A 卷

2019—2020 学年第一学期
《高等数学（2-1）》期中试卷

（工 科 类）

专业班级__________________________

姓　　名__________________________

学　　号__________________________

开课系室 基础数学系

考试日期 2019.11.09

注意事项：

1．请将答案书写在**答题纸**上，试题册的反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请使用**黑色**签字笔；答案务必书写到答题纸指定区域内，否则无效；

3. 本试题册共五道大题，满分 100 分；本试题正文共 3 页，附页 2 页；

4． 试题册请勿撕开，考试结束时与答题纸一起上交.

一、选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．下列数列收敛的是（　C　）.

A、$f(n)=(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$　　　B、$f(n)=(-\frac{3}{2})^n$

C、$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n},n\text{为奇数}\\ \dfrac{1}{n+1},n\text{为偶数}\end{cases}$　　　D、$f(n)=\frac{4n^3+2n^2-7}{4n^2-7}$

2. 函数$f(x)$在点$x=x_0$处有定义是当$x\to x_0$时$f(x)$有极限的 (D).

A、必要条件　B、充分条件　C、充分必要条件　D、无关条件

3．下列极限中结果等于 e 的是（ B(答案有问题，按全对算) ）.

A、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{x}{\sin x}}$　　　B、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{x}{\sin x}}$

C、$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{-\sin x}{x}}$　　　D、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{\sin x}{x}}$

4．下列函数在点$x=0$处均不连续，其中点$x=0$是$f(x)$的可去间断点的是（ B ）.

A、$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$　　B、$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$

C、$f(x)=cos\frac{1}{x}$　　D、$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}},x<0\\ e^x,x\ge 0\end{cases}$

5．若函数$f(x)$在点$x=0$连续，且$lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则（　C ）.

A、 $f(0)=0$ 且$f'_-(0)$ 存在　　B、$f(0)=1$ 且$f'_-(0)$ 存在

C、$f(0)=0$ 且$f'_+(0)$ 存在　　D、$f(0)=1$ 且$f'_+(0)$ 存在

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1. 对任意$\varepsilon > 0$，当N=$\underline{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1\text{或者更大整数}}$ 时，对一切$n > N$，不等式$\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$成立.

2．求极限$lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$ =$\underline{\quad 1 \quad\quad}$.

3．设 $f(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$，则 $f'(0) = 100!$

4．函数$f(x)$=x^3在[1,2]上满足拉格朗日中值定理，则在(1,2)内存在的 $\xi = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

5．求微分 $d(x^2 arctanx) = \left(2xarctanx + \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$ $\underline{\quad\text{或者}}$ $arctanx\, dx^2 + x^2\, darctanx$.

三、计算题（共 4 小题，每小题 6 分，共计 24 分）

1．求极限$\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}$.

解：$\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}$

$=\dfrac{1}{8}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

用洛必达法则一样给分，过程 3 分，结果 3 分

2．设$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{sint}{1-cost} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(\frac{sint}{1-cost})}{dt}\dfrac{dt}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2

$= \dfrac{-1}{a(1-cost)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2

3．设当$x \to 0$时，$e^x - (ax^2+bx+1)$是比x^2高阶的无穷小，试求a, b的值.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - (ax^2+bx+1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - (2ax \quad + b)}{2\mathrm{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - (2a)}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 3$$

即有

$\lim\limits_{x\to 0} e^x - \left(2ax \quad + b\right) = 1 - b = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1

$\lim\limits_{x\to 0} e^x - (2a) = 1 - 2a = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1

有$b = 1$，$a = \frac{1}{2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1

4．设$f(x)=\begin{cases} ln(1+x),\ x>0 \\ 0, \qquad\qquad x=0 \\ \frac{1}{x}sin^2x, \quad x<0 \end{cases}$， 求$f'(x)$.

解：当$x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}$ ⋯⋯⋯⋯⋯ 1

当 $x<0$时 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}sin^2x+\frac{sin2x}{x}$ ⋯⋯⋯⋯⋯ 1

当$x=0$ 时 $f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{ln(1+x)-0}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}sin^2x-0}{x}=1$ ⋯⋯⋯⋯⋯ 2

因此$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x},\ x>0 \\ 1, \qquad x=0 \\ -\frac{1}{x^2}sin^2x+\frac{sin2x}{x}, \quad x<0 \end{cases}$ ⋯⋯⋯⋯⋯ 2

四、应用题（共 4 小题，每小题 8 分，共计 32 分）

1. 若函数$f(x)$在点$x=0$连续，且$f(x+y)=f(x)+f(y)$对任意的$x,y\in(-\infty,\infty)$都成立，试证$f(x)$为$(-\infty,\infty)$上的连续函数.

解：$f(0+0)=f(0)+f(0)$ 可得$f(0)=0$⋯⋯⋯⋯⋯ 2

$f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$, $\lim_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(0)=0$⋯⋯⋯ 3

有

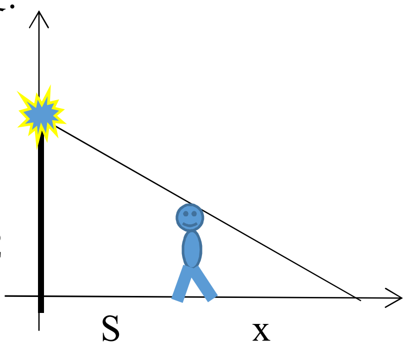
$\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x)+\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(x)$⋯⋯⋯⋯⋯ 3

2．一个身高为 2 米的人向一个高为 5 米的灯柱走去（如图），当他走到离灯柱 2.8 米时，该人的瞬时速度为$2\mathrm{m/s}$，求此时人影的长度瞬时伸长率，并求身影顶的运动速度.

解： $\frac{2}{5}=\frac{x}{x+s}$

$3x=2s$

有 $3\frac{dx}{dt}=2\frac{ds}{dt}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2



即长度瞬时伸长率 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}\frac{ds}{dt}=-\frac{4}{3}\mathrm{m/s}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

身影顶的运动速度$\frac{dx}{dt}+\frac{ds}{dt}=-\frac{10}{3}\mathrm{m/s}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

3．试证至少存在一点$\xi\in(1,e)$，使得$sin\,1=cos(ln\xi)$.

解1：令$f(x)=sin(lnx)-sin1\,lnx$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

则$f(x)$在$[1,e]$上满足罗尔中值定理，有至少$\xi\in(1,e)$,存在使得

$\mathrm{f}'(\xi)=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

即$sin\,1=cos(ln\xi)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2

解2： $f(x)=sin1-cos(lnx)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

$f(1)=sin1-1<0;$

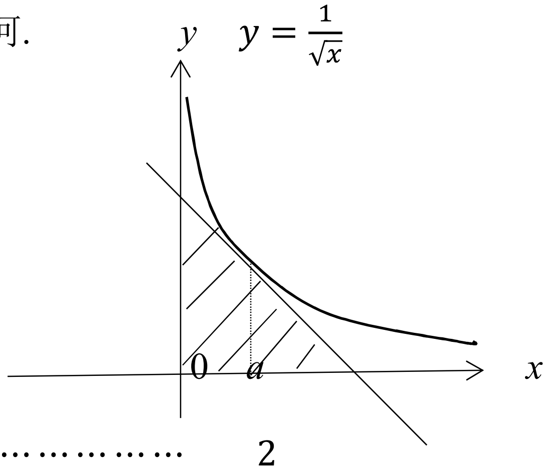
$f(e)=sin1-cos1>0;$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3

用零点定理得

至少存在一点$\xi\in(1,e)$，使得$sin\,1=cos(ln\xi)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2

解3：用柯西中值定理 $f(x)=lnx$，$g(x)=sin(lnx)$ 给分标准同上

4. 曲线$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$的切线与x轴和y轴围成一个图形（如下图），记切点的横坐标为a，试求切线方程和这个图形的面积.当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何.



解：

切点坐标为$(a,a^{-\frac{1}{2}})$

切线方程为

$y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$, ⋯⋯⋯⋯⋯ 2

切线与坐标轴交点坐标为$(0,\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}})$和 $(3a,0)$ ⋯⋯⋯⋯⋯ 1

$S=\frac{9}{4}a^{\frac{1}{2}}$⋯⋯⋯⋯⋯ 1

当$a\to+\infty$时 $S\to+\infty$⋯⋯⋯⋯⋯ 2

当$a\to+0$时 $S\to 0$⋯⋯⋯⋯⋯ 2

五、简答题（14 分）

1.根据现在所学的知识试描述求函数极限的方法，且每种方法举一例. 6 分

解：

方法一：重要极限叙述和引例各一分…………………………　2

方法二：等价无穷小代换叙述和引例各一分………………　2

方法三：洛必达法则叙述和引例各一分……………………　2

方法四：泰勒公式叙述和引例各一分………………………　2

看知识点，每种方法最多 2 分，最多达到 6 分

2.试用自己的语言写出导数的发展史（可从导数的由来，概念，性质到应用等方面），并具体说明一元函数的导数与微分的不同之处. 8 分

解：

由来　引例…………………………………　2

概念　…………………………………　1

性质…………………………………　1

应用…………………………………　1

起源（定义）不同，几何意义不同，　本质不同（导数是微分之商（微商）），　…………………………………　3