常微分方程数值解法

数值计算方法课程组

中国石油大学-华东

（课堂专属 切勿网传）

目 录

目 录

常微分方程问题举例

描述电容器充电过程的数学模型是

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC}Q + \frac{E}{R},$$
$$Q(t_0) = Q_0,$$

其中 t 是时间，$Q(t)$ 是电容器上的带电量，C 为电容，R 为电路中的电阻，E 为电源的电动势。

描述物种增长率的数学模型是

$$\frac{dN}{dx} = \alpha N - \beta N^2,$$
$$N(x_0) = N_0,$$

其中 $N(x)$ 为物种的数量, α 为物种的出生率与死亡率之差，β 为物种的食物供给及它们所占空间的限制, N_0 为常数。

一阶常微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \le x \le b \\
y(a) = y_0
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

定理（解的存在唯一性）

对于初值问题 (1.1)，其右端项满足：

1. $f(x, y)$ 在区域 $\Omega = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in (-\infty, +\infty)\}$ 内连续；
2. 函数 $f(x, y)$ 关于 y 满足 *Lipschitz* 条件，即存在正常数 L, 使得对任意 $x \in [a, b], y_1, y_2 \in (-\infty, +\infty)$ 均成立不等式

$$
|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|,
$$

则初值问题 (1.1) 存在唯一解 $y \in C[a, b]$.

常用的一些解析解法：分离变量法、变量代换、常数变易法、Lapalace 变换等.

定义 (数值解)

所谓数值解是指：在解的存在区间上取一系列点

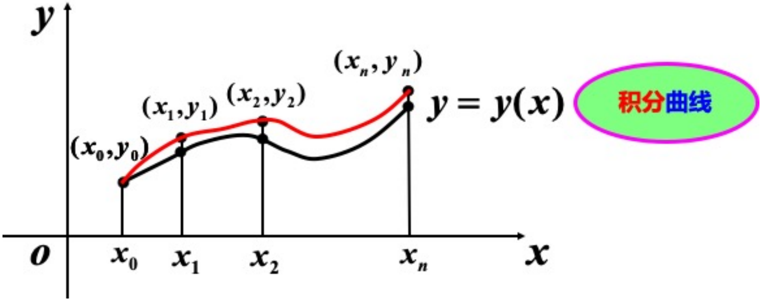
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

逐个求出 $y(x_i)$ 的近似值 $y_i (i = 0, 1, \cdots, N)$.

通常取等距节点，即

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \cdots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

初值问题 (1.1) 的解析解及其数值解的几何意义:



- 初值问题 (1.1) 的解析解表示过点 (x_0, y_0) 的一条曲线;
- 初值问题 (1.1) 的数值解表示一组离散点列 (x_i, y_i);
- 可用拟合方法求该组数据 (x_i, y_i) 的近似曲线.

目 录

求解常微分方程初值问题的Euler方法：

对于微分方程的初值问题：

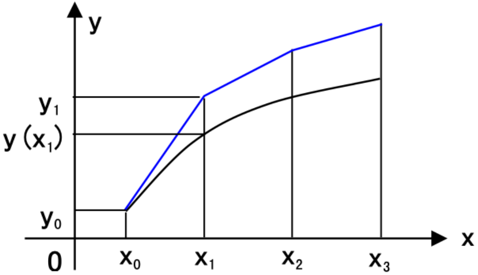
$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = y_0$$

设分点 $x_i = a + ih$, $i = 0:n$，步长 $h = (b-a)/n$。

过点 (x_0, y_0) 作曲线 $y = y(x)$ 的切线，设切线与直线 $x = x_1$ 交于点 (x_1, y_1)，则

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

在区间 $[x_0, x_1]$ 上，用切线近似曲线 $y = y(x)$，用 y_1 近似 $y(x_1)$。



这里是不是应该写成f(x_1, y(x_1))来表示斜率啊

过点(x_1,y_1)，以$\boxed{f(x_1,y_1)}$为斜率作直线，此直线在区间$[x_1,x_2]$上近似曲线$y=y(x)$，与直线$x=x_2$交于点(x_2,y_2)，

$y_2=y_1+hf(x_1,y_1)$，用y_2近似$y(x_2)$，…继续此过程，得到公式

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\quad i=0:n-1$$

这就是Euler法的计算公式——Euler公式。

由此公式递推即可求出初值问题的数值解$[y_0,y_1,\cdots,y_n]$，作为精确解的近似 $[y(x_0),y(x_1),\cdots,y(x_n)]\approx[y_0,y_1,\cdots,y_n]$即

$$y(x_i)\approx y_i,\quad i=0:n$$

Euler法的几何意义：用折线段

$$y=y_i+f(x_i,y_i)(x-x_i),x_i\le x\le x_{i+1},\quad i=0:n-1$$

近似代替曲线$y=y(x)$。

Euler法又称为向前Euler法、折线法或Euler折线法。

不对，y(x_1)是未知的，就是用y_1来替代y(x_1)并且使得这个式子可以迭代

Euler公式的其他推导方法：

(1) 用差商近似导数：

在 x_i 处： $y'(x_i)=f(x_i,y(x_i))$ ，由于 $y'(x_i)\approx\left[y(x_{i+1})-y(x_i)\right]/h$ ，

所以 $y(x_{i+1})\approx y(x_i)+hf(x_i,y(x_i)), i=0:n-1$ ，

将公式中的近似号改为等号，用 y_i 近似 $y(x_i)$ ，则得到Euler公式。

(2) Taylor展开法：

$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+O(h^2)\approx y(x_i)+hf(x_i,y(x_i))$ ， ……

(3) 将微分方程转化为积分方程：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(t)dt=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t,y(t))dt$$

$y(x_{i+1})-y(x_i)\approx(x_{i+1}-x_i)f(x_i,y(x_i))$ （左矩形求积公式）

$y(x_{i+1})\approx y(x_i)+hf(x_i,y(x_i))$ ……

§9.2.1 Euler 方法及其稳定性

Euler 方法的导出：将 $y(x_{n+1})$ 在点 x_n 处进行 Taylor 展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n), \quad x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$$

即

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n)$$

略去高阶项，即得向前 Euler 格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{2.2}$$

将 $y(x_n)$ 在点 x_{n+1} 处进行 Taylor 展开

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n), \quad x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$$

即

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n)$$

略去高阶项，即得向后 Euler 格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{2.3}$$

注释

向后 Euler 公式为隐式格式，需要利用迭代法求解.

例题

分别利用向前和向后 Euler 方法求解初值问题的数值, 取 $h = 0.1$.

$$\frac{dy}{dx} = x - y + 1, \quad 0 \le x \le 0.5,$$
$$y(0) = 1.$$

解:

$$f(x, y) = x - y + 1, \quad y_0 = 1.$$

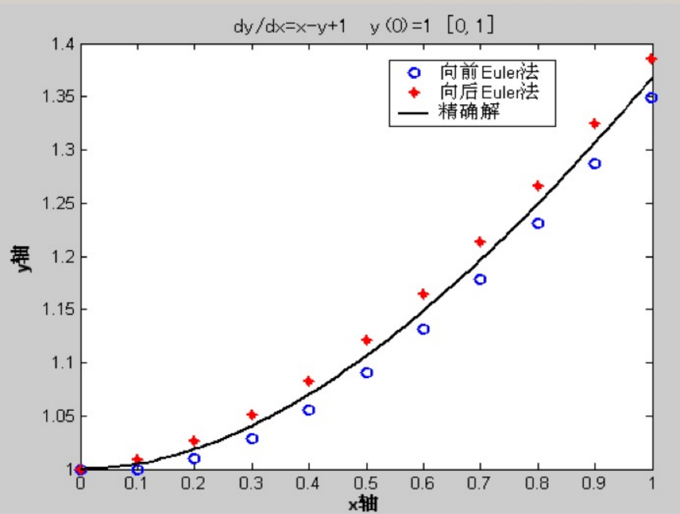
向前 Euler 方法:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = hx_n + (1 - h)y_n + h.$$

同理可得向后 Euler 方法:

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+h}(hx_{n+1} + y_n + h).$$

计算结果


dy/dx=x-y+1 y(0)=1 [0, 1]
向前Euler法
向后Euler法
精确解
y轴
x轴
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

常微分方程数值解法的稳定性

定义

设一个数值方法以定步长 h 求解实验方程

$$y' = \lambda y, \quad Re(\lambda) < 0$$

得到线性差分方程的解 y_n. 当时 $n \to +\infty$，若 $y_n \to 0$, 则称该方法对步长为绝对稳定的；否则称为计算不稳定.

注释

上述定义表明，若数值方法可使任何一步产生的误差在后面的计算中都能逐步削弱，则该方法为绝对稳定.

定义

将数值方法应用于实验方程，若对一切

$$\mu = \lambda h \in \Omega \subset C(\text{复数域})$$

都是绝对稳定的，则称区域 Ω 为该方法的绝对稳定域.

例如，对于向前 Euler 方法，格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \lambda h y_n,$$

当 y_n 有误差变为 y_n^* 时，有

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \lambda h y_n^*,$$

令 $e_n = y_n^* - y_n$, 并记 $\mu = \lambda h$, 则

$$e_{n+1} = e_n + \mu e_n = (1+\mu)e_n,$$

当 $|1+\mu| < 1$ 时，误差将逐步减弱，故此时方法稳定，即向前 Euler 法绝对稳定域：

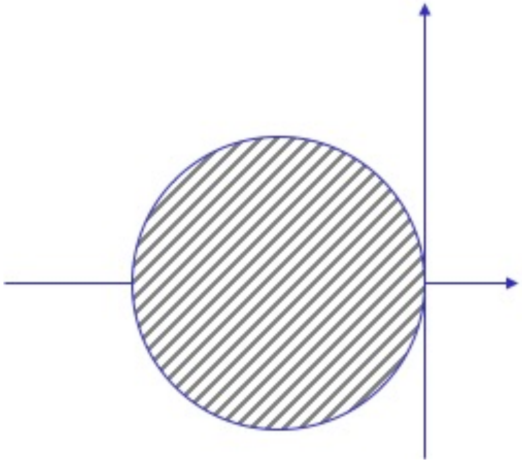
$$|1+\mu| < 1$$

对于向后 Euler 方法，误差满足

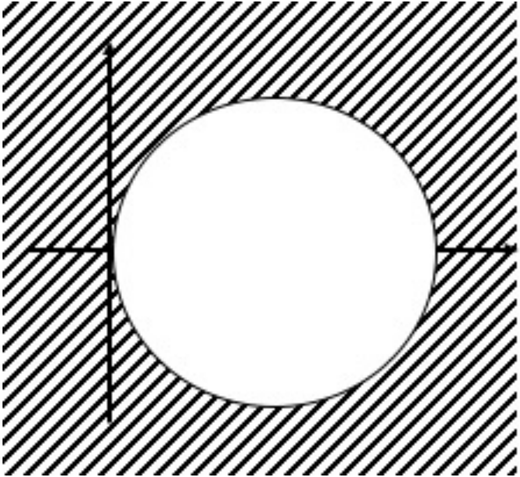
$$e_{n+1} = e_n + \mu e_{n+1},$$

向后 Euler 法绝对稳定域

$$|1-\mu| > 1$$



向前 Euler 方法的绝对收敛域



向后 Euler 方法的绝对收敛域

单步法的一般形式

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}, h) \tag{2.4}$$

其中 φ 与 $f(x, y)$ 有关. 若 φ 不包含 y_{n+1}，称格式为显格式的，否则为隐格式.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) & \text{显式单步法} \\ y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, y_{n+1}, h) & \text{隐式单步法} \end{cases}$$

定义

称 $e_n = y(x_n) - y_n$ 为某方法在点 x_n 的整体截断误差.

定义

设 $y(x)$ 是问题 (1.1) 的解，称

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, x_{n+1}, y(x_n), y(x_{n+1}), h)$$

为单步法 (2.4) 的局部截断误差.

整体截断误差不仅与当前步的计算有关，它与以前各步的计算也有关，是各步误差影响的综合结果，是各步误差的积累。因此分析整体截断误差的问题，可转为分析各步产生的误差的问题。

定义

如果给定方法的局部截断误差 $T_{n+1} = O(h^{p+1})$, 其中 p 为自然数，则称该方法是 p 阶的或具有 p 阶精度. 如果一个 p 阶单步方法的局部截断误差为

$$T_{n+1} = g(x_n, y(x_n))h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

则称其第一个非零项 $g(x_n, y(x_n))h^{p+1}$ 为该方法的局部截断误差的主项.

注：若显式单步法增量函数 f 关于第二个变量满足 Lipschitz 条件，且局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则整体截断误差为 $O(h^p)$.

如向前 Euler 方法的局部截断误差

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_n) \\ &= \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned}$$

所以向前 Euler 方法为一阶方法.
对于向后 Euler 方法，其局部截断误差

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_{n+1}) \\ &= -\frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned}$$

所以向后 Euler 方法也是一阶方法.

§9.2.3 Euler 方法的误差分析

对初值问题中的微分方程两端在区间 $[x, x+h]$ 上积分

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(s, y(s))\,ds$$

如果用左矩形公式计算上式右端的积分，并令 $x = x_n$，则有

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + R_n$$

其中

$$R_n = \int_{x_n}^{x_n+h} f(s, y(s))\,ds - hf(x_n, y(x_n)).$$

设 $f(x,y)$ 关于 x 和 y 均满足 Lipschitz 条件，即

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq K|x_1-x_2|,\quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$$

则

$$\begin{aligned}
R_n &= \int_{x_n}^{x_n+h} f(x,y(x))dx - hf(x_n,y(x_n)) \\
&= \int_{x_n}^{x_n+h} [f(x,y(x))-f(x_n,y(x_n))]dx \\
&= \int_{x_n}^{x_n+h} [f(x,y(x))-f(x_n,y(x)]ds \\
&\quad + \int_{x_n}^{x_n+h} [f(x_n,y(x))-f(x_n,y(x_n))]dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_n &\le K\int_{x_n}^{x_n+h}|x-x_n|dx+\int_{x_n}^{x_n+h}L|y(x)-y(x_n)|dx\\
&\le \frac{Kh^2}{2}+\int_{x_n}^{x_n+h}L|y'(\xi)||x-x_n|dx\\
&\le \frac{h^2}{2}(K+LM)=:R,\\
M &= \max_{a\le x\le b}|y'(x)|=\max_{a\le x\le b}|f(x,y(x))|.
\end{aligned}
$$

而整体截断误差为

$$
\begin{aligned}
|e_{n+1}| &= |e_n+h[f(x_n,y(x_n))-f(x_n,y_n)]+R_n|\\
&\le |e_n|+Lh|e_n|+|R_n|\\
&\le (1+Lh)|e_n|+R\le(1+Lh)^n|e_0|+R\sum_{i=0}^{n-1}(1+Lh)^i
\end{aligned}
$$

从而有

$$|e_{n+1}| \le (1+Lh)^n|e_0| + \frac{R}{hL}[(1+Lh)^{n-1}-1]$$

注意到

$$e^{Lh} \le 1 + Lh$$

从而可知

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\le e^{nhL}|e_0| + \frac{R}{hL}[(1+Lh)^{n-1}-1] \\ &\le e^{L(b-a)}|e_0| + \frac{R}{hL}[e^{L(b-a)}-1] \end{aligned}$$

定理（向前 Euler 方法的整体截断误差）

如果 $f(x, y)$ 关于 x, y 满足 *Lipschitz* 条件，K, L 为对应的 *Lipschitz* 常数，且当 $h \to 0$，则向前 *Euler* 方法的解 $\{y_n\}$ 一致收敛于初值问题 (1.1) 的解，且整体截断误差 e_n 满足估计

$$|e_n| \le e^{L(b-a)}|e_0| + \frac{h}{2}(M + \frac{K}{L})[e^{L(b-a)} - 1].$$

注释

如果 $y_0 = y(a)$，Euler 方法的整体截断误差为 $O(h)$.

目 录

Runge-Kutta 方法的基本思想

显式单步法的一般形式：

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, f, h) \rightarrow \text{增量函数}$$

定义

Runge-Kutta 方法是利用一些点的线性组合构造增量函数 φ，使得相应方法的局部截断误差的阶数尽可能高.

取两点 $(x, y), (x + a_2 h, y + b_{21} hf(x, y))$, 作线性组合

$$\varphi(x_n, y_n, f, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + a_2 h, y + b_{21} hf(x, y)),$$

确定参数 c_1, c_2, a_2, b_{21}，使得 $y_n + h\varphi(x_n, y_n, f, h)$ 与 $y(x + h)$ 在点 x 的 Taylor 展开式有尽可能多的相同项.

将 $y(x+h)$ 作 Taylor 展开

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) \\
&= y(x) + h\{f(x,y) + \frac{h}{2}[f_x(x,y) + f(x,y)f_y(x,y)] + O(h^2)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) + h\varphi(x_n, y_n, f, h) &= y(x) + h\{c_1 f(x,y) + c_2 f(x + a_2 h, y + b_{21} h f(x,y))\} \\
&= y(x) + h\{c_1 f(x,y) + c_2[f(x,y) + a_2 h f_x(x,y) \\
&\quad + b_{21} h f(x,y) f_y(x,y)] + O(h^2)\}
\end{aligned}
$$

比较上面两式可得

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 1 \\
c_2 a_2 &= 1/2 \\
c_2 b_{21} &= 1/2
\end{aligned}
$$

将 $y(x+h)$ 作 Taylor 展开

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) \\
&= y(x) + h\{f(x,y) + \frac{h}{2}[f_x(x,y) + f(x,y)f_y(x,y)] + O(h^2)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) + h\varphi(x_n, y_n, f, h) &= y(x) + h\{c_1 f(x,y) + c_2 f(x + a_2 h, y + b_{21} h f(x,y))\} \\
&= y(x) + h\{c_1 f(x,y) + c_2[f(x,y) + a_2 h f_x(x,y) \\
&\quad + b_{21} h f(x,y) f_y(x,y)] + O(h^2)\}
\end{aligned}
$$

比较上面两式可得

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 1 \\
c_2 a_2 &= 1/2 \\
c_2 b_{21} &= 1/2
\end{aligned}
$$

方程有无穷多解

若取 $c_1 = c_2 = 1/2, a_2 = b_{21} = 1$，则得改进的 Euler 公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_h + hK_1) \end{cases}$$

若取 $c_1 = 1/4, c_2 = 3/4, a_2 = b_{21} = 2/3$, 则得二阶的 Heun（休恩）公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(K_1 + 3K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{2h}{3}, y_h + \dfrac{2h}{3}K_1) \end{cases}$$

改进的 Euler 公式和 Heun（休恩）公式都是二阶 Runge-Kutta 方法. 一般 m 阶 Runge-Kutta 方法可按上思想构建.

定义（显式 Runge-Kutta 方法）

设 m 是一个正整数，代表使用函数值 $f(x,y)$ 的个数，a_i, b_{ij} $(i=2,\cdots,m)$, $(j=1,2,\cdots,i-1)$ 和 $c_i(i=1,2,3,\cdots,m)$ 是一些特定的权因子（均为实数），则称下列方法（公式）

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + \cdots + c_mK_m) \tag{3.5}$$

为初值问题

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = y_0$$

的 m 级显式 *Runge-Kutta* 方法，其中

$$
\begin{aligned}
K_1 =& f(x_n, y_n), \\
K_2 =& f(x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} K_1), \\
&\cdots\cdots \quad \cdots \\
K_m =& f(x_n + a_m h, y_n + h \sum_{i=1}^{m-1} b_{mi} K_i).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

相关系数的确定如下：将方程 (3.5) 两端 Taylor 展开称 h 的级数，比较两端 h 的方次不超过 p 的项的系数并使其相等，得到 m 级显式 Runge-Kutta 方法的系数方程，求解可得 m 级 p 阶显式 Runge-Kutta 方法.

一般情况下，系数满足

$$
\sum_{j=1}^{m} c_j = 1, \quad a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, \quad i = 2, 3, \cdots, m.
$$

相关系数可用 Butcher 表表示

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
a_2 & b_{21} & & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
a_m & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m(m-1)} & \\
\hline
 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m
\end{array}$$

下面给出常用几种显式 Runge-Kutta 公式:

三级三阶显式

Kutta公式

$$\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2).
\end{cases}$$

三级三阶显式

Heun公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}K_2) \end{cases}$$

四级四阶经典显式

Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

四级四阶显式

Kutta公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{3}, y_n + \dfrac{h}{3}K_1) \\
K_3 = f(x_n + \dfrac{2h}{3}, y_n - \dfrac{h}{3}K_1 + hK_2) \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_1 - hK_2 + hK_3)
\end{cases}
$$

四级四阶显式

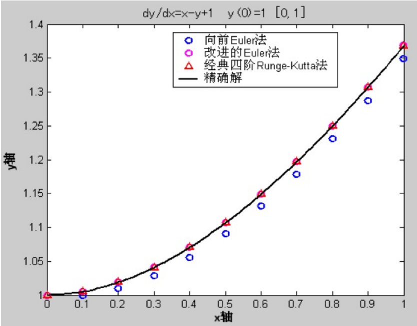
Gill公式

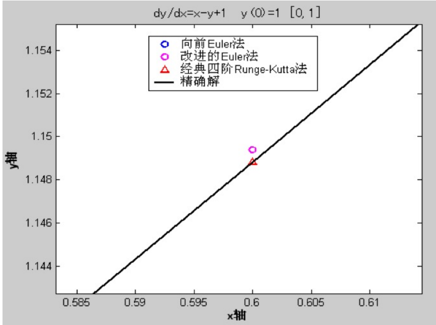
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + (2-\sqrt{2})K_2 + (2+\sqrt{2})3K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}hK_1 + (1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})hK_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n - \dfrac{\sqrt{2}}{2}hK_2 + (1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})hK_3) \end{cases}$$

例题

取 $h=0.1$，运用 Runge-Kutta 方法求解问题

$$\frac{dy}{dx} = x - y - 1, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 1.$$





显式 Runge-Kutta 方法的稳定性

下面讨论显式 Runge-Kutta 方法的稳定性，以三级三阶显式 Runge-Kutta 格式为例.

三级三阶显式 Kutta公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2).
\end{cases}
$$

将其应用到实验方程

$$y' = \lambda y$$

可知

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(x_n, y_n) = \lambda y_n \\
K_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1) \\
&= \lambda(y_n + \frac{h}{2} K_1) = \lambda(1 + \frac{h}{2}\lambda) y_n \\
K_3 &= f(x_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2) \\
&= \lambda(y_n - hK_1 + 2hK_2) \\
&= \lambda(1 - h\lambda + 2h\lambda(1 + \frac{h}{2}\lambda)) y_n \\
&= \lambda(1 + h\lambda + (h\lambda)^2) y_n
\end{aligned}
$$

从而可知

$$
y_{n+1} = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2/2 + (h\lambda)^3/6] y_n
$$

其绝对稳定域为

$$\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!}/2 + \frac{(h\lambda)^3}{3!}\right| < 1$$

事实上，可以证明 m 阶 Runge-Kutta 方法的绝对稳定域为

$$\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!}/2 + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \cdots + \frac{(h\lambda)^m}{m!}\right| < 1$$

即同阶的不同格式有相同的绝对稳定域.

§9.3.3 隐式 Runge-Kutta 方法

m 级隐式 Runge-Kutta 方法的一般形式

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{m} c_i K_i$$
$$K_i = f(x_n + a_{ih}, y_n + h\sum_{j=1}^{m} b_{ij}K_j), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中系数的确定方法同显式 Runge-Kutta 方法完全类似. 一种是运用 Taylor 展开；另一种方法是将微分方程化成积分方程，取阶数较高的数值积分公式计算右端积分, 进而确定相关系数.

一级二阶隐式

中点公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1). \end{cases}$$

二级四阶隐式
Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(K_1 + K_2)}{2} \\ K_1 = f(x_n + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6})h,\ y_n + \dfrac{hK_1}{4} + (\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{6})kK_2) \\ K_2 = f(x_n + (\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6})h,\ y_n + (\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{6})kK_1 + \dfrac{hK_2}{4}). \end{cases}$$

备注

- m 级隐式 Runge-Kutta 方法均存在 $2m$ 阶隐式 Runge-Kutta 格式，这比显式格式优越.
- 需求解非线性方程组，计算复杂.

目 录

线性多步法

所谓的线性多步法，指的是某一步解的公式不仅与前一步的值有关，而且与前面若干步解的值有关的方法.
目的：期望获得更高精度数值解.

下面从数值积分的角度给出其构造方法. 对问题作积分可得

$$y(x) = y(x^*) + \int_{x^*}^{x} f(s, y(s))\,ds, \qquad x, x^* \in (a, b)$$

取 $x = x_{n+1}, x^* = x_{n-p}$, 有

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(s, y(s))\,ds$$

若积分 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(s,y(s))ds$ 用节点 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$ 的数值积分近似，可得格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h\sum_{j=0}^{q} \alpha_j f(x_{n-j}, y_{n-j}), \tag{4.7}$$

其中

$$\alpha_j = \frac{1}{h}\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} l_j(x)dx$$

$l_j(x)$ 为关于节点 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$ 的 Lagrange 基函数. 记 $r = \max\{p, q\}$, 若 $y_{n-r}, y_{n-r+1}, \ldots, y_n$ 已知，则可由 (4.7) 得 y_{n+1}, 称此格式 (4.7) 为 $r+1$ 步 $q+1$ 阶显式方法.

$p = 1, q = 2$ 时，可得三步三阶显式格式

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})]. \tag{4.8}$$

若积分 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(s, y(s))ds$ 用节点 $x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n+1-q}$ 的数值积分近似，可得隐式格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h\sum_{j=0}^{q} \beta_j f(x_{n+1-j}, y_{n+1-j}), \tag{4.9}$$

其中

$$\beta_j = \frac{1}{h}\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} l_j(x)dx$$

记 $r = \max\{p, q-1\}$,(4.8) 为 $r+1$ 步 $q+1$ 阶隐式方法. 如 $p=2, q=2$ 时，可得三步三阶隐式格式

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})].$$

上述方法中，若 $p=0$, 则相应格式称为 Admas 格式，其中 $q=0$ 时为 Euler 格式； $q=1$ 时，二步显式 Adams 格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})].$$

一步隐式 Adams 格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_{n+1},y_{n+1})+f(x_n,y_n)],$$

此格式也称为梯形公式.

注释

- 线性多步法的局部截断误差可由多项式插值余项求出;
- 隐格式比显格式具有更小的截断误差、更好的稳定性，但计算复杂，通常需迭代求解.

预估-校正格式

为了提高隐式格式的计算速度，一种做法是：先用显式格式作预估计，再用隐式格式对预估值作校正，将校正后的值作为格点函数 y_{n+1}, 此方法称为预估-校正格式. 如用 Euler 公式作预估，梯形公式作校正：

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^* &= y_n + hf(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_{n+1}, y_{n+1}^*) + f(x_n, y_n)].
\end{aligned}
$$

此公式正好是改进的 Euler 公式.
常用的预估-校正公式：三点 Milne 公式

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^* &= y_{n-3} + \frac{h}{3}[8f(x_n, y_n) - 4f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 8f(x_{n-2}, y_{n-2})] \\
y_{n+1} &= y_{n-3} + \frac{h}{3}[f(x_{n+1}, y_{n+1}^*) + 4f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})].
\end{aligned}
$$

四点 Adams 公式

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^{*} =& y_n + \frac{h}{24}[55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\
&+ 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})] \\
y_{n+1} =& y_n + \frac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{*}) + 19f(x_n, y_n) \\
&- 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})].
\end{aligned}
$$

目录

§9.5.1 单步法的收敛性

显式单步法的一般形式

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\varphi(x_n, y_n, h), \\ y_0 &= y|_{x=a}. \end{aligned}$$

引理

设 e_n 为实序列，满足

$$e_{n+1} \leq a_n e_n + b_n, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1, a_n > 0, b_n \in R$$

则 $e_n \leq E_n$, 其中

$$E_n = (\prod_{k=0}^{n-1} a_k) e_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\prod_{l=k+1}^{n-1} a_l) b_k, \quad n = 0, 1, \cdots, N.$$

定义（p 阶相容）

对于单步法，如果局部截断误差满足

$$y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y(x), h) = O(h^{p+1})$$

则称格式 $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$ 为 p 阶相容.

定理

设显式单步法中的增量函数 $\varphi(x, y, h)$ 满足

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, y_1, h)| < L_\varphi |y - y_1|$$

其中 $L_\varphi > 0$ 且格式 p 阶相容，即局部截断误差为 $O(h^{p+1})$, 则该单步法是 p 收敛的，即

$$|y_n - y(x_n)| \leq Ch^p, \quad C\text{为某正常数}.$$

证明：设

$$\bar{y}_{n+1} = y(x_n) + h\varphi(x_n, y(x_n), h).$$

因格式 p 阶相容，故而可知

$$|\bar{y}_{n+1} - y(x_{n+1})| \leq Ch^{p+1}$$

从而

$$e_{n+1} = |y_{n+1} - y(x_{n+1})| \leq |y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}| + |\bar{y}_{n+1} - y(x_{n+1})|$$

又

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}| &= |y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), h)| \\ &= |y_n - y(x_n) + h[\varphi(x_n, y_n, h) - \varphi(x_n, y(x_n), h)]| \\ &\leq (1 + hL_\varphi)e_n \end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &\le |y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}| + |\bar{y}_{n+1} - y(x_{n+1})| \\
&\le (1 + hL_\varphi) e_n + Ch^{p+1} \\
&\le (1 + hL_\varphi)^n e_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL_\varphi)^{n-k-1} Ch^{p+1} \\
(e_0 = 0) &\le \sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL_\varphi)^{n-k-1} Ch^{p+1} \\
&\le \frac{C}{L_\varphi} [e^{(b-a)/L_\varphi} - 1] h^p.
\end{aligned}
$$

§9.5.2 稳定性及收敛性

对应于常微分方程 $y' = f(x, y)$ 的残量算子定义为 R:

$$(Rv)(x) = v'(x) - f(x, v(x)),$$

以及对应数值格式 $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$ 残量算子为 R_h:

$$(R_h u)_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} - \varphi(x_n, u_n, h), \quad n = 0, 1, 2 \cdots, N-1.$$

假设常微分方程的连续解为 $y(x)$，而数值解为在格点
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ 上满足下列关系式的点列

$$u_{n+1} = u_n + h\varphi(x_n, u_n, h)$$

则对局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ 的单步法有

$$(Ry)(x) = 0, \quad (R_h u)_n = 0, \quad (R_h y)_n = O(h^p)$$

其中 $y = [y_0, \cdots, y_N]^T$, $y_i = y(x_i)$.

定义

若存在 $K > 0$ ，使得对任意网格点上取值的向量 v, w, 有

$$\|v - w\|_\infty \le K\{\|v_0 - w_0\|_\infty + \|R_h v - R_h w\|_\infty\}, \quad h \le h_0$$

其中 h_0 为充分小的网格尺度， v_0, w_0 是给定的初始向量，则称此单步法是稳定的.

上面的稳定性定义是自然的，对于无误差扰动的差分格式

$$R_h u = 0, \quad u_0 = y_0,$$

真实计算中实际为

$$R_h w = \varepsilon, \quad w_0 = y_0 + \eta_0$$

当

$$\|u - w\|_\infty \le K\{\|\eta_0\|_\infty + \|\varepsilon\|_\infty\}$$

小扰动下计算解与精确解不会相差太远，故稳定.
对于多步法，可定义残量算子为 R_h:

$$(R_h u)_n = \frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i u_{n+i}) - \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, u_{n+i})\right),$$

定义稳定性如下

定义

若存在 $K>0$ ，使得对任意网格点上取值的向量 v,w, 有

$$\|v-w\|_\infty \le K\{\max_{0\le s\le k-1}\|v_s-w_s\|_\infty + \|R_h v - R_h w\|_\infty\}, \quad h\le h_0$$

其中 h_0 为充分小的网格尺度， v_s, w_s 是给定的初始向量, 则称此多步法是稳定的.

一个 k 步的算法可表示为

$$\alpha_k y_{n+k}+\cdots+\alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k}+\cdots+\beta_0 f_n),$$

其中 $f_i=f(x_i,y_i)$. 当 $\beta_k=0$ 时，格式为隐格式，否则为显格式.

定理

多步法收敛等价于数值格式相容且稳定.

定义 (特征多项式)

多项式
$$\rho(\xi) = \alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1}\xi^{k-1} + \cdots + \alpha_0$$
为多步法的特征多项式.

定义

多步法的特征多项式 $\rho(\xi)$ 的根在单位圆内或单位圆上，而在单位圆上的根只能是单根，则称方法满足跟条件.

定理

数值格式稳定性等价于其满足根条件.

推论

数值格式收敛等价于其相容且满足根条件.

目 录

一阶微分方程组初值问题的一般形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad a \le x \le b,$$
$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

其中

$$\mathbf{y} = [y_0, \cdots, y_m]^T, \quad \mathbf{f} = [f_0, \cdots, f_m]^T.$$

前面导出的数值格式，都可以直接用到该方程组, 不在赘述.

高阶微分方程

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y), \quad a \le x \le b,$$
$$y(a) = \eta_0, \quad y'(a) = \eta_1, \cdots, y^{(m-1)}(a) = \eta_{m-1}$$

作下列变量代换可将其化为一阶方程组的初值问题

$$y_1 = y, \quad y_2 = dy/dx; \quad y_3 = d^2y/dx^2, \cdots, y_m = d^{m-1}y/dx^{m-1}$$

从而可得

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{m-1} \\ f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \\ \cdots \\ y_{m-1}(a) \\ y_m(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1(a) \\ \cdots \\ \eta_{m-2} \\ \eta_{m-1} \end{bmatrix}$$

可类似前述方法构造相应的数值方法求解.

目 录

差分方法

实际问题出经常碰到两点边值问题

$$\begin{aligned} y'' &= f(t, y(t), y'(t)), \quad t \in (a, b), \\ a_0 y(a) - a_1 y'(a) &= \alpha, \quad b_0 y(b) - b_1 y'(b) = \beta. \end{aligned} \tag{7.10}$$

本节将介绍差分方法及打靶方法求解此类问题.

差分方法

其思想就是用差商代替导数，从而把微分方程问题离散化为一个差分方程组，以此方程组的解作为边值问题解的近似值.

定义等距分点

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \cdots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

将 $y(x_{n+1})$ 及 $y(x_{n-1})$ 在 x_n 按 Taylor 展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_n')$$
$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_n'')$$

于是

$$y''(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_n), \quad x_{n-1} \le \xi_n \le x_{n+1}.$$

取

$$h^2y''(x_n) \approx y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}), \quad 2hy'(x_n) \approx y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})$$

从而可得边值问题 (7.10) 的数值格式

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} - h^2 f(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}) = 0, \quad n = 1, \cdots, N-1$$

对于第一边值问题

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta$$

若是第二、三类边界条件，如 (7.10) 所给，则可用数值微分得

$$a_0 y_0 - a_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = \alpha,$$
$$b_0 y_0 - b_1 \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} = \beta.$$

打靶法

对于第一边值问题

$$\begin{aligned} & y'' = f(t, y(t), y'(t)), \quad t \in (a, b), \\ & y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{aligned} \tag{7.11}$$

考虑初值问题

$$\begin{aligned} & y'' = f(t, y(t), y'(t)), \quad t \in (a, b), \\ & y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s. \end{aligned} \tag{7.12}$$

上初值问题的解记为 $y(t; s)$. 如果 s 取得足够好，$y(t; s)$ 可能为第一边值问题 (7.11) 的解，从而有

$$\varphi(s) =: y(b; s) - \beta = 0.$$

因此，可以通过 Newton 迭代法求解方程 $\varphi(s)=0$ 获得期望的 s. 设计初始估计值为 s_0, 则

$$s_{n+1}=s_n-\frac{\varphi(s_n)}{\varphi'(s_n)},\quad n=0,1,\cdots.$$

因此，$\varphi'(s_n)$ 是关键. 简单的方法，数值差商代替微分，从而可得迭代格式

$$s_{n+1}=s_n-\frac{y(b;s_n)-\beta}{y(b;s_n)-y(b;s_{n-1})}(s_n-s_{n-1}),\quad n=1,\cdots.$$

注释

可将 $y(a)=\alpha$ 形象地看作子弹射出点，$y'(a)$ 为子弹射出方向，迭代求 s 的过程就是不断调解射出方向，使得子弹命中靶子 $y(b)=\beta$，因此方法称为打靶法.

知识小结

主要内容

- 算法：Euler 方法、Runge-Kutta 方法、线性多步法、预估-校正格式
- 理论分析：相容性、稳定性、收敛性
- 边值问题：差分法、打靶法

重点及难点

- 重点：Euler 方法、Runge-Kutta 方法
- 难点：Runge-Kutta 方法

Many thanks for your attention !

CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM