2013—2014 学年第二学期《高等数学（2-2）》期末考试 A 卷

一.（共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分）判断下列命题是否正确 ？　在题后的括号内打“ √ ”或“ × ” ，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明 .

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ 发散 .（　√　）

证 $\because \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}\neq 0,\qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ 发散.

2.若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处有极值,则 $f_x'(x_0,y_0)=0$ ，$f_y'(x_0,y_0)=0$.（　×　）

例如：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处有极小值 $f(0,0)=0$，但

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{不存在,}$$

同理，$f_y'(0,0)$ 也不存在.

3．第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma}dxdy=$ 曲面 Σ 的面积 .（　×　）

例如：圆柱面 $\Sigma: x^2+y^2=1\quad(0\le z\le 1)$，其母线平行于 z 轴，

$\therefore \iint_{\Sigma}dxdy=0\neq$ 圆柱面 Σ 的面积 2π .

二.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 21 分）

1. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两互相垂直，且 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，求 $|\sqrt{3}\,\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|$.

解 $\because(\sqrt{3}\,\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})^2=3|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}+-2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$=3+2^2+3^2+0=16\quad,$$

$$\therefore\ |\sqrt{3}\,\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(\sqrt{3}\,\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})^2}=\sqrt{16}=4.$$

2．已知两条直线的方程是 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，$L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，

求过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程.

解 $\vec{s}_1=\{1,0,-1\}$，$\vec{s}_2=\{2,1,1\}$，

所求平面过 L_1，则过 L_1 上的点 $(1,2,3)$，

所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$，

所求平面为 $(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$，即 $x-3y+z+2=0$.

3．计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$，其中 D： $x^2+y^2\le 1$ ， $x\ge 0, y\ge 0$.

解 1 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，

$$\therefore \iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\, d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1}{8}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

解 2 $\because D$ 关于直线 $y=x$ 对称，$\therefore \iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$，

$$\therefore \iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy-\iint\limits_D y^2dxdy=0.$$

三．（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 计算 $\iint\limits_\Sigma (x+y+z)dS$，其中 Σ 为曲面 $y+z=1$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截下的有限部分.

解 $\Sigma: z=1-y$，$(x, y)\in D=\{(x, y)\,|x^2+y^2\le 1\}$.

$$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ dxdy=\sqrt{1+0^2+(-1)^2}\ dxdy=\sqrt{2}\ dxdy,$$

$$\therefore \iint\limits_\Sigma (x+y+z)dS=\iint\limits_\Sigma (x+1)dS$$

$=\iint\limits_\Sigma xdS$ （Σ 关于 yoz 平面对称，被积函数 x 是 x 的奇函数）$+\iint\limits_\Sigma dS$

$$=0+\iint\limits_\Sigma dS=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}\,\pi.$$

2. 要制作一个容积为 V 的长方体形无盖水池，应如何选择水池的尺寸，才能使它的表面积最小.

解 设水池的长、宽、高分别为 x、y、z，则水池的表面积为：

$S=xy+2xz+2yz$ 且 $xyz=V$，（$x>0, y>0, z>0$）

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-V)$，

则 $\begin{cases} L'_x=y+2z+\lambda yz=0 \\ L'_y=x+2z+\lambda xz=0 \\ L'_z=2x+2y+\lambda xy=0 \\ L'_\lambda=xyz-V=0 \end{cases}$ 解之得符合实际意义唯一驻点：

$x=\sqrt[3]{2V}, y=\sqrt[3]{2V}, z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$，

故水池的长、宽、高分别为 $\sqrt[3]{2V}$ 、$\sqrt[3]{2V}$ 、$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ 时，才能使其表面积最小.

四．（共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 6 分，共计 13 分）

1．设 $z=f(2x-y\,,\;y\sin x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.（7 分）

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\cdot f_1'+y\cos x\cdot f_2'$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f_1'+\sin x\cdot f_2'$,

$\therefore\ dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=(2\,f_1'+y\cos x\cdot f_2')dx+(\sin x\ f_2'-f_1')dy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\,[\,f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot\sin x]+\cos x\cdot f_2'+y\cos x[\,f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot\sin x]$$

$$=-2\,f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+\cos x\cdot f_2'+y\sin x\cos x\ f_{22}''\ .$$

2．求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线方程.（6 分）

解 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，则 $F_x'=2y$ ， $F_y'=2x$ $F_z'=1-e^z$ ，

$\vec{n}=\{\ F_x',F_y',F_z'\ \}\big|_{(1,2,0)}=2\{\,2,1,0\,\}$,

故所求法线方程为：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{0}$.

五.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1．计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 沿逆时针方向一周.

解 1 $\because P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\,Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$ ， $(x,y)\neq(0,0)$.

根据格林公式，

$$\therefore\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

解 2 $\because P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\,Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ， $(x,y)\neq(0,0)$.

说明曲线积分在不包含坐标原点 $(0,0)$ 的任何闭区域上与路径无关，

$$\therefore\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0\ .$$

2．计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+xyz)dxdydz$，其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\le 1$.

解 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+xyz)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz$$

令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，则 $\Omega:\begin{array}{l}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le 1\end{array}$ ，

$$\therefore\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4\ dr=\frac{4\pi}{5},$$

又$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$ 关于三个坐标平面都对称，xyz是x（或y或z）的奇函数，根据对称性，$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz=0$，

故$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+xyz)dxdydz$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz=\frac{4\pi}{5}+0=\frac{4\pi}{5}.$$

六.（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}$的收敛半径、收敛域及其和函数.

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\therefore$收敛半径$R=1$,

当$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，故收敛域为$(-1,1]$，

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}$ ，$x\in(-1,1)$，逐项求导，

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},\quad -1<x<1.$$

而$S(0)=0$, $\therefore$ $S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)$，$-1<x<1$.

又当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，$\therefore S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln(1+x)=\ln 2$，

故 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$，$-1<x\le 1$.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & -\pi<x<0.\end{cases}$以$2\pi$为周期的傅里叶级数的和函数为$S(x)$，

求其傅里叶系数b_2 及$S(2\pi)$, $S(3\pi)$的值.（6 分）

解 $b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2xdx$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}.$$

$S(2\pi)=S(0)=f(0)=0$，

$$S(3\pi)=S(2\pi+\pi)=\ S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

七.（共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 4 分，共计 11 分）

1. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{y^2dydz+x^2dzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.（7 分）

解 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{y^2dydz+x^2dzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\oiint\limits_{\Sigma}y^2dydz+x^2dzdx+zdxdy$

设 Σ 所围闭区域为 Ω，

$P=y^2$，$Q=x^2$，$R=z$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$，根据高斯公式，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{y^2dydz+x^2dzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\oiint\limits_{\Sigma}y^2dydz+x^2dzdx+zdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\frac{4\pi}{3}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[\,a\,,b\,]$ $(0<a<b)$ 上连续且 $f(x)>0$，

证明：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2$.（4 分）

证 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dy}{f(y)}=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy$

（其中 $D: a\leq x\leq b, a\leq y\leq b$. 关于直线 $y=x$ 对称）

$$=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy=\frac{1}{2}[\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy+\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy]=\frac{1}{2}\iint\limits_D[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy\geq\iint\limits_D 1\,dxdy=(b-a)^2.$$