A 卷

2016—2017 学年第一学期
《高等数学》期末试卷

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室______基础数学系________

考试日期______2017 年 1 月______

页　号	一	二	三	四	五	总分
本页满分	18	26	20	20	16	
本页得分						

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；
2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；
3．本试卷共五道大题，满分 100 分；
4．试卷本请勿撕开，否则作废；
5．本试卷正文共 5 页。

一.（共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“√”或“×”，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1. 设数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. （　）

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为连续的奇函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数. （　）

3. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个零点. （　）

4. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f(x)$ 在 x_0 点必连续. （　）

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3．设函数$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=3$，求 $F'(0)$.

三.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 设曲线 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=0$ 所确定，求此曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b].$

证明：(1) $F'(x)\geq 2$；

(2) 方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根.

四.（共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分）

1．求曲线 $y = x + \arctan x$ 的渐近线方程.

2．求不定积分$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

.

3．设函数 $f(x)$的一个原函数为 $\frac{\tan x}{x}$，求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

4．求定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x$.

五.（本题 8 分）设D为曲线 $y=e^x$，$y=e^{2x}$ 与 $y=2$ 所围成的平面图形，

(1) 求 D 的面积 S；

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积 V.

六.（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1. 设有盛满水的圆锥形蓄水池，深 15 米，口径 20 米，现将池水全部抽出，问至少需要做多少功?（设水的密度为 ρ，重力加速度为g）

2．把一根长为a的铅丝切成两段，一段围成圆形，一段围成正方形. 问这两段铅丝各长多少时，圆形面积与正方形面积之和最小？

七．（共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分）

1．求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

2. 求微分方程 $y'' - y' - 2y = xe^x$ 的通解.

八．（本题 6 分）

设函数$f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$.

证明：在$(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi) = 0$.