A 卷

2013—2014 学年第一学期

《高等数学（2-1）》第二阶段考试卷

（ 工 科 类 ）

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室______基础数学系________

考试日期____2013 年 12 月 7 日______

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
本题满分	20	18	18	10	12	12	10	
本题得分								
阅卷人								

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；

2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；

3．本试卷共七道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；

4. 本试卷正文共 7 页。

本题满分 20 分	
本题得分	

一.（共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分）

1．求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

.解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ ……………2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$ ……………………3 分

2．求极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 3x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 3x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 3x\sec^2 5x\cdot 5}{\tan 5x\sec^2 3x\cdot 3}$ ……………2 分

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x\cos^2 3x\cdot 5}{5x\cos^2 5x\cdot 3}=1$$ ……………………3 分

3．求极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}$ ……………2 分

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-x}=e^0=1$$ ………3 分

4. 求不定积分：$\int\ln^2 \mathrm{x}\mathrm{dx}$.

$\int\ln^2 \mathrm{x}\mathrm{dx}=x\ln^2 x-\int x2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2\int\ln x dx$ …………2 分

$$=x\ln^2 x-2(x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx)$$

$$=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$$ ……………………3 分

二.（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)(x-\ln(1+\tan x))}{\sin^3 x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)(x-\ln(1+\tan x))}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-\ln(1+\tan x))}{x^3}$$

…………2 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}$$

…………2 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\tan x)}{2x(1+\tan x)}=\frac{1}{2}$$

…………2 分

2. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\left(a_i>0,\ \ i=1,2,\cdots,n\right)$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}}$$ …………2 分

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}}$$ …2 分

$$=e^{\frac{\ln a_1a_2\cdots a_n}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$ …………2 分

3．求不定积分：$\int\cos^3 x\sin^4 x\mathrm{dx}$.

解：$$\int\cos^3 x\sin^4 x\mathrm{dx}=\int\cos^2 x\sin^4 x\mathrm{d}\sin x$$ …2 分

$$=\int(1-\sin^2 x)\sin^4 x\mathrm{d}\sin x=\int\sin^4 x-\sin^6 x\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$ …………4 分

三．（共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分）

本题满分 18 分	
本题得分	

1．求不定积分 $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}$$ …………3 分

$$=\ln\left|\ln x\right|+C$$ …………3 分

2．求不定积分 $\int\frac{x+3}{x^2+2x+3}dx$.

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}+2\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}$$ …………3 分

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$ …………3 分

3．求不定积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解：令 $x=\sin t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ …………1 分

则 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt=\int\sin^2 t dt$ …………2 分

$=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)+C$ …………2 分

$=\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C$ …………1 分

四.（本题 10 分）

本题满分 10 分	
本题得分	

已知函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{1+x}$，讨论函数的单调区间、凸性、极值和函数图形的拐点、渐近线。

解： 定义域 $x\neq -1$

$$y'=\frac{x^2+2x-3}{(1+\mathrm{x})^2},\quad y''=\frac{8}{(1+\mathrm{x})^3},$$ …………2 分

令 $y'=0$, 得 $x_1=-3,\ x_2=1,$

$y''=0,$ 无解

列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y	$\uparrow\cap$	极大值	$\downarrow\cap$	间断点	$\downarrow\cup$	极小值	$\uparrow\cup$

所以 y 在区间 $(-\infty,-3],[1,+\infty)$ 单调增，在 $[-3,-1),(-1,1]$ 单调减…3 分

极大值 $f(-3)=-8$， 极小值 $f(1)=0$ …………2 分

因为函数 y 在 $x=-1$ 间断，所以无拐点。 …………1 分

$\because \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{1+x}=\infty$， 所以 $x=-1$ 是铅直渐近线

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{x(1+x)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1}{1+x}=-3$$

所以 $y=x-3$ 是斜渐近线 …………2 分

五．（共 2 小题，每题 6 分，共 12 分）

本题满分 12 分	
本题得分	

1. 写出函数 $f(x)=x^2e^x$ 的 n 阶麦克劳林展开式。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+o(x^{n-2}),$$ …………3 分

$$f(x)=x^2e^x=x^2+x^3+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-2)!}+o(x^n),$$ ………3 分

2. 把一根长度为 a 的铁丝截成两段，其中一段折成正方形框，另一段弯成圆周，问如何截时，可使所围成的正方形和圆的面积之和达到最小？

解：设围成正方形框的长度为 x， 则围成圆周的长度为 $a-x$，

设圆半径为 r， 所以 $2\pi r=a-x$, 得到 $r=\dfrac{a-x}{2\pi}$,

$$S(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{a-x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{16}+\frac{(a-x)^2}{4\pi}$$ ………3 分

$$S'(x)=\frac{x}{8}-\frac{a-x}{2\pi}=\frac{(\pi+4)x-4a}{8\pi}$$

令 $S'(x)=0$, 得 $x=\dfrac{4a}{\pi+4}$

$$S''(x)=\frac{(\pi+4)}{8\pi}>0$$

$\therefore S(x)$ 在 $x=\dfrac{4a}{\pi+4}$ 取最小值 $S\left(\dfrac{4a}{\pi+4}\right)=\dfrac{(4-\pi)a^2}{4(\pi+4)^2}$ ………3 分

本题满分 12 分	
本题得分	

六.（共 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1. 设 e^{x^2} 是函数 $f(x)$ 的一个原函数， 求 $\int xf'(x)dx$.

$\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx$ ………3 分

$= xe^{x^2}2x - e^{x^2} + C$ ………3 分

2. 讨论方程 $\ln x - \dfrac{x}{e} + k = 0\ (k > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有几个实根？

解：令 $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{e} + k$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$ ………2 分

令 $f'(x) = 0$， 得 $x = e$

当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) > 0$，当 $x > e$ 时， $f'(x) < 0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0, e]$ 单调增加，在 $[e, +\infty)$ 单调减少，

所以 $f(x)$ 在 $x = e$ 取最大值 $f(e) = k > 0$ ………2 分

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x - \frac{x}{e} + k\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e}\right) + k = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \frac{x}{e} + k\right) = -\infty$$

所以方程有且只有两个实根。 ………2 分

本题满分 10 分

七．证明题（共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分）

本题得分	

1．证明: 当 $x<1$时，$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

. 证：令 $f(x)=e^x(1-x)-1$

则 $f'(x)=e^x(1-x)-e^x=-xe^x$ ………2 分

令 $f'(x)=0$， 则 $x=0$

当$0<x<1$ 时，$f'(x)<0$； 当 $x<0$时，$f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$处取得最大值 $f(0)=0$

即当$x<1$时，$f(x)\le f(0)=0$，所以 $e^x(1-x)\le 1$ ………3 分

即$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

2. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，

使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0.$

证明： 设$F(x)=e^x f(x)$， ………2 分

$F(a)=e^a f(a)=0,\quad F(b)=e^b f(b)=0,$

则 $F(a)=F(b),$ 由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$ ，

即 $F'(\xi)=e^\xi f(\xi)+e^\xi f'(\xi)=0$， 所以 $f'(\xi)+f(\xi)=0.$。。。。3 分