2006-2007 学年第一学期 高等数学（2-1）期中试题参考答案

一、选择题(4×5=20 分)

1．当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ ，$\beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x \to x_0$ 时，下列表示式哪一个不一定是无穷小（　D　）

$(A)\left|\alpha(x)\right|+\left|\beta(x)\right|$　　$(B)\ \ \alpha^2(x)+\beta^2(x)$

$(C)\ \ln\left[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right]$　　$(D)\ \dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

2．设 $f(x)=x^2\arctan\dfrac{1}{x^2}$，间断点 $x=0$ 的类型为（　　A　　）

(A)可去间断点　(B)跳跃间断点　(C)无穷间断点　(D)振荡间断点

3．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=$（　　D　　）

(A)2　(B)－2　(C)± 2　(D)不存在

4．设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|x|)$，要使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（　A　　）

(A)　$f(0)=0$　(B)　$f(0)=1$　(C)　$f'(0)=1$　(D)　$f'(0)=0$

5．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$，则（　D　）

(A)　$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断　(B)　$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

(C)　$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但导数在 $x=0$ 处不连续　(D)　$f(x)$ 在 $x=0$ 处有连续导数

二、填空题(4×5=20 分)

1．$\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}=$ $\underline{e^2}$

2．当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $1-\cos x$ 与 mx^n 等价(其中 m,n 为常数)，则 $m=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$

$n=$ $\underline{\ \ 2\ \ }$

3．设 $f(x)=\sin 2x$，$g(x)=\begin{cases}x-\dfrac{\pi}{2}, & x\le 0\\ x+\dfrac{\pi}{2}\ , & x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]=$ $\underline{\ \ 0\ \ }$

4．函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}$ 的一个可去间断点是 $x=$ $\underline{\ \ 1\ \ }$

5．设 $\begin{cases}x=e^t\cos t^2\\ y=e^{2t}\sin t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，$\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\dfrac{e^t(2\sin t+\cos t)}{\cos t^2-2t\sin t^2}}$

三、计算下列各题

1．求极限(10 分，每题 5 分)

(1)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(1-\dfrac{\arcsin x}{x})$　　$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}\ (\dfrac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}\quad=\lim_{x\to0}\frac{-1}{3\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}\quad=-\frac{1}{6}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{2x}\quad=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}]}{2}$$

$$=\frac{e}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\qquad=\frac{e}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}$$

$$=\frac{e}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}\quad=-\frac{e}{4}.$$

2．(10 分)已知 $f(x)=x-5\arctan x$，试讨论函数的单调区间，极值，凹凸性，拐点，渐近线

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=1-\frac{5}{1+x^2}=\frac{x^2-4}{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\pm2.$

$$f''(x)=\frac{10x}{(1+x^2)^2},\text{令 } f''(x)=0 \text{ 得 } x=0.$$

列表讨论函数的单调区间，极值，凹凸性，拐点：

<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-2)$</td><td>-2</td><td>$(-2,0)$</td><td>0</td><td>$(0,2)$</td><td>2</td><td>$(2,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=f(x)$</td><td>↗</td><td>极大值
$-2+5\arctan2$</td><td colspan="3">↘</td><td>极小值
$2-5\arctan2$</td><td>↗</td></tr>
<tr><td colspan="3">∩</td><td>拐点
(0,0)</td><td colspan="3">∪</td></tr>
</table>

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{5\arctan x}{x})=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=\lim_{x\to+\infty}(-5\arctan x)=-\frac{5\pi}{2},$$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{5\arctan x}{x})=1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=\lim_{x\to-\infty}(-5\arctan x)=\frac{5\pi}{2},$$

渐近线为：$y=x\pm\frac{5\pi}{2}$.

3．（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} a x^2+bx+c, & x<0 \\ \ln(1+x) & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，确定参数 a,b,c 的值.

解 由题设知，$f(x)$ 在 $x=0$ 一阶可导，

$\because\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,$

$\therefore\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{a x^2+bx+c}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}(ax+b+\dfrac{c}{x})=1$，

$\therefore b=1,c=0.$

且 $f'(0)=1$. 又当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=2ax+b=2ax+1,$

已知 $f''(0)$ 存在，而 $\because\ f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-1}{1+x}=-1,$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2ax+1-1}{x}=2a,\ \therefore\ f''_-(0)=2a=-1=f''_+(0)$，

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}.$

综上所述 $a=-\dfrac{1}{2},b=1,c=0.$

4．（6 分）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+3}{\ln(x-1)}=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}\ln(x-1)=0,$ 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+3}{\ln(x-1)}=1$，$\therefore \lim\limits_{x\to 2}[f(x)+3]=0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}f(x)=-3=f(2),$

$\therefore\ f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+3}{\ln(x-1)}\cdot\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+3}{\ln(x-1)}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}=1,$

故 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为：$y+3=x-2,$ 即 $y-x+5=0$.

5．（6 分）将 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x+x^2}$ 在 $x=0$ 处展开到含 x^4 项，并计算 $f^{(4)}(0)$.

解 $\because\ f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x+x^2}=1+\dfrac{x}{1-(x-x^2)}$

$$=1+x[1+(x-x^2)+(x-x^2)^2+(x-x^2)^3+\circ((x-x^2)^3)]$$
$$=1+x+x^2-x^4+\circ(x^4)$$

$\therefore\ \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=-1,\Rightarrow f^{(4)}(0)=-4!=-24.$

6．（6 分）证明不等式 $3x<\tan x+2\sin x$ $\quad(0<x<\dfrac{\pi}{2})$.

证 令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，$f(0)=0,$

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3=\frac{1+2\cos^3 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x},$$

再令 $\varphi(x)=1+2\cos^3 x-3\cos^2 x$，$\varphi(0)=0,$

$\varphi'(x)=-6\cos^2 x\sin x+6\cos x\sin x=6\sin x\cos x(1-\cos x)>0,\quad (0<x<\frac{\pi}{2})$.

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，$\therefore$ 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi(x)=1+2\cos^3 x-3\cos^2 x>\varphi(0)=0,$

而 $\cos^2 x>0$, $\therefore\ f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3=\dfrac{1+2\cos^3 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}>0,$

$\therefore\ f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，故 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\tan x+2\sin x-3x\ >f(0)=0,$

即 $3x<\tan x+2\sin x\quad (0<x<\frac{\pi}{2})$.

7．(6 分) 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y+e^{xy}\ln y-4=0$ 所确定, 求 y'.

解 方程 $x^2y+e^{xy}\ln y-4=0$ 两边关于 x 求导，

$$2xy+x^2\cdot y'+e^{xy}(y+xy')\ln y+e^{xy}\cdot\frac{y'}{y}=0,$$

$$\therefore\ y'=-\frac{2xy^2+e^{xy}y^2\ln y}{x^2y+e^{xy}(1+xy\ln y)}.$$

四、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不恒等于零，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)>0$.

证 令 $F(x)=f^2(x)$，则由题设知，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F'(x)=2f(x)f'(x)$，$\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)\neq 0$，$\Rightarrow F(x_0)=f^2(x_0)>0,$ $F(0)=0$. $F(x)$ 在 $[0,\ x_0]$ 上应用拉格朗日中值定理，$\xi\in(0,x_0)\subseteq(0,1),$

$$2f(\xi)f'(\xi)=F'(\xi)=\frac{F(x_0)-F(0)}{x_0-0}=\frac{f^2(x_0)}{x_0}>0,$$

故 $f(\xi)f'(\xi)>0$.

2007-2008 学年第一学期 高等数学（2-1）期中试题参考答案

一、填空题(共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

1．函数 $y=x-[x]$ 的最小正周期是 $\underline{\ 1\ }$.

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\underline{\ e^{2a}\ }$.

3．$\ln\cos x$ 是 x 的 $\underline{\ 2\ }$ 阶无穷小量 $(x\to 0)$.

4．$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{nx}{nx^2+1}\right)$ 的间断点是 $\underline{\ x=0\ }$，且是<u>第二类无穷</u>间断点.

5．已知 $y=x^9$，则 $y^{(10)}=$ <u>0</u> ．

二、选择题(共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

1．下列说法错误的是 <u>A</u>

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 且 $\exists N\in\mathrm{N}, \forall n>N$ 时有 $x_n>y_n$，则 $a>b$

B 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导,则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

C. 驻点不一定是极值点,极值点也不一定是驻点

D. 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导且取得极值，则 x_0 为驻点.

2． $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)=$ <u>D</u>

A 0， B $-\infty$， C $+\infty$， D $\dfrac{1}{2}$.

3. $x=0$ 是 <u>C</u>

A 曲线 $y=x^4$ 的拐点， B 函数 $y=x^3$ 的极值点 ，

C 函数 $y=x^4$ 的驻点 ， D 函数 $y=|x|$ 的可导点 .

4. 曲线 $y=\dfrac{3x^2}{2+x}$ 的渐近线是 <u>D</u>

A 直线 $x=-2$ ， B $y=3x-6$, C $y=x-2$ ，

C A 与 B 都是

5. 若 $y=x^x$ 则 $y'=$ <u>A</u>

A $x^x(\ln x+1)$ B $x^x\ln x$ C $x\cdot x^{x-1}$ D $\ln x+1$

三、解答题(本题共 8 小题,每题 5 分，共 40 分)

1．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$,$(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$ (1^∞)

解 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{n}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{n}{x}[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{n[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{n[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]}{x}}\ (\tfrac{0}{0})=e^{n\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}}$$

$$=e^{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}=e^{\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)}=a_1\cdot a_2\cdots a_n\ .$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{\arctan x^2\ln(1+x)}$

解 当 $x\to0$ 时， $x^2\sim\arctan x^2$ ， $x\sim\ln(1+x)$ ， $1-e^x\sim(-x)$ ， $\lim\limits_{x\to0}x^x$ $=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=e^0=1.$

$$\therefore\lim_{x\to0+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{\arctan x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to0+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}=\lim_{x\to0+}\frac{x^x[1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3} \qquad = \lim_{x\to 0+} \frac{-x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3} \qquad = -\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} = -\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{6x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\sin x}{6x^2} = \frac{1}{6}.$$

3.已知 $y = x^2\sin 2x$ 求 $y^{(n)}(0)$.

解 令 $u = \sin 2x$， $v = x^2$ 则 $u^{(k)} = 2^k\sin(2x + k\cdot\frac{\pi}{2}) \quad ,k = 1 , 2 , \cdots, n.$

$v' = 2x , v'' = 2 , v''' = v^{(4)} = \cdots = 0.$ 由莱布尼兹公式，

$$y^{(n)}(0) = (uv)^{(n)}\Big|_{x=0} = [u^{(n)}\cdot v + nu^{(n-1)}\cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}\cdot v'' + \cdots + u\cdot v^{(n)}]\Big|_{x=0}$$

$$= [x^2 2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2}) + 2^n nx\sin(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}) + n(n-1)2^{n-2}\sin(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}) + 0]\Big|_{x=0}$$

$$= n(n-1)2^{n-2}\sin(\frac{n\pi}{2}-\pi) = -n(n-1)2^{n-2}\sin(\pi-\frac{n\pi}{2}) = -n(n-1)2^{n-2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 , & n = 2k, \\ n(n-1)\cdot 2^{n-2}(-1)^{k+1}, & n = 2k+1. \end{cases} \quad k = 0 , 1 , 2 , \cdots.$$

4. 已知 $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\sin x}{(x^2+1)(x+2)}$ 求 dy .

解 $\because \ln y = \frac{1}{2}\ln(x+1) + \ln\sin x - \ln(x^2+1) - \ln(x+2)$ 两边关于 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore y' = y[\frac{1}{2(x+1)} + \cot x - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}]$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}\sin x}{(x^2+1)(x+2)}\cdot[\frac{1}{2(x+1)} + \cot x - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}]$$

故 $dy = y'dx = \dfrac{\sqrt{x+1}\sin x}{(x^2+1)(x+2)}\cdot[\dfrac{1}{2(x+1)} + \cot x - \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x+2}]dx$.

5. 已知 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 2$，求 $f'(2)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 2 , \lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$， $\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$， 又 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续，

$\therefore f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$，由导数定义，有

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-0}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = 2 \quad .$$

6. 求函数 $y = xe^x$ 在 $x = 0$ 的 n 阶泰勒公式，并写出拉格朗日余项.

解 $\because y = xe^x , y(0) = 0, y' = (1+x)e^x , y'(0) = 1, y'' = (2+x)e^x , y''(0) = 2 , \cdots,$

$$y^{(n)}=(n+x)e^x,\ y^{(n)}(0)=n,\ y^{(n+1)}=(n+1+x)e^x.$$

$$\therefore xe^x=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{y^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1).$$

7. 求函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的极值点和拐点 .

解 $y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$， $y''=36x^2-24x=12x(3x-2)$，

令 $y'=0$，得驻点： $x=0,x=1$；令 $y''=0$，得可能拐点的横坐标： $x=0,x=\frac{2}{3}$.

当 $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,1)$ 时， $y'<0$ ，$\therefore$ $x=0$ 不是函数的极值点；

当 $x\in(0,1)$ 时， $y'<0$ ，当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $y'>0$ ，$\therefore$ $x=1$ 是函数的极小值点，且极小值为： $y(1)=0$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $y''>0$ ，当 $x\in(0,\frac{2}{3})$ 时， $y''<0$ ，当 $x\in(\frac{2}{3},+\infty)$ 时， $y''>0$ ，

故曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 有两个拐点：$(0,1)$，$(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$.

8．设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\because \frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$,

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

四．（6 分） 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 点处的连续性和可导性.

解 $\because \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续；

而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不可导.

五．（7 分）证明方程 $x^{101}+x^{51}+x-1=0$ 有且仅有一个实根.

证 令 $f(x)=x^{101}+x^{51}+x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续， $f(0)=-1<0$， $f(1)=2>0$，由零点定理， $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根，即方程 $x^{101}+x^{51}+x-1=0$ 至少有一个实根，

又 $f'(x)=101x^{100}+51x^{50}+1>0$， $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调递增，

故 方程 $x^{101}+x^{51}+x-1=0$ 有且仅有一个实根.

六．（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+2f(1)+3f(2)=6, f(3)=1$，证明必存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$．

证　由 $f(0)+2f(1)+3f(2)=6$，可得：

(1)　$f(0)=f(1)=f(2)=1$，此时直接由洛尔定理，$\exists\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$．

(2)　$f(0), f(1), f(2)$ 这三个函数值中必既有大于 1 的值，也有小于 1 的值（否则，即 $f(0)>1, f(1)>1, f(2)>1$，或 $f(0)<1, f(1)<1, f(2)<1$，这都与 $f(0)+2f(1)+3f(2)=6$ 矛盾），不妨设 $f(0)<1, f(2)>1$，

此时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上应用连续函数的介值定理，$\exists c\in[0,2]$，使得 $f(c)=1$，又 $f(3)=1$，

在 $[c,3]\subseteq[0,3]$ 上应用洛尔定理，必 $\exists\xi\in(c,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$．

综上所述，必 $\exists\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$．

2008-2009 学年第一学期 高等数学（2-1）期中试题参考答案

一、选择题（4×5=20 分）

1．设常数 $k>0$，则函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为（　B　）

(A) 3 个；　(B) 2 个；　(C) 1 个；　(D) 0 个.

2．设函数 $f(x)=x^2\arctan\dfrac{1}{x}$，则其间断点 $x=0$ 的类型为（　A　）

(A) 可去间断点　(B) 跳跃间断点　(C) 无穷间断点　(D) 振荡间断点

3．$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+2x-1})=$（　D　）

(A) 2；　(B) －2；　(C) ±2；　(D) 不存在.

4．设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|x|)$，要使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（ A ）

(A) $f(0)=0$；　(B) $f(0)=1$；　(C) $f'(0)=1$；　(D) $f'(0)=0$．

5．设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则（　C　）

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断；　(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导；

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但导数在 $x=0$ 处不连续；　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处有连续导数.

二、填空题（4×5=20 分）

1．$\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=$ $\underline{\;e^2\;}$.

2．当 $x\to0$ 时，无穷小量 $\tan x-\sin x$ 与 mx^n 等价（其中 m 为常数），则 $m=$ $\underline{\;\dfrac{1}{2}\;}$，$n=$ $\underline{\;3\;}$.

3．设 $f(x)=\sin 2x, g(x)=x^2, f'[g(x)]=$ $\underline{\;2\cos 2x^2\;}$.

4．函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sin\pi x}$ 的一个可去间断点是 $x=$ $\underline{\;0\;}$.

5．设$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$确定了函数$y=y(x)$，$\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\dfrac{1}{2t}}$.

三、计算下列各题

1. 求极限(10 分，每小题 5 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$ （当$x\to 0$时， $\ln(1+\sin^2 x)\sim\sin^2 x\sim x^2$； $e^{x^2}-1\sim x^2$）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}[-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}+\dfrac{1}{x(1+x)}]}{2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}+\dfrac{1}{x(1+x)}}{2}$ $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}$ $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x}}{2+6x}=-\dfrac{1}{4}$.

2. (10 分) 已知$y=\dfrac{x}{1+x^2}$，试讨论函数的单调区间，极值，凹凸性，拐点，渐近线.

解 函数$y=\dfrac{x}{1+x^2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，令$y'=0$，得驻点：$x=\pm 1$.

$y''=\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$，令$y''=0$，得可能拐点的横坐标：$x=0, x=\pm\sqrt{3}$ . .

当$|x|<1$时，$y'>0$ ，当$|x|>1$时，$y'<0$ ，

$\therefore$ $y=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$单调递减，在$(-1,1))$单调递增；在$x=-1$取得极小值$y(-1)=-\dfrac{1}{2}$，在$x=1$取得极大值$y(1)=\dfrac{1}{2}$.

当$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$时，$y''<0$ ，当$x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$时，$y''>0$ ，

$\therefore$ $y=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$上凸，在$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$下凸，

有三个拐点：$(\pm\sqrt{3},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ ，$(0,0)$.

$\because a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$. $b=\lim\limits_{x\to\infty}[y-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$.

$\therefore$ 曲线$y=\dfrac{x}{1+x^2}$的渐近线是$y=0$.

3. (10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} a\,x^2+b\,x+c, & x<0 \\ \ln(1+x)\quad, & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，确定参数 a,b,c 的值.

解 $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f'(0)$，$f''(0)$ 都存在，

由 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\ln(1+x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(a\,x^2+bx+c)=c$，$\therefore c=0$，

而 $f(0)=0$，$\therefore f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{a\,x^2+bx}{x}=b$，$\therefore b=1$，且 $f'(0)=1$.

又当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=2\,a\,x+b=2\,a\,x+1$，

$\therefore f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-1}{x+1}=-1$，

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{(2\,a\,x+1)-1}{x}=2\,a$，$\therefore\ 2\,a=-1$，$a=-\dfrac{1}{2}$.

综上所述，$a=-\dfrac{1}{2}, b=1, c=0$.

4. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(1-x)-2f(1+x)=-\sin 3x+o(x)$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

解 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则必连续，在 $f(1-x)-2f(1+x)=-\sin 3x+o(x)$ 中，令 $x\to 0$，得 $f(1)=0$，从而有，

$-\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}-2\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\dfrac{-\sin 3x+o(x)}{x}$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[-\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}-2\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin 3x+o(x)}{x}$，

$\Rightarrow -f'(1)-2f'(1)=-3$，

$\therefore f'(1)=1$. 故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为：$y=x-1$.

5. (6 分) 给出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 的含拉格朗日余项的麦克劳林公式.

解 $\because f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$，

$\therefore f^{(n)}(x)=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot n\,![\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}]$，

$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\,![\dfrac{1}{(x+1)^{n+2}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+2}}]$，

$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f'(0)=-(1-\dfrac{1}{2^2})$，$f''(0)=2!\cdot(1-\dfrac{1}{2^3})$，$\cdots$，$f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n\,!\,(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$.

$$=\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{2^2})\,x+(1-\frac{1}{2^3})\,x^2+\cdots+(-1)^n(1-\frac{1}{2^{n+1}})\,x^n+(-1)^{n+1}[\frac{1}{(\theta x+1)^{n+2}}-\frac{1}{(\theta x+2)^{n+2}}]\,x^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\cdots+(-1)^n(1-\frac{1}{2^{n+1}})\,x^n+(-1)^{n+1}[\frac{1}{(\theta x+1)^{n+2}}-\frac{1}{(\theta x+2)^{n+2}}]\,x^{n+1}\quad(0<\theta<1)\ .$$

6.（6 分）证明：当 $x<1$ 时，$e^x\le\frac{1}{1-x}$.

证 当 $x<1$ 时，$1-x>0$，即要证：$e^x(1-x)\le 1$. 令 $f(x)=1-e^x(1-x)$，$(x<1)$

$f'(x)=xe^x$，$f''(x)=e^x(x+1)$，令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内的唯一驻点：$x=0$，

且 $f''(0)=1>0$，$\therefore$ $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内的唯一极小值，即最小值.

故 当 $x<1$ 时，$f(x)\ge f(0)=0$，即 $e^x(1-x)\le 1$，亦即 $e^x\le\frac{1}{1-x}$.

7.（6 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+e^x-e^y=0$ 所确定，求 $y''(0)$.

解 方程 $xy+e^x-e^y=0$ 两边关于 x 求导两次，$y+xy'+e^x-e^y y'=0$，

$\Rightarrow y'=\frac{e^x+y}{e^y-x}$，

$2y'+xy''+e^x-e^y(y')^2-e^y y''=0$，$\Rightarrow y''=\frac{2y'+e^x-e^y(y')^2}{e^y-x}$，

当 $x=0$ 时，由方程 $xy+e^x-e^y=0$ 知 $y=0$，

$$\therefore y'(0)=\left.\frac{e^x+y}{e^y-x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1,\qquad y''(0)=\left.\frac{2y'+e^x-e^y(y')^2}{e^y-x}\right|_{\substack{x=0\\y=0\\y'=1}}=2.$$

四、（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[\,0,1\,]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，证明：$\exists\xi\in(\,0,1\,)$，使得 $f(\xi)+2f'(\xi)=0$.

证 令 $F(x)=e^{\frac{1}{2}x}f(x)$, 则由题设知 $F(x)$ 在 $[\,0,1\,]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}f(x)+e^{\frac{1}{2}x}f'(x)$, $F(0)=f(0)=0$, $F(1)=e^{\frac{1}{2}}f(1)=0$, 根据洛尔中值定理，

$\exists\xi\in(\,0,1\,)$ 使得 $F'(\xi)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\xi}f(\xi)+e^{\frac{1}{2}\xi}f'(\xi)=0$, 而 $e^{\frac{1}{2}\xi}\ne 0$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}f(\xi)+f'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+2f'(\xi)=0$.