2010-1011 学年第二学期高等数学（2-2）期末考试 A 卷

一. 填空题 (共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分)

1．设$z = xe^y + \ln(x^2+y^2)$,则$dz|_{(1,0)} =$______________ .

2．设 $f(x,y)=x-y+\sin xy$,则$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,x)dx=$______________ .

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{\pi-x}, 0<x<\pi\\ x^2+1, -\pi\le x\le 0\end{cases}$ 以2π为周期，$s(x)$为的 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则$s(-3\pi)=$ ________.

4．设曲线C为圆周$x^2+y^2=R^2$,则曲线积分$\oint_C (x^2+y^2-3x)ds=$___________ .

二. 选择题（共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1. 设直线L为$\begin{cases}x+3y+2z=0\\2x-y-10z+3=0,\end{cases}$平面$\pi$为$4x-2y+z-2=0$,则 （ ）.

（A） L平行于平面π （B） L在平面π上

（C） L垂直于平面π （D） L与π相交，但不垂直

2．设有空间区域$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$，则$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$等于 （ ）.

（A） $\dfrac{2\pi}{3}R^4$ （B） πR^4 （C） $\dfrac{4\pi}{3}R^4$ （D） $2\pi R^4$

3．下列级数中，收敛的级数是（ ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{n}{n+1})^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n+1}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}})$

4. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，则下列结论中错误的是（ ）

（A） 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛 （B）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$也收敛

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则部分和S_n有界 （D）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$

三．计算题（共 8 小题，每小题 8 分，共计 64 分）

1．设函数 f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x^2y,x+y)$，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2．求函数$z=3xy^2-x+y$在曲线$y=x^2+1$上点（1,2）处，沿着曲线在该点偏向x轴正向的切线方向的方向导数.

3．计算$\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy,$ 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$.

4. 设立体Ω由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及半球面$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$围成. 已知Ω上任一点(x,y,z)处的密度与该点到xoy平面的距离成正比（比例系数为$K>0$），试求立体Ω的质量.

5．计算曲线积分 $I=\oint_C \dfrac{(x-y)dx+(y+x)dy}{x^2+y^2}$ ，其中 C 是曲线 $x^2+y^2=1$ 沿逆时针方向一周.

6. 计算第二类曲面积分 $\oiint_\Sigma xyzdydz+xydxdz+zx^2dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

7．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n$ 的和函数 .

四．证明题（本题 4 分）

证明下列不等式成立：$\iint_D \dfrac{e^y}{e^x}dxdy\geq\pi$，其中 $\mathrm{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$.

五．应用题（本题 8 分）设有一小山，取它的底面所在平面为xoy坐标面，其底部所占的区域为$D=\{(x,y):x^2+y^2-xy\le 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy.$

（1）设$M(x_0,y_0)$为区域D上一点，问$h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？

若记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试写出$g(x_0,y_0)$的表达式。

（2）现欲利用此小山举行攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说要在D的边界线$x^2+y^2-xy=75$上找使（1）中的$g(x,y)$达到最大值的点，试确定攀登起点的位置。