2010—2011 学年第一学期《高等数学（2-1)》期中试题

一、 填空题（每小题 3 分，满分 18 分）

1. 设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $f'(x_0)=5$，则 $f'(-x_0)=$ <u>−5</u>.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=5$，则 $a=$ <u>$\sqrt[5]{5}$</u>.

3. 方程 $x-y+\arctan y=0$ 确定隐函数 $y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ <u>$1+y^{-2}$</u>.

4. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，

$f^{(n)}(x)=$ <u>$n![f(x)]^{n+1}$</u>.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n-1)-\ln n]=$ <u>−1</u>.

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$，则 $f(x)$ 的可去间断点是 <u>$x=2$</u>，跳跃间断

点是 <u>$x=0$</u>，无穷间断点是 <u>$x=-2$</u>.

二、 选择题（每小题 3 分，满分 12 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\tan x}-2 & x>0 \\ 1 & x=0 \\ \sin x-\cos x & x<0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（ A ）

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) 不存在.

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 点（ B ）

(A) 必可导；　(B) 连续但不一定可导；
(C) 一定不可导；　(D) 不连续.

3. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\pi$，则 $\Delta x\to 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处的微分 $df(x)$ 是（ C ）

(A) 比 Δx 低阶的无穷小；　(B) 比 Δx 高阶的无穷小；
(C) 与 Δx 同阶的无穷小；　(D) 与 Δx 等价的无穷小.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ D ）

(A) 不可导；　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$；

(C) 取得极大值；　(D) 取得极小值.

三、**计算题**（每小题 7 分，满分 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}=1$;

或 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2+\sqrt{x}}\ (\dfrac{\infty}{\infty})=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}=1.$

4. 设 $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$, ,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})=\frac{d}{dt}(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})\cdot\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{-(\cos t+\sin t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\sin t+\cos t)^2}\Big/e^t(\sin t+\cos t)=-\frac{2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}.$$

5. 求 $f(x)=\ln(1+7x)$ 在 $x=0$ 处带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 $\because \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$,

（ξ 介于 0 与 x 之间）

$$\therefore \ln(1+7x)=7x-\frac{(7x)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(7x)^n}{n}+(-1)^n\frac{(7x)^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},$$

$$=7x-\frac{7^2x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{7^nx^n}{n}+(-1)^n\frac{7^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

（ξ 介于 0 与 $7x$ 之间）

四、解答题（每小题 8 分，满分 24 分）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x<0 \\ e^{ax}-1, & x\ge 0 \end{cases}$，确定常数 a 与 b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(x)$.

解　由已知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，而 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{ax}-1)=0,$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}[b(1+\sin x)+a+2]=b+a+2,\ \therefore\ f(0^+)=f(0^-)=f(0),$

即　$a+b+2=0=f(0)$--------（1）

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a,$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{b(1+\sin x)+a+2}{x}$（由（1））$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{b\sin x}{x}=b$，

$\therefore\ f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)$，$\Rightarrow a=b=f'(0),$ 再由（1）得 $a=b=-1,\ f'(0)=-1$，

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x<0, \\ e^{ax}-1, & x\ge 0. \end{cases}=\begin{cases} -\sin x, & x<0, \\ e^{-x}-1, & x\ge 0. \end{cases}$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=(-\sin x)'=-\cos x,$ 当 $x>0$ 时，$f'(x)=(e^{-x}-1)'=-e^{-x},$

故　$f'(x)=\begin{cases} -\cos x, & x<0, \\ -e^{-x}, & x\ge 0. \end{cases}$

2. 求 $y=(1+x^2)e^{-x^2}$ 的极值和凹凸区间及曲线的拐点.

解　$y'=-2x^3e^{-x^2},\ y''=-2x^2e^{-x^2}(3-2x^2)$

令 $y'=0,$ 得驻点 $x=0;$ 令 $y''=0,$ 得 $x=0,\ x=\pm\sqrt{3/2}$ ，　列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3/2})$	$-\sqrt{3/2}$	$(-\sqrt{3/2},0)$	0	$(0,\sqrt{3/2})$	$\sqrt{3/2}$	$(\sqrt{3/2},+\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$			极大值 $f(0)=1$	$\searrow$		
	$\cup$	拐点 $(-\sqrt{3/2},\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}})$	$\cap$	非拐点	$\cap$	拐点 $(\sqrt{3/2},\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}})$	$\cup$

极大值：$f(0)=1$，上凸区间$[-\sqrt{3/2},\sqrt{3/2}]$，下凸区间$(-\infty,-\sqrt{3/2}]$和$[\sqrt{3/2},+\infty)$

两个拐点$(\sqrt{3/2},\ \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}})$，$(-\sqrt{3/2},\ \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}})$.

3. 已知一个长方形的长l以2cm/s的速度增加，宽w以3cm/s的速度增加，则当长为12cm，宽为5cm时，它的对角线的增加率是多少？

解：设长方形的对角线为y，则 $y^2=l^2+w^2$ 两边关于t求导，得

$$2y\cdot\frac{dy}{dt}=2l\cdot\frac{dl}{dt}+2w\cdot\frac{dw}{dt},\qquad 即\quad y\cdot\frac{dy}{dt}=l\cdot\frac{dl}{dt}+w\cdot\frac{dw}{dt}\text{------}（1）$$

已知$\frac{dl}{dt}=2,\ \frac{dw}{dt}=3,\ l=12, w=5,\Rightarrow y=\sqrt{12^2+5^2}=13,$代入（1）式，得

对角线的增加率：$\frac{dy}{dt}=3$（cm/s）.

五、证明题

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$，

证明：存在一点$\xi\in(0,1)$，使$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.（5分）

证明：令$F(x)=x^2f(x)$，在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$F(0)=0, F(1)=f(1)=0,$

$F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，根据洛尔中值定理，

$\exists\xi\in(0,1)$，使$F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0,$而$\exists\xi\neq0$，故 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

2. 证明：当$x<1$时，$e^x\le\frac{1}{1-x}$. （6分）

证法1 当$x<1$时，即证：$x\le-\ln(1-x)$，亦即$x+\ln(1-x)\le0$. 令$f(x)=x+\ln(1-x)$ $(x<1)$，

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x}{1-x}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；（或 $f''(x)=\dfrac{-1}{(1-x)^2}$，$f''(0)=-1<0$）.

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 的唯一极大值点也是最大值点，

故 当 $x<1$ 时，$f(x)=x+\ln(1-x)\le f(0)=0$，即 $x+\ln(1-x)\le 0$ ，亦即 $e^x\le\dfrac{1}{1-x}$.

证法 2 当 $x<1$ 时，$1-x>0$, 即证：$e^x\cdot(1-x)\le 1$.

令 $f(x)=e^x\cdot(1-x)\quad(x<1)$，$f(0)=1$，$f'(x)=-x\cdot e^x$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$，

$f''(x)=(-x-1)\cdot e^x$，$f''(0)=-1<0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 的唯一极大值点也是最大值点，

当 $x<1$ 时，$f(x)=e^x\cdot(1-x)\le f(0)=1$，又 $1-x>0$，故 $e^x\le\dfrac{1}{1-x}$.

方法 3 令 $f(x)=1-e^x\cdot(1-x)\quad(x<1)$，$f(0)=0$，$f'(x)=x\cdot e^x$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$，

$f''(x)=(x+1)\cdot e^x$，$f''(0)=1>0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 的唯一极小值点也是最小值点，

当 $x<1$ 时，$f(x)=1-e^x\cdot(1-x)\ge f(0)=0$，即 $e^x\cdot(1-x)\le 1$，又 $1-x>0$，故 $e^x\le\dfrac{1}{1-x}$.