2011—2012 学年第一学期　高等数学(2-1)期中试题参考答案

一、填空题（每空 3 分，共计 18 分）

1．设 $f''(a)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=$ $\underline{\ f''(a)\ }$．

2．设曲线方程为 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\underline{\ -\dfrac{1+t^2}{t^3}\ }$．

3．试用" $\varepsilon-\delta$ "语言叙述 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 的定义：

$\underline{\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<x-x_0<\delta,\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon}$．

4. 设 $y=x^3\sin x$，则 $y^{(10)}(0)=$ $\underline{\ -720\ }$．

5．设 $f(a)=1$，$f'(a)=4$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=$ $\underline{\ e^4\ }$．

6．若 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=$ $\underline{\ 1\ }$．

二、选择题（每小题 3 分，共计 12 分）

1．函数 $f(x)=x\sin x$（　A）

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限的极限值

2．设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 n 为（　C　）

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　　(D) 4.

3．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$（D　）

(A) 不可导　　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$　(C) 取极大值　(D) 取极小值

4．曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有（B　）

(A) 一条　(B) 二条　(C) 三条　(D) 四条

三、计算题（每题 7 分，共计 35 分）

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$．

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\dfrac{1}{\cos x})(\sqrt{1+\sin x}+1)}{\dfrac{x^2}{3}\sin x}$ $=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}$ $=-3$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^x$

解：令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$.

$$原式=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{\pi}t)^{\tan t}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}[(1+\frac{2}{\pi}t-1)^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}t-1}}]^{(\frac{2}{\pi}t-1).\tan t}=e^{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}(\frac{2t}{\pi}-1)\frac{\sin t}{\cos t}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x-x^2(1+\cos 2x)}{x^4}$

其中 $\cos 2x$ 在 $x=0$ 点的泰勒公式为：$\cos 2x=1-2x^2+\dfrac{2x^4}{3}+o(x^4)$.

代入化简 $1-\cos 2x-x^2(1+\cos 2x)$

$$=1-(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4))-x^2(1+1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4))=\frac{4}{3}x^4+o(x^4).$$

因此，原式=$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{2}{3}$.

4. 设方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ （$x>0$，$y>0$）确定二阶可导函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 将原方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ 整理变形得：$y\ln y=x\ln x$，

等式两边关于 x 求导，得：$(1+\ln y)\dfrac{dy}{dx}=1+\ln x$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\ln x}{1+\ln y}$，

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{1}{x}(1+\ln y)-(1+\ln x)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}{(1+\ln y)^2}$$

$$=\frac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}.$$

5. 写出函数 $f(x)=x^2\ln x$ 在 $x=1$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式($n>3$).

解：$f'(x)=2x\ln x+x$，$f''(x)=2\ln x+2+1=3+2\ln x$，$f'''(x)=\dfrac{2}{x}$，

$$f^{(4)}(x)=2\frac{-1}{x^2}，\quad f^{(5)}(x)=2\frac{(-1)(-2)}{x^3}，\quad f^{(n)}(x)=2\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}\,(n\geq 3)$$

$$f(1)=0，\quad f'(1)=1，\quad f''(1)=3，\quad f^{(n)}(1)=2(-1)^{(n-1)}(n-3)!$$

因此

$$x^2\ln x=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{2(-1)^{(n-1)}(n-3)!}{n!}(x-1)^n+R_n(x)$$

其中：$R_n(x)=\dfrac{2(-1)^n(n-2)!}{(n+1)!\xi^{n-1}}(x-1)^{n+1}$，（$\xi$ 在 1 与 x 之间）

四、解答题（每题 8 分，共计 24 分）

1. 求函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的极值、凹凸区间及拐点坐标.

解：$f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$. 令 $f'(x)=0\Rightarrow x=0,x=2.$

$$f''(x)=\frac{x^2-4x+2}{e^x},\text{令 } f''(x)=0,\Rightarrow x_1=2-\sqrt{2},x_2=2+\sqrt{2}.$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,2)$	2	$(2,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值 $f(0)=0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	极大值 $f(2)=\dfrac{e^2}{4}$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$\cup$		$\cup$	拐点 $(x_1,f(x_1))$	$\cap$		$\cap$	拐点 $(x_2,f(x_2))$	$\cup$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6， & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

解： $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} =\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a.$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2a^2+4.$$

令 $f(0+0)=f(0-0)$，则有 $-6a=2a^2+4$，解得：$a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=6=f(0)$， $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=12\neq f(0)$， $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

3. 一飞机在离地面 2km 的高度，以 200km/h 速度水平飞行到某目标上空，以便进行航空摄影，试求飞机飞至该目标正上方时，摄影机转动的角速度.

解：设飞机与目标水平距离为 x（km），则 $v=\frac{dx}{dt}=-200km/h$；$\theta=\arctan\frac{2}{x}$

两边对 t 求导：$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2}(-\frac{2}{x^2})\frac{dx}{dt}=-(\frac{2}{x^2+4})\frac{dx}{dt}$

当飞机飞至目标正上方时 $x=0$，此时

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=0}=(-\frac{2}{4})(-200)=100\ (\mathrm{rad/h})=(100\times\frac{\pi}{180})\Big/3600(\circ/\mathrm{s})=\frac{5}{\pi}\ (\circ/\mathrm{s}).$$

五、证明题:

1. （本小题 5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$.证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，

使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 成立.

证明：将所证等式变形得到：

$$f''(\xi)(1-\xi)-2f'(\xi)=0$$

即证：$[f'(x)(1-x)-f(x)]'\big|_{x=\xi}=0\Rightarrow[f(x)(1-x)]''\big|_{x=\xi}=0$.

令 $F(x)=f(x)(1-x)$. $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，

故存在$\xi_1 \in (0,1)$，使得$F'(\xi_1)=0$． 另由

$F'(x)=f'(x)(1-x)-f(x)$，得$F'(1)=-f(1)=0$．

所以$F'(x)$在$[\xi_1,1]$上满足罗尔定理的条件，故存在$\xi \in (\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得

$F''(\xi)=0$．即： $f''(\xi)(1-\xi)-2f'(\xi)=0$．

2. （本小题 6 分） 证明：当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$．

证明：令$F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则有$F(1)=0$．

$F'(x)=2x\ln x-x+2-\dfrac{1}{x}$， $F'(1)=0$．

$F''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$， $F''(1)=2>0$．$F'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，从而

$$\begin{cases} F'''(x)<0 & (0<x<1) \\ F'''(x)<0 & (1<x<+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F''(x)\text{递减} & (0<x<1) \\ F''(x)\text{递增} & (1<x<+\infty) \end{cases}$$

因$F''(1)=2>0$，得$F''(x)>0$．

因$F'(1)=0$，得$\begin{cases} F'(x)<0 & (0<x<1) \\ F'(x)>0 & (1<x<+\infty) \end{cases}$．

因$F(1)=0$，$\Rightarrow$当$x>0$时，$F(x)\ge 0$，即：$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$．