2011-2012 学年第二学期工科高等数学（2-2）期中试题

一、填空题（每空 3 分，共计 18 分）

1. 设$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=1$，$(\vec{a},\hat{\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，则向量$\vec{a}+\vec{b}$的模为__________

2. 过曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于$2x+2y+z-1=0$，则点P的坐标为__________.

3. 函数$z=1-(x^2+2y^2)$在点$M(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2})$处沿曲线$x^2+2y^2=1$在该点的内法线方向$\vec{n}$的方向导数为______________.

4. 设D为$y=x^3$及$x=-1$，$y=1$所围成的闭区域，则$I=\iint\limits_D xydxdy=$_______________.

5. $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy=$_____________.

6. 设函数f具有二阶连续的偏导数，$u=f(xy,x+y)$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$______________.

二、选择题（每小题 3 分，共计 12 分）

1. $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微是该函数在点(x_0,y_0)处连续的（　）

（A）必要非充分条件；　　　（B）充分非必要条件；
（C）充分必要条件；　　　　（D）既非充分也非必要条件.

2. 若$D_1:-1\le x\le 1,-2\le y\le 2;D_2:0\le x\le 1,0\le y\le 2,$ 则

$I_1=\iint\limits_{D_1}\sin(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}d\sigma$与$I_2=\iint\limits_{D_2}\sin(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}d\sigma$之间的关系是（　　）.

$(A)I_1=I_2$；　$(B)I_1\le 2I_2$；　$(C)I_1=4I_2$；　$(D)I_1=8I_2$.

3. 设$z=z(x,y)$由方程$y+z=xf(y^2-z^2)$确定，f可微，

则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）x；　（B）y；　（C）z；　（D）1.

4. 函数$u=xy^z$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$等于（　　）.

(A) zxy^z；　(B) xy^{z-1}；　(C) y^{z-1}；　(D) y^z.

三、计算题（每题 7 分，共计 35 分）

1. 求与已知平面$2x+y+2z+5=0$平行且与三个坐标平面所围成的四面体的体积为1的平面的方程.

2. 计算二重积分$\iint\limits_D (x-y)^2dxdy$，其中$D$为$x^2+y^2\le 1$.

3. 计算二次积分$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

4. 设$u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，求$du$.

5. 求区域Ω的体积V，其中Ω是由半球面$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$及旋转抛物面$x^2+y^2=2az$所围成$(a>0)$.

四、解答题（每题 9 分，共计 27 分）

1. 求曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ 2x^2+2y^2-z^2=0 \end{cases}$在点$(1,1,2)$处的切线方程与法平面方程.

2. 求两曲面 $x^2+y^2=z$，$x+y+z=1$交线上的点到坐标原点的最长与最短距离.

3. 设 $f(u)$ 连续且 $f(0)=0$，区域Ω由$0\le z\le h$，$x^2+y^2\le t^2$围成，设

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dV$，求 $\frac{dF}{dt}$ 及$\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^2}$.

五、证明题（8 分）

设 $f(t)$ 为连续函数，试证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-a}^{a} f(t)(a-|t|)dt$，其中 D 为矩形域：$|x|\le\dfrac{a}{2},|y|\le\dfrac{a}{2}$，常数 $a>0$.