2010-2011 学年第二学期工科 高等数学（2-2）期中试题

一、填空题（5×5分$=25$分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=$ $\underline{\ 0\ }$.

2. 如果直线$L_1:\begin{cases}x+2y-z-7=0\\2x-y-z+7=0\end{cases}$与直线$L_2:\begin{cases}x=3t-1\\y=-kt\\z=5t+2\end{cases}$ 垂直，则$k=$ $\underline{\ 34\ }$.

3. 函数$u=xy^2z$在点$P(1,-1,2)$处沿 $\underline{\ 2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}\ }$ 方向的方向导数值最大，最大的方向导数值为 $\underline{\ \sqrt{21}\ }$.

4. $f(x,y)$为连续函数，且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$，其中$D$由$y=0,\ y=x^2$, $x=1$围成，则$f(x,y)=$ $\underline{\ xy+\dfrac{1}{8}\ }$.

5. $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}\,dy=$ $\underline{\ \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{e})\ }$

二、选择题（5×5分$=25$分）

1. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|,\vec{a}=\{3,-5,8\},\vec{b}=\{-1,1,z\}$则$z=$（ B ）

(A) -1； (B) 1； (C) 3 ； (D) -3.

2. 函数$f(u,v)$有连续的偏导数, $f(x,x^2)=x^4+2x^3+x,\ f_1'(x,x^2)=2x^2-2x+1$, 则

$f_2'(x,x^2)=$（ A ）

(A) $2x^2+2x+1$； (B) x^2+2x+1； (C) $2x^2+2x+2$； (D) $2x^2+x+1$.

3. 下列关于函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处的性质描述正确的是（ D ）

(A) f在P_0处连续是函数f在该点偏导数存在的必要条件；

(B) f在P_0处可微分是函数f在该点偏导数存在的必要条件；

(C) 如果f在P_0处的两个偏导数为零，则函数f在该点可以取得极值；

(D) 如果f在P_0处两个偏导数连续，则函数f在该点沿任何方向的方向导数都存在.

4. 曲线$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \\ z=2e^t \end{cases}$在对应$t=0$处的切线与z轴

正向夹角的正弦是（　　C　　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　；　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

5. 设函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$　，则　$f(x,y)$　（　　B　　　）

(A) 在$(0,0)$点有极小值；　　　(B) 在$(1,1)$点有极大值；

(C) 在$(1,2)$点有极小值；　　　(D) 没有极值.

三、计算题（6+7+7+8+7+7+8=50 分）

1. 直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过$L_1$且与$L_2$平行的平面

Π的方程，并求L_2到平面Π的距离.(6 分)

解 1：$L_1:\begin{cases} y-2=0 \\ x+z-4=0 \end{cases}$，过$L_1$的平面束方程为

$y-2+\lambda(x+z-4)=0$，　　即　$\lambda x+y+\lambda z-4\lambda-2=0$，

其法向量为　$\vec{n}=\{\lambda,1,\lambda\}$，$\vec{s}_2=\{2,1,1\}$

$\because \vec{n}\perp\vec{s}_2$　$\therefore 2\lambda+1+\lambda=3\lambda+1=0$，$\lambda=-\dfrac{1}{3}$　.

所求平面Π的方程为：$x-3y+z+2=0$　　　取L_2上一点$(-2,1,0)$，

$$d=\frac{|-2-3+0+2|}{\sqrt{1+9+1}}=\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{3}{11}\sqrt{11}$$

解 2：$\vec{s}_1=\{1,0,-1\}$，$\vec{s}_1=\{2,1,1\}$，则平面Π的法向量为

$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\{1,-3,1\}$.取$L_1$上一点$(1,2,3)$，所求平面$\Pi$的方程为：

$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$，　　　即$x-3y+z+2=0$.　以下同**解** 1.

2. 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y+1)^2\,dxdy$,其中$D$为$x^2+y^2\le 1$.(7 分)

解 $\iint\limits_D (x+y+1)^2\,dxdy=\iint\limits_D [(x^2+y^2)+1+2x+2y+2xy]dxdy$

$=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_D dxdy+2\iint\limits_D xdxdy+2\iint\limits_D y(1+x)dxdy$

（$\because D$关于y轴对称，$f(x,y)=x$关于x为奇函数，$\therefore \iint\limits_D xdxdy=0,$

$\because D$关于x轴对称，$f(x,y)=y(1+x)$关于y为奇函数，$\therefore \iint\limits_D y(1+x)dxdy=0$ ）

$=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy+\pi+0+0$ （ 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$ 则

D:$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1$）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr+\pi=\dfrac{3}{2}\pi$

3. 求空间区域Ω: $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$, $x+y\le z\le e^{x+y}$ 的体积V.(7 分)

解 $V=\iiint\limits_\Omega dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_{x+y}^{e^{x+y}}dz=\int_0^1 dx\int_0^x [e^{x+y}-(x+y)]dy$

$$=\int_0^1\left[e^{x+y}-(xy+\frac{y^2}{2})\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1(e^{2x}-\frac{3x^2}{2}-e^x)dx=\frac{e^2}{2}-e\,.$$

4. 设$z=z(x,y)$是由$f(x-z, y-z)=0$确定的隐函数, 其中f有二阶连续偏导数, 且

$f_1'+f_2'\ne 0$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.（8 分）

解 对方程 $f(x-z, y-z)=0$ 两边关于x求偏导数，得

$$f_1'\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial x})+f_2'\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})=0\text{, 即 }\quad f_1'-(f_1'+f_2')\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'}{f_1'+f_2'} \qquad (2)\quad ,$$

对**(1)**式两边再关于x求偏导数，得

$$f_{11}''\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial x})+f_{12}''\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})-[\,f_{11}''\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial x})+f_{12}''\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})+$$

$$+f_{21}''\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial x})+f_{22}''\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})\,]\frac{\partial z}{\partial x}-(f_1'+f_2')\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{f''_{11}\cdot(f'_2)^2 - 2f''_{12}\cdot f'_1\cdot f'_2 + f''_{22}\cdot(f'_1)^2}{(f'_1+f'_2)^3}.$$

5. 由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与 $z=8$ 围成的区域为 Ω，求 $I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$．（7 分）

解 旋转曲面的方程为：$x^2+y^2=2z$，

利用柱面坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z,$ 则

$$\Omega: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 4,\ \frac{r^2}{2}\le z\le 8$$

$$I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{8} r^2\cdot r dz = 2\pi\int_0^4 r^3(8-\frac{r^2}{2})dr \ = \frac{1024}{3}\pi$$

6. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz$（7 分）

解 利用球面坐标变换：$x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi,$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t \sin r^3\cdot r^2\sin\varphi\, dr$$

$$= 4\pi\int_0^t r^2\sin r^3\ dr$$

$$\therefore \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz = \lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t r^2\sin r^3 dr}{t^6}$$

（利用罗比达法则）$= \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{4\pi\, t^2\sin t^3}{6t^5} = \frac{2\pi}{3}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t^3}{t^3} = \frac{2\pi}{3}.$

7. 在曲面 $\Sigma: (x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)=0$ 上的点 $(0,0,0)$ 处的切平面 Π 内求一点 P，使 P 到 $(2,1,2)$ 和 $(-3,1,-2)$ 的距离的平方和最小.（8 分）

解 曲面 Σ 在 $(0,0,0)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = \{2(x^2y+y^2z+z^2x)(2xy+z^2)+1, 2(x^2y+y^2z+z^2x)(x^2+2yz)-1,$$

$$2(x^2y+y^2z+z^2x)(y^2+2zx)+1\}\Big|_{(0,0,0)} \quad = \{1,-1,1\} \quad ,$$

切平面方程为 $1\cdot(x-0)-(y-0)+1\cdot(z-0)=0$，即 $x-y+z=0.$

假设所求点的坐标 $P(x,y,z)$， $d^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$

令 $L(x,y,z,\lambda)=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2+\lambda(x-y+z)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2(x-2)+2(x+3)+\lambda=0,\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y}=2(y-1)+2(y-1)-\lambda=0,\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial z}=2(z-2)+2(z+2)+\lambda=0,\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x-y+z=0,\end{cases}$$ 解得 $x=0,y=\dfrac{1}{2},z=\dfrac{1}{2}$ 是唯一驻点，所求点即为 $(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.