2012—2013 学年第一学期　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)参考答案

一．填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共计 18 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad}$.

2．设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)dx=$ $\underline{\quad 2\ln x-\ln^2 x+C \quad}$.

3．定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 x+\cos^6 x)dx=$ $\underline{\quad \dfrac{5!!}{6!!}\pi=\dfrac{5\pi}{16} \quad}$.

4．微分方程 $y'-\dfrac{y}{x}-x^2=0$ 的通解是 $\underline{\quad y=\dfrac{x^3}{2}+Cx \quad}$.

5．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan t dt}{x(1-\cos x)}=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

6．心形线 $r=a(1+\cos\theta),\ (a>0)$ 的周长为 $\underline{\quad 8a \quad}$.

二．选择题（共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）

1．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则下列说法中不正确的有(　B 、C 、D　).

A.若 $f(x)$ 是奇函数，则其原函数是偶函数;

B.若 $f(x)$ 是偶函数，则其原函数是奇函数;（$\left(\dfrac{x^3}{3}+1\right)'=x^2$）

C.若 $f(x)$ 是周期函数，则其原函数是周期函数;

（$|\sin x|$ 是以 π 为周期的函数，但 $\int_0^x|\sin t|dt$ 不是周期函数）

D.若 $f(x)$ 是有界函数，则其原函数是有界函数.　（$(x+1)'=1$　）

2．若 a,b,c,d 成等比数列，则函数 $y=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$ (　D　).

A.有极大值，而无极小值　　B．无极大值，而有极小值

C.有极大值，也有极小值　　D．无极大值，也无极小值

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x>2,\\ ax+b, & x\le 2,\end{cases}$ 在 $x=2$ 处可导, 其中 a , b 为常数，则必有(　C　).

A. $a=2,b=1$；　　　B. $a=-1,b=5$；

C. $a=4,b=-5$；　　　D. $a=3,b=-3$.

4．广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}dx=$(　D　).

A.0;　　　　　　　B. $\ln 2$;　　　　　　C. $\ln 3$;　　　　　　D.发散.

三．计算题（共 5 小题，每小题 7 分，共计 35 分）

1．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$　　$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

2．求不定积分$\int\tan^4 xdx$.

解 1 $\int\tan^4 xdx=\int\tan^2 x(\sec^2 x-1)dx=\int\tan^2 xd(\tan x)-\int\tan^2 xdx$

$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\int(\sec^2 x-1)dx=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$.

解 2 令 $\tan x=u$, 则 $x=\arctan u$, $dx=\frac{du}{1+u^2}$,

$\int\tan^4 xdx=\int\frac{u^4}{1+u^2}du=\int(u^2-1+\frac{1}{1+u^2})du=\frac{u^3}{3}-u+\arctan u+C$

$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$.

3．方程$\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\frac{1}{2}\ln(1+t^2),\end{cases}$确定$y=y(x)$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解： $x'_t=\frac{1}{1+t^2}$，$y'_t=\frac{t}{1+t^2}$，　$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=t$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(t)=\frac{dt}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=1+t^2$.

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$, 求其间断点并判断其类型.

解　$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$　　[或　$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$　(1^∞)

$=\lim\limits_{t\to x}\left[(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right]^{\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}}$　　　　$=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x\ln\frac{\sin t}{\sin x}}{\sin t-\sin x}}$　$(\frac{0}{0})$

$$=\lim_{t\to x}\left[(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}} \qquad = e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x\frac{\sin x}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin x}}{\cos t}} = e^{\frac{x}{\sin x}} \quad]$$

$\therefore x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 为 $f(x)$ 的间断点 ，

又 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{\sin x}}=e^1=e,$ ， $\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；

当 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，

（1） 当 $k=-1,-3,-5,\cdots; k=2,4,6,\cdots$ 时， $\lim\limits_{x\to k\pi+}\frac{x}{\sin x}=+\infty, \lim\limits_{x\to k\pi-}\frac{x}{\sin x}=-\infty,$

$\therefore \lim\limits_{x\to k\pi+} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to k\pi-} f(x)=0,$

（2） 当 $k=1,3,5,\cdots; k=-2,-4,-6,\cdots$ 时， $\lim\limits_{x\to k\pi-}\frac{x}{\sin x}=+\infty, \lim\limits_{x\to k\pi+}\frac{x}{\sin x}=-\infty,$

$\therefore \lim\limits_{x\to k\pi-} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to k\pi+} f(x)=0,$

故 $x=k\pi(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

5．求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

解：特征方程为： $r^2-5r+6=0,$ 特征根为： $r_1=2,\ r_2=3$，

对应的齐次方程的通解为： $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$

因为 $\lambda=2$ 是特征单根，所以设非齐次方程的特解为： $y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入原方程得， $-2Ax+2A-B=x,$ 比较等式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-2A=1,\\ 2A-B=0.\end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, B=-1.$$

$$\therefore y^*=x(-\frac{x}{2}-1)e^{2x}=-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x},$$

故微分方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}.$

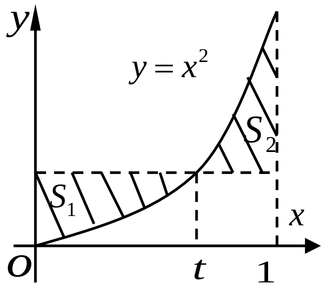
四．应用题（共 3 小题，每小题 10 分，共计 30 分）

1．曲线 $y=\sin x\ \ (0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 与直线 $x=\frac{\pi}{2}, y=0$ 围成一个平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解 1： $V=\pi\int_0^1[(\frac{\pi}{2})^2-(\arcsin y)^2]dy=\frac{\pi^3}{4}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2 d\sin x=2\pi.$

解 2：利用柱壳法，$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \ = 2\pi[-x\cos x + \sin x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$

2．在区间$[0,1]$上给定函数$y = x^2$，问当t为何值时，图中的阴影部分S_1与S_2的面积之和最小?



解：$S(t) = \int_0^t (t^2 - x^2)dx + \int_t^1 (x^2 - t^2)dx$，

$= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$ ，

$S'(t) = 4t^2 - 2t$， 令$S'(t) = 0$得

$t = \frac{1}{2}$或$t = 0$(舍去)， 即$t = \frac{1}{2}$时面积最小 .

3．某人以$2m/s$的速度通过一座桥, 桥面高出水面$20\ m$, 在此人的正下方有一个小船以$\frac{4}{3}\ m/s$的速度与桥垂直的方向航行, 求经$5\ s$后, 人与船相分离的速度.

解：设经过t秒钟后船与人的距离是s米，人行走的距离是x米，船航行的距离是y米，则$s^2 = x^2 + y^2 + 20^2$，两边对t求导可得$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$，

$t = 5$时，$x = 10$，$y = \frac{20}{3}$，$s = \frac{70}{3}$，已知$\frac{dx}{dt} = 2$，$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}$，代入上式得，$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=5} = \frac{26}{21}(m/s)$.

五．证明题（5 分） 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，

且$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = f(0)$，证明：存在$\xi \in (0,1)$，使$f'(\xi) = 0$.

证：由积分中值定理，

$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = 3f(\xi_1)(1 - \frac{2}{3}) = f(\xi_1),\ \xi_1 \in [\frac{2}{3},1]$，

$\therefore f(0) = f(\xi_1)$，$f(x)$在$[0,\xi_1]$上满足洛尔中值定理的条件，

存在$\xi \in (0,\xi_1) \subset (0,1)$，使$f'(\xi) = 0$.