

2011—2012 学年第一学期 高等数学(2-1)期中试题参考答案

一、填空题(每空 3 分, 共计 18 分)

1. 设 $f''(a)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \underline{\quad\quad\quad}$.

2. 设曲线方程为 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\quad\quad\quad}$.

3. 试用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言叙述 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义:

4. 设 $y = x^3 \sin x$, 则 $y^{(10)}(0) = \underline{\quad\quad\quad}$.

5. 设 $f(a) = 1$, $f'(a) = 4$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n = \underline{\quad\quad\quad}$.

6. 若 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi} + 2 \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \underline{\quad\quad\quad}$.

二、选择题(每小题 3 分, 共计 12 分)

1. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()

- (A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 (B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
(C) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限的极限值

2. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 为同阶无穷小, 则 n 为()

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ ()

- (A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0) \neq 0$ (C) 取极大值 (D) 取极小值

4. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 ()

- (A) 一条 (B) 二条 (C) 三条 (D) 四条

三、计算题（每题 7 分，共计 35 分）

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$

4. 设方程 $\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x}$ ($x > 0, y > 0$) 确定二阶可导函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

5. 写出函数 $f(x) = x^2 \ln x$ 在 $x=1$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式($n > 3$).

四、解答题（每题 8 分，共计 24 分）

1. 求函数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ 的极值、凹凸区间及拐点坐标.

$$2. \quad \text{设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0 \\ 6, & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0 \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续; a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

3. 一飞机在离地面 2km 的高度, 以 200km/h 速度水平飞行到某目标上空, 以便进行航空摄影, 试求飞机飞至该目标正上方时, 摄影机转动的角速度.

五、证明题:

1. (本小题 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,

$$\text{使得 } f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi} \text{ 成立.}$$

2. (本小题 6 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.