2009—2010 学年第一学期　　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)

一．填空题（每小题 4 分，5 题共 20 分）：

1． $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x^2}}=$. ________

2． $\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2005}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)\mathrm{d}x=$ ________.

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=x$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}=$ ________.

4. 设 $f(x)$ 可导，且 $\int_1^x tf(t)dt=f(x)$， $f(0)=1$，则 $f(x)=\underline{e^{\frac{1}{2}x^2}}$.

（此题有问题，由已知 $f(1)=\int_1^1 tf(t)dt=0$, 但由结论得 $f(1)=e^{\frac{1}{2}}\neq 0$，出现矛盾）

5．微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为________.

二．选择题（每小题 4 分，4 题共 16 分）：

1．设常数 $k>0$，则函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为（　　）.

(A)　3 个;　　(B)　2 个;　　(C)　1 个;　　(D)　0 个.

2．　微分方程 $y''+4y=3\cos 2x$ 的特解形式为　（　　）

（A） $y^*=A\cos 2x$；　　（B） $y^*=Ax\cos 2x$；

（C） $y^*=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$；　　（D） $y^*=A\sin 2x$

3．下列结论不一定成立的是　　（　）

(A)　若 $[c,d]\subseteq[a,b]$, 则必有 $\int_c^d f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$；

(B)　若 $f(x)\ge 0$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$；

(C)　若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则对任意常数 a 都有 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$；

(D)　若可积函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x tf(t)dt$ 也为奇函数.

4．设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

(A)　连续点;　　(B)　可去间断点;

(C)　跳跃间断点;　　(D)　无穷间断点.

三．计算题（每小题 6 分，5 题共 30 分）：

1．计算定积分$\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$.

.

2．计算不定积分$\int \frac{x\sin x}{\cos^5 x} dx$.

3．求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 在$t = \frac{\pi}{2}$处的切线的方程.

4．设 $F(x) = \int_0^x \cos(x^2 - t) dt$，则$F'(x) =$____________________.

5．设$x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}}{n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

四．应用题（每小题 9 分，3 题共 27 分）

1．求由曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 与该曲线过坐标原点的切线及 x 轴所围图形的面积.

2．设平面图形 D 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，试求 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.

3． 设 $a>1$, $f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时 $t(a)$ 最小？并求最小值.

五．证明题（7 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1,$

试证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1.$