§3 均方微积分

本章介绍随机过程在均方意义下的微分和积分。为此先讲均方极限和均方连续。

随机过程在均方意义下的极限、连续、导数和积分的定义及性质在形式上与高等数学中相应的定义及性质是类似的，但前者是对随机过程而言，而后者是对函数而言。

以下我们均假定随机过程的一、二阶矩存在。即随机过程都是二阶矩过程。

3.1 随机变量序列的均方极限

定义　设随机序列 $\{X_n, n=1,2,\ldots,\}$ 和随机变量 X 且

$$E|X_n|^2<\infty, E|X|^2<\infty$$

若有
$$\lim_{n\to\infty} E|X_n-X|^2=0$$

则称 X_n 均方收敛于X，而 X 是 X_n 的均方极限，记

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$$

这里记号 $l.i.m$ 是英文limit in mean square的缩写。

需要注意均方极限对随机序列而言，而 lim 是对数列来讲的。还要指出在上面定义中若取 X_n, X 为复随机变量也是可以的，此时绝对值记号应理解为复数的模．下面考察均方极限的唯一性．

定理1 若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n = X$, 且 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n = Y$ ，则 $P\{X = Y\} = 1.$

即均方极限在概率 1 相等的意义下是唯一的.

证 $E|X-Y|^2 = E|(X_n - X)-(X_n - Y)|^2$

$\le E|X_n - X|^2 + 2E|(X_n - X)(X_n - Y)| + E|X_n - Y|^2$

$\le E|X_n - X|^2 + 2\sqrt{E|X_n - X|^2}\cdot\sqrt{E|X_n - Y|^2} + E|X_n - Y|^2$

$\to 0$, 当 $n\to\infty$.

这里第二个等号用了许瓦兹不等式:

$$E|XY| \le \sqrt{E|X|^2}\cdot\sqrt{E|Y|^2}$$

由于左端与 n 无关，有 $E|X-Y|^2 = 0$,

故 $P\{X - Y = 0\} = 1$, 或 $P\{X = Y\} = 1.$ 证毕

均方极限的性质如下：

（1） 若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$ ，则 $\underset{n\to\infty}{p\lim}\, X_n = X$ 。

此定理表明 X_n 均方收敛到 X 必有 X_n 依概率收敛到 X，亦即均方收敛比依概率收敛强。

证 利用广义切比雪夫不等式 $P\{|Y|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{1}{\varepsilon^2}E|Y|^2$

有 $P\{|X_n - X|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{1}{\varepsilon^2}E|X_n - X|^2$

由定理条件，当 $n\to\infty$ 时 $E|X_n - X|^2\to 0$，

因而 $P\{|X_n - X|\geq\varepsilon|\to 0$

即 X_n 依概率收敛到 X 。证毕。

(2) 若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX$，即

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX = E[\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n]$$

此性质表明极限与数学期望可以交换次序，但是前者为普通极限,后者为均方极限.

证：利用 $DY = E|Y|^2 - |EY|^2 \geq 0$ ，有

$$|EX_n - EX| = |E(X_n - X)| \leq \sqrt{E|X_n - X|^2}$$

当 $n\to\infty$ 时，由假定得 $E|X_n - X|^2 \to 0$，所以

$$|EX_n - EX| \to 0$$ 证毕。

（3）若 $\underset{m\to\infty}{l.i.m}\, X_m = X$，又 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$，则

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} E(X_m Y_n) = E(XY)$$

特别有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n^2] = EX^2$

证 $$|E(X_m Y_n) - E(XY)| = |E(X_m Y_n - XY)|$$

$$= |E[(X_m - X)(Y_n - Y) + X(Y_n - Y) + (X_m - X)Y]|$$

$$\le E|(X_m - X)(Y_n - Y)| + E|X(Y_n - Y)| + E|(X_m - X)Y|$$

利用许瓦兹不等式, $E|XY| \le \sqrt{E|X|^2}\sqrt{E|Y|^2}$, 有

$$|E(X_m Y_n) - E(XY)| \le \sqrt{E|X_m - X|^2}\sqrt{E|Y_n - Y|^2} + \sqrt{E|X|^2}\sqrt{E|Y_n - Y|^2} + \sqrt{E|X_m - X|^2}\sqrt{E|Y|^2}$$

（3）若 $\underset{m\to\infty}{l.i.m}\, X_m = X$，又 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$，则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} E(X_m Y_n) = E(XY)$$

由条件 $E|X_m - X|^2 \to 0$, $E|Y_n - Y|^2 \to 0, (m\to\infty, n\to\infty)$,

故 $|E(X_m Y_n) - E(XY)| \to 0 (m\to\infty, n\to\infty)$.

证毕。

问：能否由性质(2)推得 $\underset{m\to\infty}{l.i.m}\, X_m^2 = X^2$, $\underset{n\to\infty}{l.i.m}(X_n Y_n) = XY$,

答：不行。

这是因为 $E|X_m^2 - X^2|^2, E|X_n Y_n - XY|^2$ 涉及到四阶矩。

（4）若$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$，则对常数 a, b 有

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,(aX_n + bY_n) = aX + bY$$

证　利用许瓦兹不等式，

$$E|(aX_n+bY_n)-(aX+bY)|^2 = E|a(X_n - X)+b(Y_n - Y)|^2$$

$$\le E|a(X_n - X)|^2 + E|b(Y_n - Y)|^2 + 2|a|\cdot|b|\cdot E|(X_n - X)(Y_n - Y)|$$

$$\le |a|^2 E|X_n - X|^2 + |b|^2 E|Y_n - Y|^2$$

$$+2|a|\cdot|b|\sqrt{E|X_n - X|^2}\cdot\sqrt{E|Y_n - Y|^2}$$

由条件 $E|X_n - X|^2 \to 0$，$E|Y_n - Y|^2 \to 0$，有

$$E|(aX_n+bY_n)-(aX+bY)|^2 \to 0\ \ (n\to\infty).$$　证毕。

（5）若$\{a_n, n=1,2,\ldots\}$有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ，又 X 是随机变量，则

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}(a_n X) = 0$$

证 由 $E|a_n X|^2 = |a_n|^2 E|X|^2 \to 0$，立得。

（7）（Cauchy判别准则）极限 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n$ 存在的充分必要条件是

$$\underset{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}{l.i.m}(X_m - X_n) = 0$$

亦即

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} E|X_m - X_n|^2 = 0$$

此证明略。

（8）若 X_n 与 X 是实随机变量，X_n 均方收敛到 X，则

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{ivX_n}) = E(e^{ivX})$$

（9）（收敛准则）二阶矩 EX_n^2有限的序列 $\{X_n\}$均方收敛的充要条件是

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} E(X_n X_m) = C$$

此证明略。

3.2 随机过程的均方连续性

设参数集 T 取为连续的，如取$[a, b]$, $(-\infty,\infty)$,$[0,\infty)$ 等。

定义 若随机过程 $\{X(t), t\in T\}$，对固定的 $t_0, t_0+\Delta t\in T$，有

$$\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m}\, X(t_0+\Delta t) = X(t_0),\quad i.e\ \lim_{\Delta t\to 0} E|X(t_0+\Delta t)-X(t_0)|^2 = 0$$

则称 $X(t)$ 在 t_0 点均方连续。

若 $X(t)$在 T 中每一个 t 处都连续，则称 $X(t)$在 T上均方连续。

下面给出随机过程均方连续的充要条件.

定理3.2.1 随机过程$\{X(t),t\in T\}$在T上均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R_X(s,t)$ 在分角线中 $\{(t,t),t\in T\}$的所有点上是连续的。

证 事实上，只要证$X(t)$在 T 中任一固定点 t_0 上均方连续的充要条件是 $R_X(s,t)$ 在 (t_0,t_0)上连续。

先证充分性 设 $R_X(s,t)$ 在 (t_0,t_0)上连续。 要证

$$\underset{t\to t_0}{l.i.m}\, X(t)=X(t_0)$$

考察

$$E|X(t)-X(t_0)|^2=EX^2(t)-2E\{X(t)X(t_0)]+EX^2(t_0)$$

$$=R_X(t,t)-2R_X(t,t_0)+R_X(t_0,t_0)$$

定理3.2 .1 随机过程 $\{X(t), t\in T\}$在T上均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R_X(s,t)$ 在第一象限的分角线中 $\{(t,t), t\in T\}$的所有点上是连续的。

当 $t\to t_0$ 时,由于 $R_X(s,t)$ 在 (t_0,t_0) 连续, 上式右边趋近于零, 故

$$E|X(t)-X(t_0)|^2\to 0.$$

再证必要性　已知 $\underset{t\to t_0}{l.i.m}\, X(t)=X(t_0)$,

由均方极限性质（3）有

$$\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} E[X(s)X(t)]=E[X(t_0)X(t_0)]$$

即

$$\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} R_X(s,t)=R_X(t_0,t_0)$$

证毕。

推论 3.2.1 随机过程$\{X(t), t \in T\}$在T上均方连续的充分必要条件是其协方差函数 $C_X(s,t)$ 在分角线中$\{(t,t), t \in T\}$的所有点上是连续的。

证：由 $$C_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

可得。

推论 3.2.2 随机过程$\{X(t), t \in T\}$的自相关函数 $R_X(s,t)$ 在分角线上 $s = t$ 上连续，则它在整个平面上每一点都是连续的。

此结论说明，只要相关函数和协方差函数在对角线上连续，则它们就在整个平面上连续。

3.3 随机过程的均方导数

定义 若随机过程$\{X(t), t \in T\}$在 t_0 处下列均方极限

$$\underset{h \to 0}{l.i.m} \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} \qquad (3.3.1)$$

存在，则称此极限为 $X(t)$ 在 t_0 处的均方导数，记为 $X'(t_0)$ 或 $\frac{dX(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}$,此时称 $X(t)$ 在 t_0 处均方可导。

若 $X(t)$在T上每一点 t上均方可导，则称 $X(t)$在T上均方可导。此时均方导数记为 $X'(t)$或 $\frac{dX(t)}{dt}$，它是一个新的随机过程。

例1（补充）试求随机过程 $X(t)=At+B$ 的均方导数，其中A, B 为相互独立的随机变量。

解
$$X'(t)=\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{A(t+h)+B-(At+B)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{Ah}{h}=\underset{h\to 0}{l.i.m}\,A$$

而 $\lim\limits_{h\to 0}E|A-A|^2=0,$ 即 $\underset{h\to 0}{l.i.m}\,A=A.$

所以 $X'(t)=A.$

下面讨论随机过程可导的充要条件。

定理3.3.1　随机过程$\{X(t),t\in T\}$ 在 t 处均方可导的充分必要条件是存在极限

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\frac{R_X(t+h,t+h')+R_X(t,t)-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')}{hh'} \quad (3.3.4)$$

因而$X(t)$在T上均方可导的充要条件是上式（广义二阶导数）$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)$ 在每一点（t,t）处存在。

下面叙述均方导数的性质。对于它们的证明只需要用均方导数的定义和均方极限的性质。

（1）若随机过程 $X(t)$ 在 t 处均方可导，则它在t处均方连续。

（2）随机过程 $X(t)$ 的均方导数 $X'(t)$ 的数学期望是

$$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=\frac{d}{dt}EX(t)=m'_X(t)$$

此式表明求导记号与数学期望可以交换次序；
但是前者对随机过程求导，后者是对普通函数求导。

（3）若 $X(t),Y(t)$ 是均方可导随机过程，而 a,b 是常数，则

$$[aX(t)+bY(t)]'=aX'(t)+bY'(t)$$

（4）（推论3.3.1）随机过程 $X(t)$ 的均方导数 $X^{/}(t)$ 的相关函数是

$$R_{X^{/}}(s,t)=E[X^{/}(s)X^{/}(t)]=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t)$$

（5）若 X 是随机变量，则 $X^{/}=0.$

（6）若是 $f(t)$ 可微函数，而 $X(t)$ 是随机过程，则

$$[f(t)X(t)]^{/}=f^{/}(t)X(t)+f(t)X^{/}(t)$$

上述性质除性质（4）外读者可自已进行证明。

下证性质（4）。

（4）随机过程 $X(t)$ 的均方导数 $X'(t)$ 的相关函数是

$$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t)$$

利用均方极限性质（3）。

$$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]$$

$$=E\left[\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(s+h)-X(s)}{h}.\underset{h'\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\lim_{h'\to 0}\frac{R_X(s+h,t+h')-R_X(s+h,t)-R_X(s,t+h')+R_X(s,t)}{hh'}$$

（4）随机过程 $X(t)$ 的均方导数 $X'(t)$ 的相关函数是

$$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial t}R_X(s+h,t)-\frac{\partial}{\partial t}R_X(s,t)}{h}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial t}R_X(s,t)\right) \qquad =\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t).$$

同理可证 $$R_{X'}(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t).$$

证毕。

同理可证明：若$\{X(t), t\in T\}$是相关函数为 $R_X(s,t)$ 均方可导随机过程， 则

$$E[X'(s)X(t)] = \frac{\partial}{\partial s}R_X(s,t)$$

$$E[X(s)X'(t)] = \frac{\partial}{\partial t}R_X(s,t)$$

$$E[X'(s)X'(t)] = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)$$

$$E[X'(t)X'(s)] = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t)$$

例2（补充）设随机过程 $X(t)$ 的均值与相关函数为

$$m_X(t)=5\sin t,\quad R_X(t,s)=3e^{-0.5(s-t)^2}$$

试求$Y(t)=X'(t)$ 的均值与协方差函数。

解 $$m_Y(t)=m_{X'}(t)=[m_X(t)]'=(5\sin t)'=5\cos t.$$

$$R_Y(t,s)=R_{X'}(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(t,s)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[3e^{-0.5(s-t)^2}]=\frac{\partial}{\partial s}[3(s-t)e^{-0.5(s-t)^2}]$$

$$=3e^{-0.5(s-t)^2}[1-3(s-t)^2],$$

所以 $$C_Y(t,s)=R_Y(t,s)-m_Y(t)m_Y(s)$$

$$=3e^{-0.5(s-t)^2}[1-3(s-t)^2]-25\cos t\cos s.$$

主观题 10分

设置

1. 设$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$为二阶矩过程，且自相关函数$R_X(t_1,t_2)=e^{-(\frac{t_2-t_1}{2})^2}$，

若$Y(t)=2X(t)+X'(t)$，求$Y(t)$的自相关函数$R_Y(t_1,t_2)$。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

3.4 随机过程的均方积分

定义 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t)$ $(t\in[a,b])$ 是函数。

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个子区间，分点为

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

作和式
$$\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1})$$

其中 u_k 是子区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 中任意一点，$k=1,2,\ldots,n$

令 $\Delta = \max\limits_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$，若均方极限

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1})$$

存在，且与子区间的分法和 u_k 的取法无关，则称此极限为 $f(t)X(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的均方积分，记为 $\int_a^b f(t)X(t)dt$.
此时亦称 $f(t)X(t)$在区间 $[a, b]$ 上是均方可积的。

$$\int_a^b f(t)X(t)dt = \underset{\Delta\to 0}{l.i.m}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1})$$

下面看均方积分存在的一个充要条件。

定理4 $f(t)X(t)$ 在区间 **[*a*, *b*]** 上均方可积的充要条件是二重积分

$$\int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R_X(s,t) ds dt$$

存在；且有

$$E\left|\int_a^b f(t) X(t) dt\right|^2 = \int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R_X(s,t) ds dt$$

下面叙述均方积分的性质。利用均方积分的定义和均方极限的性质就能对这些性质进行证明，故它们的证明在此省略。

（1）若随机过程 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方连续，则 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积。

(2) 若α，β是常数，则

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dt = \alpha \int_a^b X(t) dt + \beta \int_a^b Y(t) dt.$$

(3) $\int_a^b X(t) dt = \int_a^c X(t) dt + \int_c^b X(t) dt.$

（4）设随机过程 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方连续，则

$$Y(t)=\int_a^t X(s)ds, \quad a\le t\le b$$

在 $[a,b]$ 上均方可导，且 $Y'(t)=X(t)$.

（5）设随机过程 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可导，且 $X'(t)$ 在此区间上均方连续，则

$$X(b)-X(a)=\int_a^b X'(t)dt$$

(6) $E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right]=\int_a^b f(t)EX(t)dt=\int_a^b f(t)m_X(t)dt.$

此式表明数学期望与积分号可交换次序；但前者积分为随机过程的积分，而后者积分为普通积分。

例（补充）：设随机过程 $X(t)$ 的均值函数为

$$m_X(t) = t^2 + 1$$

试求 $Y(s) = \int_0^s X(t)dt$ 的均值函数。

解： 由均方积分的性质知

$$EY(s) = \int_0^s EX(t)dt = \int_0^s (t^2 + 1)dt = \frac{s^2}{3} + s.$$

例（补充）：设随机过程 $X(t)$ 的协方差函数为

$$C_X(t_1,t_2)=(1+t_1t_2)\sigma^2$$

试求 $Y(s)=\int_0^s X(t)dt$ 的协方差函数和方差函数。

解：$$C_Y(s_1,s_2)=E[Y(s_1)-EY(s_1)][Y(s_2)-EY(s_2)]$$

$$=E[\int_0^{s_1}[X(t_1)-EX(t_1)]dt_1][\int_0^{s_2}[X(t_2)-EX(t_2)]dt_2]$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}E[X(t_1)-EX(t_1)][X(t_2)-EX(t_2)]dt_1dt_2$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}C_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}(1+t_1t_2)\sigma^2dt_1dt_2$$

例（补充）：设随机过程 $X(t)$ 的协方差函数为

$$C_X(t_1,t_2)=(1+t_1t_2)\sigma^2$$

试求 $Y(s)=\int_0^s X(t)dt$ 的协方差函数和方差函数。

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\sigma^2 dt_1dt_2+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\sigma^2 t_1t_2dt_1dt_2$$

$$=\sigma^2 s_1s_2+\sigma^2\frac{s_1^2}{2}\frac{s_2^2}{2}$$

$$=\sigma^2 s_1s_2(1+\frac{s_1s_2}{4}),$$

$$D_Y(s)=C_Y(s,s)=\sigma^2s^2(1+\frac{s^2}{4}).$$

均方积分的定义还可以推广到无限区间。

定义 设随机过程 $\{X(t), t\in[a,\infty)\}$ 及函数 $f(t), t\in[a,\infty)$. 若均方极限

$$\underset{b\to\infty}{l.i.m}\int_a^b f(t)X(t)dt$$

存在，则称此极限为 $f(t)X(t)$ 在无穷区间 $[a,\infty)$ 上的均方积分。记为 $\int_a^{\infty} f(t)X(t)dt$

无限区间上的均方积分具有类似于前面均方积分从（1）到（5）的性质，只要把 b 换成 ∞ 即可。同样地还可以定义均方积分 $\int_{-\infty}^{b} f(t)X(t)dt$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)X(t)dt$ ，我们不再赘述。

单选题 2分

设置

1、W 是参数为σ^2的维纳过程，$Y(t)=\frac{1}{L}\int_t^{t+L}W(u)du$, L >0 为常数，则$Y(t)$均值函数为（ ）。

A $t\sigma^2$

B t

C 0

D 1

提交

单选题 2分

设置

N(t)是强度为 λ 的泊松过程，$Y(t)=\frac{1}{L}\int_{t}^{t+L}N(u)du$,则$Y(t)$的均值函数（ ）

A $\frac{1}{2}\lambda(2t+L)$

B 0

C 1

D $\lambda(2t+L)$

提交

单选题 2分

设置

随机过程$X(t) = At^2 + Bt + C$, (其中 A, B, C 独立同分布且服$N(0, \sigma^2)$从，则X'(t)的相关函数$R_{x'}(s,t)$为（　　）。

A $4st\sigma^2$

B $(4st-1)\sigma^2$

C σ^2

D $(4st+1)\sigma^2$

提交

主观题 10分

设置

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是随机过程，其均值函数 $m_X(t) = \lambda t$，相关函数为 $R_X(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$. 令 $M(T) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，试求 $M(T)$ 的均值函数 $E[M(T)]$ 和方差函数 $D[M(T)]$.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答