A 卷

2007—2008 学年第一学期期末考试

《线性代数》试卷答案与评分标准

专业班级 ______________________

姓　　名______________________

学　　号______________________

开课系室________应用数学系______

考试日期______________________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

注　意 事　项

1. 请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸;
2. 答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁;
3. 试卷本请勿撕开，否则作废;
4. 本试卷共七道大题，满分 100 分.

一. 单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

在下列每小题的 4 个备选项中，只有一个是最符合题意的，请将其代码（A、B、C、D）填在题后的括号内.

1．若 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\mathbf{1}$，则 $|-\mathbf{2}\boldsymbol{A}|=$（　D　　）.

A）$\mathbf{2}$；　　　B）$-\mathbf{2}$；　　　C）$\mathbf{8}$；　　　D）$-\mathbf{8}$.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times n$ 阶矩阵，则必有（　　C　）.

A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　　　B）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

C）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；　　　D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

3．设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $R(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位阵，下列结论正确的是（　A ）.

A）A 的 m 个行向量必线性无关；　B）A 的任意 m 个列向量必线性无关；

C）A 的任意一个 m 阶子式不等于零；　D）A 可通过初等行变换变为 $(E_m,0)$.

4．非齐次方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 中，系数矩阵 A 的秩为 r，则（　A　）.

A）$r=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；　B）$r=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

C）$m=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；　D）$r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

5．A 是三阶矩阵，有特征值 1，−2，4，则下列矩阵中，满秩矩阵是（　B　　）.
（A）$E-A$；　（B）$2E-A$；　（C）$A+2E$；　（D）$A-4E$。

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{2}-\boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k}-\mathbf{2}\end{bmatrix}$，则 A 是正定阵的条件是(　　D　　).

(A) $k<2$；　(B) $k<1$；　(C) $2>k>1$；　(D) 对任何 k，A 不正定。

二、填空题（每小题３分，共１８分）

在下题每小题的横线上填入你认为正确的答案.

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}$.

2．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则 $\boldsymbol{t}=$ $\underline{\quad 3 \qquad}$.

3．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

一定是线性 <u>　相关　　</u>的.

4．已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，则与 $\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2$ 同时正交的非零向量为

$\boldsymbol{\alpha}_3=\underline{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$.

5．若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\x_2+x_3=a_2\\x_3+x_4=-a_3\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件

$\underline{a_1+a_2+a_3+a_4=0}$.

6．已知三维向量空间的一个基为：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$，

则向量 $\boldsymbol{u}=(2,0,0)$ 在该基下的坐标是<u>　1，1，—1　　　　　</u>.

三、计算题（每小题 6 分，共 2 4 分）

1．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$。

解：将行列式的 2、3、4、5 行都加到第一行，然后第一行提出公因子，得

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

将第一行乘以（—1）后加到其余各行，得

$$D=(a+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+4)(a-1)^4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

2．计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$$

解： 按第一行展开，即得

$$\boldsymbol{D_n=a}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}+\boldsymbol{(-1)^{n+1}b}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\boldsymbol{=a^n+(-1)^{n+1}b^n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

3． 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：由 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 得：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\text{……………………}(3)$$

验证知矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 是可逆的，所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}\text{…………………………}(6)$$

4．已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

解：$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}\text{…………………}(2)$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}\text{……}(4)$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}\text{……………}(6)$$

四（10 分）．设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-4\\-2\end{pmatrix}$,

（1）求此向量组的秩，并求一个最大无关组，

（2）将其余向量用这个最大无关组线性表示。

解 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&4&3&5\\-1&-3&-2&-4\\-1&-1&0&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故知 （1）向量组的秩为 2，…………………………(5)

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是一个最大无关组； ……………(6)

（2）$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$……………(10)

五（10 分）

1．设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$，

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4, \beta_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，试证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关。

证：设有数 $\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2,\mathrm{k}_3,\mathrm{k}_4$ 满足 $\mathrm{k}_1\beta_1+\mathrm{k}_2\beta_2+\mathrm{k}_3\beta_3+\mathrm{k}_4\beta_4=0$，将 $\beta_{\mathrm{i}}(\mathrm{i}=1,2,3,4)$ 的表达式代入并整理，得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3+\mathrm{k}_4)\alpha_1+(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_3+\mathrm{k}_4)\alpha_2\\&+(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_4)\alpha_3+(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3)\alpha_4=0\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，所以有 $\begin{cases}\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3+\mathrm{k}_4=0\\\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_3+\mathrm{k}_4=0\\\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_4=0\\\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3=0\end{cases}$，

方程组的系数行列式

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

方程组只有零解 $\mathrm{k}_1=\mathrm{k}_2=\mathrm{k}_3=\mathrm{k}_4=0$，所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关。…………（5）

2．设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$，已知 A 的秩 $r(A)=2$.

求 A 的全部特征值；

解：（1）A 的一个特征值，对应的特征向量为 α，则

$A\alpha=\lambda\alpha,(\alpha\neq 0)$，$A^2\alpha=\lambda^2\alpha$。于是 $(A^2+2A)\alpha=(\lambda^2+2\lambda)\alpha$。由条件

$A^2+2A=0$ 推知 $(\lambda^2+2\lambda)\alpha=0$。又由于 $\alpha\neq 0$，故有 $\lambda^2+2\lambda=0$，解得

$\lambda=-2,\lambda=0$ …………………………………..(3)

因为实对称矩阵，且 $r(A)=2$，所以 A 必相似于对角阵

$$\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix},$$

因此，矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$。…………………..(5)

六（10 分）**五．设有方程组（本题 10 分）。**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4} \\ \boldsymbol{-x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2} \\ \boldsymbol{x_1 - x_2 + 2x_3 = -4} \end{cases}$$

问λ为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出其解。

解：方程组的增广矩阵 $(\mathrm{A} \mid \mathrm{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+4 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 2 & \lambda-2 & 8 \\ 0 & 0 & (\lambda-4)(\lambda+1) & 2\lambda(4-\lambda) \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

（1） 当 $\lambda \neq 4, \lambda \neq -1$ 时，$R(A) = R(A,b) = 3$，方程组有唯一解；…………. . (5)

（2） 当 $\lambda = -1$ 时，$R(A) \neq R(A,b)$，方程组无解；………………………………. . (7)

（3） 当 $\lambda = 4$ 时，$R(A) = R(A,b) = 2$，方程组有无穷多解，此时

$$(A,b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

等价方程组 $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}$，方程组通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……………… (10)

七（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，求正交变换 $x=Py$，将此二次型化成标准型，并写出此标准型。

解： $$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

特征多项式： $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5).$$

特征值为 $\lambda=1,\ 2,\ 5$。……………………………………………(4)

对于各个特征值，求特征向量

$\lambda=1$时， $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,\quad \text{解得 }\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$\lambda=2$时， $$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,\quad \text{解得 }\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$\lambda=5$时， $$\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,\quad \text{解得 }\xi_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\text{……….(7)}$$

因不同特征值对应的特征向量相互正交，故ξ_1,ξ_2,ξ_3是正交向量组，单位化后得到

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\xi_2,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

故所求正交变换矩阵 $$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

正交变换： $x=Py$

标准型为： $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$ ……………………………………….(10)