2010—2011 学年第一学期　　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)参考答案

一．填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1．已知 $f'(x_0)=-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ____1____.

2．定积分 $\int_{-1}^{1}[\dfrac{\sin x\tan^2 x}{3+\cos 3x}+\sqrt{1-x^2}]dx=$ __$\dfrac{\pi}{2}$__.

3．函数 $y=xe^{-x}$ 的图形的拐点是 __$(2,\ 2e^{-2})$__.

4．设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$, 则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$ __$-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$__.

5．曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})\ (x>0)$ 的渐近线方程为 __$y=x+\dfrac{1}{e}$__.

二．选择题（共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1．设 $\boldsymbol{f(x)}$ 为不恒等于零的奇函数，且 $\boldsymbol{f'(0)}$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　D　）.

A. 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处左极限不存在;　　B. 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处右极限不存在;

C. 有跳跃间断点 $\boldsymbol{x=0}$;　　D. 有可去间断点 $\boldsymbol{x=0}$.

2．设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt,\ g(x)=x^3+x^4$, 当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ B　）.

A. 等价无穷小;　　B. 同阶但非等价无穷小;

C. 高阶无穷小;　　D. 低阶无穷小.

3．下列广义积分发散的是（ A　）.

A. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$;　　B. $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

C. $\int_a^b\dfrac{1}{(b-x)^{\frac{2}{3}}}dx$;　　D. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$.

4.方程 $y''+y=x\cos x$ 的待定特解的形式可设为 $\boldsymbol{y^*=}$（ B　）.

A. $(ax+b)\cos x$;　　B. $x(ax+b)\cos x+x(cx+d)\sin x$;

C. $x(ax+b)\cos x$;　　D. $(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$.

三．计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共计 48 分）

1．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2})$.

解：若将区间[0, 1]等分，则每个小区间长$\Delta x=\frac{1}{n}$，再将$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$中的一个因子$\frac{1}{n}$分配到每一项，从而可以将所求极限转化为定积分的表达式。于是,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}})$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}dx\quad=\frac{2}{3}.$$

2．设$f''(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$f(0)=2,\ f(\pi)=1,$求$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx.$

解：$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx+\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx$

而

$$\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx=\int_0^{\pi}\sin xdf'(x)=f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx$$

$$=-\int_0^{\pi}\cos xdf(x)=-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx$$

$$=f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx=3-\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx.$$

所以

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx+3-\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx=3.$$

3．求微分方程$y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

解：所给方程为一阶线性微分方程，且$P(x)=\cos x,\ Q(x)=(\ln x)e^{-\sin x}$.

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]=e^{-\int\cos xdx}[\int(\ln x)e^{-\sin x}e^{\int\cos dx}dx+C]$$

$$=e^{-\sin x}(\int\ln xdx+C)=e^{-\sin x}(x\ln x-x+C).$$

4．试确定a的值，使函数$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$在$x=\frac{\pi}{3}$处取得极值，指出它是极大值还是极小值，并求出此极值.

解　$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$

$$f'(\frac{\pi}{3})=a\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{3}=\frac{a}{2}-1\overset{令}{=}0\Rightarrow a=2,$$

又$f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x$，　$f''(\frac{\pi}{3})<0$，

$\therefore f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$为极大值.

5．求由方程$\sin(xy)+3x-y=1$所确定的隐函数的导数y'.

解：两边对x求导得$\cos(xy)(y+xy')+3-y'=0,$

整理得$x\cos(xy)y'-y'=-[3+y\cos(xy),]$

所以$y'=\frac{3+y\cos(xy)}{1-x\cos(xy)}$.

6．已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx,$求常数$a$的值.

解：左端$=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{a}{x})^x}{(1+\frac{a}{x})^x}=e^{-2a}$

右端$=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx=\int_a^{+\infty}4x^2d(-\frac{1}{2}e^{-2x})=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}4xe^{-2x}dx$

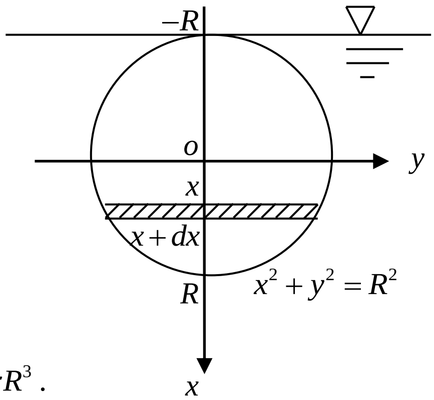
$=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}2e^{-2x}dx=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}-e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}$

$=(2a^2+2a+1)e^{-2a}$

所以$e^{-2a}=(2a^2+2a+1)e^{-2a}$　　故$a=0$ 或 $a=-1$.

7．设半径为R米的圆形薄板垂直地沉入水中，圆心距水面为R米，水的比重为γ，求薄板一侧所受的水压力(其中$\gamma=\rho g$，ρ表示水的密度).

解：建立坐标系如图，



$\forall x\in[-R,R]$，　$dF=\rho g\, hdA=\rho g(R+x)\,2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

$\therefore F=\int_{-R}^{R}dF=2\rho g\int_{-R}^{R}(R+x)\sqrt{R^2-x^2}dx$

$=2\rho g R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx\quad+2\rho g\int_{-R}^{R}x\sqrt{R^2-x^2}dx$

$=4\rho g R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx+0\;=4\rho g R\cdot\frac{\pi R^2}{4}=\rho g\pi R^3\;=\gamma\pi R^3$.

8．求由曲线$y=4-x^2$及$y=0$所围成的图形绕直线$x=3$旋转一周所生成的旋转体的体

积.

解：法一：选 y 为积分变量，则

$$V=\int_0^4\pi(3+\sqrt{4-y})^2dy-\int_0^4\pi(3-\sqrt{4-y})^2dy=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi.$$

法二：选 x 为积分变量，则

$$V=\int_{-2}^{2}2\pi(3-x)(4-x^2)dx=2\pi\int_{-2}^{2}(12-3x^2)dx=64\pi.$$

四．证明题（共 2 小题，每小题 8 分，共计 16 分）

1．叙述并证明牛顿莱布尼茨公式.

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

证明：由已知 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，因此，在区间 $[a,b]$ 上，$\Phi(x)=F(x)+C.$ 其中 C 为某一个常数.

在上式中令 $x=a,$ 得 $\Phi(a)=F(a)+C.$

$x=b,$ 得 $\Phi(b)=F(b)+C.$

两式相减得 $\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a),$

由于 $\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx,\ \Phi(a)=\int_a^a f(x)dx=0,$

所以 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

2．设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

(1) 证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx.$

(2) 计算：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx.$

证明：(1) $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx$

$$=\int_0^a f(-x)g(-x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx$$

$$=\int_0^a[f(-x)+f(x)]g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx.$$

（2）令 $f(x)=\arctan e^{x}$, $g(x)=|\sin x|$, $a=\frac{\pi}{2}$. 则 $\boldsymbol{f(x), g(x)}$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数. 由于

$$[\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}]'=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$$

所以 $\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=A(A\text{为常数})$

令 $\boldsymbol{x=0}$, 得 $A=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}$

因此 $f(x)$ 满足等式

$$f(x)+f(-x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{2}$$

于是，利用（1）的结论得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^{x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

2010—2011 学年第一学期　　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(B)参考答案

一、单项选择题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列叙述正确的是（　D　）.

A. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n v_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

（举反例：取 $u_n:0,1,0,2,\cdots; v_n:1,0,3,0,\cdots$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n v_n=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 都不存在）

B. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且存在 $N\in N^{+}$，当 $n>N$ 时，$a_n<0$，则 $a<0$.

C. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 也不存在.

D. 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A，则其去掉有限项后所得新数列仍收敛到 A.

2. 设函数 $f(x)$ 可导且下列极限均存在，则不成立的是（　C　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$.　　　　B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=f'(a)$. D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$.

3. 下列结论中正确的有（ B ）.

A. 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则有 $f'(x_0)$=0.

B. 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在， 则必有 $f'(x_0)$=0.

C. 如果 $f'(x_0)$=0，则点 x_0 必是函数 $f(x)$ 的极值点.

D. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的极大值一定大于极小值.

4. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$，则 $F(x)$（ A ）.

A．为正常数. B. 为负常数.

C. 恒为零. D. 不为常数.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则（ C ）.

A. 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

B. 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

C. 对于任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

D. 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

6. 设函数 $y=f(x)$ 是方程 $y''+3y'-4y=0$ 的一个特解，如果 $f(x_0)<0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ A ）.

A．取得极大值. B. 取得极小值.

C. 不取得极值. D. 不能确定.

二．填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=\underline{\dfrac{1}{2}\ln^2 x}$.

2. 微分方程 $y'x=y(1-x)$ 的通解是 $\underline{y=Cx\cdot e^{-x}}$.

3. $y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\underline{\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}}$.

4. 设 $F(x)=\int_0^{\frac{x}{3}} f(3t)dt$，且 $f(0)=1$，则 $F'(0)=\underline{\frac{1}{3}}$.

5. 已知 $f(x)=x^2+2\int_0^2 f(t)dt$，则 $f(x)=\underline{x^2-\frac{16}{9}}$.

三．计算题（共 8 小题，每题 6 分，共 48 分）

1．设 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$，求 y'.

解： $y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $=\sqrt{a^2-x^2}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}\frac{\tan x}{\sin x}}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}$ $=\frac{e}{e}=1$.

3. 已知 $y=f(\frac{3x-2}{5x+2}),\ f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：令 $u=\frac{3x-2}{5x+2}$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\arctan u^2\cdot\frac{3(5x+2)-5(3x-2)}{(5x+2)^2}$

$$=\arctan(\frac{3x-2}{5x+2})^2\cdot\frac{16}{(5x+2)^2}$$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\pi$.

4. 计算积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{2+x^2}+\ln(1-x)]dx$.

解：原式 $=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{2+x^2}dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx=0+x\cdot\ln(1-x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{-x}{1-x}dx$

$=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-1$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x)=x+2\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$.

解：两边求导得： $f'(x)=1+2f(x)$

解这个一阶线性微分方程得： $f(x)=Ce^{2x}-\frac{1}{2}$

又 $f(0)=0$，从而$C=\frac{1}{2}$

故 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$.

6．设直线$y=ax$与抛物线$y=x^2$所围成图形的面积为S_1，它们与直线$x=1$所围成图形的面积为S_2，并且$0<a<1$.

（1）试确定a的值，使得S_1+S_2达到最小，并求出最小值.

（2）求该最小值所对应的平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

解.（1）$S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\,dx+\int_a^1(x^2-ax)\,dx$

$$(S_1+S_2)'=\left(a\int_0^a xdx-\int_0^a x^2dx+\int_a^1 x^2dx-a\int_a^1 xdx\right)'$$

$$=\int_0^a xdx+a^2-a^2-a^2-\int_a^1 xdx+a^2=a^2-\frac{1}{2}=0,\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_1+S_2\text{最小}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}\ .$$

（2）$V_x=\int_0^a\pi\left((ax)^2-x^2\right)dx+\int_a^1\pi\left(x^4-(ax)^2\right)dx$

$$V_x=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi\ .$$

7．讨论函数$y=2x^3-3x^2-12x+25$的单调区间、凸性区间、极值、拐点，并将结果列表表示.

解. $y'=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$ $y'=0\Rightarrow x=-1,2$

$y''=12x-6=12(x-\frac{1}{2})$ $y'''=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	+	0	—	—	—	0	+
f''	—	—	—	0	+		+

f	单升 上凸	$f(-1)=32$ 极大	单降 上凸	$(0.5,18.5)$ 拐点	单降 下凸	$f(2)=5$ 极小	单升 下凸
几何特征							

8. 物体按规律 $x=ct^2$ 做直线运动，该物体所受阻力与速度平方成正比，比例系数为1，计算该物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服阻力所做的功.

解 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=2ct$

$$f(x)=k4c^2t^2=4c^2t^2=4cx$$

$$W=\int_0^a 4cxdx=2ca^2 \quad .$$

四．证明题（共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1．证明不等式：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$.

证明：令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$

$$f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0，\quad f(x)\in C[0,+\infty)$$

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升.

由此 $f(x)>f(0)=0$，即 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}>f(0)=0$

综上有： 当 $x>0$，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$.

2． 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0,\ \int_0^1 f(x)dx=0$， 证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\int_0^{\xi} f(x)dx=-\xi f(\xi)$.

证明. 令：$F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，$x\in[0,1]$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，（0，1）可导，且 $F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$

即：$\int_0^{\xi} f(t)dt = -\xi f(\xi)$.