2007—2008 学年第一学期　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)参考答案

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）：

1． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}=\underline{-\dfrac{3}{2}}$.

2．设函数 $y=f(\arctan\sqrt{x})$ 其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，则

$dy=\underline{\ f'(\arctan\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}\ }$.

3. 设 $a>0$，则 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-2x^2}}=\underline{\ \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{a}+C\ }$.

4． $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx=\underline{\ 0\ }$.　　　　5． $\displaystyle\int_a^{a+4\pi}\sin^2 x\,dx=\underline{\ 2\pi\ }$.

6．微分方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解为 $\underline{y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x}$.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1．设 $f(x)$ 为可导的奇函数，且 $f'(x_0)=5$，则 $f'(-x_0)=$（　B　）.

(A) -5；　　(B) 5；　　(C) $\dfrac{5}{2}$；　　(D) $-\dfrac{5}{2}$.

2.　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义，则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是（　C　）.

（A） $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；　　（B） $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$；

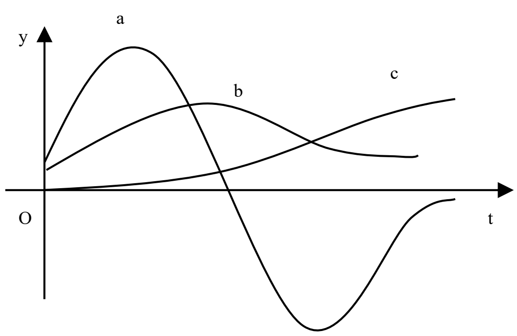
（C） $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$；　　（D）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

3.　下图中三条曲线给出了三个函数的图形，一条是汽车的位移函数 $s(t)$，一条是汽车的速度函数 $v(t)$，一条是汽车的加速度函数 $a(t)$，则（　D　）.

（A）　曲线 a 是 $s(t)$ 的图形，曲线 b 是 $v(t)$ 的图形，曲线 c 是 $a(t)$ 的图形；

（B）　曲线 b 是 $s(t)$ 的图形，曲线 a 是 $v(t)$ 的图形，曲线 c 是 $a(t)$ 的图形；

（C）　曲线 a 是 $s(t)$ 的图形，曲线 c 是 $v(t)$ 的图形，曲线 b 是 $a(t)$ 的图形；



（D）　曲线 c 是 $s(t)$ 的图形，曲线 b 是 $v(t)$ 的图形，曲线 a 是 $a(t)$ 的图形.

4.　设 $y=f(x)$ 是 (a,b) 内的可导函数， x_1、$x_2(x_1<x_2)$ 是 (a,b) 内任意两点，则（　B，D　）.

（A） $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中$\xi$为$(x_1,x_2)$内任意一点 ；

（B）至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$；

（C）恰有一点$\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$；

（D）至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$，使$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=f(\xi)(x_2-x_1)$.

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1. 设函数$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0;\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，求常数$a$的值.

解 由题意，有

$$a=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln e]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(x+1)}]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1+x}}{2+6x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin(x\pi)\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(x\pi)\,d(x\pi)=\frac{1}{\pi}\left[-\cos(x\pi)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}.$

3. 求定积分$\int_{-1}^{4}x\sqrt{|x|}\,dx$

解 $\int_{-1}^{4}x\sqrt{|x|}\,dx=\int_{-1}^{0}x\sqrt{-x}\,dx+\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx=\int_{-1}^{0}(-x)\sqrt{-x}\,d(-x)+\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{3}{2}}d(-x)+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{2}{5}(-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{64}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{64}{5}=\frac{62}{5}.$

4. 求广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,dx$

解 令$\sqrt{x-2}=t$, 则$x=2+t^2$, $dx=2tdt$,

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2t\,dt}{(9+t^2)\,t}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{9+t^2}=\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}.$$

四、解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1．设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt=\int_0^{x^2}\cos tdt$ 所确定的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　方程 $\int_0^y e^{t^2}dt=\int_0^{x^2}\cos tdt$ 两边关于 x 求导，得

$$\frac{d}{dy}(\int_0^y e^{t^2}dt)\cdot\frac{dy}{dx}=\cos(x^2)\cdot(2x),\Rightarrow e^{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2x\cos(x^2),$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=2xe^{-y^2}\cos(x^2)\ .$$

2．设函数 $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$，求 $f(x)$ 的原函数.

解　$f(x)$ 的原函数 $F(x)=\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=2\int\sec^2 x\,dx+2\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}-\int dx$$

$$=2\tan x-\frac{2}{\cos x}-x+C\ .$$

3．求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解.

解　先求齐次微分方程 $y'+y\cos x=0$ 的通解，$\frac{dy}{y}=-\cos xdx$，　$\therefore y=Ce^{-\sin x}$

令 $y=C(x)e^{-\sin x}$ 代入方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 得，$C(x)=x+C$，

故 $y=(x+C)e^{-\sin x}$ 为所求的通解.

4．判断曲线 $y=5+3x-\sqrt[3]{x}$ 的凸性与拐点.

解　函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=3-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$y''=\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$，

$y''=0$ 无解，而 $y''(0)$ 不存在，

当 $x<0$ 时，$y''<0$，曲线在 $(-\infty,0)$ 上凸；当 $x>0$ 时，$y''>0$，曲线在 $(0,+\infty)$ 下凸.

$(0,5)$ 为曲线的拐点.

五、应用题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

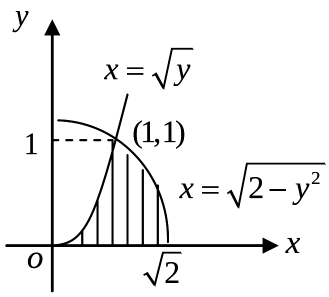
1. 曲线 $x=\sqrt{y},x=\sqrt{2-y^2}$ 及 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转而成的立体的体积.

解　二曲线的交点为 $(1,1)$，

$$V=\pi\int_0^1[\left(\sqrt{2-y^2}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2]dy$$

$$=\pi\int_0^1(2-y^2-y)dy$$

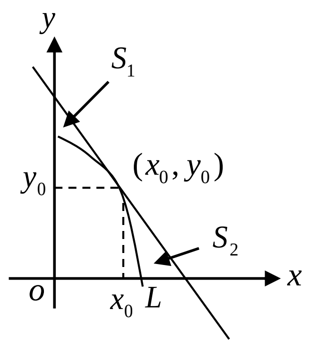
$$=\frac{7\pi}{6}.$$



2. 求曲线$L: y=\frac{1}{4}-x^2$位于第一象限部分的一条切线，使该切线与曲线L以及两坐标轴所围图形的面积最小.

解 设曲线L上的点(x_0,y_0)处的切线$y-y_0=-2x_0(x-x_0)$与曲线L以及两坐标轴所围图形的面积S_1+S_2最小，因为$y_0=\frac{1}{4}-x_0{}^2$，切线方程即为$y=\frac{1}{4}-2x_0x+x_0{}^2$则

$$S_1=\int_0^{x_0}[\frac{1}{4}-2x_0x+x_0^2-(\frac{1}{4}-x^2)]dx$$
$$=\frac{1}{3}x_0{}^3$$



又 L: $x=\sqrt{\frac{1}{4}-y}$,

切线方程又可表为$x=\frac{1}{2x_0}(\frac{1}{4}-y+x_0{}^2)$，

$$S_2=\int_0^{y_0}[\frac{1}{2x_0}(\frac{1}{4}-y-x_0{}^2)-\sqrt{\frac{1}{4}-y}]dy=\frac{y_0}{8x_0}-\frac{y_0^2}{4x_0}+\frac{x_0y_0}{2}+\frac{2}{3}(\frac{1}{4}-y_0)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}$$

（把$y_0=\frac{1}{4}-x_0{}^2$代入） $=\frac{1}{64x_0}+\frac{x_0}{8}-\frac{x_0^3}{12}-\frac{1}{12}$，

$$\therefore F(x_0)=S_1+S_2=\frac{1}{64x_0}+\frac{x_0}{8}+\frac{x_0^3}{4}-\frac{1}{12},$$

$$\therefore F'(x_0)=-\frac{1}{64x_0{}^2}+\frac{1}{8}+\frac{3\,x_0{}^2}{4}=\frac{48x_0^4+8x_0^2-1}{64x_0^2}$$

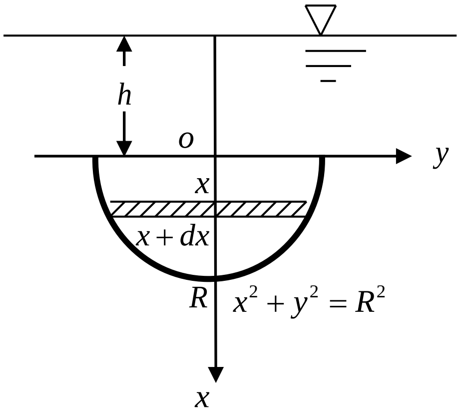
令$F'(x_0)=0$得$x_0=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\therefore y_0=\frac{1}{4}-x_0^2=\frac{1}{6}$，

故所求切线的方程为：$y-\frac{1}{6}=-\frac{2\sqrt{3}}{6}(x-\frac{\sqrt{3}}{6})$，即$3y+\sqrt{3}x-1=0$.

3．有一半径为R的半圆形薄板，垂直地沉入水中，直径在上，且水平置于距水面h的地方，求薄板一侧所受的水压力.

解 取坐标系如下图所示，圆的方程为$x^2+y^2=R^2$，$\forall x\in[0,R]$，对应$[x,x+dx]$小窄条所受压力微元为：$dF=\rho g(x+h)\cdot 2ydx=2\rho g(x+h)\sqrt{R^2-x^2}dx$，其中$\rho$是水的密度，$g$是重力加速度.

$$\therefore F=\int_0^R dF=2\rho\, g\int_0^R (x+h)\sqrt{R^2-x^2}dx$$



$$(\text{令}\, x=R\sin t,\quad dx=R\cos tdt)$$

$$=2\rho\, g\, R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(h+R\sin t)\cdot\cos^2 tdt$$

$$=2\rho\, g\, R^2\,(\frac{\pi h}{4}+\frac{R}{3}).$$

六、证明题（本题 4 分）

证明方程 $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x=1\,(n=2,3,4,\cdots)$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证　令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-1$，$(n=2,3,4,\cdots)$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，

$f(0)=-1<0,\ f(1)=n-1>0,$ 由零点定理，方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内必有实根.

又 $\forall x\in[0,1],\ \ f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0,(n=2,3,4,\cdots)$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 严格单增，故方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根.

即　方程 $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x=1\,(n=2,3,4,\cdots)$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一实根.

设 x_n 是方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内的唯一实根，即 ${x_n}^n+{x_n}^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n=1$ ，

${x_{n+1}}^{n+1}+{x_{n+1}}^{n}+\cdots+x_{n+1}=1$ ，考虑数列 $\{x_n\}$，则 $0<x_{n+1}<x_n<1$，即 $\{x_n\}$ 单调有界，根据单调

有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，由 ${x_n}^n+{x_n}^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n=1$ 得

$$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1,\text{两边取极限,得}\frac{a}{1-a}=1\text{（注意}\lim_{n\to\infty}x_n^n=0\text{）}\therefore a=\frac{1}{2},\text{即}\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$