2014—2015 学年第二学期《高等数学（2-2）》期末试卷

注:本试卷共八道大题，包括基础达标题（第一到四题），综合提高题（第五到七题），应用拓展题（第八题），满分 100 分； 其中第 8 页第 1 题仅供 80 学时者做，第 2 题仅供 96 学时者做；

一、辨析题（共 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“√”或“×”；如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.　　　　（ √ ）

解：由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，得 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$，由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

（注意：当 $a_n = 0$ 时，上述方法有问题）正确解法应为：

解 1：由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，得 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\Rightarrow \{a_n\}$有界, $\exists M>0$, 使得 $0 \le a_n \le M$,

$\therefore 0 \le a_n^2 \le Ma_n$, 由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

解 2：由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，得 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\exists N \in N^+, \forall n \ge N$ 时, $0 \le a_n < 1$, $\therefore 0 \le a_n^2 \le a_n$,

由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

2．设直线 $L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\Pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 L 垂直于平面 Π.

（√）

解：直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = \{-28,14,-7\}$,

平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = \{4,-2,1\}$. 由于 $\frac{-28}{4} = \frac{14}{-2} = \frac{-7}{1}$，故 $\vec{s} // \vec{n}$，因此直线 L 垂直于平面 Π.

3. 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处一定连续.　　　　（ × ）

例如：设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) \ne (0,0) \end{cases}$，在 $(0,0)$ 处，$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$，

但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．设 $L:x^2+y^2=1$，则 $\oint_L xds=\underline{\ 0\ }$， $\oint_L y^2ds=\underline{\pi}$， $\oint_L(x^2+y^2)ds=\underline{2\pi}$.

2. 交换积分次序：

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=\underline{\int_0^1 dy\int_{y^2}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx}.$$

3. 写出下列积分在极坐标系下的二次积分形式：

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy=\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr}.$$

4. $f(x)=e^{2x}$ 关于 x 的幂级数展开式为 $\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则以 2 为周期的傅立叶级数在 $x=1$ 处收敛于 $\underline{\frac{3}{2}}$.

三、（共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分）

1. 已知 $z=f(x\ln y,x-y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\ln y+f_2'$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{x}{y}-f_2'$，$dz=(f_1'\ln y+f_2')dx+(\frac{x}{y}f_1'-f_2')dy$ ；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{11}''\cdot\frac{x}{y}-f_{12}'')\cdot\ln y+\frac{1}{y}f_1'+f_{21}''\cdot\frac{x}{y}-f_{22}''$$

$$=\frac{1}{y}f_1'+\frac{x\ln y}{y}f_{11}''+(\frac{x}{y}-\ln y)f_{12}''-f_{22}''$$

2. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=\int_0^t e^u\cos u\,du\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+e^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解：曲线在 $t=0$ 处的切向量是 $T=\{e^t\cos t,2\cos t-\sin t,3e^{3t}\}\big|_{t=0}=\{1,2,3\}$，

$t=0$ 时切点坐标为 $x=0,y=1,z=2$，切线方程为：$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$，

法平面方程为：$(x-0)+2(y-1)+3(z-2)=0$，即 $x+2y+3z-8=0$.

3. 计算曲线积分$\int_L (x^2+y)dx+(y^2+x)dy$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=1$从$(1,0)$到$(0,1)$的一段弧.

解：$P=x^2+y, Q=y^2+x$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，因此积分与路径无关.

$$\therefore \int_L (x^2+y)dx+(y^2+x)dy=\int_1^0 x^2dx+\int_0^1 y^2dy=0,$$

或$=\int_0^1 (y^2+1)dy+\int_1^0 (x^2+1)dx=0$.

四、（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. Ω是由$z=x^2+y^2, z=4$所围成的立体，其任一点处的密度等于该点到z轴的距离的平方，求该立体的质量.

解：质量$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$，令$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，则$\Omega$: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2, r^2\le z\le 4.$

$$\therefore M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr\int_{r^2}^4 dz=\frac{32}{3}\pi.$$

2. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在球面$x^2+y^2+z^2=2z$内部的那部分面积.

解：$A=\iint\limits_{\Sigma}dS$，其中$\Sigma$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

由$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=2z \end{cases}$交线$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$投影区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，

$$\therefore A=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{D}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi.$$

3. 设平面Π与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，直线L: $\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$在平面$\Pi$上，求平面$\Pi$的方程及$a,b$的值.

解：曲面$z=x^2+y^2$在$(1,-2,5)$处的法向量为$\vec{n}=\{2x,2y,-1\}\big|_{(1,-2,5)}=\{2,-4,-1\}$.

平面Π的方程为: $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $2x-4y-z-5=0.$

由 $L:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 得 $z=x-3+a(-x-b)$，

代入平面方程 $(5+a)x+4b+ab-2=0$，解得 $a=-5, b=-2$.

五、（本题 8 分）

设有流速场 $\vec{v}=\dfrac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{i}+\dfrac{(z+a)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{k}$**，求** $\vec{v}$ **通过下半球面**

$\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad (a>0)$ **上侧的流量.**

解：流量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}dydz+\dfrac{(z+a)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}dxdy$

$=\dfrac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy$

$P=ax$， $Q=0$ ，$R=(z+a)^2$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=3a+2z$,

补充 $\Sigma': z=0, x^2+y^2\le a^2$，取下侧，设 Σ 与 Σ' 所围闭区域为：Ω，根据高斯公式，

$\Phi=\dfrac{1}{a}\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}axdydz+(z+a)^2dxdy-\dfrac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma'}axdydz+(z+a)^2dxdy$

$=-\dfrac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)dxdydz+\dfrac{1}{a}\iint\limits_{D}a^2dxdy=-3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz-\dfrac{2}{a}\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz+a\cdot\pi a^2$

$=-3\cdot\dfrac{2}{3}\pi a^3-\dfrac{2}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr+\pi a^3=-2\pi a^3+\dfrac{1}{2}\pi a^3+\pi a^3=-\dfrac{1}{2}\pi a^3.$

六、（本题 9 分） 计算 $I=\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$**，其中**

（1）$L:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向；（2）$L: x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，取逆时针方向.

解：$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\ne 0)$,.

设 L 所包围的区域为 D，

（1）$(0,0)\notin D$， $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内连续，由格林公式得：$I=0$.

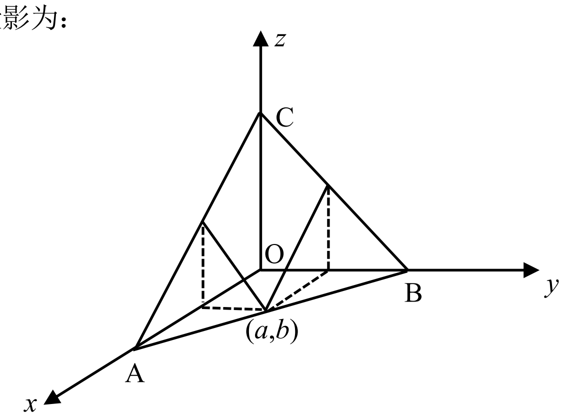
（2）$(0,0)\in D$，作圆周 $L_\varepsilon:\begin{cases} x=\varepsilon\cos\theta \\ y=\varepsilon\sin\theta \end{cases}, \theta: 0\to 2\pi$，

由 L 和 L_ε 所围成的区域为 D^*，则由格林公式得：$\oint_{L+L_\varepsilon^-}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint\limits_{D^*}0dxdy=0$，

因此 $I=\oint_{L_\varepsilon}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}(\varepsilon\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta+\varepsilon\sin\theta\cdot\varepsilon\sin\theta)d\theta=2\pi$.

七、（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 设一个四面体由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成（如图所示），过 AB 上一点 (a,b)，作平面 $x=a,y=b$ 截该四面体得到一个六面体，求这个六面体的最大体积.



解：设 AB 上点 (a,b)，六面体在 xOy 坐标面上的投影为：

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a,0\le y\le b\}$，且 $a+b=1$，

六面体的体积为：

$$V=\iint\limits_D zdxdy=\int_0^a dx\int_0^b(1-x-y)dy$$

$$=ab-\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{2}ab^2$$

设 $L(a,b,\lambda)=ab-\dfrac{1}{2}a^2b-\dfrac{1}{2}ab^2+\lambda(a+b-1)$

解方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial a}=b-ab-\dfrac{1}{2}b^2+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial b}=a-\dfrac{1}{2}a^2-ab+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=a+b-1=0\end{cases}$，得 $a=b=\dfrac{1}{2}$. 最大体积 $V=\dfrac{1}{8}$.

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数.

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径为 1，当 $x=-1$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛；当 $x=1$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散；

收敛区域为 $[-1\,,1\,)$；设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$，则

$$xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.\left(xs(x)\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},(-1<x<1),$$

$\therefore\ xs(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x),(-1<x<1)$，

当 $x\neq 0$ 时，$s(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x},(-1<x<1)$；当 $x=0$ 时，$s(0)=1$

$s(-1)=-\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\ln(1-x)}{x}=\ln 2$，故 $s(x)=\begin{cases}-\frac{\ln(1-x)}{x}, & -1\le x<1 \text{ 且 } x\neq 0, \\ 1, & x=0\end{cases}$.

八、（80 学时者只做第 1 题，96 学时者只做第 2 题，本题 9 分）

1. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=1$，且

$$\left[xy(x+y)\right]dx+\left[f'(x)+x^2y\right]dy=0$$

为一个全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(1)=f'(1)=0$，L 为 xOy 面第一象限内任一条光滑闭曲线，且 $\oint_L(\ln x-f'(x))\frac{y}{x}dx+f'(x)dy=0$，求 $f(x)$.

1. 解：$P(x,y)=xy(x+y),Q(x,y)=f'(x)+x^2y$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=x^2+2xy,\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f''(x)+2xy$，

由已知，$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，即：$f''(x)=x^2$，

所以 $f'(x)=\frac{x^3}{3}+C_1,f(x)=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$.

又因为 $f(0)=f'(0)=1$，得 $C_1=1,C_2=1$，故 $f(x)=\frac{x^4}{12}+x+1$，

$u(x,y)=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y\left[\frac{x^3}{3}+1+x^2y\right]dy=\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+y$，

原方程的通解为 $\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+y=C$.

2. 解：$P(x,y)=(\ln x-f'(x))\frac{y}{x},Q(x,y)=f'(x)$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\ln x-f'(x)}{x},\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f''(x),$$

由已知，$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，即：$x^2f''(x)+xf'(x)=x\ln x$是一个欧拉方程，

令 $x=e^t$，方程化为 $D(D-1)f(t)+Df(t)=te^t$ 整理得：$f''(t)=te^t$，

两边同时积分得：$f'(t)=\int te^t dt=te^t-e^t+C_1$，$f(t)=te^t-2e^t+C_1t+C_2$

代回原变量，得 $f(x)=x(\ln x-2)+C_1\ln x+C_2$，

又因为 $f(1)=f'(1)=0$，则：$C_1=1,C_2=2$．故 $f(x)=x(\ln x-2)+\ln x+2$ ．