2013-2014 学年第二学期《高等数学（2-2）》第一阶段（第七、八章）试卷 参考答案

一.（共 3 小题，每小题 5 分，共计 1 5　分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“ √ ”或“ × ”，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明.

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ， 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.（　√　）

证 当动点 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$ ，随 k 值不同其值不同，

［只要选动点 (x,y) 沿两条不同曲线（例如 $y=0$, $y=x$ ）趋于 $(0,0)$ 时，函数的极限值不同即可］

故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

2．若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处连续，则 $f'_x(x_0,y_0)$ ， $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在.（　×　）

例如： $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处连续，但

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$ 不存在，

同理， $f'_y(0,0)$ 也不存在.

3．若 $f'_x(x_0,y_0)=0$ ， $f'_y(x_0,y_0)=0$ ，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处必有极值.（　×　）

例如： $f(x,y)=xy$（或 $f(x,y)=x^2-y^2$ 或 $f(x,y)=y^2-x^2$ ，学生只举一个就够了）

$f'_x(0,0)=0$ ， $f'_y(0,0)=0$

但 $f(x,y)=xy$（或 $f(x,y)=x^2-y^2$ 或 $f(x,y)=y^2-x^2$ ）

在 $(0,0)$ 点处没有极值.

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1. 设 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$, 求以向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}+2\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 S .

解 $\because (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+2(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{b}\times\vec{a}+2(\vec{b}\times\vec{b})=\vec{a}\times\vec{b}$ ，

$\therefore\ S=|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$.

2．设$\vec{a}$，$\vec{b}$ $\vec{c}$ 两两互相垂直，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，求$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$的模.

解 $\because$ $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2(\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c})=1^2+2^2+3^2+0=14$

$\therefore$ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{14}$.

3．求与两直线$L_1:\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$ 及$L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$都平行，且过坐标原点的平面方程.

解 $\because L_1$即为：$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$，$\vec{s}_1=\{0,1,1\}$，$\vec{s}_2=\{1,2,1\}$，

由已知，所求平面的法向量为：$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\{-1,1,-1\}$，

又平面过坐标原点$(0,0,0)$，故所求平面的方程为：

$-1\cdot(x-0)+(y-0)-(z-0)=0$，　　即　$x-y+z=0$.

三．（共 2 小题，第 1 小题 10 分，第 2 小题 7 分，共计 17 分）

1．求函数$u=x^3+2xy+y^3+z^3$在点$P(1,1,1)$处沿从点$P(1,1,1)$到点$Q(2,3,3)$方向的方向导数，问函数在点$P(1,1,1)$处沿哪个方向的方向导数最大？并求函数在点$P(1,1,1)$处最大的方向导数值.

解：$\because$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2x+3y^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=3z^2,$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{P(1,1,1)}=5$，　$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{P(1,1,1)}=5$，　$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{P(1,1,1)}=3$，

$\overrightarrow{PQ}=\{1,2,2\}$，$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=\dfrac{2}{3},$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{PQ}}\right|_{P(1,1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P(1,1,1)}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P(1,1,1)}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P(1,1,1)}\cdot\cos\gamma$$

$$=5\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{3}+3\times\frac{2}{3}=7;$$

$$grad\ u\,|_{P(1,1,1)}=\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}|_{P(1,1,1)}=\{5,5,3\},$$

函数在点 $P(1,1,1)$ 处沿梯度 $\{5,5,3\}$ 的方向的方向导数最大，最大的方向导数值为 $\left|grad\ u\right|\Big|_{P(1,1,1)}=\sqrt{5^2+5^2+3^2}=\sqrt{59}$.

2. 求直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\Pi: x+y+z-2=0$ 内的投影直线的方程.

解：法 1 由题意 $x-y+z+1=0$ 与平面 Π 不垂直,

过 L 的平面束方程为： $x+2y-z+1+\lambda(x-y+z+1)=0$，

整理得：$(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(\lambda-1)z+1+\lambda=0$，从中找一个与 Π 垂直的平面 Π_1，

其法向量为 $\vec{n}_1=\{1+\lambda,2-\lambda,\lambda-1\}$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

由 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，得 $1+\lambda+2-\lambda+\lambda-1=0$，解出 $\lambda=-2$.

$\therefore$ Π_1： $x-4y+3z+1=0$，故 L 在 Π 内的投影直线方程为 $\begin{cases}x-4y+3z+1=0\\x+y+z-2=0\end{cases}$.

法 2. 由已知得 L 的方向向量 $\vec{s}=\{1,2,-1\}\times\{1,-1,1\}=\{1,-2,-3\}$,

设 Π 的法向量为 $\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

则过 L 且垂直于 Π 的平面的法向量为: $\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n}_2=\{1,-4,3\}$,

取 L 上点 $(-1,0,0)$， 则过 L 垂直于 Π 的平面方程为: $x+1-4y+3z=0$,

故 L 在 Π 内的投影直线方程为 $\begin{cases}x-4y+3z+1=0\\x+y+z-2=0\end{cases}$.

四.（共 2 小题，第 1 小题 8 分，第 2 小题 6 分，共计 14 分）

1．设 $z=f(e^x\sin y,\ x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，

（1） 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；（5 分）

（2）当 $z=e^x\sin y+x^2+y^2$ 时，在（1）的结果中， $f_1'=?$ $f_2'=?$ $f_{11}''=?$ $f_{12}''=?$

$f_{21}''=?$ $f_{22}''=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$ （3 分）

解 （1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y\cdot f_1'+2x\cdot f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y\cdot f_1'+e^x\sin y\,(f_{11}''\cdot e^x\cos y+f_{12}''\cdot 2y)+2x\,(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''\cdot 2y)$$

$$=e^x\cos y\cdot f_1'+e^{2x}\sin y\cos y\ f_{11}''+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}''+4xy\ f_{22}''\,.$$

（2）当 $z=e^x\sin y+x^2+y^2$ 时，在（1）中，$z=f(u,v)=u+v$，

其中 $u=e^x\sin y$，$v=x^2+y^2$，

$\therefore\ f_1'=1$，$f_2'=1$，$f_{11}''=f_{12}''=f_{21}''=f_{22}''=0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y$.

2．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^y+yz+ze^x=0$ 所确定，求 dz.

解 1 方程 $xe^y+yz+ze^x=0$ 两边求微分，得

$$e^y dx+xe^y dy+zdy+ydz+ze^x dx+e^x dz=0$$

$$dz=-\frac{(e^y+ze^x)dx+(xe^y+z)dy}{y+e^x}\,.$$

解 2 令 $F(x,y,z)=xe^y+yz+ze^x$，则

$F_x'=e^y+ze^x$，$F_y'=xe^y+z$，$F_z'=y+e^x$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{e^y+ze^x}{y+e^x}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{xe^y+z}{y+e^x}，$$

$$\therefore\quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{(e^y+ze^x)dx+(xe^y+z)dy}{y+e^x}\,.$$

五.（本题 10 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明：(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；（3 分）

(2) 在点 $(0,0)$ 处偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在；（3 分）

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. （4 分）

证：(1) $\because\quad 0\le\left|xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le|xy|\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0}0,$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0),$ 即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续；

(2) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$， 同理， $f_y'(0,0)=0$ ；

(3) $\because \Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

由(2)知， $f_x'(0,0)=0$ ， $f_y'(0,0)=0$ ，

$$\therefore 0\le\frac{\left|\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]\right|}{\rho}=\frac{\left|\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\frac{\rho}{2}\to 0\ (\rho\to 0)\ .$$

$$\therefore \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=0,$$

即 $\Delta z=f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y+o(\rho)\ (\rho\to 0)$，

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，且 $dz\big|_{(0,0)}=f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y=0$.

六.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1．求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点（1,1,1）处的切线与法平面方程.

解： 对方程组每个方程两边分别关于 x 求导得,

$$\begin{cases}2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=3\\2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}，即\begin{cases}2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=3-2x\\3\dfrac{dy}{dx}-5\dfrac{dz}{dx}=2\end{cases},$$

解之得： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15-10x+4z}{10y+6z}$， $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{9-4y-6x}{10y+6z}$，

曲线在点（1,1,1）处的切向量为$\vec{T}=\{1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\}\Big|_{(1,1,1)}=\{1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\}$，

故所求切线方程为： $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$；

法平面方程为：$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$，

即$16x+9y-z-24=0$.

2．求空间曲线$\Gamma:\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 在 yoz 坐标面上的投影曲线.

解 从$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 x 得投影柱面：$3y^2-z^2=16$，

$\therefore$ 空间曲线 Γ 在 yoz 坐标面上的投影曲线为：$\begin{cases} 3y^2 - z^2 = 16, \\ x = 0. \end{cases}$

3. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面方程.

解：曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处切平面的法向量 $\vec{n_1} = \{2x_0, 2y_0, -1\}$，

而平面 $2x + 4y - z = 0$ 的法向量 $\vec{n_2} = \{2, 4, -1\}$，由题设知，$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$ 则

$\dfrac{2x_0}{2} = \dfrac{2y_0}{4} = \dfrac{-1}{-1}$，$\therefore$ $x_0 = 1, y_0 = 2$，代入 $z = x^2 + y^2$，得 $z_0 = 5$，

即切点为：$(1, 2, 5)$，$\vec{n_1} = \{2, 4, -1\}$

故所求切平面方程为：$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$，即 $2x + 4y - z - 5 = 0$.

七.（本题 8 分） 做一个长方体形的箱子，其容积为 $\dfrac{9}{2}$ m³，箱子的盖及侧面的造价为 8 元/m²，箱子的底造价为 1 元/m²，试求造价最低的箱子的长、宽、高（取米为长度单位）.

解 设箱子的长、宽、高分别为 x, y, z（m），则其造价函数为：

$$f(x,y,z) = xy + 8[2xz + 2yz + xy], \text{且 } xyz = \frac{9}{2}, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

令 $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(xyz - \dfrac{9}{2}) = 9xy + 16xz + 16yz + \lambda(xyz - \dfrac{9}{2})$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 9y + 16z + \lambda yz = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 9x + 16z + \lambda xz = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 16x + 16y + \lambda xy = 0, & (3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - \dfrac{9}{2} = 0. & (4) \end{cases}$$

$$(1)\times x \Rightarrow 9xy + 16xz + \lambda xyz = 0, \quad (5)$$

$$(2)\times y \Rightarrow 9xy + 16yz + \lambda xyz = 0, \quad (6)$$

$$(3)\times z \Rightarrow 16xz + 16yz + \lambda xyz = 0, \quad (7)$$

$(5)-(6) \Rightarrow 16z(x-y) = 0$, 及 $z > 0$, $\Rightarrow x = y$,

$(6)-(7) \Rightarrow x(9y - 16z) = 0$, 及 $x > 0$, $\Rightarrow z = \dfrac{9y}{16}$, 把以上结果代入 (4) 式，得

符合实际意义唯一的驻点：$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = 9/8. \end{cases}$ 故 箱子的长、宽、高分别为 2，2，$\dfrac{9}{8}$ 米时其造价最低.

2013-2014 学年第二学期《高等数学（2-2)》第二阶段（第九、十章）试卷 参考答案

一.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

1．求由 $y=x^2, x=1, y=0$ 所围成的平面图形的面积.

解： $A=\iint\limits_D dxdy \ =\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy \ =\int_0^1 x^2 dx \ =\dfrac{1}{3}$.

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.

解：$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^2 rr^2\sin\varphi dr$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^3dr \ \ =16\pi.$$

3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}xyzdydz$，$\Sigma$: 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.

解：Σ：$x=\sqrt{1-y^2-z^2}$，$D_{yz}: y^2+z^2\le 1$，$y\ge 0$.

$\therefore\iint\limits_{\Sigma}xyzdydz==\iint\limits_{D_{yz}}yz\sqrt{1-y^2-z^2}dydz=0$.（$D_{yz}$ 关于 y 轴对称，$yz\sqrt{1-y^2-z^2}$ 是 z 的奇函数）

二.（共 3 小题，每小题 7 分，共计 21 分）

1．求密度为 $\rho(x,y)=4-(2x^2+y^2)$ 的曲线 $x^2+y^2=1$ 的质量.

解：设曲线 L: $x^2+y^2=1$，有题意得：

$$m=\oint_L[4-(2x^2+y^2)]ds=4\oint_L ds-\frac{3}{2}\oint_L(x^2+y^2)ds=(4-\frac{3}{2})\oint_L ds \ \ =\frac{5}{2}2\pi=5\pi.$$

2．计算 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}e^{-x^2}dx$.

解：$I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy \ \ =\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{2}(-e^{-r^2})\Big|_0^R=\dfrac{\pi}{8}(1-e^{-R^2})$.

3．求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解：从 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z^2=2x\end{cases}$ 中消去 z 得 $(x-1)^2+y^2=1$.

曲面 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分在 xoy 上的投影区域为：

$$D:(x-1)^2+y^2\le 1.$$

由题意得： $S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_D\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}\pi.$

三.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdV$，$\Omega$ 是由 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=h\ (R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解：先二后一法：$z\in[0,h],\ D_z: x^2+y^2\le(\frac{R}{h}z)^2$

$$I=\int_0^h zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\pi\int_0^h\frac{R^2}{h^2}z^3dz=\frac{\pi}{4}R^2h^2.$$

柱面坐标系：$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_{\frac{h}{R}r}^{h}zdz=2\pi\int_0^R r\left.\frac{z^2}{2}\right|_{\frac{h}{R}r}^{r}dr$

$$=\pi\int_0^R(rh^2-\frac{h^2}{R^2}r^3)dr=\frac{\pi}{4}R^2h^2.$$

2. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的重心坐标.

解：设薄片的密度为 ρ，因为均匀薄片关于 y 轴对称，故 $\bar{x}=0$.

均匀薄板的质量 $m=\rho[4\pi-\pi]=3\pi\rho$.

而 $\iint\limits_D y\rho d\sigma=\rho\iint\limits_D r\sin\theta\, rdrd\theta=\rho\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2dr=\frac{\rho}{3}\int_0^\pi\sin\theta(64\sin^3\theta-8\sin^3\theta)d\theta$

$=\frac{56\rho}{3}\int_0^\pi\sin^4\theta d\theta$（令 $\theta=\frac{\pi}{2}+t$） $=\frac{112\rho}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\frac{112\rho}{3}\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}=7\pi\rho$，

$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho d\sigma}{m}=\frac{7\pi\rho}{3\pi\rho}=\frac{7}{3}$，重心坐标为 $(0,\frac{7}{3})$.

四.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 设一平面力场为 $\vec{F}=(3x^2y+8xy^2)\vec{i}+(x^3+8x^2y)\vec{j}$，求质点沿曲线 $y^2=1-x$ 从点 $(0,1)$ 移动到点 $(1,0)$ 时力所作的功.

解：由题意得：$W=\int_L(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y)dy$

其中 $P(x,y)=3x^2y+8xy^2, Q(x,y)=x^3+8x^2y$.

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$，曲线积分与路径无关.

选取折线路径：$A(0,1)\to O(0,0)\to B(1,0)$.

$$W=\int_{\vec{AO}+\vec{OB}}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y)dy=\int_1^0 0dy+\int_0^1 0dx=0.$$

2. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(y-x^2+z^2)dydz+(x+y^2-z^2)dzdx+(3x^2-y^2+z)dxdy$，$\Sigma: yOz$ 平面上曲线 $\begin{cases}z=y^2\\ x=0\end{cases}(0\le z\le1)$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面上侧.

解： 曲面$\Sigma: z=x^2+y^2 (0\le z\le 1)$. 在$xoy$面上投影区域为$D: x^2+y^2\le 1$.

补充曲面$\Sigma': z=1, (x^2+y^2\le 1)$，取下侧，$\Sigma+\Sigma'$围成有界闭区域$\Omega$，由高斯公式得

$$(\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma'})(y-x^2+z^2)dydz+(x+y^2-z^2)dzdx+(3x^2-y^2+z)dxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(-2x+2y+1)dV \text{（由对称性知）}$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}dV \text{（先二后一法）}=-\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}d\sigma=-\int_0^1 \pi z dz=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_{\Sigma'}(y-x^2+z^2)dydz+(x+y^2-z^2)dzdx+(3x^2-y^2+z)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D}(3x^2-y^2+1)dxdy \text{（二重积分轮换性和性质）}$$

$$=-\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy-\iint\limits_{D}1dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy-\iint\limits_{D}1dxdy=-\frac{3\pi}{2}$$

所以$\iint\limits_{\Sigma}(y-x^2+z^2)dydz+(x+y^2-z^2)dzdx+(3x^2-y^2+z)dxdy=-\frac{\pi}{2}-(-\frac{3\pi}{2})=\pi$..

或用“**合一投影法**”直接计算$\iint\limits_{\Sigma}(y-x^2+z^2)dydz+(x+y^2-z^2)dzdx+(3x^2-y^2+z)dxdy$（略）.

五.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1. 设流速场$\vec{v}=x^2\vec{i}+z^2\vec{k}$，$\Sigma$是平面$x+y+z=1$被三个坐标面截下的第一卦限部分上侧，求流过$\Sigma$的流量.

解： $\Sigma: z=1-x-y$. $D: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，由合一投影法得

$$I=\iint\limits_{D}[x^2+(1-x-y)^2]dxdy=\iint\limits_{D}(1+2x^2+y^2-2x-2y+2xy)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+2x^2+y^2-2x-2y+2xy)dy=\frac{1}{6}.$$

2. Γ: 圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$从$x$轴正向看为逆时针方向，计算积分：$\oint_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$.

解： Γ可看成平面$x+y+z=0$上由Γ围成的曲面Σ的边界, $P=y, Q=z, R=x$满足斯托克斯定理条件，$\Sigma: x+y+z=0$取上侧，其单位法向量为$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. 则

$$\oint_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS=-\sqrt{3}\iint_{\Sigma} dS \text{（}\Sigma\text{为过球心的最大圆）}=-\sqrt{3}\,\pi\, a^2 .$$

六．（本题 7 分）设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比，（比例系数 0.9），问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

解：雪堆在 xoy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le \frac{h^2(t)}{2}$.

雪堆的体积 $V(t)=\iint_D [h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}]d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}[h(t)-\frac{2r^2}{h(t)}]rdr=\frac{\pi}{4}h^3(t)$

雪堆的侧面积为 $S(t)=\iint_{\Sigma}dS=\iint_D\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}\;rdr$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\;rdr=\frac{13\pi}{12}h^2(t).$$

则 $\frac{dV}{dt}=-0.9S$，即 $\frac{3\pi}{4}h^2(t)h'(t)=-0.9\frac{13\pi}{12}h^2(t)$， 得

$h(t)=-\frac{13}{10}t+C$，由 $h(0)=130$ 得 $C=130$，$\therefore h(t)=-\frac{13}{10}t+130$，令 $h(t)=0$ 得，$t=100$.

七．（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1. 请就你的理解讨论平面上两类曲线积分之间的关系（主要讨论他们之间的联系和区别）．

解： 第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 与曲线的方向无关，

而第二型曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与曲线的方向有关：

$$\int_{L^+}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{L^-}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

二者的之间的联系：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$,

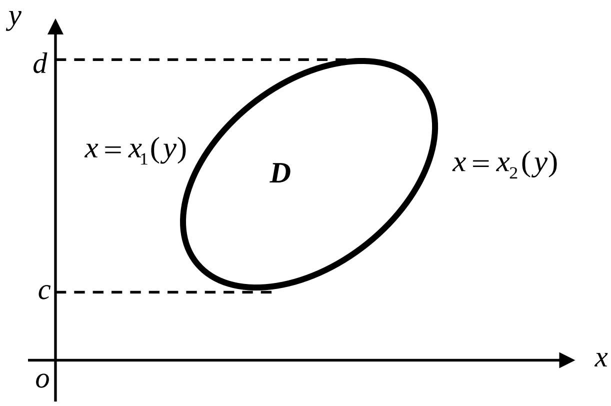
其中 $\cos\alpha$,$\cos\beta$ 是点 (x,y) 处曲线 L 正向切向量的方向余弦.

2．设简单有界闭区域 D 如图所示，∂D 取逆时针方向，$Q(x,y)$ 及其一阶偏导数 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上连续，

试证明：$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy$.

证：简单有界闭区域D可表示为:

$D = \{(x,y) \mid x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$.



根据二重积分的计算方法有

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d \{Q[x_2(y), y] - Q[x_1(y), y]\} dy.$$

另一方面，由第二类曲线积分的计算公式得

$$\oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy = \int_c^d Q[x_2(y), y]dydy + \int_d^c Q[x_1(y), y]dydy$$

$$= \int_c^d \{Q[x_2(y), y] - Q[x_1(y), y]\} dy.$$

故 $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy$.