2017—2018 学年第一学期
《高等数学（2-1）》期中考试卷
答案及评分标准

（工 科 类）

专业班级 ______________________

姓　　名______________________

学　　号______________________

开课系室______基础数学系________

考试日期____2017 年 11 月 11 日____

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
本题满分	12	18	10	18	8	12	10	12	
本题得分									
阅卷人									

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共八道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 8 页。

本题满分 12 分	
本 题 得 分	

一．简答与选择题（共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）

1．试说明数列$\{x_n\}$收敛与数列$\{x_n\}$有界的关系.

答：数列$\{x_n\}$收敛必有界，

但数列$\{x_n\}$有界，不一定收敛，例如：$\{(-1)^n\}$，有界，

但$\{(-1)^n\}$发散.（不举反例也算对）--（3 分）

2．试说明函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导与连续的关系.

答：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f(x)$ 在 x_0 点必连续，若函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $f(x)$ 在 x_0 点不一定可导，例如：$f(x)=|x|$，在 $x=0$ 连续，但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点不可导（$f'_+(0)=1\neq -1=f'_-(0)$）.（不举反例也算对）

--（3 分）

3．选择题：设函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f^{(n)}(x)=$（ A ）

(A) $n![f(x)]^{n+1}$；　　(B) $n![f(x)]^{2n}$；

(C) $n[f(x)]^{n+1}$；　　(D) $[f(x)]^{2n}$.

---（3 分）

4．选择题：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值，则（ B ）

(A) $f'(x_0)=0$；　　(B) $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在；

(C) $f''(x_0)>0$；　　(D) $f'(x_0)=0$，$f''(x)<0$.

---（3 分）

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

解 $\because \frac{n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}$,----------------------（ 3 分 ）

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1})$, 由夹逼定理,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0$. --（ 3 分 ）

2. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$.

解　当 $x\to 0$ 时，　$\ln(1+\sin^2 x)\sim\sin^2 x\quad\sim x^2$；$e^{x^2}-1\sim x^2$，----------（ 2 分 ）

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$. ----------------------------（ 4 分 ）

3. 求极限：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ $(\infty-\infty)$（通分）

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$ $(\frac{0}{0})$--（ 3 分 ）

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$ $(\frac{0}{0})$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$. ---（ 3 分 ）

三.（10 分）设函数 $f(x)=\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}$，指出函数的间断点，并判断其类型.

本题满分 10 分	
本题得分	

解　$f(x)$ 的间断点为：　$2, -2, 0, k\pi\ (k=\pm 1, \pm 2, \cdots)$.-------------------（ 2 分 ）

因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $x=0$ 为可去间断点；

------------------------------（ 2 分 ）

因为 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=\dfrac{1}{2\sin 2}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\dfrac{1}{2\sin 2}$,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=\dfrac{1}{2\sin 2}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=-\dfrac{1}{2\sin 2}$,

所以 $x=2$ 是跳跃间断点；---（ 2 分 ）

因为 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=-\dfrac{2}{\sin 2}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}=\infty$,

所以 $x=-2$ 是无穷间断点；---（ 2 分 ）

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to k\pi \\ (k\neq 0, k\in Z)}} f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=\infty$,

所以 $x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是无穷间断点. -----------------------------------（ 2 分 ）

四.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2017)$，求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ -------------------------（ 2 分 ）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+2017)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+2017)$$

$=2017!$.---（ 4 分 ）

2. 设 $y=\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$，求 dy.

解 $y=\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$，---------------------------------（ 1 分 ）

$$y'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1-x}{x^2+4},$$

---（ 3 分 ）

$\therefore dy=y'dx=(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1-x}{x^2+4})dx$.--（ 2 分 ）

3. 设方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ ($x>0$, $y>0$) 确定二阶可导函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ 两边取对数，有 $\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x$，-----------------（ 1 分 ）

即 $y\ln y=x\ln x$，两边关于 x 求导，

$(1+\ln y)\dfrac{dy}{dx}=1+\ln x$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\ln x}{1+\ln y}$，----------------------------（ 2 分 ）

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{1}{x}(1+\ln y)-(1+\ln x)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}{(1+\ln y)^2}$$

$=\dfrac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}$.---（ 3 分 ）

五．（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} a+2+b(1+\sin x), & x<0 \\ e^{ax}-1\ \ , & x\geq 0 \end{cases}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，并求 $f'(0)$.

本题满分 8 分	
本题得分	

解 $\because\ f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a(e^{ax}-1)}{ax}=a$，

---------------------------- （ 2 分 ）

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a+2+b(1+\sin x)}{x}$$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{a+b+2}{x}+\dfrac{b\sin x}{x})$，-------------------------------------- （ 2 分 ）

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，$\therefore\ f_+'0)=f_-'(0)=f'(0)$，

$\therefore\begin{cases} a+b+2=0, \\ a=b. \end{cases}$ $\therefore\ a=b=-1$，------------------------------------ （ 2 分 ）

$\therefore\ f_-'(0)=b=-1$， $f_+'(0)=a=-1$， 故 $f'(0)=1$.

------------------------------ （ 2 分 ）

本题满分 12 分	
本题得分	

六．应用题（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1．求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程 .

解　当$t = \dfrac{\pi}{2}$时，$x_0 = a(\dfrac{\pi}{2} - 1), y_0 = a$，------------- （ 2 分 ）

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$ ------------------------------------ （ 2 分 ）

所求切线的方程为：$y - a = x - a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$，

即　$x - y - \dfrac{\pi a}{2} + 2a = 0$. ------------------------------------ （ 2 分 ）

2．如果将一个边长为 6 米的正方形铁皮的四角各剪去同样大小的小正方形后，制成一个无盖盒子，问剪去小正方形的边长为多少米时，可使盒子的容积最大？

解　设每个小正方形的边长为 x 米，　则所做盒子的容积为：

$$V(x) = x(6-2x)^2,\quad x \in (0, 3).$$ -------------------------------------- （ 3 分 ）

$$V'(x) = (6-2x)^2 + x \cdot 2(6-2x)(-2)$$
$$= (6-2x)(6-6x)$$

令　$V'(x) = (6-2x)(6-6x) = 0$，得 $x_1 = 1$，$x_2 = 3$（不符合实际意义，舍去）

从而得符合实际意义唯一的驻点 $x = 1$，-- （ 2 分 ）

故由实际问题的意义，可知当剪去小正方形的边长为 1 米时，可使盒子的容积最大.

-- （ 1 分 ）

七．（10 分）已知 $f(x)=x-5\arctan x$，试讨论函数的单调区间、极值、凸性、拐点 .

本题满分 10 分	
本题得分	

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$．$f'(x)=1-\dfrac{5}{1+x^2}=\dfrac{x^2-4}{1+x^2}$，

令 $f'(x)=0$ 得驻点：$x=\pm 2$，

$f''(x)=\dfrac{10x}{(1+x^2)^2}$，令 $f''(x)=0$ 得：$x=0$.------------------------------- （ 3 分 ）

当 $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$时，$f'(x)=1-\dfrac{5}{1+x^2}=\dfrac{x^2-4}{1+x^2}>0,$

$\therefore$ $f(x)$ 在$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$单调递增，

当 $x\in(-2,2)$时，$f'(x)=1-\dfrac{5}{1+x^2}=\dfrac{x^2-4}{1+x^2}<0,$

$\therefore$ $f(x)$ 在$[-2,2]$单调递减；--- （ 2 分 ）

从而 $f(x)$ 在 $x=-2$ 取得极大值：$f(-2)=-2+5\arctan 2$，

在 $x=2$ 取得极小值：$f(2)=2-5\arctan 2$；----------------------------- （ 2 分 ）

当 $x\in(-\infty,0)$时，$f''(x)=\dfrac{10x}{(1+x^2)^2}<0,$

$\therefore f(x)=x-5\arctan x$ 在$(-\infty,0)$内是上凸的，

当 $x\in(0,+\infty)$时，$f''(x)=\dfrac{10x}{(1+x^2)^2}>0,$

$\therefore f(x)=x-5\arctan x$ 在$(0,+\infty)$内是下凸的；---------------------------- （ 2 分 ）

故曲线 $f(x)=x-5\arctan x$ 的拐点为：$(0,0)$.----------------------------- （ 1 分 ）

八．证明题（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

1．证明：当 $x>1$ 时，有 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

证明 令 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$，$f(1)=0$，---（ 3 分 ）

则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}>0 \quad (x>1)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，从而，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，

即 $2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}>0$，亦即 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$. --（ 3 分 ）

2．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明 令 $F(x)=e^x f(x)$， --- （ 2 分 ）

则由已知，$F(x)=e^x\ f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$F'(x)=[e^x f(x)]'=e^x f(x)+e^x\ f'(x)$， 由 $f(0)=f(1)=0$，得

$F(0)=e^0 f(0)=f(0)=0$, $F(1)=e\ f(1)=0$，即 $F(0)=F(1)$, ------- （ 2 分 ）

根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，

由 $e^{\xi}\neq 0$，故 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.--- （ 2 分 ）

各章分值分配：第 1 章 25 分；第 2 章 38 分；第 3 章 37 分.