A卷

2015—2016学年第一学期

《线性代数》期末试卷答案

说明：试卷中的字母E表示单位矩阵；A^*表示矩阵A的伴随矩阵；

$R(A)$表示矩阵A的秩；A^{-1}表示可逆矩阵A的逆矩阵.

一、填空题（请从下面6个题目中任选5个小题，每小题3分；若6个题目都做，按照前面5个题目给分）

本题满分15分	
本题得分	

1．5阶行列式中，项$a_{24}a_{31}a_{52}a_{13}a_{45}$前面的符号为【 负 】.

2. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，$A_{4i}\ (i=1,2,3,4)$是$D$的第4行元素的代数余子式，则$A_{41}+2A_{42}-A_{43}+2A_{44}$ 等于【 0 】.

3．设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$为$4\times3$矩阵，且$R(\boldsymbol{A})=2$，则$R(\boldsymbol{AB})=$【 2 】.

4．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$线性相关，则$t=$【 1 】.

5．设 A 是 3 阶实的对称矩阵，$\alpha=\begin{pmatrix} m \\ -m \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的解，$\beta=\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1-m \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $(A+E)x=0$ 的解，则常数 $m=$【　1　】.

6．设 A 和 B 是 3 阶方阵，A 的 3 个特征值分别为 $-3,3,0$，若 $E+B=AB$，则行列式 $|B^{-1}+2E|=$【　-8　】.

二、选择题（共 5 个小题，每小题 3 分）

本题满分 15 分	
本题得分	

1. 设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则行列式 $|-2A^*|$ 等于【　A　】.

(A) -2；　(B) $-\dfrac{1}{2}$；　(C) -1；　(D) 2.

2. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为【　A　】.

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3．设 A 是 n 阶非零矩阵，满足 $A=A^2$，若 $A\neq E$，则【　A　】.

(A)　$|A|=0$；　(B)　$|A|=1$；　(C)　A 可逆；　(D)　A 满秩.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, C=AB^{-1}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的第 3 行第 1 列的元素为

【　D　】.

(A)　4；　　　(B)　8；　　　(C)　0；　　　(D)　-1.

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$，$a$ 是使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定的正整数，则必有【　B　】.

(A)　$a=2$；　　　(B)　$a=1$；　　　(C)　$a=3$；　　　(D)　以上选项都不对.

三、求解下列各题(共 3 小题，每小题 7 分)

本题满分 21 分	
本题得分	

1. 若 α,β,γ 线性无关，$\alpha+2\beta, 2\beta+k\gamma$，$\beta+3\gamma$ 线性相关，求 k.

解：因为 $\alpha+2\beta, 2\beta+k\gamma$ 与 $\beta+3\gamma$ 线性相关，所以必定存在不全为零的数 λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\lambda_1(\alpha+2\beta)+\lambda_2(2\beta+k\gamma)+\lambda_3(\beta+3\gamma)=0$$ ----------2 分

整理得：$\lambda_1\alpha+(2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\beta+(k\lambda_2+3\lambda_3)\gamma=0$

由于 α,β,γ 线性无关，因此可得

$$\begin{aligned}&\lambda_1=0\\&2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\&k\lambda_2+3\lambda_3=0\end{aligned}$$

由于 λ_1，λ_2，λ_3 不全为零，即上述齐次线性方程组有非零解，因此

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&1\\0&k&3\end{vmatrix}=0$$，由此得 $k=6$. ----------7 分

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$，若 $R(AB+B)=2$，求 a.

解：由 $R(AB+B)=2$ 可知 $|AB+B|=0$，

由此可得 $|A+E||B|=0$

又 $|A+E|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ ----------2 分

因此 $|B|=0$

因此可得 $a=-5$. ----------7 分

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & a & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-4 & t & 0\\6 & 0 & 3\end{pmatrix}$，且 A,B 相似，求 a 与 t 的值.

解：由 A,B 相似可知 A,B 的特征值相同，

而易知 B 的特征值为 $-1,\ t,3$，因此 A 的特征值也为 $-1,\ t,3$

利用特征值的性质可得

$$\begin{cases}2+a+1=-1+t+3\\2(a-4)=-3\mathrm{t}\end{cases}$$ ----------5 分

解得 $a=1,t=2$. ----------7 分

本题满分 16 分	
本题得分	

四、(共 2 小题，每小题 8 分)

1．求向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

的一个最大无关组，并将其余向量用这一最大无关组表示出来.

解：令 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\-1 & 3 & 0 & -1\\2 & 1 & 7 & 2\\4 & 2 & 14 & 0\end{pmatrix}$，把 A 进行行变换，化为行最简形，

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C=\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4\end{pmatrix}$$ ----------6 分

则 β_1，β_2，β_4 是 C 的列向量组的一个最大无关组，且 $\beta_3=3\beta_1+\beta_2+0\beta_4$，

故 α_1，α_2，α_4 是 A 的列向量组的一个最大无关组，且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$.

----------8 分

2. 问 a 满足什么条件，才能使得 $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&3&a\\0&0&3\end{pmatrix}$ 共有两个线性无关的特征向量？

解：由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&4\\0&3-\lambda&a\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=0$，得 A 的特征值：$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=3$

要使 A 有两个线性无关的特征向量，则特征值 3 对应一个线性无关的特征向量，

即 $(A-3E)x=0$ 的解空间的维数为 1，则 $R(A-3E)=2$， ----------6 分

而 $A-3E=\begin{pmatrix}-1&1&4\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$，因此可知 $a\neq0$. ----------8 分

本题满分 12 分	
本题得分	

五、问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda,\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 无解，有无穷多解，并在有无穷多解时求出其通解.

解：记方程组的增广矩阵为，则 $B=\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{pmatrix}$，

对其进行行变换，化为行阶梯形：$B\to\begin{pmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{pmatrix}$，

易知，当$\lambda \neq 1$时，$R(A)=2\neq R(B)=3$，方程组无解；

当$\lambda=1$时，$R(A)=R(B)=2$，方程组有无穷多解；　　　　----------6 分

当$\lambda=1$时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，与原方程组同解的方程组为$\begin{cases}x_1=-x_3+1\\x_2=2x_3-1\end{cases}$，

由此可得原方程组的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\ (k\in R)$.　　　　----------12 分

六、求实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$的秩，并求正交变换$x=Py$，化二次型为标准形.

本题满分 14 分	
本题得分	

解：记二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，$A\sim\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

故二次型f的秩为 1.　　　　----------4 分

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&4-\lambda&-4\\2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}=0$，可得：$\lambda_1=9$，$\lambda_2=\lambda_3=0$，

当$\lambda_1=9$，求解$(A-9E)x=0$的一个基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化：$p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，

当$\lambda_2=\lambda_3=0$，求解$Ax=0$的一个基础解系：$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，

正交化：$\eta_2 = \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_3 = \xi_3 - \dfrac{[\eta_2 \quad \xi_3]}{[\eta_2 \quad \eta_2]}\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$，

单位化：$p_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$p_3 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$， ----------12 分

令 $P = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$，则可得正交变换 $x = Py$，

二次型的标准形为：$f(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 0y_2^2 + 0y_3^2$. ----------14 分

七、（请从下面 2 个题目中任选 1 个，若 2 个题目都做，按照第 1 题给分）

本题满分 7 分	
本题得分	

1. “设 A 是 n 阶实的反对称矩阵，则对于任何 n 维实的列向量 α，α 和 $A\alpha$ 正交，且 $A-E$ 可逆”．您认为该结论成立吗？请说明理由.

解：该结论成立。

由于 A 为反对称阵，则 $A^T = -A$，对于任意 n 维实的列向量 α，有：

$[\alpha \quad A\alpha] = \alpha^T A\alpha = -\alpha^T A^T \alpha = -(A\alpha)^T \alpha = -[A\alpha \quad \alpha] = -[\alpha \quad A\alpha]$

所以 $[\alpha \quad A\alpha] = 0$，即 α 和 $A\alpha$ 正交； ----------3 分

考虑 $(A-E)x = 0$，即 $Ax = x$，等式两边同时左乘 x^T，得

$x^T Ax = x^T x = 0$，由此得：$x = 0$，即 $(A-E)x = 0$ 只有零解，

所以 $|A-E| \neq 0$，$A-E$ 可逆. ----------7 分

2. 设矩阵A满足$2A^{-1}B=2B+E$，$B=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$，试求出$A-E$的第 2 行的元素.

解：等式$2A^{-1}B=2B+E$两边同时左乘A得：$2B=2AB+A$，

整理得：$2B=A(2B+E)$，

B已知，由此可求出$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$，　　　　----------5 分

从而可求出$A-E$的第 2 行的元素为：1，-1，0.　　　　----------7 分