§4.2 多因素方差分析

Variance analysis of multiple factor

建 立 模 型

参 数 估 计

统 计 检 验

一. 建立模型 modeling

设 A、B 为两个因子，A 有 k 个水平 A_1， A_2，$\cdots$，A_k，B 有 r 个水平 B_1，$B_2,\cdots$，B_r，两个因子共有 kr 个水平组合 A_iB_j（$i=1,2,3,\cdots,k$； $j=1,2,3,\cdots,r$）。

设对每一个水平组合 A_iB_j 做了 n 次试验（这里只讨论每个水平所作试验次数相同的情形），试验结果为 $y_{ij1},y_{ij2},\cdots,y_{ijn}$（$i=1,2,3,\cdots,k$； $j=1,2,3,\cdots,r$）。

一. 建立模型 modeling

例 4-2 考虑合成纤维弹性，影响因素为收缩率 A 和拉伸倍数 B，A、B 各有四个水平，每个水平分别作了两次试验，相应的试验结果见表 4-8

表 4-8

试验结果 因子 A / 因子 B		A_1 0		A_2 4		A_3 8		A_4 12	
B_1	460	71	73	73	75	76	73	75	73
B_2	520	72	73	76	74	79	77	73	72
B_3	580	75	73	78	77	74	75	70	71
B_4	640	77	75	74	74	74	73	69	69

一. 建立模型 modeling

假定对水平组合 A_iB_j 试验结果的理论值为 μ_{ij}，即 $Ey_{ijl}=\mu_{ij}$，则 y_{ijl} 可分解为

$$y_{ijl}=\mu_{ij}+\varepsilon_{ijl} \quad i=1,2,3,\cdots,k;\quad j=1,2,3,\cdots,r;$$

$$l=1,2,\cdots,n \qquad (4\text{–}9)$$

其中 ε_{ijl} 为试验误差，它是一个随机变量。通常假定 ε_{ijl} （$i=1,2,3,\cdots,k$； $j=1,2,3,\cdots,r$； $l=1,2,\cdots,n$）独立同分布 $N(0,\ \sigma^2)$。

为了反映因子 A、B 的水平变化对试验结果影响的大小，将 μ_{ij} 再进行分解，记

$$\mu=\frac{1}{kr}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\mu_{ij}$$

一. 建立模型 modeling

$$\mu_i = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots, \ k) \tag{4-10}$$

$$v_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots, \ r) \tag{4-11}$$

于是有

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &= \mu + (\mu_i - \mu) + (v_j - \mu) + (\mu_{ij} - \mu_i - v_j + \mu) \\ &\triangleq \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}\end{aligned}$$

其中，$\alpha_i = \mu_i - \mu$，$\beta_j = v_j - \mu$，$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - v_j + \mu$，

不难验证：

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{r}\beta_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k}\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij} = 0,$$

一. 建立模型 modeling

两个因素方差分析的一般数学模型：

$$
\begin{cases}
y_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijl}, \\
\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0, \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{ij} = 0, \\
\varepsilon_{ijl} i \cdot i \cdot d N(0,\sigma^2),\quad i = 1,\cdots,k;\ j = 1,\cdots,r;\ l = 1,\cdots n,
\end{cases}
$$

需要解决如下问题：

（1）估计未知参数 μ，α_i，β_j，γ_{ij}

（$i = 1,\cdots,k$；$j = 1,\cdots,r$；$l = 1,\cdots,n$）；

（2）考察因子 A 和因子 B 的水平变化对试验结果的影响有无显著差异，以及因子 A 和因子 B 有无交互作用，归结为下述三个假设检验：

一. 建立模型 modeling

需要解决如下问题：

（1）估计未知参数μ，α_i，β_j，γ_{ij}（$i=1,\cdots,k$；$j=1,\cdots,r$；$l=1,\cdots,n$）；

（2）考察因子A和因子B的水平变化对试验结果的影响有无显著差异，以及因子A和因子B有无交互作用，归结为下述三个假设检验：

$$H_{01}：\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0；$$

$$H_{10}：\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_r=0；$$

$$H_{11}：\gamma_{ij}=0，\quad i=1,\cdots,k；\ j=1,\cdots,r。$$

二. 参数估计 Parameter estimate

记

$$\bar{y}=\frac{1}{nkr}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}y_{ijl} \qquad \bar{y}_{i\cdot}=\frac{1}{nr}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}y_{ijl}$$

$$\bar{y}_{\cdot j}=\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}y_{ijl} \qquad \bar{y}_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}y_{ijl}$$

完全类似于单因素方差分析，得未知参数μ，α_i，β_j，γ_{ij}的矩估计为

$$\hat{\mu}=\bar{y}，\quad \hat{\alpha}_i=\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}，\quad \hat{\beta}_j=\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y} \tag{4-13}$$

$$\hat{\gamma}_{ij}=\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y}，\quad i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,r$$

易证它们分别是μ，α_i，β_j，γ_{ij}的无偏估计。

三. 统计检验 Statistical tests

$$S_{总}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[(y_{ijl}-\bar{y}_{ij})+(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})+(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})+(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y}_{ij})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})^2+0$$

$$\triangleq S_{误}^2+S_A^2+S_B^2+S_{AB}^2 \qquad （4\text{-}14）$$

三. 统计检验 Statistical tests

其中，交叉项全为零，例如

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y}_{ij})(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})=\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y}_{ij})$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})(nr\bar{y}_{i\cdot}-nr\bar{y}_{i\cdot})=0$$

$$S_{误}^{2}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y}_{ij})^{2} \qquad (4\text{–}15)$$

$$S_{A}^{2}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^{2}=rn\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^{2} \qquad (4\text{–}16)$$

$$S_{B}^{2}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})^{2}=kn\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})^{2} \qquad (4\text{–}17)$$

$$S_{AB}^{2}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})^{2}$$

三. 统计检验 Statistical tests

$$S_{AB}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})^2$$

$$=n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})^2 \qquad （4\text{–}18）$$

类似于单因素方差分析，$S_{误}^2$、$\boxed{S_A^2、S_B^2、S_{AB}^2}$ 的相对大小分别反映了因子 A 和因子 B 的水平单独以及联合对试验结果的影响大小。可以证明

当 H_{01}：$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$ 成立时

$$F_1=\frac{S_A^2/(k-1)}{S_{误}^2/kr(n-1)}\sim F(k-1,\ kr(n-1)) \qquad （4\text{–}19）$$

三. 统计检验 Statistical tests

当H_{10}：$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_r=0$成立时

$$F_2=\frac{S_B^2/(r-1)}{S_{误}^2/kr(n-1)}\sim F(r-1,\ kr(n-1)) \qquad （4-20）$$

当H_{11}:γ_{ij}=0， $i=1,\cdots,k$； $j=1,\cdots,r$ 成立时

$$F_3=\frac{S_{AB}^2/(k-1)(r-1)}{S_{误}^2/kr(n-1)}\sim F((k-1)(r-1),\ kr(n-1)) \qquad （4-21）$$

因此可利用上述三个统计量对假设H_{01}、H_{10}、H_{11}进行F检验。若以$f_{因子}$表示相应于$S_{因子}^2$的因子的自由度,上述三个统计量可统一写成

$$F=\frac{S_{因子}^2/f_{因子}}{S_{误}^2/kr(n-1)}$$

三. 统计检验 Statistical tests

表 4-7 方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
因素 A	S_A^2	$k-1$	$S_A^2/(k-1)$	$F_1=\dfrac{S_A^2/(k-1)}{S_{误}^2/kr(n-1)}$
因素 B	S_B^2	$r-1$	$S_B^2/(r-1)$	$F_2=\dfrac{S_B^2/(r-1)}{S_{误}^2/kr(n-1)}$
$A\times B$	S_{AB}^2	$(k-1)\times(r-1)$	$\dfrac{S_{AB}^2}{(k-1)(r-1)}$	$F_3=\dfrac{S_{AB}^2/(k-1)(r-1)}{S_{误}^2/kr(n-1)}$
误差	$S_{误}^2$	$kr(n-1)$	$S_{误}^2/kr(n-1)$	
总和	$S_{总}^2$	$krn-1$		

三. 统计检验 Statistical tests

$$S_{总}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} y_{ijl}^2 - \frac{T_{\cdots}^2}{krn}$$

$$S_A^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2 = rn\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2 = \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{k}T_{i\cdot\cdot}^2 - \frac{T_{\cdots}^2}{krn}$$

$$S_B^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})^2 = kn\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})^2 = \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{r}T_{\cdot j\cdot}^2 - \frac{T_{\cdots}^2}{krn}$$

$$S_{AB}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}T_{ij\cdot}^2 - \frac{T_{\cdots}^2}{krn} - S_A^2 - S_B^2$$

$$S_{误}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijl}-\bar{y}_{ij})^2 = S_{总}^2 - S_A^2 - S_B^2 - S_{AB}^2$$

$$T_{\cdots} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} y_{ijl}, \quad T_{ij\cdot} = \sum_{l=1}^{n} y_{ijl} \quad T_{i\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} y_{ijl}$$

$$T_{\cdot j\cdot} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} y_{ijl} \qquad i=1,\cdots,k;\ j=1,\cdots,r$$

例 4-2 考虑合成纤维弹性，影响因素为收缩率 A 和拉伸倍数 B，A、B 各有四个水平，每个水平分别作了两次试验，相应的试验结果见表 4-8

表 4-8

因子 B \ 试验结果 \ 因子 A		A_1 0		A_2 4		A_3 8		A_4 12	
B_1	460	71	73	73	75	76	73	75	73
B_2	520	72	73	76	74	79	77	73	72
B_3	580	75	73	78	77	74	75	70	71
B_4	640	77	75	74	74	74	73	69	69

解：由题意知 $k=4$，$r=4$，$n=2$，又由表 4-8 得 $T_{1\cdot\cdot}=589$，$T_{2\cdot\cdot}=601$，$T_{3\cdot\cdot}=601$，$T_{4\cdot\cdot}=572$，$T_{\cdot 1\cdot}=589$，$T_{\cdot 2\cdot}=596$，$T_{\cdot 3\cdot}=593$，$T_{\cdot 4\cdot}=585$，$T_{\cdots}=2363$，$T_{ij\cdot}$ 见表 4-8 中两数之和。

$$S_{总}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} y_{ijl}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}=174678-174492.78=180.22$$

$$S_A^2=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{k}T_{i\cdot\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}=174563.38-174492.78=70.60$$

$$S_B^2=\frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{r}T_{\cdot j\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}=174501.38-174492.78=8.60$$

$$S_{AB}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}T_{ij\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}-S_A^2-S_B^2$$

$$=174651.5-174492.78-8.60-70.60=79.52$$

$$S_{误}^2 = S_{总}^2 - S_A^2 - S_B^2 - S_{AB}^2 = 21.5$$

对给定水平$\alpha=0.10$，由$P\{F > \lambda\} = 0.10$分别查相应表得$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.46$，$\lambda_3 = 2.06$。

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
收缩率A	70.60	3	23.55	17.57^{**}
拉伸倍数B	8.60	3	2.87	2.14
交互作用AB	79.52	9	8.84	6.59^{**}
误　差	21.50	16	1.34	
总　和	180.22	31		

解： 将数据进行预处理($y_{ijl}-73$)，然后进行方差分析：

表 4-8

试验结果 因子 A / 因子 B	A_1 0	A_2 4	A_3 8	A_4 12
B_1 460	−2　0	0　2	3　0	2　0
B_2 520	−1　0	3　1	6　4	0　−1
B_3 580	2　0	5　4	1　2	−3　−2
B_4 640	4　2	1　1	1　0	−4　−4

由题意知 $k=4$，$r=4$，$n=2$， 又由表 4-8 得 $T_{1\cdot\cdot}=5$，$T_{2\cdot\cdot}=17$，$T_{3\cdot\cdot}=17$，$T_{4\cdot\cdot}=-12$，$T_{\cdot1\cdot}=5$，$T_{\cdot2\cdot}=12$，$T_{\cdot3\cdot}=9$，$T_{\cdot4\cdot}=1$，$T_{\cdots}=27$，$T_{ij\cdot}$ 见表 4-8 中两数之和。

由题意知 $k=4$，$r=4$，$n=2$， 又由表 4-8 得 $T_{1\cdot\cdot}=5$，$T_{2\cdot\cdot}=17$，$T_{3\cdot\cdot}=17$，$T_{4\cdot\cdot}=-12$，$T_{\cdot1\cdot}=5$，$T_{\cdot2\cdot}=12$，$T_{\cdot3\cdot}=9$，$T_{\cdot4\cdot}=1$，$T_{\cdots}=27$，$T_{ij\cdot}$ 见表 4-8 中两数之和。

$$S_{总}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} y_{ijl}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}=203-22.78=180.22$$

$$S_A^2=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{k}T_{i\cdot\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}=93.38-22.78=70.59$$

$$S_B^2=\frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{r}T_{\cdot j\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}=31.38-22.78=8.59$$

$$S_{AB}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}T_{ij\cdot}^2-\frac{T_{\cdots}^2}{krn}-S_A^2-S_B^2$$

$$=181.5-22.78-70.60-8.60=79.53$$

$$S_{误}^2=S_{总}^2-S_A^2-S_B^2-S_{AB}^2=21.51$$

对给定水平 $\alpha=0.10$，由 $P\{F>\lambda\}=0.10$ 分别查相应表得 $\lambda_1=\lambda_2=2.46$，$\lambda_3=2.06$。

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
收缩率 A	70.59	3	23.53	17.51**
拉伸倍数 B	8.59	3	2.87	2.13
交互作用 AB	79.53	9	8.84	6.58**
误　差	21.51	16	1.34	
总　和	180.22	31		

4. Matlab多因素方差分析

在Matlab中，anova2函数用于双因素等重复试验的方差分析。

假设双因素方差分析条件满足：样本服从正态总体；正态总体的方差相同；样本相互独立。

其调用格式为

p=anova2(X，reps)

[p,table]=anova2(X，reps)

[p,table,stats]=anova2(X，reps)

其中，输入参数X为样本观测值组成的矩阵，X每一列对应因素A的一个水平，每一行对应因素B的一个水平，X还应满足方差分析的基本假定。

输入参数reps表示因素A和因素B的每一水平组合下重复试验的次数。

当reps大于1时，还检验因素A和因素B交互作用是否显著。

输出参数为检验的p值，是一个行向量，视reps是否大于1，确定其维数。

若p的分量小于显著性水平alpha，则拒绝原假设；否则接受原假设。

table为元胞数组形式的方差分析表。

stats为结构体变量，用于后续的多重比较。

例1.在某种金属材料的生产过程中，对热处理温度(因素B)与时间(因素A)各取两个水平，产品强度的测定结果(相对值)下表所示．在同一条件下每个实验重复两次．设各水平搭配下强度的总体服从正态分布且方差相同，各样本独立．

问：热处理温度，时间以及这两者的交互作用对产品强度是否有显著的影响 (取alpha=0.05)?

	B1	B2
A1	38.0 38.6	47.0 44.8
A2	45 43.8	42.4 40.8

解：这是双因素有交互作用方差分析

问题，用MATLAB计算，结果如下：

```
>> X=[38.0 38.6 47.0 44.8;
     45.0 43.8 42.4 40.8]';
>>  [p,table,stats]=anova2(X,2)
p = 0.3009    0.0340    0.0024
```

ANOVA 表

来源	SS	df	MS	F	p 值(F)
列	1.62	1	1.62	1.41	0.3009
行	11.52	1	11.52	10.02	0.034
交互效应	54.08	1	54.08	47.03	0.0024
误差	4.6	4	1.15		
合计	71.82	7			

由于0.3009>0.05，接受原假设H01，认为不同时间对产品强度无显著影响；

由于0.0340<0.05，拒绝原假设H10，认为不同温度对产品强度有显著影响；

由于0.0024<0.05，拒绝原假设H11，认为交互作用对产品强度有显著影响.

例2：设三名工人操作四台机器各一天,其日产量下表所示,问不同机器或不同工人对日产量是否有显著影响(alpha=0.05)?

	机器1	机器2	机器3	机器4
工人1	50	47	47	53
工人2	53	54	57	58
工人3	52	42	41	48

解：这是双因素无交互作用方差分析

问题，用MATLAB计算，结果如下：

```
>>  X=[50 47 47 53;
53 54 57 58;
52 42 41 48]';
>> [p,table,stats]=anova2(X,1)
p = 0.0144    0.2308
```

ANOVA 表

来源	SS	df	MS	F	p 值(F)
列	195.167	2	97.5833	9.32	0.0144
行	59.667	3	19.8889	1.9	0.2308
误差	62.833	6	10.4722		
合计	317.667	11			

由于0.0144<0.05，拒绝原假设H01，认为不同工人对产量有显著影响；

由于0.2308>0.05，接受原假设H10，认为不同机器对产量无显著影响；

例 4-2 考虑合成纤维弹性，影响因素为收缩率 A 和拉伸倍数 B，A、B 各有四个水平，每个水平分别作了两次试验，相应的试验结果见表 4-8

表 4-8

试验结果 \ 因子 A / 因子 B		A_1 0		A_2 4		A_3 8		A_4 12	
B_1	460	71	73	73	75	76	73	75	73
B_2	520	72	73	76	74	79	77	73	72
B_3	580	75	73	78	77	74	75	70	71
B_4	640	77	75	74	74	74	73	69	69

解：这是双因素无交互作用方差分析

问题，用MATLAB计算，结果如下：

```
X=[71 73 73 75 76 73 75 73;
72 73 76 74 79 77 73 72;
75 73 78 77 74 75 70 71;
77 75 74 74 74 73 69 69]';
[p,table,stats]=anova2(X,2)
```

```
p = 1x3
     0.1363    0.0000    0.0006
```

ANOVA 表

来源	SS	df	MS	F	p 值(F)
列	8.594	3	2.8646	2.13	0.1363
行	70.594	3	23.5313	17.51	0
交互效应	79.531	9	8.8368	6.58	0.0006
误差	21.5	16	1.3438		
合计	180.219	31			

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
收缩率 A	70.60	3	23.55	17.57**
拉伸倍数 B	8.60	3	2.87	2.14
交互作用 AB	79.52	9	8.84	6.59**
误 差	21.50	16	1.34	
总 和	180.22	31		