2006-2007 学年第二学期工科 高等数学（2-2）期中试题参考答案

一、填空题(每小题 5 分, 共 40 分)

1．设向量 $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，则（$\vec{a}\times 2\vec{b}$）$\cdot$（$2\vec{a}-3\vec{b}$）= ____0____.

2．已知向量 $\vec{a}=\{4,-3,2\}$，向量 $\vec{u}$ 与三个坐标轴正向构成相等的锐角，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{u}$ 轴上的投影等于 __$\sqrt{3}$__.

3．已知空间三角形三顶点 $A(1,1,-1),B(2,1,0),C(0,0,2)$, 则 ΔABC 的面积等于 __$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$__；过三点的平面方程是: __$x-4y-z+2=0$__.

4．直线 $L:\begin{cases}2y+3z-5=0\\x-2y-z+7=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x-y+3z+8=0$ 内的投影直线方程是：

$$\begin{cases}x-2y-z+7=0\\x-y+3z+7=0\end{cases}.$$

5. 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量是 __$\{0,\dfrac{2}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{15}}\}$__.

6．设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __1__.

7. 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点（1，2）处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$ __$4dx-2dy$__.

8. 曲面 $z=x^2+y^2$ 平行于平面 $2x+4y-z=0$ 的切平面方程. 是：__$2x+4y-z-5=0$__.

二、(7 分）设平面区域 D 由 $y=x,xy=1$ 和 $x=2$ 所围成，若二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{Ax^2}{y^2}dxdy=1$，则常数 $A=$ __$\dfrac{4}{9}$__.

解题过程是：$\because\ D:1\le x\le 2,\ \dfrac{1}{x}\le y\le x$.

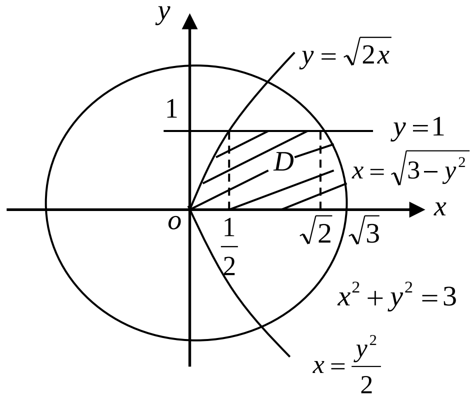
$$\therefore\iint\limits_D\frac{Ax^2}{y^2}dxdy=A\int_1^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=A\int_1^2x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=A\int_1^2x^2(-\frac{1}{y})\bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx$$

$$=A\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9A}{4},\ \text{由已知}\ \frac{9A}{4}=1,\text{故}\ A=\frac{4}{9}.$$

三、(8 分) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，在直角坐标系下将二次积分 $\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$ 交换积分次序，

应是 $\underline{\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_0^1 f(x,y)dy+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy}$.

解题过程是：



$\because$ D: $0\le y\le 1$, $\frac{y^2}{2}\le x\le\sqrt{3-y^2}$.

即区域 D 由 $y=0, y=1, y=\sqrt{2x}$ $y=\sqrt{3-x^2}$ 所围成(如右图).

$$\therefore D=\left\{\begin{matrix} 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 0\le y\le\sqrt{2x}\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{2} \\ 0\le y\le 1\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}\sqrt{2}\le x\le\sqrt{3} \\ 0\le y\le\sqrt{3-x^2}\end{matrix}\right\}.$$

$$\therefore \int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_0^1 f(x,y)dy+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy.$$

四、(7 分) 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，若单位向量 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则方向导数

$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,2,3)}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ；该函数在点 (1, 2, 3) 的梯度是 $\underline{\frac{1}{3}\{1,1,1\}}$ ；该函数在点 (1, 2, 3) 处方向导

数的最大值等于 $\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

解题过程是：$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,2,3)}=u'_x(1,2,3)\cdot\cos\alpha+u'_y(1,2,3)\cdot\cos\beta+u'_z(1,2,3)\cdot\cos\gamma$

$$=\left.\frac{x}{3}\right|_{(1,2,3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\left.\frac{y}{6}\right|_{(1,2,3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\left.\frac{z}{9}\right|_{(1,2,3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$gradu\,|_{(1,2,3)}=\{\,u'_x(1,2,3)\,,u'_y(1,2,3)\,,\ u'_z(1,2,3)\,\}=\frac{1}{3}\{1,1,1\}.$$

$$|gradu(1,2,3)|=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

五、(8 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$
.

（I）验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$；

（II）若 $f(1)=0, f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解题过程是：令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$， $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2 f'(u)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2 f'(u)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$,

又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2 f'(u)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}+f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2 f'(u)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=0,$

$\Rightarrow f''(u)+\frac{f'(u)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\qquad \therefore f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$ 解此微分方程,

$\frac{df'(u)}{du}=-\frac{f'(u)}{u},\Rightarrow\frac{df'(u)}{f'(u)}=-\frac{du}{u},\Rightarrow\ln|f'(u)|=-\ln|u|+\ln|C_1|,\Rightarrow f'(u)\cdot u=C_1,$

由 $f'(1)=1,\Rightarrow C_1=1$, $\therefore f'(u)\cdot u=1,\Rightarrow\frac{df(u)}{du}=\frac{1}{u},\Rightarrow df(u)=\frac{du}{u},\Rightarrow f(u)=\ln|u|+C_2,$

由 $f(1)=0,\Rightarrow C_2=0,$ 故 $f(u)=\ln|u|$.

六、(7 分) 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$， 计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

解题过程是：$\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix}D\text{关于}x\text{轴对称, 被}\\ \text{积函数是}y\text{的偶函数}\end{pmatrix}$

$$+\iint\limits_D\frac{xydxdy}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix}D\text{关于}x\text{轴对称, 被}\\ \text{积函数是}y\text{的奇函数}\end{pmatrix}$$

$=2\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}+0=2\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$ （D_1是D在x轴上方的部分，令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ ）

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{1+r^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{d(1+r^2)}{1+r^2}=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi\ln 2}{2}.$

七、(8 分) 设空间区域Ω是由曲线$\begin{cases}y^2=z,\\ x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=1,z=4$所围成的区域，计算三重积分$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dxdydz$..

解题过程是：Ω由$x^2+y^2=z,z=1,z=4$所围成，作柱面坐标变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，则

$\Omega=\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\\ 1\le z\le 4\end{cases}\bigcup\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 1\le r\le 2\\ r^2\le z\le 4\end{cases}, dxdydz=rd\theta drdz$,

$\therefore\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr\int_1^4dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2rdr\int_{r^2}^4dz$

$$=\frac{3\pi}{2}+2\pi[r^4-\frac{r^6}{6}]\bigg|_1^2=\frac{21\pi}{2}.$$

八、(8 分) 做一个长方体形的箱子，其容积为 $\frac{9}{2}$ ㎥，箱子的盖及侧面的造价为 8 元/㎡，箱子的底造价为 1 元/㎡，试求造价最低的箱子的长、宽、高（取米为长度单位）.

解题过程是：设箱子的长、宽、高分别为 x,y,z（m），则其造价函数为：

$$f(x,y,z)=xy+8[2xz+2yz+xy],\text{且 }xyz=\frac{9}{2}，\quad x>0,y>0,z>0.$$

令 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda(xyz-\frac{9}{2})=9xy+16xz+16yz+\lambda(xyz-\frac{9}{2}),$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=9y+16z+\lambda yz=0, & (1)\\ \frac{\partial L}{\partial y}=9x+16z+\lambda xz=0, & (2)\\ \frac{\partial L}{\partial z}=16x+16y+\lambda xy=0, & (3)\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=xyz-\frac{9}{2}=0. & (4)\end{cases}$$

$$(1)\times x\Rightarrow 9xy+16xz+\lambda xyz=0,\quad (5)$$
$$(2)\times y\Rightarrow 9xy+16yz+\lambda xyz=0,\quad (6)$$
$$(3)\times z\Rightarrow 16xz+16yz+\lambda xyz=0,\quad (7)$$

$(5)-(6)\Rightarrow 16z(x-y)=0,$ 及 $z>0,\Rightarrow x=y,$

$(6)-(7)\Rightarrow x(9y-16z)=0,$ 及 $x>0,\Rightarrow z=\frac{9y}{16},$ 把以上结果代入 (4) 式，得

符合实际意义唯一的驻点：$\begin{cases}x=2,\\ y=2,\\ z=9/8.\end{cases}$

故 箱子的长、宽、高分别为 2，2 ，$\frac{9}{8}$ 米时其造价最低.

九、(7 分) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy^2}{(x^2+y^2)^2}=1$，试问点 (0, 0) 是不是 $f(x,y)$ 的极值点？证明你的结论.

解题过程是：$\because \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^2=0,$ 由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy^2}{(x^2+y^2)^2}=1$，$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)-xy^2]=0,$

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\therefore (x^2+y^2)^2=\rho^4$，$\Rightarrow f(x,y)-xy^2\sim\rho^4$（$\rho\to0$），

$\Rightarrow f(x,y)=xy^2+o(\rho)$（$\rho\to0$），而 $z=xy^2$ 在 (0,0) 点没有极值，

从而 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点也没有极值，即点 (0,0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

2007-2008 学年第二学期工科 高等数学（2-2）期中试题参考答案

一 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1 向量$\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$在向量$\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$上的投影 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=$ $\underline{\dfrac{5\sqrt{5}}{3}}$.

2 函数$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$M(1,2,-2)$处的梯度$gradu\big|_M=$ $\underline{\dfrac{1}{9}\{1,2,-2\}}$.

3 曲面$xy^2-yz^2+zx^2=1$上点$M(1,1,1)$处的切平面方程为 $\underline{3x+y-z-3=0}$.

4 函数$u=xy\sin\dfrac{y}{x}$在点$(1,1)$的全微分$du\big|_{(1,1)}=$ $\underline{(\sin 1-\cos 1)dx+(\sin 1+\cos 1)dy}$.

5 函数$z=xf(x,y^2)$有连续的二阶偏导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{2yf_2'+2xyf_{12}''}$.

二、选择题(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分).

1．直线$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$与平面$4x-2y-2z=3$的位置关系是（ A ）

（A）平行,但直线不在平面上； （B） 直线在平面上；

（C） 垂直相交； （D） 相交但不垂直.

2．函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处偏导数存在是$f(x,y)$在该点可微的（ B ）

(A) 充分非必要条件； (B) 必要非充分条件 ；

(C) 充要条件； (D) 非充分非必要条件.

3.设有两平面区域$D_1: x^2+y^2\le R^2$， $D_2: x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0.$

则以下结论正确的是（ B ）

（A）$\iint\limits_{D_1} xdxdy=4\iint\limits_{D_2} xdxdy$； （B）$\iint\limits_{D_1} x^2dxdy=4\iint\limits_{D_2} x^2dxdy$；

（C）$\iint\limits_{D_1} ydxdy=4\iint\limits_{D_2} ydxdy$； （D）$\iint\limits_{D_1} xydxdy=4\iint\limits_{D_2} xydxdy$.

4. 若函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不可微，则函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处是（ D ）

(A) 沿任何方向的方向导数不存在； (B)两个偏导数都不存在；

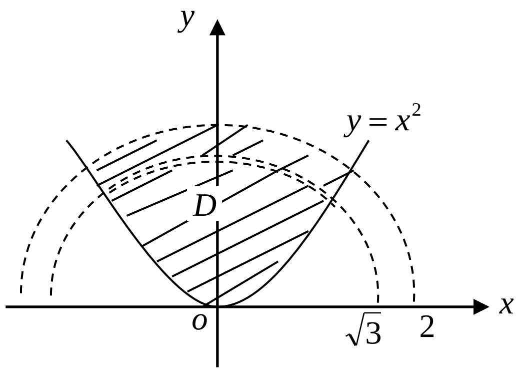
(C) 不能取得极值； (D) 有可能取得极值.

三、画图题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

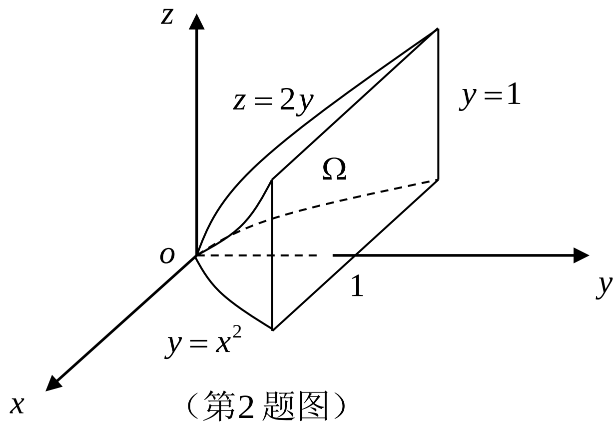
1．写出函数$f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(4-x^2-y^2)}$的定义域，并画出定义域的图形.

解 $\because \begin{cases} y-x^2\ge 0, \\ 4-x^2-y^2>0, \\ 4-x^2-y^2\ne 1. \end{cases}$ $\therefore f(x,y)$的定义域为：

$D=\{(x,y)\big| y\ge x^2, x^2+y^2<4, x^2+y^2\ne 3\}$，如下图所示：



（第1题图）



（第2题图）

2．画出由平面 $y=1, z=0, z=2y$ 及曲面 $y=x^2$ 所围空间立体的图形.

所求空间立体 Ω 的图形如上图所示.

四、解答题（本题共 7 小题，每小题 7 分，满分 49 分）

1. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-2z=f(y^2-3z)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，求 $2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+3x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解： 方程 $x^2-2z=f(y^2-3z)$ 两边分别关于 x ，y 求导，得

$$2x-2\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot(-3\frac{\partial z}{\partial x}), \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{3f'-2}),$$

$$-2\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot(2y-3\frac{\partial z}{\partial y}), \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2yf'}{3f'-2},$$

$$\therefore 2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-4xy}{3f'-2}+\frac{6xyf'}{3f'-2}=2xy \ .$$

2．考察函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性和可微性.

解：$\because$ $0\le\left|xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le|xy|\xrightarrow[\substack{x\to0\\y\to0}]{}0,$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0),$$ 即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续；

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$，同理，$f'_y(0,0)=0$，

又 $\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

$$\therefore 0\le\frac{\left|\Delta z-[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]\right|}{\rho}=\frac{\left|\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\frac{\rho}{2}\to0 \ (\rho\to0) \ .$$

$$\therefore \lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f'_x(0.0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=0,$$

即$\Delta z = f_x'(0,0)\cdot\Delta x + f_y'(0,0)\cdot\Delta y + o(\rho)\ \ (\rho\to 0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，且 $dz\big|_{(0,0)} = 0$.

3．在曲面 $z = xy$ 上求一点，使在该点处的法线与平面 $x+3y+2z+9=0$ 垂直，并写出该法线方程.

解：设曲面 $z = xy$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线与平面 $x+3y+2z+9=0$ 垂直，则

$$\vec{n} = \{-y_0, -x_0,\ 1\} // \vec{n}_1 = \{1, 3, 2\}, \Rightarrow \frac{-y_0}{1} = \frac{-x_0}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = x_0 y_0 = \frac{3}{4}. \qquad \therefore\ \vec{n} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2},\ 1\},$$

故 所求法线方程为：$\dfrac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{z-\frac{3}{4}}{1}$，

即 $\dfrac{2x+3}{1} = \dfrac{2y+1}{3} = \dfrac{4z-3}{4}$.

4．抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x+y+z=4$ 截成一个椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解：在椭圆上任取一点 (x,y,z)，则它到原点的距离为 $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，为了计算简便，问题即为求函数 $d^2 = x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z = x^2+y^2$， $x+y+z=4$ 限制下的最值.

令 $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-4)$，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (3) \\ z - x^2 - y^2 = 0 & (4) \\ x+y+z-4=0\ . & (5) \end{cases}$$

由(1) − (2) 得 $x = y$ 或 $\lambda_1 = 1$, 再代入(1)得 $\lambda_2 = 0$.

由(3)知，$z = -\frac{1}{2}$，但 $z = -\frac{1}{2}$ 时(4)式不成立，

故 $\lambda_1 = 1$ 应舍去. 把 $x = y$ 代入到(4),(5) 得

$x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 2; x_2 = -2, y_2 = -2, z_2 = 8$.

$\therefore\ d_1 = \sqrt{6}$， $d_2 = \sqrt{4+4+64} = 6\sqrt{2}$.

由实际问题的意义知原点到这椭圆的最长与最短距离必存在，故原点到这椭圆的最长距离为 $6\sqrt{2}$ ，最短距离为 $\sqrt{6}$.

5. 计算 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \cos x^3 dx$.

解： $\because D_y = \{0\le y\le 1, \sqrt{y}\le x\le 1\}$，交换积分次序 $D_x = \{0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$.

$$\therefore \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \cos x^3 dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \cos x^3 dy = \int_0^1 \cos x^3 dx \int_0^{x^2} dy$$

$$= \int_0^1 x^2 \cos x^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \cos x^3 d(x^3) = \frac{1}{3}\sin x^3\Big|_0^1 = \frac{\sin 1}{3}\ .$$

6. 计算二重积分 $\iint\limits_D \left|y + x^2 - 1\right| dxdy$，其中 D 是由直线 $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ 围成的平面区域.

解： $\because D = \{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 关于 y 轴对称，被积函数是 x 的偶函数，

$D_1 = \{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，曲线 $y = 1-x^2$ 把 D_1 分为两部分：

$D_1^{(1)} = \{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x^2\}$， $D_1^{(2)} = \{0\le x\le 1, 1-x^2\le y\le 1\}$ 之和，

$$\therefore \iint_{D} \left|y+x^{2}-1\right| dxdy = 2\iint_{D_1} \left|y+x^{2}-1\right| dxdy = 2\iint_{D_1^{(1)}} \left|y+x^{2}-1\right| dxdy + 2\iint_{D_1^{(2)}} \left|y+x^{2}-1\right| dxdy$$

$$= 2\iint_{D_1^{(1)}} (1-y-x^{2})dxdy + 2\iint_{D_1^{(2)}} (y+x^{2}-1)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}(1-y-x^2)dy \ + 2\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^{1}(y+x^2-1)dy$$

$$= 2\int_0^1 [(x^2-1)^2+(x^2-1)+\frac{1}{2}]dx = \frac{11}{30}.$$

7．计算由球面 $x^2+y^2+z^2=1$，柱面 $x^2+y^2-x=0$ 所围立体的体积.

解：柱面 $x^2+y^2-x=0$ 即为 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$. 由对称性，所求立体的体积为：

$$V = 4\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad 令 \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad 则\ D=\{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\cos\theta\}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\ r\ dr \ = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2)$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta = \frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\ .$$

五、证明题(9 分)

试证明：$\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)dz$.

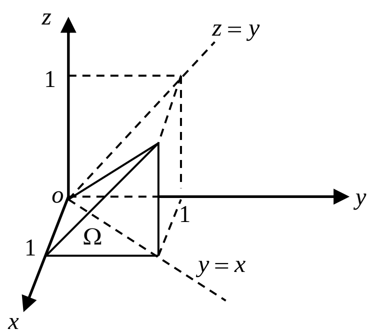
证 将积分次序改变为先x,后y,再z的积分次序，则积分区域 Ω 为

$$\Omega = \{\ 0\le z\le 1,\ \ z\le y\le 1,\ \ y\le x\le 1\ \},$$

故 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz \quad = \int_0^1 f(z)dz\int_z^1 dy\int_y^1 dx \ = \int_0^1 f(z)dz\int_z^1 (1-y)dy$

$$= -\int_0^1 f(z)\,dz\int_z^1 (1-y)\,d\,(1-y) = -\frac{1}{2}\int_0^1 [\,f(z)(1-y)^2\Big|_{y=z}^{y=1}\ ]dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)dz\,.$$



2008-2009 学年第二学期工科 高等数学（2-2）期中试题参考答案

一、填空题 （每题 4 分，共 28 分）

1、 已知三点 $A(2,-3,1)$，$B(1,-1,3)$，$C(1,-2,0)$，则垂直于过这三点平面的向量是 $\underline{\{-4,-3,1\}}$ ，ΔABC 的面积为 $\underline{\frac{\sqrt{26}}{2}}$.

2、 曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 在 yoz 坐标面上的投影曲线是 $\underline{\begin{cases} 3y^2-z^2=16 \\ x=0 \end{cases}}$.

3、 设函数 $z = xy\sin\frac{y^2}{x^2}$，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\ 2z\ }$.

4、 设函数 $f(u)$ 可微，则 $z=f(x^2-y^2)$ 的全微分 $dz = \underline{2f'(x^2-y^2)\cdot[xdx-ydy]}$.

5、曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是 $\underline{\quad x+2y-4=0 \quad}$ ，法线方程是 $\underline{\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}}$.

6、设球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $P(0,0,1)$ 处的外法线方向为 $\vec{n}$，求函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 P 沿 $\vec{n}$ 方向的方向导数 $\underline{\ 2\ }$ ，函数在点 P 处方向导数取得最大值的方向为 $\underline{\ \{0,0,2\}\ }$.

7、设函数 $z=\int_0^{x^y}\cos t dt+\int_{y^x}^1 e^t dt$ ，$x>0, y>0$ 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{\ x^y\ln x\cdot\cos x^y - xy^{x-1}e^{y^x}\ }$.

二、选择题 （每题 4 分，共 20 分）

1、$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=1$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=(\quad A \quad)$.

A) $\sqrt{3}$ B) 0 C) 1 D) $-\sqrt{3}$.

2、若函数 $f(x,y)=2x^2+2y^2+3xy+ax+by+c$ （a,b,c 为常数），在 $(-2,3)$ 处取得极小值 -3，则 $abc=(\quad B \quad)$.

A）25 B）30 C）10 D）20 .

3、二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 $(\quad C \quad)$.

A）不连续，偏导数存在 B）连续，偏导数不存在

C）连续，偏导数存在 D）不连续，偏导数不存在.

4、设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0;$ $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$，则 $(\quad D \quad)$.

A) $\iiint\limits_{\Omega_1} xdV = 4\iint\limits_{\Omega_2} xdV$ B) $\iiint\limits_{\Omega_1} ydV = 4\iint\limits_{\Omega_2} ydV$

C) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdV = 4\iint\limits_{\Omega_2} xyzdV$ D) $\iiint\limits_{\Omega_1} zdV = 4\iint\limits_{\Omega_2} zdV$

5、函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的 $(\quad B \quad)$.

A）充分条件，但不是必要条件 B）必要条件，但不是充分条件

C）充分必要条件 D）既不是充分条件也不是必要条件

三、计算题

1、(6 分) 设 z 是方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x,y 函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

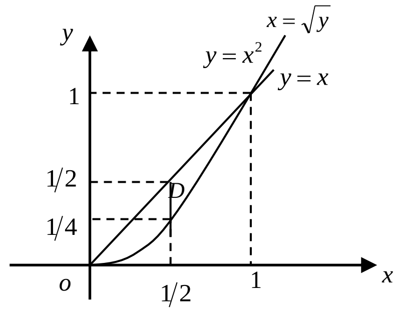
解 方程 $x+y-z=e^z$ 两边分别关于 x ，y 求偏导，

$$1-\frac{\partial z}{\partial x}=e^z\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (1) \qquad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^z+1}, \qquad 1-\frac{\partial z}{\partial y}=e^z\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z+1},$$

(1) 式两边关于 y 求偏导，$-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ，

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^z+1}=-\frac{e^z}{(e^z+1)^3} \ .$$

2、（6 分）求 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.



解 ∵ $D_y:\{\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\le x\le\sqrt{y}\}\cup\{\frac{1}{2}\le y\le 1,\ y\le x\le\sqrt{y}\}$,

即区域 D 由 $x=\frac{1}{2}, x=1, y=x^2, y=x$ 所围成(如右图).

改变积分次序，则 $D_x:\{\frac{1}{2}\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$.

$$\therefore I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}xdx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}d\left(\frac{y}{x}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}xe^{\frac{y}{x}}\Big|_{y=x^2}^{y=x}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^x)dx=[\frac{ex^2}{2}-(x-1)e^x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3e}{8}-\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

3、（8 分）设函数 $f(u)$ 具有连续的导数，且满足 $f(0)=0, f'(0)=2$，求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{3}{\pi t^4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv.$$

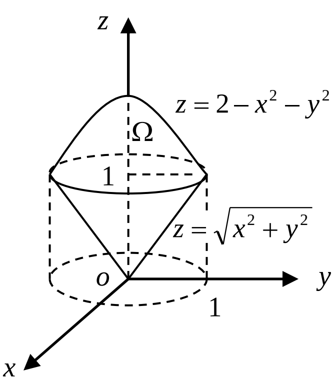
解 令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$ 则 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2 d\rho$

$$=4\pi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2 d\rho$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0^+}\frac{3}{\pi t^4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv=\lim_{t\to 0^+}\frac{12\pi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2 d\rho}{\pi t^4}\quad(\frac{0}{0})$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{12\pi\ f(t)\cdot t^2}{4\pi t^3}=3\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}\ \ (\frac{0}{0})=3\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(t)}{1}=3f'(0)=6.$$

4、（8 分）求 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$ 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$ 所围成.



解 ∵ Ω 关于 xoz 平面, yoz 平面都对称(如右图), 被积函数 $2xy+2yz$ 是 y 的奇函数, $2xz$ 是 x 的奇函数，根据对称性,

$$\therefore\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+0$$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$ 则 $\Omega=\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\\ r\le z\le 2-r^2\end{cases}$.

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{2-r^2}(r^2+z^2)dz=2\pi\int_0^1 rdr\int_r^{2-r^2}(r^2+z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^1 r\,[r^2z+\frac{z^3}{3}]\Big|_{z=r}^{z=2-r^2}dr=2\pi\int_0^1 r\,[r^2(2-r^2)+\frac{(2-r^2)^3}{3}-r^3-\frac{r^3}{3}]dr$$

$$= 2\pi\int_0^1 (r^5 - 2r^3 - \frac{4}{3}r^4 - \frac{1}{3}r^7 + \frac{8}{3}r)dr = \frac{83\pi}{60}.$$

5、（8 分）求柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $y^2 + z^2 = R^2$ 围成的立体的体积.

解 由对称性，$V = 8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2 \\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \sqrt{R^2 - y^2}\,dxdy$ $\left(令\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}\right)$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\theta}\cdot r dr$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\theta}\cdot d(R^2 - r^2\sin^2\theta)$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta}(R^2 - r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=R} d\theta = \frac{8R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{8R^3}{3}[-\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta} + \sin\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8R^3}{3}[\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16R^3}{3}.$$

6、（8 分）求曲线 $\begin{cases} xyz = 1 \\ y^2 = x \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程、切线的方向余弦、法平面方程及点 $(0,1,2)$ 到此法平面的距离.

解 设曲线 $\begin{cases} xyz = 1 \\ y^2 = x \end{cases}$ (1) 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$ 其切向量为 $\vec{T} = \{1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\}\Big|_{(1,1,1)}$，

将方程组(1)的两个方程两端分别对 x 求导，得 $\begin{cases} yz + xz\frac{dy}{dx} + xy\frac{dz}{dx} = 0 \\ 2y\frac{dy}{dx} = 1 \end{cases}$，解之得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y},\ \frac{dz}{dx} = -\frac{2y^2z + xz}{2xy^2},\ \therefore \vec{T} = \{1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\}\Big|_{(1,1,1)} = \{1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}\{2, 1, -3\}.$$

所求的切线方程为：$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

切线的方向余弦为：$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$, $\cos\gamma = \dfrac{-3\sqrt{14}}{14}$.

法平面方程为：$2(x-1) + (y-1) - 3(z-1) = 0$，即 $2x + y - 3z = 0$.

点 $(0,1,2)$ 到此法平面的距离为：$d = \dfrac{|2\cdot 0 + 1 - 3\cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{14}$.

四、证明题（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，积分区域 $D = \{(x,y) \mid x \le y \le a, 0 \le x \le a\}$.

证明：$\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy = \dfrac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2$.

证明 $\because D=\{(x,y)|x\le y\le a,0\le x\le a\}\ =\{(x,y)|0\le y\le a,0\le x\le y\}$.

设 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le a\ ,0\le y\le x\}$， $R=D\cup D_1=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le a\}$

已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上存在原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，

$$\therefore \iint_D f(x)f(y)dxdy==\int_0^a f(y)dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a\ [f(y)\cdot\int_0^y f(t)dt]\,dy,$$

$$\iint_{D_1} f(x)f(y)dxdy==\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a\ [f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt]\,dx,$$

故 $$\iint_D f(x)f(y)dxdy=\iint_{D_1} f(x)f(y)dxdy=\frac{1}{2}[\iint_D f(x)f(y)dxdy+\iint_{D_1} f(x)f(y)dxdy]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_R f(x)f(y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^a f(x)dx\int_0^a f(y)dy=\frac{1}{2}\int_0^a f(x)dx\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2.$$

即 $$\iint_D f(x)f(y)dxdy=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2.$$