A 卷

2013—2014 学年第一学期
《线性代数》期末试卷
答案与评分标准

专业班级 ____________________

姓　　名 ____________________

学　　号 ____________________

开课系室 ____应用数学系____

考试日期 ____2013 年 11 月 24 日____

页　号	一	二	三	四	五	总分
本页满分	30	16	16	24	14	
本页得分						
阅卷人						

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；
2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；
3．本试卷共五道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

一．填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&3\\2&-4&1\\4&5&7\end{bmatrix}$，则 $R(A)=\underline{\quad 3 \quad}$.

2．设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1， 2， 3，则 A^2+E 的特征值为$\underline{\quad 2,5,10 \quad}$.

3．若四阶方阵 A 的秩等于 2，则 $R(A^*)=\underline{\quad 0 \quad}$.

4．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$ 的矩阵为$\underline{\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}}$.

5．从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为$\underline{\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}}$.

二．选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．已知 $2n$ 阶行列式 D 的某一列元素及其余子式都等于 a，则 $D=$（ A ）.

A．0；　　B. a^2；　　C. $-a^2$；　　D. na^2.

2．已知三阶方阵 A 和 B 满足 $|A|=|B|=2$，则 $|2AB|=$（ D ）.

A． 2^2；　　B． 2^3；　　C． 2^4；　　D． 2^5.

3．已知 A 和 B 均为 5 阶方阵，且 $R(A)=4$，$R(B)=5$，则 $R(AB)=$（ D）.

A．1；　　B．2；　　C．3；　　D．4.

4．设 A 是 n 阶方阵，$|A|=2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则行列式 $|A^*|=$（ C ）.

A．2；　　B. 2^n；　　C. 2^{n-1}；　　D. 前面选项都不对.

5．若向量组 α，β，γ 线性无关，α，β，δ 线性相关，则（ C ）.

A．α 必可由 β，γ，δ 线性表示；　　B. β 必可由 α，γ，δ 线性表示；

C. δ 必可由 α，β，γ 线性表示；　　D. δ 必不可由 α，β，γ 线性表示.

三．计算下列各题（共 4 小题，每小题 8 分，共计 32 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 301 & 300 & 600\end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix}3 & 100 & 4\\ -1 & 200 & -5\\ 1 & 300 & 0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ -1 & 2 & -5\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}3 & -8 & 4\\ -1 & 5 & -5\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}-8 & 4\\ 5 & -5\end{vmatrix}$$ L L 6 分

$$=2000$$

L L 8 分

2. 求 A 的逆矩阵，其中矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

解：

$$|A|=-2$$ L L 2 分

$$A^{*}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}$$ L L 6 分

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$ L L 8 分

3\. 验证$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是R^3的基，并求

$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$在这组基下的坐标.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L L 6 分

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$在这组基下的坐标为 $4, 0, -1$ L L 8 分

4\. 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L L 4分

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

L L 6分

即：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L L 8分

$$x = k_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1.k_2 \in R$$

四. 求解下列各题（共 3 小题，每小题 8 分，共计 24 分）

1. 设矩阵 A 满足 $A^2 - 3A - 2E = 0$, 证明 A 可逆，并求 A^{-1}.

解：

$A(A-3E)=2E,$

$A\left(\dfrac{A-3E}{2}\right)=E,$ ……6分

$A^{-1}=\dfrac{A-3E}{2}$

……8分

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_3=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$，讨论向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ 的线性相关性.

解：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即：

$$k_1(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)=0$$

$$k_1(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)=0$$ ……2分

$$(k_1+2k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2-k_3)\alpha_2+(2k_1-k_2+3k_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+2k_3=0 \\ -k_1+k_2-k_3=0 \\ 2k_1-k_2+3k_3=0 \end{cases}$$ ……4分

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$ ……6分

所以上述方程组有非零解，即：$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ 线性相关。 ……8分

3. 证明 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

…… 4分

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

…… 8分

五、（14 分）

求一个正交变换，将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3$ 化为标准形.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ L L 1 分

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\left(1-\lambda\right)^2\left(\lambda-3\right)$$

$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$ L L 4 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=1,$ 代入 $\left(A-E\right)x=0$ 得：

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_2=-x_3$

基础解系为：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ L L 8 分

当 $\lambda_3=3$ 代入 $\left(A-3E\right)x=0$ 得：

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x_1=0, x_2=x_3$

基础解系为：$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ L L 10 分

ξ_1,ξ_2,ξ_3两两正交，下面把它们单位化，得：

$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，得： L L 12 分

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

通过正交变换：

$y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}x$，二次型化为 $f=-y_1^2-y_2^2+3y_3^2$ L L 14 分