2013—2014 学年第一学期《高等数学（2-1)》期末考试 A 卷

（工科类）参考答案及评分标准

一.（共 5 小题，每小题 3 分，共计 1 5　分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“√”或“×”，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1．若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 无界，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$.（　×　）------------- （ 1 分 ）

例如：$f(x)=x\sin x$，在 $(1,+\infty)$ 无界，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x\neq\infty$.　------- （ 2 分 ）

2．若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $f(x)$ 在 x_0 点必可导.（　×　）------------- （ 1 分 ）

例如：$f(x)=|x|$，在 $x=0$ 点连续，但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导. ------ （ 2 分 ）

3．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.（　×　）------------- （ 1 分 ）

例如：$x_n:1,0,1,0,\cdots$　　$y_n:0,1,0,1,\cdots$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都不存在. ---------------------------- （ 2 分 ）

4．若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点必取得极值.（ × ）------------------ （ 1 分 ）

例如：$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 点没有极值. ---------（ 2 分 ）

5．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必可积.（ × ）------------- （ 1 分 ）

例如：$D(x)=\begin{cases}1，当 x 为有理数，\\ 0，当 x 为无理数\end{cases}$，在 $[0,1]$ 有界，但 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积. （ 2 分 ）

二.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 2 1 分）

1. 指出函数 $f(x)=x\cdot\cot x$ 的间断点，并判断其类型.

解　函数 $f(x)=x\cdot\cot x$ 的间断点为：

$x=k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$　-- (3 分)

当 $k=0$，即 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}=1$，

$\therefore x=0$ 为函数 $f(x)=x\cdot\cot x$ 的**第一类可去**间断点; ----------------------- (2 分)

当 $x=k\pi$，$k=\pm1,\pm2,\cdots$时，$\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi} x\cot x=\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x\cos x}{\sin x}=\infty$,

$\therefore x=k\pi$，$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为函数 $f(x)=x\cdot\cot x$ 的**第二类无穷**间断点 . --------- (2 分)

2．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x(1+t^2)\,e^{t-x}dt$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x(1+t^2)\,e^{t-x}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\,e^t dt}{x^2e^x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$------------------（3 分）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)e^x}{(2x+x^2)e^x}$ -- (3 分)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{2x+x^2}=1$.--（1 分）

3．设方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ ($x>0$, $y>0$) 确定二阶可导函数 $y=y(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 1 对 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ 两边取对数，得 $\frac{1}{x}\ln y=\frac{1}{y}\ln x$,

即 $y\ln y=x\ln x$, --- (2 分)

等式两边关于 x 求导，得：$(1+\ln y)\frac{dy}{dx}=1+\ln x$，即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$， ------- (2 分)

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{1}{x}(1+\ln y)-(1+\ln x)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}{(1+\ln y)^2}$$ ---------------------------- (2 分)

$$=\frac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}$$. -- (1 分)

解 2 对 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ 两边取对数，得 $\frac{1}{x}\ln y=\frac{1}{y}\ln x$, ----------------- (2 分)

等式两边关于 x 求导，$-\frac{1}{x^2}\ln y+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y^2}\cdot\ln x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2\ln y}{xy+x^2\ln x}$ （直 接 再 求 导 比 较 繁 琐， 需 化 简 后 再 求 导）

--- (2 分)

由$\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x$得$y\ln y=x\ln x$，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2\ln y}{xy+x^2\ln x}=\dfrac{xy+xy\ln x}{xy+xy\ln y}=\dfrac{1+\ln x}{1+\ln y}$， 以下同解 1.

三.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 2 1 分）

1．求不定积分$\displaystyle\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$.

解 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}d(\sin x)$ ------------------------（2 分）

（令$\sin x=t$） $\displaystyle=\int\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}dt=\int\left(-t+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$ ------------------（2 分）

$\displaystyle=-\frac{t^2}{2}+\ln(1+t^2)+C=-\frac{1}{2}\sin^2 x+\ln(1+\sin^2 x)+C$. ----------------（3 分）

2．设$\ln^2 x$ 是函数$f(x)$的一个原函数，求$\displaystyle\int x\ f'(x)\ dx$.

解 $\because$ $(\ln^2 x)'=\dfrac{2\ln x}{x}=f(x)$， --- (2 分)

$\displaystyle\therefore\int f(x)dx=\ln^2 x+C$， -- (2 分)

$\displaystyle\therefore\int x\ f'(x)\ dx=\int x\ df(x)$

$\displaystyle=x\ f(x)-\int f(x)\ dx$

$=2\ln x-\ln^2 x+C$. -- (3 分)

3．求定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^3\sin x^4+\cos^7 2x)\ dx$.

解 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^3\sin x^4+\cos^7 2x)\ dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^3\sin x^4dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\ dx$ ------- (1 分)

$\displaystyle=0+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\ dx$ ---（2 分）

$\displaystyle=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\ dx$ ---（2 分）

（令$2x=t$） $\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t\ dt$ --（1 分）

$$=\frac{6!!}{7!!}$$.--（1 分）

四．（共 2 小题，每小题 6 分，共计 1 2 分）

1．已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速度增加，宽 w 以 3cm/s 的速度增加，则当长为 12cm，宽为 5cm 时，它的对角线的增加率是多少？

解：设长方形的对角线为 y ，则 $y^2=l^2+w^2$ ----------------------------------(2 分)

两边关于 t 求导，得 $2y\cdot\frac{dy}{dt}=2l\cdot\frac{dl}{dt}+2w\cdot\frac{dw}{dt}$，

即 $y\cdot\frac{dy}{dt}=l\cdot\frac{dl}{dt}+w\cdot\frac{dw}{dt}$------（1）-------------------------------(2 分)

已知 $\frac{dl}{dt}=2,\ \frac{dw}{dt}=3,\ l=12, w=5,\Rightarrow y=\sqrt{12^2+5^2}=13,$ 代入（1）式，得

对角线的增加率：$\frac{dy}{dt}=3$（cm/s）. --(2 分)

2．物体按规律 $x=ct^2$ 做直线运动，该物体所受阻力与速度平方成正比，比例系数为1，计算该物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服阻力所做的功.

解 $v(t)=\frac{dx}{dt}=2ct$ --(2 分)

$f(x)=k4c^2t^2=4c^2t^2=4cx$， ---(2 分)

$W=\int_0^a 4cxdx=2ca^2$. --(2 分)

五．（本题 10 分）已知 $f(x)=x-5\arctan x$，试讨论函数的单调区间，极值，凹凸性，拐点，渐近线

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$． $f'(x)=1-\frac{5}{1+x^2}=\frac{x^2-4}{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点

$x=\pm 2.$--(1 分)

$f''(x)=\frac{10x}{(1+x^2)^2}$，令 $f''(x)=0$，得可能拐点的横坐标：$x=0.$--------(1 分)

列表讨论函数的单调区间，极值，凹凸性，拐点：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$	$\nearrow$	极大值 $-2+5\arctan 2$	$\searrow$			极小值 $2-5\arctan 2$	$\nearrow$
	$\cap$			拐点 $(0,0)$	$\cup$		

-- (6 分)

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{5\arctan x}{x})=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=\lim_{x\to+\infty}(-5\arctan x)=-\frac{5\pi}{2},$$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{5\arctan x}{x})=1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=\lim_{x\to-\infty}(-5\arctan x)=\frac{5\pi}{2},$$

渐近线为：$y=x\pm\dfrac{5\pi}{2}$.-- (2 分)

六.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 试求曲线 $y=\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}\ (x\geq 0)$ 与 x 轴所夹的平面图形绕 x 轴旋转所得到的伸展到无穷远处的旋转体的体积 .

解：

$$V=\pi\int_0^{+\infty}y^2dx=\pi\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$$ --（4 分）

$$=\pi\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{+\infty}=\pi-\pi\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}$$

$$=\pi-\pi\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}=\pi-0=\pi$$ ---（3 分）

2. 求微分方程 $y''+5y'+4y=3-2x$ 的通解.

解 特征方程为：$r^2+5r+4=0$, 特征根：$r_1=-4, r_2=-1$.----------------- (2 分)

对应齐次方程的通解为：$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}$.------------------------------ (2 分)

而 0 不是特征根，可设非齐次方程的特解为 $y^*=Ax+B$----------------- (1 分)

代入原方程可得，$A=-\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{11}{8}$. $\therefore\ y^*=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{8}$.-------------------- (1 分)

故所要求的通解为 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{8}$.-------------------------------- (1 分)

七.（本题 7 分）叙述罗尔 ($Rolle$) 中值定理，并用此定理证明：

方程 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=0$

在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根，其中 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 为常数.

罗尔 ($Rolle$) 中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$. -- (3 分)

令 $f(x)=a_1\sin x+\dfrac{a_2\sin 2x}{2}+\cdots+\dfrac{a_n\sin nx}{n}$， ------------------------------------ (2 分)

在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$，

$f(0)=f(\pi)=0$,由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(0,\pi)$,

使得 $f'(\xi)=a_1\cos\xi+a_2\cos 2\xi+\cdots+a_n\cos n\xi=0$，

即方程 $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根. ---- (2 分)

各章所占分值如下：

第 一 章	**函数与极限**	**13 %;**
第 二 章	**一元函数的导数与微分**	**16 %;**
第 三 章	**微分中值定理与导数的应用**	**20 %;**
第 四 章	**不定积分**	**14 %;**
第 五 章	**定积分及其应用**	**30 % .**
第 六 章	**常微分方程**	**7 % .**