2015—2016 学年第二学期

《高等数学（2-2）》第一阶段考试卷

（工 科 类）

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室　　　基础数学系　　　

考试日期　　2016 年 4 月 9 日　　

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
本题满分	12	18	16	8	18	12	16	
本题得分								
阅卷人								

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共七道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 7 页。

本题满分 12 分	
本题得分	

一.（共 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分）判断下列命题是否正确?在题后的括号内打“ √ ”或“ × ”，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明 .

1．过点(2,3,7)且与平面 3*x*-2*y*-5*z*-7=0 平行的平面方程是 3*x*-2*y*-5*z*+35=0.　(√)--------2 分

解：设过点(2,3,7) 且与平面 3*x*-2*y*-5*z*-7=0 平行的平面方程是 3*x*-2*y*-5*z*+*D*=0，把点(2,3,7)代入得$3\times2-2\times3-5\times7+D=0$，即得 *D*=35.故结论正确.　--------2 分

2．若函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$处可微分，则 $f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的偏导数$f_y'(x_0,y_0)$存在.　(√)　--------2 分

证明：因为 *f* 在点 *P* 处可微分，由定义：

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

$$\rho\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

取$\Delta x=0$得$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=B\Delta y+o(|\Delta y|)$

于是$\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{B\Delta y+o(|\Delta y|)}{\Delta y}=B$即偏导数 $f_y'(x_0,y_0)$存在。--------2 分

3．若函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$处可微分，且$f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$，则点$P(x_0,y_0)$必是 $f(x,y)$的极值点.　(×) --------2 分

解：例如：*z*=1 常函数.　--------2 分

本题满分 18 分	
本题得分	

二．（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. 已知 $\vec{a}=(1,1,4)$，$\vec{b}=(2,-2,-1)$.

求 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; (2) $\vec{a}\times\vec{b}$; (3) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

解：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2-2-4=-4$. --------2 分

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=(7,9,-4)$. --------2 分

(3) $prj_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{4+4+1}}=-\dfrac{4}{3}$ --------2 分

2. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-\sqrt{1-xy}}{\sin y}$.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-\sqrt{1-xy}}{\sin y}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{(1+xy)-(1-xy)}{\sin y(\sqrt{1+xy}+\sqrt{1-xy})}$ --------2 分

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{y}{\sin y}\dfrac{2x}{(\sqrt{1+xy}+\sqrt{1-xy})}=1\cdot\dfrac{2}{2}=1$ --------4 分

3. 求方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$. --------4 分

$dz=\dfrac{z}{x+z}dx+\dfrac{z^2}{y(x+z)}dy$. --------2 分

三.（共 2 小题，每小题 8 分，共计 16 分）

本题满分 16 分	
本题得分	

1．设函数 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot 1+f_2\cdot 1+f_3\cdot y=f_1+f_2+yf_3$， --------4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}+f_{12}(-1)+xf_{13}+f_{21}+f_{22}(-1)+xf_{23}+f_3+y[f_{31}+f_{32}(-1)+xf_{33}]$$

$$=f_{11}-f_{12}+xf_{13}+f_{21}-f_{22}+xf_{23}+f_3+y(f_{31}-f_{32}+xf_{33})$$
$$=f_{11}+(x+y)f_{13}-f_{22}+(x-y)f_{23}+f_3+xyf_{33}.$$ --------4 分

2．已知直线 L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$，$L_2$：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$.

(1) 求 L_1 与 L_2 之间的夹角；(2) 求 L_1 与 L_2 之间的距离.

解：由已知得 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1=(1,-2,1)$，过点 $M_1(0,-2,1)$，

L_2 的方向向量 $\vec{s}_2=(-1,1,2)$ 过点 $M_2(2,0,-1)$.

（1）$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\left|\frac{-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\right|=\frac{1}{6}$，故 L_1 与 L_2 之间的夹角为 $arc\cos\frac{1}{6}$. --------2 分

（2）$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-5,-3,-1)$,

过 L_2 与 L_1 平行的平面方程为 $-5(x-2)-3(y-0)-(z+1)=0$ 即 $5x+3y+z-9=0$.

--------4 分

距离 $d=\frac{|5\cdot 0+3\cdot(-2)+1-9|}{\sqrt{5^2+3^2+1}}=\frac{14}{\sqrt{35}}$ -------2 分

四．（共 2 小题，每小题 4 分，共计 8 分）

本题满分 8 分	
本题得分	

1. 求两曲面 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 和 $x^2+y^2=3x$ 的交线在 xoz 平面上的投影曲线的方程.

解： 由 $\begin{cases} z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=3x, \end{cases}$ 消 y 得 $z=\sqrt{9-3x}$, --------2 分

故交线在 xoz 坐标面上的投影曲线是 $\begin{cases} z=\sqrt{9-3x}, 0\le x\le 3, \\ y=0 \end{cases}$.--------2 分

2．求 $0\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2\le 3x$ 的公共部分在 xoy 平面上的投影.

解： $\begin{cases} x^2+y^2\le 3x, \\ z=0 \end{cases}$.--------4 分

五．（共 2 小题，每小题 9 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．已知平面 $\pi_1: 3x+6y+3z+25=0$，平面 $\pi_2: x-y+z-2=0$，直线 L: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$. 确定 λ，使 $L\perp\pi_1$；并求该直线在平面 π_2 内的投影直线的方程.

解：（1）由已知 π_1,π_2 的法向量分别是 $\vec{n}_1=(3,6,3)=3(1,2,1),\vec{n}_2=(1,-1,1)$，$L$ 的方向向量是 $\vec{s}=(1,2,\lambda)$.由 $\vec{s}//\vec{n}_1$ 得 $\lambda=1$.-------2 分

（2）$\lambda=1$ 时，$L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$，

即 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}\\ \dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x-y-4=0\\ y-2z+4=0\end{cases}$.　　　-------2 分

设过 L 的平面束为 $2x-y-4+\mu(y-2z+4)=0$，　　　-------2 分

即 $2x+(\mu-1)y-2\mu z-4+4\mu=0$，其法向量 $\vec{n}_3=(2,u-1,-2u)$.

由 $\vec{n}_3\cdot\vec{n}_2=0$ 得 $\mu=1$，　　　-------2 分

故所求投影直线方程是 $\begin{cases}x-z=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$.　　　-------1 分

2．求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=50,\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 在点 $(3,4,5)$ 处的切线方程和法平面方程.

解：对方程组中每个方程两边分别关于 x 求导得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2y\dfrac{dy}{dx})\end{cases}$$，-------3 分

于是在点 $(3,4,5)$ 处并整理得 $\begin{cases}4\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=-3\\ -4\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=3\end{cases}$. 解之得 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$，-------2 分

从而切线的切向量 $\vec{T}=(1,-\dfrac{3}{4},0)=\dfrac{1}{4}(4,-3,0)$.-------2 分

故所求切线方程：$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-5}{0}$，

法平面方程为：$4(x-3)-3(y-4)+0(z-5)=0$.-------2 分

本题满分 12 分	
本题得分	

六.（本题 12 分）

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但不可微.

解：（1）$\because 0\le\left|\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\le\left|\dfrac{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|=\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$，

又$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=0$，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，

即 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处连续. -------4 分

（2）$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，

$\therefore f_x(0,0)=0$.同理得 $f_y(0,0)=0$. -------4 分

（3）（反证法）假设 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处可微分，则

$dz=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0$，

于是$\Delta z-dz=\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{3/2}}$，

$$\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2}.$$

取$\Delta x=\Delta y$，$\rho\to 0$时，$\Delta x\to 0$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^4}{4(\Delta x)^4}=\dfrac{1}{4}\neq 0$，矛盾，故不可微. -------4 分

七.（共 2 小题，每小题 8 分，共计 16 分）

本题满分 16 分	
本题得分	

1．求函数 $z=x^3+y^2-6xy+8$ 的极值点和极值.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y,\frac{\partial z}{\partial y}=2y-6x$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$.-------4 分

由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3x^2-6y=0\\ 2y-6x=0\end{cases}$，得驻点 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6\\ y=18\end{cases}$.-------2 分

对驻点 $(0,0)$， $A=0,B=-6,C=2,AC-B^2=-36<0$,所以 $(0,0)$ 不是极值点.

对驻点 $(6,18)$，$A=36,B=-6,C=2,AC-B^2=72-36=36>0$,且 $A>0$，则 $(6,18)$ 是极小值点.又 $f(6,18)=6^3+18^2-6\times6\times18+8=-100$.

故极小值点是 $(6,18)$，极小值是-100. -------2 分

2．已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $L: x^2+y^2+xy=3$.

(1)求函数 $f(x,y)$ 在点 $P(1,2)$ 处的梯度；(2)求函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上的最大方向导数.

解：（1） $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P=(1+y)|_P=3,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P=(1+x)|_P=2$,

$\therefore gradf|_P=3\vec{i}+2\vec{j}$.-------4 分

（2）函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上任一点 (x,y) 处的最大方向导数是 $|gradf|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，可求 $g(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 的最大值，其中 x,y 满足约束条件 $x^2+y^2+xy=3$.令

$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$,-------2 分

$\begin{cases}L_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0\\ L_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0\\ L_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$.

由前两个方程得 $y=x$ 或 $y=1-x$，分别代入第三个方程得

$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=1\end{cases},\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=-1\end{cases},\begin{cases}x_3=2\\ y_3=-1\end{cases},\begin{cases}x_4=-1\\ y_4=2\end{cases}$.

四个可能的极值点 $A(1,1),B(-1,-1),C(2,-1),D(-1,2)$.

由于 $g(A)=8,g(B)=0,g(C)=9,g(D)=9$ 且最大值存在,故最大方向导数是 3. -----2 分