

2012—2013 学年第一学期 高等数学(2-1)期中试题参考答案

一、填空题(共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.
2. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$, 则 $f'(2) =$ _____.
3. 设 $y = \ln \sqrt{x^2 + a^2} + \arctan \frac{a}{x}$, 则 $dy =$ _____.
4. 函数 $y = \ln(1+2x)$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____.
5. 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的下凸区间是 _____.

二、选择题(共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设函数 $f(x) = \frac{\frac{1}{(e^x + e) \tan x}}{\frac{1}{x(e^x - e)}}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ().
A. 连续点; B. 可去间断点; C. 跳跃间断点; D. 无穷间断点.
2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数且 $f'(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则下列说法正确的是 ().
A. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值; C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
3. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ 与 $\frac{1}{x+1}$ 为等价无穷小, 则 a, b, c 之值为 ().
A. $a=0, b=1, c=1$; B. $a=0, b=1, c$ 为任意常数;
C. $a=0, b, c$ 为任意常数; D. a, b, c 均为任意常数.
4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ().
A. 极限不存在; B. 极限存在但不连续; C. 连续但不可导; D. 可导.
5. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $dy|_{x=x_0}$ 是 Δx 的 ().

A. 等价无穷小; B. 高阶无穷小; C. 同阶但非等价无穷小; D. 低阶无穷小.

三、计算题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-1}{1-\cos x}$.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x e^{\sin(xy)} = x^y$ ($x > 0, -\pi < y < \pi$) 确定, 求其在 $x=1$ 处的切线方程.

3. 设 $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1}$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

四、应用题（共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+b)\sin x + 2\ln(1-x)}{x}, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求出 a 与 b .

2. 有一底半径为 R cm，高为 h cm 的圆锥容器，今以 $25 \text{ cm}^3/\text{s}$ 自顶部向容器内注水，试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速率.

3. 试讨论方程 $\ln x = ax, (a > 0)$ 有几个实根.

五、证明题（共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且 $f(0) = 0$ ， $f(2) = 0$ ，证明：存在 $\xi \in (0, 2)$ ，使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。