

Содержание курса лекций «Основы гидравлики»

Лекция 1. Введение в предмет «Основы гидравлики». Основные свойства жидкостей и газов

1.1 Предмет гидравлики

Гидравлика – наука о движении и покое воды и других жидкостей. Жидкостью в гидравлике представляют как сплошную среду, легко изменяющую форму под действием внешних сил. **Сплошная среда** – это масса, физические и механические параметры которой являются функциями координат в выбранной системе отсчета. Молекулярное строение жидкостей заменяется сплошной средой той же массы.

В данном курсе гидравлики мы считаем, что жидкость имеет одинаковые свойства по всем направлениям, то есть является **изотропной**. Законы движения и покоя жидкостей основываются на законах механики сплошной среды и физики.

Вместе с тем, можно сказать, что явления, изучаемые в гидравлике сложнее явлений, которые являются объектом исследования в механике твердого тела, т.к. жидкости легко изменяют свою форму под действием небольших внешних сил, сжимаемые жидкости (газы) изменяют и свой объем. Эти свойства связаны с молекулярной структурой строения жидкости. Из-за того, что движение жидкости очень часто не удается точно математически описать, в гидравлике приходится использовать упрощенные математические модели, которые затем уточняются и дополняются в ходе экспериментального исследования.

Знание законов гидравлики необходимо для решения практических задач теплогазоснабжения: расчета систем водоснабжения, тепловых сетей, теплообменных аппаратов, насосов и т.д.

1.2 История предмета

250 лет до н.э. **Архимед** установил принципы гидростатики.

XV в. – **Леонардо да Винчи** положил начало экспериментальной гидравлике (движение воды в каналах, через отверстия).

XVII в. – **Торичелли** предложил формулу для определения скорости жидкости, вытекающей из отверстия.

Ньютон высказал основные положения о внутреннем трении в движущихся жидкостях и газах.

XVIII в. – **Даниил Бернулли** и **Леонард Эйлер** разработали общие уравнения движения идеальной жидкости (газа).

XIX в. – **Шези, Дарси, Базен, Вейсбах** начали опытное изучение движения воды в различных частных случаях и получили множество эмпирических формул. Полученные выводы расходились с теоретическими выводами, полученными ранее.

В конце XIX в. – **Петров** исследовал трение при ламинарном режиме.

Рейнольдс изучил переход от ламинарного режима к турбулентному, начал изучать гидравлические сопротивления.

XX в. – **Жуковский** и **Прандтль** положили начало изучению турбулентных потоков, неустановившегося движения жидкости.

В связи с развитием авиации, космонавтики, теплоэнергетики, машиностроения, автомобилестроения происходит бурное развитие науки как экспериментальное (лазеры, датчики), так и теоретическое (использование современного математического аппарата, ЭВМ).

1.3 Капельные и некапельные жидкости

В гидравлике, в основном, считается, что жидкость практически не изменяет свой объем под действием внешних сил, т.е. является

несжимаемой. К несжимаемым жидкостям относятся все капельные жидкости: вода, нефть, мазут. В отличие от капельных жидкостей, газы (воздух, пропан, бутан и т.д.) легко изменяют объем под действием внешних сил, сжимаются, поэтому их называют **сжимаемыми**. Любая капельная жидкость может переходить в газообразное состояние при определенной температуре и давлении. Соответственно, газы при понижении температуры и повышении давления могут переходить в жидкое состояние.

1.4 Силы, действующие в жидкости

На произвольно выделенный объем жидкости действуют два вида сил:

Поверхностные:

P – сила давления

T – сила трения

Массовые:

G – сила тяжести

I – сила инерции

Массовые силы действуют по всему выделенному объему и пропорциональны его массе $G = mg$, $I = -ma$. Поверхностные силы действуют по поверхности и пропорциональны площади поверхности.

Рассмотрим подробно поверхностные силы. Под влиянием внешних сил, действующих на выделенный объем возникают соответствующие внутренние силы. Проведем внутри объема поверхность S , разделяющую его на две части I и II (см. рис. 1.1). Отбросим часть II и для сохранения равновесия введем силы такие же, как и силы с которыми часть II действовала на часть I. На элементарную площадку Δs разделяющей поверхности действует сила Δf . Площадь Δs может быть стянута в точку M с координатами x, y, z . В этом случае площадь поверхности Δs , так и сила Δf

стремится к нулю. Отношение силы df к площади поверхности ds стремится к пределу $\sigma = \frac{df}{ds}$, который называют напряжением.

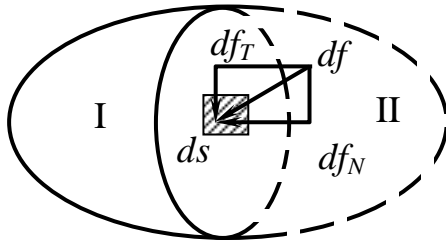


Рис. 1.1. Напряжение в жидкости

Силу df , действующую на площадь ds можно разложить на две составляющие: **тангенциальную** и **нормальную**. Соответственно, напряжение в жидкости может быть тангенциальным (τ) и нормальным (p). Тангенциальное напряжение, действующее вдоль поверхности ds , называют **напряжением трения**.

$$\tau = \frac{df_T}{ds}, \quad (1.1)$$

где df_T – сила трения площади ds .

Нормальное напряжение, действующее по нормали к поверхности ds , называют напряжением давления или **давлением**

$$p = \frac{df_N}{ds}, \quad (1.2)$$

где df_N – сила давления площади ds .

Для площади S можно записать

$$\tau = \frac{T}{S}, \quad (1.3)$$

где T – сила трения площади S .

$$p = \frac{P}{S}, \quad (1.4)$$

где P – сила давления площади S .

В покоящейся жидкости имеется только нормальное напряжение, тангенциальное напряжение отсутствует.

Сила трения действует вдоль поверхности:

$$T = \tau S. \quad (1.5)$$

Сила давления направлена по нормали к поверхности:

$$P = pS. \quad (1.6)$$

1.5 Давление и его свойства

В любой точке жидкости имеется давление и его можно измерить, опустив в жидкость стеклянную трубочку с запаянным концом из которой выкачен воздух. Рассмотрим точку M в жидкости, проведем через эту точку поверхность ds (рис. 1.2). Результирующая сила воздействия всех молекул, находящихся в постоянном движении, на эту поверхность перпендикулярна ds . Можно записать в векторной форме $d\vec{f}_N = pds\vec{n}$, где \vec{n} – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности ds .

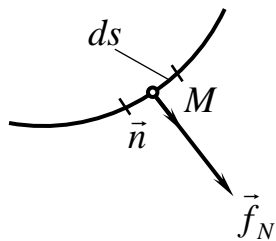


Рис. 1.2. Давление в точке

$d\vec{f}_N$ зависит от величины поверхности ds , но из формулы видно, что давление в точке не зависит от ds .

Свойства давления:

1. Давление в точке в любом направлении одинаково и не зависит от ориентации ds . Через точку M можно провести бесконечное множество поверхностей и сила $d\vec{f}_N$ будет зависеть только от величины ds .

2. Гидростатическое давление является непрерывной функцией координат пространства

$$p = f(x, y, z). \quad (1.7)$$

Понятие о градиенте давления. Рассмотрим точку M , имеющую координаты (x, y, z) и находящуюся в жидкости (рис. 1.3). Давление в точке $M - p_M$. Это давление зависит только от координат точки M . Можно записать $p_M = p(x, y, z)$.

На небольшом расстоянии от точки M находится точка M_1 с координатами $(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Давление в M_1 отличается от давления p_M на некоторую величину dp :

$$p_{M_1} = p_M + dp.$$

Давление p_{M_1} зависит от координат точки M_1 :

$$p_{M_1} = p(x + dx, y + dy, z + dz).$$

Тогда $dp = p(x + dx, y + dy, z + dz) - p(x, y, z)$.

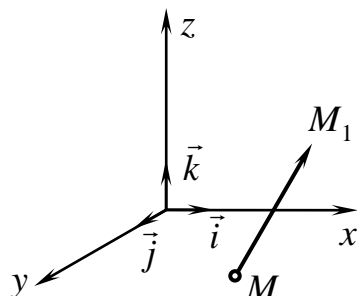


Рис. 1.3. Градиент давления

Т.к. p является функцией координат x , y , z , то величину dp можно записать в дифференциальной форме

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Вектор перемещения от точки M к точке M_1 записывается в форме

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные векторы, направленные вдоль осей координат.

Определение: В физике для обозначения изменения некоторой скалярной величины G (температуры, давления) от одной точки к другой используется понятие вектора

$$\overrightarrow{grad}G = \frac{\partial G}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{k} \quad (1.8)$$

Значит, вектор градиента давления величин

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Можно записать в виде

$$\overrightarrow{grad p} = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \quad (1.9)$$

Произведение двух векторов

$$\overrightarrow{grad p} \overrightarrow{MM_1} = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (1.10)$$

или

$$dp = \overrightarrow{grad p} \overrightarrow{MM_1}.$$

Вывод: изменение давления dp является скалярным произведением двух векторов $grad p$ и MM_1 .

Свойства вектора $\overrightarrow{grad p}$

1. Если точки M и M_1 принадлежат поверхности в которой все точки испытывают одинаковые давление, то можно записать

$$p_M = p_{M_1},$$

тогда $dp = 0$.

Вывод: $\overrightarrow{grad p}$ расположен по нормали к поверхности равного давления, проходящей через точку M .

2. Предположим, что M_1 расположена по нормали к поверхности равного давления, проходящей через точку M , тогда $dp > 0$. Значит скалярное произведение $\overrightarrow{grad p} MM_1$ имеет положительное значение и $\overrightarrow{grad p}$ имеет то же направление, что и MM_1 .

Вывод: $\overrightarrow{grad p}$ направлен в сторону увеличения давления.

$$3. \quad \overrightarrow{grad p} = \frac{dp}{MM_1}.$$

Вывод: величина $\overrightarrow{grad p}$ определяется отношением разности давлений в двух точках к расстоянию между этими точками.

Единицы давления.

При измерении атмосферного давления используют единицу давления – бар

- $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$

При измерении при помощи пьезометрических трубок используют единицы длины

- для воды $1 \text{ мм.в.ст} = 9,8 \text{ Па}$
- тогда $1 \text{ бар} = 9,8 \text{ м.в.ст}$
- для ртути $1 \text{ мм.рт.ст} = 133,3 \text{ Па}$

$$\text{Можно подсчитать, что: } 1 \text{ бар} = \frac{9810}{133,3} \text{ мм.рт.ст.}$$

Старая система измерения. Давление, создаваемое телом массой 1 кг

$$\text{на } 1 \text{ см}^2: 1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 0,98 \text{ бар}.$$

1.6 Основные физические свойства жидкостей

Плотность – масса жидкости m , заключенная в единице объема V

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.11)$$

Плотность меняется при изменении температуры и давления.

Удельный вес – вес жидкости G в единице объема V

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad (1.12)$$

Плотность и удельный вес связаны между собой соотношением

$$\gamma = g\rho \quad (1.13)$$

Сжимаемость – свойство жидкостей изменять объем при изменении давления. Сжимаемость капельных жидкостей характеризуется **коэффициентом объемного сжатия**, который представляет собой относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления

$$\beta_v = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (1.14)$$

где V – первоначальный объем жидкости;

Знак «минус» в формуле обусловлен тем, что положительному приращению давления p соответствует отрицательное приращение (уменьшение) объема.

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия называется **модулем упругости**

$$E_0 = \frac{1}{\beta_v} \quad (1.15)$$

В качестве примера, приведем значения модуля упругости стали и воды: $E_{\text{воды}} = 2 \times 10^9 \text{ Па}$, $E_{\text{стали}} = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$. Таким образом, мы видим, что упругость воды всего только в 100 раз меньше упругости стали, значит, воду можно рассматривать как несжимаемое вещество.

Коэффициент объемного сжатия и модуль упругости капельных жидкостей практически не изменяется при изменении давления, и на практике очень часто их считают неизменными. Част при расчетах коэффициент объемного сжатия β_v воды принимают постоянным и равным $0,49 \times 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$.

Сжимаемость характеризуется также отношением изменения давления к изменению плотности, равным квадрату скорости распространения звука в среде:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (1.16)$$

Очевидно, для малосжимаемой среды при больших изменениях давления изменение плотности незначительно и скорость звука получается большой, и наоборот, при большой сжимаемости скорость звука оказывается малой (для воздуха – 330 м/с).

Для оценки сжимаемости среды при ее движении важно не абсолютное значение скорости звука a , а относительное, которое называется числом Маха:

$$\text{Ma} = u/a.$$

Если скорость движения воздуха мала по сравнению со скоростью движения звука в ней, число Маха мало по сравнению с единицей и движущуюся среду можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Скорость воздуха в воздуховодах, газа в газопроводах низкого давления и

газоходах котельных установок не превышает 12 м/с. Следовательно, в практике теплоснабжения и вентиляции газ(воздух) можно рассматривать как несжимаемую жидкость. При движении газов со скоростью более 70 м/с влияние сжимаемости следует учитывать.

В отличие от капельных жидкостей газы характеризуются значительной сжимаемостью и высокими значениями коэффициента температурного расширения. Зависимость плотности газов от давления и температуры устанавливается *уравнением состояния*. Для совершенных газов (нет взаимодействия между молекулами) справедливо уравнение Клапейрона, позволяющее определить плотность газа при известных давлении и температуре

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (1.17)$$

где p – абсолютное давление; R – удельная газовая постоянная (для воздуха $R = 283$ Дж/кг·К); T – абсолютная температура.

В технических расчетах плотность газа, приводят к нормальным физическим условиям ($t = 0^\circ\text{C}$; $p = 101325$ Па) или стандартным условиям ($t = 20^\circ\text{C}$; $p = 101325$ Па)

Можно подсчитать, что в стандартных условиях плотность воздуха $\rho = 1,21$ кг/м³.

При других условиях плотность воздуха можно определить по формуле

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}, \quad (1.18)$$

где ρ_0 , T_0 и p_0 – плотность, температура и давление при известных стандартных условиях соответственно.

Сжимаемость газа зависит от характера процесса изменения состояния. Для изотермического процесса сжимаемость воздуха составляет примерно $9,8 \times 10^4$ Па, что превышает в 20000 раз сжимаемость воды.

Температурное расширение – увеличение объема капельных жидкостей, при увеличении температуры, характеризуется **коэффициентом температурного расширения** β_t , выражающим относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на 1 град.

$$\beta_t = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (1.19)$$

где ΔV – изменение объема при повышении температуры на величину Δt .

Если считать, что плотность не меняется при изменении давления, а только от температуры, то для расчета изменения плотности капельных жидкостей с изменением температуры можно использовать формулу

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_t(t - t_0)}, \quad (1.20)$$

где ρ_0 – плотность при известной температуре t_0 .

Поверхностное натяжение. Капиллярные явления.

Молекулы жидкости, находящиеся у поверхности контакта с другой жидкостью, газом или твердым телом имеют другую энергию, чем молекулы, находящиеся внутри объема жидкости. Эта энергия пропорциональна площади поверхности раздела S и характеризуется величиной **коэффициента поверхностного натяжения** σ , который зависит от материала соприкасающихся сред, чистоты поверхности и температуры.

На поверхности раздела трех фаз (рис. 1.4): твердой стенки, жидкости и газа образуется **краевой угол** θ . Величина угла зависит только от природы соприкасающихся сред, и не зависит от формы сосуда и силы тяжести. Чем хуже смачивающая способность, тем больше краевой угол. От явления смачивания зависит поведение жидкости в тонких (капиллярных) трубках, погруженных в жидкость. При плохом смачивании жидкость в трубке поднимается над уровнем свободной поверхности, при хорошем – опускается.

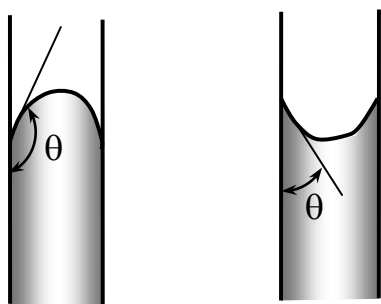


Рис. 1.4. Капиллярные явления

Влияние сил поверхностного натяжения приходится учитывать при работе с жидкостными приборами для измерения давления, при истечении жидкости из малых отверстий, при фильтрации, в других случаях, когда силы, действующие в жидкости меньше сил капиллярного натяжения.

Пенообразование. Для пенообразования необходимо, чтобы в жидкости находились смачивающие вещества, которые уменьшают поверхностное натяжение. Смачивающие вещества состоят из двух групп: гидрофильной и гидрофобной. Они создают пену, которая представляет множество пузырьков воздуха. Пенообразующие добавки используются при изготовлении ячеистого бетона.

Растворимость газов в жидкостях – способность жидкостей растворять в своем объеме газы. Количество растворенного газа в единице объема жидкости различно для разных жидкостей и изменяется с изменением

давления. Относительный объем газа, растворимого в жидкости до ее полного насыщения прямо пропорционален давлению:

$$\frac{V_{\text{г}}}{V_{\text{ж}}} = \kappa \frac{p_2}{p_1}, \quad (1.21)$$

где $V_{\text{г}}$ – объем растворенного газа при нормальных условиях; $V_{\text{ж}}$ – объем жидкости; κ – коэффициент растворимости; p_1 и p_2 – начальное и конечное давление.

При понижении давления в жидкости происходит выделение растворенного в ней газа. Выделение происходит интенсивнее, чем поглощение. Растворимость необходимо учитывать при расчете работы машин и систем высокого давления, при расчете кавитации.

Давление насыщенного пара. При определенных условиях капельные жидкости превращаются в пар и наоборот. Изменение агрегатного состояния зависит от давления паров жидкости, насыщающих пространство над ней при данной температуре. Интенсивное выделение пара по всему объему жидкости называется **кипением**. Температура кипения зависит от давления на поверхности жидкости.

Таким образом, интенсивное выделение пара (кипение) может происходить при низких температурах, если давление на поверхности пониженное. Это необходимо учитывать при анализе работы водопроводных систем на участках пониженного давления.

Таблица 1.1

Температура кипения воды, °С	10	40	80	100
Давление на поверхности, Па	1175	7350	19800	101325

1.7 Вязкость. Идеальная жидкость

Вязкость – свойство жидкостей оказывать сопротивление сдвигу соседних слоев при движении жидкости. Все реальные жидкости обладают вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при относительном перемещении смежных частей жидкости. Свойство, обратное вязкости – **текучесть**. Текучесть характеризует степень подвижности частиц жидкости. На рис. 1.5 представлена эпюра скорости вязкой жидкости, движущейся в цилиндрической трубе. Вследствие тормозящего влияния стенки слои жидкости будут двигаться с разными скоростями, значения которых возрастают по мере отдаления от стенки. Рассмотрим два слоя жидкости, движущиеся на расстоянии Δy друг от друга. Слой *A* движется со скоростью u , а слой *B* со скоростью $u + \Delta u$. Вследствие разности скоростей слой *B* сдвигается относительно слоя *A* на величину Δu , которая является

абсолютным сдвигом слоя *A* по слою *B*, а $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ – относительный сдвиг или градиент скорости. Если расстояние между слоями будет мало, то градиент скорости можно записать как $\frac{du}{dy}$. Можно также сказать, что градиент скорости показывает интенсивность изменения скорости в данном сечении. В результате сдвига соседних слоев появляется **касательное напряжение трения**.

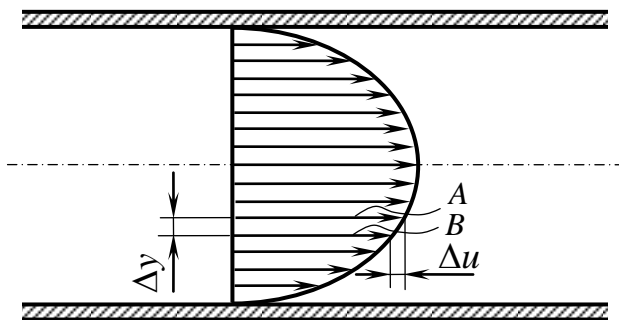


Рис.1.5. Распределение скоростей в сечении трубы при ламинарном движении

Согласно *гипотезе Ньютона*, касательное напряжение, возникающее при движении жидкости пропорционально скорости деформации объема жидкости

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (1.22)$$

где μ – коэффициент пропорциональности или **динамический коэффициент вязкости**.

Единица измерения динамического коэффициента вязкости – Пуаз (П):

$$1\text{П} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 0,0102 \frac{\text{кгс} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

Вязкость капельных жидкостей с увеличением температуры уменьшается, а газов увеличивается. Это связано с различным молекулярным строением жидкостей и газов. Для определения вязкости при различных температурах используются эмпирические формулы, значения вязкости для различных жидкостей приводятся в справочниках. Например, вязкость воды при температуре 20 °С равна 0,01 П.

Наряду с понятием динамической вязкости в гидравлике применяется **кинематическая вязкость** ν , которая представляет собой отношение динамической вязкости жидкости к ее плотности

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.23)$$

Единицы измерения – Стокс (Ст): $1 \text{ Ст} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$

Для определения кинематической вязкости при различных температурах также используются эмпирические формулы, и ее значения для

различных жидкостей приводятся в справочниках. Кинематическая вязкость воды при температуре 20°C равняется $0,01 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$.

Вязкость капельных жидкостей мало зависит от давления в диапазоне до 200 атм. Кинематическая вязкость воздуха (газов) зависит и от давления, и от температуры. Для нормальных условий ($t = 20^\circ\text{C}$, $p = 100000 \text{ Па}$) $\nu_{\text{воздуха}} = 0,157 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$, т.е. почти в 15 раз больше воды, что связано с меньшей плотностью воздуха.

Измерение вязкости проводится при помощи специальных приборов, называемых **вискозиметрами**. Измерение вязкости вискозиметром Энглера студенты выполняют во время лабораторных работ.

Идеальная жидкость – жидкость, в которой отсутствует вязкость. Представляет собой модель реальной жидкости, и это понятие используется для облегчения решения некоторых задач гидравлики. Выводы, полученные исходя из свойств невязкой жидкости, приходится корректировать, вводя поправочные коэффициенты, получаемые в результате экспериментальных исследований.

Практическое применение теоретических знаний

Пример 1-1

Давление в баллоне с кислородом для газовой сварки, расположенного на улице при температуре $T_1 = -10^\circ\text{C}$, равно $p_1 = 10^7 \text{ Па}$. Каково будет давление при внесении его в помещение при температуре $T_2 = -20^\circ\text{C}$?

Ответ: Давление в баллоне будет равно $1,11 \cdot 10^7 \text{ Па}$.

Пример 1-2

Насколько увеличится давление в системе водяного отопления, если температура теплоносителя увеличилась с 60 до 80 °C. Коэффициент температурного расширения, при давлении $5,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре 70 °C, можно принять равным 0,00056 (1/град).

Ответ: Давление в системе водяного отопления увеличится на 225 атмосфер.

Лекция 2. Основы гидростатики, динамики и кинематики жидкости

2.1 Тема 1. Равновесие жидкости

2.1.1 Дифференциальное уравнение равновесия жидкости. Поверхность равного давления

Предположим, что в точке M находится объем жидкости dV (см. рис. 2.9). На него действуют силы давления соседних объемов. Определим результирующую силу давления на объем dV . dV расположен параллельно осям координат, da , db , dc – его стороны. В точке M давление обозначим как p . В точках M_1 и M_2 , принадлежащих сторонам параллельным плоскости xOy давление будет соответственно p_1 и p_2 . Если рассматривать одну из сторон параллелепипеда, то результирующая сила давления на эту сторону действует по нормали к ней и ориентирована внутрь объема dV .

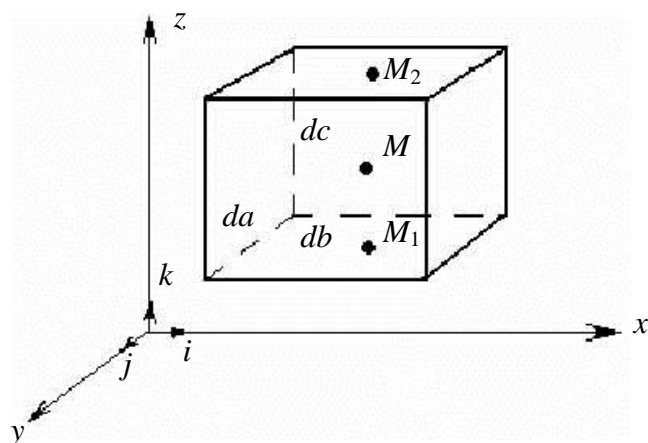


Рис. 2.9. Объем жидкости, находящийся в равновесии

Для результирующей силы сторон объема dV , параллельных плоскости xOy можно записать

$$\overrightarrow{dF_z k} = p_1 dadb - p_2 dadb \quad \text{или} \quad \overrightarrow{dF_z k} = (p_1 - p_2) dadb,$$

$\overrightarrow{dF_z}$ параллельна оси Oz .

Разность $(p_1 - p_2)$ можно записать в виде $p_1 - p_2 = (p_1 - p) - (p_2 - p)$, но в соответствии со свойством градиента давления можно написать

$$(p_1 - p) = \overrightarrow{grad p_M} \overrightarrow{MM_1}, \quad (p_2 - p) = \overrightarrow{grad p_M} \overrightarrow{MM_2},$$

откуда $(p_1 - p_2) = \overrightarrow{grad p_M} (\overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{MM_2})$.

Так как $(\overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{MM_2}) = \overrightarrow{M_2M} + \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_2M_1}$ и $\overrightarrow{M_2M_1} = (-\vec{k})dc$, то

$$(p_1 - p_2) = \overrightarrow{grad p_M} (-\vec{k})dc.$$

Таким образом, результирующая сила $\overrightarrow{dF_z k} = \overrightarrow{grad p_M} (-\vec{k}) dcdadb$, но $dcdadb = dV$, откуда $\overrightarrow{dF_z k} = \overrightarrow{grad p_M} (-\vec{k}) dV$.

Аналогичные результаты мы получим для сил $\overrightarrow{dF_x}$ и $\overrightarrow{dF_y}$.

Результирующая всех сил, действующих на объем dV будет соответственно

$$\overrightarrow{dF k} = -\overrightarrow{grad p_M} dV. \quad (2.1)$$

Выводы:

1. Результирующая сила \overrightarrow{dF} направлена в противоположную сторону, чем $\overrightarrow{grad p_M}$

2. \overrightarrow{dF} перпендикулярна плоскости, проходящей через точку M , на которой давления одинаковы и ориентирована в сторону уменьшения давления.

В жидкости, находящейся в покое, действуют:

$$\text{или } \overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g} \quad (2.2)$$

– сила тяжести

$$dm\vec{g} = \rho dV \vec{g},$$

направленная вертикально вниз;

– равнодействующая сила давления

$$d\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} p dV,$$

$$\rho dV \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p dV = 0$$

Выводы:

1. Вектор градиента давления направлен вертикально вниз, как и вектор \vec{g} .
2. В жидкости, находящейся в равновесии давление увеличивается сверху вниз.
3. В покоящейся жидкости плоскости равного давления горизонтальны.
4. В покоящейся жидкости давление в точке зависит только от ординаты z .

Т.к. $dp = \overrightarrow{\text{grad}} p \overrightarrow{MM_1}$, то с учетом полученного уравнения, можно записать $dp = \rho \vec{g} \overrightarrow{MM_1}$. Т.к. $\vec{g} = -\vec{k}g$ и $\overrightarrow{MM_1} = \vec{k}g$, то

$$dp = -\rho g dz \quad (2.3)$$

Нами получено **основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме.**

2.1.2 Основное уравнение гидростатики

В случае несжимаемой жидкости плотность жидкости не зависит от давления, а если принять температуру постоянной, то можно записать

$$\rho = \text{const.}$$

Для высот в несколько метров ускорение силы тяжести можно считать неизменным. Таким образом, можно подсчитать разность давления между точками M_1 и M_2 . Проинтегрировав предыдущее выражение можно получить разность давлений между двумя точками:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz,$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

$$\text{или } p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = \text{const.} \quad (2.4)$$

Нами получено **основное уравнение гидростатики в поле силы тяжести.**

Если принять $z_1 - z_2 = h$, то $p_2 - p_1 = \rho g h$.

Выводы

1. В покоящейся жидкости давление увеличивается с увеличением глубины.

2. В покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость представляет собой поверхность, на которой в любой точке давление будет неизменным. Такая поверхность называется **поверхностью равного давления.**

Три формы записи основного уравнения гидростатики.

Нами было получено ***основное уравнение гидростатики в форме давлений***, т.к. каждый член уравнения представляет собой давление:

p_1 и p_2 – статическое давление в точках 1 и 2;

$\rho g z_1$ и $\rho g z_2$ – давление, создаваемое силой тяжести.

Если разделим основное уравнение гидростатики в форме давлений на ρg , то получим ***основное уравнение гидростатики в форме напоров*** (см. рис. 2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = const \quad (2.5)$$

где $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$ – пьезометрические напоры; z_1 и z_2 – геометрические напоры.

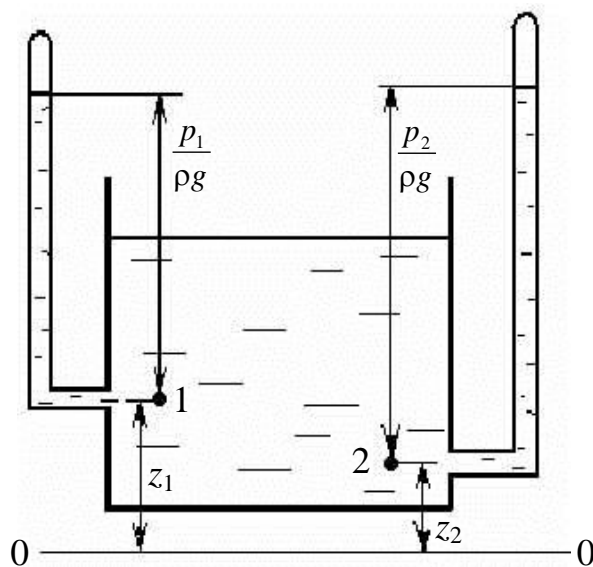


Рис. 2.10. Геометрический и пьезометрический напоры

Если первое уравнение разделить на ρ , то получим ***основное уравнение гидростатики в форме удельной энергии***

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = const, \quad (2.6)$$

где $\frac{p_1}{\rho}$ и $\frac{p_2}{\rho}$ – удельная энергия давления; gz_1 и gz_2 – удельная энергия положения.

2.1.3 Закон Паскаля

Перепишем основное уравнение гидростатики в форме давлений в следующем виде

$$p_1 + \rho gz_1 = p_0 + \rho gz_0 = const, \quad (2.7)$$

где p_0 – давление на свободной поверхности; z_0 – расстояние от свободной поверхности до плоскости сравнения.

Можно записать это уравнение в другом виде

$$\begin{aligned} p_1 = p_0 + \rho gz_0 - \rho gz_1, \quad \text{или} \quad p_1 = p_0 + \rho g(z_0 - z_1), \quad \text{или} \\ p_1 = p_0 + \rho gh, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где h – глубина, на которой находится точка 1.

Из этого уравнения следует, что *изменение давления на свободной поверхности на величину $\pm \Delta p$ приведет к увеличению давления в точке на ту же величину. Этот вывод и есть закон Паскаля.*

Закон Паскаля используется в гидропрессах и гидроусилителях. Схематично гидропресс представлен на рисунке 2.11. При воздействии на

малый поршень площадью $s = \frac{\pi d^2}{4}$ с силой F создается давление $p = \frac{F}{s}$. Согласно закона Паскаля это давление передается во все точки жидкости и поршень площадью S создает усилие

$$P = \frac{F}{s} S = \frac{4F}{\pi d^2} \times \frac{\pi D^2}{4} = F \frac{D^2}{d^2}.$$

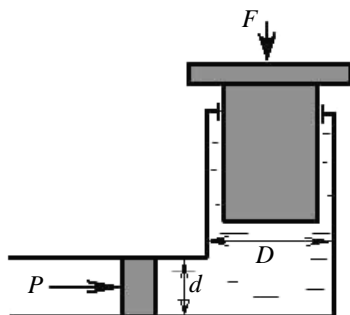


Рис. 2.11. Схема гидропресса

Таким образом, можно сделать следующий вывод:

1. Сила P будет больше силы F во столько же раз, во сколько площадь S больше площади s .
2. В отличие от твердых тел жидкость передает не силу, а давление.

2.1.4 Абсолютное, манометрическое и вакуумметрическое давление

Давление можно измерить двумя способами:

- 1) если принять за начало отсчета атмосферное давление;
- 2) если принять за начало отсчета абсолютный вакуум, когда давление в объеме отсутствует.

В первом случае давление называется **избыточным** или **манометрическим**, во втором – **абсолютным**.

Избыточное давление в точке 1 (см. рис. 2.10) $p_1 = \rho gh$, где h – глубина, на которой находится точка 1.

Абсолютное давление для этой точки будет $p_1 = p_0 + \rho gh$, но т.к. давление на свободной поверхности в данном случае равняется атмосферному, то $p_1 = p_{\text{атм}} + \rho gh$. Это давление будет соответствовать

пьезометрическому напору $\frac{p_1}{\rho g}$. **Манометрическое давление** является разностью между абсолютным и атмосферным давлением (см. рис. 2.12). В

общем случае абсолютное давление $p_{\text{абс}}$ может быть больше или меньше атмосферного, если $p_{\text{абс}} < p_{\text{атм}}$, то разность между атмосферным давлением и абсолютным называется **вакуумом**

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}. \quad (2.9)$$

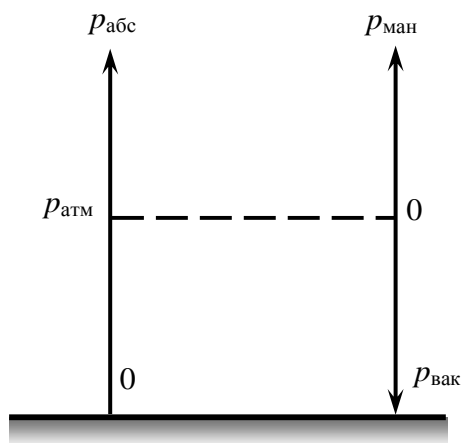


Рис. 2.12. Шкалы абсолютного, манометрического и вакуумметрического давлений

2.1.5 Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

1. Сила давления на отдельный элемент поверхности

Точка M (см. рис. 2.13) принадлежит площадке ds , являющейся частью некоторой поверхности. Давление на площадку ds — p_M . Сила давления на площадку ds будет равна

$$\overrightarrow{df_N} = p_M ds \vec{n}, \quad (2.10)$$

где \vec{n} — единичный вектор, ориентированный по нормали к площадке ds .

Предположим, что в резервуаре находится жидкость и газ (см. рис. 2.13).

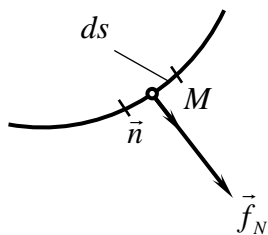


Рис. 2.13. Сила давления на отдельный элемент

Давление газа $-p_0$. Точка M находится на стенке резервуара, на глубине h . Давление в точке

$$p_M = p_0 + \rho gh.$$

Сила давления на элемент стенки ds

$$\vec{df} = (p_0 + \rho gh) ds \vec{n} \quad (2.11)$$

2. Результирующая сила давления на стенку.

Результирующая сила давления $\vec{P} = \sum \vec{df}$. Если резервуар имеет произвольную форму (см. рис. 2.14), то подсчитать результирующую силу довольно сложно, т.к. единичные векторы каждого элемента поверхности направлены в разные стороны. Для определения результирующей силы прибегнем к следующим рассуждениям. Элемент стенки резервуара ds будет находиться в неподвижном состоянии, если сила давления жидкости \vec{df} , будет равна силе реакции материала \vec{df}_R , т.е. $\vec{df} + \vec{df}_R = 0$.

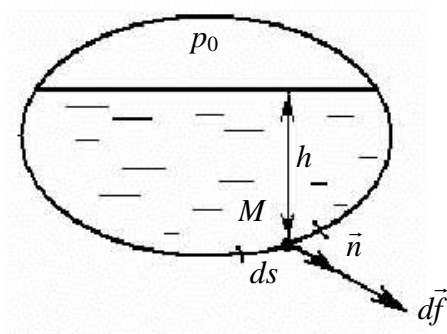


Рис. 2.14. Результирующая сила давления на стенку поверхности

Весь резервуар испытывает воздействие двух результирующих сил:

1. Равнодействующей сил давления

$$\vec{P} = \sum \vec{df};$$

2. Реакции материала стенки резервуара

$$\vec{R} = \sum \vec{df}_R$$

Исходя из предыдущего уравнения, можно записать

$$\vec{P} + \vec{R} = 0 \text{ или } \vec{P} = -\vec{R}.$$

Сама жидкость в резервуаре находится в равновесии под воздействием двух сил:

- силы реакции материала стенки R ;
- силы тяжести, направленной вертикально вниз G

$$\vec{R} = -\vec{G}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $\vec{P} = -\vec{R}$, можно сделать вывод, что

$$\vec{P} = \vec{G}. \quad (2.12)$$

3. Сила давления жидкости на дно резервуара

В связи с тем, что в резервуаре произвольной формы очень трудно подсчитать результирующую силу на дно резервуара из-за разнонаправленности векторов сил элементарных площадок, ограничимся

только случаем, когда дно резервуара плоское и горизонтальное. На рисунке 2.15 изображен открытый резервуар. Давление на поверхности жидкости p_0 , плотность – ρ , глубина наполнения жидкости – h .

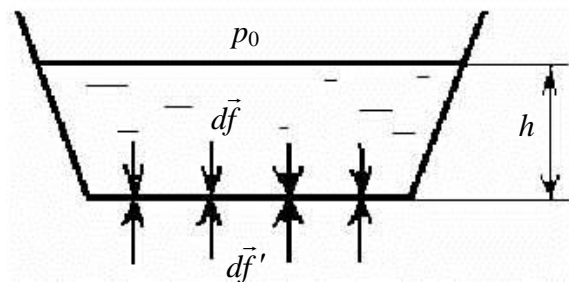


Рис. 2.15. Сила давления на горизонтальное дно резервуаров

Так как дно резервуара плоское и горизонтальное, то каждый элемент поверхности дна будет испытывать давление

$$p = p_0 + \rho gh,$$

и на него воздействует элементарная сила давления со стороны жидкости

$$\overrightarrow{df} = p \, ds \vec{n}$$

и сила давления со стороны наружного воздуха

$$\overrightarrow{df}' = p_0 ds \vec{n}'.$$

Все элементарные силы \overrightarrow{df} и \overrightarrow{df}' параллельны между собой.

Равнодействующая сила давления воды

$$\vec{P}_1 = \sum \overrightarrow{df} = \int_s p \, ds \vec{n}.$$

Так как $p = \text{const}$ $\vec{P} = pS\vec{n} = (p_0 + \rho gh)S\vec{n}$.

Аналогично равнодействующая сила давления воздуха

$$\vec{P}_0 = p_0 S \vec{n}'$$

Эти две силы вертикальны и действуют в разных направлениях.

Результирующая сила давления на дно резервуара

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_0, \text{ или } P = P_1 + P_0, \text{ или } P = \rho ghS. \quad (2.13)$$

Сила P – вертикальная, направлена вниз и приложена по центру дна резервуара (из соображения симметрии).

Гидростатический парадокс. Независимо от формы резервуара сила давления на дно зависит только от площади S , глубины заполнения h и плотности ρ и не зависит от количества жидкости, находящейся в резервуаре (см. рис. 2.16).

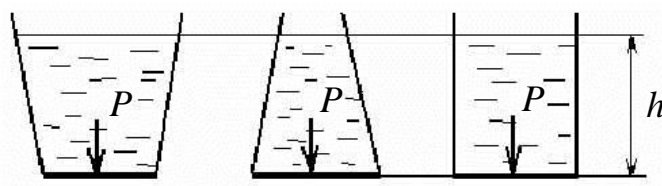


Рис. 2.16. Гидростатический парадокс

Опыт Паскаля. Резервуар рассчитан на определенное давление жидкости. В него добавляют небольшое количество воды. Ничего не происходит. Вставляют тонкую трубочку и добавляют гораздо меньшее количество воды – резервуар разрушается.

4. Сила давления на вертикальную прямоугольную стенку.

Пусть прямоугольная стенка длиной l и высотой h сдерживает напор воды (жидкости) плотностью ρ (см. рис. 2.17).

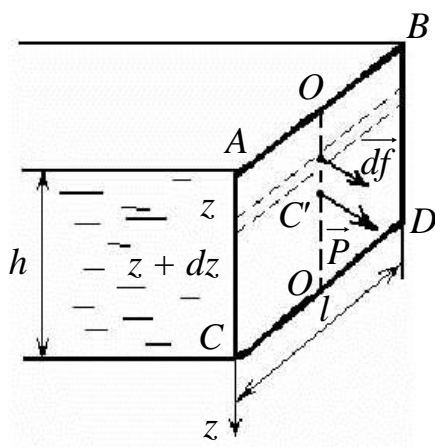


Рис. 2.17. Сила давления на вертикальную стенку

Рассмотрим элемент стенки, находящейся на глубине z длиной l и шириной dz . Элемент испытывает давление

$$\vec{df} = p d\vec{s}n.$$

$d\vec{f}$ направлена вертикально к поверхности и приложена в центре элемента на оси O (из соображения симметрии).

Давление на глубине z :

$$p = \rho g z.$$

Площадь $ds = l dz$. Тогда $d\vec{f} = \rho g z dz l \vec{n}$.

Сила давления \vec{P} на стенку равняется сумме сил, действующие на элементарные площадки $\vec{P} = \sum d\vec{f}$. Все силы $d\vec{f}$ горизонтальные, действуют в одном направлении и приложены на одной вертикальной оси O . Сила \vec{P} также будет горизонтальна, направлена от жидкости, точка приложения находится на оси O . Можно посчитать силу давления

$$P = \int_{z=0}^{z=h} \rho g z l dz \vec{n} \quad \text{или} \quad P = \frac{\rho g l h^2}{2} \quad (2.14)$$

Т.к. $lh = S$, то

$$P = \rho g S \frac{h}{2} \quad (2.15)$$

Определим точку приложения силы P

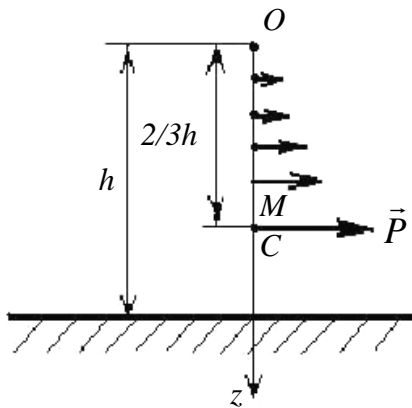


Рис. 2.18. Определение точки приложения силы P

Стенка испытывает воздействие всех сил df (см. рис. 2.18). Точка приложения C должна быть расположена таким образом, чтобы воздействие силы P в этой точке равнялось воздействию всех сил df на площадку ds . Т.е.

$\vec{P} = \sum \vec{df}$ и $M_o(\vec{P}) = \sum M_o(d\vec{f})$, где $M_o(\vec{P})$ – момент силы \vec{P} относительно точки O ; $\sum M_o(d\vec{f})$ – сумма моментов сил $d\vec{f}$ относительно точки O .

Для \vec{P} момент силы $M_o(\vec{P}) = P \times OC$. Для силы $d\vec{f}$, приложенной в точке M на глубине z : $M_o(d\vec{f}) = df \times OM$, где $OM = z$.

Таким образом $P \times OC = \int_{z=0}^{z=h} \rho g l z^2 dz$:

$$P \times OC = \frac{\rho g l h^2}{3} \quad \text{или} \quad \frac{\rho g l h^2}{2} \times OC = \frac{\rho g l h^2}{3}, \text{ откуда}$$

$$OC = \frac{2}{3} h \quad (2.16)$$

5. Сила давления на криволинейную поверхность.

Рассмотрим поверхность S , на которую с внешней стороны воздействует жидкость, создавая давление p_2 , воздействие жидкости с внутренней стороны – p_1 (см. рис. 2.19). Каждый элемент поверхности площадью ds испытывает воздействие силы давления с внешней стороны

$$\vec{df}_1 = p_1 ds \vec{n},$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный по нормали к ds , ориентированный в сторону внешней жидкости.

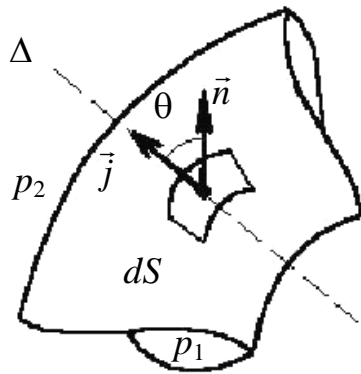


Рис. 2.19. Определение силы давления на криволинейную поверхность

Равнодействующая от суммы всех элементарных сил, действующих на поверхность изнутри $\vec{P}_1 = \sum \vec{df}_1$:

$$\vec{P}_1 = p_1 \int_s d\vec{s} \vec{n}.$$

Эту силу трудно подсчитать, т.к. векторы \vec{n} не параллельны между собой.

Проекция силы \vec{P}_1 , по направлению единичного вектора \vec{j} будет

$$\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 \int_s \vec{n} \vec{j} ds.$$

Если θ – угол между направлением Δ и нормалью к поверхности ds , то $\vec{n} \vec{j} = \cos \theta$, тогда

$$p_1 \vec{P}_1 \vec{j} = p_1 \int_s ds \times \cos \theta.$$

В то же время $ds \times \cos \theta = ds'$, тогда $\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 \int_s ds'$, или $\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 dS'$, где dS' – проекция поверхности S на поверхность, перпендикулярную выбранному направлению Δ .

Таким образом, можно записать $\vec{P}_1 \vec{j} = P_1$, как произведение двух векторов и

$$P_1 = p_1 dS' \quad (2.17)$$

Такой же результат мы получим для равнодействующей силы P_2

$$P_2 = p_2 dS' \quad (2.18)$$

6. Сила давления на цилиндрическую поверхность

Представим трубу длиной l , с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 (см. рис. 2.20). Толщина трубы $e = R_2 - R_1$. В трубе находится жидкость с давлением. Внешнее давление – p_2 . Необходимо установить минимальную толщину e , при которой труба не разорвется.

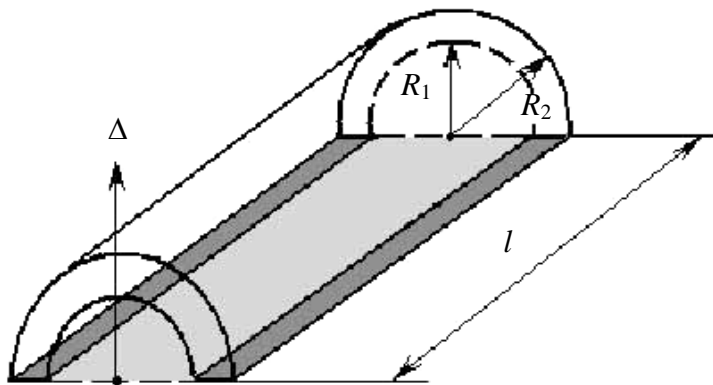


Рис. 2.20. Определение силы давления в цилиндрической трубе

Выберем направление Δ , совпадающее с одним из радиусов трубы.

Равнодействующая сил внутреннего давления

$$P_1 = p_1 dS',$$

где S' – проекция поверхности S на плоскость, перпендикулярную направлению Δ . Поверхность S' является прямоугольником, площадь которого $2R_1l$, тогда

$$P_1 = p_1 2R_1 l.$$

Аналогичный результат можно получить для силы внешнего давления

$$P_2 = p_2 2R_2 l$$

Для второй части трубы мы получим тот же результат.

Если внутреннее давление будет больше внешнего $P_1 > P_2$ (сила P_1 будет стремиться разорвать трубу), направление Δ было выбрано произвольно, поэтому можно сделать вывод, что разрыв может произойти по любому направлению. Материал трубы в силу своих физических свойств будет сопротивляться разрыву. Это сопротивление будет тем больше, чем толще будет труба. Величина, характеризующая способность материала сопротивляться его разрыву обозначается σ . Сила сопротивления материала

$$F = \sigma S_{\text{сопр}},$$

где $S_{\text{сопр}}$ – площадь сопротивления.

Таким образом, разрыв произойдет в случае, если $P_1 - P_2 \geq F$, или $p_1 2R_1 l - p_2 2R_2 l \geq \sigma S_{\text{сопр}}$, или $p_1 2R_1 l - p_2 2(R_1 + e)l \geq \sigma S_{\text{сопр}}$, или $p_1 2R_1 l - p_2 2R_1 l - p_2 2el \geq \sigma 2el$, или $p_1 R_1 - p_2 R_1 \geq \sigma e + p_2 e$, откуда следует, что при

$$e \leq \frac{R_1(p_1 - p_2)}{\sigma + p_2} \quad (2.19)$$

произойдет разрыв трубы.

2.1.6 Относительный покой жидкости

Относительным покоем жидкости называется такое ее состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося резервуара, в котором находится жидкость (см. рис. 2.21).

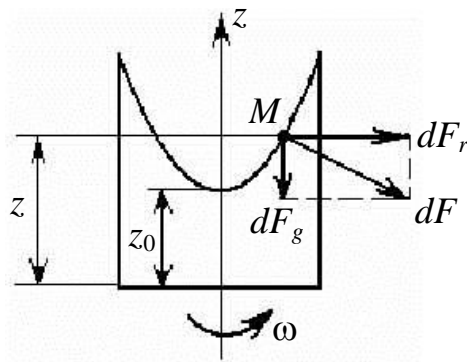


Рис. 2.21. Относительное равновесие жидкости во вращающемся сосуде

При относительном покое рассматриваются две задачи: определяется форма поверхности уровня или равного давления и выясняется характер распределения давления. В данном случае необходимо учитывать силы инерции, дополняющих систему массовых сил, действующих в покоящейся жидкости.

Рассмотрим случай, когда сосуд с жидкостью вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью. Для определения формы свободной поверхности и закона распределения давления выберем вблизи свободной поверхности частицу жидкости массой dm . На эту частицу действует массовая сила dF , направленная по нормали к поверхности. Разложим эту силу на две составляющие: горизонтальную $dF_r = dm\omega^2 r$ и вертикальную $dF_g = -dmg$.

Разделив действующие силы на dm , получим дифференциальное уравнение поверхности уровня

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0 \quad \text{или} \quad \omega^2 r dr - g dz = 0.$$

Проинтегрировав, получаем

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = const \quad (2.20)$$

Вывод: При вращении резервуара с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси поверхностями равного давления будет семейство параболоидов вращения.

Для точки M , находящейся на свободной поверхности жидкости

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Закон распределения давления найдем из дифференциального уравнения гидростатики, которое в данном случае примет вид

$$dp = \rho(\omega^2 r dr - g dz).$$

После интегрирования с учетом граничных условий ($r=0, z=z_0, p=p_0$), получаем:

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g(z_0 - z).$$

Если представить, что

$$p_0^i = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2},$$

то получим уравнение

$$p = p_0^i + \rho g(z_0 - z). \quad (2.21)$$

Вывод: Распределение давления подчиняется линейному закону для любой фиксированной цилиндрической поверхности.

2.1.7 Закон Архимеда

1. Равновесие твердого тела в жидкости

На тело, находящееся в жидкости (см. рис. 2.22) действуют:

- 1) сила тяжести;
- 2) сила давления воды.

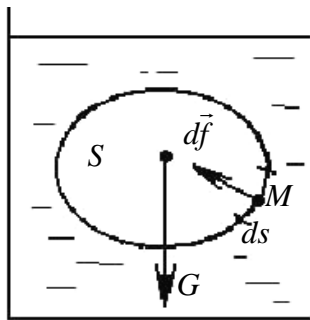


Рис. 2.22. Равновесие твердого тела в жидкости

На каждый элемент поверхности площадью ds действует сила

$$d\vec{f} = p\vec{n}ds,$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный по нормали внутрь тела.

Давление p зависит только от положения точки M , соответственно, каждая элементарная сила $d\vec{f}$ будет зависеть от расположения элемента и от его формы. Таким образом, равнодействующая сил $d\vec{f}$ будет зависеть только от места нахождения тела в жидкости и от величины внешней поверхности тела S .

2. Равновесие жидкости

Рассмотрим равновесие жидкости, когда тело извлечено, и жидкость заняла его объем (см. рис. 2.23). Контур S в жидкости соответствует очертанию тела. Жидкость, находящаяся внутри этого контура находится в равновесии под действием: 1) собственного веса G' . 2) результирующей силы внешнего давления воды P .

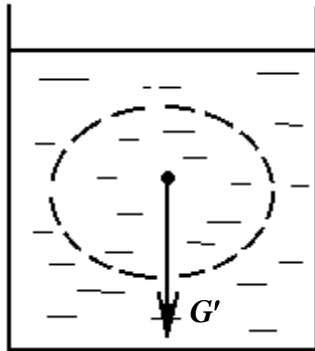


Рис. 2.23. Равновесие объема жидкости в жидкости

Равновесие жидкости, находящейся внутри контура S можно записать в следующем виде:

$$G' + P = 0 \text{ или } G' = -P.$$

Возвращаясь к случаю плавающего в жидкости тела, мы можем сделать вывод, что, т.к. контуры тела S и жидкости, замещающей объем тела равны, то и силы давления жидкости в первом и во втором случаях должны быть равны. Тогда для тела плавающего в жидкости можно записать

$$P_A = G' = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{т}}, \quad (2.22)$$

где P_A – сила, действующая на погруженное в жидкость тело; $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости; $V_{\text{т}}$ – объем тела.

Закон Архимеда: На твердое тело, погруженное в покоящуюся жидкость, действует сила гидростатического давления, равная весу жидкости в объеме тела, направленная вертикально вверх и проходящая через центр тяжести тела.

3. Условия равновесия плавающих тел.

Т.к. вес тела $G = \rho_t g V_t$, а архимедова сила $P_A = \rho_j g V_t$, то в случае неравенства плотностей тела жидкости, эти силы будут приложены к различным точкам. Для того чтобы плавающее тело было устойчивым, необходимо, чтобы центр приложения архимедовой силы (центр водоизмещения) находился выше центра приложения силы тяжести.

2.1.8 Основное уравнение гидростатики для сжимаемой жидкости

Выведем основное уравнение гидростатики, учитывая влияние сжимаемости газа, т.е. изменение плотности газа под действием давления. Дифференциальное уравнение равновесия для среды переменной плотности после интегрирования примет вид

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz = const. \quad (2.23)$$

Для вычисления интеграла необходимо задать закон изменения состояния газа.

2.1.9 Изотермическая атмосфера

Если принять, что температура газа не изменяется с изменением высоты, а уравнение состояния записать в следующем виде

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p}{C},$$

откуда $C = \frac{p}{\rho}$ – постоянная величина.

Подставив последнее соотношение в предыдущее уравнение, получим

$$C \ln p + gz = \text{const} \quad \text{или} \quad gz + \frac{p}{\rho} \ln p = \text{const}. \quad (2.24)$$

Полученное уравнение отличается от основного уравнения гидростатики жидкости тем, что давление газа по высоте с учетом его сжимаемости в изотермических условиях распределяется не по линейному, а по логарифмическому закону.

Запишем предыдущее уравнение для двух высот: на поверхности земли, где $z_0 = 0$, давление $p = p_0$, на высоте z давление будет p . Обозначим

$$z - z_0 = h \quad \text{и} \quad \frac{p_0}{\rho_0 g} = H,$$

учитывая, что $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$, получим $h = H \ln \frac{p}{p_0}$, откуда

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{h}{H}}. \quad (2.25)$$

Вывод: Давление уменьшается по высоте по экспоненциальному закону.

Примечание: Полученной формулой можно пользоваться, если высота изменяется на небольшую величину, в пределах нескольких сот метров, т.к. в других случаях формула дает погрешность более 5%.

2.1.10 Неизотермическая атмосфера

Обычно температура воздуха с увеличением высоты уменьшается. Температура дымовых газов также быстро уменьшается в трубе. Для того, чтобы проинтегрировать основное уравнение гидростатики в этом случае необходимо знать закон изменения температуры с изменением высоты. Чаще всего для атмосферного воздуха принимают, что температура уменьшается по линейному закону

$$a = \frac{T - T_0}{h}, \quad (2.26)$$

где T_0 – температура на поверхности земли; a – градиент температуры.

Можно записать дифференциальное уравнение равновесия в следующем виде

$$\frac{dp}{p} = -g \frac{dz}{R(T_0 - az)}, \quad (2.27)$$

$$\text{тогда} \quad \ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{Ra} \ln \frac{T_0 - az}{T_0}, \quad \text{или} \quad p = p_0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{g}{Ra}}, \quad \text{или} \quad (2.28)$$

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{Ra}}.$$

Пример: Предположим, что температура понижается на 6°C с увеличением высоты на 1000 м. Необходимо определить давление на вершине горы Монблан ($z = 4800\text{м}$), если на уровне моря температура $T_0 = 30^\circ\text{C}$.

Решение

На вершине горы температура $T = 30 - 4800 \cdot 0,006$. $T = 274,2 \text{ К}$, тогда

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{274,3}{303} \right)^{\frac{9,81}{287 \cdot 4800}} = 0,557.$$

Вывод: Давление на вершине горы Монблан меньше почти в два раза.

Примеры решения практических задач гидростатики

Пример 2.1-1

К закрытому резервуару для определения давления на свободной поверхности p_0 присоединена стеклянная трубка. Спрашивается, какое давление в резервуаре p_0 , если вода в трубке поднялась на высоту $H = 3$ м? Трубка присоединена на глубине $h_1 = 2$ м.

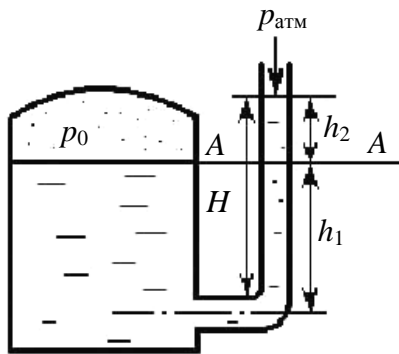


Рис. 2.24. К примеру 2.1-1

Ответ: Давление на поверхности воды в резервуаре $p_0 = 107910$ Па.

Пример 2.1-2

Определить разность давления в резервуарах A и B , заполненных водой, если разность уровней ртути в U-образном манометре $h = 15$ см.

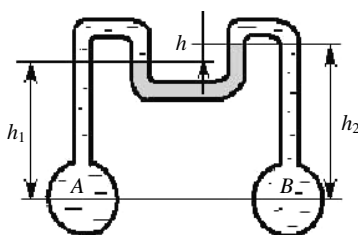


Рис. 2.25. К примеру 2.1-2

Ответ: Разность давлений в резервуарах – 18394 Па.

Пример 2.1-3

Определить суммарное усилие, воспринимаемое болтами смотрового люка диаметром $d = 0,5$ м, расположенного на глубине $h = 3$ м от свободной поверхности, на которой давление $P_0 = 0,5$ атм.

Ответ: Усилие, воспринимаемое болтами смотрового люка $P = 15700$ Н.

Пример 2.1-4

При бурении скважины необходимо определить вес труб, опущенных в скважину, заполненную глинистым раствором плотностью $\rho_p = 2800$ кг/м³, длина труб $l = 70$ м. Один метр таких труб с муфтами в воздухе весит 300 Н. Плотность стали $\rho_{cm} = 7500$ кг/м³.

Ответ: Полный вес труб будет равен 902776 Н.

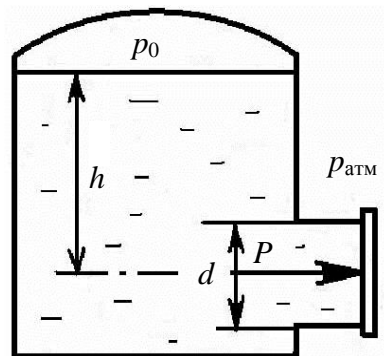


Рис. 2.26. К примеру 2.1-3

2.2 Тема 2. Основы кинематики и динамики жидкости и газа

2.2.1. Основные понятия кинематики жидкости

Для описания движения жидкости используется математическая модель. В гидравлике наибольшее распространение получила модель Эйлера, суть которой можно объяснить следующим образом. Предположим, что точка M движется по некоторой траектории в системе неподвижных координат. Мгновенное значение составляющих скорости вдоль осей

координат будет зависеть от положения точки, т.е. от величины координат x , y , z и времени t . Для составляющих скоростей течения жидкости в рассматриваемой точке u_x, u_y, u_z (см. рис. 2.32), можно записать функциональные зависимости:

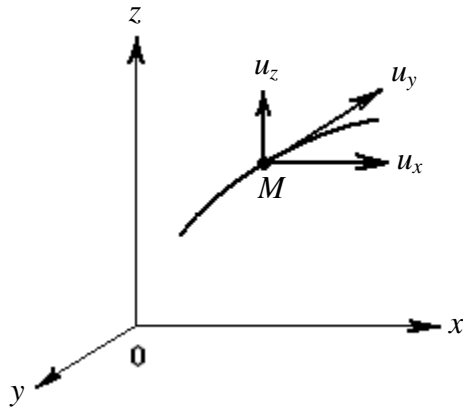


Рис. 2.32. Скорость в точке

$$\begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t) \\ u_y &= f_2(x, y, z, t) \\ u_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Зная для конкретного случая течения значения этих функций, можно для любого момента времени получить распределение скоростей течения жидкости.

Расход – количество жидкости, проходящей в единицу времени через данное сечение трубопровода. Различают объемный и массовый расходы.

Объемный расход – объем жидкости, проходящий в единицу времени через данное сечение трубопровода:

$$Q = \frac{V}{t} \left(\frac{\text{м}^3}{\text{с}} \right), \quad (2.30)$$

где V – объем жидкости.

Массовый расход – масса жидкости, проходящая в единицу времени через данное сечение:

$$Q_m = \frac{m}{t} \left(\frac{\text{кг}}{\text{с}} \right). \quad (2.31)$$

Соответственно, $Q_m = \rho Q$, где ρ – плотность жидкости.

Траектория – кривая, вдоль которой происходит перемещение частицы жидкости.

Линия тока – кривая, в каждой точке которой вектор скорости движения частицы направлен по касательной к ней (см. рис. 2.33).



Рис.2.33. Линия тока

Трубка тока – поверхность, очерченная вдоль небольшого контура внутри которой вдоль линии тока перемещаются частицы жидкости. Стенки трубки тока непроницаемы. Площадь поперечного сечения трубки тока мала, поэтому скорости движения в каждой точке равны (см. рис. 2.34).

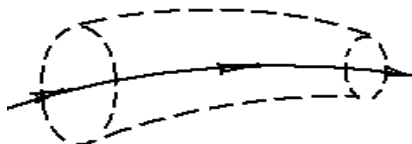


Рис. 2.34. Трубка тока

Элементарная струйка – поток жидкости, протекающий в трубке тока. Элементарную струйку можно представить также как совокупность линий тока, проходящих через бесконечно малое сечение ds , а разность скоростей

соседних линий тока бесконечно мала. Расход элементарной струйки $dq = u ds$. Поток жидкости можно представить как совокупность трубок тока, в которых движутся элементарные струйки.

$$Q = \int_s dq.$$

Средняя скорость потока – скорость, одинаковая в каждой точке потока в данном сечении, соответствует реальному расходу

$$v_{cp} = \frac{\sum u_i}{i},$$

где u_i – скорость в точке в данном сечении; i – количество точек.

2.2.2 Уравнение неразрывности

Основным условием, которое должно соблюдаться при течении жидкости, является непрерывность изменения параметров потока в зависимости от координат и времени, т.е. при течении жидкости должны быть соблюдены условия при, которых жидкость должна двигаться в канале как сплошная среда, без разрывов.

Выделим внутри пространства с движущейся капельной жидкостью неподвижный контур в форме элементарного параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz (см. рис. 2.35). Обозначим скорость жидкости, которая втекает в левую грань параллелепипеда, через u_x . Скорость жидкости, вытекающей из правой грани, вследствие неразрывности поля скоростей равна

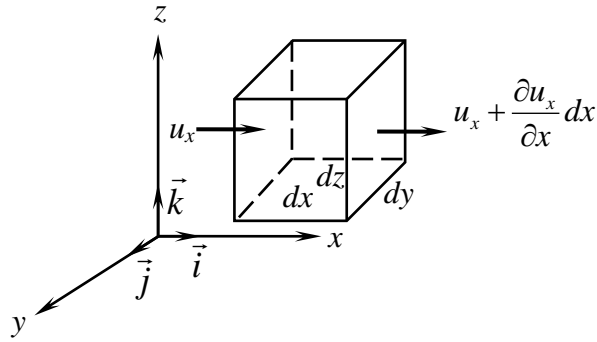


Рис. 2.35. Движение жидкости через контур

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

Поскольку рассматриваемый элементарный объем неподвижен, изменение скорости не зависит от времени. В направлении оси x через левую грань втечет за 1 с жидкость массой $(u_x dydz\rho)$, а вытекает через правую грань

$$\left[+\rho \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dydz \right].$$

Значит, за 1 с из параллелепипеда вытекает в направление оси x жидкости больше, чем втекает, на

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \times dxdydz.$$

Аналогичные выражения получаются и для направлений x , y , z . Закон сохранения массы требует, чтобы сумма трех полученных приращений была равна нулю:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dxdydz + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dxdydz + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dxdydz = 0 \quad (2.33)$$

Это уравнение называют **уравнением неразрывности**, т.к. оно предполагает, что жидкость является сплошной средой.

Рассмотрим уравнение неразрывности для случая течения струйки при установившемся движении. Масса жидкости течет в трубке тока (см. рис. 2.34). Пусть левое входное сечение трубки тока имеет площадь S_1 и в этом сечении скорость жидкости u_1 , а ее плотность ρ_1 . Площадь сечения на выходе из трубки тока S_2 , скорость течения жидкости u_2 , и ее плотность ρ_2 . Скорости струйки направлены по касательной к стенкам трубки тока, поэтому через стенки обмен массой с окружающей жидкостью отсутствует. Через левое сечение втекает в единицу времени масса жидкости $Q_{m1} = \rho_1 S_1 u_1$. Через правое сечение вытекает в единицу времени масса жидкости $Q_{m2} = \rho_2 S_2 u_2$. В трубке тока масса жидкости, находящаяся между левым и правым сечениями, остается постоянной, следовательно, условие сплошности потока в трубке тока будет:

$$Q_{m1} = Q_{m2} = \text{const.} \quad (2.34)$$

Если плотность жидкости по длине трубки тока не изменяется, т.е. $\rho_1 = \rho_2$, то можно записать для левого и правого сечений:

$$S_1 u_1 = S_2 u_2 = \text{const или } Q_1 = Q_2 = \text{const.} \quad (2.35)$$

Полученное уравнение является уравнением неразрывности для трубки тока.

Для потока реальной жидкости уравнение неразрывности записывается в следующем виде:

$$S_1 v_{cp1} = S_2 v_{cp2} = \text{const}, \quad (2.36)$$

где S_1 и S_2 – площади сечения потока в сечениях на входе и на выходе;
 v_{cp1} и v_{cp2} – средние скорости потока в этих сечениях.

Можно сделать два важных вывода:

1. При установившемся движении жидкости объемный расход не меняется;
2. При увеличении площади сечения потока жидкости средняя скорость уменьшается, и, наоборот, при уменьшении сечения - скорость увеличивается.

2.2.3 Виды движения жидкости

Все случаи течения жидкости можно разделить на виды, представленные на рисунке 2.36.



Рис. 2.36. Виды движения жидкости

Установившееся движение жидкости – движение жидкости, при котором все параметры жидкости (давление, температура, скорость и др.) не изменяются по времени.

$$u = f(x, y, z) \quad (2.37)$$

Для неустановившегося движения:

$$u = f(x, y, z, t) \quad (2.38)$$

Равномерное движение – установившееся движение, при котором скорость по всей длине потока не изменяется:

$$u = const \quad (2.39)$$

Напорное движение устанавливается в закрытых гидравлических системах, в которых жидкость течет в, основном, под действием силы давления, **безнапорное движение** наблюдается в открытых системах, в которых движение жидкости происходит под действием силы тяжести.

2.2.4 Интегральная формула количества движения

В теоретической механике изучается теорема о количестве движения материальных точек, которую можно применить в гидравлике. Будем считать движение жидкости в канале (см. рис 2.37) установившемся. Распределение давления в сечениях 1-1 и 2-2 гидростатическое. В сечении 1-1 действует сила давления, направленная внутрь выделенного объема жидкости $P_1 = p_1 s_1$, в сечении 2-2 – сила $P_2 = p_2 s_2$ (p_1, p_2 – давление в сечениях 1-1 и 2-2, s_1, s_2 – площади сечений). На элементарной площадке стенки канала действуют: сила реакции стенки, равная силе давления $p ds$ и сила вязкого трения τds . Проекция этих сил на ось движения равна $p ds \sin \alpha + \tau ds \cos \alpha$ (α – угол наклона элементарной стенки канала к его оси). Суммарная проекция внешних сил, действующих на изолированную массу жидкости, равна

$$\int_S p \sin \alpha ds + \int_S \tau \cos \alpha ds + p_1 s_1 - p_2 s_2$$

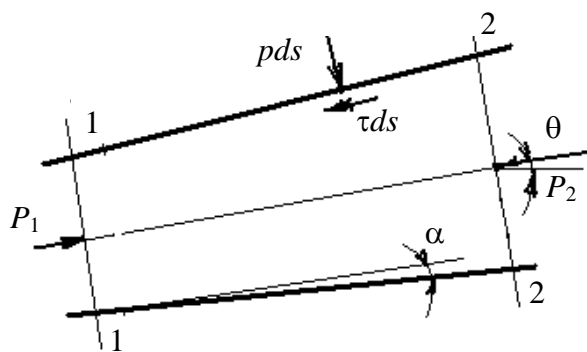


Рис. 2.37. Силы, действующие на поток жидкости в канале

Примем, что ось канала наклонена под углом θ к горизонту. Проекция веса жидкости, заключенной между выбранными сечениями равна $gpV\sin \theta$ (V – объем выделенной массы жидкости).

Проекция всех сил, действующих на изолированную массу, равна

$$\int_s p \sin \alpha ds + \int_s \tau \cos \alpha ds + p_1 s_1 - p_2 s_2 - gpV \sin \theta. \quad (2.40)$$

Распределение скорости в контрольных сечениях может быть неравномерным. Через элементарную площадку ds контрольной поверхности в единицу времени переносится количество движения, равное $\rho u^2 ds$ (u – местная скорость течения). Суммарное количество движения равно $\int_s \rho u^2 ds$.

Средняя скорость в контрольном сечении $v_{cp} = \int_0^s v ds / s$. Количество движения, подсчитанное по средней скорости равно $\rho v_{cp}^2 s$.

Отношение количества движения, действительно перенесенного потоком, к количеству движения, определенного по средней скорости, называется **коэффициентом Буссинеска** $\alpha_0 = \int_s v^2 ds / (v_{cp}^2 s)$.

В единицу времени при установившемся движении изменение количества движения составит

$$\rho(\alpha_{02}v_{cp2}^2s_2 - \alpha_{01}v_{cp1}^2s_1) = \rho Q(\alpha_{02}v_{cp2} - \alpha_{01}v_{cp1}),$$

где Q – расход жидкости.

Импульс действующих сил должен равняться изменению количества движения массы, на которую данный импульс действует. Следовательно, при течении жидкости в канале с учетом принятых условий соблюдается равенство

$$\int_S p \sin \alpha ds + \int_S \tau \cos \alpha ds + p_1 s_1 - p_2 s_2 - \rho g V \sin \theta = \rho Q \alpha_{02} v_{cp2} - \rho Q \alpha_{01} v_{cp1}. \quad (2.41)$$

Нами получено *гидравлическое уравнение количества движения*.

Вывод: При переходе от сечения 1-1 к сечению 2-2 проекция секундного количества движения потока изменяется на величину, равную сумме проекций всех внешних сил, действующих на объем потока, заключенный между сечениями 1-1 и 2-2.

Применяя уравнение количества движения, можно решить ряд задач гидравлики, например: теоретически определить коэффициент местного сопротивления при внезапном расширении трубы; изменение давления в трубе при равномерном отборе жидкости на одном ее участке; определение расхода газа при всасывании его через цилиндрическую трубу.

2.2.5 Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости (уравнение Эйлера)

Предположим, что в жидкости движется элементарный объем в форме параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz (см. рис. 2.38). На параллелепипед действуют поверхностные силы давления и массовые силы с проекциями X , Y , Z , отнесенными к единице массы. При движении объема возникают силы

инерции. Проекции этих сил на оси координат, отнесенные к единице массы,

равны соответственно: $-\frac{du_x}{dt}, -\frac{du_y}{dt}, -\frac{du_z}{dt}$.

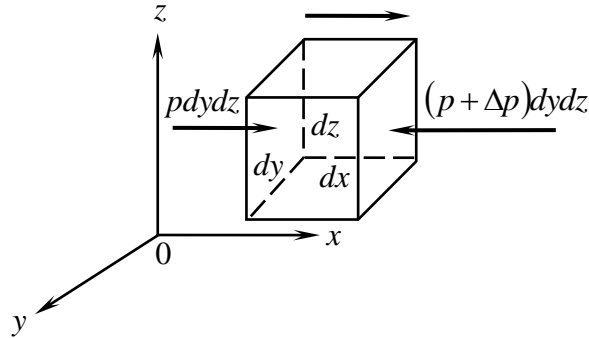


Рис. 2.38. Схема равномерного движения объема жидкости

Рассмотрим условие равновесия сил, в проекции на ось x . Сила давления на левую грань $-p dydz$, на правую грань

$$-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dydz,$$

где $\frac{\partial p}{\partial x} dx = \Delta p$ — изменение давления вдоль оси x .

Массовая сила равна $X \rho dx dy dz$. Уравнение равновесия запишется в виде

$$p dydz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dydz + X \rho dx dy dz - \frac{du_x}{dt} \rho dx dy dz = 0,$$

или

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + X \rho dx dy dz - \frac{dv_x}{dt} \rho dx dy dz = 0.$$

Разделив каждый член уравнения на $\rho dx dy dz$, получим

$$X - \rho \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}.$$

Соответственно для осей y и z уравнение равновесия будет выглядеть следующим образом

$$Y - \rho \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt},$$

$$Z - \rho \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}.$$

Объединив полученные уравнения, получим *систему уравнений Эйлера*:

$$X - \rho \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt},$$

$$Y - \rho \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}, \tag{2.42}$$

$$Z - \rho \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}.$$

Можно получить полный дифференциал уравнений Эйлера для установившегося движения, если рассматривать перемещение частиц жидкости вдоль линии тока. Для этого надо умножить каждое из уравнений системы на соответствующую проекцию элементарного перемещения частиц dx , dy , dz , и сложить их:

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \left(\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \right) = 0.$$

Т.к. для установившегося течения линии тока совпадают с траекториями движения частиц, то

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z.$$

Тогда

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} du^2$$

Для установившегося движения давление зависит только от координат, поэтому второй член уравнения есть полный дифференциал давления dp .
Получим

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} dp - \frac{1}{2} du^2 = 0 \quad (2.43)$$

Мы получили **дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости**.

В поле силы тяжести

$$X = 0, Y = 0, Z = -g,$$

тогда уравнение запишется в следующем виде

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} - \frac{du^2}{2} = 0.$$

После интегрирования этого уравнения получаем (при $\rho = const$) уравнение

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const, \quad (2.44)$$

которое называется *уравнением Бернулли для струйки невязкой жидкости*.

2.2.6 Общее уравнение энергии в интегральной форме (Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости)

Для двух сечений струйки невязкой жидкости это уравнение будет выглядеть следующим образом

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (2.45)$$

Сумма слева представляет полную удельную энергию струйки в сечении 1-1, сумма справа – полную удельную энергию струйки в сечении 2-2. Можно записать, что

$$E_1 = E_2.$$

На практике энергия струйки в начале больше энергии струйки в конце, т.к. часть энергии теряется на преодолении сил вязкости. В процессе движения вязкой жидкости запас ее механической энергии уменьшается, и на самом деле

$$E_1 > E_2.$$

Обозначим энергию, затрачиваемую на преодоление сил сопротивления E_{nom} . E_{nom} – это та часть механической энергии, которая, вследствие вязкости, переходит в тепловую энергию. Другими словами можно сказать, что E_{nom} – это часть энергии, которая израсходована на преодоление гидравлических сопротивлений.

$$E_1 = E_2 + E_{nom}. \quad (2.46)$$

При выводе уравнения Бернулли для элементарной струйки можно было пренебречь изменением скорости и давления в пределах нормальных сечений благодаря их малым величинам. В потоке жидкости скорости и давления в пределах живых сечений различны, и это необходимо учитывать. Согласно гипотезе Ньютона, жидкость как бы прилипает к стенкам канала, по которому она течет и ее скорость равна нулю. Но с увеличением расстояния от стенки, скорость струек увеличивается. Так называемая мощность потока складывается из энергии отдельных струек

$$N = \int_S dN,$$

где N – мощность потока; dN – мощность струйки; S – площадь живого сечения потока.

Для мощности струйки можно записать:

$$dN = Ed Q_m = \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u ds,$$

где ds – площадь живого сечения струйки.

Величина удельной энергии потока равна частному от деления мощности потока на массовый расход Q_m

$$E = \frac{\int_s \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m}.$$

Это уравнение можно разбить на два интеграла

$$E = E_n + E_{\text{кин}} = \frac{\int_s \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho u ds}{Q_m} + \frac{\int_s \left(\frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m},$$

где E_n – удельная потенциальная энергия потока относительно выбранной плоскости сравнения; $E_{\text{кин}}$ – удельная кинетическая энергия потока.

Для вычисления E_n надо знать закон изменения давления по живому сечению. Для плавноизменяющихся течений ускорения и силы инерции незначительны, поэтому ими можно пренебречь. Экспериментально доказано, что в плавноизменяющемся потоке давления распределяются по

закону гидростатистики $gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$

$$E_n = \frac{\rho \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \int_s u ds}{Q_m} = \frac{\left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho Q}{Q_m} = gz + \frac{p}{\rho}. \quad (2.47)$$

$$\frac{\int_s \left(\frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m}$$

Для вычисления интеграла $\frac{\int_s \left(\frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m}$ нужно знать закон распределения скоростей по сечению. Умножим и поделим это выражение на $v_{cp}^3 S$.

$$\frac{\int_s \left(\frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m} \frac{v_{cp}^3 S}{v_{cp}^3 S} = \frac{v_{cp}^2}{2} \rho v_{cp} S \frac{\int_s \frac{u^3}{2} ds}{v_{cp}^3 S Q_m} = \frac{v_{cp}^2}{2} \frac{Q_m}{Q_m} \alpha,$$

где α – коэффициент, который учитывает неравномерность распределения скоростей в сечении, **называется коэффициент Кориолиса**. Получаем выражение для удельной кинетической энергии потока:

$$E_{кин} = \alpha \frac{v_{cp}^2}{2}. \quad (2.48)$$

Запишем **уравнение Бернулли для двух сечений потока реальной жидкости**

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2} + E_{ном}. \quad (2.49)$$

Полученное уравнение позволяет сделать следующие выводы:

1. При увеличении кинетической энергии потока от одного сечения к другому потенциальная энергия уменьшается, и, наоборот, с увеличением потенциальной энергии, кинетическая уменьшается.
2. Коэффициент α тем больше, чем больше скорости отдельных струек отличаются от величины средней скорости. Если скорости всех элементарных струек будут равны средней скорости, то $\alpha = 1$.

2.2.7 Три формы представления уравнения Бернулли для потока реальной жидкости

Представленное выше уравнение Бернулли является уравнением Бернулли, записанное в форме удельной энергии, где:

gz_1 и gz_2 – удельная энергия положения в сечениях 1-1 и 2-2 потока;

$\frac{p_1}{\rho}$ и $\frac{p_2}{\rho}$ – удельная энергия давления в этих сечениях;

$\frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2}$ и $\frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2}$ – удельная кинетическая энергия.

На практике при выполнении инженерных расчетов обычно применяют две другие формы представления уравнения Бернулли.

Уравнение Бернулли в форме напоров можно получить, если разделить уравнение в форме удельной энергии на g , обозначив

$$\frac{E_{nom}}{g} = h_w.$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2g} + h_w. \quad (2.50)$$

Каждый член этого выражения имеет размерность длины и может быть представлен некоторой высотой (напором) (см. рис. 2.39).

Здесь z_1 и z_2 – высота положения или геометрический напор (расстояние от плоскости сравнения до центра сечения потока);

$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{P_1}{\gamma}$ и $\frac{p_2}{\rho g} = \frac{P_2}{\gamma}$ – пьезометрическая высота или пьезометрический напор (высота поднятия жидкости в пьезометрической трубке под действием давления);

$\frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g}$ и $\frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2g}$ – скоростной напор (разность показаний трубки Пито и пьезометрической трубки).

Сумма трех высот $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g} = H_1$ и $z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2g} = H_2$ – полный напор потока жидкости.

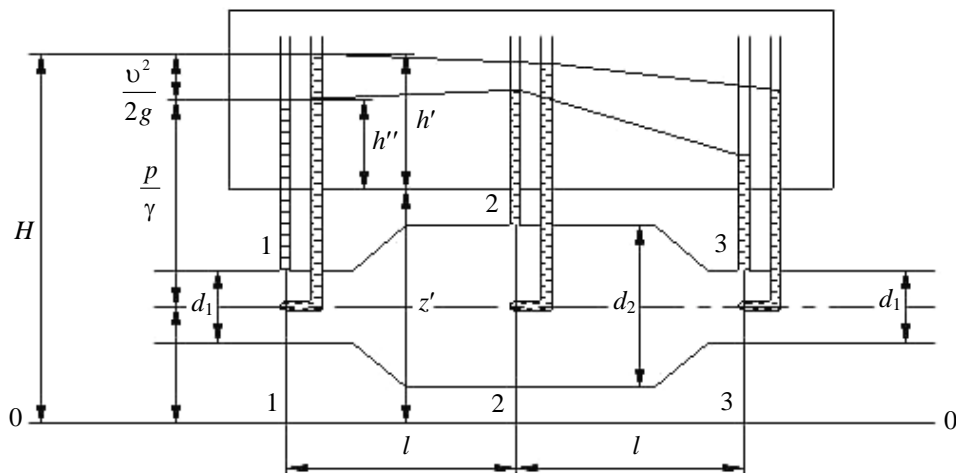


Рис. 2.39. Опытная демонстрация уравнения Бернулли в форме напоров

Разность полных напоров двух живых сечений потока – потеря напора между этими сечениями

$$h_w = H_1 - H_2. \quad (2.51)$$

С помощью уравнения Бернулли в форме напоров можно найти высотные отметки жидкостей, которые могут быть достигнуты в данной трубопроводной системе. Это уравнение широко используется при проектировании и гидравлических расчетах водопроводов.

Уравнение Бернулли в форме давлений получаем, если уравнение Бернулли в форме удельной энергии умножим на плотность ρ .

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2} + \rho g h_w. \quad (2.52)$$

Здесь каждый член имеет размерность давления:

$\rho g z_1$ и $\rho g z_2$ – гравитационное давление, т. е. давление, создаваемое силой тяжести;

p_1 и p_2 – статическое давление;

$\rho \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2}$ и $\rho \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2}$ – динамическое давление;

$\rho g h_w$ – потери давления на преодоление сил трения и местные сопротивления.

Вывод: при увеличении скорости движения потока давление на этом участке падает и, наоборот – при уменьшении скорости давление увеличивается.

Уравнение Бернулли в форме давлений применяется для расчета систем вентиляции, газовых стояков внутри зданий и т.д.

2.2.9 Особенности турбулентного и ламинарного течения жидкости.

Число Рейнольдса

Наблюдения показывают, что в жидкости возможны две формы движения: ламинарное движение и турбулентное. Проведем следующий опыт. Через стеклянную трубку будем подавать воду. В начале трубки устанавливаем тонкую трубку, через которую подаем краску. Когда скорость движения воды в стеклянной трубке небольшая, струйка краски, вытекающая из тонкой трубки, принимает форму нити. Это говорит о том, что отдельные частицы жидкости перемещаются прямолинейно. Жидкость в круглой трубе движется как бы концентрическими кольцевыми слоями, которые не перемешиваются между собой. Такое движение называется *ламинарным* (слоистым) (см. рис 2.40).

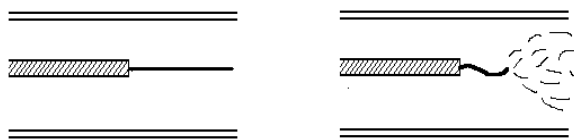


Рис. 2.40. Движение окрашенной жидкости при ламинарном и турбулентном режимах

С увеличением скорости движения в стеклянной трубке струйка краски будет размываться, терять свою устойчивость и, при больших скоростях, краска будет равномерно окрашивать всю массу жидкости, что указывает на интенсивное перемешивание всех слоев. Отдельные частицы жидкости и ее небольшие объемы пребывают в состоянии хаотического и беспорядочного движения. Наряду с общими поступательными движениями имеется поперечное перемещение частиц. Такое движение называется **турбулентным** (см. рис. 2.40).

Эти два режима движения резко отличаются один от другого, что видно из нижеследующей таблицы.

Таблица 2.1

Характеристика	Ламинарный режим	Турбулентный режим
Движение	Только продольное	Продольное и поперечное
Потери энергии	$gh_w \equiv u^1$	$gh_w \equiv u^2$
Передача тепла	Теплообмен за счет теплопроводности	Теплообмен за счет теплопроводности и конвекции
Эпюра скорости	Параболическая функция	Логарифмическая функция
Коэффициент α	$\alpha = 2$	$\alpha \approx 1$

Условия перехода от ламинарного течения капельной жидкости к турбулентному в круглых трубках впервые изучил О. Рейнольдс. Он установил, что режим зависит от трех параметров: средней скорости v_{cp} , диаметра d и кинематической вязкости ν . Рейнальдс пришел к выводу, что существует некоторое критическое значение соотношения этих параметров,

являющееся границей между ламинарными и турбулентными режимами течения, и нашел его:

$$Re = \frac{v_{\text{ср}} \cdot d}{\nu} = 2320. \quad (2.53)$$

Более точные исследования показали, что в интервале чисел Рейнальда от 2000 до 4000 происходит периодическая смена турбулентного и ламинарного режимов. Поэтому можно точно сказать, что при $Re \leq 2000$ режим движения – ламинарный, а при $Re \geq 4000$ устанавливается турбулентный режим. В диапазоне чисел Рейнольдса от 2000 до 4000 режим нестабильный, т.е. может быть и ламинарным, и турбулентным.

При изучении сопротивлений, теплопередачи, явлений, связанных с переносом тепла, транспортом твердых частиц число Рейнальда является исходным для построения расчетных зависимостей

подавляющее число движений жидкости в технике – турбулентные, а не ламинарные. Турбулентные течения значительно сложнее ламинарных, и для их изучения нужны другие методы. Беспорядочный характер движения отдельных частиц жидкости в турбулентном потоке требует применения методов статистической механики.

Хаотичность турбулентного движения с кинематической точки зрения означает, что скорость движения в отдельных точках пространства непрерывно изменяется как по величине (см. рис. 2.41), так и по направлению. Скорость в данной точке турбулентного потока, измеренную в данный момент времени, называют **мгновенной** и обозначают *u*, Экспериментальные исследования показывают, что изменения мгновенной скорости носит случайный характер.

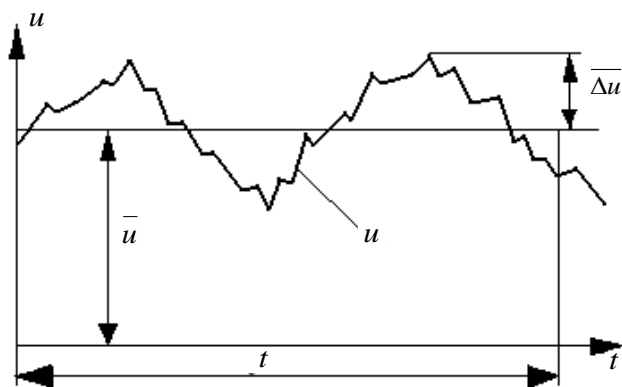


Рис. 2.41. График изменения мгновенной скорости

Для описания турбулентного потока вводят понятия **осредненной скорости**, которой называют среднюю за некоторый промежуток времени скорость в данной точке

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \int_0^t u dt,$$

где t – достаточно длинный интервал времени.

При равномерном течении жидкости в трубе с постоянным расходом мгновенную скорость, измеренную в данной точке можно разложить на три составляющие u_x, u_y, u_z .

Каждая из составляющих скоростей изменяется со временем, но для установившегося движения за определенный промежуток времени, определенные во времени значения поперечных составляющих равны нулю. Если ось x совпадает с осью трубы, то $\bar{u}_x = 0, \bar{u}_y = 0, \bar{u}_z = 0$.

Если подобным способом определить осредненные скорости нескольких точек по поперек трубы, получим **эпюру осредненных скоростей** по сечению трубы. Осреднение определенных скоростей дает среднюю скорость потока v_{cp} .

Таким образом, осредненную скорость получаем после осреднения по времени мгновенных скоростей, среднюю скорость получаем после осреднения осредненных скоростей по сечению.

Осредненную скорость можно рассматривать как скорость струйки. При неизменном расходе жидкости эпюра осредненных продольных скоростей в данном живом сечении не изменяется с течением времени, что и является признаком установившего течения.

С помощью понятия осредненной скорости турбулентный поток с его беспорядочно движущимися массами жидкости заменяют воображаемой моделью потока, представляющей совокупность элементарных струек, скорости которых равны осредненным скоростям по величине и по направлению. Это означает, что к турбулентному потоку можно применить представление одномерной гидравлики.

Отклонение мгновенной скорости от ее осредненного значения $\Delta u = u - \bar{u}$ называют **пульсационной скоростью** или **пульсацией**. Замена действительных беспорядочных движений жидких комков на фиктивное струйное движение требует введения некоторых фиктивных сил взаимодействия между воображаемыми струйками.

Благодаря этому Прандтлем был введен новый вид поверхностных сил и соответствующих касательных напряжений

$$\tau_{xy} = -\rho \Delta u_x \Delta u_y,$$

которые называются **турбулентными касательными напряжениями**. Эти напряжения обусловлены пульсациями или обменом количества движения между соседними слоями жидкости. Слой, движущийся с большей скоростью, подтягивает за собой отстающий и наоборот, слой, который движется медленно, тормозит опережающий. Знак «минус» подчеркивает, что сила сопротивления имеет направление, противоположное продольной

пульсации. Индексы x и y показывают направление движения слоя и поперечных пульсаций.

Осредненные касательные напряжения называются **турбулентными**

$$\tau_{\text{турб}} = -\overline{\rho \Delta u_x \Delta u_y} \quad (2.54)$$

В схематизированном турбулентном потоке, кроме сил турбулентного обмена, вследствие пульсации еще проявляются силы внутреннего трения. Полное касательное напряжение турбулентного потока

$$\tau = \tau_{\text{турб}} + \tau_{\text{вязк}} = -\overline{\rho \Delta u_x \Delta u_y} + \mu \frac{du_x}{dy} \quad (2.55)$$

2.2.10 Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой сжимаемой жидкости

Плотность сжимаемой жидкости изменяется в процессе движения. Проинтегрировав дифференциальное уравнение одномерного движения жидкости для струйки, получаем:

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (2.56)$$

При установившемся движении влияние сжимаемости практически проявляется только в газах, при анализе течения которых удельной энергией положения можно пренебречь. Тогда:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (2.57)$$

Это уравнение можно назвать уравнением Бернулли для сжимаемой жидкости. Член $\int \frac{dp}{\rho}$ характеризует потенциальную энергию газа с учетом преобразования его внутренней энергии.

Вывод: При установившемся течении невязкого газа сумма удельной потенциальной, внутренней и кинетической энергии есть величина постоянная.

Для вычисления интеграла $\int \frac{dp}{\rho}$ необходимо знать процесс изменения состояния газа при этом течении. Если считать что течение происходит без теплообмена, то для невязкого газа это будет отвечать изоэнтропическому изменению состояния.

Поскольку отношение $\frac{p}{\rho} = RT$

$$\frac{k}{k-1} \cdot RT + \frac{u^2}{2} = const \quad (2.59)$$

Из этого уравнения следует, что изменение скорости вдоль трубки тока сжимаемого газа связано с изменением температуры. При увеличении скорости температура падает и наоборот.

2.2.11 Уравнение Бернулли для потока вязкой сжимаемой жидкости

При составлении уравнений движения сжимаемой жидкости следует учитывать, что не только скорости, но и плотности, температуры и давления отдельных струек в пределах живых сечений неодинаковы, что значительно усложняет исследование. Поэтому поток конечных размеров рассматривают как одну струйку. Заменяв в уравнении для струйки скорость струйки u на среднюю скорость потока $v_{ср}$, можно сразу написать уравнение Бернулли сжимаемой *невязкой жидкости*:

$$\frac{k}{k-1} \cdot RT + \frac{v_{cp}^2}{2} = const \quad (2.60)$$

Теперь составим уравнение Бернулли для вязкой сжимаемой жидкости, для чего запишем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dp}{\rho} + v dv + dE_n = 0,$$

интегрирование которого для сжимаемой жидкости зависит от конкретных условий движения и закона изменения состояния газа.

При адиабатическом течении, где отсутствует обмен тепла со средой вне границ потока, можно получить уравнение движения в конечном виде, для чего необходимо применить понятие **энтальпии**

$$di = dq + \frac{dp}{\rho}, \quad (2.61)$$

где q – количество тепла, передаваемое 1 кг газа.

Подставив уравнение энтальпии в уравнение Бернулли, получим

$$di - dq + v dv + dE_n = 0.$$

При адиабатическом течении энергия, потерянная на трение, переходит во внутреннее тепло ($dE_n = dq$), тогда

$$di + v dv = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$i = \frac{v_{cp}^2}{2} = const. \quad (2.62)$$

Мы получили *основное уравнение адиабатического течения газа*.

Вывод: Сумма удельной кинетической энергии и энтальпии остается неизменной в процессе движения газа.

Можно доказать, что для воздуха сжимаемостью можно пренебречь, если скорость течения не превышает 70 м/с, для природного газа – 90 м/с. В системах вентиляции и газопроводов низкого давления скорости течения не превышают указанных пределов, поэтому расчет в этих системах ведется как для несжимаемой жидкости. В этих системах расчет можно вести по уравнению Бернулли в форме давлений

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{\alpha_1 v_{2cp}^2}{2} + \Delta p_{пот}.$$

Пример применения уравнения Бернулли для расчета коротких трубопроводов

Вода перетекает из резервуара *A* в резервуар *B* по трубопроводу с диаметрами $d_1 = 100$ мм и $d_2 = 60$ мм и длиной $l_1 = 15$ м и $l_2 = 10$ м. Необходимо определить расход воды при разности уровней в бассейнах $H = 300$ см. Трубопровод стальной сварной, умеренно заржавевший.

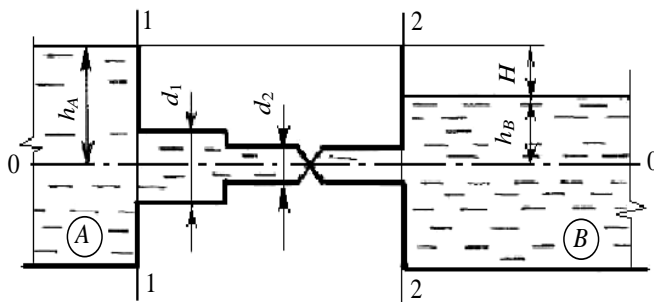


Рис. 2.42. К примеру расчета коротких трубопроводов

Примечание. Потерями напора пренебречь.

Ответ: Искомый расход в трубопроводе $Q = 0,45$ м³/с.

Лекция 3. Основы моделирования гидромеханических процессов

3.1 Основы моделирования

При изучении гидроаэродинамических явлений необходимо широкое применение эксперимента. Например, все вопросы, касающиеся турбулентного движения жидкости, не имеют точного теоретического решения, поэтому экспериментальные решения дополняют теоретические. Все виды гидравлических сопротивлений и соответствующие им коэффициенты определяются экспериментальным путем.

Перед постановкой исследования экспериментатор должен знать: каким требованиям должна удовлетворять модель, какие величины надо измерять в опытах, какими приборами надо пользоваться, на какие полученные величины, прежде всего, необходимо обращать внимание. Кроме того, необходимо четко знать, что полученные результаты соответствуют явлениям, которые будут иметь место в действительности.

Различают математическое моделирование (на ЭВМ) и физическое (на физических моделях). Физическое моделирование проводят на моделях натуральных объектов, которые просты в изготовлении и их размеры позволяют осуществлять в лабораторных условиях эксперименты, задаваясь различными параметрами модели и исследуемого явления, и выявлять искомые закономерности.

Обоснование моделирования и использование в натуре результатов экспериментов на модели связано с подобием движения в натуре и на модели. *Подобными* называют явления, происходящие в геометрически подобных системах одинаковой физической природы, когда одинаковые величины (например скорости или силы), действующие в подобных точках, имеют между собой постоянные отношения, которые называются *масштабами*.

3.2 Виды подобия. Масштабы моделирования

Для установления подобия гидроаэродинамических явлений между натурой и моделью следует использовать правила *механического подобия*. Механическое подобие подразумевает выполнение геометрического, кинематического и динамического подобия.

Геометрически подобными являются два потока, если между их соответствующими линейными размерами существует соотношение

$$\frac{l_n}{l_m} = k_l, \quad (3.1)$$

где k_l – линейный масштаб, показывающий во сколько раз размеры модели изменены по сравнению с размерами натурой; l_n и l_m – геометрические размеры натурой и модели соответственно (длина, ширина или высота).

Производными от линейного масштаба являются масштаб площадей

$$\frac{S_n}{S_m} = k_s \quad \text{и масштаб объемов} \quad \frac{V_n}{V_m} = k_v.$$

Кинематическими подобными являются два потока, если поля скоростей на модели и в натуре в подобных точках пространства связаны масштабом

$$\frac{v_n}{v_m} = k_v, \quad (3.2)$$

соответственно масштаб ускорений можно выразить отношением

$$\frac{a_n}{a_m} = k_a.$$

Для *динамического подобия* необходимо, чтобы все силы одинаковой природы, действующие в подобных точках модели и натуры на частицы жидкости, отличались между собой только постоянными масштабами

$$\frac{F_n}{F_m} = k_F.$$

Любой масштаб может быть выражен через другие масштабы, например, масштаб сил можно представить следующими выражениями

$$k_F = k_a k_m = \frac{k_v}{k_t} k_p k_v = \frac{k_v}{k_t} k_p k_l^3 = k_v^2 k_t^2 k_p.$$

Геометрически подобные системы не обязательно будут кинематически и динамически подобными. В то же время динамическое подобие подразумевает автоматически кинематическое и геометрическое подобие.

3.3 Критерии подобия

Условие механического подобия требует равенства на модели и в натуре отношения всех сил, действующих в данных системах. Однако практически невозможно создать условия подобия сил, определяющих явление. Поэтому на практике стараются соблюдать подобие основных сил, остальными силами пренебрегают. Устанавливаемые частные условия подобия называются *критериями подобия*. При установлении критериев подобия определяют условия, обеспечивающие пропорциональность силам инерции тех действующих сил, которые считаются главными в данном явлении.

Критерий Эйлера. При рассмотрении гидроаэродинамических явлений мы, прежде всего, сталкиваемся с силами давления. Поэтому первый

критерий динамического давления получают, сравнивая масштабы сил давления и сил инерции

$$\frac{P_n}{\rho_n u_n^2} = \frac{P_m}{\rho_m u_m^2} \quad (3.3)$$

Обозначим это соотношение через $Eu = \frac{P}{\rho u^2} = idem$, где термин *idem* означает, что условия, определяемые данным соотношением, должны быть одинаковы на модели и на натуре.

Можно сделать вывод, что критерию Эйлера соответствует равенство отношений сил давления к силам инерции на модели и на натуре.

Критерий Рейнольдса определяет отношение сил внутреннего трения к силам инерции

$$\frac{u_n l_n \rho_n}{\mu_n} = \frac{u_m l_m \rho_m}{\mu_m} \quad Re = \frac{u l \rho}{\mu} = idem \quad (3.4)$$

Критерий Рейнольдса является важнейшей характеристикой исследуемого явления, т.к. от соотношения между силами инерции и вязкости зависят основные свойства движущейся жидкости. При соблюдении критерия Рейнольдса критерий Эйлера выполняется автоматически. Если жидкости на модели и в натуре одинаковы ($k_p = 1$), то при равенстве $Re_n = Re_m$

$$u_n l_n = u_m l_m \text{ или } k_l = \frac{1}{k_u}.$$

Вывод: При моделировании по Рейнальдсу уменьшение размеров модели в k_l раз требует увеличения скорости движения жидкости на модели в такое же количество раз.

Моделирование со строгим соблюдением подобия сил вязкости встречается редко. Для многих изучаемых явлений при больших числах Re характер движения потока не зависит от изменения числа Re . Например, величина сопротивления трубы в квадратичной области сопротивления не зависит от числа Re . Этот и другие примеры доказывают, что для больших чисел Re для ряда явлений изменение числа Рейнольдса не влияет на характер явления. Это свойство называется автомодельностью и значительно облегчает исследование. Условие автомодельности по Рейнольдсу эквивалентно соблюдению критерия Эйлера. Исходя из вышеизложенного, моделирование по критерию Рейнольдса очень часто проводится при изучении напорных потоков.

Критерий Фруда определяет отношение сил инерции к силам тяжести

$$Fr = \frac{u^2}{gl} = idem \quad \text{или} \quad \frac{u_n^2}{gl_n} = \frac{u_m^2}{gl_m}. \quad (3.5)$$

При моделировании по Фруду $k_u = \sqrt{k_l}$.

Вывод: одновременно нельзя удовлетворить равенство критериев Рейнольдса и Фруда для одной и той же жидкости на модели и в натуре.

Моделирование по Фруду проводится при изучении открытых потоков, т.к. движение открытых потоков происходит под действием силы тяжести, которая бывает значительно больше сил вязкости.

Критерий Архимеда определяет отношение выталкивающей силы Архимеда к силам инерции

$$Ar = \frac{gl}{u^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = idem \quad \text{или} \quad \frac{gl_n}{u_n^2} \frac{\rho_n - \rho_{n0}}{\rho_n} = \frac{gl_m}{u_m^2} \frac{\rho_m - \rho_{m0}}{\rho_m}, \quad (3.6)$$

где $\frac{\rho - \rho_0}{\rho}$ – отношение разности плотностей среды и струи к плотности среды.

Критерий Архимеда используется при исследовании гравитационных систем воздушного отопления и вентиляции, где действуют архимедовы силы, возникающие вследствие разности плотностей двух сред (течение струи в среде другой плотности).

3.4 Конечно-разностная форма уравнения Навье-Стокса

Напряженное состояние жидкости. Законы движения и покоя жидкостей и газов основываются на законах механики сплошной среды, что позволяет рассматривать равновесие и течение жидкости в целом без учета механизма молекулярного движения.

В массе жидкости, которая рассматривается как сплошная среда, под влиянием внешних сил возникают соответствующие внутренние силы. Оценим порядок значений сил, действующих на элементарный изолированный объем, имеющий форму параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz (см. рис. 3.2). Вся система движущейся массы отнесена к координатам x , y , z . На плоскостях граней изолированного параллелепипеда возникают напряжения. Составляющие напряжений, направленные перпендикулярно грани, называются нормальными напряжениями. Составляющие, находящиеся в плоскости граней, называются касательными напряжениями.

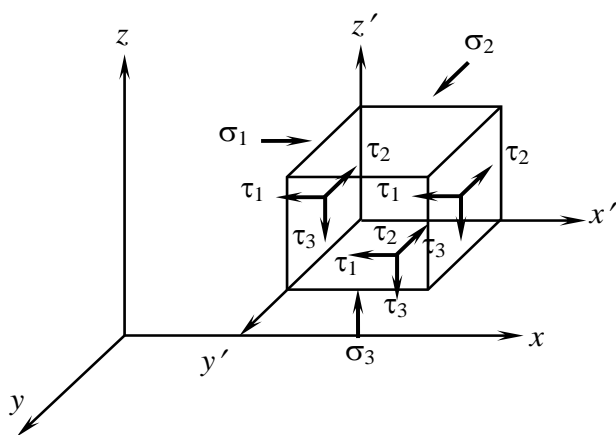


Рис. 3.2. Силы, действующие на элементарный изолированный объем

На поверхности граней элементарного параллелепипеда возникают три различных по величине касательных напряжения и три нормальных составляющих напряжений: вдоль осей x и y – напряжение τ_1 , вдоль осей x и z – τ_2 и вдоль осей y и z – τ_3 . Вдоль оси x действует нормальная составляющая напряжения σ_1 , вдоль оси y – σ_2 и вдоль оси z – σ_3 .

На массу жидкости, находящуюся в изолированном объеме, действуют массовые силы, которые пропорциональны третьей степени размера выделенного объема. При прохождении жидкости через изолированный элементарный объем происходит изменение количества движения массы жидкости. Это изменение вызывает соответствующий импульс сил, действующий на массу жидкости в изолированном объеме.

Изменение количества движения жидкости, протекающей через рассматриваемый неподвижный объем, пропорционально массе, заключенной в этом объеме и третьей степени его линейного размера. Силы, действующие на поверхности граней и равные возникающим напряжениям, умноженным на соответствующие площади, пропорциональны квадрату характерного линейного размера. При стягивании рассматриваемого элементарного объема в точку остаются только силы, связанные с возникающими в этой точке напряжениями.

Рассматривая элементарный объем, можно считать, что он находится в равновесии только под действием сил, возникающих за счет напряжений на его поверхности.

При течении реальных жидкостей в потоке возникают напряжения, которые раскладываются на нормальные и касательные составляющие к площадкам, на которых они действуют. В таком потоке можно рассматривать две системы напряжений: нормальные напряжения (давление), определяемые в любой точке потока; дополнительные напряжения, состоявшие из трех нормальных и трех касательных составляющих; эта система напряжений зависит в каждой точке потока от ориентации площадки, на которой возникают напряжения.

Выберем в точке, находящейся внутри потока и определяемой координатами x, y, z , систему прямоугольных координат x', y', z' . В плоскостях координат возникнут кроме давления еще три нормальные $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и три касательные τ_1, τ_2, τ_3 составляющие дополнительного напряжения. Значения дополнительного напряжения зависят от физических свойств и характера течения жидкости. Изолированная элементарно малая масса жидкости находится в момент времени t в начале координат. Элементарная масса имеет форму параллелепипеда с гранями, параллельными плоскостям координат. Стороны параллелепипеда имеют размеры dx, dy, dz . Рассмотрим проекцию сил, возникающих на гранях изолированного параллелепипеда под действием дополнительных напряжений, на ось x . В момент, когда он вместе с потоком движется мимо центра координат, на гранях, нормальных к оси x , действуют силы: $\sigma_1 dydz$ и $[\sigma_1 + (\partial\sigma_1/\partial x)dx]dydz$. Суммарная проекция силы, определяемая нормальными составляющими напряжений,

$$[\sigma_1 + (\partial\sigma_1/\partial x)dx]dydz - \sigma_1 dydz = \frac{\partial\sigma_1}{\partial x} dx dy dz. \quad (3.7)$$

На гранях, параллельных плоскости координат xOz , действуют напряжения, а, следовательно, и силы вдоль оси x : $\tau_3 dydz$ и $[\tau_3 + (\partial\tau_3/\partial y)dy]dxdz$. Эти напряжения приводят к составляющей вдоль оси x , равной $\frac{\partial\tau_3}{\partial y}dxdydz$.

На гранях, параллельных плоскости координат xOy , на ось Ox проектируются силы $\tau_2 dxdy$ и $[\tau_2 + (\partial\tau_2/\partial y)dz]dxdy$. Вдоль оси эти напряжения дадут составляющую $\frac{\partial\tau_2}{\partial y}dxdydz$.

Суммарная составляющая сил, возникающих на гранях изолированного элемента жидкости за счет дополнительного напряжения в проекции на ось x , равна

$$\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial\tau_3}{\partial y} + \frac{\partial\tau_2}{\partial z} \right) dxdydz \quad (3.8)$$

Аналогично составляющие дополнительного напряжения, действующие на остальных гранях, в проекциях на оси Oy и Oz дадут составляющие сил:

$$\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial\tau_3}{\partial x} + \frac{\partial\tau_1}{\partial z} \right) dxdydz \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial\sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial\tau_1}{\partial y} + \frac{\partial\tau_2}{\partial x} \right) dxdydz \quad (3.9)$$

Прибавляя эти силы, отнесенные к единице массы жидкости к правой части уравнений Эйлера, получим условия динамического равновесия в точке потока при течении реальной жидкости.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dy dz; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} \right) dx dy dz; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} \right) dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Определим теперь силы, возникающие в точке потока за счет вязкости. Проекция на ось Ox сил вязкости, отнесенных к единице объема и действующих в точке, определяемой в потоке координатами x, y, z . Проекция на ось Ox сил вязкости, отнесенных к единице объема и действующих в точке, определяемой в потоке координатами x, y, z :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \mu \left[2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] \quad (3.11)$$

Дифференцируя уравнение неразрывности по x , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \quad (3.12)$$

Тогда уравнение сил, возникающих за счет вязкости жидкости, равно

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (3.13)$$

Аналогично в проекции на оси Oy и Oz дополнительная проекция сил, которые следует учитывать при течении вязких жидкостей, составит:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad \text{и} \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.14)$$

Уравнения Эйлера с учетом этих дополнительных сил примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} (3.15)$$

Полученная система уравнений называется **уравнениями Навье-Стокса**.

Уравнение Навье-Стокса, как и уравнение Эйлера, интегрируются только для некоторых частных случаев, но в последние годы, в связи с развитием различных методов решения подобных задач, полученные уравнения используются все чаще и являются идеальным инструментом, позволяющим получить хороший результат. Наиболее часто для решения уравнений Навье-Стокса применяются **численные методы**.

3.5 Общая схема применения численных методов и их реализация на ЭВМ

На практике найти точное решение данного уравнения довольно сложно, так как искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных функциях. С появлением ЭВМ у исследователей появилась возможность решать подобные задачи численными методами. Под **численными методами** подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и логическим действиям над числами, т.е. к тем действиям, которые выполняет ЭВМ. В зависимости от сложности задачи, заданной точности и т.д. может потребоваться выполнить от нескольких десятков до многих миллиардов действий. В первом случае для

получения решения достаточно иметь калькулятор, во втором – потребуется мощная ЭВМ, особенно, если необходимо получить решение в сжатые сроки.

Решение, полученное численным методом, обычно является приближенным, т.е. содержит некоторую погрешность. Источниками погрешности являются: 1) несоответствие математической задачи изучаемому реальному явлению; 2) погрешность исходных данных; 3) погрешность метода решения; 4) ошибки округлений в арифметических и других действиях над числами.

Погрешность в решении, обусловленная первыми двумя источниками называется **неустранимой**. Эта погрешность может присутствовать, даже если решение поставленной математической задачи найдено точно. Вопрос о том, насколько хорошо описывает математическая модель исследуемое явление, проверяется путем сравнения результатов. Влияние погрешности исходных данных часто удается оценить, применяя различные методы: наименьших квадратов, метод Лагранжа и др.

Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными. Такие погрешности называются **погрешностями метода**. Это происходит потому, что численным методом решается более простая задача, аппроксимирующая исходную задачу. В ряде случаев используемый численный метод строится на базе бесконечного процесса, который в пределе приводит к искомому решению. Однако процесс вычисления всегда прерывается на некотором шаге, что дает приближенное решение.

При решении задач на ЭВМ чаще всего встречаются две ситуации:

1) если количество выполняемых арифметических действий невелико, то, обычно, ошибки округления не проявляются, так как в ЭВМ числа представляются с 10 и более десятичными значащими цифрами, а окончательный результат редко бывает нужен более чем с 5 десятичными значащими цифрами.

2) если задача сложная (уравнения с частными производными), то в этом случае погрешности округления в каждом действии не учитываются, так как они взаимокompенсируются.

Для решения одной и той же задачи могут применяться различные приближенные методы, в зависимости от требуемой точности вычисления. Численный метод может считаться удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникающая за счет округлений, называемая **вычисленной погрешностью**, в несколько раз меньше погрешности метода. Если неустранимая погрешность отсутствует, то погрешность метода должна быть несколько меньше заданной неточности.

К численному методу предъявляется еще ряд других требований. Предпочтение отдается методу, который реализуется с помощью меньшего числа действий, требует меньшей памяти ЭВМ, является логически более простым, что способствует более быстрой его реализации на ЭВМ.

Большинство численных методов основано на замене более сложных объектов, уравнений более простыми. Наиболее удобной в обращении на практике функцией является алгебраический многочлен. Чтобы задать многочлен, нужно задать только конечное число его коэффициентов. Значения многочлена просто вычисляются, его легко продифференцировать, проинтегрировать и т.д. Алгебраические многочлены нашли широкое применение для приближения функций. Применяются многочлены четырех видов: Тейлора, интерполяционные, равномерного приближения, наилучшего среднеквадратичного приближения (метод наименьших квадратов).

Для интегрирования дифференциальных уравнений, которые не выражаются элементарными функциями, используются различные методы: Рунге-Кутты, Монте-Карло, Эйлера, Гауса и др. Нелинейные уравнения решаются методом итераций, деления отрезка пополам и др.

Существует большое число задач, где есть хорошо отработанные численные методы и созданные на их основе стандартные программы

решения задач. Существует библиотека таких программ. Исследователь, которому впервые встретилась единичная задача, как правило, вначале ищет стандартную похожую программу, а затем пытается внести в нее изменения, исходя из имеющихся условий.

На первоначальном этапе исследования обычно используют более простую модель явления, которая позволяет воспользоваться более простыми методами решения с применением стандартных программ. Затем постепенно переходят к более сложным методам и моделям, добиваясь положительного конечного результата.

Наиболее широко численные методы используются в вычислительных экспериментах – исследовании естественнонаучных проблем, средствами вычислительной математики.

Математическому исследованию предшествует выбор физического приближения, т.е. решение вопросов о том, какие факторы надо учесть, а какими можно пренебречь. Далее проводится исследование проблемы методом вычислительного эксперимента, в котором выделяют несколько этапов:

1. Формируется задача, выбирается физическая модель процесса, решается вопрос о том, какие физические величины надо учитывать. Проводится описание физической модели математическим способом (дифференциальные, интегральные и другие уравнения). Полученную математическую модель исследуют методами математической физики, чтобы установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу, существует ли решение поставленной задачи и единственно ли оно.

2. Построение приближенного численного метода решения задачи, т.е. выбора вычислительного алгоритма. Вычислительный алгоритм – последовательность арифметических и логических операций, при помощи которых находится приближенное численное решение математической задачи, сформулированной на первом этапе.

3. Программирование вычислительного алгоритма на ЭВМ.
4. Проведение расчетов на ЭВМ.
5. Анализ полученных численных результатов и последующее уточнение математической модели.

3.6 Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

1. Жидкостные манометры прямого действия.

Чувствительность манометра (см. рис. 3.3) определяется по следующей формуле

$$s = \frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{1}{g\rho},$$

т.е. чувствительность тем больше, чем меньше плотность жидкости. Давление определяется по разности уровней жидкости в трубках *A* и *B*

$$p = \rho g \Delta h \quad (3.16)$$

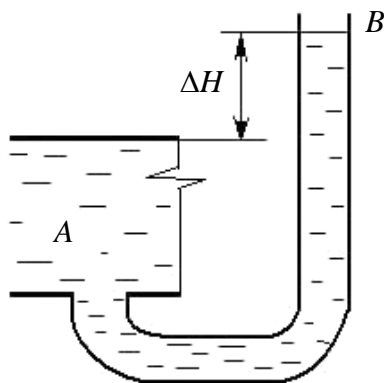


Рис. 3.3. Жидкостный манометр

2. Механические манометр.

Манометр (см. рис. 3.4) состоит из согнутой металлической трубки T , один конец которой соединен с резервуаром, в котором измеряется давление. Конец трубки B соединен с рычагом BC , который поворачивает стрелку. При повороте стрелки она указывает величину давления. При избыточном давлении в трубке T свободный ее конец B начинает распрямляться и приводит в движение стрелку, которая показывает величину давления. Такие манометры отличаются прочностью.

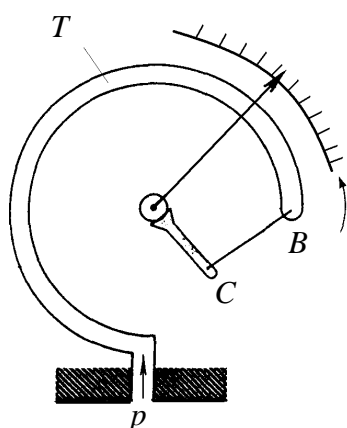


Рис. 3.4. Механический манометр

3. Барометры

Барометры (см. рис. 3.5) используются для измерения атмосферного давления. В лабораторных условиях используется барометр Фортина, позволяющий довольно точно измерить атмосферное давление.

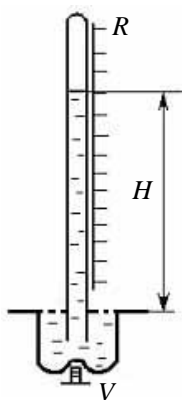


Рис. 3.5. Жидкостный барометр

Принцип действия: барометрическая трубка R опрокинута открытым концом в чашу площадью S . Прибор заполнен ртутью. Чаша прикрыта от попадания пыли тканью, что не мешает прохождению воздуха сквозь нее. Рядом с трубкой расположена шкала, проградуированная в мм. При помощи винта V чаша перемещается по вертикали для того, чтобы совместить свободную поверхность ртути с нулем шкалы. Над уровнем ртути в барометрической трубке сохраняется слабое давление, определяемое давлением насыщенных паров ртути. Давление столба ртути высотой H в барометрической трубке соответствует атмосферному давлению. По шкале определяем величину атмосферного давления в мм.рт.ст.

4. Вакуумметры

Принцип действия механического и жидкостного вакуумметров аналогичен принципу действия механического манометра и жидкостного пьезометра.

5. Трубка Пито–Прандтля

Трубка Пито–Прандтля (см. рис. 3.6) позволяет одновременно определить величину динамического и статического давления в определенной точке потока.

Через отверстие A происходит измерение динамического давления. Через отверстия M измеряется статическое давление жидкости. Жидкость под действием давления поднимается по соответствующим пьезометрическим трубкам до точек A' и M' .

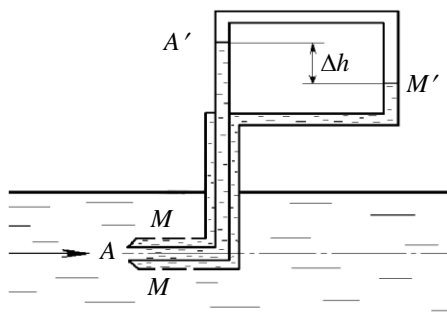


Рис. 3.6. Трубка Пито–Прандтля

Так как плотность газа (воздуха) значительно меньше плотности жидкости, то давлением воздуха можно пренебречь. Разность давления в точках A' и M' будет $\Delta p = \rho gh$. Разность давления Δp зависит от динамического давления на входе в трубку Пито–Прандтля, что следует из уравнения Бернулли для точек A и M :

$$p_M = p_A + \frac{\rho v^2}{2},$$

где v – скорость потока на входе в трубку Пито–Прандтля. Таким образом,

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2},$$

откуда получаем

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.17)$$

Примечания: 1. Трубка Пито–Прандтля измеряет местную скорость в данной точке, поэтому для определения расхода по формуле $Q = vS$ необходимо измерить местную скорость в нескольких точках сечения для нахождения v .

2. Для того, чтобы учесть потери на трение в формулу вводится коэффициент ϕ . Коэффициент ϕ определяется экспериментально для каждой трубки и вносится в паспорт измерительного прибора. Обычно $\phi = 0,97-0,98$.

3. Трубка Пито–Прандтля позволяет измерить довольно большие значения скоростей, при малых скоростях увеличивается погрешность измерения из-за погрешностей манометра ($\pm 0,1$ см).

6. Расходомер Вентури

Расходомер (см. рис. 3.7) служит для измерения расхода жидкости и представляет собой плавную сходящуюся – расходящуюся вставку, к которой подключается дифференциальный манометр. Для вывода расчетной формулы применим уравнение Бернулли для сечения 1-1 перед сужением и сечения 2-2 в сужении ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$).

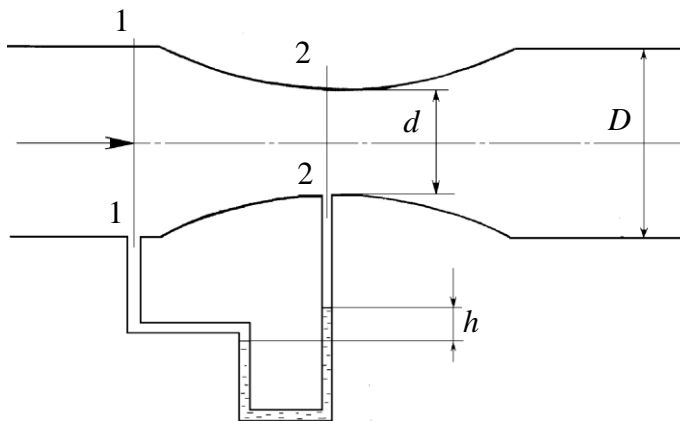


Рис. 3.7. Расходомер Вентури

$$\Delta p = \rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) = \rho \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \right) \quad (3.18)$$

С учетом уравнения неразрывности $v_1 S_1 = v_2 S_2$

$$\Delta p = \rho \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) \quad (3.19)$$

Откуда
$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{1 - (d^4 / D^4)}}, \quad Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{1 - (d^4 / D^4)}}.$$

Зная перепад давления по дифференциальному манометру, можно для данного диаметра вставки и трубы определить расход жидкости, протекающей через трубу.

Для ртутного манометра

$$\Delta p = (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}})gh$$

Обычно расходомеры выпускаются для определенных диаметров труб и его диаметр d и D известны.

В этом случае формула упрощается

$$Q = S\mu\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (3.20)$$

где μ – коэффициент, учитывающий конструктивные особенности прибора, в частности $\frac{d^4}{D^4}$, и вносится в паспорт прибора.

7. Ротаметры

Ротаметры (см. рис. 3.8) используются для измерения расхода жидкостей, имеющих слабые коррозионные свойства. Ротаметр состоит из сужающейся стеклянной трубки и металлического конусообразного измерителя. На измеритель действуют следующие силы: сила тяжести G , архимедова сила F_A , сила динамического давления жидкости F . Для измерителя, находящегося в покое, можно записать

$$G = F + F_{A \text{ или }} \quad mg = \rho_{\text{ж}} Vg + \frac{\rho_{\text{ж}} v^2}{2} S, \quad (3.21)$$

где ρ – плотность жидкости; V – объем измерителя; v – скорость течения жидкости; S – площадь сечения измерителя.

Сила тяжести и архимедова сила – величины постоянные, поэтому сила динамического давления жидкости при любом расходе $Q = vS$ будет также постоянной.

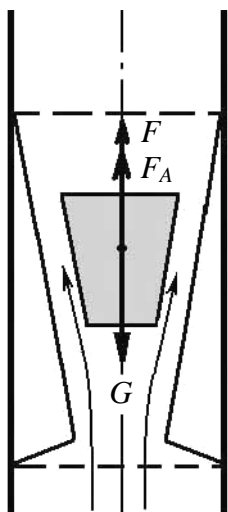


Рис. 3.8. Ротаметр

При уменьшении расхода измеритель опускается, уменьшается сечение для прохождения жидкости, соответственно скорость увеличивается, сохраняя постоянным значение силы динамического давления. Если мы проградуируем стеклянную поверхность ротаметра в единицах измерения расхода, то в зависимости от высоты поднятия измерителя можно определять расход.