# Statička optimizacija u slučaju funkcije jedne promenljive

*Anja Buljević*
*Aleksandra Mitrović*
*Smilja Stokanović*

*22. oktobar 2023.*

## *Zadaci*

1. Pronaći stacionarne tačke funkcije $f(x) = 1 + 8x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$ i ispitati njihov karakter.

   Prvo ćemo pronaći stacionarne tačke[1].

$$f'(x) = 0$$
$$f'(x) = 8 + 4x - 10x^2 - x^3 + 4x^4 - x^5 = 0$$

Rešavanjem ove jednačine dobijamo sledeće stacionarne tačke $\boxed{x_1^* = -1}$ $\boxed{x_2^* = 2}$

Sada trebamo da ispitamo karakter dobijenih stacionarnih tačaka, pa računamo drugi izvod funkcije i proveramo vrednost funkcije u stacionarnim tačkama.

$$f''(x) = 4 - 20x - 3x^2 + 16x^3 - 5x^4$$
$$f''(-1) = 0$$
$$f''(2) = 0$$

Pošto smo dobili i da je drugi izvod u stacionarnim tačkama nula, tražimo treći izvod funkcije i vrednost funkcije u stacionarnim tačkama.

$$f'''(x) = -20 - 6x + 48x^2 - 20x^3$$
$$f'''(-1) = 54$$
$$f'''(2) = 0$$

Pošto je vrednost funkcije u tački $x_1 = -1$ različita od nule, zaključujemo da je stacionarna tačka $x_1 = -1$ prevojna tačka. Vrednost funkcije za stacionarnu tačku $x_1 = 2$ je nula, te je potrebno da izračunamo i četvrti izvod.

[1] Podsećanje sa predavanja: potreban uslov za postajanje stacionarne tačke je $f'(x) = 0$. Karakter stacionarne tačke ispitujemo na osnovu vrednosti funkcija viših izvoda.

$$f^{IV}(x) = -6 + 96x - 60x^2$$
$$f^{IV}(2) = -54$$

Vrednost četvrtog izvoda u tački $x_1 = 2$ je manja od nule i možemo da zaključimo da ova tačka predstavlja maksimum funkcije.

2. Troškovi proizvodnje su 100 $\frac{din}{komadu}$. U razvoj tehnologije uloženo je 5000 dinara. Ukoliko se u reklamu uloži $n$ dinara, može se prodati $\sqrt{n}$ komada proizvoda po ceni 300 $\frac{din}{komadu}$. Kako fabrika treba da posluje da bi dobit bila maksimalna?

   Na početku zadatka, potrebno je da formiramo kriterijum optimalnosti $z$. Nepoznata u ovom slučaju jeste broj komada, koju ćemo obeležiti sa $x$, dok je promenljivu $n$ potrebno izraziti preko x:

$$x = \sqrt{n} \rightarrow x^2 = n$$

   Kriterijum optimalnosti :

$$z(x) = -100x - 5000 - x^2 + 300x$$

   Da bismo odredili potrebne uslove, računamo prvi izvod funkcije $z$:

$$z'(x) = -100 - 2x + 300 = 0$$
$$200 - 2x = 0 \rightarrow \boxed{x^* = 100}$$

   Vrednost stacionarne tačke $x$ u ovom slučaju je 100, pa ostaje još da proverimo i dovoljne uslove:

$$z''(x) = -2 < 0$$

   Vrednost drugog izvoda je manja od nule, što znači da za 100 proizvedenih komada fabrika će imati maksimalnu dobit.

3. Pokažite da za svako x $\in$R važi $e^x \geq x + 1$.
   Prvo ćemo početni izraz zapisati u obliku

$$y = e^x - x - 1 \geq 0 \; . \tag{1}$$

   Da bismo mogli da dokažemo tvrđenje (1), neophodno je da odredimo stacionarnu tačku $x^*$ funkcije $y = e^x - x - 1$ izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom

$$y'(x) = e^x - 1 = 0$$
$$x^* = 0 \; .$$

Ispitivanjem znaka drugog izvoda

$$y''(x) = e^x = e^0 = 1 > 0\ ,$$

zaključujemo da početna funkcija ima ekstremnu vrednost (minimum) u tački $x^* = 0$ čime je nejednakost (1) dokazana.

4. Restoran može da primi najviše 25 stolova za po 4 osobe. Ako je rezervisano 15 stolova ili manje, cena obroka po osobi iznosi 20 €. Za svaki sledeći dodati sto, cena obroka po osobi mora se smanjiti za 1 €. Sa koliko stolova se može zaraditi maksimalni profit?

   Na osnovu teksta zadatka, možemo da zaključimo da će nam promenljiva u ovom slučaju biti ukupan broj stolova, $x$, jer ujedno od toga zavisi i cena obroka. Kriterijum optimalnosti formiramo na sledeći način:

$$z(x) = \begin{cases} 80x, & x \leq 15 \\ 4x(20 - (x - 15)), & x > 15 \end{cases}$$

   Za slučaj da je rezervisano 15 stolova ili manje, jasno je da se maksimalan profit ostvaruje u slučaju da je rezervisano baš 15 stolova, jer je kriterijum optimalnosti tada linearna, monotono rastuća funkcija. Zarada, odnosno maksimalan profit bi bio:

$$z(15) = 1200.$$

   U slučaju da je rezervisano više od 15 stolova, kriterijum optimalnosti je predstvaljen parabolom:

$$z(x) = 4x(20 - (x - 15)) = 140x - 4x^2$$

   Da bismo odredili potrebne uslove, računamo prvi izvod funkcije $z$:

$$z'(x) = 140 - 8x = 0 \rightarrow x^* = 17.5$$

   Pošto dobijena vrednost nije celi broj, izračunaćemo vrednost funkcije i u tački 17 i u tački 18, kako bi smo videli, za koji broj stolova će restoran imati veću zaradu.

$$z(17) = 1224$$
$$z(18) = 1224$$

Primećujemo da važi:

$$z(17) > z(15)$$
$$z(18) > z(15)$$

te nam preostaje samo da izračunamo dovoljne uslove i proverimo da li je to stvarno maksimum funkcije:

$$z''(x) = -8$$

Pošto je vrednost funkcije manja od nula, zaključujemo da će restoran ostvariti maksimalni profit ukoliko u restoranu bude imao 17 ili 18 popunjenih stolova.

5. Avionska karta BG - NY košta 500€. Avion prima 300 putnika, a prosečni broj putnika je 180. Ako se cena karte smanji za 5€, broj putnika se poveća za 3. Kako odrediti cenu karte da profit bude najveći?

   Nepoznata u ovom slučaju jeste broj smanjivanja cene karte, $n$. Na osnovu te vrednosti možemo izračunati cenu karte i broj putnika:

$$(500 - 5n) - cenakarte$$
$$(180 + 3n) - brojputnika$$

   Kriterijum optimalnosti dobićemo ukoliko cenu karte pomnožimo sa brojem putnika:

$$z = (500 - 5n)(180 + 3n) = 90000 - 900n + 1500n - 15n^2$$
$$z = 90000 + 600n - 15n^2$$

   Sledeći korak jeste da pronađemo vrednost $n$, izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom:

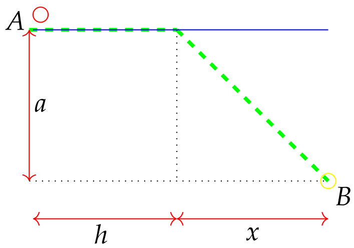
$$z'(x) = 600 - 30n = 0 \rightarrow n^* = 20$$

$$z''(x) = -30$$

   Vidimo da je vrednost drugog izvoda manja 0, te će dobit biti maksimalna ako se cena karta smanji 20 puta. U tom slučaju vrednost karte i broja putnika iznositi:

$$cenakarte = (500 - 5n^*) = 400\,e$$
$$brojputnika = (180 + 3n^*) = 240 putnika$$
$$Z = 400 * 240 = 96000\,e$$

6. Spasilac se nalazi na plaži u tački A i vidi kupača koji se davi u tački B. Spasilac trči brzinom $V_1$, a pliva brzinom $V_2$. Kako treba da se kreće spasilac da bi najbrže stigao do davljenika?




Potrebno je da pronađemo minimalno vreme za koje će spasilac stići do davljenika, te ćemo na osnovu toga formirati kriterijum optimalnosti:

$$t = t_1 + t_2$$
$$t = \frac{s_1}{V_1} + \frac{s_2}{V_2}$$
$$t = \frac{b-x}{V_1} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{V_2}$$

Računanjem prvog izvoda pronalazimo potrebne uslove

$$t' = \frac{-1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0$$

$$V_1 x = V_2\sqrt{(a^2+x^2)}/^2$$
$$V_1^2 x^2 = V_2^2(a^2+x^2)$$

$$x^* = \frac{V_2 a}{\sqrt{V_1^2 - V_2^2}}$$

7. Pri proizvodnji q jedinica, firma zarađuje 100-4q $\frac{din}{jedinici}$. Fiksni troškovi proizvodnje su 50 din, a troškovi proizvodnje po komadu su 2 din. Kako treba firma da posluje, da bi ostvarila maksimalnu dobit?

Formiramo kriterijum optimalnosti, $z$, na osnovu datih podataka:

$$z(x) = q(100-4q) - 50 - 2q = -4q^2 + 100q - 50 - 2q$$

Sledeći korak jeste da izračunamo stacionarnu tačku, na osnovu potrebnih uslova:

$$z'(x) = -8q + 98 = 0 \rightarrow q^* = 12.25$$

Vrednost stacionarne tačke nije celi broj, potrebno je da izračunamo vrednost funkcije i u tači 12 i u tački 13:

$$z(12) = 550$$
$$z(13) = 548$$

Pošto je vrednost funkcije za $q^* = 12$ veća u odnosu na $q^* = 13$, naša stacionarna tačka je u ovom slučaju $q^* = 12$.

$$z''(x) = -8$$

Računanjem drugog izvoda funkcije, koji je manji od nule, možemo da zaključimo da će fabrika imati maksimalnu dobit ukoliko proizvede 12 jedinica.