# 线代试卷答案（一）

一、填空题（每小题 3 分，共 21 分）

1．设向量组$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2,\beta_3=4\alpha_1+7\alpha_2$，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$

一定是线性<u>　相　</u>关 。

2．行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{vmatrix}$=<u>　−3　</u>。

3．设$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2}$是 4 维向量，已知 4 阶行列式$|\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1}|=\boldsymbol{a},$

$|\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3}|=\boldsymbol{b},$ 则 4 阶行列式$|\boldsymbol{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ (\beta_1+\beta_2)}|=$<u>　$a$-$b$　</u>。

4．设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|$=5，则$|\boldsymbol{2A}|+|\boldsymbol{A}^2|=$<u>　65　</u>.

5．设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha,\beta}$的内积等于<u>　0　</u> 。

6．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$为正定矩阵，则实数$\boldsymbol{a}$的范围是<u>$\mathbf{-1<\boldsymbol{a}<1}$</u> 。

7. 已知 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 1，2，－2，则矩阵$A^2+2A+E$的特征值为<u>　4,9,1　</u> 。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1.在 5 阶行列式$D=\det(a_{ij})$展开式中，包含$a_{13},a_{25}$并带有负号的项是=<u>　B　</u>。

A）$-a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$； B）$-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$；

C）$-a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$； D）$-a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$。

2．若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1}$<u>　D　</u>。

A）线性相关且秩为 2； B）线性相关且秩为 3；

C）线性无关且秩为 2； D）线性无关且秩为 3。

3. 若$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = 0$，则必有（　B　）.

A）$k=-1$；　　　　B）$k=-1$或$k=3$；

C）$k=3$；　　　　D）$k\neq -1$且$k\neq 3$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 =$（　A　）。

A）$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$；　B）$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$；　C）；100　　D）3

5. 设n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1+\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 1+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$，则A的特征值为（　A　）。

A）$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1;$；　　B）$\lambda_1=n+1,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0;$

C）$\lambda_1=n+\frac{1}{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n};$　　D）$\lambda_1=n-\frac{1}{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}.$

6. 设有下列四个命题：

1）初等变换不改变矩阵的秩；

2）若n阶矩阵$A$可逆，则$A$可以表示成初等方阵的乘积；

3）若$|A|=0$，则齐次线性方程组$Ax$=0只有零解；

4）等价的向量组有着相同的线性相关性。

其中错误的命题有(　B　)

A)　1) 和2)；　　B)　3) 和4)；　　C)　1）和3)；　　D）2）和4)。

7．设矩阵 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵，秩 $R(A)=m<n$， $E_m$ 为 m 阶单位矩阵， 下述结论中正确的是（ D ）。

A）$A$ 的任意 $m$ 个列向量必线性相关；

B）$A$ 的任意一个 $m$ 阶子式不等于零；

C）$A$ 通过初等行变换，必可以化为 $(E_m, O)$ 的形式；

D）非齐次线性方程组 $Ax=b$ 一定有无穷多组解。

三（每小题 6 分，共 18 分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，试用初等变换法求 $A^{-1}$.

解： 对矩阵 $(A,E)$ 进行初等行变换

$$(A,E)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

2.设 $A$ 是 n 阶可逆矩阵，$B$ 是 $A$ 交换第 $i$ 行和第 $j$ 行所得到的矩阵，

（1）证明 $B$ 是可逆矩阵；

（2）求 $AB^{-1}$.

证明 （1）注意 $B=E(i,j)A$，故 $|B|=|E(i,j)A|=|E(i,j)||A|=-|A|\neq 0,$

从而知 B 可逆。

（2）$AB^{-1}=A(E(i,j)A)^{-1}=AA^{-1}E(i,j)^{-1}=E(i,j).$

3． 设 A，B 皆为 n 阶正交矩阵，证明 AB 也是正交矩阵。

证 因为 A，B 皆为正交矩阵，故 $\boldsymbol{A^TA=E, B^TB=E}$，

$$\Rightarrow \boldsymbol{(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TEB=E}$$

所以 AB 也为正交矩阵。

四、（10 分）求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\2\\6\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\4\end{pmatrix}$ 的秩，最大无关组，

并将其余向量用此最大无关组线性表示。

解：以向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 作为列向量构成矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&-2&1\\1&-1&2&-3\\3&2&6&1\\2&3&4&4\end{pmatrix}$$

对 A 进行初等行变换进行化简，化为行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&-2&1\\1&-1&2&-3\\3&2&6&1\\2&3&4&4\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-1&0&-2&1\\0&-1&0&-2\\0&2&0&4\\0&3&0&6\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故 R(A)=R($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$)=2

且 R($\alpha_1,\alpha_2$)=2

故 $\alpha_1,\alpha_2$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的最大无关组

又由行最简形矩阵可知，

$\alpha_3 = 2\alpha_1$，　$\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$

五（10 分）讨论下列带有参数的线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases},$$

在方程组有解时，求出其解。

解 增广矩阵

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix},$$

当$\lambda \neq 5$时，方程组无解;

当$\lambda = 5$时，方程组有无穷多解；通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in R).$$

六（10 分）设 $A$ 是 n 阶实对称阵，$A$ 的秩 $R(A)=r<n$,且 $A^2=2A$,

(1) 求 $A$ 的特征值（重根要指出重数是多少）；　（2）求行列式$|A-E|$。

解 设$\lambda$为 A 的一个特征值，则由 $A^2=2A$，得$\lambda^2 = 2\lambda$，

故得$\lambda = 0, \lambda = 2.$

由 $A$ 是对称的且 $A$ 的秩 $R(A)=r<n$,

知$\lambda = 0$为 n-r 重根，$\lambda = 2$为 r 重根。

于是知 A-E 的特征值为$\lambda = -1$为 n-r 重根，$\lambda = 1$为 r 重根，

从而得行列式$|A-E| = (-1)^{n-r}$.

七（10 分）. 用正交变换将下列二次型化为标准形:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3.$$

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&0&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$，

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&-\lambda&0\\-2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)，$$

故得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=4$。

当 $\boldsymbol{\lambda_1=1}$，解方程组 $\boldsymbol{(A-E)x=0}$，

得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，单位化后得 $p_1=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-2$，解方程组 $(A+2E)x=0$，得特征向量

$$\boldsymbol{\xi_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}}，单位化后得 \boldsymbol{p_2=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}}；$$

当 $\boldsymbol{\lambda_3=4}$，解方程组 $\boldsymbol{(A-4E)x=0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p_3=\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}}$,

正交变换为 $X=PY$, 其中 $P=\begin{pmatrix}1/3&1/3&-2/3\\-2/3&2/3&1/3\\2/3&1/3&2/3\end{pmatrix}$，

标准形为 $f=y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$.