## Лекция № 6. Расчет надежности сложных технических систем с резервированием

*Цель* **:** Рассмотреть способы расчета структурно сложных технических систем

Учебные вопросы:

1. Классификация методов резервирования.
2. Расчет надежности при общем и раздельном резервировании.
3. Расчет надежности при резервировании систем с дробной кратностью.
4. Логико – вероятностный метод расчета надежности.

Время – 3 часа

### 1. Классификация методов резервирования.

Резервирование – это одно из основных средств обеспечения заданного уровня надежности объекта при недостаточно надежных элементах.

Резервированием называется применение дополнительных средств и возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких его элементов (ГОСТ 27.002 – 89).

Таким образом, резервирование – это метод повышения надежности объекта путем введения избыточности.

Существуют различные методы резервирования. Их целесообразно разделить по следующим признакам : вид резервирования, способ соединения элементов, кратность резервирования, способ включения резерва, режим работы резерва, восстанавливаемость резерва.

**По виду резерва** различают: структурное резервирование, временное, информационное, функциональное и нагрузочное.

*Структурное резервирование* предусматривает применение резервных элементов структуры объекта. Суть структурного резервирования заключается в введении в структуру объекта наряду с основным элементом резервного элемента.

*Резервный элемент* – это элемент объекта, предназначенный для выполнении функции основного элемента, в случае его отказа.

*Резервируемый элемент* – основной элемент, на случай отказа которого в объекте предусмотрен резервный элемент.

*Временное резервирование* связано с  использованием резервов времени. При этом предполагается , что на выполнением объектом необходимой работы отводится время, заведомо большее минимально необходимого. Резервы времени могут создаваться за счет повышения производительности объекта, инерционности его элементов и т.п.

*Информационное резервирование* – это резервирование с применением избыточности информации. Например, многократная передача одного и того же сообщения по каналу связи, передача сообщения по разным каналам связи. Избыток информации позволяет в той или иной мере компенсировать искажение передаваемой информации.

*Функциональное резервирование* – резервирование, при котором заданная информация может выполняться различными способами и техническими средствами. Например, функция передачи информации в АСУ может выполняться с использованием радиоканалов, телефона, интернета или специально выделенных каналов связи.

*Нагрузочное резервирование* – это резервирование с применением нагрузочных резервов, заключающееся в способности элементов длительно выдерживать действующие на них нагрузки.

**По способу соединения** элементов различают: общее резервирование, раздельное и смешанное.

*Общее резервирование* связано с резервированием всех элементов, входящих в состав основной цепи (рис. 6.1).

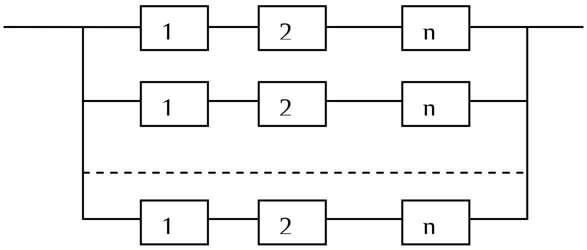



Рисунок 6.1. Общее резервирование с постоянно включенным резервом

*Раздельное резервирование* предполагает резервирование отдельных, как правило, наименее надежных элементов (Рис. 6.2).

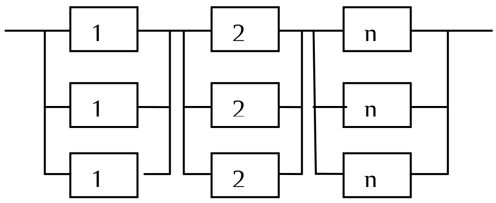



Рисунок 6.2. Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом

*Смеш* в виде общего, других – виде раздельного резервирования.

Степень избыточности характеризуется кратностью резервирования.

*Кратность резерва* - это отношение числа резервных элементов объекта к числу резервируемых ими основных элементов, выраженное дробью.

*Резервирование с целой кратностью* имеет место, когда основной элемент резервируется одним или более резервными элементами.

*Резервирование с дробной кратностью* – это такое резервирование, когда два и более однотипных элементов резервируются одним и более резервными элементами.

Резервирование, кратность которого равна единицы, называется *дублированием.*

**По способу включения** резервных элементов различают постоянное, динамическое, резервирование замещением, скользящее и мажоритарное резервирование.

*Постоянное резервирование* – это резервирование без перестройки структуры объекта при возникновении отказа его элемента. В случае отказа основного элемента при данном виде резервирования не требуется специальных устройств, вводящих в действие резервный элемент, при этом работа объекта не нарушается. Постоянное резервирование представляет собой параллельное соединение элементов без переключающих устройств.

*Динамическое резервирование* - это резервирование с перестройкой структуры объекта при возникновении отказа его элемента. Динамическое резервирование имеет ряд разновидностей.

Резервирование замещением – это динамическое резервирование, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного элемента. Включение резерва замещением обладает следующими преимуществами:

- не нарушает режим работы резерва;
- сохраняет в большей степени надежность резервных элементов, т.к. при работе основных элементов они находятся в нерабочем состоянии;
- позволяет использовать резервный элемент на несколько основных элементов

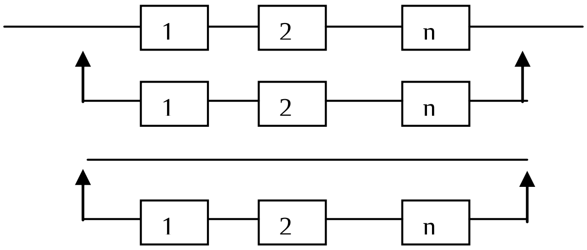



Рисунок 6.3. Общее резервирование с включением резерва замещением

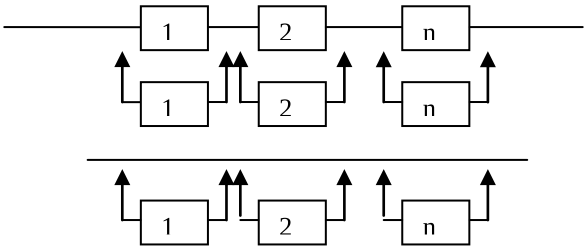



Рисунок 6.4. Раздельное резервирование с включением резерва замещением

Существенным недостатком резервирования замещением является необходимость наличия переключающих устройств. При раздельном резервировании число переключающих устройств равно числу основных элементов, что может сильно понизить надежность всей системы. Поэтому резервировать замещением выгодно крупные узлы или всю систему. При этом важным вопросом является надежность самих переключающих устройств.

*Скользящее резервирование* - это резервирование замещением , при котором группа основных элементов объекта резервируется одним или несколькими резервными элементами, каждый из которых может заменить любой отказавший основной элемент в данной группе. ( рис. 6.5.).

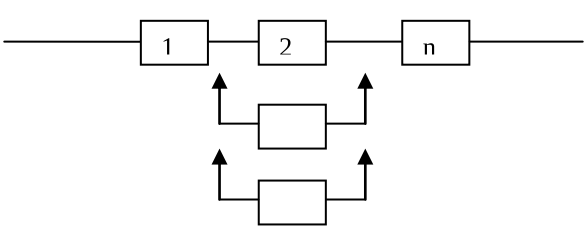


Рисунок 6.5. Раздельное резервирование с включением резерва замещением

*Мажоритарное резервирование* – это резервирование основано на применении дополнительного элемента, называемого мажоритарным, или логическим. Данный вид резервирования нашел применение в системах управления. Логический элемент позволяет вести сравнение сигналов, поступающих от элементов, выполняющих одну и ту же функцию. Если результаты совпадают, то они передаются на выход устройства.

Одним из видов мажоритарного резервирования является резервирование «m» из «n» (рис. 6.6.). Для данного вида резерва характерно, что объект будет выполнять свою функцию при m работоспособных элементов из n существующих. Если количество работоспособных элементов будет меньше m ( например m-1), то объект не будет выполнять свою функцию.

Например, в гидросистеме необходимое давление создается при работе 2-х насосов. Если в работе останется один исправно работающий насос давление упадет до критического и гидросистема не выполнит свою функцию ( не будет необходимого давления).

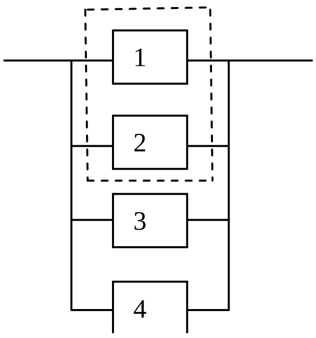



Рисунок 6.6. Можаритарное резервирование «m» из «n»

## 2. Расчет надежности при общем и раздельном резервировании.

### 2.1. Постоянное общее резервирование

Будем считать, что резервируемые и резервные элементы равнонадежны,

т. е. $p_i$ (t)= p(t) и $q_i(t) = q(t)$ .

С учетом схемы замещения (рис. 6.7) и формулы $Q_c(t) = [Q(t)]^m$ вероятность отказа системы с *m* резервными цепями можно рассчитать следующим образом:

$$Q_C(t) = Q_O(t)\prod_{i=1}^{m} Q_{Pi}(t) = \prod_{i=1}^{m+1} Q_i(t) \qquad (6.1)$$

где $Q_O(t)$ - вероятность отказа основной цепи,

$Q_{Pi}(t)$ - вероятность отказа i –й резервной цепи.

Соответственно вероятность безотказной работы системы :

$$P_C = 1 - \prod_{i=1}^{m+1} Q_i(t) \qquad (6.2)$$

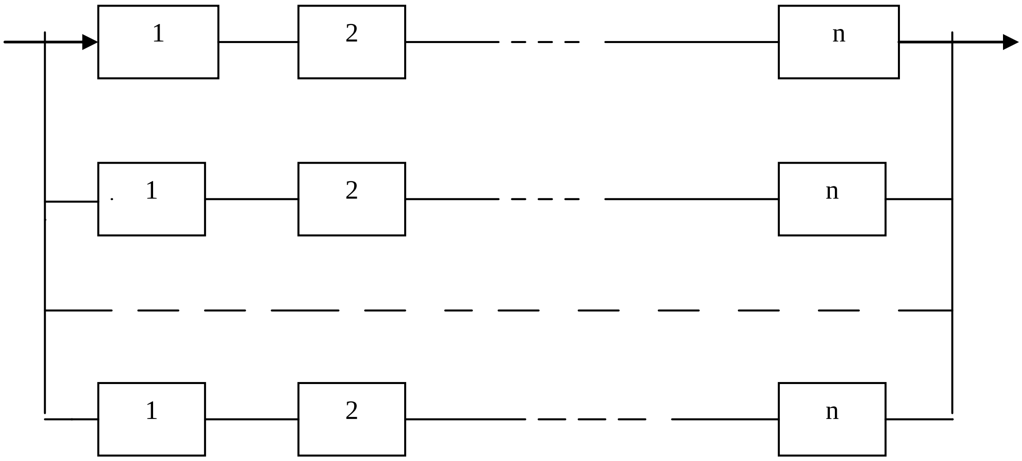



Рисунок 6.7

Т.к. вероятность последовательной структуры

$$Q(t) = 1 - P_{посл}(t) = 1 - \prod^{n} P_i$$

то $$Q_i = 1 - \prod^{n} \left[1 - q_i(t)\right] \qquad (6.3)$$

При одинаковых вероятностях отказов основной и резервной цепей, формулы (6.1) и (6.2) принимают вид:

$$Q_C = \left[Q(t)\right]^{m+1} \qquad (6.4)$$

$$P_C(t) = 1 - \left[Q\{t\}\right]^{m+1} \qquad (6.5)$$

Среднее время безотказной работы системы при общем резервировании

$$T_C = \frac{1}{\lambda} \qquad (6.6)$$

где $\lambda_C = \sum^{n} \lambda_i$ - интенсивность отказов системы, $\lambda_i$- интенсивность отказов i-го элемента.

Для системы из двух параллельных цепей ( m=1) формула (6.6) приобретает вид

$$T_C = 3/2\lambda$$

**2.2. Постоянное раздельное резервирование**

Изобразим схему замещения при постоянном раздельном резервировании (рис. 6.8).

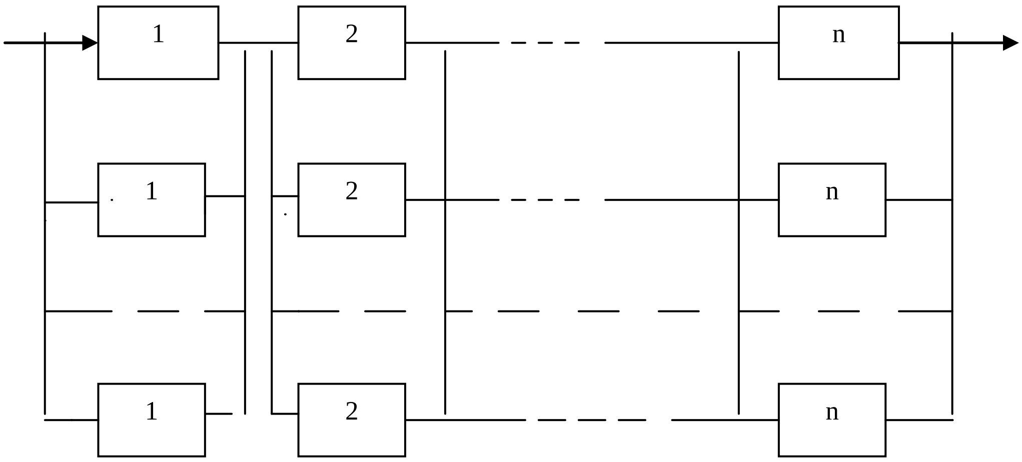



Рисунок 6.8

Вероятность того, что произойдет отказ элементов i -го типа, равна произведению вероятностей отказов i-*го* элемента и всех элементов, его резервирующих, т. е.

$$Q_i(t) = \prod^{m+1} q_i(t) = \prod^{m+1} \left[1 + p_i(t)\right] \qquad (6.7)$$

Вероятность безотказной работы i-го и всех резервирующих его элементов

$$P_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m+1} \left[1 - p_i\ (t)\right] \qquad (6.8)$$

Если резервные и резервируемые элементы равнонадежны, то

$$P_i(t) = 1 - \left[1 - p_i(t)\right]^{m+1} \qquad (6.9)$$

Поскольку функциональные группы элементов соединены последовательно, то вероятность безотказной работы в целом равна произведению ве- роятностей безотказной работы функциональных групп, т. е.

$$P_C(t) = \prod^{n} P_i(t) = \prod^{n} \left\{1 - \left[1 - p_i(t)\right]^{m+1}\right\} \qquad (6.10)$$

Если все элементы равнонадежны, то

$$P_c(t) = \left\{1 - \left[1 - p_i(t)\right]^{m+1}\right\}^n \qquad (6.11)$$

3. **Расчет надежности при резервировании систем с дробной кратностью**.

При резервировании с дробной кратностью нормальная работа резервированного соединения возможна при условии, если число исправных элементов не меньше необходимого для нормальной работы.

Кратность резервирования определяется из соотношения

$$K = (Z - N)/N \tag{6.12}$$

Где Z – общее число элементов расчета резервированного соединения;
N- число элементов, необходимое для нормальной работы соединения;

Z – N=M - число резервных элементов.

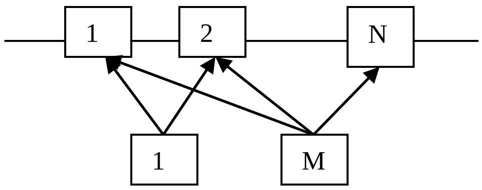



Рисунок 6.9. Резервирование с дробной

На рисунке 6.9 представлена система резервирования с дробной кратностью, состоящая из N основных и M резервных элементов.

В случае общего резервирования кратность резервирования всегда равна числу резервных устройств.

Кратность резервирования всегда записывают в виде простой дроби без сокращения.

Например, если записано K = 2/4 , то это означает, что здесь имеет место резервирование с дробной кратностью, причем для нормальной работы соединения необходимо не менее двух элементов, при этом число резервных элементов равно четырем.

Пусть резервированная система состоит из N основных и M резервных элементов (N>M). При отказе одного из основных элементов на его место без перерыва в работе включается один из резервных.

Средняя наработка до отказа такой резервированной системы при равнонадежных элементах равна:

$$T_{CPc} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+M}\right)$$

Безотказная работа системы в течении времени t будет иметь место, если за это время осуществится хотя бы одна гипотеза: H0 – все элементы исправны; H1– один элемент отказал, (M + N -1) элементов исправны; (Hi – i) элементов отказали; ( M + N – i) элементов исправны; (Hk – M) элементов отказали, N элементов исправны.

Число различных состояний системы можно описать выражением:

$$C_{N+M}^{i} = \frac{(N+M)!}{i!(M+N-i)!} \tag{6.13}$$

Вероятность безотказной работы системы с резервированием с дробной кратностью может быть определена выражением

$$\mathrm{P_c}\ (t) = \sum_{i=0}^{K} C_{N+K}^{i}\ [1 - P(t)]^{i}[P(t)]^{N+K-1} \tag{6.14}$$

**4. Логико – вероятностный метод расчета надежности.**

Существо логико-вероятностных методов расчета надежности состоит в описании схемы системы с помощью аппарата математической логики с последующим использованием теории вероятности при определении характеристик надежности.

В основе расчетов систем на надежность лежат операции с событиями и высказываниями на базе математической логики (алгебры высказываний). Объектом исследований алгебры высказываний являются высказывания, о которых можно утверждать, что они либо истины, либо ложны. Высказывания могут быть простыми и сложными. Сложное высказывание – это высказывание, состоящее из простых, соединенных между собой логическими операциями. Каждая из логических операций устанавливает вполне определенную связь между истинностью ложного высказывания и истинностью простых высказываний.

Истинность высказываний обозначается единицей (1), ложность – нулем (0). Например: 1 – элемент работоспособен; 0 – неработоспособен. Наиболее распространенные логические операции для двух простых высказываний **a** и **b** представлены в таблице 1.

Таблица 6.1 – Основные логические операции

| Наименование операции | Результат функции a/b | | | | Обозначение операции |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0/0 | 0/1 | 1/0 | 1/1 | |
| Конъюнкция (логическое умножение) | 0 | 0 | 0 | 1 | $a \wedge b\,(a \cdot b)$ |
| Дизъюнкция (логическое сложение) | 0 | 1 | 1 | 1 | $a \vee b$ |
| Суммирование по модулю | 0 | 1 | 1 | 0 | $a \oplus b$ |
| Эквивалентность | 1 | 0 | 0 | 1 | $a \sim b$ |
| Отрицание | 1 | 0 | 1 | 0 | $\bar{b}$ |
| Импликация от b к a | 0 | 0 | 1 | 1 | $b \rightarrow a$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Отрицание конъюнкции | 1 | 1 | 1 | 0 | $^{a}\!/_{b}$ |
| Отрицание дизъюнкции | 1 | 0 | 0 | 0 | $a \downarrow b$ |

Для приведения сложных высказываний к минимальной бесповторной форме используют правила преобразования:

1. $a \vee b = b \vee a$
2. $a \cdot b = b \cdot a$
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
4. $a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (b \vee c)$
5. $a \cdot (b \vee c) = ab \vee bc$
6. $a \vee a = 1;\ a \vee 0 = 0$
7. $a \cdot 1 = a;\ a \vee 1 = 1$
8. $a \vee \bar{a} = 0$
9. $a \vee \bar{a}b = a \vee b$
10. $a \vee \bar{a} = a$
11. $a \cdot a = a$
12. $\bar{a} \vee \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
13. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
14. $a \cdot b \vee a \cdot \bar{b} = a$
15. $a \cdot (a \vee b) = a$

Логическое уравнение, содержащее операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания можно привести к арифметическому виду, если заменить логические операции на арифметические по следующему правилу:

Для определения вероятностей сложных высказываний необходимо логическую операцию сложного высказывания привести к минимальной бесповторной форме, арифметизировать ее и затем заменить высказывания на их вероятности.

Например:

$$\left.\begin{array}{l} a \vee b = a + b - a \cdot b \\ a \wedge b = a \cdot b \\ \bar{a} = 1 - a \end{array}\right\}$$

Любую сложную систему можно свести к рассмотрению простых параллельно-последовательных структур с применением логико-вероятностных методов

Рассмотрим схему представленную на рисунке 6.10

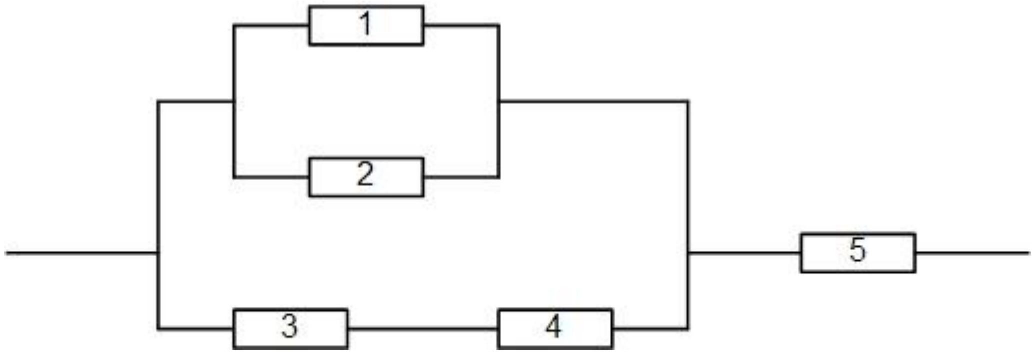


Рисунок 6.10

I. При параллельном соединении элементов:

Условие работоспособности: устройство работоспособно, если работоспособны элементы **a** или **b** или **a** и **b**. Этому условию соответствует логическая функция, в которой **a**, **b** – события, состоящие в том, что элементы **a**, **b** находятся в работоспособном состоянии

$$F_Л = a \vee b \vee ab \quad (6.15)$$

Для трех параллельных элементов:

$$F_Л = a \vee b \vee c \vee ab \vee bc \vee ac \vee abc \quad (6.16)$$

Функцию алгебры логики (ФАЛ), связывающую состояния элементов с состоянием системы называют функцией работоспособности системы.

Для оценки работоспособных состояний системы используют два понятия:

1. Кротчайший путь успешного функционирования, который представляет собой такую конъюнкцию элементов, ни один из компонентов которой нельзя изъять, не нарушив условие функционирования системы;

2. Минимальное сочетание отказов – конъюнкция из отрицаний элементов, ни один из компонентов которой нельзя изъять, не нарушив условие неработоспособности системы.

Таким образом, условия работоспособности системы можно записать в виде дизъюнкции всех кратчайших путей успешного функционирования – дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), либо в виде конъюнкции отрицаний всех минимальных сочетаний отказов – конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

После составления функции работоспособности необходимо перейти к вероятной форме и определить характеристики надежности.

Минимизируем выражение (6.16):

$$F_Л = a \vee b \vee ab = a(1 \vee b) \vee b = a \vee b \qquad (6.17)$$

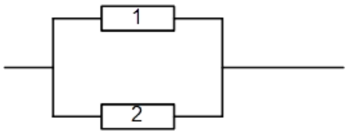
Арифметизируем его:

$$F_Л = a + b - ab \qquad (6.18)$$

Заменим события их вероятностями:

$$P_C = P_a + P_b - P_a P_b = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \qquad (6.19)$$

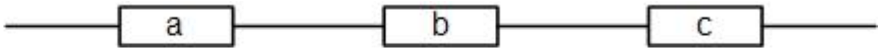
Проверка:




$$\begin{aligned} P_C &= 1 - Q_C = 1 - [(1 - P_1)(1 - P_2)] = 1 - [1 - P_2 - P_1 + P_1 P_2] = \\ &= 1 - 1 + P_1 + P_2 - P_1 P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_1 \end{aligned} \qquad (6.20)$$

II. При последовательном соединении элементов

Пусть система состоит из трех последовательно соединенных элементов **a**, **b**, **c**.




Отказ системы происходит при отказе любого из элементов.

Условие работоспособности: если работоспособны все элементы **a**, **b**, **c**.

Этому условию соответствует логическая функция:

$$F_Л = abc$$

Ее арифметическое представление:

$$F_Л = a \cdot b \cdot c$$

Вероятность безотказной работы:

$$P_C = P_a \cdot P_b \cdot P_c$$

Для нашей схемы:

$$P_Б = P_3 \cdot P_4$$

$$P_А = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

$$F_Л = А \vee Б \vee АБ = А(1 \vee Б) \vee Б = А \vee Б$$

$$F_Л = А + Б - АБ$$

$$P_В = P_А + P_Б - P_А P_Б$$

$$P_С = P_Б P_5 = \{P_1 + P_2 - P_1 P_2 + P_3 P_4 - [(P_1 + P_2 - P_1 P_2) P_3 P_4]\} P_5$$

*Последовательность логико-вероятностного метода расчета:*

1. Словесная формулировка условий работоспособности системы;
2. Составление логической функции работоспособности $F_Л$;
3. Минимизация $F_Л$ и приведение к бесповторной форме;
4. Арифметизирование $F_Л$;
5. Замена событий на их вероятности;
6. Расчет надежности – характеристик $P_С$, $\delta_С$, $\lambda$, $T_С$;
7. Анализ полученных результатов.