Applied Statistics for Data Science

Serie 4

Aufgabe 4.1

Bestimmen Sie die Korrelationskoeffizienten der Aufgaben in Serie 3 und interpretieren Sie die Resultate und vergleichen Sie ihre Interpretation mit dem Streudiagramm.

Aufgabe 4.2

a) Erzeugen Sie den Vektor `t.x` mit den Werten $-10, -9, \dots, 9, 10$ und den Vektor `t.x1` mit den Werten $0, 1, \dots, 9, 10$. Erzeugen Sie dann die Vektoren `t.y` und `t.y1`, deren Elemente die Quadratwerte der entsprechenden Elemente von `t.x` bzw. `t.x1` enthalten.

b) Zeichnen Sie die Streudiagramme `t.y` vs. `t.x` und `t.y1` vs `t.x1`. Benützen Sie die **R**-Funktion

```
plot()
```

c) Berechnen Sie die Korrelationskoeffizienten zwischen `t.x` und `t.y` bzw. zwischen `t.x1` und `t.y1`. Benützen Sie die **R**-Funktion

```
cor()
```

Warum sind die beiden Korrelationen so verschieden?

Aufgabe 4.3

Wo steckt in den folgenden Aussagen der Fehler? Begründen Sie.

a) Bei einer gezinkten Münze wurde festgestellt, dass P(Kopf)$= 0.32$ und P(Zahl)$= 0.73$.

b) Die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser im Zahlenlotto ist $-3 \cdot 10^{-6}$.

c) Bei einer Befragung wurden die Ereignisse untersucht. Man findet $P(S) = 0.1$, $P(M) = 0.5$ und $P(S \cup M) = 0.7$

S: Befragte Person ist schwanger.
M: Befragte Person ist männlich.

Aufgabe 4.4

Bei einem Zufallsexperiment werden ein roter und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir nehmen an, dass sie „fair“ sind, d. h. die Augenzahlen 1 bis 6 eines Würfels treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Beschreiben Sie den Ereignisraum in Form von Elementarereignissen.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Elementarereignisses?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E_1 „Die Augensumme ist 7“ eintritt.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E_2 „Die Augensumme ist kleiner als 4“ eintritt.

e) Bestimmen Sie $P(E_3)$ für das Ereignis E_3 „Beide Augenzahlen sind ungerade“.

f) Berechnen Sie $P(E_2 \cup E_3)$.

Aufgabe 4.5

Die Ereignisse A und B seien unabhängig mit Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 2/3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Beide Ereignisse treten ein.

b) Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

c) Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

d) Keines der beiden Ereignisse tritt ein.

e) Genau eines der Ereignisse tritt ein.

Aufgabe 4.6

Der Einsturz eines Gebäudes in Tokio kann durch zwei voneinander unabhängige Ereignisse verursacht werden.

- E_1: ein grosses Erdbeben
- E_2: ein starker Taifun

Die jährlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind $P(E_1) = 0.04$ und $P(E_2) = 0.08$.

Berechnen Sie die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit des Gebäudes.

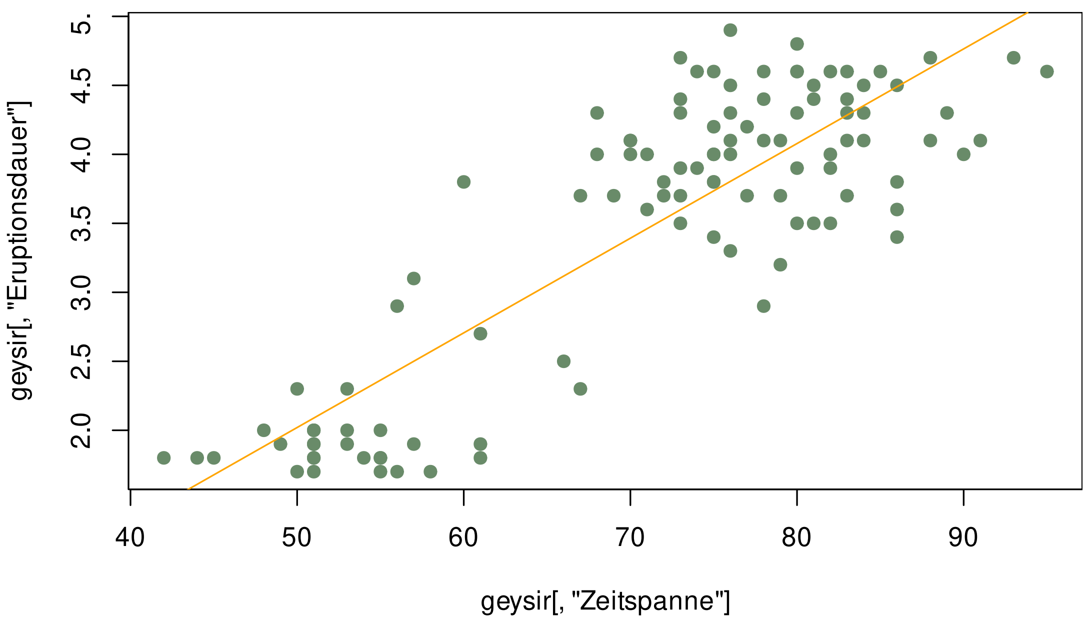
Applied Statistics for Data Science

Musterlösungen zu Serie 4

Lösung 4.1

a) Old Faithful

```
# Datensatz einlesen
geysir <- read.table("./Daten/geysir.dat", header = TRUE)

plot(geysir[, "Zeitspanne"], geysir[, "Eruptionsdauer"],
     pch=19,
     col="darkseagreen4")

abline(lm(geysir[, "Eruptionsdauer"] ~ geysir[, "Zeitspanne"]),
       col="orange")
```

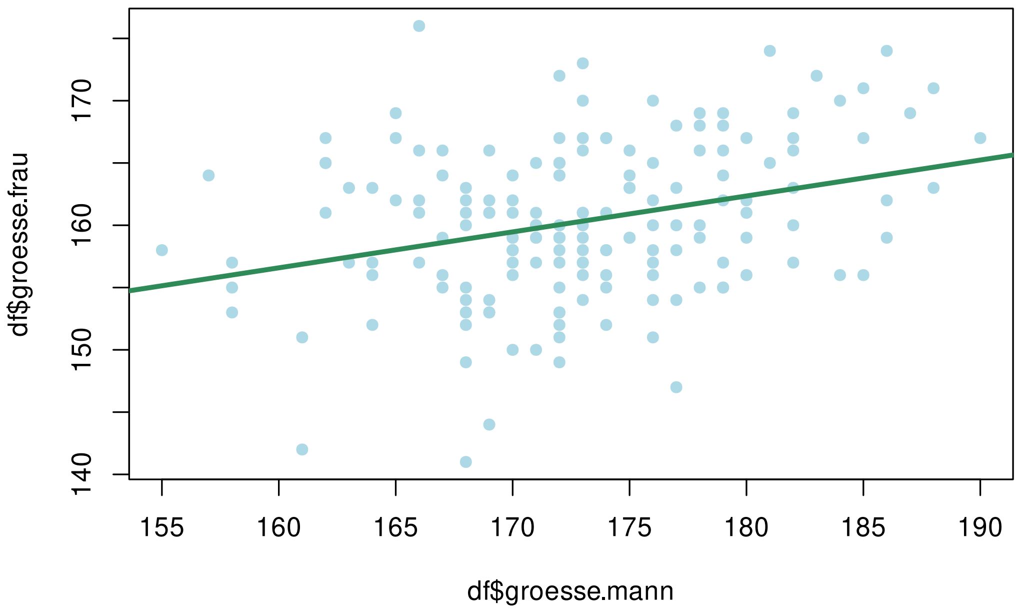



```
cor(geysir[, "Zeitspanne"], geysir[, "Eruptionsdauer"])

## [1] 0.8584273
```

Der Korrelationskoeffizient ist mit 0.85 nahe bei 1. Somit ist die Punktwolke steigend und annähernd linear. Dies stimmt in etwa mit dem Streudiagramm überein.

b) Grössenvergleich von Ehepaaren:

```r
df <- read.csv("~/Dropbox/Statistics/Themen/Deskriptive_Statistik/Uebungen_

plot(df$groesse.mann, df$groesse.frau, col="lightblue", pch=16)

abline(lm(df$groesse.frau~df$groesse.mann), lwd=3, col="seagreen")
```



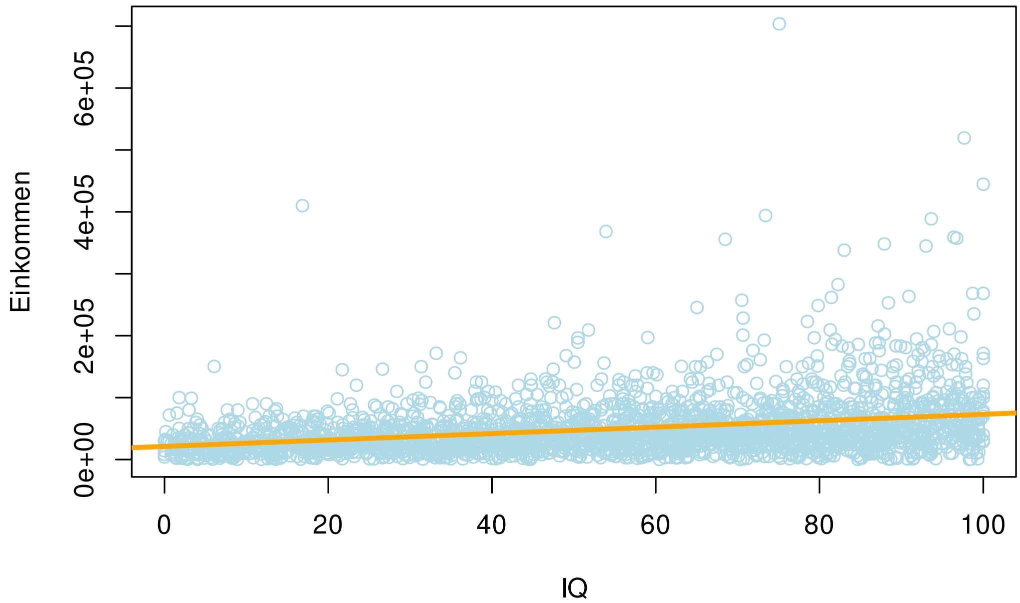

```r
cor(df$groesse.mann, df$groesse.frau)

## [1] 0.3080731
```

Der Korrelationskoeffizient ist 0.308, somit positiv und die Punktwolke steigt auch. Allerdings ist er nicht eher nahe bei 0 und somit ist ein linearer Zusammenhang eher fraglich. Im Streudiagramm ist erkenntlich, dass sehr verstreut ist und kein eindeutiges lineares Muster erkennbar ist.

c) Einkommen

```r
income <- read.table(file="./Daten/income.dat", header=TRUE)


iq <- income[,1]

anzahl.jahre.schule <- income[,2]

einkommen <- income[,3]

plot(iq,
     einkommen,
```

```
     type = "p",
     xlab = "IQ",
     ylab = "Einkommen",
     col = "lightblue"

)

abline(lm(einkommen ~ iq),
       col = "orange",
       lwd = 3)
```

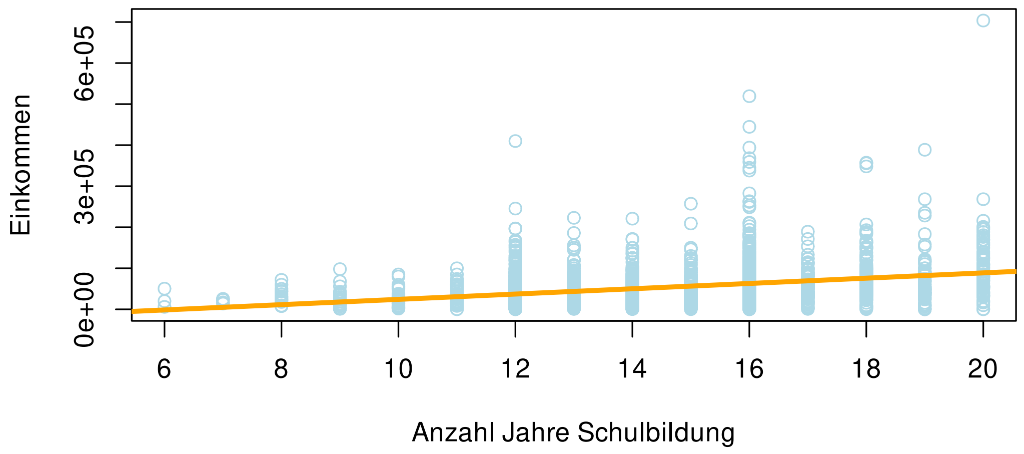



```
cor(iq, einkommen)

## [1] 0.3081529
```

Der Korrelationskoeffizient ist 0.308, somit positiv und die Punktwolke steigt auch. Allerdings ist er nicht eher nahe bei 0 und somit ist ein linearer Zusammenhang eher fraglich. Im Streudiagramm ist erkenntlich, dass sehr verstreut ist und kein eindeutiges lineares Muster erkennbar ist.

```
plot(anzahl.jahre.schule,
     einkommen,
     type= "p",
     xlab = "Anzahl Jahre Schulbildung",
     ylab= "Einkommen",
     col = "lightblue"

)
```

```r
abline(lm(einkommen ~ anzahl.jahre.schule),
       col = "orange",
       lwd = 3)
```



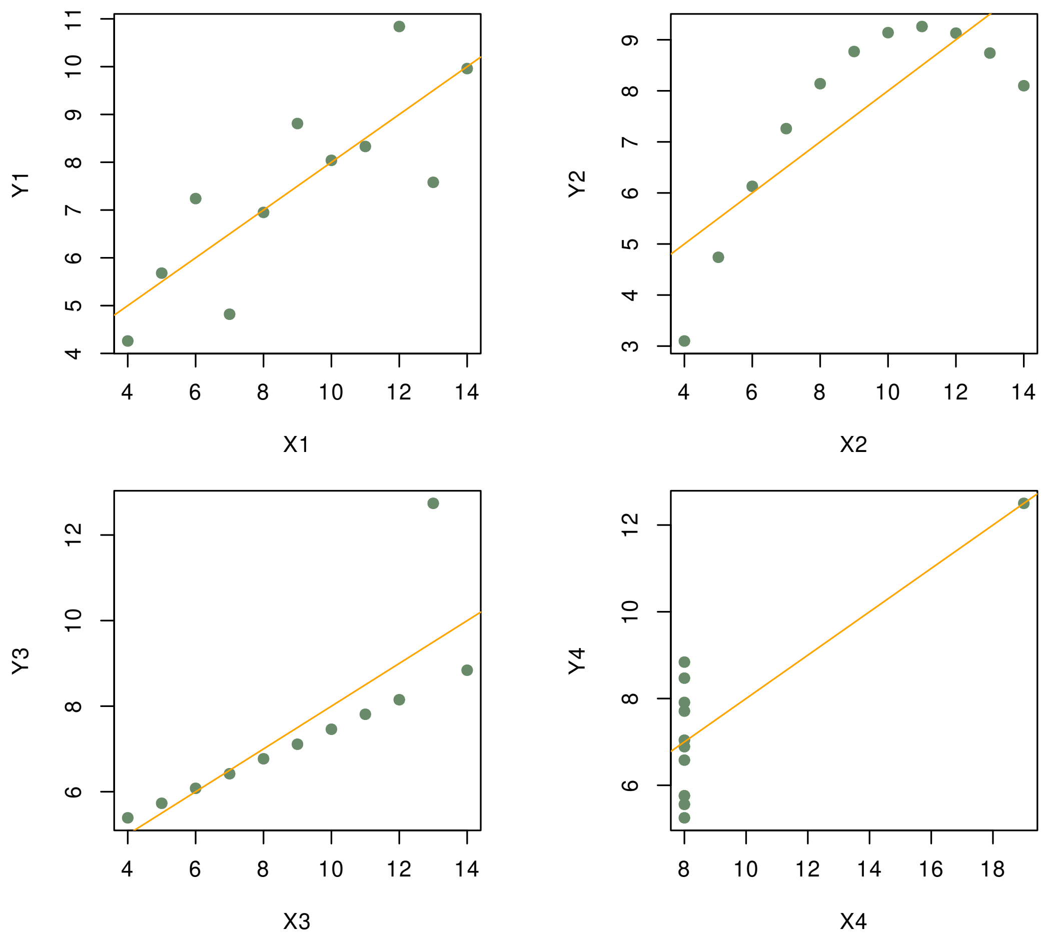

```r
cor(anzahl.jahre.schule, einkommen)

## [1] 0.3456474
```

Da der Korrelationskoeffizient relativ klein ist, scheint ein Modell beruhend auf einem linearen Zusammenhang zwischen Einkommen und Anzahl Jahre Schulbildung nicht angebracht zu sein.

d) Anscombe:

```r
data(anscombe)
reg <- lm(anscombe$y1 ~ anscombe$x1)
reg2 <- lm(anscombe$y2 ~ anscombe$x2)
reg3 <- lm(anscombe$y3 ~ anscombe$x3)
reg4 <- lm(anscombe$y4 ~ anscombe$x4)

par(mfrow = c(2, 2))

plot(anscombe$x1, anscombe$y1,
     ylab = "Y1", xlab = "X1",
     col = "darkseagreen4", pch = 19)
abline(reg, col = "orange")

plot(anscombe$x2, anscombe$y2,
     ylab = "Y2", xlab = "X2",
     col = "darkseagreen4", pch = 19)
abline(reg2, col = "orange")
```

```
plot(anscombe$x3, anscombe$y3,
     ylab = "Y3", xlab = "X3",
     col = "darkseagreen4", pch = 19)
abline(reg3, col = "orange")

plot(anscombe$x4, anscombe$y4,
     ylab= "Y4", xlab= "X4",
     col = "darkseagreen4", pch = 19 )
abline(reg4, col = "orange")
```




```
cor(anscombe$x1, anscombe$y1)

## [1] 0.8164205

cor(anscombe$x2, anscombe$y2)

## [1] 0.8162365

cor(anscombe$x3, anscombe$y3)
```

```
## [1] 0.8162867

cor(anscombe$x4, anscombe$y4)

## [1] 0.8165214
```

Die Korrelationskoeffizienten sind bis auf die dritte Stelle nach dem Komma gleich und mit 0.816 recht nahe bei 1.

Allerdings macht der Korrelationskoeffizient für die verschiedenen Streudiagramme ganz unterschiedlich interpretierbar.

a) Oben links: Das ist der „Normalfall“. Die Punkte folgen der Regressionsgerade gut und weichen nur wenig von dieser ab.

b) Oben rechts: Hier haben wir eine klare Abhängigkeit von $X2$ und $Y2$, aber diese ist nicht linear, sondern quadratisch. Dies hat einen Einfluss auf den Korrelationskoeffzienten, der nur *lineare* Abhängigkeit erkennt.

c) Unten links: Dieser Datensatz hat einen Ausreisser und alle anderen Punkte befinden sich auf einer Gerade. Dieser Ausreisser hat den einen grossen Einfluss auf den Korrelationskoeffizienten.

d) Unten rechts: Dies ist ein „Freak“-Datensatz. Der Korrelationskoeffizient ist hier nicht auch vernünftige Weise interpretierbar, er macht keinen Sinn.

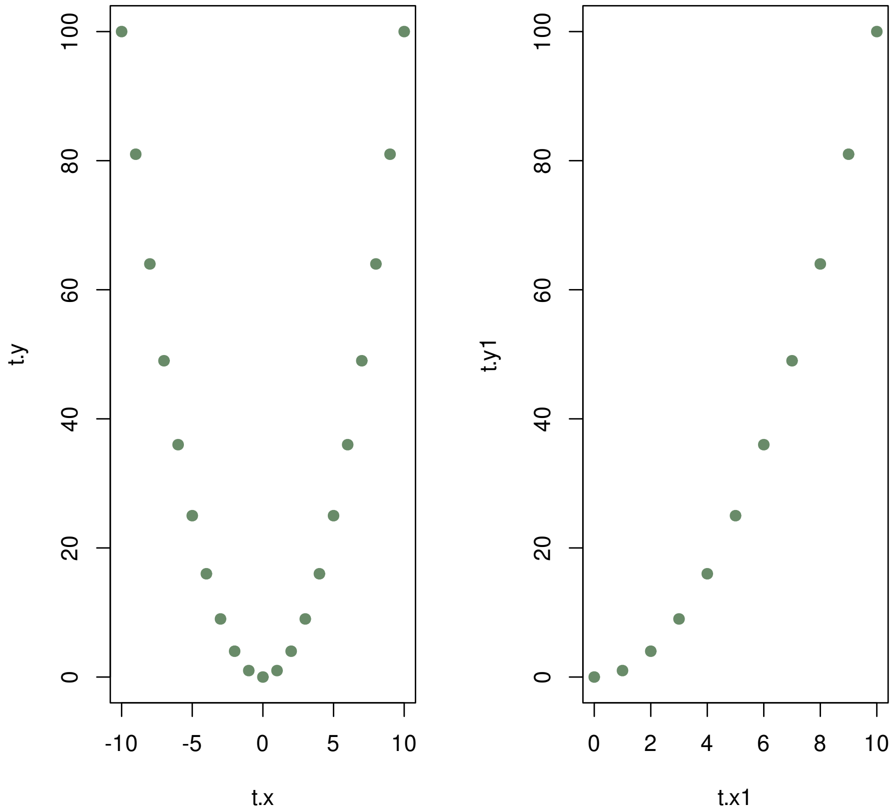
Lösung 4.2

a) Erzeugen der Vektoren:

```
t.x <- (-10):10
t.x1 <- 0:10
t.y <- t.x^2
t.y1 <- t.x1^2
```

b)

```
par(mfrow=c(1,2)) # zwei Grafiken im Grafikfenster
plot(t.x, t.y, col = "darkseagreen4", pch = 19)
plot(t.x1, t.y1, col = "darkseagreen4", pch = 19)
```



c)
```
cor(t.x,t.y)

## [1] 0

cor(t.x1,t.y1)

## [1] 0.9631427
```

Die Korrelation zwischen `t.x` und `t.y` ist 0, weil die Daten symmetrisch zur y-Achse liegen. Im zweiten Fall ist die Korrelation hoch (0.96), obwohl die Daten keine lineare Beziehung aufweisen. Der Grund dafür ist, dass x und y monoton steigen.

Lösung 4.3

a) Da Zahl und Kopf die möglichen Elementarereignisse sind, müsste die Summe deren Wahrscheinlichkeiten 1 sein. Dies ist hier aber nicht der Fall: $P(\Omega) = P(\text{Zahl}) + P(\text{Kopf}) = 1.05$.(Axiom 2 ist verletzt.)

b) Die genannte Wahrscheinlichkeit ist negativ. (Axiom 1 ist verletzt.)

c) Es gilt $S \cap M = \emptyset$ und darum müsste $P(S) + P(M) = P(S \cup M)$ wegen Axiom 3. Dies ist hier aber nicht erfüllt.

Lösung 4.4

a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),\ldots,(6,6)\}$, $|\Omega| = 36$

b) $P(\text{Elementarereignis}) = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{36}$

c) $E_1 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ Anzahl günstige Fälle: $|E_1| = 6$ Anzahl mögliche Fälle: $|\Omega| = 36$ $P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $E_2 = \{(1,1),(2,1),(1,2)\}$; $P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

e) $E_3 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$; $P(E_3) = \frac{|E_3|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

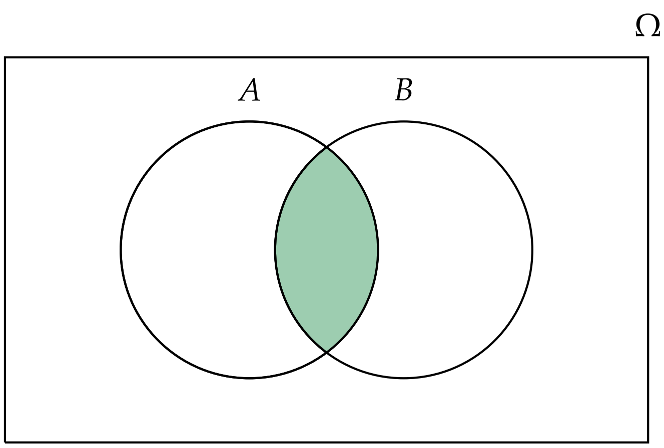
f) Mit dem Additionssatz:

$$\begin{aligned} P(E_2 \cup E_3) &= P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\ &= P(E_2) + P(E_3) - P(\{(1,1)\}) \\ &= \frac{3}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{36}\,. \end{aligned}$$

Lösung 4.5

```
A <- 3/4
B <- 2/3
```

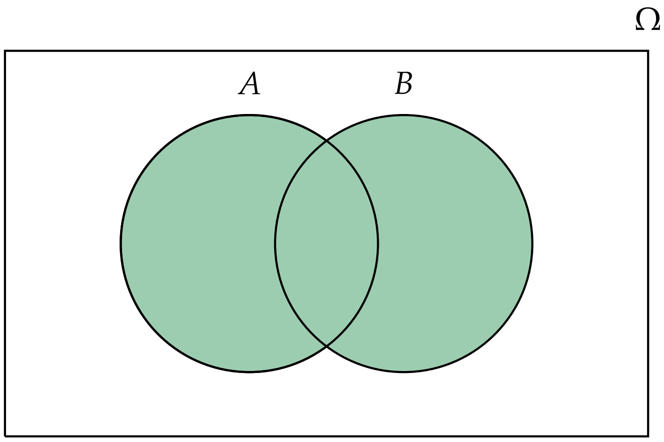
a)



$$P(\text{beide Ereignisse}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} =$$

```
library(MASS)
fractions(A * B)

## [1] 1/2
```

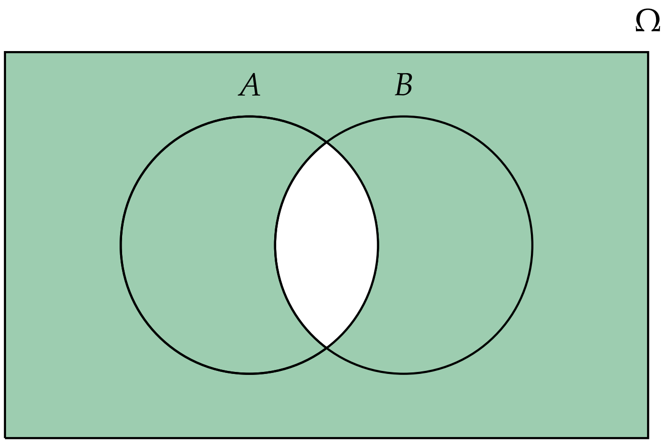
b)



$$\begin{aligned} P(\text{mindestens eines}) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= \end{aligned}$$

```
fractions(A + B - A*B)

## [1] 11/12
```

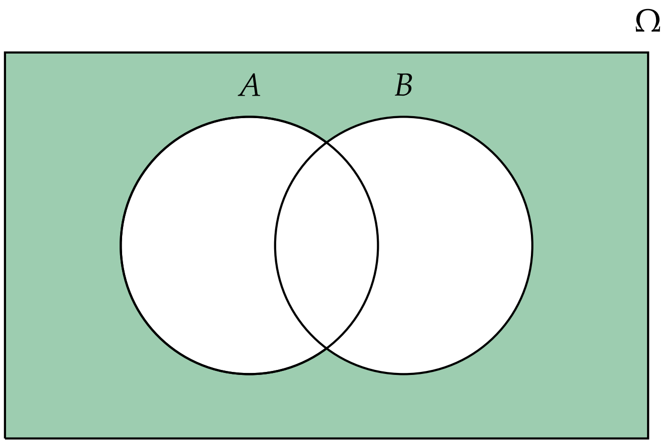
c)



$P(\text{höchstens eines}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B)$

```
fractions(1 - A*B)

## [1] 1/2
```

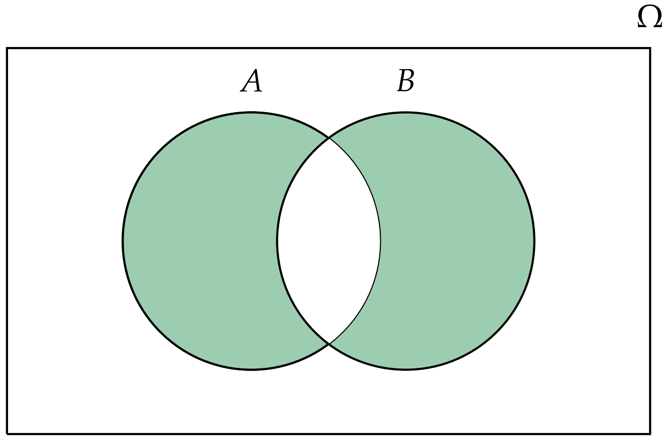
d)



$$\begin{aligned}
P(\text{kein Ereignis}) &= P(\overline{A \cup B}) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \\
&=
\end{aligned}$$

```
fractions(1-(A + B - A*B))

## [1] 1/12
```

e)



$$\begin{aligned} P(\text{genau ein Ereignis}) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A) \cdot P(B) \\ &= \end{aligned}$$

```
fractions(A + B - 2*A*B)

## [1] 5/12
```

Lösung 4.6

Die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit $E_1 \cup E_2$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.04 + 0.08 - 0.04 \cdot 0.08 = 0.1168\,,$$

wobei $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$, da E_1 und E_2 unabhängig sind.