

## **Основы математического моделирования**

### **Математическое моделирование в проектировании и технологии**

Современная технологическая система — это совокупность взаимосвязанных потоков энергии, материалов и информации, действующая как единое целое, в котором осуществляется определенная последовательность технологических процессов.

Технологическим системам, которым соответствуют отдельные пределы, производства и технологические цеха современных предприятий, свойственны все характерные признаки больших систем: определенная целенаправленность или наличие общей цели функционирования всей системы (все технологические аппараты и потоки объединены для выпуска продукции); большие размеры как по числу элементов, составляющих систему, так и по числу параметров, характеризующих процесс ее функционирования (большое число аппаратов, связанных технологическими потоками); сложность поведения системы, проявляющаяся в большом числе переплетающихся взаимосвязей между ее переменными (изменение режима работы одного аппарата может оказывать влияние на работу производства в целом); выполнение системой в процессе ее функционирования некоторой сложной и многофакторной целевой функции.

В современной практике проектирования больших промышленных систем часто используется эмпирический подход. Это объясняется тем, что большую систему принципиально невозможно точно описать и точно предсказать ее поведение. Единственный метод, позволяющий облегчить проектирование (а часто и эксплуатацию) такой системы,— это моделирование и в первую очередь — математическое.

Модель представляет объект, систему или понятие (идею) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования. Она служит средством, помогающим в объяснении, понимании или совершенствовании системы. Модель какого-либо объекта может быть или точной копией этого

объекта (хотя и выполненной из другого материала и в другом масштабе), или отображать некоторые характерные свойства объекта в абстрактной форме.

Математические модели используют при прогнозировании поведения моделируемых объектов. Например, строить современный реактивный самолет лишь для определения его летных характеристик экономически нецелесообразно, если они могут быть предсказаны средствами моделирования. На математических моделях выполняют контролируемые эксперименты в тех случаях, когда экспериментирование на реальных объектах практически невозможно из-за отсутствия последних или возникающей во время экспериментов опасности (сети энергоснабжения, химические производства).

### **Стратегия математического моделирования.**

При использовании математического моделирования разработчик должен прежде всего определить, как создать (получить, разработать) модель. Математическое описание является отражением физической сущности процесса со свойственными ему особенностями и ограничениями. Эти особенности и ограничения должны учитываться как при формулировании задачи, так и при составлении описания и выборе численного метода моделирования.

Существует несколько видов математических описаний, однако наиболее распространенными являются детерминированные и статистические.

*Детерминированное* описание (и соответственно модель) строится на основе фундаментальных теоретических законов и закономерностей. Оно составляется из законов термодинамики, химической кинетики, законов сохранения массы, энергии и учитывает такие явления, как диффузия, тепло- и массопередача, гидродинамика перемешивания и т. д.

*Статистическое* описание основано на обработке экспериментальных данных. Исследуемый объект характеризуется вектором факторов, определяющих целевую функцию или выходные параметры. При планировании эксперимента собираются данные для определения коэффициентов зависимости между входными и выходными параметрами процесса. Имеется много вариантов установления такой зависимости на основе статистического анализа. Основная трудность (без учета экономической эффективности) заключается в выборе вектора состояния, элементы которого действительно характеризовали бы поведение реального процесса, а также в получении зависимости, допускающей не только интерполирование, но и экстраполирование решения за пределы области определения коэффициентов этой зависимости. Каждый вариант дает возможность построить модель, адекватную процессу по выбранному критерию. Применяя различные способы, можно получить множество моделей, изоморфных исследуемому объекту.

Поэтому при выборе структуры модели, критерия адекватности модели процессу, а также ее параметров необходимо учитывать цель моделирования и задачу, которая ставится при разработке модели.

Другой задачей, стоящей перед разработчиком при использовании моделирования в процессе проектирования, является подготовка математической модели. При решении этой задачи модель приводится к какой-либо стандартной структурной схеме дискретного процесса, а система уравнений — к дискретной форме, что позволяет использовать ЭВМ. Этот этап моделирования завершается математическим описанием технологических процессов и структурной схемой всей моделируемой системы, которая должна быть идентична структурной схеме промышленной системы по потоку информации.

Стратегия принятия инженерных решений с помощью методов математического моделирования заключается в следующем.

1. Определяется область существования рациональных решений,

разрабатываются математические модели отдельных процессов и структуры в целом, а также проводятся ориентировочные расчеты, цель которых — оценить связи между структурой и параметрами модели, а также взаимное влияние основных критериев и ограничений. Формируется общая стратегия выбора проектных параметров, определяются основные критерии, по которым необходимо добиваться лучших решений.

Значения параметров определяются перед каждым расчетом характеристик системы; они неизменны в ходе этого расчета, но меняются в процессе оптимизации. Одной из целей поиска решения является просмотр различных сочетаний значений параметров и определение тех из них, которые соответствуют лучшим проектным характеристикам или обеспечивают допустимые значения для других проектных характеристик. Проектными критериями обычно являются стоимостные характеристики или какие-либо другие показатели эффективности. При синтезе структуры летательного аппарата, например, за критерий часто принимаются весовые характеристики. Количественные критерии, значения которых улучшаются при оптимизации, называют целевыми функциями. Одновременно с критериями до моделирования определяются проектные ограничения — характеристики, значения которых не должны быть меньше или превышать задания.

2. Производится поиск лучших проектных решений, для чего формулируется поисковая задача, т.е. выявляются варьируемые проектные параметры, основные ограничения. В большинстве случаев поисковая задача разбивается на несколько отдельных задач оптимизацию ряду критериев. Определяются цели оптимизации и выбирается численный метод решения задачи дискретного или нелинейного программирования с несколькими переменными и ограничениями. Для поиска оптимальных параметров системы, а также для синтеза ее оптимальной структуры пригодны различные численные методы, ориентированные на ЭВМ. После серии оптимизаций, проведенных на модели по нескольким критериям и при

различных значениях ограничений, можно перейти к третьему этапу — этапу выбора рациональных решений.

3. По отдельным критериям производится сравнение лучших решений и для выбора самого рационального из них предъявляются дополнительные количественные и качественные требования. В модели учитывается достоверность проектных оценок и степень риска при использовании новых решений, оптимальных по ряду критериев. Рациональное решение можно определить как решение, близкое по ряду критериев к оптимальным, но отличающееся от них настолько, насколько при его выборе учтены дополнительные формализуемые и не формализуемые показатели. Таким образом, современный инженер-проектант, используя ЭВМ для поиска, должен всегда знать точно, где находится оптимум по каждому из учитываемых им критериев, чтобы суметь отступить от этого оптимума в сторону более простых, доступных и надежных конструктивных решений.

### **Математическое моделирование производственных объектов и процессов.**

Термин «математическое моделирование» охватывает методологически малосвязанные разработку модели и ее использование. Иногда моделированием называется каждый из этих двух этапов в отдельности.

Изучение свойств объекта моделирования путем анализа аналогичных свойств его модели представляет собой процесс моделирования. В зависимости от характера и сложности тех или иных явлений при их изучении могут быть использованы соответствующие методы моделирования. Выбор методов определяется поставленной задачей.

Модель называется *изоморфной* (одинаковой по форме), если между нею и реальной системой наблюдается полное поэлементное соответствие. Такое соответствие имеется между негативом и полученным с него изображением, чертежом и изготовленной по нему деталью, между процессами в реальной

системе и уравнением, описывающим поведение этой системы. Однако во многих случаях изоморфные модели оказываются сложными и неудобными для практического использования, поэтому более удобны модели, которые позволяют судить только о существенных аспектах поведения реальных систем без их детализации. Пример такой модели — географическая карта по отношению к изображенному на ней участку земной поверхности.

Модели, отдельные элементы которых соответствуют лишь крупным частям реальной системы, а полное поэлементное соотношение между моделью и системой отсутствует, называются *гомоморфными*.

Моделирование производственного процесса состоит в имитации выполнения на элементах производства (оборудовании, участках) операций над продуктами (полуфабрикатами, заготовками, сырьем и т.д.) путем изменения вычисляемых значений соответствующих параметров элементов или продуктов. Значения некоторых параметров могут быть функциями времени. Элементы производства характеризуются, кроме того, состояниями (занят, исправен и т.д.). Передача продукта от одного элемента к другому моделируется передачей информации о его параметрах и изменением состояний элементов.

Каждый элемент производства отображается отдельной частью математической модели, т.е. общая модель разбивается на блоки, которые могут совпадать с частной математической моделью одной из подсистем технического объекта или моделью некоторого физического или технико-экономического расчета. Блоки связаны сравнительно небольшим числом передаваемых параметров. Обычно технический объект расчленяется на конечное число блоков, и каждый из них первоначально моделируется независимо от остальных.

Частные модели блоков затем связываются на основе фактической иерархии технического объекта. Декомпозиция и связь блоков выполняются как в пространстве, так и во времени, и целиком зависят от задачи разработчика. Мерой качества полученной таким образом модели является в

наиболее общем случае отсутствие в ней внутренних противоречий и согласованность полученных результатов с действительностью, часть которой они описывают. При создании основ такой модели необходимо придерживаться следующего принципа: чем меньше количество элементов, с помощью которых можно для решения поставленной задачи описать действительность, тем совершеннее модель.

Формальное определение модели, как правило, строится на теоретико-множественном языке: система  $S \subseteq X \times Y$  называется математической моделью, если задано семейство задач  $D_x$ ,  $x \in X$  со множеством решений  $Y$ ; для любого элемента  $x \in X$  и  $y \in Y$  пара  $(x, y)$  принадлежит системе  $S$  в том и только в том случае, если существует элемент  $y \in Y$ , который является решением задачи  $D_x$ .

Математическое моделирование напоминает физический эксперимент. В математической модели, как и в лабораторной установке, представлены составные части системы и окружающая ее среда. В ходе испытаний модели через некоторые интервалы времени выдается информация о поведении компонентов и показания приборов. При использовании современных технических средств моделирование на ЭВМ так же наглядно, как и физический опыт (особенно для относительно простых систем). Это позволяет быстро получить сведения о различных вариантах изучаемого процесса. При этом в относительно короткий срок можно найти оптимальные варианты математической модели, т.е. осуществить ее оптимизацию и, следовательно, оптимизировать сам процесс.

Математическое моделирование включает следующие этапы: составление математического описания процесса; создание алгоритма, моделирующего изучаемый процесс; проверка адекватности модели изучаемому процессу; использование модели.

### **Разработка математических моделей.**

*Составление математического описания* состоит в установлении связей

между параметрами процесса и выявлении его граничных и начальных условий, а также в формализации процесса в виде системы математических соотношений, характеризующих изучаемый объект (технологический процесс). Математическое описание составляется на основе материальных и энергетических балансов, а также физических законов, определяющих переходные, или какие-либо иные специфические особенности процесса.

Для построения математических моделей технических объектов используются фундаментальные законы физики: сохранения массы, энергии и т. д. Соответственно модели записываются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, отражающих материальный и тепловой балансы аппаратов, изменения тока и напряжения электрической цепи и т.д. В систему математического описания в общем случае могут входить: алгебраические уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения и в частных производных, эмпирические формулы, логические условия и др.

При моделировании сложных технологических систем возможны следующие случаи.

1. Моделируемая система достаточно хорошо изучена, что позволяет записать аналитические соотношения, которые и будут служить моделью (законы Кирхгофа, уравнения кинетики, уравнения энергетического и материального балансов и т.п.). Предполагается, что все коэффициенты аналитических соотношений известны.

2. Математическая модель известна с точностью до неизвестных параметров, для вычисления которых проводится необходимое число экспериментов.

3. Известно, что моделью может служить одна из функций  $\eta_i(x, \theta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ). Необходимо провести эксперимент для дискриминации моделей и определить неизвестные параметры адекватной модели.

4. Аналитический вид модели не известен вообще.

В трех последних случаях эффективными являются статистические



методы моделирования, представляющие собой совокупность методов многомерной статистики и имитационного моделирования. Методы многомерной статистики (методы регрессионного, дисперсионного, ковариационного, факторного, компонентного и других анализов) базируются на наблюдении за функционированием моделируемой системы и обработке результатов наблюдений. При этом наряду с пассивным наблюдением за системой иногда имеется возможность проводить планирование входных возмущений системы. Тогда эффективно применение методов и идей математической теории планирования эксперимента.

*Проверку адекватности* (соответствия) математической модели исследуемому процессу необходимо проводить по той причине, что любая модель является лишь приближенным отражением реального процесса вследствие допущений, всегда принимаемых при составлении математической модели. На этом этапе устанавливается, насколько принятые допущения правомерны, и тем самым определяется, применима ли полученная модель для исследования процесса. При необходимости математическая модель корректируется. Для этого используются результаты измерений на самом объекте или на его физической модели, воспроизводящей в небольших масштабах основные физические закономерности объекта моделирования. Поскольку метод математического моделирования позволяет расчленять сложные процессы на более простые составляющие, то перечисленные задачи могут решаться несколько раз (на отдельных этапах).

Рассмотренные этапы являются подготовительными, создающими условия для успешного *использования математической модели*. От качества подготовки модели зависит качество получаемых результатов, которые заранее предсказать трудно. Однако иногда можно заранее определить, что именно математическое моделирование для решения данной задачи наиболее приемлемо. Это возможно в тех случаях, когда сложно поддерживать одни и те же рабочие режимы при каждом повторении эксперимента на работающем

оборудовании или в течение всего времени проведения серии экспериментов для получения одной и той же величины выборки (и, следовательно, статистической значимости результатов экспериментирования) могут потребоваться чрезмерные затраты времени и средств при экспериментировании с реальными системами невозможно исследование множества альтернативных вариантов, связанных с аварийными или опасными технологическими режимами; есть уверенность в успешном создании модели изучаемой системы или операции. Для этого следует заранее иметь возможность сбора необходимого количества информации об элементах и связях в моделируемой системе, что обеспечивает достоверность процесса моделирования имеется возможность (и необходимость) побочного использования процесса построения моделей элементов системы для их исследования; все другие методы решения непригодны.

Практически математическое моделирование как метод не имеет ограничений, так как: моделирующая система может одновременно содержать описания элементов непрерывного и дискретного действия и быть подверженной влиянию многочисленных случайных факторов сложной природы; допустимо описание системы соотношения большой размерности; обеспечивается простота перехода от одной задачи к другой введением переменных параметров, возмущений и различных начальных условий.

Последовательным наращиванием элементов моделей можно исследовать системы любой сложности, для которых достаточно полно известны функционирование и взаимосвязь относительно несложных исходных элементов. При этом переход на более высокий уровень моделирования звеньев системы связан с увеличением количества участвующих в модели элементов, что приводит к необходимости их упрощения или к представлению в виде обобщенных характеристик, полученных на предыдущем этапе имитации. При этом объем моделей сохраняется в некоторых допустимых пределах.

По сравнению с физическим методом математического моделирования

более универсален, так как он:

позволяет с помощью одного устройства осуществить решение целого класса задач, имеющих одинаковое математическое описание;

обеспечивает простоту перехода от одной задачи к другой, введение переменных параметров, возмущений и различных начальных условий;

дает возможность моделировать по частям (по «элементарным» процессам), что особенно существенно при исследованиях сложных объектов химической технологии;

использует быстродействующую вычислительную технику, которая непрерывно совершенствуется;

экономичнее метода физического моделирования как по затратам времени, так и по стоимости.

### **Задачи математического моделирования.**

При использовании математических моделей решается одна из двух задач — определение необходимых параметров технического объекта и выявление желательной его структуры — либо совокупность этих задач.

Модели могут применяться как средства осмысливания действительности, общения, обучения и тренажа, средства постановки экспериментов (в том числе оптимальных), а также в качестве инструмента прогнозирования.

При использовании модели в качестве средства осмысливания действительности методами математического моделирования можно проводить эксперименты при полностью контролируемом объеме условий моделирования, что исключает возможность воздействия на результаты моделирования случайных факторов. В сочетании с современными вычислительными средствами эти методы позволяют с относительно небольшими материальными затратами исследовать всевозможные варианты аппаратного оформления технического процесса, изучить его основные свойства в допустимых и аварийных условиях. При этом в рамках

используемой модели всегда гарантируется отыскание оптимальных решений, если они требуются.

Как средство общения хорошо продуманная модель не имеет себе равных. Все языки, в основе которых лежит слово, в той или иной мере оказываются неточными в случае сложных понятий и описаний. Правильно построенные модели помогают устранить эти неточности, предоставляя в наше распоряжение более действенные способы общения. Преимущество модели перед словесными описаниями — в сжатости и точности представления заданной ситуации. Модель делает более понятной общую структуру исследуемого объекта и вскрывает важные причинно-следственные связи.

Математическую модель можно использовать в качестве средства обучения и тренажа в сфере образования и профессиональной подготовки. При разработке и использовании модели экспериментатор видит и «разыгрывает» на ней реальные процессы и ситуации. Это помогает ему понять поставленную задачу, что стимулирует процесс самообучения.

На этапе проектирования важнейшее значение приобретает использование математических моделей в качестве инструмента для анализа, оптимизации и прогнозирования поведения моделируемых объектов.

Моделирование с помощью ЭВМ аварийных ситуаций в работе системы управления позволяет не только освободить конструктора от утомительных проверок схемы, но и расширить число исследуемых вариантов поведения системы, повысить достоверность выводов в отношении ее безаварийной работы. С помощью ЭВМ можно анализировать на стадии проектирования как внешние, так и внутренние причины возникновения аварийных ситуаций.

Математические модели все шире используются непосредственно в системах управления. Подобные модели необходимы для исследования и совершенствования управления техническими системами и применяются в АСУ как на стадии проектирования, так и эксплуатации. Для решения задач управления моделируются реакции объекта, управляющие воздействия,

структура системы управления и контроля и так далее, т. е. имитируются процессы, происходящие в управляющей части системы.

Модель, в этом, случае входит как структурный элемент в проект АСУ. В такой модели необходимо различать: условия нормального функционирования (например, управление по каналам обратной и прямой связей, статическую и динамическую оптимизацию, адаптивное управление, групповое управление); критические ситуации, когда способ управления зависит от информации о типе и глубине отказа; пусковые и аварийные режимы, когда некоторые элементы программного управления могут зависеть от значений параметров и состояния системы.

В ходе проектирования часто приходится решать одну из двух оптимальных задач: определение оптимальных параметров заданного объекта или определение оптимального варианта системы произвольной структуры.

В первой задаче заданы структура объекта и статические характеристики входных сигналов. Требуется найти значения параметра системы (одного или нескольких), при которых обеспечивается экстремум некоторого критерия оптимальности. Эти значения параметров называют оптимальными. Такая задача наиболее широко распространена на практике, так как в ряде случаев структура объекта выбирается, исходя из его функционального назначения и имеющихся реальных элементов. Для решения задачи выбора оптимальных параметров необходимо выразить критерий оптимальности в виде некоторой функции и затем решать задачу на экстремум этой функции по варьируемым параметрам, принимая значения остальных фиксированными.

Вторая задача решается при условии, что одна часть структуры системы задана (например, объект управления), а другая (например управляющее или корректирующее устройство) может быть произвольно выбрана из некоторого класса. Заданы также характеристика входных сигналов. Требуется найти оператор управляющего (корректирующего) устройства системы, который обеспечивает с учетом заданных элементов этой системы

экстремум критерия оптимальности.

### **Особенности метода математического моделирования.**

Количественный и качественный выигрыши от применения математического моделирования на ЭВМ состоят в следующем:

1. Полностью или частично отпадает необходимость в длительном и трудоемком этапе изготовления лабораторного макета или полупромышленной установки; в затратах на комплектующие изделия материалы и конструктивные элементы, необходимые для изготовления макетов и установок; в измерительных приборах и оборудована для испытаний системы.

2. Значительно сокращается время определения характеристик (а следовательно, и доводки объекта) и время испытаний.

3. Появляется возможность разрабатывать системы, содержащей элементы, характеристики которых известны, но самих элементов, разработчика нет в настоящее время; имитировать воздействия воспроизведение которых при натурных испытаниях затруднено, требует сложного оборудования, сопряжено с опасностью для установки или экспериментатора, а иногда вообще невозможно; легко получают дополнительные характеристики объекта, которые сложно или невозможно получить с помощью измерительных приборов (характеристики параметрической чувствительности, частотные и пр.).

Метод математического моделирования, как любой численный метод, обладает существенным недостатком: решение всегда носит частный характер, соответствуя фиксированным значениям параметров системы и начальных условий. Поэтому для всестороннего анализа системы приходится многократно моделировать ее процесс функционирования, варьируя исходные данные.

При решении всех задач проектирования с использованием математического моделирования первоочередным вопросом является

получение необходимой точности. Недостаточная точность моделируемых данных может привести к ложным выводам или выбору неправильного варианта технологического процесса (либо параметра, что менее опасно). В случае моделирования на ЭВМ инструментальную точность ограничивают два существенных фактора: надежность ЭВМ (или, точнее, вероятность случайного сбоя в процессе счета) и точность формирования случайных чисел при статистических исследованиях и моделировании. При отсутствии двойного счета ошибки вследствие случайного сбоя ЭВМ входят непосредственно в результаты моделирования и вносят трудно устранимую дополнительную погрешность, которая может быть значительной, особенно при малых вероятностях исследуемых событий. Случайные сбои при решении ряда задач могут быть обнаружены визуальным контролем с помощью графических дисплеев, сопряженных с ЭВМ, на которой выполняется моделирование.

Представление процессов реальных непрерывных систем при моделировании в виде ряда дискретных чисел (состояний) сопряжено с дополнительной потерей точности. Поэтому представление состояний модели и входных сигналов не может быть выбрано произвольно, а зависит от требуемой точности результатов, характеристик этих сигналов и особенностей моделируемой системы и должно быть специально рассчитано.

### **Применение математического моделирования.**

В каждой отдельной отрасли цели, задачи и возможности математического моделирования определяются конкретными условиями. Для химической промышленности, например, определены следующие возможности математического моделирования полного производства: предсказание влияния изменений рабочих условий, технологической схемы и производительности; быстрый расчет материального и теплового балансов, что необходимо как для проектирования, так и для изучения ежемесячного

выпуска продукции на действующем производстве; быстрая и надежная оптимизация режима эксплуатации ; обнаружение и ликвидация узких мест; получение обширной информации о поведении всей системы; улучшение или создание новой, более совершенной системы автоматического регулирования при разработке системы управления с использованием ЭВМ вне контура регулирования; расчет стоимостных показателей управления и планирование.

При анализе электронных схем математическая модель включает зависимости параметров элементов схемы и законов их распределения от условий эксплуатации (температуры, давления и т. д.) в пределах технологического допуска. Наличие такой информации об элементах схемы позволяет имитировать ее испытания на модели. Изменения условий эксплуатации в заданных ТЗ пределах пересчитываются в машине в соответствующие изменения параметров элементов схемы, затем проводятся многократные испытания на модели при различных сочетаниях воздействий, изменений питающих напряжений и отклонений параметров элементов вследствие их технологического разброса. В заключение проводится математическая обработка результатов этих многократных испытаний и делается вывод о качестве (пригодности и пр.) электронной схемы.

Метод математического моделирования играет значительную роль при решении задач, связанных с автоматизацией управления. Результаты моделирования позволяют вскрыть закономерности процесса, определить потоки управляющей информации и обоснованно выбрать алгоритмы управления. Методом статистического моделирования может быть оценена эффективность различных принципов управления, вариантов построения управляющих систем, а также работоспособность и надежность управляющей аппаратуры.

Существенной областью применения метода математического моделирования является также сравнительная оценка различных алгоритмов управления и обработки информации. Моделирование позволяет экспериментально исследовать сложные внутренние взаимодействия в



рассматриваемой системе (или в ее подсистеме), определить, какие из переменных системы наиболее существенны и как эти переменные взаимодействуют. Типичным примером такой задачи является задача об оптимальном соотношении между точностью и частотой выдачи информации различными датчиками или управляющими блоками, а также выделение минимального количества информации которое еще обеспечивает заданное качество управления. Выдели информацию, доступную для управления, можно перейти к рассмотрению возможностей структуры системы управления. Одним из возникающих при этом вопросов является оценка оптимальной централизации (децентрализации) управления.

Таким образом, математическое моделирование позволяет решать (или облегчает решение) сложные задачи практики, и тем эффективнее, чем сложнее эти задачи.

### **Структуризация математических моделей**

Технологические процессы характеризуются значительной сложностью. Это проявляется в большом количестве информации, содержащейся в промышленных системах, и во взаимном влиянии их параметров. Построение любой математической модели для таких процессов начинают с блочного формализованного описания объекта моделирования, т. е. составлению полного математического описания предшествует анализ отдельных «элементарных» процессов, протекающие в объекте моделирования. Причем математические модели промышленных процессов удобно составлять по фактически существующий отдельным установкам и аппаратам, что значительно облегчает проверку их реализации на ЭВМ. Полная модель процесса получается как комбинация вариантов моделей отдельных блоков.

Такой подход эффективен, но затруднен тем, что развитие промышленности протекает в условиях непрерывного усложнения

технологической структуры предприятий, включая объединение отдельных производств в крупные комбинаты и многосвязные сети. Анализ этих производств, включающих огромные количества разнородных элементов при неполной информации об их функционировании, и может быть выполнен классическими методами и требует использования теории и аппарата больших систем. Согласно этой теории решаемые задачи подразделяются на три класса:

хорошо структурированные или количественно сформулированные задачи, в которых существенные зависимости выяснены настолько точно, что могут быть выражены в числах или символах;

неструктурированные или качественно выраженные задачи, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми не известны;

слабо структурированные или смешанные задачи, содержащие как качественные, так и количественные элементы.

Анализ больших систем предназначен для решения слабо структурированных задач, обладающих следующими особенностями: принимаемые решения относятся к будущему; имеется широкий диапазон альтернатив; решения зависят от технологических знаний, которых

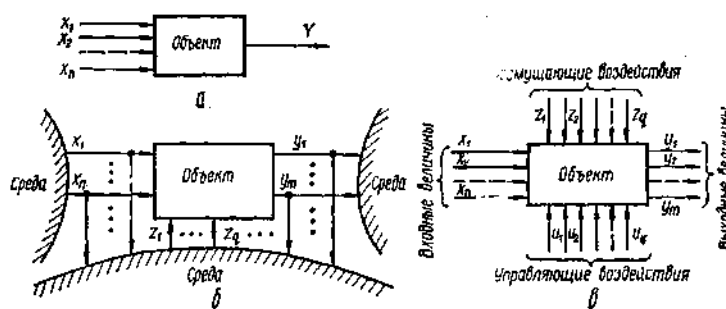


Рис. 1.1. Схема модели объекта с  $n$  входами и  $m$  выходами:

$a$  — модель как обобщенный преобразователь;  $б$  — связи объекта (модели) со средой;  $в$  — схема объекта с внешними воздействиями

в общем случае недостаточно; принимаемые решения требуют больших вложений и ресурсов и содержат элементы риска; не полностью определены

требования, относящиеся к стоимости и времени решения задачи; для решения задачи необходимо комбинирование различных ресурсов.

Структура модели большой промышленной системы показана на рис. 1.1, а, где  $\dot{Y}$  — вектор выходов. Для определения структуры математической модели в таком виде (т. е. как преобразователь типа «черного ящика» со многими входами и выходами) необходимо выяснить, какие именно входы и выходы объекта будут включены в его модель. Реальные технологические системы функционируют в условиях большого количества случайных факторов, источниками которых являются воздействия внешней среды, а также ошибки, шумы и отклонения различных величин, возникающие внутри системы. Среди внешних факторов, наряду со случайными изменениями различных условий (например, погоды), важное место занимают случайные колебания нагрузки (потребления продукции). Объект связан со средой бесконечным числом связей (рис. 1.1, б), определяющих его состояние. В общем виде схема объекта изображена на рис. 1.1, в

Совокупность параметров среды, которые воздействуют на объект, разделяют на группы в зависимости от характера и доли их участия в процессе. В самом общем случае объект характеризуют следующие параметры: входные величины (входы) —  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; управляющие воздействия (управления) —  $u_1, u_2, \dots, u_k$ ; возмущающие воздействия (возмущения) —  $z_1, z_2, \dots, z_s$ ; выходные величины (выходы) —  $y_1, y_2, \dots, y_m$ .

*Входными* принято называть параметры, значения которых могут быть измерены, но возможность воздействия на них отсутствует. Предполагается также, что эти параметры не зависят от режима процесса. Входными параметрами являются, например, контролируемый состав исходного сырья, теплоносители, поступающие в аппарат, количество и качество которых могут быть определены, но не подлежат изменению (т. е. поступающие потоки из предшествующих стадий или исходных емкостей).

*Управляющими* называются параметры, на которые можно оказывать прямое воздействие в соответствии с выбором разработчика или

предъявляемыми требованиями, что позволяет управлять процессом. Управляющими параметрами могут быть, например, регулируемые давление в аппарате, температура теплоносителя и т. п.

*Возмущающими* называют параметры, значения которых случайным образом изменяются с течением времени и которые не доступны для измерения. Ими могут быть, например, содержания различных примесей в исходном сырье, активность катализатора, температура процесса, изменяющаяся за счет реакций, а также другие возмущения.

*Выходными* называют параметры, значения которых определяются режимом процесса. Эти параметры характеризуют его состояние как результат суммарного воздействия входных, управляющих и возмущающих параметров. Поскольку назначение выходных параметров — описывать состояние процесса, их иногда называют параметрами состояния.

Почти каждая модель представляет собой некоторую комбинацию таких составляющих, как компоненты, параметры (переменные), функциональные зависимости, ограничения, целевые функции.

Например, в модели ракеты или космического корабля *компонентами* являются такие объекты, как система тяги, система наведения, система управления, несущая конструкция и т.п. Обобщенная модель города может состоять из таких компонентов, как система образования, система здравоохранения, транспортная система и т. п. В экономической модели производственной системы компонентами могут быть отдельные производственные объединения, отдельные потребители и т. п.

Описание каждого *параметра (переменной)* в модели должно производиться стандартным образом, например: определение и символ; текстовое описание; единицы измерения; диапазон изменения; характеристики (однозначный, многозначный, параметр числовой или с кодированным значением; регулируемая, нерегулируемая или случайная переменные и т. д.); место применения в модели

*Функциональные зависимости* описывают поведение параметров

(переменных) в пределах компонентов системы или выражают соотношения между ними. Эти соотношения, или операционные характеристики, по своей природе являются либо детерминированными, либо стохастическими. Детерминированные соотношения — это тождества или уравнения, которые устанавливают зависимость между переменными или параметрами в тех случаях, когда процесс на выходе системы однозначно определяется заданной информацией на входе. В отличие от этого стохастические соотношения представляют собой такие зависимости, которые при заданной входной информации дают на выходе неопределенный результат.

*Ограничения* представляют собой устанавливаемые пределы изменения значений переменных или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных средств (энергии, запасов, времени и т. п.). Они могут вводиться либо разработчиком (искусственные ограничения), либо самой системой вследствие присущих ей свойств (естественные ограничения). Например, физической системе такого типа, как ракета, искусственным ограничением может быть заданный минимальный радиус действия или максимально допустимый вес. Большинство технических требований к системам представляет собой набор искусственных ограничений.

*Целевая функция*, или функция критерия,— это точное отображение целей или задач системы и необходимых правил оценки их выполнения.

### **Структура и элементы модели.**

Математическую структуру модели технического объекта в некоторых случаях удобно описывать на языке теории графов. Построение математической модели в виде графа удобно при декомпозиции объекта на элементы. Граф служит источником информации о соподчиненности и связях элементов.

Формально *элементом* считается объект, не подлежащий дальнейшему расчленению на части (при данном рассмотрении системы). Существенны

только свойства элемента, определяющие его взаимодействие с другими элементами системы и влияющие на свойства системы в целом.

В больших системах нельзя установить непроницаемые перегородки, разграничивающие действия переменных различной физической природы. Например, практически во всех химико-технологических процессах нужно одновременно учитывать такие, не поддающиеся в реальных условиях разграничиванию процессы, как теплопередача, аэродинамические и гидравлические процессы, кинетику множества одновременно протекающих реакций. Понятие элемента такой системы и расчленение системы на элементы условны и зависят от целей анализа, так как каждый элемент можно рассматривать как систему.

Элементы могут накапливать, передавать, преобразовывать и рассеивать энергию или информацию. Типичными элементами являются трубы, краны, теплообменники, емкости, компрессоры, двигатели, триоды, конденсаторы и пр.

Точка, в которой соединяются элементы, называется *узлом*. В узлах не происходит никакого накопления, преобразования или рассеивания энергии; они похожи на абстрактные точки системы координат. Узлами, например, являются электрические шины, патрубки и муфты для присоединения труб. При математическом моделировании практически каждую промышленную систему можно представить состоящей из элементов, узлов и подсистем.

Формально любая совокупность элементов данной системы может рассматриваться как ее *подсистема*. Обычно подсистемы являются некоторыми самостоятельно функционирующими частями системы. Например, в производственном комплексе предприятия можно выделить подсистемы, соответствующие отдельным цехам или технологическим линиям. Правильное выделение подсистем сложной системы способствует упрощению расчетов при моделировании и более наглядной-интерпретации его результатов. Модель подсистемы составляется в виде структуры из моделей элементов и целиком входит в полную модель управляемой

системы. Поскольку подсистема — это сама» крупная, функционирующая отдельно от общих связей, структурная единица, важным этапом работы является ее декомпозиция, основанная на сборе фактов, выявлении и оценке различных воздействующих факторов. Как правило, в ходе моделирования приходится разделять систему на составные части, т. е. выполнять декомпозицию, а затем обследовать каждую часть в отдельности и объединять полученные сведения в единое целое.

Общая идея модели отображается в виде логической структурной? схемы системы. Принято строить модель по модульному принципу» т.е. в виде совокупности стандартных блоков-модулей. Такой подход достаточно эффективен, логически оправдан и может быть легко осуществлен и проверен. При этом можно строить и совершенствовать модель итерационным методом, добавляя к основной схеме блок за блоком. Построение модели из стандартных блоков дает возможность экспериментировать при ее реализации и в процессе машинной имитации.

### **Декомпозиция (разбиение) системы.**

При построении блочной модели мы разделяем ее функции на логические подфункции с более высоким уровнем детализации. Каждая модель может быть разделена на блоки, а блоки — на подблоки. Этот процесс деления блоков на подблоки продолжается до необходимого уровня детализации описания системы. Таким образом, модель функционально подразделяется на подмодели. Используя современные языки программирования, можно получить модель, максимально приближенную к изучаемой системе (как в структурном, так и в терминологическом отношении). Подблоки отражают в модели дальнейшее разделение на элементы и соответственно называются SEPARATOR, ЕМКОСТ1 и т.п.

Далее выясняется, какие классы объектов должны находиться в модели и какими параметрами каждый из них характеризуется; выбираются входные и выходные переменные. Обычно выходные переменные модели выбрать

нетрудно, так как они определяются уже в процессе формулировки целей моделирования. Чем меньше входных переменных, тем легче процесс моделирования. Однако, если входных переменных слишком мало, модель может стать неадекватной реальности, если слишком много,— из-за недостаточного объема памяти ЭВМ или сложности вычислительных процедур машинная\* имитация оказывается нереализуемой.

Если некоторые первоначально выбранные подсистемы оказываются чрезмерно сложными, каждую из них расчленяют (с сохранением связей) на конечное число более мелких подсистем нижнего уровня. Процедуру расчленения подсистем продолжают до получения таких подсистем, которые в условиях данной задачи будут признаны достаточно простыми и удобными для непосредственного математического описания. Подсистемы, не подлежащие дальнейшему расчленению, являются, как это сказано выше, элементами сложной системы. Таким образом, в общем случае сложная система является многоуровневой, состоящей из взаимосвязанных элементов, объединяемых в подсистемы различных уровней.

Использование понятия многоуровневой системы существенно расширяет возможности формального описания и моделирования объектов материального мира. При этом объекты большой сложности становятся предметом системного анализа, точного математического расчета. Они могут быть подвергнуты (с помощью ЭВМ) различным количественным исследованиям.

Представление исследуемого объекта в виде многоуровневой конструкции из элементов обычно называют *структуризацией объекта*. Структуризация — первый шаг на пути формального описания сложной системы. Другие необходимые шаги связаны с формализацией элементов системы и взаимодействий между ними. В структурированной системе объектами материального мира являются только элементы.

При декомпозиции сложных промышленных систем удобно расчленять их на типовые элементы, в которых протекают сходные между собой



технологические процессы. Для выделения типовых элементов (процессов) и определения их природы используют несколько основных критериев:

общность математического описания (модели) процессов, т. е. идентичность материальных и энергетических связей. Такая общность модели учитывает физико-химические особенности процессов;

общность аппаратурно-технологического оформления процессов, отражающая их целевое назначение и условия реализации;

общность особенностей автоматического управления, которая связана с природой процессов.

### **Взаимодействие элементов в модели.**

Взаимодействие элементов в процессе функционирования сложной системы рассматривается как результат совокупности воздействий каждого элемента на другие элементы. Воздействие, представленное некоторым набором характеристик, называют *сигналом*. Каждый элемент системы в общем случае может принимать входные сигналы и выдавать выходные. Сигналы передаются по каналам связи, проложенным между элементами сложной системы.

Совокупность алгоритмов, моделирующих элементы, с учетом алгоритмов их взаимодействия определяет исходный моделирующий алгоритм системы. В большинстве случаев исходный алгоритм нельзя положить в основу модели системы из-за его громоздкости и трудностей реализации на средствах используемой вычислительной техники, поскольку конечные цели моделирования элементов и всей системы различны. Специалисты, занимающиеся оценкой характеристик какого-либо конкретного элемента, разрабатывают моделирующий алгоритм так, чтобы получить оценки характеристик именно этого элемента с максимальной или заданной точностью. Конечные же цели моделирования системы в том, чтобы суммарная ошибка оценки выходных показателей системы не превосходила некоторых наперед заданных величин. В суммарную ошибку

входят ошибки случайные (из-за конечного числа реализаций на модели) и детерминированные (обусловленные неточностями структурного описания элементарных процессов).

Обычно стремление точнее описывать процессы в элементах сопровождается усложнением моделирующих алгоритмов, что приводит к увеличению времени счета одной реализации и при ограниченном времени, отведенном на моделирование,— к уменьшению числа реализаций на модели системы. Это в свою очередь сопровождается увеличением случайных ошибок в получаемых оценках. Поиск компромиссного соотношения между случайными и детерминированными ошибками с учетом ошибок моделирования, обусловленных ограниченным объемом имеющихся данных, практически всегда связан с анализом допустимых упрощений как исходных алгоритмов элементов, так и алгоритмов их взаимодействия.

При составлении модели, состоящей из отдельных функциональных блоков, возможны два подхода в зависимости от назначения модели:

*Структурный подход* — моделирование внутреннего механизма блока. В этом случае математическая модель должна отражать механизм взаимодействия узлов, элементов и деталей рассматриваемого блока; должны моделироваться как внутренняя структура блока, так и функционирование его элементов. Этот подход должен применяться тогда, когда задачей моделирования является, например, проверка структуры блока, правильности взаимодействия его частей и общей логики работы модели. Критерием правильности структуры блока является выполнение блоком заданной в ходе моделирования функции.

*Функциональный подход* — моделирование функции блока. В этом случае блок рассматривается как «черный ящик», его внутренний механизм может не моделироваться; задается лишь передаточная функция блока в целом. Этот подход применим к тем блокам, внутреннее содержание которых не описывается данной моделью. Такие блоки рассматриваются как неделимые элементы моделируемой системы.

Выбор того или иного подхода к моделированию функциональных блоков зависит от поставленной задачи. В ряде случаев моделирующий алгоритм бывает настолько сложным для реализации с помощью имеющихся в наличии вычислительных средств, что требуется измерить формулировку исходной задачи моделирования для упрощения 'математического описания. Это упрощение часто достигается за счет снижения точности математической модели путем сокращения полноты математического описания при исключении из модели части параметров или взаимодействий моделируемого объекта.

### **Сложность структурированных моделей.**

Основная цель разбиения полной системы на элементы, блоки и подсистемы — это построение ограниченного набора соотношений между характеристиками системы. В общем случае для полной сложной системы эта задача оказывается непосильной. Поэтому обычно приходится расчленять систему на большое количество элементов, математическое описание которых может быть выполнено.

Для определенности процесса декомпозиции введем численную меру *сложности* модели. В основу этой меры положим трудоемкость синтеза модели, т.е. затраты, необходимые для создания модели. Назовем эту меру сложностью. Сложность на стадии анализа (стадии «черного ящика») должна учитывать лишь число входов  $n$  и выходов  $m$  модели (для простоты не будем различать управляемые и неуправляемые входы). Пусть сложность имеет вид  $L = L(n, m)$ . Например,  $L = n^{\gamma} m$ , где  $\gamma > 1$ , так как число входов сильнее влияет на сложность, чем число выходов. Величину  $\gamma$  следует определять в зависимости от того, во сколько раз увеличивается трудоемкость синтеза модели при увеличении числа ее входов на единицу.

Функцию сложности в некоторых случаях можно считать аддитивной, т.е. если модель объекта состоит из нескольких  $(g)$  подсистем, то общая сложность равна сумме сложностей этих подсистем,

т.е., где  $L_i$  — сложность  $i$ -и подсистемы исходного объекта.

Учитывая  $L = \sum_{i=1}^g L_i$  сказанное, процесс декомпозиции модели можно рассматривать как процесс минимизации ее сложности, т.е. как решение следующей минимизационной задачи:

$$L_d \rightarrow \min_{D \in \{D\}} \Rightarrow D^*$$

где  $D$  — операция декомпозиции;  $\{D\}$  — множество допустимых вариантов декомпозиции;  $D^*$  — оптимальная декомпозиция, минимизирующая сложность  $L$  декомпозируемой системы.

Таким образом, цель декомпозиции модели состоит прежде всего в том, чтобы упростить последующий синтез модели объекта «расщеплением» ее на более простые элементы. Этот процесс должен производиться с учетом априорной информации о структурных особенностях объекта.

### Свойства и состояния систем.

Рассмотрим множество систем  $C = \{C_k\}, k = 1, \dots, K$ . Для любой отдельной системы  $C_{k_0} \in \{C_k\}$  остальные  $C$  для которых  $k \neq k_0$ , есть среда  $M$ .  $C_k$  можно рассматривать как множество непересекающихся подсистем. Подсистему также можно рассматривать состоящей из множества непересекающихся подсистем низшего уровня.

Для подсистем самого нижнего уровня в иерархии определений, задающих разбиение множества  $\{C_k\}$  на непересекающиеся подмножества, описания соответствуют их экспериментальным свойствам. Систему, для которой все свойства определены экспериментально (т.е. описание ее дано не через описание множества подсистем, ее составляющих), назовем элементом Э. В иерархии определений элементы находятся на самом нижнем уровне:

$$C_k = \{E_{c, k, i}\}, \quad i = 1, \dots, L_{c, k}.$$

Описание свойств подсистем и систем более высоких уровней может быть дано через описание свойств подсистем более низкого уровня.

Экспериментируя с некоторой подсистемой  $C_k$  как с элементом (т. е. не

разделяя на подсистемы), можно получить ее описание и тем самым уменьшить количество подсистем в модели.

Состояние всей совокупности подсистем  $\{C_k\}$ , а значит, и всей системы  $C$ , находящейся на самом высоком уровне в системе определений, обозначим  $X$ :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_n); \quad X \in \{X\}$$

где  $\{X\}$  — пространство состояний совокупности рассматриваемых систем  $C_k$ ;  $\{X_k\}$  — пространство состояний  $C_k$ ;  $\{X_n\}$  — пространство

состояний среды  $M$  (эти пространства имеют общие координаты);  $x_l$  — координата вектора пространства состояний — действительное число, обозначающее величину, полученную при физических измерениях или наблюдениях.

Любой подсистеме  $C_k$  соответствует совокупность свойств (совокупность закономерностей ее функционирования):

$$\Omega = \{\omega_h\}, \quad h = 1, 2, \dots, H,$$

где  $\omega_h$  — закономерность функционирования  $C_k$  в определенных условиях.

Свойства  $C_k$  проявляются в результате взаимодействия со средой; в различных условиях могут проявляться различные свойства — закономерности функционирования системы или элемента.

Закономерность  $\omega_h$  представляет собой совокупность описаний множества частных закономерностей  $(\omega_q)$ , проявляемых системой в условиях, которые соответствуют отдельным конкретным экспериментам. Закономерность  $\omega_h$  — это функциональное соотношение, которое может быть задано как в виде формулы (некоторой аналитической зависимости), так и в виде таблицы отдельных пар чисел, соответствующих  $\omega_q$  (значения аргумента и функции, заданные на некотором подмножестве или всем пространстве состояний  $\{X_q\}$ ).

Таким образом,  $\omega_h = \{\omega_q\}$ ,  $q = 1, 2, \dots, Q_h$ , где  $\omega_q$  — экспериментальный физический факт, выявляющий элементарное свойство системы и проявляющийся в определенных условиях.

Началу процесса функционирования  $C_k$  в соответствии с  $\omega_q$ , т.е.

конкретной реализации физической закономерности, однозначно соответствует начальное состояние среды— $X_{M,t}^0$  и начальное состояние подсистем  $C_k$ — $X_{C,t}^0$ , где состояние  $M$ — $X_M = (x_{M1}, \dots, x_{Md})$ ,

а состояние  $C_k$ — $X_{C,k} = (x_{Ck1}, \dots, x_{Cky})$

В каждый момент времени  $t$  система  $C$  и среда  $M$  находятся в одном определенном состоянии  $(X_{C,t}$  и  $X_{M,t})$ , которое в общем случае может быть известно лишь с некоторой вероятностью.

### События и взаимодействия в системе.

Событием в  $C$  назовем всякое изменение состояния  $X_C$ . Изменение можно зафиксировать только сравнением векторов, соответствующих состояниям  $C$  в различные моменты времени  $t$  и  $t + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )

Рассмотрим события, происходящие в результате взаимодействия системы и среды. Обозначим событие в  $C_k$  как  $X_{C,t,t+\varepsilon} = \langle X_{C,t}, X_{C,t+\varepsilon} \rangle$  /событие в среде  $M$ —как  $X_{M,t,t+\varepsilon} = \langle X_{M,t}, X_{M,t+\varepsilon} \rangle$

*Результат взаимодействия*—это пара событий (событие в отдельной системе  $C_k$  и событие в среде):

При моделировании  $\langle \omega_{C,M,t,t+\varepsilon} \rangle = \{X_{C,t,t+\varepsilon}, X_{M,t,t+\varepsilon}\}$  удобно наблюдать за изменениями в «полно» системе  $C$  через изменения в отдельных подсистемах  $C_k$

Всякое взаимодействие отдельной подсистемы  $M, C_{k0}$  с другими  $C_k \in M$  порождает пары событий, наблюдаемых в  $C_{k0}$  и в, разделенных между собой во времени интервалом  $\tau = t' - t$ , имеющим, в общем случае, случайную продолжительность.

*Взаимодействием элементов системы*, или взаимодействием элемента системы со средой, назовем пары событий, отнесенные к различным моментам времени  $t$  и  $t'$  ( $t' \geq t$ ). Причем событию  $\langle \omega_{C,M,t} \rangle$ , отнесенному к моменту  $t$  (процесс изменений в  $\langle X \rangle$ , заканчивающийся в момент  $t$ ), будет

всегда с определенной вероятностью соответствовать событию  $\langle \omega_{C, M, t'} \rangle$  (процесс заканчивается в момент  $t'$ ).

Любое свойство системы проявляется в определенных условиях в результате взаимодействия со средой. Конкретному эксперименту  $\omega_q$  всегда соответствуют в определенный момент времени  $t$  определенные условия, возникающие в результате некоторого предшествующего события в  $C$ . Эти условия заключаются в следующем:

система  $C$  должна находиться в одном из допустимых для данного эксперимента  $\omega_q$  состояний  $X_q \in \{X\}_q$ ;

для каждой из координат вектора  $X_q = X_{q,1}$  определяется значение функции  $\psi_{q,1}$  в момент времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \psi_{q,1} &= 1, \text{ если } x_{q,1} \in \{x_1\}_{*, \omega, q, t}; \\ \psi_{q,1} &= 0, \text{ если } x_{q,1} \notin \{x_1\}_{*, \omega, q, t}; \end{aligned}$$

где  $\{x_1\}_{*, \omega, q, t}$  — множество допустимых состояний по координат  $i$  в момент времени  $t$

Событие в системе  $C$ , соответствующее появлению условий, отделяющих проявление свойства, выявляется функцией

$$*\omega_q = *\omega_q(\psi_{q,1}, \psi_{q,2}, \dots, \psi_{q,t}, \dots, \psi_{q,N}).$$

Здесь  $*\omega_q$  принимает значение 1, если  $X_q \in \langle X_q \rangle$ , и 0 — в противном случае. Если  $*\omega_q = 0$ , то никаких событий не происходит;  $*\omega_q = 1$ , т.е. возникают условия, в которых начинается физический процесс, соответствующий  $\omega_q$ , то наблюдается событие

$$\langle \omega_{C, M, t, t+\epsilon} \rangle = \{X_{C, t, t+\epsilon}, X_{M, t, t+\epsilon}\}.$$

Событию в  $C_k X_{C, t, t+\epsilon, t'}$ , которое рассматривается в описи

$\omega_q$ , соответствует оператор

$$\varphi_q^*(X_{t'-\epsilon}), \epsilon + \epsilon' \leq \tau$$

где  $\varphi_q^*$  задает отображение  $X_{t'-\epsilon}$  в  $\{X\}_{q, t'}$

Оператор  $\Phi = \Phi^*(\varphi^*(X_t))$  задает отображение  $X_t$  в  $\{X\}_{q, t'}$

Конкретный вид функций  $*\omega_i$  для всех  $\omega_q$ , т.е. для всех возможных взаимодействий по всем  $C_k$ , задает пересечение  $\{X_{C,k}\}$  координатам и тем

самым определяет структуру  $\mathcal{C}$  (множество элементов системы и их взаимодействия).

Изменения структуры системы определяются изменением сое  $\mathcal{C}$ , т.е. свойств элементов системы в результате их взаимодействия. Описание изменений системы  $\mathcal{C}$  состоит в описании изменений (для различных  $\Psi_i$  при всевозможных взаимодействиях. Если дать элементарными терминами составляющие  $\omega_i$ :  $\ast\omega, \varphi, \varphi^\ast$ , то и структуры могут описываться через изменения состава  $\omega_i$ , чего может вводиться функция  $\mathfrak{F}$ , определяющая соответствие сое операторов  $\omega_i$  событию в системе.

При грамотном расчленении системы часть ее элементов из модели исчезает, поэтому такие элементы не оказывают значимого влияния на ход процессов, исследуемых с помощью модели.

Разделение модели процесса  $A$  на блоки неоднозначно и зависит от того, какие части системы ранее анализировались автономно, от имеющихся стандартных программ, от традиций исследователя и т.п. Однако при прочих равных условиях обмен информацией между блоками должен быть по возможности минимальным. При решении вопроса о допустимости удаления блока без замены его эквивалентом несущественными и подлежащими удалению считаются блоки модели, маловлияющие на принятый критерий интерпретации результатов моделирования [90]. Правила замены блоков упрощенными эквивалентами различаются в зависимости от характера взаимодействия блоков с оставшейся частью системы. Например, удаляя конечные блоки, составляющие описание взаимодействующего с моделируемой заполнены воздействием  $\xi_1$ , элементы 1—4 — воздействием  $\xi_2$ . Возможны комбинированные замены: элементы 18, 19, 32, 33 заменены пассивной связью и воздействием  $\xi_3$ . Оставшиеся элементы группируются в блоки I, II, III. Описания этих блоков могут быть полностью воспроизведены в модели или, если это необходимо, заменены упрощенными операторами, характеризующими отдельные аспекты (функционирования соответствующей части системы).



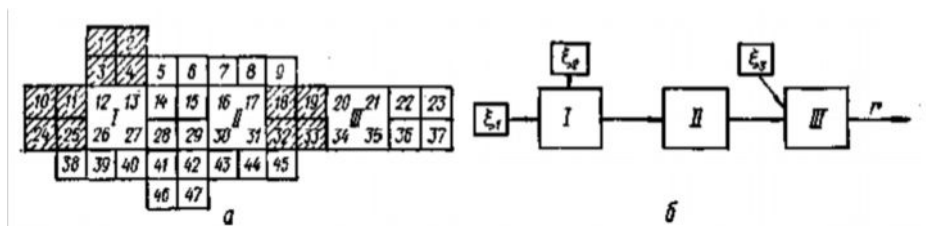


Рис. 1.3. Исходный технологический процесс как сумма подпроцессов (а) и его декомпозиция (б)

системой «потребителя», следует отразить интересы последнего, при формировании критерия интерпретации результатов моделирования.

Рассмотрим способы замены блока, воздействующего на исследуемую часть системы. Это воздействие зависит не только от структуры блока, но и от реакции со стороны исследуемой части. Поэтому характеристики воздействия в общем случае нельзя однозначно определить при автономном исследовании блока, и его нельзя заменить одним, не зависящим от исследуемой части эквивалентом.

Блок модели, воздействующий на исследуемую часть системы, можно заменить множеством упрощенных эквивалентов, не зависящих от исследуемой части. Каждый эквивалент формирует одно из возможных воздействий в пределах заданного диапазона, а моделирование проводится в нескольких (по числу воздействий) вариантах.

Применим рассмотренные правила к схеме рис. 1.3. При удалении конечных элементов (22, 23, 36, 37 на рис. 1.3, а), составляющих описание взаимодействующего с системой «потребителя», часто невозможно наглядно представить результаты моделирования. Поэтому функционирование этих элементов следует отразить при конструировании критерия  $\varepsilon$  интерпретации результатов (рис. 1.3, б).

Ряд элементов (14, 15, 28, 29) заменяется пассивными связями, транслирующими без искажения информацию, которой обмениваются сохранившиеся элементы. Некоторая часть элементов заменяется внешними

воздействиями. Например, элементы 10, 11, 24, 25 заменить

Блочные модели являются естественным средством для исследования управляемых систем в промышленности, конструктивно расчлененных на отдельные аппараты и установки. В связи с этим процесс построения моделей иерархичен: каждый блок (аппарат) в свою очередь допускает блочное представление. Это облегчает управление моделью и организацию (разделение) работ по ее программированию. Каждый блок может быть исследован автономно: аналитически, экспериментально или посредством специального «внутреннего» моделирования. При этом описание некоторых «блоков может быть задано стохастически.

### **Классификация моделей технологических процессов. Общие требования к моделированию.**

Общая классификация современных моделей показана на рис 1.4. Модели подразделяют на две основные группы: вещественные (материальные, приборные) и символические (языковые).

*Вещественные* модели часто называют просто «модели» (авиамодели, автомодели и пр.). Примерами вещественных моделей являются также пилотные установки (для изучения химических процессов), полигоны с соответствующими макетами для испытаний машин, макеты городов и т.д. Широкое проведение моделирования связано с построением специальных аналоговых (или цифровых) устройств и: моделей установок, входящих также в класс вещественных моделей.

В *символических* моделях фиксация, построение, описание объекта или явления даются на том или ином языке. При этом не имеет значения, на каком конкретном языке описан тот или иной объект, так как переход с одного языка описания объекта на другой не представляет принципиальных трудностей.



Символические модели делятся на модели словесно-описательные и математические.

К словесно-описательным моделям относятся технические задания, пояснительные записки к проектам и отчетам, постановки задач в словесно-описательной форме. Такие модели позволяют достаточно полно описать объект или ситуацию, однако их невозможно использовать непосредственно для анализа процессов формализованным путем с помощью ЭВМ. Поэтому словесно-описательные модели обычно преобразуют в математические для удобства дальнейшего оперирования с ними. В настоящей работе рассмотрены только математические

модели применительно к непрерывным и дискретным технологическим процессам.

Математическими моделями называются комплексы математических зависимостей и знаковых логических выражений, отображающих существенные характеристики изучаемого явления. Во многих случаях математические модели наиболее полно отображают объект. Примером

являются системы алгебраических и дифференциальных уравнений. Поскольку последние представляют собой наиболее абстрактные и, следовательно, наиболее общие модели, математические модели широко применяются в системных исследованиях.

Однако каждое применение математической модели должно быть обоснованным и осторожным: символическая модель всегда является абстрактной идеализацией задачи, поэтому при решении последней необходимы некоторые упрощающие предположения, которые могут привести к тому, что модель не будет служить действительным представлением данной задачи.

Математические модели могут быть аналитическими или имитационными. При использовании аналитических моделей процессы функционирования элементов сложной системы записываются в виде, некоторых функциональных соотношений (алгебраических, и: интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий. Аналитическая модель может исследоваться одним из следующих способов :

аналитически,— когда получают в общем виде явные зависимые для искомых величин;

численно,— когда, не имея решения уравнений в общем виде применяют средства вычислительной техники, чтобы получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

качественно,— когда, не имея решения в явном виде, можно: найти некоторые свойства решения, например, оценить устойчивое решения и т. п.

При использовании имитационных моделей, в отличие от аналитических, в ЭВМ воспроизводится текущее функционирование технической системы в некотором масштабе времени. При этом требуют воспроизводить входные воздействия в виде наборов чисел — реализаций процессов (а не числовых характеристик, как при аналитическом моделировании). В зависимости от характера решаемой задачи в процессе имитационного моделирования с различной степенью сложности

воспроизводятся и промежуточные преобразования сигнала. Например, если при анализе динамического режима работы блока его вход подается набор чисел, отображающий процесс с заданной реляционной функцией, то в ходе моделирования получается реализация выходного процесса, по которой в случае необходимости можно быть дана выборочная оценка корреляционной функции выходного сигнала.

Имитационное моделирование напоминает физический эксперимент. Отсюда первое достоинство имитационных моделей — наглядность результатов моделирования (как окончательных, так и промежуточных). Если при аналитическом моделировании обеспечиваете подобие характеристик объекта и модели, то при имитационном подобие имеется в самих процессах, протекающих в модели и реальном объекте.

Одно из основных достоинств имитационных моделей — возможность моделирования даже в тех случаях, когда аналитические модели либо отсутствуют, либо (из-за сложности системы) не дают практически удобных результатов. Достаточно просто при имитационном моделировании реализуются алгоритмы обработки результатов решений для выработки, например, управляющих воздействий в АСУТ что позволяет оценить точностные характеристики управляющих сигналов. При наличии соответствующих данных можно включить в сферу моделирования объект, управляемый АСУТП, и тем самым оценить качество управления объектом по некоторому показателю эффективности.

Имитационное моделирование позволяет учесть влияние больше числа случайных и детерминированных факторов, а также сложной зависимости при вводе в модель соответствующих элементов и операций. С точки зрения сбора статистических данных имитационная модель дает возможность проводить активный эксперимент с помощью целенаправленных изменений параметров модели на некотором множестве реализаций. Последнее позволяет исследовать оптимизируемые функции качества (функционалы) системы с помощью ЭВМ.

Для анализа функциональных зависимостей с помощью полученного в результате моделирования ряда числовых результатов могут быть использованы методы поиска: регулярные методы, методы случайного поиска и методы теории статистических решений. Таким образом, в отличие от решения отдельных задач имитационное моделирование на ЭВМ является качественно более высокой степенью изучения сложных систем и применения ЭВМ.

К достоинствам имитационного моделирования применительно к промышленным объектам относятся: динамический характер отображения системы; возможность учета случайных факторов и сложных зависимостей от них; сравнительная простота введения модификаций в модель (поскольку ее структура аналогична функциональной и логической структурам системы); возможность исследования системы на множестве модельных реализаций ее функционирования, т. е. проведения статистических экспериментов; практически неограниченные возможности применения различных видов математического аппарата.

При решении ряда задач могут применяться имитационные математические модели, отображающие только структурные (в частности, геометрические) свойства объекта. Такие структурные модели могут иметь форму матриц, графов, списков векторов и выражать возможное расположение элементов в пространстве, непосредственные связи между элементами в виде каналов, проводов, трубопроводов и т.п. Структурные модели используют в случаях, когда задачи структурного синтеза удастся ставить и решать, не учитывая особенности физических процессов в объекте.

При моделировании сложных технологических объектов возрастает объем входной информации (описание связей, задание параметров элементов модели и т.д.). Укрупненность же элементов моделей приводит к разрастанию необходимой номенклатуры элементарных моделей, к увеличению объема моделирующей программы. Компромиссным вариантом может быть соответствие разбиения модели делению моделируемой системы

на функциональные блоки. Функциональные модели отображают как структуру, так и процессы функционирования объекта и чаще всего имеют форму систем уравнений.

По способам получения функциональные математические модели делят на теоретические и формальные. Теоретические модели получают на основе изучения физических закономерностей, структура уравнений и параметры моделей имеют определенное физическое толкование. Формальные модели получают на основе проявления свойств моделируемого объекта во внешней среде. Теоретический подход в большинстве случаев позволяет получать математические модели более универсальные, справедливые для широких диапазонов изменения внешних параметров. Формальные модели по сравнению с теоретическими более точны в окрестностях той точки пространства параметров, вблизи которой они определялись, но менее точны вдали от этой точки.

### **Глубина моделирования и требования к моделям.**

При моделировании сложной системы обычно используется совокупность нескольких моделей из числа всех разновидностей. Любая система или подсистема может быть представлена различными способами, которые значительно отличаются друг от друга по сложности и детализации. В большинстве случаев в результате исследований появляется несколько различных моделей одной и той же системы. При этом в зависимости от глубины анализа простые модели последовательно заменяют все более сложными.

Для удобства оценки и сравнения схем моделирования между собой сформулируем три главных требования к математическим моделям.

*Точность* математической модели — ее свойство, отражающее степень совпадения предсказанных с ее помощью значений параметров объекта с истинными значениями этих параметров. Истинные значения параметров объекта обычно отождествляют с экспериментальными полученными. Однако

погрешности эксперимента во многих случаях оказываются соизмеримыми с погрешностями математической модели, а иногда и заметно их превышают.

*Экономичность* математической модели определяется прежде всего затратами машинного времени. Показателем экономичности математической модели может служить также количество внутренних параметров, используемых в ней. Чем больше таких параметров, больше затраты машинной памяти и тем больше усилий требуется для получения сведений об их численных значениях.

*Степень универсальности*, математической модели определяя ее применимостью к анализу многочисленной группы однотипных объектов, к их анализу в одном или многих режимах функцией моделирования. В противном случае использование машинных методов становится затруднительным.

В простейшем случае модель объекта может быть представлена в виде функциональной зависимости между скалярными переменными воздействия  $X$  и реакции  $Y$  в виде  $Y = Y(X)$ , где  $Y$  — некоторое число

В более сложном случае такая модель недостаточна. Например в случае, когда реакция  $Y$  зависит от воздействия, которое само является функцией  $X(t)$ . Тогда реакция  $Y$  является функционалом, отображающим закон преобразования функции  $X(t)$  в число  $Y$ , и модель объекта может быть представлена в виде  $Y = F(X(t))$ . Здесь  $F$  — закон преобразования, которому нужно подвергнуть функцию  $X(t)$ , чтобы получить переменную  $Y$

Более общим является случай, когда и воздействие, и реакция объекта представляют собой функции одного и того же или разных аргументов. Правило преобразования одной функции в другую называют оператором. Оператор  $A$  представляет собой совокупность математических или логических операций, устанавливающих соответствие между двумя функциями. В случае, когда воздействие представляет собой функцию  $X(s)$ , а реакция — функцию  $Y(t)$  модель объекта представляется в виде уравнения  $Y(t) = A\{X(s), t\}$  или  $Y(t) = A_t X(s)$ .



## **Символические математические имитационные функциональные модели**

В зависимости от вида оператора можно получить ту или иную типовую схему моделирования. Как указывалось, в работе рассмотрены математические модели\* применительно к непрерывным и дискретным технологическим процессам. Последние классифицируются в соответствии с теми характеристиками технологического процесса, которые обуславливают применение того или иного математического аппарата при его моделировании. Рассмотрим следующие виды моделей: стационарные и нестационарные; динамические; линейные и нелинейные; распределенные и сосредоточенные в пространстве; непрерывные и дискретные во времени; непрерывные и дискретные по величине; детерминированные и случайные; информационные.

*Стационарные и нестационарные модели.* Если свойства преобразования входных сигналов (функций), т. е. структура и свойства оператора  $A\{ \}$ , не изменяются со временем, то систему и ее модель называют стационарной; в противном случае — нестационарной. Реакция стационарной системы на любой заданный тип возмущения зависит только от интервала времени между моментом начала действия входного возмущения и данным моментом времени, т. е. свойство стационарности означает, что процесс преобразования входных сигналов (функций) инвариантен относительно сдвига входных сигналов во времени. Реакция нестационарной системы зависит как от текущего времени, так и от момента приложения входного сигнала. В этом случае при сдвиге входного сигнала во времени (без изменения его формы) выходные сигналы не только сдвигаются во времени, но и изменяют свою форму.

К стационарным моделям можно обычно отнести и модели одномоментные, используемые в тех случаях, когда моделируется система, для которой необходимо получить какое-то решение в определенный момент

времени. Примером могут служить системы управления запасами материалов, в которых одномоментные модели применяются повсеместно (определение однократного объема заказа на пополнение запасов или времени подачи заказа).

Частным случаем стационарных моделей являются модели статические, которые включают описание связей между основными переменными процесса в установившихся режимах (в равновесно состоянии без изменения во времени). Например, математическое описание статики химико-технологического процесса состоит обычно из трех видов уравнений: материального и теплового балансов, термодинамического равновесия системы (характеристика движущей силы) и скоростей протекания процессов (химических реакций, тепло и массопередачи и т. п.). Для расчета медленных процессов или процессов, протекающих с небольшими отклонениями от стабильных условий, принимается допущение, позволяющее считать процесс установившимся. Подобное допущение принимается, например, для расчета теплового баланса турбины при половинной, трехчетвертной либо полной нагрузке или для решения методами линейного программирования задачи смешения материалов.

Стационарные математические модели (кроме статических) обычно состоят из дифференциальных уравнений, статические модели — уравнений алгебраических.

*Динамические* модели позволяют рассчитать стационарные или не стационарные режимы технологических процессов и других объекты. Стандартные динамические модели включают переменные и соотношения между ними:

вектор независимых переменных  $X$ ;

добавочную независимую переменную  $t$ , называемую временем хотя она может не представлять физическую временную размерность

вектор неизвестных параметров  $\theta$ ;

вектор переменных  $Y$  состояния системы, который является функциями

от  $t$ ,  $X$  и  $\theta$ . Эти функции, например, определяются неявно с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{Y} = dY/dt = h(t, X, Y, \theta),$$

где  $X$  — вектор заданных функций, и системы начальных условий  $Y(0) = Y_0(X, \theta)$ . Здесь  $Y_0$  — вектор заданных функций;

вектор наблюдаемых переменных  $Z$ , точными значениями которых

$Z_t$  являются заданные функции от переменных состояния и от других переменных:  $Z_t = Z_t(t, Y, X, \theta)$

Общеизвестный специальный случай — когда переменные состояния наблюдаются непосредственно, т. е.  $Z = Y$

Стандартные динамические модели характеризуются множеством переменных состояния системы, которые изменяются со временем (или в зависимости от некоторой другой независимой переменной) в соответствии с определенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Начальные условия могут быть известны полностью или частично. Состояние системы наблюдается в различные моменты времени, но иногда переменные состояния не являются непосредственно измеряемыми, и вместо них приходится измерять связанные с ними наблюдаемые переменные. Неизвестные параметры могут появляться в начальных условиях, в дифференциальных уравнениях и в уравнениях наблюдений. В последнем случае они представляют неизвестные характеристики измерительных приборов, например константы калибровки.

Если в модели объекта содержатся дифференциальные уравнения порядка выше первого, сложность их анализа возрастает с ростом порядка уравнения (или с ростом числа дифференциальных уравнений в системе, поскольку уравнение  $m$ -го порядка можно преобразовать в систему из  $m$  уравнений 1-го порядка). Другая трудность, возникающая иногда при анализе систем дифференциальных уравнений, связана с особенностями задания начальных условий. Чаще всего начальные условия задаются при одном и том же значении независимой переменной. Для протекания

химических реакций, например, начальными условиями обычно служат значения концентраций в один и тот же момент  $t = 0$ ; в описаниях реакторов — это концентрации и температура в одной и той же точке — на входе в аппарат. Задачи с начальными условиями, заданными таким образом, называются задачами Коши. Моделировать их сравнительно просто.

Но встречаются задачи, в которых различные начальные условия заданы в разных точках. Например, во многих аппаратах с противотоком часть условий может быть задана со стороны входа одного потока, часть — со стороны входа другого. Это краевые задачи. Если краевую задачу не удастся свести к задаче Коши с помощью дополнительных уравнений (например, уравнений рабочей линии), то решение усложняется. При этом требуется, как правило, применение специальных расчетных приемов — итерации и др.

Состояние системы можно представить как точку с координатами  $y_1, \dots, y_m$  в некотором пространстве  $m$  измерений, называемом фазовым пространством или пространством состояний. Эта точка называется изображающей. Изменению состояния системы отвечает некоторое движение изображающей точки в этом пространстве. Путь изображающей точки при этом есть интегральная кривая системы. Эта кривая носит название фазовой траектории.

При построении фазового пространства добиваются взаимно однозначного и непрерывного соответствия между состояниями системы и точками фазового пространства, т.е. каждому состоянию системы должна соответствовать одна и только одна точка фазового пространства, а каждой точке фазового пространства — одно и только одно состояние системы. При этом близким состояниям системы должны соответствовать близкие точки фазового пространства. В силу этих требований фазовое пространство не всегда может быть обычным евклидовым  $n$ -мерным пространством при выполнении на ЭВМ. Благодаря быстродействию и простоте линейные модели широко применяются разработчиками, хотя большинство природных и промышленных процессов — нелинейно. Примером нелинейной модели

является зависимость между напряжением и силой тока в электрической цепи, хотя это справедливо в ограниченном диапазоне токов и напряжений.

Линейность или нелинейность по отношению к входным сигналам — это не то же самое, что линейность или нелинейность выходных переменных (функций) по параметрам. Оператор  $A\{ \}$  и задаваемая им модель называются линейными, если для системы справедлив принцип суперпозиции. Он состоит в том, что линейной комбинации произвольных входных сигналов ставится в соответствие такая же линейная комбинация сигналов на выходе из системы:

$$A\left\{\sum_{i=1}^n C_i x_i\right\} = \sum_{i=1}^n C_i A\{x_i\} = \sum_{i=1}^n C_i y_i.$$

Математическую модель с использованием линейного оператора можно записать в виде  $y = AX$ .

Нелинейные уравнения, в свою очередь, можно разделить на два подкласса: алгебраические (в которых над переменными производите только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональным показателем) и трансцендентны в которые входят другие функции от переменных (показательные, тригонометрические и др.). В любом случае сложность модели существенно зависит от числа уравнений и от вида входящих в них функций. Обычно наиболее просто решаются алгебраические уравнения 1-й степени (линейные), наиболее сложно — трансцендентные.

*Линейные и нелинейные модели.* Линейность или нелинейность анализируемого процесса оказывает решающее влияние на вид модели, метод программирования и быстродействие программы при ее на практике количество продуктов и уравнений, по которым ведется расчет, составляет несколько сотен, поэтому решение таких задач вручную получить весьма затруднительно.

В моделях производственных процессов, кроме уравнений, могут быть и неравенства.

В математических моделях часто используется ряд нелинейных математических структур, в первую очередь, это степенные полиномы. Методы интерполяции дают возможность существенно упростить способы расчета коэффициентов степенного полинома при наличии точных данных о входных и выходных параметрах. Например, при выборе в качестве математической структуры полинома вида

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_{n+1}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

для данных с равноотстоящими значениями независимой переменной коэффициенты рассчитываются по упрощенному способу:

$$a_0 = y_0; \quad a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $h$  — шаг интерполяции;  $\Delta^i y_0$  — разность  $i$ -го порядка. В результате полином  $P(x)$  записывается в виде

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)^n$$

называется интерполяционным полиномом Ньютона.

В интерполяционном полиноме Ньютона используются раз полученные при движении по одну сторону от значения, взятого в качестве начального. При использовании центральных разностей, полученных в результате применения как последующих значений функций (следующих после значения, выбранного в качестве начального), так и предыдущих, коэффициенты полинома рассчитываются следующим образом:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1! h}, \quad \dots, \quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)! h^{2n}}$$

Введя обозначение  $g = (x - x_0)/h$ , получим интерполяционный полином Гаусса для равноотстоящих  $2n$  точек интерполяции:

$$P(x) = y_0 + g \Delta y_0 + \frac{g(g-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \dots + \frac{(g+n-1)(g+n-2) \dots (g-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}.$$

Модификациями указанных полиномов являются Интерполяционные полиномы Стерлинга

$$P(x) = y_0 + g \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + g^2 \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} + \dots + \frac{g(g^2 - 1^2)}{3!} \times \\ \times \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_0}{2} + \dots + \frac{g(g^2 - 1^2)(g^2 - 2^2) \dots [g^2 - (n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} y_0$$

и Бесселя

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(g - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{g(g-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \dots$$

Для неравноотстоящих узлов интерполяции используется интерполяционный полином Лагранжа

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Особое место среди известных математических структур занимают ортогональные полиномы. Ортогональным называется полином

$$P(x) = k_0 \varphi_0(x) + k_1 \varphi_1(x) + \dots + k_n \varphi_n(x),$$

если всякая функция  $\varphi_i(x)$  системы  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  норма и две различные функции  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_j(x)$  указанной системы функций ортогональны в заданном интервале  $a \leq x \leq b$ , т.е. имеет место равенство

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Подобный выбор функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  дает возможность при квадратичном приближении произвести упрощенный расчет коэффициентов  $k_0, k_1, \dots, k_n$ .

Наиболее часто используют те ортогональные полиномы, для которых легко найти выражение в явном виде. Такими являются, например, приведенные ниже полиномы Чебышева, используемые для промежутка  $[-1, +1]$ . Полином Чебышева первого рода определяется

выражением

$$P(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots,$$

где значения  $T_i(x)$  определяются по выражению

$$T_i(x) = \cos i \arccos x, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Для целых положительных значений  $i$  это выражение является обычным степенным полиномом, так как  $T_0(x) = 1$ ;  $T_1(x) = x$ ;

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

При изменении  $x$  в промежутке  $[-\infty, +\infty]$  используется полином Эрмита

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + \dots,$$

$$H_i(x) = (-1)^i e^{x^2} d^i e^{-x^2} / dx^i; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

В частности,

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2; \\ H_3(x) = 8x^3 - 12x; \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Для периодических функций используются тригонометрические полиномы

$$P(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos ix + b_i \sin ix).$$

Каждая из математических структур обладает своей спецификой, что и определяет область ее применения при моделировании. Интерполяционные полиномы используются для объектов с известными зависимостями или с точными данными о значениях входных и выходных параметров.

*Модели распределенные и сосредоточенные в пространстве.* Технологический процесс может быть распределенным или сосредоточенным в пространстве и одновременно изменяться во времени. Модели, описывающие распределенные процессы, называются моделями с распределенными параметрами. Обычно они имеют вид дифференциальных уравнений в частных производных. Если основные переменные процесса не изменяются в пространстве, а только во времени, то математические модели, описывающие такие процессы, называют моделями с сосредоточенными параметрами и представляют их в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если процесс развивается одновременно и во времени, и в пространстве (по одной координате  $l$ ), то оператор  $A$  может преобразовывать входную векторную функцию  $X(t, l)$  в выходную векторную функцию  $Y(t, l)$  и зависеть от обоих аргументов:

$$A = A(t, l) = A_{t,l}.$$



*Модели непрерывные и дискретные во времени.* Непрерывной во времени модель является в том случае, когда характеризующая ее переменная определена для любого значения времени конкретной во времени, — если переменная получен; ко в определенные моменты времени. Непрерывный во времени процесс определяется моделью  $Y = A(t)$ , где  $t$  может принимать любое значение.

Так, если сигнал  $x(t)$  некоторого компонента системы огибает только в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ , то такой дискретный сигнал в моделировании записывают в виде последовательности  $\{x(t_i)\}$ . Дискретность модели может также возникнуть в том случае, ее состоит из непрерывных компонентов, но информация переходы одной компоненты к другой по заданной схеме (такие переходы возможны только по окончании соответствующих операций).

Непрерывные модели применяются при изучении систем, с непрерывными процессами, которые описываются с помощью систем дифференциальных уравнений, задающих скорость изменения переменных системы во времени. Непрерывные модели можно описать с помощью конечно-разностных уравнений, которые в предел ходят в соответствующие дифференциальные уравнения. Программирование непрерывных моделей сводится к дискретной вычислительной задаче, которую можно символически записать уравнения

$$y(t + \Delta t) = g[y(t), y(t - \Delta t), \dots, x(t), \theta],$$

где  $y(t), y(t - \Delta t)$  — соответственно векторы состояния <

с компонентами, определяемыми во все предыдущие моменты в;  $x(t)$  — вектор внесистемных переменных;  $\theta$  — вектор параметры системы;  $g$  — функция, определяющая поведение системы.

Конечно-разностные уравнения (линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные, уравнения первого и более высокого порядков, одномерные и многомерные) позволяют описать самые образные динамические системы как с дискретным временем, в пределе, с непрерывным, т. е. это достаточно универсальны моделирования.

Рассмотрим линейное одномерное конечно-разностное уравнение  $q$ -го порядка ( $q > 1$ ) с постоянными коэффициентами. Предположим наблюдения производятся в дискретные, равноотстоящие моменты времени. Примем также, что реакция на выходе такой динамической стационарной системы появляется с некоторой временной задержкой (на  $b$  интервалов квантования) по отношению к входному сигналу. С учетом указанных предположений запишем конечно-разностное уравнение в виде

$$y(k) = \delta_1 y(k-1) + \delta_2 y(k-2) + \dots + \delta_q y(k-q) + \omega_0 u(k-b) + \omega_1 u(k-b-1) + \dots + \omega_p u(k-b-p),$$

где  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_p$  — параметры уравнения;  $k$  — номер очередного интервала квантования.

Линейное конечно-разностное уравнение высокого порядка подобного типа всегда можно заменить системой конечно-разностных уравнений первого порядка, выраженных в форме Коши, т.е. разрешенных относительно первых разностей. Это обстоятельство привело к тому, что в качестве наиболее общего вида представления математического описания стали широко использоваться конечно-разностные модели в форме Коши. Стационарная линейная система может быть описана

моделью в стандартной форме:

$$\begin{cases} \eta(k+1) = \Phi \eta(k) + Gu(k); \\ y(k) = H \eta(k), \end{cases}$$

где  $y(k), \eta(k), u(k)$  — соответственно векторы откликов, переменных состояния и управляющих входных сигналов.

Матрицы  $\Phi, G$  и  $H$  не зависят от момента времени, т.е. являются постоянными. Они могут включать неизвестные параметры модели, подлежащие оцениванию. Приведенную модель называют также канонической формой модели стационарной линейной системы с дискретным временем. Если система нестационарна, то матрицы  $\Phi, G$  и  $H$  будут зависеть от  $k$ .

Нелинейная импульсная система в достаточно общем случае может быть описана моделью

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= v[\eta(k), u(k), k, \theta]; \\ y(k) &= \varphi[\eta(k), u(k), k, \theta], \end{aligned}$$

где  $v \in \mathbb{R}^1$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}^1$  — векторные функции.

Дискретизация возможна не только по аргументу — времени, но и по уровню (величине) сигналов. В этом случае сигналы имеют конечное число значений в некоторой заданной области существования. Подобные сигналы называют дискретными по величине или квантованными. И если непрерывному скалярному сигналу  $y^*$  соответствует плавная кривая, то квантованному скалярному сигналу  $y_k$  отвечает кусочно-постоянная линия (рис. 1.9).

Системы (модели), у которых входные и выходные сигналы являются непрерывными по времени и по величине, называют непрерывными. Если же входные и выходные сигналы дискретны по времени, то системы называют системами с дискретным временем или импульсными. Системы, у которых входные и выходные сигналы дискретны или по времени, или по величине, называют дискретными.

Существуют также и системы промежуточного типа, у которых свойства сигналов как функций от времени различны. Например, часть сигналов может быть непрерывной во времени, тогда как остальные сигналы могут быть дискретными. Такая система называется дискретно-непрерывной по времени.

*Детерминированные и случайные модели.* По наличию в модели случайных элементов, т.е. в зависимости от способа задания параметров, исходной информации, начальных условий и способа нахождения характеристик системы, математические модели можно подразделить на два больших класса: детерминированные и случайные (вероятностные, стохастические). В детерминированных моделях все исходные данные, ограничения и целевая функция (т.е. некоторое соотношение, количественно характеризующее поставленную перед системой цель) задаются в виде конкретных чисел, векторов или числовых функций.

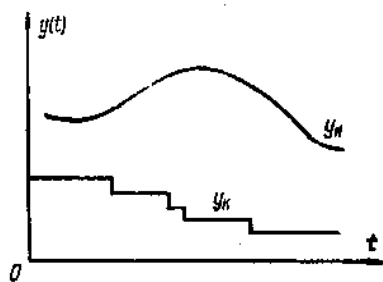


Рис. 1.9. Непрерывный ( $y_n$ ) и дискретный по величине ( $y_k$ ) сигналы

В детерминированных моделях используются различные классические методы математики: дифференциальные, линейные разностные и интегральные уравнения, операторы для сведения к алгебраическим моделям и др. При совместном рассмотрении этих соотношений состояния системы в заданный момент времени однозначно определяются через параметры системы, входную информацию и начальные условия.

По степени математической абстракции детерминированные модели можно разделить на сложные, описывающие все причинные связи какой-то реальной системы и позволяющие точно прогнозировать поведение системы в зависимости от изменения переменных (или параметров), и упрощенные, — в которых выбирается ряд основных, существенных зависимостей; устанавливаются и математически описываются связи между отдельными параметрами, соответствующие причинно-следственным закономерностям; другие, несущественные, связи отбрасываются (идеализированные модели).

Между этими двумя моделями существует ряд моделей, отличающихся степенью детализации. Первые модели, являясь наиболее точными и достоверными в чистом виде, из-за сложности не могут широко применяться в моделировании промышленного производства. На практике чаще всего применяются упрощенные идеализированные модели. При этом считается, что имеются существенные и несущественные факторы: существенные учитываются, несущественные отбрасываются. Между принятыми в модели факторами и результирующими показателями устанавливается жесткая

детерминированная связь. Широкое распространение идеализированных моделей вызвано их простотой и возможностью логического обоснования.

Любому реальному процессу присущи случайные флуктуации. Однако выбор детерминированной или вероятностной математической модели зависит от того, учитываются ли случайные факторы. Выделение детерминированных моделей в отдельный класс объясняется широким их применением и разнообразием математических методов решения детерминированных задач.

Если хотя бы один параметр модели или ограничительная функция имеет в качестве своих значений случайный вектор или случайную величину, то это случайная (стохастическая) модель. В этом случае под однозначностью определения характеристик моделируемого процесса понимается однозначное определение распределений вероятностей для характеристик процесса при заданных распределениях вероятностей для начальных условий и возмущений.

Стохастический характер модели связан с наличием в объекте и в среде различных неконтролируемых, но существенных факторов, которые можно моделировать статистически. Состояние системы в этом случае  $Y = F(X, U, E(t))$ , где  $E(t)$  — случайный процесс, моделирующий имеющуюся неопределенность объекта и среды. Эта неопределенность может быть связана как с быстрым изменением параметров объекта, так и с помехами, накладывающимися на измеряемые значения сигналов на входе и выходе объекта.

Стохастический объект и его модель ведут себя неоднозначно в одинаковых ситуациях, что моделируется случайным вектором  $E(t)$ , статистические свойства которого должны быть заданы. В простейшем случае  $Y = F(X, U) + E(t)$ .

Примером стохастического объекта является любой биологический организм, который в одинаковых условиях ведет себя по-разному. В этом случае  $Y$  описывает поведение объекта, которое строго зависит от внешних

условий, а все отклонения от этого регулярного поведения образуют «случайную помеху»  $E(t)$ .

Переход от детерминированной модели к стохастической осуществляется таким образом, чтобы она отражала в себе случайный характер данных и самой модели. Способ перехода выбирается в зависимости от сведений об изучаемой модели: уверенности в правильности и надежности данных и модели. При этом возможно, что эти сведения ошибочны.

Например, в случае детерминированного безынерционного объекта, когда возмущение и реакция могут рассматриваться как случайные величины  $X$  и  $Y$  соответственно, математическая модель, описывающая объект, дается в виде условного математического ожидания  $Y$  относительно  $X$ , т.е. объект описывается уравнением вида

$$M\{Y|X\} = f(X),$$

где  $M\{Y|X\}$  — условное математическое ожидание  $Y$  относительно  $X$ ,  $f$  — неслучайный закон преобразования.

Так, для усилительного элемента, на входе которого действует случайная величина  $X$ , выходной сигнал  $Y$  имеет вид

$$Y = M\{Y|X\} = KX.$$

В общем случае для стохастических объектов оператор является случайным (например, коэффициенты линейного дифференциального уравнения, весовые функции и т. д.).

*Информационные модели.* С помощью информационных (процедурных) моделей моделируются сложные устройства и комплексы типа вычислительных машин, радиолокационные станции, системы управления большими промышленными установками, летательными аппаратами и т. д. Функционирование таких систем представляет собой цепь событий, происходящих в дискретные моменты времени и заключающихся в изменении состояний элементов. Дискретное представление пространства и

времени обуславливает дискретность фазовых переменных, которыми являются величины, характеризующие состояния элементов. Роль элементов и внутренних параметров выполняют системы и выходные параметры некоторых подсистем. Так, элементами ЭВМ можно считать арифметическое устройство, оперативную память, устройства ввода и вывода и т.п. Фазовые переменные, характеризующие состояния этих элементов, могут принимать только два значения: «занято», если в данный момент устройство работает, или «свободно», если устройство находится в состоянии ожидания. Примерами выходных параметров служат вероятность обслуживания поступивших в систему заявок (сообщений), среднее время простоя в очереди на обслуживание, быстродействие устройства. Для построения математических информационных моделей широко используют математическую логику, теорию массового обслуживания, методы теории автоматического управления.

При анализе сложных промышленных производств особый интерес представляют информационные процедурные модели, а также модели режимов и обеспечения безопасности работы. Информационные процедурные модели определяют содержание, формат и скорость (или частоту) потока информации. Эти модели охватывают также контроль и проверку информации, учет и отчетность по ней, получение разрешений и представление некоторых видов информации, меры предосторожности против потерь информации в аварийных случаях и порядок работы по ее восстановлению при неисправностях или поломкам.

Процедурные модели режимов и обеспечения безопасности работы описывают действия, изменяющие состояние комплекса оборудования предприятия, а также совокупность предписаний об ограничениях, налагаемых на ход работы по соображениям безопасности. К типичным режимам относятся пуск, останов оборудования, изменения нагрузки. При разработке этих моделей человек-оператор рассматривается как составная часть комплекса оборудования; ему отведены следующие функции:

обеспечение ввода данных в ЭВМ; слежение за выходными данными с помощью измерительной аппаратуры и ЭВМ; привлечение к работе резервного оборудования в случае неисправности основного; отыскание и устранение ошибок в программе и неполадок в ЭВМ. Эти функции отведены оператору, так как он может выполнять их лучше с большей экономией средств, чем любая автоматизированная система.

Математические модели каждой отрасли современной технологии делятся по классам соответствующих процессов. Так, по характеру материальных и энергетических связей процессы химической технологии можно разделить на 5 основных классов: 1) гидродинамические; 2) тепловые; 3) диффузионные или массообменные; 4) механические и 5) химические. Каждый из этих классов с учетом целевого назначения и условий реализации в свою очередь делится на типовые процессы.

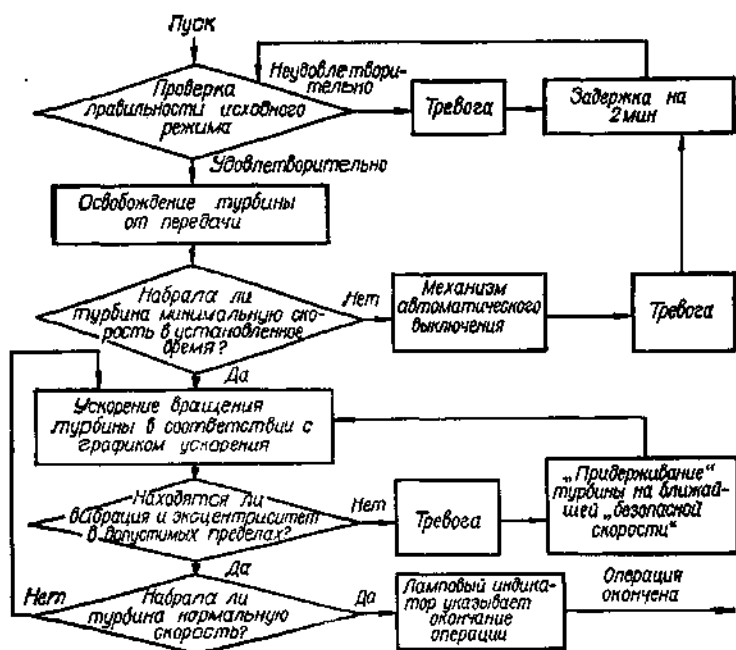


Рис. 1.10. Информационная модель пуска турбины

К классу гидродинамических относятся процессы перемещения жидкостей и газов по трубопроводам и аппаратам, перемешивания в жидких средах, процессы обработки неоднородных жидких и газовых систем (очистка газов от пыли и туманов, разделение суспензий путем отстаивания,



фильтрации, центрифугирования и т.п.). Класс тепловых процессов составляют процессы нагревания, охлаждения, конденсации, выпаривания и т.п. Класс диффузионных (массообменных) процессов связан с переносом вещества в различных агрегатных состояниях из одной фазы в другую (абсорбция, дистилляция и ректификация, адсорбция, десорбция, растворение, кристаллизация, увлажнение, сушка, сублимация, ионный обмен и др.). К классу механических процессов относятся процессы дробления, измельчения, транспортирования твердых материалов, гранулирования и др. Класс химических процессов характеризуется самым большим многообразием.

## **Теория моделирования**

### **Основные понятия моделирования**

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания. Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений.

Модель - объект или описание объекта, системы для замещения (при определенных условиях предложениях, гипотезах) одной системы (т.е. оригинала) другой системы для изучения оригинала или воспроизведения его каких-либо свойств. Модель - результат отображения одной структуры на другую.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как

абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез. Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Возможности моделирования, то есть перенос результатов, полученных в ходе построения и исследования модели, на оригинал основаны на том, что модель в определенном смысле отображает (воспроизводит, моделирует, описывает, имитирует) некоторые интересующие исследователя черты объекта. Моделирование как форма отражения действительности широко распространено, и достаточно полная классификация возможных видов моделирования крайне затруднительна, хотя бы в силу многозначности понятия "модель", широко используемого не только в науке и технике, но и в искусстве, и в повседневной жизни.

Применительно к естественным и техническим наукам принято различать следующие виды моделирования:

- *концептуальное моделирование*, при котором совокупность уже известных фактов или представлений относительно исследуемого объекта или системы истолковывается с помощью некоторых специальных знаков, символов, операций над ними или с помощью естественного или искусственного языков;
- *физическое моделирование*, при котором модель и моделируемый объект представляют собой реальные объекты или процессы единой или различной физической природы, причем между процессами в объекте-оригинале и в модели выполняются некоторые соотношения подобия, вытекающие из схожести физических явлений;

- *структурно-функциональное моделирование*, при котором моделями являются схемы (блок-схемы), графики, чертежи, диаграммы, таблицы, рисунки, дополненные специальными правилами их объединения и преобразования;
- *математическое (логико-математическое) моделирование*, при котором моделирование, включая построение модели, осуществляется средствами математики и логики;
- *имитационное (программное) моделирование*, при котором логико-математическая модель исследуемого объекта представляет собой алгоритм функционирования объекта, реализованный в виде программного комплекса для компьютера.

Разумеется, перечисленные выше виды моделирования не являются взаимоисключающими и могут применяться при исследовании сложных объектов либо одновременно, либо в некоторой комбинации. Кроме того, в некотором смысле концептуальное и, скажем, структурно-функциональное моделирование неразличимы между собой, так как те же блок-схемы, конечно же, являются специальными знаками с установленными операциями над ними.

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Традиционно под моделированием на ЭВМ понималось лишь имитационное моделирование. Можно, однако, увидеть, что и при других видах моделирования компьютер может быть весьма полезен, за исключением разве физического моделирования, где компьютер вообще-то тоже может использоваться, но, скорее, для целей управления процессом моделирования. Например при математическом моделировании выполнение одного из основных этапов - построение математических моделей по экспериментальным данным - в настоящее время просто немыслимо без компьютера. В последние годы, благодаря развитию графического интерфейса и графических пакетов, широкое развитие получило компьютерное, структурно-функциональное моделирование, о котором

подробно поговорим ниже. Положено начало использованию компьютера даже при концептуальном моделировании, где он используется, например, при построении систем искусственного интеллекта.

Таким образом, мы видим, что понятие "компьютерное моделирование" значительно шире традиционного понятия "моделирование на ЭВМ" и нуждается в уточнении, учитывающем сегодняшние реалии. Начнем с термина "компьютерная модель".

В настоящее время под компьютерной моделью чаще всего понимают:

- условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанный с помощью взаимосвязанных компьютерных таблиц, блок-схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекстов и т. д. и отображающий структуру и взаимосвязи между элементами объекта. Компьютерные модели такого вида мы будем называть структурно-функциональными;
- отдельную программу, совокупность программ, программный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов, воспроизводить (имитировать) процессы функционирования объекта, системы объектов при условии воздействия на объект различных, как правило случайных, факторов. Такие модели мы будем далее называть имитационными моделями.

Компьютерное моделирование - метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели.

Суть компьютерного моделирования заключена в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризующих систему. Компьютерное моделирование

для рождения новой информации использует любую информацию, которую можно актуализировать с помощью ЭВМ.

Основные функции компьютера при моделировании:

- выполнять роль вспомогательного средства для решения задач, решаемых обычными вычислительными средствами, алгоритмами, технологиями;
- выполнять роль средства постановки и решения новых задач, не решаемых традиционными средствами, алгоритмами, технологиями;
- выполнять роль средства конструирования компьютерных обучающе - моделирующих сред;
- выполнять роль средства моделирования для получения новых знаний;
- выполнять роль "обучения" новых моделей (самообучающиеся модели).

Разновидностью компьютерного моделирования является вычислительный эксперимент.

Компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент становится новым инструментом, методом научного познания, новой технологией также из-за возрастающей необходимости перехода от исследования линейных математических моделей систем .

Предметом компьютерного моделирования могут быть: экономическая деятельность фирмы или банка, промышленное предприятие, информационно-вычислительная сеть, технологический процесс, любой реальный объект или процесс, например процесс инфляции, и вообще - любая Сложная Система. Цели компьютерного моделирования могут быть различными, однако наиболее часто моделирование является, как уже отмечалось ранее, центральной процедурой системного анализа, причем под системным анализом мы далее понимаем совокупность методологических средств, используемых для подготовки и принятия решений экономического, организационного, социального или технического характера.

Компьютерная модель сложной системы должна по возможности отображать все основные факторы и взаимосвязи, характеризующие реальные ситуации, критерии и ограничения. Модель должна быть достаточно универсальной, чтобы по возможности описывать близкие по назначению объекты, и в то же время достаточно простой, чтобы позволить выполнить необходимые исследования с разумными затратами.

Все это говорит о том, что моделирование, рассматриваемое в целом, представляет собой скорее искусство, чем сформировавшуюся науку с самостоятельным набором средств отображения явлений и процессов реального мира.

#### **ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ**

Отображая физическую систему (объект) на математическую систему (например, математический аппарат уравнений) получим физико - математическую модель системы или математическую модель физической системы. В частности, физиологическая система - система кровообращения человека, подчиняется некоторым законам термодинамики и описав эту систему на физическом (термодинамическом) языке получим физическую, термодинамическую модель физиологической системы. Если записать эти законы на математическом языке, например, выписать соответствующие термодинамические уравнения, то получим математическую модель системы кровообращения. Эту модель можно назвать физиолого - физико - математической моделью или физико - математической моделью.

Модели, если отвлечься от областей, сфер их применения, бывают трех типов: познавательные, прагматические и инструментальные.

- *Познавательная модель* - форма организации и представления знаний, средство соединения новых и старых знаний. Познавательная модель, как правило, подгоняется под реальность и является теоретической моделью.

- *Прагматическая модель* - средство организации практических действий, рабочего представления целей системы для ее управления. Реальность в них подгоняется под некоторую прагматическую модель. Это, как правило, прикладные модели.
- *Инструментальная модель* - является средством построения, исследования и/или использования прагматических и/или познавательных моделей.

Познавательные отражают существующие, а прагматические - хоть и не существующие, но желаемые и, возможно, исполнимые отношения и связи.

По уровню, "глубине" моделирования модели бывают эмпирические - на основе эмпирических фактов, зависимостей, теоретические - на основе математических описаний и смешанные, полуэмпирические - использующие эмпирические зависимости и математические описания.

- адекватность: модель успешно описывает моделируемую систему;
- информативность: модель должна содержать достаточную информацию о системе - в рамках гипотез, принятых при построении модели.

### ***ТРЕБОВАНИЯ К МОДЕЛИ***

*Основные требования к модели:*

- наглядность построения;
- обозримость основных свойств и отношений;
- доступность ее для исследования или воспроизведения;
- простота исследования, воспроизведения;
- сохранение информации, содержащиеся в оригинале (с точностью рассматриваемых при построении модели гипотез) и получение новой информации.

*Проблема моделирования* состоит из трех задач:

- построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);

- исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
- использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

*Свойства модели:*

- конечность: модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и, кроме того, ресурсы моделирования конечны;
- упрощенность: модель отображает только существенные стороны объекта;
- приближительность: действительность отображается моделью грубо или приблизительно;

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

*Математическая модель*  $M$  описывающая систему  $S (x_1, x_2, \dots, x_n; R)$ , имеет вид:  $M=(z_1, z_2, \dots, z_m; Q)$ , где  $z_i \in Z$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $Q, R$  - множества отношений над  $X$  - множеством входных, выходных сигналов и состояний системы и  $Z$  - множеством описаний, представлений элементов и подмножеств  $X$ , соответственно.

Модель включает в себя: объект  $O$ , субъект (не обязательный)  $A$ , задачу  $Z$ , ресурсы  $B$ , среду моделирования  $C$ .

Модель  $M$  называется *статической*, если среди  $x_i$  нет временного параметра  $t$ . Статическая модель в каждый момент времени дает лишь "фотографию" системы, ее срез.

Модель - *динамическая*, если среди  $x_i$  есть временной параметр, т.е. она отображает систему (процессы в системе) во времени.

Модель - *дискретная*, если она описывает поведение системы только в дискретные моменты времени.

Модель - *непрерывная*, если она описывает поведение системы для всех моментов времени из некоторого промежутка времени.



Модель - *имитационная*, если она предназначена для испытания или изучения, проигрывания возможных путей развития и поведения объекта путем варьирования некоторых или всех параметров  $x_i$  модели  $M$ .

Модель - *детерминированная*, если каждому входному набору параметров соответствует вполне определенный и однозначно определяемый набор выходных параметров; в противном случае - модель недетерминированная, стохастическая (вероятностная).

Можно говорить о различных режимах использования моделей - об имитационном режиме, о стохастическом режиме и т. д.

### **ЖИЗНЕННЫЙ ЦИКЛ МОДЕЛИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ**

1. Сбор информации об объекте, выдвижение гипотез, предмодельный анализ;
2. Проектирование структуры и состава моделей (подмоделей);
3. Построение спецификаций модели, разработка и отладка отдельных подмоделей, сборка модели в целом, идентификация (если это нужно) параметров моделей;
4. Исследование модели - выбор метода исследования и разработка алгоритма (программы) моделирования;
5. Исследование адекватности, устойчивости, чувствительности модели;
6. Оценка средств моделирования (затраченных ресурсов);
7. Интерпретация, анализ результатов моделирования и установление некоторых причинно - следственных связей в исследуемой системе;
8. Генерация отчетов и проектных (народно - хозяйственных) решений;
9. Уточнение, модификация модели, если это необходимо, и возврат к исследуемой системе с новыми знаниями, полученными с помощью моделирования.

### **ОПЕРАЦИИ НАД МОДЕЛЯМИ**

Основными операциями используемыми над моделями являются:

1. *Линеаризация.* Пусть  $M \in M(X, Y, A)$ , где  $X$  - множество входов,  $Y$  - выходов,  $A$  - состояний системы. Схематически можно это изобразить:

X	Ю	Y
↓	↓	↓
A	A	A

Если  $X$ ,  $Y$ ,  $A$  - линейные пространства (множества), а  $f$ ,  $g$  - линейные операторы, то система (модель) называется линейной. Другие системы (модели) - нелинейные. Нелинейные системы трудно поддаются исследованию, поэтому их часто линеаризуют - сводят к линейным каким-то образом.

2. *Идентификация.* Пусть  $M \in M(X, Y, A)$ ,  $A = \{a_i\}$ ,  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$  - вектор состояния объекта (системы). Если вектор  $a_i$  зависит от некоторых неизвестных параметров, то задача идентификации (модели, параметров модели) состоит в определении по некоторым дополнительным условиям, например, экспериментальным данным, характеризующим состояние системы в некоторых случаях. Идентификация - решение задачи построения по результатам наблюдений математических моделей, описывающих адекватно поведение реальной системы.

3. *Агрегирование.* Операция состоит в преобразовании (сведении) модели к модели (моделям) меньшей размерности ( $X$ ,  $Y$ ,  $A$ ).

4. *Декомпозиция.* Операция состоит в разделении системы (модели) на подсистемы (подмодели) с сохранением структур и принадлежности одних элементов и подсистем другим.

5. *Сборка.* Операция состоит в преобразовании системы, модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых).

6. *Макетирование.* Эта операция состоит в апробации, исследовании структурной связности, сложности, устойчивости с помощью макетов или подмоделей упрощенного вида, у которых функциональная часть упрощена (хотя вход и выход подмоделей сохранены).

7. *Экспертиза, экспертное оценивание.* Операция или процедура использования опыта, знаний, интуиции, интеллекта экспертов для

исследования или моделирования плохо структурируемых, плохо формализуемых подсистем исследуемой системы.

8. *Вычислительный эксперимент.* Это эксперимент, осуществляемый с помощью модели на ЭВМ с целью распределения, прогноза тех или иных состояний системы, реакции на те или иные входные сигналы. Прибором эксперимента здесь является компьютер (и модель!).

## **ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ**

Модели и моделирование применяются по следующим основным и важным направлениям.

1. Обучение (как моделям, моделированию, так и самих моделей).
2. Познание и разработка теории исследуемых систем - с помощью каких - то моделей, моделирования, результатов моделирования.
3. Прогнозирование (выходных данных, ситуаций, состояний системы).
4. Управление (системой в целом, отдельными подсистемами системы, выработка управленческих решений и стратегий).
5. Автоматизация (системы или отдельных подсистем системы).

В базовой четверке информатики: "модель - алгоритм - компьютер - технология" при компьютерном моделировании главную роль играют уже алгоритм (программа), компьютер и технология (точнее, инструментальные системы для компьютера, компьютерные технологии). Например, при имитационном моделировании (при отсутствии строгого и формально записанного алгоритма) главную роль играют технология и средства моделирования; аналогично и в когнитивной графике.

## **Этапы построения модели**

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование - не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования "погружен" в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Для моделирования существенно объединение дифференциального (атомистического) и структурно-целостного подходов, диалектическое единство анализа и синтеза при исследовании изучаемых явлений. Моделирование заключается в имитации изучаемого явления. Точность имитации определяется путем сравнения полученного при воспроизведении результата с его прототипом, объектом исследования, и оценки степени их сходства.

В целом, моделирование включает в себя три необходимых этапа: *анализ* объекта исследования, *построение* (синтез) модели, получение результата и его *оценка* путем сравнения с объектом. Рассмотрим более детально эти этапы.

### **АНАЛИЗ ОБЪЕКТА МОДЕЛИРОВАНИЯ**

В основу модели при ее формировании кладутся некоторые первоначальные знания об объекте, закономерности, устанавливающие свойства этого объекта (или класса объектов), его характеристики, особенности связи между составляющими объект, элементами. Получение этих знаний и их уточнение и являются содержанием первого этапа моделирования.

На этом этапе формируется возможно более полное описание объекта: выделяются его элементы, устанавливаются связи между ними, вычленяются существенные для исследования характеристики, выявляются параметры, изменение которых влияет или может влиять на объект. На том же этапе формируются, подлежащие последующей проверке

гипотезы о закономерностях, присущих изучаемому объекту, о характере влияния на него изменения тех или иных параметров и связей между его элементами.

На том же этапе исходные предположения переводятся на четкий однозначный язык количественных отношений и устраняется нечеткие, неоднозначные высказывания или определения, которые заменяются, быть может, и приближенными, но четкими; не- допускающими различных толкований высказываниями

### **ФОРМИРОВАНИЕ (СИНТЕЗ) МОДЕЛИ**

Формирование (синтез) модели представляет собой второй этап моделирования. На этом этапе в соответствии с задачами исследования осуществляется воспроизведение, или имитация, объекта на ЭВМ с помощью программы, которая включает в себя закономерности и другие исходные данные, полученные на этапе анализа. Структура модели, существенно зависит от задач исследования.. Так, например, если проверяется полнота и правильность наших знаний об объекте, последний имитируется с использованием, всех известных исходных соотношений. Если же задача, заключается ,в проверке некоторых предположений и степени; их общности, то именно эти предположения вводятся в программу и в результате имитации получают объекты, которые лишь частично отражают реальные свойства имитируемого объекта.

### **ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ**

Оценка результатов, заключается, в установлении адекватности модели и объекта исследования - в определении степени близости,, сходства, машинных и человеческих действий или их результатов. При этом существенно не "абсолютное качество" машинных результатов, а степень сходства с объектом исследования. Так, при моделировании музыкальных сочинений важно не то, чтобы машинная музыка была "лучше" музыки

композиторов-классиков, а чтобы она была похожа на ту, которая исследуется, и - в идеале - была от нее неотличима (по эмоциональности, по выразительности, по синтаксической сложности, принадлежности к типу, стилю и т. п.).

Успешный результат сравнения (оценки) исследуемого объекта с моделью свидетельствует о достаточной степени изученности объекта, о правильности принципов, положенных в основу моделирования, и о том, что алгоритм, моделирующий объект, не содержит ошибок, т. е. о том, что созданная модель работоспособна. Такая модель может быть использована для дальнейших более глубоких исследований объекта в различных новых условиях, в которых реальный объект еще не изучался.

Чаше, однако, первые результаты моделирования не удовлетворяют предъявленным требованиям. Это означает, что по крайней мере в одной из перечисленных выше позиций (изученность объекта, исходные принципы, алгоритм) имеются дефекты. Это требует проведения дополнительных исследований и соответствующего изменения машинной программы, после чего снова повторяются второй и третий этапы. Процедура повторяется до получения надежных результатов.

Этап оценки модели является важным этапом моделирования. В зависимости от характера объекта исследования и поставленных задач применяются различные методы оценки модели. Особенно большое значение имеет правильная оценка модели, когда моделирование, используется для проверки гипотез, а также когда объекты недостаточно формализованы и нет строгого объективного критерия сходства объекта и модели. С подобной ситуацией часто приходится встречаться при моделировании интеллектуальных, творческих процессов.

Модель должна обладать существенными признаками объекта моделирования. Иначе говоря, модель и объект должны быть неотличимы по этим признакам, которые выбираются, вообще говоря, исследователем в зависимости от цели и задачи исследования. Так, чучело птицы моделирует

внешний вид птицы, но не моделирует ее динамического состояния, например полета. Самолет-орнитоптер (летательный -аппарат с машущими, крыльями) не моделирует внешнего вида птицы, зато моделирует ее полет. При моделировании творчества также имитируются лишь отдельные стороны объекта, наиболее интересные (или доступные) для исследователя.

Наличие существенных для объекта признаков в модели определяется по-разному, в зависимости от его вида. В одних случаях эти признаки обнаруживаются непосредственно: например, в модели гармонизации - путем отыскания ошибок, в модели шахматиста (шахматной программе) - по результатам игры с настоящими шахматистами. В других случаях существенные признаки оказываются "скрытыми" и для их отыскания приходится прибегать к специальному эксперименту.

### **Системный поход к моделированию**

Любой искусственный объект можно рассматривать с двух точек зрения - глазами пользователя и глазами разработчика. Покупая телевизор, Вас интересует, прежде всего, его дизайн и технические характеристики, например размер экрана. Вы смотрите на объект как бы с внешней стороны - глазами пользователя. Телевизор в данном случае - это в буквальном смысле черный ящик и содержимое его для Вас не представляет никакого интереса.

Другое дело - разработчик. Чтобы спроектировать тот же телевизор, надо решить, из каких деталей он будет изготовлен и как их собрать воедино, чтобы всё работало. Таким образом, разработчика теперь интересует внутреннее строение объекта - его структура.

Все сказанное подтверждается рисунком 1, правда, в качестве примера выбран другой объект - интегральная микросхема (ИМС).



Рис. 1. Разные точки зрения на один и тот же объект

Рассмотренный пример демонстрирует два альтернативных подхода к моделированию - детерминистский (Ньютоновский) и системный.

В первом случае (детерминистский подход), объект рассматривается как чёрный ящик. Его работа (поведение) описывается некоторой функцией и сопровождается определенным набором параметров. Предполагается, что внешняя среда («окружение») не оказывает влияния на работу объекта. Это означает также отсутствие взаимного влияния таких объектов друг на друга.

Другими словами, во взаимодействии они будут работать точно так же, как и в изоляции. Такой изолированный взгляд значительно упрощает изучение объектов, но приводит к необходимости делать массу (порой необоснованных) допущений. Например, в электронике приходится предполагать, что входные сопротивления неизмеримо выше выходных ( $R_{вх} \gg R_{вых}$ ), а мощности любых источников питания и выходных сигналов бесконечно велики.

Главное достоинство этого подхода - простота исследования объекта - нередко вступает в противоречие с точностью и надежностью получаемых результатов. Попробуйте измерить напряжение на выходе логического элемента, переведённого в *Z*-состояние, цифровым и стрелочным вольтметрами и результат ошеломит вас.



Системный подход предлагает вам «забраться» внутрь чёрного ящика и посмотреть, что там есть. Вы увидите, что на самом деле объект представляет собой совокупность связанных между собой элементов (структуру), которые ещё и влияют друг на друга.

Кроме того, системный подход предполагает, что «окружение» оказывает влияние на поведение объекта, и этим влиянием пренебрегать нельзя.

Итак, можно зафиксировать первую особенность системного подхода: он рассматривает объект не как черный ящик, а как сложно организованную систему, состоящую из множества взаимодействующих элементов. Поведение объекта должно рассматриваться «в окружении» (с учетом влияния внешней среды). То же самое можно сказать и об отдельном элементе системы.

Кстати, любой элемент можно в свою очередь раздробить на более мелкие части и повторно применить к ним системный подход. Таким образом, можно говорить о структурной декомпозиции объекта и его иерархической организации (рис. 2).

Для иерархического описания определены две операции противоположного действия:

Push - понизить (детализировать) описание;

Pop - повысить уровень описания (спрятать структуру в черный ящик).

Что же даёт нам системный подход? Прежде всего, он позволяет представить одну сложную задачу совокупностью более простых, которые можно решать быстрее и легче. А главное, их можно решать параллельно.

Во-вторых, проектирование на любом иерархическом уровне ведется с учётом окружающей среды. Это исключает ситуации, когда готовый проект при реализации отказывается работать из-за не идеальности источников питания, внешних помех и наводок, изменения температуры, неучтенной нагрузки и т.п.

Благодаря системному подходу, реализованному в процедурах иерархического проектирования, удалось расширить класс принципиально

решаемых задач (например, проектирование СБИС) и повысить качество проектирования.

Примечательной особенностью системного подхода является его универсальность: с неизменным успехом он применим как для сложных, так и для простых объектов, а при многоуровневом описании сложных систем он «работает» на любом иерархическом уровне, то есть применим не только к системе, но и к любой ее части.

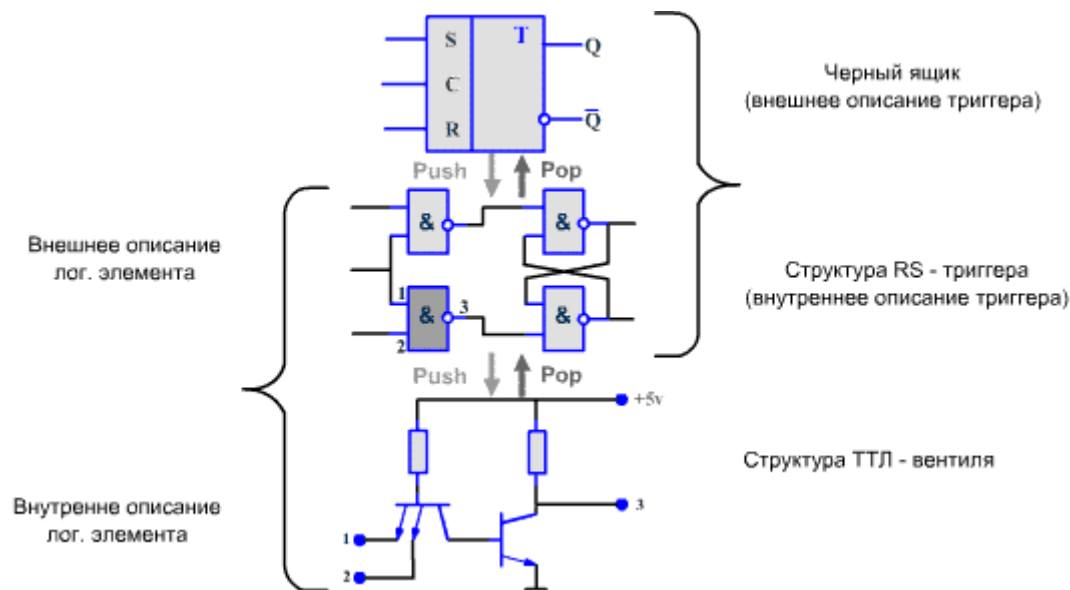


Рис. 2. Иерархическая организация объекта (на примере RS-триггера)

Системный подход к моделированию заимствует основные понятия, определения и методологию общей теории систем. Назовем некоторые из них.

Система - это совокупность связанных элементов, объединенных в одно целое для достижения определенной цели (например, логический элемент, триггер, счетчик, процессор). Другими словами, любой объект любой сложности можно рассматривать как систему.

Чтобы разобраться в системе, изучить, исследовать её (задача анализа), надо описать систему, зафиксировать ее свойства, поведение, структуру и параметры, то есть построить одну или несколько моделей.

Для этого надо ответить на три основных вопроса:

Что она делает (узнать поведение, функцию системы);

Как она устроена (выяснить структуру системы);

Каково её качество (насколько хорошо она выполняет свои функции).

Покажем это на рис. 3.

Структура системы - это фиксированная совокупность элементов, составляющих систему, и связей между ними.

Наиболее часто структура системы изображается в виде схемы. Это может быть блок-схема, структурная, функциональная или принципиальная схема.

Наконец, это может быть монтажная схема или сборочный чертеж, печатная плата или топология. Такие схемы называют инженерной формой представления структуры системы.

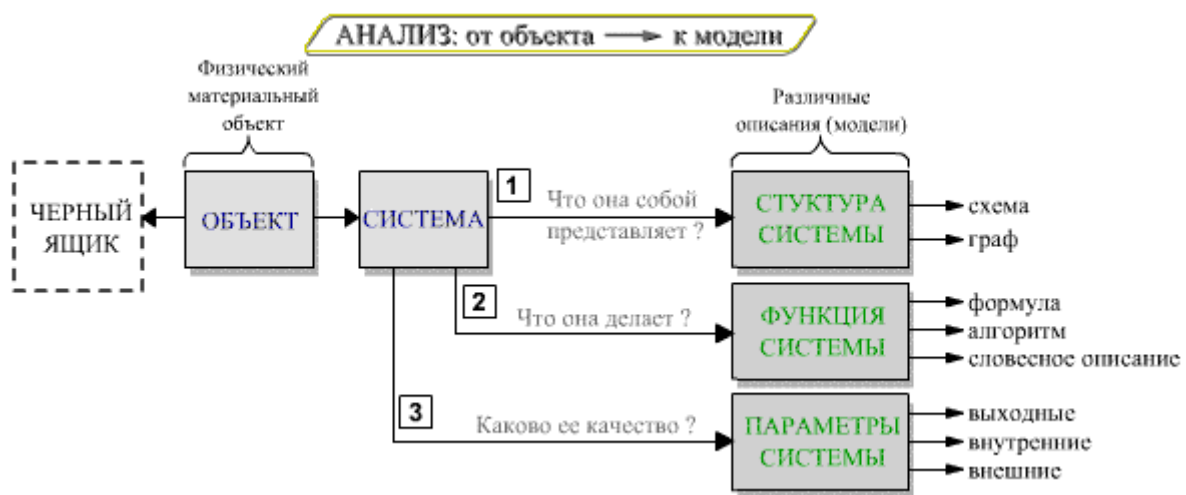


Рис. 3. Описание объекта как системы

Другой, математической формой отображения структуры является граф. В этом случае элементы структуры представляются вершинами графа, а связи - его дугами или ребрами. На рис.4 показана модель ВС в виде сети Петри. Она представляет собой двудольный ориентированный граф, вершинами которого являются позиции (небольшие окружности) и переходы (планки). Эта модель показывает взаимодействие трёх асинхронных процессов: поступление заданий во входную очередь (позиция P1), обработку их процессором (позиция P2) и вывод заданий на печать (позиция P5). Из рисунка видно, что позиции моделируют устройства (P2 - процессор, P5 - принтер, ...) и состояния процессов, а переходы - события, происходящие в системе. Фишка (или несколько фишек) в позиции отражает состояние устройства или процесса. Например, если в позиции P2 есть фишка, то

процессор свободен и может начать выполнение задания, если в P2 нет фишки, то процессор занят.

Перемещение фишек по графу имитирует динамику работы ВС.

Структурный элемент системы - это элементарная, неделимая на данном уровне детализации единица (часть) системы. Неделимость элемента - это удобное допущение, но не физическое свойство. Опираясь на понятие элемента, мы оставляем за собой право перейти на более низкий иерархический уровень и говорить о том, из чего состоит элемент. Сказанное свидетельствует о физической разложимости последнего.

Элемент системы часто называют структурным примитивом (СТП). В действительности, он является чёрным ящиком и указывает входы, выходы и выполняемую функцию.

Название структурный примитив не должно вводить Вас в заблуждение. В зависимости от сложности системы и уровня ее детализации в качестве структурного примитива может выступать отдельный транзистор, логический элемент, счётчик или целый микропроцессор.

Обычно структурными примитивами представляются конструктивно законченные изделия, которые не надо проектировать, например интегральные микросхемы любого уровня сложности.

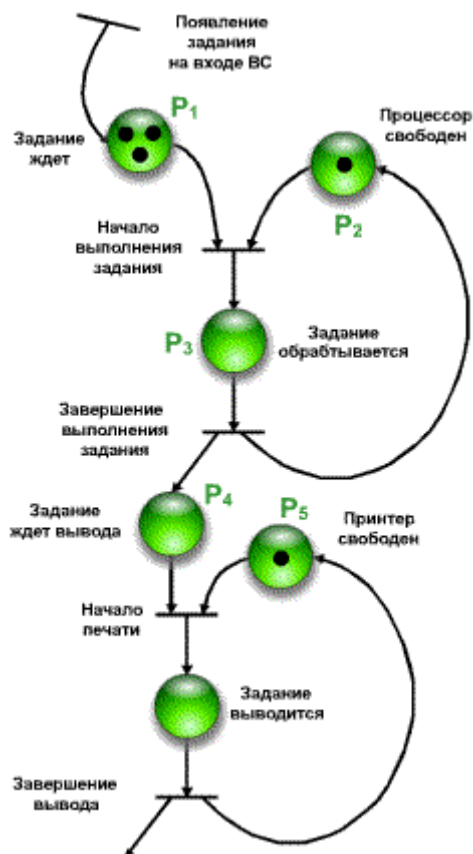


Рис. 4. Модель Петри простой ВС

Функция системы - это формализованное или содержательное (словесное) описание принципа работы (функционирования) системы. Функцию системы желательно представить в аналитической форме, используя тот или иной математический аппарат, например функциональный анализ, теорию очередей, Марковские модели, исследование операций, математическую логику и т.п.

Для сложных систем не удастся получить формализованное описание. В этом случае поведение системы представляется алгоритмом, записанным в той или иной форме (блок- или граф- схемы алгоритмов, операторные схемы).

В крайнем случае, можно довольствоваться словесным описанием работы системы, от которого, правда, мало толку, если говорить об автоматизации проектирования.

Параметры системы - это величины характеризующие качество, свойства или режимы работы объекта. Различают выходные, внутренние и внешние параметры.

Выходные параметры - это показатели качества системы. По ним можно судить о правильности функционирования системы и её качестве. Они позволяют сравнивать однотипные по назначению системы, сделать выбор подходящего варианта.

Выходных параметров обычно много и их принято представлять вектором:

$$\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Например, если в качестве системы рассматривается операционный усилитель, то его выходными параметрами будут:

- коэффициент усиления;
- полоса пропускания;
- напряжение смещения нуля;

и т.п.

Для логического элемента выходные параметры будут другими:

- потребляемая мощность;
- задержка распространения сигнала;
- коэффициент разветвления по выходу и т.п.

Внутренние параметры - это параметры структурных (внутренних) элементов системы:

$$\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_l).$$

Для рассмотренных примеров элементами системы являются транзисторы, резисторы, конденсаторы, диоды и т.п. Следовательно, в качестве X-параметров могут выступать коэффициент усиления по току  $\beta$  транзистора, частота единичного усиления  $f_t$ , тепловой ток  $I_{k0}$ , напряжение пробоя коллекторного перехода, температурный коэффициент сопротивления, технологический разброс и т.п.

Внешние параметры - это параметры внешней среды, оказывающие влияние (обычно отрицательное) на функционирование системы.

$$\bar{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_m).$$

Прежде всего, это параметры источников питания, температура, внешние наводки и помехи. Входные сигналы и нагрузка также являются внешними по отношению к системе параметрами («окружением»).

Параметры входных сигналов иногда выделяют в отдельную группу и называют входными параметрами:

$$\bar{I} = (I_1, I_2, \dots, I_n).$$

Конечно, в этом нет особой необходимости, однако графическое представление объекта становится более наглядным (рис. 5).

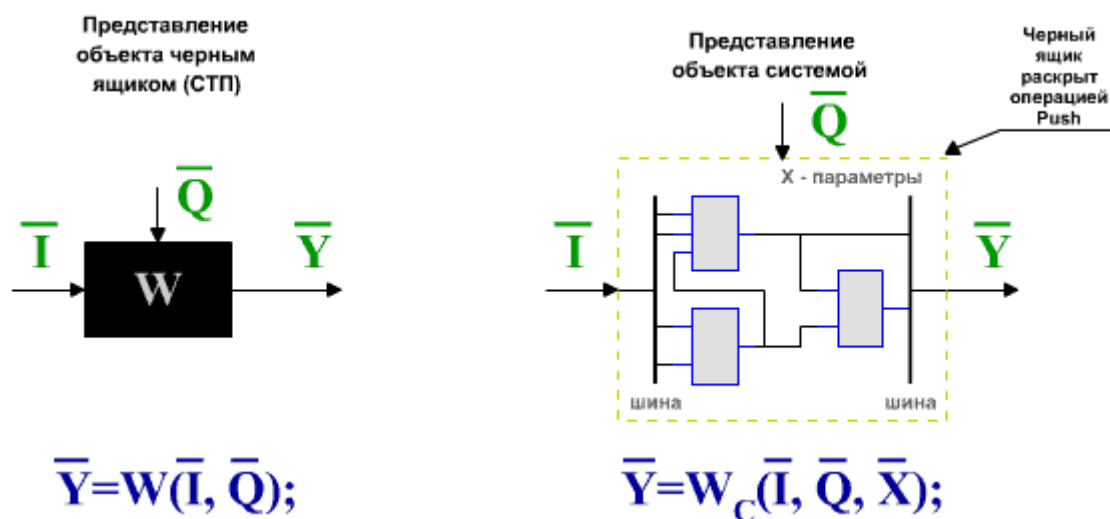


Рис. 5. Графическое представление объекта черным ящиком и системой

## Иерархия вычислительных систем и уровни моделирования

Материальный мир склонен к иерархии. Это значит, что любой объект можно представить как совокупность взаимодействующих частей, которые в свою очередь состоят из более мелких деталей. Например, сложные объекты вычислительной техники состоят из блоков, те в свою очередь - из устройств, устройства - из узлов, узлы из элементов, элементы - из компонентов. Показанный фрагмент иерархии может быть расширен как вверх - через планетарные системы и галактики к Высшему Разуму, так и вниз через молекулы и атомы к кварку. Графическую иерархию объектов обычно представляют в виде усечённой пирамиды. Расширение её книзу означает увеличение степени детализации, рост количества примитивов, которые

должны обрабатываться при изучении или проектировании. Каждый иерархический уровень имеет своё название и свой базовый набор структурных примитивов. Например, для процессорного уровня структурными примитивами являются устройства - память, порты, микропроцессоры, то есть микросхемы большой степени интеграции (БИС). Для регистрового уровня в качестве структурных примитивов выступают узлы - регистры, счетчики, мультиплексоры, АЛУ, дешифраторы, то есть микросхемы средней интеграции (СИС). Для вентильного уровня (Gate Level) - это логические элементы и триггеры (МИС). На транзисторном уровне - это радиодетали: транзисторы, диоды, резисторы, конденсаторы и прочие радиокомпоненты. На кремниевом уровне эти же компоненты предстают уже не как чёрные ящики, а как некоторое множество топологических фигур, структурными примитивами которого являются области диффузии, поликремния и металлизации на поверхности полупроводникового кристалла. Может показаться странным, но формирование уровней абстракции цифровых систем до сих пор является предметом непрекращающихся дискуссий. Нет единодушия и в названиях отдельных иерархических уровней. Например, триггерные схемы принято относить к вентильному уровню, хотя это и не очень корректно, так как в действительности они строятся из отдельных вентилей и вправе претендовать на самостоятельный более высокий уровень. Еще больше неразберихи творится «наверху» - на процессорном и системном (архитектурном) уровнях. Как их только не называют, например структурный и алгоритмический, микросхемный и ППК (процессор - память - коммутатор), микрокомандный и архитектурный. Проблема в том, что эти уровни имеют по сути дела одни и те же примитивы, однако сильно различаются по своим поведенческим описаниям. Таким образом, можно констатировать, что единый взгляд на иерархию ВС ещё не сформировался, хотя основные принципы создания уровней как будто бы определены: выделять самостоятельный уровень, если требования поведенческого или



структурного описания различны; называть уровень по наиболее «яркому» (важному, многочисленному) представителю его структурных примитивов: транзисторный, вентильный, регистровый и т.д.

Рассмотренная иерархия ВС представляет не только познавательный интерес. Она структурирует наше мышление и систематизирует мировоззренческое восприятие проблемы, раскладывая в буквальном смысле по полочкам - уровням изучаемый материал. Посмотрим, как легко и естественно привязываются к уровням иерархии ВС различные виды моделирования и поведенческие описания (модели) структурных примитивов.

Иерархия ВС позволяет разобраться и классифицировать взаимодействия примитивов на каждом абстрактном уровне

Наконец, с помощью рассмотренной иерархии ВС легко выяснить, какие уровни поддерживает та или иная система моделирования (СМ) или САПР. Это позволяет сравнивать их между собой и выбирать наиболее подходящую. Далеко не всегда разработчики цифровой аппаратуры имеют дело со всеми шестью рассмотренными уровнями. Пожалуй, только разработчики СБИС вынуждены начинать свой проект с архитектурного уровня и заканчивать его топологией кристалла на кремниевом уровне. В этом отношении их судьба незавидна. Однако чаще проектирование осуществляется в заданном элементном базисе, например с использованием реальных микросхем. В этом случае организация проекта осуществляется с учётом того, «что уже имеется», а процесс разбиения заканчивается, как только структурный примитив будет «накрыт» подходящей ИМС. Например, если вы проектируете какой-нибудь сносшибательный счётчик на микросхемах малой интеграции, то в окне Вашего проекта окажутся только два соседних (смежных) уровня - регистровый и вентильный. Окно проекта это узаконенный термин. Им обозначают группу уровней, с которыми работает конкретный разработчик. Таким образом, если Вы проектируете ЭВМ с использованием только БИС, то окно проекта может быть сужено всего до двух уровней: архитектурного и процессорного. Разновидности

проектирования С иерархией объекта тесно связаны понятия нисходящего и восходящего проектирования. Часто их называют иначе - проектирование «сверху вниз» и «снизу вверх».

проектирование может начинаться уже тогда, когда о проектируемом объекте известна лишь функция корня, то есть только алгоритм функционирования. Функция корня разбивается на подфункции, которые должны выполнять составляющие объект структурные примитивы. Эта процедура соответствует понижению уровня описания на одну иерархию вниз, например устройство раскрывается до узлов. На начальном этапе проектирования ещё не известны структура и набор узлов будущего проекта. Поэтому правильнее говорить о том, что функция устройства разбивается на подфункции, которые должны выполнять узлы. Если получаемые при декомпозиции функции слишком сложны, чтобы реализовать их каким либо узлом с известной структурой, то операция повторяется, и описание объекта понижается ещё на один иерархический уровень. Описанная процедура повторяется до тех пор, пока полученные функции или операторы алгоритма не станут очевидными и их можно будет реализовать известными структурными примитивами. Таким образом, иерархию объекта можно представить в структурной форме в виде дерева проекта, определяются структурные примитивы, то есть такие части объекта, которые в рамках данного проекта не подлежат дальнейшей детализации. В ней просто нет нужды, например, когда структурными примитивами являются готовые интегральные схемы. Итак, структурные примитивы -это чёрные ящики с известными функциями, реализованными в виде конкретного конструктива. Обратите внимание, что если разработать поведенческие модели для каждого структурного примитива, то модели других более высоких уровней можно получить простым их объединением в соответствии со структурной схемой. Такие модели в отличие от поведенческих называют структурными, а процедура их построения в математической форме выглядит так:

где D, U, E, C - соответственно устройство (Device), узел (Unit), элемент (Element) и компонент (Component). В реальной ситуации проект обычно представляется неполным деревом, когда структурные примитивы (листья дерева) появляются на разных уровнях абстракции .

Обычно это происходит по двум причинам: либо проектирование ведётся на уровне корпусов ИМС (Chip Level Design) и примитивом может оказаться как логический элемент, так и большая интегральная схема, либо проектировщик использует многоуровневое моделирование, при котором неразработанные ещё части проекта временно представляются в виде поведенческих моделей. Иерархическая структура при декомпозиции как правило, порождает большое количество подобных или даже одинаковых фрагментов (например, регистров, портов, счётчиков и т.п.). Такие повторяющиеся в проекте части удобно представлять в виде макромоделей. Здесь прослеживается прямая связь между командой и макрокомандой. Для пользователя макрокоманда записывается одной инструкцией и выглядит как простая команда. В действительности, в ней «спрятано» много простых команд и система (например, транслятор) выполнит необходимую замену. То же самое происходит и с макромоделью. Пользователю кажется, что он имеет дело со структурным примитивом, работа которого имитируется поведенческой моделью. На самом деле это не так. От пользователя просто скрыта структура типового фрагмента схемы, но система моделирования вынуждена будет раскрыть такой фрагмент до истинных примитивов, прежде чем начать моделирование. Такие ложные примитивы называют иерархическими примитивами, сохраняя за ними обозначение, принятое для фрагментов схемы в виде прямоугольника со скруглёнными углами. Понятно, что иерархические примитивы поддерживаются, не поведенческими, а структурными моделями, которые в описанной ситуации называются макромоделями.

моделирования Использование иерархических примитивов и их макромоделей избавляет пользователя от излишней детализации и делает

проект обозримым. Восходящее проектирование выполняется в противоположном направлении, то есть снизу вверх (Down Up Design). Сначала проектируются элементы, затем узлы, потом - устройства и так далее. Такой метод проектирования целесообразно применять только в том случае, когда проектируемый объект не слишком сложен. Кроме того, перед началом проектирования должна быть известна логическая схема будущего объекта. Например, если предстоит спроектировать БИС, для которой уже имеется аналог ранее созданный на корпусных ИС. Другими словами, при проектировании снизу вверх должен быть задан не только алгоритм функционирования будущей БИС, но и её отработанная логическая схема, построенная, правда, в другом логическом базисе. Вся история развития микросхемотехники являет собой пример проектирования снизу вверх - от элементов (МИС) к узлам (СИС), потом к устройствам (БИС) и блокам (СБИС). Фактически описанная стратегия не является стратегией проектирования конкретного объекта, а представляет собой общую тенденцию развития микроэлектроники. Кстати, учебный план нашей специальности хорошо вписывается в рассмотренную иерархию (по крайней мере, его аппаратное направление), а последовательность изучаемых дисциплин соответствует стратегии снизу вверх. Вы штурмуете этот «Эверест наук», начиная с фундаментальных дисциплин физики и высшей математики и заканчивая на его вершине такими предметами как архитектура ЭВМ и сетевые технологии.

Описанные стратегии объединяются общим названием - иерархическое проектирование. Оно представляет собой единый подход при разработке сложных объектов и заключается в разбиении исходной задачи на подзадачи. Объект проектирования декомпозируется на фрагменты (подсхемы) и проектирование каждого из них ведется в определённом смысле самостоятельно. На каждом уровне иерархии этот принцип применяется вновь. Таким образом, иерархический подход позволяет заменить решение одной сложной задачи многократным решением задач меньшей размерности.

Размерность задачи это параметр  $n$ , характеризующий степень ее сложности. Параметр  $n$  - это число независимых переменных задачи, например число листьев дерева проекта. Порядок решения подзадач может быть произвольным, как сверху вниз так и снизу вверх. Возможна также и комбинация обеих стратегий. Человек не в состоянии воспринимать слишком большой объем данных. Если деталей слишком много, он может легко «утонуть» в них и успешное завершение проекта станет проблемным. При иерархическом проектировании в поле зрения достаточно держать лишь один фрагмент объекта. Остальные его части представлены в виде чёрных ящиков и присутствуют в проекте только для того чтобы имитировать «окружение», то есть взаимодействие проектируемого фрагмента с другими частями объекта. Благодаря иерархическому проектированию удаётся ограничить текущую сложность проекта на приемлемом уровне, так как для решения любой частной задачи в окне проекта находятся только два смежных уровня - поведенческое описание «окружения» и структурное описание проектируемого в данный момент фрагмента. С иерархическим проектированием неразрывно связано так называемое многоуровневое моделирование. При многоуровневом моделировании различные части объекта (фрагменты) представлены с разной степенью детальности, то есть на различных уровнях иерархии. Например, проектируемая в данный момент времени часть объекта раскрыта до вентильного уровня и имитируется структурной моделью, а остальные фрагменты представлены на соседнем более высоком регистровом уровне в виде поведенческих моделей. Закончив проектирование данного фрагмента, разработчик представит его поведенческой моделью, то есть спрячет детали структурного описания в чёрный ящик и раскроет более подробно другой фрагмент объекта, который ещё предстоит проектировать. Эта процедура повторяется столько раз, сколько фрагментов необходимо спроектировать на данном уровне иерархии. Описанный метод проектирования называется методом локальной детализации объекта, потому что в каждый момент времени подробно

представлен только один фрагмент - тот, который находится в работе (его называют центральным элементом системы). Остальные фрагменты свернуты в чёрные ящики и не перегружают модель ненужными для решения текущей задачи деталями. При переходе с одного уровня на другой, то есть при замене поведенческих моделей структурными и наоборот, разработчик проекта должен контролировать интерфейс точек взаимодействия, имитирующих обмен данными между различными фрагментами и центральным элементом системы. Операции Push и Pop не должны порождать новых или исчезновение существующих интерфейсных точек (портов). Особенно сильно эта проблема обостряется при переходе с информационных на физические уровни иерархии (переход между вентиляльным и транзисторным уровнями). Именно в этом месте появляется необходимость вводить кроме функциональных ещё и энергетические связи (питание, земля), иначе все компоненты проекта окажутся без питания. Библиотечный метод проектирования Современные САПР и СМ поддерживают так называемый библиотечный метод проектирования. Суть его заключается в том, что в процессе разработки объект детализируется до некоторых элементарных фрагментов, называемых структурными примитивами. Каждый примитив имеет свою поведенческую модель и представляет собой конструктивно законченный радиоэлектронный компонент, например транзистор, интегральную схему любой сложности или функциональную ячейку топологии кристалла кремния. Примитивы и их модели объединяются в библиотеки, которые доступны любому проектировщику. Разрабатываемый объект представляет собой некоторую комбинацию стандартных примитивов. Генерация конкретного варианта структуры выполняется на заданном наборе библиотечных примитивов методом проб и ошибок. Полученное решение требует проверки на работоспособность и соответствие требованиям технического задания. С этой целью строится структурная модель объекта как комбинация поведенческих моделей библиотечных примитивов, составляющих объект. Привлекательная

сторона библиотечного метода проектирования состоит в том, что структурные примитивы могут принадлежать различным иерархическим уровням. Благодаря этому значительно повышается эффективность моделирования. Понятно, что поведенческие модели должны весьма точно отображать не только функцию, но и временные параметры примитива. Современные САПР и СМ (PCAD, PSPICE, OrCAD, ACTIVE VHDL и другие), а также языки моделирования HSL, DSL, PML, VHDL позволяют строить такие модели. Библиотечный метод проектирования имеет ещё одну привлекательную сторону. Он избавляет разработчика от необходимости детализировать проект до нижних уровней иерархии. Чем более крупными примитивами будет манипулировать проектировщик, тем меньше уровней абстракции следует держать в окне проекта. Таким образом, «закрывая» нижние уровни иерархии, можно решать более сложные проблемы, не увеличивая при этом размерность решаемой задачи.

### **Требования, предъявляемые к математическим моделям**

Наиболее важными являются требования точности, экономичности и универсальности. Они противоречивы, например повышение точности модели делает её сложнее, а, значит, и менее экономичной. Поэтому на практике приходится довольствоваться компромиссными решениями.

Точность модели – это количественная оценка степени совпадения модельных результатов с натурными.

Точность модели тесно связана с понятием "адекватность" (лекция 1). Но это не синонимы: понятие "адекватность" носит качественный характер, тогда как за понятием "точность" стоит число, количественная оценка модели. Вспомните разговор о простых детерминированных моделях (лекция 4): для предварительных оценок на этапе поискового проектирования их можно считать адекватными объекту, но при детализации проекта они теряют это свойство и становятся слишком "грубыми". А ведь это те же самые модели с



одной и той же точностью. Но теперь она (точность) становится недостаточной.

Количественная оценка точности модели доставляет немало забот её создателю.

Дело в том, что реальные объекты характеризуются не одним, а несколькими выходными параметрами. Вспомните глобальную функцию системы (лекция 2):

$$\bar{Y} = W_c(\bar{I}, \bar{Q}, \bar{X}),$$

где  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  - вектор выходных параметров.

В модели выходные параметры могут представляться с различной погрешностью, одни упрощенно, другие точно. Отсюда вытекает первоначальный векторный характер оценки и необходимость сведения её к скалярной величине. В противном случае трудно говорить о качестве моделей вообще и сравнивать их между собой.

Кроме того, истинные параметры объекта обычно отождествляются с экспериментально измеренными. Однако погрешности натурного эксперимента могут оказаться соизмеримыми с погрешностью модели, а иногда и превышать её.

Наконец, один и тот же выходной параметр модели может оказаться важным (доминирующим) для одних применений и второстепенным для других. Например, в модели биполярного транзистора напряжение насыщенного транзистора является одним из основных параметров при проектировании аналоговых ключей и "почти не контролируется" при разработке цифровых схем.

Обозначим выходные параметры объекта через  $y_i$ , а значения тех же параметров в модели через  $y_{Mi}$ ,

$$i = \overline{1, k}.$$

Тогда для каждого выходного параметра можно вычислить относительную погрешность, с которой он представляется в модели:



$$\mathcal{E}_i = \frac{y_i - y_{Mi}}{y_{Mi}}.$$

Вектор относительных погрешностей:  $\overline{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k)$

и будет являться векторной оценкой точности модели. Сведение её к скалярной форме обычно осуществляется на основе какой-либо нормы вектора.

В качестве оценки точности можно использовать  $m$ -норму, то есть максимальный по абсолютной величине элемент вектора:

$$\mathcal{E}_{max} = \max_i |\mathcal{E}_i|$$

или  $l$ -норму (суммарную погрешность):

$$\mathcal{E}_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i^2}$$

Однако более реалистичной выглядит среднеквадратичная погрешность:

$$\mathcal{E}_{cp} = \frac{1}{k} \sqrt{\sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i^2}$$

Как-то походя, мы вспоминали об одной из заповедей моделирования (лекция 4). Прежде чем получить точную модель, надо сначала добиться, чтобы она была "правильной", то есть не давала абсурдных, совершенно диких результатов.

Для оценки правильности модели используются простые приёмы, такие как:

§ проверка физического смысла (соблюдение физических законов);

§ проверка размерности и знаков;

§ проверка пределов;

§ проверка тренда, то есть тенденции изменения выходных параметров в зависимости от внутренних и внешних.

Убедившись, что модель работает правильно, можно попытаться довести её до кондиции. Эта работа называется калибровкой (подгонкой) модели и состоит в том, что в базовый (грубый) вариант модели, добавляются детали и используются уже известные нам методы улучшения (лекция 2), пока модель не достигнет желаемого качества (необходимой точности).

На рис.1 описанная процедура демонстрируется на примере простой вычислительной системы. Выходной параметр, который нас интересует – время обработки конкретного задания  $t_p$  сравнивается с аналогичным параметром  $t_{pm}$ , полученным на модели, после чего выясняется, достигнута ли требуемая точность. Она задаётся допустимой погрешностью  $\epsilon_{\text{доп}}$ . Если качество модели неудовлетворительно, начинается итерационный процесс её доводки. Надо сказать, что эта творческая работа и её успешное завершение во многом определяется опытом разработчика модели.

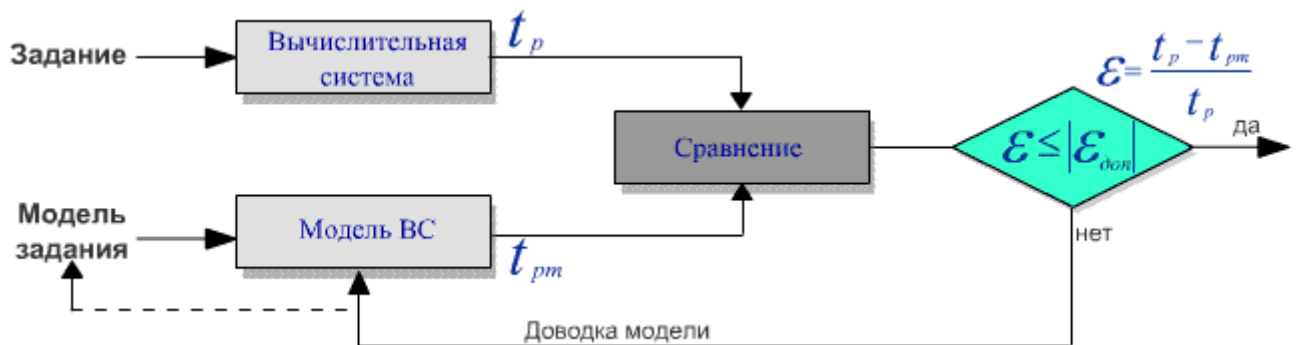


Рис.1. Процесс калибровки модели

Мы рассмотрели основной метод оценки точности модели. Иногда, по неизвестным мне причинам, его называют методом Тьюринга. Метод даёт хорошие результаты, если натурный и модельный эксперименты проводятся в одинаковых условиях. Модель ВС должна обрабатывать то же самое задание, причем в совершенстве модели самого задания мы должны быть абсолютно уверены.

Разумеется, весь эксперимент имеет смысл, если параметр  $t_p$  можно измерить с достаточной точностью. По крайней мере, погрешность измерения должна быть меньше  $\epsilon_{\text{доп}}$ .

Метод имеет и два серьезных недостатка. Во-первых, модель нельзя откалибровать для всех условий, в которых предполагается её использование. Если удаётся определить рабочее пространство X- и Q- параметров модели, то её желательно откалибровать только на границах этого пространства. В противном случае исчерпывающие натурные эксперименты сделают просто ненужной саму модель.

Второй недостаток заключается в том, что метод изначально предполагает наличие оригинала. Объект, для которого строится модель, должен существовать. Иначе с чем же сравнивать модельные эксперименты?

При изучении естественных объектов названный недостаток себя не проявляет, однако для искусственных объектов он выглядит весьма устрашающе. Ведь в процессе проектирования модель предшествует объекту (лекция 1, аксиома 2). Мы должны построить модель до того, как будет изготовлен сам объект. Значит, сравнивать не с чем! Как же в этих условиях оценить качество модели, выяснить её точность?

Конечно, можно попробовать метод контрольных (тестовых) задач. Он основан на том, что при определенных условиях и в некоторых режимах можно заранее предсказать реакцию проектируемого объекта или рассчитать её вручную.

Если модель в этих контрольных точках ведёт себя в соответствии с прогнозом, значит, она правильная. Например, мы знаем, что если на вход операционного усилителя, работающего в инверсном включении (рис. 2, а), подать нулевое напряжение, то и на выходе должно быть 0В. А в неинвертирующем включении (рис.2, б) он должен повторить на выходе входное напряжение.

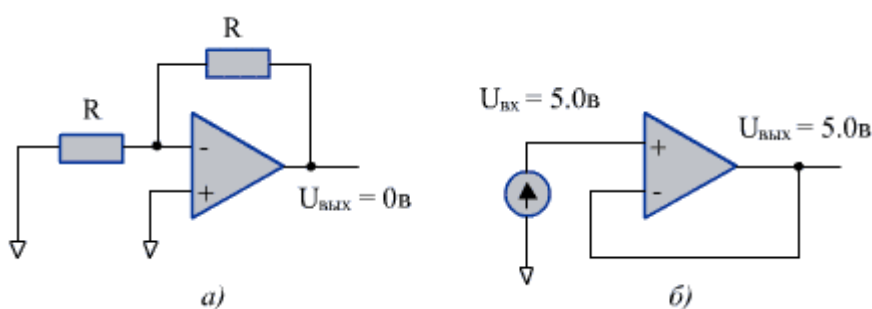


Рис.2. "Контрольные точки" для операционного усилителя

Названным способом можно верифицировать свою модель, подобно тому, как это делается при тестировании программы. К сожалению, возможности этого метода весьма ограничены.

Наибольшие надежды в данной ситуации возлагаются на третий метод, который можно назвать методом асимптотического ряда моделей. Е.С. Вентцель придумала ему весьма поэтическое название – спор моделей.

Идея метода основана на аксиоме 3 (лекция 1), где говорится, что при бесконечном повышении качества модели она приближается к самому объекту. Следовательно, построив ряд моделей возрастающей точности, мы сможем на основании модельных экспериментов предсказать, какими будут выходные параметры у реального объекта, который ещё предстоит построить в будущем.

Мы уже говорили о прогнозирующих способностях моделей (лекция 1) и теперь собираемся их использовать. Для простоты будем считать, что проектируемый объект характеризуется одним выходным параметром  $y_p$ , значение которого и предстоит спрогнозировать. На рис. 3 показано, как это сделать.

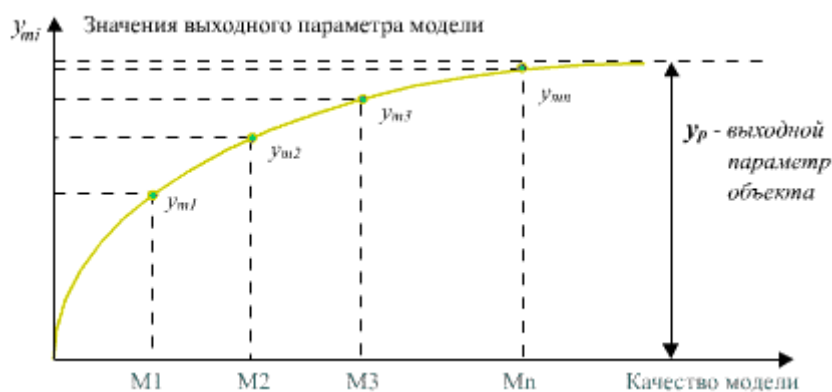


Рис. 3. Идея асимптотического ряда моделей

Построим для начала простую, грубую модель  $M_1$  проектируемого объекта и, испытав её, найдем интересующий нас модельный параметр  $y_{m1}$ .

Построим вторую, более точную модель  $M_2$  того же самого объекта. Обычно модель  $M_2$  является усовершенствованием модели  $M_1$ . Опять «измерим» её выходной параметр  $y_{m2}$ .

Повторяя этот процесс несколько раз, мы получим ряд моделей:  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ . Все они моделируют один и тот же объект, но делают это с разной степенью точности.

Чем старше модель, тем выше её качество, ведь каждая следующая получается улучшением предыдущей. Если при построении моделей мы не наделали ошибок (нет выпадающих точек), то ряд значений  $y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}, \dots$  будет асимптотически приближаться к реальному значению  $y_p$ , которое теперь легко нанести на график и определить его величину. После чего можно вычислить точность каждой из построенного ряда моделей.

В чем же заключается "спор" этих моделей. Подозреваю, что они борются за право быть избранной в качестве рабочей модели.

Кажется, и спорить то здесь не о чем, ведь последняя построенная модель самая точная! Но одновременно она и самая сложная, а значит, и самая неэкономичная. Так что предмет для спора есть.

Мы решим этот спор на следующем примере. Допустим, целью проекта является создание логического ТТЛ-элемента. Выходной контролируемый параметр – задержка распространения сигнал  $t_{зр}$ .

Для проектируемого объекта строим ряд моделей возрастающей точности. Модель M0 - статическая ( $t_{zm0} = 0$ ). В модели M1 учтём только ёмкостную нагрузку, получив очень грубое приближение  $t_{zm1}$ . В модели M2 дополнительно учтём задержки, связанные с перезарядом ёмкостей  $C_k, C_э$  и  $C_n$  транзисторов ( $t_{zm2}$ ). В модели M3 "вспомним" про время пролёта носителями области базы:  
 $t_T = 1/2pf_T$  ( $t_{zm3}$ ). Наконец, в модели M4 учтём влияние ёмкостей диффузионных резисторов и печатных проводников ( $t_{zm4}$ ).

Обратите внимание, каждый новый фактор вносит в совокупную задержку все меньшую лепту. Возможно, мы уже начали добавлять в модель "мусор" – малые параметры ( по терминологии Парето – тривиальное большинство).

Представив результаты испытаний всех моделей в графической форме, найдем значение  $t_{зр}$  – реального элемента (рис. 4).

Теперь можно решить вопрос о рабочей модели. Ею должна быть самая простая модель, которая ещё обеспечивает требуемую точность модельных экспериментов  $e_{доп}$ .

Например, при  $\epsilon_{\text{доп}} \leq 10\%$  - это будет модель M3, так как она даёт результат  $t_{\text{зм3}} = 18.5\text{ns}$ , лежащий в зоне допустимой погрешности  $20\text{ns} \pm 10\% = 18\text{ns} \dots 22\text{ns}$ .

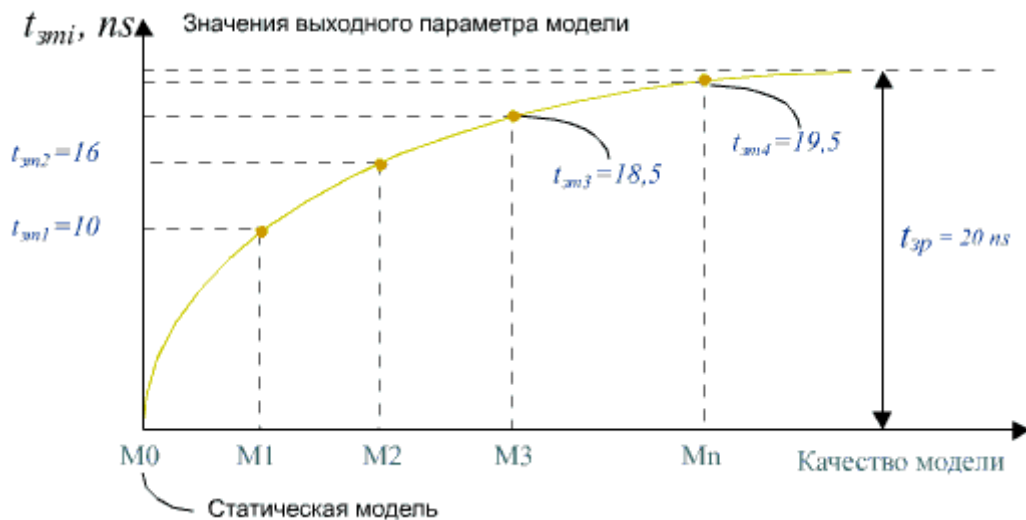


Рис. 4. Асимптотический ряд моделей для логического элемента

При более низких требованиях к точности модели, например для  $\epsilon_{\text{доп}} \leq 20\%$  ( $16\text{ns} \dots 24\text{ns}$ ), рабочей окажется ещё более простая модель M2. Значит, такие малые параметры как время  $t_{\text{Г}}$ , ёмкости диффузионных резисторов и печатных проводников попадут в "корзину для мусора" и в рабочей модели их можно не учитывать.

Экономичность математических моделей определяется двумя основными факторами:

- § затратами машинного времени на прогон модели;
- § затратами оперативной памяти, необходимой для размещения модели.

Обычно именно время моделирования является основным сдерживающим фактором при попытке решать проекты большой размерности. Моделирование, которое длится несколько часов, вряд ли вдохновит разработчика на повторные эксперименты.

В лекции 7 мы обсудим понятие "эффективность моделирования" и поговорим о способах ускорения модельных экспериментов.

Косвенным показателем экономичности математической модели служит также количество внутренних параметров, используемых в ней. Чем их больше, тем выше требования к оперативной и дисковой памяти, тем

длительнее будет их обработка. Наконец, чем больше параметров, тем больше времени потребуется для отыскания сведений об их численных значениях.

Универсальность моделей определяет область их возможных применений. Можно построить отдельные модели для насыщенного, активного и запертого транзистора. Можно построить модель транзистора, пригодную для анализа цифровых схем, но совершенно неприемлемую для аналоговых схем. Понятно, что такие модели будут просты и удобны для частных задач, но универсальностью они не обладают.

Думаю, что любому пользователю наскучит менять математические модели всякий раз, когда моделируемый объект переходит из одного режима функционирования в другой. Поэтому в современных САПР и системах моделирования используются универсальные модели. Для транзистора такой моделью может быть модель Эберса-Молла или модель Гуммеля-Пуна. Универсальность достигается тем, что в модель включается большое число внутренних параметров (например, в модели Гуммеля-Пуна для программы PSpice их более 50 штук).

При этом, конечно, страдает экономичность модели, но разработчики предпочитают *"из двух зол выбирать меньшее"*.

### **Критерии качества системы моделирования**

В общем случае качество любого программного продукта может характеризоваться чрезвычайно широким набором характеристик, в числе которых эргономичность пользовательского интерфейса, требования к аппаратным средствам, производительность, степень использования системных возможностей операционной среды, документированность, качество сопровождения и др. Учитывая специфику именно систем моделирования, являющихся, как правило, многоцелевым инструментарием интеллектуалоёмких и не всегда достаточно чётко специфицированных исследовательских и поисковых работ, рассмотрим детально лишь те

критерии, которые определяют уровень функциональных возможностей таких систем и связанные с их освоением и эксплуатацией затраты времени.

В качестве основных критериев, которые подлежат **максимизации** в процессе разработки и эксплуатации конкретной системы моделирования, могут рассматриваться следующие:

- Предельный уровень функциональных возможностей собственно системы, который ограничивает предельную сложность моделей и решаемых в процессе моделирования задач при условии использования только средств, предоставляемых непосредственно системой моделирования.
- Предельный уровень функциональных возможностей системы с учётом возможностей расширения, если таковые имеются. В идеальной системе все имеющиеся программные продукты так или иначе могут использоваться для расширения функциональных возможностей системы моделирования. Уровень в этом случае характеризует предельные возможности всего аппаратно-программного комплекса в целом.
- Предельный срок эксплуатации системы. В идеальном случае однажды освоенная система должна быть полезна “на всю оставшуюся жизнь”, подобно тому, как мы всю жизнь пользуемся однажды выученными алфавитом и таблицей умножения.
- Отношение времени непосредственно полезного использования системы ко времени всего срока её эксплуатации. Для идеальной системы это соотношение стремиться к единице.

В качестве основных **минимизируемых** критериев качества могут рассматриваться следующие:

- Минимально необходимый, пороговый, уровень освоения функциональных возможностей системы, достаточный для начала её практической эксплуатации. В идеальной системе предполагается



возможность полезного использования системы для решения практических задач сразу же после начала её освоения. При этом функциональные возможности системы в полном объёме осваиваются уже в процессе работы по мере необходимости.

- Отношение предельного уровня функциональных возможностей системы к функциональной сложности типичной задачи.
- Период начального освоения системы.
- Период полного освоения функциональных возможностей системы.
- Время на подготовку моделей.

С учетом вышеизложенного определение универсальной моделирующей среды (УМС) может быть сформулировано следующим образом: *УМС — это совокупность информационно-вычислительной среды и программных средств моделирования, обеспечивающих максимальное соответствие перечисленным критериям качества путём гибкой адаптации к особенностям конкретных условий применения, кругу решаемых задач и уровню подготовки пользователей.*