线代试卷答案（一）

一、填空题（每小题 3 分，共 21 分）

1．设向量组α_1,α_2线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2,\beta_3=4\alpha_1+7\alpha_2$，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$一定是线性______关 。

2．行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$=______。

3．设$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2}$是 4 维向量，已知 4 阶行列式$|\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1}|=\boldsymbol{a},$

$|\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3}|=\boldsymbol{b},$ 则 4 阶行列式$|\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ (\beta_1+\beta_2)}|=$_____。

4．设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=5$，则$|2\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{A}^2|=$_______.

5．设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的内积等于____ 。

6．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}&1\end{pmatrix}$为正定矩阵，则实数$\boldsymbol{a}$的范围是__________ 。

7. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，－2，则矩阵A^2+2A+E的特征值为_________ 。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1. 在 5 阶行列式$D=\det(a_{ij})$展开式中，包含a_{13},a_{25}并带有负号的项是=_____。

A）$-a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$； B）$-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$；

C）$-a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$； D）$-a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$。

2．若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1}$_____。

A）线性相关且秩为 2； B）线性相关且秩为 3；

C）线性无关且秩为 2； D）线性无关且秩为 3。

3．若$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}=0$，则必有（　　）．

A） $k=-1$；　　B） $k=-1$ 或 $k=3$；

C） $k=3$；　　D） $k\neq-1$ 且 $k\neq 3$．

4．$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2=$（　　）。

A）$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$；　B）$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$；　C）；100　D）3

5．设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1+\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 1+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$，则 A 的特征值为（　）。

A）$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1;$；　B）$\lambda_1=n+1,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0;$

C）$\lambda_1=n+\frac{1}{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n};$　D）$\lambda_1=n-\frac{1}{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}.$

6．设有下列四个命题：

1）初等变换不改变矩阵的秩；

2）若 n 阶矩阵 A 可逆，则 A 可以表示成初等方阵的乘积；

3）若$|A|=0$，则齐次线性方程组 Ax=0 只有零解；

4）等价的向量组有着相同的线性相关性。

其中错误的命题有(　　)

A)　1) 和 2)；　B)　3) 和 4)；　C)　1）和 3)；　D）2）和 4)。

7．设矩阵 A 为 $m\times n$ 矩阵，秩 $R(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵， 下述结论中正确的是（　　）。

A）A 的任意 m 个列向量必线性相关；

B）A 的任意一个 m 阶子式不等于零；

C）A 通过初等行变换，必可以化为 (E_m,O) 的形式；

D）非齐次线性方程组 $Ax=b$ 一定有无穷多组解。

三（每小题 6 分，共 18 分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，试用初等变换法求 A^{-1}.

2.设 A 是 n 阶可逆矩阵，B 是 A 交换第 i 行和第 j 行所得到的矩阵，

（1）证明 B 是可逆矩阵；

（2）求 AB^{-1}.

3． 设 A，B 皆为 n 阶正交矩阵，证明 AB 也是正交矩阵。

四、（10 分）求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\2\\6\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\4\end{pmatrix}$的秩，最大无关组，

并将其余向量用此最大无关组线性表示。

五（10 分）讨论下列带有参数的线性方程组:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2,\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda.\end{cases},$$

在方程组有解时，求出其解。

六（10 分）设 A 是 n 阶实对称阵，A 的秩 $R(A)=r<n$,且 $A^2=2A$,

(1) 求 A 的特征值（重根要指出重数是多少）； （2）求行列式$|A-E|$。

七（10 分）．用正交变换将下列二次型化为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3.$$