2012—2013学年第二学期《高等数学（2-2）》期末考试A卷

一.（共3小题，每小题5分，共计1 5分）

1．已知$\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$，求$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

解 设$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为φ，则$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore \varphi = \dfrac{\pi}{4}$，

故$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2.$

2．求曲线$\Gamma: \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$在$yoz$坐标面上的投影曲线的方程.

解 从$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$中消去$x$得投影柱面：$3y^2 - z^2 = 16$，

$\therefore$ Γ在yoz坐标面上的投影曲线的方程为：$\begin{cases} 3y^2 - z^2 = 16, \\ x = 0 \end{cases}$.

3. 设函数$f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^3 + z^3$，求函数$f$在点$M(1,1,1)$处的梯度，并问函数$f$在点$M(1,1,1)$处沿哪个方向的方向导数最大？最大的方向导数值是多少？

解 $\because \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3z^2,$

$\therefore\ grad\ f\big|_{M(1,1,1)} = \{3x^2 + 2y,\ 2x + 3y^2,\ 3z^2\}\big|_{M(1,1,1)} = \{5, 5, 3\},$

根据梯度的定义，函数f在点$M(1,1,1)$处沿$\{5,5,3\}$的方向导数最大，最大的方向导数值是$\left|grad\ f\right|\big|_{M(1,1,1)} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{59}$.

二.（共3小题，每小题7分，共计2 1分）

1．设$z = f(ye^x,\ x^2 + y^2)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^x f_1' + 2x\ f_2',$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = e^x f_1' + ye^x[f_{11}''\cdot e^x + f_{12}''\cdot 2y] + 2x[f_{21}''\cdot e^x + f_{22}''\cdot 2y]$$
$$= e^x f_1' + ye^{2x} f_{11}'' + 2e^x(x + y^2) f_{12}'' + 4xyf_{22}''.$$

2．设曲面$z = z(x,y)$是由方程$x^3 y + xz = 1$所确定，求该曲面在点$M_0(1,2,-1)$处的切平面方程及全微分$dz\big|_{(1,2)}$.

解 令$F(x,y,z) = x^3 y + xz - 1$，$F_x' = 3x^2 y + z$，$F_y' = x^3$，$F_z' = x$，

所求切平面的法向量为：$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}\big|_{M_0}=\{5,1,1\}$，

切平面方程为：$5(x-1)+(y-2)+(z+1)=0$，即 $5x+y+z-6=0.$

又 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{3x^2y+z}{x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-x^2$，

$$\therefore dz\big|_{(1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{M_0}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{M_0}dy=-5dx-dy.$$

3．计算 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x+y)^2\,dxdy$.

解 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x+y)^2\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2+2xy)dxdy$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)dxdy+2\iint\limits_{x^2+y^2\le1}xydxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr+0=2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

三.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 2 1 分）

1． 求上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分面积 S .

解 Σ：$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $D:(x-1)^2+y^2\le1,\ x\ge0,\ y\ge0.$

$$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy=\frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

由对称性，所求面积 $\displaystyle S=2\iint\limits_{\Sigma}dS=2\iint\limits_{D}\frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$（利用极坐标变换）

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}=4\pi-8.$$

2. 设函数 $f(u)$ 具有连续的导数，且满足 $f(0)=0,\ f'(0)=1$，求极限：

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv.$$

解 令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$ 则 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2d\rho$$

$$= 4\pi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2 d\rho$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv = \lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2 d\rho}{\pi t^4} \quad (\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\ f(t)\cdot t^2}{4\pi t^3} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} \ (\frac{0}{0}) = \lim_{t\to 0^+} f'(t) = f'(0) = 1.$$

3．计算 $I = \oint\limits_C \dfrac{x^2dx+\sin(x^2+y^2)dy}{x^2+y^2-2y}$ ，其中 C 为圆周 $x^2+y^2-2y=1$ 的逆时针方向.

解　先用曲线 C 的方程 $x^2+y^2-2y=1$，$x^2+y^2=1+2y$ 代换被积函数,

$I = \oint\limits_C \dfrac{x^2dx+\sin(x^2+y^2)dy}{x^2+y^2-2y} = \oint\limits_C x^2dx+\sin(1+2y)dy$ （利用格林公式，

$P=x^2$，$Q=\sin(1+2y)$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$）$= \iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 2}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$.

另解 $I = \oint\limits_C \dfrac{x^2dx+\sin(x^2+y^2)dy}{x^2+y^2-2y} = \oint\limits_C x^2dx+\sin(x^2+y^2)dy$

（利用格林公式,$P=x^2$，$Q=\sin(x^2+y^2)$）$= \iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 2}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$

$= \iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 2} 2x\cos(x^2+y^2)dxdy = 0$.

（$2x\cos(x^2+y^2)$ 是 x 的奇函数，$x^2+(y-1)^2\le 2$ 关于 y 轴对称）

四.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 1 4 分）

1. 建造一个表面积为 108 m^2 的长方体形敞口水池，问如何选择水池的尺寸，才能使其容积最大.

解 设水池的长宽高分别为 x, y, z　则根据题意，其容积为：

$V = xyz$　且 $xy+2zy+2xz=108$，（$x>0, y>0, z>0$）

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda) = xyz+\lambda(xy+2zy+2xz-108)$,

则
$$\begin{cases} L'_x = yz+\lambda y+2\lambda z = 0 & (1) \\ L'_y = xz+\lambda x+2\lambda z = 0 & (2) \\ L'_z = xy+2\lambda y+2\lambda x = 0 & (3) \\ L'_\lambda = xy+2zy+2zx-108 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases}(1)\times x \Rightarrow xyz+\lambda xy+2\lambda xz=0 & (5)\\ (2)\times y \Rightarrow xyz+\lambda xy+2\lambda yz=0 & (6)\\ (3)\times z \Rightarrow xyz+2\lambda yz+2\lambda xz=0 & (7)\end{cases}$$

$(5)-(6)$ 得 $x=y$，$(6)-(7)$ 得 $y=2z$，代入 (4) 并注意到 $x>0, y>0, z>0$ 得

符合实际意义唯一驻点: $x=y=6$, $z=3$ 即为所求的最大值点，

故水池的长宽高分别为 $6m$ ，$6m$ ，$3m$ 时，才能使其容积最大.

2．计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{ydydz+xdzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧.

解 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{ydydz+xdzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\oiint\limits_{\Sigma}ydydz+xdzdx+zdxdy$$

（$P=y,\ Q=x,\ R=z$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$ 在 Ω 上连续，根据高斯公式）

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=-\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=-\frac{4\pi}{3}.$$

五.（共 3 小题，第 1、2 小题各 5 分，第 3 小题 7 分，共计 1 7 分）

1．判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的敛散性.（5 分）

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e\ne 0,\qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{n})^n\ne 0,$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{n})^n$ 发散.

2．将函数 $f(x)=a^x\ \ (a>0, a\ne 1)$ 展开成 x 的幂级数.（5 分）

解 $\because\ e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ ，$-\infty<x<+\infty$.

$$\therefore\ f(x)=a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n\qquad -\infty<x<+\infty .$$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\pi,\\ 1, & -\pi<x<0.\end{cases}$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，求其傅

里叶系数 a_3 及 $S(2\pi)$, $S(\frac{3\pi}{2})$ 的值.（7 分）

解 $a_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 3xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos 3xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos 3xdx+$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\sin 3x}{3}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}[\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}]\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{2}{9\pi}.$$

$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0+0)+f0-0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$,

$S(\frac{3\pi}{2})=S(2\pi-\frac{\pi}{2})=\ S(-\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=1.$

六.（共 2 小题，第 1 小题 8 分，第 2 小题 4 分，共计 1 2 分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径、收敛域及其和函数.

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1, \therefore$ 收敛半径为1，

当 $x=1$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，当 $x=-1$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，

故所求的收敛域为$[-1,1)$ ；

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ ， $x\in[-1,1)$;

于是 $x\,S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ， $|x|<1$.逐项求导，得

$$[x\,S(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad ,\quad |x|<1.$$

$\therefore xS(x)=\int_0^x[tS(t)]'dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),\qquad |x|<1.$

$\therefore S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$ ，$|x|<1$ 且 $x\neq 0$.

而 $S(-1)=\lim_{x\to -1^+}S(x)=-\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x}\ln(1-x)=\ln 2,\qquad S(0)=1$，

故 $S(x)=\begin{cases}-\frac{\ln(1-x)}{x}, & -1\le x<0\bigcup 0<x<1,\\ 1 & x=0\end{cases}$.

2.（4 分）证明不等式: $\iint_D\frac{e^y}{e^x}dxdy\ge 1$ 成立，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

证 $\because D$ 关于直线 $y=x$ 对称， $\therefore \iint_D\frac{e^y}{e^x}dxdy=\iint_D\frac{e^x}{e^y}dxdy$

$$\therefore \iint_D\frac{e^y}{e^x}dxdy=\frac{1}{2}(\iint_D\frac{e^y}{e^x}dxdy+\iint_D\frac{e^x}{e^y}dxdy)$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D}\left(\frac{e^{y}}{e^{x}}+\frac{e^{x}}{e^{y}}\right)dxdy \quad =\iint_{D}\frac{e^{2y}+e^{2x}}{2e^{x}e^{y}}\,dxdy \geq \iint_{D}\,dxdy=1.$$