Глава 5

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Краткое содержание. Стандартная форма основной задачи линейного программирования, как показано в § 3-8 (1), представляет собой задачу отыскания значений некоторого множества неотрицательных переменных, которые удовлетворяли бы системе линейных уравнений и минимизировали бы линейную форму z.

Мы различаем *симплекс-метод*, используемый для решения линейной задачи в стандартной форме, и *симплекс-алгоритм*, который применяется к канонической форме. Симплекс-алгоритм состоит из последовательности основных операций и является основой симплекс-метода.

На первом шаге симплекс-метода в стандартную форму вводятся некоторые *искусственные переменные*. Получающаяся вспомогательная задача является задачей в канонической форме. С этого момента применяется симплекс-алгоритм. Он состоит из ряда ведущих операций, объединенных в этап I, которые производятся с последовательностью различных канонических форм. Целью этих действий является нахождение допустимого решения, если оно существует. Если последняя каноническая форма имеет допустимое решение, то вторично применяется симплекс-алгоритм и эта группа операций объединяется в этап II. Цель этого этапа состоит в нахождении оптимального допустимого решения, если оно существует.

Симплекс-алгоритм будет описан в следующем ниже § 5-1; использование симплекс-алгоритма как части симплекс-метода рассматривается в § 5-2.

5-1. СИМПЛЕКС-АЛГОРИТМ

Симплекс-алгоритм всегда применяется к задаче с уравнениями в канонической форме; пусть, например, мы имеем каноническую систему (1), (2) с базисными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $(-z)$[1]. Связь этой канонической системы m уравнений с n неизвестными с системой M уравнений с N неизвестными в стандартной форме будет выяснена в § 5-2.

---

[1] То есть $-z$ рассматривается как базисная переменная. В литературе читатель может встретиться с обозначением этой переменной через x_0 и расположением уравнения (2) перед уравнениями (1).

Задача. Найти значения $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0$ и $\min z$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{array}{llll}
x_1 & & +\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1}+\ldots+\bar{a}_{1j}x_j+\ldots+\bar{a}_{1n}x_n=\bar{b}_1, & \\
& x_2 & +\bar{a}_{2,m+1}x_{m+1}+\ldots+\bar{a}_{2j}x_j+\ldots+\bar{a}_{2n}x_n=\bar{b}_2, & \\
\cdot & & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & (1)\\
& \cdot & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & \\
& \quad\cdot & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & \\
& \quad x_m & +\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1}+\ldots+\bar{a}_{mj}x_j+\ldots+\bar{a}_{mn}x_n=\bar{b}_m, &
\end{array}$$

$$(-z) \quad +\bar{c}_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\bar{c}_jx_j+\ldots+\bar{c}_nx_n=-\bar{z}_0, \tag{2}$$

где $\bar{a}_{ij}$, $\bar{c}_j$, $\bar{b}_i$ и $\bar{z}_0$ суть постоянные. Для этой канонической формы базисным решением является

$$z=\bar{z}_0,\ x_1=\bar{b}_1,\ x_2=\bar{b}_2,\ \ldots,\ x_m=\bar{b}_m;\ x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0. \tag{3}$$

Так как *предполагается*, что это базисное решение является также и *допустимым*, величины x_j в (3) должны быть неотрицательными и

$$\bar{b}_1 \geqslant 0,\ \bar{b}_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ \bar{b}_m \geqslant 0. \tag{4}$$

Определение. Будем говорить, что линейная задача представлена в *допустимой канонической форме*, если выполнено условие (4).

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Мы видели, что каноническая форма позволяет сразу же найти соответствующее базисное решение. Ее можно использовать также для выяснения, будет ли базисное решение (если оно допустимое) минимальным. Для этого исследуются коэффициенты «модифицированного» целевого уравнения (2).

Определение. Коэффициенты $\bar{c}_j$ в стоимостном или целевом уравнении канонической системы (2) называются *относительными оценками*. «Относительными» они называются потому, что их значения будут зависеть от выбора базисного множества переменных.

Теорема 1. *Базисное допустимое решение является минимальным допустимым решением с общими затратами $\bar{z}_0$, если все относительные оценки неотрицательны:*

$$\bar{c}_j \geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Доказательство. Для канонической формы очевидно, что если все коэффициенты модифицированного целевого уравнения неотрицательны, то наименьшая величина суммы $\sum\bar{c}_jx_j$ есть нуль *при любом выборе* неотрицательных x_j. Следовательно, наименьшая величина разности $z-\bar{z}_0$ равна нулю и $\min z \geqslant \bar{z}_0$. В частности, для допустимого базисного решения $z=\bar{z}_0$; поэтому $\min z=\bar{z}_0$ и решение оптимально. Очевидна также

Теорема 2. *Дано минимальное базисное допустимое решение с относительными оценками $\bar{c}_j \geqslant 0$; тогда любое другое допустимое решение (не обязательно базисное), обладающее тем свойством, что $x_j=0$ для всех $\bar{c}_j>0$, также является минимальным решением; если, кроме того,* *решение обладает тем свойством, что для некоторого j как $x_j > 0$, так и $\bar{c}_j > 0$, то оно не может быть минимальным решением.*

Следствие. *Базисное допустимое решение является единственным минимальным допустимым решением, если $\bar{c}_j > 0$ для всех небазисных переменных.*

УЛУЧШЕНИЕ НЕОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСНОГО ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ. ПРИМЕР

Для иллюстрации рассмотрим задачу минимизации z, где

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 &= 20 \qquad (x_j \geqslant 0) \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 &= z. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть нам известно, что x_1, x_5 и $(-z)$ можно использовать как базисные переменные и что это базисное решение будет допустимым. Тогда мы можем привести систему (5) к эквивалентной канонической форме относительно переменных x_1, x_5, $(-z)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x_2 + 3x_3 - \frac{3}{4}x_4 + x_5 \qquad &= 5 \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \mathbf{2x_3} - \frac{1}{4}x_4 \qquad &= 3 \\ 8x_2 - 24x_3 + 5x_4 \qquad -z &= -28, \end{aligned} \tag{6}$$

сохраняя при этом порядок переменных и уравнений. Роль выделенных жирным шрифтом символов будет объяснена позднее. Базисное допустимое решение системы (6) получается немедленно:

$$x_1 = 3, \ x_5 = 5, \ x_2 = x_3 = x_4 = 0, \ z = 28. \tag{7}$$

Заметим, что произвольная пара переменных не обязательно даст допустимое базисное решение задачи (5). Например, если бы в качестве базисных выбрать переменные x_1 и x_2, то базисным было бы решение

$$x_1 = -12, \ x_2 = -20, \ x_3 = x_4 = x_5 = 0, \ z = -132,$$

которое не является допустимым, так как x_1 и x_2 отрицательны.

В численном примере (4) одна из относительных оценок в канонической форме (6) отрицательна, а именно коэффициент при x_3 равен -24. Критерий оптимальности, сформулированный в теореме 1, не выполнен. Если x_3 увеличится на некоторую положительную величину (остальные небазисные переменные останутся нулями), то, очевидно, значение z уменьшится, потому что соответствующее значение z получается по формуле

$$z = 28 - 24x_3. \tag{8}$$

Поэтому естественно попытаться сделать x_3 как можно больше, так как большему значению x_3 будет отвечать меньшая величина z. Но значение x_3 не может увеличиваться неограниченно, если другие небазисные переменные остаются нулями, потому что соответствующие значения базисных переменных из (6) суть

$$\begin{aligned} x_5 &= 5 - 3x_3, \\ x_1 &= 3 - 2x_3, \end{aligned} \tag{9}$$

и мы видим, что если x_3 превысит $^3/_2$, то x_1 станет отрицательным, а если x_3 будет больше чем $^5/_3$, то окажется отрицательным и x_5. Очевидно, наибольшим допустимым значением для x_3 является наименьшая из указанных дробей, а именно $x_3 = 3/2$. После подстановки этого значения x_3 в (8) и (9) мы получаем новое допустимое решение с меньшим значением целевой функции

$$x_3=\frac{3}{2}, \quad x_5=\frac{1}{2}, \quad x_1=x_2=x_4=0, \quad z=-8. \tag{10}$$

Это решение уменьшило z с 28 до -8; наша ближайшая задача состоит в том, чтобы выяснить, будет ли это решение минимальным. Теперь можно несколько задержаться. Новая каноническая форма с новыми базисными переменными x_3 и x_5 может быть получена непосредственно из старой канонической формы с базисными переменными x_1 и x_5. Выберем в качестве *ведущего элемента* элемент x_3. Его максимальное значение ограничивалось неотрицательностью базисных переменных x_1 и x_5, а именно элементом $2x_3$, выделенным в (6) жирным шрифтом. После соответствующего преобразования, выделяющего x_3, новая каноническая форма относительно x_3, x_5 и $(-z)$ примет вид

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}x_1+\frac{7}{8}x_2 \qquad -\frac{3}{8}x_4+x_5 &= \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{8}x_2+x_3-\frac{1}{8}x_4 \qquad &= \frac{3}{2}\\
12x_1- x_2 \qquad +2x_4 \qquad -z &= 8.
\end{aligned} \tag{11}$$

Она дает допустимое базисное решение (10). Хотя величина z и уменьшена, коэффициент $\bar{c}_2 = -1$ показывает, что решение еще не является минимальным и что можно получить лучшее решение, если увеличить x_2, положить для небазисных переменных $x_1 = x_4 = 0$ и выразить новые значения x_5 и x_3 через x_2

$$\begin{aligned}
x_5 &= \frac{1}{2}-\frac{7}{8}x_2,\\
x_3 &= \frac{3}{2}+\frac{3}{8}x_2,\\
z &= -8-x_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что второе уравнение не накладывает ограничений на x_2, а первое уравнение ограничивает x_2 максимальной величиной $1/2 : 7/8$, при которой x_5 обращается в нуль. Поэтому для дальнейших исключений используется *ведущий элемент* $\frac{7}{8}x_2$ из первого уравнения (11). Новые базисные переменные суть x_2 и x_3. Переписывая систему (11) в канонической форме относительно x_2, x_3, $(-z)$, получаем системы

$$\begin{aligned}
-\frac{12}{7}x_1+x_2 \qquad -\frac{3}{7}x_4+\frac{8}{7}x_5 \qquad &= \frac{4}{7},\\
-\frac{1}{7}x_1 \qquad +x_3 \quad -\frac{2}{7}x_4+\frac{3}{7}x_5 \qquad &= \frac{12}{7},\\
\frac{72}{7}x_1 \qquad +\frac{11}{7}x_4+\frac{8}{7}x_5-z &= \frac{60}{7}
\end{aligned} \tag{13}$$

и базисным допустимым решением будет

$$x_2=\frac{4}{7}, \quad x_3=\frac{12}{7}, \quad x_1=x_4=x_5=0, \quad z=-\frac{60}{7}. \tag{14}$$

Поскольку все относительные оценки при небазисных переменных положительны, по следствию из теоремы 2 это решение является единственным минимальным. Это оптимальное решение получено из первоначального базисного решения (7) за две итерации.

УЛУЧШЕНИЕ НЕОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСНОГО ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Как мы видели на численном примере, каноническая форма сразу же дает критерий для выяснения, является ли базисное допустимое решение оптимальным. Более того, если критерий не удовлетворяется, то получается другое решение, которое уменьшает величину стоимостной, или целевой, функции (за исключением некоторых случаев вырождения).

Опишем теперь формально этот процесс улучшения неоптимального базисного допустимого решения. Если хотя бы одна из относительных оценок $\bar{c}_j$ в канонической форме (2) отрицательна, то можно (если предположить невырожденность, т. е. что все $\bar{b}_i > 0$) построить новое базисное допустимое решение с меньшей стоимостью, чем $z = \bar{z}_0$. Это решение с меньшими затратами может быть получено путем увеличения значения одной из небазисных переменных x_s и соответствующего изменения базисных переменных; в качестве x_s выбирается любая переменная, для которой относительная оценка отрицательна. В частности, индекс s можно выбрать так, что

$$\bar{c}_s = \min \bar{c}_j < 0. \tag{15}$$

В практической вычислительной работе значение s выбирают именно по этому правилу, поскольку оно удобно; кроме того, замечено, что обычно оно ведет к меньшему числу итераций в алгоритме, чем произвольный выбор s среди тех j, для которых $\bar{c}_j < 0$.

Используя каноническую форму (1) и (2), построим решение, в котором x_s принимает некоторое положительное значение, значения всех других небазисных переменных остаются по-прежнему нулями, а базисные переменные, включая и z, преобразуются в зависимости от увеличения x_s по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s}x_s, \\ x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s}x_s, \\ &\cdots\cdots \\ x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{ms}x_s, \end{aligned} \tag{16}$$

$$z = \bar{z}_0 + \bar{c}_s x_s \qquad (\bar{c}_s < 0). \tag{17}$$

Поскольку $\bar{c}_s$ было выбрано отрицательным, понятно, что значение x_s нужно сделать как можно большим, чтобы значение z стало как можно меньше. Единственное, что помешает нам сделать x_s бесконечно большим,— это то, что одна из базисных переменных может стать отрицательной. Однако если все $\bar{a}_{is} \leqslant 0$, то x_s можно брать сколь угодно большим. Тем самым установлена

Теорема 3. *Если в канонической системе для некоторого s все коэффициенты $\bar{a}_{is}$ неположительны и $\bar{c}_s$ отрицательно, то можно построить класс допустимых решений, для которого множество значений z не будет ограничено снизу.*

С другой стороны, если хоть одно из $\bar{a}_{is}$ положительно, то невозможно бесконечно увеличивать значение x_s, потому что как только будет $x_s > \bar{b}_i / \bar{a}_{is}$, так x_i станет отрицательным. Если $\bar{a}_{is}$ положительно более чем для одного i, то наименьшее из таких отношений, номер строки которого будем обозначать через r, определит наибольшее возможное значение x, и при этом базисные переменные будут неотрицательны. Наибольшим значением x_s, допустимым при этом предположении, будет

$$x_s^* = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is}>0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \geqslant 0 \qquad (\bar{a}_{rs} > 0). \tag{18}$$

Здесь следует особо отметить, что рассматриваются *только* те i и r, для которых $\bar{a}_{is} > 0$, $\bar{a}_{rs} > 0$. В случае, когда минимум достигается для нескольких i, выбор r является произвольным, если среди соответствующих отношений нет $\bar{b}_i = 0$; в последнем, вырожденном, случае r можно выбирать случайно (с равными вероятностями) среди них. Например, если $\bar{a}_{1s} > 0$ и $\bar{a}_{2s} > 0$, а $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = 0$, то можно бросить монету, чтобы выбрать: $r = 1$ или $r = 2$ [1].

Базисное решение является вырожденным, если значение хотя бы одной базисной переменной равно нулю (см. § 4-2). В этом случае из (16) вытекает, что если для некоторого $\bar{a}_{is} > 0$ соответствующее значение $\bar{b}_i$ для базисной переменной окажется нулевым, то нельзя увеличить x_s так, чтобы базисные переменные остались неотрицательными, и поэтому z не будет уменьшаться. Однако если базисное решение является *невырожденным*, то справедлива

Теорема 4. *Если в канонической системе для некоторого s относительная оценка $\bar{c}_s$ отрицательна и по крайней мере один коэффициент $\bar{a}_{is}$ положителен, то из невырожденного базисного допустимого решения можно построить новое базисное допустимое решение с меньшей общей стоимостью z.*

Точнее, мы покажем, что в результате замены x_r на x_s в множестве базисных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, получается новое множество, которое является базисным, а соответствующее базисное решение является допустимым.

Докажем сначала допустимость. Подставив значение $x_s^* \geqslant 0$, определенное в (18), в соотношения (16) и (17), мы получим допустимое решение

$$\begin{aligned} &x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s^* \geqslant 0, && (i = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq r) \\ &x_s = x_s^*, \qquad \text{где} && x_s^* = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \geqslant 0 \\ &x_j = 0, && (j = r, m+1, \ldots, n;\ j \neq s) \end{aligned} \tag{19}$$

с общей стоимостью

$$z = \bar{z}_0 + \bar{c}_s x_s^* \leqslant \bar{z}_0 \qquad (\bar{c}_s < 0). \tag{20}$$

Это допустимое решение отличается от предыдущего, так как по предположенному $\bar{b}_r \neq 0$, $x_s^* > 0$ и $z < \bar{z}_0$.

Остается показать, что новое допустимое решение является базисным. Из того, как определен в (18) индекс r, ясно, что

$$x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s^* = 0. \tag{21}$$

Мы хотим доказать, что x_s и $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (исключая x_r) образуют новое базисное множество переменных. Чтобы убедиться в этом, заметим лишь,

---

[1] Выбор r в случае, когда минимум достигается для нескольких i, явился объектом многих исследований, так как теоретически возможно, что непродуманный выбор может после нескольких итераций привести к повторению уже встречавшегося базисного решения. В практической работе можно использовать произвольный выбор. Так, У. Орчард-Хейс [3], который экспериментировал с различными процедурами, сообщает, что в практических задачах часто давало хорошие результаты (см. § 6-1 и гл. 10) следующее правило: среди отношений, для которых достигается минимум, выбираем отношение с максимальным знаменателем и соответственно полагаем $i = r$.

что, поскольку $\bar{a}_{rs} > 0$, мы можем использовать r-е уравнение системы (1) и коэффициент $\bar{a}_{rs}$ как ведущий элемент для исключения переменной x_s из остальных уравнений и минимизируемой формы. Для того чтобы преобразовать систему в каноническую форму относительно нового множества переменных, необходимо только одно это исключение. Этот факт дает ключ к эффективным вычислениям по симплекс-методу. В силу теоремы 1, § 4-2, новое базисное решение единственно; следовательно, это решение дается формулами (19).

ИТЕРАТИВНЫЙ ПРОЦЕСС

Новое базисное допустимое решение можно снова испытать на оптимальность, проверив выполнение неравенства $\bar{c}_s = \min \bar{c}_j \geqslant 0$. Если это решение не оптимально, то на основе критерия (15) можно выбрать новую переменную x_s, ввести ее в базис и получить либо а) множество решений, для которых z не ограничено снизу (если все $\bar{a}_{is} < 0$) или б) новое базисное допустимое решение, в котором значение z меньше, чем предыдущее (при условии, что значения базисных переменных для последнего шага строго положительны; в противном случае новое значение z может быть равно предыдущему значению).

Симплекс-алгоритм состоит в повторении этого цикла снова и снова. Этот процесс заканчивается только в том случае, когда получим либо:

а) множество допустимых решений, для которых $z \to -\infty$, либо

б) оптимальное базисное допустимое решение (все $\bar{c}_j \geqslant 0$).

Теорема 5. *В предположении, что ни на одной итерации нет вырожденности, симплекс-алгоритм закончится за конечное число итераций.*

Доказательство. Существует лишь конечное число возможностей выбрать из n переменных m базисных. Если бы алгоритм продолжался бесконечно, то это могло бы быть только при повторении некоторого базисного множества переменных и, следовательно, некоторой канонической системы и некоторого значения z (см. теорему единственности, § 4-2, теорема 1). Такое повторение невозможно, так как значение z убывает с каждой итерацией.

Когда же появляются вырожденные решения, мы не можем больше утверждать, что процесс обязательно закончится за конечное число итераций, потому что при вырождении, а это возможно, если $\bar{b}_r = 0$ в (19), значение z в (20) уменьшается на 0, а это значит, что это базисное множество переменных может повториться. Если процесс продолжить, выбрав те же самые s и r для каждой итерации, которые выбирались раньше, то это же базисное множество появится вновь, скажем, через k итераций и снова через $2k$ итераций и т. д., бесконечно. В симплекс-алгоритме существует, следовательно, возможность движения по кругу (зацикливания)[1]. Примеры, показывающие, что это действительно случается, были фактически построены (см. гл. 10).

Мы установили сходимость симплекс-метода к оптимальному решению за конечное число итераций только для случая невырожденных базисных решений. В § 6-1 будет обосновано правило случайного выбора, а в гл. 10 мы покажем простой способ незначительного изменения («возмущения») коэфф циентов, обеспечивающий невырожденность. Мы докажем, что описанный там процесс годится даже для вырожденных задач.

---

[1] В литературе используется именно термин «зацикливание», Гофман [1]; Бил [1].

5-2. ДВА ЭТАПА СИМПЛЕКС-МЕТОДА

ЗАДАЧА

Стандартная форма, введенная в гл. 3, для основной математической задачи линейного программирования, состоит в нахождении значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{gathered}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N = b_M\end{gathered} \tag{1}$$

и минимизирующих целевую форму

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N = z, \tag{2}$$

где на значения x_j наложены ограничения

$$x_j \geqslant 0. \qquad (j = 1,2, \ \ldots, \ N) \tag{3}$$

Симплекс-метод в основном и применяется для решения этой задачи. Этот метод использует представленный в двух этапах в § 5-1 симплекс-алгоритм, как это будет описано в этом параграфе.

Многие задачи, возникающие на практике, часто позволяют сразу найти начальную допустимую каноническую форму. Например, можно немедленно построить много различных начальных базисных допустимых решений для важного класса задач, называемых «транспортными» (см. гл. 14). Экономические модели часто содержат запасы сырья и вспомогательные технологические процессы; это позволяет указать очевидное начальное решение, в котором ничего нет, кроме этих вспомогательных технологических процессов. Такое решение может быть очень далеко от оптимального, но по крайней мере с него легко начать решение. В этих случаях обычно приходится затратить немного труда (или даже никакого труда не приходится затрачивать), чтобы привести эту задачу к каноническому виду. В таких случаях этап I упомянутого выше процесса не нужен.

На практике встречаются и другие задачи, не имеющие такого очевидного начального допустимого канонического вида. Это имеет, например, место для модели, которая не содержит свободных переменных или в которой эти переменные имеют отрицательные коэффициенты. О такой задаче, говоря математически, может быть ничего неизвестно. Такая задача может иметь:

а) *избыточность*; она возникает, например, если уравнение баланса денежного потока получается из уравнений баланса материальных потоков умножением цены на количество и суммированием. Классическая транспортная задача является вторым примером (см. § 3-3; см. также задачу о смесях, § 3-4, как третий пример);

б) *несовместность*; это могло бы случиться из-за простых описок, из-за использования противоречивых данных или в силу набора требований, которые не могут быть выполнены при имеющихся ресурсах. Например, можно предложить задачу, в которой известно, что ресурсы имеются в малых количествах; основным здесь является вопрос, существует ли допустимое решение.

Ясно, что общий математический метод должен быть разработан так, чтобы решать задачи линейного программирования независимо от априорных знаний и предположений о системах, с которыми приходится иметь дело. Действительно, если имеет место несовместность или избыточность, то в процессе решения эти важные факты должны быть обнаружены.

Этап I процесса использует симплекс-алгоритм для получения начальной допустимой канонической формы (если она существует) для этапа II. Этап I имеет некоторые важные особенности.

а) Никаких предположений о начальной системе не делается; она может быть избыточной, несовместной или не иметь решений в неотрицательных числах.

б) Для получения начального решения в канонической форме для этапа I никаких преобразований не требуется.

в) Конечным результатом этапа I является базисное допустимое решение (если оно существует) в канонической форме, пригодное для начала этапа II.

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

А. Преобразуем исходную систему уравнений так, чтобы все свободные члены b_i были неотрицательными, изменив для этого, если необходимо, знаки обеих частей некоторых из уравнений.

Б. Увеличим число неизвестных в системе, введя базисное множество *искусственных переменных* $x_{N+1} \geqslant 0, x_{N+2} \geqslant 0, \ldots, x_{N+M} \geqslant 0$; в результате мы получим расширенную систему уравнений

$$\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + x_{1N}x_N + x_{N+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N \quad + x_{N+2} & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N \qquad + x_{N+M} & = b_M, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N \qquad + (-z) & = 0 \end{array} \quad (b_i \geqslant 0) \quad (4)$$

и

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, N, N+1, \ldots, N+M) \qquad (5)$$

В. (Этап I.) Используем симплекс-алгоритм (без ограничения на знак z) для получения решения систем (4) и (5), которое минимизирует сумму искусственных переменных, обозначенную через w:

$$x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots + x_{N+M} = w. \qquad (6)$$

Уравнение (6) называется *искусственной формой*. Начальную допустимую каноническую систему для этапа I мы получим, если выберем в качестве базисных переменных $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{N+M}$, $(-z)$, $(-w)$ и исключим эти переменные (кроме w) из формы w, вычитая сумму первых M уравнений (4) из (6). Это дает нам

Естественные переменные	Искусственные переменные	
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N$	$+x_{N+1}$	$= b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N$	$+x_{N+2}$	$= b_2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N$	$+x_{N+M}$	$= b_M$
$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N$	$-z$	$= 0$
$d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_Nx_N$	$-w$	$= -w_0$

(7)

где $b_i \geqslant 0$ и

$$d_j = -(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{Mj}), \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \qquad (8)$$
$$-w_0 = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_M).$$

Оставляя в (7) только коэффициенты, получаем *начальную таблицу* для этапа I (см. табл. 5-2-I).

Г. Если min $w > 0$, то допустимого решения нет, и процесс окончен. С другой стороны, если min $w = 0$, то этап II симплекс-алгоритма мы начинаем следующим образом: (1) исключаем из дальнейшего рассмотрения все небазисные переменные x_j, которым в последнем измененном w-уравнении соответствуют положительные (не нулевые) коэффициенты d_j; (II) заменяем линейную форму w (измененную различными исключениями) линейной формой z, которая получается после первого исключения из z-формы всех базисных переменных. (На практике при вычислениях исключение базисных переменных из z-формы обычно делается в каждой итерации этапа I, см. табл. 5-2-I, 5-2-II и 5-2-III. И если это уже сделано, то измененную z-форму можно сразу же использовать для этапа II.)

Д. (Этап II.) Применим симплекс-алгоритм к полученной в конце этапа I допустимой канонической форме для того, чтобы либо получить решение, минимизирующее величину z, либо обнаружить такое множество решений, что $z \to -\infty$.

Приведенное выше описание этапа I заслуживает некоторого обсуждения. Ясно, что если существует допустимое решение исходной системы (1), то это же решение удовлетворяет также (4) и (5) с равными нулю искусственными переменными; таким образом, в этом случае $w = 0$. Из (6) следует, что наименьшее возможное значение для w есть нуль, поскольку w — сумма неотрицательных переменных. Следовательно, если допустимое решение существует, то минимальным значением w будет $w = 0$; наоборот, если из (4) и (5) получено решение с $w = 0$, то, очевидно, все $x_{N+i} = 0$, а значения x_j для $j \leqslant N$ образуют допустимое решение системы (1). Отсюда следует также, что если min $w > 0$, то у системы (1) не существует допустимых решений.

Всякий раз, когда исходная система содержит избыточные уравнения, и часто, когда появляются вырожденные решения, искусственные переменные будут оставаться как часть базисного множества переменных в этапе II. Поэтому необходимо, чтобы их значения в этапе II никогда не превышали нуля. Это достигается в (Г) тем, что все те небазисные переменные, у которых относительные оценки в форме w положительны, не рассматриваются. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что форма w в конце этапа I удовлетворяет уравнению

$$\bar{d}_1 x_1 + \bar{d}_2 x_2 + \ldots + \bar{d}_{M+N} x_{M+N} = w - \bar{w}_0, \qquad (9)$$

где $\bar{d}_j \geqslant 0$ и $\bar{w}_0 = 0$, если допустимое решение существует. Для допустимости решения w должно быть нулем; это означает, что каждое x_j должно быть нулем, если соответствующее $\bar{d}_j > 0$; так что все такие x_j можно считать нулями и исключить из дальнейшего рассмотрения в этапе II. Если мы их исключим, все наше внимание будет сосредоточено на переменных, которым соответствуют $\bar{d}_j = 0$. Из (9) следует, что для решения, состоящего только из таких переменных, $w = 0$, и, следовательно, оно является допустимым для исходной задачи. Итак,

Теорема 6. *Если искусственные переменные образуют часть базисного множества переменных на различных шагах этапа II, то их величины никогда не превысят нуля.*

Одна из возможностей исключения из рассмотрения переменных x_j, соответствующих неравенствам $\bar{d}_j > 0$ в конце этапа I, состоит в следующем. Мы можем сохранять базисные искусственные переменные с нулевыми значениями в течение этапа II, исключая сначала (если это вообще возможно) все искусственные переменные из базисного множества. Это делается с помощью ведущего элемента, выбранного в строке r, соответствующей этой искусственной переменной, и в некотором столбце s, для

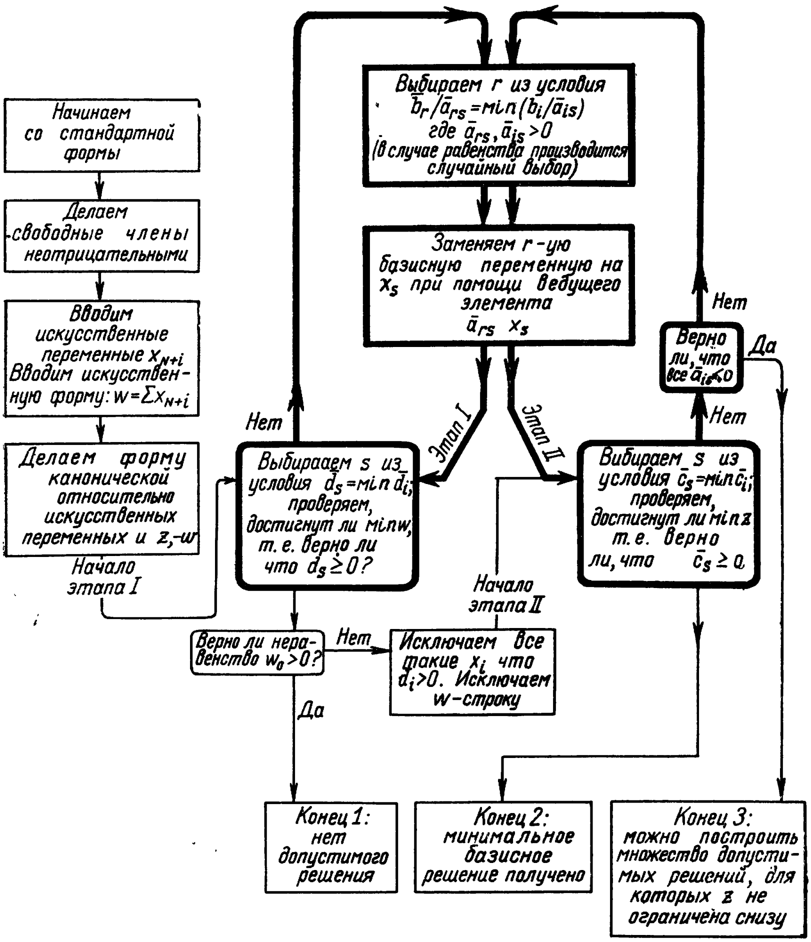

Рис. 5-2-I. Блок-схема симплекс-метода.

которого $\bar{a}_{rs} \neq 0$. Если все коэффициенты в такой строке для $j = 1, \ldots, N$ равны 0, то строка вычеркивается, потому что соответствующее уравнение в исходной системе является избыточным (см. § 8-1).

Вторая возможность состоит в том, что мы сохраняем w-уравнение в течение этапа II и рассматриваем переменную $(-w)$ как еще одну неотрицательную естественную переменную. Затем система увеличивается введением z-уравнения после исключения из него базисных переменных. Поскольку всегда справедливо неравенство $w \geqslant 0$, дополнительное условие $(-w) \geqslant 0$ на этапе II приводит к $w = 0$.

Вычислительный процесс этапа I с искусственными переменными и переход к этапу II схематически изображен на блок-схеме (см. рис. 5-2-I).

Как выглядит симплекс-метод на различных шагах, показано в табл. 5-2-1, II и III. К началу некоторого k-го шага все элементы таблицы, связанной с этим шагом, известны (см. табл. 5-2-II). Под каждым столбцом из числа соответствующих базисным переменным (включая $(-z)$ и $(-w)$) помещены значки ● или ○. Поскольку рассматривается система в канонической форме (за исключением того, что изменен порядок переменных по сравнению с исходным), все величины в столбцах, отмеченных знаками ● или ○, будут нулями, кроме одного, который равен единице. Если единица появляется в i-й строке (кроме двух последних), то мы будем говорить о соответствующей базисной переменной как об i-й базисной переменной и обозначать ее через x_{j_i}. Например, если единица встречается в первой, второй и третьей строках, соответственно для базисных переменных x_3, x_5 и x_2, то $x_{j_1} = x_3$, $x_{j_2} = x_5$ и $x_{j_3} = x_2$ являются теми символами, которые вводятся в левый столбец таблицы; их значения в соответствующем базисном решении равны числам $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_M$, которые выписаны в последнем столбце таблицы, как и значения базисных переменных $(-z)$ и $(-w)$. Эти величины обозначены через $-\bar{z}_0$ и $-\bar{w}_0$. Столбец, который соответствует переменной, вводимой в базисное множество на следующей итерации, отмечен значком ★; он заменит базисную переменную со значком ○.

Следующие правила применимы ко всем итерациям с незначительными изменениями в зависимости от того, на каком этапе (I или II) ведутся вычисления.

Шаг I:

(I) Если все $\bar{d}_j \geqslant 0$ (этап I) или $\bar{c}_j \geqslant 0$ (этап II), то для

а) этапа I с $\bar{w}_0 > 0$: *конец* — допустимого решения не существует

б) этапа I с $\bar{w}_0 = 0$: *перейти* к этапу II следующим образом:

1) исключить все переменные x_j, для которых $\bar{d}_j > 0$ [1],
2) вычеркнуть из таблицы строку w и
3) снова начать итерацию (шаг I), используя правила для этапа II.

в) Этап II: *конец* — оптимальным решением является $x_{j_i} = \bar{b}_i$, $x_j = 0$, $z = \bar{z}_0$ $(j \neq j_i,\ i = 1, 2, \ldots, M)$.

(II) Если некоторое значение $\bar{d}_j < 0$ (этап I) или $\bar{c}_j < 0$ (этап II), то выбрать переменную x_s, которая будет введена в базисное множество на следующей итерации вместо r-й базисной переменной (r будет определено на следующем шаге), так чтобы

$$\text{этап I:}\quad \bar{d}_s = \min \bar{d}_j < 0,$$

$$\text{этап II:}\quad \bar{c}_s = \min \bar{c}_j < 0.$$

Шаг II:

(I) Если все $\bar{a}_{is} \leqslant 0$, то конец [2]; множество решений есть:

$$x_s \geqslant 0 \text{ произвольно}$$

$$x_{j_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \qquad (x_{j_i} \text{— базисные переменные})$$

$$x_j = 0 \qquad (x_j \text{— небазисные переменные: } j \neq s)$$

[1] Возможен и другой путь решения, в котором этот шаг можно опустить, а в этапе II изменить шаг II-(II) следующим образом: если для соответствующей искусственной базисной переменной x_{N+i} найдется $\bar{a}_{is} \neq 0$ при $s \leqslant N$, то с помощью ведущего элемента $\bar{a}_{rs}$ вывести первую такую переменную, что $i = r$; в противном случае применить шаг II-(II), как он описан.

[2] В этапе I этот случай не может встретиться, так как из него вытекало бы, что w не ограничено снизу.

Таблица 5-2-I

Таблица симплекс-метода

Начальная таблица, нулевая итерация

Базисные переменные	Естественные переменные			Искусственные переменные				Целевые переменные		Свободные члены
	x_1	$\dots x_s \dots$	x_N	x_{N+1}	x_{N+2}	$\dots$	x_{N+M}	$-z$	$-w$	
x_{N+1}	a_{11}	$\dots a_{1s} \dots$	a_{1N}	1						b_1
x_{N+2}	a_{21}	$\dots a_{2s} \dots$	a_{2N}		1					b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				$\vdots$
x_{N+M}	a_{M1}	$\dots a_{Ms} \dots$	a_{MN}				1			b_M
$-z$	c_1	$\dots c_s \dots$	c_N					1		0
$-w$	$-\sum a_{i1}$	$\dots -\sum a_{is} \dots$	$-\sum a_{iN}$						1	$-\sum b_i$
Базисные переменные[1]		★		●	●		●	●	●	

← (Эти столбцы можно опустить)[2] →

[1] Знаки ● и ○ выделяют столбцы, соответствующие базисным переменным. Все величины в этих столбцах являются нулями, кроме одного, который равен 1. Знак ★ отмечает положение наибольшего отрицательного $\bar{d}_j$, этап I (или $\bar{c}_j < 0$, этап II), т. е. столбец, соответствующий той переменной, которая войдет в базис на следующей итерации вместо столбца, отмеченного знаком ○.

[2] Столбцы $-z$ и $-w$ обычно опускают, потому что они не изменяются во всех таблицах; опускаются также столбцы искусственных переменных, так как эти переменные, однажды выведенные из базиса, можно из дальнейшего рассмотрения исключить. Напротив, в *симплекс-методе, использующем множители* (гл. 9), рассматриваются только те элементы таблицы, которые соответствуют столбцам с искусственными переменными.

удовлетворяет исходной системе и обладает свойством

$$z = \bar{z}_0 + \bar{c}_s x_s \to -\infty \text{ при } x_s \to +\infty.$$

(II) Если какое-то $\bar{a}_{is} > 0$, то выбираем r-ю базисную переменную, чтобы вывести ее в следующей итерации, следующим образом:

$$\bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = \min \bar{b}_i / \bar{a}_{is},$$

а i и r берутся из тех i, для которых $\bar{a}_{is} > 0$. В случае совпадения[1] выбор r производится случайно (с равными вероятностями) из тех i, для которых получились равные отношения.

Шаг III:

Чтобы получить из предшествующей таблицы начальные данные таблицы, описывающей следующую итерацию, умножим каждый элемент выбранной строки r на число, обратное ведущему элементу $\bar{a}_{rs}$, и поместим

[1] См. обсуждение вырожденности гл. 10; см. также § 6-1.

Таблица 5-2-II

Исходная таблица для итерации k

x_{j_1}	$\bar{a}_{11}\ \dots$	$\bar{a}_{1s}\ \dots$	$\bar{a}_{1N}$	1			$\bar{b}_1$
x_{j_2}	$\bar{a}_{21}\ \dots$	$\bar{a}_{2s}\ \dots$	$\bar{a}_{2N}$	1			$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
x_{j_r}	$\bar{a}_{r1}\ \dots$	$\bar{a}_{rs}$[1] 1	a_{rN}				$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
x_{j_M}	$\bar{a}_{M1}\ 1$	$\bar{a}_{Ms}\ \dots$	$\bar{a}_{MN}$				$\bar{b}_M$
$-z$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_s$	$\bar{c}_N$		1		$-\bar{z}_0$
$-w$	$\bar{d}_1$	$\bar{d}_s$	$\bar{d}_N$			1	$-\bar{w}_0$
Базисные переменные	●	★	○	● ● (опустить) ● ●			

[1] Жирным шрифтом выделен ведущий элемент, используемый для вычислений на следующей итерации; см. табл. 5-2-III.

Таблица 5-2-III

Таблица перехода к следующей итерации $k+1$

Базисные переменные	Естественные переменные			Искусственные переменные	Переменные		Свободные члены
	x_1	$\dots x_s \dots$	x_N	$x_{N+1}x_{N+2}\dots x_{N+M}$	$-z$	$-w$	
x_{j_1}	$\bar{a}_{11}-\bar{a}_{1s}a^*_{r1}$		$\bar{a}_{1N}-\bar{a}_{1s}a^*_{rN}$	1			$\bar{b}_1-\bar{a}_{1s}b^*_r$
x_{j_2}	$\bar{a}_{21}-\bar{a}_{2s}a^*_{r1}$		$\bar{a}_{2N}-\bar{a}_{2s}a^*_{rN}$	1			$\bar{b}_2-\bar{a}_{2s}b^*_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$
x_s	a^*_{r1}	1	a^*_{rN}				b^*_r
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$
x_{j_M}	$\bar{a}_{M1}-\bar{a}_{Ms}a^*_{r1}$		$\bar{a}_{MN}-\bar{a}_{Ms}a^*_{rN}$				$\bar{b}_M-\bar{a}_{Ms}b^*_r$
$-z$	$\bar{c}_1-\bar{c}_sa^*_{r1}$		$\bar{c}_N-\bar{c}_sa^*_{rN}$		1		$-\bar{z}_0-\bar{c}_sb^*_r$
$-w$	$\bar{d}_1-\bar{d}_sa^*_{r1}$		$\bar{d}_N-\bar{d}_sa^*_{rN}$			1	$-\bar{w}_0-\bar{d}_sb^*_r$
Базисные переменные		●	● ●	(опустить)			

Где $(a^*_{r1}=\bar{a}_{r1}/\bar{a}_{rs}),\ \dots,\ (a^*_{rN}=\bar{a}_{rN}/\bar{a}_{rs})$ $(b^*_r=\bar{b}_r/$

эти произведения в r-ю строку таблицы для следующей итерации; см. отмеченные звездочкой элементы в r-й строке табл. 5-2-III. Вводим r-ю базисную переменную x_s на место переменной x_{j_r} в предыдущей итерации. Чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце в новой таблице, вычтем из соответствующего элемента предыдущей таблицы произведение числа, стоящего в i-й строке и s-м столбце предыдущей таблицы на число, стоящее в r-й строке и j-м столбце следующей таблицы.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР 1

Мы выполним все шаги симплекс-метода на простом числовом примере:

$$\begin{aligned} 5x_1-4x_2+13x_3-2x_4+x_5&=20\\ x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5&=8\\ x_1+6x_2-7x_3+x_4+5x_5&=z. \end{aligned}$$

Поскольку свободные члены системы неотрицательны, мы начинаем этап I симплекс-метода с расширенной системы

Естественные переменные	Искусственные переменные

$$\begin{array}{lllll} 5x_1-4x_2+13x_3-2x_4+x_5 & +x_6 & & & =20,\\ x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5 & & +x_7 & & =8,\\ x_1+6x_2-7x_3+x_4+5x_5 & & & -z & =0,\\ & x_6 & +x_7 & -w & =0. \end{array}$$

Для того чтобы эту систему привести к каноническому виду, вычитаем суммы первых двух уравнений из последнего. Это приводит нас к начальной таблице этапа I. Чтобы показать связь между обычным решением системы уравнений методом исключений и симплекс-алгоритмом, вычисления ведутся параллельно в форме уравнений (10) и в табличной, чисто коэффициентной форме (табл. 5-2-IV).

Шаги этапа I, состоящего в минимизации w, подобны шагам минимизации z. Детальные объяснения к этому примеру читатель найдет в § 5-1, (4)—(14). На первой итерации величина w уменьшается с 28 до $^4/_{13}$, на второй — до нуля, и получается базисное допустимое решение $x_3 = {}^3/_2$, $x_5 = {}^1/_2$, $z = -8$ для исходной нерасширенной системы. Переменные x_6 и x_7 имеют положительные относительные оценки в форме w и потому на этапе II могут не рассматриваться. На третьей итерации значение z уменьшается с $z_0 = -8$ (шаг 2) до $z_0 = -{}^{60}/_7$, которое и является минимальным. Оптимальное решение $x_2 = {}^4/_7$, $x_3 = {}^{12}/_7$, все другие $x_j = 0$, $z = -{}^{60}/_7$.

Симплекс-метод в форме уравнений

Итерация 0 (этап I)

$$\begin{array}{lllll} 5x_1-4x_2+\mathbf{13}x_3-2x_4+x_5+x_6 & & & & =20,\\ x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5 & +x_7 & & & =8,\\ x_1+6x_2-7x_3+x_4+5x_5 & & -z & & =0,\\ -6x_1+5x_2-18x_3+3x_4-2x_5 & & & -w & =-28. \end{array} \qquad (10)$$

★ ○ ● ● ●

Таблица 5-2-IV

Симплекс-метод: табличная форма

Итерация 0 (этап I)

Базисные переменные	Естественные переменные					Искусственные переменные		−z	−w	Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			
x_6	5	−4	**13**	−2	+1	1				20
x_7	1	−1	+5	−1	+1		1			8
−z	1	6	−7	1	5			1		0
−w	−6	+5	−18	+3	−2				1	−28
			★			○	●	●	●	

Итерация 1 (этап I)

x_3	$\frac{5}{13}$	$-\frac{4}{13}$	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$				$\frac{20}{13}$
x_7	$-\frac{12}{13}$	$+\frac{7}{13}$		$-\frac{3}{13}$	$\mathbf{\frac{8}{13}}$	$-\frac{5}{13}$	1			$\frac{4}{13}$
−z	$\frac{48}{13}$	$\frac{50}{13}$		$-\frac{1}{13}$	$\frac{72}{13}$	$\frac{7}{13}$		1		$\frac{140}{13}$
−w	$+\frac{12}{13}$	$-\frac{7}{13}$		$+\frac{3}{13}$	$-\frac{8}{13}$	$\frac{18}{13}$			1	$-\frac{4}{13}$
			●		★	(опустить)	○	●	●	

Итерация 2 (этап I—II)

x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$		$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$			$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{12}{8}$	$\frac{7}{8}$		$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$			$\frac{4}{8}$
−z	12	−1		2		4	−9	1		−8
−w						1	1		1	0
		★	●		○	(опустить)		●	●	

Итерация 3 (этап II — решение оптимально)

x_3	$-\frac{1}{7}$		1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$+\frac{4}{7}$		$\frac{12}{7}$
x_2	$-\frac{12}{7}$	1		$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$		$\frac{4}{7}$
$-z$	$\frac{72}{7}$			$\frac{11}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{7}$	$-\frac{50}{7}$	1	$\frac{60}{7}$
		●	●				(опустить)	●	

Итерация I (этап I)

$$
\begin{array}{lllllllll}
\frac{5}{13}x_1 & -\frac{4}{13}x_2+ & x_3 & -\frac{2}{13}x_4+\frac{1}{13}x_5+\frac{1}{13}x_6 & & & & = & \frac{20}{13} \\
-\frac{12}{13}x_1 & +\frac{7}{13}x_2 & & -\frac{3}{13}x_4+\frac{8}{13}x_5-\frac{5}{13}x_6 & +x_7 & & & = & \frac{4}{13} \\
\frac{48}{13}x_1 & +\frac{50}{13}x_2 & & -\frac{1}{13}x_4+\frac{72}{13}x_5+\frac{7}{13}x_6 & & -z & & = & \frac{140}{13} \\
\frac{12}{13}x_1 & -\frac{7}{13}x_2 & & +\frac{3}{13}x_4-\frac{8}{13}x_5+\frac{18}{13}x_6 & & & -w & = & -\frac{4}{13}
\end{array}
\qquad (11)
$$

● ★ (опустить) ○ ● ●

Итерация 2 (этап I—II)

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{8}x_2+x_3-\frac{1}{8}x_4 & +\frac{1}{8}x_6-\frac{1}{8}x_7 & & = & \frac{3}{2} \\
-\frac{12}{8}x_1+\frac{7}{8}x_2 \quad -\frac{3}{8}x_4+x_5 & -\frac{5}{8}x_6+\frac{13}{8}x_7 & & = & \frac{4}{8} \\
12x_1- \quad x_2 \quad +2x_4 & +4x_6-9x_7 & -z & = & 8 \\
 & x_6+\quad x_7 & -w & = & 0
\end{array}
\qquad (12)
$$

★ ● ○ (опустить) ● ●

Итерация 3 (этап II — решение оптимально)

$$
\begin{array}{llll}
-\frac{1}{7}x_1 & +x_3-\frac{2}{7}x_4+\frac{3}{7}x_5-\frac{1}{7}x_6+\frac{4}{7}x_7 & = & \frac{12}{7} \\
-\frac{12}{7}x_1+x_2 & -\frac{3}{7}x_4+\frac{8}{7}x_5-\frac{5}{7}x_6+\frac{13}{7}x_7 & = & \frac{4}{7} \\
\frac{72}{7}x_1 & +\frac{11}{7}x_4+\frac{8}{7}x_5+\frac{23}{7}x_6-\frac{50}{7}x_7-z & = & \frac{60}{7}
\end{array}
\qquad (13)
$$

● ● (опустить) ●

Оптимальное решение: $x_3=\frac{12}{7}$, $x_2=\frac{4}{7}$, все остальные $x_j=0$; $z=-\frac{60}{7}$.

Таблица 5-2-V

Иллюстративный пример 2

Симплекс-метод в табличной форме для задачи о смесях, § 3-4

Итерация 0 (этап I)

Базисные переменные	Естественные переменные									Искусственные переменные				$-z$	$-w$	Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}			
x_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						1
x_{11}	0,1	0,1	0,4	0,6	0,3	0,3	0,3	0,5	0,2		1					0,3
x_{12}	0,1	0,3	0,5	0,3	0,3	0,4	0,2	0,4	0,3			1				0,3
x_{13}	+0,8	0,6	0,1	0,1	0,4	0,3	0,5	0,1	0,5				1			0,4
$-z$	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3					1		0
$-w$	−2,0	−2,0	−2,0	−2,0	−2,0	−2,0	−2,0	−2,0	−2,0						1	−2,0
	★									●	●	●	○	●	●	

Итерация 1 (этап I)

Базисные переменные	Естественные переменные									Искусственные переменные				$-z$	$-w$	Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}			
x_{10}		0,250	0,875	0,875	0,500	0,625	0,375	0,875	0,375	1						0,50
x_{11}		0,025	0,388	0,588	0,250	0,262	0,238	0,488	0,138		1					0,25
x_{12}		0,225	+0,488	0,288	0,250	0,362	0,138	0,388	0,238			1				0,25
x_1	1	0,750	0,125	0,125	0,500	0,375	0,625	0,125	0,625							0,50
$-z$		1,22	5,29	5,49	5,55	5,96	4,74	6,39	4,74					1		−2,05
$-w$		0,50	−1,75	−1,75	−1,00	−1,25	−0,75	−1,75	−0,75						1	−1
	●		★							●	●	○ (опустить)		●	●	

Итерация 2 (этап I)

Базисные перемен-ные	Естественные переменные									Искусственные переменные						Свобод-ные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$-z$	$-w$	
x_{10}		−0,154		0,359	0,051	−0,026	0,128	0,179	−0,051	1						0,05
x_{11}		−0,154		+0,359	0,051	−0,026	0,128	0,179	−0,051		1					0,05
x_3		0,462	1	0,590	0,513	0,744	0,282	0,795	0,487							0,51
x_1	1	0,692		0,051	0,436	0,282	0,590	0,026	0,564							0,44
$-z$		−1,22		2,37	2,84	2,03	3,25	2,18	2,16					1		−4,76
$-w$		0,31		−0,72	−0,10	0,05	−0,26	−0,36	0,10						1	−0,10
	●		●	★						●	○	(опустить)		●	●	

Итерация 3 (этап I—II)

Базисные перемен-ные	Естественные переменные									Искусственные переменные						Свобод-ные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$-z$	$-w$	
x_{10}										1						0
x_4		−0,428		1	0,142	−0,071	0,357	0,500	−0,143							0,14
x_3		+0,714	1		0,428	0,786	0,071	0,500	0,571							0,43
x_1	1	0,714			0,428	0,286	0,571	0	0,571							0,43
$-z$		−0,20			2,50	2,20	2,40	1,00	2,50					1		−5,10
$-w$															1	0
	●	★	○	●						●		(опустить)		●	●	

Опустить уравнение w после исключения всех переменных с $d_j > 0$ (в этом случае только w).

Продолжение табл. 5-2-V

Итерация 4 (этап II — решение оптимально)

Базисные переменные	Естественные переменные									Искусственные переменные						Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$-z$	$-w$	
x_{10}										1						0
x_4			0,6	1	0,4	0,4	0,4	0,8	0,2							0,4
x_2		1	1,4		0,6	1,1	0,1	0,7	0,8							0,6
x_1	1															0
$-z$			0,28		2,62	2,42	2,42	1,14	2,66					1		−4,98
	●	●		●						●	(опустить)			●	(опустить)	

5-3. ЗАДАЧИ

1. Какие должны быть выполнены условия, чтобы некоторое множество переменных было базисным? В чем различия между допустимым решением, базисным допустимым решением, оптимальным решением и оптимальным базисным решением? Почему говорится «некоторое оптимальное решение» вместо «оптимальное решение»?

СИМПЛЕКС-АЛГОРИТМ (к § 5-1 и § 5-2)

2. Коротко описать словами симплекс-алгоритм. Составить блок-схему последовательности шагов, итераций и т. д. Что такое вырожденность?

3. Для системы с избыточностью

$$\begin{aligned} x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{22}x_2+a_{33}x_3&=0,\\ -a_{22}x_2-a_{33}x_3&=0, \end{aligned}$$

где $0<a_{12}<1$, $0<a_{13}<1$, $b_1>0$, показать, что введение искусственных переменных и применение этапа I симплекс-метода приводит к тому, что после исключения искусственных переменных в базисе остаются две искусственные переменные и из двух уравнений, связанных с искусственными переменными в системе в канонической форме, при отбрасывании искусственных переменных одно оказывается избыточным, но ни одно не исчезает.

4. Показать в общем случае, что если имеется исходная система ранга r, т. е. система с $m-r$ избыточными уравнениями, то к концу этапа I остается по крайней мере $m'\geqslant m-r$ искусственных переменных. Если эти искусственные переменные опустить, то подсистема уравнений, связанных с этими искусственными переменными, будет иметь ранг $m'-(m-r)$, т. е. тоже будет содержать $m-r$ избыточных уравнений. Если $m'=m-r$, то соответствующая подсистема вообще не содержит уравнений.

5. Обсудить недостатки и возможные пути улучшения последнего решения этапа I симплекс-метода, с тем чтобы уменьшить в этапе II число итераций.

6. Показать, что изменение единицы измерения некоторого технологического процесса k, для которого $\bar{c}_k<0$, позволит определять «кандидата» на введение в следующее базисное множество по правилу $\bar{c}_s=\min\bar{c}_j$. Можете ли вы предложить другое правило выбора, которое было бы лучше; не увеличит ли оно работу?

7. Какое условие является достаточным, чтобы оптимальный план был единственным? Если это условие не выполнено, то как можно построить другой оптимальный план, если он существует?

8. Показать, что если $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ являются базисными переменными, то переменная x_s может заменить x_r в роли базисной переменной только в том случае, когда коэффициент $\bar{a}_{rs}\neq 0$ в канонической форме.

9. Используя метод искусственных переменных этапа I симплекс-метода, доказать, что если существует некоторое допустимое решение системы m линейных уравнений, состоящее из неотрицательных переменных, то существует и такое допустимое решение, в котором не более чем m переменных положительны.

10. (Т. Робакер). В ряде приложений часто оказывается, что многие переменные, вошедшие однажды в базисное множество для некоторой начальной канонической формы, остаются там до последней канонической

формы, причем соответствующие этим переменным столбцы в таблицах симплекс-метода никогда не используются как ведущие, хотя сами таблицы все время изменяются.

Придумать способ преобразования только тех столбцов, которые фактически используются как ведущие, и тем самым сократить ненужную работу.

11. Предположим, что к концу этапа I с $w = 0$ в канонической форме осталась некоторая искусственная переменная в базисном множестве с единичным коэффициентом в k-й строке. Показать, что любая естественная переменная x_j может заменить эту искусственную, если $\bar{a}_{kj} \neq 0$. Если все $\bar{a}_{kj} = 0$ для допустимых j, то k-ю строку можно исключить из дальнейшего рассмотрения и это означает, что в исходной системе k-е уравнение было избыточным.

12. *Доказать*: если после исключения избыточных уравнений нет вырожденных решений, то число искусственных переменных в конце этапа I, *до исключения этих уравнений*, равно числу избыточных уравнений, а уравнений, связанных с искусственными переменными в канонической форме (после исключения искусственных переменных), не будет.

13. Найти избыточное уравнение в случае, когда искусственным переменным не разрешается вновь появляться, если они однажды были выведены из базиса. В каком случае множество решений, каждое из которых содержит m положительных переменных (m = числу уравнений), может иметь нижнюю границу, равную минус бесконечности?

14. Показать, что если ранг (см. задачу 4) системы уравнений равен числу уравнений и существует допустимое решение, то существует и базисное допустимое решение. Если, кроме того, z имеет конечную нижнюю границу, то существует минимальное базисное допустимое решение.

15. Продумать, как можно использовать симплекс-метод, чтобы отличить совместную систему, которая не имеет решения в неотрицательной области переменных, от несовместной системы.

16. Как устанавливается избыточность при помощи симплекс-метода?

17. Дано базисное недопустимое решение (т. е. по крайней мере одно $\bar{b}_i < 0$), для которого все относительные оценки $\bar{c}_j \geqslant 0$; доказать, что $\bar{z}_0$ является нижней границей для возможных значений z в § 5-1-(2).

18. Показать, что единственность канонической формы означает, что существует одна и только одна линейная форма, в которой базисные переменные могут быть выражены через небазисные. Используя это, доказать, что для формы недопустимости относительные оценки $\bar{d}_j = 0$ для неискусственных переменных и $\bar{d}_j = 1$ для искусственных переменных, если базисное множество переменных не содержит никаких искусственных переменных.

19. Показать, что условие $\bar{c}_j \geqslant 0$ для всех j является необходимым, чтобы невырожденное базисное допустимое решение было минимальным.

20. Показать, что вырожденное базисное допустимое решение может быть минимальным, хотя условие $\bar{c}_j \geqslant 0$ выполнено не для всех j.

21. Показать, что не существует нижней границы формы z для системы

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1, \qquad (x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0) \\ -x_1 - x_2 &= z \end{aligned}$$

и, таким образом, можно добиться удовлетворения условий теоремы 3 из § 5-1.

22. Одним из решений системы

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - 2x_3 + \ x_4 &= 2 \qquad (x_j \geqslant 0) \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad\qquad + 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

является $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2.$

а) Преобразовать эту систему в каноническую форму по отношению к x_1, x_2, x_3; рассмотреть x_4 как независимую переменную и показать, как уменьшить значение x_4 от $x_4 = 2$ до нуля и в то же самое время преобразовать значения базисных переменных так, чтобы получить решение, в котором не больше 3 переменных положительны.

б) Найти все решения, в которых не больше 3 переменных положительны.

23. а) Используя прием, описанный в задаче 22, найти вариант симплекс-алгоритма, который бы уменьшал число положительных переменных по крайней мере на единицу, если ранг (см. задачу 4) их подсистемы меньше, чем их число.

Можно ли в этом случае изменить более чем одну переменную от положительного значения до нуля?

б) При тех же условиях, что и выше, найти вариант симплекс-алгоритма, который, начав с некоторого допустимого решения (базисного или нет), будет путем увеличения значения небазисных переменных или уменьшения их (если они не равны нулю) успешно улучшать решение до получения оптимального.

в) Доказать, используя полученный выше вариант симплекс-алгоритма, что:

I) если существует допустимое решение, то существует и базисное решение;

II) если существует какое-то оптимальное допустимое решение, то существует базисное допустимое решение, которое является оптимальным;

III) если существуют допустимые решения и значения z, связанные с этим множеством решений, ограничены снизу, то существует оптимальное базисное допустимое решение.

24. Пусть существует допустимое решение, содержащее k переменных, и ранг (см. задачу 4) подсистемы, образованной отбрасыванием остальных переменных, равен r. Показать, что в этом случае существует допустимое решение, содержащее не более r переменных, где $r \leqslant k$.

25. Если система m уравнений с n неотрицательными переменными имеет допустимое решение, то существует решение, в котором k переменных положительны и $n - k$ равны нулю, где $k \leqslant \min (m, n)$.

26. Показать, что в задаче о диете со свободными переменными, в которой рассматривается один продукт F, содержащий понемногу каждого питательного вещества, существует начальное базисное допустимое решение, состоящее из $m - 1$ избыточных переменных и переменной, связанной с продуктом F. Какие избыточные переменные опущены?

ДВА ЭТАПА СИМПЛЕКС-МЕТОДА (см. § 5-2)

27. Используя симплекс-метод, решить систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 1 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 2 \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1 \\ x_1 - x_2 &\geqslant -1 \\ -x_2 &= z \end{aligned}$$

в неотрицательных x_j и найти min z. Изобразить графически область, определенную неравенствами, используя x_1 и x_2 как координаты; проследить графически этапы решения и интерпретировать переход от одного решения к другому на графике (см. рис. 7-2-I).

28. (Уо [1]): для питания молочных коров и получения молока необходима некоторая минимальная комбинация питательных веществ. Часть из них должна быть закуплена. Ниже приведены данные для того, чтобы ответить на вопрос, сколько каждого корма должен приобрести фермер для того, чтобы иметь все необходимые питательные вещества по минимальной цене? (Указание: найти пропорции требующихся веществ на 1 долл. стоимости каждого корма.)

А. Оптовые цены и содержание питательных веществ в кормах

Виды кормов	Оптовые цены, Канзасси-ти, долл. за 100 фунтов	Содержание питательных веществ в кормах (фунты каждого вещества в 100 фунтах корма)			
		общее количество усваиваемых питательных веществ	усваиваемый белок	кальций	фосфор
Кукуруза (зерно)	2,40	78,6	6,5	0,02	0,27
Овес	2,52	70,1	9,4	0,09	0,34
Сорговый силос	2,18	80,1	8,8	0,03	0,30
Отруби	2,14	67,2	13,7	0,14	1,29
Мучные отходы	2,44	78,9	16,1	0,09	0,71
Льняная мука	3,82	77,0	30,4	0,41	0,86
Хлопковая мука	3,55	70,6	32,8	0,20	1,22
Соевая мука	3,70	78,5	37,1	0,26	0,59
Сушеная клейковина	2,60	76,3	21,3	0,48	0,82
Очищенная вареная кукуруза	2,54	84,5	8,0	0,22	0,71
Б. Требования		74,2	19,9	0,21	0,67

29. Показать, что допустимое решение $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $z = 6$ системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \qquad (x_j \geqslant 0) \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= z \ (\min) \end{aligned}$$

не является базисным.

30. В приведенной ниже системе форма z имеет все положительные коэффициенты и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$; $z = 5$ является допустимым решением системы. Без каких-либо вычислений показать, что должно существовать оптимальное базисное допустимое решение. Используя этапы I и II симплекс-метода, построить оптимальное решение

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad (x_j \geqslant 0, \ \min z) \\ 2 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \\ 2 &= -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5. \end{aligned}$$

31. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \qquad (x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0) \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= z\ (\min). \end{aligned}$$

а) Каково максимальное число решений, в которых не более двух положительных переменных?

б) Найти все решения, в которых не более двух положительных переменных. Какое решение дает наименьшее значение z?

в) Привести задачу к канонической форме относительно x_1 и x_2. Является ли это решение оптимальным? Если нет, то, используя итеративный процесс симплекс-алгоритма, найти оптимальное решение. Как это согласуется с результатом пункта б)?

32. Найти $x_j \geqslant 0$ и $\min z$ для каждой из следующих систем

(а)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 \phantom{{}- x_5} &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 &= z \end{aligned}$$

(б)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= z \end{aligned}$$

(в)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 6 \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= z. \end{aligned}$$

33. Решить задачу о смеси продуктов § 3-5 с помощью симплекс-метода. Заметим, что модель с добавленными свободными переменными уже находится в канонической форме.

34. Используя симплекс-метод, решить задачу 12, гл. 3.

35. Следующие задачи решить симплекс-методом. Проверьте свои ответы графически (за исключением (в)).

Найти $\min z$ при условиях $x_j \geqslant 0$ и

(а)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 2 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 &= z \end{aligned}$$

(б)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} &= 2 \\ x_1 - 3x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 &= z \end{aligned}$$

(в)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &= z \end{aligned}$$

(г)
$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 &= z. \end{aligned}$$

36. Является ли решение иллюстративного примера 1 § 5-2 единственным? Дайте правило для определения, является ли решение единственным или нет.

37. Найти оптимальные решения для каждой системы задачи 32, используя искусственные переменные.

38. Задачу минимизации формы $4x_1 + 8x_2 + 3x_3$ при пяти ограничениях

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geqslant 2, \\ 2x_2+x_3 &\geqslant 5, \\ x_j &\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

можно привести, применив непосредственно симплекс-метод, к следующему виду:

минимизировать $4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + Wx_6 + Wx_7$ при девяти ограничениях

$$\begin{aligned} x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad +x_6 \qquad &=2, \\ 2x_2+x_3 \qquad -x_5 \qquad +x_7 &=5, \\ x_j \geqslant 0, \qquad (j=1,\ 2,\ldots,\ 7)& \end{aligned}$$

где W — произвольное большое положительное число.

а) Объяснить, какую роль играют x_4 и x_5.

б) Объяснить, какую роль играют x_6 и x_7.

в) Почему необходимо вводить x_6 и x_7, если уже введены x_4 и x_5?

г) Какую роль играет W? Показать, что если W достаточно велико, то последовательность шагов решения совпадает с этапами I и II.

д) Решить, используя симплекс-метод.

39. Минимизировать $-2y_1-5y_2$ при ограничениях

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad +y_3 \qquad\qquad &=4, \\ y_1 \quad +2y_2 \qquad +y_4 \qquad &=8, \\ y_2 \qquad\qquad +y_5 &=3, \\ \text{и} \qquad\qquad y_j &\geqslant 0. \end{aligned}$$

40. Сформулировать и решить задачу, *двойственную* следующей: максимизировать $u_1 + u_2 + v_1 + v_2$ при ограничениях $u_i + v_j = ij$ (*произведение* i и j; $i,\ j = 1,\ 2$).

ЗАДАЧА О ДИЕТЕ

41. Сформулировать как задачу линейного программирования следующий вопрос: предположим, что шесть продуктов, приведенных ниже в таблице, обладают калорийностью и содержат белок, кальций и витамин А в указанных количествах, а также известна их цена за фунт. В каких количествах должны быть куплены эти продукты, чтобы точно обеспечивать суточную потребность человека в питательных веществах, указанную в последнем столбце, при минимальной стоимости? Как изменится модель, если суточные потребности можно превысить или если можно превысить все потребности, кроме калорий?

а) Переформулировать модель с точными ограничениями, если единицей измерения каждого продукта будет не фунт, а 3000 калорий хлеба, мяса и т. д. Получить графически оптимальное решение для упрощенной задачи, в которой рассматриваются только уравнения для калорий, белка и стоимости (т. е. опускаются уравнения для кальция и витамина А). Решить полную задачу, используя симплекс-метод.

	Содержание и закупочная цена на 1 фунт						Дневная потребность
	хлеб	мясо	карто-фель	капуста	молоко	жела-тин	
Калории	1254	1457	318	46	309	1725	3000
Белки	39	73	8	4	16	43	70 (*г*)
Кальций	418	41	42	141	536	—	800 (*мг*)
Витамин А	—	—	70	860	720	—	500 (**и. е.**)
Цена в долл.	0,30	1,00	0,05	0,08	0,23	0,48	минимум

42. (Грин, Чатто, Хикс и Кокс [1]). Найти оптимальный план для мясоперерабатывающего предприятия, которое хочет определить, какова должна быть та доля корейки, грудинки и ветчины, которую следует произвести для продажи в копченом виде, и какую долю следует продавать свежей.

Не прибегая к сверхурочной работе, предприятие за день может закоптить корейки 106 (на 100 единиц веса), а грудинки и ветчины — 315. В случае необходимости может быть применена и сверхурочная работа.

Количество свежих продуктов, поступающих для переработки

корейка	*грудинка*	*ветчина*
480	400	230

Себестоимость продуктов в долларах

	корейка	*грудинка*	*ветчина*
Копченый продукт (без сверхурочных работ)	5,18	4,76	5,62
Копченый продукт (сверхурочные работы)	6,58	5,54	6,92
Свежий продукт	0,50	0,48	0,51

Копченые продукты продаются по более высокой цене, чем свежие: разность продажных цен на копченую и свежую корейку = 6,00 долл.; на копченую и свежую грудинку = 5,00 долл.; на копченую и свежую ветчину = 6,00 долл.