A 卷

2012—2013 学年第一学期
《线性代数》

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室　基础数学系

考试日期　2013 年 1 月 16 日

页　号	一	二	三	四	五	六	总分
本页满分	15	21	24	16	12	12	
本页得分							
阅卷人							

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；
2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；
3．本试卷共六道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；
4. 本试卷正文共 6 页.

本页满分 15 分	
本页得分	

一．选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．已知五阶行列式第三列的元素分别为 0，1，2，3，4，第三列的余子式分别为-4，-3，-2，-1,0，则该行列式的值为（　　　）

A．　-2　　　　B．2　　　　　C．10　　　　D．-10 .

2．已知方阵A满足$A^2-A-3E=O$，则下列说法错误的是（　　　）

A．$A+3E$可逆；

B．$A-E$可逆；

C．A可逆；

D．A^2不可逆.

3．含 n 个未知量的齐次方程组$Ax=0$有非零解的充分必要条件是（　　　）

A．$R(A)<n$；

B．$R(A)=n$；

C．$R(A)>n$；

D．$R(A)\le n$.

4.下列不属于等价关系的是（　　　）

A．矩阵的初等变换；

B．矩阵的可逆；

C．矩阵的相似；

D．矩阵的合同.

5． 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则 (　　　)

A　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$线性无关；

B　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1-\beta_2$线性相关；

C　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性无关；

D　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$线性相关.

二．填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

本页满分 21 分	
本页得分	

1．设 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$=____________.

2．设四阶矩阵 A 与 B 相似，E 为四阶单位阵，矩阵 A 的特征值为 $2,3,4,5$，则 $|B-E|=$_________.

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=A^2-3A+2E,$ 则 $B^{-1}=$

4. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 三维列向量 $\alpha=(a \quad 1 \quad 1)^T$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$_____.

5. 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

三、论述证明题（6 分）

请问等价的向量组线性相关性一定相同吗？若答案肯定，请给出证明；否则请说明理由或举出反例.

四．计算下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共计 40 分）

本页满分 24 分	
本页得分	

1．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+a & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2+a \end{vmatrix}$．（8 分）

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 且 $AB=A+2B$, 求矩阵 B.（8 分）

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求 x，y．（8 分）

本页满分 16 分	
本页得分	

4. 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\2\end{pmatrix}$，

求该向量组的秩和一个最大无关组.（8 分）

5. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知η_1,η_2,η_3是它的三个解向量，且$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解.（8 分）

五、（12 分）

本页满分 12 分	
本页得分	

设有三维向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$, 问$\lambda$取何值时，

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式唯一？

（2）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

（3）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

六、（12 分）

本页满分 12 分	
本页得分	

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^T Ax=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为−12.

（1） 求 a,b 的值；

（2） 利用正交变换将此二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.