第二章 非线性方程的数值解法

数值计算方法课程组

中国石油大学-华东

（课堂专属 切勿网传）

研究问题

求解非线性方程

$$f(x) = 0,$$

这里 $f(x)$ 是非线性函数.
例如，代数方程

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad n > 1.$$

又如，超越方程

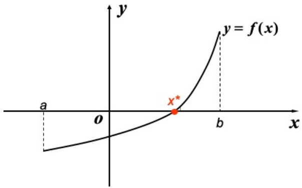
$$f(x) = e^x + \sin x = 0.$$

代数方程 理论上，n 次代数方程在复数域内一定有 n 个根 (考虑重数). 早在 16 世纪就找到了三次、四次方程的求根公式. 对于大于等于 5 次的一般代数方程式，19 世纪 Abel,Galois 等证明不能用代数公式求解.

超越方程 解的情况更加复杂，如果有解，其解可能是一个或几个，也可能是无穷多个. 一般也不存在根的解析表达式.

数值解法 研究数值方法求得满足一定精度要求的根的近似解是必要的.

方程求根的几何意义



方程求根的三个基本问题：1）方程是否有根？ 2）如有根，有几个？ 3）如何求根？

定理（根的存在唯一性）

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$, 则至少有一个数 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$. 若同时 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在且保持定号，即 $f'(x)>0$ (或 $f'(x)<0$), 则这样的 ξ 在 $[a,b]$ 内唯一.

主要内容

目 录

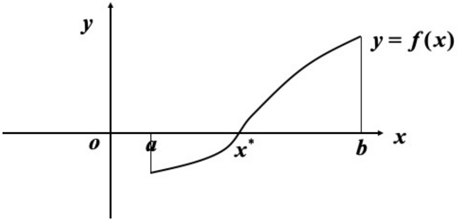
目 录

§2.1 二分法

基本思想

逐步将有根区间分半，通过判别区间端点函数值的符号，进一步搜索有根区间，将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的根的近似值.

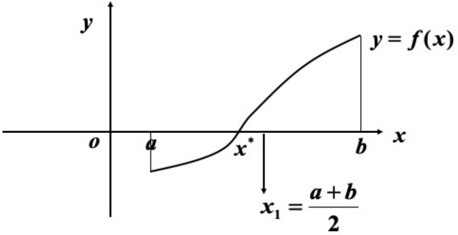
设函数 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)f(b)<0$, 则至少有一个实根 $f(\xi)=0$. 现假定只有一个实根，下面说明二分方法的具体做法.



基本思想

逐步将有根区间分半，通过判别区间端点函数值的符号，进一步搜索有根区间，将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的根的近似值.

设函数 $f(x) \in C[a, b]$，且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少有一个实根 $f(\xi) = 0$. 现假定只有一个实根，下面说明二分方法的具体做法.

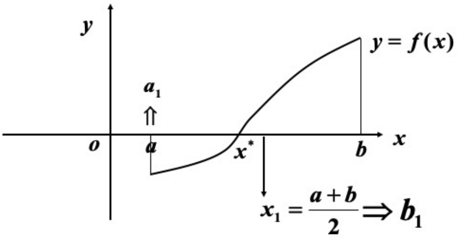


令 $x_1 = (a + b)/2$.

基本思想

逐步将有根区间分半，通过判别区间端点函数值的符号，进一步搜索有根区间，将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的根的近似值.

设函数 $f(x) \in C[a, b]$，且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少有一个实根 $f(\xi) = 0$. 现假定只有一个实根，下面说明二分方法的具体做法.



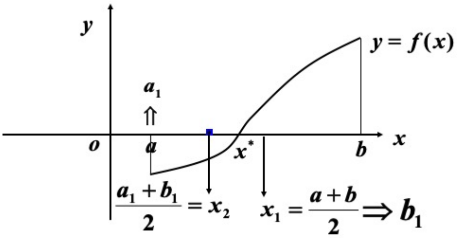
若 $f(a)f(x_1) < 0$, 记 $a_1 = a, b_1 = x_1$. 否则，记 $a_1 = x_1, b_1 = b$, 得区间 $[a_1, b_1]$.

§2.1 二分法

基本思想

逐步将有根区间分半，通过判别区间端点函数值的符号，进一步搜索有根区间，将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的根的近似值.

设函数 $f(x) \in C[a, b]$，且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少有一个实根 $f(\xi) = 0$. 现假定只有一个实根，下面说明二分方法的具体做法.

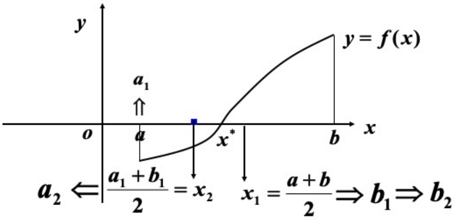


同理令 $x_2 = (a_1 + b_1)/2$.

基本思想

逐步将有根区间分半，通过判别区间端点函数值的符号，进一步搜索有根区间，将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的根的近似值.

设函数 $f(x) \in C[a, b]$，且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少有一个实根 $f(\xi) = 0$. 现假定只有一个实根，下面说明二分方法的具体做法.

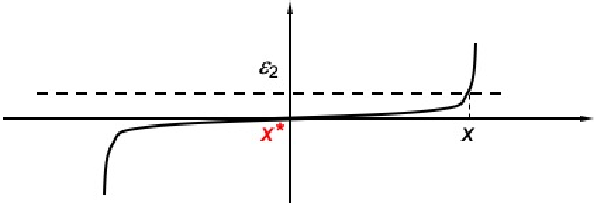


若 $f(a_1)f(x_2) < 0$, 记 $a_2 = a_1, b_2 = x_2$. 否则, 记 $a_2 = x_2, b_2 = b_1$, 得区间 $[a_2, b_2]$. 依次类推，可得

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

何时终止计算呢?

通常取 $|f(a_n)| \le \varepsilon_2$ 时（ε_2 充分小），终止计算.
然而，有时这样取会出问题，比如



因此，我们需要其他辅助条件，比如要求同时满足

$$|b_n - a_n| \le \varepsilon_1, \quad |f(a_n)| \le \varepsilon_2.$$

二分法算法

给定区间 $[a, b]$ ，求 $f(x) = 0$ 在该区间上的根 x.

输入: a 和 b, 容许误差 TOL, 最大对分次数 $N_{\max}$.

输出: 近似根 x.

1 令 $k = 1$;

2 计算 $x = (a + b)/2$;

3 当 $(k \leq N_{\max})$ 做 4-6 步

   4 如果 $|f(x)| < TOL$ ，终止计算; 输出近似解 x.

   5 如果 $f(x) * f(a) < 0$ ，令 $b = x$;
   否则，令 $a = x$;

   6 令 $k = k + 1$; 计算 $x = (a + b)/2$; 转回第 3 步;

7 输出近似解 x; 计算终止.

二分法的收敛性

由二分法的过程可知

1. $$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots, f(a_k)f(b_k) < 0, \quad x^* \in [a_k, b_k]$$

2. $$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

3. 收敛性结论

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad |x^* - x_{k+1}| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a), \quad k = 1, 2, \cdots$$

4. 对分次数的计算. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由 $|x^* - x_{k+1}| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a) < \varepsilon$,

可得

$$k > \frac{\ln(b-a)/\varepsilon}{\ln 2} - 1.$$

例

用二分法求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在区间 $[1, 1.5]$ 上的根，误差限为 $\varepsilon = 1e-2$，问至少需对分多少次?

解:

$$\begin{aligned} a &= 1, b = 1.5, \varepsilon = 1e-2 \\ k &> \frac{\ln(b-a)/\varepsilon}{\ln 2} - 1 \\ &= \frac{\ln 50}{\ln 2} - 1 \approx 4.64 \\ &\Rightarrow k = 5 \end{aligned}$$

二分法优缺点

优点

1. 简单;
2. 对 $f(x)$ 要求不高 (只要连续即可) .

缺点

1. 无法求复根及偶重根
2. 收敛慢

注

用二分法求根, 最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置, 或用搜索程序, 将 $[a,b]$ 分为若干小区间, 对每一个满足 $f(a_k)\cdot f(b_k)<0$ 的区间调用二分法程序, 可找出区间 $[a,b]$ 内的多个根, 且不必要求 $f(a)\cdot f(b)<0$.

目 录

§2.2.1 不动点迭代

不动点迭代的基本思想：将问题转化成如下等价形式

$$f(x) = 0 \longleftrightarrow x = g(x)$$

进而建立迭代格式

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

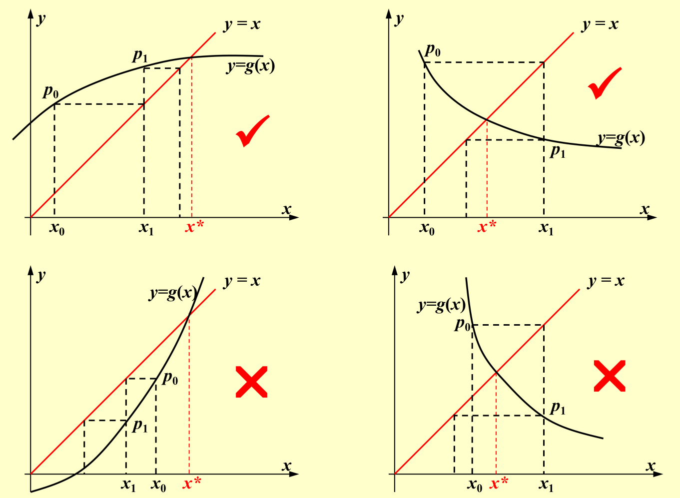
从而得序列 $\{x_n\}$. 若序列 $\{x_n\}$ 收敛, 则必收敛到 $f(x) = 0$ 的根:

$$\lim_{k \to +\infty} x_{k+1} = \lim_{k \to +\infty} g(x_k) = g(\lim_{k \to +\infty} x_k)$$

即：

$$x^* = g(x^*) \Rightarrow f(x^*) = 0$$

几何意义



y
y = x
p_1
y=g(x)
p_0
x
x_0
x_1
x*
y
y = x
p_0
y=g(x)
p_1
x
x_0
x*
x_1
y
y = x
y=g(x)
p_0
p_1
x
x_1
x_0
x*
y
y = x
y=g(x)
p_0
p_1
x
x_0
x*
x_1

例

已知方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 上有一个根 (正根), 下面选取 5 中迭代格式: $(x=\varphi(x))$

$$
\begin{array}{llll}
1) & x = x - x^3 - 4x^2 + 10, & i.e. & \varphi(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10 \\
2) & x = \dfrac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}, & i.e. & \varphi(x) = \dfrac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}} \\
3) & x = (\dfrac{10}{x} - 4x)^{\frac{1}{2}}, & i.e. & \varphi(x) = (\dfrac{10}{x} - 4x)^{\frac{1}{2}} \\
4) & x = (\dfrac{10}{x+4})^{\frac{1}{2}}, & i.e. & \varphi(x) = (\dfrac{10}{x+4})^{\frac{1}{2}} \\
5) & x = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} & i.e. & \varphi(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}
\end{array}
$$

取 $x_0 = 1.5$, 可得如下计算结果

方法 1	方法 2	方法 3
$x_1 = -0.8750$	$x_1 = 1.28695$	$x_1 = 0.81650$
$x_2 = 0.6732 \times 10^1$	$x_2 = 1.40257$	$x_2 = 2.99691$
$x_3 = -0.4.697 \times 10^3$	$x_3 = 1.34546$	$x_3 = (-8.65086)^{0.5}$
$x_4 = 1.0275 \times 10^8$	$x_4 = 1.37517$	
-	$x_5 = 1.37517$	
-	$\cdots$	
-	$x_{11} = 1.365137821$	
-	$\cdots$	
-	$x_{29} = 1.3652370013$	

方法 4	方法 5
$x_1 = 1.34840$	$x_1 = 1.37333$
$x_2 = 1.36738$	$x_2 = 1.36526$
$x_3 = 1.36526$	$x_3 = 1.3652370014$
$x_4 = 1.37517$	$x_4 = 1.3652370013$
$x_5 = 1.365225$	
$\cdots$	
$x_{11} = 1.3652370013$	

问题

为什么会出现上面的情况？ 如何选择函数 $\varphi(x)$ 使得迭代格式收敛？ 收敛的速度又如何？ 怎么加速序列收敛？

§2.2.2 迭代格式收敛的一般理论

定理 (收敛性定理)

对于方程 $x=\varphi(x)$, 若函数 $\varphi(x)$ 满足

(I) 映内性：当 $x\in[a,b]$ 时, $\varphi(x)\in[a,b]$;

(II) 压缩性：$\varphi(x)$ 满足 *Lipschitz* 条件，且 *Lipschitz* 常数 $L<1$, 即存在正常数 $L<1$，使得 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y|,\quad x,y\in[a,b]$.

则对任意的 x_0, 由迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一不动点 x^*, 且满足误差估计

$$|x^*-x_k|\leq\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|\leq\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

定理证明

先证存在性. 定义函数

$$f(x) = x - \varphi(x)$$

从而有条件（I）可知，

$$f(a) = a - \varphi(a) \le 0, \quad f(b) = b - \varphi(b) \ge 0.$$

又由条件（II）可知 $\varphi(x)$ 连续，故而 $f(x)$ 也连续，从而可知 $f(x)$ 至少有一个零点.

再证唯一性. 不妨设 $f(x)$ 有两个零点 x^*, x_*.

$$|x^* - x_*| = |\varphi(x^*) - \varphi(x_*)| \le L|x^* - x_*| < |x^* - x_*|$$

故有 $x^* = x_*$.

定理证明

最后证明收敛性及误差估计. 易知

$$
\begin{aligned}
|x^* - x_k| &= |\varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1})| \\
&\leq L|x^* - x_{k-1}| \\
&\leq L^2|x^* - x_{k-2}| \\
&\leq L^k|x^* - x_0| \to 0 \quad (k \to +\infty)
\end{aligned}
$$

另外，由三角不等式知

$$|x_k - x^*| \leq |x_{k+1} - x_k| + |x_{k+1} - x^*| \leq L|x_k - x_{k-1}| + L|x_k - x^*|$$

从而，有

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \\ &\le \frac{L^2}{1-L}|x_{k-1} - x_{k-2}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

推论

若将定理中的条件 (II) 修改为 $\varphi(x)$ 满足

$$|\varphi'(x)| \le L < 1, \quad \forall x \in [a, b]$$

结论任然成立.

注

1. 由误差估计 $|x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$ 知，$L < 1$ 且 L 越小，收敛越快; L 越接近 1，收敛越慢；可以用相邻两次迭代值之间的差绝对值足够小作为迭代终止准则。
2. 该定理是判断全局收敛的充分条件，不满足定理条件的迭代格式也可能收敛。
3. 寻找定理中迭代函数满足条件的闭区间 $[a, b]$ 较困难：包含根，映内性和压缩性。
4. 从几何意义图上看，迭代函数越平缓（其斜率的绝对值小于 1），对应的迭代格式可能收敛。

不动点迭代算法

给定初始近似值 x_0 ，求 $x=\varphi(x)$ 的解 x.

输入: 初始近似值 x_0, 容许误差 TOL, 最大迭代次数 $N_{\max}$.

输出: 近似解 x 或失败信息.

1 令 $k=1$;

2 当 $(k \leq N_{\max})$ 做 3-5 步

  3 令 $x=\varphi(x_0)$

  4 如果 $|x-x_0|<TOL$ ，输出近似解 x, 终止计算.

  5 令 $k=k+1$, $x_0=x$;

7 输出 “算法失败”; 计算终止.

例

已知方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 上有一个根 (正根), 下面选取 5 中迭代格式：$(x=\varphi(x))$

$$
\begin{array}{llll}
1) & x = x - x^3 - 4x^2 + 10, & i.e. & \varphi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10 \\
3) & x = (\dfrac{10}{x} - 4x)^{\frac{1}{2}}, & i.e. & \varphi_3(x) = (\dfrac{10}{x} - 4x)^{\frac{1}{2}}
\end{array}
$$

对 $\varphi_1(x)$, $\varphi_1'(x)=1-3x^2-8x$, 根为 $x^* \approx 1.365230013$，找不到包含 x^* 的区间 $[a,b]$，使得 $|\varphi_1'(x)|<1$. 故不能用定理 2.3 判断其收敛性。

对 $\varphi_3(x)$, 设 $[a,b]=[1,2]$, 不能保证 $x\in[a,b]$，使得 $\varphi_3(x)\in[a,b]$. 故不能用定理 2.3 判断其收敛性。

例

已知方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 上有一个根 (正根), 下面选取 5 中迭代格式：$(x=\varphi(x))$

$$2)\quad x=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}},\qquad i.e.\quad \varphi(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$$

$\varphi_2'(x)=-\frac{3}{4}x^2(10-x^3)^{-\frac{1}{2}}$, 根为 $x^*\approx 1.365230013$，若取 $[a,b]=[1,2]$，因 $|\varphi_2'(2)|\approx 2.12$，不满足定理的压缩性. 若考虑 $[a,b]=[1,1.5]$, 可验证其上 $|\varphi_2'(x)|\le|\varphi_2'(1.5)|\approx 0.66$, 从而 $\varphi_2(x)$ 在 $[1,1.5]$ 上满足压缩性。
由于在 $[1,1.5]$ 上 $\varphi_2'(x)<0$, 从而 $\varphi_2(x)$ 在其上单调递减，则 $1.28\approx\varphi_2(1.5)\le\varphi_2(x)\le\varphi_2(1)=1.5$，从而满足映内性。
故由定理 2.3 知该迭代格式收敛。

例

已知方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 上有一个根 (正根), 下面选取 5 中迭代格式：$(x=\varphi(x))$

$$4)\quad x=(\frac{10}{x+4})^{\frac{1}{2}}, \qquad i.e.\quad \varphi(x)=(\frac{10}{x+4})^{\frac{1}{2}}$$

$$5)\quad x=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x} \qquad i.e.\quad \varphi(x)=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$$

$\varphi_4'(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{(4+x)^{3/2}}$, 若取 $[a,b]=[1,2]$，因 $|\varphi_4'(x)|\le|\varphi_4'(1)|\approx 0.14\ldots$，满足压缩性。

由于在 $[1,2]$ 上 $\varphi_4(x)$ 在其上单调递减，则

$1.29\approx\varphi_4(1.5)\le\varphi_4(x)\le\varphi_4(1)\approx 1.41$，从而满足映内性。

故由定理 2.3 知该迭代格式收敛。由于迭代格式 4 的 L 比迭代格式 2 的 L 小，从而迭代格式 4 收敛较快。

§2.2.3 局部收敛性

由上例看出，讨论 $[a, b]$ 上的全局收敛性比较困难，下面转向讨论在 x^* 附近的收敛性。

定义（局部收敛性）

若存在 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* 的一个闭邻域 $N(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta](\delta > 0)$，对任意的 $x_0 \in N(x^*)$ ，由迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 均收敛于 x^*，则称该迭代法局部收敛.

定理（局部收敛性定理）

设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点, $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域上连续，且 $|\varphi'(x^*)| \le L < 1$, 则迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 局部收敛.

证明：因 $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域上连续，且 $|\varphi'(x^*)| \le L < 1$，故对任意小的 $\epsilon > 0$, 存在邻域 $N(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 使得 $\widetilde{L} = L + \epsilon < 1$, 且

$$|\varphi'(x)| \le \widetilde{L} < 1, \qquad \text{满足压缩性}.$$

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)(x - x^*)| \le \widetilde{L}|x - x^*| < \delta$$

即对 $\forall x \in N(x^*)$, $\varphi(x) \in N(x^*)$, 满足映内性。由收敛性定理可知，迭代算法对任意 $x_0 \in N(x^*)$ 收敛, 即局部收敛.

例

已知方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 1.5 附近有根, 把方程写成三种不同的等价形式:

1. $x=1+\frac{1}{x^2}$, 对应迭代格式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$;
2. $x^3=1+x^2$, 对应迭代格式 $x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$;
3. $x^2=\frac{1}{x-1}$, 对应迭代格式 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

判断迭代格式在 $x_0=1.5$ 的收敛性，并选一种收敛格式计算，精确到小数点后第二位.

解： 注意到

$$1)\quad \varphi'(x)=(1+\frac{1}{x^2})'=-\frac{2}{x^3},\quad |\varphi'(1.5)|=2/1.5^3<1$$

$$2)\quad \varphi'(x)=[(1+x^2)^{1/3}]'=\frac{2x}{3}(1+x^2)^{2/3},\quad |\varphi'(1.5)|=0.4558<1$$

3) $\varphi'(x) = (\frac{1}{\sqrt{x-1}})' = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}, \quad |\varphi'(1.5)| = \sqrt{2} > 1.$

故可知，算法 1 和 2 收敛. 选择算法 2 计算可得

k	0	1	2	3	4
x_k	1.5	1.481	1.473	1.469	1.467

定义（收敛阶）

设序列 x_k 收敛到 x^*，$e_k = x_k - x^*$，若存在实数 $p \geq 1$ 及非零常数 $c > 0$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c,$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的，c 称为渐近误差常数．当 $p = 1$ 且 $0 < c < 1$ 时，称为线性收敛；当 $p > 1$ 时称为超线性收敛；当 $p = 2$ 时称二次收敛．

注

p 的大小反映了迭代法收敛的快慢，是收敛速度的一种度量．

定理 (p 阶收敛的充要条件)

设迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 中的迭代函数 $\varphi(x)$ 的最高阶导数 $\varphi^{(p)}(x)(p>1)$ 在不动点 x^* 的邻域上连续, 则迭代格式是 p 阶收敛的充要条件是

$$\varphi(x^*)=x^*,\quad \varphi^{(l)}(x^*)=0, l=1,2,p-1,\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0,$$

且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0.$$

证明: 先证充分性. 由 Taylor 公式知

$$\begin{aligned}\varphi(x_k)=&\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\cdots+\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x^*)(x_k-x^*)^{p-1}\\&+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p,\quad \xi\text{介于}x^*,x_k\text{之间}.\end{aligned}$$

取极限可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x^*)}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0.$$

再证必要性. 设迭代格式是 p 阶收敛的, 则有 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, $\lim_{k\to\infty} e_k = 0$ 且 $x^* = \varphi(x^*)$.

运用反证法. 设结论不成立，则存在最小的正整数 $p_0(\neq p)$ 满足

$$\varphi(x^*)=x^*,\quad \varphi^{(l)}(x^*)=0, l=1,2,p_0-1, \varphi^{(p_0)}(x^*)\neq 0.$$

情形一: $p_0 \le p-1$. 由充分性条件知，迭代格式是 p_0 阶收敛的，即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^{p_0}}=\frac{1}{p_0!}\varphi^{(p_0)}(x^*)\neq 0,\quad (p_0\le p-1).$$

而

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{e_{k+1}}{e_k^{p_0}} \cdot \frac{1}{e_k^{p-p_0}}$$

极限不存在, 这与序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的相矛盾.
同理，可证 $p_0 \geq p+1$ 情形时，也引出矛盾. 故而 $p_0 = p$.

问题

对于线性收敛的迭代格式，如何提高其收敛速度?

目 录

§2.3.1 使用两个迭代值的组合方法

将问题 $x = \varphi(x)$ 改写成等价形式 $(1-\theta)x = \varphi(x) - \theta x$. 当 $\theta \neq 0, 1$ 时, 可得

$$x = \frac{1}{1-\theta}[\varphi(x) - \theta x],$$

相应的迭代格式

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-\theta}[\varphi(x_k) - \theta x_k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

或者

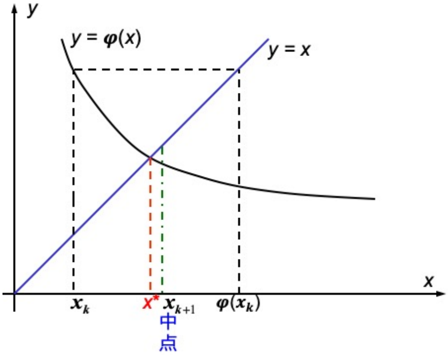
$$x_{k+1} = \varphi(x_k) + \frac{\theta}{1-\theta}[\varphi(x_k) - x_k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

选取特殊的 θ, 可能加速原迭代格式.

例如，$\theta=-1$ 时, 迭代公式为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}[\varphi(x_k)+x_k],\quad k=0,1,2,\cdots.$$

其几何意义如下图所示



注

(1) 这种迭代对原迭代公式的各近似值在根 x^* 的两侧往复地趋于 x^* 时较为有效；除加快新序列收敛外，还能有效防止死循环的出现.

(2) 只有 $0\geq\varphi'(x)\geq-L>-1$ 且 L 较大时, 加速效果才明显 (自证).

又如，$\theta = \varphi'(x^*)$，$x = \frac{1}{1-\varphi'(x^*)}[\varphi(x) - \varphi'(x^*)x] = \bar{\varphi}(x)$, 此时迭代公式为

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-\varphi'(x^*)}[\varphi(x_k) - \varphi'(x^*)x_k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

当 $\varphi'(x^*) \neq 1$ 时, $\bar{\varphi}'(x^*) = 0$. 由前面定理可知，上面的迭代方法至少是二阶收敛的.

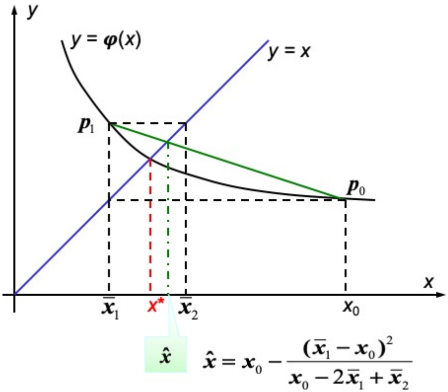
由于 x^* 未知，故 $\varphi'(x^*)$ 也得不到，因此可取 $\varphi'(x^*)$ 的近似值 c, 即

$$\theta = c \approx \varphi'(x^*)$$

从而有

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) + \frac{c}{1-c}[\varphi(x_k) - x_k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

其算法思想如下：从初值 x_0 出发，计算出 $\bar{x}_1 = \varphi(x_0)$, $\bar{x}_2 = \varphi(\bar{x}_1)$,



这样在曲线 $y = \varphi(x)$ 得到两个点 $P_0(x_0, \bar{x}_1)$, $P_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. 用直线连接 P_0, P_1, 其与直线 $y = x$ 的交点记为 P_3, 其坐标为 $(\hat{x}, \hat{x})$ 满足

$$\frac{\hat{x} - \bar{x}_1}{\hat{x} - x_0} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\bar{x}_1 - x_0}$$

从而可得

$$\hat{x} = \frac{x_0 \bar{x}_2 - \bar{x}_1^2}{x_0 - 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2}$$

将 $\hat{x}$ 视为新的初值，重复上面步骤.

一般形式

由 x_k, $\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$, $\bar{x}_{k+2} = \varphi(\bar{x}_{k+1})$ 组合得到迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k \bar{x}_{k+2} - \bar{x}_{k+1}^2}{x_k - 2\bar{x}_{k+1} + \bar{x}_{k+2}}$$

或者

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - \bar{x}_{k+1})^2}{x_k - 2\bar{x}_{k+1} + \bar{x}_{k+2}} = x_k - \frac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{x_k - 2\varphi(x_k) + \varphi(\varphi(x_k))}.$$

这个方法称为斯蒂芬森 (Steffensen) 迭代方法.

若令 $y_k=\varphi(x_k), z_k=\varphi(y_k), k=0,1,2,\cdots$, 则得斯蒂芬森 (Steffensen) 迭代方法的另一形式

$$
\begin{aligned}
&y_k=\varphi(x_k), \quad z_k=\varphi(y_k) \\
&x_{k+1}=x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}, \quad k=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

Steffensen 迭代法的优点： 可以改进收敛速度，有时也能把不收敛的迭代法改进为收敛的二阶方法.

爱肯特 (Aitken) 加速法

$$
\tilde{x}_{k+1}=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}
$$

定理（斯蒂芬森迭代法的收敛性）

设不动点迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 的迭代函数 $\varphi(x)$ 在其不动点 x^* 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\varphi'(x^*) = A \neq 0, 1$，则斯蒂芬森迭代法是二阶收敛的，且收敛到 x^*.

证明：记斯蒂芬森迭代格式如下

$$x_{k+1} = \Psi(x_k)$$

这里

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))} \\ &= x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))}.\end{aligned}$$

先证斯蒂芬森迭代法不动点与原迭代算法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 的不动点相同.
设 $x^* = \Psi(x^*)$, 则

$$(\varphi(x^*) - x^*)^2 = [x^* - \Psi(x^*)] \cdot [x^* - 2\varphi(x^*) + \varphi(\varphi(x^*))] = 0$$

即 $x^* = \varphi(x^*)$.
若 $x^* = \varphi(x^*)$，则需证明 $x^* = \Psi(x^*)$，即是证明

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x^*} [\Psi(x) - x] &= \lim_{x \to x^*} -\frac{(\varphi(x) - x)^2}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))} \\
&= \lim_{x \to x^*} -\frac{2\varphi'(x)(\varphi(x) - x)}{1 - 2\varphi'(x) + \varphi'(\varphi(x))\varphi'(x)} = 0
\end{aligned}$$

这里运用了 $\varphi'(x^*) \neq 0, 1$.

再来证明其二阶收敛性, 也即是证明下面公式成立

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\text{常数}$$

由 $\varphi(x)$ 具有二阶的连续导数知

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2!}\varphi''(\xi)(x-x^*)^2\\ &= x^*+A(x-x^*)+O((x-x^*)^2)\end{aligned}$$

所以

$$\varphi(x)-x=\varphi(x)-x^*-(x-x^*)=(A-1)(x-x^*)+O((x-x^*)^2)$$

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - x^* &= \Psi(x_k) - x^* \\
&= x_k - x^* - \frac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{[x_k - \varphi(x_k)] + [\varphi(\varphi(x_k)) - \varphi(x_k)])} \\
&= x_k - x^* - \frac{(A-1)^2(x_k - x^*)^2 + O((x_k - x^*)^3)}{(A-1)^2(x_k - x^*) + O((x_k - x^*)^2)} \\
&= \frac{O((x_k - x^*)^3)}{(A-1)^2(x_k - x^*) + O((x_k - x^*)^2)} \\
&= O((x_k - x^*)^2)
\end{aligned}
$$

从而可知斯蒂芬森迭代法二阶收敛.

目 录

§2.4 牛顿迭代法 (Newton-Raphson Method)

下面以 $f(x)=0$ 为例，我们给出牛顿迭代公式.

一、Taylor 展开法

将 $f(x)$ 在真解附近 x_0 处展开成 Taylor 级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

从而

$$0=f(x^*)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)\Rightarrow x^*\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

从而得牛顿迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

二、待定参数法

不动点迭代的关键是构造满足收敛条件的迭代函数 $\varphi(x)$. 一种自然的选择就是令 $\varphi(x) = x + cf(x)(c \neq 0)$. 为了加速不动点迭代的收敛过程，应尽可能使迭代函数 $\varphi(x)$ 在 x^* 处有更多阶导数等于零.

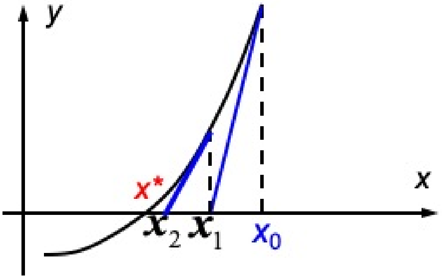
$$\varphi'(x^*) = 1 + cf'(x^*) = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

因 x^* 未知，故通常取 $\varphi(x) = x + h(x)f(x)$,

$$\varphi'(x^*) = 1 + h'(x^*)f(x^*) + h(x^*)f'(x^*) = 0 \Rightarrow h(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

从而可取 $h(x) = -1/f'(x)$，得迭代函数 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$, 进而得到牛顿迭代格式.

牛顿迭代法的几何意义



在真解附近取定 x_0 后，过点 $(x_0, f(x_0))$ 做 $f(x)$ 的切线：
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，其与 x 轴的交点作为第二个近似值 x_1,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

依次类推得到 $x_2, x_3, \cdots$

例

1). 写出求 $\sqrt{a}(a>0)$ 的牛顿迭代格式;
2). 写出求 $1/\sqrt{a}(a>0)$ 的牛顿迭代格式, 要求公式中既无开方运算又无除法运算.

解: 1). 问题等价于求 $f(x)=x^2-a=0$ 的正根. $f'(x)=2x$, 所以牛顿迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-a}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}),\quad k=0,1,2,\cdots$$

2). 问题等价于求 $f(x)=a-1/x^2=0$ 的根. $f'(x)=2/x^3$, 牛顿迭代格式为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k(3-ax_k),\quad k=0,1,2,\cdots$$

定理（牛顿迭代法的局部收敛性）

设 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的根，在包含 x^* 的某个开区间内 $f''(x)$ 连续，且 $f'(x)\neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $N(\delta)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得任取初值 $x_0\in N(\delta)$，由牛顿迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 以不低于二阶的收敛速度收敛于 x^*，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

证明：牛顿迭代法本质上是一种不动点迭代，其迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

注意到

$$\varphi'(x^*)=\frac{f''(x^*)f(x^*)}{f'^2(x^*)}=0\Rightarrow \text{算法收敛}.$$

由 Taylor 展开公式

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2!}f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2$$

从而可得

$$\begin{aligned} x^* &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2!}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 \\ &= x_{k+1} - \frac{1}{2!}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{x_{k+1} - x^*}{(x^* - x_k)^2} = \frac{1}{2!}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

故只要 $f'(x^*) \neq 0$, 取极限可得收敛结论.

定理（牛顿迭代法的非局部收敛性定理）

设 $f(x)=0$ 且 $f\in C^2[a,b]$，若

(1) $f(a)f(b)<0$; *(解的存在性)*

(2) 在整个 $[a,b]$ 上 $f''(x)\neq 0, f'(x)\neq 0$;*(解的唯一性)*

(3) 选取 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)f''(x_0)>0$;（序列单调有界收敛）

则牛顿迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根 x^*，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

证明：条件 (1),(2) 确保了 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上存在唯一的根 x^*.

由条件 (1),(2)，可分四种情况：

$$\begin{array}{ll} (1) & f(a) < 0, f(b) > 0, f''(x) > 0 \\ (2) & f(a) < 0, f(b) > 0, f''(x) < 0 \\ (3) & f(a) > 0, f(b) < 0, f''(x) > 0 \\ (4) & f(a) > 0, f(b) < 0, f''(x) < 0. \end{array}$$

下面仅就第一种情况给出证明，其他情况类似可得.
根据中值定理可知存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

因此 $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, 故而知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增. 由 $x_0 \in [a, b]$, $f(x_0)f''(x_0) > 0$ 可知 $f(x_0) > 0$, 从而 $x_0 > x^*$. 所以有

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

另一方面，由 Taylor 公式可得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\quad \xi\text{介于}x,x_0\text{之间}$$

运用 $f(x^*)=0$ 可得

$$f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x^*-x_0)^2=0$$

$$\begin{aligned} x^* &= x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{1}{2!}\frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}(x^*-x_0)^2 \\ &= x_1-\frac{1}{2!}\frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}(x^*-x_0)^2 \end{aligned}$$

因 $f''(x) > 0, f'(x) > 0$, 可得

$$x^* < x_1 < x_0$$

重复以上过程，可得（归纳法）

$$x^* < x_k < x_{k-1}$$

因此数列 $\{x_k\}$ 单调下降且有下界 x^*. 记 $\lim_{k\to\infty} x_k = l$, 则

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} (x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}) = l - \frac{f(l)}{f'(l)} = l \Rightarrow f(l) = 0 \Rightarrow l = x^*$$

显然，这样的初值 x_0 的选取有点苛刻.

定理 (牛顿迭代法的非局部收敛性定理)

设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且

(1) $f(a)f(b) < 0$;

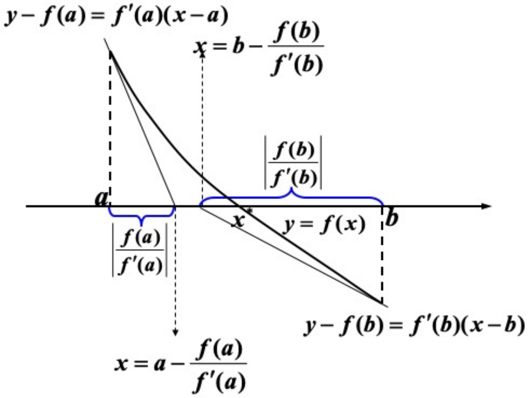
(2) 在整个 $[a,b]$ 上 $f''(x) \neq 0$ 且 $f'(x) \neq 0$;

(3) $|\frac{f(a)}{f'(a)}| < b - a, \quad |\frac{f(b)}{f'(b)}| < b - a$

则任选 $x_0 \in [a,b]$, 牛顿迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $f(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 内的唯一根 x^*.

此定理与前面的定理只有第三个条件的区别.

条件 (3) 的几何意义



保证数列 $\{x_k\}$ 单调递增且有上界 x^*

改进与推广：求复根问题

- 问题 1： 若 $f'(x^*) = 0$, 牛顿迭代法是否收敛？
  答： 设 x^* 为 f 的 n 重根，则 $f(x) = (x - x^*)^n q(x), q(x^*) \neq 0$. 因为牛顿迭代法为一特殊的不动点迭代，其中 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$, 则

$$|\varphi'(x^*)| = |1 - \frac{f'(x^*)^2 - f'(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2}| = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

  故知，对于重根问题，牛顿迭代法是有局部收敛性的，且重数越高，收敛越慢.
- 问题 2： 如何加速重根情况的收敛速度？
  答： 将求 f 重根转化为另一函数的单根问题. 比如令 $\mu(x) = f(x)/f'(x)$, 则重根问题转化为 $\mu(x)$ 的单根.

求复根问题

牛顿公式中的自变量可以是复数.
记 $z = x + iy$，z_0 为初值，同样有

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

设 $f(z_k) = A_k + iB_k, f'(z_k) = C_k + iD_k$，代入公式，令实、虚部对于相等，可得

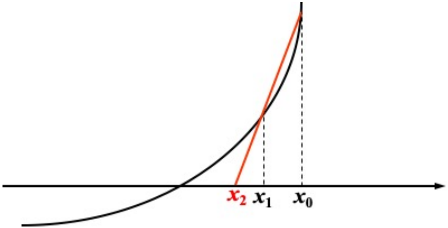
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{A_k C_k + B_k D_k}{C_k^2 + D_k^2} \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{A_k D_k + B_k C_k}{C_k^2 + D_k^2} \end{aligned}$$

目 录

§2.5.1 弦割法

牛顿迭代法的每一步都需要计算 $f(x), f'(x)$, 有时候计算函数 f 的导数可能比较困难，这里提出一种改进方法，用割线斜率代替切线斜率，

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$



可得迭代算法

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ &= \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{aligned}$$

定理（割线法的局部收敛性）

令 $I=[x^*-\delta,x^*+\delta]$，$x^*$ 为方程 $f(x)=0$ 的根，$\delta>0$. 设函数 $f(x)$ 在 I 上有足够阶连续导数，且满足

$$\begin{aligned} &(1)\quad f'(x)\neq 0, x\in I;\\ &(2)\quad \left|\frac{f''(\xi)}{f'(\eta)}\right|\leq M,\quad \forall \xi,\eta\in I;\\ &(3)\quad d=M\delta<1. \end{aligned}$$

则对任意的初始值 $x_0,x_1\in I$，割线法产生的序列都收敛于 x^*，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^q}=K^{q-1}$$

其中 $K=\left|\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right|$, $q=(1+\sqrt{5})/2\approx 1.618$.

定理 (推论)

设 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的一个根，函数 $f'(x)\neq 0$ 且 $f''(x)$ 在 x^* 附近连续, 则存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $x_0, x_1\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 由割线法产生的序列都收敛于 x^*.

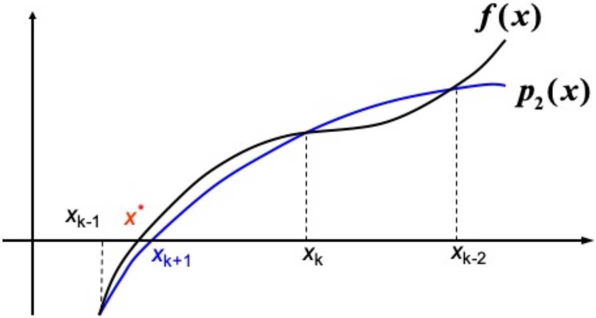
例

证明 $x=\cos x$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 内有唯一根，且存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $x_0, x_1\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$，由割线法产生的序列都收敛于 x^*.

证明：令 $f(x)=x-\cos x$, 显然有 $f(0)f(\pi/2)<0$，且 $f'(x)=1+\sin x>0$, 故 $x=\cos x$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 内有唯一根.
注意到 $f'(x)\neq 0$ 且 $f''(x)$ 在 x^* 附近连续, 由推论知割线法产生的序列都收敛于 x^*.

§2.5.2 抛物线法（Muller）

抛物线法的思想来源于弦割法:利用 3 个已知点构造一条抛物线, 取其与 x 轴的交点构造下一次迭代值.



具体实现

设已知三个点: $(x_{k-2}, f(x_{k-2})), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$, 则通过上三个点的抛物型方程为

$$\begin{aligned} p_2(x) \quad = \quad & \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k-2}-x_{k-1})(x_{k-2}-x_k)} f(x_{k-2}) \\ & + \frac{(x-x_{k-2})(x-x_k)}{(x_{k-1}-x_{k-2})(x_{k-1}-x_k)} f(x_{k-1}) + \frac{(x-x_{k-2})(x-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})} f(x_k) \end{aligned}$$

取该抛物线与 x 轴的交点作为下一次迭代值, 即 $p_2(x_{k+1}) = 0$ 然后取新的相邻的三次迭代值重复上述过程, 即为 Muller 方法.

Muller 方法中抛物线根的计算方法:

首先要将抛物线化为规范形式:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

引入新的变量

$$\lambda = \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\lambda_3 = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

$$\delta_3 = 1 + \lambda_3 = \frac{x_k - x_{k-2}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

将上述变量代入前面的抛物线方程, 得

$$p_2(\lambda) = \frac{1}{\delta_3}(a\lambda^2 + b\lambda + c)$$

其中

$$\begin{aligned}
a &= f(x_{k-2})\lambda_3^2 - f(x_{k-1})\lambda_3\delta_3 + f(x_k)\lambda_3 \\
b &= f(x_{k-2})\lambda_3^2 - f(x_{k-1})\delta_3^2 + f(x_k)(\lambda_3 + \delta_3) \\
c &= f(x_k)\delta_3
\end{aligned}$$

整理可得 p_2 两个零点

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

取靠近 x_k 的那个零点，记为

$$\lambda_4 = \frac{-2c}{b + sign(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Muler 法格式如下

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_4(x_k - x_{k-1}).$$

Muller 法的优点

初值的选取范围比 Newton 法和弦割法宽, 而且可以一次求得方程的一对复根.

算法: Muller 方法

给定初始近似值 x_0, x_1, x_2 , 求 $f(x) = 0$ 的根.
输入: 初值 x_0, x_1, x_2; 容许误差 TOL.
输出: 近似解 x.

Step 1 Set $i = 1$;

Step 2 do steps 3-7

Step 3 Compute

$$
\begin{aligned}
t_3 &= \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} \\
d_3 &= 1 + t_3 \\
a &= f(x_0)t_3^2 - f(x_1)t_3 d_3 + f(x_3)t_3 \\
b &= f(x_0)t_3^2 - f(x_1)d_3^2 + f(x_3)(t_3 + d_3) \\
c &= f(x_3)d_3
\end{aligned}
$$

$$t_4 = \frac{-2c}{b + sign(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x = x_2 + t_4(x_2 - x_1)$$

Step 4 If $|t_4(x_2 - x_1)| < TOL$, then Output x; STOP;

Step 5 Set $i++$;

Step 6 Set $x_0 = x_1, x_1 = x_2, x_2 = x$;

Step 7 goto Step 2.

定理 (Muller 法的局部收敛性)

设 $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0, f''(x)$ 在 x^* 附近连续, 则存在 x^* 的一个邻域 $N(\delta)=[x^*-\delta, x^*+\delta], \delta>0$, 当 $x_0, x_1, x_2 \in N(\delta)$, 由抛物线法产生的序列都收敛于 x^*, 且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\left|\frac{f'''(x^*)}{6f'(x^*)}\right|^{(p-1)/2}$$

其中 $p=1.839$ 为 $\lambda^3-(\lambda^2+\lambda+1)=0$ 的根.

迭代算法总结

Algorithm	Formula	Rate
Fixed-point	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	不定
Combined	$x_{k+1} = \varphi(x_k) + \dfrac{\theta}{1-\theta}[\varphi(x_k) - x_k]$	不定
Steffensen	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{x_k - 2\varphi(x_k) + \varphi(\varphi(x_k))}$	$p = 2$
Newton	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	$p \geq 2$
Secant	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$	$p = 1.618$
Muller	$x_{k+1} = x_k + \lambda_4(x_k - x_{k-1})$	$p = 1.839$

知识小结

主要内容

1. 二分法
2. 迭代法：不动点迭代、收敛性及收敛阶
3. 加速方法：两个迭代值的组合方法、斯蒂芬森迭代法
4. 牛顿迭代法、弦割法、抛物线法

重点及难点

重点：二分法、牛顿迭代法、收敛性理论
难点：收敛性理论

Many thanks for your attention !