2011—2012学年第一学期　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)

一、填空题（每小题3分，共15分）

1．函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点是______________.

2．曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的下凸区间是 _________________.

3． 设 $f'(\ln x)=x\ln x$，则 $f(x)=$______________________.

4． $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$______________________.

5． $y'-\dfrac{1}{x}y=x^2\cos x^2$ 的通解是_______________________.

二、选择题（每小题3分，共15分）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ ）.

A 极限不存在，B 极限存在但不连续，C 连续但不可导，D 可导.

2．已知 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\int_0^{3x}\cos t\mathrm{d}t$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　）.

A． $k=1,\ c=4$， B． $k=1,\ c=-4$， C． $k=3,\ c=4$， D． $k=3,\ c=-4$.

3．设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0,\ f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1-x)}{x^2}=$（ ）.

A．2；　　　B． ∞；　　　C． 1；　　　D． $\dfrac{1}{2}$.

4.函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续导数，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得(　　).

A. 拐点；　　B. 极大值；　C. 极小值；　D. 都不是.

5．微分方程 $y''-y=e^x+e^{-x}$ 的特解形式为（ ）.

A． $a(e^x+e^{-x})$， B． $ax(e^x+e^{-x})$， C． $x^2(ae^x+be^{-x})$，　　D． $x(ae^x+be^{-x})$.

三、**计算题**（每小题 6 分，共 30 分）

1．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} t\ln t dt}{e^{x^4}-1}$

2．方程$\begin{cases} x=\int_0^t \dfrac{t-u}{1+(t-u)^2}du \\ y=t-\arctan t \end{cases}$确定 y 为 x 的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

4．求积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

5．设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$， 求 $\int_0^\pi f(x)dx$.

四、应用题（共 24 分）

1．（本题 6 分）求 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线.

2．（本题 12 分）设由曲线 $y=e^x$ 与过点 $(1,e)$ 的切线及 y 轴所围平面图形为 D.

（1）．求 D 的面积 A;

（2）．求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

3．（本题 6 分）有半径为 R 的半球形容器如图，设容器中已注满水，求将其全部抽出所做的功最少应为多少 ？

五、证明题（16 分）

1.（本题 9 分）设 $x>0$，证明：$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

2.（本题 7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,5]$ 上连续，在 $(0,5)$ 内存在二阶导数，且 $\int_0^2 f(x)dx = 2f(3) = f(4)+f(5)$，证明：

（1）存在 $\eta\in[0,3)$，使 $f(\eta)=f(3)$;

（2）存在 $\xi\in(0,5)$，使 $f''(\xi)=0$.