2011-1012 学年第二学期高等数学（2-2）期末考试 A 卷参考答案

一．填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共计 18 分）

1．$\vec{a}=(1,4,5)$，$\vec{b}=(1,1,2)$，若 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 垂直，则 $\lambda=\underline{\pm\sqrt{7}}$.

2．设 $z=\arctan\sqrt{xy}+(x-1)(y-1)\ln(x+y)$，则 $dz|_{(1,1)}=\underline{\frac{1}{4}(dx+dy)}$.

3．设 $z(x,y)$ 由方程 $xe^y+yz+ze^x=0$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{\frac{-z-xe^y}{y+e^x}}$.

4．设 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$，而 $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,-\infty<x<+\infty$，其中

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$，则 $s(-\frac{\pi}{2})=\underline{\frac{\pi}{2}+1}$.

5．已知 D 是长方形 $a\le x\le b,0\le y\le 1,\iint\limits_D yf(x)dxdy=1$,则 $\int_a^b f(x)dx=\underline{\ 2\ }$.

6．设曲线 C 为圆周 $x^2+y^2=R^2$,则 $\oint\limits_C(x^2+y^2-3x)ds=\underline{2\pi R^3}$.

二．选择题（共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）

1．下列级数中，绝对收敛的级数是（ C ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})^n$； (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$； (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^n$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2．设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，则下列结论中错误的是（D ）.

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛； (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$；

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则部分和 S_n 有界； (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$.

3．设曲线型构件 Γ 的密度函数为 $\rho(x,y,z)$,则构件对 z 轴的转动惯量为（B ）.

(A) $\int_\Gamma\rho(x,y,z)ds\sqrt{a^2+b^2}$； (B) $\int_\Gamma(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$；

(C) $\int_\Gamma\rho(x,y,z)z^2ds$； (D) $\int_\Gamma\rho(x,y,z)zdz$.

4．设有直线 L：$\begin{cases}x+y-5=0\\2x-z+8=0\end{cases}$ 及平面 $\Pi:2x+y+z-3=0$，则直线 L（B ）.

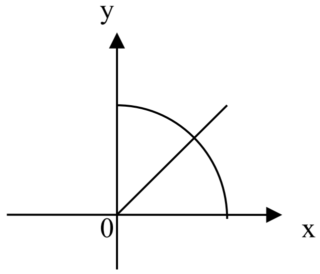
(A) 平行于平面Π ；　　　　　　　　(B) 与平面Π的夹角为$\frac{\pi}{6}$；

(C) 与平面Π垂直；　　　　　　　　(D) 与平面Π的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

三．解答题（共 8 小题，每小题 8 分，共计 64 分）

1． 计算二重积分$I=\iint\limits_D (x-y)dxdy$.其中积分区域 D 为

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2，x\ge 0, y\ge 0\}$区域.



解 1 ： 作极坐标变换：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，有

$$I=\iint\limits_D (x-y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R (r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta\int_0^R r^2dr=\frac{R^3}{3}(1-1)=0.$$

解 2 ：$\because D$关于直线$y=x$对称,$\therefore \iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_D xdxdy$,

$$\therefore I=\iint\limits_D (x-y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy-\iint\limits_D ydxdy=0.$$

2．设$\overrightarrow{n}$为曲面$\Sigma: 2x^2+3y^2+z^2=6$在点P（1, 1, 1）处指向外侧的法向量，求

（1）函数$u=e^{\frac{y}{x}}+\ln(x^2+y^2)+2\sqrt{z}$在点$P$（1, 1, 1）的梯度；

（2）函数$u=e^{\frac{y}{x}}+\ln(x^2+y^2)+2\sqrt{z}$在点$P$处沿方向$\overrightarrow{n}$的方向导数；

解：（1）　$\because \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=[-e^{\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2}+\frac{2x}{x^2+y^2}]|_{(1,1,1)}=1-e,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=[e^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2+y^2}]|_{(1,1,1)}=1+e，\quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,1,1)}=\frac{1}{\sqrt{z}}|_{(1,1,1)}=1.$$

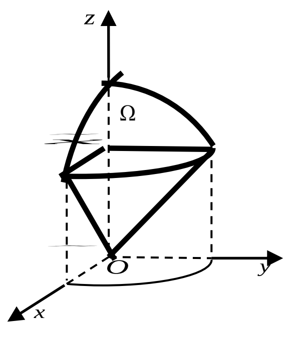
$$\therefore gradu\big|_{(1,1,1)}=\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}\big|_{(1,1,1)}=\{1-e,1+e,1\}.$$

(2) $\overrightarrow{n}=\{4x,6y,2z\}\big|_{(1,1,1)}=\{4,6,2\}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\right|_{(1,1,1)}=[\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma]\big|_{(1,1,1)}=\frac{2(1-e)}{\sqrt{14}}+\frac{3(1+e)}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{6+e}{\sqrt{14}}.$$

3．计算三次积分$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$的值.



解：利用球面坐标变换，积分化为

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot r^2dr=\frac{2\sqrt{2}-1}{15}\pi .$$

或利用柱面坐变换,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2dz \qquad =\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\cdot\frac{z^3}{3}\Bigg|_r^{\sqrt{2-r^2}}dr=\frac{2\sqrt{2}-1}{15}\pi \quad .$$

4．设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,

（1）求该幂级数的收敛半径　　（2）求该幂级数的收敛域　（3）求该幂级数的和

解： (1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|$=1, 收敛半径 R=1 .

(2) 当 $x=\pm1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 都收敛，所以收敛域为[-1,1].

(3) 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $x\in(-1,1)$. 逐项求导,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

而 $S(0)=0,\ S'(0)=0,\quad \forall x\in(-1,1)$, 有 $S'(x)=\int_0^x S''(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$,

$$\therefore S(x)=\int_0^x S'(t)dt=-\int_0^x\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x),\qquad x\in(-1,1).$$

由于级数在 $x=\pm1$ 处收敛,

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}[x+(1-x)\ln(1-x)]=\lim_{x\to1^-}[x+\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{(1-x)}}]=1,$$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}[x+(1-x)\ln(1-x)]=-1+2\ln2.$$

故 $S(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & -1\le x<1,\\ 1, & x=1\ .\end{cases}$

5．设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$, 上侧为曲面正侧, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

解： $\because \Sigma: z=\sqrt{2-x^2-y^2},\Rightarrow x^2+y^2+z^2=2,$

$$\therefore I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}\ =\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}xdydz+z^2dxdy\quad ,$$

$P=x,Q=0,R=z^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1+2z,$

补辅助面Σ_1下$:z=0,\quad x^2+y^2\le 2$，是母线平行于x轴的柱面，

设Σ与Σ_1所围立体为Ω，由高斯公式，

$$\therefore I=\frac{1}{2}\oiint_{\Sigma上+\Sigma_1下}-\frac{1}{2}\iint_{\Sigma_1下}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(1+2z)dxdydz+\frac{1}{2}\iint_{\Sigma_1上}xdydz+z^2dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}dxdydz+\iiint_{\Omega}zdxdydz+0$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{4\pi(\sqrt{2})^3}{3}+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi++2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d(\sin\varphi)\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho$$

$$=(\frac{2\sqrt{2}}{3}+1)\pi.$$

6. 设有函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，问

（1）函数$f(x,y)$在点$(0,0)$是否连续？说明理由.

(2) 求函数 $f(x,y)$对x的偏导函数$f_x'(x,y)$

解：（1）当(x,y)沿直线$y=kx$趋于$(0,0)$时 ，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，随$k$的取值不同，它的值也不同，

$\therefore\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在，故函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不连续.

（2）$(x,y)\neq(0,0)$时，$f_x'(x,y)=\dfrac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$，

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot 0-0}{(\Delta x^2+0)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

故 $f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

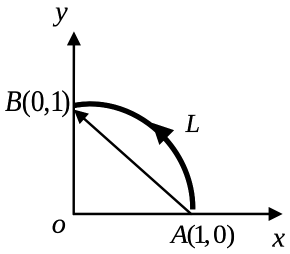
7. 设有力场$F(x,y)=(y^2+1)\vec{i}+y(2x+1)\vec{j}$，求变力沿曲线 L：$y=\sqrt{1-x^2}$ 从(1,0)到

(0,1)的一段所做的功.

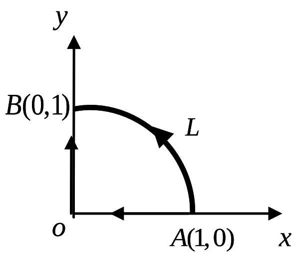
解：$\because W=\int_{L}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$，

$$P=y^2+1,Q=y(2x+1)\text{，}\frac{\partial P}{\partial y}=2y=\frac{\partial Q}{\partial x}\text{，}(x,y)\in R^2,$$

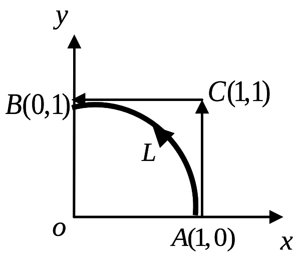
曲线积分在整个平面上与路径无关 ，



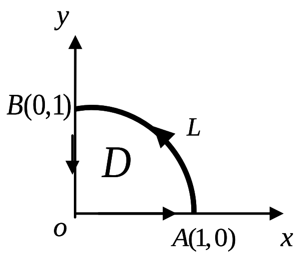
（图1）



（图2）



（图3）



（图4）

（1）选择 $\overrightarrow{AB}:x+y=1$ 即 $y=1-x(1\geq x\geq 0)$ 为积分路径（如图 1），

$$\therefore \mathrm{W}=\int_{L}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy=\int_{\overline{AB}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$=\int_1^0[(1-x)^2+1+(1-x)(2x+1)(-1)]dx=\int_1^0(3x^2-3x+1)dx=-\frac{1}{2}.$$

（2）选择折线 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$,其中 $\overrightarrow{AO}:\begin{cases}x=x,\ 1\geq x\geq 0,\\ y=0,\ dy=0.\end{cases}$ $\overrightarrow{OB}:\begin{cases}x=0,\ dx=0,\\ y=y,\ 0\leq y\leq 1.\end{cases}$

（如图 2），

$$\therefore \mathrm{W}=\int_{L}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy=\int_{\overline{AO}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$+\int_{\overline{OB}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$=\int_1^0 1dx+\int_0^1 ydy=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

（3）选择折线 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$,其中 $\overrightarrow{AC}:\begin{cases}x=1,\ dx=0,\\ y=y,\ 0\leq y\leq 1.\end{cases}$ $\overrightarrow{CB}:\begin{cases}x=x,\ 1\geq x\geq 0,\\ y=1,\ dy=0.\end{cases}$

（如图 3），

$$\therefore \mathrm{W}=\int_{L}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy=\int_{\overline{AC}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$+\int_{\overline{CB}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$=\int_0^1 3ydy+\int_1^0 2dx=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}.$$

（4）补折线 $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$ 与 L 构成封闭曲线，所围闭区域为 D,（如图 4），再由格林公式，

$$\therefore \mathrm{W}=\int_{L}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy\quad \oint_{L+\overline{BO}+\overline{OA}}-\int_{\overline{BO}+\overline{OA}}=\iint_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\int_{\overline{OB}+\overline{AO}}$$

$$=0+\int_{\overline{OB}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy+\int_{\overline{AO}}(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$=\int_0^1 ydy+\int_1^0 dx=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

另法：直接计算，$L:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$

$$\therefore \mathrm{W}=\int_L(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin^2\theta+1)(-\sin\theta)+\sin\theta(2\cos\theta+1)\cos\theta]d\theta=-\frac{1}{2}.$$

或 $L:y=\sqrt{1-x^2},1\ge x\ge 0,dy=\dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$\therefore \mathrm{W}=\int_L(y^2+1)dx+y(2x+1)dy$$

$$=\int_1^0[(\sqrt{1-x^2})^2+1+\sqrt{1-x^2}(2x+1)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}]dx$$

$$=\int_1^0(2-3x^2-x)dx=-\frac{1}{2}.$$

8．求函数 $f(x,y)=xy^2(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$ 及坐标轴所围成的有界闭域 D 上的最大值、最小值.

解：令 $f_x'(x,y)=y^2(4-x-y)-xy^2=y^2(4-2x-y)$=0

$f_y'(x,y)=xy\ (8-2x-3y)$=0，得 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点（1,2）且 $f(1,2)=4.$

再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值.

在边界 $x=0(0\le y\le 6)$ 上，$f(x,y)=0$；在边界 $y=0(0\le x\le 6)$ 上，$f(x,y)=0$

在边界 $x+y=6$ 上，令 $\varphi(x)=f(x,6-x)=-2x(6-x)^2\quad(0\le x\le 6)$，

令 $\varphi'(x)=6(6-x)(x-2)$=0，解得驻点 $x=2,x=6$，

$\varphi(0)=0,\varphi(2)=-64,\varphi(6)=0.$

从而可得 $\varphi(x)$ 在 $0\le x\le 6$ 上的最大值为 0，最小值为 -64.

故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值、最小值分别为：

$M=\max\{4,0,-64\}=4,\quad m=\min\{4,0,-64\}=-64$.

四．证明题（本题 6 分）设 $f(x)>0,$ 且连续试证 $\iint\limits_D\dfrac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy=\dfrac{1}{2}$，

其中积分区域$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,1\le y\le 2\}$

证：$\because D$关于直线$y=x$对称，

$$\therefore \iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint_D \frac{f(y)}{f(y)+f(x)}dxdy$$

故 $$\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy=\frac{1}{2}[\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy+\iint_D \frac{f(y)}{f(y)+f(x)}dxdy]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D [\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}+\frac{f(y)}{f(y)+f(x)}]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D 1dxdy=\frac{1}{2}.$$