Formelsammlung

Wednesday, 28 December 2022 15:11

Vektoren

Rechenregeln

(1)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	Kommutativgesetz
(2)	$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$	Assoziativgesetz
(3)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	Existenz eines Neutralelements $\mathbf{0}$
(4)	$\mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{a})=\mathbf{0}$	Existenz des Inversen -**a** von **a**
(5)	$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$	
(6)	$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$	
(7)	$(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})$	
(8)	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Zusammenhang mit Determinante

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Skalarprodukt

Definition

Multiplikation zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Allgemein gilt:

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\phi$$

Normierung & Einheitsvektor

Durch das teilen eines Vektors durch seine eigene Länge (Betrag des Vektors), entsteht der **Einheitsvektor**.
Dieser Prozess wird **normieren** genannt.

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|a|}\vec{a}$$

Orthogonale Vektoren

2 Vektoren sind **orthogonal**, wenn sie **senkrecht** aufeinander stehen, also wenn ihr **Skalarprodukt 0**

ergibt.

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

Lineare Gleichungssysteme

Gauss-Eliminationsverfahren

1. **Ausgangslage** ist eine **Koeffizienten Matrix**:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$
2. **Vertauschen** (wenn nötig) um **Leitkoeffizienten** zu erhalten:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$
3. Zeilen mit Faktor **multiplizieren** und **voneinander subtrahieren** um **Zeilenstufenform** zu erhalten:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & -7 & -61 & 40 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \end{array}\right)$$

Brüche wenn möglich vermeiden!

Matrizen

Matrixmultiplikation

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -1 \\ 6 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -26 \\ -11 & 5 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3 \times 4 \longleftrightarrow^{*} 4 \times 2 \qquad 3 \times 2$$

Einheitsmatrix

Eine Matrix aus 0 ausser die diagonalen Werten bestehend aus 1.

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer beliebigen **Matrix A** mit der **Einheitsmatrix E** ergibt die Matrix A:

$$\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}.$$

Symmetrische Matrizen

Wenn die Matrix **A** transponiert wird, ergibt es wieder die Matrix **A**, falls sie symmetrisch ist.

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A})$$

Transponierte Matrix

Zeilen und **Spalten** einer Matrix **vertauschen**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Inverse oder reguläre Matrix

Eine **quadratische n-x-n Matrix** heisst **invertierbar oder regulär**, wenn eine **inverse** Matrix **existiert** mit welcher multipliziert die Einheitsmatrix entsteht.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -1+1 \\ 12-12 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Inverse mit Gauss-Jordan berechnen

Beispiel:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) II - 2 \cdot I \qquad \left(\begin{matrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right) I/2 \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right) I - 3 \cdot II$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Probe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Determinante

Eine Matrix ist **regulär (invertierbar)**, wenn ihre **Determinante von 0 verschieden ist**. Ist die Determinante 0, so ist die Matrix singulär (nicht invertierbar).
Die Determinante ist die **Flache** oder das **Volumen** welches durch die Matrix aufgespannt wird.

Folgende **Regeln** sind zu beachten:

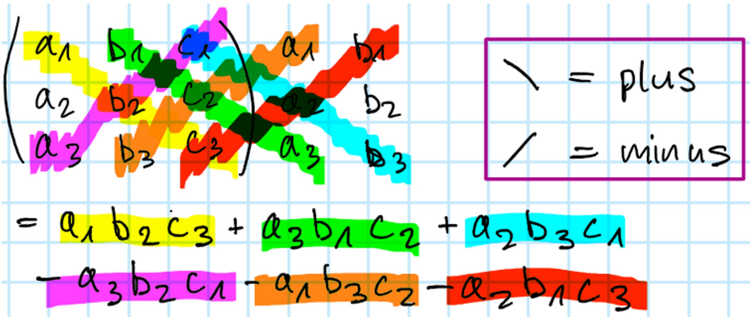
- Das **vertauschen** von zwei Zeilen **verändert das Vorzeichen** der Determinante.
- **Multiplikation einer Zeile** mit einem Faktor, **multipliziert die Determinante** mit diesem Faktor.

Online Calculator:
https://matrixcalc.org/det.html

2-x-2 Matrix

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \qquad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} = af - cd$$

Determinante für höhere Dimensionen (Regel von Sarrus)



Permutationsmatrix

Das wechseln von Spalten einer Matrix mit Permutationsmatrix von rechts multipliziert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matrix } A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matrix } P_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matrix } B}$$

Das wechseln von Zeilen einer Matrix mit Permutationsmatrix von links multipliziert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matrix } P_4} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matrix A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matrix } B}$$

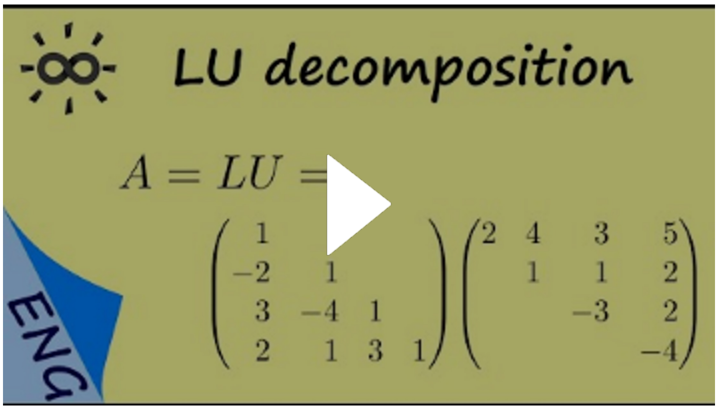
LR-Zerlegung (LU-Decomposition)

Online Calculator:

https://matrixcalc.org/

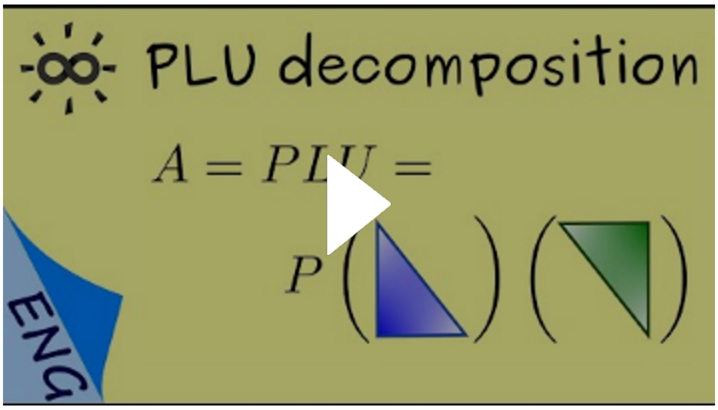
LU-Decomposition

[LU decomposition - An Example]()



PLU-Decomposition

[PLU decomposition - An Example]()



Lösung eines Gleichungssystems mit LR/LU-Zerlegung

1. Ausgangslage:
   $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
   $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$
2. Daraus entsteht:
   $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$
3. **Ux** wird mit dem **Vektor y** ersetzt, welcher dann anhand des Gleichung Systems abgelesen oder ausgerechnet werden kann:
   $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
4. Danach kann mit den Werten aus dem y Vektor, der Vektor x berechnet werden, der am Anfang gesucht wurde:
   $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

Gauss-Jordan Elimination

Online Calculator:
https://matrixcalc.org/slu.html

Formelsammlung 2

Monday, 2 January 2023 14:09

Vektorraum

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Basis von Vektorraeumen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Dimension} = 4$$

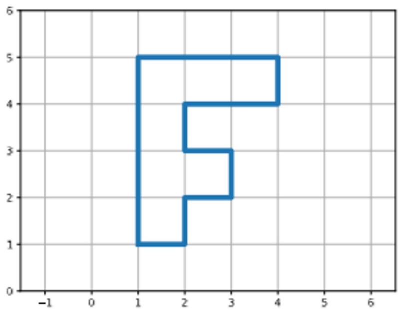
Untervektorraeume

Nullraum

Lineare Abbildungen

Folgende **Abbildung** wird anhand einer **Matrix P** dargestellt:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$



Einheitsvektoren

Die vorherige lineare Abbildung wurde mit dem Einheitsvektor als **Basis** abgebildet.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2$$

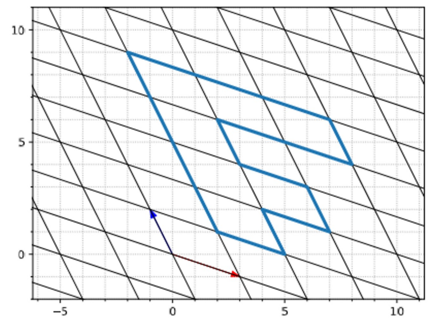
Abbildung mit beliebiger Basis

Mit der **Basis A** kann ein **Vektor v** oder eine **Matrix** beliebig verändert werden. Somit kann man eine Abbildung **skalieren, drehstrecken, drehen spiegeln oder scheren**.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

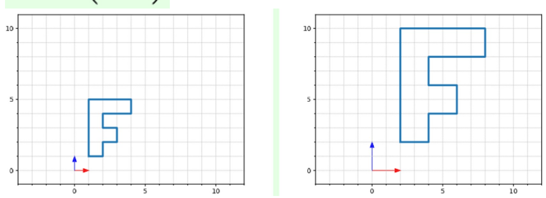
Beispiel mit der vorherigen Abbildung:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{P} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 & 2 & 8 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



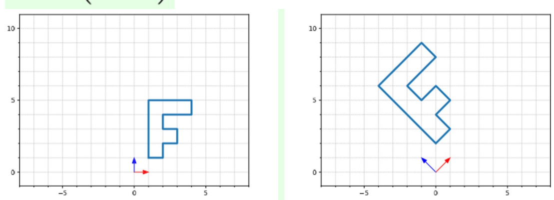
Skalierung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



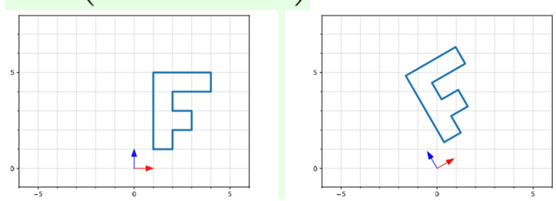
Drehstreckung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



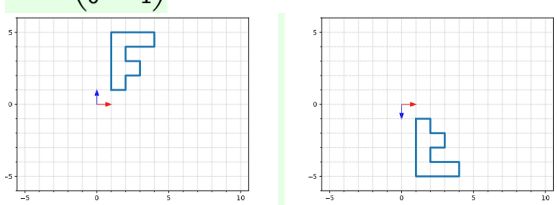
Drehung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$



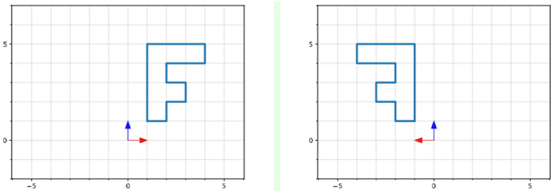
Achsenspiegelung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



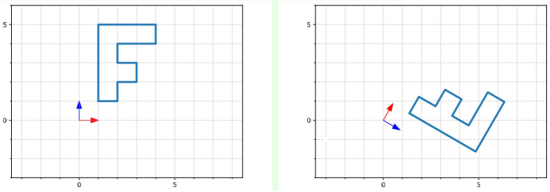
Oder

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



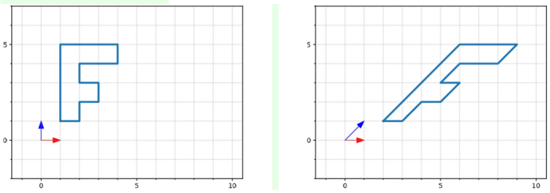
Oder

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot 30^\circ) & \sin(2\cdot 30^\circ) \\ \sin(2\cdot 30^\circ) & -\cos(2\cdot 30^\circ) \end{pmatrix}$$



Scherung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Orthogonale Abbildungen

Orthogonal bedeutet längen- und winkeltreu, d.h. Länge und Winkel sind unverändert.

Eigenschaften:

- Eine orthogonale Abbildung $\mathbf{A}$ erhält das Skalarprodukt:
  $\mathbf{xy} = (\mathbf{Ax})(\mathbf{Ay}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- Die Inverse einer orthogonalen Abbildung ist ihre Transponierte:
- Die Determinante einer orthogonalen Abbildung ist 1 oder -1.
  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$
- Die Spalten (und Zeilen) einer orthogonalen Abbildung sind auf 1 normiert.
- Die Spalten (und Zeilen) einer orthogonalen Abbildung stehen paarweise aufeinander senkrecht.

Determinante

- Drehungen sind orthogonale Abbildungen mit Determinante 1.
- Spiegelungen sind orthogonale Abbildungen mit Determinante -1.

Homogene Koordinaten in 2D

Um Rotationen und Translationen von Vektoren in einem einheitlichen System zu beschreiben, nimmt man eine **Dimension hinzu** und **erweitert Vektoren und Matrizen**. Diese Erweiterung bezeichnet man als **homogene Koordinaten.**

Rotation

Rotation des Vektors $(x, y)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel φ:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Rotation:

- Die Rotationsmatrix wird mit dem Vektor multipliziert (Matrixmultiplikation).
- Der Nullvektor wird auf sich selbst abgebildet.
- Die Abbildung ist linear.

Rotation um den Winkel φ:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Translation

Translation (Verschiebung) des Vektors $(x, y)^T$ um den Vektor $(u, v)^T$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Translation:

- Zum Vektor wird der Translationsvektor addiert (Vektoraddition).
- Der Nullvektor wird nicht auf sich selbst abgebildet (ausser für $u = v = 0$, uninteressanter Spezialfall).
- Die Abbildung ist im allgemeinen nichtlinear.

Translation (Verschiebung) um den Vektor $(u, v)^T$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x+u \\ y+v \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Homogene Koordinaten in 3D

Rotationen

Rotation um die x-Achse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x \\ y\cos\varphi - z\sin\varphi \\ y\sin\varphi + z\cos\varphi \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Rotation um die y-Achse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x\cos\varphi + z\sin\varphi \\ y \\ -x\sin\varphi + z\cos\varphi \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Rotation um die z-Achse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Translationen

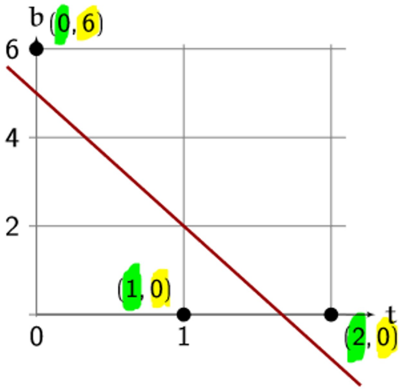
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x+u \\ y+v \\ z+w \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Formelsammlung 3

Tuesday, 10 January 2023 15:01

Lineare Regression

Die **Voraussage** einer stetigen Zielgrösse, auf der Basis einer oder mehrerer Einflussgrössen.



Gesucht ist eine lineare Funktion (eine Gerade)

$$b = C + Dt,$$

die durch die drei Punkte geht. Damit der erste Punkt $(0, 6)$ auf der Geraden liegt, muss $6 = C$ gelten. Analoge Gleichungen ergeben sich für die anderen Punkte.

$$\begin{array}{rcrcl} C & & & = & 6 \\ C & + & D & = & 0 \\ C & + & 2D & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approximation

Offensichtlich gibt es kein x, welches das Gleichungssystem $Ax = b$ erfuellt. Das heisst, wir machen immer einen Fehler $e = b - Ax$.

Das best mögliche x wird $\hat{x}$ genannt.

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Projektionsmatrix

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

Die Projektion von $\boldsymbol{b}$ auf den Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$ ist dann:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T$$

Vorgehen

Angenommen, es gibt eine lineare Beziehung zwischen der Einflüssgrösse t und der Zielgrösse b, d. h. gilt das folgende Regressionsmodell

$$b = C + Dt + \varepsilon$$

wobei ε z. B. Messfehler sind. Weiter nehmen wir an, wir hätten m Datenpunkte (t_1, b_1), (t_2, b_2), bis (t_m, b_m), dann ist die beste Lösung für die Regressionskoeffizienten

$$\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}. \quad \text{Summe der Quadrate der Restabweichungen SQR} = \|\mathbf{e}\|^2$$

wobei Datenmatrix und -vektor gegeben sind durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Mit $b = \hat{C} + \hat{D}t$ lässt sich dann die Zielgrösse zu einer beliebigen Einflussgrösse voraussagen.

Multiple Lineare Regression

Eine Voraussage, auf Basis von mehreren Einflussgrössen.

Projektions- oder Prädiktionsmatrix P

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T$$

Residualmatrix Q

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T$$

Zentrierende Matrix M

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \frac{1}{5}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \quad \text{wobei } \mathbf{1} = [1, 1, 1, 1, 1]^T$$

Bestimmtheitsmass R^2

Quantifiziert, wie gut der lineare Zusammenhang zwischen den Einflussgrössen x und den Zielgroessen y ist.

Wegen SQT = SQE + SQR (Appendix zu Übungen) hat man für das **Bestimmtheitsmass**:

$$R^2 = \frac{\text{SQE}}{\text{SQT}} = \frac{\text{SQT} - \text{SQR}}{\text{SQT}} = 1 - \frac{\text{SQR}}{\text{SQT}} \qquad \text{und es gilt} \qquad 0 \leqslant R^2 \leqslant 1$$

$$\text{SQT} = (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{y}^T\mathbf{M}\mathbf{y}$$

$$\text{SQR} = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\text{SQR}}{\text{SQT}} = 1 - \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{M}\mathbf{y}}$$

Fehlerquadrate

$\mathtt{SQT}$ Summe der Quadrate der Totalen Abweichungen

$\mathtt{SQE}$ Summe der Quadrate der Erklärten Abweichungen

$\mathtt{SQR}$ Summe der Quadrate der Restabweichungen (Residuen)

$$\mathtt{SQT} = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \overline{y})^2 = (\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}})$$

$$\mathtt{SQE} = \sum_{i=1}^{m} (\hat{y}_i - \overline{y})^2 = (\hat{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{y}})$$

$$\mathtt{SQR} = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \hat{y}_i)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

Vorgehen

Angenommen, es gibt eine lineare Beziehung zwischen der Einflüssgrösse $\mathbf{x}$ und der Zielgrösse y, d. h. gilt das folgende Regressionsmodell

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n + \varepsilon$$

wobei ε z.B. Messfehler sind. Weiter nehmen wir an, wir hätten m Datenpunkte $(\mathbf{x}_1, y_1)$, $(\mathbf{x}_2, y_2)$, bis $(\mathbf{x}_m, y_m)$, dann ist die beste Lösung für die Regressionskoeffizienten $(\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n]^T)$ der Vektor

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}.$$

wobei Datenmatrix und -vektor gegeben sind durch die Samples $\big(\overbrace{(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n})}^{\mathbf{x}_i}, y_i\big)$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{x}_1^T- \\ 1 & -\mathbf{x}_2^T- \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\mathbf{x}_m^T- \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Mit $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_2 = \mathbf{x}^T\hat{\mathbf{b}}$ lässt sich dann die Zielgrösse zu einem beliebigen Einflussvektor $\mathbf{x} = [x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ voraussagen.

Mit der Projektions- oder Prädiktionsmatrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$$

kann der Vektor $\mathbf{y}$ der Zielgrössen aus den Samples auf die Regressionshyperebene projiziert werden $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y}$.

Damit kann der Fehlervektor $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ berechnet werden. Dieser kann aber auch direkt mit der Residualmatrix $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ berechnet werden: $\mathbf{e} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$.

Damit ist auch schon der $\mathtt{SQR} = \mathbf{e}^T\mathbf{e}$, d. h. die Summe der Quadrate der Residuen, berechnet.

Die Summe der Quadrate der totalen Abweichungen kann man mit der zentrierenden Matrix $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ dann wie folgt berechnen: $\mathtt{SQT} = \mathbf{y}^T\mathbf{M}\mathbf{y}$

Schliesslich ergibt sich mit Bestimmheitsmass $R^2 = 1 - \frac{\mathtt{SQR}}{\mathtt{SQT}}$ eine quantitative Aussage über die Güte der linearen Regression.

Formelsammlung 4

Thursday, 12 January 2023 16:16

Eigenwerte & Eigenvektoren

Online Calculator: https://matrixcalc.org/vectors.html

Eigenwerte

Für folgende Gleichung werden die **Nullpunkte** ausgerechnet. Diese stellen die **Eigenwerte λ** dar. *(3. Binomische Formel fuer Nullpunkte)*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Eigenvektoren

Zu jedem **Eigenwert λ_i** bestimmt man den zugehörenden **Eigenvektor x**.

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Spektralzerlegung einer symmetrischen Matrix

Hier ist Λ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A und die Spalten von V sind die paarweise orthogonalen Eigenvektoren in der selben Reihenfolge wie die Eigenwerte in **Λ.**

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T = \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T$$

V ist die Matrix bestehend aus den **Eigenvektoren**:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Λ ist eine Diagonalmatrix bestehend aus den **Eigenwerten**:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Positiv definite Matrizen

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2$$

Diagonalisierung von quadratischen Matrizen

Herleitung

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} \qquad \text{folgt sofort} \quad \Lambda = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \;\text{ und }\; \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2 \;\text{ schreiben }\; \mathbf{A}\underbrace{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]}_{\mathbf{V}} = [\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2] = \underbrace{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]}_{\mathbf{V}}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

Ähnliche Matrizen

Man nennt zwei Matrizen A und B ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix M gibt, sodass:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}.$$

Sind A und B ähnliche Matrizen, dann haben sie die **selben Eigenwerte**.

Potenz von Matrizen

Falls A quadriert wird, bleibe die **Eigenvektoren gleich**, die **Eigenwerte** werden allerdings **quadriert**. Für jeden Eigenvektor **x** zum Eigenwert λ gilt:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x},$$

Markov-Matrizen

Die Matrixelemente von Markov-Matrizen sind alle **positiv** und die **Summe einer Spalte ist 1**. Dies impliziert, dass der **grösste Eigenwert $\boldsymbol{\lambda = 1}$** ist.

Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition SVD)

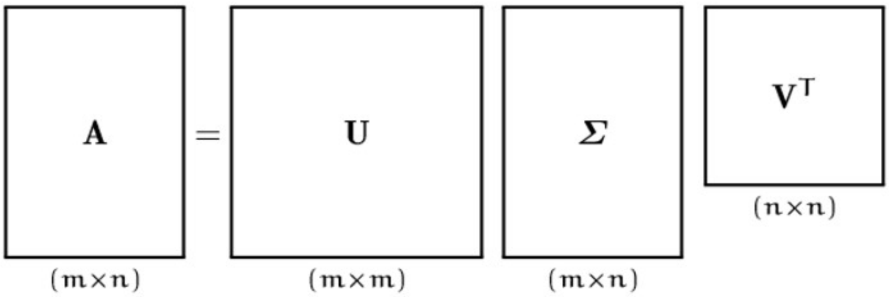
Online Calculator: https://www.emathhelp.net/calculators/linear-algebra/svd-calculator/

Die **Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition, SVD)** zerlegt jede beliebige $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ in drei Matrizen $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\mathbf{V}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$$

Dabei sind

$\mathbf{U}$: eine orthogonale $m \times m$-Matrix ($\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$, d. h. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$)
$\boldsymbol{\Sigma}$: eine $m \times n$-Diagonalmatrix mit den Singulärwerten auf der Diagonale
$\mathbf{V}$: eine orthogonale $n \times n$-Matrix ($\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \mathbf{I}$, d. h. $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}$)



Vorgehen (Beispiel)

Ausgangslage:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

1. **Eigenwerte $\boldsymbol{\lambda}$** von $\boldsymbol{AA^T}$ berechnen.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\mathbf{I}\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)^2 - 64 = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 25)(\lambda - 9) = 0$$

Eigenwerte von $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$: $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 9$

2. **Singulärwerte** von $\boldsymbol{A}$:

Singulärwerte von $\mathbf{A}$: $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$ und $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{9} = 3.$

3. **Links-Singulärvektoren** von $\boldsymbol{A}$:

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 25$ aus der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{abgelesen} \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist der Links-Singulärvektor zum Singulärwert $\sigma_1 = 5$.
Eigenvektor zu $\lambda_2 = 9$ aus der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{abgelesen} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ist der Links-Singulärvektor zum Singulärwert $\sigma_2 = 3$.

4. Daraus entstehen Matrix $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und die Singulärwert Matrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Eigenwerte $\boldsymbol{\lambda}$** von $\boldsymbol{A^T A}$ sind gleich wie von $\boldsymbol{AA^T}$:

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Da für zwei beliebige Matrizen die Eigenwerte von $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ gleich sind, hat auch $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 9$.

6. **Rechts-Singulärvektoren** von $\boldsymbol{A}$:

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 25$ aus der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \text{ Zeilenstufenform } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ damit } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der Singulärvektor zum Singulärwert $\sigma_1 = 5$.
Eigenvektor zu $\lambda_2 = 9$ aus der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ Zeilenstufenform } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ damit } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

der Singulärvektor zum Singulärwert $\sigma_2 = 3$.
$\mathbf{v}_3 = [a, b, c]^\mathsf{T}$ wird senkrecht zu $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ gewählt und auf die Länge Eins normiert:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_3 = a + b \\ 0 &= \mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{v}_3 = a - b + 4c \\ 1 &= \mathbf{v}_3^\mathsf{T}\mathbf{v}_3 = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned} \qquad \text{damit} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7. Daraus entsteht Matrix $\boldsymbol{V}$:

$$\text{Somit lautet die orthogonale Matrix } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \end{bmatrix}$$

8. Und somit ist **SVD** vollständig:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\mathsf{T}}$$

Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Ziel ist es **redundante Daten auszuschliessen** und dabei **möglichst wenig Informationen zu verlieren**.

Datenmatrix $\tilde{X}$

Die Datenmatrix beinhaltet die **Datensätze** in Zeilen unterteilt.
(Pro Zeile einen Datensatz [x y z])

Zentrierte Datenmatrix

Für die Berechnung der **Kovarianzmatrix** muss die **Datenmatrix zentriert** sein.

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}}$$

Wobei $\boldsymbol{M}$ die zentrierende Matrix ist.

Kovarianzmatrix

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ anhand der **zentrierten Datenmatrix** $\boldsymbol{X}$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{m-1}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$$

Eigenwertzerlegung

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$$