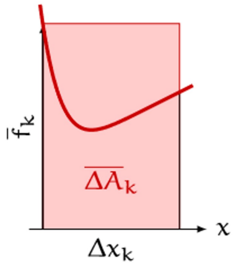
Obersumme

(3) Für die n-te Obersumme wählt man im k-ten Teilintervall als Höhe des k-ten Rechtecks den grössten Funktionswert $\overline{f}_k$.
Die k-te Rechteckfläche:

$$\overline{\Delta A}_k = \overline{f}_k \Delta x_k$$

Die n-te Obersumme O_n:

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta A}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{f}_k \Delta x_k$$



Zusammenhang

(7) Für eine stückweise stetige Funktion f existiert der Grenzwert der n-ten Unter- und Obersumme (man sagt f ist integrierbar), und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} U_n = A = \lim_{n\to\infty} O_n.$$

Unbestimmtes Integral

Dies ist ein unbestimmtes Integral weil die obere Grenze variabel ist.

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Differential- und Integralrechnung

Die Menge aller unbestimmter Integrale von $f(x)$ hat die Form:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (F'(x) = f(x))$$

Wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Man nennt C die Integrationskonstante.

Berechnung bestimmter Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Vorgehen

Ein bestimmtes Integral wird also berechnet, indem man

(1) irgendeine Stammfunktion $F(x)$ zum Integranden $f(x)$ bestimmt (es muss dann $F'(x) = f(x)$ gelten),

(2) $F(a)$, $F(b)$ und $F(b) - F(a)$ berechnet und dann einsetzt in

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral ist also gleich F ausgewertet an der oberen Grenze b minus F ausgewertet an der unteren Grenze a.

1. Substitutionsregel

Ein Ableitung geschaffen durch die Kettenregel kann mittels Substitution integriert werden.

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Vorgehen

Man ersetzt die innere Funktion $\boldsymbol{g(x)}$ mit einer variable $\boldsymbol{u}$ und entfernt die Ableitung $\boldsymbol{g'(x)}$ der inneren Funktion $\boldsymbol{g(x)}$.

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

Am Ende wird u wieder mit g(x) ersetzt.

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=g(x)}$$

Bestimmte Integrale

Theorem (1. Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

Es gilt: $$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Vorgehen:

1. *Substituiere formal* $g(x) = u$, $g'(x)\,dx = du$
2. *Ersetze die* x*-Grenzen* a, b *durch die* u*-Grenzen* $g(a)$, $g(b)$
3. *Integriere*

2. Substitutionsregel

Partielle Integration

https://www.symbolab.com/solver/by-parts-integration-calculator

Diese Integrationsmethode wird an einer Ableitung, welche durch die Produktregel erfolgt ist, angewendet.

Ableitung mit der Produktregel:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Wird wie folgt Integriert:

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Es gilt also:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Mittelwert

https://www.symbolab.com/solver/function-average-calculator

Linearer Mittelwert

$$\overline{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Quadratischer Mittelwert

$$\overline{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\;dx.}$$

Mittelwertsatz Integralrechnung

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Formelsammlung Erweiterung

Thursday, 19 January 2023 19:33

Taylor-Polynom

https://www.symbolab.com/solver/taylor-series-calculator

Reihe von 0 bis n:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots$$

Taylor-Reihe

https://www.symbolab.com/solver/taylor-series-calculator

Reihe von 0 bis unendlich:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

Partielle Ableitung

https://www.symbolab.com/solver/partial-derivative-calculator

Ableitung einer zwei-variablen Funktion

$f(x, y)$

Ableitung nach x

Bei der Ableitung nach x werden alle anderen variablen der Funktion wie Konstanten behandelt.
(Ableitung einer Konstante = 0)

Ableitung nach y

Bei der Ableitung nach y werden alle anderen variablen der Funktion (auch x) wie Konstanten behandelt.

Gradient

https://www.symbolab.com/solver/gradient-calculator

Der Gradient ist ein Vektor welche die partielle Ableitungen als Komponenten beinhaltet.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{x}) \\ f_y(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \qquad \text{oder ein bisschen ausführlicher} \qquad \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson

https://atozmath.com/CONM/NewtonRaphson2.aspx?q1=x-y%2b1%3bx%5e2-y-1%601%2c1&dp=4&do=1

Online Rechner

Allgemein:

https://www.symbolab.com/solver

Integral:

https://www.integralrechner.de/

Ableitungen:

https://www.ableitungsrechner.net/

Taylor-Polynom/Reihe:
https://www.allmath.com/taylor-series-calculator.php