2009-2010学年第二学期工科 高等数学（2-2）期中试题

一、填空题（5×6分$=30$分）

1. 向量$\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$，向量$\vec{b}$的三个方向角均相等且为锐角，则$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=$ $\underline{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$.

2. 曲线$\begin{cases}x^2+z^2-4z=0\\ y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转所得的旋转曲面的方程是$\underline{x^2+y^2+z^2-4z=0}$.

3. 设函数$z=f(u,v)$有连续的二阶偏导数，其中$u=x^2+y^2, v=xy$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

$\underline{4xyf''_{11}+2(x^2+y^2)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2}$.

4. 函数$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在$(1,2,-2)$处的最大变化率是$\underline{\dfrac{1}{3}}$，

对应方向的方向余弦是$\underline{(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3})}$.

5. 改变二次积分$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$的积分次序得$\underline{\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2} f(x,y)dy}$.

二、选择题（4×4分$=16$分）

1. 设直线L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面$\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线L（ ***A*** ）

（A）垂直于平面π；（B）在平面π上；（C）平行于平面π；（D）与平面π斜交.

2．函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处偏导数存在是$f(x,y)$在该点可微的（ ***B*** ）

（A）充分非必要条件；（B）必要非充分条件；（C）充要条件；（D）非充分非必要条件.

3. 设$f(x)$是连续的奇函数，$g(x)$是连续的偶函数，区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le1,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$，则下列结论正确的是（ ***A*** ）

（A）$\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$；（B）$\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0$；

（C）$\iint\limits_D [f(x)+g(y)]dxdy=0$；（D）$\iint\limits_D [f(y)+g(x)]dxdy=0$.

4. 下列说法正确的是（ ***C*** ）

（A）两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行的充要条件是存在唯一的实数λ，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$；

(B) 二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在区域 D 内连续，

则在该区域内两个二阶混合偏导必相等；

(C) 二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的充分条件；

(D) 二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的必要条件.

三、计算题（6+18+9+9=42 分）

1. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 内的投影直线的方程.（6 分）

解： 求通过该直线的一平面，使其与平面4x−y+z=1垂直.

设过该直线的平面束方程为 $2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$

即 $(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$

令 $\overrightarrow{n_1}=(2+3\lambda,-(4+\lambda),1-2\lambda)$； $\overrightarrow{n_2}=(4,-1,1)$. 由 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，解得 $\lambda=-\frac{13}{11}$.

代入平面束方程得 $17x+31y-37z-117=0,$

故所求直线方程为: $\begin{cases}4x-y+z=1\\17x+31y-37z-117=0\end{cases}$.

2. （2+6+10=18 分） 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+2z-2=0\end{cases}$. 求 （1） Γ 在 xoy 平面内的投影曲线；

（2） Γ 在点 $(-1,-1,2)$ 处切线方程与法平面方程；（3） 原点到 Γ 的最长和最短距离.

(1). 消去 z 得 $2x^2+2y^2+x+y-2=0.$

故所求投影直线为: $\begin{cases}2x^2+2y^2+x+y-2=0\\z=0\end{cases}$.

(2).切向量为 $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2x&2y&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=\{4y+1,-(4x+1),2(x-y)\}$

在 $(-1,-1,2)$ 处， $\vec{s}=\{-3,3,0\}$.

则切线与法面的方程分别为： $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{0}$, $x-y=0.$

(3) 原点到 Γ 上任一点 (x,y,z) 的距离为： $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

令 $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+2z-2)$,

解方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \\ z = 2 \end{cases}$

代入到目标函数，比较得，最大值与最小值分别为$\sqrt{6}$和$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 计算 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$， $D: x^2 + y^2 \le 1$ 且 $x + y \ge 1$.（9 分）

作极坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. 则$D: \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \le r \le 1, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} \frac{r(\sin\theta + \cos\theta)}{r^2} \cdot rdr = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

4. 计算由 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 围成的空间体的体积.（9 分）

解 设所围立体为Ω，作柱面坐标变换$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$,曲面方程为$z = \sqrt{2 - r^2}$和$z = r^2$.

联立解得$r = 1$,故Ω:$\begin{cases} r^2 \le z \le \sqrt{2 - r^2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ 所围立体体积为:$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} dz = \dfrac{\pi}{6}(8\sqrt{2} - 7)$.

四、证明题（6+6=12 分）

1. 设 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$，证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证明：对方程两端求微分得

$2\cos(x+2y-3z)(dx + 2dy - 3dz) = dx + 2dy - 3dz$， 移项得$dz = \dfrac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}dx + \dfrac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}dy$.

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}$. 相加得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

2. 设 $\Omega(t): x^2 + y^2 + z^2 \le t^2, t > 0,$ $F(t) = \iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$，其中 f 为连续函数，

$f(1) = 1$，证明：$F'(1) = 4\pi$.

证明：作球面坐标变换，则 $\Omega:\begin{cases} 0\le r\le t \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$.于是, $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2dr=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2dr,$

$F'(t)=4\pi f(t^2)t^2$. 又知：$f(1)=1$，故 $F'(1)=4\pi.$