2009-2010 学年第一学期 高等数学（2-1）期中试题参考答案

一、 填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分共 18 分）

1．设 $g(x)=3x+1$， $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$，则 $f(g(x))=$ $\underline{\begin{cases} 3x+1, & -\frac{1}{3}\le x\le 0 \\ 1-3x, & 0<x\le \frac{1}{3} \end{cases}}$.

2．设 $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\dfrac{2}{(1-x)^2}}$.

3．设 $y=f(x+f(x))$ 二阶可导，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$

$\underline{f''(x+f(x))(1+f'(x))^2+f'(x+f(x))f''(x)}$.

4．试用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A$ 的定义

$\underline{\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x: 0<x_0-x<\delta, \Rightarrow \left|f(x)-A\right|<\varepsilon}$.

5．设 $f(x)>0$ 且在点 $x_0=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=$ $\underline{\dfrac{f'(a)}{f(a)}}$.

6. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^k}$ 与 $\sin\dfrac{1}{x^2+1}$ 是等价无穷小，则 $k=$ $\underline{2}$.

二 选择题 （共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则下面表达式不正确的是 （ C ）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. B. $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$.

C. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. D. $dy-\Delta y=o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图[1]所示，则 $f(x)$ 有（ C ）.

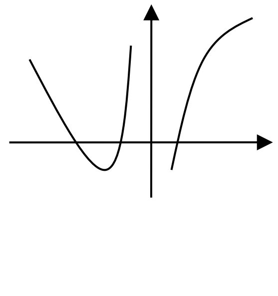
A. 一个极小点和一个极大点. B. 两个极小点和一个极大点.

C. 两个极小点和两个极大点. D. 三个极小点和一个极大点.

3．下列命题错误的是（ D ）.

A. 在 x_0 某去心邻域内 $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

图 [1]



B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 存在.

D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 分别存在.

4．曲线 $y=2x+\dfrac{\ln x}{x-1}+4$ 的渐近线的条数为 (C).

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

三、计算题（共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分）

1． $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2+\sqrt{x}}=1$. 2． $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}=-\dfrac{1}{8}$.

3． $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$. 4．设 $\begin{cases}x=a(\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t)\\ y=a\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\cos t}{a(\dfrac{1}{\tan^2\frac{t}{2}}\dfrac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\dfrac{1}{2}-\sin t)}=\dfrac{\sin t}{\cos t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sin t}{a\cos^4 t}$。

5．设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$，求 $f(x)$ 在点 $x_0=2$ 处的 n 阶导数值.

解 $f(x)=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$ $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ $f^{(n)}(2)=(-1)^n n!$

6．设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^x=x^y$ 所确定的函数， $x>0$， $y>0$，求微分 dy.

解 由 $y^x=x^y$ $\Rightarrow x\ln y=y\ln x$ ，

$\ln y+x\dfrac{1}{y}y'=y'\ln x+y\dfrac{1}{x}$ $dy=\dfrac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}dx$.

四、应用题（共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}a(x+1)^2, & x<1\\ b, & x=1\\ c+\arctan x, & x>1\end{cases}$，选取合适的 a、b、c 使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续、可导.

解　$f(1^-)=4a$，$f(1^+)=c+\dfrac{\pi}{4}$，当$f(1^-)=f(1^+)=f(1)$时，

即 $4a=c+\dfrac{\pi}{4}=$ b 时------------（1）

$f(x)$在点$x=1$处连续.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{a(x+1)^2-4a}{x-1}=4a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{a+\arctan x-a-\arctan1}{x-1}=(\arctan x)'|_{x=1}=\frac{1}{1+x^2}|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

当$f'_-(1)=f'_+(1)$时，即$4a=\dfrac{1}{2}$时，------------（2）

$f(x)$在点$x=1$处可导. 综合（1）、（2），得

当 $a=\dfrac{1}{8},b=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$时，$f(x)$在点$x=1$处连续、可导.

2．设函数 $f(x)=\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}$，指出函数的间断点，并判断其类型.

解　$f(x)$的间断点为2，-2，0，$k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $x=0$ 为可去间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=\dfrac{1}{2\sin2}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\dfrac{1}{2\sin2}$,

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=\dfrac{1}{2\sin2}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=-\dfrac{1}{2\sin2}$,

所以 $x=2$ 是跳跃间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=-\dfrac{2}{\sin2}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x+2}=\infty$，所以 $x=-2$ 是无穷间断点。

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to k\pi\\(k\neq0,k\in Z)}}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}=\infty$，所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是无穷间断点。

3. 求函数 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$ 的极值、凸凹区间及曲线的拐点坐标。

解　$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$　　$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$，令 $f''(x)=0$，得 $x=1,x=-1$

上凸区间为 $[-1,\quad 1]$，　下凸区间为$[-\infty-1],[1,+\infty$）

拐点为$(-1,e^{\frac{-1}{2}}),(1,\ \ e^{\frac{-1}{2}}$）,极大值为 1.

4. 一气球从离开观察员 500 米处离开地面铅直上升，其速率为 140 米/分，当气球高度为 500 米时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解　设仰角为α，高度变量为 h, 由题意知 $\dfrac{dh}{dt}=140$，$\tan\alpha=\dfrac{h}{500}$，

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\dfrac{dh}{dt}$　　即　$\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\cos^2\alpha\dfrac{dh}{dt}$，

h=500 时，$\cos\alpha=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　　所以 $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\times\dfrac{1}{2}\times 140=0.14$ 弧度/分

五、证明题（共 2 题，每小题 5 分，满分 10 分）

1.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒为正，证明对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$，

必存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]$， 使 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

证 令 $F(x)=f^2(x)-f(x_1)f(x_2)\qquad x\in[x_1,x_2]\subset[a,b]$

则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续.

又 $F(x_1)F(x_2)=-f(x_1)f(x_2)(f(x_2)-f(x_1))^2\le 0$，

当等号立时， 即 $f(x_1)=f(x_2)$, 此时 $\xi=x_1$ 或 x_2，使得

$$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\text{ 成立}.$$

当 $F(x_1)F(x_2)=-f(x_1)f(x_2)(f(x_2)-f(x_1))^2<0$ 时，

由零值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$ 使 $F(\xi)=0$，即

$$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\quad .$$

综上所述，$\exists\xi\in[x_1,x_2]$ 使得 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$　　.

2. 证明：当 $0<x<1$ 时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

证 令 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x\qquad x\in[0,1]$

$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1\qquad x\in[0,1]$

又 $f''(x)=-4xe^{2x}<0\qquad x\in[0,1]$

故 $f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$　在 $[0,1]$ 单减，

所以 $f'(x)<f'(0)=0\qquad 0<x<1$

由此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单减，即 $f(x)<f(0)=0\qquad 0<x<1$

$(1-x)e^{2x}<1+x\qquad x\in(0,1)$　　即　$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}\qquad x\in(0,1)$