Metod Lagranževih množitelja i metod kaznenih funkcija

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

19. oktobar 2022.

1 Metod Lagranževih množitelja

Optimizacioni problem koji rešavamo formulišemo na sledeći način: naći ekstrem funkcije

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ukoliko su ograničenja

$$g_k(x_1, ..., x_n) = 0, k = 1, ..., m$$

pri čemu mora da važi da je broj ograničenja strogo manji od broja promenljivih (m < n).

1. Metodom Lagranževih množitelja odrediti stacionarne tačke funkcije

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

uz ograničenje

$$g : 3x + y - 10 = 0$$

i ispitati njihov karakter.

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(3x + y - 10).$$

Potrebni uslovi[1]:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + y + 8 + 3\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 3 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + y - 10 = 0$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti: $x^* = \frac{69}{28}, y^* = \frac{73}{28}$. Kako bismo ispitali karakter dobijene stacionarne tačke, trebamo da ispitamo dovoljne uslove [2].

[1] Potreban uslov za postajanje ekstrema jeste da su parcijalni izvodi jednaki nuli.

[2] Dovoljne uslove ispitujemo na osnovu definitnosti matrice drugih izvoda Lagranževe funkcije Q.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$D_1 = -4 < 0$$
$$D_2 = 8 - 1 = 7 > 0$$

Zaključujemo da je matrica Q **negativno definitna**, pa je stacionarna tačka $A(\frac{69}{28}, \frac{73}{28})$ **maksimum**.

2. Presek kupe opisane jednačinom $z^2 = x^2 + y^2$ i ravni $z = 1 + x + y$ je neka kriva C. Odrediti tačku na krivoj C koja je najbliža koordinatnom početku.

Cilj je da odredimo najkraće rastojanje[3], tako da će kriterijum optimalnosti za ovaj problem biti

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}.$$

[3] Rastojanje se računa po sledećem obrascu d = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Radi lakšeg računanja, kriterijum optimalnosti ćemo zapisati u sledećem obliku

Kriterijum optimalnosti možemo kvadrirati jer je u pitanju rastojanje za koje znamo da ne može biti negativno.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ograničenja su

$$g_1 : z^2 - x^2 - y^2 = 0$$
$$g_2 : z - 1 - x - y = 0.$$

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(z^2 - x^2 - y^2) + \lambda_2(z - 1 - x - y).$$

Potrebni uslovi:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2y\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2z + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (3)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (4)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = z - 1 - x - y = 0 \quad (5)$$

Sabiranjem (1) i (3) jednačine dobijamo izraz

$$\lambda_1 = \frac{x+z}{x-z},$$

dok sabiranjem (1) i (3) jednačine dobijamo izraz

$$\lambda_1 = \frac{y+z}{y-z}.$$

Sada možemo izjednačiti dobijene izraze za λ_1.

$$\begin{aligned} \frac{x+z}{x-z} &= \frac{y+z}{y-z} \\ (x+z)(y-z) &= (y+z)(x-z) \\ 2z(y-x) &= 0 \implies z = 0 \vee y = x \end{aligned}$$

(a) z = 0

Za (4) i (5) jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \implies y = -1 - x. \end{aligned}$$

Ubacivanjem dobijene smene za y dobijamo jednčinu

$$2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Koreni ove jednačine su

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4} \implies \text{Ne postoje realna rešenja!}$$

(b) x = y

Za (4) i (5) jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} z^2 - 2x^2 &= 0 \\ z - 1 - 2x &= 0 \implies z = 1 + 2x. \end{aligned}$$

Ubacivanjem dobijene smene za z dobijamo jednčinu

$$2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Koreni ove jednačine su

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{4},$$

pa su dobijene stacionarne tačke

$$\begin{aligned} &A(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}) \\ &B(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Pošto je ovo fizički realan problem, možemo samo izračunati rastojanje ubacivanjem dobijenih tačaka u formulu za rastojanje i na osnovu toga da zaključimo koja je tačka najbliža koordinatnom početku. Za ovaj konkretan problem rastojanje od tačke A do koordinatnog početka je $d_A = 3.4142$, a od tačke B je $d_B = 0.5858$, ali ćemo ovo proveriti ispitivanjem dovoljnih uslova.

Ispitujemo karakter stacionarnih tačaka:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$D_1 = 2 - 2\lambda_1$$
$$D_2 = (2 - 2\lambda_1)^2$$
$$D_3 = (2 - 2\lambda_1)^2(2 + 2\lambda_1).$$

Treba da ispitamo definitnost matrice za dobijene stacionarne tačke A i B. Vrednost λ_1 za tačku A je $\lambda_{1A} = -5.828$, a za tačku B je $\lambda_{1B} = -0.1716$.

Ubacivanjem ovih vrednosti u glavne minore, za tačku A dobijamo

$$D_1 = 13.656 > 0$$
$$D_2 = 186.4863 > 0$$
$$D_3 = -1800.7 < 0,$$

a za tačku B

$$D_1 = 2.3432 > 0$$
$$D_2 = 5.4906 > 0$$
$$D_3 = 9.0968 < 0.$$

Primećujemo da je matrica Q za tačku A nedefinitna (za domaći nastaviti ispitivanje za ovu tačku), dok je matrica Q za tačku B pozitivno definitna, pa zaključujemo da je tačka B najbliža koordinatnom početku za zadate uslove (tačka B predstavlja **minimum**).

3. Metodom Lagranževih množitelja odrediti stacionarne tačke funkcije

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$$

uz ograničenje

$$g : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

i ispitati njihov karakter.

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Potrebni uslovi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 - 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \tag{7}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

Iz jednačine (7) dobijamo:

$$2x_2(1+\lambda) \implies x_2 = 0 \lor \lambda = -1,$$

pa vidimo da ćemo imati 2 slučaja za pronalaženje stacionarnih tačaka.

(a) $x_2 = 0$
Iz jednačine (8) dobijamo da je $x_1 = \pm 1$, pa imamo dve stacionarne tačke:

- $A(1,0), \lambda_A = 2$
- $B(-1,0), \lambda_B = 0$

(b) $\lambda = -1$
Iz jednačine (6) dobijamo da je $x_1 = -\frac{1}{2}$, a iz (8) dobijamo da je $x_2^2 = \frac{3}{4}$, pa imamo sledeće dve stacionarne tačke:

- $C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \lambda_C = 1$
- $D(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \lambda_D = 1$

Kako bismo ispitali karakter dobijene stacionarne tačke, treba-mo da ispitamo dovoljne uslove.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda - 2 & 0 \\ 0 & 2\lambda + 2 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$D_1 = 2\lambda - 2$$
$$D_2 = 4\lambda^2 - 4$$

Uvrštavamo za svaku stacionarnu tačku vrednosti za λ, pa dobijamo sledeće minore:

	A	B	C	D
D_1	2	-2	-4	-4
D_2	12	-4	0	0
karakter	Minimum	Ne znamo	Ne znamo	Ne znamo

Tabela 1: Karakter stacionarne tačke.

Za tačke B, C i D moramo dalje da ispitamo karakter.

Napomena: pogledati skriptu za predavanja kako bi se prisetili kako se formira matrica Δ.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2\lambda - 2 - \mu & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2\lambda + 2 - \mu & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice Δ[4] je:

$$|\Delta| = -4x_2^2(2\lambda - 2 - \mu) - 4x_1^2(2\lambda + 2 - \mu) = 0.$$

[4] $|\Delta| = 0$

Nakon što odredimo izraz za μ, dobijamo sledeće vrednosti

	B	C	D
μ	2	-3	-3
karakter	Minimum	Maksimum	Maksimum

Tabela 2: Karakter stacionarnih tačaka.

4. Naći najkraće rastojanje između tačke $(0, 1, 2)$ i paraboloida $z = x^2 + y^2$.

   Kriterijum optimalnosti je

   $$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} \implies f = d^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2,$$

   a ograničenje je

   $$g : x^2 + y^2 - z = 0.$$

   Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

   $$L = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z).$$

   Potrebni uslovi:

   $$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \tag{9}$$
   $$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \tag{10}$$
   $$\frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-2) - \lambda = 0 \tag{11}$$
   $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - z = 0 \tag{12}$$

Iz jednačine (9) dobijamo:

$$2x(1+\lambda) \implies x = 0 \vee \lambda = -1,$$

pa vidimo da ćemo imati 2 slučaja za pronalaženje stacionarnih tačaka.

(a) $x = 0$
Iz jednačine (10) dobijamo $\lambda = \frac{1-y}{y}$.
Iz jednačine (11) dobijamo $\lambda = 2(z-2)$.
Iz jednačine (12) dobijamo $z = y^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1-y}{y} &= 2(z-2) \\ \frac{1-y}{y} &= 2(y^2-2) \\ 1-y &= 2y^3-4y \\ 2y^3-3y-1 &= 0 \\ (y+1)(2y^2-2y-1) = 0 &\implies y_1 = -1 \vee y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dobijene stacionarne tačke su:

- $A(0, -1, 1)$
- $B(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{4+2\sqrt{3}}{4})$
- $C(0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{4-2\sqrt{3}}{4})$

(b) $\lambda = -1$
Iz (10) dobijamo $2(y-1) - 2y = 0$ što nije moguće, tako da za ovaj slučaj ne postoje stacionarne tačke.

Možemo da izračunamo rastojanja za dobijene stacionarne tačke i utvrdimo za koju se dobije najkraće rastojanje. Dobijena rastojanja su sledeća:

$$\begin{aligned} d_A &\approx 2.361 \\ d_B &\approx 0.3897 \\ d_C &\approx 2.3126 \end{aligned}$$

Vidimo da najkraće rastojanje dobijamo za tačku B. Ovo možemo pokazati i ispitivanjem dovoljnih uslova.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$D_1 = 2\lambda + 2$$
$$D_2 = (2\lambda + 2)^2 > 0$$
$$D_3 = 2(2\lambda + 2)^2 > 0.$$

Pošto možemo odmah zaključiti da su D_2 i D_3 uvek pozitivni, dovoljno je da izračunamo vrednost minora D_1. Iz (11) sledi da je $\lambda = 2z - 4$.

Vrednosti za λ i minor D_1 dati su u tabeli 3.

	A	B	C
λ	-2	-0.274	-3.73
D_1	-2	1.452	-5.46
karakter	Ne znamo	Minimum	Ne znamo

Tabela 3: Karakter stacionarne tačke.

Za domaći nastaviti ispitivanje karaktera stacionarnih tačaka A i C.

5. ***Zadatak za samostalni rad.*** Metodom Lagranževih množitelja naći stacionarne tačke za sledeći kriterijum optimalnosti

$$f(x, y) = e^{(x-1)y}$$

koje se nalaze na jediničnoj kružnici sa centrom u koordinatnom početku.

2 *Metod kaznenih funkcija*

1. Metodom kaznenih funkcija naći minimum funkcije

$$y(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 7x_2^2$$

uz ograničenje

$$x_1 + 2x_2 - 5 = 0.$$

Prvi korak je formiranje modifikovanog kriterijuma optimalnosti, koji odgovara traženom minimumu:

$$F = 2x_1^2 - 7x_2^2 + P(x_1 + 2x_2 - 5)^2 \ .$$

Stacionarne tačke tražimo kao da ograničenja ne postoje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= 4x_1 + 2P(x_1 + 2x_2 - 5) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= -7x_2 + 4P\,(x_1 + 2x_2 - 5) = 0 \ .\end{aligned}$$

Eliminacijom P dobijamo

$$-4x_1 - 7x_2 = 0,$$

tako da je

$$x_1 = -\frac{7}{4}x_2.$$

Zamenom u prvi izraz dobijamo

$$\begin{aligned}-7x_2 + P\frac{x_2}{2} - 10p = 0 \\ x_2 = \frac{20P}{P-14}\end{aligned}$$

Za velike vrednosti pondera P ($P \to \infty$) dobijamo $x_2^* = 20$, a $x_1^* = -35$.