2014—2015 学年第二学期《高等数学（2-2）》期末试卷

注:本试卷共八道大题，包括基础达标题（第一到四题），综合提高题（第五到七题），应用拓展题（第八题），满分 100 分； 其中第 8 页第 1 题仅供 80 学时者做，第 2 题仅供 96 学时者做；

一、辨析题（共 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“√”或“×”；如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. （ ）

2．设直线 $L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\Pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 L 垂直于平面 Π.（ ）

3. 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处一定连续. （ ）

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．设 $L: x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x ds=$___，$\oint_L y^2 ds=$___，$\oint_L (x^2+y^2) ds=$_____.

2. 交换积分次序：

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=$$ ________________.

3. 写出下列积分在极坐标系下的二次积分形式：

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy=$$ ________________.

4. $f(x)=e^{2x}$ 关于 x 的幂级数展开式为________________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则以 2 为周期的傅立叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

三、（共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分）

1. 已知 $z=f(x\ln y,x-y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=\int_0^t e^u\cos u du\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+e^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

3. 计算曲线积分 $\int_L (x^2+y)dx+(y^2+x)dy$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 从 $(1,0)$ 到 $(0,1)$ 的一段弧.

四、（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. Ω是由$z=x^2+y^2, z=4$所围成的立体，其任一点处的密度等于该点到z轴的距离的平方，求该立体的质量.

2. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在球面$x^2+y^2+z^2=2z$内部的那部分面积.

3. 设平面Π与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，直线$L:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$在平面$\Pi$上，求平面$\Pi$的方程及$a,b$的值.

五、（本题 8 分）

设有流速场 $\vec{v}=\dfrac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{i}+\dfrac{(z+a)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{k}$**，求** $\vec{v}$ **通过下半球面**

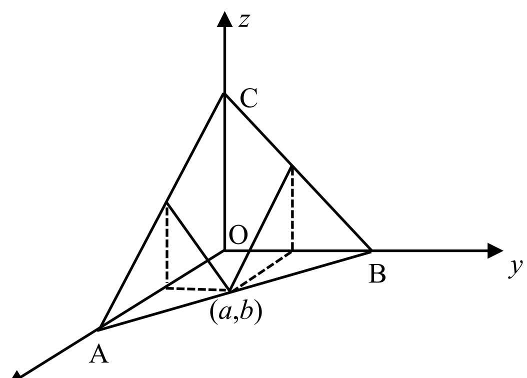
$\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ **上侧的流量.**

六、（本题 9 分）　计算 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$**，其中**

（1）$L:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向；（2）$L: x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，取逆时针方向.

七、（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 设一个四面体由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成（如图所示），过 AB 上一点 (a,b)，作平面 $x=a, y=b$ 截该四面体得到一个六面体，求这个六面体的最大体积.



2. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域及和函数.

八、(80 学时者只做第 1 题，96 学时者只做第 2 题，本题 9 分)

1. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数， $f(0)=f'(0)=1$，且

$$\left[xy(x+y)\right]dx+\left[f'(x)+x^2 y\right]dy=0$$

为一个全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数， $f(1)=f'(1)=0$， L 为 xOy 面第一象限内任一条光滑闭曲线，且

$\oint_L(\ln x-f'(x))\frac{y}{x}dx+f'(x)dy=0$，求 $f(x)$.