2011-1012 学年第二学期高等数学（2-2）期末考试 A 卷

一．填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共计 18 分）

1．$\vec{a}=(1,4,5)$，$\vec{b}=(1,1,2)$，若$\vec{a}+\lambda\vec{b}$与$\vec{a}-\lambda\vec{b}$垂直，则$\lambda=$__________.

2．设$z=\arctan\sqrt{xy}+(x-1)(y-1)\ln(x+y)$，则$dz|_{(1,1)}=$____________.

3．设$z(x,y)$由方程$xe^{y}+yz+ze^{x}=0$所确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

4．设$f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$，而$s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,-\infty<x<+\infty$，其中

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$，则$s(-\dfrac{\pi}{2})=$____________.

5．已知D是长方形$a\le x\le b,0\le y\le 1$,$\iint\limits_D yf(x)dxdy=1$,则$\int_a^b f(x)dx=$__________

6．设曲线C为圆周$x^2+y^2=R^2$,则$\oint\limits_C(x^2+y^2-3x)ds=$____________.

二．选择题（共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）

1．下列级数中，绝对收敛的级数是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{n}{n+1})^n$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^n$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

2．设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，则下列结论中错误的是（　）.

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛；　(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则部分和$S_n$有界；　(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$.

3．设曲线型构件Γ的密度函数为$\rho(x,y,z)$,则构件对 z 轴的转动惯量为（　）.

(A) $\int_\Gamma\rho(x,y,z)ds\sqrt{a^2+b^2}$；　(B) $\int_\Gamma(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$；

(C) $\int_\Gamma\rho(x,y,z)z^2ds$；　(D) $\int_\Gamma\rho(x,y,z)zdz$.

4．设有直线 L：$\begin{cases}x+y-5=0\\2x-z+8=0\end{cases}$及平面$\Pi:2x+y+z-3=0$，则直线 L（　）.

(A) 平行于平面Π；　(B) 与平面Π的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$；

(C) 与平面Π垂直； (D) 与平面Π的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

三．解答题（共 8 小题，每小题 8 分，共计 64 分）

1． 计算二重积分$I=\iint\limits_D (x-y)dxdy$.其中积分区域 D 为

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2$，$x\ge 0, y\ge 0\}$区域.

2．设$\overrightarrow{n}$为曲面$\Sigma: 2x^2+3y^2+z^2=6$在点P（1, 1, 1）处指向外侧的法向量，求

（1）函数$u=e^{\frac{y}{x}}+\ln(x^2+y^2)+2\sqrt{z}$在点$P$（1, 1, 1）的梯度；

（2）函数$u=e^{\frac{y}{x}}+\ln(x^2+y^2)+2\sqrt{z}$在点$P$处沿方向$\overrightarrow{n}$的方向导数；

3．计算三次积分$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz$的值.

4．设有幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，

（1）求该幂级数的收敛半径　　　（ 2 ）求该幂级数的收敛域　（ 3 ）求该幂级数的和

5．设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$，上侧为曲面正侧, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

6. 设有函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，问

（1） 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否连续？说明理由.

(2) 求函数 $f(x,y)$ 对 x 的偏导函数 $f_x'(x,y)$

7. 设有力场 $F(x,y)=(y^2+1)\vec{i}+y(2x+1)\vec{j}$，求变力沿曲线 L： $y=\sqrt{1-x^2}$ 从(1,0)到

8.求函数 $f(x,y)=xy^2(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$ 及坐标轴所围成的有界闭域 D 上的最大值、最小值.

四．证明题（本题 6 分）设 $f(x)>0,$ 且连续试证 $\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy=\frac{1}{2}$,