三角函数

zzfc 33

2017 年 8 月 8 日

（如未作特殊说明，则 $k=\mathbb{Z}$）

1 终边关系及诱导公式

1.1 终边相同 $\beta=\alpha+2k\pi$

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$$

$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot\alpha$$

1.2 终边关于原点对称 $\beta=(2k+1)\pi+\alpha$

$$\sin[\alpha+(2k+1)\pi]=-\sin\alpha$$

$$\cos[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cos\alpha$$

$$\tan[\alpha+(2k+1)\pi]=-\tan\alpha$$

$$\cot[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cot\alpha$$

1.3 终边关于 x 轴对称 $\beta=2k\pi-\alpha$

$$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

1.4 终边关于 y 轴对称 $\beta=(2k+1)\pi-\alpha$

$$\sin[(2k+1)\pi-\alpha]=-\sin\alpha$$

$$\cos[(2k+1)\pi-\alpha]=\cos\alpha$$

$$\tan[(2k+1)\pi-\alpha]=-\tan\alpha$$

$$\cot[(2k+1)\pi-\alpha]=-\cot\alpha$$

1.5 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha \qquad \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(2\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

2 同角三角函数基本关系

2.1 平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

2.2 倒数关系

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\quad\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

2.3 商数关系

$$\sin\alpha=\frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}\quad\cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha}\quad\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha=\frac{\csc\alpha}{\sec\alpha}\quad\csc\alpha=\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha}\quad\sec\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$$

3 和差公式

3.1 sin

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

3.2 cos

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

3.3 tan

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

4 积化和差公式

4.1 前后不同

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

4.2 前后相同

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

5 和差化积公式

令 $A=\alpha+\beta,B=\alpha-\beta$，则 $\alpha=\frac{A+B}{2},\beta=\frac{A-B}{2}$.

5.1

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

5.2

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

5.3

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

5.4

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

6 二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-2\tan\alpha}$$

7 半角公式

$$\cos\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=\frac{1-\tan^2(\beta/2)}{1+\tan^2(\beta/2)}$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}=\frac{2\tan(\beta/2)}{1-\tan^2(\beta/2)}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$$

8 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 4\sin\theta\cdot\sin\left(60^\circ-\theta\right)\cdot\sin\left(60^\circ+\theta\right)$$

$$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cdot\cos\left(60^\circ-\theta\right)\cdot\cos\left(60^\circ+\theta\right)$$

$$\tan 3\theta = 4\tan\theta\cdot\tan\left(60^\circ-\theta\right)\cdot\tan\left(60^\circ+\theta\right)$$

$$\cot 3\theta = 4\cot\theta\cdot\cot\left(60^\circ-\theta\right)\cdot\cot\left(60^\circ+\theta\right)$$

9 n 倍角公式

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ ($m,n\in\mathbb{N}^+, m<n$)

$$\begin{aligned}\sin\left(n\theta\right) = &\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta\\ &+\binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(n\theta\right) = &\binom{n}{0}\cos^{n}\theta - \binom{n}{2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta\\ &+\binom{n}{4}\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta\cdots\end{aligned}$$

10 三角形中的三角函数关系

$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$$

$$\sin\left(A+B\right)=\sin C$$

$$\cos\left(A+B\right)=-\cos C$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$$

11 辅助角公式

$$a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)$$

a,b 是 φ 终边上一点。

11.1

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

11.2

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cos x--\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

11.3

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

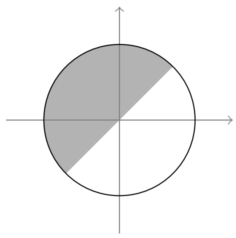
11.4

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

12 图形三角函数关系

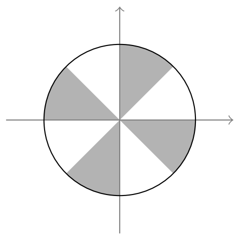
12.1 判断 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小



阴影部分 $\sin\alpha>\cos\alpha$

空白部分 $\sin\alpha<\cos\alpha$

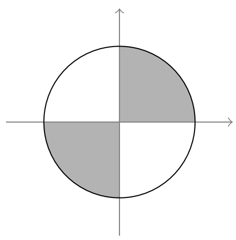
12.2 判断 $\tan\alpha$ 与 $\cot\alpha$ 的大小



阴影部分 $\tan\alpha>\cot\alpha$

空白部分 $\tan\alpha<\cot\alpha$

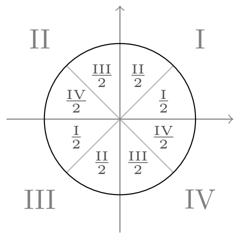
12.3 判断 $\tan\alpha$ 与 $\sin\alpha$ 大小



阴影部分 $\tan\alpha>\sin\alpha$

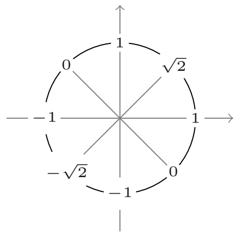
空白部分 $\tan\alpha<\sin\alpha$

12.4 判断二倍角及半角象限



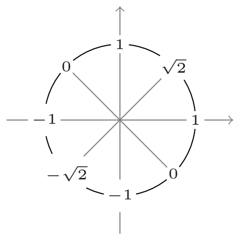
← 看图

12.5 $t = \sin\alpha + \cos\alpha$ 取值



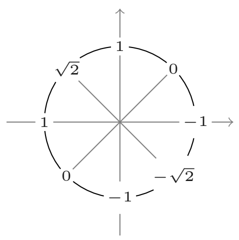
← 看图

12.6 $t = \sin\alpha + \cos\alpha$ 取值



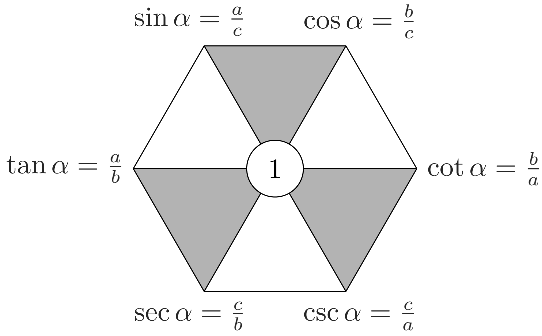
← 看图

12.7 $t = \sin\alpha - \cos\alpha$ 取值



← 看图啊你

12.8 六边形关系



- 对角线上两个三角函数乘积为 1
- 阴影三角形两上顶点的三角函数平方和等于下顶点的三角函数平方
- 任意顶点的三角函数等于相邻两顶点三角函数的乘积

13 射影定理

$a = b\cos C + c\cos B$

$b = a\cos C + c\cos A$

$c = a\cos B + b\cos A$