2012—2013 学年第二学期《高等数学（2-2)》期末考试 A 卷

一.（共 3 小题，每小题 5 分，共计 1 5 分）

1．已知 $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}$，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$，求 $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

2．求曲线 $\Gamma: \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 在 yoz 坐标面上的投影曲线的方程.

3. 设函数 $f(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^3 + z^3$，求函数 f 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的梯度，并问函数 f 在点 $M(1, 1, 1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？最大的方向导数值是多少？

二.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 2 1 分）

1．设 $z = f(ye^x,\ x^2 + y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2．设曲面 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3y+xz=1$ 所确定，求该曲面在点 $M_0(1,2,-1)$ 处的切平面方程及全微分 $dz\big|_{(1,2)}$.

3．计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x+y)^2\,dxdy$.

三.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 2 1 分）

1． 求上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分面积 S .

2. 设函数 $f(u)$ 具有连续的导数，且满足 $f(0)=0, f'(0)=1$，求极限：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv .$$

3．计算$I=\oint_C \frac{x^2dx+\sin(x^2+y^2)dy}{x^2+y^2-2y}$ ，其中C为圆周$x^2+y^2-2y=1$的逆时针方向.

四.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 1 4 分）

1. 建造一个表面积为 108 m^2 的长方体形敞口水池，问如何选择水池的尺寸，才能使其容积最大.

2.计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{ydydz+xdzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧.

五.（共 3 小题，第 1、2 小题各 5 分，第 3 小题 7 分，共计 1 7 分）

1．判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的敛散性.（5 分）

2．将函数 $f(x)=a^x \quad (a>0,a\neq 1)$ 展开成 x 的幂级数.（5 分）

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le \pi, \\ 1, & -\pi<x<0.\end{cases}$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，求其傅里叶系数 a_3 及 $S(2\pi)$, $S(\dfrac{3\pi}{2})$ 的值.（7 分）

六.（共 2 小题，第 1 小题 8 分，第 2 小题 4 分，共计 1 2 分）

1. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛半径、收敛域及其和函数.

2.（4 分）证明不等式: $\iint_D \frac{e^y}{e^x}dxdy \geq 1$ 成立，其中$D=\{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.