ANLIS Formelsammlung

Kim Jeker

19. Januar 2023

Funktionen, Ableitungen und Stammfunktionen

← **Integrieren**

Differenzieren →

$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$f'(x)$
$cx + c_I$	$c, \qquad c \in \mathbb{R}$	0
$\frac{cx^2}{2} + c_I$	$c \cdot x$	c
$c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
$\int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c_I, \qquad \alpha \neq -1$	$x^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{c_k x^{k+1}}{k+1} \right) + c_I$	$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$	$\sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}$
$e^x + c_I$	e^x	e^x
$-e^{-x} + c_I$	e^{-x}	$-e^{-x}$
$\frac{a^x}{\ln a} + c_I$	a^x	$a^x \ln(a)$
$x \ln x - x + c_I$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln(\lvert x \rvert) + c_I$	$\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{x \ln(x) - x}{\ln(b)} + c_I$	$\log_b(x)$	$\frac{1}{x \ln(b)}$
$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_I$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c_I$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$-\cos x + c_I$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + c_I$	$\cos x$	$-\sin x$
$-\ln(\cos(x)) + c_I$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$x \arcsin(x) + \sqrt{-x^2+1} + c_I$	$\arcsin x, \qquad x \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{-x^2+1} + c_I$	$\arccos x, \qquad x \in [-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + c_I$	$\arctan x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh(x) + c_I$	$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\cosh x$
$\sinh(x) + c_I$	$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\sinh x$
$\ln(\cosh(x)) + c_I$	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + c_I$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$x \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + c_I$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$x \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln\left(-x^2+1\right) + c_I$	$\operatorname{artanh} x, \qquad x \in [-1, 1]$	$\frac{1}{x^2-1}$

Algebra

Brüche

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$a\div\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b} \qquad \frac{a/b}{c/d}=\frac{ad}{bc}$$

Binomische Formeln

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

Binominalkooefizienten

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Quadratische Gleichungen

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Potenzen

$a^0=1, \qquad 0^0$: undefiniert

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n, \qquad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Wurzeln

$$a\sqrt[n]{x}\pm b\sqrt[n]{x}=(a\pm b)\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \qquad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|$$

Logarithmen

$$\log_b a=x \quad\Leftrightarrow\quad b^x=a$$

$$\log_b b=1, \qquad \log_b 1=0$$

$$\log_b(m\cdot n)=\log_b m+\log_b n$$

$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b m-\log_b n$$

$$\log_b(m\pm n)\neq\log_b(m)\pm\log_b(n)$$

$$\log_b a^p=p\cdot\log_b a$$

$$\log_b\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\cdot\log_b a$$

Summen

$$\sum_{n=s}^{t}f(n)\pm\sum_{n=s}^{t}g(n)=\sum_{n=s}^{t}(f(n)\pm g(n))$$

$$\sum_{n=s}^{t}c\cdot f(n)=c\cdot\sum_{n=s}^{t}f(n)$$

$$\sum_{n=s}^{t}f(n)=\sum_{n=s+p}^{t+p}f(n-p)$$

$$\sum_{n=s}^{t}f(n)=\sum_{n=s}^{j}f(n)+\sum_{n=j+1}^{t}f(n)$$

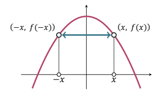
Funktionen

Nullstellen & Ordinatenabschnitt

$y_0=f(x_0)=0 \qquad y_s=f(0)$

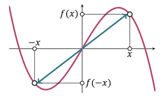
Gerade Funktion

$f(x)=f(-x)$



Ungerade Funktion

$f(x)=-f(-x)$



Geradengleichung

$y=mx+b \qquad ax+by+c=0$

Gerade durch $P_0\ (x_0;\ y_0)$ mit Steigung m

$$y=m\cdot(x-x_0)+y_0$$

Gerade durch $P_0\ (x_0;\ y_0)$ & $P_1\ (x_1;\ y_1)$

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)+y_0$$

Senkrechte Gerade auf $y=mx+b$

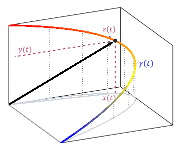
$$y=-\frac{1}{m}\cdot x+c$$

Senkrechte Gerade auf $y=m(x-x_0)+y_0$ & Schnittpunkt $P_0\ (x_0;\ y_0)$

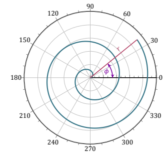
$$y=-\frac{1}{m}\cdot(x-x_0)+y_0$$

Darstellung in Parameterform

$$\vec{\gamma}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}$$



Kartesisch zu Polarkoordinaten



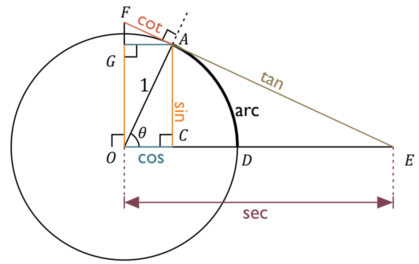
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Polar- zu kartesischen Koordinaten

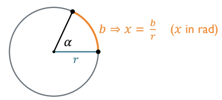
$x=r\cdot\cos(\phi), \qquad y=r\cdot\sin(\phi)$

Trigonometrie



Bogenmass

$$x=\frac{\alpha\cdot\pi}{180°}$$



Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\tan(\arcsin(x))=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$\sin(x)$	–	$\sqrt{1-\cos^2(x)}$	$\dfrac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
$\cos(x)$	$\sqrt{1-\sin^2(x)}$	–	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
$\tan(x)$	$\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$	–

Quadrant	Intervall	sin (φ)	cos (φ)	tan (φ)
I	0° < φ < 90°	+	+	+
II	90° < φ < 180°	+	−	−
III	180° < φ < 270°	−	−	+
IV	270° < φ < 360°	−	+	−

Additionstheoreme

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Doppelter Winkel

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

Dreifacher Winkel

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\sin(x)$$

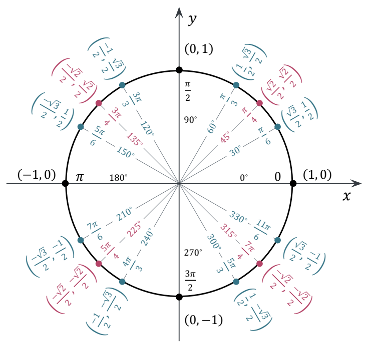
$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}$$

Halber Winkel

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad x\in[0,2\pi]$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad x\in[-\pi,\pi]$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$



Vektorgeometrie

Vektoren (in $\mathbb{R}^2$)

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

$$\vec{n_a} = \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix} \quad \text{(Normalenvektor auf } \vec{a}\text{)}$$

Vektoren (in $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{(Einheitsvektor von } \vec{a}\text{)}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\theta) = \sum_{i=x,y,z} a_i b_i$$

$$\vec{a}\bullet\vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right)$$

Folgen und Reihen

Arithmetische Folge (AF)

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$$

$$a_1 = a_n - d\cdot(n-1)$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$d = a_n - a_{n-1} = \frac{a_k - a_n}{k-n}, \quad k > n$$

Arithmetische Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{d\cdot n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

(divergiert immer)

Geometrische Folge (GF)

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \qquad a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

$$a_{n+1} = a_n\cdot q$$

$$(a_{n-1})^2 = a_{n-2}\cdot a_n$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt[k-n]{\frac{a_k}{a_n}}, \quad k > n$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1}(a_1\cdot q^k) = \frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_1\cdot q^k) = \frac{a_1}{1-q}, \quad \text{falls } |q| < 1$$

(konvergiert für $|q| < 1$)

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{bzw.} \quad R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}}$$

a_k: Koeffizienten, x_0: Entwicklungspunkt, R: Konvergenzradius

Rechenregeln von Folgen

$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) = \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$(a_n) + (b_n) = a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$$

Konvergenzkriterien

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \qquad \rho = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$$

$\rho < 1$ konvergiert, $\rho > 1$ divergiert, $\rho = 1$ keine Aussage

Leibnizkriterium für alternierende Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert, falls:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^k a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}((-1)^k a_k)\right| \leq a_n$$

Grenzwerte

Existenz eines Grenzwerts

$$L = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Rechenregeln

Für $\lim_{x\to n} f(x) = L_f, \quad \lim_{x\to n} g(x) = L_g$:

$$\lim_{x\to n} c = c, \qquad \lim_{x\to n} x = n$$

$$\lim_{x\to n} c\cdot f(x) = c\cdot L_f$$

$$\lim_{x\to n} (f(x)\pm g(x)) = L_f \pm L_g$$

$$\lim_{x\to n} (f(x)\cdot g(x)) = L_f \cdot L_g$$

$$\lim_{x\to n} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g}, \quad L_g \neq 0$$

$$\lim_{x\to n} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to n} g(x)\right) = f(L_g)$$

↳ für stetige Funktionen f, g, z.B. $e^x, \ln(x), \sin(x), \sqrt{x}, |x|, \ldots$

Rationale Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Grad des Zähler- (n) und Nennerpolynoms (m) verglei-chen, höchtgradiges Monom ausschlaggebend:

$n < m$: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0$

$n = m$: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}$ ⇒ Verhältniss Koeffizienten

$n > m$: $= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a}{b}x^{n-m}\right)$ ⇒ ∞ oder $-\infty$

Nützliche Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty^{\pm}} \frac{1}{n} = \pm\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^k e^{-n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad (a>0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{a_1}^n + \ldots + {a_p}^n} = \max(a_1 + \ldots + a_p)$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{\sin(c\cdot\theta)}{c\cdot\theta} = 0$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(c\cdot\theta)}{c\cdot\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0} \frac{c\cdot\theta}{\sin(c\cdot\theta)}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(c\cdot\theta)}{c\cdot\theta} = 0$$

Squeezing-Theorem

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

$\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L$

Regel von de l'Hôpital (0/0, ∞/∞ etc. . .)

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$0\cdot\infty : f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$$0^0, \infty^0, 1^{\infty} : f(x)^{g(x)} \rightarrow g(x)\cdot\ln(f(x))$$

Differentialrechnung

Stetigkeit

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Differenzierbarkeit

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Tangentengleichung

$$y_t = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Ableitungsregeln

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c\cdot f(x)) = c\cdot f'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = u'+v'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\cdot v) = u'v+uv'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\cdot v\cdot w) = u'vw+uv'w+uvw'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Abkürzungen: $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$

Implizite Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y(x)) = 0$$

gliedweise Ableiten, y ⇒ Funktion von x, anschliessend nach y' auflösen

Logarithmische Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

↳ dann nach f' auflösen

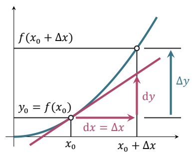
Linearisierung

$$y_0 + \Delta y = f(x_0+\Delta x)$$

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \Delta x \;\Rightarrow\; \Delta y \approx \mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}, \text{ (relativer Fehler)}$$



Rechenregeln Differentiale

$$\mathrm{d}[c] = 0$$

$$\mathrm{d}[cf] = c\cdot \mathrm{d}f$$

$$\mathrm{d}[f\pm g] = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}[f\cdot g] = \mathrm{d}f\cdot g + f\cdot \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{\mathrm{d}f\cdot g - f\cdot\mathrm{d}g}{g^2}$$

Ableitung von Kurven mit Polarkoordinaten

$$x(\phi) = r(\phi)\cos(\phi), \qquad y(\phi) = r(\phi)\sin(\phi)$$

$$y'(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}} = \frac{\dot r(\phi)\sin(\phi) + r(\phi)\cos(\phi)}{\dot r(\phi)\cos(\phi) - r(\phi)\sin(\phi)}$$

Ableitung von Kurven in Parameterdarstellung (Tangentialvektor)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{bmatrix}$$

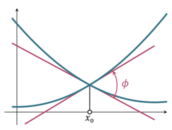
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\dot y}{\dot x}$$

↳ für $f(x)$ mit dem gleichen Graphen wie $\vec{x}(t)$

Steigung Tangente Steigung Tangentialvektor

Schnittwinkel von zwei Kurven

$$\tan(\phi) = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}$$



Krümmung κ und Krümmungsradius ρ

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1+(f'(x))^2}\right)^3}, \qquad \rho(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|}$$

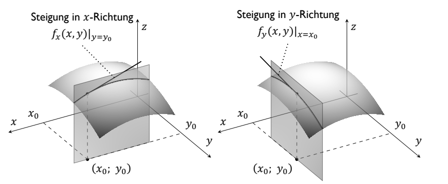
Krümmungskreismittelpunkt

$$\vec{x}_{\mathrm{M}}(x) = \vec{x}(x) + \frac{1}{\kappa(x)} \cdot \frac{\vec{n}(x)}{|\vec{n}(x)|}$$

$$\vec{x}_{\mathrm{M}}(x) = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{M}}(x) \\ y_{\mathrm{M}}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y'(x) \cdot \dfrac{1+(y'(x))^2}{y''(x)} \\ y(x) + \dfrac{1+(y'(x))^2}{y''(x)} \end{bmatrix}$$

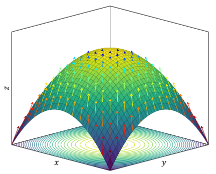
Normale $\vec{n}(x) = \begin{bmatrix} -y'(x) \\ 1 \end{bmatrix}$

Mehrdimensionale Differentialrechnung



Gradient

$$\nabla f(\vec{x}) = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix}$$



Richtungsableitung

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x_0}) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\vec{x_0} + t \cdot \vec{e}) - f(\vec{x_0})}{t}$$

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \bullet \vec{e} = \left|\nabla f(\vec{x_0})\right| \cdot \cos(\phi)$$

Jacobi-Matrix

$$J_f(\vec{x_k}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{x_1,\dots,x_n} F_1,\dots,F_n$$

Totales Differential

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f = f_x(a,b)\,\mathrm{d}x + f_y(a,b)\,\mathrm{d}y$$

$$\Delta f = \Delta z = f(a+\mathrm{d}x, b\,\mathrm{d}y) - f(a,b)$$

Linearisierung/Tangentialebene

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$$f(\vec{x}) \approx L(\vec{x_0}) = f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x_0}) \bullet (\vec{x} - \vec{x_0})$$

Tangenten an Konturlinien

$$\nabla f(\vec{x_0}) \bullet (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$$

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

Tangentialebene an Konturflächen

$$\nabla f(\vec{x_0}) \bullet (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$$

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Matrizen

Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Determinanten

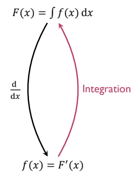
$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Cramersche Regel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\, \mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

Integralrechnung



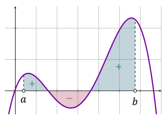
Stammfunktionen

$$F'(x) = f(x)$$

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$



Unbestimmtes Integral

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c_I = I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Wichtig: $+c_I$ nicht vergessen

Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + c_I$$

$$\Rightarrow I'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Rechenregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

u-Substitution

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{\substack{u=g(x) \\ \mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x}}$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

x-Substitution

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{\substack{t=\phi^{-1}(x) \\ \mathrm{d}x=\phi'(t)\mathrm{d}t}}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Partielle Integration

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitutionen

Integraltyp	Substitution
$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$	$u = ax+b$ $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{a}$
$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$	$u = f(x)$ $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$	$u = f(x)$ $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$
$\int f(x; \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cdot\sin(u)$ $\mathrm{d}x = a\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos(u)$
$\int f(x; \sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cdot\sinh(u)$ $\mathrm{d}x = a\cdot\cosh(u)\,\mathrm{d}u$ $\sqrt{x^2+a^2} = a\cdot\cosh(u)$
$\int f(x; \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cdot\cosh(u)$ $\mathrm{d}x = a\cdot\sinh(u)\,\mathrm{d}u$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh(u)$

Mittelwerte

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\phi)]^2+[r'(\phi)]^2}\,\mathrm{d}\phi$$

$$L = \int_a^b \left|\vec{x}(t)\right|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

Taylor-Polynom & -Reihe

Taylor-Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

Numerische Verfahren

Newton-Raphson

$$f(x_k)\approx 0, f(x_k)\geq f(x_{k+1})$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Disclaimer

The author assumes no responsibility for the topicality, correctness, completeness or quality of information provided in this document. This document is intended for educational purposes only.