

2013—2014 学年第一学期 高等数学 (2-1) (工科类) 期末试卷(A) 参考答
案

一. (共 5 小题, 每小题 3 分, 共计 15 分) 判断下列命题是否正确? 在题后的括号内打“√”或“×”, 如果正确, 请给出证明, 如果不正确请举一个反例进行说明.

1. 若 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 无界, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. ()

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 点必可导. ()

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. ()

4. 若 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点必取得极值. ()

5. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必可积. ()

二. (共 3 小题, 每小题 7 分, 共计 21 分)

1. 指出函数 $f(x) = x \cdot \cot x$ 的间断点, 并判断其类型.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x (1+t^2) e^{t-x} dt$

3. 设方程 $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x}$ ($x > 0, y > 0$) 确定二阶可导函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

三. (共 3 小题, 每小题 7 分, 共计 21 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$.

2. 设 $\ln^2 x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$.

3. 求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 \sin x^4 + \cos^7 2x) dx$.

四. (共 2 小题, 每小题 6 分, 共计 12 分)

1. 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速度增加, 宽 w 以 3cm/s 的速度增加, 则当长为 12cm , 宽为 5cm 时, 它的对角线的增加率是多少?

2. 物体按规律 $x = ct^2$ 做直线运动, 该物体所受阻力与速度平方成正比, 比例系数为1, 计算该物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服阻力所做的功.

五. (10 分) 已知 $f(x) = x - 5 \arctan x$, 试讨论函数的单调区间, 极值, 凹凸性, 拐点, 渐近线

六. (共 2 小题, 每小题 7 分, 共计 14 分)

1. 试求曲线 $y = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$ ($x \geq 0$) 与 x 轴所夹的平面图形绕 x 轴旋转所得到的伸展到无穷远处的旋转体的体积.

2. 求微分方程 $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$ 的通解.

七. (本题 7 分) 叙述罗尔 (*Rolle*) 中值定理, 并用此定理证明:

$$\text{方程 } a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 0$$

在 $(0, \pi)$ 内至少有一个实根, 其中 a_1, a_2, \cdots, a_n 为常数.