

# Optimizacija uz ograničenja tipa jednakosti, metodi smene i ograničene varijacije

Anja Buljević

Aleksandra Mitrović

Smilja Stokanović

19. oktobar 2022.

## 0.1 Metod direktne smene

Posmatra se kriterijum optimalnosti (funkcija cilja) oblika

$$y = f(\underline{x}) ,$$

gde je  $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  vektor promenljivih. U postavci problema figurišu i jednačine ograničenja tipa jednakosti

$$h_i(\underline{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

pri čemu važi  $n > m$ .

## Zadaci

1. Odrediti minimum funkcije  $f(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2$  uz ograničenje  $h(\underline{x}) : x_1 + x_2 - 4 = 0$  koristeći metod smene.

*Rešenje.*

Iz jednačine ograničenja se može izraziti promenljiva  $x_1$

$$x_1 = 4 - x_2 , \tag{1}$$

pa se uvrštavanjem u kriterijumsku funkciju dobija

$$\begin{aligned} f(x_2) &= 2(4 - x_2)^2 + 3x_2^2 = 2(16 - 8x_2 + x_2^2) + 3x_2^2 = \\ &= 32 - 16x_2 + 2x_2^2 + 3x_2^2 = 5x_2^2 - 16x_2 + 32 . \end{aligned}$$

Ispitivanje potrebnih i dovoljnih uslova ekstrema se svodi na traženje prvog i drugog izvoda po preostaloj promenljivoj  $x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} ,$$

nakon čega se uvrštavanjem u (1) dobija

$$x_1^* = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}.$$

Ispitivanjem znaka drugog izvoda u dobijenoj stacionarnoj tački  $x^* = [\frac{12}{5} \ \frac{8}{5}]^T$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 10 > 0,$$

zaključujemo da stacionarna tačka  $x^* = [\frac{12}{5} \ \frac{8}{5}]^T$  predstavlja minimum funkcije.

2. Primenom metode smene odrediti tačku u kojoj funkcije  $f(\underline{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2$  ima maksimum uz ograničenje  $h(\underline{x}) : x_1 + x_2 + x_3 = 5$ .

*Rešenje.*

Iz jednačine ograničenja sledi

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2, \quad (2)$$

pa se uvrštavanjem u kriterijumsku funkciju dobija

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= 6x_1 + 4x_2 + 2(5 - x_1 - x_2) - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}(5 - x_1 - x_2)^2 = \\ &= \frac{22}{3}x_1 + \frac{16}{3}x_2 + \frac{5}{3} - \frac{10}{3}x_1^2 - \frac{7}{3}x_2^2 - \frac{2}{3}x_1x_2. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem prvih izvoda po promenljivim  $x_1$  i  $x_2$  sa nulom dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{22}{3} - \frac{20}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{16}{3} - \frac{14}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1 = 0, \end{aligned}$$

čija su rešenja  $x_1^* = 1$  i  $x_2^* = 1$ . Uvrštavanjem dobijenih rešenja u (2) sledi

$$x_3^* = 5 - 1 - 1 = 3.$$

Dobijena stacionarna tačka  $x^* = [1 \ 1 \ 3]^T$  predstavlja maksimum funkcije što se pokazuje ispitivanjem dovoljnih uslova, odnosno formiranjem Heseove matrice

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \end{bmatrix},$$

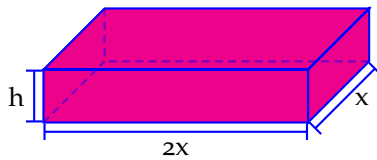
a potom računanjem glavnih minora

$$D_1 = -\frac{20}{3} < 0$$

$$D_2 = \frac{280}{9} - \frac{4}{9} = \frac{276}{9} > 0.$$

Kako je  $D_1 < 0$  i  $D_2 > 0$ , zaključujemo da je matrica  $H$  negativno definitna, odnosno tačka  $x^* = [1 \ 1 \ 3]^T$  je maksimum funkcije.

3. Kontejner treba da ima širinu  $x$ , dužinu  $2x$ , a zapremina treba da bude  $10\text{m}^3$ . Trošak za materijal dna je  $10 \text{ €/ m}^2$ , a za materijal zidova je  $6 \text{ €/ m}^2$ . Koje su dimenzije kontejnera najjeftinije?



Slika 1: Kontejner dimenzija  
 $2x \times x \times h$

*Rešenje.*

Kako se traže dimenzije kontejnera koji je najjeftiniji za izradu, formira se kriterijum optimalnosti oblika

$$f(x, h) = 2x \cdot x \cdot 10 + (2x \cdot h \cdot 2 + x \cdot h \cdot 2) \cdot 6,$$

gde prvi sabirak predstavlja troškove za izradu dna kontejnera, a drugi sabirak predstavlja troškove za izradu bočnih strana kontejnera. Sređivanjem prethodno formiranog izraza dobija se

$$f(x, h) = 20x^2 + 36xh. \quad (3)$$

Jednačina ograničenja se formira na osnovu uslova zadatka (zapremina treba da bude  $10\text{m}^3$ )

$$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 \cdot h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2}. \quad (4)$$

Smenom u jednačinu (3) dobija se

$$f(x) = 20x^2 + 36x \cdot \frac{5}{x^2} = 20x^2 + 180x^{-1}.$$

Dalja procedura ispitivanja potrebnih i dovoljnih uslova ekstrema je identična kao u prethodnim primerima.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 40x - 180x^{-2} = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt[3]{\frac{180}{40}} \approx 1.65.$$

Uvrštavanjem dobijene vrednosti u (5) dobija se

$$h^* = \frac{5}{1.65^2} \approx 1.83.$$

Na osnovu znaka drugog izvoda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 40 + 2 \cdot 180x^{-3} = 40 + 2 \cdot 180 \cdot \frac{40}{180} = 120 > 0$$

zaključujemo da je izrada kontejnera najjeftinija za dobijene dimenzije  $x^*$  i  $h^*$ . Ukupni trošak će biti

$$f(1.65, 1.83) = 20 \cdot 1.65^2 + 36 \cdot 1.65 \cdot 1.83 \approx 163.152.$$

4. Odrediti optimum funkcije  $z(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$  uz ograničenje  $h(\underline{x}) : x_1 x_2 = 2$ .

*Rešenje.*

Iz jednačine ograničenja možemo izraziti

$$x_1 = \frac{2}{x_2}, \quad (5)$$

nakon čega se smenom u kriterijumsku funkciju dobija

$$z(x_2) = \frac{4}{x_2^2} + x_2^2 = 4x_2^{-2} + x_2^2.$$

Sledi ispitivanje potrebnih uslova koje se svodi na izjednačavanje prvog izvoda dobijene kriterijumske funkcije sa nulom. Kombinovanjem sa jednačinom (5) dobijaju se stacionarne tačke.

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -8x_2^{-3} + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2^* = \pm\sqrt{2}$$

Smenom u (5) dobijamo vrednosti

$$x_1^* = \frac{2}{\pm\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2},$$

pa su stacionarne tačke  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  i  $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ . Ispitivanjem znaka drugog izvoda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 24x_2^{-4} + 2 = \frac{24}{4} + 2 = 8 > 0,$$

možemo zaključiti da stacionarne tačke  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  i  $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  predstavljaju minimume.

5. Metodom smene naći minimum funkcije  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  ukoliko promenljive  $x_1$  i  $x_2$  treba da zadovolje ograničenje  $h(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 4$ .

*Rešenje.*

Koristeći jednačinu ograničenja, promenljivu  $x_1$  možemo izraziti kao

$$x_1 = 4 - x_2, \quad (6)$$

nakon čega se smenom u kriterijumsku funkciju dobija

$$f(x_2) = (4 - x_2)^2 + x_2^2 = 16 - 8x_2 + x_2^2 + x_2^2 = 2x_2^2 - 8x_2 + 16.$$

Izjednačavanjem prvog izvoda po promenljivoj  $x_2$  sa nulom dobija se

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 8 = 0 \Rightarrow x_2^* = 2.$$

Nakon uvrštavanja dobijene vrednosti u (6) sledi

$$x_1^* = 4 - 2 = 2,$$

odnosno stacionarna tačka je  $A(2, 2)$ . Kako je drugi izvod

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4 > 0,$$

zaključujemo da je u tački  $A(2, 2)$  minimum funkcije.

## 0.2 Metod ograničenih varijacija

Kao i kod metode smene, posmatra se kriterijumska funkcija oblika

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pri čemu su jednačine ograničenja

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

i važi  $n > m$ . Na osnovu navedenog formira se Jakobijeva matrica čijim se izjednačavanjem sa nulom

$$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_k} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_k} & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0, \quad k = m+1, \dots, n$$

dobijaju potrebni uslovi ekstrema funkcije više promenljivih sa ograničenjima tipa jednakosti.

## Zadaci

1. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije  $y(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$  uz ograničenje  $h(x_1, x_2) : 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ .

*Rešenje.*

Broj promenljivih je  $n = 2$ , a broj ograničenja je  $m = 1$ , pa sledi da nam je potrebna samo jedna Jakobijeva matrica ( $k = 2$ )

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{vmatrix} = -2x_1 - 4x_1x_2 = 0.$$

Rešavanjem prethodno dobijenog izraza dobijamo

$$-2x_1(1 + 2x_2) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \vee x_2^* = -\frac{1}{2},$$

pa se smenom u jednačinu ograničenja dobijaju dva slučaja:

$$\text{I } x_1^* = 0 \Rightarrow x_2^* = \pm 1,$$

odnosno u prvom slučaju se dobijaju dve stacionarne tačke  $A(0, 1)$  i  $B(0, -1)$ ;

$$\text{II } x_2^* = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1^* = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odnosno u drugom slučaju se dobijaju još dve stacionarne tačke  $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$  i  $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ .

2. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije  $y(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3$  uz ograničenje  $h(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0$ .

*Rešenje.*

Broj promenljivih je  $n = 3$ , a broj ograničenja je  $m = 1$ , pa sledi da su nam potrebne dve Jakobijeve matrice ( $k = 2, k = 3$ )

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 4x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = -12x_1 - 28x_2 = 0,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 8x_1 - 42x_3 = 0.$$

Kombinovanjem prethodno dobijenih jednačina sa jednačinom ograničenja dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 21x_3 &= 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

čija su rešenja

$$\begin{aligned}x_1^* &= \pm \sqrt{\frac{441}{651}} \approx \pm 0.823 \\x_2^* &= -\frac{3}{7} \cdot (\pm 0.823) \approx \mp 0.353 \\x_3^* &= -\frac{4}{21} \cdot (\pm 0.823) \approx \pm 0.157.\end{aligned}$$

Sledi da su stacionarne tačke  $A(0.823, -0.353, 0.157)$  i  $B(-0.823, 0.353, -0.157)$ .

3. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije  $y(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 8x_1 + 3x_2$  uz ograničenje  $h(x_1, x_2) : 3x_1 + x_2 - 10 = 0$ .

*Rešenje.*

Broj promenljivih je  $n = 2$ , a broj ograničenja je  $m = 1$ , pa nam je potrebna jedna Jakobijeva matrica ( $k = 2$ )

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x_2 + x_1 + 3 & -4x_1 + x_2 + 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7x_1 - 7x_2 + 1 = 0.$$

Na osnovu prethodno dobijene jednačine i jednačine ograničenja dobija se sistema jednačina

$$\begin{aligned}7x_1 - 7x_2 + 1 &= 0 \\3x_1 + x_2 - 10 &= 0,\end{aligned}$$

čije je rešenje stacionarna tačka  $x^* = \begin{bmatrix} \frac{69}{28} & \frac{73}{28} \end{bmatrix}^T$ .

4. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije  $z(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  ukoliko su ograničenja  $h_1(\underline{x}) : x_1 + 2x_2 = 2$  i  $h_2(\underline{x}) : x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$ .

*Rešenje.*

Prvi korak je transformacija jednačina ograničenja

$$\begin{aligned}h_1(\underline{x}) = x_1 + 2x_2 = 2 &\Rightarrow x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\h_2(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2 &\Rightarrow x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

Broj promenljivih je  $n = 3$ , a broj ograničenja je  $m = 2$ , pa nam

je potrebna jedna Jakobijeva matrica ( $k = 3$ )

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4x_3 & 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} + 4x_3 \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8x_1x_3 = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \vee x_3^* = 0,$$

pa se u kombinaciji sa jednačinama ograničenja dobijaju dva slučaja:

I  $x_1^* = 0 \rightarrow h_1(\underline{x}) \Rightarrow x_2^* = 1, h_2(\underline{x}) \Rightarrow x_3^* = 0$ ,  
odnosno u prvom slučaju se dobija stacionarna tačka  $A(0, 1, 0)$ ;

II  $x_3^* = 0$

$$h_1(\underline{x}) \Rightarrow x_1 = 2 - 2x_2,$$

pa se smenom u drugo ograničenje dobija

$$h_2(\underline{x}) \Rightarrow (2 - 2x_2)^2 + 2x_2 - 2 = 0$$

$$3x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0.$$

Rešenja dobijene kvadratne jednačine su  $x_{21}^* = 1$  i  $x_{22}^* = \frac{1}{3}$ .

Iz prve jednačine ograničenja se dobija  $x_{11}^* = 0$  i  $x_{12}^* = \frac{4}{3}$ .

Na kraju, u drugom slučaju su dobijene stacionarne tačke  $B(0, 1, 0) = A$  i  $C(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ .