多项式插值

数值计算方法课程组

中国石油大学-华东

（课堂专属 切勿网传）

中国石油大学（华东）
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

目 录

目 录

§4.1 插值问题

问题 1 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，已知 $f(x)$ 的函数值表:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0.5000	0.5398	0.5793	0.6179	0.6554

求 $f(0.13)$，$f(0.36)$。
在数值计算中，经常遇到类似的问题:已知某一个比较复杂的函数在一些点处的函数值(可通过某些数值方法求出)，需要求该函数在其它若干点处的函数值。

§4.1 插值问题

问题 2 在油水两相渗流中，水的相对渗透率 k_{rw} 是水的饱和度 S_w 的函数，实验数据为:

S_w	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
k_{rw}	0.00	0.06	0.14	0.27	0.42	0.65	1.00

需要研究水的相对渗透率关于水的饱和度的函数关系，计算 $k_{rw}(S_w)$，$S_w \in [0.2, 0.8]$。

在很多实际问题中经常遇到类似的问题:两个物理量 x, y 有函数关系

$y = f(x)$,

利用相关的专业知识和数学知识函数难以求出函数 f 的解析式，可以通过做物理实验求出若干点的函数值。

即函数以离散形式表示，需要研究函数 f 的变化规律或计算函数值，希望找一个函数 φ 近似 f，要求 φ 满足:

1. φ 能反映 f 的特性，近似程度较高;
2. φ 比较简单，便于计算.

若要求 φ 严格过已知数据点，则该逼近问题是函数插值问题;

若要求 φ 近似过已知数据点，大致反映出 f 的变化趋势，在某意义下 φ 与已知数据点最接近，则该逼近问题是函数拟合问题 (第 5 章介绍拟合问题)。

§4.1 插值问题

定义（插值的定义）

已知定义于区间 $[a,b]$ 上的实值函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $\{x_i\}_{i=0}^n \in [a,b]$ 处的函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$. 若函数集合 Φ 中的函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n, \tag{1.1}$$

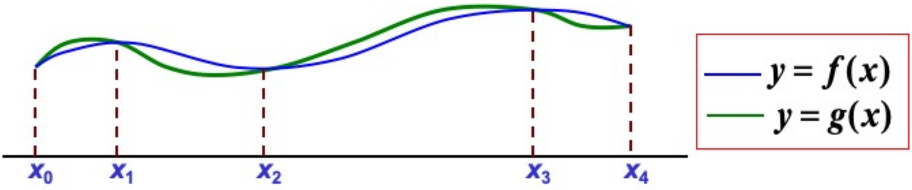
则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 在函数集合 Φ 中关于节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的一个插值函数，$f(x)$ 被称为被插值函数，$[a,b]$ 插值区间，$\{x_i\}_{i=0}^n$ 插值节点,(1.1) 为插值条件.

记 $\tilde{m} = \min\{x_i\}, \tilde{M} = \max\{x_i\}$,

1. 内插法：用 $\varphi(x)$ 计算被插函数 $f(x)$ 在点 $x \in (\tilde{m}, \tilde{M})$ 的近似值；
2. 外插法：用 $\varphi(x)$ 计算被插函数 $f(x)$ 在点 $x \in [a,b], x \notin (\tilde{m}, \tilde{M})$ 的近似值.

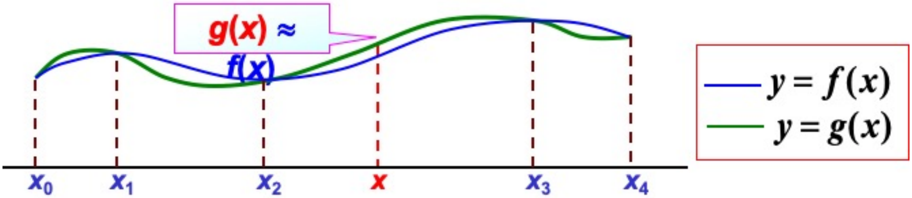
$$
\text{插值类型} = \begin{cases} \text{代数插值：} & \text{集合}\Phi\text{为多项式函数集} \\ \text{有理插值：} & \text{集合}\Phi\text{为有理分式函数集} \\ \text{三角插值：} & \text{集合}\Phi\text{为三角函数集} \end{cases}
$$

几何意义



$$
\text{插值类型} = \begin{cases} \text{代数插值：} & \text{集合}\Phi\text{为多项式函数集} \\ \text{有理插值：} & \text{集合}\Phi\text{为有理分式函数集} \\ \text{三角插值：} & \text{集合}\Phi\text{为三角函数集} \end{cases}
$$

几何意义



代数插值的存在唯一性

设

$$\Phi = H_n = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} = \{\varphi(x) | \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\}$$

代入插值条件 (1.1) 可知

$$\begin{gathered}
\varphi(x_0) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i = f(x_0) \\
\varphi(x_1) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_1^i = f(x_1) \\
\cdots \\
\varphi(x_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_n^i = f(x_n)
\end{gathered}$$

方程组的系数矩阵是 Vandermonde 矩阵，其行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

定理

满足插值条件 (1.1) 的不超过 n 次的插值多项式是存在唯一的.

误差估计

定理（误差估计）

设 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在，$\varphi(x)$ 是满足插值条件 (1.1) 的不超过 n 次的插值多项式，则对 $x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足

$$R_n(x)=f(x)-\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{1.2}$$

这里 $R_n(x)$ 称为插值余项（截断误差），$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, 进而，当 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界 M_{n+1} 时，有

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

证明：设 $R_n(x)=k(x)\omega_{n+1}(x)$. 显然 $x=x_i$ 时结论成立．当 $x\neq x_i$ 时，构造辅助函数

$$g(t)=f(t)-\varphi(t)-k(x)\omega_{n+1}(t)$$

则 $g(t)$ 有 $n+2$ 个零点：$x_0,x_1,\cdots,x_n,x$．由 Rolle 定理可知：$g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个互异零点；$g''(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个互异零点；依次类推，$g^{(n+1)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 1 个零点 ξ；而

$$g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-k(x)(n+1)!=0$$

证明：设 $R_n(x) = k(x)\omega_{n+1}(x)$. 显然 $x = x_i$ 时结论成立. 当 $x \neq x_i$ 时，构造辅助函数

$$g(t) = f(t) - \varphi(t) - k(x)\omega_{n+1}(t)$$

则 $g(t)$ 有 $n+2$ 个零点：$x_0, x_1, \cdots, x_n, x$. 由 Rolle 定理可知：$g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个互异零点；$g''(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个互异零点；依次类推，$g^{(n+1)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 1 个零点 ξ；而

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(x)(n+1)! = 0$$

$$\Rightarrow \qquad k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

证明：设 $R_n(x)=k(x)\omega_{n+1}(x)$. 显然 $x=x_i$ 时结论成立. 当 $x\neq x_i$ 时，构造辅助函数

$$g(t)=f(t)-\varphi(t)-k(x)\omega_{n+1}(t)$$

则 $g(t)$ 有 $n+2$ 个零点：$x_0,x_1,\cdots,x_n,x$. 由 Rolle 定理可知：$g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个互异零点；$g''(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个互异零点；依次类推，$g^{(n+1)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 1 个零点 ξ；而

$$\begin{aligned} & g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-k(x)(n+1)!=0 \\ \Rightarrow\quad & k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\ \Rightarrow\quad & R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \end{aligned}$$

注释

1. 插值误差与节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 和 x 之间的距离有关;
2. 如果 $f(x)$ 本身为不超过 n 次的多项式，其插值函数为自身;
3. 通常不能确定 ξ, 而是估计 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}, x \in [a,b]$ 将 $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$ 作为误差估计上限.

目 录

§4.2.1 Lagrange 插值

问题

求 n 次多项式 $L_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 使得

$$L_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, n, 且 x_i \neq x_j, i \neq j.$$

先运用插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 构造不超过 n 次的插值多项式 $l_i(x)$，令其满足插值条件

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad j = 0, 1, \cdots, n. \tag{2.3}$$

为此我们可以定义函数

跳过减去 x_i 的部分

$$l_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

由插值条件 (2.3) 可得

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

即有

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

从而可得

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i).$$

$l_i(x)$ 称为 Lagrange 插值基函数，$L_n(x)$ 称为 Lagrange 插值函数. 为了简化 $l_i(x)$ 的表示形式，记 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_i)$. 注意到

$$\begin{aligned}
&\omega_{n+1}(x) = (x - x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j) \\
\Rightarrow \quad &\omega'_{n+1}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j) + (x - x_i)\frac{d}{dx} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j) \\
\Rightarrow \quad &\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)
\end{aligned}$$

从而，可记

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

注释

1. 若不将多项式次数限制为 n 次，则插值多项式不唯一. 例如，

$$P_n(x) = L_n(x) + q(x)\omega_{n+1}(x)$$

也是一个插值多项式，其中 $q(x)$ 可以是任意多项式.

2. Lagrange 插值多项式结构对称，形式简单.
3.

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

4. 当插值节点增加时，Lagrange 基函数需要重新计算，n 较大时，计算量非常大, 故常用于理论分析.

例题

已知函数 $y = \sin x$ 的函数表，试分别利用一次插值和二次插值求 $\sin 0.3367$ 的近似值，并估计截断误差.

x	0.32	0.34	0.36
$y = \sin x$	0.31456	0.333487	0.352274

解：（1）一次插值. 取 $x_0 = 0.32$,$x_1 = 0.34$, 由 Lagrange 插值多项式得

$$L_1(x) = l_0 y_0 + l_1 y_1 = \frac{x - 0.34}{0.32 - 0.34} \times 0.31456 + \frac{x - 0.32}{0.34 - 0.32} \times 0.333487$$

将 $x = 0.3367$ 代入上式可得 $\sin 0.3367 \approx 0.330365$，其截断误差估计为

如何得到 M_2: 已知 sinx 的导数范围, 找到上界即可

$$|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2}|(x - x_0)||(x - x_1)|$$

将相关数据带人可得

$$|R_1(0.3367)| \leq \frac{M_2}{2}|(0.3367-x_0)||(0.3367-x_1)| \leq 0.92\times 10^{-5}$$

（2）二次插值.

$$\begin{aligned} L_2(x) &= l_0 f(x_0) + l_1 f(x_1) + l_2 f(x_2) \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \end{aligned}$$

将相关数据带人可得 $\sin 0.3367 \approx 0.330374$，其截断误差

$$|R_2(0.3367)| \leq \frac{M_3}{3\,!}|(0.3367-x_0)||(0.3367-x_1)||(0.3367-x_2)| < 2.0331\times 10^{-7}$$

注释

1. 一般情况下，高次插值优于低次插值；
2. 不能认为次数越高精度一定就好.（从截断误差探究原因）

反插值问题

已知定义于区间 $[a, b]$ 上的单调连续函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 处的函数值 $f(x_i)$，若函数值 $\bar{y} = f(\bar{x})$ 已知，如何求 $\bar{x}$? 即求 $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$.

可以看作如下插值问题：
已知定义于区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $y_i = f(x_i)$ 处的函数值 $x_i = f^{-1}(y_i)$，求函数值 $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$.

例题

已知单调连续函数 $f(x)$ 有如下采样点的函数值，求方程 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 内根的近似值 x^*.

x_i	1.0	1.4	1.8	2.0
$y_i = f(x_i)$	-2.0	-0.8	0.4	1.2

解：

$$
\begin{aligned}
L_3(y) =& \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}x_0 \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}x_1 \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}x_2 \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}x_3
\end{aligned}
$$

于是

$$
x^* = f^{-1}(0) \approx L_3(0) \doteq 1.675.
$$

§4.2.2.1 牛顿插值多项式的构造

问题与思考

问题 Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新计算.

思考 能否将 $L_n(x)$ 写成

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

的形式，每加一个节点，只附加一项即可.

注意到

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \cdots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]$$

若记

$$Q_k(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x)$$

则其为一个 k 次多项式，且

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + Q_k(x).$$

由此可知

$$\begin{aligned} L_n(x) &= L_{n-1}(x) + Q_n(x) \\ &= L_{n-2}(x) + Q_{n-1}(x) + Q_n(x) \\ &= L_0(x) + \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) \end{aligned}$$

这里 $L_0(x) = f(x_0)$.

为了计算 $Q_k(x)$, 注意到

$$Q_k(x_i) = L_k(x_i) - L_{k-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1.$$

则

$$Q_k(x) = a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$$

从而

$$L_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

记 Newton 插值多项式

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

以二次牛顿插值多项式 $N_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$ 为例，求系数 a_0, a_1, a_2.
运用插值条件可知

$$
\begin{aligned}
N_2(x_0) &= a_0 = f(x_0), \\
N_2(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \\
N_2(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2),
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
a_0 = f(x_0), \quad a_1 &= \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \\
a_2 = \left(\tfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)&/(x_2 - x_1),
\end{aligned}
$$

引入差商（均差）的定义函数 f 关于节点 x_i 的 0 阶差商定义为：$f[x_i] = f(x_i)$
函数 f 关于节点 x_i, x_j 的 1 阶差商定义为：

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

函数 f 关于节点 x_i, x_j, x_k 的 2 阶差商定义为：

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

函数 f 关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 n 阶差商定义为：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

从而可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0), \\
a_1 &= f[x_0, x_1], \\
&\cdots \\
a_n &= f[x_0, x_1, \cdots, x_n]
\end{aligned}
$$

那么，我们得到新的插值格式——牛顿插值多项式

$$
\begin{aligned}
N_n(x) \quad = \quad & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

从上面的公式可以看出，要运用牛顿插值公式，需要计算各阶差商. 可通过逐步的办法完成，如下表所示:

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

由插值多项式的唯一性可知 $N_n(x) = L_n(x)$, 故而牛顿插值的截断误差仍为

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$ 导数型误差估计

下面推导另外一种形式的误差估计. 为此，定义 $N_{n+1}(t)$ 是以 x 及 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为节点的 $n+1$ 次牛顿插值多项式. 从而有

$$N_{n+1}(x) = f(x)$$

$$N_{n+1}(t) = N_n(t) + f[x_0, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(t)$$

所以

$$f(x) = N_n(x) + f[x_0, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x).$$ 差商型误差估计

已知函数 $y = f(x)$ 的函数表如下，写出 4 次牛顿插值多项式.

x_i	1	2	3	4	5
$y_i = f(x_i)$	1	4	7	8	6

解：构造差商表

x_i	$y_i = f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
1	1				
2	4	3			
3	7	3	0		
4	8	1	-1	-1/3	
5	6	-2	-3/2	-1/6	1/24

例题

从而可得 4 次牛顿多项式为

$$
\begin{aligned}
N_4(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
&= 1 + 3(x - 1) + 0(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\
&\quad - \frac{1}{3}(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\
&\quad + \frac{1}{24}(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \\
&= \frac{1}{24}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{83}{24}x^2 - \frac{23}{24}x + 1
\end{aligned}
$$

§4.2.2.2 差商的简单性质

性质 1：n 阶差商 $f[x_0, \cdots, x_n]$ 可表示成函数值 $f(x_i)$ 的线性组合的形式，即

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)$$

证明：数学归纳法.

$$n = 1, \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$n=2$ 时,

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \\
&= \frac{1}{x_2-x_0}\left[\left(\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right)-\left(\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right)\right] \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}
$$

同理归纳，可知结论成立.

性质 2：差商具有对称性，即 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 的值与节点的顺序无关.

性质 3：如果 $f(x)$ 的 k 阶差商 $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]$ 是 x 的 m 次多项式，则 $f(x)$ 的 $k+1$ 阶差商 $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]$ 是 x 的 $m-1$ 次多项式.

证明:

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x - x_k}$$

上面右端分子为 m 次多项式，记为

$$g(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k].$$

易知

$$g(x_k) = f[x_k, x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = 0.$$

则

$$g(x) = (x - x_k)h(x)$$

其中 $h(x)$ 为 $m-1$ 次多项式.

性质 4:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b].$$

证明：设 t 是不同于节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ 的任意一点，以 $x_0, \cdots, x_{n-1}, t$ 为节点的牛顿插值多项式为

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_0, \cdots, x_{n-1}, t](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

所以有

$$f(t) = N_{n-1}(t) + f[x_0, \cdots, x_{n-1}, t](t - x_0) \cdots (t - x_{n-1})$$

$N_{n-1}(t)$ 是满足插值条件 $N_{n-1}(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n-1$ 的关于 t 的 $n-1$ 次多项式，其插值余项（截断误差）为

$$R_{n-1}(t) = f(t) - N_{n-1}(t) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(t)$$

令 $t = x_n$, 从而可知

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

利用性质 4 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b]$.

$f(x) = -6x^8 + 7x^5 - 10$, 计算$f[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], f[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$.

解:

利用性质 4 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b].$

$f(x) = -6x^8 + 7x^5 - 10$, 计算$f[1,2,3,4,5,6,7,8,9]$, $f[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$.

解：

$$f[1,2,3,4,5,6,7,8,9] = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = \frac{-6 \cdot 8!}{8!} = -6,$$

$$f[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] = \frac{f^{(9)}(\eta)}{9!} = 0.$$

算法设计思考

1. 如何计算差商表？ 如何节省内存？
2. 如何计算牛顿插值多项式在某个点的值？ 多个点的值呢？

目 录

§4.3 Hermite 插值问题

Hermite 插值问题不仅要求函数值重合，而且要求若干阶导数也重合。即：要求插值函数满足

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad \varphi'(x_i) = f'(x_i), \cdots, \varphi^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{3.4}$$

其中 m 为非负整数. 满足这种要求的插值多项式称为 Hermite 插值多项式.

1. N 个条件可以确定 $N-1$ 次多项式
2. 要求在 1 个节点 x_0 处直到 m 阶导数都重合的插值多项式, 即为 Taylor 多项式

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

3. 一般只考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的值

对于 Hermite 插值问题，主要讨论下面的特殊情形：
已知函数 $f(x)$ 在互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 处的函数值 $f(x_i)$ 以及其一阶导数值 $f'(x_i)$, 要构造不超过 $2n+1$ 次的多项式 $H_{2n+1}(x)$，满足如下的 $2n+2$ 个条件

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{3.5}$$

此问题为全导数的 Hermite 插值问题.

Hermite 插值多项式的构造

思想：类似于 Lagrange 插值多项式的构造方法，即通过构造一组插值基函数来表示 Hermite 插值多项式.

设满足前面要求的 $2n+2$ 插值条件的插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 为

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\beta_i(x)$$

其中

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \alpha_i'(x_j) = 0 \tag{3.6}$$

$$\beta_i(x_j) = 0 \quad \beta_i'(x_j) = \delta_{ij} \tag{3.7}$$

注意到 $\alpha_i(x)$ 和 $\beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次多项式，且有 n 个二重根

$$x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$$

运用 Lagrange 节点基函数 $l_i(x)$，可令

$$\alpha_i(x) = (A_i x + B_i) l_i^2(x)$$

显然此函数满足

$$\alpha_i(x_j) = 0 \quad \alpha_i'(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$$

再由插值条件

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_i) &= A_i x_i + B_i = 1 \\ \alpha_i'(x_i) &= A_i + 2(A_i x_i + B_i) l_i'(x_i) = 0 \end{aligned}$$

可得

$$
\begin{aligned}
A_i &= -2\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\\
B_i &= 1+2x_i\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\alpha_i(x)=\left[1+2(x_i-x)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\right]l_i^2(x)
$$

再来计算 $\beta_i(x)$, 可令

$$\beta_i(x) = C_i(x - x_i)l_i^2(x),$$

由条件

$$\beta_i'(x_i) = C_i l_i^2(x_i) + 2C_i(x_i - x_i)l_i'(x_i) = 1,$$

可得 $C_i = 1$, 故而

$$\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

全导数的 Hermite 插值多项式为

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\beta_i(x)$$

其中

$$\alpha_i(x) = \left[1 + 2(x_i - x)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}\right] l_i^2(x), \quad \beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

Hermite 插值的存在唯一性和误差估计

定理

满足插值条件 (3.5) 的 $2n+1$ 次 *Hermite* 插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 是存在唯一的.

证明：存在性由上述构建方法可以证明. 下面证明其唯一性. 假设存在另一个 $2n+1$ 次插值多项式 $\tilde{H}_{2n+1}(x)$ 满足插值条件 (3.5)，则令

$$\phi(x) = H_{2n+1}(x) - \tilde{H}_{2n+1}(x)$$

易知

$$\begin{aligned}
\phi(x_i) &= H_{2n+1}(x_i) - \tilde{H}_{2n+1}(x_i) = 0, \\
\phi'(x_i) &= H'_{2n+1}(x_i) - \tilde{H}'_{2n+1}(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}$$

上式意味着 $\phi(x)$ 有 $(n+1)$ 个二重根，而 $\phi(x)$ 为至多 $2n+1$ 次多项式，故 $\phi(x) \equiv 0$.

定理

设被插值函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $2n+1$ 阶连续导数，$f^{(2n+2)}(x)$ 在区间 (a,b) 内存在，$H_{2n+1}(x)$ 是关于互异节点 x_i 的满足前述插值条件 (3.5) 的不超过 $2n+1$ 次的插值多项式，则对 $x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in[a,b]$ 成立

$$R_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x).$$

例题:不完全导数的 Hermite 插值多项式

建立 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$, 使之满足下表中的插值条件

x_i	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
$f'(x_i)$	$f'(x_0)$		

解：运用待定系数法. 满足插值条件 $H_3(x_i)=f(x_i), i=0,1,2$ 的二次插值多项式为

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

由此可设满足插值条件的 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 为

$$H_3(x)=N_2(x)+k(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

由条件

$$H_3'(x_0)=N_2'(x_0)+k(x_0-x_1)(x_0-x_2)=f'(x_0)$$

可得

$$k=\frac{f'(x_0)-N_2'(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{f'(x_0)-f[x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2](x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

再来推导其插值余项公式. 记

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = k(x)(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2).$$

构造辅助函数

$$g(t) = f(t) - H_3(t) - k(x)(t-x_0)^2(t-x_1)(t-x_2)$$

则知 x, x_0, x_1, x_2 为函数 $g(t)$ 四个互异零点. 运用 Roll 定理可知，存在 ξ 使得

$$g^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!k(x) = 0,$$

$$\Rightarrow k(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

$$\Rightarrow R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2).$$

定义 (重节点差商)

若 $f(x)\in C^n[a,b]$, $x_i\in(a,b)$, $i=0,1,2,\cdots,n$ 则定义重节点差商

$$\lim_{\substack{x_i\to x_0\\ i=1,\cdots,n}} f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=f[x_0,\cdots,x_0].$$

运用重节点差商可以计算不完全导数的 Hermite 插值多项式.

例题

建立 Hermite 插值多项式 $H_4(x)$, 使之满足下表中的插值条件

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	1
$f'(x_i)$	0	1	

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	0				
0	0	0			
1	1	1	1		
1	1	1	0	-1	
2	1	0	-1	-1/2	1/4

从而运用构建牛顿插值多项式方法建立不完全 Hermite 插值多项式 $H_4(x)$

$$\begin{aligned}
H_4(x) &= 0 + 0(x-0) + 1(x-0)(x-0) \\
&\quad -(x-0)(x-0)(x-1) + \frac{1}{4}(x-0)(x-0)(x-1)(x-1) \\
&= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2.
\end{aligned}$$

目 录

§4.4.1 高次插值评述

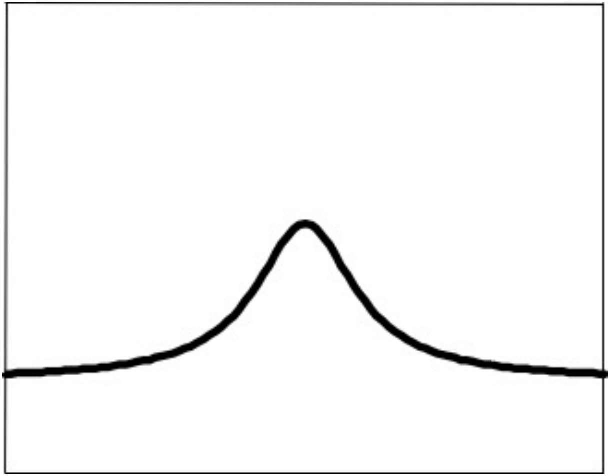
由插值余项公式可知

$$R_{n+1}(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

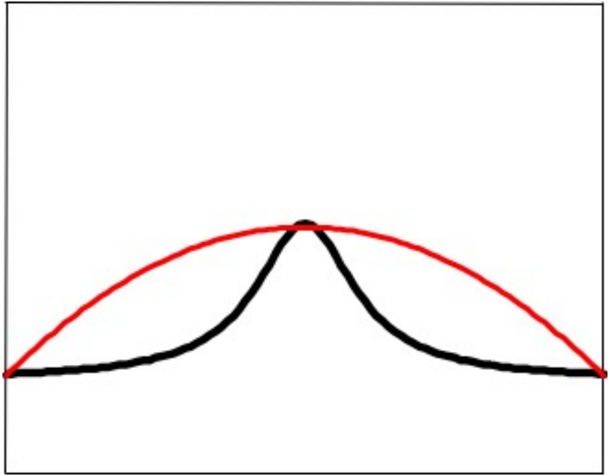
为了提高插值精度，一般来说应该增加插值节点的个数. 但不能简单地这样认为，原因有三个：

1. 插值余项与节点的分布有关；
2. 余项公式成立的前提条件是 $f(x)$ 有足够阶连续导数（即函数足够光滑），但随着节点个数的增加，这个条件一般很难成立；
3. 随着节点个数的增加，$f^{(n+1)}(\xi)$ 可能会增大，误差反而会增加, 这种现象称为龙格（Runge）现象.

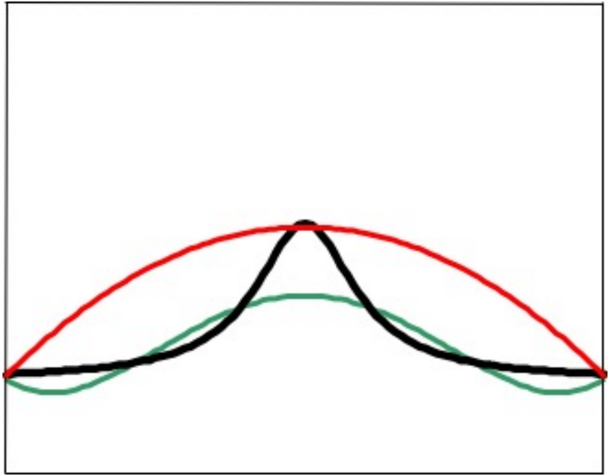
例如，在 $[-5,5]$ 上考察函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的 Lagrange 插值 $L_n(x)$，取 $x_i=-5+\frac{10}{n}i$，分别取 $n=2,3,10$，观察真解与 Lagrange 插值函数的关系，如下图



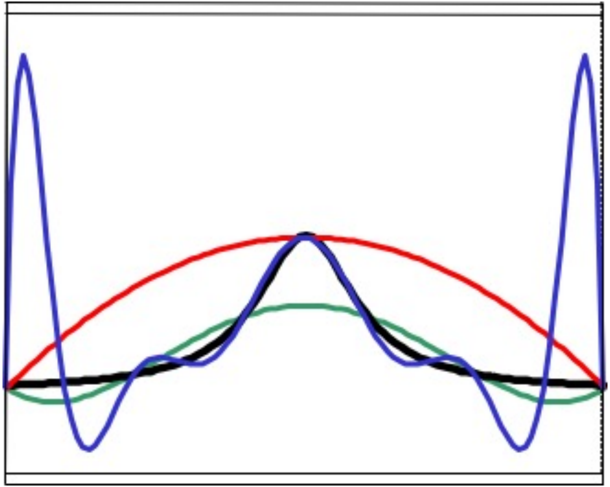
例如，在 $[-5,5]$ 上考察函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的 Lagrange 插值 $L_n(x)$, 取 $x_i=-5+\frac{10}{n}i$, 分别取 $n=2,5,10$, 观察真解与 Lagrange 插值函数的关系，如下图



例如，在 $[-5,5]$ 上考察函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的 Lagrange 插值 $L_n(x)$，取 $x_i=-5+\frac{10}{n}i$，分别取 $n=2,5,10$，观察真解与 Lagrange 插值函数的关系，如下图



例如，在 $[-5,5]$ 上考察函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的 Lagrange 插值 $L_n(x)$, 取 $x_i=-5+\frac{10}{n}i$, 分别取 $n=2,5,10$, 观察真解与 Lagrange 插值函数的关系，如下图. 观察到 n 越大，端点附近误差越大，出现 Runge 现象.



问题

为什么会出现 Runge 现象？ 如何规避 Runge 现象？

下面，我们从稳定性角度分析出现 Runge 现象原因.

设 $f(x_i) = f^*(x_i) + \delta_i (i = 0, 1, \cdots, n)$. 由 $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$ 和 $\{f^*(x_i)\}_{i=0}^n$ 构造出的插值多项式分别记为： $L_n(x), L_n^*(x)$

$$L_n(x) - L_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) - \sum_{i=0}^{n} f^*(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i l_i(x)$$

这说明插值多项式的扰动是由节点函数值扰动引起的.

当节点等距分布时，取 Newton 插值多项式的形式

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$N_n^*(x) = f^*(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f^*[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$$

运用

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, \qquad h = x_{i+1} - x_i, x_k = x_0 + kh.$$

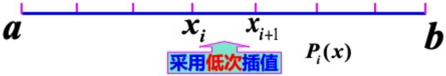
从而可知

$$N_n(x) - N_n^*(x) = y_0 - y_0^* + \sum_{k=1}^{n} C_n^k(\Delta^k y_0 - \Delta^k y_0^*)$$

上式说明插值多项式的扰动由初始函数值 y_0^* 引起. 当 $\Delta y_k^* = \delta$, 差分会随阶数的提高增加很快，于是由函数值扰动得到的插值多项式在一些点处的值很大，也就是高次插值法不稳定.

§4.4.2 分段插值

将插值区间划分为若干个小区间（通常取等距划分）



在区间 $[a, b]$ 上得到分段函数

$$f(x) \approx \varphi(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \cdots & \cdots \\ p_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

§4.2.2.1 分段线性插值

在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，用 1 阶多项式逼近函数 $f(x)$

$$f(x) \approx P_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} = l_i y_i + l_{i+1} y_{i+1}$$

这里 $l_i(x)$ 为分段线性插值基函数，满足

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

从而可以算出

$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$l_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

$$l_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

从而分段插值函数的表达式为

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

分段线性插值从整体上看，逼近效果较好，但失去了原函数的光滑性.

定理 (分段线性插值的误差估计)

设给定节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 及相应的函数值 $y_0, \cdots, y_n$, $f(x) \in C^1[a,b]$, $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，$\varphi(x)$ 是在 $[a,b]$ 上由数据 (x_i, y_i) 构成的分段线性插值函数，则

$$|R(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^2}{8} M$$

其中 $h = \max_{0 \leq i \leq n-1}(x_{i+1} - x_i)$, $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

证明：每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$

$$R_i(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$\Rightarrow |R(x)| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} |R_i(x)| = \frac{M}{2!}|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leq \frac{h^2}{8} M$$

§4.4.2.2 分段二次插值

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上用二次多项式逼近函数 $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_i(x) &= \frac{(x-x_{i+1/2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1/2})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})}y_{i+1/2} \\ &\quad + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1/2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+1/2})}y_{i+1} \\ &= y_i l_i(x) + y_{i+1/2} l_{i+1/2}(x) + y_{i+1} l_{i+1}(x) \end{aligned}$$

引入分段二次插值基函数 $l_i(x), l_{i+1/2}(x)$, 则

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_j) l_j(x) + f(x_{j+1/2}) l_{j+1/2}(x)] + f(x_n) l_n(x), \quad x \in [a, b].$$

其中

$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{1/2})(x - x_1)}{(x_0 - x_{1/2})(x_0 - x_1)} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & others \end{cases}$$

$$l_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1/2})} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & others \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$l_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{n-1})(x - x_{n-1/2})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-1/2})} & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & others \end{cases}$$

$$l_{i+1/2}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})} & x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0 & others\end{cases}\qquad i=0,1,\cdots,n-1.$$

其误差满足

$$\begin{aligned}|R(x)| &\le \max_{0\le i\le n-1}|R_2^{(i)}(x)| \\ &= \max_{0\le i\le n-1}\left|\frac{f'''(\xi_i)}{3!}\right||(x-x_i)||(x-x_{i+1/2})||(x-x_{i+1})| \\ &\le \frac{\sqrt{3}}{216}M_3h^3\end{aligned}$$

这里 $M_3=\max\limits_{a\le x\le b}|f'''(x)|$.

目 录

§4.5 三次样条插值

问题背景

许多实际工程技术中一般对精度要求非常高，

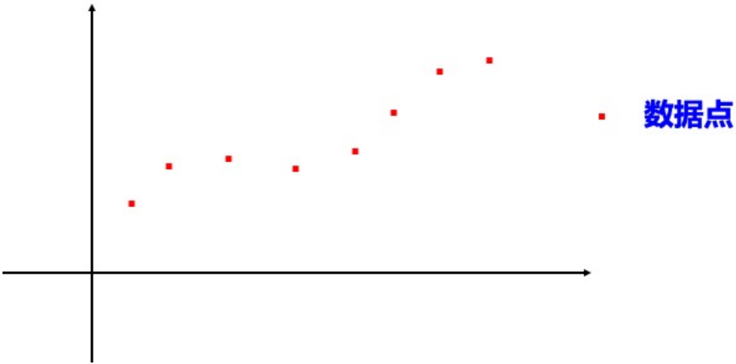
1. 要求近似曲线在节点连续;
2. 要求近似曲线在节点处导数连续，即充分光滑。

在工程技术和数学应用中经常遇到这样一类数据处理问题：在平面上给定了一组有序的离散点列，要求用一条光滑曲线把这些点按次序连接起来.

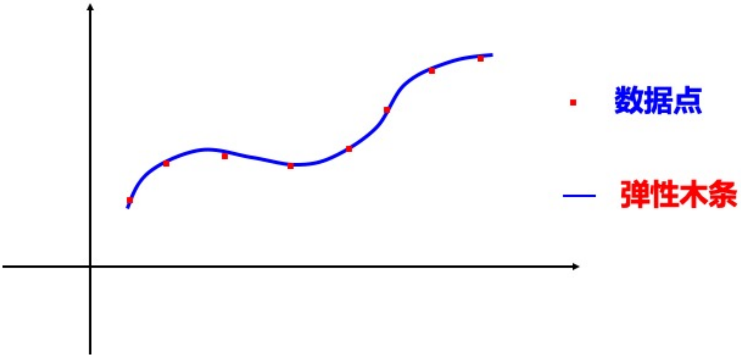
分段插值不能保证节点的光滑性，而 Hermite 插值需要知道节点处的导数值，实际中无法确定.

§4.5.2 三次样条函数的力学背景

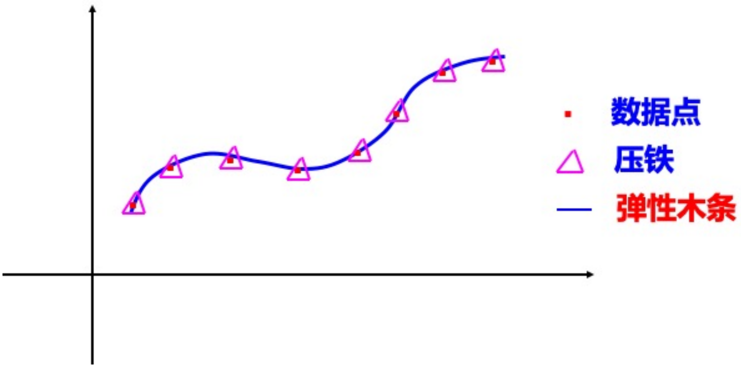
在力学上，均匀细木条通常可以看作弹性细梁，压铁看作是作用在梁上的集中载荷，“样条曲线”就模拟为弹性细梁在外加集中载荷作用下的弯曲变形曲线. 如下图所示



在力学上，通常均匀细木条可以看作弹性细梁，压铁看作是作用在梁上的集中载荷，“样条曲线”就模拟为弹性细梁在外加集中载荷作用下的弯曲变形曲线. 如下图所示



在力学上，通常均匀细木条可以看作弹性细梁，压铁看作是作用在梁上的集中载荷，“样条曲线”就模拟为弹性细梁在外加集中载荷作用下的弯曲变形曲线. 如下图所示



形象地称之为样条曲线.

设细梁刚度系数为 A，弯矩为 M，样条曲线的曲率为 $k(x)$, 由力学知识可知

$$Ak(x) = M(x), \quad M(x)\text{是线性函数}$$

当 $|y'| \lll 1$ 时（即小扰度的情况）

$$k(x) = \frac{y''}{(1 + y')^{3/2}}$$

上述微分方程简化为

$$Ay'' = M(x) \Rightarrow y^{(4)} = 0$$

因此，“样条曲线”可近似认为是三次多项式.

§4.5.2 三次样条函数定义及求法

定义

设在区间 $[a,b]$ 上给定一个分割,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

定义在 $[a,b]$ 上的函数 $S(x)$ 如果满足下列条件:

1. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内 $S(x)$ 是三次多项式;
2. 在整个 $[a,b]$ 区间上,$S(x)$ 为二阶连续可导函数,即在每个节点 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 处

$$S^{(k)}(x_i - 0) = S^{(k)}(x_i + 0) \quad k = 0,1,2 \tag{5.8}$$

则称 $S(x)$ 为三次样条函数.

如果三次样条函数 $S(x)$ 满足

$$S(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.9}$$

则称 $S(x)$ 为插值于 $f(x)$ 的三次样条函数，简称三次样条插值函数.
假设现在已知函数 $f(x)$ 在节点处的函数值:

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

如何求 $f(x)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) & x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \cdots & \cdots \\ s_n(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

有 $4n$ 个未知量，如何确定 $S(x)$?

§4.5.2.1 M 连续方程与 $S(x)$ 的表达式

记 $M_i = S''(x_i)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$. 因为 $S''(x)$ 在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都是线性函数

$$s_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

两边积分可得

$$s_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + A_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

再积分可得

$$s_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i x + B_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

代入插值条件 $s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, s_i(x_i) = y_i$ 可得

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6}, \\ B_i &= (\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6})x_i + (-\frac{y_i}{h_i} + \frac{h_i M_i}{6})x_{i-1} \end{aligned}$$

注意到，这里的 $M_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 共有 $n+1$ 个，下面分析 M_i 的计算方法，运用样条函数性质

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

可得

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

其中

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

此方程称为三弯矩方程，为样条函数 $S(x)$ 的 M 连续方程.

§4.5.2.2 m 连续方程与 $S(x)$ 表达式

记 $m_i = S'(x_i)$, 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 采用 Hermite 插值

$$
\begin{aligned}
s_{i+1}(x) \quad = \quad & y_i \frac{(x_{i+1}-x)^2[2(x-x_i)+h_{i+1}]}{h_{i+1}^3} \\
& + y_{i+1}\frac{[2(x_{i+1}-x)+h_{i+1}](x-x_i)^2}{h_{i+1}^3} \\
& + m_i \frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h_{i+1}^2} - m_{i+1}\frac{(x_{i+1}-x)(x-x_i)^2}{h_{i+1}^2}
\end{aligned}
$$

再由条件

$$
S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1
$$

可得方程组

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{5.10}$$

其中

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$c_i = 3(\lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}).$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 2 & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

此方程称为三转角方程，为样条函数 $S(x)$ 的 m 连续方程.
方程 (5.10) 有直观的力学意义：$c_i/3$ 为过三点 (x_{i-1}, y_{i-1}),(x_i, y_i),(x_{i+1}, y_{i+1}) 的抛物线在 x_i 处的一阶导数，(5.10) 说明 $c_i/3$ 等于插值函数的一阶导数在 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 三点处的加权平均，这在力学上称之为“三转角关系”.

从上面的 M、m 连续方程可知，需要补充附加条件才能求解（$n+1$ 个未知量，$n-1$ 个方程）.

§4.5.2.3 边界条件

通常处理方法有以下三种：

1. I 型边界：已知端点的斜率，$f'(x_0) = y_0' = m_0, f'(x_n) = y_n' = m_n$;
2. II 型边界：已知端点的二阶导数，$f''(x_0) = y_0'' = M_0, f''(x_n) = y_n'' = M_n$;
3. III 型边界：设 $y = f(x)$ 是以 $b - a$ 为周期的周期函数，对 $S(x)$ 附加周期性条件，

$$S^{(k)}(x_0 + 0) = S^{(k)}(x_n - 0) \quad k = 0, 1, 2$$

即要求三次样条插值函数在端点处函数值、一阶导数值和二阶导数值相同.

以 M 连续方程为例，考虑其在各类边界条件下的求解方法.

对于第一种边界条件，注意

$$
\begin{aligned}
s_1'(x) &= -M_0\frac{(x_1-x)^2}{2h_1}+M_1\frac{(x-x_1)^2}{2h_1}+A_1, \quad x\in[x_0,x_1] \\
s_n'(x) &= -M_{n-1}\frac{(x_n-x)^2}{2h_n}+M_n\frac{(x-x_{n-1})^2}{2h_n}+A_n \quad x\in[x_{n-1},x_n]
\end{aligned}
$$

由 $s_1'(x_0)=m_0=f'(x_0), s_n'(x_n)=m_n=f'(x_n)$ 可得

$$
m_0=-M_0h_1/2+A_1, \quad m_n=M_nh_n/2+A_n
$$

将 A_i 代入可得

$$
\begin{aligned}
2M_0+M_1 &= \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-m_0\right)=d_0 \\
M_{n-1}+2M_n &= \frac{6}{h_n}\left(m_n-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right)=d_n
\end{aligned}
$$

从而可得求解 M 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

对于第二种边界条件

$$M_0 = f''(x_0) = y_0'', \quad M_n = f''(x_n) = y_n''$$

从而可得

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

对于第三种边界条件

$$y_0 = y_n, \quad M_0 = M_n, \quad S'(x_0+0) = S'(x_n-0)$$

从而的方程

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 + \mu_0 M_{n-1} = d_0$$

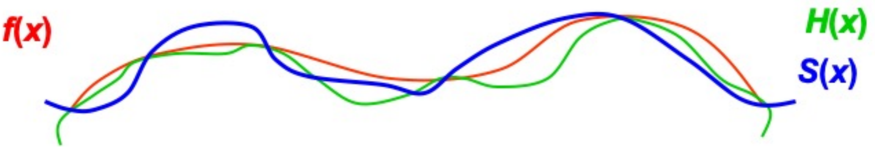
其中

$$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_1+h_n}, \quad \mu_0 = \frac{h_n}{h_1+h_n}, \quad d_0 = \frac{6}{h_1+h_n}(f[x_0,x_1] - f[x_{n-1},x_n]).$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

备注

三次样条插值与分段 Hermite 插值的根本区别在于 $S(x)$ 自身光滑，不需要知道 $f(x)$ 的导数值（除了在 2 个端点处的函数值）；而 Hermite 插值依赖于 $f(x)$ 在许多插值节点的导数值。



§4.5.3 三次样条函数的性质

性质 1：极小模性质

设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 是任一被插函数，$S(x)$ 是自然三次样条插值函数 $(M_0 = M_n = 0)$，则成立

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

式中等号当且仅当 $f(x) \equiv S(x)$ 时成立.

证明：

$$\int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx = \int_a^b [f''(x)]^2 dx - 2\int_a^b f''(x)S''(x)\,dx + \int_a^b [S''(x)]^2 dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b [f''(x)]^2\,dx - \int_a^b [S''(x)]^2\,dx - 2\int_a^b [f''(x) - S''(x)]S''(x)\,dx \\
&= \int_a^b [f''(x)]^2\,dx - \int_a^b [S''(x)]^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b [f''(x) - S''(x)]S''(x)\,dx \\
= \;& [f'(x) - S'(x)]S''(x)|_a^b - \int_a^b [f'(x) - S'(x)]S'''(x)\,dx \\
= \;& [f'(x) - S'(x)]S''(x)|_a^b - [f(x) - S(x)]S'''(x)|_a^b \\
& - \int_a^b [f(x) - S(x)]S^{(4)}(x)\,dx = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{等号成立} \Leftrightarrow &\quad f''(x) - S''(x) = 0 \\
\Rightarrow &\quad f(x) - S(x)\text{为线性函数} \\
\Rightarrow &\quad f(x) \equiv S(x) \quad \text{(插值条件)}
\end{aligned}
$$

性质 2：最佳逼近性质

设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 是任一被插函数，$S_f(x)$ 是带有斜率边界条件（第一类边界）的三次插值样条函数，$S(x)$ 是与 $S_f(x)$ 有相同分割的任一三次样条函数，则有

$$\int_a^b [f''(x) - S_f''(x)]^2 dx \le \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx.$$

注释

- 最佳逼近性质的证明类似于极小模性质的证明，不再给出.
- 最佳逼近性质表明，当给定 $C^2[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 时，在所有具有相同分割的三次样条插值 $S(x)$ 中，以插值三次样条函数 $S_f(x)$ 的弯矩在均方意义下对 $f(x)$ 的弯矩逼近最好.

性质 3：误差估计

设 $f(x) \in C^4[a,b]$，Δ 是区间 $[a,b]$ 的一个分割，$S(x)$ 是关于 $f(x)$ 的带有 I 型 (斜率边界) 或 II 型 (二阶导数边界) 边界条件的插值函数，则有误差估计

$$\max_{a\le x\le b} |(f(x)-S(x))^{(r)}| \le C_r M_4 h^{(4-r)}, \quad r=0,1,2,3,$$

其中 $C_0 = 5/384, C_1 = 1/24, C_2 = 3/8, C_3 = (\beta+\beta_{-1})/2$,
$h = \max_i h_i, \beta = \max_i h_i / \min_i$ 是分割比，且系数 C_0 和 C_1 是最优估计.

注释

性质 3 说明：三次样条插值函数本身连同它的一、二、三阶导数分别收敛到 $f(x)$ 及其相应导数，具有强收敛性.

例题

已知函数 $y = f(x)$ 在点 $x_i = i(i = 0, 1, 2, 3)$ 的数据

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	2	3	6
$f'(x_i)$	1	-	-	0

求 $y = f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的三次样条插值函数.

解：利用三弯矩方程求解.

$$
\begin{aligned}
&h_1 = h_2 = h_3 = 1, \\
&f[x_0, x_1, x_2] = -0.5, \quad f[x_1, x_2, x_3] = 1, \\
&d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - m_0\right) = 6, \\
&d_3 = \frac{6}{h_3}\left(m_3 - \frac{y_3 - y_2}{h_3}\right) = -18,
\end{aligned}
$$

$$
\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]
$$

三弯矩方程为

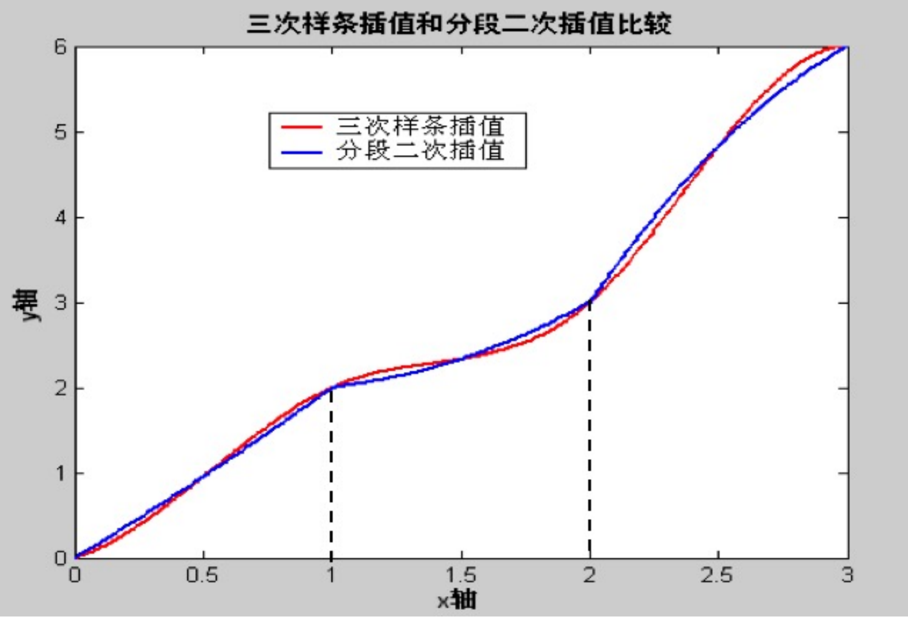
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix}$$

用追赶法求解方程组得

$$[M_0, M_1, M_2, M_3] = \left[\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{22}{3}, -\frac{38}{3}\right]$$

从而可得三次样条插值函数

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-5x^3 + 8x^2 + 3x) & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{3}(6x^3 - 25x^2 + 36x - 11) & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{3}(-10x^3 + 71x^2 - 156x + 117) & x \in [2, 3] \end{cases}$$


三次样条插值和分段二次插值比较
三次样条插值
分段二次插值
y轴
x轴
0
1
2
3
4
5
6
0.5
1.5
2.5

知识小结

主要内容

Lagrange 插值、Newton 插值、Hermite 插值
分段插值、Runge 现象
三次样条插值

重点及难点

重点：Lagrange 插值、Newton 插值、分段插值
难点：三次样条插值

Many thanks for your attention！

CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM