A 卷

2015—2016 学年第一学期
《高等数学（2-1）》期末考试卷
答案及评分标准

(工 科 类)

专业班级 ____________________________

姓　　名____________________________

学　　号____________________________

开课系室　　　基础数学系

考试日期　　2016 年 1 月 11 日

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
本题满分	12	18	18	18	8	12	9	5	
本题得分									
阅卷人									

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共八道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 8 页。

本题满分 12 分	
本题得分	

一.（共 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“√”或“×”，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点一定是极值点. （ × ）

---------------------------- （ **2 分** ）

反例：函数 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处满足 $f'(0)=0$，即 $x=0$ 为驻点，但 $x=0$ 不是 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的极值点. ---------------------------- （ **2 分** ）

2. 反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ 是发散的. （ √ ）

---------------------------- （ **2 分** ）

证明：由于 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$，又 $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_0^1=-\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=+\infty$，故反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ 发散. ----------------------------（ **2 分** ）

3. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t dt$ 是 $\int_0^x tg(t)dt$ 的高阶无穷小. （ √ ）

---------------------------- （ **2 分** ）

证明：由于当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t dt}{\int_0^x tg(t)dt}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)\sin x}{xg(x)}=0$，即当 $x\to0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t dt$ 是 $\int_0^x tg(t)dt$ 的高阶无穷小. ---------------------------- （ **2 分** ）

本题满分 18 分	
本题得分	

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\,dt}{x^2(1-\cos x)^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\,dt}{x^2(1-\cos x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\,dt}{x^6}$ ------------- （ **1 分** ）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(e^{x^4}-1)2x}{6x^5}$ ------------- （ **3 分** ）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^5}{6x^5}=\dfrac{4}{3}.$ ------------- （ **2 分** ）

2. 求由参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,$ ------------------------（ **3 分** ）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$ ------------------------（ **3 分** ）

3．设 $y=\ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\dfrac{a}{b}\arctan\dfrac{x}{b}$，求 dy,（其中 a,b 为常数，$b\neq 0$）.

解：$y=\ln(x+a)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+b^2)+\dfrac{a}{b}\arctan\dfrac{x}{b}$，则 ----------------- （ **1 分** ）

$y'=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{x}{x^2+b^2}+\dfrac{a}{b}\dfrac{\frac{1}{b}}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}=\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{a-x}{x^2+b^2}$，故 ----------------- （ **4 分** ）

$dy=\left(\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{a-x}{x^2+b^2}\right)dx.$ ----------------- （ **1 分** ）

三.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试确定常数 a,b 的值.

解：由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 点 $x=0$ 处连续，又 ----------------- （ **1 分** ）

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$， $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$，故

由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，得 $b=0$. ----------------- （ **2 分** ）

又 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}=a$， $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$， ----------------- （ **2 分** ）

由 $f_-'(0)=f_+'(0)$，得 $a=0$. ----------------- （ **1 分** ）

2．设曲线的方程为 $x^3+y^3+(x+1)\cos(\pi y)+9=0$，求此曲线在 $x=-1$ 处的法线方程.

解：方程两边对 x 求导，得

$3x^2+3y^2y'+\cos(\pi y)-\pi(x+1)\sin(\pi y)y'=0$， ----------------- （ **3 分** ）

又当 $x=-1$ 时，解得 $y=-2$，代入上式得 $y'|_{x=-1}=-\dfrac{1}{3}$，故 ----------------- （ **2 分** ）

曲线在 $x=-1$ 处的法线方程为 $y+2=3(x+1)$，即 $3x-y+1=0$.----------------- （ **1 分** ）

3．试确定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d，使得在 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

解：由于曲线在 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，

故 $y'|_{x=-2}=0$， $y''|_{x=1}=0$， ----------------- （ **2 分** ）

又 $y'=3ax^2+2bx+c$， $y''=6ax+2b$，可得

$12a\text{-}4b+c\text{=}0$， $6a+2b=0$， ----------------- （ **1 分** ）

又由于 $(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上，可得

$a+b+c+d\text{=}-10,\ -8a+4b-2c+d=44$，----------------- （ **2 分** ）

联立解得 $a=1,b=-3,c=-24,d=16$. ----------------- （ **1 分** ）

四.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．设 $\int xf(x)\,dx = \arcsin x + C$，求不定积分 $\int \frac{dx}{f(x)}$.

解：不定积分两边求导得：$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$，

----------------- （ **3 分** ）

故 $\int \frac{dx}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$ ----------------- （ **3 分** ）

2．求定积分 $\int_{-2}^{2} x^2\left(\frac{\sin^3 x}{1+x^6}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$.

解：由定积分的对称性质，可得 $\int_{-2}^{2}\frac{x^2\sin^3 x}{1+x^6}dx=0$， ----------------- （ **2 分** ）

$\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$，令 $x=2\sin t$， 则 $dx=2\cos tdt$，

----------------- （ **1 分** ）

且当 $x=0$ 时， $t=0$，当 $x=2$ 时， $t=\frac{\pi}{2}$， 故

$\int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=16\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=16\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)\,dt=16(\frac{1}{2}-\frac{3}{8})\frac{\pi}{2}=\pi,$

-------------（ **2 分** ）

故 $\int_{-2}^{2} x^2\left(\frac{\sin^3 x}{1+x^6}+\sqrt{4-x^2}\right)dx=2\pi.$ -------------（**1 分** ）

3．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx$，求 a 的值.

解：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right]^{-a}}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a}}=\frac{e^{-a}}{e^{a}}=e^{-2a}$， ------------- （ **3 分** ）

$$\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx=-\int_a^{+\infty}xde^{-2x}=-xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx$$

$$=-\lim_{x\to\infty}xe^{-2x}+ae^{-2a}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=(a+\frac{1}{2})e^{-2a},$$ ------------- （ **2 分** ）

故 $a+\frac{1}{2}=1$，得 $a=\frac{1}{2}$. ------------- （ **1 分** ）

五．（本题 8 分）设 D 为曲线 $y=e^x$ 与直线 $x=1$，x 轴、y 轴所围成的平面图形，求：

本题满分 8 分	
本题得分	

(1) D 的面积 S；（4 分）

(2) D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积 V．（4 分）

解：（1）$S=\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1.$ ------------- （ **4 分** ）

（2）$V=2\pi\int_0^1 xe^x dx = 2\pi xe^x \Big|_0^1 - 2\pi\int_0^1 e^x dx = 2\pi.$ ------------- （ **4 分** ）

或 $V=\pi e-\pi\int_1^e \ln^2 y dy = \pi e-\pi(y\ln^2 y \Big|_1^e - 2\int_1^e y\ln y \frac{1}{y}dy)$

$=\pi e-\pi e+2\pi\int_1^e \ln y dy = 2\pi y\ln y \Big|_1^e - 2\pi\int_1^e y\frac{1}{y}dy = 2\pi.$

本题满分 12 分	
本题得分	

六．（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1．一等腰梯形闸门，它的两条底边各长$10m$和$6m$，高$20m$，较长的底边与水面相齐，计算闸门的一侧所受到的水压力，其中水的密度为ρ，重力加速度为g.

解：建立坐标系（原点在顶端中点，x轴竖直向下，y轴水平向右），设x为水深，选x为积分变量，$x\in[0,20]$，　------------- （ **1 分** ）

$\forall[x,x+dx]\subset[0,20]$，则对应的闸门小窄条上各点处的压强近似为$\rho gx$，小窄条的面积近似为$2ydx$，　------------- （ **2 分** ）

又$\dfrac{20}{2}=\dfrac{x}{5-y}$，得$y=5-\dfrac{x}{10}$，故

$dF=2\rho gx(5-\dfrac{x}{10})dx$，　------------- （ **2 分** ）

得$F=\int_0^{20}\rho gx(10-\dfrac{x}{5})dx=\dfrac{4400}{3}\rho g(N).$　------------- （ **1 分** ）

2．一立体的下部为圆柱体，上部为以圆柱体顶面为底面的半球体，若该物体的体积为常数V，问圆柱体的高h和底圆半径r为多少时，此立体有最小表面积.（常用公式：半径为a的球的体积公式为$V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$，表面积公式为$S=4\pi a^2$.）

解：由于立体表面积$S=2\pi rh+3\pi r^2$，　------------- （ **2 分** ）

且满足$\dfrac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2h=V$，可得$h=\dfrac{V}{\pi r^2}-\dfrac{2}{3}r$，即

$S=2\pi r\left(\dfrac{V}{\pi r^2}-\dfrac{2}{3}r\right)+3\pi r^2=\dfrac{2V}{r}+\dfrac{5\pi}{3}r^2$，　------------- （ **1 分** ）

由$h=\dfrac{V}{\pi r^2}-\dfrac{2}{3}r>0$，可推知$0<r<\sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\pi}}$，又

$\dfrac{dS}{dr}=\dfrac{10\pi}{3}r-\dfrac{2V}{r^2}$，令$\dfrac{dS}{dr}=0$，得唯一的驻点$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$，此时$h=r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$，

------------- （ **2 分** ）

故由实际问题的意义，可知当$h=r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$时，立体的表面积有最小值.　-------- （ **1 分** ）

七.（共 2 小题，共计 9 分）

本题满分 9 分	
本题得分	

1．求微分方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ 的通解.（5 分）

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$，得特征根为
$r_1=3, r_2=-1$， -------- （ **1 分** ）
由于 -1 为特征单根，故可设方程特解为
$y^*=Axe^{-x}$，代入方程可得 $A=-\dfrac{1}{4}$，即 $y^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$， -------- （ **2 分** ）
又齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$，故 -------- （ **1 分** ）
所求微分方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$. -------- （ **1 分** ）

2. 求微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$ 的通解. （4 分）

解：由通解公式，可得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]$$ -------- （ **2 分** ）

$$=\frac{1}{x}\left(\int\frac{\sin x}{x}xdx\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$ -------- （ **2 分** ）

本题满分 5 分	
本题得分	

八．（本题 5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

证明：令 $F(x)=f(x)-x$， -------- （ **2 分** ）

则 $F(0)=f(0)-0=0$，

$F(1)=f(1)-1=-1<0$，又 $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，由闭区间上连续函数的零点定理，得存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $F(\eta)=0$， -------- （ **2 分** ）

故 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 上可导，并且 $F(0)=F(\eta)=0$，

根据罗尔定理，可得存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$.

-------- （ **1 分**）

各章分值分配：

第 1 章 10 分；第 2 章 22 分；第 3 章 19 分； 第 4 章 6 分；第 5 章 34 分；第 6 章 9 分。