

无约束非线性规划问题的Matlab求解

求解 $\text{Min } f(x), x \in R^n$

→ **fminsearch**

→ **fminunc**

1.功能：求无约束多元（一元）函数的最小值.

2.语法： $x = \text{fminsearch}(\text{fun}, x_0)$

其中： fun – 函数表达式.

x_0 – 初值.

返回`fun`函数在初始点`x0`附近的局部极小解.

$x = \text{fminsearch}(\text{fun}, x_0, \text{options})$

其中： options – 选项参数设置, 可以没有.

$$[x, f_{\text{aval}}] = f_{\text{min search}}(fun, x_0)$$

返回**fun**函数在初始点**x0**附近的局部极小点及最小值.

$$[x, f_{\text{aval}}, \text{exitflag}, \text{output}] = f_{\text{min search}}(fun, x_0)$$

返回**fun**函数在初始点**x0**附近的局部极小点（值），迭代次数、求解过程是否收敛等信息.

二、`fminunc` 命令介绍

1.功能：求无约束多元函数的最小值.

2.语法： $x = \text{fminunc}(fun, x0)$

其中： fun – 函数表达式.

$x0$ – 初值.

返回`fun`函数在初始点`x0`附近的局部极小点.

$x = \text{fminunc}(fun, x0, options)$

其中： $options$ – 选项参数设置, 可以没有.

$$[x, f_{\text{aval}}] = f_{\text{minunc}}(fun, x_0)$$

$$[x, f_{\text{aval}}, \text{exitflag}] = f_{\text{minunc}}(fun, x_0)$$

$$[x, f_{\text{aval}}, \text{exitflag}, \text{output}] = f_{\text{minunc}}(fun, x_0)$$

$$[x, f_{\text{aval}}, \text{exitflag}, \text{output}, \text{grad}] = f_{\text{minunc}}(fun, x_0)$$

$$[x, f_{\text{aval}}, \text{exitflag}, \text{output}, \text{grad}, \text{hessian}] = f_{\text{minunc}}(fun, x_0)$$

除了返回**fun**函数在初始点**x0**附近的局部最优解（值），还返回最优解处的梯度和**hessian**矩阵等信息。

其中输入参数:

Fun: 目标函数 一般用句柄形式给出

X0: 优化算法初始迭代点

Options: 参数设置

函数输出:

X: 最优点输出 (或最后迭代点)

Fval: 最优点 (或最后迭代点) 对应的函数值

Exitflag: 函数结束信息 (具体参见matlab help)

Output: 函数基本信息 包括迭代次数, 目标函数最大计算次数, 使用的算法名称, 计算规模等。

Grad: 最优点 (或最后迭代点) 的导数

Hessian: 最优点 (或最后迭代点) 的二阶导数

1. **fminsearch**使用单纯形算法进行直接计算.
此方法在算最优解时不需要用导数信息.
2. 对于求解二次以上的问题, **fminsearch**函数常比**fminunc**函数有效.
3. 当所求问题为高度非线性时, **fminsearch**函数常更具稳健性.
4. **fminsearch**求得的大部分是近似解.

5. **fminunc**是求解无约束优化问题的主要函数，函数主要用到**BFGS**拟牛顿算法（默认）、**DFP**拟牛顿算法、最速下降法和信赖域法等。

即用到函数的导数信息。

6. 在原问题可导并且不太复杂时，**fminunc**求得的解精度更高些；但当问题高度非线性或不连续时，用它求得的结果通常很不准确。

三. 应用举例 → `fminsearch`

Page 9

例1 求解 $\min f(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$,

初始点 $x^0 = (1, 1)$.

解: 首先建立一个`myfun.m`文件,

```
function f=myfun(x)
```

```
f=3*x(1)^2+2*x(1)*x(2)+x(2)^2;
```

然后将该`.m`文件放在当前目录下, 接下来在命令窗口输入: $x0 = [1, 1];$

```
[x, fval]=fminsearch(@myfun, x0)
```

按回车键，运行结果如下：

x =

1.0e-04 *

-0.0675 0.1715

fval =

1.9920e-10

[x, fval, exitflag, output] = fminsearch(@myfun, x0)

Page 11

x =

1.0e-04 *

-0.0675 0.1715

fval =

1.9920e-10

exitflag =

1

output =

iterations: 46

funcCount: 89

algorithm: 'Nelder-Mead simplex direct search'

**message: '优化已终止:↵ 当前的 x 满足使用
1.000000e-04 的 OPTIONS.TolX 的终止条件,
↵F(X) 满足使用 1.000000e-04 的 OPTIONS.TolFun
的收敛条件↵'**

四、应用举例 → `fminunc`

Page 13

例2. 求解 $\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

初始点取 $x^0 = (1, 1)$.

解： 首先建立一个`fun.m`文件，

```
function f=fun(x)
f=x(1)^2+x(2)^2;
```

然后将该`.m`文件放在当前目录下，接下来在命令窗口输入：

```
x0 = [1,1];
[x,fval]=fminunc(@fun, x0)
```

按回车键，运行结果如下：

Local minimum found.

Optimization completed because the size of the gradient is less than the value of the optimality tolerance.

<stopping criteria details>

x =
0 0

fval =
0

Local minimum found.

Optimization completed because the size of the gradient is less than the value of the optimality tolerance.

<stopping criteria details>

x =
0 0

fval =
0

exitflag =
1

output =

包含以下字段的 struct:

iterations: 1

funcCount: 6

stepsize: 1.4142

lssteplength: 0.5000

firstorderopt: 1.4901e-08

algorithm: 'quasi-newton'

message: 'Local minimum found. Optimization completed because the size of the gradient is less than the value of the optimality tolerance. <stopping criteria details> Optimization completed: The first-order optimality measure, 4.967054e-09, is less than options.OptimalityTolerance = 1.000000e-06.'

grad =

1.0e-07 *

0.1490

0.1490

如果想用信赖域法, → 增加options中参数的设置这一项 Page 18

即在fun文件中定义梯度函数,

为此, 需新先建立一个fun.m文件,

```
function [f,g]=fun(x)
f=x(1)^2+x(2)^2;
if nargout>1
    g(1)=2*x(1);
    g(2) = 2 * x(2);
end
```

然后将该.m文件放在当前目录下，接下来在命令

窗口输入：

```
x0=[1,1];
```

```
options=optimset('GradObj','on','Algorithm','trust-region');
```

```
[x,fval,exitflag,output,grad,hessian]=fminunc(@fun,x0,options)
```

按回车键， 输出结果如下：

Local minimum found.

Page 20

Optimization completed because the size of the gradient is less than the value of the optimality tolerance.

<stopping criteria details>

**x =
0 0**

**fval =
0**

**exitflag =
1**

output = 包含以下字段的 struct:

iterations: 1 funcCount: 2

Page 21

stepsize: 1.4142 cgiterations: 1

firstorderopt: 0 algorithm: 'trust-region'

message'␣Local minimum found.␣␣Optimization completed because the size of the gradient is less than␣the value of the optimality tolerance.␣␣<stopping criteria details>␣␣Optimization completed: The first-order optimality measure, 0.000000e+00, ␣is less than options.OptimalityTolerance = 1.000000e-06, and no negative/zero␣curvature is detected in the trust-region model.␣␣‘

constrviolation: []

grad =

0

0

hessian =

(1,1) 2

(2,2) 2

以下方式要求用户提供梯度，并用**DFP**算法求解：

Page 23

窗口输入：

```
x0 = [1,1];  
options=optimset('Algorithm','quasi-newton',  
'GradObj','on','HessUpdate','dfp');
```

```
[x,fval,exitflag,output,grad]=fminunc(@fun, x0,options)
```

按回车键， 输出结果如下：

Local minimum found.

Optimization completed because the size of the gradient is less than the value of the optimality tolerance.

<stopping criteria details>

x =

0 0

fval =

0

exitflag =

1

```
exitflag =
```

```
1
```

```
output =
```

包含以下字段的 [struct](#):

```
    iterations: 1
    funcCount: 2
    stepsize: 1.4142
    lssteplength: 0.5000
    firstorderopt: 0
    algorithm: 'quasi-newton'
    message: '↵Local minimum found.↵↵Optimization completed because the size of the gradient is less than↵'
```

```
grad =
```

```
0
```

```
0
```


可以通过将 **HessUpdate** 设置为 ‘steepdesc’（并将 **Algorithm** 设置为 ‘quasi-newton’）来选择最速下降法，尽管此设置通常效率不高。格式如下：

```
options=optimset('Algorithm','quasi-newton',  
'HessUpdate','steepdesc');
```

作业1: 用 `fminsearch` 函数求

$$\min f = 2x_1^3 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

的最优解和最优值，其中初始点为 $x^0 = (0, 0)^T$.

作业2: 用 `fminsearch` 函数求

$$\min f = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

的最优解和最优值，其中初始点为 $x^0 = (-1.2, 1)^T$.

$$\min f = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

的最优解，其中初始点为 $x^0 = (-1.2, 1)^T$ 。

要求：1. 使用用户提供的梯度求解；

2. 分别采用bfgs, dfp和信赖域算法求解。