2010—2011 学年第一学期　　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)

一．填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1．已知 $f'(x_0)=-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________.

2．定积分 $\int_{-1}^{1}[\dfrac{\sin x\tan^2 x}{3+\cos 3x}+\sqrt{1-x^2}]dx=$. ________

3．函数 $y=xe^{-x}$ 的图形的拐点是 ________.

4. 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$, 则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$________.

5．曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})\,(x>0)$ 的渐近线方程为________.

二．选择题（共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1．设 $\boldsymbol{f(x)}$ 为不恒等于零的奇函数，且 $\boldsymbol{f'(0)}$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）.

A. 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处左极限不存在;　　　B. 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处右极限不存在;

C. 有跳跃间断点 $\boldsymbol{x=0}$;　　　D. 有可去间断点 $\boldsymbol{x=0}$.

2．设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt,\ g(x)=x^3+x^4$, 当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

A. 等价无穷小;　　　B. 同阶但非等价无穷小;

C. 高阶无穷小;　　　D. 低阶无穷小.

3. 下列广义积分发散的是(　).

A. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$;　　　B. $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

C. $\int_a^b\dfrac{1}{(b-x)^{\frac{2}{3}}}dx$;　　　D. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$.

4.方程 $y''+y=x\cos x$ 的待定特解的形式可设为 $\boldsymbol{y^*=}$(　　).

A. $(ax+b)\cos x$;　　　B. $x(ax+b)\cos x+x(cx+d)\sin x$;

C. $x(ax+b)\cos x$;　　　D. $(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$.

三．计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共计 48 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2})$.

2．设 $f''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(0)=2,\ f(\pi)=1,$ 求 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx.$

3．求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

4．试确定 a 的值，使函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，指出它是极大值还是极小值，并求出此极值.

5．求由方程$\sin(xy)+3x-y=1$所确定的隐函数的导数y'.

6．已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$,求常数$\boldsymbol{a}$的值.

7．设半径为 R 米的圆形薄板垂直地沉入水中，圆心距水面为 R 米，水的比重为γ，
求薄板一侧所受的水压力（ 其中$\gamma=\rho g$，ρ表示水的密度 ）.

8．求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $\boldsymbol{y=0}$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.

四．证明题（共 2 小题，每小题 8 分，共计 16 分）

1．叙述并证明牛顿莱布尼茨公式.

设 $f(x)$ 在闭区间 $[\boldsymbol{a,b}]$ 上连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

2．设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$（$\boldsymbol{A}$ 为常数）.

(1) 证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx.$

(2) 计算：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx.$

2010—2011 学年第一学期　　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(B)

一、单项选择题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1．下列叙述正确的是（　　　）.

A．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

B. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且存在 $N\in N^+$，当 $n>N$ 时，$a_n<0$，则 $a<0$.

C. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 也不存在.

D. 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A，则其去掉有限项后所得新数列仍收敛到 A.

2．设函数 $f(x)$ 可导且下列极限均存在，则不成立的是（　　　　）.

A．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$.

B. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

C. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=f'(a)$.

D. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$.

3．下列结论中正确的有（　　　）.

A. 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则有 $f'(x_0)$=0.

B. 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)$=0.

C. 如果 $f'(x_0)$=0，则点 x_0 必是函数 $f(x)$ 的极值点.

D. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的极大值一定大于极小值.

4．设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$，则 $F(x)$（　　　）.

A．为正常数.

B. 为负常数.

C. 恒为零.

D. 不为常数.

5．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则（　　　）.

A. 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

B. 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

C. 对于任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

D．存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

6. 设函数 $y=f(x)$ 是方程 $y''+3y'-4y=0$ 的一个特解，如果 $f(x_0)<0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（　　）.

A．取得极大值.　　　　　　B. 取得极小值.

C. 不取得极值.　　　　　　D. 不能确定.

二．填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$_________.

2. 微分方程 $y'x=y(1-x)$ 的通解是____________.

3. $y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为____________.

4. 设 $F(x)=\int_0^{\frac{x}{3}} f(3t)dt$，且 $f(0)=1$，则 $F'(0)=$________.

5. 已知 $f(x)=x^2+2\int_0^2 f(t)dt$，则 $f(x)=$________________.

三．计算题（共 8 小题，每题 6 分，共 48 分）

1．设 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$，求 y'.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. 已知 $y=f(\frac{3x-2}{5x+2}),\ f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

4. 计算积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{2+x^2}+\ln(1-x)]dx$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x)=x+2\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$.

6. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2，并且 $0<a<1$.

（1）试确定 a 的值，使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值.

（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7. 讨论函数 $y=2x^3-3x^2-12x+25$ 的单调区间、凸性区间、极值、拐点，并将结果列表表示.

8. 物体按规律 $x=ct^2$ 做直线运动，该物体所受阻力与速度平方成正比，比例系数为1，计算该物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服阻力所做的功.

四．证明题（共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1．证明不等式：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$ ．

2． 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0,\ \int_0^1 f(x)dx=0$， 证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\int_0^{\xi} f(x)dx=-\xi f(\xi)$.