Приложение 3

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет имени Н.И. Вавилова»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Краткий курс лекций

для студентов 2 курса

Направление подготовки
19.03.03 Продукты питания животного происхождения

Профили подготовки
Технология мяса и мясных продуктов

Саратов 2016

УДК 519.711
ББК 22.1
М52

Рецензенты:

Доцент кафедры «Электроника колебаний и волн», кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «СГУ им. Н.Г. Чернышевского».
А.В. Толстиков

Заведующий кафедрой «Экономическая кибернетика», кандидат экономических наук, доцент ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ»
С.И. Ткачёв

М52 **Математическое моделирование технологических процессов**: краткий курс лекций для студентов 2 курса направления подготовки 19.03.03 «Продукты питания животного происхождения» / Т.Н. Меркулова // ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2016. – 71 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» составлен в соответствие с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 19.03.03 «Продукты питания животного происхождения». Краткий курс лекций содержит теоретический материал и практические примеры по основным понятиям, определениям и сферам применения математического анализа и моделирования процессов в технологии мяса и мясных продуктов. Курс нацелен на формирование у студентов знаний об основных закономерностях сбора, обработки, хранения, накопления информации и на применение этих знаний для создания математических моделей, позволяющих исследовать, оптимизировать и управлять качеством производственно-технологических систем, улучшать качество технологии мяса и мясных продуктов.

УДК 519.711
ББК 22.1

Введение

В настоящее время трудно представить себе сферу человеческой деятельности, где нельзя было бы использовать ЭВМ. Применение персональных ЭВМ, заметно сокращает сроки разработок, снижает стоимость проектирования, экономических расчетов и научно-технических исследований. Именно этой цели служит курс «Математическое моделирование технологических процессов», задачей которого является ознакомление студентов с применением математического анализа и методов моделирования с использованием персональных ЭВМ для решения прикладных задач, часто возникающих в производственно-технологических системах и процессах.

Краткий курс лекций по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» предназначен для студентов по направлению подготовки 19.03.03 «Продукты питания животного происхождения».

Краткий курс лекций содержит теоретический материал и практические примеры по основным понятиям, определениям и сферам применения математического анализа и моделирования процессов в различных областях знаний. Курс нацелен на формирование у студентов знаний об основных закономерностях сбора, обработки, хранения, накопления и анализа информации, на применение этих знаний для создания математических моделей, позволяющих исследовать и оптимизировать параметры производственно-технологических систем, улучшать качество технологии мяса и мясных продуктов.

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Модели и их классификация

Модель (от латинского modulus - мера, образец, способ) - это устройство, воспроизводящее (имитирующее) строение или действие другого ("моделируемого") устройства в научных, производственных (при испытаниях) или спортивных (авиамоделизм) целях.

В широком смысле ***модель*** - это любой мысленный или условный образ (изображение, описание, схема, чертеж, график, план, картина и т.д.) некоторого объекта, процесса или явления ("оригинала" данной модели), который используется в качестве "заместителя" этого объекта.

Оригинал (от латинского originalus - первоначальный) - подлинник, подлинное произведение (в отличии от копии).

Моделирование - исследование явлений или процессов путем построения и изучения их моделей. Моделирование состоит в выявлении основных свойств исследуемого процесса, построении его модели, изучении свойств (поведения) модели и прогнозировании поведения исследуемого процесса на основе изучения модели.

Критерием правильности моделирования является практика.

Например:

1. Совершенствование ядерного оружия путем расчетов на супер-ЭВМ. Удалось отказаться от испытаний ядерного вооружения.

2. Компьютерные тренажеры (симуляторы**)**, созданные на основе математических моделей, появились сначала у военных, сейчас они широко применяются в производственном и учебном процессе.

Математическая модель — это приближенное математическое описание объекта (технологического процесса, реакции, явления и т.д.).

***Примеры простейших моделей*:**

1. уравнение состояния идеального газа
2. F = закон всемирного тяготения
3. закон сохранения энергии
4. закон Кулона
5. закон сохранения энергии для фотона,

Сложные модели описывают объект точнее (***адекватнее)***

Математическое моделирование позволило исследовать на ЭВМ очень сложные процессы, такие, например, как глобальные климатические изменения в результате применения ядерного оружия (натурный эксперимент имеет катастрофические последствия).

В литературе математическое моделирование часто принято называть ***вычислительным экспериментом.***

Основные этапы математического моделирования:

1 этап: Постановка задачи в реальных объектах. Формулировка или осознание проблемы. Составление технического задания.

В инженерной практике это, например, необходимость определения выдержит ли мост данную нагрузку или трубопровод требуемое давление пара.

2 этап: Построение математической модели исследуемого объекта или процесса. На этом этапе выделяют наиболее важные черты и свойства объекта (неважные отбрасывают) и эти свойства записывают в виде математических уравнений.

3 этап: Выбор алгоритма решения и разработка программы для ЭВМ и/или использование необходимого программного обеспечения .

4 этап: Выполнение программы на ЭВМ с входными данными, отвечающими реальному процессу.

5 этап: Проверка соответствия полученных результатов требованиям задания или проверка точности решения.

6 этап: Составление технической документации, описывающей проектируемое изделие или технологический процесс.

1.2. Общая классификация моделей

Моделей очень много: знаковые, лингвистические, социологические и т.д. Но для инженерной практики наиболее существенны физические и математические модели.

Физической называют модель, воспроизводящую изучаемый оригинал с полным или частичным сохранением его физической природы и геометрического подобия.

Физические модели бывают натурные (1:1) и масштабные (уменьшенные или увеличенные).

Создание физических моделей - дело очень дорогостоящее, особенно для моделирования больших систем и сложных процессов. Однако физическое моделирование - это единственный способ проникновения в неизвестное в тех случаях, когда человеческие знания пока не могут быть теоретически обобщены. В инженерной практике все более эффективным и дешевым становится математическое моделирование.

Математическая модель - приближенное описание явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. (Академик А.Н.Тихонов. Математическая энциклопедия).

Математическое моделирование - это мощный инструмент познания мира, а также прогнозирования и управления. Но чтобы описать какое-либо явление природы, надо выявить его наиболее существенные свойства, закономерности и связи, отбросив менее существенные. Это упрощает и огрубляет модель, но позволяет сделать ее доступной для исследования, т.к. в реальном явлении участвует множество процессов, учесть которые просто невозможно, а в конкретной задаче и не нужно. Например, при изучении колебаний обычного маятника (груза на нити) совершенно не важно белая нить или черная, а груз красный или синий - важны длина нити и масса груза.

После того, как наиболее важные факторы выявлены, следующий шаг состоит в описании этих факторов и их взаимосвязи на языке математики (при помощи математической символики) обычно в форме уравнений и неравенств. Это не случайно, т.к. все законы природы сформулированы на языке уравнений: алгебраических, дифференциальных, разностных и т.п.

Когда явление природы, науки или техники переведено на язык математики, оно может быть исследовано хорошо разработанными математическими методами.

Эксперимент на математической модели, как правило, проще, быстрее, дешевле, экономичнее и безопаснее, чем на физической модели, а тем более на оригинале. Более того, хорошая математическая модель может быть использована для изучения многих других оригиналов с различной физической природой, поскольку "математика - это искусство называть разные вещи одними именами " (Анри Пуанкаре).

1.3. Классификация математических моделей

В планово-экономической работе используются разнообразные типы моделей, различающиеся целевым назначением, характером задач, степенью охвата явлений, математическим аппаратом и т.д.

Статистическая модель представляет корреляционное уравнение связи зависимого и нескольких независимых факторов, определяющих количественное значение зависимого фактора

Корреляционно-регрессионный анализ является одним из значимых методов построения математических моделей в животноводстве. Его цель определить общий вид математической модели в виде уравнения регрессии, рассчитать статистические оценки неизвестных параметров, входящих в это уравнение, и проверить статистические гипотезы о зависимости функции от ее аргументов.

Одним из наиболее распространенных способов моделирования тенденции временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, или тренда.

Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют автокорреляцией, количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени

В математической модели параметры обычно даются в виде таблицы чисел, связанных в систему функциональных уравнений различного типа.

Математические модели подразделяют на детерминистические и стохастические.

К детерминированным относят модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Эти модели строят на основе правил линейной алгебры, они представляют собой системы уравнений, совместно решаемых для получения результатов.

Детерминированные модели подразделяют на балансовые и оптимизационные. Балансовые модели, выражающие требование соответствия наличия ресурсов и их использования, как правило, характеризуются системой балансовых таблиц, которые обычно имеют форму шахматного баланса и могут быть записаны в виде квадратных матриц.

Наиболее обширный класс моделей, применяющихся на практике, - оптимизационные, которые основаны на методах математического программирования. Оптимизационные модели отличаются от балансовых тем, что целью их построения является не столько описание структуры экономической системы, сколько описание условий ее функционирования. Данные модели предназначены для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления. Примером построения таких моделей в сельском хозяйстве является оптимизационная модель структуры производства сельскохозяйственной продукции, которая направлена на достижение максимальной прибыли при оптимальной структуре производства.

Оптимизационные модели бывают линейные и нелинейные. Линейные оптимизационные модели базируются на теории линейного программирования. Они обладают простой структурой, математический аппарат для их реализации на компьютере хорошо разработан, а результаты моделирования легко интерпретируются традиционными экономическими терминами.

В то же время нередко встречаются условия, когда зависимости между объемами видов деятельности или в целевой функции не линейны.

Стохастические модели описывают случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности. В этих моделях либо исходные данные, либо искомый результат выражаются не определенными величинами, а виде некоторой статистической функции распределения этих величин. Изучаемый процесс условно рассматривается как детерминистический, и с моделью математически оперируют как с детерминистической, но в нее входят элементы оценки вероятностей получения результатов.

Математические модели могут классифицироваться также по характеристике математических объектов, включенных в модель, другими словами по типу математического аппарата, используемого в модели. По этому признаку могут быть выделены матричные модели, модели линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные модели, модели теории массового обслуживания, модели сетевого планирования и управления, модели теории игр и т.д.

Наконец, по типу подхода к изучаемым социально-экономическим системам выделяют дескриптивные и нормативные модели. При дескриптивном (описательном) подходе получаются модели, предназначенные для описания и объяснения, фактически наблюдаемых явлений или для прогноза этих явлений; в качестве примера дескриптивных моделей можно привести названные ранее балансовые и трендовые модели. При нормативном подходе интересуются не тем, каким образом устроена и развивается экономическая система, а как она должна быть устроена и как должна действовать в смысле определенных критериев. В частности, все оптимизационные модели относятся к типу нормативных; другим примером могут служить нормативные модели уровня жизни.

Все описанные выше виды моделей применимы к описанию структуры производства продукции. Динамика производства продукции может быть описана с помощью трендовой модели. Трендовые модели позволяют прогнозировать многолетнее развитие отрасли, поскольку ряд показателей производства несет в себе неопределенность, широкое распространение получили стохастические модели.

Наиболее разработанными для моделирования производства сельскохозяйственной продукции являются линейные модели, с помощью которых возможен выбор наилучшего варианта из множества. Кроме того, данный вид модели легко можно обработать на компьютере при использовании программ, разработанных на основе симплекс-метода.

1.4. Современные методы математического моделирования

В настоящее время широко применяется понятие "компьютерное моделирование", которое значительно шире традиционного понятия "моделирование на ЭВМ" и нуждается в уточнении, учитывающем сегодняшние реалии.

Начнем с термина ***«компьютерная модель»***. В настоящее время под компьютерной моделью чаще всего понимают:

- условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанный с помощью взаимосвязанных компьютерных таблиц, блок-схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекстов и т. д. и отображающий структуру и взаимосвязи между элементами объекта. Компьютерные модели такого вида мы будем называть ***структурно-функциональными***;

- отдельную программу, совокупность программ, программный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов, воспроизводить (имитировать) процессы функционирования объекта, системы объектов при условии воздействия на объект различных, как правило, случайных, факторов. Такие модели мы будем далее называть ***имитационными моделями.***

Компьютерное моделирование - метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели. Суть компьютерного моделирования заключена в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризирующих систему.

Предметом компьютерного моделирования могут быть: экономическая деятельность фирмы или банка, промышленное предприятие, информационно-вычислительная сеть, технологический процесс, любой реальный объект или процесс, например процесс инфляции, и вообще - любая Сложная Система. Цели компьютерного моделирования могут быть различными, однако наиболее часто моделирование является, как уже отмечалось ранее, центральной процедурой системного анализа, причем под системным анализом мы далее понимаем совокупность методологических средств, используемых для подготовки и принятия решений экономического, организационного, социального или технического характера.

Компьютерная модель сложной системы должна по возможности отображать все основные факторы и взаимосвязи, характеризующие реальные ситуации, критерии и ограничения. Модель должна быть достаточно универсальной, чтобы по возможности описывать близкие по назначению объекты, и в то же время достаточно простой, чтобы позволить выполнить необходимые исследования с разумными затратами.

Все это говорит о том, что моделирование систем, рассматриваемое в целом, представляет собой скорее искусство, чем сформировавшуюся науку с самостоятельным набором средств отображения явлений и процессов реального мира. Поэтому исключительно сложной являются попытки классификации задач компьютерного моделирования или создания достаточно универсальных инструментальных средств компьютерного моделирования произвольных объектов. Однако если преднамеренно сузить класс рассматриваемых объектов, ограничившись, например, задачами компьютерного моделирования при системном анализе объектов экономико-организационного управления, то можно говорить о структурно-функциональном моделировании.

1.5. Структурно-функциональное моделирование

Истоки структурно-функционального моделирования следует искать в теоретических основах электрических цепей, электронике и радиотехнике, где впервые широко стали использоваться различные блок-схемы. Дальнейшее развитие структурно-функциональное моделирование получило в теории автоматического управления (ТАУ), где был развит аппарат, включающий в себя не только правила составления и преобразования, но и достаточно общую методологию анализа и синтеза структурных схем, основанную на том, что каждой математической операции над сигналами поставлен в соответствие определенный элементарный структурный блок. Хотя динамические структурно-функциональные схемы теории автоматического управления обладают широчайшими возможностями для анализа непрерывных, линейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, они плохо подходят для описания процессов в экономико-организационных системах, где связи между отдельными блоками имеют гораздо более широкое толкование и редко могут быть сведены к некоторой функции времени (сигналу). Не очень удобны они и для описания алгоритмов и программ, для которых понятие "элементарный блок" существенно отличается от принятого в ТАУ. В частности, для составления блок-схем алгоритмов и программ, потребность в которых появилась в начале 60-х, понадобились символы, соответствующие основным операциям машинной обработки данных, их накоплению, сортировке и передаче. В результате довольно длительной разработки и последующей эволюции были созданы и нашли широкое применение государственные стандарты на составление и использование блок-схем алгоритмов и программ, вошедшие впоследствии в перечень обязательных документов Единой системы программной документации (ЕСПД). Использование стандартов на блок-схемы алгоритмов и программ весьма жестко контролировалось как Госфондом алгоритмов и программ (ГАП), так и другими "компетентными органами", причем описание любой программы и любого алгоритма должно было содержать блок-схему, даже и при отсутствии особой нужды.

Дальнейшее развитие блок-схем, связано с развитием автоматизированных систем управления производством (АСУП), появившихся в начале 70-х, в которых, в отличие от алгоритмов и программ, блок-схемы стали выполнять несколько иные функции. Основным назначением графических символов при проектировании АСУП явилось именно моделирование объекта автоматизации и процессов функционирования самой АСУП. Символика проектов АСУП включала в себя прежде всего функциональные блоки, предназначенные для отображения основных функций сбора, накопления, передачи и обработки данных. Наряду с ними в состав условных графических обозначений были включены и символы, позволяющие описывать разнообразные структуры объектов управления. На использование символов при проектировании АСУП разработаны специальные ГОСТы, регламентирующие состав, размеры и вид символов, а так же правила их использования. В целом, совокупность символов для АСУП и правил их использования образуют простейший язык структурно-функционального моделирования, применяющийся при системном анализе и проектировании автоматизированных экономико-организационных систем. Можно только сожалеть о том, что развитие подобных языков моделирования в СССР приостановилось в начале 80-х, однако в последние годы ситуация в этой области стала меняться к лучшему благодаря появлению отечественного инструментально программного комплекса «CASE-Аналитик».

Современные методы структурно-функционального анализа и моделирования сложных систем были заложены благодаря трудам профессора Массачусетского технологического института Дугласа Росса, который впервые использовал понятие "структурный анализ" сорок лет назад, пытаясь создать алгоритмический язык APT, ориентированный на модульное программирование. Дальнейшее развитие идеи описания сложных объектов как иерархических, многоуровневых модульных систем с помощью относительно небольшого набора типовых элементов привело к появлению

SADT (Structured Analyses and Design Technique), что в дословном переводе означает "технология структурного анализа и проектирования", а по существу является методологией структурно-функционального моделирования и анализа сложных систем [10]. Со времени своего появления SADT постоянно совершенствовалась и широко использовалась для эффективного решения целого ряда проблем - таких как совершенствование управления финансами и материально-техническим снабжением крупных фирм, разработка программного обеспечения АСУ телефонными сетями, долгосрочное и стратегическое планирование деятельности фирм, проектирование вычислительных систем и сетей и др.

Центральной идеей SADT является, по определению авторов, SA-блок - универсальная единица универсальной пунктуации для неограниченного строго структурного анализа. Несмотря на такое мудреное название под таинственным SA-блоком скрывается обычный функциональный блок, характеризующийся наличием ***входа, выхода, механизма и управления.*** Другим фундаментальным понятием SADT является принцип иерархической декомпозиции сверху вниз, позволяющий анализировать сколь угодно сложные системы. При ближайшем рассмотрении его тоже открытием не назовешь, так как любой метод структурного анализа использует декомпозицию, которая собственно и составляет один из основных принципов познания. Оригинальным же в SADT является эффективный метод кодирования связей, основанный на использовании специальных ICOM-кодов и позволивший не только упростить процедуру моделирования, но и автоматизировать процедуры структурно-функционального анализа.

Одним из первых программных комплексов структурно-функционального анализа на основе SADT был пакет AUTOIDEF0, разработанный в рамках программы ВВС США по созданию интегрированной автоматизированной системы управления производством (Integreted Computer Aided Manufacturing). В основе пакета лежит подмножество SADT, названное IDEF0. AUTOIDEF0 предназначался для облегчения процесса создания и рецензирования SADT-диаграмм и моделей для географически удаленных аэрокосмических подрядчиков. Поскольку модели часто рецензировались и исправлялись, система функционировала на диалоговых устройствах и сетях связи и включала в себя тогда еще редкие дисплеи с векторной графикой и графопостроители. Система AUTOIDEF0 предоставляла удаленным пользователям командно-ориентированную графическую среду, управляемую с помощью иерархического меню, которое облегчало работу с библиотекой диаграмм и графическими средствами. Одновременно могло создаваться, храниться, обрабатываться, публиковаться и архивироваться множество различных моделей, построенных по единой методологии средствами SADT.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется математическим моделированием?
2. Приведите примеры простейших моделей.
3. Постановка оптимизационной задачи.
4. Какие модели используются в животноводстве?
5. Какие источники информации используются для построения моделей животноводства?
6. Что позволяет осуществить математическое моделирование до создания реальной системы, объекта?
7. Что позволяют увидеть вычислительные эксперименты?
8. Сформулируйте основную задачу математического моделирования.
9. Дайте определение математической модели.

10. Какой подход решения научных задач является альтернативным математическому моделированию?
11. Перечислите основные недостатки экспериментального подхода.
12. Что является важнейшей характеристикой математической модели?
13. На какие два вида делятся математические модели?
14. Перечислите виды аналитических математических моделей.
15. Дайте краткую характеристику видов моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.
2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 491 с. ISBN 5-06-003830-0.
3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов:стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.
4. Рау, В. Г. Практический курс математики и общей теории статистики : учебное пособие./ В. Г. Рау. - М. : Высш. шк., 2006. - 126 с. . - ISBN 5-06-005529-9.
5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.
6. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. –М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.
7. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.
2. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение
3. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.

Лекция 2

ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. Простейшие аналитические модели

Простейшие аналитические модели могут быть заданы явно в виде функции одной или нескольких переменных.

Обычно в виде функций задаются общие законы природы или общие закономерности, полученные в результате интегрирования дифференциальных уравнений. Примером такой модели может служить знаменитая формула К.Э. Циолковского:

$$\Delta v_{\text{ла}} = v \ln \frac{M_0}{M_{\text{к}}},$$

определяющая приращение скорости ракеты $\Delta v_{\text{ла}}$ при импульсном сжигании топлива через скорость истечения рабочего тела v и отношение начальной M_0 и конечной $M_к$ масс ракеты.

Модель, заданная в явном виде, дает исчерпывающее описание исследуемого объекта. Она позволяет построить зависимость его характеристик от управляющих факторов, взять производные и найти экстремумы модели, определить характеристики модели в окрестности экстремумов и т.д.

Очень удобна графическая интерпретация таких моделей. Однако модели в виде формул могут быть разработаны только для очень простых объектов.

2.2. Линейные детерминированные модели

Наиболее сложными, но всё ещё простыми являются так называемые линейные детерминированные модели. Детерминированными называют такие процессы, для которых каждое состояние в данный момент времени приводит к одному определённому состоянию в каждый последующий момент времени.

Для математического моделирования таких процессов используются различные виды уравнений: алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, разностные и другие. Это не случайно, так как известно из курса физик, химии, механики, законы природы сформулированы на языке уравнений.

Они задаются в виде линейной формы управляющих переменных (x):

$$W = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$$

при линейных ограничениях вида

$$b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \ldots + b_{kj}x_k \geq b_j\ ,\ j = 1,\ldots, q_1;$$
$$c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + \ldots + c_{kj}x_k = c_j\ ,\ j = 1,\ldots, q_2;$$
$$d_{1j}x_1 + d_{2j}x_2 + \ldots + d_{kj}x_k \leq d_j\ ,\ j = 1,\ldots, q_3.$$

Общее число ограничений $m = q_1 + q_2 + q_3$ может превосходить число переменных ($m > k$). Кроме того, обычно вводится условие положительности переменных ($x_i \geq 0$).

Поверхность отклика для линейной модели представляет собой гиперплоскость. Например, рассмотрим линейную модель двух переменных следующего вида:

$$W = -2x_1 - 3x_2$$

при следующих ограничениях

$$x_1 + 3x_2 \le 18;$$
$$x_1 - 4x_2 \le 4;$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Область допустимых значений (область определения) *OABCD* для модели образована ограничениями (Рис. 2.1). Поверхность отклика представляет собой плоский многоугольник *OA'B'C'D'*.

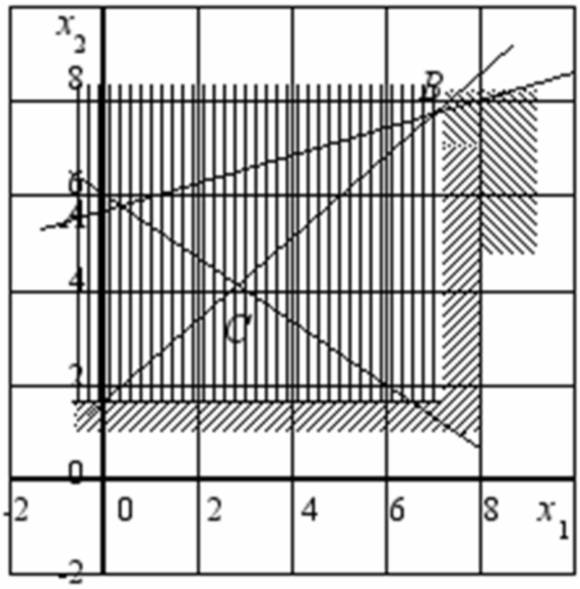

Рис. 2.1. Область определения модели

При определенном соотношении ограничений множество допустимых решений может отсутствовать (пусто).

Линейные модели достаточно просты и поэтому, с одной стороны, предполагают существенное упрощение задачи, а с другой – допускают разработку простых и эффективных методов решения.

При исследовании линейные модели используются редко и почти исключительно при приближенном описании задач.

Линейные модели могут использоваться при поэтапной аппроксимации нелинейных моделей (линеаризация задачи). Особенно эффективен этот прием при изучении небольших областей исследуемого пространства. Представление отдельных участков нелинейной поверхности отклика линейной моделью лежит в основе большой группы методов оптимизации, так называемых методов с линейной тактикой.

Исследование линейных моделей не представляет труда. В частности влияние каждой из переменных на характеристики модели вида $W = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$ задается ее коэффициентами:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = a_i$$

$$, i = 1, \ldots, k$$

2.3. Нахождение корней уравнения f(x)=0 на отрезке с заданной точностью ε. Решение отдельных уравнений и систем уравнений

В инженерной практике часто приходиться решать нелинейные алгебраические и трансцендентные уравнения и их системы.

Алгебраическими называется уравнение, содержащее суммы целых степеней аргумента x:

$$\grave{a}_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Самое известное алгебраическое уравнение – это квадратный трёхчлен:

$$\grave{a}_2 \tilde{o}^2 + \grave{a}_1 \tilde{o} + \grave{a}_0 = 0$$

Его корни (то есть значения x, при котором уравнение обращается в тождество) находятся по известным формулам Виетта. Для кубических уравнений (N=3) корни находят по формуле Кардано, а для уравнений 4 порядка по формулам Феррари. Формулы Кардано и Феррари сложны, громоздки и мало пригодны для практических расчётов. Для N>4 таких формул вообще нет.

Тем не менее, корни всякого алгебраического уравнения с числовыми коэффициентами при N>=2 можно найти численно с любой точностью. Для этого существует ряд численных методов.

Трансцендентными называют уравнения, в которые входят тригонометрические функции (sin(x), cos(x), tg(x)), показательные функции (e^x, a^y) и логарифмические функции.

Например:

$$x-10\sin(x)=0$$

$$2^x-2e^{2x}=0$$

$$\mathrm{Ln}(x+5)=\cos(x)$$

Решить такое уравнение – это значит:

1. Установить, имеет ли уравнение корни;
2. Определить, сколько корней;
3. Найти численное значение корней с заданной точностью.

Решение уравнений на практике обычно проводиться в два этапа:

1. Отделение корней – нахождение малых окрестностей значений аргумента, в которых находиться одно значение корня.
2. Уточнение корней – вычисление значений корней с заданной точностью.

2.4. Методы отделения корней

На практике наиболее часто применяют три метода отделения корней: графический, табличный, пошаговый.

Отделение корней, то есть нахождение «тесных» промежутков, содержащих только один корень, можно во многих случаях выполнить графически. Учитывая, что действительные корни уравнения F(x)=0 (1) - это есть точки пересечения графика функции y=F(x) с осью абсцисс y=0, нужно построить график функции y=F(x) на оси OX отметить отрезки, содержащие по одному корню. Но часто для упрощения построения графика функции y=F(x) исходное уравнение (1) заменяют равносильным ему уравнением f1(x)=f2(x) (2). Далее строятся графики функций y1=f1(x) и y2=f2(x) , а затем по оси OX отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения двух графиков.

Например, для уравнения F(x)=sinx=0, корни x1=0, x2=Pi, x3=2*Pi, ...

Графический метод нагляден, но точность его не высока, а времени требуется много. Для более быстрого отделения корней целесообразно использовать Ms Excel.

Самый простой способ – это табулирование функции F(x), то есть построение таблицы значений функции при изменении аргумента x с некоторым шагом h. После построения таблицы F(x) из неё легко найти малые интервалы, в которых F(x)=0. Например, F(x)=sin(2x)-ln(x).

B	C
x	F(x)
1	0,909297
1,1	0,713186
1,2	0,493142
1,3	0,253137
1,4	-0,00148
1,5	-0,26435
1,6	-0,52838
1,7	-0,78617
1,8	-1,03031
1,9	-1,25371
2	-1,44995

Рис. 2.2. Таблица значений функции F(x)=sin(2x)-ln(x).

Из таблицы видно, что искомый корень находиться где-то вблизи x=1,4. Можно получить и более точное значение корня, если строить таблицу функции с меньшим шагом.

Рассмотрим пошаговый алгоритм отделения корней нелинейного уравнения F(x)=0.

Теорема

" Если функция F(x), определяющая уравнение F(x)=0, на концах отрезка [a;b] принимает значения разных знаков, т.е. F(a)*F(b)<0, то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень уравнения".

"Если функция F(x) строго монотонна, то корень на [a,b] единственный (F'(a)*F'(b)>0 (4))".

Для отделения корней пошаговым способом выбирается отрезок [A;B], на котором находятся все интересующие вычислителя корни уравнения. Причем на отрезке [A;B] функция F(x) определена, непрерывна и F(a)*F(b)<0. Требуется указать все частичные отрезки [a;b], содержащие по одному корню.

Будем вычислять значение функции F(x), начиная с точки x=A, двигаясь вправо с некоторым шагом h. Если F(x)*F(x+h)<0, то на отрезке [x;x+h] существует корень.

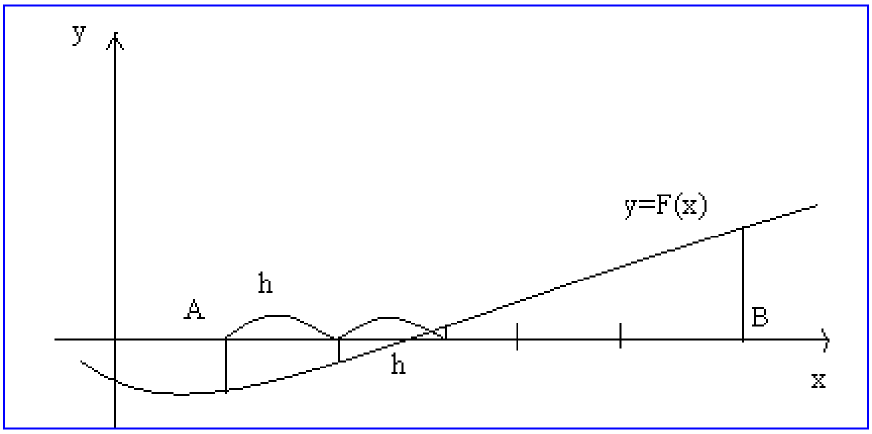

Рис. 2.3. Пошаговый метод отделения корней.

Если F(xk)=0, то xk-точный корень.

И повторяем эту процедуру до тех пор пока не пройдём весь отрезок [A;B] до точки B.

Применяя пошаговый метод нужно иметь в виду, что иногда он может дать неверные результаты. Если шаг по оси x выбран большим, а изменения функции носят сложный характер, то вполне возможна ситуация, когда на концах отрезка [x;x+h] функция имеет одинаковые знаки, а внутри отрезка имеются корни. Возможна так же ситуация когда на концах отрезка функция имеет разные знаки, а внутри находиться не один, а сразу несколько корней.

Для повышения надёжности отделения корней следует выбирать достаточно малые значения шага h, строить график исследуемой функции.

2.5. Методы уточнения корней

После того, как найдены достаточно малые окрестности изменения аргумента x, в которых заключено по одному значению корня исходного уравнения, выполняется уточнение корней, то есть вычисление корней с заданной точностью.

2.5.1 Метод половинного деления.

Пусть корень уравнения F(x)=0 отделен на отрезке [a;b]. Требуется найти значение корня с точностью ε.

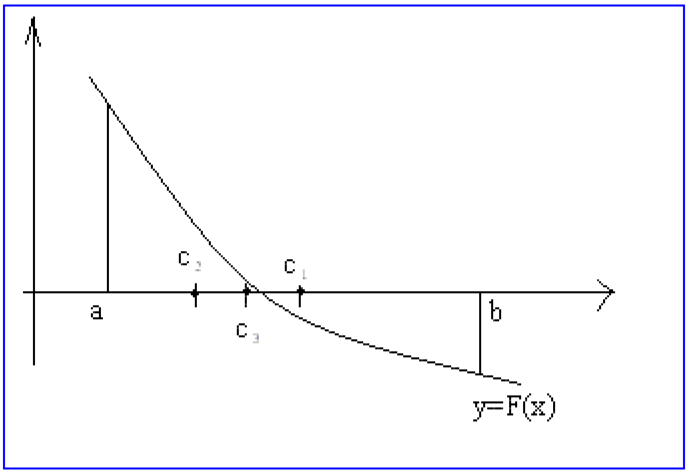

Рис. 2.4. Метод половинного деления.

Процедура уточнения положения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности:

$$\tilde{n}_{\hat{e}} = \frac{\grave{a}_{\hat{e}} + b_k}{2}, \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a} \quad \hat{e} = 1,2, \quad \ldots$$

В качестве следующего интервала неопределенности из двух возможных выбирается тот, на концах которых функция F(x)=0 имеет разные знаки. Точность будет достигнута, если: $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$

Корень уравнения вычисляется по формуле x=(an+bn)/2.

Более эффективными и быстродействующими являются методы хорд (метод «ложного положения»), метод простой итерации, метод Ньютона и другие.

2.5.2. Метод хорд.

Для реализации данного метода, нужно построить исходную функцию y=F(x) и найти значения функции на концах отрезка F(a) и F(b). Затем провести хорду M1M2 с концами в точках M1(a, F(a)) и M2(b, F(b)). Абсцисса точки пересечения хорды M1M2 с осью OX это и есть приближенный корень x1. Далее найти точку M3(X1 ,F(x1)), построить следующую хорду и найти второй приближенный корень x2. И так далее. В зависимости от поведения функции возможны два случая:

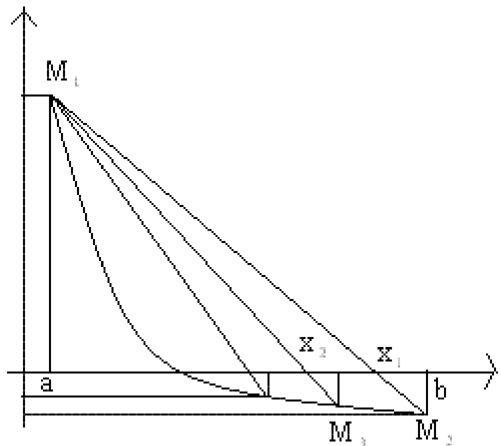

Рис. 2.5. Убывающая функция

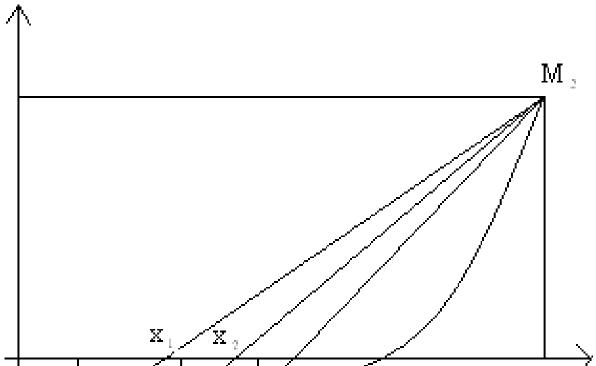

Рис. 2.6. Возрастающая функция

Для первого случая (Рис. 2.5) справедлива следующая формула

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)(a - x_n)}{F(a) - F(x_n)}$$

и справедливо неравенство: F(a)*F''(a)>0, где x0=b.

Для второго случая (Рис. 2.6.) справедлива следующая формула

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)(b - x_n)}{F(b) - F(x_n)}$$

и справедливо неравенство: F(b)*F''(b)>0, где x0=a.

Условия сходимости метода секущих аналогичны условиям сходимости метода Ньютона.

2.6. Решение систем линейных алгебраических уравнений

2.6.1. Решение систем линейных уравнений является метод Гаусса

В инженерной практике существует масса задач, сводящихся к решению систем линейных алгебраических уравнений. Одним из методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса.

Под названием «метод Гаусса» фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Будем считать матрицу системы невырожденной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В методе Гаусса матрица системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных алгебраических операций преобразуется в верхнюю (нижнюю) треугольную матрицу, получающуюся в результате прямого хода. В обратном ходе определяются неизвестные.

На практике данный способ реализуется следующим образом:

Решить систему уравнений методом Гаусса в Ms Excel. Дана система:

$$\begin{cases} 3{,}499x_1 + 3{,}512x_2 + 3{,}602x_3 = 37{,}791 \\ -7{,}117x_1 + 3{,}602x_2 + 3{,}811x_3 = 3{,}520 \\ 3{,}748x_1 + 3{,}901x_2 - 5{,}958x_3 = 3{,}850 \end{cases}$$

Для того чтобы решить данную систему уравнений в Excel, нужно выполнить следующие действия:

Заполнить ячейки следующим образом (обратить внимание на названия и номера столбцов при заполнении - они должны быть такими же, как на рисунке 2.7):

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	bi
2	3,499	3,512	3,602	37,791
3	-7,117	3,602	3,811	3,52
4	3,748	3,901	-5,958	3,85

Рис 2.7. Заполнение матрицы в Excel.

В ячейку E1 ввести текст Контрольные суммы, а в F1 – Строчные суммы.

В ячейку E2 ввести формулу =СУММ(A2:D2) (для подсчета контрольных сумм) и методом протягивания заполнить ячейки E3, E4.

После этого необходимо выполнить "Прямой ход" - преобразование исходной системы к системе с треугольной матрицей, на главной диагонали которой стоят единицы. Для этого нужно выполнить следующие действия:

Чтобы коэффициент при x1 равнялся 1, нужно в ячейку A5 ввести формулу =A2/$A$2, затем методом протягивания скопировать ее в ячейки B5:D5.

Над столбцом контрольных сумм необходимо выполнить те же действия, что и над коэффициентами при неизвестных, следовательно в ячейку E5 нужно ввести формулу =E2/$A$2.

В ячейку F6 ввести формулу =СУММ(A5:D5) (для подсчета строчных сумм).

В ячейку A6 ввести формулу =A3-$A$3*A5 (для обнуления коэффициента при x1 во втором уравнении системы), заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек B6:E6.

В ячейку A7 ввести формулу =A4-A5*$A$4 (для обнуления коэффициента при x1 в третьем уравнении системы), заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек B7:E7.

В ячейку B8 ввести формулу =B6/$B$6, заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек C8:E8.

В ячейку B9 ввести формулу =B7-B8*$B$7, заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек C9:E9.

В ячейку C10 ввести формулу =C9/$C$9, скопировать эту формулу в диапазон ячеек D10:E10.

Формулой из ячейки F5 методом протягивания заполнить ячейки F6:F10 (следует обратить внимание на то, что значения в столбцах строчных и контрольных сумм попарно равны).

После этого необходимо выполнить "Обратный ход" - последовательное нахождение значений x3, x2, x1. Для этого нужно выполнить следующие действия:

В ячейки C11, B12, A13 ввести единицы.

В ячейку D11 ввести формулу =D10 и скопировать ее в ячейку E11.

В ячейку F11 ввести формулу =A11+B11+C11+D11.

В ячейку D12 ввести формулу =D8-C8*D11.

В ячейку E12 ввести формулу =E8-C8*E11.

В ячейку D13 ввести формулу =D5-C5*D11-B5*D12.

В ячейку E13 ввести формулу =E5-C5*E11-B5*E12.

Формулу из ячейки F11 скопировать диапазон ячеек F12:F13.

Таким образом, получены x3, x2, x1. Для проверки правильности решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

Диапазон ячеек A15:A18 последовательно заполнить следующими словами: проверка, 1 уравнение, 2 уравнение, 3 уравнение.

В ячейку C16 ввести формулу =A2*$D$13+B2*$D$12+C2*$D$11, затем скопировать ее в диапазон ячеек C17:C18.

Нужно обратить внимание, что полученный результат в ячейках C17:C18 полностью совпадает с ячейками D2:D4, следовательно, задача решена верно.

Таким образом, получаем следующее:

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2	x3	bi	контрольные суммы	строчные суммы
2	3,499	3,512	3,602	37,791	48,404	
3	-7,117	3,602	3,811	3,52	3,816	
4	3,748	3,901	-5,958	3,85	5,541	
5	1	1,004	1,029	10,801	13,834	13,834
6	0	10,745	11,138	80,387	102,270	102,270
7	0	0,139	-9,816	-36,630	-46,308	-46,308
8		1	1,036	7,481	9,518	9,518
9		0	-9,960	-37,671	-47,631	-47,631
10			1	3,782	4,782	4,782
11			1	3,782	4,782	4,782
12		1		3,561	4,561	4,561
13	1			3,333	4,333	4,333
14						
15	проверка					
16	1 уравнение		37,791			
17	2 уравнение		3,52			
18	3 уравнение		3,85			

Рис.2.8. Решение системы уравнений методом Гаусса

Ответ: x1=3.333, x2 =3.561, x3 =3.782.

2.6.2. Матричный метод

Систему можно представить в виде Ax=b, где $b=(b1,b2,b3,...,bn)^T$ - вектор свободных членов и $x=(x1,x2,x3,...,xn)^T$ - вектор неизвестных с вещественными координатами, а $A=(a_{ij})^n i,j=1$ - вещественная n ×n - матрица коэффициентов данной системы.
Тогда, умножая обе части этого векторного уравнения слева на обратную матрицу A^{-1} , получаем $x=A^{-1}b$.

На практике данный способ реализуется следующим образом:

Решить систему уравнений матричным методом в Ms Excel:

$$\begin{cases} 3{,}499x_1 + 3{,}512x_2 + 3{,}602x_3 = 37{,}791 \\ -7{,}117x_1 + 3{,}602x_2 + 3{,}811x_3 = 3{,}520 \\ 3{,}748x_1 + 3{,}901x_2 - 5{,}958x_3 = 3{,}850 \end{cases}$$

Для того чтобы решить данную систему уравнений в Excel, нужно выполнить следующие действия:

В ячейку A2 ввести текст «A=».

Ячейки B1:D3 заполнить значениями коэффициентов перед x1, x2, x3 каждого уравнения системы:

	A	B	C	D
1		3,499	3,512	3,602
2	**A=**	-7,117	3,602	3,811
3		3,748	3,901	-5,958
4				

	37,791
b=	3,52
	3,85

Рис. 2.9. Заполнение матрицы в Excel

(т. о. сформировали матрицу системы).

В А6 ввести «b=», затем ячейки В5:В7 заполнить значениями свободных членов:

(т. о., сформировали вектор – столбец свободных членов).

В ячейку А10 ввести «A^(-1)=».

Выделить диапазон ячеек В9:D11, нажать с клавиатуры знак равенства (=), выбрать меню «Вставка» - «Функция» - «МОБР» (данная функция позволяет найти обратную функцию исходной матрицы).

В окне «Аргументы функции» задать массив В1:D3, нажать на клавиатуре Ctrl+Shift+Enter (т. о., нашли обратную матрицу системы).

В А14 набрать «x=».

Выделить диапазон ячеек В13:В15, нажать «=» с клавиатуры, выбрать функцию «МУМНОЖ», которая возвращает произведение матриц.

В окне «Аргументы функции» в поле массив1 ввести В9:D11 и в поле массив2 ввести В5:В7, нажать на клавиатуре Ctrl+Shift+Enter.

Таким образом, получаем следующее:

	A	B	C	D
1		3,499	3,512	3,602
2	A=	-7,117	3,602	3,811
3		3,748	3,901	-5,958
4				
5		37,791		
6	b=	3,52		
7		3,85		
8				
9		0,097003	-0,09339	-0,00109
10	A^(-1)=	0,075086	0,091716	0,10406
11		0,110184	0,001299	-0,1004
12				
13		3,332888		
14	x=	3,561042		
15		3,782022		

Рис. 2.10. Решение системы уравнений матричным методом в Ms Excel

Ответ: x1=3.332888, x2 =3.561042, x3 =3.782022.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком виде задаются общие законы природы или общие закономерности?
2. Назовите самое известное алгебраическое уравнение.
3. Что значит решить трансцендентное уравнение?
4. Назовите методы отделения корней.
5. Какие методы уточнения корней вы знаете?
6. Перечислите методы уточнения корней.
7. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

8. Решение систем линейных уравнений Матричным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.

2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 491 с. ISBN 5-06-003830-0.

4. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов:стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.

5. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. –М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.

6. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.

7. Рау, В. Г. Практический курс математики и общей теории статистики : учебное пособие./ В. Г. Рау. - М. : Высш. шк., 2006. - 126 с. . - ISBN 5-06-005529-9.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.

2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.

3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение

Лекция 3

МОДЕЛИ В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ. СИМПЛЕКС-МЕТОД

3.1. Решение дифференциальных уравнений

Широкий класс природных явлений и производственных процессов описывается дифференциальными математическими моделями, то есть моделями, использующими дифференциальные уравнения.

Дифференциальными называются уравнения, связывающие искомые функции и их производные.

В зависимости от числа независимых переменных и типа производных принято различать обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных.

Математическая модель в виде одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) широко используются при изучении переходных процессов в системах автоматического регулирования (САР), при описании баллистики летательных аппаратов, а также при описании процессов движения (потоки, частицы, механические элементы).

В простейшем случае модель может иметь вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)$$

или системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \ldots, x_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n).$$

Часто встречаются смешанные задачи, а также нелинейные ОДУ.

Модель, заданная в виде дифференциальных уравнений, должна включать в себя необходимый набор начальных условий:

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1, \quad x''(0) = C_2, \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

или

$x_1(0) = C_1$, $x_2(0) = C_2, \ldots, x_n(0) = C_n$.

Исследование моделей, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, осуществляется аналитическими и численными методами. Наиболее полными являются аналитические решения, обеспечивающие всесторонний анализ полученных результатов. Но такие решения получены лишь для ограниченного числа дифференциальных уравнений. Численные методы решения позволяют найти лишь конкретные значения изучаемой функции при заданной комбинации исходных данных. Для анализа модели можно использовать некоторую совокупность решений. Однако, очевидно, что результаты анализа в этом случае могут зависеть от выбора этой совокупности.

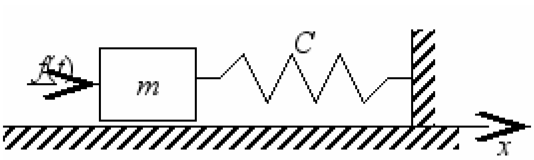

Рис.3.1. Движение груза массой *m*, закрепленного на вертикальной стенке с помощью пружины жесткостью *C* и совершающего колебательное движение вдоль оси *x* в среде с вязкостью ν.

В качестве простейшего примера математической модели механической системы может быть рассмотрена модель движения груза массой *m*, закрепленного на вертикальной стенке с помощью пружины жесткостью *C* и совершающего колебательное движение вдоль оси *x* в среде с вязкостью ν (Рис. 3.1.).

Возмущающая сила, вызывающая колебания, зависит от времени f(t). Наряду с возмущающей силой f(t) на груз действует сила инерции $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, сила вязкого трения $\nu\frac{dx(t)}{dt}$, усилие пружины $\frac{1}{C}x(t)$. Все эти силы тормозят движение груза.

Согласно принципу Даламбера сумма всех сил, действующих на груз должна равняться нулю:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\nu\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{C}x(t)-f(t)=0.$$

Начальные условия характеризуют начальное положение и начальную скорость груза:

x(0) = x0; $x'(0)=0$.

Уравнение совместно с начальными условиями представляет собой математическую модель рассматриваемой механической системы.

3.1.1. Метод Эйлера

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Идея метода заключается в том, что на малом промежутке изменения независимой переменной $x_0 \le x \le x_0 + h = x_1$

интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ заменяется отрезком прямой (касательной) $y - y_0 = f(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)$.

Отсюда $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot h$ и процесс можно повторить для промежутка $x_1 \le x \le x_1 + h = x_2$ и т.д. Число h является здесь шагом таблицы.

Геометрически интегральная кривая заменяется при этом ломаной, называемой ломаной Эйлера.

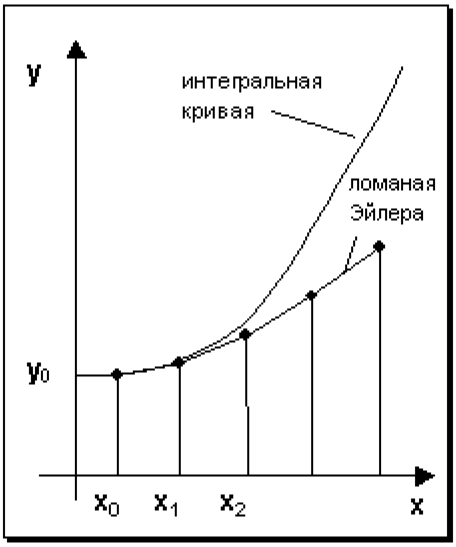

Рис. 3.2. Метод Эйлера

Рабочая формула для определения значений у по методу Эйлера имеет вид $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$, где $\Delta y_k = f(x_k, y_k) \cdot h, \quad y_k = y(x_k), \quad x_k = x_0 + kh$

Метод Эйлера обладает малой точностью, к тому же погрешность каждого нового шага, вообще говоря, систематически возрастает. Наиболее приемлемым для практики методом оценки точности является в данном случае метод двойного счета – с шагом h и с шагом h/2. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает естественные основания считать их верными. Ошибка метода пропорциональна h2. Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность так, что ошибка метода становится пропорциональной h3.

3.1.2. Модификация метода Эйлера

Модификация – это по определению изменение формы или свойств чего-либо. Мы будем рассматривать модификации метода Эйлера в плане улучшения его свойств и прежде всего точности вычислений.

Метод Эйлера является одним из самых старых и самых известных методов приближенного численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако на практике он не часто используется, так как обладает не высокой точностью.

Метод Эйлера-Коши

Точность решений в рамках метода Эйлера можно повысить и, не прибегая к уменьшению шага интегрирования. Заметного повышения точности можно достичь, если улучшить аппроксимацию искомой интегральной кривой y=y(x). Задача состоит в том, чтобы, не уменьшая шага h, более точно определить направление перехода из точки (Xi,Уi), в точку (X_{i+1},$У_{i+1}$). В методике Эйлера используется только угол наклона в точке (Xi,Уi). Это не позволяет учесть всех изгибов кривой на участке от точки (Xi,Уi) до точки (X_{i+1},$У_{i+1}$).

Знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши предложил идею усовершенствования метода Эйлера, который заключается в следующем: сначала, как и метод Эйлера, определяется направление касательной к искомой кривой в точке (Xi,Уi), направление касательной определяется и в точке (X_{i+1},$У_{i+1}$). Затем, в отличие от метода Эйлера угол наклона касательной в точке (X_{i+1},$У_{i+1}$), совместно с углом в точке (Xi,Уi) используется для определения нового направления перехода от точки (Xi,Уi) к точке (X_{i+1},$У_{i+1}$).

Для этого берётся среднее арифметическое значение двух направлений из точки (Xi,Уi) проводится отрезок прямой до пересечения с перпендикуляром, восстановленном в точке X_{i+h}. Погрешность вычисления в методе Эйлера-Коши Dэк, заметно меньше, чем в классическом методе Эйлера.

3.2. Задачи линейного программирования. Симплекс-метод

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

Несколько слов о самом термине линейное программирование. Он требует правильного понимания. В данном случае программирование - это, конечно, не составление программ для ЭВМ. Программирование здесь должно интерпретироваться как планирование, формирование планов, разработка программы действий.

К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования (кроме того, сюда относят: целочисленное, динамическое, нелинейное, параметрическое программирование). Это объясняется следующим:

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: целевую функцию, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать; ограничения в виде системы линейных уравнений или неравенств; требование неотрицательности переменных.

Оптимизационная задача – это математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции. Причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

В общем виде модель записывается следующим образом:

целевая функция: $f(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$;

ограничения:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le = \ge\} b_1,$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le = \ge\} b_2,$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le = \ge\} b_m;$

требование неотрицательности:

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

При этом a_{ij}, b_i, c_j ($i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$) - заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции при соблюдении ограничений и .

Систему ограничений называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения неотрицательности - прямыми.

Вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям, называется ***допустимым решением (планом)*** задачи линейного программирования. План $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при котором функция достигает своего максимального (минимального) значения, называется **оптимальным**.

В классическом математическом анализе задача отыскания экстремальных (т.е. либо максимальных, либо минимальных) значений некоторой функции решается на основе изучения поведения ее производных.

Классические методы поиска экстремумов с использованием производных применимы далеко не всегда. Существует очень много функций, которые не имеют производных как раз в точках максимумов или минимумов. Часто целевая функция не может быть задана ни формулой, ни уравнением, а её значения получают в результате измерений, либо численного счёта. В таких случаях применяют специальные математические методы оптимизации.

Общая постановка задачи линейного программирования и один из подходов к ее решению (идея разрешающих множителей или двойственных оценок) впервые приведена в работе российского ученого Л.В. Канторовича в 1939 г.

Им же совместно с М.К. Гавуриным в 1940 г. предложен еще один метод решения задачи линейного программирования, получивший название метода потенциалов, который разработан применительно к решению транспортной задачи.

Начало бурного развития линейного программирования связано наряду с появлением компьютерной техники и использованием ее для решения экономических задач, также и с разработкой в 1947 г. американским математиком Дж.-Б.Данцигом эффективного метода решения этого класса задач, получившего название симплекс-метода. Этот метод является обобщением метода потенциалов на общую задачу линейного программирования, но разработан независимо от него. Позднее были разработаны модификации симплекс-метода, такие, как модифицированный симплекс-метод, двойственный симплекс-метод и т.п., каждый из которых решал свою частную задачу (например, решение двойственной задачи линейного программирования, уход от зацикливания и т.п.)

Симплекс-метод – это метод решения задачи линейного программирования, в котором осуществляется направленное движение по опорным точкам плана до нахождения оптимального решения. Симплекс-метод еще называется методом улучшения плана.

Сущность симплекс-метода сводится к следующему.

1. Задача линейного программирования приводится к каноническому виду, когда ограничения имеют только равенства. Любое неравенство при этом приводится к равенству путем введения дополнительной неотрицательной переменной.

2. Затем все неизвестные разбиваются на две группы:

– основные (или базисные) переменные;

– не основные (или не базисные) переменные.

3. Базисные переменные выражаются через не базисные.

4. Не базисные переменные могут принимать любые значения в рамках допустимых, поэтому полагают, что .

5.Подставляют значения не базисных переменных в целевую функцию и ограничения и таким образом находят первое опорное решение.

6. Переход к каждому последующему опорному решению происходит при условии, что целевая функция при этом не ухудшается, а желательно, чтобы она улучшилась, и чем быстрее, тем лучше.

7. Пошаговая процедура повторяется до тех пор, пока есть возможность улучшения целевой функции.

При решении задачи линейного программирования симплекс- методом выработаны четкие и однозначные признаки окончания расчетов, а именно:

а) если при решении задачи на максимум все неизвестные в целевой функции, кроме свободного члена, имеют отрицательные знаки, то полагают, что целевую функцию больше увеличить нельзя и оптимальное решение считается найденным;

б) если же решается задача на минимум, то оптимальное значение целевой функции считается найденным и на этом расчеты заканчиваются при условии, что все ее коэффициенты, кроме свободного члена, положительные.

К линейным иногда сводятся простейшие модели стоимости, рассматриваемые как совокупность производимых затрат.

Вопросы для самоконтроля

1. Где используются математические модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений?
2. Что должна включать в себя математическая модель в виде обыкновенных дифференциальных уравнений?
3. Какими методами осуществляется исследование моделей, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений?
4. Запишите математическую модель движения груза массой m, закрепленного на вертикальной стенке с помощью пружины жесткостью C и совершающего колебательное движение вдоль оси x в среде с вязкостью .ν
5. Какой принцип используется при построении этой модели?
6. К какому типу относится эта модель?
7. Метод Эйлера
8. Модификация метода Эйлера
9. Как можно повысить точность решений в рамках метода Эйлера?
10. Что такое линейное программирование?
11. Какие задачи относят к математическим задачам линейного программирования?
12. Назовите класс задач, решаемых при помощи методов линейного программирования
13. Понятие целевой функции.
14. Когда и кем впервые приведена общая постановка задачи линейного программирования?
15. Сущность симплекс-метода.

16. Задача об оптимальном распределении ресурсов
17. Транспортная задач

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.

2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 491 с. ISBN 5-06-003830-0.

4. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов:стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.

5. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. –М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.

6. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.

7. Рау, В. Г. Практический курс математики и общей теории статистики : учебное пособие./ В. Г. Рау. - М. : Высш. шк., 2006. - 126 с. . - ISBN 5-06-005529-9.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.

2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.

3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение

Лекция 4

ЗАДАЧА О СМЕСЯХ (ПЛАНИРОВАНИЕ СОСТАВА ПРОДУКЦИИ)

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Иными словами, получаемые смеси должны иметь в своем составе m различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями n исходных материалов.

На птицеферме употребляются два вида кормов - I и II. В единице массы корма I содержатся единица вещества А, единица вещества В и единица вещества С. В единице массы корма II содержатся четыре единицы вещества А, две единицы вещества В и не содержится вещество С. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее единицы вещества А, не менее четырех единиц вещества В и не менее единицы вещества С. Цена единицы массы корма I составляет 3 рубля, корма II - 2 рубля. Составьте ежедневный рацион кормления птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион. Представим условие задачи в таблице 4.1.

Таблица 4.1 Условие задачи о смесях

Питательные вещества	Содержание веществ в единице массы корма, ед.		Требуемое количество в смеси, ед.
	Корм 1	Корм 2	
А	1	4	1
В	1	2	4
С	1	-	1
Цена единицы массы корма, p	2	4	

Решение. Обозначим: x1 - количество корма I в дневном рационе птицы, x2 - количество корма II в дневном рационе птицы. Математическая модель выглядит следующим образом

$F_{min}=3*x_1+2*x_2$;

$x_1+4*x_2\geq 1$;

$x_1+2*x_2\geq 4$;

$x_1\geq 1$;

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$.

Запишем транспортную задачу на листе Ms Excel.

	A	B	C
1		x1	x2
2	решение		
3	Питательные вещества	ограничения	ресурсы
4	A	=1*B2+4*C2	1
5	B	=1*B2+2*C2	4
6	C	=B2	1
7			
8	Целевая функция		
9	=3*B2+2*C2		

Рис. 4.1. Оформление задачи о смесях на листе Ms Excel

Воспользуемся надстройкой Ms Excel «поиск решения», основанного на Симплекс-методе. Для этого выберем Данные/Поиск решения. Появиться диалоговое окно. Заполним его.

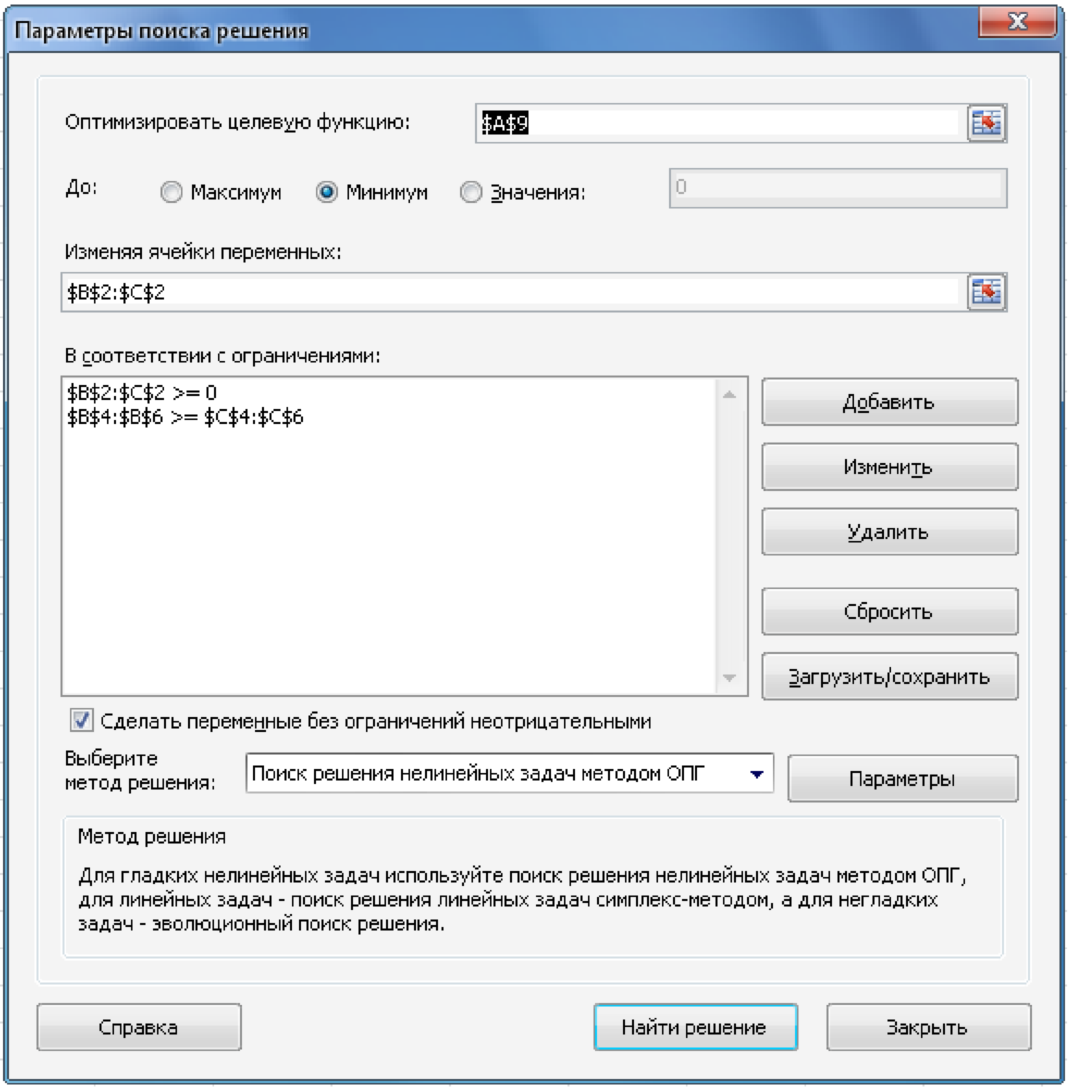

Рис. 4.2. Диалоговое окно «параметры поиска решения»

Выбрав «Найти решение» получим результат.

	A	B	C
1		x1	x2
2	решение	1	1,5
3	Питательные вещества	ограничения	ресурсы
4	A	7	1
5	B	4	4
6	C	1	1
7			
8	Целевая функция		
9	6		

Рис. 4.3. Решение задачи о смесях

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите условие задачи о смесях?
2. Какова цель задачи о смесях?
3. За какие величины отвечают переменные?
4. Математическая модель задачи
5. Как запустить надстройку «Поиск решения»?
6. Какие разделы диалогового окна «Параметры поиска решения» нужно заполнить чтобы решить задачу о смесях?
7. Когда задача о смесях не может быть решена?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.
2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.
3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.
4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.
5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.
2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.
3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение
4. Макаркин А.А. Решение оптимизационных задач с использованием табличного процессора MS Excel. Методические указания для самостоятельной работы студентов инженерных и экономических специальностей. Саратов, СГАУ, 2005. Электронная версия на сервере СГАУ.
5. Мастерова В.П. Основы кормопроизводства. / В.П. Мастерова,, Н.Н. Ананьина - М:. Высшая школа, 2007. - 208 с.

Лекция 5

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Классическая транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления, встречается чаще всего в практических приложениях линейного программирования. Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены симплексным методом, однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальное решение.

В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в сетевой (схематичной) или матричной (табличной) форме. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

Пусть имеется несколько поставщиков однородной продукции (каждый с определенным запасом) и несколько потребителей этой продукции (с известными потребностями у каждого). Задана также сеть коммуникаций (дорог, рек, воздушных линий и т.д.) связывающая каждого поставщика с каждым потребителем. На каждой коммуникации задана тариф перевозки – стоимость перевозки единицы продукции. Если какая – либо коммуникация отсутствует, то считаем, что она есть, но цену перевозки на ней устанавливаем равной бесконечности ($+\infty$). Это соглашение сделает невыгодным перевозку по ней и автоматически исключит данную коммуникацию из плана перевозок.

Таким образом, требуется составить план перевозок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы потребности потребителей были бы удовлетворены за счет вывоза запаса от поставщиков. Цель – минимизация суммарной стоимости всех перевозок.

Транспортные задачи бывают:

1) открытые $m \neq n$ (суммарный запас продукции, имеющейся у поставщиков, не совпадает с суммарной потребностью в продукции у потребителей.)

2) закрытые $m = n$ (суммарный запас продукции, имеющейся у поставщиков, совпадает с суммарной потребностью в продукции у потребителей.)

Метод потенциалов «работает» только для закрытых ТЗ, причем, закрытая ТЗ всегда разрешима.

Открытую ТЗ сводят к закрытой ТЗ путем прибавления к суммарному запасу продукции или суммарной потребности продукции недостающих единиц до равенства суммарного запаса продукции и суммарной потребности продукции (фиктивного поставщика или фиктивного потребителя, причем тариф перевозки продукции будет равен нулю).

Закрытая транспортная задача формулируется как задача линейного программирования (ЗЛП) на оптимизацию.

Примером такой модели является классическая модель об оптимальном перераспределении ресурсов и стоимости перевозок (транспортная задача).

Имеется k пунктов производства ($i = 1,\dots, k$) и m пунктов потребления ($j = 1,\dots, m$) некоторого продукта. Количество продукта, произведенного в каждом из k пунктов производства, равно a_i; количество продукта, необходимого в каждом из m пунктов потребления, равно b_j. Предполагается равенство общего производства и потребления: $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

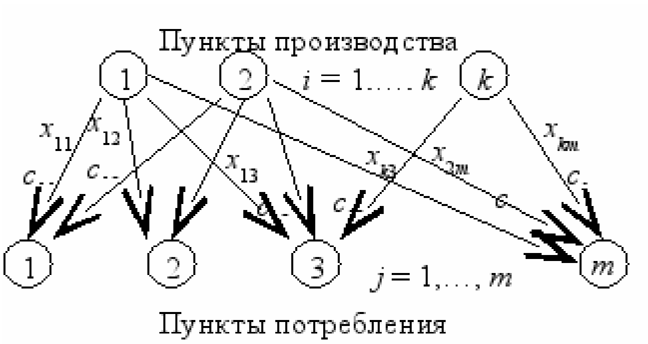

Рис.5.1. Транспортная задача

Количество продукта, перевозимого из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, равно x_{ij}; стоимость перевозки единицы этого продукта – c_{ij}.

Суммарная стоимость перевозок C_Σ задается линейной моделью:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

при следующих ограничениях $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0.$

В настоящее время разработаны достаточно эффективные алгоритмы решения задач линейного программирования симплекс-методом с помощью компьютерной техники. Они предусматривают, как правило, особые условия ввода исходных данных, формирования исходной матрицы и вывода результатов решения, которые изложены в материалах, сопровождающих соответствующие пакеты прикладных программ.

Решение транспортной задачи рассмотрим на конкретном примере.

На трёх пекарнях изготавливают хлебобулочные изделия в количествах 200, 300, 500 килограмм. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина в количествах 100, 150, 150 и 600 килограмм. Дана матрица тарифов перевозки й кг груза из i-ой пекарни в j-ый магазин: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Найти план перевозок таким образом, чтобы минимизировать стоимость перевозки.

Решение.

Данная транспортная задача закрытая, так как сумма хлебопекарной продукции, производимая пекарнями равна сумме хлебопекарной продукции, продаваемой магазинами (1000кг = 1000кг).

Пусть x_{11} – количество груза, перевозимого из пекарни 1 в магазин 1;

x_{12} – количество груза, перевозимого из пекарни 1 в магазин 2;

x_{13} – количество груза, перевозимого из пекарни 1 в магазин 3;

x_{14} – количество груза, перевозимого из пекарни 1 в магазин 4;

x_{21} – количество груза, перевозимого из пекарни 2 в магазин 1;

…………………………………………………………………………

x_{34} – количество груза, перевозимого из пекарни 3 в магазин 4.

Всего 12 переменных.

Составим математическую модель.

Для этого составим уравнение целевой функции и ограничения.

$F_{min}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{34})=2*x_{11}+3*x_{12}+4*x_{13}+7*x_{14}+1*x_{21}+\ldots+2*x_{34},$

В каждый магазин нужно привезти ровно столько продукции, сколько заказано:

$X_{11}+x_{21}+x_31=100;$

$X_{12}+x_{22}+x_{32}=150;$

$X_{13}+x_{23}+x_33=150;$

$X_{14}+x_{24}+x_{34}=600.$

Каждая пекарня должна произвести столько продукции, сколько возможно:

$X_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=200;$

$X_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=300;$

$X_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=500.$

Данные ограничения отличают транспортную задачу от задачи оптимального использования ресурсов. Если бы мы поставили в ограничения знак «≤», то условию минимума стоимости перевозок удовлетворил бы нулевой план: ничего не возим – транспортные расходы равны нулю.

Естественные ограничения (ограничения переменных). Из любой пекарни в любой магазин нельзя перевезти меньше, чем 0 кг груза. $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x21, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$.

Задачу можно решить методом северо-западного угла:

Таблица 5.1. Условие транспортной задачи

	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	План
Пекарня 1					200
Пекарня 2					300
Пекарня 3					500
План	100	150	150	600	

Начиная с левого верхнего угла, выполняя ограничения, заполняем таблицу 5.1.

Таблица 5.2. Одно из решений транспортной задачи

	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	План
Пекарня 1	100	100	0	0	200
Пекарня 2	0	50	150	100	300
Пекарня 3	0	0	0	500	500
План	100	150	150	600	

Тогда значение целевой функции равно

F=100*2+100*3+0*4+0*7+0*1+50*2+150*5+100*6+0*3+0*4+0*4+500*2=2410. Однако это решение не является оптимальным.

Запишем транспортную задачу на листе Ms Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	План	Ограничения
2	Пекарня 1					200	=B2+C2+D2+E2
3	Пекарня 2					300	=B3+C3+D3+E3
4	Пекарня 3					500	=B4+C4+D4+E4
5	План	100	150	150	600		
6	Ограничения	=B2+B3+B4	=C2+C3+C4	=D2+D3+D4	=E2+E3+E4		
7							
8		Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	План	
9	Пекарня 1	2	3	4	7	200	
10	Пекарня 2	1	2	5	6	300	
11	Пекарня 3	3	4	4	2	500	
12	План	100	150	150	600		
13							
14	Целевая функция:						
15	=СУММПРОИЗВ(B2:E4;B9:E11)						

Рис. 5.2. Оформление транспортной задачи на листе Ms Excel.

Воспользуемся надстройкой Ms Excel «поиск решения», основанного на Симплекс-методе. Для этого выберем Данные/Поиск решения. Появиться диалоговое окно. Заполним его.

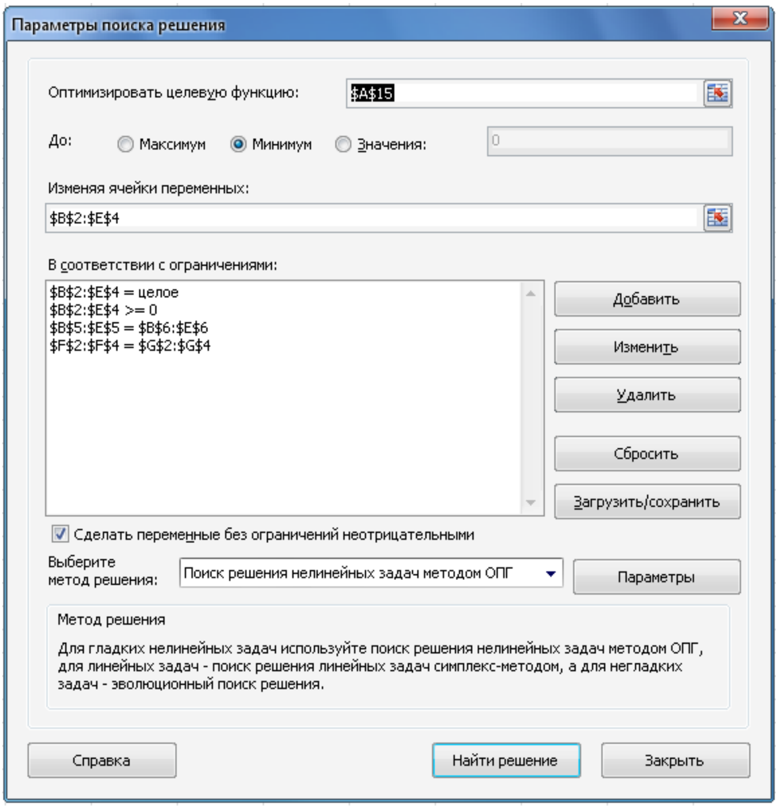

Рис. 5.3. Диалоговое окно «параметры поиска решения»

Выбрав «Найти решение» получим результат.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	План	Ограничения
2	Пекарня 1	0	25	150	25	200	200
3	Пекарня 2	100	125	0	75	300	300
4	Пекарня 3	0	0	0	500	500	500
5	План	100	150	150	600		
6	Ограничени	100	150	150	600		
7							
8		Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	План	
9	Пекарня 1	2	3	4	7	200	
10	Пекарня 2	1	2	5	6	300	
11	Пекарня 3	3	4	4	2	500	
12	План	100	150	150	600		
13							
14	Целевая функция:						
15	2650,00						
16							

Рис.5.4. Решение транспортной задачи

Задача об оптимальном распределении ресурсов

Постановка задачи: Молочный завод выпускает расфасованное молоко, кефир и сметану. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно: 1,01, 1,01 и 9,45 тонн молока. Затраты рабочего времени фасовочного оборудования на 1 т молока и кефира: 0,18 и 0,19 час. 1 т сметаны другие специальные автоматы фасуют за 3,25 час. Всего завод может использовать не более 136 т молока. Фасовочное оборудование по молоку и кефиру может работать не более 21,4 часов в сутки; автоматы по расфасовке сметаны – не более 16,25 часов. Прибыль от реализации 1тонны молока, кефира и сметаны соответственно равна: 3, 2,2 и 13,6 тыс. рублей. Завод должен ежедневно производить не менее 100 тонн молока. По кефиру и сметане нет ограничений.

Сколько нужно произвести молока, кефира и сметаны, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение.

Пусть завод производит x_1 тонн молока, x_2 тонн кефира и x_3 тонн сметаны. Для изготовления этой продукции потребуется:

$1,01*x_1+1,01*x_2+9,45*x_3$ тонн молока.

Так как завод может использовать не более 136 тонн молока, то должно выполниться неравенство $1,01*x_1+1,01*x_2+9,45*x_3 \le 136$.

Ограничения на длительность работы фасовочного оборудования:

$0,18*x_1+0,19*x_2+0*x_3 \le 21,4$;

$3,25*x_3 \le 16,25$.

Ежедневно должно вырабатываться не менее 100 тонн молока, а количество кефира и сметаны не может быть отрицательным. Поэтому получаем ограничения:

$x_1 \ge 100$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Прибыль от реализации x_1 тонны молока, x_2 тонны кефира, x_3 тонны сметаны составит $3*x_1+2,2*x_2+13,6*x_3$ тысяч рублей. Это и будет целевая функция, которую надо сделать максимальной при заданных ограничений на переменные x_1, x_2, x_3.

Запишем задачу об оптимальном распределении ресурсов на листе Ms Excel.

Ячейки B2:D2 будут содержать найденные значения переменных.

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	решение			
3		Ограничения	Ресурсы	
4	сырьё	=B2*1,01+C2*1,01+D2*9,45	136	
5	фасовка 1	=0,18*B2+0,19*C2	21,4	
6	фасовка 2	=3,25*D2	16,25	
7	молоко	=B2*1	100	
8				
9	цел.функция	=B2*3+C2*2,2+D2*13,6		

Рис. 5.5. Оформление листа Excel

Воспользуемся надстройкой Ms Excel «поиск решения», основанного на Симплекс-методе. Для этого выберем Данные/Поиск решения. Появиться диалоговое окно. Заполним его.

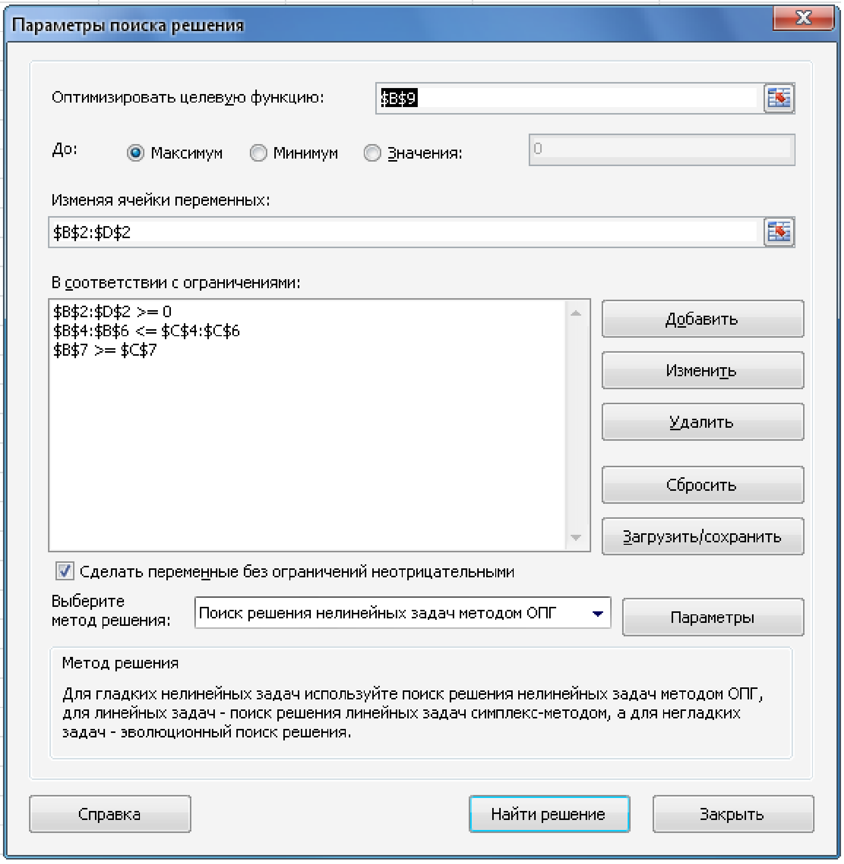

Рис. 5.6. Диалоговое окно «параметры поиска решения»

Выбрав «Найти решение» получим результат.

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	решение	118,88889	0,00000	1,68489
3		Ограничения	Ресурсы	
4	сырьё	136,00000	136,00000	
5	фасовка 1	21,40000	21,40000	
6	фасовка 2	5,47590	16,25000	
7	молоко	118,88889	100,00000	
8				
9	цел.функция	379,58119		

Рис. 5.7. Решение задачи об оптимальном распределении ресурсов

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите условие транспортной задачи?
2. Какими бывают транспортные задачи?
3. За какие величины отвечают переменные, от чего зависит их количество?
4. Как решить открытую транспортную задачу?
5. Смысл метода «северо-западного угла»?
6. Является ли решение транспортной задачи методом «северо-западного угла» оптимальным?
7. Математическая модель задачи
8. Как запустить надстройку «Поиск решения»?
9. Какие разделы диалогового окна «Параметры поиска решения» нужно заполнить чтобы решить транспортной задачу?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.
2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.
3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.
4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.
5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.
2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.
3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском

хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение

4. Макаркин А.А. Решение оптимизационных задач с использованием табличного процессора MS Excel. Методические указания для самостоятельной работы студентов инженерных и экономических специальностей. Саратов, СГАУ, 2005. Электронная версия на сервере СГАУ.

Лекция 6

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Нелинейные детерминированные модели обладают бо́льшей точностью и гибкостью. Они могут быть заданы в виде нелинейной функции одной или нескольких переменных или в виде дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных). Наиболее распространенными среди нелинейных моделей при описании ДУ и ДЛА являются:

- полиномиальные функции;
- позиномные функции;
- тригонометрические функции;
- экспоненциальные функции;
- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- дифференциальные уравнения в частных производных др.

Нелинейные модели могут быть записаны в виде функционала, зависящего от управляющих переменных x и некоторых функций $f(x)$ всех или части этих переменных:

$W = W(x,f(x))$. При этом функции $f(x)$ могут представлять собой функционалы, зависящие от промежуточных функций $f^*(x)$ и т.д. На класс функций $f(x)$, $f^*(x)$ не накладывается никаких ограничений, однако предполагается возможность однозначного перехода от вектора управляющих параметров x к общей характеристике модели W.

Область определения модели может быть ограничена с помощью равенств или неравенств:

$x_i = c_i$, $i = 1,\ldots, m$;

$f(x) = c_j$, $j = 1,\ldots, l$;

$x_{i\,\min} \le x_i \le x_{i\,\max}$, $i = 1,\ldots, k$;

$f_j(x \le)\ c_j$, $j = 1,\ldots, n$.

По существу под определение нелинейной модели подпадает любое математическое описание ДУ и ДЛА, не укладывающееся в рамки более простых моделей.

Задачами нелинейного программирования называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции F(x), функциями ограничений и размерностью вектора x (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Классификация задач нелинейного программирования

Вид F(x)	Вид функции ограничений	Число переменных	Название задачи
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая оптимизация

Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует.

В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции F(x).

Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Многие задачи нелинейного программирования могут быть приближены к задачам линейного программирования, и найдено близкое к оптимальному решению. Встречаются задачи квадратичного программирования, когда функция есть F(x) полином 2-ой степени относительно переменных, а ограничения линейны. В ряде случаев может быть применён метод штрафных функций, сводящей задачу поиска экстремума при наличии ограничений к аналогичной задаче при отсутствии ограничений, которая обычно решается проще.

Но в целом задачи нелинейного программирования относятся к трудным вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным методам оптимизации. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

Общая формулировка нелинейных задач

Найти переменные x1 , x2 , …, xn , удовлетворяющие системе уравнений Ψ (x1 , x2 , …, xn) = bi , i = 1, 2, …, m и обращающие в максимум (минимум) целевую функцию Z = f (x1 , x2 , …, xn).

6.1. Полиномиальные модели

Полиномиальные модели основаны на идее приближенного представления модели конечным числом членов ряда Тейлора:

$$W(x) = W(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial W(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 W(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) + \ldots$$

Наиболее простой из моделей этого класса является квадратичная модель:

$$W(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j \ge i}}^{k} a_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{k} b_{ij} x_i \ge b_j,\ j = 1,\ldots,q_1; \qquad \sum_{i=1}^{k} c_{ij} x_i = c_j,\ j = 1,\ldots,q_2; \qquad \sum_{i=1}^{k} d_{ij} x_i \le d_j,\ j = 1,\ldots,q_3.$$

Квадратичные модели широко используются для представления экспериментальных данных при идентификации ДЛА и их элементов.

Квадратичные модели используются для аппроксимации отдельных участков поверхности отклика, когда линейное приближение оказывается недостаточным, например, в окрестности экстремума, и лежит в основе нелинейных методов оптимизации. Если квадратичная модель также оказывается недостаточно точной, то используются полиномиальные модели более высоких порядков.

Исследование полиномиальных моделей частично можно осуществить аналитическими методами. Например, аналитически можно определить степень влияния отдельных переменных на характеристики модели.

6.2. Позиномные модели

Позиномные модели основаны на представлении модели в виде суммы произведений степенных функций:

$$W(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_1^{\alpha_{1j}} x_2^{\alpha_{2j}} \dots x_k^{\alpha_{kj}} = \sum_{j=1}^{m} c_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_{ij}},$$

где xi – управляющие переменные, αij – произвольные положительные числа, cj ≥ 0 – обеспечивает выпуклость модели.

Величины αij, cj рассчитываются на основе статистических данных, отражающих опыт производства соответствующих узлов и систем.

Позиномные модели можно использовать для описания стоимости сложных систем.

К позиномным моделям сводится задача выбора геометрических характеристик ряда технических устройств, в том числе элементов ДЛА, например, электромагнитов, силовых ферм и т.д.

Исследование позиномных моделей сложнее, чем моделей полиномиального типа, и осуществляется в основном численными методами. Однако, при m = 1 и x1 > 0, x2 > 0,…, xk > 0 в формуле (2.4) существует способ приведения позинома к линейному виду.

В этом частном случае модель (2.4) будет выглядеть в следующем виде:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_k) = c \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}.$$

Прологарифмируем обе части этого равенства, получим

$$\ln W = \ln c + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \dots + \alpha_k \ln x_k.$$

Введем обозначения логарифмов переменных W, x1, x2,…,xk и константы c:

$$Y = \ln W; \quad C = \ln c; \quad X_i = \ln x_i; \quad i = 1, \dots, k.$$

Выражение (2.5) примет линейный вид

Y(X1, X2,…, Xk) = C + α1x1 + α2x2 + … +αkxk.

Для поиска оптимальных решений на основе позиномных моделей разработан специальный аппарат – так называемое геометрическое программирование.

6.3. Методы решения задач нелинейного программирования

Особенность задач нелинейного программирования заключается в том, что функции иy (или) g_i не линейны. Разработано множество численных методов решения задач нелинейного программирования.

Универсального метода, с помощью которого можно было бы решить любую задачу оптимизации, не существует. Поэтому для решения конкретной задачи применяют один или несколько численных методов.

Вопросы для самоконтроля

1. С какими значениями величин оперируют детерминированные модели?
2. Как выглядит линейная детерминированная модель в общем виде?
3. Что представляет собой поверхность отклика для линейной модели?
4. Приведите модель стоимости перевозок.
5. Где используются линейные детерминированные модели?
6. Какие виды нелинейных математических моделей Вы знаете?
7. Приведите общий вид квадратичного полинома.
8. Приведите формулу позинома.
9. Как привести позином к линейному виду (при каком условии)?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.
2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.
3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.
4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.
2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.
3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение

Лекция 7

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Оптимизация производственной структуры сельскохозяйственных предприятий в большинстве случаев требует стохастического подхода, т.к. сельскохозяйственное производство в значительной степени подвержено воздействию случайных, нерегулируемых человеком факторов природного происхождения (количество осадков и их распределение по периодам, количество тепла и т.д.).

В моделях, описывающих структуру производства сельскохозяйственной продукции, в качестве детерминированных величин принимаются объемы производственных ресурсов хозяйства; коэффициенты при переменных в ограничениях по структуре посевных площадей, по воспроизводству стада, потребности животных в кормах и их продуктивность, а также другие технико-экономические коэффициенты, не зависящие от колебаний урожайности.

Случайными величинами в модели являются урожайность сельскохозяйственных культур и непосредственно с ней связанные коэффициенты.

Оценка детерминированных и стохастических величин производится при помощи статистических методов, наиболее точным из которых является автокорреляционный анализ, определяющий корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда.

Таким образом, при разработке оптимизационной модели, описывающей структуру производства сельскохозяйственной продукции, используются детерминированные и стохастические величины. В результате проведенной оценки этих величин может быть построена модель с усредненными данными или модель на основе тенденций развития производства или стохастическая с множеством вариантов.

Точные величины и зависимости, используемые в детерминированных моделях, представляют собой лишь некоторые средние значения (математические ожидания) реальных случайных величин (зависимостей). Так, физические константы, характеризующие материалы и рабочие тела (предел прочности материала σ, теплопроводность λ, плотность ρ и т.д.) меняются в зависимости от партии материала и условий окружающей среды. Всегда имеется определенный разброс размеров деталей l, расходов топлива в системах подачи. Все это приводит к тому, что и результирующие функции, характеризующие процесс, также носят случайный характер. Результаты, полученные с помощью детерминированной модели, представляют собой математические ожидания этих характеристик. При этом конкретные данные для конкретной системы могут существенно отличаться от этих математических ожиданий. Например, ресурс конкретного двигателя может существенно отличаться от среднего ресурса двигателей данного типа. Для учета таких отличий вводятся всевозможные «запасы прочности», призванные гарантировать работоспособность реальных объектов при неблагоприятном стечении обстоятельств.

Значительно более полные и объективные результаты можно получить при переходе от детерминированных к стохастическим моделям, то есть при переходе от точно заданных величин к соответствующим случайным величинам.

При этом константы (σ, λ, ρ, l,…) заменяются случайными величинами $\xi\sigma$, $\xi\lambda$, $\xi\rho$, ξl,… , подчиненными определенным законам распределения.

Однократное исследование стохастической модели приведет к некоторой случайной величине функции отклика ξW, представляющей собой, вообще говоря, ограниченную ценность. Для получения значимых результатов необходимо провести многократное исследование модели и получить распределение результирующей характеристики в интересующем исследователя диапазоне. Поверхность отклика в этом случае представляет собой некий размытый слой переменной плотности.

Такой метод исследования стохастической модели получил название метода статистических испытаний или метода Монте-Карло.

Трудоемкость исследования стохастических моделей существенно выше, чем моделей детерминированных:

Значительно возрастает объем исходной информации: замена констант случайными величинами, введение законов распределения этих величин усложняют модель.

Для получения распределения результирующей функции необходимо многократное исследование модели.

С другой стороны, полученное при статистическом моделировании распределение характеристик системы дает в руки исследователя чрезвычайно ценную информацию: Такое распределение позволяет оценить не только среднее значение изучаемой величины, но и разброс этих значений, вероятности появления тех или иных значений при конкретном испытании (например, вероятность выхода из строя ДЛА через тот или иной промежуток времени) и их зависимость от различных факторов.

Очень часто используют нормальный или гауссовский закон распределения, для которого плотность вероятности f(x) и функция распределения P(x) задаются следующими соотношениями:

Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (x, x+dx):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};$$

Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (-∞, x):

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

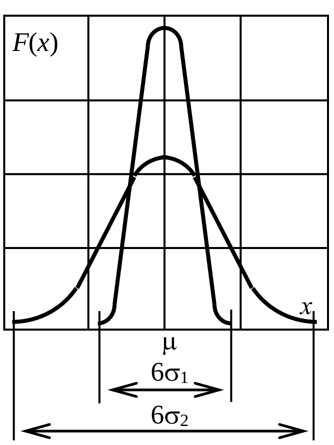

Рис. 7.1. Плотность вероятности

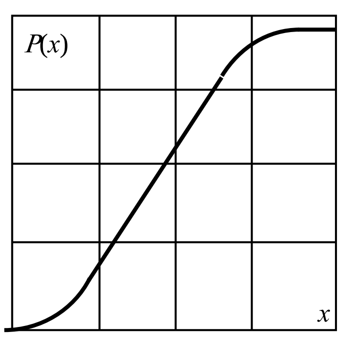

Рис. 7.2. Функция распределения

Для случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону, $\mu = M(\xi)$, $\sigma = \sigma(\xi)$ (Рис. 7.1, 7.2). Случайная величина распределена в интервале $\mu \pm 3\sigma$. По нормальному закону распределены обычно характеристики материалов, размеры деталей, ресурсы элементов ДЛА.

Наряду с нормальным используются и другие законы распределения случайных величин. Например, равномерное распределение – задает равновероятностные на отрезке [a, b] случайные величины. (Рис. 7.3, 7.4). Плотность вероятности и функция распределения при равномерном распределении определяются по формулам:

$$f(x)=\begin{cases}0, -\infty < x < a;\\ \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b;\\ 0, \quad b < x < \infty.\end{cases} \qquad P(x)=\begin{cases}0, -\infty < x < a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b;\\ 0, \quad b < x < \infty.\end{cases}$$

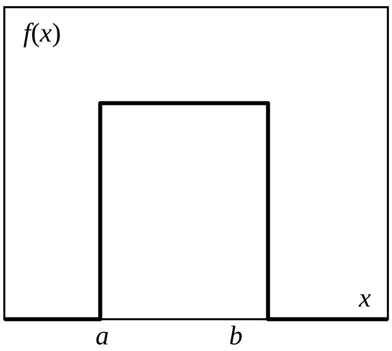

Рис. 7.3. Плотность вероятности

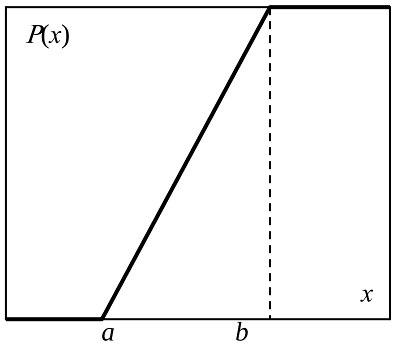

Рис. 7.4. Функция распределения

Выбор закона распределения для конкретной случайной величины, входящей в стохастическую модель, может быть обоснован экспериментально или теоретически.

Конкретные параметры распределения (μ, σ,…) всегда определяются на основе экспериментальных данных. Оценка параметров нормального распределения на основе выборки {xi} из n случайных значений величины x дается соотношениями:

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \, ; \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n-1}} \, .$$

При использовании метода статистических испытаний характеристики изучаемой системы оцениваются на основе некоторой ограниченной выборки реализаций. Поэтому важно определить достоверность этой оценки.

Вероятность p пребывания системы в некотором состоянии (например, вероятность того, что время работы элемента ДЛА до первого отказа составит не менее t часов), определяется частотой этого события при моделировании:

$$p \approx \frac{n_+}{n} \, ,$$

где n+ – число реализаций, при которых наблюдалось изучаемое состояние системы (время работы ДЛА до первого отказа превысило t); n – общее число реализаций.

Эта оценка является приближенной, так как определяется на основе ограниченной выборки. Отношение $\frac{n_+}{n}$ называется выборочной статистикой.

Ошибка моделирования определяется отклонением выборочной статистики от вероятности

$$\delta = \left|\frac{n_+}{n} - p\right|.$$

Можно показать, что эта ошибка удовлетворяет неравенству

$$\delta \le \sqrt{\frac{p(1-p)}{\alpha n}},$$

Здесь р – вероятность рассматриваемого состояния; α – вероятность невыполнения оценки (уровень риска). Доверительная вероятность выполнения этой оценки равна $1-\alpha$.

Из последнего неравенства следует, что погрешность стохастического моделирования обратно пропорциональна $\sqrt{n}$. То есть увеличение точности при стохастическом моделировании требует значительного увеличения числа реализаций. Для уменьшения погрешности в 10 раз необходимо увеличить число реализаций (а значит и время счета) в 100 раз. Поэтому метод статистических испытаний не может дать решения с очень высокой степенью точности. Считается, что допустимая ошибка может составлять 1-5% максимальной величины, полученной при моделировании.

Величина ошибки зависит также от вероятности р оцениваемого состояния и допустимого уровня риска α. Обычно α задают на одном из фиксированных уровней (α = 0,005; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1 …).

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляют собой величины, входящие в стохастическую модель?
2. Что представляет собой поверхность отклика моделей, исследуемых методом статистических испытаний?
3. В чем заключается метод Монте-Карло?
4. Какие трудности возникают при исследовании стохастических моделей?
5. Какую информацию дает в руки исследователя полученное при статистическом исследовании распределение характеристик системы?
6. Какие законы распределения случайной величины Вы знаете?
7. Как выглядит плотность распределения для нормального закона?
8. Как выглядит плотность распределения для закона равной вероятности?
9. Как определяются оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины?
10. Что такое выборочная статистика?
11. Почему она называется «выборочная»?
12. От чего зависит погрешность стохастического моделирования?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.
2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ.

вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.

3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.

4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.

5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.

2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.

3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение

4. Макаркин А.А. Решение экономических задач в Excel методами математической статистики. Учебно-методическое пособие для студентов и аспирантов специальностей экономического профиля. / С грифом УМО Москва. / Саратов, СГАУ, 2008. Электронная версия на сервере СГАУ.

Лекция 8

ЭМПИРИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

8.1. Идентификация эмпирических математических моделей

Переход к эмпирическим моделям предполагает заведомый отказ от аналитических методов исследования. Поэтому эмпирические модели более разнообразны и включают в себя различные по форме математические зависимости.

При разработке эмпирической математической модели предполагается использование экспериментальных данных, полученных при испытаниях объектов. Результаты таких испытаний всегда представляют собой наборы величин, характеризующих работу объекта или системы при различных сочетаниях управляющих параметров.

Наиболее эффективным средством представления результатов экспериментов в системах математического моделирования являются эмпирические модели.

При построении эмпирической модели обычно предполагается, что физическая теория работы объекта отсутствует или по тем или иным причинам не может быть использована.

Объект идентификации представляет собой так называемый «черный ящик» с некоторым числом регулируемых (или, по крайней мере, измеряемых) входов x и одним или несколькими наблюдаемыми (измеряемыми) выходами (Рис. 8.1).

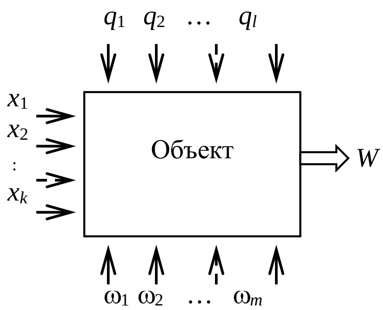

Рис. 8.1. Эмпирическая модель

Здесь x_i – управляющие переменные; ω_i – неопределенности (шумы); q_i – ограничения; W – характеристическая функция.

Задачей идентификации является построение модели объекта по результатам наблюдений его реакции на возмущения внешней среды.

При этом необходимо учитывать ошибки, возникающие при измерении характеристик объекта.

Требуется построить зависимость (модель) $W = f(x)$, которая описывает характеристики изучаемой системы.

Это уравнение называется уравнением регрессии и описывает поверхность (гиперповерхность) отклика, характеризующую эмпирическую модель.

Обычно предполагается, что имеющиеся экспериментальные данные дают достаточно информации для воссоздания математического описания объекта.

На рис. 8.2 показано решение задачи идентификации для некоторого набора данных, полученное с помощью линейной регрессионной зависимости: $W = a + bx$.

Идентификацию модели начинают с выбора формы модели, т.е. вида функции f(x). При этом на практике может встретиться два случая:

1) Форма математической модели известна заранее, а задача идентификации сводится к определению коэффициентов этой модели. Так, описание ряда затухающих или развивающихся процессов дается зависимостями экспоненциального типа (Рис. 8.3). Задача исследования является определение .β, αкоэффициентов α, β.

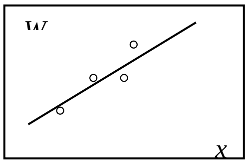

Рис. 8.2.
Линейная
зависимость

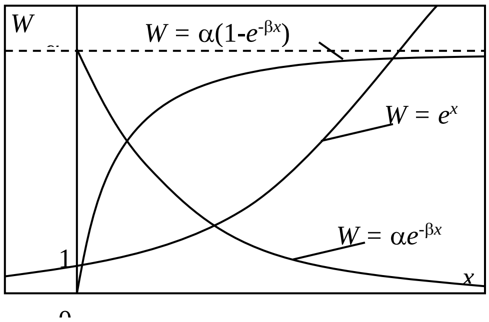

Рис. 8.3.
Экспоненциальная
зависимость

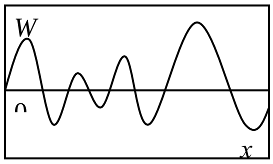

Рис. 8.4.
Колебательна
я зависимость

2) Форма математической модели заранее неизвестна. В этом случае для идентификации модели используются отрезки бесконечных рядов, а задача заключается в определение числа членов ряда и коэффициентов при этих членах. Модель может быть представлена в виде

$$W = \sum_{i=1}^{k} \beta_{0i} f_0(x_i) + \sum_{i=1}^{k} \beta_{1i} f_1(x_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{k} \beta_{li} f_l(x_i),$$

где $f_q(x_i)$ – некоторые заданные функции; β_{qi} – коэффициенты регрессии; q = 0, 1,…, l. В одномерном случае (k = 1) уравнение принимает вид

$$W = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x) + \ldots + \beta_l f(x).$$

Конкретный вид модели зависит от выбора функций $f_q(x)$, по которым производится разложение W. Например, при описании колебательных процессов удобно использовать ряд Фурье $W = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ (Рис. 8.4).

Часто в качестве функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_l(x)$ выступают степенные функции x^0, x^1, x^2,…, x^l. Если ограничиться первыми членами разложения, то уравнения сведутся к линейным, квадратичным и другим полиномиальным моделям. Однако пока остается не ясным, сколько членов ряда обеспечивает наилучшее описание изучаемого процесса.

Обычно берут количество экспериментальных точек значительно больше, чем количество коэффициентов регрессии. В этом случае нельзя построить поверхность отклика, проходящую через все экспериментальные точки. Да этого и не требуется. При этом, однако, можно построить приближенную модель, обеспечивающую в некотором смысле наилучшее совпадение с экспериментальными данными.

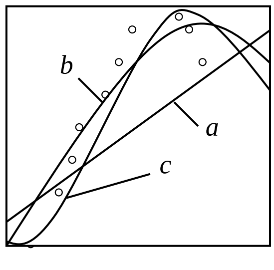

Рис. 8.5. Метод
наименьших
квадратов

Например, прямая a построена по 10-ти экспериментальным точкам методом наименьших квадратов (Рис. 8.5); кривая b – квадратичная модель; c – полиномиальная модель 3-го порядка достаточно хорошо соответствует исходному экспериментальному материалу, хотя проходит не через все экспериментальные точки.

Таким образом, для любой экспериментальной выборки могут быть предложены различные модели идентификации. Конкретная форма модели зависит от выбора функций $f_q(x)$ и количества членов ряда.

Сама постановка задачи идентификации включает в себя элемент неопределенности, возможность множественности решений. Важно выбрать лучшее или, по крайней мере, достаточно хорошее из этих решений.

Для оценки точности модели естественно использовать величины отклонений, полученных в эксперименте величин W_j и их оценок Wm_j, предсказанных моделью

$\varepsilon_j = W_j - Wm_j$.

Исключительное распространение получил метод наименьших квадратов отклонений реальных значений оцениваемой величины от значений, предсказанных моделью.

Специальные методы планирования эксперимента позволяют существенно повысить объем получаемой информации, улучшают характеристики эмпирических моделей, а также упрощают процедуру обработки экспериментальных данных. Однако на практике очень часто приходится иметь дело с неорганизованным (пассивным) экспериментом. Связано это, по крайней мере, с тремя причинами:

1) Исследователь может только наблюдать входы системы, но не может их регулировать, что полностью исключает возможность планирования эксперимента (типичная ситуация: астроном – галактика).

2) Неизвестны диапазоны возможного изменения переменных (входов), что затрудняет планирование эксперимента и исключает возможность использования ряда эффективных методов планирования.

Приходится строить модели идентификации на основе уже полученных ранее беспорядочных данных.

8.2. Статистические характеристики рядов распределения

8.2.1. Показатели центра распределения

Средней в статистике называется показатель, характеризующий типичный размер признака в совокупности.

Средняя арифметическая вычисляется по формулам:

простая $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$; взвешенная $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i}$,

где $\bar{x}$ - среднее значение признака; x_i - варианты; n_i - частоты; n - численность совокупности.

Характеристиками вариационных рядов наряду со степенными средними являются мода и медиана.

Мода - величина признака (варианта), наиболее часто повторяющаяся в изучаемой совокупности. В дискретных рядах распределения модой будет варианта с наибольшей частотой.

В интервальном ряду мода определябется по формуле:

$$M_O = x_{MO} + h_{MO} \cdot \frac{n_{MO} - n_{MO-1}}{\left(n_{MO} - n_{MO-1}\right) + \left(n_{MO} - n_{MO+1}\right)},$$

где x_{MO}-нижняя граница интервала, содержащего моду; h_{MO} - величина модального интервала; n_{MO} - частота модального интервала; n_{MO-1} - частота интервала, предшествующего модальному; n_{MO+1} - частота послемодального интервала.

Медианой в статистике называется варианта, расположенная в середине вариационного ряда. Если ряд дискретный имеет нечётное число, то медианой будет варианта, расположенная в середине упорядоченного ряда и её порядковый номер $g = \frac{n}{2} + 0.5$. Если ряд состоит из чётного числа членов, то медианой будет средняя арифметическая из двух вариант в середине ряда с порядковыми номерами: $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$.

В интервальном ряду медиана рассчитывается по формуле:

$$M_e = x_{Me} + h_{Me} \cdot \frac{\frac{\sum n_i}{2} - S_{Me-1}}{n_{Me}}$$

где x_{Me} - нижняя граница медианного интервала; h_{Me} - величина медианного интервала; S_{Me-1} - сумма накопленных частот, предшествующих медианному интервалу; n_{Me} -частота медианного интервала.

8.2.2. Показатели колеблемости признака

Для измерения колеблемости признака применяются абсолютные и относительные показатели вариации.

Размах вариации – это разность между максимальным и минимальным значениями изучаемого признака.

R = xmax-xmin

Среднее линейное отклонение - средняя арифметическая из модулей абсолютных отклонений вариантов от их среднего значения.

$$\bar{d} = \frac{\sum \left| \, (x_i - \bar{x}) \, \right| \cdot n_i}{\sum n_i}$$

Дисперсия - это средний квадрат отклонений вариантов от их средней арифметической.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$$

Среднее квадратическое отклонение представляет собой корень квадратный из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}}$$

Коэффициент осцилляции – отношение размаха вариации к средней арифметической:

$$K_R = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100 \; .$$

Относительное линейное отклонение – отношение среднего линейного отклонения к средней:

$$K_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100 \; .$$

Коэффициент вариации – отношение среднего квадратического отклонения к средней:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100.$$

8.2.3. Статистические оценки параметров распределения

Изучаемую совокупность можно считать выборкой из генеральной совокупности. По данным выборки производится оценка параметров генеральной совокупности.

Статистической оценкой называется специальная функция, вычисляемая на основании выборочных данных для приближенной замены неизвестного параметра распределения или самого распределения. Различают оценки смещённые и несмещённые, точечные и интервальные.

Возможное расхождение между выборочными и генеральными характеристиками составляет ошибку выборки.

Стандартная ошибка выборочной средней определяется по формуле:

$$\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Ошибка среднего квадратического отклонения

$$\mu_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \cdot n}}$$

Ошибка коэффициента вариации

$$\mu_V = \frac{V}{\sqrt{2 \cdot n}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{V}{100}\right)^2}$$

Точечной, несмещённой и состоятельной оценкой генеральной средней является выборочная средняя $\bar{x}_{\tilde{A}} \approx \tilde{x}_B$

Для определения интервальной оценки необходимо найти доверительный интервал $\tilde{x}_B - \Delta \le \bar{x}_{\tilde{A}} \le \tilde{x}_B + \Delta$, $\Delta = t_\alpha \cdot \mu$, где Δ - предельная ошибка выборочной средней;

t_α - коэффициент доверия, который определяют по таблице распределения Стьюдента по заданным n и α при малой выборке при n <= 30.

Достоверность любого параметра оценивается по критерию достоверности t, определяемого как отношение оцениваемого параметра к ошибке. Если tфакт > tкр, определяемого по таблице распределения Стьюдента, то данный параметр достоверен.

Достоверность выборочной средней:

$$t = \frac{\tilde{x}_B}{\mu}$$

Достоверность среднего квадратического отклонения и коэффициент вариации:

$$t_\sigma = \frac{\sigma}{\mu_\sigma} \quad \text{и} \quad t_V = \frac{V}{\mu_v}$$

Определяется по формуле:

$$P_{\bar{X}} = \frac{\mu_X}{\bar{x}} \cdot 100$$

Если данная величина меньше 5%, то полученные средние можно использовать в последующих расчётах характеристик изучаемой совокупности.

8.2.4. Корреляционно – регрессионный анализ

Выбор типа аппроксимирующей функции

В экономических исследования редко приходится иметь дело с точными и определенными функциональными связями, когда каждому значению одной величины соответствует строго определённое значение другой величины. Чаще встречаются стохастические (вероятностные) или корреляционные связи. В следующем разделе работы с помощью программы Excel проводится исследование корреляционной связи.

При изучении корреляционных связей возникает необходимость решить две основные задачи – о тесноте и о форме связи. Первая решается методом корреляции, вторая – методом регрессии и дисперсии. По форме корреляционная связь может быть линейной и нелинейной, по направлению – прямой и обратной.

Для анализа линейной корреляции между признаками X и Y проводят n независимых парных наблюдений , исходом каждого из которых является пара чисел (X1,Y1), (X2,Y2),… (X n,Yn). По этим значениям определяют выборочные эмпирические коэффициенты корреляции и регрессии, рассчитывают уравнение регрессии, строят теоретическую линию регрессии и оценивают значимость полученных результатов.

В MS Excel линия уравнения регрессии называется линией тренда, которая показывает тенденцию изменения данных и служит для составления прогнозов. Для создания линии тренда на основе диаграммы используется один из пяти типов аппроксимаций или линейная фильтрация.

Тип	Описание
Линейная y = m*x+ b	
	где m – тангенс угла наклона,
	b – точка пересечения с осью ординат
Логарифмическая	y = c*ln(x) + b
	где c и b – константы
Полиномиальная	y = c6 x6 +…+ c1x+b
	где c6,… c1 и b – константы
Степенная	y = c*xb
	где c и b – константы
Экспоненциальная	y = c*ebx

где с и b – константы

На диаграмме можно выделить любой ряд данных и добавить к нему линию тренда. Когда линия тренда добавляется к ряду данных, она связывается с ним, и поэтому при изменении значений любых точек ряда данных линия тренда автоматически пересчитывается и обновляется на диаграмме.

Кроме того, имеется возможность выбирать точку, в которой линия тренда пересекает ось ординат, добавлять к диаграмме уравнение регрессии и величину достоверности аппроксимации. Покажем построение линии тренда на нашем демонстрационном примере на основе исходных данных: время уборки и урожайность. Данный анализ проводится на основе диаграммы для пяти типов аппроксимаций, и выбираем ту линию тренда, для которой величина достоверности аппроксимации наибольшая, т.е. у которой самый наибольший коэффициент корреляции.

8.2.5. Методика проведения расчета статистических характеристик и проведения регрессионного анализа с помощь Пакета анализа электронных таблиц Ms Excel

Пакет анализа, так же как и пакет поиска решения, является надстройкой Excel. Пакет анализа содержит большое количество процедур, достаточное для проведения статистического исследования любого набора данных. Он полезен как специалистам по маркетингу и финансам, исследующим перспективы своего бизнеса, так и ученым и инженерам для научных и технических расчетов или студентам, изучающим математическую статистику.

Ниже перечислены виды анализа, поддерживаемые пакетом анализа.

• Однофакторный дисперсионный анализ используется для проверки гипотезы о сходстве средних значений двух или более выборок, принадлежащих одной и той же генеральной совокупности.

• Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями представляет собой более сложный вариант однофакторного анализа, включающего более чем одну выборку для каждой группы данных.

• Двухфакторный дисперсионный анализ без повторения представляет собой двухфакторный анализ дисперсии, не включающий более одной выборки на группу.

• Корреляция используется для количественной оценки взаимосвязи двух наборов данных, представленных в безразмерном виде.

• Ковариация служит для вычисления среднего произведения отклонений точек данных от относительных средних. Ковариация является мерой связи между двумя диапазонами данных.

• Описательная статистика обеспечивает расчет набора элементарных статистик для одномерного набора данных (мода, медиана, дисперсия и т. д.).

• Экспоненциальное сглаживание предназначается для предсказания значения на основе прогноза для предыдущего периода, скорректированного с учетом погрешностей в этом прогнозе.

• Двухвыборочный F-тест для дисперсии применяется для сравнения дисперсий двух генеральных совокупностей.

• Анализ Фурье предназначается для решения задач в линейных системах и анализа периодических данных с использованием метода быстрого преобразования Фурье.

• Гистограмма используется для вычисления выборочных и интегральных частот попадания данных в указанные интервалы значений, при этом генерируются числа попаданий для заданного диапазона ячеек.

• Скользящее среднее служит для расчета значений в прогнозируемом периоде на основе среднего значения переменной для указанного числа предшествующих периодов.

• Генерация случайных чисел обеспечивает заполнение диапазона случайными числами, извлеченными из одного или нескольких распределений. С помощью данного инструмента можно моделировать объекты, имеющие случайную природу, по известному распределению вероятностей.

• Ранг и перцентиль — вывод таблицы, содержащей порядковый и процентный ранги для каждого значения в наборе данных. Данный инструмент может быть применен для анализа относительного взаиморасположения данных в наборе.

• Регрессия используется для анализа воздействия на отдельную зависимую переменную значений одной или более независимых переменных.

• Выборка — этот инструмент создает выборку из генеральной совокупности, рассматривая входной диапазон как генеральную совокупность.

• Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями (двухвыборочный t-тест Стьюдента) служит для проверки гипотезы о равенстве средних для двух выборок. Эта форма t-теста предполагает совпадение дисперсий генеральных совокупностей.

• Двухвыборочный t-тест с разными дисперсиями используется для проверки гипотезы о равенстве средних для двух выборок данных из разных генеральных совокупностей. Эта форма t-теста предполагает несовпадение дисперсий генеральных совокупностей.

• Парный двухвыборочный t-тест для средних применяется для проверки гипотезы о различии средних для двух выборок данных. При этом не предполагается равенство дисперсий генеральных совокупностей, из которых выбраны данные.

• Двухвыборочный z-тест для средних позволяет проверить гипотезу о различии между средними двух генеральных совокупностей.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая задача является задачей идентификации?
2. Что описывает уравнение регрессии?
3. Назовите уравнение линейной регрессионной зависимости
4. Из каких этапов состоит процесс идентификации модели?
5. Каковые причины неорганизованного (пассивного) экспериментом?
6. Что является исходным материалом при построении эмпирической модели?
7. Как используется физическая теория работы объекта при построении эмпирической модели?
8. Что при этом представляет собой объект идентификации?
9. Сформулируйте задачу идентификации.
10. Что такое уравнение регрессии?
11. С чего начинается процесс идентификации?
12. От чего зависит конкретная форма модели?
13. Перечислите причины проведения непланируемого эксперимента.
14. Показатели центра распределения
15. Мода
16. Медиана
17. Показатели колеблемости признака

18. Размах вариации
19. Среднее линейное отклонение
20. Дисперсия
21. Среднее квадратическое отклонение
22. Статистические оценки параметров распределения
23. Стандартная ошибка выборочной средней
24. Ошибка среднего квадратического отклонения
25. Для чего и как достоверность параметра оценивается.
26. Методика проведения расчета статистических характеристик и проведения регрессионного анализа с помощь Пакета анализа электронных таблиц Ms Excel.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.
2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.
3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.
4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.
5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.

Дополнительная

1. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.
2. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.
3. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение
4. Макаркин А.А. Решение экономических задач в Excel методами математической статистики. Учебно-методическое пособие для студентов и аспирантов специальностей экономического профиля. / С грифом УМО Москва. / Саратов, СГАУ, 2008. Электронная версия на сервере СГАУ.

Лекция 9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

9.1. Метод наименьших квадратов

В качестве простого примера построения модели методом наименьших квадратов рассмотрим задачу восстановления математического описания некоторого процесса по результатам эксперимента.

Предполагается, что процесс описывается одномерным уравнением 2-го порядка

$W = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad 0 \le x \le 6.$

Считаем, что величина x измеряется точно, а W – с ошибкой ε, имеющей нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

$M(\varepsilon) = 0,\ \sigma^2(\varepsilon) = 1.$

Выборка десяти случайных пар ($x, \tilde{W}$) представлена в табл. 9.1 в графах 2 и 3.

Таблица 9.1. Выборка десяти случайных пар

№	x	$\tilde{W}$	Wm	ε
1	2	3	4	5
1	4,8608	9,28	8,848	0,432
2	4,2396	9,40	8,821	0,579
3	2,7792	7,88	7,460	0,420
4	0,5988	1,86	2,039	-0,179
5	3,2136	7,77	8,056	-0,286
6	4,5156	8,73	8,874	-0,144
7	5,9340	8,33	8,118	0,212
8	1,5852	5,16	4,994	0,166
9	4,4880	7,28	8,872	$\boxed{-1,592}$
10	4,0932	9,22	8,767	0,453

Метод наименьших квадратов заключается в том, что неизвестные (искомые) коэффициенты a0 , a1 , a2 должны минимизировать функцию, представляющую собой сумму квадратов невязок εj:

$$G = \sum_{j=1}^{10} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{10} (Wm_j - \tilde{W}_j)^2$$

Минимум некоторой функции, как известно, находится в точке (a_0^*, a_1^*, a_2^*), где все частные производные этой функции по переменным a0, a1, a2 равны нулю.

Для определения частных производных, распишем функцию G через ее предполагаемый вид:

$$G = \sum_{j=1}^{10} (a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j)^2 .$$

Возьмем от функции G производные по a0, a1, a2 :

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = \sum_{j=1}^{10} \left[2(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j) \cdot 1 \right];$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = \sum_{j=1}^{10} \left[2(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j) \cdot x_j \right];$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = \sum_{j=1}^{10} \left[2(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j) \cdot x_j^2 \right].$$

Приравняв эти выражения к нулю и произведя некоторые преобразования, получим систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка с тремя неизвестными, коэффициенты которой вычисляются по известным данным из табл. 9.1:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 10 + a_1 \sum\limits_{j=1}^{10} x_j + a_2 \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{10} \tilde{W}_j; \\ a_0 \cdot \sum\limits_{j=1}^{10} x_j + a_1 \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^2 + a_2 \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^3 = \sum\limits_{j=1}^{10} \tilde{W}_j x_j; \\ a_0 \cdot \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^2 + a_1 \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^3 + a_2 \sum\limits_{j=1}^{10} x_j^4 = \sum\limits_{j=1}^{10} \tilde{W}_j x_j^2. \end{cases}$$

Решая полученную систему, получим a0 = –0,161; a1 = 3,929; a2 = –0,427.

Таким образом, математическая модель будет иметь вид

$$Wm = -0{,}161 + 3{,}929\,x - 0{,}427x^2. \quad (9.1)$$

Проверим адекватность модели методом Фишера. Для этого заполним четвертый и пятый столбцы таблицы 9.1, подставляя в математическую модель (9.2) и затем в формулу значения xj из первого столбца.

Определим число степеней свободы системы по формуле

$$f_s = n - m - 1,$$

где n = 10 – количество экспериментальных точек; m = 3 – количество неизвестных коэффициентов. То есть fs = 6.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$s^2(\varepsilon) = \frac{1}{f_s} \sum_{j=1}^{10} (\tilde{W}_j - W_{mj})^2 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{10} (\tilde{W}_j - W_{mj})^2 = 0{,}607 .$$

Критерий Фишера вычисляется по формуле

$$F = \frac{s^2(\varepsilon)}{\sigma^2(W)} = 0{,}607 .$$

По статистическим таблицам при 5%-м уровне риска (α = 0,05) находим пороговое значение критерия Фишера

$$F_{f,\alpha} = F_{6;0,05} = 2{,}01.$$

Так как полученное значение F меньше критического (порогового), гипотеза об адекватности модели реальному процессу принимается.

9.2. Статистические методы проверки адекватности математических моделей

Если имеются или могут быть получены необходимые и достоверные экспериментальные данные, для проверки адекватности моделей можно использовать методы математической статистики.

Математически задача проверки адекватности модели формулируется как задача проверки предположения о том, что значение отклика модели Wm отличается от реального отклика системы W не более чем на заданную величину ε*:

$$\left|W(x) - W_m\right| = \left|\varepsilon\right| \le \varepsilon^*, \quad x \in X^*. \tag{9.2}$$

Однако, истинное значение отклика системы никогда неизвестно. Полученный в результате эксперимента отклик $\tilde{W}$ в силу неконтролируемого дрейфа системы, разброса характеристик ее элементов и, наконец, просто ошибок измерения представляет собой случайную величину, отличающуюся от W. Поэтому при сравнении результатов математического и физического экспериментов $(W_{m\,i}, \tilde{W}_i)$ будет получена совокупность случайных величин {εi}: $\tilde{W}_i(x) - W_{m\,i}(x) = \varepsilon_i, \;\; i = 1,\ldots,n$, среди которых могут оказаться как величины, удовлетворяющие условию (9.2), так и не удовлетворяющие ему.

Можно ли считать, что полученные отклонения (εi > ε*) объясняются случайными причинами или их наличие должно быть признано существенным, что приводит к отказу от проверяемой модели. Для решения этого вопроса на основе выборки случайных величин {εi} строят статистические критерии, по которым оценивают адекватность модели.

Гипотеза об адекватности модели действительности (гипотеза H0) может быть сформулирована как предположение о том, что полученная совокупность {εi} не дает оснований отказаться от рассматриваемой модели. Иными словами, модель удовлетворяет заданной точности ε*.

Альтернативная гипотеза H1 состоит в том, что модель не отвечает заданным требованиям (9.2) и, следовательно, должна быть отвергнута.

Так как выборка {εi} случайна, решение о выборе одной из гипотез H0 или H1 носит вероятностный характер. При этом может быть допущена ошибка первого рода, состоящая в отказе от правильной модели (принимается H1, когда верна H0), или ошибка второго рода, состоящая в принятии ошибочной модели (принимается H0, когда верна H1). Вероятность ошибки первого рода обозначают через α, второго рода – β. Принято называть α риском разработчика, β – риском потребителя. Разумеется, желательно минимизировать как α, так и β. Однако, при заданном объеме экспериментальной выборки уменьшение α влечет за собой увеличение β.

На практике α задается на определенном уровне (α = 0,05; 0,01; 0,005; 0,001), при этом в 100α% случаев правильная модель отвергается.

Величина 1– β характеризует вероятность отказа от ошибочной модели, называется мощностью критерия и является мерой его эффективности.

Выбор вероятностей ошибок α и β при проверке конкретной модели зависит от ответственности решений, принимаемых на основе моделирования.

Например, если модель предназначена для управления двигателем летательного аппарата, необходимо в первую очередь минимизировать β, так как в данном случае принятие неверной модели, а значит, возможность ошибочных решений при управлении представляет больший вред, чем отказ от правильной модели.

Для оценки гипотезы об адекватности модели существует несколько критериев:

1) Критерий согласия $\chi 2$ Пирсона.

2) Критерий Смирнова-Колмогорова.

3) Критерий Фишера и др.

При использовании критерия $\chi 2$ проверке подлежит гипотеза о том, что рассматриваемая модель адекватна исследуемой системе с вероятностью р (например, р = 0,95). Это значит, что при n независимых испытаниях np значений εi должно удовлетворять условию (3.3) и лишь в (1– р)п случаях это условие может быть нарушено.

В результате случайного эксперимента для этих событий будут получены частоты ν1 и ν2: ν1≈ рп; ν2 ≈ (1– р)п; (ν1 + ν2 = п).

Частоты ν1 и ν2 отличаются от точных вероятностных оценок или из-за несоответствия модели действительности (заданная вероятность р не соблюдается), или из-за случайных отклонений.

Для оценки предположения о том, что отклонения ν1 и ν2 от соответствующих вероятностей случайны, строится функция

$$U^* = \frac{(\nu_1 - pn)^2}{pn} + \frac{[\nu_2 - (1-p)n]^2}{(1-p)n},$$

представляющая собой сумму квадратов отклонений, нормированных на соответствующие вероятности.

Полученное значение U * сравнивается с табличным значением при заданном уровне риска α . Если U * превышает пороговое значение $\chi^2_{1,\alpha}$, модель должна быть отвергнута, и принимается гипотеза H1. Если U *≤ $\chi^2_{1,\alpha}$, экспериментальные данные не противоречат гипотезе об адекватности модели, и принимается гипотеза H0.

Необходимым условием использования критерия $\chi 2$ является многочисленность экспериментальных данных (не меньше 20).

Критерий Смирнова-Колмогорова основан на максимальном значении отклонений

$$S = \sup\{\varepsilon_i\} = \sup\{\widetilde{W}_i - W_{m\,i}\}.$$

Для заданной экспериментальной выборки строится вспомогательная функция

$$\lambda_n^* = S\sqrt{n},$$

которая сравнивается с пороговым значением λn,α , определенным по таблицам распределения функции Смирнова-Колмогорова.

При $\lambda_n^* > \lambda_{n,\alpha}$ модель должна быть отвергнута, а при $\lambda_n^* \le \lambda_{n,\alpha}$ экспериментальные данные не противоречат гипотезе об адекватности модели.

Критерий Смирнова-Колмогорова целесообразно использовать при относительно малых выборках, когда критерий $\chi 2$ оказывается неэффективным.

Критерий Фишера осуществляется путем анализа дисперсий. Если дисперсия, характеризующая ошибку эксперимента $\sigma 2(W)$, известна, вычисляется выборочная дисперсия S 2(ε) и составляется F-отношение:

$$F_{f_S,\infty} = \frac{S^2(\varepsilon)}{\sigma^2(W)}.$$

Полученную величину F-отношения сравнивают с пороговым значением критерия Фишера Ff s,∞, α при заданном уровне риска α.

При Ff s,∞ ≤ Ff s,∞, α полученная величина S 2(ε) может быть объяснена случайным разбросом экспериментальных данных и, следовательно, нет оснований для отказа от проверяемой модели.

Если Ff s,∞ > Ff s,∞, α , полученное расхождение результатов моделирования и экспериментальных данных зна́чимо и, следовательно, модель должна быть отвергнута как недостаточно точная.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается метод наименьших квадратов?
2. В чем заключается Критерий Фишера?
3. Статистические методы проверки адекватности математических моделей
4. Какие критерии оценки гипотезы об адекватности модели существует?
5. Критерий Смирнова-Колмогорова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.

2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.

3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.

4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.

Дополнительная

1. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.

2. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение.

Лекция10

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

10.1. Общие сведения о теории принятия решений

Принятие решений является основой любой деятельности человека.

Простейшая схема принятия решений включает в себя некоторую цель и совокупность способов ее достижения (Рис. 10.1)

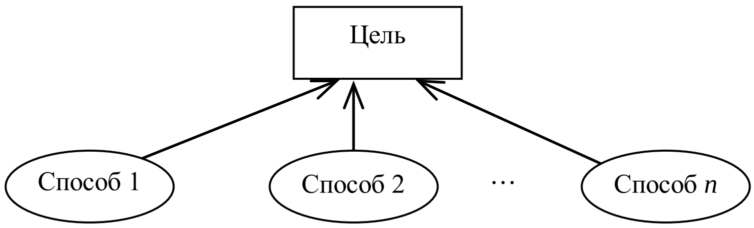

Рис. 10.1. Схема принятия решений

Под целью будем понимать конкретный конечный результат, который необходимо получить путем выбора и реализации тех или иных способов деятельности.

При этом в любом процессе принятия решений обязательно присутствует субъект принятия решений, который в общем случае представляется группой лиц, ответственных за целеполагание, формирование вариантов способов действий и, главное, за выбор конкретного решения.

При формировании оптимальных решений обязательным является наличие критериев оптимальности решений или по-другому целевых функций.

Критерием оптимальности называется математическое выражение, позволяющее количественно оценить степень достижения поставленной цели при выборе того или иного решения.

Задача ПР называется однокритериальной, если выбираемое решение служит достижению одной цели. Например, выбор управленческого решения по производственной программе предприятия, позволяющего получить максимум прибыли (цель) от реализации продукции.

Во многих ситуациях ПР объективно присутствует несколько целей.

Задачи ПР, удовлетворяющих нескольким целям, называются многокритериальными задачами. Например, при выборе проектных решений по новому пассажирскому самолету требуется обеспечить максимальное число пассажиров (цель 1) при минимальном расходе топлива (цель 2).

Отметим, что если в однокритериальных задачах возможно получение единственного оптимального решения (Рис. 10.2 а), то в многокритериальных ЗПР такая возможность отсутствует (Рис. 10.2 б).

В многокритериальных задачах возможно получение совокупности компромиссных вариантов (СКВ) решений на интервале [$x_{1\ опт}$, $x_{2\ опт}$].

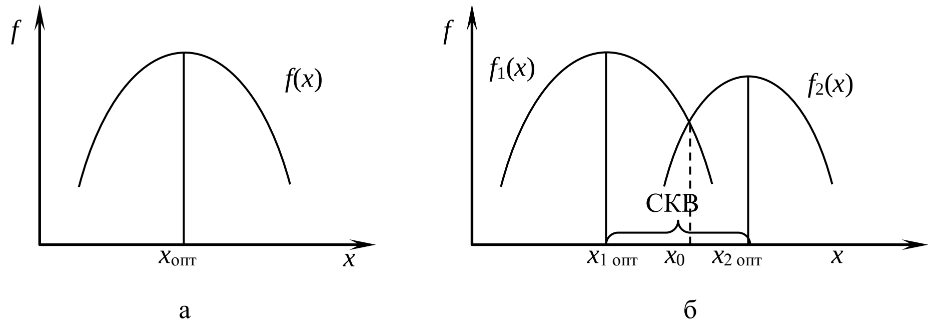

Рис. 10.2. Оптимальное решение

10.2. Общая математическая модель формирования оптимальных решений

В математических моделях принятия решений в качестве нового знания выступает оптимальное решение, которое в наилучшем смысле соответствует достижению поставленной цели (целей).

Введем в рассмотрение n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяющий количественные характеристики формируемого решения.

Обозначим через a, b, c вектора соответствующих размерностей, описывающие количественные характеристики неконтролируемых факторов.

Для оценки эффективности различных вариантов решений будем использовать специальным образом сформированную функцию:

W = f(c, X),

которая называется критерием оптимальности решений или целевой функцией задачи ПР.

Тогда выбор оптимального решения $X_{опт}$ будем осуществлять, исходя из требования $W(x) \to \max\limits_{x \in X}(\min)$.

Множество X должно быть допустимым с точки зрения учета условий принятия решений (ограничений).

Пусть ЛПР обладает для достижения цели вектором ресурсов b. Представим в виде вектор-функции φ(a, X) фактический расход ресурсов при использовании вектора решений X и вектора некоторых факторов a.

Тогда $\varphi(a, X) \le b$ есть ограничение.

Во многих задачах ПР учитывается условие $X \ge 0$.

Таким образом, общая математическая модель формирования оптимальных решений может быть представлена в следующем виде:

$W = f(c, X) \to \max$; (целевая функция)

$\varphi(a, X) \le b$; (ограничения ресурсов)

$X \ge 0$. (ограничения переменных)

Постановка задачи в этом случае выглядит следующим образом

Найти значение вектора X, доставляющего максимум (минимум) критерию оптимальности решений (целевой функции) и удовлетворяющего при этом ограничениям.

Если ЛПР должен учитывать m целей, то, формализуя их в виде критериев оптимальности, получим:

$$\begin{aligned} &W_1 = f_1(c_1, X) \to \max; \\ &W_2 = f_2(c_2, X) \to \min; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &W_m = f_m(c_m, X) \to \text{extr}; \end{aligned} \qquad (10.1)$$

где c_1, c_2, …, c_m – вектора неконтролируемых факторов.

Математическая модель (10.1), (ограничения ресурсов), (ограничение переменных) является многокритериальной моделью.

В реальных задачах ПР ограничения ресурсов могут включать в себя как неравенства вида «≤», «≥», «=», так и их различные сочетания.

10.3 Построение и решение оптимизационной задачи принятия решения (Задача о баке)

Пусть требуется выбрать геометрические размеры цилиндрического бака объемом V из условия минимального расхода материала на его изготовление.

Для построения математической модели введем в рассмотрение вектор проектных решений $X = (r, h)$, где $2r$, h – диаметр и высота бака (Рис. 10.3).

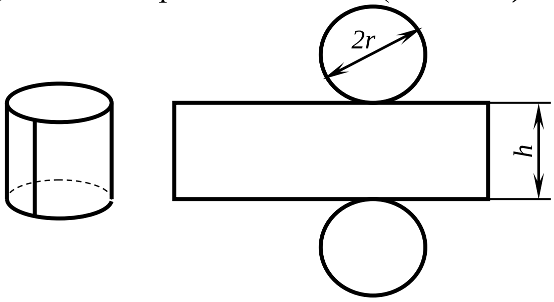

Рис. 10.3. Геометрическая модель

Если предположить, что бак изготавливается сваркой из трех деталей, то расход материала при произвольном векторе решений X будет равен площади поверхности бака:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \to \min_{r,h}. \qquad (10.2)$$

Согласно условиям задачи выражение (10.2) является целевой функцией (критерий оптимальности проектных решений).

Условие того, что бак должен иметь объем заданного значения V, представим в виде:

$$\pi r^2 h = V. \qquad (10.3)$$

На компоненты вектора решений X необходимо наложить дополнительные условия:

$$R > 0,\ \ h > 0. \qquad (10.4)$$

Выражения (10.2) – (10.4) описывают нелинейную однокритериальную модель формирования оптимальных решений, при $n = 2$, $m = 1$.

Пусть бак должен иметь минимальную трудоемкость его изготовления. Если считать трудоемкости изготовления крышки, дна и боковой стенки достаточно малыми величинами, то затраты времени на изготовление бака будут пропорциональны длине свариваемых швов:

$$T = c(4\pi r + h) \to \min_{r,h}, \qquad (10.5)$$

где c – затраты времени на сварку единицы длины.

Выражения (10.2) - (10.5) описывают двухкритериальную нелинейную модель формирования оптимальных решений.

При построении математической модели в этой задаче принятия решений были использованы известные геометрические закономерности.

Аналитическое решение задачи ПР возможно, если соответствующая математическая модель включает в себя ограничения типа равенств, то есть имеет вид:

$$W = f(c, X) \to \operatorname*{extr}_{X};$$

$$\varphi(a, X) = b;$$

$$-\infty < X < \infty.$$

Такие задачи решаются обычно классическими методами условной оптимизации, которые предусматривают построение функции Лагранжа вида

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(c, x_1, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\varphi_j(a, x_1, ..., x_n) - b_j], \qquad (10.6)$$

где λ_1, λ_2, … , λ_m – неопределенные множители Лагранжа.

Точки экстремума этой функции определяются из решения системы уравнений вида

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, ..., m. \qquad (10.7)$$

Решая эту систему, получим решение вида

$$x_i^{\text{опт}} = \psi_i(a, b, c), \ i = 1, ..., n;$$
$$\lambda_j = \lambda_j(a, b, c), \quad j = 1, ..., m. \qquad (10.8)$$

Используем этот метод для решения однокритериальной задачи

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(r, h, \lambda) = c(4\pi r + h) + \lambda(\pi r^2 h - V).$$

Система уравнений (4.17) относительно переменных r, h, λ:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi c + 2\lambda \pi r h = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = c + \lambda \pi r^2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - V = 0.$$

Имеем систему алгебраических уравнений, решая которую, получим значения неизвестных r, h (λ находить необязательно):

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}; \quad h = \sqrt[3]{4\pi V}\ ; \quad \lambda = -c\sqrt[3]{\frac{4\pi}{V^2}}\ .$$

Таким образом, оптимальные размеры бака, найденные с помощью аналитического метода условной оптимизации, не зависят от затрат времени c на сварку единицы длины, но зависят от требуемого объема бака V. Требование при этих значениях r и h выполняется, то есть трудоемкость будет минимальной.

Недостатками этого метода являются:

1) Не учитываются в явном виде условия неотрицательности.

2) Система уравнений позволяет получить решение в форме только для простых функций.

Вопросы для самоконтроля

1. Что включает в себя простейшая схема принятия решений?
2. Что такое цель?
3. Что такое критерий оптимальности?
4. Что такое однокритериальная ЗПР?
5. Что такое многокритериальная ЗПР?
6. Возможно ли получение единственного оптимального решения в многокритериальных задачах?
7. Напишите общий вид математической модели формирования оптимальных решений.
8. Сформулируйте задачу принятия решений.
9. Запишите критерий минимального расхода материала для задачи о баке.
10. Задача о назначениях

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.

2. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-006484-0.

3. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.

4. К. Скотт Проктор. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. – М.: Интернет трейдинг, 2005. - 432 с. – ISBN -5902360-18-8.

Дополнительная

1. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования. / В. А. Веников, Г.В. Веников. - М.: Высшая школа, 2004.

2. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение.

3. Берк К., Кзйри П. Анализ данных с помощью Microsoft Excel. М: Вильямс, 2005.

4. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. http://edu.dvgups.ru
2. http://gendocs.ru/v5815/лекции_-_математическое_моделирование.
3. Баранова, Е.К. Основы информатики и защита информации: учебное пособие для студ. вузов по спец. 080801 «Прикладная информатика» и др. эконом. спец.; рек УМО / Е.К. Баранова. – М.: Риор; М..6 Инфра-М, 2013. – 183 с.- (Высшее образование) (Бакалавриат). –ISBN 978-5-16-006484-0.
4. Берк К., Кзйри П. Анализ данных с помощью Microsoft Excel. М: Вильямс, 2005.
5. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2010. – 354 с.
6. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 4-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 491 с. ISBN 5-06-003830-0.
7. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов:стов : учеб. пособие / И. В. Виленкин . - 3-е изд., испр. . - Ростов н/Д. : Феникс, 2005. - 414 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-222-07171-5.
8. Информатика. Базовый курс : учебное пособие / ред. : С. В. Симонович. - 2-е изд. - СПб. : Питер, 2005. - 640 с. - ISBN 5-94723-752-0.
9. Информатика. Общий курс : учебник / А. Н. Гуда, М. А. Бутакова, Н. М. Нечитайло. - 2-е изд. - М. : Дашков и К ; Ростов н/Д : Наука-Пресс, 2008. - 400 с. : ил. - ISBN 978-5-91131-654-9 :
10. Информатика: учебник / под. Ред. В.В. Трофимова. – М.: Издательство Юрайт; Высшее образование, 2010. – 911 с. – (Университеты России).
11. *К. Скотт Проктор*. Построение финансовых моделей с помощью Microsoft Excel. Практическое руководство. –М.: Интернет трейдинг, 2005. – 432 с.
12. Кошелев В.Е. Excel 2007. Бином-Пресс, 2008.
13. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М., «Колос», 1978. Приложение.
14. Курносов, А. П. Информатика: учебное пособие под ред. А. П. Курносова./ С. А. Кулев, А. В. Улезько. М.: КолосС, 2006 - 272 с. : ил. ISBN 5-9532-0279-2.
15. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учебник. -3-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2004.- 400 с.
16. Макаркин А.А. Решение оптимизационных задач с использованием табличного процессора MS Excel. Методические указания для самостоятельной работы студентов инженерных и экономических специальностей. Саратов, СГАУ, 2005. Электронная версия на сервере СГАУ.
17. Макаркин А.А. Решение экономических задач в Excel методами математической статистики. Учебно-методическое пособие для студентов и аспирантов специальностей экономического профиля. / С грифом УМО Москва. / Саратов, СГАУ, 2008. Электронная версия на сервере СГАУ.
18. Мастерова В.П., Ананьина Н.Н. – Основы кормопроизводства. – М:. Высшая школа, 2007. - 208 с.
19. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие./ А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2008. - 544 с. -ISBN: 5-06-004137-9.
20. Рау, В. Г. Практический курс математики и общей теории статистики : учебное пособие./ В. Г. Рау. - М. : Высш. шк., 2006. - 126 с. . - ISBN 5-06-005529-9.

21. Степанов А.Н. Информатика: Учебник для вузов. Изд. 5-е. СПб: Питер, 2007.
22. Уокенбах Джон. Microsoft Excel 2003. Библия пользователя. Пер. с англ. М: Вильямс, 2005.
23. Уокенбах Джон. Профессиональное программирование на VBA в Excel 2003. М: Вильямс, 2005.
24. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты : учебное пособие / В. Ф. Чудесенко. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2005. - 126 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0661-4 :
25. Эконометрика: учеб. / под ред. д–ра экон. наук, проф. В.С. Мхитаряна. – М.: Проспект, 2008. – 384 с.
26. Эконометрика: учеб. / под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Проспект, 2009. – 288 с.
27. Эконометрика: Учебник/И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др., Под ред. И.И. Елисеевой. – 2–е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 576 с.

СОДЕРЖАНИЕ