A 卷

2015—2016 学年第一学期

《线性代数》期末试卷

说明：试卷中的字母 E 表示单位矩阵； A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵；

$R(A)$ 表示矩阵 A 的秩； A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵.

一、填空题（请从下面 6 个题目中任选 5 个小题，每小题 3 分；若 6 个题目都做，按照前面 5 个题目给分）

本题满分 15 分	
本题得分	

1．5 阶行列式中，项 $a_{24}a_{31}a_{52}a_{13}a_{45}$ 前面的符号为【　　　】.

2. 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$， $A_{4i}\ (i=1,2,3,4)$ 是 D 的第 4 行元素的代数余子式，则 $A_{41}+2A_{42}-A_{43}+2A_{44}$ 等于【　　　】.

3．设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$【　　　】.

4．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$ 线性相关，则 $t=$【　　　】.

5．设 A 是 3 阶实的对称矩阵，$\alpha=\begin{pmatrix} m \\ -m \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的解，$\beta=\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1-m \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $(A+E)x=0$ 的解，则常数 $m=$【　　　　】.

6．设 A 和 B 是 3 阶方阵，A 的 3 个特征值分别为 $-3, 3, 0$，若 $E+B=AB$，则行列式 $|B^{-1}+2E|=$【　　　】.

二、选择题（共 5 个小题，每小题 3 分）

本题满分 15 分	
本题得分	

1. 设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则行列式 $|-2A^*|$ 等于【　】.

(A) -2；　(B) $-\dfrac{1}{2}$；　(C) -1；　(D) 2.

2. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为【　　　】.

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3．设 A 是 n 阶非零矩阵，满足 $A=A^2$，若 $A\neq E$，则【　　】.

(A) $|A|=0$；　(B) $|A|=1$；　(C) A 可逆；　(D) A 满秩.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, C=AB^{-1}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的第 3 行第 1 列的元素为

【　　】.

(A)　4；　　　　(B)　8；　　　　(C)　0；　　　　(D)　-1.

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$，$a$ 是使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定的正整数，则必有【　　　】.

(A)　$a=2$；　　　(B)　$a=1$；　　　(C)　$a=3$；　　　(D)　以上选项都不对.

三、求解下列各题(共 3 小题，每小题 7 分)

本题满分 21 分	
本题得分	

1. 若 α,β,γ 线性无关，$\alpha+2\beta, 2\beta+k\gamma$，$\beta+3\gamma$ 线性相关，求 k.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & a & 1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$，若 $R(AB+B)=2$，求 a.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & t & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且 A,B 相似，求 a 与 t 的值.

本题满分 16 分	
本题得分	

四、（共 2 小题，每小题 8 分）

1．求向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个最大无关组，并将其余向量用这一最大无关组表示出来.

2. 问 a 满足什么条件，才能使得 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 共有两个线性无关的特征向量？

五、问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 无解，有无穷多解，并在有无穷多解时求出其通解.

本题满分 12 分	
本题得分	

六、求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 的秩，并求正交变换 $x=Py$，化二次型为标准形.

本题满分 14 分	
本题得分	

七、（请从下面 2 个题目中任选 1 个，若 2 个题目都做，按照第 1 题给分）

本题满分 7 分	
本题得分	

1. “设 A 是 n 阶实的反对称矩阵，则对于任何 n 维实的列向量 α，α 和 $A\alpha$ 正交，且 $A-E$ 可逆”. 您认为该结论成立吗？请说明理由.

2. 设矩阵 A 满足 $2A^{-1}B=2B+E$，$B=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$，试求出 $A-E$ 的第 2 行的元素.