2009—2010 学年第一学期
《高等数学》（工科）期末试卷-A 卷答案

一．填空题（每小题 4 分，5 题共 20 分）：

1． $\lim\limits_{x\to0}(e^x-x)^{\frac{1}{x^2}}=\underline{e^{\frac{1}{2}}}$.

2． $\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2005}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\underline{\dfrac{4}{e}}$.

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=x$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\underline{e-1}$.

4．设 $f(x)$ 可导，且 $\int_1^x tf(t)dt=f(x)$， $f(0)=1$，则 $f(x)=\underline{e^{\frac{1}{2}x^2}}$.

5．微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为 $\underline{y=(C_1+C_2x)e^{-2x}}$.

二．选择题（每小题 4 分，4 题共 16 分）：

1．设常数 $k>0$，则函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为（ B ）.

(A) 3 个； (B) 2 个； (C) 1 个； (D) 0 个.

2． 微分方程 $y''+4y=3\cos2x$ 的特解形式为 （ C ）

（A） $y^*=A\cos2x$； （B） $y^*=Ax\cos2x$；

（C） $y^*=Ax\cos2x+Bx\sin2x$； （D） $y^*=A\sin2x$

3．下列结论不一定成立的是 （ A ）

(A) 若 $[c,d]\subseteq[a,b]$，则必有 $\int_c^d f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$；

(B) 若 $f(x)\ge0$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x)dx\ge0$；

(C) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，则对任意常数 a 都有 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$；

(D) 若可积函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x tf(t)dt$ 也为奇函数.

4．设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ C ）.

(A) 连续点； (B) 可去间断点；

(C) 跳跃间断点； (D) 无穷间断点.

三．计算题（每小题 6 分，5 题共 30 分）：

1．计算定积分 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$.

解：　设 $x^2 = t$, 则 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} t e^{-t} dt = -\frac{1}{2}\int_0^2 t d e^{-t}$　　-------2

$$= -\frac{1}{2}\left[t e^{-t}\Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt \right]$$　　-------2

$$= -e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-t}\Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2}$$　　--------2

2．计算不定积分 $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$.

解：　$\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx = \frac{1}{4}\int x d(\frac{1}{\cos^4 x}) = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{\cos^4 x} - \int \frac{dx}{\cos^4 x}\right]$　　--------3

$$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{4}\int (\tan^2 x + 1) d \tan x$$

$$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{12}\tan^3 x - \frac{1}{4}\tan x + C$$　　-----------3

3．求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 在 $t = \frac{p}{2}$ 处的切线的方程.

解：切点为 $(a(\frac{p}{2} - 1),\quad a)$　　-------2

$$k = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{p}{2}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}\Big|_{t=\frac{p}{2}} = 1$$　　-------2

切线方程为　$y - a = x - a(\frac{p}{2} - 1)$　即 $y = x + (2 - \frac{p}{2})a$.　-------2

4. 设 $F(x) = \int_0^x \cos(x^2 - t) dt$，则 $F'(x) = \underline{2x\cos x^2 - (2x-1)\cos(x^2 - x)}$.

5．设 $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\mathbf{L}(2n)}}{n}$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解：　$\ln x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{i}{n})$　　---------2

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{i}{n}) \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1 + x) dx$$　　--------------2

$$= x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{1+x}dx = 2\ln 2 - 1$$ ------------2

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}$

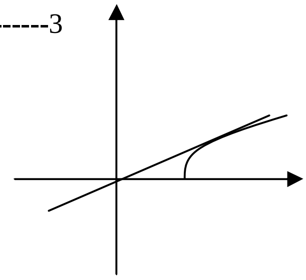
四．应用题（每小题 9 分，3 题共 27 分）

1．求由曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 与该曲线过坐标原点的切线及 x 轴所围图形的面积.

解：设切点为（x_0, y_0），则过原点的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}x$，

由于点（x_0, y_0）在切线上，带入切线方程，解得切点为 $x_0=4, y_0=\sqrt{2}$.-----3

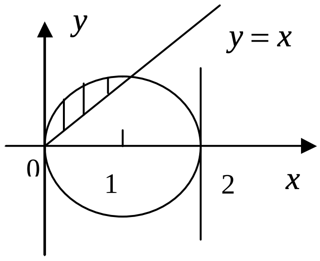
过原点和点 $(4,\sqrt{2})$ 的切线方程为 $y=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$ ---------------------------3



面积 $s=\int_0^{\sqrt{2}}(y^2+2-2\sqrt{2}y)dy=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ -------------------3

或 $s=\int_0^2\dfrac{1}{2\sqrt{2}}xdx+\int_2^4(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x-\sqrt{x-2})dx=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2．设平面图形 D 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，试求 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.



解： 法一：$V=V_1-V_2$

$$=\int_0^1 p\left[2-(1-\sqrt{1-y^2})\right]^2dy-\int_0^1 p\,(2-y)^2dy$$ -------6

$$=2p\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}-(y-1)^2\right]dy$$

$$=2p\left[\frac{p}{4}-\frac{1}{3}(y-1)^3\Big|_0^1\right]=2p\,(\frac{p}{4}-\frac{1}{3})$$ --------3

法二：$V=2p\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$

$$=2p\int_0^1(2-x)\sqrt{2x-x^2}dx-2p\int_0^1(2x-x^2)dx$$ ------------------ 5

$$=p\int_0^1\left[(2-2x)\sqrt{2x-x^2}+2\sqrt{2x-x^2}\right]dx-\frac{4}{3}p$$

$$=p\left[\frac{2}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+2\times\frac{1}{4}p\times 1\right]-\frac{4}{3}p$$ ------------- 4

$$=\frac{2}{3}p+\frac{1}{2}p^2-\frac{4}{3}p=\frac{1}{2}p^2-\frac{2}{3}p$$

3. 设 $a>1$, $f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时 $t(a)$ 最小? 并求最小值.

解: 由$f'(t)=a^t\ln a-a=0$得$t(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$. --------------- 3

又由$t'(a)=\dfrac{\ln\ln a-1}{a(\ln a)^2}=0$得唯一驻点$a=e^e$ ------------3

当$a>e^e$时,$t'(a)>0$;当$a<e^e$时,$t'(a)<0$,于是$a=e^e$为$t(a)$的极小值点. -----2

故$a=e^e$为$t(a)$的最小值点,最小值为$t(e^e)=1-\dfrac{\ln e}{e}=1-\dfrac{1}{e}$. --------------1

五．证明题（7 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$,

试证明至少存在一点 $x\in(0,1)$，使得 $f'(x)=1$.

证明：设 $F(x)=f(x)-x$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 可导，因 $f(0)=f(1)=0$，

有 $F(0)=f(0)-0=0, F(1)=f(1)-1=-1$,--------------- 2

又由 $f(\frac{1}{2})=1$，知 $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,在 $[\frac{1}{2},1]$ 上 $F(x)$ 用零点定理，

根据 $F(1)F(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0$，--------------- 2

可知在 $(\frac{1}{2},1)$ 内至少存在一点 h，使得 $F(h)=0$，$h\in(\frac{1}{2},1)\subset(0,1)$，

$F(0)=F(h)=0$ 由 ROLLE 中值定理得 至少存在一点 $x\in(0,h)\subset(0,1)$ 使得

$F'(x)=0$ 即 $f'(x)-1=0$，证毕. --------------3