2010—2011 学年第一学期《高等数学（2-1）》期中试题

一、 填空题（每小题 3 分，满分 18 分）

1. 设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $f'(x_0)=5$，则 $f'(-x_0)=$________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=5$，则 $a=$______.

3. 方程 $x-y+\arctan y=0$ 确定隐函数 $y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

4. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，

$f^{(n)}(x)$=________________.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n-1)-\ln n]=$ ____________.

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$，则 $f(x)$ 的可去间断点是__________，跳跃间断点是___________，无穷间断点是______________.

二、 选择题（每小题 3 分，满分 12 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\tan x}-2 & x>0 \\ 1 & x=0 \\ \sin x-\cos x & x<0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　　）

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) 不存在.

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 点（　　　）

(A) 必可导；　(B) 连续但不一定可导；
(C) 一定不可导；　(D) 不连续.

3. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\pi$，则 $\Delta x\to 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处的微分 $df(x)$ 是（　　　）

(A) 比 Δx 低阶的无穷小；　(B) 比 Δx 高阶的无穷小；
(C) 与 Δx 同阶的无穷小；　(D) 与 Δx 等价的无穷小.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　　）

(A) 不可导；　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$；

(C) 取得极大值；　(D) 取得极小值.

三、**计算题**（每小题 7 分，满分 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{x\tan x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2+\sqrt{x}}$

4. 设$\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 求 $f(x)=\ln(1+7x)$ 在 $x=0$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

四、解答题（每小题 8 分，满分 24 分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x<0 \\ e^{ax}-1, & x\geq 0 \end{cases}$，确定常数 a 与 b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(x)$.

2. 求 $y=(1+x^2)e^{-x^2}$ 的极值和凹凸区间及曲线的拐点.

3. 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速度增加，宽 w 以 3cm/s 的速度增加，则当长为 12cm，宽为 5cm 时，它的对角线的增加率是多少？

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，

证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.（5 分）