A 卷

2011—2012 学年第一学期
《高等数学》期末试卷

专业班级 ______________________

姓　　名______________________

学　　号______________________

开课系室______基础数学系______

考试日期______2012 年 1 月 3 日______

页　号	一	二	三	四	五	六	总分
本页满分	30	18	12	18	15	7	
本页得分							
阅卷人							

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；
2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；
3．本试卷共五道大题，满分 100 分；
4．试卷本请勿撕开，否则作废；
5．本试卷正文共 6 页。

一、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点是__x=2_______.

2．曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的下凸区间是____________$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}})$_____________.

3． 设 $f'(\ln x)=x\ln x$，则 $f(x)=$______xe^x-e^x______$+C$.

4．$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$_____$\dfrac{\pi}{4}$_______.

5．$y'-\dfrac{1}{x}y=x^2\cos x^2$ 的通解是_______________$y=x(\dfrac{1}{2}\sin x^2+C)$__________.

二、填空题共（5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ D）.

A 极限不存在，B 极限存在但不连续，C 连续但不可导，D 可导.

2．已知 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\int_0^{3x}\cos t\mathrm{d}t$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（ C ）.

A． $k=1,\ c=4$， B． $k=1,\ c=-4$， C． $k=3,\ c=4$， D． $k=3,\ c=-4$.

3．设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0,\ f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1-x)}{x^2}=$（ C）.

A．2； B．∞； C．1； D．$\dfrac{1}{2}$.

4．函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续导数，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$，则 $x=1$ 处取得（ C ）.

A. 拐点； B. 极大值； C. 极小值； D. 都不是.

5．微分方程 $y''-y=e^x+e^{-x}$ 的特解形式为（ D）.

A． $a(e^x+e^{-x})$， B． $ax(e^x+e^{-x})$，

C． $x^2(ae^x+be^{-x})$， D． $x(ae^x+be^{-x})$.

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} t\ln t\mathrm{d}t}{e^{x^4}-1}$

解：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} t\ln t\mathrm{d}t}{x^4} \text{------------------------}1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\ln(\cos x)(-\sin x)}{4x^3} \text{------------------------}2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{4x^2} \text{--------------------------}1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{8x}=-\frac{1}{8} \text{-------------------}2$$

2．方程 $\begin{cases} x=\int_0^t \dfrac{t-u}{1+(t-u)^2}\mathrm{d}u \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：令 $t-u=v$，则 $x=\int_t^0 \dfrac{v}{1+v^2}(\text{-d}v)=\int_0^t \dfrac{v}{1+v^2}\mathrm{d}v$，

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{t}{1+t^2} \text{----------------------}2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2}{1+t^2}\text{，} \text{---------------}1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=t\text{，} \text{----------------------------------}1$$

又 $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})=1$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1+t^2}{t}$ -------------------2

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$ -----------------1

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2} \text{-------------------------}2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos(\sin x))}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2} \text{--------------------------------}2$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ -----------------1

4．求积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解：法一：令 $x=\sin t$，则原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin t.t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\sin tdt$ -----------3

$=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}td\cos t=-\left[t\cos t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos tdt$ --------------------2

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos tdt=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi+\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$ ------------------------1

法二：$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$ ----------------------3

$=-\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{6}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$ ---------------3

5．设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$， 求 $\int_0^{\pi}f(x)dx$.

解：$f(0)=0,f(\pi)=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt,f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$. ---------------------1

$\int_0^{\pi}f(x)dx=xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)dx=\pi f(\pi)-\int_0^{\pi}x\dfrac{\sin x}{\pi-x}dx$ ---------------------2

$=\pi\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^{\pi}x\dfrac{\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{(\pi-x)\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^{\pi}\sin xdx=2.$ --------------3

四、应用题（共 2 小题，共计 24 分）

1．（本题 6 分）求 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线。

解：$\because\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty\ \therefore x=0$ 是曲线的垂直渐近线。------------------------1

$\because\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0.\therefore$ 曲线有水平渐近线 $y=0$。------------------------1

又 $\because a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=1$，--------------------------1

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{1+e^x}{e^x})=0$ --------------------2

$\therefore y=x$ 是曲线的一条斜渐近线。----------------1

2．（本题 12 分）设由曲线 $y=e^x$ 与过点 $(1,e)$ 的切线及 y 轴所围平面图形为 D。

（1）．求 D 的面积 A;

（2）．求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V。

解：（1） $\because y'\big|_{x=1}=e^x\big|_{x=1}=e$， ------------------------------1

$\therefore$ 过 $(1,e)$ 的切线方程为 $y-e=e(x-1)$， 即 $y=ex$。 -------------------2

$\therefore A=\int_0^1(e^x-ex)\mathrm{d}x=\dfrac{e}{2}-1$-----------------------4

（2） $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot e-\int_1^e\pi(\ln y)^2\mathrm{d}y$ ----------------------4

$=\dfrac{e}{3}\pi-\pi(\ln y)^2y\big|_1^e+\pi\int_1^e2\ln y\mathrm{d}y$

$=\dfrac{e}{3}\pi-\pi e+2\pi[y\ln y\big|_1^e-\int_1^e\mathrm{d}y]$

$=2\pi(1-\dfrac{e}{3})$ ------------------4

3．（本题 6 分）有半径为 R 的半球形容器如图，设容器中已注满水 ，求将其全部抽出所做的功最少应为多少 ？

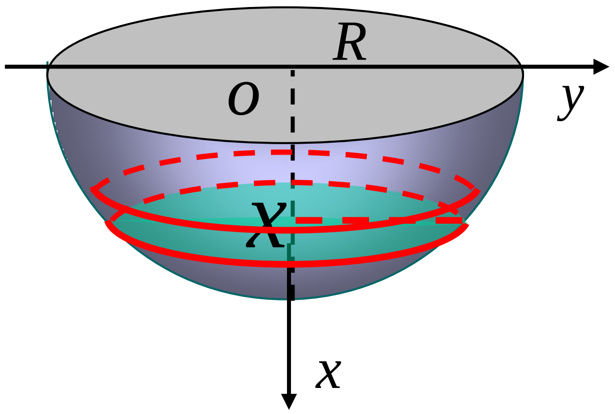
解: 过球心的纵截面建立坐标系如图. 则半圆方程为 $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$ 。

取 x 为积分变量，----------------------------------1

对应于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 薄层所需的功元素

$\mathrm{d}W=\rho\mathrm{g}\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x\cdot x=\rho\mathrm{g}\pi(R^2x-x^3)\mathrm{d}x$---------4

故所求功为 $W=\rho\mathrm{g}\pi\int_0^R(R^2x-x^3)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\rho\mathrm{g}R^4$ 。 --------------4



五、证明题（16 分）

1.（本题 9 分）设 $x>0$，证明：$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明：设 $f(t)=\ln t$，则 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，可导。对 $f(t)$ 在 $[1,x+1]$ 上应用

Lagrange 中值定理，得 $\ln(x+1)-\ln 1=\dfrac{x}{\xi}$。-

-----------------------5

$\because 1<\xi<1+x,\therefore \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{\xi}<1$，即 $\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{\xi}<x$,即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

-----------------------4

2.（本题 7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,5]$ 上连续，在 $(0,5)$ 内存在二阶导数，且

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(3)=f(4)+f(5)$，证明：

（1）存在 $\boldsymbol{\eta}\in[0,3)$，使 $f(\boldsymbol{\eta})=f(3)$;

（2）存在 $\boldsymbol{\xi}\in(0,5)$，使 $f''(\boldsymbol{\xi})=0$。

证明:（1）$\because f(x)$ 在 $[0,5]$ 上连续，$\therefore \exists\boldsymbol{\eta}\in[0,2]\subset[0,3)$，使

$2f(3)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(\boldsymbol{\eta})\cdot(2-0)$，即 $f(\boldsymbol{\eta})=f(3)$ -----------------------3

（2）$\because f(x)$ 在 $[4,5]\subset[0,5]$ 上连续，由最值定理知 $f(x)$ 在 $[4,5]$ 取到最大值 M 和

最小值 m.$\therefore m\le\dfrac{f(4)+f(5)}{2}\le M$，由连通性定理知 $\exists\boldsymbol{\xi}_1\in[4,5]$，使

$f(\boldsymbol{\xi}_1)=\dfrac{f(4)+f(5)}{2}$，即 $f(\boldsymbol{\xi}_1)=f(3)$。-------------------1

因为 $f(x)$ 在 $(0,5)$ 内存在二阶导数，满足罗尔定理的条件，

所以 $\exists\boldsymbol{\xi}_2\in(\boldsymbol{\eta},3)$，使 $f'(\boldsymbol{\xi}_2)=0$, --------------1

$\exists\boldsymbol{\xi}_3\in(3,\boldsymbol{\xi}_1)$，使 $f'(\boldsymbol{\xi}_3)=0$, --------------------1

进而 $\exists\boldsymbol{\xi}\in(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\subseteq(0,5)$ 使 $f''(\boldsymbol{\xi})=0$ --------------------1