2016—2017 学年第一学期《高等数学（2-1）》期末考试卷(A)答案

一.（共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打"√"或"×"，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1. 设数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.　　（ × ）

反例：$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$上为连续的奇函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数.　　（ √ ）

证明：　$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在(a,b) 内至少存在一个零点.

（ × ）

反例：$f(x)=\begin{cases}-1, & x=0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$

4. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f(x)$ 在 x_0 点必连续.　　（ √ ）

证明：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

解. 原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(\pi-2x)(-2)}$ $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\sin x}\cdot\frac{\cos x}{(2x-\pi)}$ $=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{2}=\frac{-1}{8}$.

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(3t+2)(t+1)$

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{d}{dt}[(3t+2)(t+1)]\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}$.

3．设函数$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=3$，求 $F'(0)$.

解. $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{3}f'(0)=\frac{1}{3}\times 3=1$

三.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 设曲线 $y=y(x)$由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=0$ 所确定，求此曲线在

$x=0$ 处的切线方程.

解. 方程两边对 x 求导，得

$$e^{x+y}(1+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$$

当$x=0$ 时，$y=0$,代入上式得 $y'(0)=-1$

故切线方程为：$y=-x$

2. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$. $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$.

证明：(1) $F'(x)\geq 2$；

(2) 方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根.

证明. (1) $F'(x)=(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t)'=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$

(2) 由(1)可知$F'(x)\geq 2>0$,所以$F(x)$在$[a,b]$上单调递增.

又有$F(a)\cdot F(b)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\cdot\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

$$=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\cdot\int_a^b f(t)\mathrm{d}t<0$$

及$F(x)$在$[a,b]$上连续， 由零点定理及$F(x)$的单调性可知：

方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根.

四.（共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分）

1．求曲线 $y=x+\arctan x$ 的渐近线方程.

解. $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=1$， $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+\arctan x)-ax=\pm\frac{\pi}{2}$

所以渐近线为：$y=x\pm\frac{\pi}{2}$

2．求不定积分$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

解. 令$x=3\sin t$, $(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$, 则

原式$=\int\frac{3\cos t\cdot 3\cos t}{(3\sin t)^2}\mathrm{d}t=\int\cot^2 t\,\mathrm{d}t=\int(\csc^2 t-1)\,\mathrm{d}t$

$$=-\cot t-t+C=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

3．设函数 $f(x)$的一个原函数为$\frac{\tan x}{x}$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解. 由题意知：$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\tan x}{x}+C$，

$$f(x)=\left(\frac{tan x}{x}\right)'=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$$

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x\cdot\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}-\frac{\tan x}{x}+C$$

$$=\frac{x\sec^2x-2\tan x}{x}+C$$

4．求定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos^2x\mathrm{d}x$.

解. 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x$

$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$$.

五．（本题 8 分）设D为曲线$y=e^x, y=e^{2x}$ 与$y=2$所围成的平面图形，

(1) 求D的面积S；

(2) 求D绕y轴旋转一周所得的旋转体体积V.

解. (1) $S=\int_1^2(\ln y-\frac{1}{2}\ln y)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\ln y\,\mathrm{d}y=\ln 2-\frac{1}{2}$$

(2) $V=\int_1^2\pi(\ln y)^2\mathrm{d}y-\int_1^2\pi\left(\frac{1}{2}\ln y\right)^2\mathrm{d}y$

$$=\frac{3\pi}{4}\int_1^2(\ln y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3\pi}{2}((\ln 2)^2-2\ln 2+1).$$

六．（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1．设有盛满水的圆锥形蓄水池，深 15 米，口径 20 米，现将池水全部抽出，问至少需要做多少功?（设水的密度为ρ，重力加速度为g）

解.　选取积分变量$x\in[0,15]$

则$\mathrm{dW}=\rho g\pi x\left(\frac{2}{3}(15-x)\right)^2\mathrm{d}x$

从而$\mathrm{W}=\int_0^{15}\rho g\pi x\left(\frac{2}{3}(15-x)\right)^2\mathrm{d}x=1875\rho g\pi$

2．把一根长为a的铅丝切成两段，一段围成圆形，一段围成正方形. 问这两段铅丝各长多少时，圆形面积与正方形面积之和最小？

解. 设圆周长为x, 则正方形周长为$a-x$

面积之和为$S(x)=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$

$S'(x)=\frac{x}{2\pi}+\frac{x-a}{8}=0$

所以 $x=\frac{\pi a}{\pi+4}$,

又$S''\left(\frac{\pi a}{\pi+4}\right)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}>0$

故$S(x)$在$x=\frac{\pi a}{\pi+4}$处取最小值，即当圆长为$\frac{\pi a}{\pi+4}$，正方形长为$\frac{4a}{\pi+4}$时，其面积之和最小.

七．（共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分）

1．求微分方程$xy'+y=xe^x$满足$y(1)=1$的特解.

解. 变形得 $y' + \frac{1}{x}y = e^x$, 则 $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{x}$, $\mathrm{Q}(x) = e^x$

从而 $y = e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^x \cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx + C)$

$= \frac{1}{x}(xe^x - e^x + C)$

故原方程的特解为：$y = \frac{1}{x}(xe^x - e^x + 1)$

2. 求微分方程 $y'' - y' - 2y = xe^x$ 的通解.

解. 特征方程为：$r^2 - r - 2 = 0$

特征根为：$r_1 = -1$，$r_1 = 2$

对应齐次方程的通解为：$Y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$

因为$\lambda = 1$不是特征根，所以设特解为: $y^* = (ax + b)e^x$

比较系数得：$\mathrm{a} = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$

综上，原方程得通解为：$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})e^x$.

八.（本题 6 分）

设函数$f(x)$在 [0,1] 上连续，在 (0,1) 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$.

证明：在(0,1) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 由积分中值定理可得：存在一点$\mathrm{c} \in [\frac{2}{3}, 1]$使得

$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(c) \cdot \frac{1}{3}$

从而：$f(c) = f(0)$

在$[0, \mathrm{c}]$上，由罗尔定理可得：

在$(0, \mathrm{c})$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$,

即在(0,1) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$.