

Котельников А.Г.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть II

**ТЕОРИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И
НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ**

Конспект лекций

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1

| | |
|---|----|
| Общие положения теории переходных процессов в линейных цепях..... | 3 |
| Классический метод расчета переходных процессов..... | 5 |
| Примеры расчета переходных процессов в цепях первого порядка..... | 7 |
| Примеры расчета переходных процессов в цепях второго порядка..... | 10 |
| Расчет цепей при некорректных начальных условиях..... | 15 |
| Особенность расчета переходных процессов классическим методом в цепях со взаимной индуктивностью..... | 17 |

ЛЕКЦИЯ 2

| | |
|---|----|
| Операторный метод расчета переходных процессов..... | 18 |
| Свойства преобразования Лапласа..... | 21 |
| Операторные схемы замещения элементов цепи..... | 22 |
| Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме..... | 22 |
| Примеры расчета переходных процессов операторным методом..... | 24 |

ЛЕКЦИЯ 3

| | |
|--|----|
| Модификации методов расчета переходных процессов..... | 30 |
| Комбинированный метод..... | 30 |
| Метод сведения к нулевым начальным условиям (случай замыкания)..... | 32 |
| Метод сведения к нулевым начальным условиям (случай размыкания)..... | 35 |

ЛЕКЦИЯ 4

| | |
|---|----|
| Метод переменных состояния..... | 37 |
| Составление уравнений состояния..... | 37 |
| Аналитическое решение уравнения состояния..... | 38 |
| Численное решение уравнения состояния (явный метод Эйлера)..... | 40 |

ЛЕКЦИЯ 5

| | |
|--|----|
| Линейные электрические цепи при импульсных воздействиях | |
| Расчет реакции цепи на одиночный импульс воздействия (метод наложения)..... | 42 |
| Расчет реакции цепи на периодическое импульсное воздействия (метод сопряжения интервалов)..... | 43 |
| Расчет переходных процессов в цепях с периодической коммутацией (метод припасовывания)..... | 45 |

ЛЕКЦИЯ 6

| | |
|---|----|
| Нелинейные цепи. Введение..... | 50 |
| Характеристики НЭ..... | 50 |
| Классификация характеристик НЭ..... | 53 |
| Статические и динамические параметры..... | 54 |

ЛЕКЦИЯ 7

| | |
|---|----|
| Графический метод расчета НЦ постоянного тока..... | 55 |
| Графо-аналитический метод расчета НЦ постоянного тока... .. | 57 |
| Аналитический метод расчета НЦ постоянного тока..... | 58 |
| Численный метод расчета НЦ постоянного тока... .. | 58 |
| Метод кусочно-линейной аппроксимации..... | 61 |
| Коэффициент стабилизации..... | 63 |

ЛЕКЦИЯ 8

| | |
|--|----|
| Графический метод расчета НЦ переменного тока..... | 65 |
| Расчет цепей с нелинейным инерционным элементом..... | 65 |
| Метод сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристики НЭ..... | 66 |
| Пример 1 Расчет нелинейной резистивной цепи переменного тока..... | 67 |
| Пример 2 Расчет диодно-резистивной цепи..... | 70 |
| Пример 3 Емкостной фильтр на выходе однополупериодного выпрямителя..... | 74 |
| Пример 4 Катушка индуктивности с прямоугольной характеристикой намагничивания..... | 76 |
| Пример 5 Конденсатор с прямоугольной кулон-вольтной характеристикой в цепи переменного тока | 79 |
| Пример 6 Дроссель на выходе однополупериодного выпрямителя..... | 82 |

ЛЕКЦИЯ 9

| | |
|--|----|
| Катушка со сталью в цепи переменного тока (метод эквивалентных синусоид)..... | 85 |
| Определение параметров схемы замещения катушки со сталью по кривым удельных потерь..... | 87 |
| Вывод формулы разложения..... | 88 |
| Расчет режима катушки со сталью методом эквивалентных синусоид | |
| Пример 1..... | 89 |
| Пример 2 | 90 |

ЛЕКЦИЯ 10

| | |
|---|----|
| Феррорезонансные явления..... | 91 |
| Принцип действия феррорезонансного стабилизатора..... | 92 |

ЛЕКЦИЯ 1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ.

В электрических цепях могут происходить события, приводящие к изменениям параметров или в топологии схемы. Такие изменения называются коммутациями. Примером коммутации могут быть:

- подключение (отключение) источника;
- короткое замыкание в какой-либо ветви;
- резкое изменение амплитуды или фазы источника.

На схемах для обозначения коммутации используют ключ с указанием стрелочкой вида коммутации (замыкание, размыкание) и момента времени.

Ключ считается идеальным элементом. Сопротивление ключа в открытом (замкнутом)



состоянии принимается равным нулю, а в закрытом (разомкнутом) – бесконечности. Время коммутации есть бесконечно малая величина, то есть переход из одного состояния в другое происходит мгновенно.

Момент коммутации является временной границей между, так называемыми, до коммутационным (предшествующим) и переходным процессами (ПП). Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, но на практике это время считают конечным в силу свойства экспоненциального затухания переходного процесса. Во время переходного процесса электрическая величина стремится к некоторому установившемуся значению, по достижению которого с точностью до 99%, переходный процесс считают закончившимся. Дальнейшее состояние цепи называют установившимся или принужденным процессом.

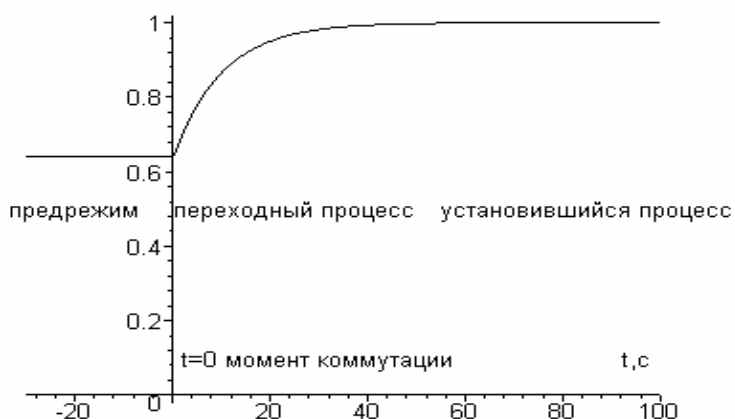


Рис. 1.1

Проектирование и эксплуатация электротехнических устройств, как правило, требует учета значений электрических величин в переходных процессах. Это обусловлено тем, что, например, в момент пуска двигателя в его обмотках могут возникать пусковые токи, в несколько раз превышающие номинальные токи. Возможны в цепях и коммутационные перенапряжения, способные вызвать пробой изоляции, короткое замыкание или выход из строя элементов.

Расчет переходных процессов основывается на решении (интегрировании) дифференциального уравнения, которым искомая величина (ток, напряжение, потокосцепление, заряд) связана с независимой переменной t – временем. Это уравнение

получается из системы интегро-дифференциальных уравнений, которыми можно описать цепь по законам Кирхгофа. Оно называется линейным обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением (ОДУ) n -го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad (1.1)$$

Для его однозначного разрешения должны быть определены n начальных условий (НУ) (1.2), которым удовлетворяют постоянные интегрирования:

$$x(0_+), \frac{d}{dt} x(0_+), \frac{d^2}{dt^2} x(0_+), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(0_+). \quad (1.2)$$

Из теории дифференциальных уравнений мы знаем, что решением уравнения (1.1) является сумма его частного решения для $t \rightarrow \infty$ и общего решения однородного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t) = 0 \quad (1.3)$$

Частное решение уравнения (1.1) называют установившейся или “принуждённой” составляющей, а решение уравнения (1.3) называют свободной составляющей

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{усл}(t) \quad (1.4)$$

Ток свободной составляющей переходного процесса обусловлен разницей энергий реактивных элементов до коммутации и в установившемся режиме. Ток принужденной составляющей обусловлен действием источников в цепи после коммутации.

Рассмотрим пример составления ОДУ по законам Кирхгофа и компонентных уравнений элементов цепи.

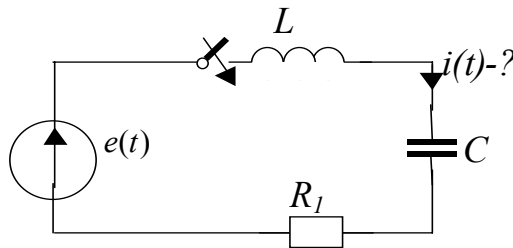


Рис. 1.2

$$u_l(t) + R \cdot i(t) + u_c(t) = R \cdot i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + u_c = e(t),$$

$$u_c = e(t) - R \cdot i(t) - L \frac{d}{dt} i(t),$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_c(t) = C \frac{d}{dt} (e(t) - R \cdot i(t) - L \frac{d}{dt} i(t)) = C \frac{d}{dt} e(t) - RC \frac{d}{dt} i(t) - LC \frac{d^2}{dt^2} i(t),$$

$$\frac{d^2}{dt^2} i(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} e(t), \quad \text{НУ: } i(0_+) = 0, \frac{d}{dt} i(0_+) = \frac{e(0_+)}{L}.$$

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Практический метод расчета ПП, использующий представление решения в виде суммы принужденной и свободной составляющих, принято называть классическим. Рассмотрим этапы метода.

1. Выбираем положительные направления токов в ветвях схемы.
2. Записываем искомую величину в виде суммы свободной и установившейся (принужденной) составляющих $x(t) = x_{св}(t) + x_{уст}(t)$.
3. Любым известным методом рассчитываем установившийся режим в цепи после коммутации.
4. Находим свободную составляющую:

4.1. Составляем характеристическое уравнение.

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0;$$

Рассмотрим два способа составления характеристического уравнения:

а) на основе алгебраизации однородного уравнения (1.3), т.е. путём замены в однородном уравнении производной $\frac{d^n}{dt^n}x(t)$ на комплексную переменную p^n ;

б) на основе составления входного операторного сопротивления цепи после коммутации, т.е. **для цепи в ветвях, которой возникнут переходные токи**. Правило нахождения операторного сопротивления:

1. Строим операторную схему замещения цепи после коммутации. Для этого делаем замену элементов цепи на их операторные аналоги

$$C \rightarrow \frac{1}{pC}, L \rightarrow Lp, R \rightarrow R,$$

источники ЭДС заменяются короткой, ветви с источниками тока разрываются.

2. Представим цепь в виде двухполюсника, сделав разрыв в ветви операторной схемы замещения, и находим его операторное сопротивление. Положение точки разрыва должно быть таким, чтобы в результате разрыва сопротивление двухполюсника было образовано теми элементами, в которых протекают переходные токи.

Пример.

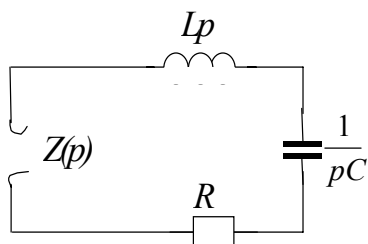


Рис. 1.3.

Из входного операторного сопротивления

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{pC} \text{ получаем}$$

характеристическое уравнение $Z(p) = 0$

- 4.2. Находим корни характеристического уравнения и по их виду записываем общее решение однородного дифференциального уравнения, т.е. общий вид свободной составляющей

$$x_{св}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{n_k-1} t^s e^{\alpha_k t} (A_{C_{ks}} \cos \beta_k t + A_{S_{ks}} \sin \beta_k t), \quad (1.5)$$

где

n -порядок цепи (кол-во корней характеристического уравнения);

$p_k = \alpha_k + j\beta_k$ - корни характеристического уравнения;

$A_{C_{ks}}, A_{S_{ks}}$ - постоянные интегрирования;

n_k – кратность k -го корня.

Пусть, для примера, в цепи 10-го порядка получились такие корни характеристического уравнения:

$$p_1=p_2=p_3, p_4=p_5, p_6, p_7, p_8, p_9=\alpha+j\beta, p_{10}=\alpha-j\beta,$$

тогда общий вид свободной составляющей будет

$$\begin{aligned} x_{св}(t) = & (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) e^{p_1 t} + (A_4 + A_5 t) e^{p_4 t} + \\ & + A_6 e^{p_6 t} + A_7 e^{p_7 t} + A_8 e^{p_8 t} + \\ & + (A_9 \cos \beta t + A_{10} \sin \beta t) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

4.3. Для нахождения n постоянных интегрирования составляем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} x(0_+) &= x_{св}(0_+) + x_{уст}(0_+), \\ \frac{d}{dt} x(0_+) &= \frac{d}{dt} (x_{св}(0_+) + x_{уст}(0_+)), \\ \frac{d^2}{dt^2} x(0_+) &= \frac{d^2}{dt^2} (x_{св}(0_+) + x_{уст}(0_+)), \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(0_+) &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (x_{св}(0_+) + x_{уст}(0_+)), \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Значения величин, стоящих в левой части этого уравнения называются зависимыми начальными условиями (ЗНУ), которые находятся с помощью независимых начальных условий (ННУ), уравнений Кирхгофа и компонентных уравнений.

ННУ - это токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах (переменные состояния) в момент времени непосредственно после коммутации $t = 0_+$. В цепи после коммутации переменные состояния могут быть найдены из расчета цепи до коммутации любым известным методом расчета цепей потому, что для них выполняются законы коммутации. Эти законы основаны на принципе непрерывности энергии электромагнитного поля. Принцип непрерывности устанавливает невозможность скачкообразного изменения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях.

Первый закон коммутации: Потокосцепление и ток в индуктивном элементе в момент коммутации не могут измениться скачком

$$\begin{aligned} \psi(0_+) &= \psi(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \text{ для линейной цепи} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Второй закон коммутации: Заряд (напряжение) на ёмкости не могут меняться скачком, т.е. заряд (напряжение) непосредственно до коммутации равен заряду (напряжению) непосредственно после коммутации

$$\begin{aligned} q(0_+) &= q(0_-) \\ u_c(0_+) &= u_c(0_-) \text{ для линейной цепи} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для нахождения ЗНУ в цепи после коммутации составляется система уравнений по законам Кирхгофа, из которой при известных ННУ находят искомые токи $x(0_+)$. Кроме того, находят токи в емкостях и напряжения на индуктивностях. Далее с помощью компонентных уравнений вычисляют первую производную напряжений на конденсаторах и токов в индуктивностях

$$u'_C(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C}, \quad i'_L(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L}.$$

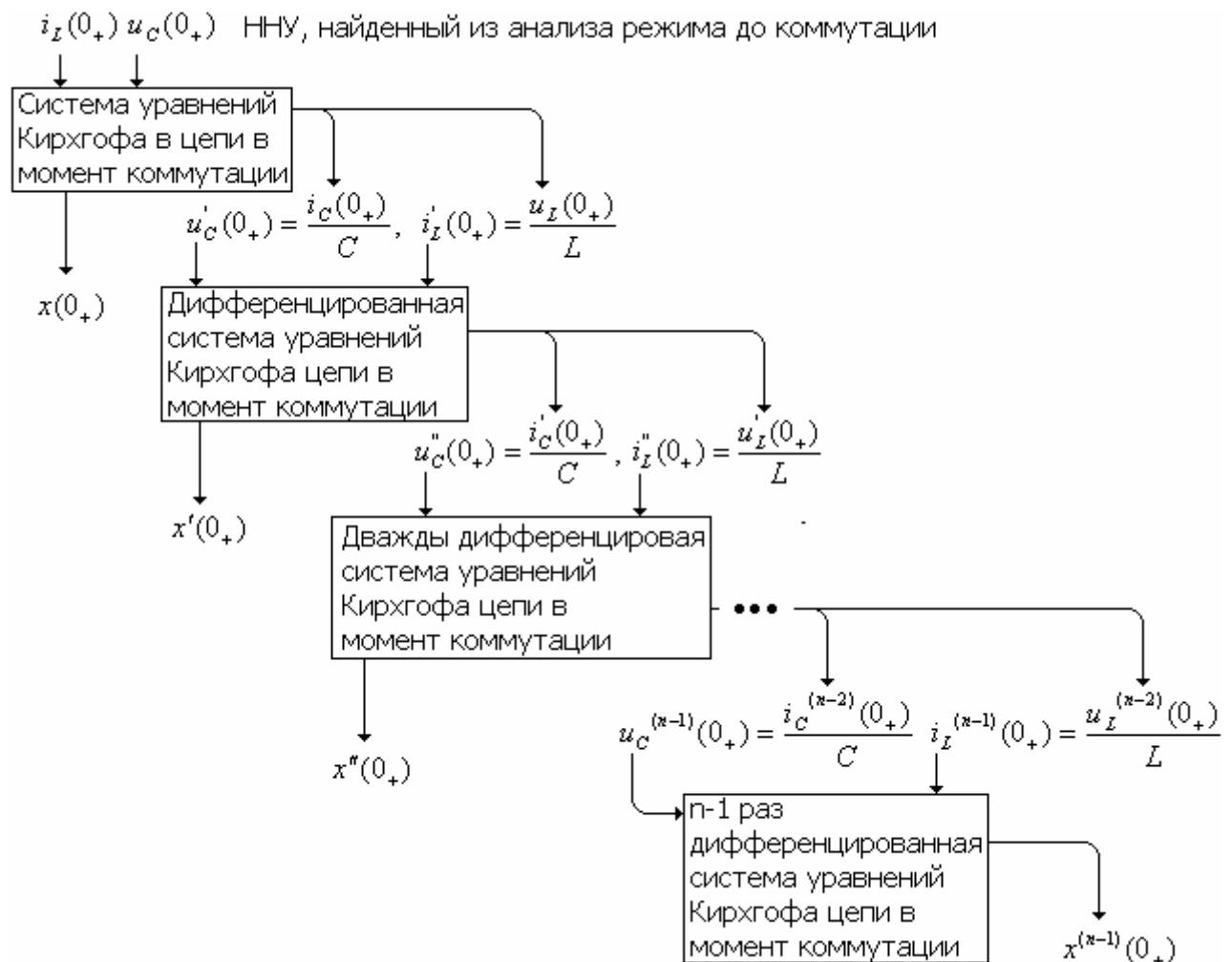
Первую производную искомых токов $\frac{d}{dt}x(0_+)$ находят из системы уравнений Кирхгофа после их дифференцирования, а также найденных производных напряжений на конденсаторах и производных токов индуктивностей. Также вычисляются производные токов в емкостях и напряжений на индуктивностях, а затем, с помощью компонентных уравнений вычисляются вторую производную напряжений на конденсаторах и токов в индуктивностях

$$u''_C(0_+) = \frac{i'_C(0_+)}{C}, \quad i''_L(0_+) = \frac{u'_L(0_+)}{L}.$$

В общем, $n-1$ - ая производная $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(0_+)$ находится аналогично из системы уравнений Кирхгофа цепи после коммутации после её дифференцирования $n-1$ раз при найденных на предыдущем этапе n - ых производных напряжения на конденсаторах и токов в индуктивностях

$$u_C^{(n-1)}(0_+) = \frac{i_C^{(n-2)}(0_+)}{C} \quad \text{и} \quad i_L^{(n-1)}(0_+) = \frac{u_L^{(n-2)}(0_+)}{L}.$$

Для наглядности приведем схему нахождения ЗНУ.



4.4. Решаем систему линейных уравнений п. 4.3. относительно постоянных интегрирования.

5. Записываем ответ, подставляя найденные постоянные интегрирования в выражение п. 4.2. и строим график.

ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

Пример 1. Включение дросселя на постоянное напряжение.

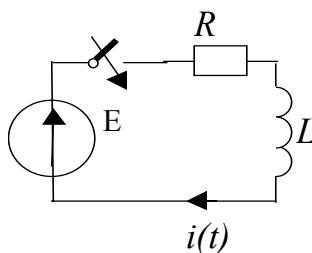


Рис. 1.4.

1. Записываем решение как сумму свободной и установившейся составляющих

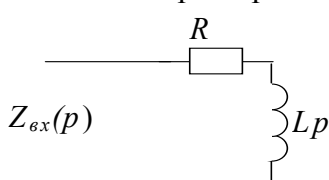
$$i(t) = i_{св}(t) + i_{уст}(t).$$

2. Находим установившуюся составляющую

$$i_{уст}(t) = \frac{E}{R}.$$

3. Находим свободную составляющую.

3.1. Методом входного операторного сопротивления составляем характеристическое уравнение цепи после коммутации.



Из $Z_{вх}(p)=0$ получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} R + Lp &= 0 \\ p &= -R/L, \text{ с}^{-1} \end{aligned}$$

3.2. По виду корня характеристического уравнения определяем общий вид свободной составляющей

$$i_{св}(t) = Ae^{pt}$$

3.3. Определяем постоянную интегрирования. Из цепи до коммутации получим ННУ $i(0_-)=0$, А. По первому закону коммутации получим ток в индуктивности в $t=0_+$ $i(0_+) = i(0_-)$. Тогда после подстановки в уравнение п. 1, получим

$$0 = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0}$$

$$A = -\frac{E}{R}$$

Ответ: $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, где $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R}, \text{ сек.}$ При записи ответа

используют величину постоянной времени переходного процесса τ , которая имеет размерность времени и характеризует скорость затухания свободной составляющей. Здесь

τ равна времени в течении, которого величина уменьшается в $e=2.71\dots$ раз. На практике принято ожидать время окончания переходного процесса в пределах $(3-5)\tau$. Строим график тока:

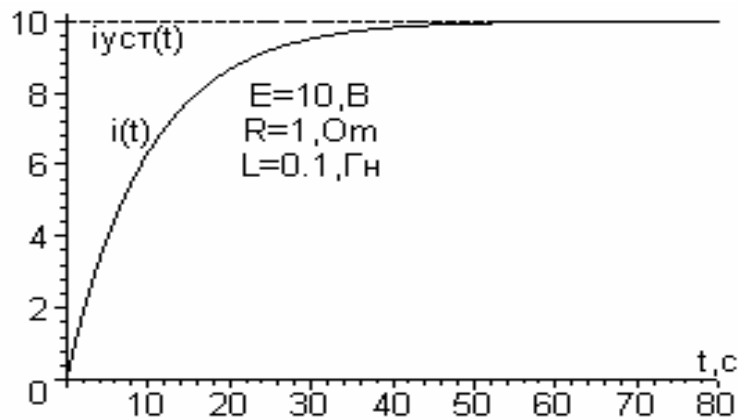
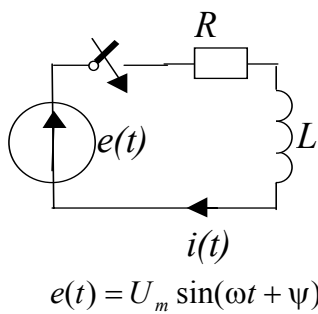


Рис. 1.5.

Пример 2. Включение дросселя на синусоидальное напряжение.



ψ -фаза коммутации

Рис. 1.6.

1. Записываем решение как сумму свободной и установившейся составляющих

$$i(t) = i_{св}(t) + i_{уст}(t).$$

2. Установившийся ток находим комплексным методом.

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + j(\omega L)} = \frac{U_m \angle \psi}{Z \angle \varphi} = \frac{U_m}{Z} \angle (\psi - \varphi), A$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \text{ Ом } \varphi = \text{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right), c^{-1}$$

$$i_{уст}(t) = I_m \sin(\omega t + (\psi - \varphi)) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + (\psi - \varphi))$$

3. Находим свободную составляющую.

- 3.1. Определение общего вида свободной составляющей смотри в примере 1.

$$i_{св}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 3.2. Определяем постоянную интегрирования.

$$i(t) = i_{св}(t) + i_{уст}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + (\psi - \varphi))$$

$$i(0_+) = i_{св}(0_+) + i_{уст}(0_+) = A + \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi)$$

По первому закону коммутации $i(0_+) = i(0_-)$ имеем ток в цепи при $t=0_+$ равным 0.

Тогда

$$0 = A + \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi),$$

$$A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi).$$

4. Записываем ответ и строим график:

$$i(t) = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + (\psi - \varphi)) =$$

$$-I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} + I_m \sin(\omega t + (\psi - \varphi)), \text{ A.}$$

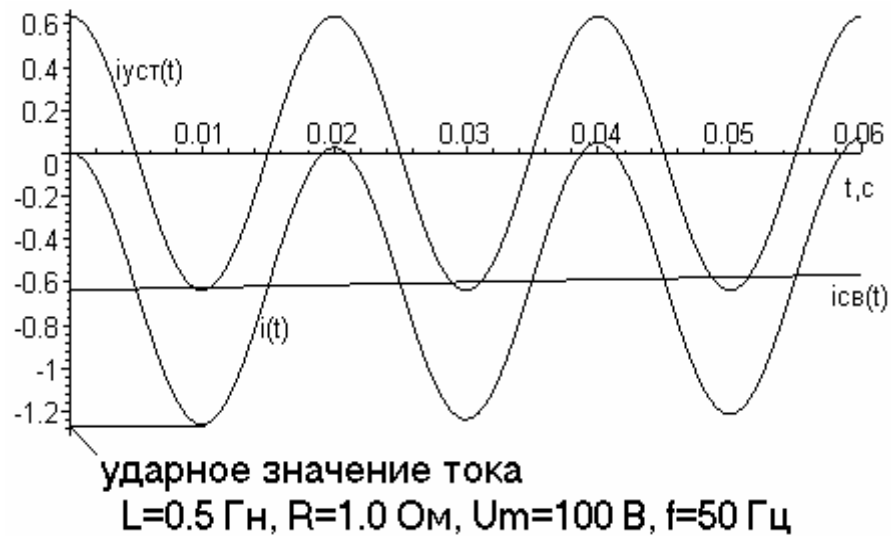


Рис. 1.7.

Здесь следует заметить, что интенсивность переходного процесса зависит не только от величины источника и параметров, но ещё и от фазы коммутации. Для параметров, приведённых на графике, имеет место близость к максимально возможному переходному процессу при фазе коммутации $\Psi \rightarrow 180^\circ$. При слабом затухании (высокой добротности дросселя $L \rightarrow \infty, R \rightarrow 0$) с увеличением постоянной времени угол сопротивления $\varphi \rightarrow 90^\circ$, тогда при $\Psi \rightarrow 180^\circ$ будет иметь место максимальная интенсивность переходного процесса, при которой ток дросселя достигает ударного значения, равного удвоенной амплитуде установившейся величины $i_{y0} = 2I_m$.

Пример 3. Разряд конденсатора на резистор.

1. Записываем решение как сумму свободной и установившейся составляющих

$$u_c(t) = u_{c_{св}}(t) + u_{c_{уст}}(t).$$

2. Находим установившуюся составляющую

$$u_{c_{уст}}(t) = 0.$$

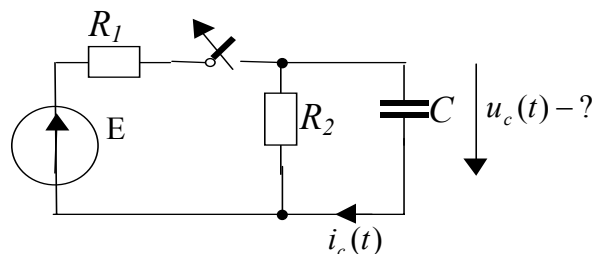


Рис. 1.8.

3. Находим свободную составляющую.

3.1. Методом входного операторного сопротивления составляем характеристическое уравнение цепи после коммутации

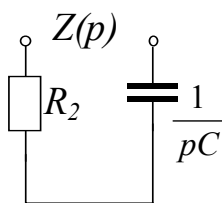


Рис. 1.9.

$Z_{\text{ex}}(p)=0$ – характеристическое уравнение

$$R + 1/(pC) = 0$$

$$p = -1/(RC), \text{ c}^{-1}$$

- 3.2. По виду корня характеристического уравнения определяем общий вид свободной составляющей

$$i_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$$

- 3.3. Определяем постоянную интегрирования. Из цепи до коммутации получим ННУ $U_C(0_-) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, В. По второму закону коммутации $U_C(0_+) = U_C(0_-)$ получим напряжение на ёмкости в $t=0_+$. Тогда уравнение п.1 для $t=0_+$ примет вид

$$E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 + Ae^{-\frac{1}{RC} \cdot 0}$$

$$A = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ответ: $u_c(t) = 0 + E \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{1}{RC}t} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$, где $\tau = RC$, сек. Строим график

напряжения и тока в ёмкости:

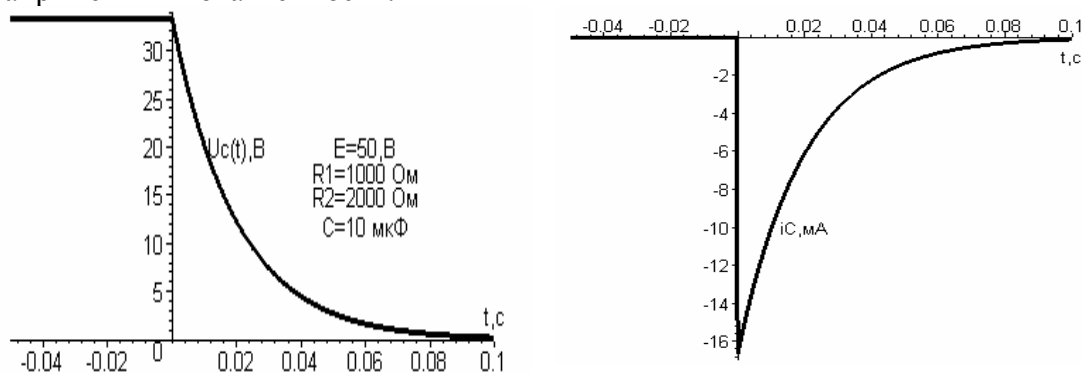


Рис. 1.10.

ПРИМЕР РАСЧЁТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Разряд конденсатора на дроссель.

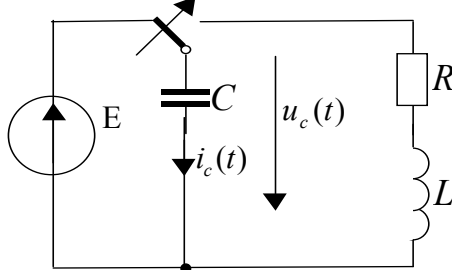


Рис. 1.11.

1. Записываем решение как сумму свободной и установившейся составляющей

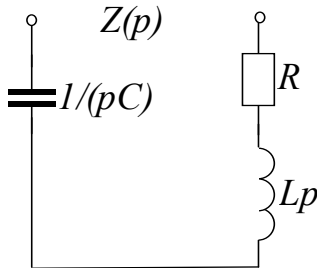
$$u_c(t) = u_{c\text{св}}(t) + u_{c\text{уст}}(t).$$

2. В установившемся режиме ёмкость полностью разрядится и

$$u_{c\text{уст}}(t) = 0, B$$

3. Находим свободную составляющую

3.1. Характеристическое уравнение находим методом операторного сопротивления. Для этого составим операторную схему замещения цепи после коммутации, соответствующую однородному ОДУ.



$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{pC} -$$

характеристическое сопротивление.

$$R + Lp + \frac{1}{pC} = p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 -$$

характеристическое уравнение.

$$p_{1,2} = \frac{-R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4/(LC)}}{2} -$$

корни характеристического уравнения.

В зависимости от соотношения величин параметров цепи R, L и C возможны три вида корней:

а) различные корни $p_1 \neq p_2$ при $(\frac{R}{L})^2 > \frac{4}{LC}$;

б) кратные корни $p_1 = p_2$ при $(\frac{R}{L})^2 = \frac{4}{LC}$;

в) комплексно-сопряжённые корни $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, при $(\frac{R}{L})^2 < \frac{4}{LC}$, где

$$\alpha = -\frac{R}{2L}, \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} \text{ - частота свободных колебаний.}$$

Далее расчёт ведём для всех трёх случаев отдельно.

а) **АПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС** (корни различные):

Свободная составляющая при таком виде корней будет иметь вид

$$u_{c\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Находим постоянные интегрирования из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c(0_+) = u_{c\text{св}}(t) + u_{c\text{уст}}(t) = A_1 e^{p_1 0} + A_2 e^{p_2 0} + 0 = A_1 + A_2 \\ \frac{d}{dt} u_c(0_+) = A_1 p_1 e^{p_1 0} + A_2 p_2 e^{p_2 0} + 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{array} \right\}$$

$u_c(0_+)$ находим с помощью второго закона коммутации $u_c(0_+) = u_c(0_-)$. Ёмкость до коммутации была заряжена до э.д.с., тогда $u_c(0_+) = E, B$.

$\frac{d}{dt} u_c(0_+)$ находим с помощью компонентного уравнения и первого закона коммутации.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_c(0_+) &= \frac{1}{C}i(0_+) \\ i(0_+) &= i(0_-), \quad i(0_-) = 0 \\ \frac{d}{dt}u_c(0_+) &= 0, \quad \frac{B}{c} \\ \left\{ \begin{aligned} E &= A_1 + A_2 \\ 0 &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

Решаем эту систему уравнений:

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{Ep_2}{p_1 - p_2} \\ A_2 &= \frac{Ep_1}{p_1 - p_2}\end{aligned}$$

Ответ: $u_c(t) = \frac{E}{p_1 - p_2}(-p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}).$

Строим график

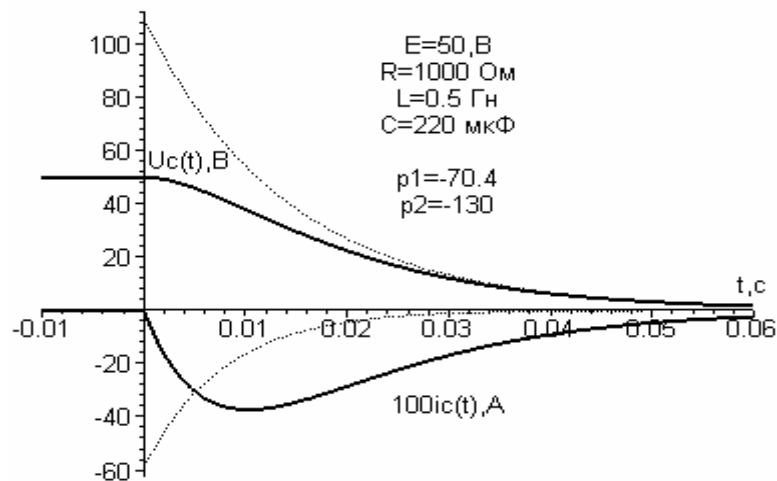


Рис. 1.12.

б) **КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС** (корни комплексно-сопряжённые):

Свободная составляющая при таком виде корней будет иметь вид

$$u_{c\text{св}}(t) = (A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

Находим постоянные интегрирования из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} u_c(0_+) &= u_{c\text{св}}(t) + u_{c\text{узм}}(t) = A_1 + 0 = A_1 \\ \frac{d}{dt}u_c(0_+) &= (-A_1\beta \sin(\beta 0) + A_2\beta \cos(\beta 0))e^{\alpha 0} + \\ &+ \alpha(A_1 \cos(\beta 0) + A_2 \sin(\beta 0))e^{\alpha 0} + 0 = \beta A_2 + \alpha A_1 \end{aligned} \right\}$$

Нахождение начальных условий $u_c(0_+) = E$, $\frac{d}{dt}u_c(0_+) = 0$ было рассмотрено в случае а)

$$\begin{cases} E = A_1 \\ 0 = \beta A_2 + \alpha A_1 \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений:

$$A_1 = E$$

$$A_2 = -\frac{\alpha E}{\beta}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= (E \cos(\beta t) - \frac{\alpha E}{\beta} \sin(\beta t)) e^{\alpha t} = \frac{E}{\beta} (\beta \cos(\beta t) - \alpha \sin(\beta t)) e^{\alpha t} = \\ &= A \sin(\beta t + \psi) e^{\alpha t}, \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \psi = \arctg\left(\frac{A_1}{A_2}\right), \end{aligned}$$

Строим график: $u_c(t)$.

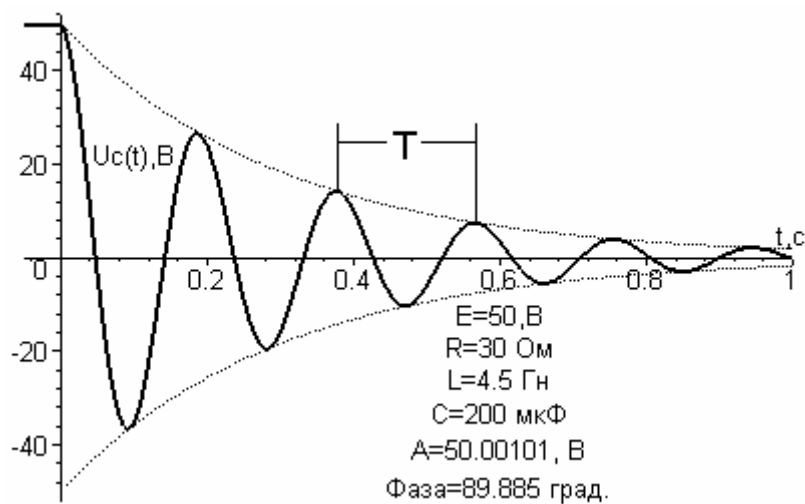


Рис. 1.13.

$$T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ - период свободных колебаний,}$$

$$\Delta = \frac{U_c(t)}{U_c(t+T)} = e^{\alpha T} \text{ - декремент затухания.}$$

в) КРИТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС (корни кратные):

Свободная составляющая при таком виде корней будет иметь вид

$$u_{c\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt}$$

Находим постоянные интегрирования из системы уравнений:

$$\begin{cases} u_c(0_+) = u_{c\text{св}}(t) + u_{c\text{усм}}(t) = A_1 + 0 = A_1 \\ \frac{d}{dt} u_c(0_+) = A_2 e^{\alpha 0} + p(A_1 + A_2 0) e^{\alpha 0} + 0 = A_2 + A_1 p \end{cases}$$

Нахождение начальных условий $u_c(0_+) = E$, $\frac{d}{dt}u_c(0_+) = 0$ было рассмотрено в случае а)

$$\begin{cases} E = A_1 \\ 0 = A_2 + A_1 p \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений:

$$A_1 = E$$

$$A_2 = -Ep = \frac{ER}{2L}$$

Ответ:

$$u_c(t) = (E - pt)e^{pt} = E\left(1 + \frac{R}{2L}t\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Строим график: $u_c(t)$.

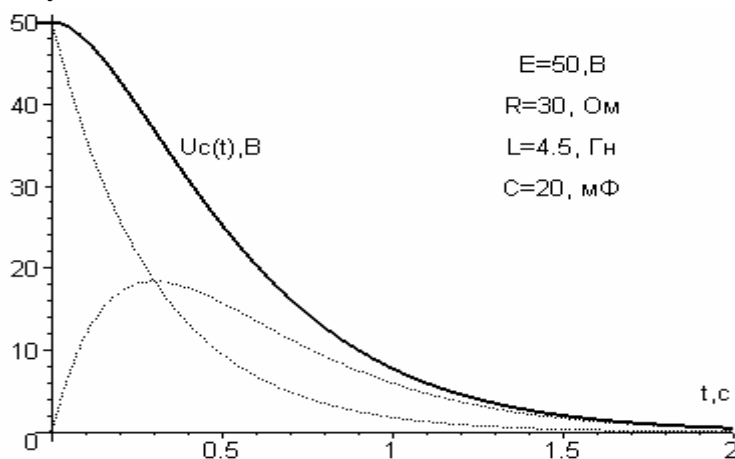


Рис. 1.14.

РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕКОРРЕКТНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ.

Первый обобщенный закон коммутации.

Существуют такие виды коммутаций, при которых возникает конфликт между законами коммутации и законами Кирхгофа. Например, в цепи см. рисунок 1.15 после коммутации по первому закону Кирхгофа для узла a должно иметь место равенство токов в индуктивностях L_1 и L_2 , это станет возможным при нарушении первого закона коммутации, поскольку до размыкания значения токов были различными. Разрешение этого противоречия, очевидно, возможно путем применения принципа непрерывности

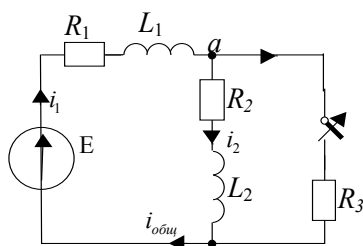


Рис. 1.15.

электромагнитного поля на все элементы цепи. Отсюда, следует невозможность изменения скачком магнитного потока индуктивных элементов L_1 и L_2 .

$$\psi_1(0_-) + \psi_2(0_-) = \psi_{общ}(0_+), \quad (1.9)$$

для линейной цепи

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i_{общ}(0_+). \quad (1.10)$$

Формулируем первый обобщенный закон коммутации:

Потокосцепление любого замкнутого контура в момент после коммутации ($t=0_+$) равно алгебраической сумме потокосцеплений всех входящих в него индуктивных элементов, которые последние имели непосредственно перед коммутацией ($t=0_-$).

$$i_{общ} = i_{уст} + i_{св},$$

$$i_{уст} = \frac{E}{R_1 + R_2},$$

$$i_{св} = A e^{pt}, \quad p = -\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2},$$

$$i_{общ} = i_{уст} + i_{св} = \frac{E}{R_1 + R_2} + A e^{pt}$$

$$A = i_{общ}(0_+) - \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$i_{общ}(0_+)$ - находим по первому обобщенному закону коммутации.

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i_{общ}(0_+)$$

$$i_{общ}(0_+) = \frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{(L_1 + L_2)}$$

$$A = \frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{(L_1 + L_2)} - \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Ответ: $i_{общ}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + \left(\frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{(L_1 + L_2)} - \frac{E}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t}.$

Строим график:

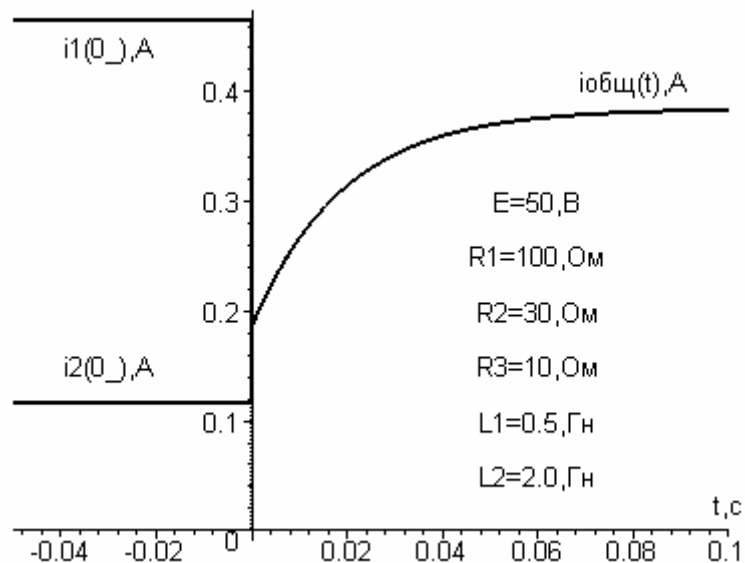


Рис. 1.16.

Особенностью расчёта цепей данного класса является то, что на его точность окажет сильное влияние идеализация ключевого и индуктивного элементов. Если допустить мгновенность размыкания, то на индуктивности возникнет бесконечно большое напряжение, но на практике такое невозможно. При резком изменении тока индуктивности может загореться дуга в размыкателе или возникнуть высокочастотный колебательный контур, образованный индуктивностью и распределённой межвитковой ёмкостью катушки. Часть энергии при такой коммутации неизбежно превратится в теплоту электрической дуги или будет излучаться в виде электромагнитных волн. Это означает, что электрическую цепь нельзя практически рассматривать как абсолютно замкнутую систему и нельзя ожидать точного выполнения обобщенного закона коммутации. Чем ближе свойства элементов цепи к своим идеализациям, тем точнее обобщенный закон коммутации описывает процесс в цепи.

Второй обобщённый закон коммутации.

Изменение зарядов на всех параллельно включенных конденсаторах за время коммутации равно нулю, т. е. Сумма зарядов конденсаторов перед коммутацией ($t=0_-$) равна сумме их зарядов непосредственно после коммутации ($t=0_+$).

$$\sum q(0_-) = \sum q(0_+). \quad (1.11)$$

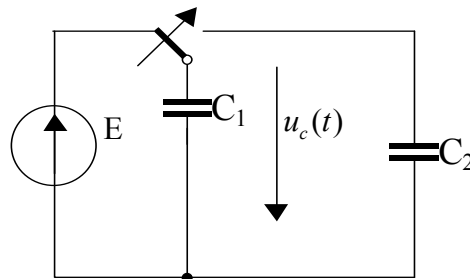


Рис. 1.17.

Установившееся значение напряжение на ёмкости находим по второму обобщённому закону коммутации.

$$\begin{aligned} \text{Заряд до коммутации } q_1(0_-) &= C_1 u_{c1}(0_-) = C_1 E, \\ q_2(0_-) &= C_2 u_{c2}(0_-) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Заряд после коммутации } q(0_+) = (C_1 + C_2) u_c(0_+).$$

$$\begin{aligned} q_1(0_-) + q_2(0_-) &= q(0_+) \\ C_1 u_{c1}(0_-) + C_2 u_{c2}(0_-) &= (C_1 + C_2) u_c(0_+) \\ u_{уст} = u_c(0_+) &= \frac{C_1 E}{C_1 + C_2}. \end{aligned}$$

Строим график:

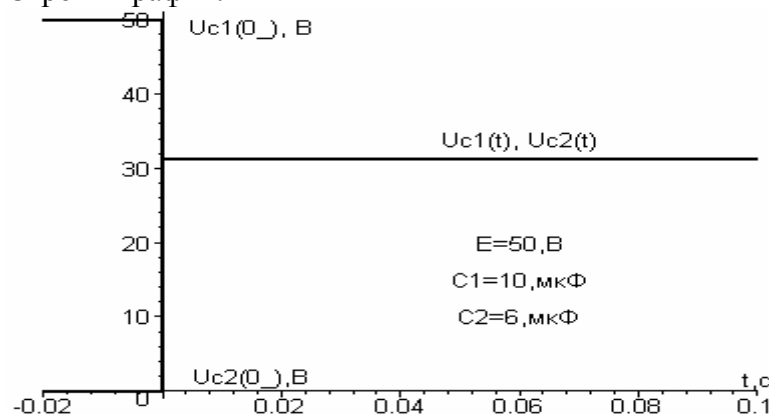


Рис. 1.18.

ОСОБЕННОСТЬ РАСЧЕТА ПП КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ В ЦЕПЯХ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ.

Особенность заключается в составлении характеристического уравнения. Метод операторного сопротивления в таких цепях имеет ограничение, поскольку не всегда можно сделать гальваническую развязку. Остаётся метод алгебраизации однородного ОДУ, которую следует проводить над системой дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

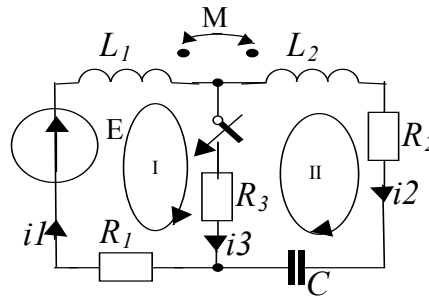


Рис. 1.19.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 i_1 + u_{L1} + R_3 i_3 = E \\ R_2 i_2 + u_{L2} - R_3 i_3 + u_c = 0 \\ i_1 - i_3 - i_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 - M \frac{d}{dt} i_2 + R_3 i_3 = E \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{d}{dt} i_2 - M \frac{d}{dt} i_1 - R_3 i_3 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + U_c(0_-) = 0 \\ i_1 - i_3 - i_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 + R_3 i_1 - M \frac{d}{dt} i_2 - R_3 i_2 = E \\ -M \frac{d}{dt} i_1 - R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 + L_2 \frac{d}{dt} i_2 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + U_c(0_-) = 0 \end{array} \right\}$$

Далее осуществляем процедуру алгебраизации системы уравнений путем замены $\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow p^n$, $\int dt \rightarrow \frac{1}{p}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1 + R_3 + L_1 p) i_1 - (Mp + R_3) i_2 = E \\ (R_3 - Mp) i_1 + (R_2 + L_2 p + R_3 + \frac{1}{pC}) i_2 = -U_c(0_-) \end{array} \right\}$$

Характеристическое уравнение получается приравниванием нулю главного определителя этой системы алгебраических уравнений.

$$\Delta = 0 \quad \Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 + L_1 p & -(Mp + R_3) \\ R_3 - Mp & R_2 + L_2 p + R_3 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = (R_1 + R_3 + L_1 p)(R_2 + L_2 p + R_3 + \frac{1}{pC}) - (-Mp - R_3)(R_3 - Mp) = 0$$

Как видно, наличие взаимной индуктивности не увеличивает порядок цепи.

ЛЕКЦИЯ 2

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Электрическая величина в цепи, содержащей реактивные элементы, может быть описана обыкновенным линейным дифференциальным уравнением n -ого порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad (2.1)$$

Для его однозначного разрешения должны быть определены n начальных условий (НУ) (2.2):

$$x(0_+), \frac{d}{dt} x(0_+), \frac{d^2}{dt^2} x(0_+), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(0_+). \quad (2.2)$$

Кроме классического метода решения этого уравнения существует операторный метод. Суть операторного метода заключается в применении к уравнению (2.1) преобразования Лапласа:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \text{ где } p = \alpha + j\omega. \quad (2.3)$$

Принято говорить так, что над оригиналом $x(t)$ - функцией действительного переменного t произведена операция отображения в область комплексного переменного p . $X(p)$ -изображение функции $x(t)$. С целью более простой записи, вместо выражения (2.3), используют специальные символы: $X(p) \leftrightarrow x(t)$ или $X(p) = L\{x(t)\}$. Если применить формулу (2.3) к уравнению (2.1), то получим алгебраическое уравнение в области изображений

$$p^n X(p) - x(0_+) p^{n-1} - \frac{d}{dt} x(0_+) p^{n-2} - \dots - \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} x(0_+) p - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(0_+) + \dots \dots a_1 (pX(p) - x(0_+)) + a_0 X(p) = F(p) \quad (2.4)$$

Выражая из (2.4) изображение искомой величины мы получим дробно-рациональную функцию равную отношению полиномов

$$X(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad m < n \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.1) находится путём вычисления обратного преобразования Лапласа над отношением полиномов (2.5) по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(p) e^{pt} dt$$

или

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} \quad (2.6)$$

Обычно в электротехнике формула (2.5) представляет собой сложное дробно-рациональное выражение и вычисление оригинала по формуле обратного преобразования (2.6) делать нецелесообразно. Для перехода к оригиналу пользуются таблицами, где

сведены результаты преобразований для более простых дробей, на которые выражение (2.5) может быть разложено по методу неопределённых коэффициентов или с помощью **формулы разложения**

$$X(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{n_k} \frac{A_{ks}}{(p - p_k)^s}, \quad (2.7)$$

где

$$A_{ks} = \frac{1}{(n_k - s)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k - s}}{dt^{n_k - s}} \left(\frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^{n_k} \right),$$

n – порядок характеристического полинома $F_2(p)$,

N – количество различных корней,

$p_k - k$ – ый корень характеристического полинома

$s = 1, 2, 3, \dots, n_k$,

n_k – кратность k – го корня

Пусть, для примера, корнями характеристического полинома $F_2(p)$ явились числа вида

$$p_1 = p_2 = p_3, p_4 = p_5, p_6, p_7, p_8, p_9 = \alpha + j\beta, p_{10} = \alpha - j\beta,$$

тогда изображение будет разложено на сумму простейших дробей

$$\begin{aligned} X(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = & \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{(p - p_1)^2} + \frac{A_3}{(p - p_1)^3} + \\ & + \frac{A_4}{p - p_4} + \frac{A_5}{(p - p_4)^2} + \\ & + \frac{A_6}{p - p_6} + \frac{A_7}{p - p_7} + \frac{A_8}{p - p_8} + \\ & + \frac{A_9}{p - p_9} + \frac{A_{10}}{p - p_{10}} \end{aligned}$$

Для этих дробей в таблицах находим такую связь оригиналов с изображением

$$\begin{aligned} \frac{A}{p - p_k} & \rightarrow A e^{p_k t}, \quad \frac{A}{(p - p_k)^2} \rightarrow A t e^{p_k t}, \quad \frac{A}{(p - p_k)^3} \rightarrow \frac{A}{2} t^2 e^{p_k t} \text{ или} \\ \frac{A}{(p - p_k)^n} & \rightarrow \frac{A}{(n-1)!} t^{(n-1)} e^{p_k t}. \end{aligned}$$

Употребим формулу разложения для нахождения коэффициентов. В зависимости от вида корней (различные, комплексно-сопряженные, кратные) формула разложения (2.7) приобретает различный вид.

Случай различных корней:

$$A = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{d^{1-1}}{dp^{1-1}} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^1 \right) = \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right) \overset{\text{по правилу Лопиталя}}{=} \frac{F_1(p_k)}{\frac{d}{dp} F_2(p_k)} \quad (2.8)$$

Случай комплексно-сопряжённых корней:

Пусть $p = \alpha + j\beta$, $p^* = \alpha - j\beta$, тогда по формуле (2.8) находим коэффициенты и сразу перейдём к оригиналу.

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_9 e^{pt} + A_{10} e^{p^* t} = \frac{F_1(p)}{\frac{d}{dp} F_2(p)} e^{pt} + \frac{F_1(p^*)}{\frac{d}{dp} F_2(p^*)} e^{p^* t} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p)}{\frac{d}{dp} F_2(p)} e^{pt} \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \frac{F_1(p)}{\frac{d}{dp} F_2(p)} e^{pt} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p^*)}{\frac{d}{dp} F_2(p^*)} e^{p^* t} \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \frac{F_1(p^*)}{\frac{d}{dp} F_2(p^*)} e^{p^* t} \right\} = \\
&= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p)}{\frac{d}{dp} F_2(p)} e^{pt} \right\}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Случай кратных корней:

Представим $F_2(p)$ к виду $F_2(p) = F(p)(p - p_k)^{n_k}$, n_k - кратность k - го корня полинома $F_2(p)$. Тогда коэффициенты будут найдены по формуле

$$A_{ks} = \frac{1}{(n_k - s)!} \frac{d^{n_k - s}}{dp^{n_k - s}} \frac{F_1(p_k)}{F(p_k)}, \tag{2.10}$$

где $s = 1, 2, 3, \dots, n_k$

Теперь мы можем, имея дифференциальное уравнение и начальные условия, отобразить его в операторную область. В операторной области дифференциальное уравнение представляет собой алгебраическое выражение, из которого изображение искомой величины может быть найдено в виде дробно-рациональной функции. Далее следует переход от изображения к оригиналу с помощью формулы разложения и таблиц.

До сих пор речь шла, в большей мере, о математическом аспекте расчёта, а теперь обратимся к его приложению для расчёта ПП в электрических цепях. Основное отличие операторного метода расчета от классического заключается в отсутствии необходимости находить зависимые начальные условия. Этот метод более формализован и содержит меньшее число этапов. При расчете переходных процессов операторным методом не составляют дифференциального уравнения и не отображают его в область изображений. Вместо этого составляют операторную схему замещения цепи после коммутации, расчет которой для получения изображения искомой величины делают любым из известных методов анализа цепей. Операторные схемы замещения элементов цепей получают на основе свойств преобразования Лапласа.

Свойства преобразования Лапласа:

1. Линейность:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots \rightarrow a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p) + \dots$$

2. Теорема интегрирования:

$$x(t) = \int_0^t f(t) dt + x(0_+) \rightarrow \frac{1}{p} F(p) + \frac{1}{p} x(0_+)$$

3. Теорема дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} f(t) \rightarrow pF(p) - f(0_+), \quad \frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0_+) - \frac{d}{dt} f(0_+)$$

.....

4.

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - p^{n-2} \frac{d}{dt} f(0_+) - \dots p \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} f(0_+) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0_+)$$

Теорема запаздывания:

$$f(t - t_0) \rightarrow F(p)e^{-pt}$$

Операторные схемы замещения элементов цепи. ИЗОБРАЖЕНИЕ

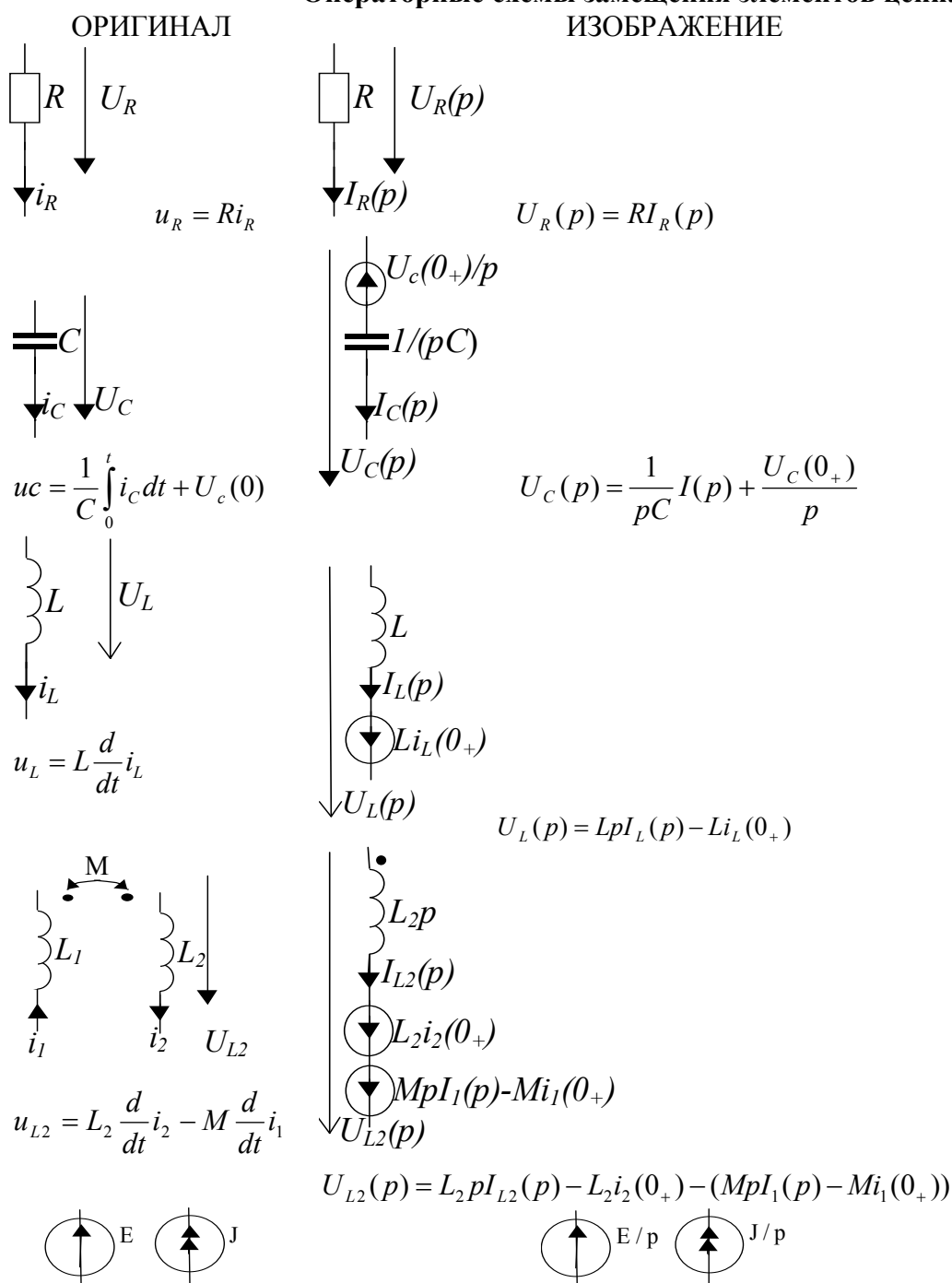


Рис. 2.1.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.

Пусть в цепи произошла коммутация и на её участке ab напряжение будет определяться интегро-дифференциальным уравнением

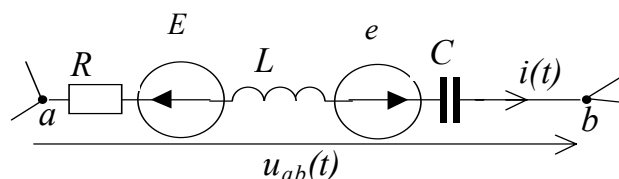


Рис. 2.2.

$$u_{ab}(t) = Ri(t) + E + L \frac{d}{dt} i(t) - e(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_c(0_+).$$

Отобразим это уравнение в операторную область, совершая над ним преобразование Лапласа

$$U_{ab}(p) = RI(p) + \frac{E}{p} + LpI(p) - Li(0_+) - e(p) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_c(0_+)}{p}.$$

Тот же результат можно получить, если не отображать уравнение, а составить операторную схему замещения участка цепи ab .

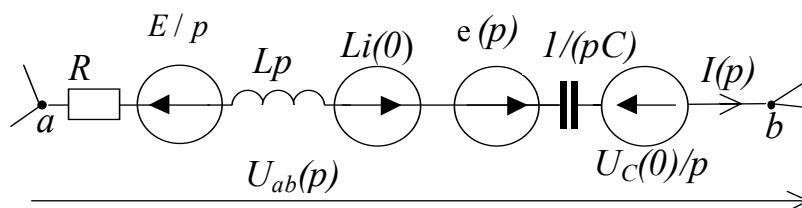


Рис. 2.3.

Ток в операторной схеме замещения будет найден по закону Ома для участка, содержащего эдс.

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + e(p) + Li(0) - \frac{E}{p} - \frac{U_c(0_+)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{pC}}.$$

Закон Ома в операторной форме

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) \pm \sum E(p)}{Z(p)}, \quad (2.10)$$

где $Z(p)$ - операторное сопротивление участка цепи;

$\sum E(p)$ -содержит изображения источников и источники, возникающие в следствие ненулевых начальных условий.

Выделим в цепи контур, составим его операторную схему замещения и для изображений токов и напряжений запишем уравнения по первому и по второму закону Кирхгофа.

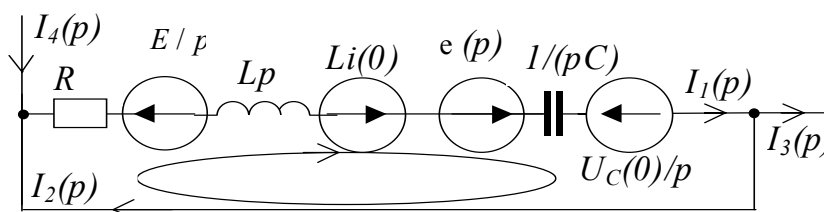


Рис. 2.4.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_4(p) + I_2(p) - I_1(p) = 0 \\ I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0 \\ (R + Lp + \frac{1}{pC})I_1(p) + RI_2(p) = -\frac{E}{p} + Li(0) + e(p) - \frac{Uc(0)}{p} \end{array} \right\}$$

Законы Кирхгофа в общем виде

$$\begin{aligned} \sum I(p) &= 0, \\ \sum Z(p)I(p) &= \sum E(p) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вывод: если показать, что в операторной схеме замещения выполняются законы Кирхгофа, то, следовательно, расчет изображения искомой величины может быть выполнен любым методом анализа линейных цепей (МКТ, МУП, МЭГ, метод наложения).

Алгоритм расчета переходного процесса операторным методом.

Условно можно процесс расчета ПП разбить на несколько этапов.

1. Выбираются положительные направления для токов в ветвях схемы.
2. Из расчета цепи до коммутации находятся ННУ.
3. Составляется операторная схема замещения цепи после коммутации.
4. Любым известным методом расчёта (МКТ, МУП и др.) находят изображение искомой величины в виде отношения полиномов.
5. От изображения переходят к оригиналу, применяя теорему разложения.
6. В заключение для наглядности обычно строится график.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПП ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ.

Пример 1. Включение дросселя на постоянное напряжение.

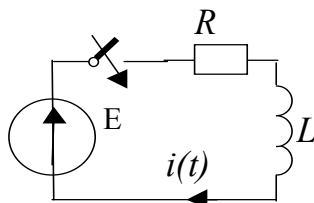


Рис. 2.5.

1. ННУ ток в индуктивности в цепи до замыкания был равен нулю $i(0_-) = 0$.
2. Строим операторную схему замещения цепи после замыкания.

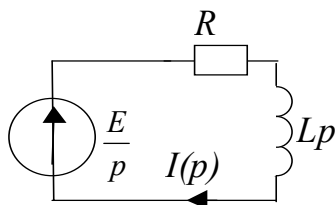


Рис. 2.6.

3. По закону Ома найдем операторный ток.

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R + Lp} = \frac{E}{L} \frac{1}{p(\frac{R}{L} + p)} = \frac{E}{L} \frac{1}{p(\frac{1}{\tau} + p)}$$

Замечание: Наличие нулевого корня характеристического полинома однозначно указывает на наличие постоянной составляющей в оригинале.

4. Переходим от изображения к оригиналу тока.

$$I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p(\frac{1}{\tau} + p)} = \frac{E}{L} \left(\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{\frac{1}{\tau} + p} \right).$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа, найдём изображение каждого слагаемого в отдельности.

$$\frac{A_1}{p} \leftrightarrow A_1$$

$$\frac{A_2}{\frac{1}{\tau} + p} \leftrightarrow A_2 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где коэффициенты находим по формуле (2.8)

$$A_1 = \frac{1}{1(\frac{1}{\tau} + p) + p(0 + 1)} \quad p=p_1=0 = \tau$$

$$A_2 = \frac{1}{1(\frac{1}{\tau} + p) + p(0 + 1)} \quad p=p_2=-\frac{1}{\tau} = -\tau$$

$$I(p) \leftrightarrow i(t) = \frac{E}{L} (\tau - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), A.$$

График ПП смотри в примере 1 лекции 1.

Пример 2. Разряд одной ёмкости на другую.

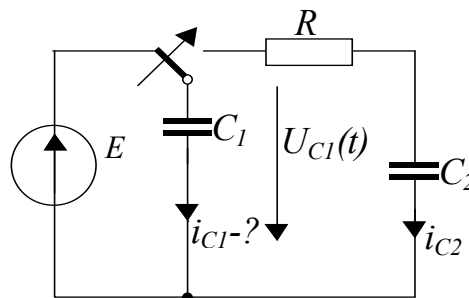


Рис. 2.7.

1. Из анализа цепи до коммутации находим независимые начальные условия

$$U_{C1}(0_-) = E$$

$$U_{C2}(0_-) = 0$$

2. Составляем операторную схему замещения цепи до коммутации

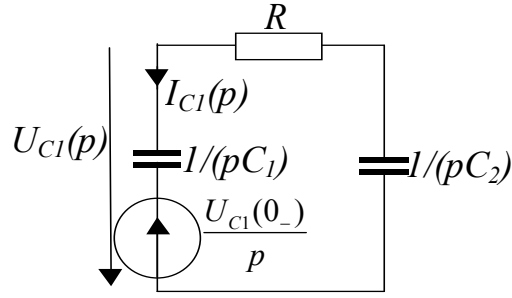


Рис. 2.8.

3. Находим изображение напряжения на C_1 .

$$I_{C1}(p) = \frac{-U_{C1}(0_-)/p}{R + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2}} = \frac{-U_{C1}(0_-)}{pR + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}} = \frac{-U_{C1}(0_-)}{R} \frac{1}{p + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 R}}$$

$$U_{C1}(p) = \frac{1}{pC_1} I_{C1}(p) + \frac{U_{C1}(0_-)}{p} = \frac{-U_{C1}(0_-)}{C_1 R} \frac{1}{p(p + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 R})} + \frac{U_{C1}(0_-)}{p}$$

4. Находим напряжение на C_1 .

$$U_{C1}(p) = \frac{\tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}{C_1 R} \frac{-U_{C1}(0_-)}{p(p + \frac{1}{\tau})} + \frac{U_{C1}(0_-)}{p} \leftrightarrow \frac{-U_{C1}(0_-)}{C_1 R} (A_1 + A_2 e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_{C1}(0_-)$$

Находим коэффициенты по формуле разложения (2.8) для различных корней

$$A_1 = \frac{1}{1(\frac{1}{\tau} + p) + p(0+1)} \Big|_{p=p_1=0} = -\tau, \quad A_2 = \frac{1}{1(\frac{1}{\tau} + p) + p(0+1)} \Big|_{p=p_2=-\frac{1}{\tau}} = -\tau$$

$$u_{C1}(t) = \frac{-U_{C1}(0_-)}{C_1 R} (R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} - R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_{C1}(0_-) =$$

$$= U_{C1}(0_-) \frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{U_{C1}(0_-) C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau}} = E (\frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau}})$$

5. Строим график

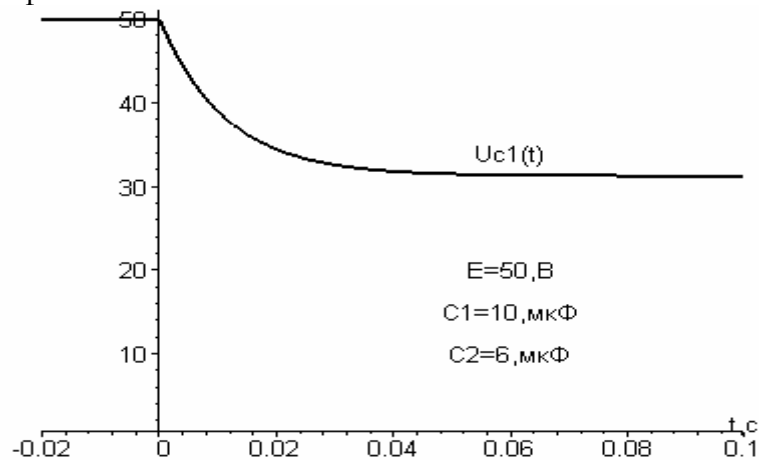


Рис. 2.9.

Пример 3. Разряд ёмкости на дроссель.

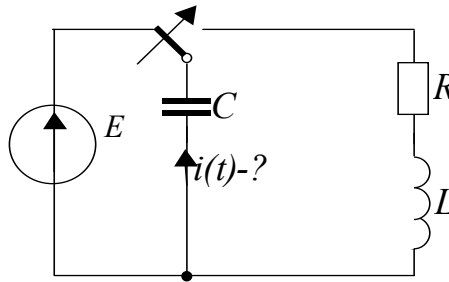


Рис. 2.10.

1. Из анализа цепи до коммутации находим независимые начальные условия

$$U_C(0_-) = E$$

$$i_L(0_-) = 0$$

2. Составляем операторную схему замещения цепи до коммутации

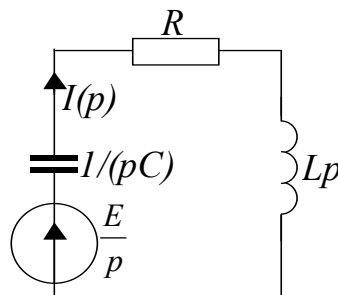


Рис. 2.11.

3. Находим изображение тока в цепи после коммутации.

$$I(p) = \frac{E/p}{R + \frac{1}{pC} + Lp} = \frac{E}{Rp + \frac{1}{C} + Lp^2} = \frac{E/L}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

4. Для исходных данных: $E=50$ В, $L=4.5$ Гн, $C=200$ мкФ, $R=30$ Ом найдем оригинал тока.

$$I(p) = \frac{E/L}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{11.111}{p^2 + 6.666p + 1111.1}$$

Находим корни характеристического полинома

$$p^2 + 6.666p + 1111.1 = 0$$

$$p_{1,2} = -3.333 \pm j33.166$$

По формуле разложения для комплексно-сопряженных корней получаем

$$\begin{aligned} i(t) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{11.111}{2(-3.333 + j33.166) + 6.666} e^{(-3.333 + j33.166)t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{11.111}{j33.166} e^{j33.166t} \right\} e^{-3.333t} = \operatorname{Re} \left\{ -j0.335 e^{j33.166t} \right\} e^{-3.333t} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 0.335 e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j33.166t} \right\} e^{-3.333t} = \operatorname{Re} \left\{ 0.335 e^{j(33.166t - \frac{\pi}{2})} \right\} e^{-3.333t} = \end{aligned}$$

По формуле Эйлера

$$= 0.335 \operatorname{Re} \left\{ \cos(33.166t - \frac{\pi}{2}) + j \sin(33.166t - \frac{\pi}{2}) \right\} e^{-3.333t} =$$

$$= 0.335 \cos(33.166t - \frac{\pi}{2}) e^{-3.333t} = 0.335 \sin(33.166t) e^{-3.333t}$$

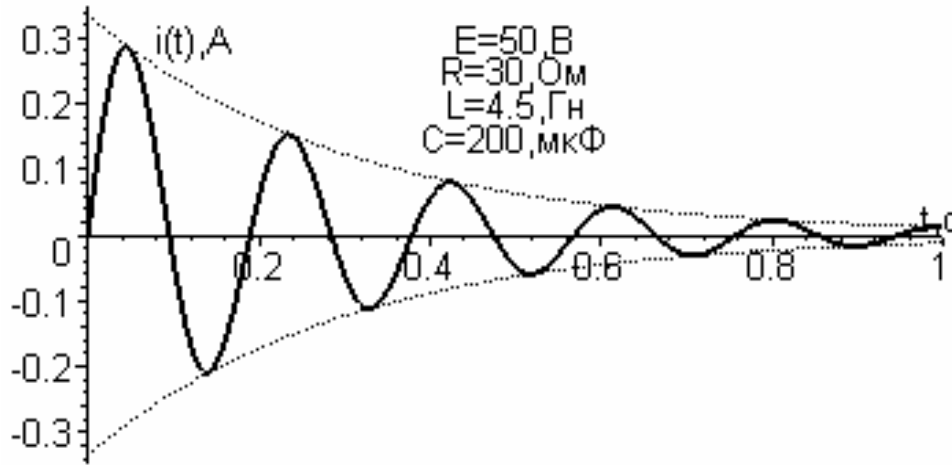
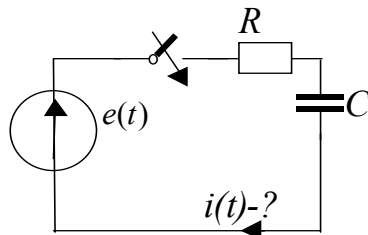


Рис. 2.12.

Пример 4. Включение RC – цепочки на экспоненту.

Решение этой задачи операторным методом несколько проще, чем классическим методом, в котором возникнут сложности при определении установившегося режима.



$R=30 \text{ Ом}, C=200 \text{ мкФ}.$

$e(t) = U_0 e^{\alpha t} = 50 e^{-50t}, \text{ В}$

Рис. 2.13.

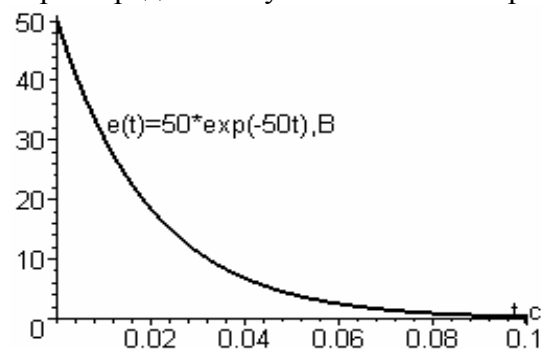


Рис. 2.14.

1. ННУ будет нулевым.
2. Составляем операторную схему замещения цепи после замыкания.

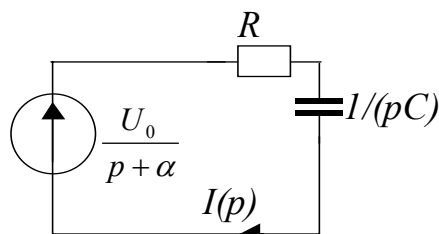


Рис. 2.15.

3. Находим изображение тока.

$$I(p) = \frac{\frac{U_0}{p + \alpha}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U_0 p C}{(p + \alpha)(1 + RCp)} = \frac{U_0}{R} \frac{p}{(p + \alpha)(p + \frac{1}{RC})}$$

4. Переходим к оригиналу с помощью формулы разложения для различных корней.

$$I(p) \leftrightarrow i(t) = \frac{U_0}{R} \left(\frac{A_1}{(p - p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{(p - p_2)} e^{p_2 t} \right), \text{ где } p_1 = -\alpha, p_2 = -\frac{1}{RC}$$

$$A_1 = \frac{-\alpha}{-\alpha + \frac{1}{RC}}, A_2 = \frac{-\frac{1}{RC}}{-\frac{1}{RC} + \alpha}, i(t) = \frac{U_0}{R(\alpha - \frac{1}{RC})} (\alpha e^{-\alpha t} - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}), A$$

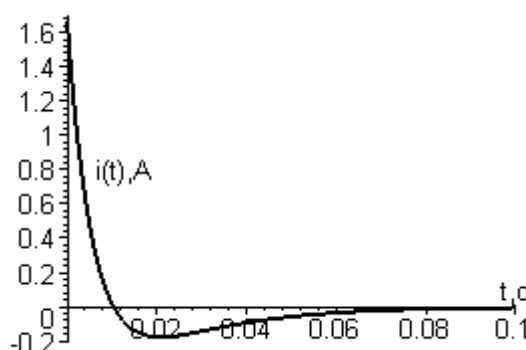


Рис. 2.16.

ЛЕКЦИЯ 3

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

1. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД.

Такое название метод имеет по причине комбинации классического и операторного методов. Установившуюся составляющую решения находят классическим методом, а свободную составляющую операторным. Его ещё называют методом наложения свободного и принуждённого режимов. Целью создания этого метода является упрощение операторной схемы замещения цепи после коммутации, составленной только для свободного режима. Эта схема не содержит изображений источников, а операторные свободные токи в ней будут обусловлены источниками, учитывающие свободные начальные условия реактивных элементов.

$$\begin{aligned} i_{L\text{св}}(0_+) &= i_L(0_+) - i_{L\text{усм}}(0_+) \\ u_{C\text{св}}(0_+) &= u_C(0_+) - u_{C\text{усм}}(0_+) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Алгоритм расчета ПП комбинированным методом.

1. Задаемся положительным направлением токов в ветвях.

2. Рассчитываем любым известным методом предрежим, из которого определяем ННУ.

3. Рассчитываем любым известным методом установившуюся составляющую в цепи после коммутации, токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах.

4. Находим свободные начальные условия реактивных элементов по формуле (3.1).

5. Составляем операторную схему замещения цепи после коммутации для свободной составляющей.

6. Находим любым известным методом анализа цепей изображение свободной составляющей.

7. Переходим к оригиналу свободной составляющей с помощью теоремы разложения и таблиц.

8. Записываем ответ как сумму результатов п.3 и п.7, строим график.

Пример расчета ПП комбинированным методом.

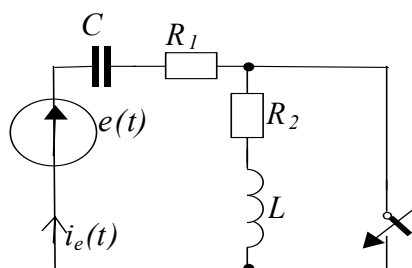


Рис. 3.1.

$$e(t) = 100 \sin(2500t + 60^\circ), B$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом}$$

$$L = 0.04 \text{ Гн}, X_L = 2500 \cdot 0.04 = 100 \text{ Ом}$$

$$C = 4 \text{ мкФ}, X_C = \frac{1}{2500 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}$$

Решение:

1. Находим напряжение на емкости в момент замыкания из расчета цепи до коммутации комплексным методом.

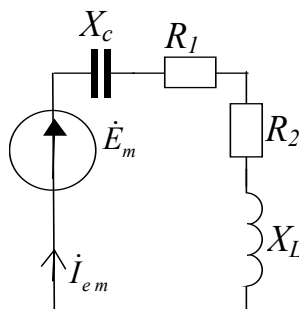


Рис. 3.2.

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)} = \frac{100 \angle 60^\circ}{50} = 2 \angle 60^\circ, A$$

$$\dot{U}_{Cm} = -jX_C \dot{I}_m = -100j \cdot 2 \angle 60^\circ = 200 \angle -30^\circ, B$$

$$u_C(0_-) = 200 \sin(-30^\circ) = -100, B$$

2. Находим напряжение на емкости в установившемся режиме из расчета цепи после коммутации комплексным методом.

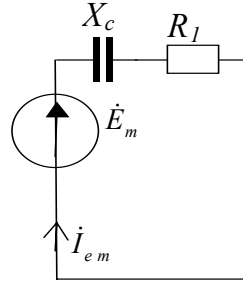


Рис. 3.3.

$$\dot{I}_{m y} = \frac{\dot{U}_m}{R_l - jX_c} = \frac{100 \angle 60^\circ}{20 - j100} = 0.9805 \angle (60^\circ - (-78.69^\circ)), A$$

$$i_{e ycm}(t) = 0.9805 \sin(2500t + 138.7^\circ), A$$

$$\dot{U}_{C m y} = -jX_c \dot{I}_{m y} = -100j \cdot 0.9805 \angle 138.7^\circ = 98.05 \angle 48.7^\circ, B$$

$$u_{C y}(0_+) = 98.05 \sin(48.7^\circ) = 73.661, B$$

3. Находим начальное условие для свободной составляющей напряжения на ёмкости.

$$u_{C cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C y}(0_+) = -100 - 73.661 = -173.661, B$$

4. Составляем операторную схему цепи после коммутации для свободной составляющей и находим изображение свободного тока в ветви с источником ЭДС.

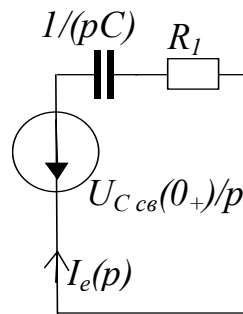


Рис. 3.4.

$$I_e(p) = \frac{-\frac{u_{C cв}(0_+)}{p}}{R_l + \frac{1}{pC}} = \frac{173.661}{20p + 250000} = \frac{8.683}{p + 12500}$$

5. Переходим к оригиналу при помощи табличного преобразования

$$i_{e cв}(t) = 8.683e^{-12500t}, A$$

6. Записываем ответ на основании результатов п. 5 и п. 2 как сумму свободной и установившейся составляющих.

$$i_e(t) = 0.9805 \sin(2500t + 138.7^\circ) + 8.683e^{-12500t}, A$$

7. Строим график.

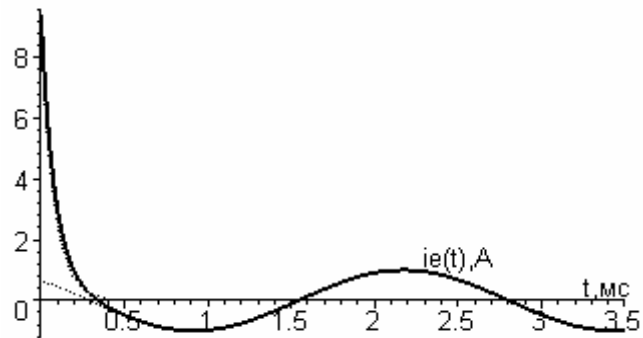


Рис. 3.5.

2. МЕТОД СВЕДЕНИЯ К НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ.

С целью упростить нахождение начальных условий в классическом методе или с целью упростить изображение искомой величины в операторном методе применяют метод сведения к нулевым начальным условиям. Этот метод позволяет вести расчет переходного процесса в цепи с одним источником и нулевыми начальными условиями.

Алгоритм расчета ПП методом сведения к нулевым начальным условиям (Случай замыкания).

1. Исходную схему всегда можно представить в виде.

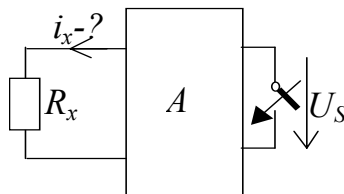


Рис. 3.6.

Пусть требуется найти ток в ветви x , тогда найдём напряжение на разомкнутом ключе из расчета цепи до коммутации, то есть в предрежиме.

2. Токи в цепи не изменятся, если последовательно с ключом будут встречно включены два источника ЭДС напряжением U_s (схема *а*). По методу наложения после замыкания искомый ток может быть найден как сумма до коммутационного тока $i_{x \text{ док}}$ (схема *б*) и переходного тока $i_{x \text{ пер}}$ (схема *в*).

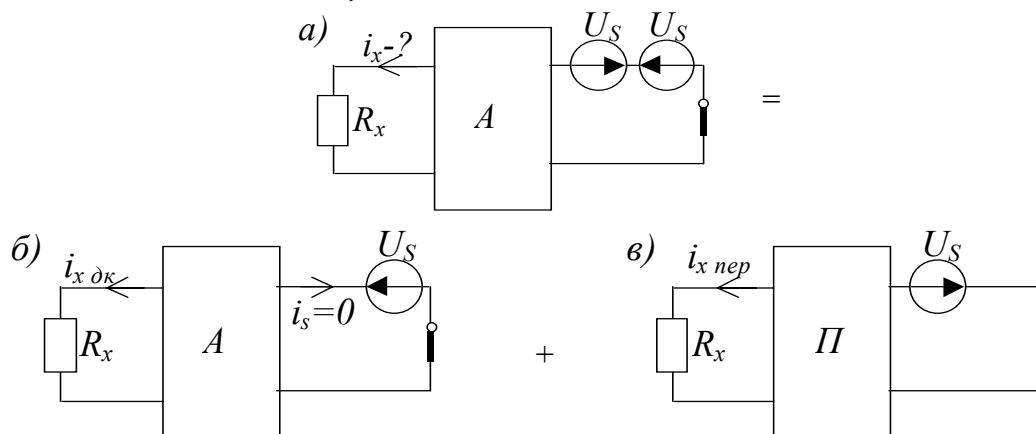
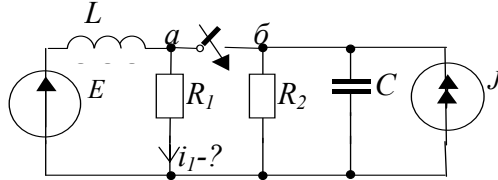


Рис. 3.7.

$$i_x(t) = i_{x \partial \kappa}(t) + i_{x \text{ пер}}(t). \quad (3.2)$$

В схеме (б) замыкание не вызовет изменения токов, так как э.д.с. U_s будет компенсировать действие источников цепи A и все токи будут оставаться равными токам предрежима. В схеме (в) возникнет переходный процесс, который будет определяться одним источником в пассивной цепи с нулевыми начальными условиями.

Пример (случай замыкания).



$$E = 100, B J = 1, A$$

$$R_1 = R_2 = 200, \text{ Ом}$$

$$L = 0.5, \text{ Гн } C = 10 \text{ мкФ}$$

1. В цепи до замыкания находим напряжение на рубильнике.

$$U_{a\delta \partial \kappa}(t) = E - R_2 J = 100 - 200 \cdot 1 = -100, B$$

2. Рассчитываем искомый ток в цепи до коммутации.

$$i_{1 \partial \kappa}(t) = \frac{E}{R_1} = \frac{100}{200} = 0.5, A$$

3. Рассчитываем переходную составляющую искомого тока в схеме с нулевыми начальными условиями.

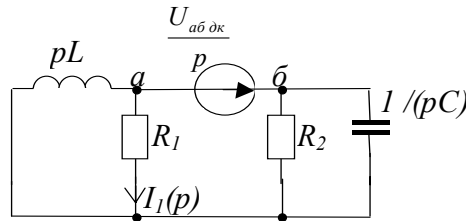


Рис. 3.9.

$$-I_L(p) - I_1(p) - I_c(p) - I_2(p) = 0$$

$$-\varphi_a(p) \left(\frac{1}{Lp} + \frac{1}{R_1} \right) - \varphi_\delta(p) \left(pC + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

$$-\varphi_a(p) \left(\frac{1}{Lp} + \frac{1}{R_1} \right) - \left(\varphi_a(p) + \frac{U_{a\delta \partial \kappa}}{p} \right) \left(pC + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

$$-\varphi_a(p) \left(\frac{1}{Lp} + \frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{U_{a\delta \partial \kappa}}{p} \left(pC + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

$$-\varphi_a(p) \left(\frac{2}{p} + \frac{1}{200} + 10^{-5} p + \frac{1}{200} \right) - \frac{-100}{p} \left(10^{-5} p + \frac{1}{200} \right) = 0$$

$$-\varphi_a(p) \frac{p + 200 + 10^{-3} p^2}{100p} + \left(10^{-3} + \frac{1}{2p} \right) = 0$$

$$\varphi_a(p) = \frac{0.1p + 50}{0.001p^2 + p + 200}$$

$$I_1(p) = \frac{\varphi_a(p)}{R_1}$$

$$I_1(p) = \frac{1}{200} \frac{0.1p + 50}{0.001p^2 + p + 200} = \frac{0.5p + 250}{p^2 + 1000p + 200000}$$

$$I_1(p) = \frac{0.5p + 250}{(p + 276.4)(p + 723.6)}$$

$$i_{1\text{нп}}(t) = \frac{0.5(-276.4)}{-276.4 + 723.6} e^{-276.4t} + \frac{0.5(-723.6)}{-723.6 + 276.4} e^{-723.6t} =$$

$$= -0.309e^{-276.4t} + 0.809e^{-723.6t}, A$$

4. Ответ: $i_1(t) = i_{1\text{ок}}(t) + i_{1\text{нп}}(t) = 0.5 - 0.309e^{-276.4t} + 0.809e^{-723.6t}, A$

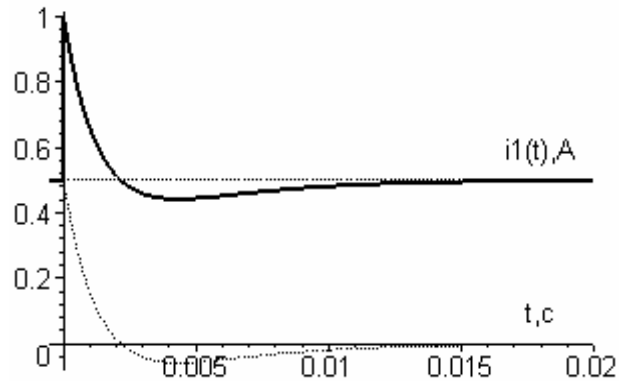


Рис. 3.10.

Алгоритм расчета ПП методом сведения к нулевым начальным условиям (случай размыкания).

1. Исходную схему всегда можно представить в виде.

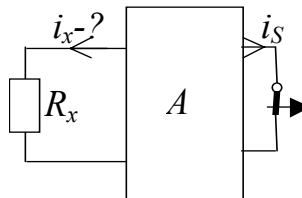
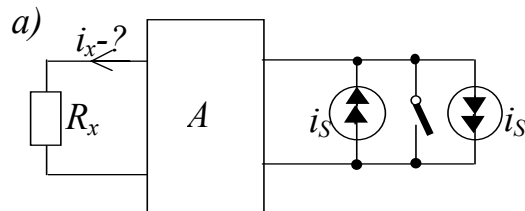


Рис. 3.11.

Пусть требуется найти ток в ветви x , тогда найдём ток в замкнутом ключе из расчета цепи до коммутации, то есть в предрежиме.

2. На токи в цепи после коммутации не окажет влияние, подключение параллельно ключу двух встречных источников тока i_S (схема а). По методу наложения искомый ток может быть найден как сумма до коммутационного тока (схема б) и переходного тока (схема в)



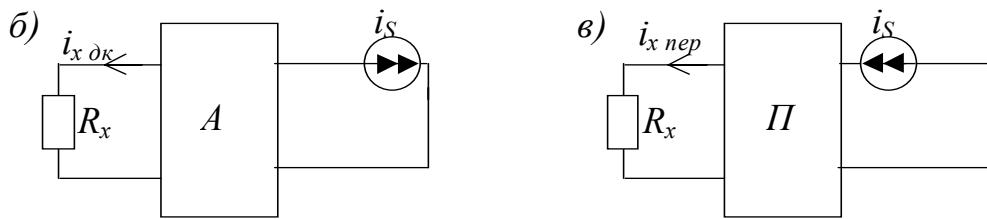


Рис. 3.12.

$$i_x(t) = i_{x \text{ ок}}(t) + i_{x \text{ пер}}(t). \quad (3.3)$$

В схеме (б) размыкание не вызовет изменения токов и они будут оставаться равными токам предрежима. В схеме (в) возникнет переходный процесс, который будет определяться одним источником в пассивной цепи с нулевыми начальными условиями.

Пример (случай размыкания).

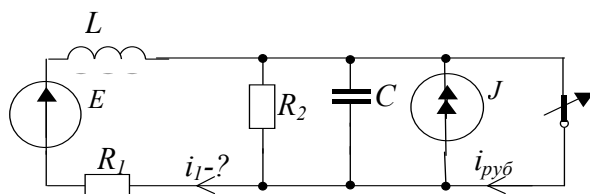


Рис. 3.13.

$$E = 100, B J = 1, A$$

$$R_1 = R_2 = 10, \text{ Ом}$$

$$L = 0.1, \text{ Гн}$$

$$C = 100 \text{ мкФ}$$

1. В цепи до размыкания находим ток в рубильнике.

$$i_{руб \text{ ок}}(t) = \frac{E}{R_1} + J = \frac{100}{10} + 1 = 11, A$$

2. Рассчитываем искомый ток в цепи до коммутации.

$$i_{1 \text{ ок}}(t) = \frac{E}{R_1} = \frac{100}{10} = 10, A$$

3. Рассчитываем переходную составляющую искомого тока в схеме с нулевыми начальными условиями.

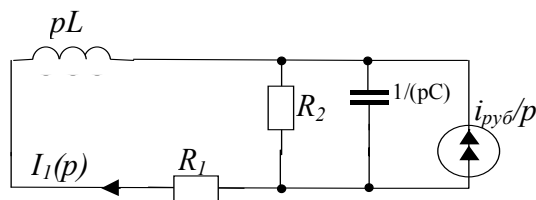


Рис. 3.14.

По правилу “чужого” сопротивления

$$I_1(p) = -\frac{i_{руб \text{ ок}}}{p} \frac{\frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}}{\frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} + R_1 + Lp} = -\frac{i_{руб \text{ ок}}}{p} \frac{\frac{R_2}{pC}}{(R_2 + \frac{1}{pC})(R_1 + Lp) + \frac{R_2}{pC}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{11}{p} \frac{\frac{100000}{p}}{(10 + \frac{10000}{p})(10 + 0.1p) + \frac{100000}{p}} = -\frac{1100000}{p(p+230)(p+870)} \\
-i_{1_{nep}}(t) &= \frac{1100000}{230 \cdot 870} + \frac{1100000}{-230(-230+870)} e^{-230t} + \frac{1100000}{-870(-870+230)} e^{-870t} = \\
&= 5.497 - 7.4728e^{-230t} + 1.976e^{-870t}
\end{aligned}$$

4. Ответ:

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= i_{1_{ок}}(t) + i_{1_{nep}}(t) = \\
&= 10 - 5.497 + 7.473e^{-230t} - 1.976e^{-870t} = \\
&= 4.503 + 7.473e^{-230t} - 1.976e^{-870t}, A.
\end{aligned}$$

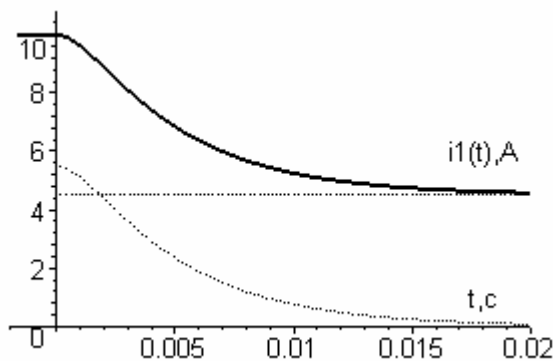


Рис. 3.15.

ЛЕКЦИЯ 4.

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ.

Процессы в линейной электрической цепи, как нам уже известно, описываются неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка. Ещё одной равнозначной формой описания процессов является система n неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния (уравнения в форме Коши).

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{X}(0) \quad (4.1)$$

$\mathbf{X}(t)$ – вектор столбец переменных состояния размерностью $[n \times 1]$;

\mathbf{F} – вектор воздействий $[m \times 1]$;

\mathbf{A} – матрица коэффициентов $[n \times n]$;

\mathbf{B} – матрица связи $[n \times m]$;

$\mathbf{X}(0)$ – вектор столбец начальных условий $[n \times 1]$;

n – порядок системы

m – количество источников в схеме

Метод переменных состояния универсальный и мощный метод анализа динамики систем, содержащих элементы накапливающих энергию. В этом методе удалось

формализовать (или алгоритмизировать) процесс формирования уравнений для электрических цепей достаточно общего вида. Уравнение в форме Коши специально приспособлены к численному решению больших систем уравнений на ЭВМ.

В качестве переменных состояния принимаются те, которые определяют процессы в элементах, накапливающих энергию. В электротехнике таковыми являются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. Для найденных в ходе решения уравнения (4.1) переменных состояния, как правило, требуется решить уравнение связи (4.2), которое связывает переменные состояния с другими искомыми величинами.

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{M}\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}\mathbf{F}(t) \quad (4.2)$$

\mathbf{M} – матрица связи $[l \times n]$;

\mathbf{N} – матрица связи $[l \times m]$;

\mathbf{W} – вектор столбец искоемых величин $[l \times 1]$;

l – количество искоемых величин.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ.

Для составления уравнения (4.1) требуется определить токи в емкостях и напряжения на индуктивностях. Эти величины можно выразить из уравнений Кирхгофа, которыми описывается цепь после коммутации. Но целесообразнее применить инженерную методику составления уравнений состояния.

1. Выбираем положительное направление токов в ветвях.
2. Рассчитываем начальные условия (токи в L и напряжения на C в цепи до коммутации).
3. В цепи после коммутации делаем замену индуктивности на источник тока величиной $i_L(t)$, ёмкости на источник ЭДС величиной $u_C(t)$.
4. Методом наложения находим напряжения на индуктивностях и токи в ёмкостях.
5. Используя компонентных уравнения записываем, систему уравнений состояния.

Пример

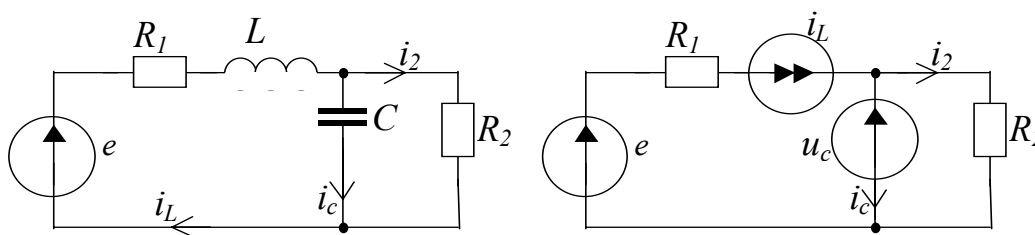
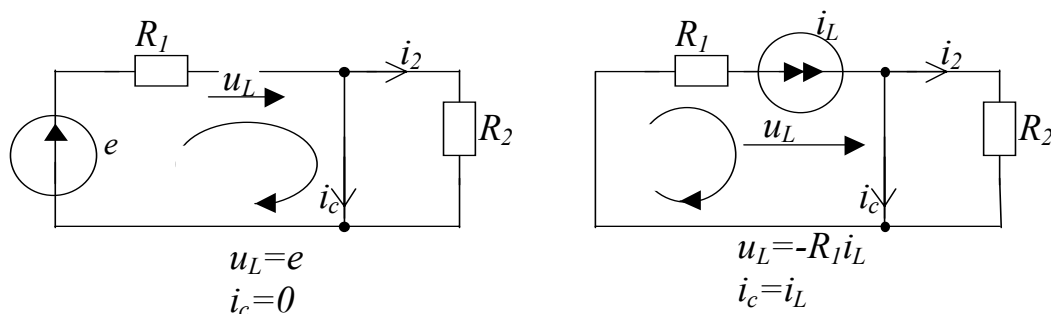
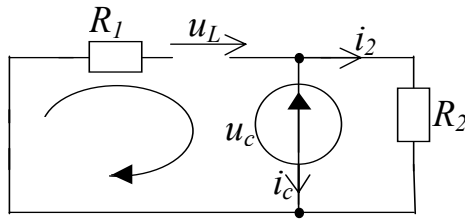


Рис. 4.1.





$$u_L = -u_c$$

$$i_c = -u_c/R_2$$

Рис. 4.2.

$$\begin{cases} u_L = e - R_1 i_L - u_c \\ i_c = 0 + i_L - \frac{u_c}{R_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L = \frac{R_1}{L} i_L - \frac{1}{L} u_c + \frac{1}{L} e \\ \frac{d}{dt} u_c = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{R_2 C} u_c \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ.

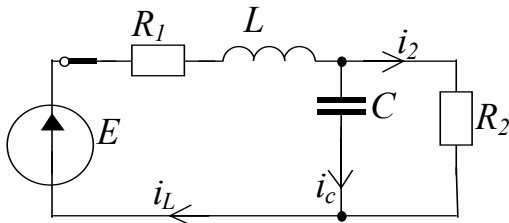
Методы решения

Аналитические

Операторный метод

Метод матричной экспоненты

Пример



Численные

Явный (неявный) методы Эйлера

Метод Рунге-Кутты, Адамса

$$R_1 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 100 \text{ Ом}$$

$$L = 1.0 \text{ Гн}$$

$$C = 400 \text{ мкФ}$$

$$E = 180, \text{ В}$$

Рис. 4.3.

Операторный метод:

1. Имеем систему уравнений состояния

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L(t) = -5i_L(t) - u_c(t) + 180 \\ \frac{d}{dt} u_c(t) = 2500i_L(t) - 25u_c(t) \end{cases}, \quad \text{НУ: } \begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \end{bmatrix}$$

2. Отообразим эту систему уравнений в операторную область

$$\begin{cases} pI_L(p) - i_L(0) = -5I_L(p) - U_c(p) + \frac{180}{p} \\ pU_c(p) - U_c(0) = 2500I_L(p) - 25U_c(p) \end{cases}, \quad \begin{cases} (p+5)I_L(p) + U_c(p) - \frac{180}{p} = 0 \\ 2500I_L(p) - (25+p)U_c(p) + 110 = 0 \end{cases}$$

3. После преобразований получим

$$I_L(p) = 10 \frac{450 + 7p}{p(2625 + 30p + p^2)}$$

$$U_C(p) = 10 \frac{45000 + 11p^2 + 55p}{p(2625 + 30p + p^2)}$$

4. Переходим к оригиналам

$$i_L(t) = 1.714285714 - 1.714285714 e^{(-15 \cdot t)} \cos(48.98979486 t)$$

$$+ .9039783574 e^{(-15 \cdot t)} \sin(48.98979486 t)$$

$$u_C(t) = 171.4285714 - 61.42857143 e^{(-15 \cdot t)} \cos(48.98979486 t)$$

$$- 74.94272191 e^{(-15 \cdot t)} \sin(48.98979486 t)$$

6. Строим график:

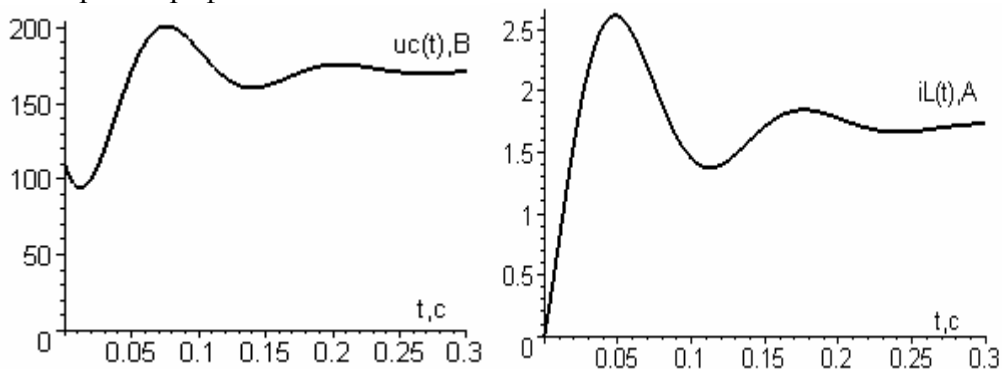
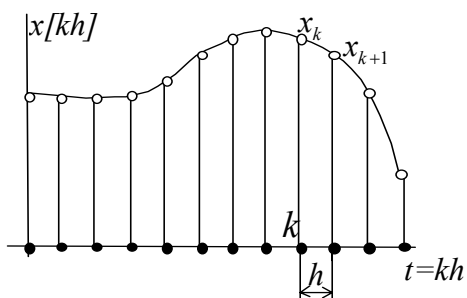


Рис. 4.4.

Численный метод (явный метод Эйлера).

Решение получаемое численным методом имеет вид таблицы, в которой даны дискретные значения искомой величины в фиксированные моменты времени. Ось времени при этом разбивается на интервалы длительностью в один шаг интегрирования h . Дискретные значения функции вычисляются по



рекуррентной формуле, которая является дискретным аналогом непрерывного дифференциального уравнения. Существует несколько различных способов получить рекуррентное уравнение. В методе Эйлера, например, на каждом шаге интегрирования кривую $x(t)$ аппроксимируют рядом Тейлора, содержащем первые два члена:

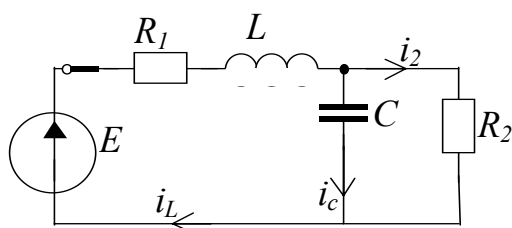
$$x_{k+1} = x_k + h \cdot \frac{d}{dt} x(t)_{t=hk} \quad (4.3)$$

Эта формула позволяет по одному предыдущему x_k значению рассчитать следующее x_{k+1} . Для вычисления значения искомой величины в момент времени t необходимо последовательно рассчитать $[t/h] - 1$ предыдущих значений.

Численные методы расчета относятся к приближенным методам. Чем больше сложность рекуррентного уравнения, тем меньше зависит точность вычисления от величины шага интегрирования. С уменьшением шага интегрирования решение получается точнее, но такой способ повышения точности расчета имеет ограничения. Во-

первых, увеличивается количество операций и время вычисления, а во-вторых, накапливается другая погрешность, связанная с округлением вещественных чисел в вычислительном устройстве. С увеличением шага интегрирования возникнет проблема устойчивости рекуррентной схемы. Неустойчивое состояние вычислительного процесса характеризуется взрывом погрешности, а полученное решение неадекватно реальному процессу в цепи. Поэтому в хороших программных системах численные методы дополнены алгоритмом автоматического выбора величины шага интегрирования, что позволяет в целом вести расчет достаточно быстро при достижении необходимой точности.

Пример



$$\begin{aligned} R_1 &= 5 \text{ Ом} \\ R_2 &= 100 \text{ Ом} \\ L &= 1.0 \text{ Гн} \\ C &= 400 \text{ мкФ} \\ E &= 180, \text{ В} \end{aligned}$$

Рис. 4.6.

Метод Эйлера:

1. Имеем уравнения в форме Коши.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} i_L(t) &= -5i_L(t) - u_c(t) + 180 \\ \frac{d}{dt} u_c(t) &= 2500i_L(t) - 25u_c(t) \end{aligned} \right\}, \quad \text{НУ: } \begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \end{bmatrix}$$

2. Получим рекуррентные уравнения для искомых величин по методу явного Эйлера.

$$\begin{cases} i_{k+1} = i_k + (-5i_k - u_k + 180) \cdot h \\ u_{k+1} = u_k + (2500i_k - 25u_k) \cdot h \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{k+1} = (1 - 5h)i_k - u_k h + 180h \\ u_{k+1} = (1 - 25h)u_k + 2500h \cdot i_k \end{cases}$$

4. В течении 0.25 с рассчитаем переходный процесс для двух значений шага интегрирования ($h=1.0 \text{ мс}$ и $h=5.0 \text{ мс}$) и сравним эти значения с точным решением, полученным аналитическим методом.

Таблица дискретных значений

переменных состояния ($h=5.0 \text{ мс}$)

t=5.000 мс $i_{L1}=0.3500 \text{ А}$ $U_c=96.2500 \text{ В}$
t=10.000 мс $i_{L1}=0.7600 \text{ А}$ $U_c=88.5940 \text{ В}$
t=15.000 мс $i_{L1}=1.1980 \text{ А}$ $U_c=87.0200 \text{ В}$
t=20.000 мс $i_{L1}=1.6330 \text{ А}$ $U_c=91.1170 \text{ В}$
t=25.000 мс $i_{L1}=2.0366 \text{ А}$ $U_c=100.140 \text{ В}$
t=30.000 мс $i_{L1}=2.3850 \text{ А}$ $U_c=113.080 \text{ В}$
t=35.000 мс $i_{L1}=2.6599 \text{ А}$ $U_c=128.757 \text{ В}$

t=180.000 мс $i_{L1}=2.0826 \text{ А}$ $U_c=182.312 \text{ В}$
t=185.000 мс $i_{L1}=2.0189 \text{ А}$ $U_c=185.555 \text{ В}$
t=190.000 мс $i_{L1}=1.9407 \text{ А}$ $U_c=187.598 \text{ В}$
t=195.000 мс $i_{L1}=1.8542 \text{ А}$ $U_c=188.407 \text{ В}$
t=200.000 мс $i_{L1}=1.7658 \text{ А}$ $U_c=188.033 \text{ В}$
t=205.000 мс $i_{L1}=1.6815 \text{ А}$ $U_c=186.602 \text{ В}$
t=210.000 мс $i_{L1}=1.6064 \text{ А}$ $U_c=184.295 \text{ В}$
t=215.000 мс $i_{L1}=1.5448 \text{ А}$ $U_c=181.339 \text{ В}$
t=220.000 мс $i_{L1}=1.4995 \text{ А}$ $U_c=177.982 \text{ В}$

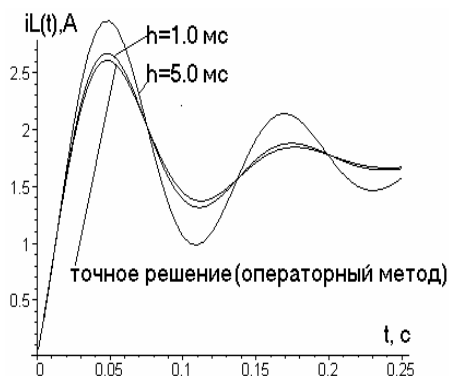


Рис. 4.7.

$t=225.000$ мс $iL1=1.4721$ А $Uc=174.478$ В
 $t=230.000$ мс $iL1=1.4629$ А $Uc=171.069$ В
 $t=235.000$ мс $iL1=1.4710$ А $Uc=167.972$ В
 $t=240.000$ мс $iL1=1.4944$ А $Uc=165.363$ В
 $t=245.000$ мс $iL1=1.5302$ А $Uc=163.372$ В
 $t=250.000$ мс $iL1=1.5751$ А $Uc=162.078$ В

ЛЕКЦИЯ 5

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

1. Расчет реакции цепи на одиночный импульс воздействия (метод наложения).

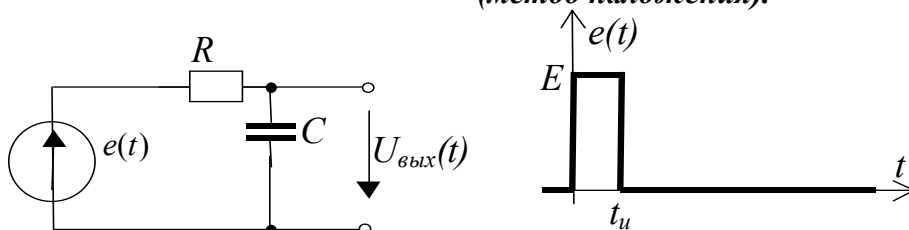


Рис. 5.1.

Найти реакцию RC-цепи первого порядка на одиночное импульсное воздействие.

Решение:

1. Воздействие данного типа может быть получено как результат совместного действия двух источников напряжения

$$e(t) = E + (-E)\mathbf{1}(t - t_u),$$

$$\text{где } \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \text{ — функция включения или ф. Хевисайда}$$

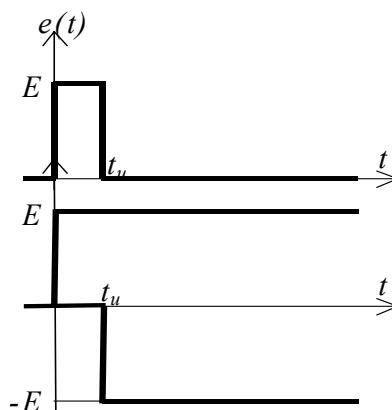


Рис. 5.2.

2. Реакция цепи будет также определяться суммой реакции на первое и второе воздействие. Задача, тем самым, сводится к расчету переходного напряжения на емкости при включении цепи на постоянное напряжение.

$$U_{1c}(t) = U_{1c \text{ уст}}(t) + U_{1c \text{ сб}}(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U_{2c}(t) = U_{2c \text{ уст}}(t) + U_{2c \text{ сб}}(t) = (-E)\mathbf{1}(t - t_u) - (-E)\mathbf{1}(t - t_u)e^{-\frac{t-t_u}{RC}}$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{1c}(t) + U_{2c}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) - E\mathbf{1}(t - t_u)(1 - e^{-\frac{t-t_u}{RC}})$$

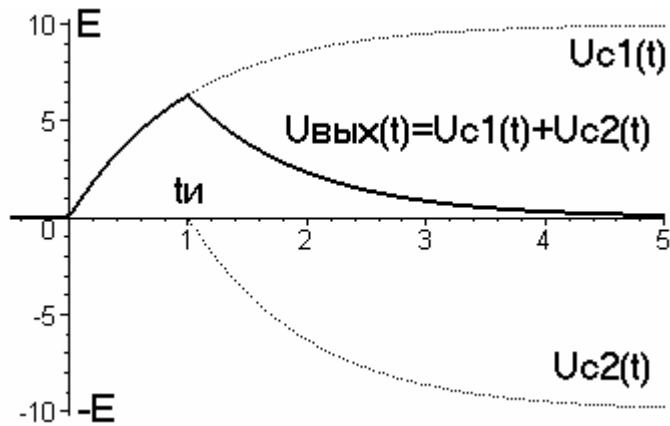


Рис. 5.3.

2. Расчет реакции цепи на периодическое импульсное воздействие (метод сопряжения интервалов).

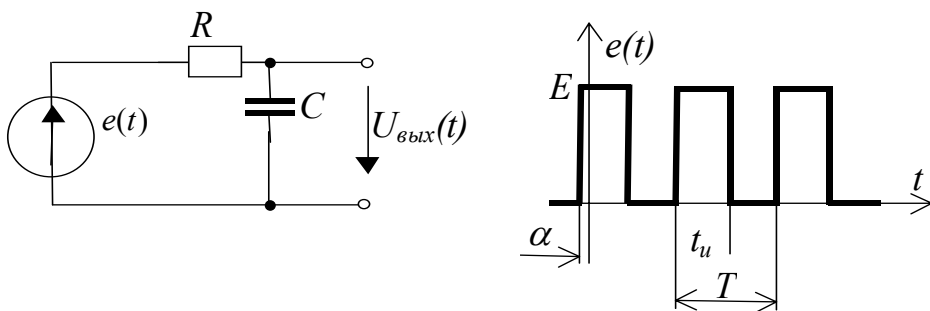


Рис. 5.4.

Найти реакцию RC -цепи первого порядка на периодическое импульсное воздействие.

Решение:

Решения будем искать в виде суммы установившейся и свободной составляющих

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{уст}}(t) + U_{\text{св}}(t).$$

1. Рассчитываем установившийся процесс.

Входной периодический сигнал содержит интервал заряда $(0 \dots t_{\text{и}})$ и интервал разряда $[t_{\text{и}} \dots T)$. Реакция цепи в установившемся режиме также имеет два интервала. Определим реакцию цепи в установившемся режиме на каждом интервале. Для удобства расчета употребим понятия

- а) местного на интервале времени и глобального времени,
- б) местного на интервале переходного процесса и глобального переходного процесса.

Так, на интервале заряда местный переходный процесс будет определяться выражением

$$U_{\text{сз}}(t_3) = E + (U_{\text{сmin}} - E)e^{-\frac{t_3}{RC}},$$

где $0 \leq t_3 < t_{\text{и}}$ - местное время заряда.

На интервале разряда реакция цепи будет такой

$$U_{c\ p}(t_p) = U_{c\ max} e^{-\frac{t_p}{RC}},$$

где $0 \leq t_p < T - t_u$ - местное время разряда.

Для определения постоянных интегрирования в решении на интервалах необходимо осуществить сопряжение интервалов. Сопряжение интервалов предполагает составление системы уравнений относительно постоянных интегрирования на основе условий сопряжения:

1. условие непрерывности токов в индуктивности и напряжений на емкостях на границах интервалов.
2. Условие периодичности, т.е. $u_c(t) = u_c(t \pm T)$ и $i_L(t) = i_L(t \pm T)$.

Запишем решение для установившегося процесса в глобальном времени

$$U_{ycm}(t) = \begin{cases} U_{c\ 3}(t), & 0 + kT < t < t_u + kT \\ U_{c\ p}(t), & t_u + kT < t < T + kT \end{cases} = \begin{cases} E + (U_{min} - E)e^{-\frac{t-kT}{RC}}, & 0 + kT < t < t_u + kT \\ U_{max} e^{-\frac{t-t_u-kT}{RC}}, & t_u + kT < t < T + kT \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{c\ 3}(t_u) = U_{c\ p}(t_u) = U_{max} \text{ из условия непрерывности} \\ U_{c\ p}(T) = U_{c\ 3}(T) = U_{c\ 3}(0) = U_{min} \text{ из условия непрерывности и периодичности} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E + (U_{min} - E)e^{-\frac{t_u}{RC}} = U_{max} \\ U_{max} e^{-\frac{T-t_u}{RC}} = U_{min} \end{cases}$$

Решая систему относительно постоянных интегрирования, получим

$$U_{max} = E \frac{1 - e^{-\frac{t_u}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}$$

$$U_{min} = E \frac{e^{\frac{t_u}{RC}} - 1}{e^{\frac{T}{RC}} - 1}$$

Запишем установившуюся составляющую с учетом фазы включения α и найденных постоянных интегрирования.

$$U_{ycm}(t) = \begin{cases} E + (E \frac{e^{\frac{t_u}{RC}} - 1}{e^{\frac{T}{RC}} - 1} - E)e^{-\frac{(t-kT+\alpha)}{RC}}, & 0 + kT < t < -\alpha + t_u + kT \\ E \frac{1 - e^{-\frac{t_u}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}} e^{-\frac{t-kT-\alpha-t_u}{RC}}, & -\alpha + t_u + kT < t < -\alpha + T + kT \end{cases}$$

2. Находим свободную составляющую глобального установившегося процесса.

Общий вид свободной составляющей $U_{св}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$. Постоянную интегрирования находим с учетом нулевых начальных условий

$$U_{свх}(0_+) = U_{ycm}(0_+) + A$$

$$A = -U_{ycm}(0_+) = U_{c\ 3}(0_+)$$

$$A = -E - \left(E \frac{e^{\frac{t_u}{RC}} - 1}{e^{\frac{T}{RC}} - 1} - E \right) e^{-\frac{\alpha}{RC}}$$

3. Ответ:

$$U(t) = \left\{ \begin{array}{l} E + \left(E \frac{e^{\frac{t_u}{RC}} - 1}{e^{\frac{T}{RC}} - 1} - E \right) e^{-\frac{t-kT+\alpha}{RC}}, -\alpha + kT < t < -\alpha + t_u + kT \\ E \frac{1 - e^{-\frac{t_u}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}} e^{-\frac{t-kT+\alpha-t_u}{RC}}, -\alpha + t_u + kT < t < -\alpha + T + kT \end{array} \right\} +$$

$$+ \left(-E - \left(E \frac{e^{\frac{t_u}{RC}} - 1}{e^{\frac{T}{RC}} - 1} - E \right) e^{-\frac{\alpha}{RC}} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Строим график для $E=100, B$
 $RC=3.4, c$
 $t_u=2.0, c$
 $T=4.0, c$
 $\alpha=0.9, c$

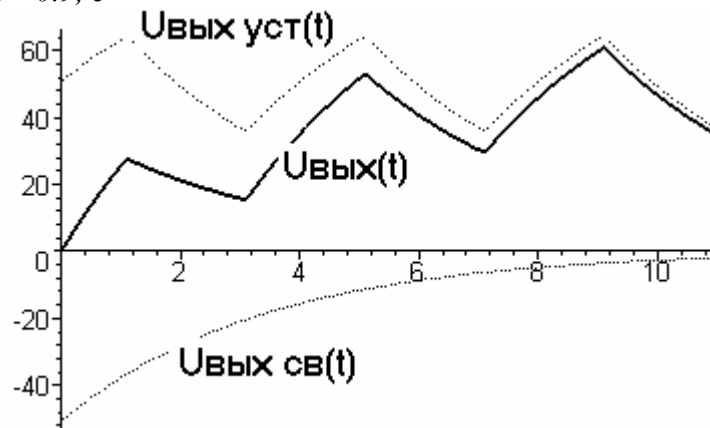
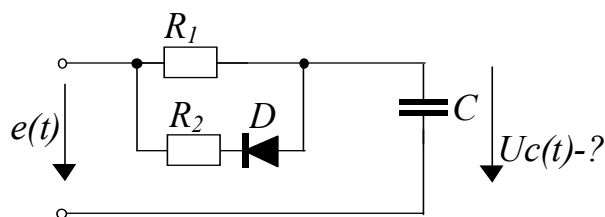
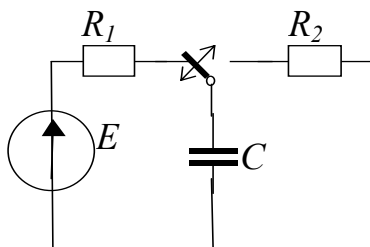


Рис.5.5

3. Расчет переходного процесса в цепи с периодическими коммутациями (метод припасовывания).

В цепях данного класса имеет место периодическое изменение внутренней структур. Поэтому для таких цепей не выполняется принцип суперпозиции и переходная величина не может быть найдена наложением свободной и установившейся составляющих.

Примеры цепей с периодической коммутацией.



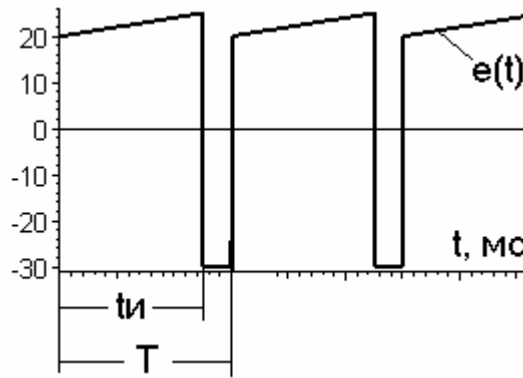


Рис. 5.6.

$$e(t) = \begin{cases} 20 + 100t, & 0 < t < 50 \text{ мс} \\ -30, & 50 \text{ мс} < t < 60 \text{ мс} \end{cases}$$

Рассмотрим пример решения для второй схемы. Параметры:
 $C = 100 \text{ мкФ}$, $R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}$, $T = 60 \text{ мс}$, $t_u = 50 \text{ мс}$.

Решение:

1. Находим напряжение на емкости в установившемся режиме, используя метод сопряжения интервалов. При положительной полярности входного напряжения имеет место интервал заряда конденсатора, при отрицательной полярности - интервал разряда.

а) Находим общее решение на интервалах.

Интервал заряда:

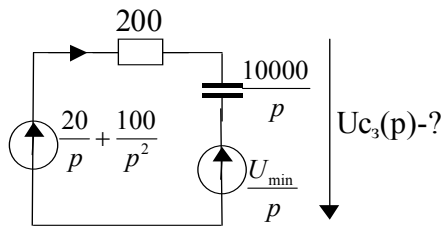


Рис. 5.7.

Операторная схема замещения цепи на интервале заряда конденсатора

$$U_{c_3}(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_{\min}}{p}$$

$$I(p) = \frac{\frac{20}{p} + \frac{100}{p^2} - \frac{U_{\min}}{p}}{200 + \frac{10000}{p}} = \frac{(20 - U_{\min})p + 100}{p(200p + 10000)}$$

$$U_{c_3}(p) = \frac{(20 - U_{\min})p + 100}{p(200p + 10000)} \frac{10000}{p} + \frac{U_{\min}}{p} =$$

$$= \frac{(20 - U_{\min})50}{p(p + 50)} + \frac{500}{p^2(p + 50)} + \frac{U_{\min}}{p}$$

Переходим к оригиналу при помощи формулы разложения

$$u_{c_3}(t) = \frac{50(20 - U_{\min})}{50} + \frac{-50(20 - U_{\min})}{-50} e^{-50t_3} + \frac{500}{50^2} (e^{-50t_3} - 1 + 50t_3) + U_{\min} =$$

$$u_{c3}(t) = 20 - U_{\min} + (20 - U_{\min})e^{-50t_3} + \frac{1}{5}e^{-50t_3} - \frac{1}{5} + 10t_3 + U_{\min} =$$

$$= 19.8 + 10t_3 + (U_{\min} - 19.8)e^{-50t_3}, B$$

Интервал разряда:

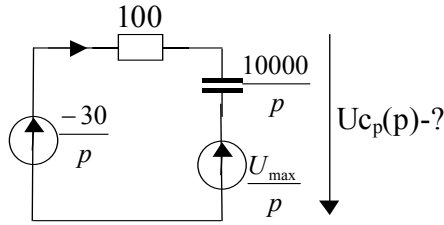


Рис. 5.8.

Операторная схема замещения цепи на интервале разряда

$$U_{cp}(p) = \frac{\frac{-30}{p} - \frac{U_{\max}}{p}}{100 + \frac{10000}{p}} \cdot \frac{10000}{p} + \frac{U_{\max}}{p} =$$

$$= -\frac{(30 + U_{\max})10000}{p(100p + 10000)} + \frac{U_{\max}}{p} = -\frac{(30 + U_{\max})100}{p(p + 100)} + \frac{U_{\max}}{p}$$

Переходим к оригиналу

$$u_{cp}(t) = -30 + (30 + U_{\max})e^{-100t_p}, B.$$

Общий вид установившейся составляющей для глобального времени:

$$u_{cym}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 19.8 + 10(t - kT) + (U_{\min} - 19.8)e^{-50(t-kT)}, 0 + kT < t < 50 \text{ мс} + kT \\ -30 + (30 + U_{\max})e^{-100(t-kT-t_u)}, 50 \text{ мс} + kT < t < 60 \text{ мс} + kT \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \infty \end{array} \right\}$$

б) Далее следует процедура сопряжения интервалов, т.е. нахождение постоянных на основе условий сопряжения.

Из условия непрерывности напряжения на емкости на границах интервалов для момента конца интервала заряда имеем

$$u_{cp}(t_u) = u_{c3}(t_u) = U_{\max}$$

Для момента конца интервала разряда из условия непрерывности и периодичности имеем

$$u_{cp}(T) = u_{c3}(T) = u_{c3}(0) = U_{\min}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 19.8 + 10 \cdot 50 \cdot 10^{-3} + (U_{\min} - 19.8)e^{-50 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = U_{\max} \\ -30 + (30 + U_{\max})e^{-100 \cdot (60-50) \cdot 10^{-3}} = U_{\min} \end{array} \right\}$$

Решая систему уравнений, получим

$$U_{\max} = 17.651$$

$$U_{\min} = -12.470$$

Итак,

$$u_{cym}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 19.8 + 10(t - kT) - 32.27e^{-50(t-kT)}, 0 + kT < t < 50 \text{ мс} + kT \\ -30 + 47.651e^{-100(t-kT-t_u)}, 50 \text{ мс} + kT < t < 60 \text{ мс} + kT \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \infty \end{array} \right\}$$

2. Для расчета переходного процесса в цепях с периодической коммутацией используют метод “припасовывания”. Согласно этому методу, постоянные интегрирования в общих решениях на интервалах, находят для каждого интервала из условия непрерывности переменных состояния на границах интервалов. Таким образом, глобальный переходный процесс будет задан в виде таблицы, в узлах которой приводятся значения постоянных интегрирования. Количество строк в таблице определяется достижением установившегося процесса.

Общее решение на интервалах

$$u_c(t) = \left\{ \begin{array}{l} 19.8 + 10(t - kT) + (U_{\min} - 19.8)e^{-50(t-kT)}, 0 + kT < t < 50 \text{ мс} + kT \\ -30 + (30 + U_{\max})e^{-100(t-kT-t_u)}, 50 \text{ мс} + kT < t < 60 \text{ мс} + kT \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \infty. \end{array} \right\}$$

| Интервал времени | U_{\max} | U_{\min} | Решение на интервале |
|--|------------|------------|---|
| $0.0 \text{ мс} < t < 50.0 \text{ мс}$ | - | 0.00000 | $u_c(t) = 19.8 + 10t - 19.8e^{-50t}$ |
| $50.0 \text{ мс} < t < 60 \text{ мс}$ | 18.6740 | - | $u_c(t) = -30 + 48.674e^{-100(t-50 \text{ мс})}$ |
| $60 \text{ мс} < t < 110 \text{ мс}$ | - | -12.0975 | $u_c(t) = 19.8 + 10(t - 60 \text{ мс}) - 31.893e^{-50(t-60 \text{ мс})}$ |
| $110 \text{ мс} < t < 120 \text{ мс}$ | 17.6820 | - | $u_c(t) = -30 + 47.682e^{-100(t-110 \text{ мс})}$ |
| $120 \text{ мс} < t < 170 \text{ мс}$ | - | -12.4587 | $u_c(t) = 19.8 + 10(t - 120 \text{ мс}) - 32.259e^{-50(t-120 \text{ мс})}$ |
| $170 \text{ мс} < t < 180 \text{ мс}$ | 17.6520 | - | $u_c(t) = -30 + 47.652e^{-100(t-170 \text{ мс})}$ |
| $230 \text{ мс} < t < 240 \text{ мс}$ | - | -12.4698 | $u_c(t) = 19.8 + 10(t - 230 \text{ мс}) - 32.2698e^{-50(t-230 \text{ мс})}$ |
| процесс установился | | | |

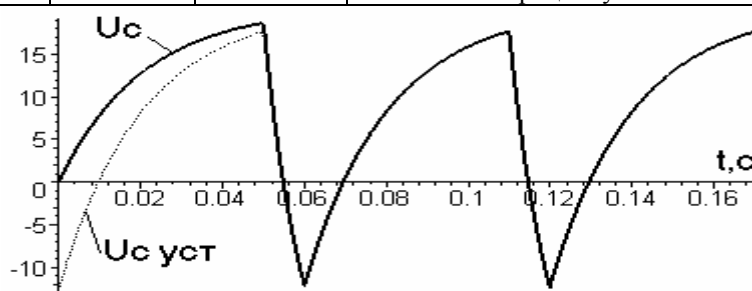


Рис. 5.9.


ЛЕКЦИЯ 6

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Анализ нелинейных цепей сопряжен с гораздо большими сложностями, чем анализ линейных цепей. Причина этого в том, что характеристики элементов цепи являются функциями электрических величин и в общем случае весьма сложными. Иными словами, на воздействия одной и той же формы, но отличающиеся амплитудой, нелинейная цепь будет реагировать совершенно по-разному. На процессы в нелинейной цепи окажут также влияние температура, частота, начальные условия... До сих пор не существует законченной единой теории нелинейных цепей (НЦ), при этом имеется множество различных специальных методов для решения конкретных задач анализа НЦ. Наибольшей универсальностью обладает метод сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента (НЭ) (Папалекси Н.Д.) и численные методы.

Характеристики нелинейных элементов.

Резистивные НЭ:


$$u = f(i)$$

а) полупроводниковый диод (несимметричная ВАХ)

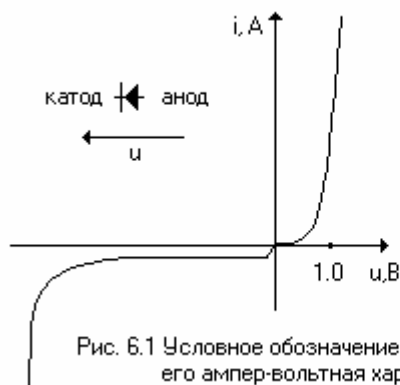


Рис. 6.1 Условное обозначение полупроводникового диода и его ампер-вольтовая характеристика.

б) варистор (симметричная ВАХ)

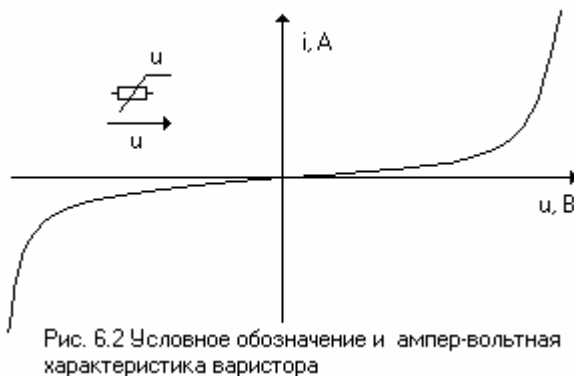


Рис. 6.2 Условное обозначение и ампер-вольтовая характеристика варистора

в) полевой транзистор с р-п переходом и каналом п-типа (управляемая напряжением ВАХ участка сток-исток)

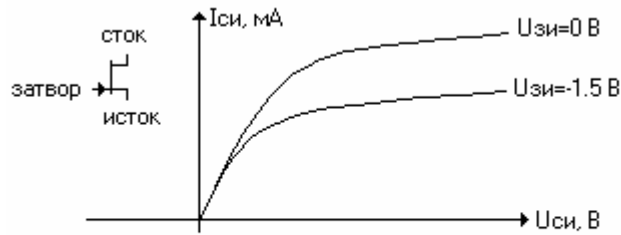


Рис. 6.3 Условное обозначение полевого транзистора с р-п переходом и семейство вольт-амперных характеристик участка сток-исток

г) Электрическая дуга (неоднозначная ВАХ)

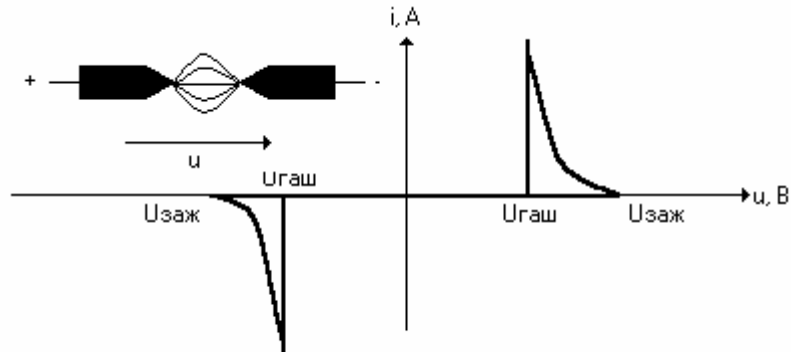


Рис. 6.4 ВАХ электрической дуги

д) Термистор (инерционный элемент имеет существенно различные статическую и динамическую характеристики)

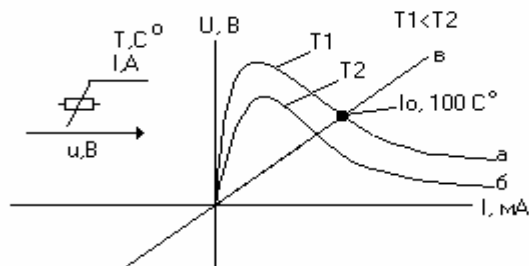


Рис. 6.5 Условное обозначение, статические (а, б) и динамическая (в) ВАХ терморезистора с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления
 T_1, T_2 - температура окружающей среды
 I_0 - действующее значение тока терморезистора, который при этом токе разогрелся, например, до 100 С.

Индуктивные НЭ:



$$u(t) = \frac{d}{dt} \psi(t)$$

$\psi = f(i)$ -вебер-амперная характеристика

Нелинейный индуктивный элемент – чаще всего это катушка индуктивности, имеет сердечник из ферромагнитного материала (электротехническая сталь, пермалой, феррит, аморфное железо и др.) Наличие сердечника из такого материала многократно усиливает индукцию намагничивающего поля, что повышает плотность энергии магнитного поля и позволяет уменьшить габариты катушки. Процесс намагничивания материала происходит

по нелинейной зависимости и имеет участок насыщения. Основные свойства нелинейного индуктивного элемента характеризуют кривые намагничивания. На практике используются идеальная, основная, первоначальная кривые намагничивания, предельная петля гистерезиса. В справочниках, как правило, приводятся основные кривые намагничивания. Эти кривые представляют собой геометрическое место точек концов частных петель намагничивания образцов правильной формы при увеличивающейся амплитуде изменяющегося с низкой частотой магнитного поля.

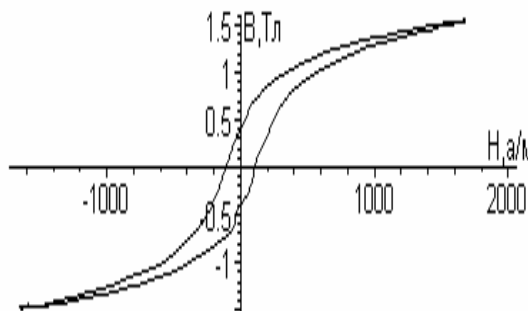
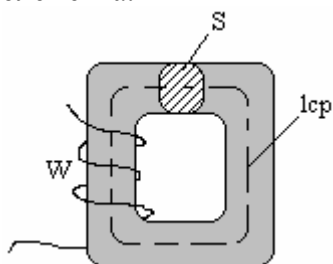


Рис. 6. 6 Кривая намагничивания электротехнической стали.

Для имеющейся характеристики намагничивания $B(H)$ можно получить путем масштабного преобразования (6.3) вебер-амперную характеристику $\psi(i)$ индуктивного элемента.



$$\begin{cases} i(t) \cdot w = H(t) \cdot l_{cp} \\ \psi(t) = w \cdot S \cdot B(t) \end{cases}$$

l_{cp} – длина средней линии магнитопровода, (6.3)

w – число витков катушки,

S – площадь поперечного сечения магнитопровода

Неоднозначность (запаздывание - гистерезис) кривой намагничивания обусловлена наличием необратимых (тепловых) потерь в материале из-за вихревых токов и “трения доменов” при перемагничивании. Чем меньше площадь петли намагничивания, тем меньше потерь у данного материала расходуется на намагничивание.

Ёмкостные НЭ:



$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

$q = f(u)$ – кулон-вольтная характеристика

Поляризация диэлектриков под действием внешнего электрического поля так же происходит по нелинейному закону и при наличии гистерезисных потерь, которые приводят к неоднозначности кулон-вольтной характеристики рис. 6.7.

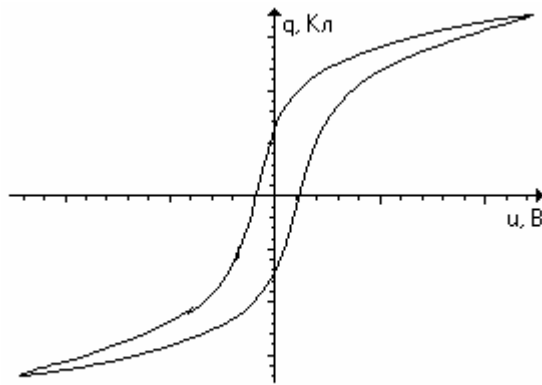


Рис. 6.7 Кулон-вольтная характеристика ёмкостного НЭ

У таких электронных приборов как варикап и вариконд имеет место резко выраженная нелинейная зависимость ёмкости от напряжённости электрического поля. *Варикап* – полупроводниковый диод, *pn* – переход которого смещен в обратном направлении и его барьерная ёмкость нелинейно зависит от напряжения. *Вариконд* – сегнетокерамический конденсатор, у которого диэлектрическая проницаемость управляется напряжением или (и) температурой.

Классификация видов характеристик НЭ

- Однозначные, неоднозначные;
- Симметричные, несимметричные;
- Управляемые, неуправляемые;
- Статические, динамические;

НЭ называется безынерционным, если его статическая и динамическая характеристики (для заданного диапазона частот) совпадают, иначе НЭ называется инерционным. Например, полупроводниковый диод, как правило, можно считать безынерционным, а терморезистор, лампа накаливания, бареттер инерционные.

Статические и дифференциальные параметры НЭ.

Существуют методы анализа НЦ, которые основываются на использовании методов анализа линейных цепей. Возможность такого применения основано на допустимости линеаризации характеристики НЭ в небольших пределах изменения электрической величины. Рассмотрим нелинейный двухполюсник, режим которого задан источником постоянного и переменного тока рис. 6.8.

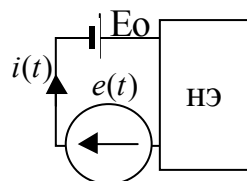


Рис. 6.8

На приложенное напряжение двухполюсник будет реагировать величиной тока, определить которую можно как сумму постоянной и переменной составляющих (при относительно небольшой амплитуде переменного источника)

$$i(t) = I_0 + i \sim, \quad I_0 = \frac{E_0}{R_{cm}}, \quad i \sim = \frac{e(t)}{r_d}$$

R_{cm} – статическое сопротивление

r_d – дифференциальное сопротивление

Статические и динамические сопротивления (параметры) находятся по ВАХ

двухполюсника рис. 6.9.

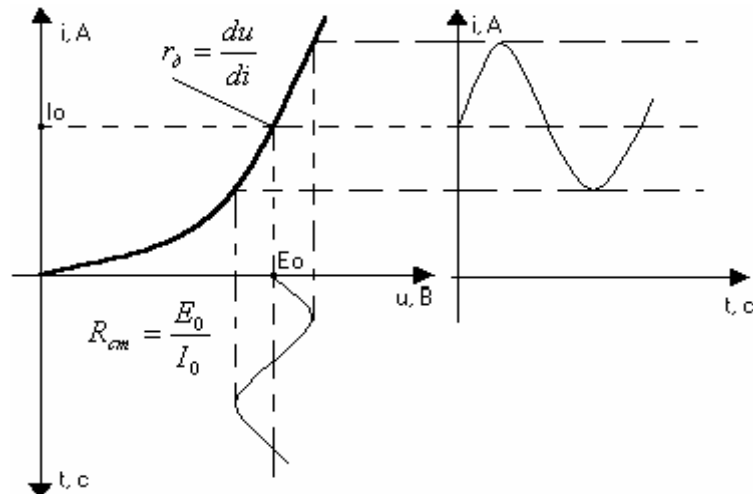


Рис. 6.9 ВАХ нелинейного двухполюсника и определение по ней дифференциального и статического параметров

Вывод: для определения режима НЦ необходимо сделать расчёт по постоянному току с использованием статических параметров, а затем, определив соответствующие дифференциальные параметры, рассчитать режим по переменному току. Расчет режима по переменному току следует делать методом анализа линейных цепей, если амплитуда переменной оставляющей не велика и движение рабочей точки не выходит за границу участка ВАХ с найденным дифференциальным сопротивлением. Здесь и далее часто будет употребляться понятие рабочей точки (РТ) или изображающей точки. Рабочая точка принадлежит кривой ВАХ и её положение в любой момент времени определяется двумя значениями не линейно связанных величин

$$\{i(t), u(t)\}.$$

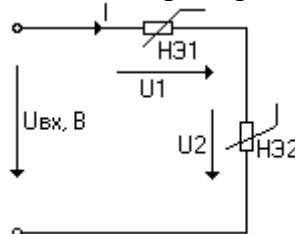
Всё сказанное, относительно параметров НЭ, в полной мере относится и к индуктивным, и к ёмкостным НЭ.

ЛЕКЦИЯ 7

Методы анализа нелинейных цепей постоянного тока.

1) Графический метод. Этот метод заключается в непосредственном графическом решении уравнений Кирхгофа, который назовем

а) “эквивалентирование” по законам Кирхгофа.



Для заданных на рис. 6.10 вольт-амперных характеристик первого и второго нелинейных элементов строим вольт-амперную характеристику участка последовательного соединения НЭ1 и НЭ2 на основе уравнения по 2-му закону Кирхгофа:
 $U_{вх} = U_1 + U_2, I_1 = I_2 = I.$

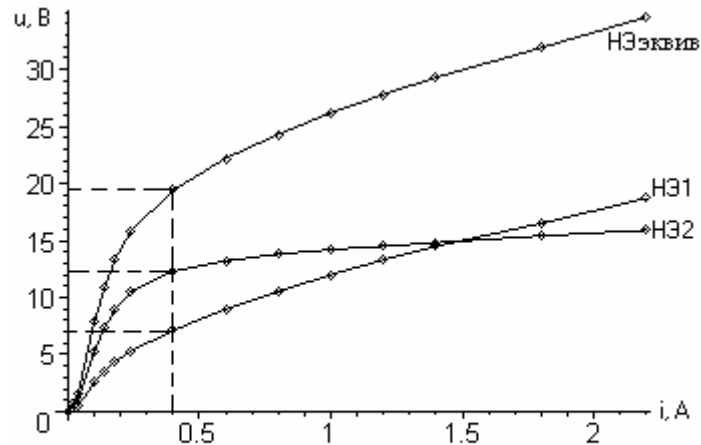


Рис. 6.10 Вольт-амперные характеристики первого и второго нелинейного элемента, а так же ВАХ участка цепи при их последовательном соединении

Пусть на входе действует напряжение $U_{вх}=19.5$ В, тогда по ВАХ эквивалентного НЭ находим в цепи ток $I=0.4$ А. Далее по характеристикам первого и второго нелинейных элементов находим напряжения $U_1=7.0$ В и $U_2=12.5$ В.

Для заданных на рис. 6.10 вольт-амперных характеристик первого и второго нелинейных элементов по первому закону Кирхгофа строим вольт-амперную характеристику участка их параллельного соединения НЭэквив.

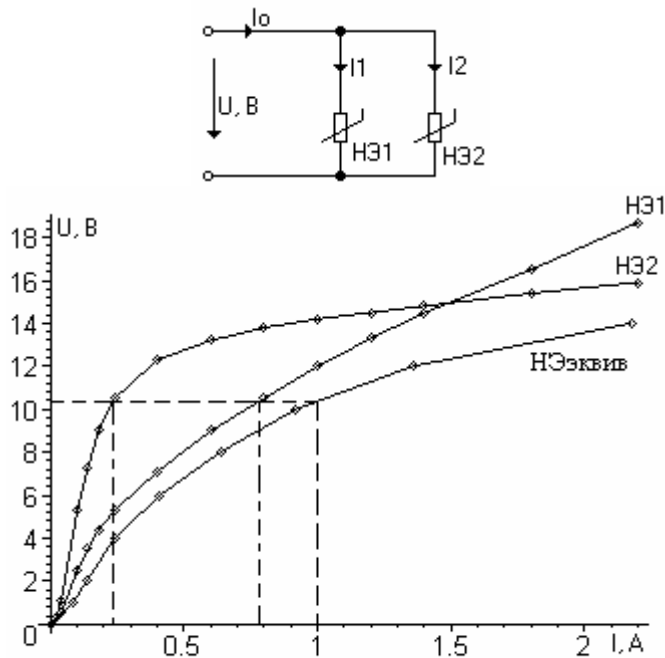
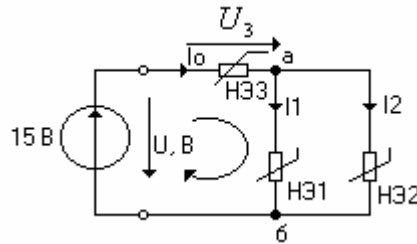


Рис. 6.11. Построение ВАХ участка цеп при параллельном соединении НЭ1 и НЭ2.

Находим напряжение на входе цепи и токи в параллельных ветвях при входном токе равном 1.0 А. Непосредственно по графикам определяем напряжение на входе равным примерно 11 В, ток в НЭ1 – 0.78 А, ток в НЭ2 – 0.22 А.

б) Метод пересечений.



Найти токи в ветвях этой цепи можно, путём эквивалентирования по законам Кирхгофа, как это было показано в двух предыдущих примерах.

Метод пересечений предполагает определение токов путём графического решения нелинейного уравнения по второму закону Кирхгофа

$$U - U_3(I_0) = U_{aб}(I_0). \quad (6.4)$$

В левой части этого уравнения находится ВАХ активного нелинейного двухполюсника, образованного последовательным соединением источника ЭДС и нелинейного резистора НЭЗ. Такую кривую точнее будет назвать нагрузочной характеристикой активного двухполюсника. В правой части уравнения находится ВАХ участка параллельного соединения НЭ1 и НЭ2, которую мы строили на рис. 6.11. Поскольку на этих двух частях цепи одинаковое напряжение и одинаковый ток, то точка пресечения их характеристик и будет определять режим цепи. Построим кривые на рис. 6.12. По точке пересечения характеристик находим ток $I_0 = 0.76 \text{ A}$ и напряжение $U_{aб}(I_0) = 8.9 \text{ V}$. По ВАХ НЭ1 и НЭ2 на рис. 6.11 находим токи $I_1 \approx 0.6 \text{ A}$, $I_2 \approx 0.2 \text{ A}$.

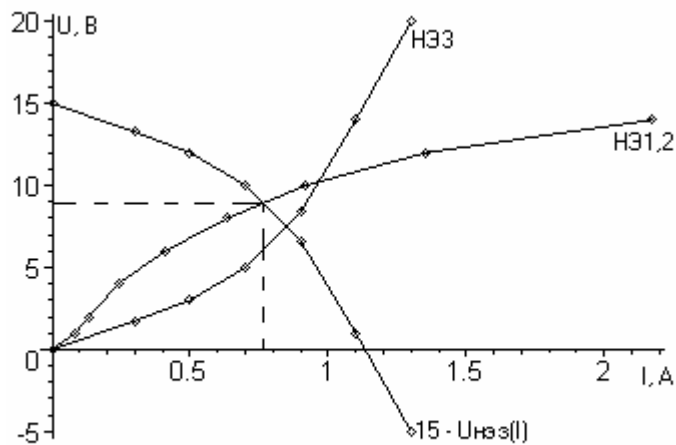
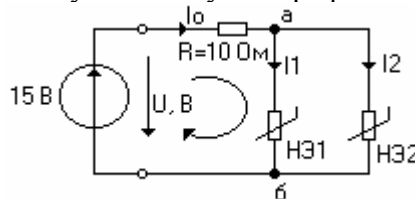


Рис. 6.12 Построение нагрузочной характеристики активного НЭ и нахождение решения нелинейного уравнения (6.4)

1) Графоаналитический метод.

Идейно этот метод похож на метод пересечений. Здесь так же происходит деление цепи на активный двухполюсник и его нелинейную нагрузку и так же графически решается уравнение вида (6.4). Разница проявляется в случаях, когда есть возможность дать аналитическое описание нагрузочной характеристики активного двухполюсника и при этом отпадает необходимость получать её путём графических построений.



В данном случае нагрузочной характеристикой будет прямая линия, которая

проходит через две точки, соответствующие режиму холостого хода и режиму короткого замыкания активного двухполюсника.

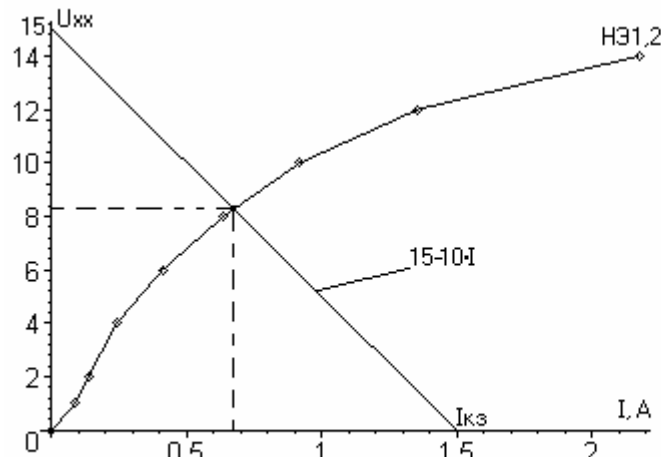


Рис. 6.13. Графическое решение нелинейного уравнения при аналитическом определении нагрузочной характеристики активного двухполюсника

По точке пересечения характеристик находим ток $I_0 = 0.68 \text{ A}$ и напряжение $U_{ab}(I_0) = 8.4 \text{ V}$. По ВАХ НЭ1 и НЭ2 на рис. 6.11 находим токи $I_1 \approx 0.55 \text{ A}$, $I_2 \approx 0.185 \text{ A}$.

2) Аналитический метод.

В этом методе характеристики нелинейных элементов заменяют аналитическими зависимостями в виде усеченных полиномов ($i = au^2$, $u = a_1i + a_2i^2$), кусочно-гладких функций или другого вида выражений. Такое задание характеристик НЭ возможно путём аппроксимации, полученных экспериментальных данных, например, по методу наименьших квадратов. Анализ цепи при аналитическом задании характеристик НЭ сводится к решению системы нелинейных уравнений, составленных, например, по законам Кирхгофа.

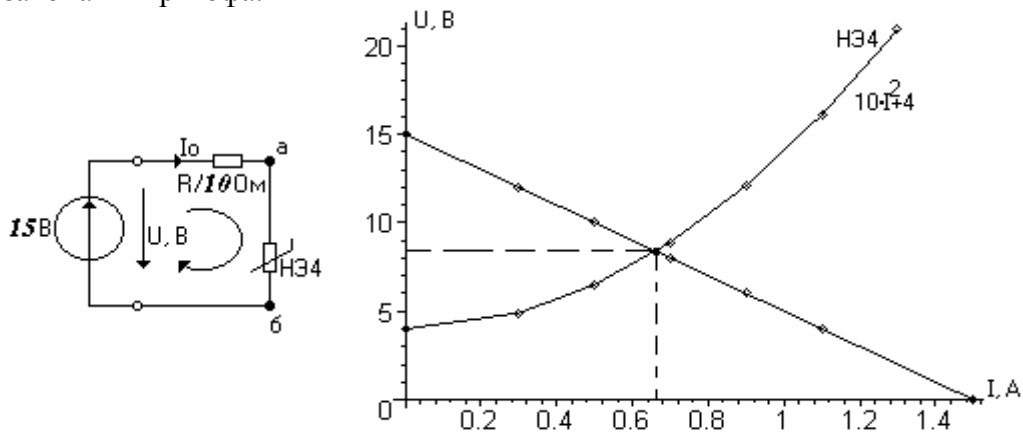


Рис. 6.14. Графическое решение нелинейного уравнения при аналитическом задании характеристики НЭ

$U - RI_0 = U_{HЭ4}(I_0)$ – нелинейное уравнение

$$15 - 10I_0 = 10I_0^2 + 4$$

$$0 = 10I_0^2 + 10I_0 - 11$$

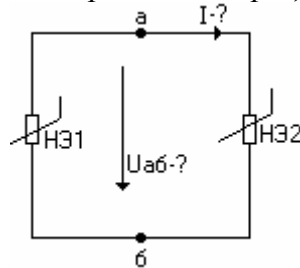
$$I_0 = 0.662, \text{ A}$$

$$U_{HЭ4}(0.662) = 8.381, \text{ V}$$

3) Численный метод.

При аналитическом определении характеристик нелинейных элементов цепи её описание по законам Кирхгофа в виде системы нелинейных уравнений может получиться очень сложным и не иметь аналитического решения. В этом случае используют численные методы решения. Суть этих методов сводится к преобразованию выражения $F(x)=0$ к виду $x = \varphi(x)$, так что бы мог быть организован итерационный процесс, дающий последовательность $\{x^{(k)}\}$, сходящийся к решению. В зависимости от способа преобразования $F(x)=0$ к $x = \varphi(x)$ различают методы численного решения нелинейных уравнений.

Метод простой итерации.



$$U_{НЭ1} = 20I^2 + 10I + 10$$

$$U_{НЭ2} = \frac{10}{I}$$

По второму закону Кирхгофа имеем равенство

$$U_{НЭ1} = U_{НЭ2}$$

$$20I^2 + 10I + 10 = \frac{10}{I}$$

Получаем рекуррентную формулу для вычисления тока

$$I^{(k+1)} = \frac{1}{2I^{(k)2} + I^{(k)} + 1} \quad (6.5)$$

Вычисление тока по рекуррентной формуле осуществляется по следующему алгоритму:

1. Присвоить $k \leftarrow 0$.
2. Задаёмся величиной тока $I^{(k)}$ на начальной итерации.
3. Вычисляем ток на k -ой итерации по формуле $\frac{1}{2I^{(k)2} + I^{(k)} + 1}$
4. Вычисляем абсолютное значение разницы токов $I^{(k)}$ и $\frac{1}{2I^{(k)2} + I^{(k)} + 1}$ и сравниваем её с величиной допустимой абсолютной погрешности вычисления ε . На основании результата сравнения принимаем решение о завершении (или продолжении) процесса вычисления тока. Если заданная точность достигнута, т.е. $\left| I^{(k)} - \frac{1}{2I^{(k)2} + I^{(k)} + 1} \right| < \varepsilon$, то КОНЕЦ, иначе...
5. Присвоить $I^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{2I^{(k)2} + I^{(k)} + 1}$.
6. Присвоить $k \leftarrow k + 1$ и перейти к пункту 3.

Этот алгоритм можно реализовать, например, с помощью такой программы:

```
restart;
```

```
Ik:=0:
for k from 1 by 1 to 18 do
ik:=1/(2*Ik+Ik+1);
Delta:=abs(Ik-ik);
if (Delta>0.01) then Ik:=ik end if;
printf("k=%3g ik=%3.4f %s D=%3.3f\n",k,ik,A,Delta);
end do;
```

Результат работы программы:

```
k=1  ik=1.0000 A D=1.000
k=2  ik=0.2500 A D=0.750
k=3  ik=0.7273 A D=0.477
k=4  ik=0.3591 A D=0.368
k=5  ik=0.6185 A D=0.259
k=6  ik=0.4196 A D=0.199
k=7  ik=0.5645 A D=0.145
k=8  ik=0.4542 A D=0.110
k=9  ik=0.5357 A D=0.081
k=10 ik=0.4740 A D=0.062
k=11 ik=0.5199 A D=0.046
k=12 ik=0.4853 A D=0.035
k=13 ik=0.5111 A D=0.026
k=14 ik=0.4917 A D=0.019
k=15 ik=0.5063 A D=0.015
k=16 ik=0.4953 A D=0.011
k=17 ik=0.5035 A D=0.008
k=18 ik=0.5035 A D=0.008
```

Ответ: ток I=0.5035 А.

Метод Ньютона (метод касательных).

Пусть законы Кирхгофа дали нам для искомой величины выражение вида $F(x) = 0$, тогда для нахождения корней этого нелинейного уравнения будем аппроксимировать его рядом Тейлора, удерживая в нём первые два члена

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

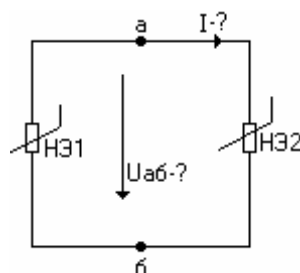
При таком виде аппроксимации, фактически, происходит замена кривой на касательную к ней в точке x_0 . Корень $F(x) = 0$ будем искать среди корней касательных, построенных к кривой $F(x)$ в точках, образующих сходящийся ряд по рекуррентной формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})} \quad (6.6)$$

В отличие от метода простой итерации сходимость к решению числовой последовательности (6.6) является условной. Для надёжной сходимости необходимо выполнение условия выбора начального приближения к решению

$$F(x^{(0)})F''(x^{(0)}) > 0.$$

Пример



$$U_{HЭ1} = 20I^2 + 10I + 10$$

$$U_{HЭ2} = \frac{10}{I}$$

Получаем рекуррентное уравнение из равенства напряжений на нелинейных элементах по второму закону Кирхгофа

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} - \frac{20I^{(k)3} + 10I^{(k)2} + 10I^{(k)} - 10}{60I^{(k)2} + 20I^{(k)} + 10}.$$

Алгоритм расчета тока методом Ньютона:

1. Присвоить $k \leftarrow 0$.
2. Задаёмся величиной тока $I^{(k)}$ на начальной итерации.
3. Вычисляем ток на k -ой итерации по формуле $I^{(k)} - \frac{20I^{(k)3} + 10I^{(k)2} + 10I^{(k)} - 10}{60I^{(k)2} + 20I^{(k)} + 10}$
4. Вычисляем абсолютное значение разницы токов $I^{(k)}$ и $I^{(k)} - \frac{20I^{(k)3} + 10I^{(k)2} + 10I^{(k)} - 10}{60I^{(k)2} + 20I^{(k)} + 10}$ и сравниваем её с величиной допустимой абсолютной погрешности вычисления ε . На основании результата сравнения принимаем решение о завершении (или продолжении) процесса вычисления тока. Если заданная точность достигнута, т.е. $\left| \frac{20I^{(k)3} + 10I^{(k)2} + 10I^{(k)} - 10}{60I^{(k)2} + 20I^{(k)} + 10} \right| < \varepsilon$, то КОНЕЦ, иначе...
5. Присвоить $I^{(k+1)} \leftarrow I^{(k)} - \frac{20I^{(k)3} + 10I^{(k)2} + 10I^{(k)} - 10}{60I^{(k)2} + 20I^{(k)} + 10}$.
6. Присвоить $k \leftarrow k + 1$ и перейти к пункту 3.

Этот алгоритм можно реализовать, например, с помощью такой программы:

```
restart;
Ik:=0;
for k from 1 by 1 to 6 do
ik:=Ik-(20*Ik^3+10*Ik^2+10*Ik-10)/(60*Ik^2+20*Ik+10);
Delta:=abs(Ik-ik);
if (Delta>0.01) then Ik:=ik end if;
printf("k=%3g ik=%3.4f %s D=%3.3f\n",k,ik,A,Delta);
end do;
```

Результат работы программы:

```
k=1      ik=1.0000 A D=1.000
k=2      ik=0.6667 A D=0.333
k=3      ik=0.5259 A D=0.141
k=4      ik=0.5007 A D=0.025
k=5      ik=0.5000 A D=0.001      Ответ: ток I=0.5000 A.
k=6      ik=0.5000 A D=0.001
```

Вывод: сравнение двух методов делается в пользу метода касательных потому, что с его помощью заданную точность удаётся достигнуть гораздо быстрее (всего 5 итераций), но нужно помнить об условной сходимости этого метода.

4) Метод кусочно-линейной аппроксимации.

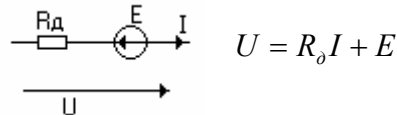
Метод заключается в аппроксимации характеристики НЭ ломаной линией, составлении и решении системы линейных алгебраических уравнений. При этом на

каждом участке характеристики связь величин определяется линейной зависимостью вида

$$y = kx + b,$$

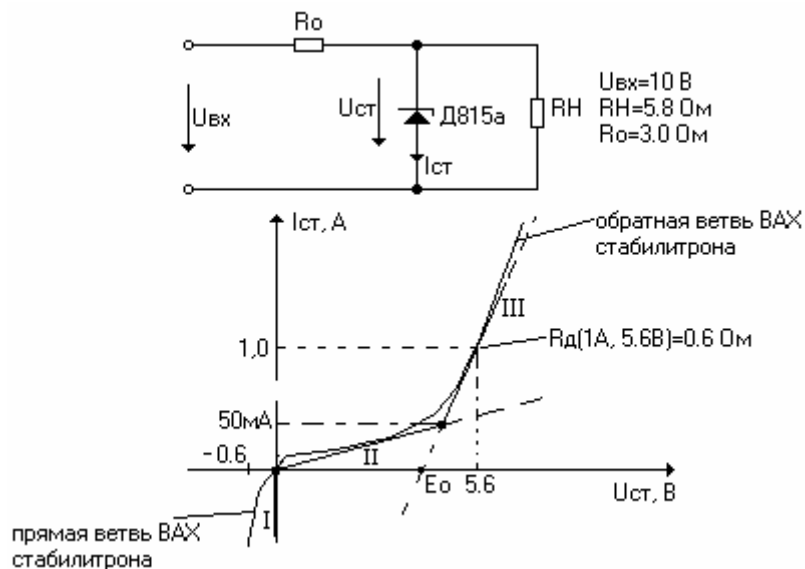
где k - дифференциальный параметр характеристики на данном участке.

Например, для резистивных НЭ этот метод на каждом участке характеристики даст схему замещения нелинейного резистора, состоящую из последовательного соединения линейного резистора R_d и источника ЭДС.



Чтобы рассчитать токи в ветвях нелинейной цепи нужно для каждого участка характеристики составить линейные схемы замещения и сделать их расчет. Среди полученных значений токов только одно будет удовлетворять условию нахождения рабочей точки на участке, для которого была составлена данная схема замещения (если это не граница участка).

Пример. Расчет параметрического стабилизатора и определение его коэффициента стабилизации.



Решение:

1. Аппроксимируем характеристику стабилитрона тремя линейными участками.

I участок:

$$\begin{cases} U_{cm}^{(I)} = 0 \text{ в}, \\ I_{cm}^{(I)} < 0 \end{cases}$$

II участок:

$$\begin{cases} U_{cm}^{(II)} = R_{d2} I_{cm}^{(II)}, \text{ в} \\ 0 < I_{cm}^{(II)} < 50 \text{ ма} \end{cases}$$

III участок:

$$\begin{cases} U_{cm}^{(III)} = R_{d3} I_{cm}^{(III)} + E_0, \text{ в} \\ 50 \text{ ма} < I_{cm}^{(III)} < \infty \end{cases}$$

$R_{d3} = 0.6 \text{ Ом}$ находим в справочных данных.

$E_0 = 5.0 \text{ в}$ находим из условия $5.6 = R_{d3} \cdot 1.0 + E_0$.

$R_{d2} = 100 \text{ Ом}$ находим из условия $E_0 = R_{d2} \cdot 50 \text{ ма}$ (неточность допустимая).

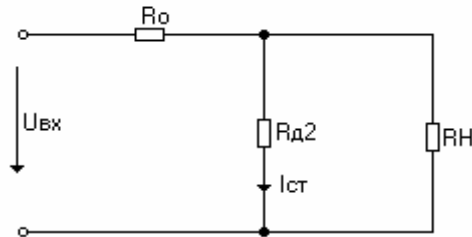
$$U_{cm} = \begin{cases} 0, I_{cm} < 0 \\ 100 \cdot I_{cm}, 0 < I_{cm} < 50 \text{ ма} \\ 0.6 \cdot I_{cm} + 5.0, 50 \text{ ма} < I_{cm} < \infty \end{cases}$$

2. Для каждого участка характеристики составляем схему замещения и находим ток и напряжение стабилитрона.

I участок:

Анализ схемы на этом участке делать не будем, так как ток стабилитрона не может быть отрицательным при указанной полярности входного напряжения.

II участок:



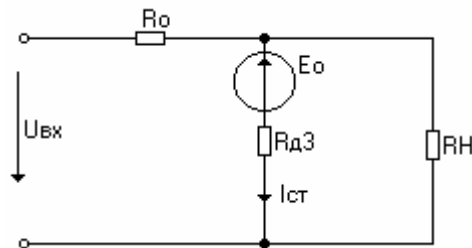
Правило чужого сопротивления

$$I_{cm}^{II} = \frac{U_{вх}}{R_0 + \frac{R_{д2} R_H}{R_{д2} + R_H}} \cdot \frac{R_H}{R_{д2} + R_H} =$$

$$\frac{10}{3.0 + \frac{100 \cdot 5.8}{100 + 5.8}} \cdot \frac{5.8}{100 + 5.8} = 64 \text{ ма}$$

Анализ схемы на втором участке определяет положение рабочей точки вне границ второго участка.

III участок:



Метод наложения

$$I_{cm}^{III} = I_{cmBX} + I_0$$

$$I_{cmBX} = \frac{U_{вх}}{R_0 + \frac{R_{д3} R_H}{R_{д3} + R_H}} \cdot \frac{R_H}{R_{д3} + R_H} =$$

$$= \frac{10}{3.0 + \frac{0.6 \cdot 5.8}{0.6 + 5.8}} \cdot \frac{5.8}{0.6 + 5.8} = 2.557 \text{ а}$$

$$I_0 = - \frac{E_0}{R_{д3} + \frac{R_0 R_H}{R_0 + R_H}} = - \frac{5.0}{0.6 + \frac{3.0 \cdot 5.8}{3.0 + 5.8}} = 1.940 \text{ а}$$

$$I_{cm}^{III} = I_{cmBX} + I_0 = 2.557 - 1.940 = 0.616 \text{ а}$$

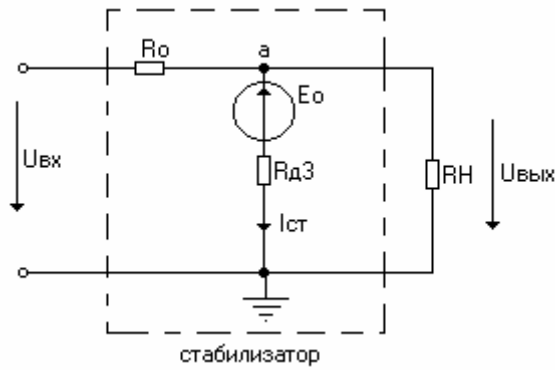
Анализ схемы на третьем участке определяет положение рабочей точки на третьем участке и режим стабилизатора

$$I_{cm} = 0.616 \text{ а}$$

$$U_{cm} = 0.6 \cdot 0.616 + 5.0 = 5.37 \text{ в}$$

Расчет коэффициента стабилизации

Коэффициент стабилизации – это отношение относительного изменения входа к относительному изменению выхода.



$$K_{cm} = \frac{\frac{\Delta U_{ex}}{U_{ex}}}{\frac{\Delta U_{вых}}{U_{вых}}} \text{ или } K_{cm} = \frac{dU_{ex}}{dU_{вых}} \cdot \frac{U_{вых}}{U_{ex}}$$

$$\varphi_a \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_{\partial 3}} + \frac{1}{R_H} \right) = \frac{U_{ex}}{R_0} + \frac{E_0}{R_{\partial 3}} \quad \varphi_a = U_{вых}$$

$$U_{вых} = \frac{\frac{U_{ex}}{R_0} + \frac{E_0}{R_{\partial 3}}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_{\partial 3}} + \frac{1}{R_H}} = \frac{U_{ex} R_{\partial 3} + E_0 R_0}{R_{\partial 3} R_0} \cdot \frac{R_0 R_H R_{\partial 3}}{R_{\partial 3} R_0 + R_0 R_H + R_{\partial 3} R_H} = U_{ex} \frac{R_{\partial 3} R_H}{R_{\Sigma}} + E_0 \frac{R_0 R_H}{R_{\Sigma}}$$

$$R_{\Sigma} = R_{\partial 3} R_0 + R_0 R_H + R_{\partial 3} R_H$$

$$U_{ex} = U_{вых} \frac{R_{\Sigma}}{R_{\partial 3} R_H} - E_0 \frac{R_0 R_H}{R_{\partial 3} R_H} = U_{вых} \frac{R_{\Sigma}}{R_{\partial 3} R_H} - E_0 \frac{R_0}{R_{\partial 3}}$$

$$\frac{dU_{ex}}{dU_{вых}} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\partial 3} R_H}$$

$$\frac{U_{вых}}{U_{ex}} = \frac{(U_{ex} + E_0 \frac{R_0}{R_{\partial 3}}) \frac{R_{\partial 3} R_H}{R_{\Sigma}}}{U_{ex}} = \frac{R_{\partial 3} R_H}{R_{\Sigma}} + \frac{E_0}{U_{ex}} \frac{R_0 R_H}{R_{\Sigma}}$$

$$K_{cm} = \frac{dU_{ex}}{dU_{вых}} \cdot \frac{U_{вых}}{U_{ex}} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\partial 3} R_H} \cdot \left(\frac{R_{\partial 3} R_H}{R_{\Sigma}} + \frac{E_0}{U_{ex}} \frac{R_0 R_H}{R_{\Sigma}} \right) = 1 + \frac{E_0}{U_{ex}} \frac{R_0}{R_{\partial 3}}$$

$$K_{cm} = 1 + \frac{E_0}{U_{ex}} \frac{R_0}{R_{\partial 3}}.$$

Получается, что коэффициент стабилизации не зависит от нагрузки, если, конечно, при этом рабочая точка находится на третьем участке характеристики. Для данной схемы после подстановки получим

$$K_{cm} = 1 + \frac{E_0}{U_{вх}} \frac{R_0}{R_{\partial 3}} = 1 + \frac{5.0}{10} \frac{3}{0.6} = 3.5$$

ЛЕКЦИЯ 8

Методы анализа нелинейных цепей переменного тока.

1. Графический метод.

Если в отношении зажимов нелинейного участка цепи известен ток или напряжение, то его режим может быть определен графически.

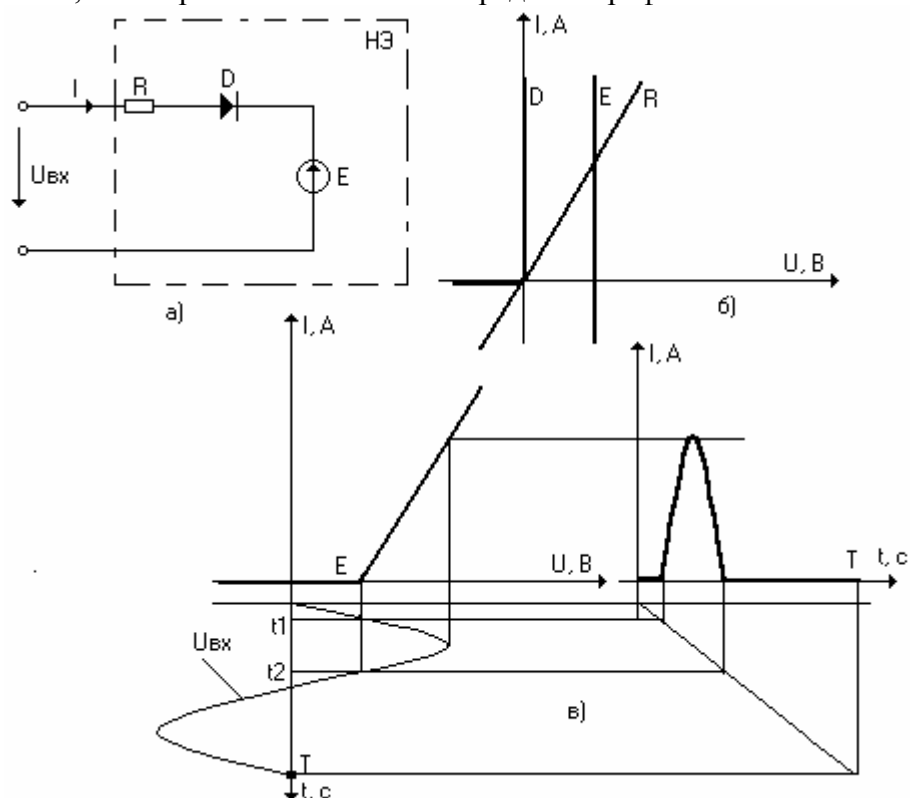
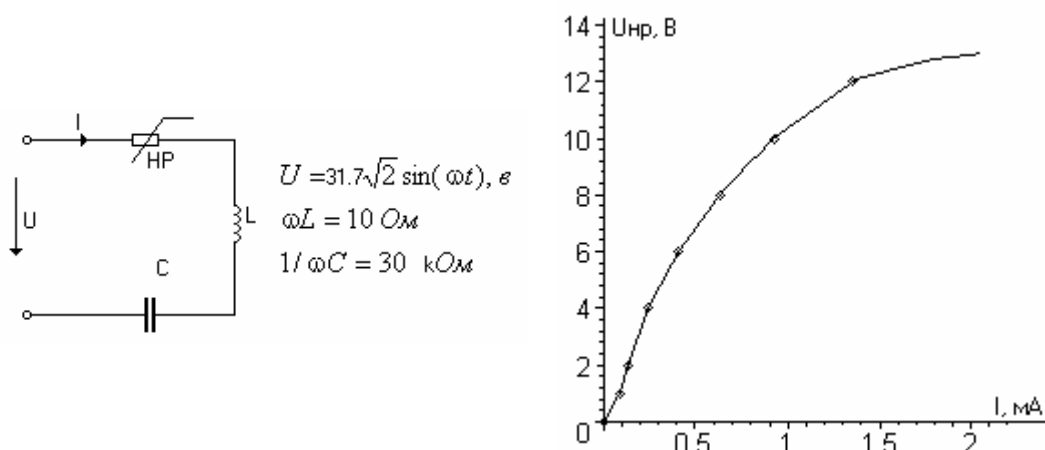


Рис. 8.1.

Для графического построения тока нужно по законам Кирхгофа построить эквивалентную ВАХ участка НЦ рис. 8.1. в). Затем по найденной ВАХ при заданном напряжении на входе НЭ находим ток в любой момент времени.

2. Расчет цепей с инерционным нелинейным элементом.



НР - инерционный нелинейный резистор (полупроводниковый терморезистор с отрицательным температурным коэффициентом). Его ВАХ задана для действующих значений тока и напряжения при постоянной температуре окружающей среды без обдува. Изменение проводимости терморезистора связано с изменением температуры, которая в свою очередь определяется действующим значением, протекающего через него тока. Для мгновенных значений тока этот НР следует рассматривать как линейный резистор, так как в течении периода приложенного напряжения быстрое изменение тока не приводит к заметному изменению температуры НР по причине температурной инерционности, т.е. температурная постоянная времени терморезистора многим больше периода приложенного напряжения. Следовательно, данную цепь синусоидального тока после прекращения электрического и температурного переходных процессов можно рассчитывать как линейную известным нам комплексным методом.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_{cm}^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

где R_{cm} – статическое сопротивление терморезистора при заданном токе.

Вычислить действующее значение тока можно, решив это нелинейное уравнение методом простой итерации.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_{cm}^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{U_{HP}^2}{I^2} + (X_L - X_C)^2}}$$

$$I^{(k)} = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{U_{HP}^{(k-1)}}{I^{(k-1)}}\right)^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Задаёмся $I_{HP}^{(0)} = 0.25 \text{ ма}$ $\varepsilon = 0.01$.

| k | $I_{HP}^{(k-1)}, \text{ ма}$ | $U_{HP}^{(k-1)}, \text{ в}$ | $I_{HP}^{(k)}, \text{ ма}$ | $ I_{HP}^{(k-1)} - I_{HP}^{(k)} , \text{ ма}$ |
|---------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------------|---|
| 1 | 0.25 | 4.0 | 0.9320 | 3.0670 |
| 2 | 0.932 | 9.8 | 0.9975 | 0.0649 |
| 3 | 0.9975 | 10.1 | 1.0048 | 0.003931 |
| точность достигнута | | | | |

3. Метод сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элементов.

Этот метод был предложен российским академиком Н.Д. Папалекси (1880 - 1947) в

1912 г. Пусть имеется нелинейная цепь, содержащая k нелинейных элементов, тогда её можно описать, например, по законам Кирхгофа в виде системы нелинейных интегродифференциальных уравнений. Аппроксимируя характеристики НЭ ломаными, можно исходную систему нелинейных уравнений разбить на m линейных систем интегродифференциальных уравнений. В общем случае

$$m = \prod_{i=1}^k l_i$$

l_i – кол-во линейных участков ВАХ i -го НЭ.

В любой момент времени режим цепи находится из решения одной из систем уравнений. Из теории переходных процессов мы находим это решение как сумму установившейся и свободной составляющих

$$x(t) = x_{ycm}(t) + x_{св}(t) = x_{ycm}(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{n_k-1} t^s e^{\alpha_k t} (A_{C_{ks}} \cos \beta_k t + A_{S_{ks}} \sin \beta_k t),$$

где

n -порядок цепи (кол-во корней характеристического уравнения);

$p_k = \alpha_k + j\beta_k$ - корни характеристического уравнения;

$A_{C_{ks}}, A_{S_{ks}}$ – постоянные интегрирования;

n_k – кратность k -го корня.

Число возможных линейных схем замещения может быть меньше чем m . Исключая из числа m , решения с невозможным сочетанием участков (не выполняются на интервале времени законы Кирхгофа) и устанавливая траекторию рабочих точек, т.е. порядок следования оставшихся решений в течении периода наиболее низкочастотного источника, переходим к этапу сопряжения интервалов.

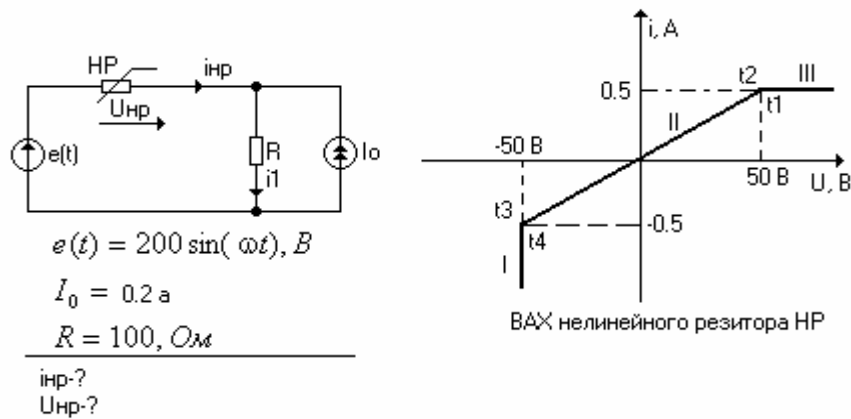
Сопряжения интервалов - это задача нахождения постоянных интегрирования и границ интервалов коммутации. Нахождение этих неизвестных осуществляется путём совместного решения уравнений, составленных на условиях сопряжения интервалов:

Первое условие: условие непрерывности (законы коммутации);

Второе условие: условие прохождения рабочей точки через изломы характеристики с известными координатами;

Третье условие: условие периодичности.

Пример. 1 Расчёт нелинейной резистивной цепи переменного тока.



Решение:

1. Составляем по законам Кирхгофа систему нелинейных уравнений.

$$\begin{cases} i_1 = i_{np} + I_0 \\ u_{np} + R \cdot i_1 = e(t) \end{cases}$$

2. Аппроксимируем характеристику НЭ.

I участок:
$$\begin{cases} u_{np} = -50 \text{ в} \\ i_{np} < -0.5 \text{ а} \end{cases}$$

II участок:
$$u_{np} = 100 i_{np} \text{ в}$$

III участок:
$$\begin{cases} u_{np} > 50 \text{ в} \\ i_{np} = -0.5 \text{ а} \end{cases}$$

3. Разбиваем исходную нелинейную систему уравнений на три системы линейных уравнений и сразу находим общее решение для тока и напряжения на НР.

I участок:
$$\begin{cases} i_1 = i_{np} + 0.2 \\ -50 + 100 i_1 = 200 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{np}^I = 0.3 + 2 \sin(\omega t), \text{ а} \\ u_{np}^I = -50 \text{ в} \end{cases}$$

II участок:
$$\begin{cases} i_1 = i_{np} + 0.2 \\ 100 i_{np} + 100 i_1 = 200 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{np}^{II} = -0.2 + \sin(\omega t), \text{ а} \\ u_{np}^{II} = -10 + 100 \sin(\omega t), \text{ в} \end{cases}$$

III участок:
$$\begin{cases} i_1 = i_{np} + 0.2 \\ u_{np} + 100 i_1 = 200 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{np}^{III} = 0.5, \text{ а} \\ u_{np}^{III} = -70 + 200 \sin(\omega t), \text{ в} \end{cases}$$

4. Сопряжение интервалов – нахождение моментов времени t_1, t_2, t_3, t_4 перехода рабочей точки с одного участка на другой. Для нахождения траектории движения рабочей точки (РТ) сначала нужно определить положение РТ в нулевую фазу

источника $e(t)$. При $t = 0$ с $U_{np}(0) = -10$ в, $i_{np}(0) = -0.1$ а, т.е. РТ находится на II участке и следовательно траектория РТ будет такой II-III-II-I-II. Используя второе условие сопряжения, получим

$$u_{np}^{II}(t_1) = 50, \text{ в}$$

$$50 = -10 + 100 \sin(\omega t_1)$$

$$\omega t_1 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{60}{100}\right) + k\pi = (-1)^k 37^\circ + k180^\circ \stackrel{k=0}{=} 37^\circ$$

$$u_{np}^{III}(t_2) = 50, \text{ в}$$

$$-70 + 200 \sin(\omega t_2) = 50$$

$$\omega t_2 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{120}{200}\right) + k\pi = (-1)^k 37^\circ + k180^\circ \stackrel{k=1}{=} 143^\circ$$

$$u_{np}^{II}(t_3) = -50, \text{ в}$$

$$-10 + 100 \sin(\omega t_3) = -50$$

$$\omega t_3 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{-40}{100}\right) + k\pi = (-1)^k 24^\circ + k180^\circ$$

$$\omega t_3 = (-1)^k (-24^\circ) + k180^\circ \stackrel{k=1}{=} -24^\circ + 180^\circ = 156^\circ$$

$$i_{np}^I(t_4) = -0.5, \text{ а}$$

$$0.3 + 2 \sin(\omega t_4) = -0.5$$

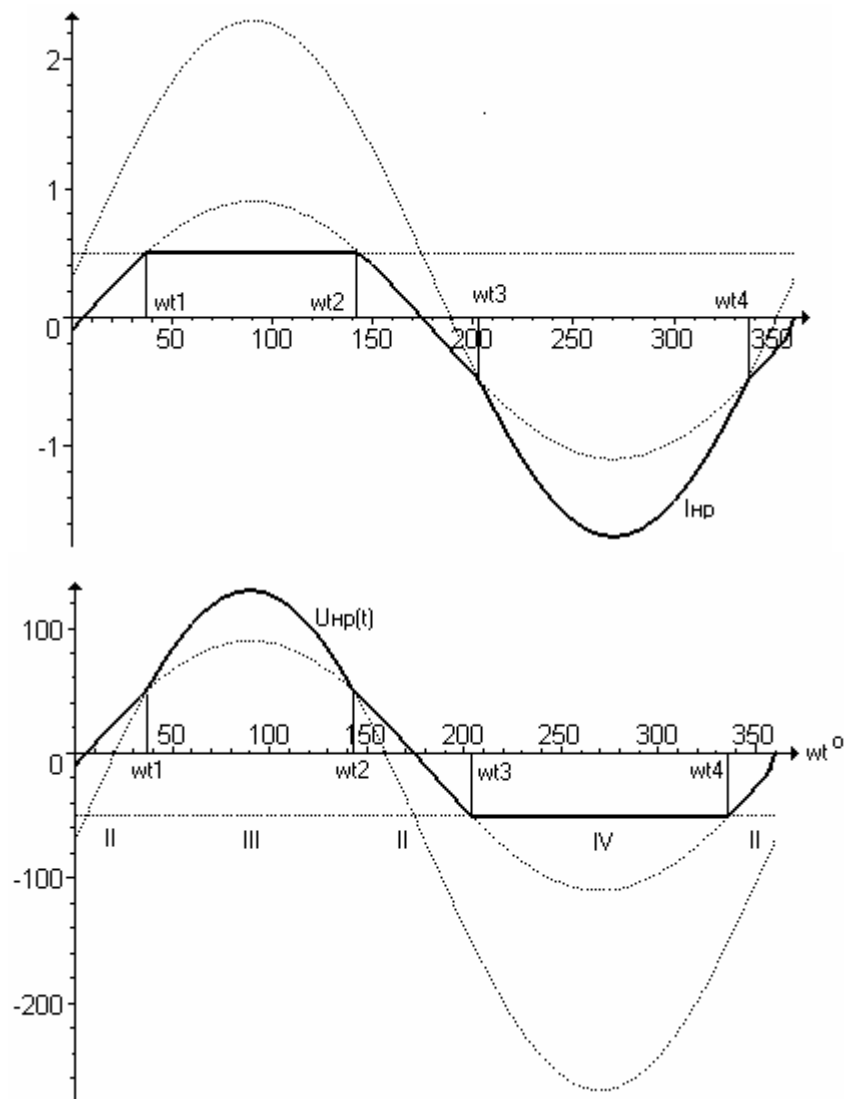
$$\omega t_4 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{-0.8}{2}\right) + k\pi = (-1)^k (-24^\circ) + k180^\circ$$

$$\omega t_4 = (-1)^k (-24^\circ) + k180^\circ \stackrel{k=2}{=} -24^\circ + 360^\circ = 336^\circ$$

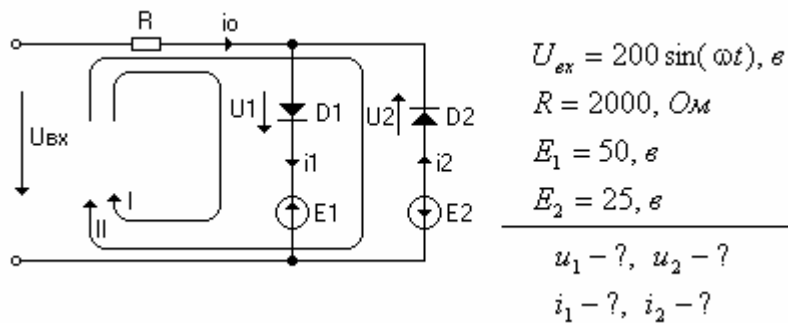
5. Записываем ответ и строим графики тока и напряжения на НР.

$$i_{np}(t) = \begin{cases} -0.2 + \sin(\omega t), & 0 < \omega t < 37^\circ \\ 0.5, & 37^\circ < \omega t < 143^\circ \\ 0.3 + 2 \sin(\omega t), & 143^\circ < \omega t < 204^\circ \\ -0.2 + \sin(\omega t), & 204^\circ < \omega t < 360^\circ \end{cases}$$

$$u_{np}(t) = \begin{cases} -10 + 100 \sin(\omega t), & 0 < \omega t < 37^\circ \\ -70 + 200 \sin(\omega t), & 37^\circ < \omega t < 143^\circ \\ -10 + 100 \sin(\omega t), & 143^\circ < \omega t < 204^\circ \\ -50, & 204^\circ < \omega t < 360^\circ \end{cases}$$



Пример 2. Расчет диодно-резистивной цепи (DR-цепь)

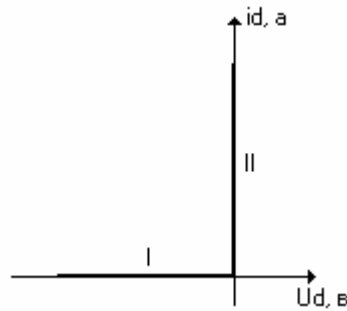


Решение:

1. Составляем нелинейную систему уравнений по законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} Ri_0 + u_1 + E_1 = U_{ex}, \\ Ri_0 - u_2 - E_2 = U_{ex}, \\ i_1 = i_0 + i_2; \end{cases}$$

2. Аппроксимируем характеристику диодов двумя линейными участками.



I участок:

$$\begin{cases} u_1 < 0, \\ i_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 < 0, \\ i_2 = 0, \end{cases}$$

II участок:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ i_1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = 0, \\ i_2 > 0, \end{cases}$$

3. Разбиваем исходную нелинейную систему уравнений на четыре системы линейных уравнений по числу возможных положений рабочих точек (РТ) на участках характеристик диодов.

D1 – РТ1 на I участке

D2 – РТ2 на I участке

$$\begin{cases} u_1 = U_{\text{ex}} - E_1, \\ u_2 = -U_{\text{ex}} - E_2, \\ i_1 = 0, \\ i_0 = 0, \\ i_2 = 0; \end{cases}$$

D1 – РТ1 на II участке

D2 – РТ2 на I участке

$$\begin{cases} Ri_0 + E_1 = U_{\text{ex}}, \\ Ri_0 - u_2 - E_2 = U_{\text{ex}}, \\ i_1 = i_0, \\ i_2 = 0; \end{cases}$$

D1 – РТ1 на I участке

D2 – РТ2 на II участке

$$\begin{cases} Ri_0 + u_1 + E_1 = U_{\text{ex}}, \\ Ri_0 - E_2 = U_{\text{ex}}, \\ i_1 = 0, \\ i_0 = -i_2; \end{cases}$$

Состояние D1 открыт (РТ1 на II участке) и D2 открыт (РТ2 на II участке) невозможно, т.к. не может удовлетворять исходной системе уравнений на интервале.

4. Находим общие решения полученных систем уравнений на интервалах времени, когда рабочие точки движутся по участкам характеристик.

D1 – РТ1 на I участке

D2 – РТ2 на I участке

$$\begin{cases} u_1 = 200 \sin(\omega t) - 50, \\ u_2 = -200 \sin(\omega t) - 25, \\ i_1 = 0, \quad i_0 = 0, \quad i_2 = 0; \end{cases}$$

D1 – РТ1 на II участке

D2 – РТ2 на I участке

$$\begin{cases} i_0 = \frac{200 \sin(\omega t) - 50}{2000} = \\ 0.1 \sin(\omega t) - 0.025 \text{ а}, \\ u_2 = 200 \sin(\omega t) - 50 - \\ 200 \sin(\omega t) - 25 = -75, \text{ в} \\ i_1 = 0.1 \sin(\omega t) - 0.025 \text{ а}, \\ i_2 = 0, \quad u_1 = 0; \end{cases}$$

D1 – РТ1 на I участке

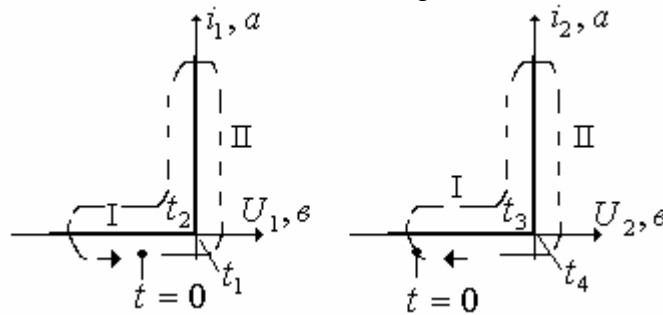
D2 – РТ2 на II участке

$$\begin{cases} i_0 = \frac{200 \sin(\omega t) + 25}{2000} = \\ 0.1 \sin(\omega t) + 0.0125 \text{ а}, \\ u_1 = 200 \sin(\omega t) - 50 - \\ 200 \sin(\omega t) - 25 = -75, \text{ в} \\ i_2 = -0.1 \sin(\omega t) - 0.0125 \text{ а}, \\ i_1 = 0, \quad u_2 = 0; \end{cases}$$

5. Сопряжение интервалов - находим моменты времени перехода РТ с одного участка на другой из решения тригонометрических уравнений (**I способ**) или из решения тригонометрических неравенств (**II способ**).

I способ

Сначала нужно определить траекторию движения рабочих точек обоих диодов. Сделать это можно с помощью качественного анализа работы исходной схемы.



Используя второе условие сопряжения интервалов, получим

$$u_1^{(I-I)}(t_1) = 0, \text{ в}$$

$$0 = 200 \sin(\omega t_1) - 50$$

$$\omega t_1 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi = (-1)^k 14.477^\circ + k180^\circ \stackrel{k=0}{=} 14.477^\circ$$

$$i_1^{(II-I)}(t_2) = 0, \text{ а}$$

$$0.1 \sin(\omega t_2) - 0.025 = 0$$

$$\omega t_2 = (-1)^k \arcsin(0.25) + k\pi = (-1)^k 14.477^\circ + k180^\circ \stackrel{k=1}{=} 165.5^\circ$$

$$u_2^{(I-I)}(t_3) = 0, \text{ в}$$

$$-200 \sin(\omega t_3) - 25 = 0$$

$$\omega t_3 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{8}\right) + k\pi = (-1)^k 7.180^\circ + k180^\circ \stackrel{k=1}{=} 187.18^\circ$$

$$i_2^{(I-II)}(t_4) = 0, \text{ а}$$

$$-0.1 \sin(\omega t_4) - 0.0125 = 0$$

$$\omega t_4 = (-1)^k \arcsin(-0.125) + k\pi = (-1)^k (-7.18^\circ) + k180^\circ \stackrel{k=2}{=} 352.82^\circ$$

II способ

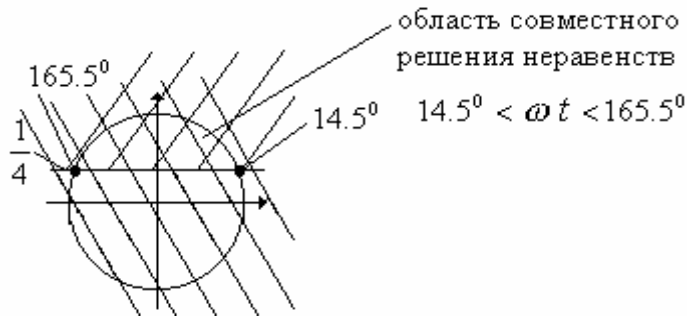
Длительность интервала (I-I) определяем из условия, что напряжение на обоих диодах будет меньше нуля

$$\begin{aligned} u_1^{I-I} < 0 & \left\{ \begin{aligned} 200 \sin(\omega t) - 50 < 0, \\ u_2^{I-I} < 0 & \left\{ \begin{aligned} -200 \sin(\omega t) - 25 < 0, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$



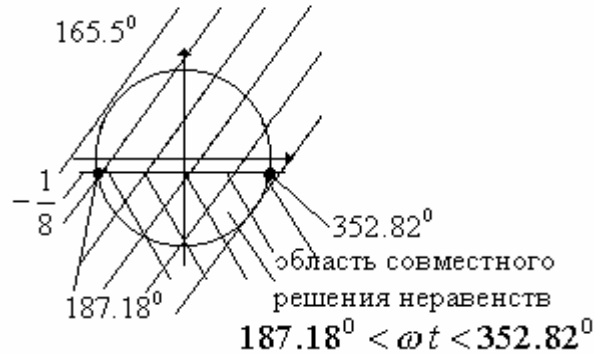
Длительность интервала (II-I) определяем из условия, что ток первого диода больше нуля, а напряжение на втором диоде меньше нуля

$$\begin{cases} i_1^{II-I} > 0 & \{0.1 \sin(\omega t) - 0.025 > 0\} \\ u_2^{II-I} < 0 & \{-75 < 0\} \end{cases}$$



Длительность интервала (I-II) определяем из условия, что ток второго диода больше нуля, а напряжение на первом диоде меньше нуля

$$\begin{cases} i_2^{I-II} > 0 & \{-0.1 \sin(\omega t) - 0.0125 > 0\} \\ u_1^{I-II} < 0 & \{-75 < 0\} \end{cases}$$



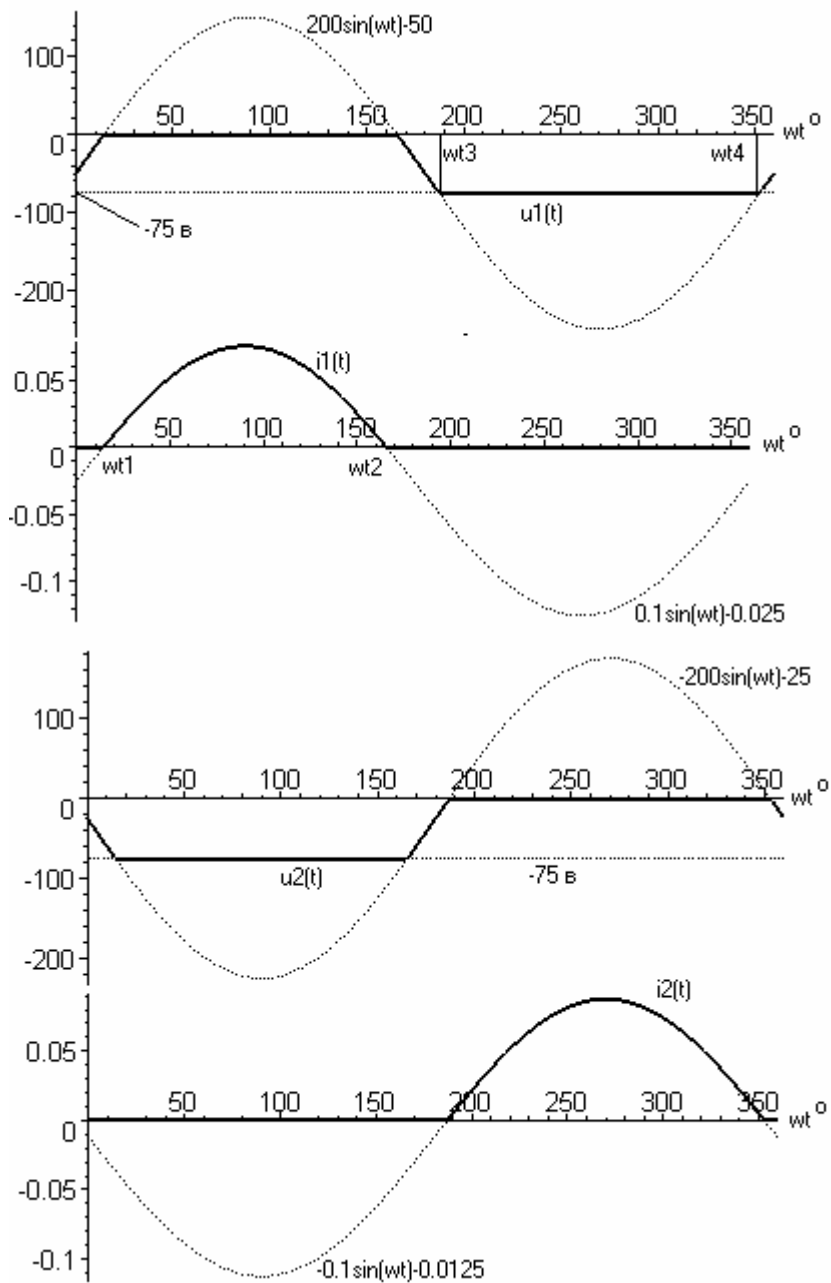
7. Записываем ответ и строим графики.

$$u_1(t) = \begin{cases} -50 + 200 \sin(\omega t), & 0 < \omega t < 14.5^\circ \\ 0, & 14.5^\circ < \omega t < 165.5^\circ \\ -50 + 200 \sin(\omega t), & 165.5^\circ < \omega t < 187.2^\circ \\ -75, & 187.2^\circ < \omega t < 352.8^\circ \\ -50 + 200 \sin(\omega t), & 352.8^\circ < \omega t < 360^\circ \end{cases}$$

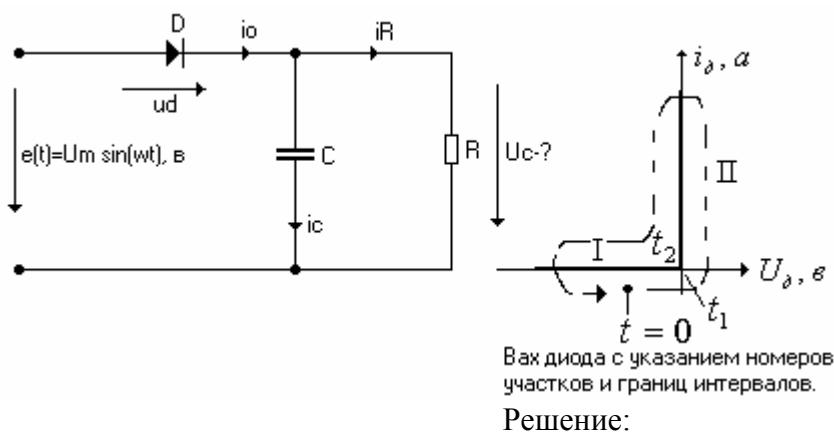
$$u_2(t) = \begin{cases} -25 - 200 \sin(\omega t), & 0 < \omega t < 14.5^\circ \\ -75, & 14.5^\circ < \omega t < 165.5^\circ \\ -25 - 200 \sin(\omega t), & 165.5^\circ < \omega t < 187.2^\circ \\ 0, & 187.2^\circ < \omega t < 352.8^\circ \\ -25 - 200 \sin(\omega t), & 352.8^\circ < \omega t < 360^\circ \end{cases}$$

$$i_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega t < 14.5^\circ \\ -0.025 + 0.1 \sin(\omega t), & 14.5^\circ < \omega t < 165.5^\circ \\ 0, & 165.5^\circ < \omega t < 187.2^\circ \\ 0, & 187.2^\circ < \omega t < 352.8^\circ \\ 0, & 352.8^\circ < \omega t < 360^\circ \end{cases}$$

$$i_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega t < 14.5^\circ \\ 0, & 14.5^\circ < \omega t < 165.5^\circ \\ -0.0125 - 0.1 \sin(\omega t), & 165.5^\circ < \omega t < 187.2^\circ \\ 0, & 187.2^\circ < \omega t < 352.8^\circ \\ 0, & 352.8^\circ < \omega t < 360^\circ \end{cases}$$



Пример 3. Ёмкостной фильтр на выходе однополупериодного выпрямителя.



1. Составим исходное уравнение.

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t) = u_\delta + u_c \\ i_0 = i_c + i_R \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} U_m \sin(\omega t) = u_\delta + u_c \\ i_0 = C \frac{d}{dt} u_c + \frac{u_c}{R} \end{array} \right\}$$

2. Аппроксимируем ВАХ диода

I участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\delta < 0, \\ i_\delta = 0, \end{array} \right\}$$

II участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\delta = 0, \\ i_\delta > 0, \end{array} \right\}$$

3. Разбиваем исходное уравнение на два линейных уравнения, соответствующих участкам характеристики.

I участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_m \sin(\omega t) = u_\delta + u_c \\ 0 = C \frac{d}{dt} u_c + \frac{u_c}{R} \end{array} \right\}$$

II участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_m \sin(\omega t) = u_c \\ i_0 = C \frac{d}{dt} u_c + \frac{u_c}{R} \end{array} \right\}$$

3. Найдём общее решение на интервалах :

I участок:

$$u_c^{(I)}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = RC$$

$$i_R^{(I)}(t) = \frac{A}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_c^{(I)}(t) = -\frac{A}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_\delta^{(I)}(t) = U_m \sin(\omega t) - A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$i_0^{(I)} = 0$$

II участок:

$$u_c^{(II)}(t) = U_m \sin(\omega t), в$$

$$i_R^{(II)}(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t), а$$

$$i_c^{(II)}(t) = C \omega U_m \cos(\omega t), а$$

$$u_\delta^{(II)}(t) = 0,$$

$$i_0^{(II)} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t) + C \omega U_m \cos(\omega t), а$$

4. Сопряжение интервалов – находим t_1 , t_2 и A .

а) Воспользуемся вторым условием сопряжения. При переходе РТ со второго участка на первый в момент времени t_2 ток диода станет равным нулю.

$$i_0^{(II)}(t_2) = 0,$$

$$\frac{U_m}{R} \sin(\omega t_2) + C \omega U_m \cos(\omega t_2) = 0,$$

$$I_m \sin(\omega t_2 + \varphi) = 0,$$

$$I_m = \sqrt{\left(\frac{U_m}{R}\right)^2 + (C \omega U_m)^2},$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{C \omega}{1/R}\right) = \arctg(\omega \tau)$$

$$\omega t_2 + \varphi = (-1)^n \arcsin(0) + k\pi$$

$$t_2 = \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} = k \frac{T}{2} - \frac{\varphi}{\omega} \stackrel{k=1}{=} \frac{T}{2} - \frac{\varphi}{\omega}$$

б) Из первого условия непрерывности напряжения на ёмкости при переходе РТ со второго участка на первый в момент времени t_2 , получим уравнение.

$$u_c^{(I)}(t_2) = u_c^{(II)}(t_2)$$

$$A e^{-\frac{t_2}{\tau}} = U_m \sin(\omega t_2)$$

$$A = U_m \sin(\omega t_2) e^{\frac{t_2}{\tau}}$$

в) Из первого условия сопряжения, т.е. условия непрерывности напряжения на ёмкости при переходе РТ с первого участка на второй в момент времени t_1 , а так же из условия периодичности, получим уравнение относительно t_1 .

$$u_c^{(I)}(t_1) = u_c^{(II)}(t_1)$$

$$u_c^{(I)}(t_1) = u_c^{(I)}(t_1 + T) = A e^{-\frac{t_1 + T}{\tau}}$$

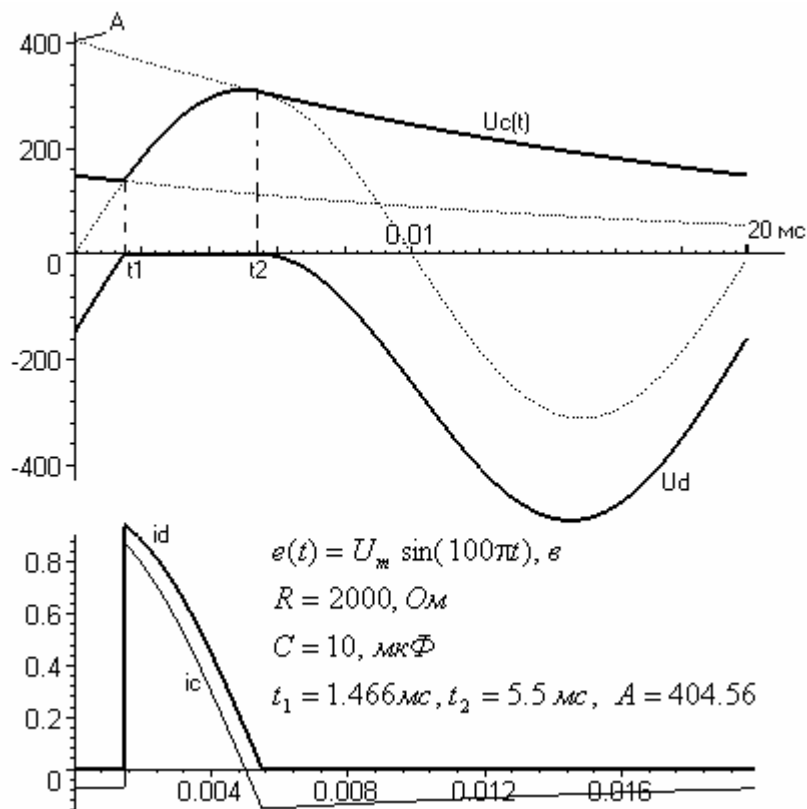
$$u_c^{(II)}(t_1) = U_m \sin(\omega t_1)$$

$$A e^{-\frac{t_1}{\tau}} e^{-\frac{T}{\tau}} = U_m \sin(\omega t_1)$$

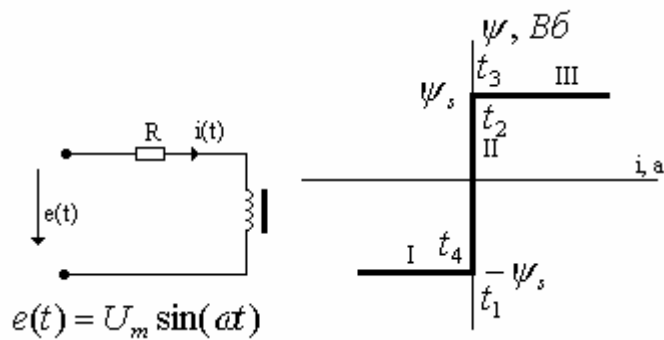
$$A e^{-\frac{t_1}{\tau}} = U_m e^{\frac{T}{\tau}} \sin(\omega t_1)$$

Такое уравнение называется трансцендентным и оно решается либо численно, либо графически.

5. Строим график.



Пример 4. Катушка индуктивности с прямоугольной характеристикой намагничивания в цепи переменного тока.



Найти ток и потокосцепление.

Решение:

1. Составляем исходное нелинейное уравнение цепи по второму з. Кирхгофа.

$$e(t) = R \cdot i(t) + u_l(t)$$

$$U_m \sin(\omega \cdot t) = R \cdot i(t) + \frac{d\psi}{dt}$$

2. Аппроксимируем характеристику намагничивания тремя линейными участками.

I участок:

II участок:

III участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^I = -\psi_S \\ i^I < 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\psi_S < \psi^{II} < \psi_S \\ i^{II} = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^{III} = +\psi_S \\ i^I > 0 \end{array} \right\}$$

3. Разбиваем исходное уравнение цепи на три линейных уравнения, соответствующих линейным участкам характеристики.

I участок:

$$e(t) = R \cdot i^I(t)$$

II участок:

$$e(t) = \frac{d}{dt} \psi^{II}(t)$$

III участок:

$$e(t) = R \cdot i^{III}(t)$$

4. Получаем решения на участках аппроксимации. Эти решения будут иметь общий вид, т.е. в них не определены постоянные интегрирования и моменты переходов рабочей точки с участка на участок.

I участок:

$$i^I(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t) \\ 0 < t < t_1 \\ u \\ t_4 < t < T$$

II участок:

$$i^{II}(t) = 0 \\ \psi_{on}^{II}(t) = \int e(t) dt + C_{on} = \\ -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega \cdot t) + C_{on} \\ t_1 < t < t_2 \\ u \\ \psi_{off}^{II}(t) = \int e(t) dt + C_{off} = \\ -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega \cdot t) + C_{off} \\ t_3 < t < t_4$$

III участок:

$$i^{III}(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t) \\ t_2 < t < t_3$$

5. Сопряжение интервалов, т.е. определение постоянных интегрирования и моментов сопряжения интервалов.

1) Из условия прохождения рабочей точки через излом характеристики в момент времени t_1 получим $i^I(t_1) = 0$ и в момент времени t_3 получим $i^{III}(t_3) = 0$

$$\frac{U_m}{R} \sin(\omega t_1) = 0$$

$$\omega t_1 = \text{ArcSin}(0) = (-1)^n \cdot 0 + n\pi \stackrel{n=0}{=} 0$$

$$\frac{U_m}{R} \sin(\omega t_3) = 0$$

$$\omega t_3 = \text{ArcSin}(0) = (-1)^n \cdot 0 + n\pi \stackrel{n=1}{=} \pi$$

2) Из условия непрерывности потокосцепления на границе интервалов I и II находим постоянную интегрирования C_{on}

$$\psi_{on}^{II}(t_1) = \psi^I(t_1)$$

$$\psi^I(t_1) = -\psi_S$$

$$-\psi_S = -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t_1) + C_{on}$$

$$C_{on} = \frac{U_m}{\omega} - \psi_S$$

$$\begin{aligned}\psi_{on}^{II}(t) &= -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{U_m}{\omega} - \psi_s = \\ &= \frac{U_m}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) - \psi_s\end{aligned}$$

3) Из условия непрерывности потокосцепления на границе интервалов II и III находим постоянную интегрирования C_{off} .

$$\begin{aligned}\psi_{off}^{II}(t_3) &= \psi^{III}(t_3) \\ \psi^{III}(t_3) &= \psi_s \\ \psi_s &= -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t_3) + C_{off} = -\frac{U_m}{\omega} (-1) + C_{off} \\ C_{off} &= \psi_s - \frac{U_m}{\omega} \\ \psi_{off}^{II}(t) &= -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{U_m}{\omega} + \psi_s = \\ &= -\frac{U_m}{\omega} (1 + \cos(\omega t)) + \psi_s\end{aligned}$$

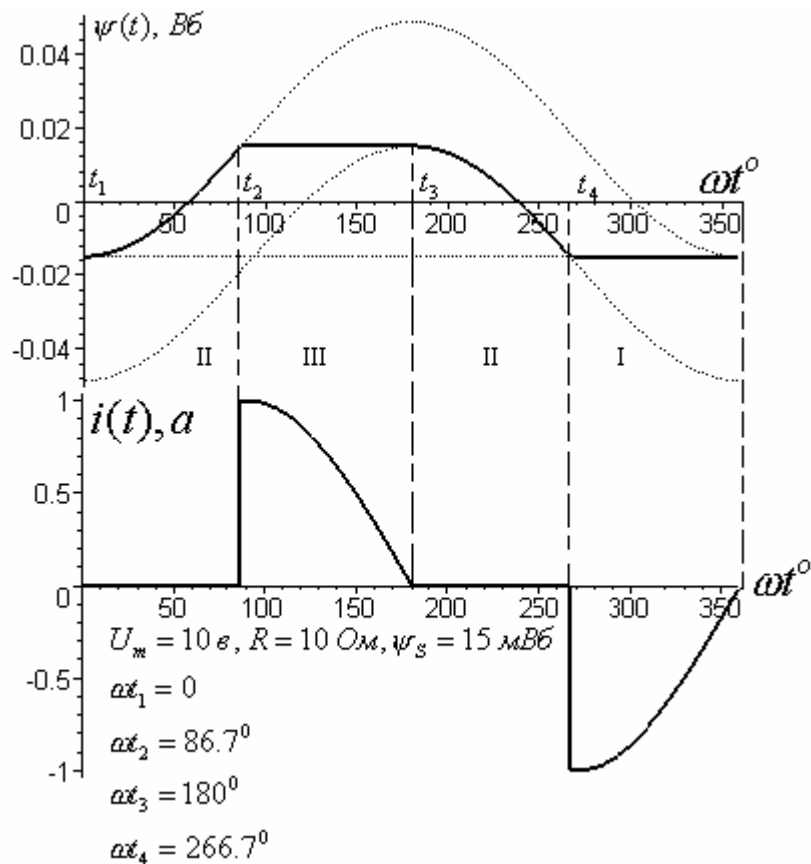
4) Из условия непрерывности потокосцепления на границе интервалов II и III находим t_2

$$\begin{aligned}\psi_{on}^{II}(t_2) &= \psi^{III}(t_2) \\ \psi^{III}(t_2) &= \psi_s \\ \frac{U_m}{\omega} (1 - \cos(\omega t_2)) - \psi_s &= \psi_s \\ -\cos(\omega t_2) &= \frac{2\psi_s \omega}{U_m} - 1 \\ \omega t_2 &= \text{ArcCos}(1 - \frac{2\psi_s \omega}{U_m})\end{aligned}$$

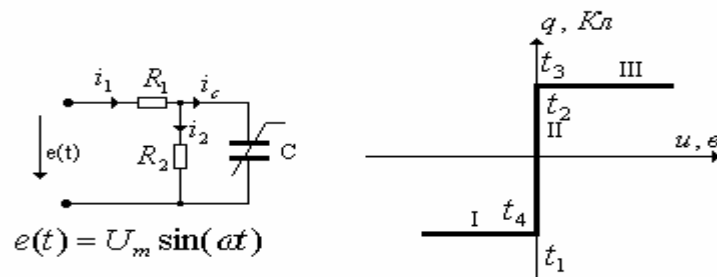
5) Из условия непрерывности потокосцепления на границе интервалов II и I находим t_4

$$\begin{aligned}\psi_{off}^{II}(t_4) &= \psi^I(t_4) \\ \psi^I(t_4) &= -\psi_s \\ -\frac{U_m}{\omega} (1 + \cos(\omega t_4)) + \psi_s &= -\psi_s \\ \cos(\omega t_4) &= \frac{2\psi_s \omega}{U_m} - 1 \\ \omega t_4 &= \text{ArcCos}(-1 + \frac{2\psi_s \omega}{U_m}) = \pi + \text{ArcCos}(1 - \frac{2\psi_s \omega}{U_m})\end{aligned}$$

6. Строим график тока катушки и потокосцепления.



Пример 5. Конденсатор с прямоугольной кулон-вольтной характеристикой в цепи переменного тока.



Найти ток и напряжение на конденсаторе, ток источника э.д.с.

Решение:

1. Составляем исходные нелинейные уравнения цепи по законам Кирхгофа.

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t) = R_1 \cdot i_1(t) + u_c(t) \\ 0 = -R_2 \cdot i_2(t) + u_c(t) \\ 0 = i_1(t) - i_2(t) - i_c(t) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} e(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) \\ u_c(t) = R_2 \cdot i_2(t) \\ i_1(t) = i_2(t) + \frac{d}{dt} q(t) \end{array} \right.$$

2. Аппроксимируем характеристику намагничивания тремя линейными участками.

I участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} q^I = -q_s \\ u_c^I < 0 \end{array} \right\}$$

II участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} -q_s < q^{II} < q_s \\ u_c^{II} = 0 \end{array} \right\}$$

III участок:

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{III} = +q_s \\ u_c^{III} > 0 \end{array} \right\}$$

3. Исходное нелинейное уравнение цепи заменяем на три линейных

уравнения, соответствующих трем линейным участкам характеристики.

I участок:

$$\begin{cases} e(t) = R_1 \cdot i_1^I(t) + R_2 \cdot i_2^I(t) \\ u_C^I(t) = R_2 \cdot i_2^I(t) \\ i_1^I(t) = i_2^I(t) \end{cases}$$

II участок:

$$\begin{cases} e(t) = R_1 \cdot i_1^{II}(t) \\ U_C^{II}(t) = 0 \\ i_1^{II}(t) = \frac{d}{dt} q^{II}(t) \end{cases}$$

III участок:

$$\begin{cases} e(t) = R_1 \cdot i_1^{III}(t) + R_2 \cdot i_2^{III}(t) \\ u_C^{III}(t) = R_2 \cdot i_2^{III}(t) \\ i_1^{III}(t) = i_2^{III}(t) + \frac{d}{dt} q^{III}(t) \end{cases}$$

4. Получаем решения на участках аппроксимации. Эти решения будут иметь общий вид, т. е. в них не определены постоянные интегрирования и моменты переходов рабочей точки с участка на участок.

I участок:

$$\begin{aligned} u_C^I(t) &= \frac{U_m R_2}{R_1 + R_2} \sin(\omega t), \epsilon \\ i_C^I(t) &= 0, a \\ i_1^I(t) &= \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sin(\omega t), a \\ 0 < t < t_1 \\ u \\ t_4 < t < T \end{aligned}$$

II участок:

$$\begin{aligned} u_C^{II}(t) &= 0 \\ q_{on}^{II}(t) &= \int i_1^{II}(t) dt + C_{on} = \\ &= -\frac{U_m}{\omega R_1} \cos(\omega \cdot t) + C_{on} \\ t_1 < t < t_2 \\ u \\ q_{off}^{II}(t) &= \int i_1^{II}(t) dt + C_{off} = \\ &= -\frac{U_m}{\omega R_1} \cos(\omega \cdot t) + C_{off} \\ t_3 < t < t_4 \end{aligned}$$

III участок:

$$\begin{aligned} u_C^{III}(t) &= \frac{U_m R_2}{R_1 + R_2} \sin(\omega t), \epsilon \\ i_C^{III}(t) &= 0, a \\ i_1^{III}(t) &= \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sin(\omega t), a \end{aligned}$$

5. Сопряжение интервалов, т.е. определение постоянных интегрирования и моментов перехода РТ через изломы нелинейной характеристики.

1) Из условия прохождения рабочей точки через излом характеристики в момент времени t_1 получим $u_C^I(t_1) = 0$ и в момент времени t_3 получим $i_C^{III}(t_3) = 0$

$$\frac{U_m R_2}{R_1 + R_2} \sin(\omega t_1) = 0$$

$$\frac{U_m R_2}{R_1 + R_2} \sin(\omega t_3) = 0$$

$$\omega t_1 = \text{ArcSin}(0) = (-1)^n \cdot 0 + n\pi \stackrel{n=0}{=} 0$$

$$\omega t_3 = \text{ArcSin}(0) = (-1)^n \cdot 0 + n\pi \stackrel{n=1}{=} \pi$$

2) Из условия непрерывности заряда на границе интервалов I и II находим постоянную интегрирования C_{on}

$$q_{on}^{II}(t_1) = q^I(t_1)$$

$$q^I(t_1) = -q_s$$

$$-q_s = -\frac{U_m}{R_1 \omega} \cos(\omega t_1) + C_{on}$$

$$C_{on} = \frac{U_m}{R_1 \omega} - q_s$$

$$q_{on}^{II}(t) = -\frac{U_m}{R_1 \omega} \cos(\omega t) + \frac{U_m}{R_1 \omega} - q_s =$$

$$= \frac{U_m}{R_1 \omega} (1 - \cos(\omega t)) - q_s$$

- 3) Из условия непрерывности заряда на границе интервалов II и III находим постоянную интегрирования C_{off} .

$$q_{off}^{II}(t_3) = q^{III}(t_3)$$

$$q^{III}(t_3) = q_s$$

$$q_s = -\frac{U_m}{R_1\omega} \cos(\omega t_3) + C_{off} = -\frac{U_m}{R_1\omega}(-1) + C_{off}$$

$$C_{off} = q_s - \frac{U_m}{R_1\omega}$$

$$\begin{aligned} q_{off}^{II}(t) &= -\frac{U_m}{R_1\omega} \cos(\omega t) - \frac{U_m}{R_1\omega} + q_s = \\ &= -\frac{U_m}{R_1\omega} (1 + \cos(\omega t)) + q_s \end{aligned}$$

- 4) Из условия непрерывности заряда на границе интервалов II и III находим t_2

$$q_{on}^{II}(t_2) = q^{III}(t_2)$$

$$q^{III}(t_2) = q_s$$

$$\frac{U_m}{R_1\omega} (1 - \cos(\omega t_2)) - q_s = q_s$$

$$-\cos(\omega t_2) = \frac{2q_s R_1\omega}{U_m} - 1$$

$$\omega t_2 = \text{ArcCos}\left(1 - \frac{2q_s R_1\omega}{U_m}\right)$$

- 5) Из условия непрерывности заряда на границе интервалов II и I находим t_4

$$q_{off}^{II}(t_4) = q^I(t_4)$$

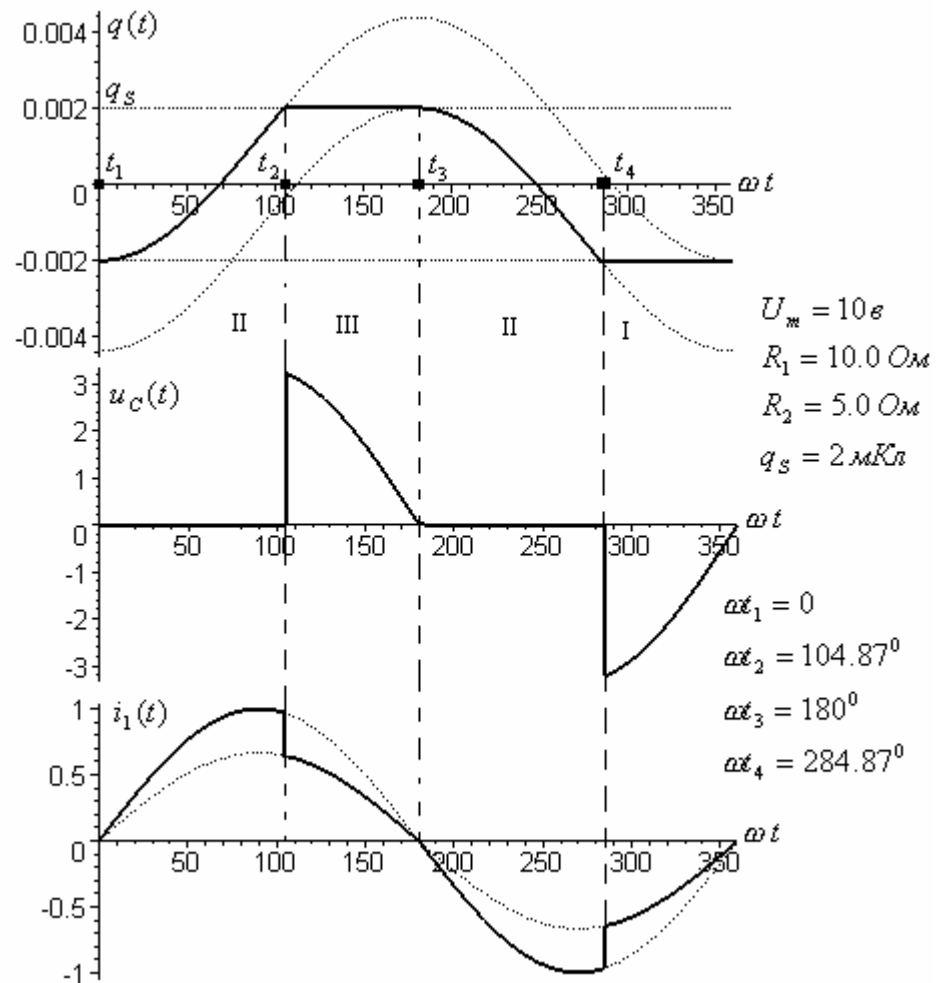
$$q^I(t_4) = -q_s$$

$$-\frac{U_m}{R_1\omega} (1 + \cos(\omega t_4)) + q_s = -q_s$$

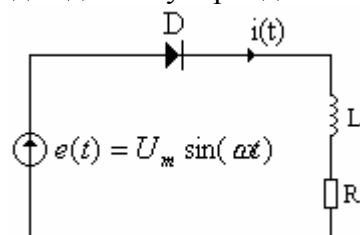
$$\cos(\omega t_4) = \frac{2q_s R_1\omega}{U_m} - 1$$

$$\omega t_4 = \text{ArcCos}\left(-1 + \frac{2q_s R_1\omega}{U_m}\right) = \pi + \text{ArcCos}\left(1 - \frac{2q_s R_1\omega}{U_m}\right)$$

6. Строим графики тока источника э.д.с. и заряда.



Пример 6. Дроссель на выходе однополупериодного выпрямителя.



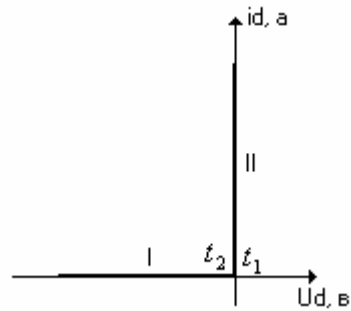
Найти ток дросселя.

Решение:

1. Составляем исходное уравнение

$$U_m \sin(\omega t) = u_D + u_L + u_R = u_D + L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t)$$

2. Аппроксимируем ВАХ диода двумя линейными участками



I участок:

$$\begin{cases} u_D < 0, \\ i = 0, \end{cases}$$

II участок:

$$\begin{cases} u_D = 0, \\ i > 0, \end{cases}$$

3. Получаем линейные уравнения на участках и общее решение.

I участок:

$$\begin{aligned} u_D^I &= e(t) \\ i^I(t) &= 0 \end{aligned}$$

II участок:

$$\begin{aligned} e(t) &= L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) \\ u_D^{II} &= 0 \\ i^{II}(t) &= i_{ycm} + i_{св} = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \\ \varphi &= -\text{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\ \tau &= \frac{L}{R} \end{aligned}$$

4. Сопряжение интервалов.

В этой цепи в зависимости от величины параметров (постоянной времени) возможен режим прерывистого (диод запирается) и не прерывистого (диод не запирается) тока дросселя. Рассмотрим далее режим прерывистого тока дросселя.

Из условия прохождения РТ в момент времени t_2 через границу второго и первого участков ВАХ диода, получаем уравнение

$$\begin{aligned} i^{II}(t_2) &= 0 \\ i^{II}(t_2) &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t_2 + \varphi) + Ae^{-\frac{t_2}{\tau}} \end{aligned} \quad (1)$$

Из условия прохождения РТ в момент времени t_1 через границу первого и второго участков ВАХ диода, получаем уравнение

$$\begin{aligned} u_D^I(t_1) &= 0 \\ U_m \sin(\omega t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда $t_1 = 0$, а постоянную интегрирования находим из условия непрерывности тока дросселя в момент перехода РТ с первого на второй участок

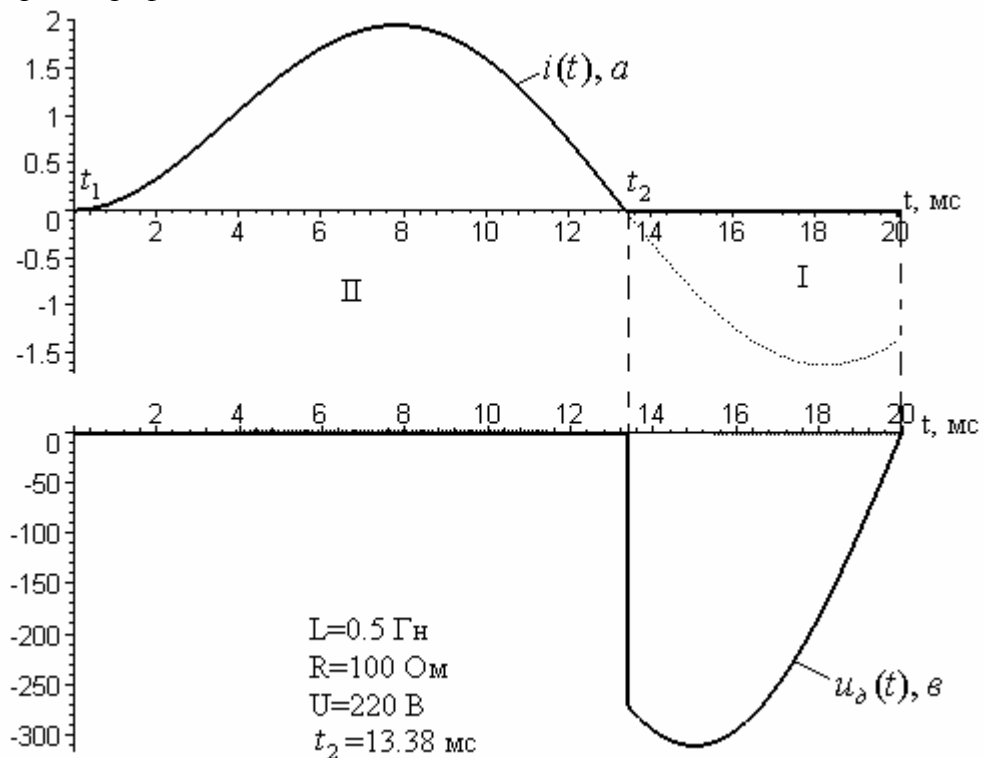
$$i''(t_1) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi) + A e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0$$

$$A = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\varphi)$$

Теперь вычисляем момент коммутации t_2 из решения трансцендентного уравнения

$$\frac{\sin(\omega t_2 + \varphi)}{\sin(\varphi)} = e^{-\frac{t_2}{\tau}}$$

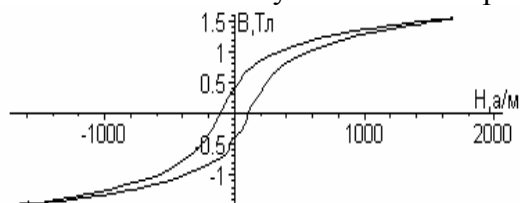
5. Строим график



ЛЕКЦИЯ 9

Катушка со сталью в цепи переменного тока. (метод эквивалентных синусоид).

Сложности расчета цепей переменного тока с индуктивными элементами, имеющими магнитопровод из ферромагнитного материала, определяются его неоднозначной и нелинейной зависимостью $B = f(H)$. Неоднозначность кривой намагничивания обусловлена необратимыми тепловы-



ми потерями в стали из-за вихревых токов и “трения” при перемагничивании. Значительные потери в стали могут вызвать недопустимый тепловой режим устрой-

ства, снижение КПД и разрушение изоляции. Для известной марки стали потери можно оценить по формулам:

1. Потери на гистерезис:

$$P_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} B_m^n f G$$

σ_{Γ} - учитывает сорт стали и размер листов

B_m - максимальная индукция

$$n = \begin{cases} 1.6, & 0 < B_m < 1.0 \text{ Тл} \\ 2.0, & 1.0 < B_m < \infty \end{cases}$$

f - частота приложенного напряжения

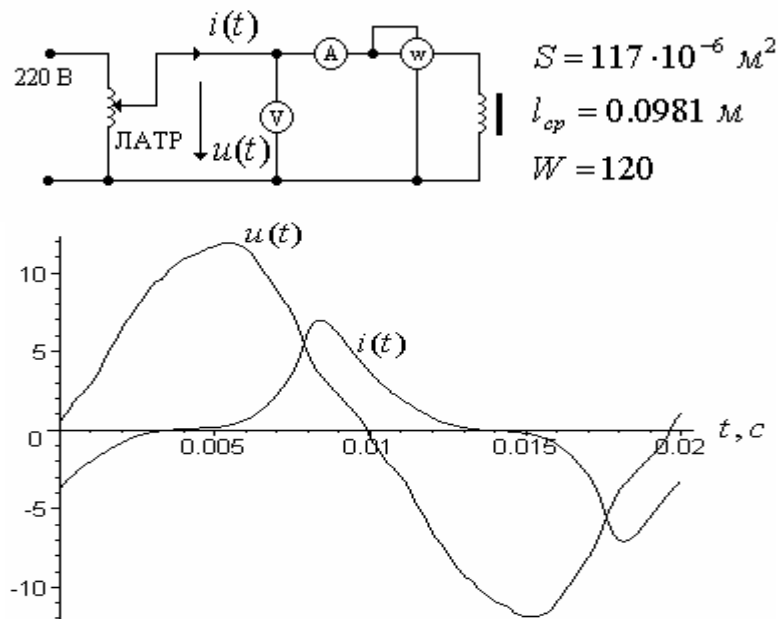
G - вес магнитопровода

2. Потери на вихревые токи:

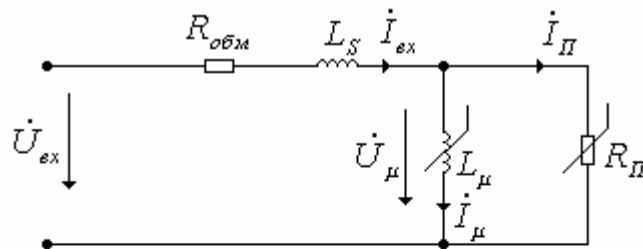
$$P_B = \sigma_6 B_m f^2 G$$

σ_6 - учитывает сорт стали и размер листов

Рассмотрим простейшую цепь данного класса – катушку со стальным сердечником



При синусоидальном напряжении $u(t)$ на входе в цепи будет действовать несинусоидальный ток $i(t)$. Точный расчет цепи с учетом потока рассеяния, нелинейной зависимости намагничивания и потерь от величины тока является весьма сложной задачей. С целью упрощения расчёта договоримся, что для нас существенным будет действующее значение величины тока, а влиянием высших гармонических составляющих мы пренебрегаем. При этой условности для анализа цепи будем использовать её условно-нелинейную схему замещения, в которой будут действовать синусоидальные величины. Эта схема замещения является линейной для мгновенных значений токов и нелинейной для действующих значений. Следовательно, для заданного входного напряжения расчет режима цепи может быть выполнен комплексным методом. При этом возникает вопрос об определении параметров этой схемы замещения.



$\dot{U}_{ex}, \dot{I}_{ex}$ – входные ток и напряжение

$\dot{U}_{\mu}, \dot{I}_{\mu}$ – ток и напряжение намагничивания

\dot{I}_{π} – ток потерь

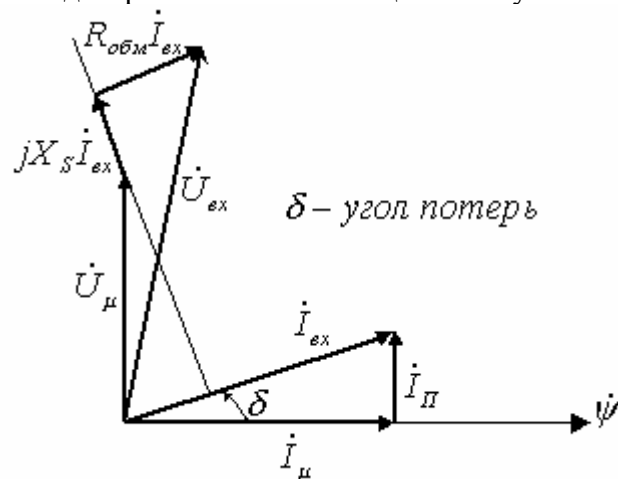
$R_{обм}$ – сопротивление витков обмотки

L_s – индуктивность рассеяния

L_{μ} – индуктивность намагничивания

R_{π} – сопротивление потерь

Векторная диаграмма схемы замещения катушки со сталью.



Определение параметров условно-нелинейной схемы замещения катушки со сталью.

Что бы условно-нелинейная схема замещения была адекватна реальной катушке со сталью, необходимо удовлетворить условию эквивалентности модельного тока реальному току:

- равенство действующих значений модельного и реального токов катушки;
- равенство потерь в катушке и в её условно-нелинейной схеме замещения.

1. Активное сопротивление витков катушки $R_{обм}$ определяем с помощью омметра на постоянном токе.

2. Потери в катушке измеренные ваттметром разделяем на потери в обмотке и потери в стали

$$P = P_{обм} + P_{СТ}$$

$$P_{обм} = R_{обм} \cdot I_{вх}^2$$

$$P_{СТ} = P - P_{обм}$$

3. Зная величину потерь в стали $P_{СТ}$ и вес магнитопровода G по кривой удельных потерь $P_0 = f(B_m)$ (см. табл. 9-4) из справочника для известной марки стали находим максимальную индукцию магнитного поля B_m (1 Тл=10000 Гс).

$$P_{СТ}[Вт] \rightarrow P_0 = \frac{P_{СТ}}{G} \left[\frac{B_m^{табл.}}{кг} \right] \rightarrow B_m[Тл]$$

Таблица 9-4

Удельные потери в стали Э41 при $f = 50$ гц

| $B, гс$ | Э41-0,35 вт/кг | Э410,50 вт/кг | $B, гс$ | Э41-0,35 вт/кг | Э41-0,5 вт/кг | $B, гс$ | Э41-0,35 вт/кг | Э41-0,5 вт/кг |
|---------|-------------------|------------------|---------|-------------------|------------------|---------|-------------------|------------------|
| 6 100 | 0,585 | 0,685 | 9 100 | 1,08 | 1,41 | 12 100 | 1,98 | 2,27 |
| 6 200 | 0,590 | 0,700 | 9 200 | 1,11 | 1,43 | 12 200 | 2,01 | 2,30 |
| 6 300 | 0,595 | 0,720 | 9 300 | 1,13 | 1,46 | 12 300 | 2,05 | 2,33 |
| 6 400 | 0,600 | 0,740 | 9 400 | 1,16 | 1,49 | 12 400 | 2,09 | 2,38 |
| 6 500 | 0,610 | 0,760 | 9 500 | 1,18 | 1,51 | 12 500 | 2,13 | 2,41 |
| 6 600 | 0,620 | 0,785 | 9 600 | 1,20 | 1,53 | 12 600 | 2,17 | 2,44 |
| 6 700 | 0,630 | 0,805 | 9 700 | 1,23 | 1,56 | 12 700 | 2,21 | 2,48 |
| 6 800 | 0,650 | 0,835 | 9 800 | 1,26 | 1,59 | 12 800 | 2,25 | 2,51 |
| 6 900 | 0,665 | 0,860 | 9 900 | 1,28 | 1,61 | 12 900 | 2,28 | 2,54 |
| 7 000 | 0,685 | 0,890 | 10 000 | 1,30 | 1,64 | 13 000 | 2,31 | 2,58 |
| 7 100 | 0,705 | 0,905 | 10 100 | 1,33 | 1,67 | 13 100 | 2,34 | 2,61 |
| 7 200 | 0,720 | 0,920 | 10 200 | 1,36 | 1,70 | 13 200 | 2,38 | 2,65 |
| 7 300 | 0,735 | 0,950 | 10 300 | 1,40 | 1,73 | 13 300 | 2,41 | 2,68 |
| 7 400 | 0,750 | 0,980 | 10 400 | 1,43 | 1,76 | 13 400 | 2,44 | 2,71 |
| 7 500 | 0,770 | 1,00 | 10 500 | 1,46 | 1,79 | 13 500 | 2,48 | 2,74 |
| 7 600 | 0,790 | 1,03 | 10 600 | 1,49 | 1,81 | 13 600 | 2,51 | 2,78 |
| 7 700 | 0,805 | 1,05 | 10 700 | 1,52 | 1,83 | 13 700 | 2,55 | 2,81 |
| 7 800 | 0,820 | 1,08 | 10 800 | 1,55 | 1,86 | 13 800 | 2,58 | 2,86 |
| 7 900 | 0,840 | 1,10 | 10 900 | 1,58 | 1,89 | 13 900 | 2,62 | 2,91 |
| 8 000 | 0,855 | 1,13 | 11 000 | 1,61 | 1,92 | 14 000 | 2,66 | 2,95 |
| 8 100 | 0,875 | 1,15 | 11 000 | 1,64 | 1,95 | 14 100 | 2,70 | 2,99 |
| 8 200 | 0,900 | 1,18 | 11 200 | 1,68 | 1,99 | 14 200 | 2,72 | 3,02 |
| 8 300 | 0,920 | 1,20 | 11 300 | 1,72 | 2,02 | 14 300 | 2,76 | 3,07 |
| 8 400 | 0,935 | 1,22 | 11 400 | 1,75 | 2,05 | 14 400 | 2,80 | 3,11 |
| 8 500 | 0,955 | 1,25 | 11 500 | 1,78 | 2,08 | 14 500 | 2,84 | 3,16 |
| 8 600 | 0,975 | 1,28 | 11 600 | 1,82 | 2,11 | 14 600 | 2,87 | 3,21 |
| 8 700 | 0,995 | 1,30 | 11 700 | 1,85 | 2,14 | 14 700 | 2,90 | 3,25 |
| 8 800 | 1,01 | 1,32 | 11 800 | 1,88 | 2,18 | 14 800 | 2,94 | 3,31 |
| 8 900 | 1,03 | 1,35 | 11 900 | 1,91 | 2,21 | 14 900 | 2,98 | 3,36 |
| 9 000 | 1,05 | 1,38 | 12 000 | 1,94 | 2,24 | 15 000 | 3,00 | 3,40 |

4. По формуле “4.44” находим модуль намагничивающего напряжения \dot{U}_μ и затем сопротивление потерь R_Π .

$$U_\mu = 4.44 B_m f S W$$

$$R_\Pi = \frac{U_\mu^2}{P_{СТ}}$$

5. По кривой удельной намагничивающей мощности $Q_0 = f(B_m)$ (см. табл. 9-5), зная максимальную индукцию, находим реактивную мощность в стали $Q_{СТ}$ и затем индуктивность намагничивания L_μ .

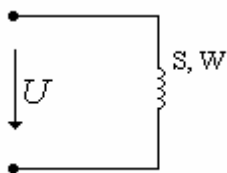
$$B_m^{табл.} \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_{СТ} = Q_0 G \quad X_\mu = L_\mu \omega = \frac{U_\mu^2}{Q_{СТ}}$$

Таблица 9-5

Удельная намагничивающая мощность для сталей Э41 и Э42 0,35 и 0,5 мм

| $B, \text{гс}$ | ва/кг | ва/см^2 | $B, \text{гс}$ | ва/кг | ва/см^2 | $B, \text{гс}$ | ва/кг | ва/см^2 |
|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|------------------|
| 7 000 | 2,25 | 0,125 | 9 700 | 4,24 | 0,423 | 12 400 | 12,0 | 1,382 |
| 7 100 | 2,30 | 0,130 | 9 800 | 4,36 | 0,440 | 12 500 | 12,5 | 1,434 |
| 7 200 | 2,35 | 0,135 | 9 900 | 4,48 | 0,470 | 12 600 | 13,14 | 1,491 |
| 7 300 | 2,40 | 0,140 | 10 000 | 4,60 | 0,491 | 12 700 | 13,78 | 1,548 |
| 7 400 | 2,45 | 0,145 | 10 100 | 4,76 | 0,517 | 12 800 | 14,42 | 1,606 |
| 7 500 | 2,50 | 0,150 | 10 200 | 4,92 | 0,543 | 12 900 | 15,06 | 1,664 |
| 7 600 | 2,55 | 0,157 | 10 300 | 5,08 | 0,569 | 13 000 | 15,7 | 1,722 |
| 7 700 | 2,60 | 0,164 | 10 400 | 5,24 | 0,595 | 13 100 | 16,56 | 1,790 |
| 7 800 | 2,65 | 0,172 | 10 500 | 5,40 | 0,621 | 13 200 | 17,42 | 1,858 |
| 7 900 | 2,70 | 0,180 | 10 600 | 5,62 | 0,652 | 13 300 | 18,28 | 1,926 |
| 8 000 | 2,75 | 0,188 | 10 700 | 5,84 | 0,683 | 13 400 | 19,14 | 1,994 |
| 8 100 | 2,81 | 0,198 | 10 800 | 6,06 | 0,714 | 13 500 | 20,0 | 2,062 |
| 8 200 | 2,87 | 0,208 | 10 900 | 6,28 | 0,745 | 13 600 | 21,16 | 2,141 |
| 8 300 | 2,93 | 0,218 | 11 000 | 6,50 | 0,776 | 13 700 | 22,32 | 2,220 |
| 8 400 | 2,99 | 0,228 | 11 100 | 6,80 | 0,813 | 13 800 | 23,48 | 2,299 |
| 8 500 | 3,05 | 0,238 | 11 200 | 7,10 | 0,850 | 13 900 | 24,64 | 2,378 |
| 8 600 | 3,14 | 0,251 | 11 300 | 7,40 | 0,887 | 14 000 | 25,8 | 2,457 |
| 8 700 | 3,23 | 0,264 | 11 400 | 7,70 | 0,924 | 14 100 | 27,24 | 2,547 |
| 8 800 | 3,32 | 0,277 | 11 500 | 8,00 | 0,961 | 14 200 | 28,68 | 2,637 |
| 8 900 | 3,41 | 0,290 | 11 600 | 8,40 | 1,004 | 14 300 | 30,12 | 2,728 |
| 9 000 | 3,50 | 0,303 | 11 700 | 8,80 | 1,047 | 14 400 | 31,56 | 2,819 |
| 9 100 | 3,60 | 0,319 | 11 800 | 9,20 | 1,090 | 14 500 | 33,0 | 2,910 |
| 9 200 | 3,70 | 0,335 | 11 900 | 9,60 | 1,133 | 14 600 | 35,1 | 3,012 |
| 9 300 | 3,80 | 0,352 | 12 000 | 10,0 | 1,176 | 14 700 | 37,2 | 3,114 |
| 9 400 | 3,90 | 0,369 | 12 100 | 10,5 | 1,227 | 14 800 | 39,3 | 3,216 |
| 9 500 | 4,00 | 0,386 | 12 200 | 11,0 | 1,278 | 14 900 | 41,4 | 3,318 |
| 9 600 | 4,12 | 0,407 | 12 300 | 11,5 | 1,330 | 15 000 | 43,5 | 3,420 |

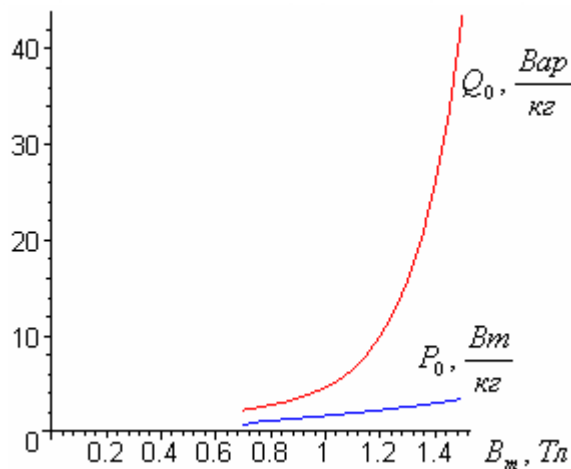
Вывод формулы "4.44"



$$u(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) = W \frac{d}{dt} \Phi(t) = SW \frac{d}{dt} B(t)$$

$$\dot{U}_m = SW \cdot j\omega \cdot \dot{B}_m = SW \cdot j2\pi f \cdot \dot{B}_m$$

$$U = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} SWf B_m = 4.44 \cdot SWf \cdot B_m$$



Графики удельных потерь для стали Э41 при толщине листа 0,5 мм.

6. Индуктивность рассеяния находим по формуле полного сопротивления или из построения векторной диаграммы

$$Z = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}}$$

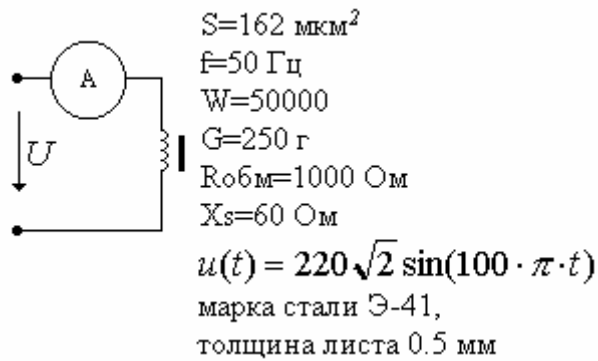
$$Z = \sqrt{(R_{\text{обм}} + R_{\text{л}}')^2 + (X_{\mu}' + X_s)^2}, \text{ где}$$

$$R'_\Pi = \frac{X_\mu^2 R_\Pi}{X_\mu^2 + R_\Pi^2} - \text{сопротивление потерь в последовательной схеме замещения}$$

$$X'_\mu = \frac{X_\mu R_\Pi^2}{X_\mu^2 + R_\Pi^2} - \text{сопротивление намагничивания в последовательной схеме}$$

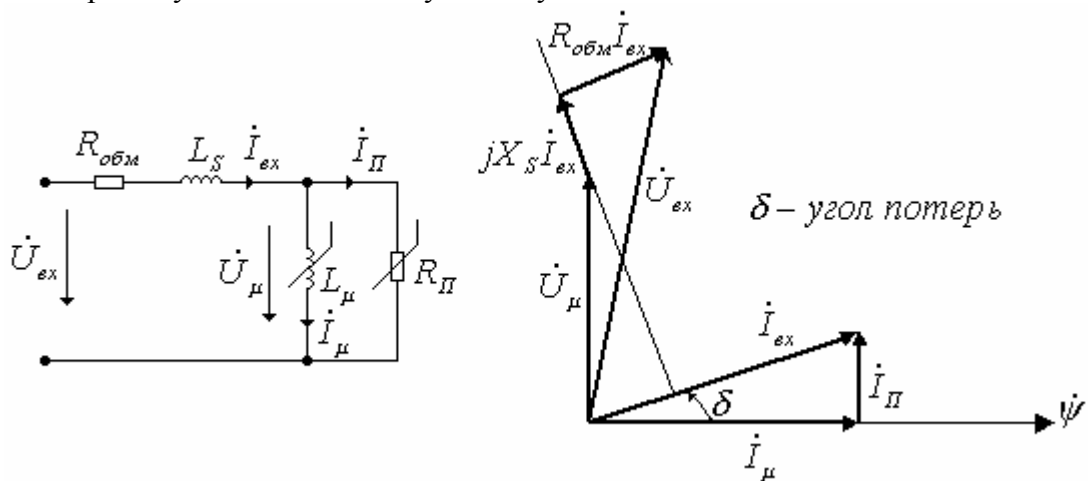
замещения катушки.

Пример 1. Методом эквивалентных синусоид рассчитать показание амперметра в катушке со сталью.



Решение:

1. Строим условно-нелинейную схему замещения



2.

Строим итерационный процесс вычисления тока I_{ex} .

1. Задаёмся $U_\mu < U$.
2. По формуле 4.44 вычисляем B_m .
3. По кривой удельных потерь находим удельные потери P_{CT0}
4. По кривой удельной намагничивающей мощности находим Q_{CT0} .
5. $P_{CT} = P_{CT0} G$ и $Q_{CT} = Q_{CT0} G$
6. Вычисляем ток потерь, намагничивающий и входной токи $I_\Pi = \frac{P_{CT}}{U_\mu}$,

$$I_\mu = \frac{Q_{CT}}{U_\mu} \text{ и } I_{ex} = \sqrt{I_\Pi^2 + I_\mu^2}.$$

7. Вычисляем модуль входного напряжения

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot (R_{обм} + jX_{LS}) + \dot{U}_\mu = U \angle \varphi$$

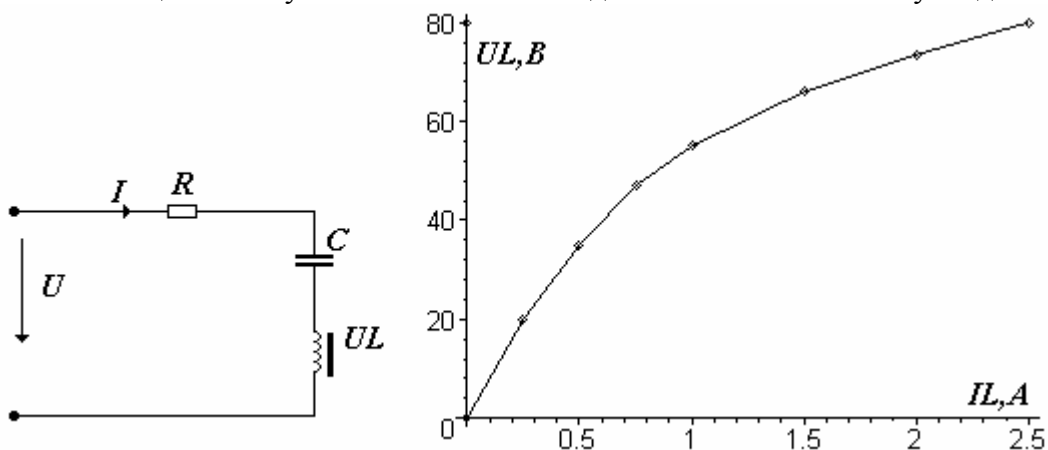
Пусть фаза тока равна 0, тогда $\dot{U}_\mu = U_\mu \angle (\frac{\pi}{2} - \delta)$, где $\delta = \text{Arctg} \frac{Q_{CT}}{P_{CT}}$

8. Сравниваем заданное входное напряжение 220 В с рассчитанным в п. 7 и принимаем решение о продолжении расчета. Если абсолютная разница меньше 0.5 В, то расчёт закончен, а если нет, то задаёмся новым значением U_μ и переходим к п. 2.

Результат расчета.

| U_μ, B задаемся | $B_m, Tл$ | P_{CT}, Bm | Q_{CT}, Var | I_Π, ma | I_μ, ma | I_{ex}, ma | $\delta, ^\circ$ | U_{ex}, B |
|------------------------|-----------|--------------|---------------|-------------|-------------|--------------|------------------|-------------|
| 200 | 1.112 | 0.4875 | 1.700 | 2.436 | 08.496 | 08.838 | 74.0 | 204.48 |
| 205 | 1.140 | 0.5125 | 1.925 | 2.500 | 09.717 | 09.717 | 75.0 | 209.50 |
| 210 | 1.170 | 0.5350 | 2.200 | 2.548 | 10.781 | 10.781 | 76.3 | 214.60 |
| 215 | 1.195 | 0.5525 | 2.400 | 2.570 | 11.450 | 11.450 | 77.0 | 219.64 |

Пример 2. Расчет цепи с катушкой со сталью методом эквивалентных синусоид.



ВАХ катушки со сталью, построенная для действующих значений тока и напряжения.

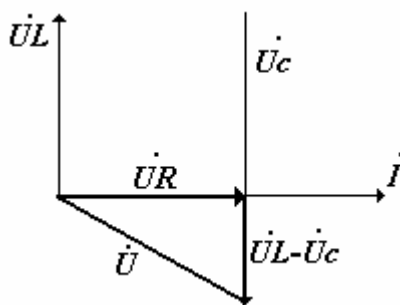
$$R = 20 \text{ Ом}$$

$$\frac{1}{\omega C} = 40 \text{ Ом}$$

$$U = 50 \text{ В}$$

Решение:

Здесь предполагается пренебрегать потерями в стали и рассчитать ток в условно-нелинейной модели цепи комплексным методом.



$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L(I) - U_C)^2} = \sqrt{(RI)^2 + (U_L(I) - \frac{I}{\omega C})^2} =$$

$$= \sqrt{400I^2 + (U_L(I) - 40I)^2} = 50.$$

Решаем это нелинейное уравнение методом последовательных приближений.

| I, a | $U_L, в$ | $U, в$ |
|--------|----------|---------------------|
| 0.5 | 35.13 | 18.136 |
| 1.5 | 65.90 | 30.57 |
| 2.0 | 73.63 | 40.504 |
| 2.5 | 79.71 | 53.96 |
| 2.26 | 76.88 | 47.178 |
| 2.36 | 78.09 | 49.938 |
| ответ | | точность достигнута |

ЛЕКЦИЯ 10

ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

В цепях с нелинейной катушкой индуктивности и конденсатором плавное изменение напряжения может вызвать скачки фазы и амплитуды основной гармоники тока (рис.1) и наоборот – плавное изменение тока может сопровождаться скачкообразным изменением фазы и амплитуды основной гармоники напряжения. Феррорезонанс – это явление скачкообразного изменения знака угла сдвига фаз между основными гармониками тока и напряжения при изменении тока или напряжения источника питания.

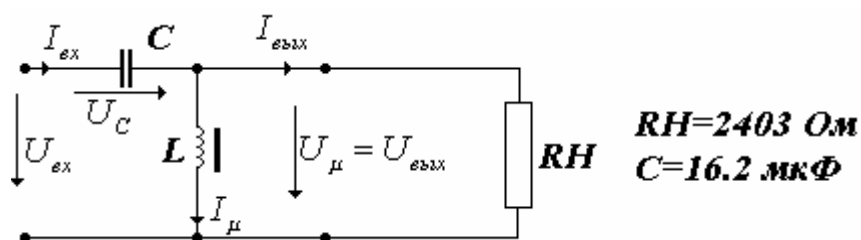


Рис.1 Цепь с феррорезонансом напряжения.

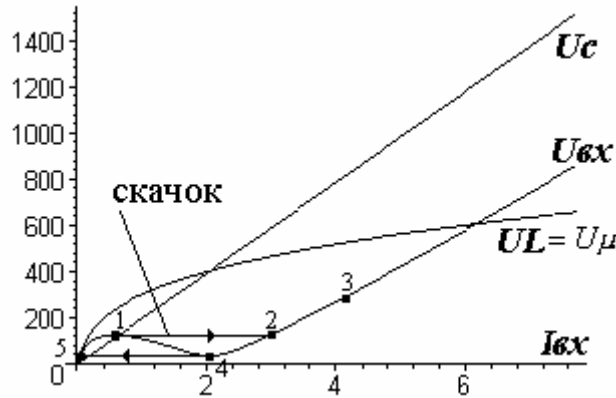


Рис. 2 Зависимости действующих значений напряжений на элементах цепи от тока

Принцип действия схемы. При увеличении входного напряжения от 0 до точки 1 (рис. 2) цепь имеет индуктивный характер и входной ток отстаёт от входного напряжения. В точке 1 ($I_{ex} = 0.57$ а, $U_{ex} = 124.5$ в, $U_{\mu} = 234.2$ в) дифференциальные сопротивления ёмкости и индуктивного участка стали равными и возникает феррорезонанс напряжений. При этом имеет место скачкообразное перемещение рабочей точки от точки 1 к точке 2. На участке 2 – 3 – 4 характер цепи будет ёмкостным. Переход от 4 к 5 также будет скачкообразным.

Для упрощения анализа заменим несинусоидальные поток, ток и напряжение эквивалентными синусоидами, а для индуктивности примем условно-нелинейную схему замещения. Кроме того, предполагается, что катушка со сталью не имеет потерь и что зависимость между действующими значениями тока и напряжения катушки задана $U_{\mu}(I_{\mu})$ см. рис. 4.

По второму закону Кирхгофа

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ex} &= \dot{U}_C + \dot{U}_{\mu} \\ \dot{U}_C &= -jX_C \dot{I}_{ex}, \quad \dot{U}_{\mu} = U_{\mu} \angle 0^{\circ}, \quad U_{ex} \angle \varphi = X_C I_{ex} \angle (-\alpha - 90^{\circ}) + U_{\mu} \\ \alpha &= \text{Arctg}\left(\frac{I_{\mu}}{I_{exLX}}\right), \quad I_{exLX} = \frac{U_{\mu}}{R_H}, \quad I_{ex} = \sqrt{I_{\mu}^2 + I_{exLX}^2} \\ U_{ex} &= \sqrt{(X_C I_{ex} \cos(-\alpha - 90^{\circ}) + U_{\mu})^2 + (X_C I_{ex} \sin(-\alpha - 90^{\circ}))^2}.\end{aligned}$$

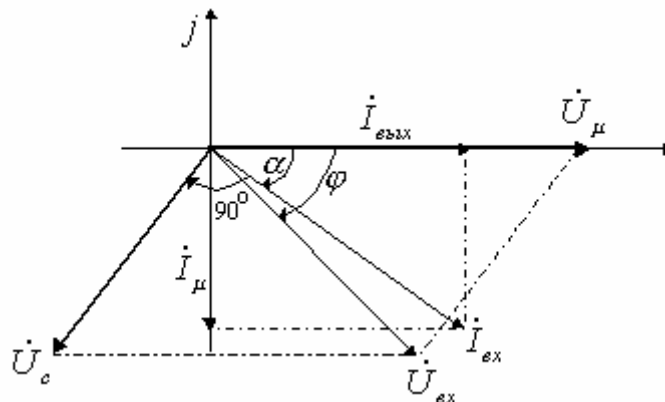


Рис. 3

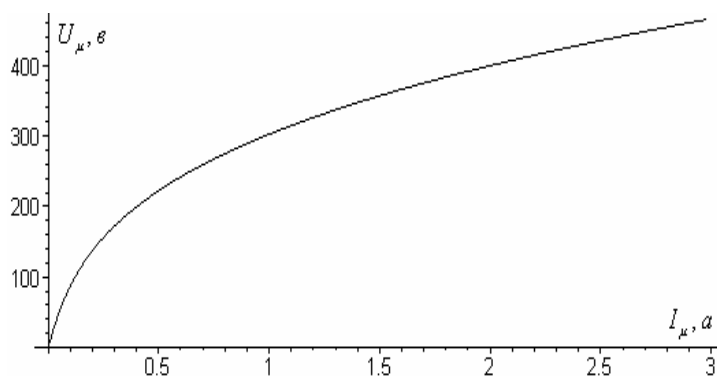


Рис. 4

| | | | |
|------|---------------------------|------|---------------------------|
| k=1 | IL=00.0000 A UL=000.001 B | k=31 | IL=00.2337 A UL=150.118 B |
| k=2 | IL=00.0000 A UL=000.009 B | k=32 | IL=00.2648 A UL=160.969 B |
| k=3 | IL=00.0000 A UL=000.037 B | k=33 | IL=00.2990 A UL=171.864 B |
| k=4 | IL=00.0001 A UL=000.102 B | k=34 | IL=00.3363 A UL=182.795 B |
| k=5 | IL=00.0002 A UL=000.230 B | k=35 | IL=00.3771 A UL=193.757 B |
| k=6 | IL=00.0004 A UL=000.451 B | k=36 | IL=00.4214 A UL=204.745 B |
| k=7 | IL=00.0007 A UL=000.802 B | k=37 | IL=00.4695 A UL=215.758 B |
| k=8 | IL=00.0012 A UL=001.326 B | k=38 | IL=00.5216 A UL=226.792 B |
| k=9 | IL=00.0019 A UL=002.071 B | k=39 | IL=00.5780 A UL=237.850 B |
| k=10 | IL=00.0029 A UL=003.093 B | k=40 | IL=00.6388 A UL=248.929 B |
| k=11 | IL=00.0041 A UL=004.452 B | k=41 | IL=00.7043 A UL=260.032 B |
| k=12 | IL=00.0058 A UL=006.215 B | k=42 | IL=00.7746 A UL=271.159 B |
| k=13 | IL=00.0079 A UL=008.450 B | k=43 | IL=00.8502 A UL=282.310 B |
| k=14 | IL=00.0105 A UL=011.229 B | k=44 | IL=00.9311 A UL=293.486 B |
| k=15 | IL=00.0137 A UL=014.623 B | k=45 | IL=01.0177 A UL=304.690 B |
| k=16 | IL=00.0176 A UL=018.698 B | k=46 | IL=01.1101 A UL=315.922 B |
| k=17 | IL=00.0222 A UL=023.506 B | k=47 | IL=01.2088 A UL=327.182 B |
| k=18 | IL=00.0278 A UL=029.083 B | k=48 | IL=01.3138 A UL=338.473 B |
| k=19 | IL=00.0343 A UL=035.437 B | k=49 | IL=01.4256 A UL=349.795 B |
| k=20 | IL=00.0419 A UL=042.548 B | k=50 | IL=01.5443 A UL=361.149 B |
| k=21 | IL=00.0507 A UL=050.366 B | k=51 | IL=01.6704 A UL=372.536 B |
| k=22 | IL=00.0608 A UL=058.816 B | k=52 | IL=01.8039 A UL=383.956 B |
| k=23 | IL=00.0724 A UL=067.811 B | k=53 | IL=01.9454 A UL=395.412 B |
| k=24 | IL=00.0855 A UL=077.258 B | k=54 | IL=02.0950 A UL=406.903 B |
| k=25 | IL=00.1003 A UL=087.071 B | k=55 | IL=02.2530 A UL=418.430 B |
| k=26 | IL=00.1170 A UL=097.170 B | k=56 | IL=02.4199 A UL=429.994 B |
| k=27 | IL=00.1357 A UL=107.492 B | k=57 | IL=02.5958 A UL=441.595 B |
| k=28 | IL=00.1566 A UL=117.985 B | k=58 | IL=02.7811 A UL=453.234 B |
| k=29 | IL=00.1798 A UL=128.606 B | k=59 | IL=02.9763 A UL=464.912 B |
| k=30 | IL=00.2054 A UL=139.325 B | k=60 | IL=03.1815 A UL=476.628 B |

Последнее уравнение следует решать методом последовательных приближений, например, методом простой итерации.

Если анализ цепи сделать для множества значений входного напряжения, то можно построить кривые зависимости $U_{ex}(I_{ex})$ и $U_{\mu}(I_{ex})$. Используя эти зависимости, можно построить проходную характеристику вход – выход $U_{вых}(U_{вх})$ (рис. 5). По этой характеристике оценивают стабилизирующее действие схемы. Схема на рис. 1 представляет собой простейший феррорезонансный стабилизатор напряжения.

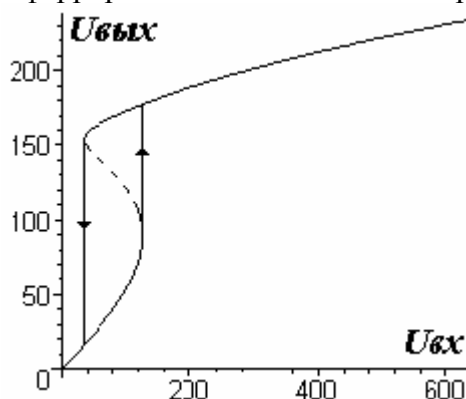


Рис. 5 Характеристика вход – выход
феррорезонансного стабилизатора напряжения

Проведем расчет нескольких точек проходной характеристики в области скачка. Расчет будем делать численным методом простой итерации и для этого преобразуем, полученное ранее выражение для входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = \sqrt{(X_c I_{\text{вх}} \cos(-\alpha - 90^\circ) + U_\mu)^2 + (X_c I_{\text{вх}} \sin(-\alpha - 90^\circ))^2}.$$

$$U_{\text{вх}}^2 = (X_c I_{\text{вх}})^2 - 2 X_c I_{\text{вх}} U_\mu \sin(\alpha) + U_\mu^2.$$

Подставим $\alpha = \text{Arctg}(\frac{I_\mu}{I_{\text{вх}}})$, $I_{\text{вх}} = \frac{U_\mu}{R_H}$, $I_{\text{вх}} = \sqrt{I_\mu^2 + I_{\text{вх}}^2}$ и

получим

$$U_{\text{вх}}^2 = \frac{2(X_c I_{\text{вх}})^2}{1 + \frac{I_\mu^2}{I_\mu^2 + \frac{U_\mu^2}{R_H}}} - 2 \frac{X_c I_\mu U_\mu}{\sqrt{1 + \frac{I_\mu^2}{I_\mu^2 + \frac{U_\mu^2}{R_H}}}} + U_\mu^2 + \frac{(X_c I_\mu)^2}{(1 + \frac{I_\mu^2}{I_\mu^2 + \frac{U_\mu^2}{R_H}}) R_H}$$

Образуем рекуррентную формулу для вычисления тока катушки по методу простой итерации

$$I_\mu^{(k+1)} = \frac{1}{2 X_c U_\mu^{(k)}} \left(\frac{2(X_c I_\mu^{(k)})^2 + (\frac{X_c U_\mu^{(k)}}{R_H})^2}{\sqrt{1 + \frac{I_\mu^{(k)2}}{I_\mu^{(k)2} + (\frac{U_\mu^{(k)}}{R_H})^2}}} + (U_\mu^{(k)2} - U_{\text{вх}}^2) \sqrt{1 + \frac{I_\mu^{(k)2}}{I_\mu^{(k)2} + (\frac{U_\mu^{(k)}}{R_H})^2}} \right)$$

Процесс вычисления будем отображать с помощью таблицы

| k | $U_{\text{вх}}^{(k)}, B$ | $I_\mu^{(k)}, A$ | $U_\mu^{(k)}, B$ | $I_\mu^{(k+1)}, A$ | $\Delta = I_\mu^{(k+1)} - I_\mu^{(k)} $ |
|---|--------------------------|------------------|------------------|--------------------|--|
| 0 | 100 | | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |

Самостоятельно сделать аналогичные рассуждения относительно анализа работы схемы феррорезонансного стабилизатора напряжения с токовым входом рис. 6.

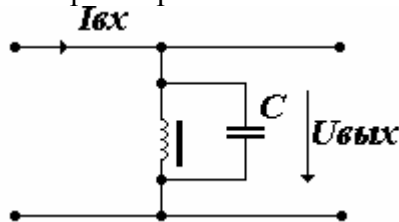


Рис. 6

Литература:

1. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд., перераб.-М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

Задание на расчетно-графическую работу №5

“Переходные процесс в линейных электрических цепях”

Из методички

Ю.Я. Лямец, В.А.Ильин, А.П.Арсентьев

"АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

методические указания к выполнению расчетно-графических и курсовых работ с применением ЭВМ", Чебоксары 1995 г.

2.