2016—2017 学年第一学期

《高等数学（2-1）》期中考试卷答案

（工 科 类）

专业班级 ________________

姓　　名________________

学　　号________________

开课系室　　基础数学系

考试日期　　2016 年 11 月 19 日

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
本题满分	16	18	18	12	12	12	12	
本题得分								
阅卷人								

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共七道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 7 页。

一.（共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）判断下列命题是否正确 ？在题后的括号内打“√”或“×”，如果正确，请给出证明，如果不正确，请举一个反例进行说明。

本题满分 16 分	
本题得分	

1. 如果数列$\{x_n\}$有界，则数列$\{x_n\}$收敛.　　（ × ）············ 2 分

反例：数列 $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$有界，但是不收敛.　············ 2 分

2. 如果$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.　　（ √ ）············ 2 分

证明：$\forall\varepsilon>0$, 由$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$，可得 $\exists\delta>0$, 当$x\in U^o(0,\delta)$ 时，$\big||f(x)|-0\big|<\varepsilon$,

即$|f(x)-0|<\varepsilon$, 故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.　············ 2 分

3. 如果函数$f(x)$在x_0可导，则$|f(x)|$在x_0也可导.　（ × ）············ 2 分

反例：$f(x)=x$, 在$x=0$处可导，但$|f(x)|$在$x=0$处不可导.　············ 2 分

4. 如果函数$f(x)$在x_0处既存在左导数又存在右导数，则函数$f(x)$在x_0处连续.　（ √ ）············ 2 分

证明：由$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 可知$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,

由$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 可知$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,

故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即函数连续.　············ 2 分

本题满分 18 分	
本题得分	

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$.

由海涅定理可得：

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ………… 2 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ ………… 2 分

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}}=e^0=1$ ………… 2 分

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^x$.

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{2x-3})^{\frac{2x-3}{4}\cdot\frac{4x}{2x-3}}$ ………… 4 分

$=e^2$ ………… 2 分

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{e^{x^2}-1}$.

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$ ………… 2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{4\sqrt{\cos x}}=\frac{-1}{4}$ ………… 4 分

三．（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3+x-1, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，求常数 a 和 b．

解.　因为函数在 x=1 处可导，所以连续，故

$$\lim_{x\to 1^-}(x^3+x-1)=1=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ 2 分$$

因为在 x=1 处可导，可得：$f'_+(1)=f'_-(1)$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

而：$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=a$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$

故 a＝4，从而 b＝－ 3　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

2．指出函数 $f(x)=5^{\frac{2x}{x-3}}$ 的间断点及其类型．

解.　x=3 是间断点.　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

因为 $\lim_{x\to 3^+}f(x)=5^{\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}}=+\infty$

所以 x=3 是无穷间断点.　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

3．设方程 $3x^y+y^x=4,(x>0,y>0)$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求 $y'(1)$．

解.　方程变形得：$3e^{y\ln x}+e^{x\ln y}=4$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

两边同时关于 x 求导得：

$$3e^{y\ln x}\left(y'\ln x+\frac{y}{x}\right)+e^{x\ln y}\left(\ln y+\frac{x}{y}y'\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ 2 分$$

把 x=1 带入原方程可得 y=1，

把 x=1,y=1 带入上式可得：$y'(1)=-4$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

四．（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

1．求曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的所有渐近线方程．

解. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$, 所以 x=0 是铅直渐近线.

………… 3 分

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=1$$

所以有水平渐近线：y=1 ………… 3 分

2．设函数 $f(x)=(x^2+1)\sin x$，求$f^{(50)}(\frac{\pi}{2})$ ．

解．由莱布尼兹公式可得：

$$f^{(50)}(x)=(x^2+1)\cdot\sin\left(x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)+50\cdot 2x\cdot\sin\left(x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot\sin(x+48\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$=-(x^2+1)\cdot\sin x+100x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2450\cdot\sin x$$

………… 4 分

所以$f^{(50)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)+2450$ ………… 2 分

本题满分 12 分	
本题得分	

五.（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1. 设参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = e^t + \sin t \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + \cos t}{3t^2+1}$ ………… 2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^t + \cos t}{3t^2+1}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{(e^t - \sin t)(3t^2+1) - 6t(e^t + \cos t)}{(3t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{3t^2+1}$$

$$= \frac{(e^t - \sin t)(3t^2+1) - 6t(e^t + \cos t)}{(3t^2+1)^3}$$

………… 4 分

2. 求 $f(x) = \frac{2}{3}x - (x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值.

解. 定义域是:$\mathrm{R} = (-\infty, +\infty)$,

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

x=1 是不可导点，$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$可得 x=2 ………… 2 分

列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	1	(1,2)	2	$(2, +\infty)$
f′(x)	+		−	0	+
f(x)	单增	极大	单减	极小	单增

………… 3 分

极大值：$\mathrm{f}(1) = \frac{2}{3}$， 极小值：$\mathrm{f}(2) = \frac{1}{3}$ ………… 1 分

六．（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

1．讨论函数$y = xe^x$的凸性区间和拐点．

解． $y' = (x+1)e^x, y'' = (x+2)e^x$

令$y'' = 0$，得$x = -2$ ………… 2 分

列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	上凸	拐点	下凸

………… 3 分

拐点是：$(-2,-2e^{-2})$ ………… 1 分

2．证明：当$x < 1$时，$e^x \le \frac{1}{1-x}$.

证明． 令 $f(x) = e^x(1-x)$, ………… 2 分

则 $f'(x) = -xe^x = 0$,可得 x=0

所以当$x < 0$时，$f'(x) > 0$，当$0 < x < 1$时,$f'(x) < 0$ ………… 2 分

故函数在 x=0 处取得最大值，即$f(x) \le f(0) = 1$

综上可得当$x < 1$时，$e^x \le \frac{1}{1-x}$. ………… 2 分

本题满分 12 分	
本题得分	

七.（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1．加热一块半径为 2cm 的金属圆形薄板，其半径以 0.01cm/s 的速率增大，求当半径为 2.1cm 时，面积的变化率.

解. 设 t 时刻圆形薄板得半径为 r, 面积为 S(r)

则　$S(r)=\pi\cdot r^2$　　　………… 2 分

两边关于 t 求导可得

$\frac{dS}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$　　　………… 2 分

所以当 r=2.1 时，$\frac{dS}{dt}=2\pi\cdot 2.1\cdot 0.01=0.042\pi\ cm^2/s$

………… 2 分

3．设函数$f(x)$在$[0,b]$上连续，在$(0,b)$内可导，且$f(b)$=0，证明存在一点$\xi\in(0,b)$,使得$f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)=0$.

解．令$F(x)=xf(x)$，　　　………… 2 分

则$F(x)$在$[0,b]$上连续，在$(0,b)$内可导，

并且$F(0)=F(b)=0$，　　　………… 2 分

由罗尔定理可知，$\exists\xi\in(0,b)$使得$F'(\xi)=0$

即$f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)=0$.　　　………… 2 分