2006—2007 学年第二学期　　高等数学（2-2）期末试卷(A)参考答案

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）.

1. 设三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足关系式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则（　D　）.

（A）必有 $\vec{a}=\vec{0}$ 或者 $\vec{b}=\vec{c}$；　　（B）必有 $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{0}$；

（C）当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，必有 $\vec{b}=\vec{c}$；　　（D）必有 $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$.

2. 已知 $\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$（　A　）.

（A）2；　　（B）$2\sqrt{2}$；　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　　（D）1.

3. 设曲面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0, a>0)$，$S_1$ 是 S 在第一卦限中的部分，则有（　C　）.

（A）$\iint\limits_{S} xdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$；　　（B）$\iint\limits_{S} ydS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$；

（C）$\iint\limits_{S} zdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$；　　（D）$\iint\limits_{S} xyzdS = 4\iint\limits_{S_1} xyzdS$.

4. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,-1,-1)$ 处的切平面方程是：（D　）.

（A）$x-2y+3z=6$；　　（B）$x+2y-3z=6$；

（C）$x+2y+3z=6$；　　（D）$x-2y-3z=6$.

5. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ 的敛散性，正确结果是：（　B　）.

（A）条件收敛；　　（B）发散；

（C）绝对收敛；　　（D）可能收敛，也可能发散.

6. 平面 $3x-3y-6=0$ 的位置是（　B　）.

（A）平行于 xoy 平面；　　（B）平行于 z 轴，但不通过 z 轴；

（C）垂直于 z 轴；　　（D）通过 z 轴.

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）.

1. 已知 $z=e^{\frac{y}{x}}$，则 $dz=$ $\underline{\quad -e^{\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{ydx-xdy}{x^2}\quad}$.

2. 函数 $u=xy+yz+zx$ 在点 $P(1,2,3)$ 处沿向量 $\vec{OP}$ 的方向导数是 $\underline{\quad\dfrac{11\sqrt{14}}{7}\quad}$，函数 u 在点 P 处的方向导数取最大值的方向是 $\underline{\quad\{5,4,3\}\quad}$，该点处方向导数的最大值是 $\underline{\quad 5\sqrt{2}\quad}$.

3. 已知曲线 $L: x^2+y^2=1$，则 $\displaystyle\oint_L (x+y)^2 ds=$ $\underline{\quad 2\pi\quad}$.

4. 设函数展开傅立叶级数为：$x^2=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx, (-\pi\leq x\leq\pi)$，则 $a_2=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

三、解答下列各题（本题共 7 小题，每小题 7 分，满分 49 分）.

1. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$收敛域及其和函数.

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1, \therefore$ 收敛半径为1，

当$x=1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，当$x=-1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$收敛，

故所求的收敛域为$[-1,1)$；令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，$x\in[-1,1)$；

于是$x\,S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，$|x|<1$.逐项求导，得

$$[x\,S(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad,\quad |x|<1.$$

$$\therefore xS(x)=\int_0^x[tS(t)]'dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),\qquad |x|<1.$$

$$\therefore S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\ ,|x|<1\text{且}x\neq 0.$$

而$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=-\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x}\ln(1-x)=\ln 2$，$\qquad S(0)=1$，

$$\text{故}S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & -1\le x<0\cup 0<x<1,\\ 1 & x=0\quad.\end{cases}$$

2. 计算二重积分$\iint_{x^2+y^2\le 4}e^{x^2+y^2}dxdy$.

解 令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则$\iint_{x^2+y^2\le 4}e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}rdr$

$$=\pi\int_0^2 e^{r^2}d(r^2)=\pi e^{r^2}\Big|_0^2=\pi(e^4-1).$$

3. 已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$，并且$f(1,1)=2$. 求$z=f(x,y)$在椭圆域$D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$上的最大值和最小值.

解 由$dz=2xdx-2ydy$,得$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\qquad(1),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\qquad(2)$,

(1)两边关于x积分，得$f(x,y)=\int 2xdx+C(y)=x^2+C(y)$，此式两边关于$y$求偏导，

再由(2)知$C'(y)=-2y,\Rightarrow C(y)=-y^2+C$, $\therefore f(x,y)=x^2-y^2+C.$

由$f(1,1)=2$知，$C=2$,故$f(x,y)=x^2-y^2+2.$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0\end{cases}$,得驻点$(0,0)$在$D$内部，且$f(0,0)=2$，

在 D 的边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上：$z=x^2-(4-4x^2)+2=5x^2-2, \qquad -1\le x\le 1.$

其最大值是 $z\big|_{x=\pm1}=f(\pm1,0)=3,$ 最小值是 $z\big|_{x=0}=f(0,\pm2)=-2$ ；

故 $z=f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值是 $\max\{2,3,-2\}=3$，最小值是 $\min\{2,3,-2\}=-2$..

4. 设 Ω 是由 $z=x^2+y^2, z=4$，所围成的有界闭区域，计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dxdydz$.

解 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi$ ， $0\le r\le 2$ ， $r^2\le z\le 4$.
$\qquad z=z$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{r^2}^4 (r^2+z)dz=2\pi\int_0^2 rdr\int_{r^2}^4 (r^2+z)dz$$

$$=2\pi\int_0^2 r[r^2z+\frac{z^2}{2}]\Big|_{z=r^2}^{z=4}dr=2\pi\int_0^2(4r^3+8r-\frac{3}{2}r^5)dr=2\pi\,[r^4+4r^2-\frac{r^6}{4}]\Big|_0^2=32\pi .$$

5. 设 L_{AB} 为从点 $A(-1,0)$ 沿曲线 $y=1-x^2$ 到点 $B(1,0)$ 一段曲线，计算 $\int\limits_{L_{AB}}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

解 $\because L_{AB}:\begin{cases}x=x\quad, \quad dx=dx\ , \quad -1\le x\le 1.\\ y=1-x^2, dy=-2xdx,\end{cases}$

$$\therefore \int\limits_{L_{AB}}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\frac{x+(1-x^2)(-2x)}{x^2+(1-x^2)^2}dx=0.$$

6. 设 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧，计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy .$$

解 $\because$ $P=xz^2, Q=x^2y-z^3$ ， $R=2xy+y^2z, \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=x^2+y^2+z^2,$

作 $\Sigma_{补}^{上}: z=0$， $x^2+y^2\le 1.$ 与 Σ 下所围成的立体为 Ω，由高斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma下+\Sigma_{补}^{上}}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_{补}^{上}}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\ dxdydz-0-0-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2xy+y^2\cdot 0)dxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\ dxdydz-0-0-0$$ （作球面坐标变换）

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^1\rho^4\ d\rho=-\frac{2\pi}{5}.$$

7. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$ 展开成关于 $x-1$ 的幂级数 .

解 $\because \dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$|x|<1$. $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$|x|<1$.

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2})=\frac{1}{5}[\frac{1}{(x-1)-2}-\frac{1}{(x-1)+3}]$$

$$=\frac{1}{5}[\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}]=-\frac{1}{5}[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}]$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{3^{n+1}}\qquad (\frac{|x-1|}{2}<1\text{且}\frac{|x-1|}{3}<1)$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}](x-1)^n,\quad |x-1|<2\text{即}x\in(-1,3).$$

四、证明题（7 分）.

证明不等式:$1\le\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)d\sigma\le\sqrt{2}$，其中$D$是正方形区域：$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$.

证 $\because D$关于$y=x$对称，$\therefore\ \iint\limits_D(\cos y^2 d\sigma=\iint\limits_D\cos x^2 d\sigma$，

$$\therefore\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)d\sigma=\iint\limits_D(\cos x^2+\sin x^2)d\sigma.$$

又 $\sin x^2+\cos x^2=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x^2)=\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4}),$

而$0\le x^2\le 1$, $\therefore$ $1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\le\sqrt{2}\sin(x^2+\dfrac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$, 即 $1\le\sin x^2+\cos x^2\le\sqrt{2}$,

$$\therefore\quad 1=\iint\limits_D 1\cdot d\sigma\le\iint\limits_D(\sin x^2+\cos x^2)d\sigma\le\sqrt{2}\iint\limits_D d\sigma=\sqrt{2},$$

即 $$1\le\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)d\sigma\le\sqrt{2}.$$

2007—2008 学年第二学期　　高等数学（2-2）期末试卷(A)参考答案

一、填空题：1~6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在指定位置上.

1. 平面$\Pi_1: y-z=0$与平面$\Pi_2: x+y=0$的夹角为 $\underline{\ \dfrac{\pi}{3}\ }$.

2. 函数$z=x^2+y^2$在点$(1,2)$处沿从点$(1,2)$到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数为 $\underline{\ 1+2\sqrt{3}\ }$.

3. 设$f(x,y)$是有界闭区域$D: x^2+y^2\le a^2$上的连续函数，则当$a\to 0$时，

$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$ $\underline{\ f(0,0)\ }$.

4. 区域Ω由圆锥面$x^2+y^2=z^2$及平面$z=1$围成，则将三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})dv$在柱面坐标系下化为三次积分为 $\underline{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 f(r) r dz}$.

5. 设Γ为由曲线$x=t, y=t^2, z=t^3$上相应于t从0到1的有向曲线弧，P,Q,R是定义在Γ上的连续三元函数，则对坐标的曲线积分化为对弧长的曲线积分有：

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz = \underline{\int_\Gamma \left(\frac{P}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}+\frac{2xQ}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}+\frac{3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\right)ds}.$$

6. 将函数$f(x)=x+1(0\le x\le \pi)$展开成余弦级数为

$$\underline{x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots)\quad (0\le x\le \pi)}.$$

二、单项选择题：7~12 小题，每小题 3 分，共 18 分。下列每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将所选项前的字母填在题后的括号内.

7. 若$z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数，且$f''_{xy}(x,y)=K$ （常数），则$f'_y(x,y)=$（ ***D*** ）

(A) $\frac{K^2}{2}$； (B) Ky； (C) $Ky+\varphi(x)$； (D) $Kx+\varphi(y)$.

8. 设$f(x)$是连续的奇函数，$g(x)$是连续的偶函数，区域$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,-\sqrt{x}\le y\le \sqrt{x}\}$，则下列结论正确的是（ ***A*** ）.

(A)$\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$； (B) $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0$；

(C) $\iint\limits_D [f(x)+g(y)]dxdy=0$； (D) $\iint\limits_D [f(y)+g(x)]dxdy=0$.

9. 已知空间三角形三顶点$A(-1,2,3), B(1,1,1), C(0,0,5)$，则$\Delta ABC$的面积为（ ***A*** ）

(A) $\frac{9}{2}$； (B) $\frac{7}{3}$； (C) $\frac{2}{9}$； (D)$\frac{3}{7}$.

10. 曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy$在数值上等于（ ***C*** ）.

(A) 流速场$\vec{v}=z^2\vec{i}$穿过曲面Σ指定侧的流量；(B) 密度为$\rho=z^2$的曲面片Σ的质量；

(C) 向量场$\vec{F}=z^2\vec{k}$穿过曲面Σ指定侧的通量；(D) 向量场$\vec{F}=z^2\vec{k}$沿Σ边界所做的功.

11．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+2)^n$ 在 $x=-4$ 处是收敛的，则此级数在 $x=1$ 处（ ***D*** ）

(A)发散； (B)条件收敛； (C)绝对收敛； (D)收敛性不能确定.

12.级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2p}}$ 的敛散性为 （ ***A*** ）

(A) 当 $p>\frac{1}{2}$ 时，绝对收敛； （B）当 $p>\frac{1}{2}$ 时，条件收敛；

(C) 当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，绝对收敛； （D）当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，发散.

三、解答题：13~20 小题，共 58 分. 请将解答过程写在题目下方空白处. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. （本题满分 6 分）设 $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$ 确定 $z=z(x,y)$，求全微分 dz.

解：两边同取微分 $dx+dy+dz=e^{-(x+y+z)}\cdot(-1)\cdot(dx+dy+dz)$ ， 整理得 $dz=-dx-dy$.

14. （本题满分 8 分）求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点（1,1,1）处的切线与法平面方程.

解： 对方程组每个方程两边分别关于 x 求导得,

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=3 \\ 2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}，即 \begin{cases} 2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=3-2x \\ 3\frac{dy}{dx}-5\frac{dz}{dx}=2 \end{cases}，解之得： \frac{dy}{dx}=\frac{15-10x+4z}{10y+6z},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{9-4y-6x}{10y+6z},$$

曲线在点（1,1,1）处的切向量为 $\vec{T}=\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\}\Big|_{(1,1,1)}=\{1,\frac{9}{16},-\frac{1}{16}\}$，

故所求切线方程为： $\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$；

法平面方程为：$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$，即 $16x+9y-z-24=0$.

15.（本题满分 8 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数.

解：求得此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$， $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，

$\because \sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$， 设 $A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则

$$\int_0^x A(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\ (-1<x<1);\ \therefore A(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=2xA(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}$，

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},(-1<x<1).$$

16.（本题满分 6 分）计算 $I=\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为曲面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截下

的有限部分.

解：$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}(x+5)dS$

$=\iint\limits_{\Sigma}xdS$ （Σ关于 yoz 平面对称，被积函数 x 是 x 的奇函数）$+5\iint\limits_{\Sigma}dS$

$=0+5\iint\limits_{\Sigma}dS=5\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 25}dxdy=5\sqrt{2}\cdot 25\pi=125\sqrt{2}\pi$.

17.（本题满分 8 分）计算积分 $I=\int_L(2x^2+4xy)dx+(2x^2-y^2)dy$ ，其中 L 为曲线 $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{5}{2}$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(2,4)$ 沿逆时针方向的一段有向弧.

解：$\because \frac{\partial Q}{\partial x}=4x=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\therefore$ 积分与路径无关，选折线 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ 为积分路径，

其中 $C(2,1)$，$\overrightarrow{AC}:\begin{cases}x=x,1\le x\le 2\\ y=1,\quad dy=0\end{cases}$, $\overrightarrow{CB}:\begin{cases}x=2,\quad dx=0\\ y=y,\ \ 1\le y\le 4\end{cases}$.

$\therefore I=\int_L(2x^2+4xy)dx+(2x^2-y^2)dy$

$=\int_{\overline{AC}}(2x^2+4xy)dx+(2x^2-y^2)dy+\int_{\overline{CB}}(2x^2+4xy)dx+(2x^2-y^2)dy$

$=\int_1^2(2x^2+4x)dx+\int_1^4(8-y^2)dy=\frac{41}{3}$.

18.（本题满分 8 分）计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}yzdydz+y(x^2+z^2)dzdx+xydxdy$，$\Sigma$ 是由曲面 $4-y=x^2+z^2$ 与平面 $y=0$ 围成的有界闭区域 Ω 的表面外侧.

解：$P=yz, Q=y(x^2+z^2), R=xy,\quad \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=x^2+z^2$, 由高斯公式，

$I=\oiint\limits_{\Sigma}yzdydz+y(x^2+z^2)dzdx+xydxdy=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz$

（利用柱面坐标变换 $\begin{cases}z=\cos\theta\\ x=\sin\theta\\ y=y\end{cases}$, 则 $\Omega:0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2, 0\le y\le 4-r^2$.）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_0^{4-r^2}r^2dy=\frac{32\pi}{3}$.

19.（本题满分 8 分）在第Ⅰ卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解：设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则切平面的法向量为 $\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\}$，

切平面方程为 $\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，即 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$，

则切平面与三个坐标面所围成的四面体体积为 $V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$，

令 $L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda(\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}+\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}-1)$

解方程组 $\begin{cases} \dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0 \\ \dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0 \\ \dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0 \\ \dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}+\dfrac{z_0{}^2}{c^2}=1 \end{cases}$ ，得 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$， $y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$， $z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，

故切点坐标为 $(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}})$.

20.（本题满分 6 分）设 $f(x),g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，试证明柯西不等式：

$$[\int_a^b f^2(x)dx][\int_a^b g^2(x)dx]\ge[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2.$$

证：设 $D: a\le x\le b, a\le y\le b$.则

$$[\int_a^b f^2(x)dx][\int_a^b g^2(x)dx]=\iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy \text{（}\because D\text{ 关于 } y=x \text{ 对称）}=\iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}[\iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy+\iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy]=\frac{1}{2}\iint_D[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]dxdy$$

$$\ge\frac{1}{2}\iint_D[2f(x)g(x)\cdot f(y)g(y)]dxdy=\iint_D[f(x)g(x)\cdot f(y)g(y)]dxdy$$

$$=\int_a^b f(x)g(x)dx\int_a^b f(y)g(y)dy=[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2.$$

2008—2009 学年第二学期　　高等数学（2-2）期末试卷(A)参考答案

一．选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）.

1. 设三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足关系式 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$，则（　D　）.

（A）必有 $\vec{a}=\vec{0}$;　　（B）必有 $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$;

（C）当 $\vec{a}\ne\vec{0}$ 时，必有 $\vec{b}=\vec{c}$;　　（D）必有 $\vec{a}=\lambda(\vec{b}-\vec{c})$ （λ 为常数）.

2. 直线 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z=3$ 的关系是（　A　）.

（A）平行，但直线不在平面上;　　（B）直线在平面上;

（C）垂直相交;　　（D）相交但不垂直.

3. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}, (x,y)\ne(0,0)\\ 0 \quad\quad, (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点（0，0）处（　A　）

(A) 不连续，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 连续，偏导数存在　　(D) 不连续，偏导数不存在

4. 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数的全微分，则 $a=$（　D　）.

（A）-1;　　（B）0;　　（C）1;　　（D）2.

5. 设 $f(u)$ 是连续函数，平面区域 $D:-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}$.，则 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy=$（ C ）.

（A） $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)dy$； （B） $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x^2+y^2)dx$；

（C） $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)rdr$； （D） $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$.

6. 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{a}{n})$（ B ）.

（A）发散； （B）绝对收敛; （C）条件收敛; （D）收敛性与 a 的值有关.

二．填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）.

1. 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，向量 $\vec{n}=\{1,1,1\}$，点 $P_0(1,2,3)$，

则 $\left.\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|_{P_0}=$ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

2. 若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a=$ $\underline{-5}$.

3. L 为圆 $x^2+y^2=1$ 的一周，则 $\oint\limits_L (x^2-y^2)ds=$ $\underline{0}$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n-1}$ 的收敛半径为 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

5. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-y^2}dy$，则 $\int_0^1 xf(x)dx=$ $\underline{\frac{1}{4}(e^{-1}-1)}$.

6. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，

则 $f(x)$ 的以 2 为周期的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 $\underline{\frac{3}{2}}$.

三．解答下列各题（本题共 7 小题，满分 44 分）.

1.（本小题 6 分）设 $f(u)$ 是可微函数，$z=f(\frac{\sqrt{y}}{x})$，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}$.

解题过程是：令 $u=\frac{\sqrt{y}}{x}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sqrt{y}}{x^2}f'(u)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2x\sqrt{y}}f'(u)$，$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

2. （本小题 6 分）计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$.

解题过程是：D 关于 x 轴对称，被积函数 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是奇函数，$\therefore \iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$，

故 $\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_D\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{1+r^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$

3. （本小题 6 分） 设曲面 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3y+xz=1$ 所确定，求该曲面在点 $M_0(1,2,-1)$ 处的切平面方程及全微分 $dz|_{(1,2)}$.

解题过程是：令 $F(x,y,z)=x^3y+xz-1$，$F'_x=3x^2y+z$，$F'_y=x^3$，$F'_z=x$，则

所求切平面的法向量为：$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}|_{M_0}=\{5,1,1\}$，切平面方程为：$5x+y+z-6=0.$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{3x^2y+z}{x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-x^2$，$\therefore dz\big|_{(1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}dy=-5dx-dy.$

4.（本小题 6 分） 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中$\Omega$是由柱面$y=\sqrt{1-x^2}$及$y=0,z=0$，$x+y+z=4$所围成的空间区域.

解题过程是：利用柱面坐标变换，$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr\int_0^{4-r(\cos\theta+\sin\theta)}dz$

$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1[4r^2-r^3(\cos\theta+\sin\theta)]dr=\int_0^{\pi}[\frac{4}{3}-\frac{1}{4}(\cos\theta+\sin\theta)]d\theta=\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{2}.$

5.（本小题 6 分）求$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，方向取下侧.

解题过程是：补$\Sigma_1^{上}$：$z=1,\ (x,y)\in D=\{x^2+y^2\le 1\}.$

Σ与$\Sigma_1^{上}$所围立体为Ω：$0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le r\le 1,\ \ r^2\le z\le 1.$

由高斯公式，得 $\oiint\limits_{\Sigma下+\Sigma_1^{上}}(2x+z)dydz+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2+0+1)\ dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy=\frac{3\pi}{2}-\iint\limits_{\Sigma_1^{上}}(2x+z)dydz+zdxdy=\frac{3\pi}{2}-0-\iint\limits_{D}1\,dxdy=\frac{3\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{2}.$

6.（本小题 7 分） 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$的收敛域及和函数.

解题过程是：

因为$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\frac{n+1}{(n+1)^2+1}=1$，故收敛区间为$(-1,1)$；

$x=\pm 1$时，极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\ne 0$，级数均是发散的；于是收敛域为$(-1,1)$，

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ =x\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx\right)'+\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'dx$

$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$，$x\in(-1,1).$

7.（本小题 7 分） 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，$\Sigma$为立体$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的边界.

解题过程是：

设$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中Σ_1为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2},0\le z\le 1$，$\Sigma_2$为$z=1\ ,x^2+y^2\le 1$部分，

Σ_1,Σ_2在xoy面的投影为$D:x^2+y^2\le 1$. $dS_1=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$，$dS_2=dxdy$，

$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy+\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$

$=(\sqrt{2}+1)\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=(\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{(\sqrt{2}+1)\,\pi}{2}.$

四．证明题（8 分）.

设函数$f(x,y)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，L是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线，其

起点为(a,b)，终点为(c,d)，记$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x[y^2f(xy)-1]}{y^2}dy$，

（1）证明曲线积分I与路径L无关;

（2）当$ab=cd$时，求I的值.

证明: (1)记$P(x,y)=\frac{1+y^2f(xy)}{y}$， $Q(x,y)=\frac{x[y^2f(xy)-1]}{y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{[2yf(xy)+y^2f'(xy)\cdot x]y-[1+y^2f(xy)]}{y^2}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{[y^2f(xy)-1]+x\cdot y^3f'(xy)]}{y^2}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2};$$

$\therefore\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$成立，积分$I$与路径$L$无关.

（2）由于积分与路径无关，选取折线路径，由点(a,b)起至点(c,b)，再至终点(c,d)，则

$$I=\int_{(a,b)}^{(c,b)}P(x,y)dx+\int_{(c,b)}^{(c,d)}Q(x,y)dy=\int_a^c[\frac{1}{b}+bf(bx)]dx+\int_c^d[cf(cy)-\frac{c}{y^2}]dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_{ab}^{cb}f(t)dt+\int_{cb}^{cd}f(t)dt+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)dt\ \ (\because ab=cd)=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$