

# Optimizacija uz ograničenja tipa jednakosti, metodi smene i ograničene varijacije

Zoran D. Jeličić

Mirna N. Kapetina

16. novembar 2022.

## 1 Uvodna razmatranja

U prethodnom poglavlju bavili smo se problemom slobodne optimizacije, gde promenljive stanja nisu bile pritisnute nikakvim ograničenjima. U okviru ovog poglavlja razmatraćemo jedan realističniji problem, gde su uvedena ograničenja<sup>1</sup> na promenljive stanja i ta ograničenja su postavljena u vidu jednakosti.

Problem optimizacije uz ograničenja tipa jednakosti, može se formulisati na sledeći način, naći ekstrem funkcije

$$y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (1)$$

pri čemu promenljive stanja  $x_i$  moraju da zadovolje sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

gde mora da važi uslov  $m < n$ , odnosno da je broj ograničenja  $g_k$  strogo manji od broja promenljivih stanja  $x_i$ . Naime, ako taj uslov ne bi bio zadovoljen, rešavanjem sistema jednačina (2) mogli bi da odredimo sve promenljive stanja i tada nam ne bi preostao ni jedan stepen slobode, ni jedno  $x_i$ , čijom promenom bi mogli da dođemo do boljeg odnosno najboljeg mogućeg rešenja<sup>2</sup>. U nastavku teksta razmatraćemo četiri optimizaciona postupka, koja su karakteristična za ovu klasu problema, a to su: **metod smene**, **metod ograničene varijacije**, **metod Lagranževih množitelja** i **metod kaznenih funkcija**. U skladu

<sup>1</sup> Kao što ćete videti u nastavku teksta, ova ograničenja su po pravilu posledica fizičkih i logičkih zakonomernosti i njihovo postojanje u značajnoj meri utiče na studiju optimizacionog problema.

Ovaj skup ograničenja ćemo u daljem tekstu zapisivati kao  $g_k(\mathbf{x}) = 0$  ili  $g_k(x_i) = 0$  za  $k = 1, \dots, m$  i  $i = 1, \dots, n$ .

<sup>2</sup> Problem kod koga je  $n \leq m$  naziva se predefinisani problem i za postupak optimizacije je potpuno besmislen.

sa ovom podelom su organizovani i paragrafi koji slede, neke od ovih postupaka prezentovaćemo, bez gubitka na opštosti, isključivo kroz primere, jer verujemo da je intuitivno razumevanje mnogo važnije od formalnih izvođenja.

### 1.1 Metod smene

Prvi korak u primeni ovog metoda jeste rešavanje sistema jednačina ograničenja (2) po  $m$  promenljivih, tako dobijena rešenja zamenjujemo<sup>3</sup> u kriterijum optimalnosti (1), kome se sada zbog unetih rešenja redukovala dimenzionalnost na  $n - m$  promenljivih, pa kriterijum optimalnosti sada postaje

$$y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-m}) . \quad (3)$$

Dalje rešavanje se odvija po principima slobodne optimizacije, opisane u prethodnom poglavlju. Na prvi pogled ovaj postupak je veoma jednostavan, mada smo i intuitivno svesni da rešavanje sistema ograničenja (2) može biti skopčano sa poteškoćama. U nastavku teksta ćemo kroz primere ilustrovati neke prednosti i mane ove metode.

**Primer 1.** Metod smene, linearna ograničenja.

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 .$$

promenljive  $x_1$  i  $x_2$  moraju da zadovolje ograničenje slika 1

$$2x_1 + 3x_2 = 6 .$$

Prateći predloženi formalizam **metoda smene** prvi korak je rešavanje ograničenja po jednoj promenljivoj npr.  $x_1$

$$x_1 = \frac{6 - 3x_2}{2} .$$

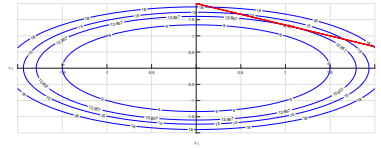
Zamenom ovako dobijenog rešenja u kriterijum optimalnosti dobijamo

$$y = 4 \left( \frac{6 - 3x_2}{2} \right)^2 + 5x_2^2 = 14x_2^2 - 36x_2 + 36 .$$

Dalje rešavanje je jednostavno, svodi se na traženje prvog i drugog izvoda za potrebne i dovoljne uslove respektivno, po preostaloj promenljivoj  $x_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_2} &= 28x_2 - 36 = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{36}{28} = 1.286 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} &= 28 > 0 \quad \text{tačka je minimum} . \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Zato i naziv **metod smene**.



Slika 1: Projekcija funkcije  $y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$  i  $2x_1 + 3x_2 = 6$  na ravan  $x_1, x_2$

promenljivu  $x_1^*$  izračunavamo iz izraza za smenu kao  $x_1^* = 1.071$ . Minimalna vrednost kriterijuma optimalnosti je  $y(x_1^*, x_2^*) = 12.857$ . Kao što se vidi, primena metoda smene je jednostavna i pravolinijska u ovom jednostavnom slučaju.

**Primer 2.** Metod smene, nelinearna ograničenja.

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2.$$

promenljive  $x_1$  i  $x_2$  moraju da zadovolje ograničenje

$$g = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Inspekcijom ograničenja prirodno bi bilo uvesti smenu po promenljivoj  $x_1^2$ , međutim u prvom koraku mi smo se opredelili za smenu  $x_2^2 = 1 - x_1^2$ , tj  $x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$ . U ovom slučaju moguća su dva rešenja

$$1. \quad x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$$

$$y = \sqrt{1 - x_1^2} - x_1^2.$$

U ovom slučaju može se pokazati da je stacionarna tačka  $x_1^* = 0$  i odgovarajuća vrednost  $x_2^* = 1$ .

$$2. \quad x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$$

$$y = -\sqrt{1 - x_1^2} - x_1^2.$$

Stacionarne tačke u ovom slučaju su  $x_1^* = 0$  ( $x_2^* = -1$ ) i  $x_1^* = \pm 0.866$  ( $x_2^* = -0.5$ ).

Proverom mogućih rešenja, ustanovljavamo da sva zadovoljavaju ograničenje, a na osnovu drugih izvoda lako dobijamo karaktere stacionarnih tačaka.

| Stacionarne tačke | 1        | 2        | 3       | 4       | Tabela 1: Karakter stacionarnih tačaka |
|-------------------|----------|----------|---------|---------|--|
| $x_1$             | 0        | 0        | 0.866   | -0.866  |  |
| $x_2$             | 1        | -1       | -0.5    | -0.5    |  |
| $y$               | 1        | -1       | -1.25   | -1.25   |  |
| karakter          | Maksimum | Maksimum | Minimum | Minimum |  |

Na osnovu karaktera drugog izvoda i vrednosti funkcije, ustanovili smo da je **tačka 1** globalni maksimum, **tačka 2** lokalni maksimum, a da **tačka 3** i **tačka 4** predstavljaju globalni minimum.

Pretpostavimo sada da smo se opredelili za drugu smenu

$x_1^2 = 1 - x_2^2$ , tada kriterijum optimalnosti postaje

$$y = x_2 - 1 + x_2^2.$$

Iz potrebnih uslova ekstrema lako dobijamo da je  $x_2^* = -0.5$  ( $x_1^* = \pm 0.866$ ), a iz dovoljnih uslova da se radi o minimumu. Poređenjem dobijenih rezultata, uočavamo da ova smena nije obuhvatila sva moguća rešenja iz prethodnog primera, odnosno da je metod smene osetljiv na izbor promenljive po kojoj rešavamo optimizacioni problem u slučaju složenijih ograničenja. Rešenje koje nedostaje je očigledno maksimum (jer smo minimum našli) i to rešenje treba potražiti na granici <sup>4</sup>. U ovom konkretnom slučaju iz  $x_1^2 = 1 - x_2^2$  nedvosmisleno sledi da je granična vrednost za promenljivu  $x_2$  vrednost  $\pm 1$  i da je to baš vrednost, koja nam nedostaje iz Tabele 1.

Rezimirajući ovaj paragraf i metod smene, treba reći da je u slučaju malog broja linearnih ograničenja ovaj metod lako primenjiv i predstavlja solidan optimizacioni postupak. Međutim, kada su ograničenja opisana nelinearnim jednačinama postupak je veoma osetljiv na izbor promenljivih po kojima se vrši optimizacija i u tim slučajevima se ne preporučuje, a pri primeni moraju se proveriti i svi granični slučajevi, koji mogu da ukažu na postojanje dodatnih mogućih rešenja.

## 1.2 Metod ograničene varijacije

U prethodnom paragrafu, koji je posvećen metodi smene, formalizam iznalaženja optimalnog rešenja podelili smo u dva koraka: prvi je izračunavanje  $m$  promenljivih iz ograničenja, a zatim, u drugom koraku, diferenciranje preostalih  $n - m$  promenljivih. U slučaju da su ograničenja nelinearna, prvi korak se dramatično komplikuje, odnosno rešavanje sistema jednačina ne mora da vodi lako do rešenja optimizacionog problema. **Metod ograničene varijacije** suštinski ima obrnuti sled koraka: prvo diferenciramo i iz diferencijala izražavamo  $n - m$  "dovoljenih" priraštaja promenljivih<sup>5</sup>, a preostalih  $m$  rešenja nalazimo iz jednačina ograničenja. Prednost ovoga pristupa leži u činjenici da su prvih  $n - m$  jednačina linearne po priraštajima promenljivih, što ih čini rešivim u duhu teorije linearnih algebre.

Slično kao ranije počecemo našu studiju sa kriterijumom optimalnosti, koji zavisi od dve promenljive  $y = y(x_1, x_2)$ , a zatim ćemo slučaj uopštiti na slučaj većeg broja promenljivih. Cilj nam je naći ekstrem funkcije

$$y = y(x_1, x_2), \quad (4)$$

pod uslovom da su promenljive stanja međusobno vezane sledećom

<sup>4</sup> Činjenicu da se u optimizacionim problemima sa ograničenjima rešenje nalazi na granici sada prvi put napominjemo, u daljoj studiji složenijih ograničenja, linearnog programiranja pa i dinamičke optimizacije u duhu Pontrjagina ovo će biti polazna osnova pri iznalaženju optimalnih rešenja.

Preformulisaćemo dobro poznatu rečenicu svi linearni sistemi liče jedni na druge, a da je nelinearni sistem nelinearan na svoj način. Čitaocima je poznato da opšta teroija nelinearnih jednačina ne postoji i da rešavanje sistema nelinearnih jednačina ne mora da garantuje egzistenciju rešenja, stoga je nelinearnost ključno ograničenje u primeni metoda smene.

<sup>5</sup> Pretpostavljamo da su čitaoci familijarni sa pojmom priraštaj promenljivih  $dx_i$ , dozvoljeni priraštaj je onaj, koji zadovoljava i jednačine ograničenja, više detalja će biti dato u nastavku teksta.

relacijom

$$g(x_1, x_2) = 0. \quad (5)$$

Ako je tačka  $(x_1^*, x_2^*)$  ekstrem funkcije, tada u toj tački važe potrebni uslovi ekstrema

$$dy = 0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2, \quad (6)$$

gde je  $dy$  totalni diferencijal funkcije, a ova relacija važi samo za dozvoljene priraštaje  $dx_1$  i  $dx_2$ , slika 2. U tački ekstrema dodatno mora da važi  $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ . Dozvoljeni priraštaji, moraju da obezbede da sva pomeranje iz tačke ekstrema  $(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2)$  i dalje zadovoljavaju ograničenje

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0. \quad (7)$$

Razvojem u red izraza (7), uz male vrednosti  $dx_1$  i  $dx_2$ , možemo zanemariti članove višeg reda, pa lako dobijamo

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0, \quad (8)$$

Uz pretpostavku da je  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$  možemo izraziti dozvoljeni priraštaj  $dx_2$  iz prethodnog izraza kao

$$dx_1 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} dx_2. \quad (9)$$

Zamenom izraza (9) u (6) dobijamo

$$dy = 0 = \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) dx_2. \quad (10)$$

Za proizvoljnu vrednost  $dx_1$  jednakost (10) je zadovoljena samo pod pretpostavkom da je izraz u zagradi jednak nuli ili kada važi

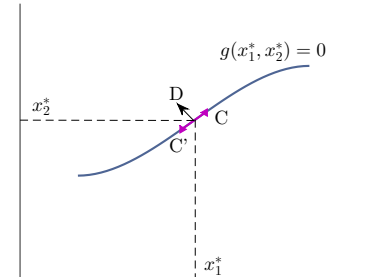
$$\left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (11)$$

Ovaj izraz (11) predstavlja **potrebne** uslove loknog ekstrema funkcije dve promenljive, prilikom izračunavanja samih tačaka potrebno je uzeti u obzir i jednačinu ograničenja (5). Napominjemo da razmatranje dovoljnih uslova nije od interesa u našoj studiji. Izraz (11) može se zapisati u matricnoj formi, u formi Jakobijana<sup>6</sup>

$$J \begin{pmatrix} y, g \\ x_2, x_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

pri čemu se uslov  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$ , zapisuje  $J \begin{pmatrix} g \\ x_1 \end{pmatrix} \neq 0$ . U opštijem slučaju

kada kriterijum optimalnosti zavisi od  $n$  promenljivih i  $m$  ograničenja u tački ekstrema važi



Slika 2: Dozvoljene vrednosti priraštaja  $dx_i$  su one koje vode u tačke C i C', jer u njima važi  $g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0$ . Priraštaji, koji bi vodili u tačku D nisu dozvoljeni jer se tačka nalaz van ograničenja  $g(x_1, x_2) = 0$ .

<sup>6</sup> Carl Gustav Jacob Jacobi (10 Decembar 1804 – 18 Februar 1851), nemački matematičar, mentor kolege iz prethodnog poglavlja.

$$\begin{aligned} y &= y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ g_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (13)$$

Izraze (6) i (8) možemo uopštiti na sledeći način

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (14)$$

i

$$dg_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (15)$$

Ponovo napominjemo su sa  $dx_i$  obeleženi dopustivi/dozvoljeni priraštaji, oni priraštaji, koji pri pomeranju iz tačke ekstrema obezbeđuju da je stalno zadovoljeno ograničenje  $g_k(x_i) = 0$ . Slično kao u (9). Iz  $m$  jednačina možemo izračunati isto toliko dozvoljenih priraštaja u sledećoj proceduri, jednačina (16) se može zapisati u formi

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_j} dx_j \quad \text{za } k = 1, \dots, m \quad (16)$$

Slično, kao u slučaju dve promenljive, ako su jednačine (16) linearno nezavisne <sup>7</sup> tada možemo rešiti sistem od  $m$  dopustivih priraštaja u funkciji preostalih  $n - m$  priraštaja. Uvrštavanjem tako dobijenog rešenja u (14) dobijamo

<sup>7</sup> Uslove linerane nezavisnosti se zapisuju u formi  $J \left( \frac{g_1, g_2, \dots, g_m}{x_1, x_2, \dots, x_m} \right) \neq 0$ , videti uslov iz slučaja sa dve promenljive.

$$dy = \frac{1}{J \left( \frac{g_1, g_2, \dots, g_m}{x_1, x_2, \dots, x_m} \right)} \sum_{k=m+1}^n J_k \left( \frac{y, g_1, g_2, \dots, g_m}{x_k, x_1, x_2, \dots, x_m} \right) dx_k = 0, \quad (17)$$

gde je

$$J_k \left( \frac{y, g_1, g_2, \dots, g_m}{x_k, x_1, x_2, \dots, x_m} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_k} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Ako posmatramo izraz pod sumom u (17) očigledno je da za proizvoljne vrednosti dozvoljenih priraštaja jednakost može biti zadovoljena samo ako je

$$J_k \left( \frac{y, g_1, g_2, \dots, g_m}{x_k, x_1, x_2, \dots, x_m} \right) = 0 \quad \text{za } k = m+1, m+2, \dots, n. \quad (19)$$

Jednačina (19) uz ograničenja

$$g_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad k = 1, \dots, m. \quad (20)$$

predstavljaju potrebne uslove ekstrema funkcije više promenljivih sa ograničenjima tipa jednakosti. U nastavku ćemo kroz primere ilustrirati primenu metoda ograničene varijacije, iz pedagoških razloga smo jedan primer ostavili nerešen. Bilo bi nam izuzetno drago da ga sami rešite i javite nam rešenje, siguran sam da ćemo taj napor znati da cenimo.

**Primer 3.** Metod ograničene varijacije, dve promenljive, jedno ograničenje.

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 .$$

promenljive  $x_1$  i  $x_2$  moraju da zadovolje ograničenje

$$2x_1 + 3x_2 = 6 .$$

Ovaj sistem ima dve promenljive  $n = 2$  i jedno ograničenje  $m = 1$ , stoga nam je potrebna samo jedna Jakobijeva matrica, tj

$$J \left( \frac{y, g}{x_2, x_1} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10x_2 & 8x_1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20x_2 - 24x_1 = 0 .$$

Iz poslednjeg izraza lako izračunavamo da je  $x_1 = \frac{5}{6}x_2$ . Zamenom ovako dobijenog rešenja u jednačinu ograničenja

$$2 \left( \frac{5}{6}x_2 \right) + 3x_2 = 6 ,$$

dobijene su stacionarne tačke za ovaj problem  $x_2^* = 1.286$  i  $x_1^* = 1.071$ .

**Primer 4.** Metod ograničene varijacije, tri promenljive, dva ograničenja.

Posmatrajmo linearni kriterijum optimalnosti sa tri promenljive stanja

$$y(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3 .$$

promenljive  $x_1, x_2, x_3$  moraju da zadovolje ograničenja

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0 \\ g_2 &= 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem ima tri promenljive  $n = 3$  i dva ograničenja  $m = 2$ , stoga nam je potrebna samo jedna Jakobijeva matrica dimenzija  $3 \times 3$ ,

$$J\left(\frac{y, g_1, g_2}{x_3, x_2, x_1}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 6x_3 & 2x_1 & 4x_2 \\ -3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4x_1 - 164x_2 - 390x_3 = 0.$$

Iz Jakobijana i jednačina ograničenja možemo izračunati stacionarne tačke

| Stacionarne tačke | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$   | $y$    |
|-------------------|-------|-------|---------|--------|
| Tačka 1           | 0.947 | 0.207 | -0.0772 | 5.08   |
| Tačka 2           | 0.534 | 0.535 | -0.219  | -0.346 |

Tabela 2: Stacionarne tačke

**Primer 5.** Metod ograničene varijacije, zadatak za vežbu.

Kriterijum optimalnosti ima četiri promenljive stanja

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).$$

promenljive  $x_1, x_2, x_3, x_4$  moraju da zadovolje ograničenja

$$g_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$

$$g_2 = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

Odrediti stacionarne tačke, primenom metode ograničene varijacije.