A 卷

2009—2010 学年第一学期
《线性代数》试卷答案

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室　　　　应用数学系　　　

考试日期　　　　2010.01.11　　　

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
得　分							
阅卷人							

注意事项

（1） 答卷时请保持卷面清晰，整洁;

（2） 请在试卷本正面答题，反面及附页可做草稿纸;

（3） 试卷本请勿撕开，否则作废.

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 21 分）

将下列每小题的正确选项的代码（A、B、C、D）填在题后的括号内.

1．n 阶行列式 D_n=0 的必要条件是【 D 】.

(A) D_n 中有一行（或列）元素全为零；

(B) D_n 中有两行（或列）元素对应成比例；

(C) D_n 中各列元素之和为零；

(D) 以 D_n 为系数行列式的齐次线性方程组有非零解.

2．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则有【 B 】.

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$；(B) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$；

(C) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$；(D)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

3. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆, 则下列等式正确的是【 B 】.

(A) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

4．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有【 A 】.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

5．非齐次线性方程组 $Ax=b$，其中 $R(A_{m\times n})=r$，则【 A 】.

(A) $r=m$ 方程组 $Ax=b$ 有解；(B) $r=n$ 方程组 $Ax=b$ 有唯一解；

(C) $m=n$ 方程组 $Ax=b$ 有解；(D) $r<n$ 方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.

6． A 与 B 相似, 下列说法正确的是【 C 】.

(A) A 与 B 的特征向量相同； (B) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解；

(C) 若 A 与 B 都可逆，则 A^{-1} 与 B^{-1} 也相似；(D) 若 $B=P^{-1}AP$，则 P 唯一.

7. 设 A 是三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，三阶可逆矩阵 P 满足

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，且 $A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=2\alpha_3$，则 P 可取为【 C 】.

(A) $(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)$； (B) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3)$；

(C) $(\alpha_1,-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$； (D) $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$.

二、填空题（每小题 3 分，共 21 分）

在下列每小题的横线上填上你认为正确的答案.

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&x&2\\5&4&1\end{pmatrix}$ 是不可逆矩阵，则 $x=$____-5____.

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$， 则 $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

3．设 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&1&2&0\\3&0&1&2\end{pmatrix}$， 则 $|A|=$____2____.

4． 已 知 向 量 组 $\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,0,t,0),\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的 秩 为 2, 则 t = 3____.

5．设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$，且 A 的各行元素之和为零，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $\underline{k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}}$.

6. 设 A 是 5 阶实对称矩阵, 1 是 A 的特征方程的 3 重根, 则秩 $R(A-E)=$____2____.

7. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则常数 k 应满足的条件为 $\underline{k>1}$.

三、计算下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2+a & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+a & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2+a\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}2+a & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+a & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2+a\end{vmatrix}\underset{r_1+(r_2+r_3+r_4)}{=}\begin{vmatrix}8+a & 8+a & 8+a & 8+a\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+a & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2+a\end{vmatrix}$

…………3 分

$$=(8+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+a & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2+a\end{vmatrix}\underset{r_i-2r_1(i=2,3,4)}{=}(8+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=(8+a)a^3$$

…………7 分

2．设 $\alpha=\beta=(1,1,1 1)^T$， $A=\alpha\beta^T$，求 A^k（k 为自然数）.

解：因为 $A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=4\alpha\beta^T=4A$，

…………4 分

故

$$A^k=4^{k-1}A=4^{k-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

…………7 分

3．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且满足矩阵方程 $A^2+AX-E=0$，求矩阵 X .

解：移项，有

$$AX=E-A^2$$

…………2 分

于是

$$\left(A,E-A^2\right)=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&-2&-1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}=\left(E,X\right)$$

故

$$X=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

…………7 分

4．设 A 为 3×4 矩阵，$r(A)=2,$ 且已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\qquad \eta_3=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\\11\end{pmatrix},$$

求：(1) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解；(2) 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：令

$\xi_1=\eta_2-\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\eta_3-\eta_2=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\\7\end{pmatrix}$，易见 ξ ,ξ_2 线性无关，

…………2 分

又由于 $r\left(A\right)=2$，故 ξ ,ξ_2 构成齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，

于是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为

$$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2\in R.$$

…………5 分

$Ax=b$ 的通解为

$$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta_1,k_1,k_2\in R$$

…………7 分

四、（本题 10 分）

设向量空间 R^3 中的向量组为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-6\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\8\\2\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}-2\\5\\-6\end{pmatrix}$$

（1）求由 α_1, α_2, α_3, α_4 生成的向量空间 V 的维数与一个基；

（2）从 β_1, β_2 中选出属于 V 的向量，并将它们在（1）中所选的基下表示出来.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2)\to\begin{pmatrix}1&0&3&-1&1&-1\\0&1&2&2&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

…………5 分

故有，向量空间 V 的维数为 2，一个基为 α_1, α_2.

…………7 分

由于 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1)$，

故 β_1 是 V 的向量，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$. …………10 分

五、证明下列各题（每小题 5 分，共 10 分）

1．设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，向量 β 满足 $A\beta \neq 0$，证明：向量组 $\alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots, \alpha_k+\beta$，$\beta$ 线性无关.

证明：设有一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ 满足

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta)+\lambda_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+\lambda_k(\alpha_k+\beta)+\lambda_{k+1}\beta=0$$

整理得：$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k+(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1})\beta=0$ **(*)**

两端同时左乘 A, 有

$$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1})A\beta=0$$

因为 $A\beta \neq 0$，故 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1}=0$ …………2 分

代入 $(*)$ 式有，

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k=0$$

又由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，于是他们线性无关，有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$

从而有

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=\lambda_{k+1}=0.$$

…………5 分

2．证明正交矩阵的实特征向量所对应的特征值的的绝对值等于 1.

证明：设 α 是 A 所对应的实特征向量，其对应的特征值为 λ，则由定义可知

$$A\alpha=\lambda\alpha \qquad \alpha' A' = \lambda\alpha$$

利用正交矩阵的定义，考虑到

$$\alpha' A' A\alpha = \alpha' E\alpha = \alpha'\alpha = \lambda^2\alpha'\alpha$$

…………3 分

故

$$\lambda^2=1 \Rightarrow |\lambda|=1.$$

…………5 分

六、（本题 10 分）

已知实二次型 $f=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$ 可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为 $f=\eta^2+4\zeta^2$，求 $a,\ b$ 的值和正交矩阵 P.

解：由 $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ 相似,则有 $tr(A)=tr(B)$，$|A|=|B|$

解得 $a=3, b=1$. …………2 分

易见 A 的特征值分别是 0，1，4

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $AX=0$，$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量是 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，单位化有 $x_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

…………4 分

当 $\lambda_2=1$ 时，由 $(A-E)X=0$，$(A-E) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量是 $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化有 $x_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

…………6 分

当 $\lambda_3=4$ 时，由 $(A-4E)X=0$，$(A-4E) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得对应于特征值$\lambda_2 = 1$的特征向量是$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化有$x_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$

…………8 分

则$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. …………10 分