

Optimizacija uz ograničenja tipa nejednakosti, uvođenje dodatne promenljive metod Lagranževih množitelja, metod ograničene varijacije

Anja Buljević

Aleksandra Mitrović

Smilja Stokanović

2. novembar 2022.

Zadaci

1 Metod Lagranževih množitelja

Optimizacioni problem koji rešavamo formulišemo na sledeći način: naći ekstrem funkcije

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ukoliko su ograničenja

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = 0, j = 1, \dots, m_1$$

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, k = 1, \dots, m_2$$

pri čemu mora da važi da je broj ograničenja strogo manji od broja promenljivih ($m < n$).

1. Naći minimum funkcije $f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$ uz ograničenje $x_1 - \frac{x_2^2}{4} \leq 0$.

Prvi korak pri rešavanju zadataka u slučaju ograničenja tipa nejednakosti, jeste pretvaranje ograničenja nejednakosti u ograničenje jednakosti, uvođenjem dodatne promenljive:

$$x_1 - \frac{x_2^2}{4} \leq 0,$$

$$x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0$$

Sledeći korak jeste formiranje *Lagranžijana*:

$$L = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2)$$

Nakon što smo formirali prošireni kriterijum optimalnosti, potrebno je da pronađemo parcijalne izvode po svim promenljivima i da ih izjednačimo sa nulom:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{x_2}{2}\lambda = 0 \rightarrow x_2 = 0, \lambda = 4$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0, \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0$$

Na osnovu prethodnog sistema jednačina, zaključujemo da ćemo imati tri slučaja koja treba da razmatramo:

- $x_2 = 0, x_3 = 0$
Ukoliko uvrstimo vrednost x_2 i x_3 u jednačinu ograničenja, dobijamo vrednost x_1 :

$$x_1 = 0.$$

Vrednost λ , možemo izračunati iz prve jednačine i iznosi $\lambda = 2$, a naša prva stacionarna tačka jeste $A(0, 0)$.

- $x_2 = 0, \lambda = 0$
Uvrštavanjem vrednosti x_1 i λ u prvu jednačinu, dobijamo sledeći izraz:

$$2(x_1 - 1) = 0,$$

$$x_1 = 1.$$

Nakon što smo izračunali vrednost, $x_1 = 1$, potrebno je da proverimo ograničenje:

$$x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0.$$

Odakle nam sledi da je:

$$x_3^2 = -1$$

Zaključujemo da ograničenje nije zadovoljeno.

- $\lambda = 4, x_3 = 0$
U ovom slučaju, možemo izračunati vrednost x_1 , uvrštavanjem vrednost $\lambda = 4$ u prvu jednačinu:

$$2(x_1 - 1) + 4 = 0 \rightarrow x_1 = -1.$$

Potrebno je da izračunamo i vrednost x_2

$$-1 - \frac{x_2^2}{4} = 0 \rightarrow x_2^2 = -4.$$

Zaključujemo da i u ovom slučaju ograničenje $x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0$ nije zadovoljeno.

Potrebno je još da proverimo dovoljne uslove za našu stacionarnu tačku $A(0,0)$. Dovoljne uslove proveravamo formiranjem matrice Q :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Glavni minori matrice Q , za tačku $A(0,0)$, $\lambda = 2$ su:

$$D_1 = 2$$

$$D_2 = 4 - \lambda = 2$$

$$D_3 = 4\lambda(2 - \frac{\lambda}{2}) = 8$$

Na osnovu glavnih minora, matrice Q , koji su u ovom slučaju > 0 , zaključujemo da je naša tačka $A(0,0)$ minimum.

2. Odrediti stacionarne tačke i njihov karakter za problem $f(x) = x_1 x_2$, ukoliko važi ograničenje $g(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$.

Prvi korak jeste da pretvorimo ograničenje tipa nejednakosti u ograničenje tipa jednakosti:

$$25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 / (-1)$$

$$-25 + x_1^2 + x_2^2 \leq 0$$

$$-25 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Sledeći korak jeste formiranje Laganžijana:

$$L = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2\lambda x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0, \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0\end{aligned}$$

- $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_3^2 &= 25 \\ x_3 &= \pm 5\end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina, dobili smo vrednost prve stacionarne tačke $A(0, 0)$, gde se rešenje nalazi unutar oblasti.

- $x_3 = 0$

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 25 \\ x_2 + 2\lambda x_1 &= 0 / (x_2) \\ x_1 + 2\lambda x_2 &= 0 / (-x_1)\end{aligned}$$

Ukoliko saberemo ove dve jednačine dobijamo izraz

$$\begin{aligned}x_2^2 - x_1^2 &= 0 \\ x_1^2 &= x_2^2 \\ \lambda &= -\frac{x_2}{2x_1}\end{aligned}$$

Daljim uvrštavanjem dobijamo:

$$2x_2^2 = 25$$

$$x_2^2 = \frac{25}{2} \rightarrow x_2 = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Odavde dobijamo četiri stacionarne tačke, čiji je karakter potrebno ispitati:

- $B(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$
- $C(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$
- $D(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}$

$$\bullet E\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

Nakon što smo odredili stacionarne tačke, potrebno je i da ispitamo njihov karakter, pomoću dovoljnih uslova. Formiramo matricu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Glavni minori matrice Q su:

$$D_1 = 2\lambda$$

$$D_2 = 4\lambda^2 - 1$$

$$D_3 = 8\lambda^3 - 2\lambda$$

Ukoliko bi smo uvrstili vrednosti λ , redom za tačke A, B, C, D i E, zaključili bi smo da je matrica Q nedefinitna. Iz tog razloga potrebno je da odredimo vrednosti μ , iz matrice Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} Q - \mu I_{n \times n} & P_{n \times m}^T \\ P_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdje je P:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 0 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2\lambda - \mu & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Ukoliko matricu Δ razvijemo po trećoj vrsti dobićemo sledeći izraz:

$$\Delta = -(2\lambda - \mu) \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix} - 2x_3 \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dalje možemo uvesti smenu $(2\lambda - \mu) = a$.

$$\Delta = a(4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2a - 4x_2^2a) - 2x_3(2x_3a^2 - 2x_3) = 0$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = a(4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2a - 4x_2^2a) - 2x_3(2x_3a^2 - 2x_3) = 0$$

$$\Delta = 8x_1x_2a - 4x_1^2a^2 - 4x_2^2a^2 - 4x_3^2a^2 + 4x_3^2 = 0$$

Sada je potrebno da proverimo vrednosti μ za stacionarne tačke:

- $A(0, 0), x_3^2 = 25, \lambda = 0$

$$\Delta = -4x_3^2a^2 + 4x_3^2 = 0$$

$$\Delta = -4x_3^2(a^2 - 1) = 0$$

$$\Delta = -100(a^2 - 1) = 0 \rightarrow a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

$$2\lambda - \mu = \pm 1$$

$$\mu = 1 \wedge \mu = -1$$

- $B(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}), E(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}), x_3 = 0, \lambda = -\frac{1}{2}$

$$\Delta = 8x_1x_2a - 4x_1^2a^2 - 4x_2^2a^2 = 0$$

Uvrštavanjem vrednosti x_1 i x_2 , za tačke B i E , dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = 100a - 50a^2 - 50a^2 = 0$$

$$\Delta = 100a - 100a^2 = 0$$

$$\Delta = a(1 - a) = 0$$

Vrednost Δ će biti jednaka 0, ukoliko je:

$$a = 1 \vee a = 0.$$

Vraćanjem smene $2\lambda - \mu = a$, dobijamo sledeće vrednosti μ :

$$2\lambda - \mu = 1 \vee 2\lambda - \mu = 0,$$

$$\mu_1 = -2 \wedge \mu_2 = -1.$$

Pošto su obe vrednosti $\mu < 0$, zaključujemo da su tačke B i E maksimum.

$$\bullet C\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right), D\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right), x_3 = 0, \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = 8x_1x_2a - 4x_1^2a^2 - 4x_2^2a^2 = 0$$

Uvrštavanjem vrednosti x_1 i x_2 , dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = -100a - 50a^2 - 50a^2 = 0$$

$$\Delta = -100a - 100a^2 = 0$$

$$\Delta = -a(1 + a) = 0$$

Matrica Δ će imati vrednost 0 u dva slučaja:

$$a = -1 \vee a = 0$$

Vraćanjem smene $2\lambda - \mu = a$, dobijamo sledeće vrednosti μ :

$$2\lambda - \mu = 1 \vee 2\lambda - \mu = 0$$

$$\mu_1 = 2 \wedge \mu_2 = 1$$

Na osnovu vrednosti $\mu > 0$, možemo da zaključimo da su tačke C i D minimum.

3. Odrediti stacionarne tačke sledećeg problema $f(x) = 4x_1 - x_2^2 - 12 = 0$, ukoliko važe ograničenja:

$$25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38 \geq 0$$

Prvo što je potrebno da odradimo jeste da pretvorimo ograničenje tipa nejednakosti u ograničenje tipa jednakosti:

$$10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38 \geq 0 / (-1)$$

$$-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 \leq 0$$

$$-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 + x_3^2 = 0$$

Kao i u prethodnom zadatku, potrebno je da formiramo Lagranžijan:

$$L = 4x_1 - x_2^2 - 12 + \lambda_1(25 - x_1^2 - x_2^2) + \lambda_2(-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 + x_3^2)$$

Sledeći korak jeste da pronađemo parcijalne izvode:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 4 - 2\lambda_1 x_1 - 10\lambda_2 x_1 + 2x_1 \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -2x_2 - 10\lambda_2 x_1 + 2x_2 \lambda_2 - 2x_2 \lambda_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2\lambda_2 x_3 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0 \vee x_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 25 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= -10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 + x_3^2 = 0\end{aligned}$$

- $\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned}4 - 2x_1 \lambda_1 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_2 \lambda_1 &= 0 \\ -2x_2(1 + \lambda_1) &= 0\end{aligned}$$

(a) $x_2 = 0$

$$\begin{aligned}25 - x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ x_1^2 &= 25 \\ x_1 &= \pm 5\end{aligned}$$

Kada smo odredili vrednosti x_1 i x_2 , potrebno je da proverimo i ograničenje:

$$\begin{aligned}x_3^2 &= 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38 \\ x_3^2 &= -63 + 10x_1 < 0\end{aligned}$$

(b) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned}4 + 2x_1 &= 0 \\ x_1 &= -2\end{aligned}$$

$$x_2^2 = 25 - x_1^2$$

Kao i u prethodnom slučaju, potrebno je da proverimo ograničenje:

$$x_3^2 = 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38$$

- $x_3 = 0$

$$-10x_1 - 10x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 38 = 0$$

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 25 \\-10(x_1 + x_2) &= -25 - 38 \\-10x_1 &= 10x_2 - 63 \\x_1 &= 6.3 - x_2\end{aligned}$$

Uvrštavanjem smene $x_1 = 6.3 - x_2$, u jednačinu ograničenja, sledi:

$$(6.3 - x_2)^2 + x_2^2 = 25.$$

Daljim rešavanjem ovog sistema dobijamo stacionarne tačke:

- $A(1.545, 4.755)$
 - $B(4.755, 1.545)$
4. **Zadatak za samostalan rad** Naći ekstreme funkcije i odrediti njihov karakter: $y(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$, ukoliko važi ograničenje $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq a$, ako je $a = 4$ i $a = 10$.

2 Metod ograničenih varijacija

Posmatramo kriterijumsku funkciju oblika:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pri čemu su jednačine ograničenja

$$\begin{aligned} h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \quad j = 1, \dots, m_1, \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0, \quad k = 1, \dots, m_2, \\ g(x, x_{m+k}^2) &= g_k(x) + x_{m+k}^2 = 0 \end{aligned}$$

i važi $n > m$. Na osnovu navedenog formira se Jakobijeva matrica čijim se izjednačavanjem sa nulom

$$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_k} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_{m_1}}{\partial x_k} & \frac{\partial h_{m_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_{m_1}}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m_2}}{\partial x_k} & \frac{\partial g_{m_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{m_2}}{\partial x_{m_1+m_2}} \end{vmatrix} = 0, \quad k = m_1 + m_2 + 1, \dots, n + m_2$$

dobijaju potrebni uslovi ekstrema funkcije više promenljivih sa ograničenjima tipa nejednakosti.

5. Pronaći stacionarne tačke, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 13$, uz ograničenja $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$, $8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$.

Prvo je potrebno da ograničenje tipa nejednakosti, pretvorimo u ograničenje tipa jednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 13 \\ h_1 &: x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \\ g_1 &: 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0/(-1). \end{aligned}$$

Kada smo ograničenje tipa nejednakosti pomnožili sa (-1) , uvodimo dodatnu promenljivu:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 13 \\ h_1 &: x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \\ g_1 &: -8 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Broj promenljivih je $n = 2$, broj ograničenja tipa jednakosti je $m_1 = 1$, a nejednakosti $m_2 = 1$. Potrebna nam je jedna Jakobijeva matrica, $k = 3$.

Sledeći korak jeste da formiramo, *Jakobijevu matricu*, za $k=3$.

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 2x_1 & 8x_2 \\ 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \end{vmatrix} = 24x_1x_2x_3 = 0$$

Formiramo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 &= 4 \\ -8 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ 24x_1x_2x_3 &= 0 \rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 0 \end{aligned}$$

- $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} 4x_2^2 &= 4 \\ x_2^2 &= 1 \\ x_2 &= \pm 1 \\ x_3^2 &= 8 - x_1^2 - x_2^2 \\ x_3 &= \pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

Stacionarne tačke za slučaj $x_1 = 0$ su:

- $A(0, 1, \sqrt{7})$
- $B(0, 1, -\sqrt{7})$
- $C(0, -1, \sqrt{7})$
- $D(0, -1, -\sqrt{7})$

- $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 4 \\ x_1^2 &= 2 \\ x_1 &= \pm 2 \\ x_3^2 &= 8 - x_1^2 - x_2^2 \\ x_3 &= \pm 2 \end{aligned}$$

Stacionarne tačke za slučaj $x_2 = 0$ su:

- $E(2, 0, 2)$
- $F(2, 0, -2)$
- $G(-2, 0, 2)$
- $H(-2, 0, -2)$

- $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 &= 4 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 8 \end{aligned}$$

Oduzimanjem ove dve jednačine, sledi:

$$3x_2^2 = -4$$

$$x_2^2 = -\frac{4}{3}$$

Zaključujemo da slučaj $x_3 = 0$, ne zadovoljava ograničenje.

6. Pronaći stacionarne tačke, sledeće funkcije $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$, ukoliko važe ograničenja: $h_1 : x_1 + 5x_2 + 4 = 0$, $g_1 : x_1^2 - 2x_2^2 - 2 \leq 0$.

Broj promenljivih je $n = 2$, broj ograničenja tipa jednakosti je $m_1 = 1$, a nejednakosti $m_2 = 1$, te nam je potrebna jedna Jakobijeva matrica $k = 3$.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$$

$$h_1 : x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$g_1 : x_1^2 - 2x_2^2 - 2 \leq 0$$

Kao i u prethodnim zadacima, potrebno je da ograničenje tipa nejednakosti, pretvorimo u ograničenje tipa jednakosti:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$$

$$h_1 : x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$g_1 : x_1^2 - 2x_2^2 - 2 + x_3^2 = 0$$

Sledeći korak jeste da formiramo, Jakobijevu matricu, za $k=3$.

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 - 6 & 2x_2 + 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2x_3 & 2x_1 & -4x_2 \end{vmatrix} = 10x_3(2x_1 - 6) - 2x_3(2x_2 + 4) = 0$$

Korištenjem jednačina ograničenja, dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$10x_3(2x_1 - 6) - 2x_3(2x_2 + 4) = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 2 + x_3^2 = 0.$$

Dalje možemo da sredimo sistem jednačina:

$$2x_3(10x_1 - 34 - 2x_2) = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 2 + x_3^2 = 0.$$

Zaključujemo na osnovu prve jednačine, da ćemo imati dva slučaja: $x_3 = 0$ i $(10x_1 - 34 - 2x_2) = 0$.

- $x_3 = 0$

$$x_1^2 - 2x_2^2 = 2$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \rightarrow x_1 = -5x_2 - 4$$

$$(-5x_2 - 4)^2 - 2x_2^2 = 2$$

$$25x_2^2 + 40x_2 + 16 - 2x_2^2 = 2$$

$$23x_2^2 + 40x_2 + 14 = 0$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo dve stacionarne tačke:

$$A(2.268, -1.2536)$$

$$B(-6.428, -0.4856)$$

- $10x_1 - 34 - 2x_2 = 0$

$$10x_1 - 34 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0/(-10)$$

$$-52x_2 - 74 = 0$$

$$x_2 = -1.42, x_1 = 3.68$$

Nakon što smo pronašli vrednosti x_1 i x_2 , potrebno je da proverimo i vrednost x_3 iz ograničenja:

$$x_3^2 = 2 - x_1^2 + 2x_2^2$$

$$x_3^2 = -7.5 < 0$$

Pošto je $x_3^2 < 0$, ograničenje nije zadovoljeno.