A卷

2008—2009 学年第一学期
《高等数学》期末考试试卷

(理工科类)

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室___数学学院基础数学系___

考试日期____2009 年 1 月 5 日____

页 码	一	二	三	四	五	六	总分
得　分							
阅卷人							

说明：1 本试卷正文共 6 页。
2 封面及题目所在页背面及附页为草稿纸。
3 答案必须写在题后的横线上，计算题解题过程写在题下空白处，写在草稿纸上无效。

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分).

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ =_____ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ________.

（2）曲线 $y = x\ln x$ 上与直线 $x - y + 1 = 0$ 平行的切线方程为___ $y = x - 1$______.

（3）已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$，且 $f(1) = 0$，则 $f(x) =$______ $f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$_____ .

（4）曲线 $y = \dfrac{x^2}{3x+1}$ 的斜渐近线方程为 _________ $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}$.

（5）微分方程 $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解为_________ $y = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}} + C(x+1)^2$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分).

（1）下列积分结果正确的是（ D ）

(A) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x}dx = 0$ (B) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx = -2$

(C) $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^4}dx = +\infty$ (D) $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = +\infty$

（2）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有定义，其导数 $f'(x)$ 的图形如图 1-1 所示，则（ D ）.

(A) x_1, x_2 都是极值点.

(B) $(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))$ 都是拐点.

(C) x_1 是极值点.，$(x_2, f(x_2))$ 是拐点.

(D) $(x_1, f(x_1))$ 是拐点， x_2 是极值点.

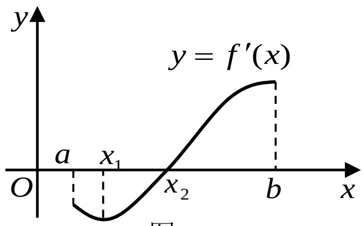


图 1-1

（3）函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + xe^x$ 满足的一个微分方程是（ D ）.

（A） $y'' - y' - 2y = 3xe^x$. （B） $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

（C） $y'' + y' - 2y = 3xe^x$. （D） $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

（4）设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ 为（ A ）.

(A) $f'(x_0)$.　(B) $-f'(x_0)$.　(C) 0.　(D)不存在 .

（5）下列等式中正确的结果是 （ A ）.

(A) $(\int f(x)dx)' = f(x)$.　(B) $\int df(x) = f(x)$.

(C) $d[\int f(x)dx] = f(x)$.　(D) $\int f'(x)dx = f(x)$.

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）.

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$ -------1 分

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$ -------2 分

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$ -------1 分

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{1+\ln x+1} = \frac{1}{2}$ -------2 分

2.方程 $\begin{cases} x = \ln\sin t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = t\sin t,$ ---------------------------（3 分）

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(t\sin t)'}{x'(t)} = \sin t\tan t + t\sin t.$ ---------------------（6 分）

3. 计算不定积分 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解：$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)}d\sqrt{x}$ ------------2分

$=2\int \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$ --------2分

$=(\arctan\sqrt{x})^2 + C$ ----------2分

4.计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx$.

解 $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx = \int_0^3 \frac{x(1-\sqrt{1+x})}{-x}dx = -\int_0^3 (1-\sqrt{1+x})dx$ --------- --------------- （3 分）

$= -3 + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{5}{3}$ -- ---------------------（6 分）

（或令 $\sqrt{1+x} = t$ ）

四、解答题（本题共 4 小题，共 29 分）.

1.（本题 6 分）解微分方程 $\boldsymbol{y''-5y'+6y=xe^{2x}}$.

解：特征方程$r^2-5r+6=0$-----------1分

特征解$r_1=2, r_2=3.$-----------1分

次方程的通解$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$--------1分

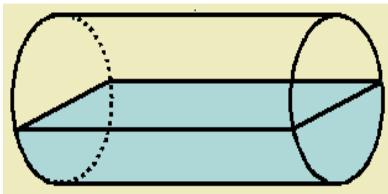
令$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$------------1分

代入解得$b_0=-\frac{1}{2}$，$b_1=-1.$

所以$y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$------------1分

所以所求通解$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(\frac{1}{2}x+1)e^{2x}.$----1分

2.（本题 7 分）一个横放着的圆柱形水桶（如图 4-1），桶内盛有半桶水，设桶的底半径为R，水的比重为γ，计算桶的一端面上所受的压力.



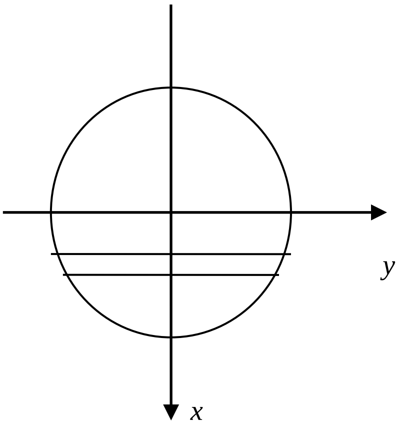
解：建立坐标系如图

$$P=\int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2-x^2}dx \text{----------4分}$$

$$=-\rho g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}d(R^2-x^2) \text{-------1分}$$

$$=-\rho g[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}]_0^R \text{-------1分}$$

$$=\frac{2\rho g}{3}R^3 \text{-----------------1分}$$



3. （本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数， $f(a)=f(b)=0$，且 $\int_a^b f^2(x)dx=1$，试求 $\int_a^b xf(x)f'(x)dx$.

解：$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=\int_a^b xf(x)df(x)$------2分

$=\frac{1}{2}\int_a^b xdf^2(x)$------2分

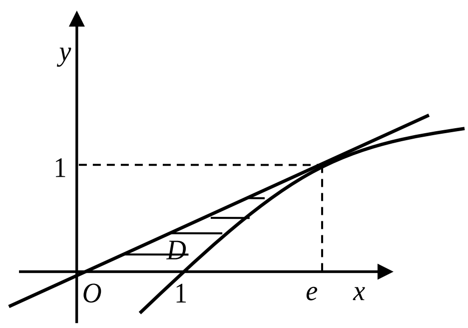
$=[xf^2(x)]_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$--2分

$=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$----------2分

4. （本题 8 分）过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.



解：(1) 设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$ ----1 分

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=e$. 所以该切线的方程为

$$y=\frac{1}{e}x.$$ ----1 分

平面图形 D 的面积

$$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1.$$ ----2 分

（2） 切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2.$$ ----2 分

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy,$$ ----1 分

因此所求旋转体的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi e^2 - \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3).$$ ----1 分

五、证明题（本题共 1 小题，共 7 分）.

1. 证明对于任意的实数 x，$e^x \geq 1 + x$.

解法一：$e^x = 1 + x + \frac{e^{\xi}}{2}x^2 \geq 1 + x$

解法二：设 $f(x) = e^x - x - 1.$ 则 $f(0) = 0.$------------------------1 分

因为 $f'(x) = e^x - 1.$------------------------------—————— 1 分

当 $x \geq 0$ 时，$f'(x) \geq 0.$ $f(x)$ 单调增加，$f(x) \geq f(0) = 0.$------------------------2 分

当 $x \leq 0$ 时，$f'(x) \leq 0.$ $f(x)$ 单调增加，$f(x) \geq f(0) = 0.$------------------------2 分

所以对于任意的实数 x，$f(x) \geq 0.$ 即 $e^x \geq 1 + x$。------------------------1 分

解法三：由微分中值定理得，

$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^{\xi}(x - 0) = e^{\xi}x$，其中 ξ 位于 0 到 x 之间。------------------------2 分

当 $x \geq 0$ 时，$e^{\xi} > 1$，$e^x - 1 \geq x$。------------------------2 分

当 $x \leq 0$ 时，$e^{\xi} < 1$，$e^x - 1 \geq x$。------------------------2 分

所以对于任意的实数 x，$e^x \geq 1 + x$。------------------------1 分