应用统计学期末复习测试题

姓名　　　　班级　　　　学号

1　填空和选择题

1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 来自 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ,σ^2 未知, 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$、$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量为 t=__________。

2. 设由来自总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的容量为 100 的样本测得样本均值 $\overline{X}=5$，则 μ 的置信度近似等于 0.95 的置信区间为__________。

4. 在天平上重复称一重为 a 的物品，设各次称量结果相互独立且同服从正态分布 $N(a,0.2^2)$。若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值，则为使 $P\{|\overline{X}_n-a|<0.1\}\geq 0.95$，$n$ 的最小值应不小于自然数__________。

5.X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$。则当 $a=$__________，$b=$__________时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为__________。

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & 若x\geq\theta\\ 0, & 若x<\theta\end{cases}$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩估计量为__________。

7. 设 X 和 Y 独立同分布 $N(0,3^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别是来自 X 和 Y 的简单抽样，则统计量 $U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从__________分布，参数为__________。

8. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,2^2)$, 而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量 $Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从__________分布，参数为__________。

9. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则 $E\{[(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2)]/(n_1+n_2-2)\}=$__________。

10. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},(-\infty<x<+\infty)$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体的简单随机样本，其样本方差 S^2，则 $ES^2=$__________。

11. 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$,$Y=1/X^2$, 则 (　)

(A) $Y\sim\chi^2(n)$　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$　　(C) $Y\sim F(n,1)$　　(D) $Y\sim F(1,n)$

12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，则 (　)

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

13. 设随机变量 X 和 Y(　)

(A) $X+Y$ 服从正态分布。　　(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布。

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布。　　(D) X^2/Y^2 服从 F 分布。

14. 已知一批零件的长度 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知，从中随机地抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\overline{x} = 20(\mathrm{cm})$, 样本标准差 $S=1$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是 (　)

(A) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16),\ 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$　　(B) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16),\ 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$

(C) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$　　(D) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15),\ 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

2 计算题

1. 设总体 X 的概率密度为

$$p(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本. 求 λ 的矩估计量和最大似然估计量.

2. 设总体 X 的概率密度为

$$p(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta},-\infty<x<\infty.$$

其中参数 $\theta(\theta>0)$ 未知, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本. 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$，它是否无偏相合估计?

3. 设总体 $X\sim U(\theta,2\theta)$, 其中 $\theta>0$ 是未知参数, 又 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取自该总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值.

(1) 证明 $\hat{\theta}=\frac{2}{3}\overline{X}$ 是参数 θ 为无偏估计和相合估计;

(2) 求 θ 的最大似然估计，它是无偏估计吗? 是相合估计吗?

4. 设总体 X 的概率密度为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本，记 N 为样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中小于 1 的个数. 求 θ 的矩估计和最大似然估计，并比较上述两个估计量的无偏性和有效性。

5. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，用 N_i 表示来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本中等于 $i(i=1,2,3)$ 的个数，求常数 a_1,a_2,a_3, 使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 的方差.

6. 设随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 抽取的总体的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{elsewhere},\end{cases}$$

其中常数 $\alpha > 0$ 已知，但 $\theta > 0$ 未知.

(a) 求 θ 的矩估计.

(b) 求 θ 的极大似然估计.

(c) 求 $MSE(\theta)$.

7. 已知某种材料的抗压强度 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 现随机抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：482，493，457, 471, 510, 446, 435, 418, 394, 469

(1) 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(2) 若已知 $\sigma = 30$, 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(3) 求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。

8. 设总体 X 的密度函数为 $p(x) = (1+\theta)x^{\theta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \theta \geq 0$. 为检验

$$H_0 : \theta = 1, \quad H_1 : \theta < 1.$$

现观测 1 个样本，并取拒绝域为 $W = \{x \leq 0.5\}$，试求该检验犯两类错误的概率.

9. 从一批钢管抽取 10 根，测得其内径 (单位:mm) 为:

$$100.36 \quad 100.31 \quad 99.99 \quad 100.11 \quad 100.64 \quad 100.85 \quad 99.42 \quad 99.91 \quad 99.35 \quad 100.10$$

设这批钢管内直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，试分别在下列条件下检验假设 $H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu > 100(\alpha = 0.05)$.

(1) 已知 $\sigma = 05$;

(2)σ 未知.

10. 某种导线的质量标准要求其电阻的标准差不超过 0.005Ω. 今从一批导线中随机抽取 9 根，测得样本标准差为 $s = 0.007\Omega$. 设总体为正态分布，问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大?

11. 假设一元线性回归模型为

$$\begin{cases} Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n, \\ \text{诸}\varepsilon_i\text{独立同分布}N(0, \sigma^2). \end{cases}$$

试求出回归系数 β_0, β_1 和 σ 最大似然估计和最小二乘估计，对比最大似然估计与最小二乘估计一致吗?

12. 某医院用光色比色计检验尿汞时，得尿汞含量与消光系数读数的结果如下:

尿汞含量 x	2	4	6	8	10
消光系数 y	64	138	205	285	360

已知它们之间有下述关系式:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

各 ϵ_i 相互独立，均服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布，试求 β_0, β_1 的最小二乘估计，并对给出假设 $H_0 : \beta_1 = 0$ 进行检验 $(\alpha = 0.01)$.

13. 为研究某一种化学反应过程中，温度 x(℃) 对产品得率 $Y(\%)$ 的影响，测得数据如下:

温度 x(℃)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
产品得率 $Y(\%)$	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

(1) 求 Y 与 x 的回归方程;

(2) 对所得回归方程进行显著生检验;

(3) 求当温度 $x_0 = 125$ 时，得率 Y_0 的 95% 预测区间.

14. 设有线性模型:

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_1 + \varepsilon_1, \\ Y_2 = 2\beta_1 - \beta_2 + \varepsilon_2, \\ Y_3 = \beta_1 + 2\beta_2 + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{独立,且均值都为 } 0, \text{ 方差都为} \sigma^2. \end{cases}$$

其中，$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2]^T$ 为未知参数向量.

(1) 求 β 的最小二乘估计 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^T$;

(2) 求 $Cov(\hat{\beta})$。