2012—2013 学年第一学期　高等数学(2-1)期中试题参考答案

一、 填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{\ e^{-1}\ }$．

2．设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，则 $f'(2)=$ $\underline{\ 3\ }$．

3．设 $y=\ln\sqrt{x^2+a^2}+\arctan\dfrac{a}{x}$，则 $dy=$ $\underline{\ \dfrac{x-a}{x^2+a^2}dx\ }$．

4．函数 $y=\ln(1+2x)$，则 $y^{(n)}(0)=$ $\underline{\ (-1)^{n-1}2^n\cdot(n-1)!\ }$．

5．曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的下凸区间是 $\underline{\ [-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}]\ 或\ (-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})\ }$．

二、选择题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1．设函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ C ）.

A．连续点；B. 可去间断点；C. 跳跃间断点；D. 无穷间断点.

2． 设 $f(x)$ 有二阶连续导数且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则下列说法正确的是（ B ）.

A． $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

B． $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　C． $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

D． $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

3. 当 $x\to\infty$ 时，若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 与 $\dfrac{1}{x+1}$ 为等价无穷小，则 a,b,c 之值为（ B ）.

A． $a=0,b=1,c=1$；　　B． $a=0,b=1$，c 为任意常数；

C． $a=0$，b,c 为任意常数；　　D． a,b,c 均为任意常数.

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leq 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ D ）.

A．极限不存在；　B.极限存在但不连续；　C.连续但不可导；　D.可导.

5. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导且 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则 $\Delta x\to 0$ 时，$dy|_{x=x_0}$ 是 Δx 的（ C ）.

A．等价无穷小；B.高阶无穷小；C.同阶但非等价无穷小；D低阶无穷小.

三、计算题（共4小题，每小题5分，共20分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$.

解：（方法一）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x\sin x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=1$；

（方法二）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}=1$；

（方法三）洛比达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+x\sin x}}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=1.$$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{\sin(xy)}=x^y\ (x>0,-\pi<y<\pi)$ 确定，求其在 $x=1$ 处的切线方程.

解：两边取对数得：$\ln x+\sin(xy)=y\ln x,$ 即 $\sin(xy)=(y-1)\ln x$，

两边对 x 求导，有 $\cos(xy)(y+xy')=y'\ln x+\frac{y-1}{x}$，

又由于 $x=1$ 时，$\sin y=0$，$-\pi<y<\pi$，可得 $y=0$，代入得 $y'(1)=-1$，故在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

3. 设 $\begin{cases}x=t+\arctan t\\ y=t^3+6t\end{cases}$，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+6}{1+\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)$；$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t}{1+\frac{1}{1+t^2}}=\frac{6t(1+t^2)}{2+t^2}$，

故 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=4$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：（方法一） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}} \quad = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$；

（方法二） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to \infty}(\cos^2 x)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{-\sin^2 x}\frac{-\sin^2 x}{2x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$；

（方法三）洛比达法则 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

四、应用题（共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x}, & x>0\\ e^{ax}-1, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求出 a 与 b.

解：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必连续，故 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)=0$，又

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(a+b)\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\ln(1-x)}{x}=a+b-2$，

可得 $a+b-2=0$，即 $a+b=2$；又由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f'_-(0)=f'_+(0)$，又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a\text{，}$$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+\ln(1-x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-\frac{1}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}[-\sin x-\frac{1}{(1-x)^2}]=-1\end{aligned}\text{，}$$

故 $a=-1, b=3$.

2. 有一底半径为 R cm，高为 h cm 的圆锥容器，今以 $25\ \text{cm}^3/\text{s}$ 自顶部向容器内注水，试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速率.

解：设 t 时刻，水的体积，水面半径及水的深度分别为 V, r, x，由于

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h-\frac{1}{3}\pi r^2(h-x)\text{，}$$

又从相似三角形可知：$\dfrac{r}{R}=\dfrac{h-x}{h}$，即 $r=R\dfrac{h-x}{h}$，

可得$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h-\frac{1}{3}\pi R^2\frac{(h-x)^3}{h^2}=\frac{1}{3}\frac{\pi R^2}{h^2}[h^3-(h-x)^3]$，两边对$t$求导，得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2\frac{dx}{dt},$$

由已知条件$\frac{dV}{dt}=25$，$x=\frac{h}{2}$，代入得$\frac{dx}{dt}=\frac{100}{\pi R^2}$，即水面上升的速率为$\frac{100}{\pi R^2}\text{cm/s}$.

3. 试讨论方程$\ln x=ax,(a>0)$有几个实根.

解：令$f(x)=\ln x-ax,\ x\in(0,+\infty)$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$连续，

$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，令$f'(x)=0$，解得驻点$x=\frac{1}{a}$，列表如下：

x	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	$\nearrow$	最大值 $f\left(\frac{1}{a}\right)$	$\searrow$

可得，$f(x)$的最大值为$f\left(\frac{1}{a}\right)=-(\ln a+1)$.[或$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，$f''(\frac{1}{a})=-a^2<0,$

$f(x)$在$(0,+\infty)$内有唯一的极大值$f\left(\frac{1}{a}\right)=-(\ln a+1)$即最大值.]

讨论如下：（1）当$a=\frac{1}{e}$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，方程$\ln x=ax$有唯一的实根；

（2）当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，

又由于$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-ax)=-\infty$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\ln x}{x}-a)=-\infty$，

故方程$\ln x=ax$有两实根，分别位于$\left(0,\frac{1}{a}\right)$与$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内；

（3）当$a>\frac{1}{e}$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)<0$，方程$\ln x=ax$没有实根.

五、证明题（共2小题，每小题8分，共16分）

1．设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f(2)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证明：令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且由于 $f(0)=0$， $f(2)=0$，易得 $F(0)=F(2)=0$，根据罗尔定理，至少存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$，又 $e^{-\xi}\neq 0$，可得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

2．证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明：（方法一）设 $f(t)=\ln t$，则 $f(t)$ 在 $[1,1+x]$ 上连续，在 $(1,1+x)$ 内可导，由

Lagrange 中值定理，得 $\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\dfrac{1}{\xi}$，$1<\xi<1+x$，故 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{\xi}<1$，即

$\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1$，整理得，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

（方法二）：对 $f(t)=\ln(1+t)$ 在 $[0,x]$ 上应用 Lagrange 中值定理.

（方法三）：利用函数的单调性.