2014—2015 学年第一学期

《高等数学（2-1）》第二阶段考试卷

（ 工 科 类 ）

参考答案及评分标准

专业班级 ____________________________

姓　　名____________________________

学　　号____________________________

开课系室______基础数学系________

考试日期____2014 年 12 月 20 日______

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
本题满分	15	14	21	14	14	8	14	
本题得分	8	10	21	14	9	8	14	
阅卷人								

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共七道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 7 页。

本题满分 15 分	
本题得分	

一.（共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分）判断下列命题是否正确？在题后的括号内打“ √ ”或“ × ”，如果正确，请给出证明，如果不正确请举一个反例进行说明 .

1．若 $f(x)$ 在 x_0 点有极值 $f(x_0)$，则必有 $f'(x_0)=0$.　　（ × ）

--（2 分）

例： $f(x)=|x|$，在 $x=0$ 点有极小值 $f(0)=0$，但 $f'(0)$ 不存在 .

--（3 分）

2．若 $f(x)$ 二阶可导且 $f''(x_0)=0$ ，则 $(x_0, f(x_0))$ 必是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（ × ）

---（2 分）

例： $f(x)=x^4$， $f''(x)=12x^2$ ， $f''(0)=0$ ，但当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，

都有 $f''(x)=12x^2>0$，即 $(0,0)$ 不是曲线 $y=x^4$ 的拐点.

---（3 分）

3．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增.　　（ √ ）

---（2 分）

证 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，且 $x_1<x_2$，在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$，即 $\xi\in(a,b)$.

由条件知 $f'(\xi)>0$，且 $(x_2-x_1)>0$， $\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$ ，即 $f(x_2)>f(x_1)$.

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增. --（3 分）

二．（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

本题满分 14 分	
本题得分	

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$．

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}$ ---------------------（4 分）

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.-------------------------------------（3 分）

2．求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 的 $n\ \ (n>3)$ 阶麦克劳林公式．

解 $\because\ \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$ -----------------------------------（3 分）

$\therefore\ f(x)=x^2\ln(1+x)=x^2[x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)]$

$=x^3-\dfrac{x^4}{2}+\cdots+(-1)^{n-3}\dfrac{x^n}{n-2}+o(x^n)$.---（4 分）

三．（共 3 小题，每小题 7 分，共计 21 分）

本题满分 21 分	
本题得分	

1．求不定积分 $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$.

解 $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$

$= \int \sin^6 x \cos^2 x \, d\,(\sin x)$

$= \int \sin^6 x \,(1 - \sin^2 x)\, d\,(\sin x)$ -------------（4 分）

$= \int (\sin^6 x - \sin^8 x)\, d\,(\sin x)$

$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$ --------------------（3 分）

2．求不定积分 $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 令 $x = \sin t$，$|t| < \frac{\pi}{2}$，则 $|\cos t| = \cos t$，$dx = \cos t dt$，-------------（2 分）

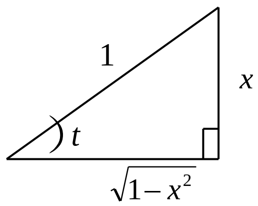
$\therefore \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t \cos t \, dt}{\sqrt{\cos^2 t}}$

$= \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{|\cos t|} = \int \sin^2 t dt$ --（2 分）

$= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4}\sin 2t + C$

$= \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}\sin t \cos t + C$

$= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C$.



---（3 分）

3．求不定积分 $\int x^3 \ln x \, dx$.

解 $\int x^3 \ln x \, dx = \int \ln x \, d\left(\frac{x^4}{4}\right)$ --（2 分）

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^4 d\,(\ln x)$ --（2 分）

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 \, dx$

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$.--（3 分）

四.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

本题满分 14 分	
本题得分	

1．已知曲线 $y=y(x)$ 上每一点的横坐标 x 处的二阶导数 $y''=6x$，且曲线在点 $(0,-2)$ 处的切线为 $2x-3y-6=0$，试求这个曲线的方程.

解 $\because\ y'=\int y''dx=\int 6xdx=3x^2+C_1$，　(1)　------------------------------（2 分）

$\therefore\ \ y=\int y'dx=\int(3x^2+C_1)dx=x^3+C_1x+C_2$．　(2)　-------------（2 分）

由已知曲线过点 $(0,-2)$，代入 (2) 式，得 $C_2=-2$，　--------------------（1 分）

又曲线在点 $(0,-2)$ 处的切线为：$2x-3y-6=0$，

即 $y'(0)=\dfrac{2}{3}$，代入 (1) 式，得 $C_1=\dfrac{2}{3}$，　--（1 分）

故所求曲线的方程为：　$y=x^3+\dfrac{2}{3}x-2$．---（1 分）

2．设 $\sin x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x\ f'(x)\ dx$．

解 1　$\because\ (\sin x)'=\cos x=f(x)$，$\therefore \int f(x)dx=\sin x+C$，-----------（3 分）

$\therefore \int x\ f'(x)\ dx=\int x\ df(x)=x\ f(x)-\int f(x)\ dx=x\cos x-\sin x+C$．

---（4 分）

解 2　$\because\ (\sin x)'=\cos x=f(x)$，　$f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$，

---（3 分）

$\therefore \int x\ f'(x)\ dx=-\int x\sin x\ dx=\int x\ d(\cos x)=x\cos x-\int\cos xdx$

$=x\cos x-\sin x+C$．------------------------------------（4 分）

本题满分 14 分	
本题得分	

五.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1．求函数 $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的凸性区间及曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解　$f(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 上连续，

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}，(x\neq 0)$$ ------- （1 分）

$$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2(5x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}}，\quad (x\neq 0)$$ ---------------- （2 分）

令 $f''(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{5}$，另外 $f''(0)$ 不存在. --------------- （1 分）

当 $x\in(-\infty，-\frac{1}{5})$ 时，$f''(x)<0$，$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty，-\frac{1}{5}]$ 上凸，---------- （1 分）

当 $x\in(-\frac{1}{5},0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{5},0)$ 及 $(0,+\infty)$ 下凸.

-- （1 分）

曲线 $y=f(x)$ 的拐点：$(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{25}})$.-- （1 分）

2．求曲线 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线.

解　$\because \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty,$

$\therefore$ $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；--- （2 分）

又 $\because \lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0,$

$\therefore$ $y=0$ 是曲线的水平渐近线；--- （2 分）

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-\ln e^x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=0,$$

$\therefore$ $y=x$ 是曲线的斜渐近线. --- （3 分）

六.（本题 8 分） 设有一长为 8 cm 、宽为 5 cm 的矩形铁皮，在每个角上剪去同样大小的正方形，问剪去正方形的边长为多少时，才能使剩下的铁皮折起来做成开口盒子的容积最大？最大的容积是多少？

本题满分 8 分	
本题得分	

解 设剪去正方形的边长为 x，则做成开口盒子的容积为：

$$V(x)=x(5-2x)(8-2x)\,,\qquad x\in(\,0\,,\frac{5}{2}\,)\,.$$ ----------------------------------（2 分）

$$V'(x)=(5-2x)(8-2x)-2x(8-2x)-2x(5-2x)$$

$$=4(x-1)(3x-10)\ .$$ ---（2 分）

令 $V'(x)=0$，得 $x=1$，$x=\frac{10}{3}$［舍去，$\frac{10}{3}\notin(\,0\,,\frac{5}{2}\,)$］

即得符合实际意义的唯一的驻点：$x=1$，---（2 分）

故 剪去正方形的边长为 1 cm 时，做成开口盒子的容积最大，最大的容积是 $V(1)=18\ \text{cm}^3$. --（2 分）

本题满分 14 分	
本题得分	

七.（共 2 小题，每小题 7 分，共计 14 分）

1．证明： $\forall x>0$, 有 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

证 令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，则

$\forall x>0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0,$ --（3 分）

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，而 $f(0)=0,$ ----------------------------------（2 分）

$\therefore \forall x>0,$ 有 $f(x)>f(0)$, 即 $\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}>0$,

故 $\forall x>0,$ 有 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.---（2 分）

2．设 $f(x)$ 在 $[\,0\,,1\,]$ 上连续，在 $(\,0\,,1\,)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(\,0\,,1\,)$，使得 $f(\xi)+\xi\ f'(\xi)=0$.

证 令 $F(x)=x\ f(x)$，---（3 分）

由题设知，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=0, F(1)=f(1)=0,$

---（2 分）

$F'(x)=f(x)+x\ f'(x)$，根据罗尔中值定理，

$\exists\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0,$

即 $f(\xi)+\xi\ f'(\xi)=0$. ---（2 分）