2010-1011 学年第二学期高等数学（2-2）期末考试 A 卷参考答案

一. 填空题 (共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分)

1．设$z = xe^y + \ln(x^2+y^2)$,则$dz|_{(1,0)} = \underline{3dx+dy}$.

2．设 $f(x,y) = x - y + \sin xy$,则$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,x)dx = \underline{\frac{1}{2}(1-\cos 1)}$.

3．设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{\pi - x}, 0 < x < \pi \\ x^2+1, -\pi \le x \le 0 \end{cases}$ 以 2π 为周期，$s(x)$ 为的 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则 $s(-3\pi) = \underline{\dfrac{\pi^2+1}{2}}$.

4．设曲线 C 为圆周 $x^2+y^2=R^2$,则曲线积分 $\oint_C (x^2+y^2 - 3x)ds = \underline{2\pi R^3}$.

二. 选择题（共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1. 设直线 L 为 $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y-10z+3=0, \end{cases}$ 平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$, 则 （ C ）.

（A） L 平行于平面 π （B） L 在平面 π 上

（C） L 垂直于平面 π （D） L 与 π 相交，但不垂直

2．设有空间区域$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2$，则$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$ 等于 （ B ）.

（A） $\frac{2\pi}{3}R^4$ （B） πR^4 （C） $\frac{4\pi}{3}R^4$ （D） $2\pi R^4$

3．下列级数中，收敛的级数是（ C ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n+1}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}})$

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，则下列结论中错误的是（ D ）

（A） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛 （B）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$ 也收敛

（C）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则部分和 S_n 有界 （D）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$

三．计算题（共 8 小题，每小题 8 分，共计 64 分）

1．设函数 f 具有二阶连续偏导数，$u = f(x^2y, x+y)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyf_1 + f_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2xf_1 + 2xy(x^2 f_{11} + f_{12}) + (x^2 f_{21} + f_{22})$$

$$= 2xf_1 + 2x^3 yf_{11} + (2xy + x^2) f_{12} + f_{22}$$

2．求函数 $z = 3xy^2 - x + y$ 在曲线 $y = x^2 + 1$ 上点（1,2）处，沿着曲线在该点偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解：曲线 $L: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$ 在点(1,2)处的切向量 $\vec{T} = (1,2)$，$\vec{T}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)} = (3y^2 - 1)\Big|_{(1,2)} = 11, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} = (6xy + 1)\Big|_{(1,2)} = 13$$

函数在点（1,2）沿 $\vec{T} = (1,2)$ 方向的方向导数为

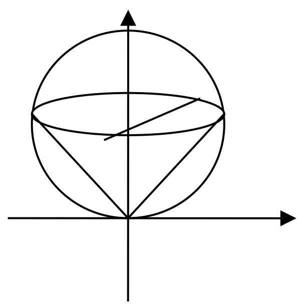
$$\frac{\partial z}{\partial \vec{T}}\Big|_{(1,2)} = \frac{11}{\sqrt{5}} + \frac{13 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{37}{\sqrt{5}}$$

3．计算 $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.

解 $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (x^2 + y^2) dxdy + \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 2xydxdy \;\; = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr + 0 \;\; = \;\; 8\pi$

4. 设立体 Ω 由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及半球面 $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成. 已知 Ω 上任一点 (x, y, z) 处的密度与该点到 xoy 平面的距离成正比（比例系数为 $K > 0$），试求立体 Ω 的质量.

解：由题意知密度函数 $\rho(x, y, z) = k \mid z \mid$



法 1：Ω: $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$

质量 $M = \iiint\limits_\Omega \rho(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_\Omega k \mid z \mid dxdydz$

$$= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi r^2 \sin\varphi dr \quad = \frac{7\pi k}{6} \; .$$

法 2：$\Omega:\begin{cases} D: x^2+y^2\le 1, \\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$

$$M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega k\,|\,z\,|\,dxdydz$$

$$=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}}zrdz=\frac{7\,\pi\,k}{6}\quad.$$

法 3：$M=\iiint_\Omega k\,|\,z\,|\,dxdydz=\int_0^1 z\,\pi\,z^2dz+\int_1^2 z\,\pi\,(1-(z-1)^2)\,dz=\dfrac{7\pi k}{6}.$

5．计算曲线积分 $I=\oint_C\dfrac{(x-y)dx+(y+x)dy}{x^2+y^2}$ ，其中 C 是曲线 $x^2+y^2=1$ 沿逆时针方向一周.

解：$I=\oint_C\dfrac{(x-y)dx+(y+x)dy}{1}=\iint_{x^2+y^2\le 1}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}[1-(-1)]dxdy=2\pi$.

6. 计算第二类曲面积分 $\oiint_\Sigma xyzdydz+xydxdz+zx^2dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解：利用高斯公式，

$$\oiint_\Sigma xyzdydz+xydxdz+zx^2dxdy=\iiint_\Omega(yz+x+x^2)dxdydz$$

$$=\iiint_\Omega(yz+x)dxdydz+\iiint_\Omega x^2dxdydz=0+\frac{1}{3}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr=\frac{4}{15}\pi.$$

7．求幂级数 $\sum_{n=1}^\infty\dfrac{1}{n+1}x^n$ 的和函数 .

解:幂级数的收敛半径 $R=1$，收敛域为 $[-1,1)$

$x\ne 0$ 时， $xS(x)=\sum_{n=1}^\infty\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^\infty\int_0^x x^ndx=\int_0^x\sum_{n=1}^\infty x^ndx$

$$=\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=-x-\ln(1-x)$$

$x=0$ 时，$S(0)=0$， $\therefore S(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 0 & x=0\end{cases}$

四．证明题（本题 4 分）

证明下列不等式成立：$\iint\limits_D \frac{e^y}{e^x} dxdy \geq \pi$，其中 $\mathrm{D}=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

证明：因为积分区域关于直线 $y=x$ 对称， $\iint\limits_D \frac{e^y}{e^x} dxdy = \iint\limits_D \frac{e^x}{e^y} dxdy$

$$\therefore \iint\limits_D \frac{e^y}{e^x} dxdy = \frac{1}{2}\left(\iint\limits_D \frac{e^y}{e^x} dxdy + \iint\limits_D \frac{e^x}{e^y} dxdy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(\frac{e^y}{e^x} + \frac{e^x}{e^y}\right) dxdy \geq \frac{1}{2}\iint 2dxdy = \pi$$

五．应用题（本题 8 分）设有一小山，取它的底面所在平面为 xoy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y): x^2+y^2-xy \leq 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy.$

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？

若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式。

（2）现欲利用此小山举行攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找使（1）中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确定攀登起点的位置。

解：（1）由梯度的性质知，$h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处

沿梯度 $gradh(x_0,y_0)=(y_0-2x_0)\vec{i}+(x_0-2y_0)\vec{j}$ 方向的方向导数值最大，

最大值为 $g(x_0,y_0)=\left|gradh(x_0,y_0)\right|=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$

$=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

（2）令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，则模型为

$$\begin{cases} \max f(x,y)=5x^2+5y^2-8xy \\ \text{约束条件}: 75-x^2-y^2+xy=0 \end{cases}$$

做 $Lagrange$ 函数 $L(x,y)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$，得

$$\begin{cases} L'_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, \cdots(1) \\ L'_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0, \cdots(2) \\ L'_\lambda=75-x^2-y^2+xy=0. \quad \cdots(3) \end{cases}$$

(1)、(2) 式相加可得 $(x+y)(2-\lambda)=0, \Rightarrow y=-x,$ 或 $\lambda=2.$

若 $\lambda=2$，由 ⑴ $\Rightarrow y=x$，再由 ⑶ $\Rightarrow x=\pm 5\sqrt{3}, y=\pm 5\sqrt{3}.$

若 $y=-x$，由 $(3)\Rightarrow x=\pm 5, y=\mp 5$.

得 4 个可能极值点：$M_1(5,-5),\ M_2(-5,5),\ M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),\ \ M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$.

由于 $f(M_1)=f(M_2)=450,\ \ f(M_3)=f(M_4)=150,$

故 $M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.