2009—2010 学年第二学期　　高等数学（2-2）期末试卷(A)参考答案

一、填空题（$6\times 5分=30分$）

1. 若向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两互相垂直，且$|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=12,|\vec{c}|=13$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$ $\underline{13\sqrt{2}}$.

2. 设函数$z=xy\sin\dfrac{y^2}{x^2}$，求$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{2z}$.

3. 设函数$f(x,y)$为连续函数， 改变下列二次积分的积分顺序：

$$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=\underline{\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy}.$$

4. 计算$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=$ $\underline{e^2-\dfrac{7}{2}}$.

5. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^{2n}$的收敛域为：$\underline{(-\sqrt{3},\sqrt{3})}$.

6. 设函数$f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$的傅里叶级数为：$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，

则其系数$b_3=$ $\underline{\dfrac{2\pi}{3}}$.

二、选择题（$4\times 5分=20分$）

1. 直线$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$与平面$3x+4y-z=2$的位置关系是(　***A***　)

(A) 直线在平面内；　(B) 垂直；　(C) 平行；　(D) 相交但不垂直.

2. 设函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$，则$f(x,y)$（　***C***　）

(A) 在原点有极小值；　(B) 在原点有极大值；

(C) 在$(2,-2)$点有极大值；　(D) 无极值.

3. 设L是一条无重点、分段光滑，且把原点围在内部的平面闭曲线，L的方向为逆时针方向，

则$\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$（　***C***　）

(A) 0；　(B) π；　(C) 2π；　(D) -2π.

4. 设a为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin na}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$　（　***B***　）

(A) 绝对收敛；　(B) 发散；　(C) 条件收敛；　(D) 敛散性与a值有关.

三、计算题（7+7+7+7+6+8=42 分）

1. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在原点$(0,0)$处是否连续，并求出两个偏导数$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$.（7 分）

解：令 $x=ky^2,\lim\limits_{y\to0}f(ky,y)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{ky^4}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$，随 k 的取值不同，其极限值不同，$\therefore\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在原点不连续；

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$.

2. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ 其中 Ω 是由上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体．（7 分）

解：作球面坐标变换：$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi.$ 则

$dxdydz=\rho^2\sin\varphi d\theta d\varphi d\rho$，　$\Omega:0\le\theta\le2\pi$，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$，$0\le\rho\le\sqrt2$．

$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt2}\rho^3d\rho=(2-\sqrt2\,)\pi$.

3. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所割下部分的曲面面积．（7 分）

解：锥面 Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in D_{xy}=\{x^2+y^2\le2x\}$. $z_x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$\therefore S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+{z_x'}^2+{z_y'}^2}\,dxdy=\sqrt2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\sqrt2\,\pi.$

4. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}y^2zdxdy+z^2xdydz+x^2ydzdx$，其中 Σ 是由 $z=x^2+y^2$，$x^2+y^2=1$，
$x=0,y=0,z=0$ 围在第一卦限的立体的外侧表面．（7 分）

解：设 Ω 为 Σ 所围立体，$P=z^2x,Q=x^2y,R=y^2z,\ \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=x^2+y^2+z^2$, 由 Gauss 公式,

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}y^2zdxdy+z^2xdydz+x^2ydzdx=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

作柱面坐标变换：$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z.$ 则

$$dxdydz=rd\theta drdz，\quad \Omega:0\le\theta\le\frac{\pi}{2}，0\le r\le1，0\le z\le r^2．$$

$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1rdr\int_0^{r^2}(r^2+z^2)dz=\dfrac{5}{48}\pi$.

5. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac32}}$ 的敛散性.（6 分）

解：$\because\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac54}\cdot\dfrac{\ln n}{n^{\frac32}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac14}}=0,\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac32}}$ 收敛．

6. 把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,2^{2n-1}}x^{2n-1}$ 的和函数展成 $x-1$ 的幂级数.（8 分）

解：设级数的和函数为$S(x)$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,2^{2n-1}}\ x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=\sin\left(\frac{x}{2}\right)，\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

即 $S(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{x-1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{x-1}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}$

$$=\sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}\ +\cos\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n+1}$$

$$=\sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot 2^{2n}}(x-1)^{2n}$$

$$+\cos\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\,(x-1)^{2n+1}\ ,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

四、设曲线L是逆时针方向圆周$(x-a)^2+(y-a)^2=1$，$\varphi(x)$是连续的正函数，

证明：$\oint_L\frac{xdy}{\varphi(y)}-y\varphi(x)dx\geq 2\pi$.　（8 分）

证明：设$D:(x-a)^2+(y-a)^2\leq 1$，由 Green 公式，

$$\oint_L\frac{xdy}{\varphi(y)}-y\varphi(x)dx=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(\varphi(x)+\frac{1}{\varphi(y)})dxdy$$ （而D关于$y=x$对称）

$$=\iint_D(\varphi(x)+\frac{1}{\varphi(x)})dxdy\geq\iint_D 2\sqrt{\varphi(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}\ dxdy=2\iint_D dxdy=2\pi.$$

即 $\oint_L\frac{xdy}{\varphi(y)}-y\varphi(x)dx\geq 2\pi$.