

2012—2013 学年第一学期 高等数学 (2-1) (工科类) 期末试卷(A) 参考答案

一. 填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 共计 18 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 则 $\int x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 x + \cos^6 x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 微分方程 $y' - \frac{y}{x} - x^2 = 0$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan t dt}{x(1 - \cos x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$, ($a > 0$) 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二. 选择题 (共 4 小题, 每小题 3 分, 共计 12 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则下列说法中不正确的有().

- A. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则其原函数是偶函数;
- B. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则其原函数是奇函数;
- C. 若 $f(x)$ 是周期函数, 则其原函数是周期函数;
- D. 若 $f(x)$ 是有界函数, 则其原函数是有界函数.

2. 若 a, b, c, d 成等比数列, 则函数 $y = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx + d$ ().

- A. 有极大值, 而无极小值
- B. 无极大值, 而有极小值
- C. 有极大值, 也有极小值
- D. 无极大值, 也无极小值

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 2, \\ ax + b, & x \leq 2, \end{cases}$ 在 $x = 2$ 处可导, 其中 a, b 为常数, 则必有().

- A. $a = 2, b = 1;$
- B. $a = -1, b = 5;$
- C. $a = 4, b = -5;$
- D. $a = 3, b = -3.$

4. 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = ().$

- A. 0;
- B. $\ln 2;$
- C. $\ln 3;$
- D. 发散.

三. 计算题 (共 5 小题, 每小题 7 分, 共计 35 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$.

2. 求不定积分 $\int \tan^4 x dx$.

3. 方程 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \frac{1}{2} \ln(1+t^2), \end{cases}$ 确定 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 求其间断点并判断其类型.

5. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

四. 应用题 (共 3 小题, 每小题 10 分, 共计 30 分)

1. 曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与直线 $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ 围成一个平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

2. 在区间 $[0, 1]$ 上给定函数 $y = x^2$, 问当 t 为何值时, 图中的阴影部分 S_1 与 S_2 的面积之和最小?

3. 某人以 $2m/s$ 的速度通过一座桥, 桥面高出水面 $20m$, 在此人的正下方有一个小船以 $\frac{4}{3}m/s$ 的速度与桥垂直的方向航行, 求经 $5s$ 后, 人与船相分离的速度.

五. 证明题 (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导,

且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = f(0)$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 0$.