2011-2012 学年第二学期工科高等数学（2-2）期中试题参考答案

一、填空题（每空 3 分，共计 18 分）

1. 设$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=1$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，则向量$\vec{a}+\vec{b}$的模为 $\underline{\sqrt{7}}$.

2. 过曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标为 $\underline{(1,1,2)}$.

3. 函数 $z=1-(x^2+2y^2)$ 在点 $M(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2})$ 处沿曲线 $x^2+2y^2=1$ 在该点的内法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数为 $\underline{\sqrt{6}}$.

4. 设 D 为 $y=x^3$ 及 $x=-1$，$y=1$所围成的闭区域，则 $I=\iint\limits_D xydxdy=\underline{0}$.

5. $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy=\underline{1-\sin 1}$.

6. 设函数 f 具有二阶连续的偏导数，$u=f(xy,x+y)$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\underline{f_1'+xy\ f_{11}''+(x+y)f_{12}''+f_{22}''}$.

二、选择题（每小题 3 分，共计 12 分）

1. $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微是该函数在点 (x_0,y_0) 处连续的（ B ）

（A）必要非充分条件；　　（B）充分非必要条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非充分也非必要条件.

2. 若 $D_1:-1\le x\le 1,-2\le y\le 2;D_2:0\le x\le 1,0\le y\le 2,$ 则

$I_1=\iint\limits_{D_1}\sin(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}d\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_{D_2}\sin(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}d\sigma$ 之间的关系是（ C ）.

$(A)I_1=I_2$；　$(B)I_1\le 2I_2$；　$(C)I_1=4I_2$；　$(D)I_1=8I_2$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 确定，f 可微，

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（ B ）

（A）x；　（B）y；　（C）z；　（D）1.

4. 函数 $u=xy^z$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 等于（ D ）.

(A) zxy^z； (B) xy^{z-1}； (C) y^{z-1}； (D) y^z.

三、计算题（每题 7 分，共计 35 分）

1. 求与已知平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行且与三个坐标平面所围成的四面体的体积为 1 的平面的方程.

解：由于所求平面与已知平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行，

故设该平面方程为: $2x+y+2z+D=0$；

又所求平面与坐标平面所围四面体的体积为 1，即

$\frac{1}{6}\times\frac{|D|}{2}\times|D|\times\frac{|D|}{2}=1$，得 $D=\pm2\sqrt[3]{3}$，

所求平面方程为: $2x+y+2z\pm2\sqrt[3]{3}=0$.

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)^2dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le1$.

解：$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，

又积分区域 D 关于 x 轴对称，$2xy$ 关于 y 为奇 函数，利用对称性，则 $\iint\limits_D 2xydxdy=0$，

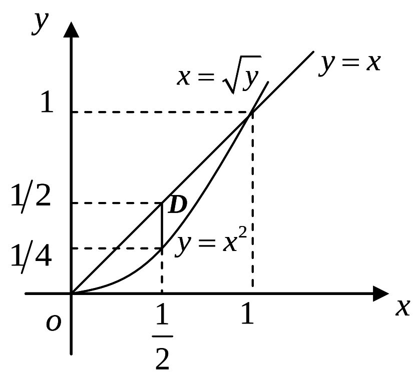
故 $\iint\limits_D(x-y)^2dxdy=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$，

在极坐标系下，D 可表示为：$\begin{cases}0\le\theta\le2\pi,\\0\le r\le1,\end{cases}$ $\therefore\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}$.

1. 计算二次积分 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

解：根据二次积分的形式，可得积分区域 D 如图所示，要改变积分次序，将 D 化为 x 型区域，

即 D_x：$\frac{1}{2}\le x\le1$，$x^2\le y\le x$.



$\therefore\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^x)dx=\frac{3e}{8}-\frac{\sqrt{e}}{2}$.

4. 设$u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，求$du$.

解：（方法一）：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1'$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2'$，则

$$du=\frac{1}{y}f_1'dx+(-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2')dy-\frac{y}{z^2}f_2'dz.$$

（方法二）：利用全微分形式不变性，得

$$du=f_1'd(\frac{x}{y})+f_2'd(\frac{y}{z})=f_1'\frac{ydx-xdy}{y^2}+f_2'\frac{zdy-ydz}{z^2}$$

$$=\frac{1}{y}f_1'dx+(-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2')dy-\frac{y}{z^2}f_2'dz.$$

5. 求区域Ω的体积V，其中Ω是由半球面$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$及旋转抛物面$x^2+y^2=2az$所围成$(a>0)$.

解：（方法一）利用二重积分

半球面与旋转曲面交线为$\begin{cases}z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}\\x^2+y^2=2az\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2+y^2=2a^2\\z=a\end{cases}$，则$\Omega$ 在xoy面上的投影域为$D:x^2+y^2\le 2a^2$，

所求体积$V=\iint\limits_D(\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{2a})dxdy$，利用极坐标系，

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a})rdr=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6}).$$

（方法二）利用三重积分与柱面坐标系，

$$V=\iiint\limits_\Omega dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}rdz=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6}).$$

四、解答题（每题 9 分，共计 27 分）

1. 求曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\2x^2+2y^2-z^2=0\end{cases}$在点$(1,1,2)$处的切线方程与法平面方程.

解：（方法一）：曲线方程$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$可化简为$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 2 \end{cases}$易知其参数方程为

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t, \\ z = 2 \end{cases}$在点$(1,1,2)$处，对应的$t = \dfrac{\pi}{4}$，该点处的切向量为

$(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)|_{t=\frac{\pi}{4}} = (-1,1,0) = -(1,-1,0)$，故所求切线方程为

$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$；法平面方程为$x - y = 0$.

（方法二）：利用方程组确定的隐函数求导，方程组$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$两边对$x$求导，得

$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}, \\ 4x + 4y\dfrac{dy}{dx} - 2z\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$即

$\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dz}{dx} = -2x, \\ 2y\dfrac{dy}{dx} - z\dfrac{dz}{dx} = -2x \end{cases}$解得$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$，故在点$(1,1,2)$处，切向量为$(1,-1,0)$，以下同

上（方法一）.

2. 求两曲面$x^2 + y^2 = z$，$x + y + z = 1$交线上的点到坐标原点的最长与最短距离.

解：假设所求点为(x, y, z)，为方便起见考察函数$x^2 + y^2 + z^2$在条件$x^2 + y^2 = z$，

$x + y + z = 1$下的最大值和最小值.

构造拉格朗日函数

$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(x + y + z - 1)$，解方程

组 $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 由前两个方程得 $x = y$，代入后两个方程得

$\begin{cases} z = 2x^2, \\ z = 1 - 2x \end{cases}$ 解得 $x = y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}$，记

$M_1(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3})$，$M_2(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3})$，计算得最长距离与最短距离分别为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 与 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

3. 设 $f(u)$ 连续且 $f(0)=0$，区域 Ω 由 $0 \le z \le h$，$x^2 + y^2 \le t^2$ 围成，设

$F(t) = \iiint\limits_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV$，求 $\dfrac{dF}{dt}$ 及 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{F(t)}{t^2}$.

解：在柱面坐标系下 Ω 可表示为：$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0 \le r \le t, \\ 0 \le z \le h \end{cases}$ 则

$$F(t) = \iiint\limits_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t dr \int_0^h [z^2 + f(r^2)] r dz = 2\pi \int_0^t [f(r^2) rh + \frac{rh^3}{3}] dr,$$

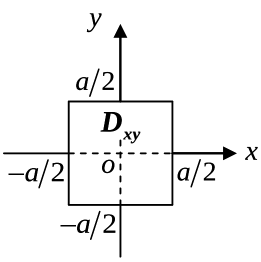
故 $\dfrac{dF}{dt} = 2\pi t [f(t^2) h + \dfrac{h^3}{3}]$,

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{F(t)}{t^2} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{F'(t)}{2t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2\pi t [f(t^2) h + \frac{h^3}{3}]}{2t} = \pi [f(0) h + \dfrac{h^3}{3}]$，由条件 $f(0)=0$，求

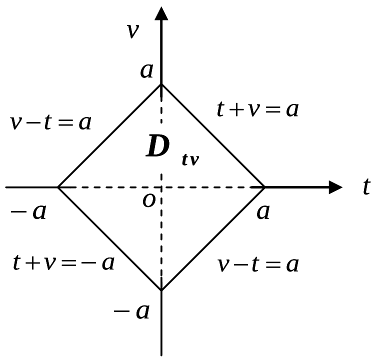
得 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}=\dfrac{\pi h^3}{3}$.

五、证明题（8 分）

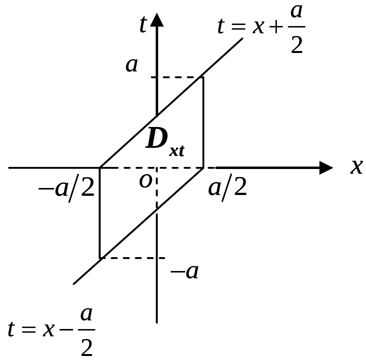
设 $f(t)$ 为连续函数，试证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt$，其中 D 为矩形域：$|x|\le\dfrac{a}{2},|y|\le\dfrac{a}{2}$，常数 $a>0$.



（图1）



（图2）



（图3）

证明 1：令 $\begin{cases}x-y=t\\x+y=v\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=\dfrac{t+v}{2}\\y=\dfrac{v-t}{2}\end{cases}$，$D_{xy}\Rightarrow D_{tv}:|t+v|\le a,|v-t|\le a$.（见图 2）

即 $D_{tv}:\{-a\le t\le 0,-t-a\le v\le t+a\}\cup\{0\le t\le a,t-a\le v\le -t+a\}$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\\\dfrac{\partial y}{\partial t}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\iint\limits_{D_{tv}}f(t)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,v)}\right|dtdv=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{tv}}f(t)dtdv$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-a}^{0}f(t)dt\int_{-t-a}^{t+a}dv+\int_{0}^{a}f(t)dt\int_{t-a}^{-t+a}dv]=\int_{-a}^{0}f(t)(a+t)dt+\int_{0}^{a}(a-t)f(t)dt$$

$$=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt.$$

证明 2：将二重积分化为二次积分得，$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(x-y)dy$

（令 $x-y=t$）$=\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}}f(t)dt$，（见图 3, 交换积分次序）

$$=\int_{-a}^{0}f(t)dt\int_{-\frac{a}{2}}^{t+\frac{a}{2}}dx+\int_{0}^{a}f(t)dt\int_{t-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx$$

$$=\int_{-a}^{0}f(t)(a+t)dt+\int_{0}^{a}(a-t)f(t)dt$$

$$=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt.$$