2014—2015 学年第一学期
《高等数学（2-1）》期末考试 A 卷
（ 工 科 类 ）

参考答案及评分标准

各章所占分值如下：

第 一 章	函数与极限	**16 %;**
第 二 章	一元函数的导数与微分	**16 %;**
第 三 章	微分中值定理与导数的应用	**14 %;**
第 四 章	不定积分	**15 %;**
第 五 章	定积分及其应用	**26 % .**
第 六 章	常微分方程	**13 % .**

本题满分 12 分	
本题得分	

一.（共 3 小题，每小题 4 分，共计 12　分）判断下列命题是否正确 ？在

题后的括号内打“ √ ”或“ × ” ，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明 .

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.（　　√　　）--（2 分）

证 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$， $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$， $(n=1,2,\cdots)$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，

但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=1$，

由海涅定理， $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在. --（2 分）

2．若曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点处存在切线，则 $f(x)$ 在 x_0 点必可导.（　　×　　）

---（2 分）

例： $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 点处有切线 $x=0$，但 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导.

---（2 分）

3．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且下凸，在 (a,b) 内二阶可导，则 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f''(x)>0$.（　　×　　）

---（2 分）

例： $f(x)=x^4$ 在 $[-2,3]$ 上连续且下凸，但 $f''(0)=0$.

. ---（2 分）

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}-1)\cdot\sin(n!)$.

解 $\because \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}-1)=0,\quad |\sin(n!)|\le 1$,--（3 分）

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}-1)\cdot\sin(n!)=0$.---（3 分）

2. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^4)\,e^{t-x}dt}{x^4}$.

解 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^4)\,e^{t-x}dt}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^4)\,e^{t}dt}{x^4e^x}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$----------------------------（3 分）

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^4)e^x}{(4x^3+x^4)e^x}\ =\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^4}{4x^3+x^4}=1$.---（3 分）

3. 求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$.

解 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$ --（3 分）

$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.---（3 分）

三.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点并判断其类型.

解 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，---（3 分）

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}=1$，

$\therefore$ $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. --（3 分）

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

解 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{e^{x^2}2x\cdot x-(e^{x^2}-1)}{x^2}=2e^{x^2}-\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$ -----------------（3 分）

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{x^2}-1}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{2x}=1,$$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}2e^{x^2}-\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ --（3 分）

3．设方程 $\begin{cases}x=\ln(\sin t)\\ y=\cos t+t\sin t\end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=t\sin t$，---（3 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(t\sin t\right)=\frac{d}{dt}\left(t\sin t\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t}{x'(t)}=\sin t\tan t+t\sin t.$$

---（3 分）

四．（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．求不定积分 $\int e^{x^2+\ln x}\ dx$.

解 $\int e^{x^2+\ln x}\ dx = \int e^{x^2}\cdot e^{\ln x}dx = \int e^{x^2}x\ dx$ ----------------------（3 分）

$= \frac{1}{2}\int e^{x^2}\ d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.---（3 分）

2．求不定积分 $\int x\cos^2 x\ dx$.

解 $\int x\cos^2 x\ dx = \int x\frac{1+\cos 2x}{2}\ dx$ ---（1 分）

$= \frac{1}{2}\int x\ dx + \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\int xd(\sin 2x)$ ---（2 分）

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x\ dx$------------------------------------（2 分）

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$.------------------------------------（1 分）

3．设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，求定积分 $\int_{-1}^{1}\{[f(x)+f(-x)]\sin x + \sqrt{1-x^2}\}\ dx$.

解 1 $\int_{-1}^{1}\{[f(x)+f(-x)]\sin x + \sqrt{1-x^2}\}\ dx$

$= \int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]\sin x\ dx + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$------------------------------（1 分）

$= 0 + 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$（上半单位圆的面积）-----------------------------------（3 分）

$= 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.---（2 分）

解 2 $\int_{-1}^{1}\{[f(x)+f(-x)]\sin x + \sqrt{1-x^2}\}\ dx$

$= \int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]\sin x\ dx + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$---------------------------（1 分）

$= 0 + + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$（上半单位圆的面积）------------------------------（3 分）

$= \frac{\pi}{2}$.---（2 分）

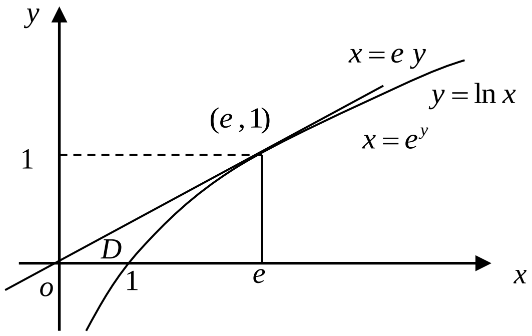
本题满分 8 分	
本题得分	

五.（本题 8 分） 设由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $x-ey=0$ 及 x 轴所围平面图形为 D

（1）求 D 的面积 S；（4 分）

（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转所得旋转体的体积 V .（4 分）

解 曲线 $y=\ln x$ 与直线 $x-ey=0$ 的交点为 $(e,1)$，------------（1 分）



(1) $S=\int_0^1 (e^y-e\,y)dy$

$$=[e^y-\frac{y^2}{2}e]\Big|_0^1$$

$$=\frac{e}{2}-1.$$ ---------------------（3 分）

（2） $V=V_1-V_2=\pi\int_0^1 (e-ey)^2 dy-\pi\int_0^1 (e-e^y)^2 dy$ -----------------------------（2 分）

$$=\pi\, e^2\int_0^1 (1-y)^2\, dy-\pi\int_0^1 (e^2-2ee^y+e^{2y})\, dy$$

$$=-\pi\, e^2\,\frac{(1-y)^3}{3}\Big|_0^1-\pi(e^2 y-2ee^y+\frac{e^{2y}}{2})\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi\, e^2}{3}-\pi\,(2e-\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2})=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$ ---------------------（2 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

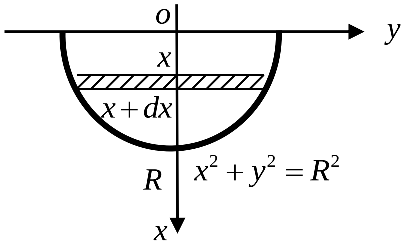
六.（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1．设有半径为 R 的半球形蓄水池中已盛满水（水的密度为 ρ），求将池中水全部抽出所做的功.

解 过球心的纵截面建立坐标系如图,

则半圆方程为 $x^2+y^2=R^2$. ----------------------------------（1 分）

$\forall x\in[0,R]$,　　取 $[x, x+dx]$ 所做功的微元：



$$dW=\rho g\pi(R^2-x^2)dx\cdot x \quad \text{（其中} g \text{ 为重力加速度）}$$

$$=\rho g\pi(R^2x-x^3)dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（3分）}$$

故 $W=\rho g\pi\int_0^R((R^2x-x^3)dx$

$$=\frac{\pi}{4}\rho gR^4 .$$ --（2 分）

2．设有质量为 m 的降落伞以初速度 v_0 开始降落，若空气的阻力与速度成正比（比例系数为 $k>0$），求降落伞下降的速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下降的速度为 $v(t)$，则根据牛顿第二运动定律，有

$m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv$，其中 g 为重力加速度，---（2 分）

分离变量，得 $\dfrac{dv}{mg-kv}=\dfrac{dt}{m}$ ，

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$，

$$-\frac{1}{k}\ln|\,mg-kv\,|=\frac{t}{m}+C_1 \;, \qquad \ln|\,mg-kv\,|=-\frac{k}{m}t-kC_1 ,$$

$mg-kv=Ce^{-\frac{k}{m}t}$　（其中 $C=e^{-kC_1}$， $mg-kv>0$ ）--------------------------------（2 分）

由已知 $v(0)=v_0$，代入上式，得 $C=mg-kv_0$，

故 $\displaystyle v=\frac{mg}{k}+(v_0-\frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$.---（2 分）

七.（本题 6 分）求微分方程 $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$ 的通解.

本题满分 6 分	
本题得分	

解 特征方程为：$r^2-5r+6=0$, 特征根：$r_1=2$, $r_2=3$.

对应齐次方程的通解为：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.--（3 分）

而 0 不是特征根，可设非齐次方程的特解为 $y_1=Ax^2+Bx+C$，----------------（1 分）

$y_1'=2Ax+B$, $y_1''=2A$, 代入原方程得，

$$2A-5(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx+C)=6x^2-10x+2,$$

$$6Ax^2+(6B-10A)x+2A-5B+6C=6x^2-10x+2,$$

比较同次幂的系数，得 $\begin{cases}6A=6,\\6B-10A=-10,\\2A-5B+6C=2.\end{cases}$

解之得，$A=1,\ B=0,\ C=0$.　　$\therefore\ y_1=x^2$.

故所要求的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x^2$.---（2 分）

本题满分 8 分	
本题得分	

八.（本题 8 分）设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 (x, y) $(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距且 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$.

（1）试求曲线 L 的方程；

（2）求 L 位于第一象限的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

解（1）过曲线 L 上点 (x, y) 处的切线方程为：$Y-y=y'(X-x)$，

令 $X=0$，得切线在 y 轴上的截距：$Y=y-xy'$ ，

由题意，得 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，即 $\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{y}{x}-\frac{dy}{dx}$，　$(x>0)$ ------------（2 分）

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$ ，　$(x>0)\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\int\frac{dx}{x}$ ，　$(x>0)$

$\Rightarrow\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\ln x+\ln C$, $\Rightarrow x(u+\sqrt{1+u^2})=C$, 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入并化简，得

$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$，由 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，令 $x=\frac{1}{2}$， $y=0$，得 $C=\frac{1}{2}$，

故曲线 L 的方程为：$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$, 即　$y=\frac{1}{4}-x^2$.---------------------------------（2 分）

（2）曲线 L： $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 (x, y) 处的切线方程为：$Y-y=y'(X-x)$，

即 $Y-(\frac{1}{4}-x^2)=-2x(X-x)$，亦即 $Y=-2x\,X+x^2+\frac{1}{4}$ $(0<x\le\frac{1}{2})$，

切线与 x 轴及 y 轴的交点分别为：$(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x}, 0)$，$(0, x^2+\frac{1}{4})$.----------------------（2 分）

所求面积 $S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+\frac{1}{4})^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-x^2)dx$，　$(x>0)$

$$S'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2(x^2+\frac{1}{4})-2(x^2+\frac{1}{4})^2}{x^2}=\frac{1}{4x^2}(x^2+\frac{1}{4})(3x^2-\frac{1}{4})，\quad (x>0)$$

令 $S'(x)=0$，得 $S(x)$ 符合实际意义唯一驻点： $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

即 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 为 $S(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内的最小值点， 故所求切线方程为：

$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}$, 即 $Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}$.--（2 分）