

Priprema za kolokvijum

Anja Buljević

Aleksandra Mitrović

Smilja Stokanović

16. novembar 2022.

1 Zadaci

1. Primenom Karuš, Kun-Takerove metode odrediti stacionarne tačke i njihov karakter za funkciju: $x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$, ako važe ograničenja: $x_1 + 5x_2 + 4 = 0$ i $x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0$.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$$

$$h(x) = x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$g(x) : x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0.$$

Prvi korak je formiranje novog kriterijuma optimalnosti F :

$$F = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) + \nu(x_1 + 5x_2 + 4).$$

Parcijalni izvodi funkcije F po promenljivim x_1 i x_2 se izjednačavaju sa nulom, pa se dobija sistem jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 6 + \nu + 2\lambda x_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + 4 + 5\nu + 4\lambda x_2, \quad (2)$$

Na osnovu jednačina ograničenja, formira se sledeći sistem jednačina:

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \quad (3)$$

$$\lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) = 0 \quad (4)$$

Iz jednačine (4) imamo dva slučaja:

- $\lambda = 0$

$$2x_1 - 6 + \nu = 0 \quad (5)$$

$$2x_2 + 4 + 5\nu = 0 \quad (6)$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \quad (7)$$

U nastavku rešavamo sistem jednačina:

$$2x_1 - 6 + \nu = 0/(-5)$$

$$2x_2 + 4 + 5\nu = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$-10x_1 + 2x_2 + 34 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0/(10)$$

$$52x_2 = -74$$

$$x_2 = -\frac{74}{52}$$

x_1 možemo odrediti iz jednačine ograničenja:

$$x_1 = -4 - 5x_2 = -\frac{81}{26}$$

Nakon što smo odredili stacionarnu tačku, potrebno je da proverimo ograničenje g :

$$g(x) : x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0.$$

Uvrštavanjem vrednosti x_1 i x_2 , zaključujemo da ograničenje g nije zadovoljeno.

- $x_1^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$$

$$2x_1 - 6 + \nu + 2\lambda x_1 = 0$$

$$2x_2 + 4 + 5\nu + 2\lambda x_2 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \rightarrow x_1 = -4 - 5x_2$$

Uvrštavanjem smene x_1 , dobijamo sledeći izraz:

$$(-4 - 5x_2)^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$$

$$27x_2^2 + 40x_2 + 14 = 0$$

Dobijamo dve stacionarne tačke:

$$A(-1.65, 0.567)$$

$$B(0.57, -0.914)$$

Nakon što smo odredili stacionarne tačke, potrebno je još da proverimo njihov karakter, računanjem λ .

$$2x_1 - 6 + \nu + 2\lambda x_1 = 0/(-5)$$

$$2x_2 + 4 + 5\nu + 2\lambda x_2 = 0,$$

$$-10x_1 + 2x_2 + 34 + \lambda(-10x_1 + 4x_2) = 0$$

$$\lambda = \frac{10x_1 - 2x_2 - 34}{4x_2 - 10x_1}$$

$$\lambda_A = -4.744$$

$$\lambda_B = 2.82$$

Za tačku A, vrednost λ je manja od nula, te zaključujemo da je ta tačka maksimum. Za tačku B, λ ima vrednost veću od nula, te je tačka B minimum.

2. U sklopu eksperimenta vršeno je mjerenje izlaza procesa, pri čemu su dobijeni sledeći rezultati: u trenucima $t = [0, 1, 2, 3]$, senzor izlaza procesa pokazao je vrijednosti $y = [5, 0, 6, 8]$. Rešiti optimizacioni problem i naći parabolu ($at^2 + bt + c$), koja najbolje opisuje ponašanje izlaza procesa.

$$t = [0, 1, 2, 3]$$

$$y = [5, 0, 6, 8]$$

Poznato je da je jednačina parabole $y(t) = at^2 + bt + c$. Koristeći jednačinu parabole, možemo odrediti funkciju $y(t)$, za svaku vrednost t .

$$y_0 : c = 5$$

$$y_1 : a + b + c = 0$$

$$y_2 : 4a + 2b + c = 6$$

$$y_3 : 9a + 3b + c = 8$$

Metodom najmanjih kvadrata formiramo prošireni kriterijum optimalnosti F :

$$F = (c - 5)^2 + (a + b + c)^2 + (4a + 2b + c - 6)^2 + (9a + 3b + c - 8)^2$$

Potrebno je da nađemo parcijalne izvode po svim nepoznatim:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2(a + b + c) + 8(4a + 2b + c - 6) + 18(9a + 3b + c - 8) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2(a + b + c) + 4(4a + 2b + c - 6) + 6(9a + 3b + c - 8) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2(c - 5) + 2(a + b + c) + 2(4a + 2b + c - 6) + 2(9a + 3b + c - 8) = 0$$

Dobijamo sistem od tri jednačine:

$$196a + 72b + 28c - 192 = 0$$

$$72a + 28b + 12c - 72 = 0$$

$$28a + 12b + 8c - 38 = 0$$

Rešavanjem ovog sistema, vrednosti dobijene za parametre su:
 $a = 1.75$, $b = -3.75$ i $c = 4.25$. Parabola koja najbolje opisuje ponašanje izlaza procesa je:

$$y = 1.75t^2 - 3.75t + 4.25$$

3. Fabrika proizvodi 3 vrste paketa A,B,C. Model A zahteva 8h obrade, 5h lakiranja i 6h sušenja. Model B zahteva 6h obrade, 4h lakiranja i 2h sušenja. Model C zahteva 5h obrade, 2h lakiranja i 4h sušenja. Stolar ima na raspolaganju 96h za obradu, 44h za lakiranje i 58h za sušenje. Zarada po jedinici modela A, B i C je 380 €, 260 € i 220 €. Kojom će se kombinacijom proizvodnje postići maksimalna dobit i koliko ona iznosi?

$$f = 380A + 260B + 220C$$

$$8A + 6B + 5C \leq 96$$

$$5A + 4B + 2C \leq 44$$

$$6A + 2B + 4C \leq 58$$

Ograničenja tipa nejednakosti transformišemo u ograničenja tipa jednakosti dodavanjem dodatne promenljive:

$$f - 380A - 260B - 220C = 0$$

$$8A + 6B + 5C + x_1 = 96$$

$$5A + 4B + 2C + x_2 = 44$$

$$6A + 2B + 4C + x_3 = 58$$

Sada formiramo prvu simpleks tabelu:

		A	B	C	
x_1	96	8	6	5	12
x_2	44	5	4	2	8.8
x_3	58	6	2	4	9.66
f	0	-380	-260	-220	

Tabela 1: Prva simpleks tabela za zadatak 3.

		x_2	B	C	
x_1	25.6	$\frac{8}{5}$	-0.4	1.8	14.2
A	$\frac{44}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	22
x_3	5.2	$-\frac{6}{5}$	-2.8	1.6	3.25
f	3344	76	44	-68	

Tabela 2: Druga simpleks tabela za zadatak 3.

		x_2	B	x_3	
x_1	19.75	-0.25	2.75	$-\frac{9}{8}$	7.18
A	7.5	0.5	1.5	$-\frac{1}{4}$	5
C	3.25	-0.75	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	-1.85
f	3565	25	-75	$\frac{85}{2}$	

Tabela 3: Treća simpleks tabela za zadatak 3.

		x_2	A	x_3	
x_1	6				
B	5	0.66			
C	12				
f	3940	50	50	30	

Tabela 4: Četvrta simpleks tabela za zadatak 3.

Svi elementi u poslednjoj vrsti su pozitivni, pa to predstavlja kraj algoritma jer tražimo maksimum. Dobijene vrednosti su:

$$A = 0$$

$$B = 5$$

$$C = 12$$

$$f_{\max} = 3940.$$

4. Tačka C se nalazi na kružnici poluprečnika 8, sa centrom u koordinatnom početku. Metodom Lagranževih množitelja, odrediti koordinate tačke, tako da zbir kvadrata rastojanja od te tačke do tačaka $A(0, 2)$ i $B(8, 2)$ bude minimalan.

$$d_1^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2$$

$$d_2^2 = (x - 8)^2 + (y - 2)^2$$

Ograničenje je da se tačka nalazi na kružnici, poluprečnika 8.

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

$$L = x^2 + (y - 2)^2 + (x - 8)^2 + (y - 2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 64)$$

$$L = x^2 + 2(y - 2)^2 + (x - 8)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 64)$$

Nakon što smo formirali prošireni kriterijum optimalnosti, tražimo parcijalne izvode po svim promenljivim i po λ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2(x - 8) + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y - 2) + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x^2 + y^2 - 64) = 0$$

Sada rečavamo sistem jednačina, kako bi smo odredili x i y :

$$4x - 16 + 2\lambda x = 0 / (-y)$$

$$4y - 8 + 2\lambda y = 0 / x$$

$$(x^2 + y^2 - 64) = 0$$

$$8x = 16y \rightarrow x = 2y$$

Uvrštavanjem smene $x = 2y$ u jednačinu ograničenja, dalje dobijamo :

$$4y^2 + y^2 - 64 = 0$$

$$5y^2 = 64$$

$$y = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$x = \pm \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

Dobijamo dve stacionarne tačke:

$$C_1 = \left(\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$C_2 = \left(-\frac{16\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5} \right)$$

Potrebno je da ispitamo karakter ove dve tačke, pa formiramo matricu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 4 + 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 4 + 2\lambda$$

$$D_2 = (4 + 2\lambda)^2$$

Vidimo da nam vrednost glavnih minora zavisi od vrednosti λ , pa računamo vrednost λ korištenjem sledećeg izraza:

$$\lambda = \frac{16 - 4x}{2x}$$

$$\lambda_{C1} = 3.59$$

$$\lambda_{C2} = -7.59$$

Vrednost glavnih minora za tačke C_1 i C_2 iznose:

- $C_1 = (\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5})$
 $D_1 = 11.18$

$$D_2 = 124.99$$

Pošto su obe vrednosti D_1 i D_2 veće od 0, tačka C_1 je minimum.

- $C_2 = (-\frac{16\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5})$
 $D_1 = -11.18$

$$D_2 = 124.99$$

Tačka C_2 je maksimum, jer je $D_1 < 0$, a $D_2 > 0$.

5. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije $y = x_1 x_2 x_3$, ako važi ograničenje $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

$$y = x_1 x_2 x_3$$

$$h : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Broj promenljivih je $n = 3$, a broj ograničenja je $m = 1$, pa sledi da su nam potrebne dve Jakobijeve matrice ($k = 2, k = 3$)

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 x_3 & x_2 x_3 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 x_3 - 2x_2^2 x_3 = 0,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_2 x_3 \\ 2x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 x_2 - 2x_2 x_3^2 = 0.$$

Kombinovanjem prethodno dobijenih jednačina sa jednačinom ograničenja dobija se sistem jednačina

$$2x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0 \rightarrow x_3 = 0 \vee x_1^2 = x_2^2$$

$$2x_2(x_1^2 - x_3^2) = 0 \rightarrow x_2 = 0 \vee x_1^2 = x_3^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Iz sistema jednačina, zaključujemo da ćemo imati četiri slučaja:

(a) $x_3 = 0 \wedge x_2 = 0$

$$x_1^2 = 1 \rightarrow x_1 = \pm 1$$

$$A(1, 0, 0)$$

$$B(-1, 0, 0)$$

(b) $x_3 = 0 \wedge x_1^2 = x_2^2$

$$x_1 = 0$$

$$x_2^2 = 1 \rightarrow x_2 = \pm 1$$

$$C(0, 1, 0)$$

$$D(0, -1, 0)$$

(c) $x_2 = 0 \wedge x_1^2 = x_3^2$

$$x_1 = 0$$

$$x_3^2 = 1 \rightarrow x_3 = \pm 1$$

$$E(0, 0, 1)$$

$$F(0, 0, -1)$$

(d) $x_1^2 = x_2^2 \wedge x_1^2 = x_3^2$

$$3x_1^2 = 1$$

$$x_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$x_3^2 = x_2^2 = \frac{1}{3}$$

$$G\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$J\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$K\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$L\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$N\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$