2014—2015 学年第二学期

《高等数学（2-2）》第一阶段考试卷参考答案

（ 工 科 类 ）

专业班级

姓　　名

学　　号

开课系室基础数学系

考试日期　　2015 年 4 月 19 日

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
本题满分	12	18	14	22	10	12	12	
本题得分								
阅卷人								

注意事项：

1．本试卷共七道大题，包括基础达标题（第一到四题），综合提高题（第五、六题），应用拓展题（第七题），满分 100 分；

2．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

3. 本试卷正文共 7 页；试卷本请勿撕开，否则作废。

一、(共 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“√”或“×”；如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

本题满分 12 分	
本题得分	

1．设 $\vec{a}\neq\vec{0}$，已知 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$，则必有 $\vec{b}=\vec{c}$．（√）
……（2 分）

证明：由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 得 $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，故 $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$；

由 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ 得 $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$，故 $\vec{a}\,/\!/\,(\vec{b}-\vec{c})$；

又 $\vec{a}\neq\vec{0}$，故 $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$，即 $\vec{b}=\vec{c}$．……（2 分）

2．若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在，

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数也存在.（×）……（2 分）

例如：函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 沿任何方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0}{\rho}=1,$$

但是 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，同理 $f_y'(0,0)$ 也不存在。……（2 分）

3．若点 (x,y) 沿着无数多条平面曲线趋向于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 都趋向于某一个常数 A，则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.（×）……（2 分）

例如：$f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$，虽然当 (x,y) 沿着直线 $y=kx$（$k\neq -1$）趋向于 $(0,0)$ 时，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x+kx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{1+k}=0$；但是当 (x,y) 沿着 $y=x^2-x$ 趋向于 $(0,0)$ 时，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x+x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$.故 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在. …（2 分）

或例如：$f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$，虽然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(kx)^2}{x^2+(kx)^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x}{1+k^4x^2}=0$，

但 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y^2\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2\cdot y^2}{(y^2)^2+y^4}=\dfrac{1}{2}$.故 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

或例如：$f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$，虽然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot kx}{x^6+(kx)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^4+k^2}=0,$

但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^3\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^3\cdot x^3}{x^6+(x^3)^2}=\dfrac{1}{2}$.故 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

二、(共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分)

本题满分 18 分	
本题得分	

1．求与向量 $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ 共线且满足 $\vec{a}\cdot\vec{x}=-28$ 的向量 $\vec{x}$.

解：设 $\vec{x}=\lambda\vec{a}=\{-2\lambda,\lambda,-3\lambda\}$，……（2 分）

又 $\vec{a}\cdot\vec{x}=4\lambda+\lambda+9\lambda=-28$，……（2 分）

即 $\lambda=-2$. 故 $\vec{x}=\{4,-2,6\}$. ……（2 分）

2．求过直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ 且垂直于平面 $3y-2z-5=0$ 的平面方程.

解：直线的方向向量为 $\vec{s}=\{1,2,-1\}$，已知平面的法向量为 $\vec{n}=\{0,3,-2\}$，则所求平面的法向量

为：$\vec{n}^*=\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{vmatrix}=\{-1,2,3\}$ ……（4 分）

已知平面过点 $(1,2,-3)$，故所求平面方程为：$-(x-1)+2(y-2)+3(z+3)=0$

即：$x-2y-3z-6=0$. ……（2 分）

3．求由曲面 $2z=x^2+y^2$ 及 $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ 所围成的立体在 xOy 坐标面上的投影区域.

解:两曲面的交线为 $\begin{cases}2z=x^2+y^2\\ z=\sqrt{3-x^2-y^2}\end{cases}$，消去 z 得到交线关于 xOy 坐标面的投影柱面：

$$x^2+y^2=2，……（3 分）$$

交线在 xOy 坐标面上的投影曲线为：$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=0\end{cases}$， ……（2 分）

立体在 xOy 坐标面上的投影区域为：$\begin{cases}x^2+y^2\le 2\\ z=0\end{cases}$. ……（1 分）

三、（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

本题满分 14 分	
本题得分	

1. 求曲线$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2+z^2=6} \\ \boldsymbol{x^2+y^2=z} \end{cases}$在点**(1,1,2)**处的切线方程和法平面方程.

解：对方程组每个方程两边分别关于x求导得,

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}，即\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \\ 2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=-2x \end{cases}$$，……（**2** 分）

当$J=\begin{vmatrix} y & z \\ 2y & -1 \end{vmatrix}=-y-2yz\neq 0$时

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -2x & -1 \end{vmatrix}}{-y-2yz}=\frac{x+2xz}{-y-2yz}，\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 2y & -2x \end{vmatrix}}{-y-2yz}=0.$$ ……（**2** 分）

曲线在点(1,1,2)处的切向量为$\vec{T}=\{1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\}\Big|_{(1,1,2)}=\{1,-1,0\}$，……（**1** 分）

故所求切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$，……（**1** 分）

法平面方程为：$x-1-(y-1)+0\cdot(z-2)=0$，即：$x-y=0$. ……（**1** 分）

2. 求直线$\begin{cases} \boldsymbol{2x-y+z-1=0} \\ \boldsymbol{x+y-z+1=0} \end{cases}$在平面 $\boldsymbol{x+2y-z=0}$ 上的投影直线的方程.

解：设过直线的平面束方程为$(2x-y+z-1)+\lambda(x+y-z+1)=0$

即：$(2+\lambda)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0$.……（2 分）

又因为该平面垂直于已知平面$x+2y-z=0$，故

$$(2+\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot(-1)=0.$$……（2 分）

解得$\lambda=\dfrac{1}{4}$.……（1 分）

因此得到投影柱面：$3x-y+z-1=0$.

所求直线的投影曲线为：$\begin{cases} 3x-y+z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$.……（2 分）

本题满分 22 分	
本题得分	

四、计算题（共 3 小题，前两小题每题 7 分，第 3 小题 8 分，共计 22 分）

1. 设 $z = f(2x-y, y\sin x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 2 + f_2' \cdot y\cos x$ ……（3 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 f_1' + y\cos x\, f_2'\right)$$

$$= 2\left(f_{11}'' \cdot (-1) + f_{12}'' \cdot \sin x\right) + \cos x\, f_2' + y\cos x\left(f_{21}'' \cdot (-1) + f_{22}'' \cdot \sin x\right)$$ ……（3 分）

$$= -2 f_{11}'' + \left(2\sin x - y\cos x\right) f_{12}'' + \frac{1}{2} y \sin 2x\, f_{22}'' + \cos x\, f_2'$$ ……（1 分）

2. 已知 $\varphi(\frac{y}{z}) - \frac{x}{z} = 0$，其中 φ 为可微函数，求 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x,y,z) = \varphi(\frac{y}{z}) - \frac{x}{z}$，则 $F_x' = -\frac{1}{z}$，$F_y' = \varphi'(\frac{y}{z}) \cdot \frac{1}{z}$，$F_z' = \varphi'(\frac{y}{z}) \cdot \frac{(-y)}{z^2} + \frac{x}{z^2}$. …（3 分）

当 $F_z' \neq 0$ 时，$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{z}{x - y\varphi'(\frac{y}{z})}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{-z\varphi'(\frac{y}{z})}{x - y\varphi'(\frac{y}{z})}$. ……（2 分）

于是 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.（2 分）

3. 设 $\vec{n}$ 为曲面 $\Sigma: 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求：

（1）函数 $u = e^{\frac{y}{x}} + \ln\sqrt{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度；

（2）函数 $u = e^{\frac{y}{x}} + \ln\sqrt{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解：（1）$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$，$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2z}$，……（2 分）

$$gradu\Big|_{(1,1,1)} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\Bigg|_{(1,1,1)} = \{-e, e, \frac{1}{2}\}.$$ ……（2 分）

(2) $\vec{n} = \{4x, 6y, 2z\}\big|_{(1,1,1)} = \{4,6,2\}$，$\vec{n}^0 = \{\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\}$ ……（2 分）

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = gradu \cdot \vec{n}^0 = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot (-e) + \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot e + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+2e}{2\sqrt{14}}.$$ ……（2 分）

五、（本题 10 分）

本题满分 10 分	
本题得分	

已知 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，设 $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{d}=k\vec{a}-\vec{b}$.

问：(1) k 为何值时，$\vec{c}\perp\vec{d}$；

(2) k 为何值时，以 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 为邻边的平行四边形的面积为 6.

解：(1)要使 $\vec{c}\perp\vec{d}$，需要 $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$

而 $\vec{c}\cdot\vec{d}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}-b)=2k\vec{a}^{2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^{2}$……（1 分）

因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 故 $\vec{c}\cdot\vec{d}=2k|\vec{a}|^{2}-|\vec{b}|^{2}=2k-4=0$……（2 分）

得 $k=2$. ……（1 分）

(2) $\vec{c}\times\vec{d}=(2\vec{a}+\vec{b})\times(k\vec{a}-b)=2\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{a}\times\vec{b}+k\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=(-2-k)\vec{a}\times\vec{b}$. ……（2 分）

以 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$S=|\vec{c}\times\vec{d}|=|-2-k||\vec{a}\times\vec{b}|=|2+k||\vec{a}||\vec{b}||\sin\angle(\vec{a},\vec{b})|=2|2+k|$……（2 分）

故 $S=2|2+k|=6$，解得 $k=1$ 或-5. ……（2 分）

六、（本题 12 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点处的连续性、偏导数存在性和可微性；并写出多元函数的连续性、偏导数存在性和可微性之间的相互关系.

解：（1）因为 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0}0$, ……（2 分）

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续；……（1 分）

（2） $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x\ ,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$,

同理， $f_y'(0,0)=0$ ；……（2 分）

（3） $\Delta z=f(0+\Delta x\ ,0+\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,……（1 分）

由(2)知， $f_x'(0,0)=0$ ， $f_y'(0,0)=0$ ，

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ……（2 分）

当 $\Delta y=k\Delta x$ 时，此时 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ ，故二重极限不存在，

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. ……（2 分）

多元函数在一点处可微，则函数在该点处连续、偏导数存在；反之不成立。

多元函数连续性和偏导数存在性之间没有相互推出关系。……（2 分）

七、（本题 12 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品的广告。根据统计资料，销售收入 R（单位：万元）与电台广告费用 x_1（单位：万元）及报纸广告费用 x_2（单位：万元）之间的关系有如下经验公式：

$$\boldsymbol{R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2}$$

已知利润=销售收入–广告费用，求：

（1）在广告费用不限的情况下，求最优广告策略（即利润最大）；

（2）若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

解：（1）利润函数为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= 15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2-(x_1+x_2) \\ &= 15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2 \end{aligned}$$ ……(1 分)

解方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1-8x_2+13=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -8x_1-20x_2+31=0 \end{cases}$，……（2 分）

得唯一驻点 $x_1=0.75, x_2=1.25$. ……（1 分）

又在 $(0.75,1.25)$ 处有：$A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=-4,\ B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=-8,\ C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=-20$ ……（1 分）

由于 $AC-B^2=16>0,\ A=-4<0$，故函数 $f(x_1,x_2)$ 在 $(0.75,1.25)$ 取得极大值，即最大值. 所以，当电台广告费用为 0.75 万元、报纸广告费用为 1.25 万元时，利润最大. ……（1 分）

（2）要求利润函数 $f(x_1,x_2)$ 在 $x_1+x_2=1.5$ 的条件下的最大值.

令 $L(x_1,x_2)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1.5)$ ……（2 分）

解方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1-8x_2+13+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -8x_1-20x_2+31+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = x_1+x_2-1.5=0 \end{cases}$，……（2 分）解得 $x_1=0, x_2=1.5$. ……（1 分）

由实际意义知道，最大值存在。因此，广告费用全部用于报纸广告时，利润最大. ……（1 分）