Ejercicio Normal

Entrega práctica 2

Alumno: Juan Horrillo Crespo, juan.horrillo22@estudiantes.uva.es

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias idependientes igualmente distribuidas donde $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ y consideramos $\theta = (\mu, \sigma)$.

Lemas:

1. El EMV de la distribución normal es $\hat{\theta} = (\overline{X}, S)$
2. $\begin{pmatrix} \overline{X} \\ S \end{pmatrix} \sim N \begin{pmatrix} S^2/n & 0 \\ 0 & S^2/n \end{pmatrix}$
3. Sea $\hat{p}$ EMV de p. Sea $g(\hat{p})$ una función del parámetro.
   Entonces $g(\hat{p}) \sim N(g(p), G(\hat{p})\widehat{Var(p)}G(\hat{p})')$

Problem 1

Contrastar H_0: $\frac{\mu}{\sigma} = 1$

Formalizamos el contraste de hipotesis:

$$H_0\colon \quad \frac{\mu}{\sigma} = 1$$

$$H_1\colon \quad \frac{\mu}{\sigma} \neq 1$$

Estamos ante un caso de inferencia multiparamétrica pues tenemos una hipótesis compuesta. Usaremos el test de Wald para realizar el contraste.

Para ello definiremos una función g que transforme nuestro espacio paramétrico a $\mathbb{R}$ con el objetivo de calcular el estadístico de Wald.

Como la hipotesis a realizar es que $\frac{\mu}{\sigma} = 1$, podemos reescribirla como $\mu = \sigma$, y de forma inmediata $\mu - \sigma = 0$.

Por ello definimos g de la siguente manera:

$$g : \theta \longrightarrow \mathbb{R} \text{ donde } g(\theta) = \mu - \sigma$$

Reescribimos la hipótesis para nuestra función g:

$$H_0\colon \quad g(\theta) = 0$$

Hallamos la distribución de la función del parámetro utilizando el Δ-método

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\theta)}{\partial \mu} & \frac{\partial g(\theta)}{\partial \sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(\theta) \sim N(g(\theta_0), G(\theta)\widehat{Var(\theta)}G(\theta)') = N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{S^2}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= N(0, \frac{3S^2}{2n})$$

Finalmente calculamos el estadístico de Wald y calculamos el p-valor:

$$W_{\text{obs}} = (\overline{X} - S)^2 \frac{2n}{3S^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_1$$

Implementamos la solución en R

```r
# Definimos una funcion que nos calcula el p-valor para un n, una
# media muestral y una varianza muestral

norm2_pvalue <- function(n, Xs, S) {
    var_emv <- S^2 / n
    G <- matrix(c(1, -1), 1, 2)
    est_var_gtheta <- G %*% var_emv %*% t(G)

    W_obs <- (Xs - S)^2 * 2 * n / (3 * S^2)

    return(1 - pchisq(Q_Wobs, 1))
}
```