LIAL Formelsammlung

Kim Jeker

10. Januar 2023

Algebra

Brüche

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$a\div\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b} \qquad \frac{a/b}{c/d}=\frac{ad}{bc}$$

Binomische Formeln

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab\pm b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

Binominalkooefizienten

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Quadratische Gleichungen

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Potenzen

$a^0=1, \qquad 0^0$: undefiniert

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$
$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$$
$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n, \qquad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Wurzeln

$$a\sqrt[n]{x}\pm b\sqrt[n]{x}=(a\pm b)\sqrt[n]{x}$$
$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$
$$\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \qquad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$
$$\sqrt[n]{a^n}=|a|$$

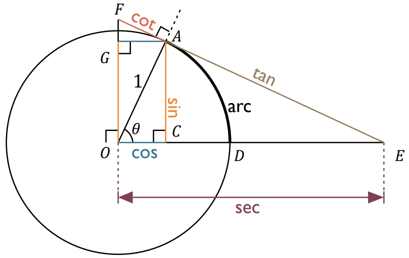
Logarithmen

$$\log_b a=x \quad\Leftrightarrow\quad b^x=a$$
$$\log_b b=1, \qquad \log_b 1=0$$
$$\log_b(m\cdot n)=\log_b m+\log_b n$$
$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b m-\log_b n$$
$$\log_b(m\pm n)\neq\log_b(m)\pm\log_b(n)$$
$$\log_b a^p=p\cdot\log_b a$$
$$\log_b\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\cdot\log_b a$$

Summen

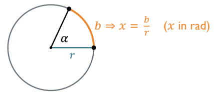
$$\sum_{n=s}^{t}f(n)\pm\sum_{n=s}^{t}g(n)=\sum_{n=s}^{t}(f(n)\pm g(n))$$
$$\sum_{n=s}^{t}c\cdot f(n)=c\cdot\sum_{n=s}^{t}f(n)$$
$$\sum_{n=s}^{t}f(n)=\sum_{n=s+p}^{t+p}f(n-p)$$
$$\sum_{n=s}^{t}f(n)=\sum_{n=s}^{j}f(n)+\sum_{n=j+1}^{t}f(n)$$

Trigonometrie



Bogenmass

$$x=\frac{\alpha\cdot\pi}{180^\circ}$$



Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$
$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\tan(\arcsin(x))=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Doppelter Winkel

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)=\frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$
$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1$$
$$\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

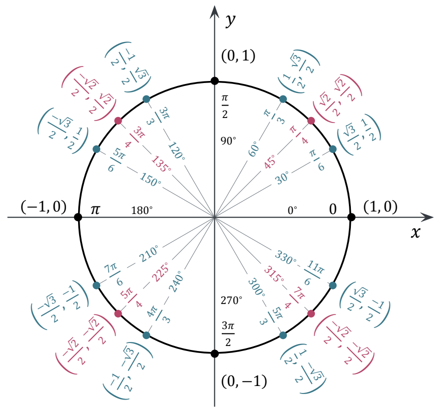
Dreifacher Winkel

$$\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$$
$$\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\sin(x)$$
$$\tan(3x)=\frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}$$

Halber Winkel

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad x\in[0,2\pi]$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad x\in[-\pi,\pi]$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$\sin(x)$	–	$\sqrt{1-\cos^2(x)}$	$\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
$\cos(x)$	$\sqrt{1-\sin^2(x)}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
$\tan(x)$	$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$	–



Vektorgeometrie

Vektoren (in $\mathbb{R}^2$)

$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$

$\vec{n}_a = \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix}$ (Normalenvektor auf $\vec{a}$)

Vektoren (in $\mathbb{R}^n$)

$\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (Einheitsvektor von $\vec{a}$)

$\vec{b}_p = (\vec{b} \bullet \vec{e}_a)\vec{e}_a$ (orthogonale Projektion auf $\vec{a}$)

Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta) = \sum_{i=x,y,z} a_i b_i$$

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Geraden, Ebenen & Strukturen

$G: \vec{r} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$

$E: \vec{r} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$R: \vec{r} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \omega\vec{w}$

$$X: \vec{r} = \vec{p} + \sum_{i=1}^{n_x} (\psi_i \vec{x}_i)$$

$\vec{r}, \vec{p}, \vec{x}_i \in \mathbb{R}^{n_r}, \psi_i \in \mathbb{R}$

Schnittmenge

$X_1 = X_2$

Gleichsetzten, **unterschiedliche Parameternamen** ($\lambda, \mu, \ldots$) wählen, nach Parameter lösen

Matrizen

Matrix

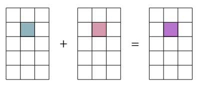
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{\overset{i\text{-te Zeile}}{i}, \underset{j\text{-te Spalte}}{j}}) \in \mathbb{R}^{\overset{\text{Zeilen}}{m} \times \underset{\text{Spalten}}{n}}$$

Matrixaddition

$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$


[2]

$a(A + B) = aA + aB$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

Skalarmultiplikation

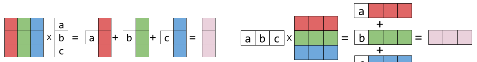
$\lambda A = (\lambda a_{i,j}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Vektor-Matrix Multiplikation

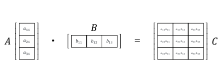
$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad \vec{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^m$

$\vec{y} = (y_i) \in \mathbb{R}^l$

$$A\vec{x} = \vec{y} = (y_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \cdot x_j$$

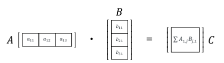

[1]

Skalarprodukt und dyadisches Produkt



$ab^T, \quad a, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Dyadisches Produkt



$a^T b, \quad a, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Skalarprodukt

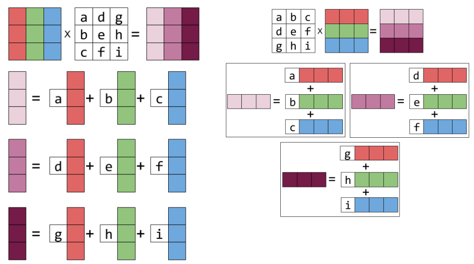
Matrix-Matrix Multiplikation

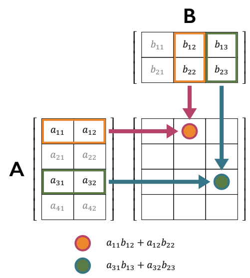
$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad B = (b_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n},$

$C = (c_{i,k}) \in \mathbb{R}^{l \times n}$

$$A \cdot B = C = (c_{i,k}) = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \cdot b_{j,k}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A, \qquad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$





[1]

Wichtig: Anzahl Spalten m von **A** und Zeilen m von **B** müssen übereinstimmen! Resultat hat l Zeilen und n Spalten

Einheitsmatrix

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad IA = AI = A, \qquad \det(A) = 1$

Transponierte Matrix

$A^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g & j \\ b & e & h & k \\ c & f & i & l \end{bmatrix}$

$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$(A^T)^T = A$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Quadratische Matrix

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A\vec{x} = \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(bildet $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ab, Dimensionen bleiben erhalten)

Rechteckige Matrix

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$A\vec{x} = \vec{y}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$

(bildet $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ab, Dimensionen werden reduziert/erweitert)

Symetrische Matrix

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

$A^T = A \quad \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\forall B \in \mathbb{R}^{m \times n}: \quad (B^T B)^T = B^T B$

(jede beliebige Matrix mal ihrer Transponierten ist symetrisch)

Diagonalmatrix

$A = \operatorname{diag}(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(Achsenspiegelung oder Skalierung)

Orthogonale Matrix

$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A^{-1} = A^T, \qquad \det(A) = \pm 1$

Skalarprodukt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = (A\vec{a}) \bullet (A\vec{b}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

(Zeilen- & Spaltenvektoren orthonormal, Drehung oder Spiegelung, lässt Winkel und Längen **unverändert**)

Positiv-Definite Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq \vec{0}:$

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0$$

Die quadratische Matrix $A^T A$

Jede beliebige Matrix **A** multipliziert mit ihrer Transponierten A^T ist symetrisch. Zudem gilt wenn **A** linear unabhängige Spalten hat: $A^T A$ ist invertierbar und positiv-definite.

Inverse Matrix

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

$(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

$(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\boxed{\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}}$$

Nur quadratische Matrizen können invertierbar sein, da $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ gelten muss.

Cramersche Regel

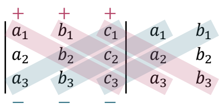
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$

Determinanten

Determinanten

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \lambda_i : \text{Eigenwerte}$$

$\det(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \det(\mathbf{A})$

$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

$\det(c \cdot \mathbf{A}) = c^n \cdot \det(\mathbf{A}), \quad c \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

$\det(\mathbf{I}) = 1$

Spur (tr)

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \lambda_i : \text{Eigenwerte}$$

$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$

$\text{tr}(c\mathbf{A}) = c\,\text{tr}(\mathbf{A})$

$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$

Vektorräume

Axiome von Vektorräumen

$V1: \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}: \qquad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

$V2: \forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}: \qquad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

$V3: \exists\ \vec{0} \in \mathbf{V},\ \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V}: \qquad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

$V4: \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V},\ \exists\ (-\vec{x}) \in \mathbf{V}: \qquad \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

$S1: \forall\ \lambda, \mu \in \mathbf{S},\ \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V}: \qquad (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$

$S2: \exists\ 1 \in \mathbf{S},\ \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V}: \qquad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$D1: \exists\ \lambda \in \mathbf{S},\ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}: \qquad \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$

$D2: \exists\ \lambda, \mu \in \mathbf{S},\ \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V}: \qquad (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$

Wichtig: Ein Vektorraum muss zwingend den Nullvektor enthalten.

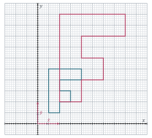
Axiome von Untervektorräumen

$U0: \qquad \mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$

$U1: \forall\ \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbf{U}: \qquad \vec{v} + \vec{w} = \vec{z}$

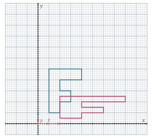
$U2: \forall\ \vec{v}, \vec{z} \in \mathbf{U}, \forall\ c \in \mathbb{R}: \qquad c\vec{v} = \vec{z}$

Abbildungen, Transformationen & Projektionen



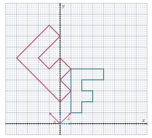
Skalierung (symetrisch)

$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$



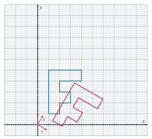
Skalierung (asymetrisch)

$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$



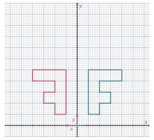
Drehstreckung

$\begin{bmatrix} 1 & -s \\ s & 1 \end{bmatrix}$



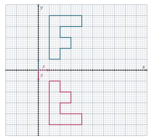
Drehung

$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



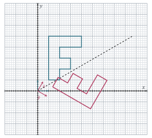
y-Spiegelung

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



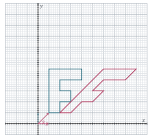
x-Spiegelung

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



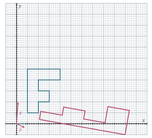
Spiegelung

$\begin{bmatrix} \cos(2\cdot\theta) & \sin(2\cdot\theta) \\ \sin(2\cdot\theta) & -\cos(2\cdot\theta) \end{bmatrix}$



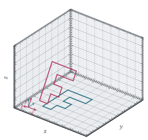
Scherung

$\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$



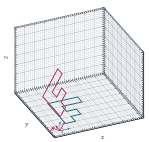
Kombination

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$



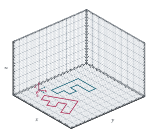
x-Achse

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



y-Achse

$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



z-Achse

$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Axiome von linearen Abbildungen

$\mathbf{A}$: Abbildung, $\qquad D, W$: Vektorräume

$A1: \quad \forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D: \qquad \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{v})$

$A2: \quad \forall\ s \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in D: \qquad \mathbf{A}(s \cdot \mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{v})$

Homogene Koordinaten

Lineare Abbildungsmatrix (z.b. Rotation)

Translationsvektor

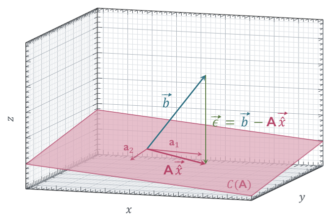
$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & u \\ c & d & v \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} ax + by \ + u \\ cx + dy \ + v \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

Orthogonale Projektion auf Vektor a

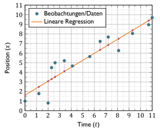
$\mathbf{P} = \dfrac{1}{\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times 1},\ \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Orthogonale Projektion auf Spaltenraum $C(\mathbf{A})$

$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$



Lineare Regression



Einfache lineare Regression

1. Datenpunkte als Matrix **A** und Vektor $\vec{b}$ aufstellen

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

2. Regressionsproblem lösen

   $\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \vec{\hat{x}} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\vec{b}$

3. Regressionsgerade berechnen

   $b = \hat{C} + \hat{D}t$

4. Fehler/Restabweichung berechnen

   $\vec{\epsilon} = \vec{b} - \mathbf{A}\vec{\hat{x}}$ $\quad$ $\mathrm{SQR} = |\vec{\epsilon}|^2$

Multiple lineare Regression

1. Datenpunkte als Matrix **X** und Vektor $\vec{y}$ aufstellen

   $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n} \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

2. Regressionsproblem lösen

   $\vec{\hat{b}} = (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\vec{y}$

3. Regressionshyperebene berechnen

   $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = \mathbf{x}^\mathsf{T}\vec{\hat{b}}$

4. Projektions-/Prädiktionsmatrix berechnen

   $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} \quad \Rightarrow \quad \vec{\hat{y}} = \mathbf{P}\vec{y}$

5. Fehlervektor/Residualmatrix berechnen

   $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$

   $\vec{\epsilon} = \vec{y} - \vec{\hat{y}} = \mathbf{Q}\vec{y}$

6. Fehler & Bestimmtheitsmass R^2 berechnen

   $\mathrm{SQR} = \vec{\epsilon}^{\,\mathsf{T}}\vec{\epsilon}$

   $\mathrm{SQT} = \mathrm{SQE} + \mathrm{SQR} = \vec{y}^{\,\mathsf{T}}\mathbf{M}\vec{y} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{I} - \frac{1}{m}\mathbb{1}$

   $R^2 = \frac{\mathrm{SQT} - \mathrm{SQR}}{\mathrm{SQT}} = 1 - \frac{\mathrm{SQR}}{\mathrm{SQT}} = \frac{\mathrm{SQE}}{\mathrm{SQT}}$

Eigenwerte & Eigenvektoren

Eigenwerte & Eigenvektoren

$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \qquad \lambda \neq 0, \ \vec{v} \neq \vec{0}$

Eigenvektoren $\vec{v}_i$ ändern ihre Richtung unter der Abbildung **A** nicht, sonder änder nur ihre Länge um den Faktor ihres Eigenwerts λ_i

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Eigenwertproblem

1. Eigenwerte durch lösen des charakteristischen Polynoms berechnen

   $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad \lambda \neq 0$

2. Zu jedem Eigenwert λ_i den Eigenvektor $\vec{v}_i$ durch lösen des homogenen linearen Gleichungssystems berechnen

   $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\vec{v}_i = \vec{0}, \qquad \vec{v}_i \neq \vec{0}$

Spektralzerlegung

$$\mathbf{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^\mathsf{T}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \vec{v}_i^\mathsf{T}$$

Potenzieren von Matrizen

$\mathbf{A}^n = \mathbf{V}\Lambda^n\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\Lambda^n\mathbf{V}^\mathsf{T}$

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m^n \end{bmatrix}$$

Singulärwerte

Singulärwertzerlegung

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\mathsf{T}}$$

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{V}\Sigma^2\mathbf{V}^\mathsf{T}$

$\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{U}\Sigma^2\mathbf{U}^\mathsf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{V}\Sigma^{-1}$

1. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ berechnen und das Eigenwertproblem für beide Matrizen lösen um **V**, **U** und Σ^2 zu bestimmen.
2. Singulärwerte $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ aus den Eigenwerten λ_i berechnen und die Singulärwertmatrix Σ bilden.

Glossar

H | O

H

Homogenes linearen Gleichungssystem Ein Gleichungssystem, bei dem die rechte Seite der Gleichungen Null ist. In Matrixschreibweise also $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ 5

O

orthogonal Zwei Vektoren heissen orthogonal, wenn sie Senkrecht aufeinander stehen (ihr Skalarprodukt ist 0). 6

orthonormal Vektoren heissen orthonormal, wenn sie orthogonal und normiert sind, d.h. die Länge 1 haben und paarweise Senkrecht aufeinander stehen (ihr Skalarprodukt ist 0). 3

Literatur

[1] Bendersky Eli. *Visualizing Matrix Multiplication as a Linear Combination*. Eli Bendersky's website. 15. März 2015. URL: https://eli.thegreenplace.net/2015/visualizing-matrix-multiplication-as-a-linear-combination/ (besucht am 11. 10. 2022).

[2] Quartl. *Illustration of the Addition of Two Matrices*. 7. Sep. 2013. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Matrix_addition_qtl2.svg (besucht am 30. 10. 2022).

Disclaimer

The author assumes no responsibility for the topicality, correctness, completeness or quality of information provided in this document. This document is intended for educational purposes only.