

2009-2010 学年第一学期 高等数学 (2-1) 期中试题参考答案

一、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分共 18 分)

1. 设 $g(x) = 3x + 1$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则 $f(g(x)) =$ _____

2. 设 $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

3. 设 $y = f(x + f(x))$ 二阶可导, $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____

4. 试用 “ $\varepsilon - \delta$ ” 语言叙述 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 的定义

5. 设 $f(x) > 0$ 且在点 $x_0 = a$ 处可导, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} =$ _____

6. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x^k}$ 与 $\sin \frac{1}{x^2 + 1}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ _____

二 选择题 (共 4 小题, 每小题 3 分, 满分 12 分)

1. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则下面表达式不正确的是 ().

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B. $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$.

C. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

D. $dy - \Delta y = o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图[1]所示, 则 $f(x)$ 有 ().

A. 一个极小点和一个极大点.

B. 两个极小点和一个极大点.

C. 两个极小点和两个极大点.

D. 三个极小点和一个极大点.

3. 下列命题错误的是 ().

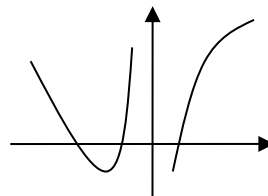
A. 在 x_0 某去心邻域内 $f(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

B. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$.

C. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 存在.

图 [1]



D. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 分别存在.

4. 曲线 $y = 2x + \frac{\ln x}{x-1} + 4$ 的渐近线的条数为 ().

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

三、计算题 (共 6 小题, 每小题 6 分, 满分 36 分)

1.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}-3}{2+\sqrt{x}}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(2x-\pi)^2}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

4. 设
$$\begin{cases} x = a(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t) \\ y = a \sin t \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

5. 设 $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$, 求 $f(x)$ 在点 $x_0 = 2$ 处的 n 阶导数值.

6. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^x = x^y$ 所确定的函数, $x > 0$, $y > 0$, 求微分 dy .

四、应用题 (共 4 小题, 每小题 6 分, 满分 24 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2, & x < 1 \\ b, & x = 1 \\ c + \arctan x, & x > 1 \end{cases}$, 选取合适的 a 、 b 、 c 使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续、可导.

2. 设函数 $f(x) = \frac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}$, 指出函数的间断点, 并判断其类型.

3. 求函数 $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ 的极值、凸凹区间及曲线的拐点坐标。

4. 一气球从离开观察员 500 米处离开地面铅直上升，其速率为 140 米/分，当气球高度为 500 米时，观察员视线的仰角增加率是多少？

五、证明题（共 2 题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且恒为正，证明对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$,

必存在一点 $\xi \in [x_1, x_2]$, 使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

2. 证明：当 $0 < x < 1$ 时， $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$.