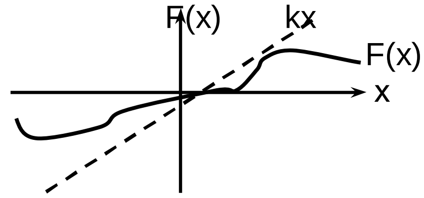
Абсолютная устойчивость нелинейных систем. Критерий Попова

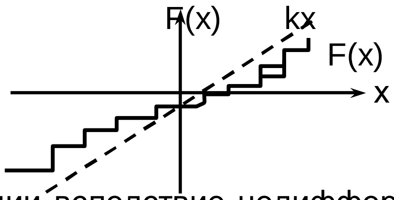
Подобно теореме Лурье критерий Попова позволяет установить устойчивость нелинейной системы сразу для целого класса нелинейности, лежащих в секторе.

Пусть нелинейность *F(x)* удовлетворяет частному условию:



$$0 \le \frac{F(x)}{x} \le k \quad F(0) = 0 \quad \textbf{(38)}$$

То есть нелинейность не выходит за рамки сектора в 1 и 3 квадрантах, при этом её конкретный вид не имеет значения, например, она может иметь петли или быть сильно ломаной.



Понятно, что требования к виду нелинейности очень слабы, поэтому к данному классу нелинейностей относятся такие нелинейности, которые не под-даются обычным методам линеаризации вследствие недифференцируемости. Класс нелинейностей, умещающихся в секторе, очень широк, например, сюда относится большинство нелинейностей датчиков и приводов.

С другой стороны, сюда не попадает, например, обычное реле с гистерезисом.

Абсолютная устойчивость – это устойчивость для любой нелинейности внутри заданного сектора.

Устойчивость в целом (пространстве) – это устойчивость при любом начальном условии.

С другой стороны, устойчивость в целом является развитием вполне интуитивно понятной инженеру идеи: если график нелинейности F(x) зажат границами сектора Кх, *то коэффициент усиления нелинейности не "превышает К", и если устойчива <u>линейная</u> система, в которой вместо F(x) стоит Кх, то должна быть устойчива и нелинейная система.* Но для проверки устойчивости линейной системы можно использовать обычные критерии устойчивости, например, частотные.

Именно частотный подход используется в критерии Попова.

Критерий Попова дает критерий абсолютной устойчивости в целом и формулировка его подобна критерию устойчивости Найквиста.

Пусть линейная часть задана передаточной функцией *W(p)*, нелинейная часть находится в секторе *k*. Пусть можно найти такое число **q**, что выполняется следующее *частотное неравенство*:

$$\mathrm{Re}\,\left[1 + jqw\right] W(jw) + \frac{1}{k} > 0 \quad \textbf{(39)}$$

Тогда система является абсолютно устойчивой в целом и, кроме того: $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Частотное неравенство **(39)** имеет геометрическую интерпретацию подобную критерию Найквиста. Раскроем выражение **(39)**:

$$\mathrm{Re}\{(1 + jqw)(\mathrm{Re}W + j\,\mathrm{Im}W)\} = \mathrm{Re}(\mathrm{Re}W + jqw\,\mathrm{Re}W + j\,\mathrm{Im}W - qw\,\mathrm{Im}W) = \mathrm{Re}W - qw\,\mathrm{Im}W$$

То есть **(39)** фактически означает: $\mathrm{Re}W - qw\,\mathrm{Im}W + \frac{1}{k} > 0$ **(40)**

Если ввести модифицированный годограф:

$\tilde{W}(jw) = \mathrm{Re}W(jw) + jw\,\mathrm{Im}W(jw)$, **(41)**

то частотное неравенство для модифицированного годографа получает вид:

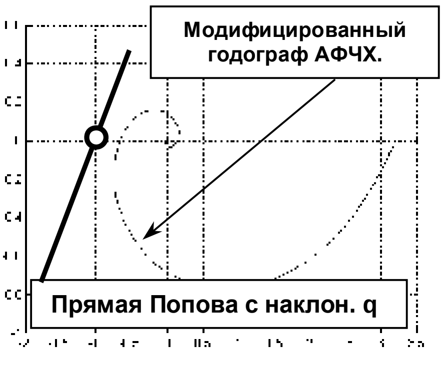
$\mathrm{Re}\tilde{W}(jw) + \frac{1}{k} > q\,\mathrm{Im}\tilde{W}(jw)$ **(42)**

В самом деле, условие **(42)** просто означает, что модифицированный годограф должен находиться **правее прямой, проходящей через точку (-1/к ; j0) с угловым коэффициентом q.** на комплексной плоскости с координатами $(\mathrm{Re}W;\mathrm{Im}W)$.

С другой стороны, выберем в качестве "нелинейности" границу сектора: F(x)=кх. Такая нелинейность входит в рассматриваемый класс, но при её наличии система линейна, и для неё, как для линейной, можно использовать **необходимое и достаточное** условие Найквиста. Это в данном случае означает, что обычная АФЧХ линейной части не должна "охватывать" точку -1/к. (т.к. W(jω)• К не должна "охватывать" точку -1.)

- *Следовательно, необходимым условием, дополнительным к критерию Попова, будет условие, чтобы обычный (немодифицированный) годограф линейной части не пересекал вещественную ось левее точки -1/к.*
- Отметим, что **условие Попова - лишь достаточное**, поэтому критерий позволяет отсеять неустойчивые системы.

На самом деле, возможны три характерных случая. Рассмотрим пример, в котором нелинейность заключена в секторе с К=1. Тогда для устойчивости прямая в критерии Попова должна проходить через точку -1 с некоторым наклоном наклоном q, и график модифицированного годографа должен быть целиком правее.



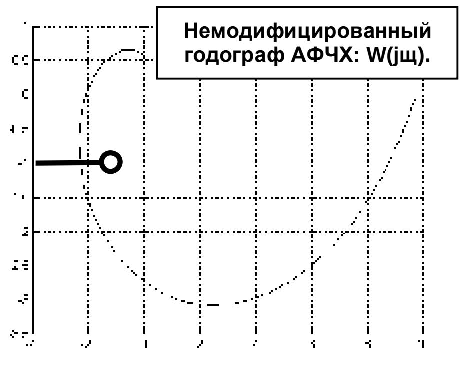


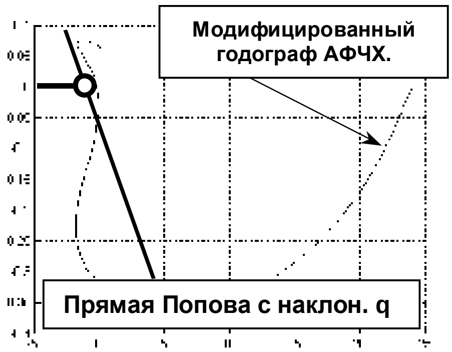
Рис.3

Устойчивость, **Рис.4 Неустойчивость,**

т.к. выполнены достаточные условия.

т.к. не выполнены необходимые условия для немодифицированного годографа W(jω).

На рис.3 возможно провести через точку -1 прямую так, что годограф целиком оказывается справа. На рис.4 годограф немоди-фицированной АФЧХ линейной части пересекает вещественную ось левее точки -1/к = -1.



На рис.5 невозможно провести прямую через точку -1 так, чтобы годограф оказался целиком правее, но это **не значит**, что система неустойчива. В этом случае требуется дополнительное исследование други-ми методами, отличными от критерия Попова.

Рис.5 Ничего нельзя утверждать на основе критерия Попова.

<u>Правило применения критерия Попова</u>

1. На комплексной плоскости строим модифицированный годограф.
2. Отмечаем точку -1/к, определяемую сектором нелинейности.
3. Пытаемся провести через эту точку какую-нибудь прямую с наклоном q так, чтобы годограф оказался правее. Система будет абсолютно устойчивой, если это возможно.
4. Учитываем, что критерий Попова – только достаточное условие.

Итак, необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости не совпадают. Чтобы сблизить необходимое и достаточное условия приходится накладывать более жесткие ограничения на нелинейность. Двигаясь по этому пути, можно получить много обобщений критерия Попова, в частности, при дополнительных ограничениях на нелинейность можно исполь-зовать не модифицированный, а обычный годограф АФЧХ. Если нелинейность удовлетворяет такому дополнительному условию:

$$0 \le \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} \le k$$

то есть, скорость возрастания нелинейности огра-ничена в каждой точке величиной к , то в этом случае вместо модифицированного годографа можно использовать обычный (критерий Чо-Нареандры).

Подобных обобщений проделано великое множество, упомянем лишь одно, по-видимому, важнейшее. Это - так называемый круговой критерий, который позволяет исследовать устойчивость при нелинейностях в более сложном секторе и, кроме того, нестационарных.

Имеются также обобщения критерия Попова на случаи других свойств линейной части, например, при наличии интеграторов.

В заключении заметим, что метод гармонической линеаризации, понятие абсолютной устойчивости и методы её исследования а также методы исследования фазовой плоскости дают поистине мощнейший инструментарий анализа и синтеза сложных нелинейных систем автоматического управления.