2012-2013 学年第二学期《高等数学（2-2）》第一阶段（第七、八章）试卷 参考答案

一.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 21 分）

1. 设$\overrightarrow{a}$,$\overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{c}$ 为单位向量，且满足$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，求$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$.

解：法 1 $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore\ (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})^2=\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})=0,$

又$\because \vec{a}^2=|\vec{a}|^2=1,\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=1,\vec{c}^2=|\vec{c}|^2=1,\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-\dfrac{3}{2}.$

法 2 $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,$所以顺次连接$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量的起点，终点构成一个等边三角形. 从而$\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\angle(\vec{c},\vec{a})=\dfrac{2}{3}\pi$，$\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-\dfrac{3}{2}.$

2. 求直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$与平面$\Pi: x+y-2z+3=0$的交点.

解：设$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}=t$, 则$\begin{cases}x=2t+1\\ y=t\\ z=-t-3\end{cases}$, 将参数方程带入平面$\Pi$的方程得

$2t+1+t-2(-t-3)+3=0$, 解之得$t=-2$，所求交点为$(-3,-2,-1)$.

3. 求函数$u=2xy-z^2$在点$P(2,-1,1)$处沿从点$P(2,-1,1)$到点$Q(3,1,-1)$方向的方向导数，问函数在点$P(2,-1,1)$处沿哪个方向的方向导数最大？并求函数在点$P(2,-1,1)$处最大的方向导数值.

解：$\because \dfrac{\partial u}{\partial x}=2y,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial z}=-2z,\therefore$在 P 点处$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2,\dfrac{\partial u}{\partial y}=4,\dfrac{\partial u}{\partial z}=-2,$

由$\overrightarrow{PQ}=\{1,2,-2\}$得方向余弦$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=-\dfrac{2}{3},$

$\therefore \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{PQ}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\dfrac{10}{3}$,

又$gradu=\{-2,4,-2\},|gradu|=2\sqrt{6}$，故函数在点 P 处沿$-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$的方向的方向导数最大，最大值是$2\sqrt{6}$.

二. （共 3 小题，每小题 7 分，共计 21 分）

1. 设一个立体由上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$所围成，求它在xoy平面内的投影.

解：由$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$ 消 z 得 $x^2+y^2=1$, 故立体在 xoy 平面内的投影为: $x^2+y^2\le 1$.

2. 已知空间三角形三个顶点 $A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$，$C(0,0,5)$，求此三角形的面积

解：$\overrightarrow{AB}=\{2,-1,-2\},\overrightarrow{AC}=\{1,-2,2\}$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{-6,-6,-3\}=-3\{2,2,1\}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{9}{2}$

3. 设函数 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2+y^2)\cdot 2x=2xf'(x^2+y^2)$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot 2x+f'(x^2+y^2)\cdot 2=4x^2f''(x^2+y^2)+2f'(x^2+y^2)$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot 2y=4xyf''(x^2+y^2)$

三.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 21 分）

1. 证明二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但在点 $(0,0)$ 处偏导数 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 存在.

解：1）令 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}$，随 k 值不同其值不同，故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续。

2）因为 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$，

所以偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在.

2. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解：设切点 (x_0,y_0,z_0)，则该点处的法向量 $\vec{n}_1=\{2x_0,4y_0,2z_0\}=2\{x_0,2y_0,z_0\}$ 且

${x_0}^2+2{y_0}^2+{z_0}^2=1$, 由切平面平行于已知平面 $x-y+2z=0$ 得 $\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}=t$,

$\therefore x_0=t, y_0=-\frac{1}{2}t, z_0=2t$，代入椭球面方程得 $t^2+\frac{1}{2}t^2+4t^2=1$，解之得 $t=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$,

从而对应的切点为：$(\sqrt{\frac{2}{11}},-\sqrt{\frac{1}{22}},2\sqrt{\frac{2}{11}})$ 或 $(-\sqrt{\frac{2}{11}},\sqrt{\frac{1}{22}},-2\sqrt{\frac{2}{11}})$,

故所求切平面方程为 $x-y+2z+\frac{\sqrt{22}}{2}=0$ 或 $x-y+2z-\frac{\sqrt{22}}{2}=0$.

3. 求由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0\\ x+y+z-1=0\end{cases}$ 确定的隐函数 $y(x),z(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

解：对方程组每个方程两边分别关于 x 求导得,

$$\begin{cases}2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}-2z\cdot\frac{dz}{dx}=0\\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\end{cases}，\ 即\ \begin{cases}y\cdot\frac{dy}{dx}-z\cdot\frac{dz}{dx}=-x\\ \frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1\end{cases},$$

$$D=\begin{vmatrix}y & -z\\ 1 & 1\end{vmatrix}=y+z, D_1=\begin{vmatrix}-x & -z\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-x-z, D_2=\begin{vmatrix}y & -x\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-y+x,$$

所以 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+z}{y+z},\frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y+z}$.

四．（7 分）证明二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$, 在点 $(0,0)$ 处偏导数 $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 存在，但不可微.

证：1）$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$,

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$.

2） $\because \Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$（当 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿 $\Delta y=k\Delta x$ 趋于 $(0,0)$ 时）

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$，随 k 值不同其值不同，

$\therefore \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}$ 不存在，故函数 $f(x,y)$ 在(0, 0)处不可微.

五.（共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分）

1. 要制作一个容积为V 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，才能使它的表面积最小.

解：设水池的长宽高分别为x,y,z，则水池的表面积为$S=xy+2xz+2yz$ 且 $xyz=V$，

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-V)$，

则 $\begin{cases}L_x'=y+2z+\lambda yz=0\\ L_y'=x+2z+\lambda xz=0\\ L_z'=2x+2y+\lambda xy=0\\ L_\lambda'=xyz-V=0\end{cases}$ 解之得符合实际意义唯一驻点：

$x=\sqrt[3]{2V},y=\sqrt[3]{2V},z=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$，

故水池的长宽高分别为$\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V},\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ 时，才能使其表面积最小.

2. 求点$M(1,2,-1)$到直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 的距离.

解：法 1　直线 L 的方向向量为$\vec{s}=\{2,-1,3\}$，过点 M 垂直于 L 的平面Π方程为:

$$2(x-1)-(y-2)+3(z+1)=0,\quad \text{即 } 2x-y+3z+3=0 \qquad (*)$$

将 L 化为参数方程$\begin{cases}x=2t+1\\ y=-t-1\\ z=3t+2\end{cases}$ 代入(*)得 $4t+2+t+1+9t+6+3=0$，即 $t=-\dfrac{6}{7}$，

平面Π与直线L 的交点为$P\ (-\dfrac{5}{7},-\dfrac{1}{7},-\dfrac{4}{7})$，　　故 $d=|MP|=\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$.

法 2　取点 $N(1,-1,2)$，则 $\overrightarrow{MN}=\{0,-3,3\}$，直线 L 的方向向量为$\vec{s}=\{2,-1,3\}$，

$\overrightarrow{MN}\times\vec{s}=\{-6,6,6\}=6\{-1,1,1\}$，$|\overrightarrow{MN}\times\vec{s}|=6\sqrt{3},|\vec{s}|=\sqrt{14}$，

$\therefore d=\dfrac{|\overrightarrow{MN}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\dfrac{3}{7}\sqrt{42}$.

3. 把直线$L:\begin{cases}x-2y-z+4=0\\ 5x+y-2z+8=0\end{cases}$化为对称式方程和参数方程.

解：设相交于 L 的两平面的法向量分别为$\vec{n}_1=\{1,-2,-1\},\vec{n}_2=\{5,1,-2\}$，则直线 L 的方向向量$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{5,-3,11\}$，取 L 上一点$(0,0,4)$，得对称式方程：$\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-4}{11}$，

参数式方程：$\begin{cases}x=5t\\y=-3t\\z=11t+4\end{cases}$.

六．（共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分）

1. 求与已知平面$8x+y+2z+5=0$平行且与三个坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面方程.

解：设所求平面方程为$8x+y+2z=D$,化为截距式方程：$\dfrac{x}{\frac{D}{8}}+\dfrac{y}{D}+\dfrac{z}{\frac{D}{2}}=1$,

所以平面与三坐标面所围成的四面体的体积为$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{16}|D|^3=1$， 解之得$D=\pm 2\sqrt[3]{12}$.

故所求平面方程为$8x+y+2z=\pm 2\sqrt[3]{12}$.

2. 求直线$L:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面$\Pi:x+y+z-2=0$内的投影直线的方程.

解：法 1 由题意$x-y+z+1=0$与平面Π不垂直,

过 L 的平面束方程为：$x+2y-z+1+\lambda(x-y+z+1)=0$，

整理得：$(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(\lambda-1)z+1+\lambda=0$，从中找一个与$\Pi$垂直的平面$\Pi_1$，

其法向量为$\vec{n}_1=\{1+\lambda,2-\lambda,\lambda-1\}$，平面$\Pi$的法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

由$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，得$1+\lambda+2-\lambda+\lambda-1=0$，解出$\lambda=-2$.

$\therefore$ Π_1：$x-4y+3z+1=0$，故L在Π内的投影直线方程为$\begin{cases}x-4y+3z+1=0\\x+y+z-2=0\end{cases}$.

法 2. 由已知得L的方向向量$\vec{s}=\{1,2,-1\}\times\{1,-1,1\}=\{1,-2,-3\}$，设$\Pi$的法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

则过 L 且垂直于Π的平面的法向量为:$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n}_2=\{1,-4,3\}$，取 L 上点$(-1,0,0)$， 则过 L 垂直于$\Pi$的平面方程为:$x+1-4y+3z=0$， 故$L$在$\Pi$内的投影直线方程为

$\begin{cases} x-4y+3z+1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$.

3. 求空间圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

法 1： 对方程组每个方程两边分别关于 x 求导得,

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}，解之得：\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z}, \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z},$$

所以圆周在点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为 $\overrightarrow{T}=\{1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\}\Big|_{(1,-2,1)}=\{1,0,-1\}$.

切线方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$，法平面方程：$(x-1)-(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

法 2 曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\vec{n}_1=\{1,-2,1\}$，

平面 $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

因此所给空间圆周在点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为 $\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-3,0,3\}=-3\{1,0,-1\}$

切线方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$， 法平面方程：$(x-1)-(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

2012-2013 学年第二学期《高等数学（2-2）》第二阶段（第九、十章）试卷 参考答案

一.（共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，设闭区域 D 的面积为 $\sigma\neq 0$，证明：

$\exists(\xi,\eta)\in D$，使 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma.$

证 $\because f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续， $\therefore f(x,y)$ 在 D 上必有最大值 M 和最小值 m，

由估值定理，得 $m\sigma\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma.$ 即 $m\le\dfrac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le M.$

由有界闭区域上连续函数的介值定理知，$\exists(\xi,\eta)\in D$，

使 $\dfrac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)$， 即 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma.$

2. 求$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$其中$D$是由$y=x^2$，$y=x$所围成的闭区域.

解 $\because D:0\le x\le 1, x^2\le y\le x.$

$$\therefore \iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\int_{x^2}^{x}dy=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)dx$$

$$=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx=1-\sin 1.$$

3. 计算$\iint xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$(x^2+y^2\le a^2)$取上侧.

解 $\because P=xz^2$，$Q=x^2y-z^3$，$R=2xy+y^2z$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=x^2+y^2+z^2$，

补充曲面$\Sigma_1=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$取下侧，$\Sigma+\Sigma_1$围成有界闭区域$\Omega$，

由高斯公式，$\iint xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$

$$=\Big(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^{下}}+\iint\limits_{\Sigma_1^{上}}\Big)\ xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

$$=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iint\limits_{\Sigma_1^{上}}\ xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho+0+0+2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}xydxdy$$

$$=\frac{2a^5\pi}{5}+0=\frac{2a^5\pi}{5}.$$

二.（共3小题，每小题7分，共21分）

1. 计算$\iiint\limits_\Omega xyzdxdydz$，其中$\Omega$为球面$x^2+y^2+z^2=1$及三个坐标面所围成的位于第一卦限的立体.

解 令$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\rho\cos\varphi.\end{cases}$ 则 Ω: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 1.$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\sin\varphi\cos\theta \cdot \rho\sin\varphi\sin\theta \cdot \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d(\sin\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d(\sin\varphi) \int_0^1 \rho^5\, d\rho$$

$$= \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分.

解 $\Sigma: z=5-y,\quad (x,y)\in D: x^2+y^2\le 25.$

$$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{1+0+(-1)^2}dxdy \quad =\sqrt{2}dxdy,$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x+y+5-y)dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x+5)dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D}xdxdy+5\sqrt{2}\iint\limits_{D}dxdy=0+5\sqrt{2}\iint\limits_{D}dxdy=125\sqrt{2}\pi.$$

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a\ (a>0)$ 所围成的立体.

解 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$ 则 $\Omega:\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le a, r\le z\le a.$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a dr\int_r^a r^2\cdot r\,dr=2\pi\int_0^a r^3(a-r)\,dr=\frac{\pi a^5}{10}.$$

三.（共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1. 求 $\oint\limits_L xds$，其中 L 是由 $y=0, x=1, y=x^2$ 所围区域的边界.

解 $L=L_1+L_2+L_3$，其中 L_1: $\begin{cases} x=x, \\ y=0. \end{cases}$ $0\le x\le 1,\ ds=\sqrt{1+0}dx;$

L_2: $\begin{cases} x=1, \\ y=y. \end{cases}$ $0\le y\le 1,\ ds=\sqrt{1+0}dy;$ $\quad L_3$: $\begin{cases} x=x, \\ y=x^2. \end{cases}$ $0\le x\le 1,\ ds=\sqrt{1+(2x)^2}dx;$

$$\therefore \oint\limits_L xds=\int\limits_{L_1}xds+\int\limits_{L_2}xds+\int\limits_{L3}xds=\int_0^1 xdx+\int_0^1 dy+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{17+5\sqrt{5}}{12}.$$

2．设L为一条不经过坐标原点的分段光滑简单闭曲线，计算$\oint\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$取逆时针方向.

解　在$R^2-\{(0,0)\}$上$P,Q,\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$连续，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，设$L$所围区域为$D$. 当$(0,0)\notin D$时，由格林公式得$\oint\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$；

当$(0,0)\in D$时，取$\varepsilon>0$充分小，作圆l：$x^2+y^2=\varepsilon^2$使其在D的内部且取l逆时针方向，L与l^-所围成的复连通区域为D^*上，由格林公式，得

$$\oint\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint\limits_{L+l^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\oint\limits_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint\limits_{D^*}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\oint\limits_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_l xdy-ydx$$（$P=-y$，$Q=x$，$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$，由格林公式）

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\varepsilon^2}2\ dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\varepsilon^2\pi=2\pi .$$

3．设曲线积分$\int\limits_L [f(x)-e^x]\sin y\ dx-f(x)\cos y\ dy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0$，求$f(x)$.

解　$P=[f(x)-e^x]\sin y, Q=-f(x)\cos y,\because$积分与路径无关，

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x}=-f'(x)\cos y=[f(x)-e^x]\cos y=\frac{\partial P}{\partial y},\text{得 } f'(x)+f(x)=e^x.$$

这是一个一阶线性微分方程。

$$f(x)=e^{-\int dx}[\int e^x e^{\int dx}dx+C]=e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x}+C)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}.$$

由条件$f(0)=0,$得$C=-\frac{1}{2},$　　故$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=shx.$

四.（7分）设Ω：$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$，$z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$f(x,y,z)$在Ω上连续，将三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$分别化为直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系下的三次积分.

解　1）直角坐标系：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} dx \int_{-\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz .$$

2）柱面坐标系： 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z.$ 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} rdr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz.$$

3）球面坐标系： 设 $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi.$ 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr.$$

五.（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

1. 求 $\iint_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$, 其中 D 是第一象限内，边界曲线是 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$，

$y = x, y = 0$ 的闭区域.

解 在极坐标系下 D 可表示成 $D: 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, 1 \le r \le 2.$

故 $\iint_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy = \iint_D \theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 rdr = \dfrac{3}{64}\pi^2.$

2. 计算 $\oint_L \dfrac{\ln(x^2+y^2)dx + e^{y^2}dy}{x^2+y^2+2x}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2+2x=1$ 取逆时针方向.

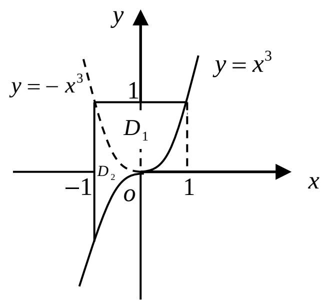
解 因为 L 上的点 (x,y) 满足：$x^2+y^2+2x=1$，$x^2+y^2=1-2x$, 所以

$$\oint_L \frac{\ln(x^2+y^2)dx + e^{y^2}dy}{x^2+y^2+2x} = \oint_L \frac{\ln(1-2x)dx + e^{y^2}dy}{1} = \oint_L \ln(1-2x)dx + e^{y^2}dy$$

（$P = \ln(1-2x)$, $Q = e^{y^2}$ ，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$，由格林公式）$= \iint_{x^2+y^2+2x\le 1} 0 \ dxdy = 0$.

3. 计算 $\iint_D x[1 + xyf(x^2+y^2)]dxdy$，其中 D 是由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的区域， f 为连续函数.

解　如图，用$y=-x^3$把D分为$D_1\cup D_2$，且D_1关于y轴对称，D_2关于x轴对称



$$\therefore \iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy = \iint_D xdxdy + \iint_D xyf(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \iint_{D_1} xdxdy + \iint_{D_2} xdxdy + \iint_{D_1} xyf(x^2+y^2)dxdy + \iint_{D_2} xyf(x^2+y^2)dxdy$$

(根据对称性)$= 0 + \iint_{D_2} xdxdy + 0 + 0 = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^3}^{-x^3} xdy = -2\int_{-1}^{0} x^4 dx = -\frac{2}{5}$.

六.　（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

1．计算$\iint_\Sigma xyzdxdy$，其中为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，在$x\ge 0, y\ge 0$的部分.

解　曲面Σ分为Σ_1和Σ_2两部分：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

Σ_1的方程：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，在xOy面投影区域$D_1: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0;$

Σ_2的方程：$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，在xOy面投影区域$D_2: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$.

球面的外侧对应于曲面Σ_1取上侧，曲面Σ_2取下侧，有

$$\iint_\Sigma xyzdxdy = \iint_{\Sigma_1} xyzdxdy + \iint_{\Sigma_2} xyzdxdy$$

$$= \iint_{D_1} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_2} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint_{D_1} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr = \frac{2}{15}.$$

2．设有速度场$\vec{v}=(x^3+a)\vec{i}+(y^3+a)\vec{j}+(z^3+a)\vec{k}$，求$\vec{v}$通过上半球面$\Sigma$:

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$　$(R>0)$上侧的流量Φ.

解　$\Phi = \iint_\Sigma (x^3+a)dydz + (y^3+a)dzdx + (z^3+a)dxdy$

$P=x^3+a$, $Q=y^3+a$, $R=z^3+a$ ，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$，

补充曲面$\Sigma_1^{下}: z=0,\ x^2+y^2\le R^2$.设Σ与$\Sigma_1^{下}$所闭围立体是Ω，根据高斯公式，有

$$\Phi = \iint_\Sigma (x^3+a)dydz + (y^3+a)dzdx + (z^3+a)dxdy$$

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1^{下}} + \iint_{\Sigma_1^{上}} (x^3+a)dydz + (y^3+a)dzdx + (z^3+a)dxdy$$

$$=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+0+0+\iint_{x^2+y^2\le R^2}(0^3+a)dxdy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho+a\,R^2\pi=\frac{6\pi\,R^5}{5}+a\,R^2\pi\,.$$

3．设曲线积分 $\int_L xy^2dx+\varphi(x)ydy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+\varphi(x)ydy$.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\varphi'(x)y.$ 因为积分与路径无关，所以 $2xy=\varphi'(x)y.$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(x)=2x\\ \varphi(0)=0\end{cases}\Rightarrow\varphi(x)=x^2.$$

又因为 $xy^2dx+x^2ydy=\dfrac{1}{2}y^2dx^2+\dfrac{1}{2}x^2dy=d(\dfrac{1}{2}x^2y^2)$，

所以 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y^2+C,$

故 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+\varphi(x)ydy=u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{1}{2}.$