2006—2007 学年第一学期　高等数学（2-1）（工科类）期末试卷(A)参考答案

一、填空题　(**本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分**.)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}=$ __1__ .

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x>0\\ 8, & x=0\\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x e^t dt}{x}, & x<0\end{cases}$ 连续，则 $a=$ __16__ ,$b=$ __7__ .

3．极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ __e^6__ .

4．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $f'(0)=$ __2__ .

5．设方程 $x-y-e^y=0$ 确定函数 $y=y(x)$，　则 $\dfrac{dy}{dx}=$ __$\dfrac{1}{1+e^y}$__ .

6．设 $y=2^{-x}\cos 3x$，则 $dy=$ __$-2^{-x}(\cos 3x\cdot\ln 2+3\sin 3x)dx$__ .

7．抛物线 $y=x^2+2x+8$ 在其顶点处的曲率为 __2__ .

8．设 $f(x)$ 可导，$y=f\{f[f(x)]\}$，则 $y'=$ __$f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x)$__ .

9．$\int_{-a}^{a}\{[f(x)+f(-x)]\sin x+\sqrt{a^2-x^2}\}dx=$ __$\dfrac{a^2\pi}{2}$__ .

10．微分方程 $y'-\dfrac{y}{x}-x^2=0$ 的通解是 __$y=x\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$__ .

二、单项选择题（**本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.**）

1. “数列极限存在”是“数列有界”的（　B　）

(A) 充分必要条件；　　(B) 充分但非必要条件；

(C) 必要但非充分条件；　　(D)既非充分条件，也非必要条件.

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=$（ B　）

(A) 2；　(B) 3；　(C) 1；　(D) 5；

3．设常数$k>0$，则函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在$(0,+\infty)$内零点的个数为（ B ）

(A) 3 个；　(B) 2 个；　(C) 1 个；　(D) 0 个.

4．设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ C ）.

(A) 连续点；　(B) 可去间断点；

(C) 跳跃间断点；　(D) 无穷间断点.

5．设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$，令 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，当 $\Delta x<0$ 时，则（D ）.

(A) $\Delta y>dy>0;$　(B) $\Delta y<dy<0;$

(C) $dy>\Delta y>0;$　(D) $dy<\Delta y<0.$

6．若 $f(-x)=-f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$，在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$, $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内（B ）.

(A) $f'(x)>0,\quad f''(x)<0$　(B) $f'(x)>0,\quad f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,\quad f''(x)<0$　(D) $f'(x)<0,\quad f''(x)>0$

7．设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=-1$，则（ A ）.

(A) x_0 是 $f(x)$ 的极大值点；　(B) x_0 是 $f(x)$ 的极小值点；

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；　(D) 以上都不是.

8．下列等式中正确的结果是（ D ）.

(A) $\int f'(x)dx=f(x);$　(B) $\int df(x)dx=f(x);$

(C) $d\,[\int f(x)dx]=f(x)$；　(D) $(\int f(x)dx)'=f(x)$.

9．下列广义积分收敛的是（ C ）.

(A) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ ；　(B) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ ；

(C) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ ；　(D) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

10．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ D ）.

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在 (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

三、计算题：（**本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。**）

1. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx$

解$\because$ $d(5\cos x+2\sin x)=(2\cos x-5\sin x)dx$,

$$\therefore\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx=\int\frac{(2\cos x-5\sin x)+(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}dx$$

$$=\int\frac{d(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}+\int dx=x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C.$$

2. 计算定积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

解 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|dx+\int_{1}^{e}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx+\int_{1}^{e}\ln xdx$

$$=(-x\ln x+x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}=2-\frac{2}{e}.$$

3．求微分方程 $y''+5y'+4y=3-2x$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+5r+4=0,$ 特征根 $r_1=-4, r_2=-1.$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}$.

而 0 不是特征根，可设非齐次方程的特解为 $\overline{y}=Ax+B$ 代入原方程可得，

$A=-\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{11}{8}$. $\therefore$ $\overline{y}=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{8}$.

故所要求的通解为 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{8}.$

四．解答题：（**本题共 6 小题，共 37 分。**）

1.（本题 5 分）求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线的方程.

解 当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$x_0=a(\dfrac{\pi}{2}-1), y_0=a$ ，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$

所求切线的方程为：$y-a=x-a(\dfrac{\pi}{2}-1)$, 即 $x-y-\dfrac{\pi a}{2}+2a=0$.

2.（本题 6 分）求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解 $\because$ $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^3}{(x-1)(x+3)}$,

$$\therefore\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{(x-1)(x+3)}=\infty,\quad \lim_{x\to -3}y=\lim_{x\to -3}\frac{x^3}{(x-1)(x+3)}=\infty,$$

$\therefore$ 有垂直渐近线：$x=1$ ，$x=-3$.

又 $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+2x-3} = \infty$, $\therefore$ 没有水平渐近线.

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3} = 1,\ b = \lim_{x\to\infty}[y-x] = \lim_{x\to\infty}[\frac{x^3}{x^2+2x-3} - x]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3} = -2,$$

$\therefore$ 有斜渐近线： $y = x-2$.

3.（本题 6 分）求由曲线 $xy=1$ 及直线 $y=x$, $y=2$ 所围成图形面积.

解 根据题意，所求面积为：$S = \int_1^2 (y-\dfrac{1}{y})dy = (\dfrac{y^2}{2} - \ln|y|)\Big|_1^2 = \dfrac{3}{2} - \ln 2$.

4.（本题 6 分）证明：对任意实数 x ，恒有 $xe^{1-x} \le 1$.

证 令 $f(x) = 1 - xe^{1-x}$ ，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且二阶可导，

$f'(x) = e^{1-x}(x-1)$ ， $f''(x) = e^{1-x}(2-x)$ ，令 $f'(x) = e^{1-x}(x-1) = 0$ ，得

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的唯一驻点 $x=1$ ，且 $f''(1) = 1 > 0$ ，

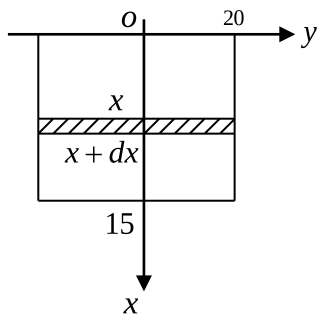
$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有唯一极小值 $f(1) = 0$ ，即最小值.

故 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ，有 $f(x) \ge f(1) = 0$ ，即 $f(x) = 1 - xe^{1-x} \ge 0$ ，

亦即 $xe^{1-x} \le 1$.

5.（本题 6 分）设有盛满水的圆柱形蓄水池, 深 15 米, 半径 20 米, 现将池水全部抽出, 问需作多少功?

解 如图建立坐标系，



$\forall x \in [0,15]$, 取典型区间 $[x,\ x+dx]$, 则

$dW = \rho g \cdot (20^2\pi \cdot dx) \cdot x = 400\,\pi\,\rho\,g\,xdx$,

（其中水的比重为 $\rho\,g$, ρ 为水的密度, g 为重力加速度.）

$$\therefore W = \int_0^{15} dW = 400\,\pi\,\rho\,g\int_0^{15} xdx$$

$$= 200\,\pi\,\rho\,g\,x^2\Big|_0^{15} = 45000\,\pi\,\rho\,g.$$

6.（本题 8 分）设对任意实数 x ， $f'(-x) = x[f'(x)-1]$ ，且 $f(0)=0$ ，求 $f(x)$ 的极值.

解 Θ $\forall x \in R$, 有 $f'(-x) = x[f'(x)-1]$ ------------（1）

$\therefore$ $f'(x) = -x[f'(-x)-1]$

即 $xf'(-x) = x - f'(x)$ -------------（2）

（1）+（2）得 $f'(-x) = \dfrac{x-1}{x+1}f'(x)$ 代入（1）式得， $f'(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$,

$$\therefore f(x) = \int\frac{x^2+x}{x^2+1}dx = \int(1+\frac{x-1}{x^2+1})dx = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C,$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$,故 $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x$.

令 $f'(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}=0,$ 得驻点：$x_1=0,\ x_2=-1,$ 又 $f''(x)=\dfrac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x)2x}{(x^2+1)^2}$，

$f''(0)=1>0$，$\therefore\ f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0;$

$f''(-1)=-\dfrac{1}{2}<0$，$\therefore\ f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=-1+\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$.

五.（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,2]上二阶可导，且满足条件

$f(0)=f(\frac{1}{2})=0,\ 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=f(2)$， 证明：$\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

证 由积分中值定理，$\exists\eta\in[\frac{1}{2},1],\ 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=2f(\eta)(1-\frac{1}{2})=f(\eta)=f(2).$

由洛尔中值定理，$\exists\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$, 使得 $f'(\xi_1)=0$；$\exists\xi_2\in(\eta,2)$, 使得 $f'(\xi_2)=0$，

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$, 使得 $f''(\xi)=0$.