A 卷

# 2012—2013 学年第一学期
# 《线性代数》答案及评分标准

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室　　基础数学系

考试日期　　2013 年 1 月 16 日

| 页　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 本页满分 | 15 | 21 | 24 | 16 | 12 | 12 | |
| 本页得分 | | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | | |

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共六道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 6 页.

| 本页满分 15 分 | |
|---|---|
| 本页得分 | |

## 一．选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．已知五阶行列式第三列的元素分别为 0，1，2，3，4，第三列的余子式分别为-4，-3，-2，-1,0，则该行列式的值为（　B　）

A. -2　　B. 2　　C. 10　　D. -10 .

2．已知方阵$A$满足$A^2-A-3E=O$，则下列说法错误的是（　D　）

A. $A+3E$可逆；

B. $A-E$可逆；

C. $A$可逆；

D. $A^2$不可逆.

3．含 n 个未知量的齐次方程组$Ax=0$有非零解的充分必要条件是（　A　）

A. $R(A)<n$；

B. $R(A)=n$；

C. $R(A)>n$；

D. $R(A)\le n$.

4.下列不属于等价关系的是（　B　）

A. 矩阵的初等变换；

B. 矩阵的可逆；

C. 矩阵的相似；

D. 矩阵的合同.

5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则 (　A　)

A $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$线性无关；

B $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1-\beta_2$线性相关；

C $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性无关；

D $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$线性相关.

## 二．填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

| 本页满分 21 分 | |
| --- | --- |
| 本页得分 | |

1．设 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $\underline{\quad 4^4(=256) \quad}$.

2．设四阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，$E$ 为四阶单位阵，矩阵 $A$ 的特征值为 $2,3,4,5$，则 $|B-E| =$ $\underline{\quad 24 \quad}$.

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=A^2-3A+2E$，则 $B^{-1}=$ $\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$.

4．设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$，已知 $A\alpha$ 与 $\alpha$ 线性相关，则 $a =$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

5．从 $R^2$ 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$.

## 三、论述证明题（6 分）

请问等价的向量组线性相关性一定相同吗？若答案肯定，请给出证明；否则请说明理由或举出反例.

答：不一定．……………(4)

例如，向量组与其最大无关组等价，但线性相关性不一定相同．……………(6)

**四．计算下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共计 40 分）**

| 本页满分 24 分 | |
|---|---|
| 本页得分 | |

1．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2+\mathrm{a} & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2+\mathrm{a} & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+\mathrm{a} & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2+\mathrm{a}\end{vmatrix}$．（8 分）

解：将行列式的 2、3、4 列都加到第一列，然后第一列提出公因子，得

$$D=\begin{vmatrix}2+a & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+a & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2+a\end{vmatrix}=(8+a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2+a & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2+a & 2\\ 1 & 2 & 2 & 2+a\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

将第一列乘以（—2）后加到其余各列，得

$$D=\ (8+a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & a & 0\\ 1 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=(8+a)a^3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, 且 $AB=A+2B$, 求矩阵 $B$.（8 分）

解：由 $AB=A+2B$，得： $(A-2E)B=A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

验证知矩阵 $A-2E$ 是可逆的，所以

$$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 $A$ 的二重特征值，求 $x$， $y$．（8 分）

解：由已知，得 $R(A-2E)=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

又因为 $A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ x & 2 & y\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$，故 $x=2, y=-2$． $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

| 本页满分 16 分 | |
|---|---|
| 本页得分 | |

4. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\2\end{pmatrix}$,

求该向量组的秩和一个最大无关组.（8 分）

解： 记 $A=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$………………(4)

故知：向量组的秩为 3，……………………………………………………………(6)

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个最大无关组. ………………………………………………(8)

5. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是它的三个解向量，且 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解.（8 分）

解：易知， $(\eta_2+\eta_3-2\eta_1)$ 是该方程组的导出组的一个基础解系，…………(4)

则该方程组的通解为:

$$x=k(\eta_2+\eta_3-2\eta_1)+\eta_1=k\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ k\in R.…………(8)$$

**五、（12 分）**

| 本页满分 12 分 | |
|---|---|
| 本页得分 | |

设有三维向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$, 问 $\lambda$ 取何值时，

（1）$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一？

（2）$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

（3）$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

解：设 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta$，该方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=(A,\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & -\lambda^3-2\lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

…………(6)

（1）当 $\lambda\neq0$，$\lambda\neq-3$ 时，$R(\overline{A})=R(A)=3$，方程组有唯一解，则 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一； …………(8)

（2）当 $\lambda=0$ 时，$R(\overline{A})=R(A)=1<3$，方程组有无穷多解，则 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一； …………(10)

（3）当 $\lambda=-3$ 时，$R(\overline{A})\neq R(A)$，方程组无解，则 $\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。 …………(12)

六、（12 分）

| 本页满分 12 分 | |
|---|---|
| 本页得分 | |

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\,(b>0)$，其中二次型的矩阵 $A$ 的特征值之和为 1，特征值之积为−12.

（1） 求 $a,b$ 的值；

（2） 利用正交变换将此二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解：(1) $f$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，由已知

$$\begin{cases} |A|=-4a-2b^2=-12 \\ a+2-2=1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

所以 $a=1,b=2$. ………………………(4)

(2) $f$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$。 ………………………(6)

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$，得特征向量 $\tau_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\tau_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组 $(A+3E)x=0$，得特征向量 $\tau_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

………………………(8)

容易验证 $\tau_1,\tau_2,\tau_3$ 是正交向量组，单位化得

$$p_1=\frac{\tau_1}{\|\tau_1\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\frac{\tau_2}{\|\tau_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{\tau_3}{\|\tau_3\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

…………………………(10)

故所求正交变换为：$x=Py$，其中，正交变换矩阵为：

$$P=(p_1,\ p_2,p_3)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0&2&1\\\sqrt{5}&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

标准型为：$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$ …………………………(12)