

Министерство общего и профессионального образования  
Российской Федерации

Тульский государственный университет

Кафедра «Системы автоматического управления»

С.А. Руднев  
д.т.н., профессор

ИМПУЛЬСНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ  
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для студентов  
направления 550200 «Автоматизация и управление»  
специальности 210500  
«Системы автоматического управления летательными аппаратами»  
очной формы обучения

Тула 2000г

## Оглавление.

<b>Лекция №1.....</b>	<b>6</b>
<b>Общие сведения о дискретных автоматических системах.....</b>	<b>6</b>
1. Квантование по времени и по уровню.	6
2. Виды импульсной модуляции.	7
3. Импульсные и цифровые методы в системах автоматического управления	9
<b>Лекция № 2.....</b>	<b>11</b>
<b>Импульсный элемент и его уравнения.....</b>	<b>11</b>
1. Предварительные замечания	11
2. Амплитудно-импульсный элемент и его эквивалентное представление.	11
3. Идеальный импульсный элемент и его математическое описание.	13
4. Формирующее звено и его математическое описание. Экстраполиатор нулевого порядка.	13
<b>Лекция № 3.....</b>	<b>15</b>
<b>Уравнения и передаточные функции разомкнутых импульсных систем.....</b>	<b>15</b>
1. Эквивалентная схема разомкнутой импульсной системы.	15
2. Уравнения разомкнутой импульсной системы.	15
3. Передаточная функция разомкнутой импульсной системы.	16
<b>Лекция № 4.....</b>	<b>18</b>
<b>Вычисление Z-передаточных функций.....</b>	<b>18</b>
1. $\bar{Z}$ -преобразование дробно-рациональных функций.	18
2. Учет экстраполиатора при вычислении Z- передаточных функций.	19
3. Пример вычисления Z –передаточной функции.	21
<b>Лекция № 5.....</b>	<b>23</b>
<b>Уравнения и передаточные функции замкнутых импульсных систем.....</b>	<b>23</b>
1. Уравнения и передаточные функции простейшей замкнутой импульсной системы.	23
2. Структурные преобразования в импульсных системах.	25
<b>Лекция № 6.....</b>	<b>29</b>
<b>Частотные характеристики дискретных систем.....</b>	<b>29</b>
1. Определение установившейся реакции импульсной системы на дискретный гармонический сигнал.	29
2. Частотные характеристики дискретных систем.	30
3. Свойства частотных характеристик импульсных систем.	31
<b>Лекция № 7.....</b>	<b>33</b>
<b>Вычисление частотных характеристик дискретных систем.....</b>	<b>33</b>
1. Псевдочастотные характеристики импульсных систем.	33
2. Методы построения частотных и псевдочастотных характеристик дискретных систем.	34
<b>Лекция № 8.....</b>	<b>37</b>

<b>Частотные свойства импульсных систем. ....</b>	<b>37</b>
1. Прохождение непрерывного гармонического сигнала через дискретную систему.	37
2. Спектры сигналов в дискретной системе.	38
<b>Лекция № 9 .....</b>	<b>41</b>
<b>Устойчивость импульсных систем. ....</b>	<b>41</b>
1. Понятие устойчивости.	41
2. Условия устойчивости импульсных систем.	41
<b>Лекция № 10 .....</b>	<b>44</b>
<b>Алгебраические критерии устойчивости импульсных систем. ....</b>	<b>44</b>
1. Переход к алгебраическим критериям устойчивости непрерывных систем.	44
2. Критерий Шура-Кона.	45
<b>Лекция № 11 .....</b>	<b>47</b>
<b>Частотные критерии устойчивости импульсных систем. ....</b>	<b>47</b>
1. Аналог критерия Михайлова.	47
2. Анализ устойчивости с помощью критерия Найквиста.	48
3. Анализ устойчивости импульсной системы с помощью ЛАФПЧХ.	50
<b>Лекция № 12 .....</b>	<b>55</b>
<b>Математическое описание импульсных систем с помощью пространства состояний. ....</b>	<b>55</b>
1. Пространство состояний дискретной системы	55
2. Уравнения состояния дискретных систем	56
<b>Лекция № 13 .....</b>	<b>60</b>
<b>Выбор переменных состояния дискретной системы. ....</b>	<b>60</b>
1. Способ прямого программирования.	60
2. Способ параллельного программирования.	61
3. Способ последовательного программирования.	63
<b>Лекция № 14 .....</b>	<b>64</b>
<b>Анализ дискретных систем с использованием пространства состояний. ....</b>	<b>64</b>
1. Вычисление $Z$ – передаточной функции системы.	64
2. Вычисление $Z$ – передаточной функции дискретной системы управления электродвигателем.	65
<b>Лекция № 15 .....</b>	<b>67</b>
<b>Анализ дискретных систем с использованием пространства состояний (продолжение). ....</b>	<b>67</b>
1. Анализ устойчивости дискретных систем.	67
Определение переходных процессов при описании дискретных систем уравнениями состояния.	68
<b>Лекция № 16 .....</b>	<b>71</b>
<b>Описание импульсных систем с несколькими импульсными элементами с помощью пространства состояний. ....</b>	<b>71</b>
1. Математическое описание синхронных импульсных систем с кратными периодами квантования ИЭ.	71

2. Пример составления математического описания импульсной системы.	72
<b>Лекция № 17 .....</b>	<b>76</b>
<b>Особенности вынужденных процессов в импульсных системах. ...</b>	<b>76</b>
1. Свободный и вынужденный процессы в импульсных системах	76
2. Расчет вынужденных процессов с помощью моментов весовой характеристики	77
3. Процессы конечной длительности в импульсных системах.	77
<b>Лекция № 18 .....</b>	<b>79</b>
<b>Анализ вынужденных процессов в импульсных системах. ....</b>	<b>79</b>
1. Вынужденные процессы при степенных входных воздействиях.	79
2. Установившиеся ошибки при типовых входных сигналах.	80
3. Коэффициенты ошибок дискретной системы	82
<b>Лекция 19. ....</b>	<b>85</b>
<b>Синтез цифровых автоматических систем. ....</b>	<b>85</b>
1. Основные схемы коррекции цифровых систем.	85
<b>Лекция 20. ....</b>	<b>88</b>
<b>Синтез последовательных аналоговых регуляторов. ....</b>	<b>88</b>
1. Общая последовательность синтеза.	88
2. Пример синтеза последовательного аналогового корректирующего устройства.	90
<b>Лекция 21. ....</b>	<b>93</b>
<b>Синтез цифровых САУ с цифровыми регуляторами. ....</b>	<b>93</b>
1. Синтез цифровых САУ с цифровыми регуляторами.	93
2. Некоторые вопросы реализации импульсных фильтров.	94
3. Реализация цифровых регуляторов в виде импульсных фильтров.	94
4. Реализация цифровых регуляторов на микроЭВМ.	95
<b>Лекция 22. ....</b>	<b>99</b>
<b>Синтез ЦСУ с апериодическим переходным процессом. ....</b>	<b>99</b>
1. Общие положения.	99
2. Пример.	99
3. Общий случай синтеза системы с апериодическим переходным процессом.	100
<b>Лекция 23. ....</b>	<b>103</b>
<b>Реализация аналогового прототипа с помощью цифрового фильтра. ....</b>	<b>103</b>
1. Общие положения.	103
2. Реализация интегрирующих цифровых фильтров.	103
3. Пример нахождения цифрового фильтра, соответствующего данному прототипу.	104
<b>Лекция 24. ....</b>	<b>106</b>
<b>Синтез алгоритма управления на основе решения обратной задачи динамики. ....</b>	<b>106</b>
1. Обзор задач динамики.	106
2. Задача аналитического построения замкнутой системы программного движения.	106

3. Синтез алгоритма управления на примере системы третьего порядка.	107
---	-----

## Лекция №1.

Тема:

### Общие сведения о дискретных автоматических системах

План лекции

1. Квантование по времени и по уровню.
2. Виды импульсной модуляции.
3. Импульсные и цифровые методы в системах автоматического управления (САУ).

#### 1. Квантование по времени и по уровню.

В непрерывных автоматических системах, изучавшихся в курсе "Основы ТАУ", сигналы, поступающие на входы и выходы элементов САУ, являются, как правило, непрерывными функциями времени. Однако во многих случаях оказывается выгодным переход от непрерывного к дискретному способу представления и преобразования информации. Этот переход осуществляется дискретизацией непрерывного сигнала, т.е. заменой непрерывной функций  $f(t)$  дискретными значениями  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ . Дискретизация (квантование) непрерывного сигнала может осуществляться по времени, по уровню или и по времени и по уровню.

Дискретизация сигнала по времени состоит в замене непрерывного сигнала (рис.1,а) дискретными значениями, взятыми в определенные, заранее заданные моменты времени. Обычно эти моменты времени равноудалены друг от друга на величину  $T$ , которая называется интервалом квантования или периодом дискретности (рис.1,б). В этом случае последовательность

$\{f_n\}$ ,  $n=1,2,3, \dots$ , определяется формулой  $f[nT] = f(t)|_{t=nT}$

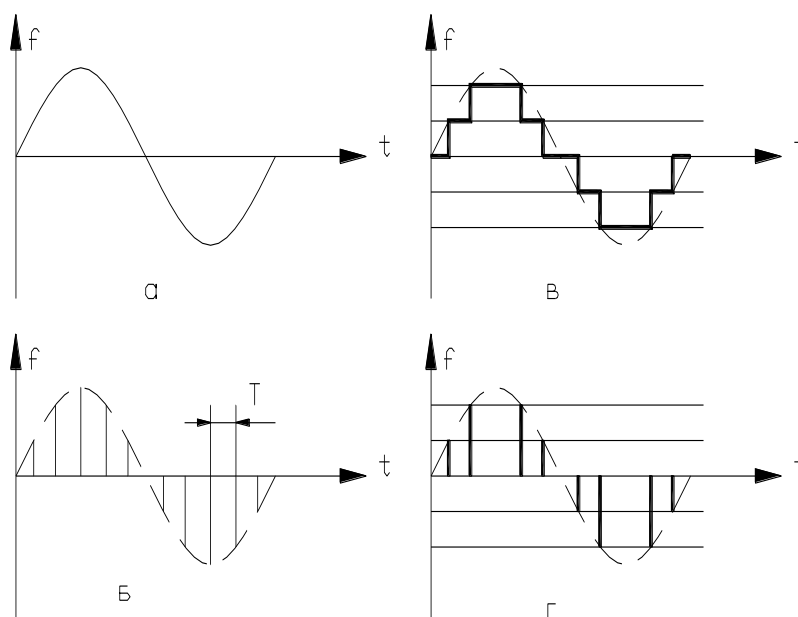


Рис.1

Дискретизация по уровню предполагает замену непрерывного сигнала числовой последовательностью  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ , элементы которой могут

принимать лишь заранее определенные, обычно равноотстоящие друг от друга значения (рис.1, в). Моменты времени, в которые происходит смена уровней, определяются видом непрерывного сигнала  $f(t)$  и заранее неизвестны.

Дискретизация и по времени и по уровню совмещает в себе изложенные выше два способа формирования последовательности  $\{f_n\}, n=1,2,\dots$ . При этом непрерывный сигнал заменяется дискретной последовательностью  $\{f_n\}, n=1,2,\dots$  взятой в заранее заданные моменты времени, и каждый элемент этой последовательности округляется до ближайшего к нему значения уровня из числа разрешенных (рис.1,г).

Обычно применяют следующую классификацию дискретных систем:

- импульсные системы, в которых осуществляется дискретизация хотя бы одной из переменных системы по времени;
- релейные системы, в которых осуществляется дискретизация по уровню;
- цифровые системы, в которых осуществляется дискретизация сигналов и по времени и по уровню.

Из приведенных трех типов дискретных систем релейные САУ обычно рассматриваются как непрерывные системы с разрывной нелинейностью. В данном курсе ограничимся изучением импульсных и цифровых систем, особенности динамики которых определяются дискретизацией по времени.

## 2. Виды импульсной модуляции.

При дискретизации по времени непрерывная функция заменяется своими дискретами, выделенными в определенные моменты времени. Однако на практике нельзя реализовать решетчатую функцию с бесконечно малым временем существования каждого выделенного значения. При конечном времени работы технических устройств получается последовательность импульсов определенной длительности, промодулированная выделенными дискретами непрерывной функции. В теории дискретных систем принято выделять импульсный элемент (ИЭ), осуществляющий дискретизацию по времени и модуляцию. В схемах импульсный элемент обозначают так, как показано на рис. 2.

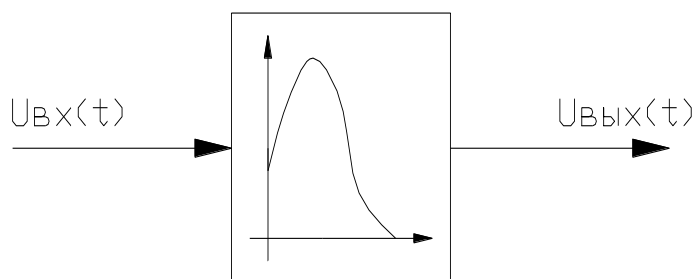


Рис. 2

Таким образом, импульсный элемент порождает последовательность импульсов, параметры которых связаны со значениями непрерывного сигнала в моменты квантования  $0, T, 2T, 3T$  (здесь и далее будем считать моменты

квантования равностоящими друг от друга). В зависимости от того, какой параметр импульса определяется значениями выделенных дискрет, различают амплитудно-импульсную, широтно-импульсную и фазо-импульсную модуляции.

В случае амплитудно-импульсной модуляции амплитуда импульса постоянной длительности  $A_n$  определяется дискретой  $f[nT]$

$$A_n = \varphi\{f[nT]\}.$$

В частном случае линейной амплитудно-импульсной модуляции

$$A_n = Kf[nT], \quad n = 0, 1, \dots$$

Этот случай иллюстрируется рис. 3,а.

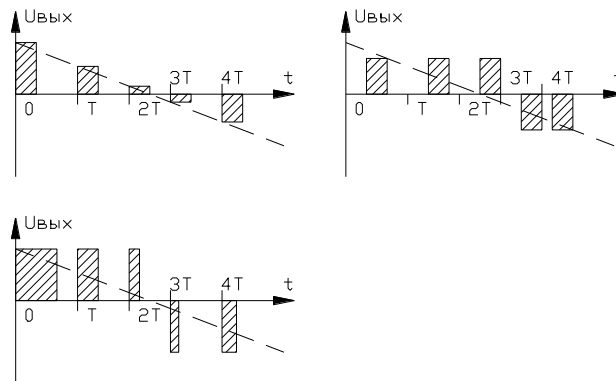


Рис. 3

При широтно-импульсной модуляции (рис. 3,б) амплитуда импульсов постоянна, а их длительность (не превышающая интервала квантования) зависит от выделенных значений дискрет, т.е.

$$\gamma_n T = \varphi\{f[nT]\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

При фазо-импульсной модуляции амплитуда и ширина импульса постоянны, а величина  $f[nT]$  определяет его положение внутри интервала квантования (рис.3,в), т.е.

$$\beta_n T = \varphi\{f[nT]\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отметим, что два последних вида импульсной модуляции принципиально нелинейны. Дискретизацию и по времени и по уровню можно рассматривать как амплитудно-импульсную модуляцию, когда в зависимости для  $A_n$  функция  $\varphi$  имеет вид, представленный на рис. 4. Таким образом, цифровые системы можно трактовать как один из типов нелинейных импульсных систем.

Линейные импульсные системы характеризуются наличием в своем составе импульсного элемента, осуществляющего линейную амплитудно-импульсную модуляцию.



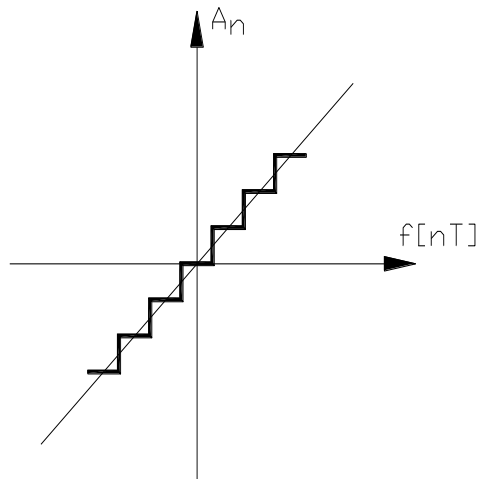


Рис. 4

### 3. Импульсные и цифровые методы в системах автоматического управления

Дискретные системы автоматического управления играют важную роль в современном приборостроении, технике управления и связи. Их преимуществами являются экономичность, высокие динамические характеристики, малый вес. Области их применения весьма разнообразны.

Важнейшим классом дискретных систем являются цифровые САУ. Первые результаты использования цифровых вычислительных машин (ЦВМ) в системах автоматического управления показали, что они обладают большой гибкостью и универсальностью по сравнению с аналоговой техникой. Вследствие этого цифровые средства управления стали широко применяться в САУ. Их использование позволило решать качественно новые задачи управления, реализовывать сложные алгоритмы управления, связанные с обработкой большого количества информации, которую трудно провести с помощью аналоговой техники. Усложнение алгоритма управления, реализуемого на базе аналоговой техники, неизбежно требует увеличения числа резисторов, конденсаторов и других элементов. В то же время аналогичное усложнение алгоритма управления в рамках цифровых систем приводит лишь к усложнению программы для ЦВМ. Цифровые системы обладают высокой помехоустойчивостью, так как сигналы в таких системах являются кодированными и передаются практически без ошибок (за исключением ошибки, вносимой квантованием по уровню). Использование ЦВМ в контуре управления позволяет применить методы нелинейного программирования, оптимального управления, теории самонастраивающихся систем.

При учете квантования сигналов по уровню математическая модель цифровой САУ оказывается принципиально нелинейной и весьма сложной для исследования. Вследствие этого процесс проектирования таких систем обычно разделяется на два этапа. На первом этапе используется линейное приближение - линейная импульсная система. При этом не учитывается операция квантования по уровню и производится линеаризация непрерывной части системы, если в этом есть необходимость. Использование линейных моделей цифровых САУ позволяет решать целый ряд важных вопросов их анализа и синтеза: исследовать зависимость показателей качества от параметров системы,

проводить синтез алгоритмов управления, определять требования к формирующей алгоритм управления ЦВМ и т.д. В принципе, все исследование может заканчиваться выполнением только первого этапа.

На втором этапе исследования используется нелинейная математическая модель цифровой САУ. Она позволяет установить возможность возникновения незатухающих колебаний в системе, определить их параметры, область существования и т.д.

В данном курсе рассматривается динамика цифровых САУ на основе линейных математических моделей. При необходимости использования нелинейных математических моделей цифровых систем можно воспользоваться имеющейся к настоящему времени литературой.

## Лекция № 2

Тема:

### Импульсный элемент и его уравнения

План лекции:

Предварительные замечания.

Амплитудно-импульсный элемент и его эквивалентное представление.

3. Идеальный импульсный элемент и его математическое описание.

4. Формирующее звено и его математическое описание. Экстраполятор нулевого порядка.

#### 1. Предварительные замечания

Как и в непрерывных системах, исследование динамики дискретных систем может проводиться либо с использованием переменных состояния, либо с использованием входных и выходных переменных систем. В первом случае исследование обычно проводят во временной области, рассматривая систему разностных уравнений и анализируя свойства ее решений. Этот подход и разработанные в его рамках методы являются весьма плодотворными. Они позволяют рассматривать нелинейные многомерные дискретные системы, проводить исчерпывающее исследование их свойств, решать задачи синтеза в различной постановке.

Во втором случае исследуют не весь набор переменных состояния, а лишь поведение некоторых величин, по изменению которых и оценивается качество САУ - выходные переменные системы. В задачу исследования может входить анализ зависимости выходных переменных от входных величин, решение вопроса, как придать системе требуемые свойства по этим переменным и т.п. При этом для линейных импульсных систем наиболее простым и распространенным математическим аппаратом описания и исследования является аппарат дискретного преобразования Лапласа и  $Z$  - преобразования, позволяющий получить уравнение САУ в изображениях и найти дискретные передаточные функции.

Рассмотрим вопросы описания и исследования дискретных систем каждым из указанных методов. Начнем со второго подхода, когда для математического описания системы используются уравнения в изображениях и дискретные передаточные функции.

#### 2. Амплитудно-импульсный элемент и его эквивалентное представление.

Простейшую импульсную систему можно представить в виде соединения импульсного элемента и непрерывной части. Рассмотрим амплитудно-импульсный элемент (АИЭ). Импульсный элемент представляет собой устройство, на выходе которого в момент времени  $t=0, T, \dots, nT, \dots$  наблюдается последовательность импульсов произвольной формы с амплитудами, пропорциональными дискретам входного сигнала  $x[nT]$ . Обозначение АИЭ в схемах и соответствующие при этом друг другу входной и выходной сигналы показаны на рис.5.

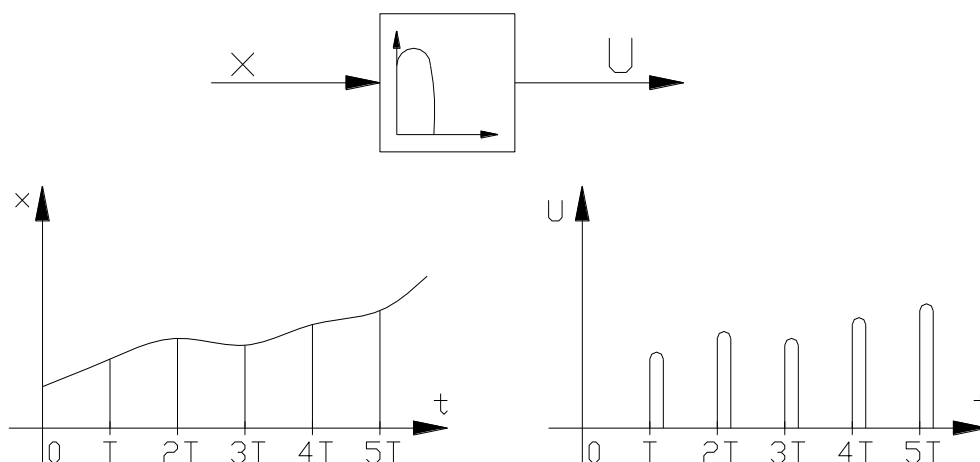


Рис. 5

При математическом описании ИЭ оказывается удобным понятие идеального импульсного элемента (ИИЭ). Под идеальным импульсным элементом будем понимать звено, выходная величина  $x^*(t)$  которого представляет собой последовательность  $\delta$ -функций с площадями, равными дискретам входной величины  $x[nT]$ . Пусть функция  $s(t)$  задает форму импульса на выходе ИЭ, соответствующего единичной дискрете входного сигнала, приложенной в момент времени  $t=0$ , в силу свойства линейности дискрете  $x[nT]$  соответствует импульс

$$U(t) = x[nT]s(t - nT) \quad (1)$$

(сдвиг аргумента  $t$  на  $nT$  объясняется тем, что импульс возникает при  $t=nT$  и не раньше). Определим реакцию на дискрету  $x[nT]$  последовательного соединения ИИЭ и непрерывного звена с импульсной переходной функцией  $s(t)$  (см. рис.6). При этом  $x^*(t) = x[nT]\delta(t - nT)$ .

Пройдя через непрерывное звено, дельта-функция в силу свойств импульсной переходной характеристики развернется в сигнал  $s(t - nT)$  и, таким образом, на выходе цепочки получим функцию  $U(t) = x[nT]s(t - nT)$ , совпадающую с функцией (1). Отсюда следует, что импульсный элемент с произвольной формой импульса  $s(t)$  можно представить как последовательное соединение ИИЭ и непрерывного звена с импульсной переходной функцией  $s(t)$ . Это непрерывное звено может быть также задано своей передаточной функцией  $s(p) = L[s(t)]$ . Линейное звено, определяющее форму импульса, называют также формирующим звеном, или экстраполятором, и обычно присоединяют его к непрерывной части системы. Таким образом, в линейной импульсной системе с одним ИЭ можно выделить идеальный ИЭ и непрерывную часть.

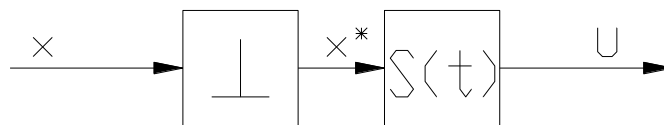


Рис. 6

### 3. Идеальный импульсный элемент и его математическое описание.

Рассмотрим идеальный импульсный элемент. В соответствии с определением уравнение, связывающее входной  $x(t)$  и выходной  $x^*(t)$  сигналы ИИЭ, имеет вид

$$x^*(t) = x[0]\delta(t) + x[T]\delta(t-T) + \dots + x[nT]\delta(t-nT) + \dots = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT), \quad (2)$$

т.е. выходная переменная есть последовательность  $\delta$ -функций, промодулированных входным сигналом. При этом

$$L[x^*(t)] = \int_0^{\infty} x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-pnT} = X^*(p) = X(e^{pT}) = X(z) \Big|_{z=e^{pT}},$$

т.е. преобразование Лапласа выходной величины ИИЭ равно дискретному преобразованию Лапласа решетчатой функции  $x[nT]$ . Связь между изображениями непрерывной  $x(t)$  и решетчатой  $x[nT]$  функций устанавливается зависимостью

$$X^*(p) = \frac{x(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_H(p + jm \frac{2\pi}{T}) \quad (3)$$

В итоге ИИЭ может быть описан зависимостями (2) или (3). Зависимость (2) устанавливает связь между входной  $x(t)$  и выходной  $x^*(t)$  переменными, зависимость (3) - между соответствующими изображениями.

### 4. Формирующее звено и его математическое описание.

#### Экстраполятор нулевого порядка.

Формирующее звено порождает из  $\delta$ -импульсов на выходе ИИЭ последовательность физических импульсов, характерную для данного устройства. Как отмечалось ранее, импульсная переходная функция формирующего звена  $s(t)$  (весовая функция) определяется формой импульса. Передаточная функция формирующего звена  $S(p)$  задается выражением

$$S(p) = L[s(t)]$$

Например, если выходная последовательность импульсов имеет вид, представленный на рис.7, то передаточная функция формирующего звена будет

$$S(p) = k \frac{1 - e^{-\gamma Tp}}{p},$$

где  $k$ -коэффициент пропорциональности амплитуды выходного импульса и соответствующей дискреты входного сигнала.

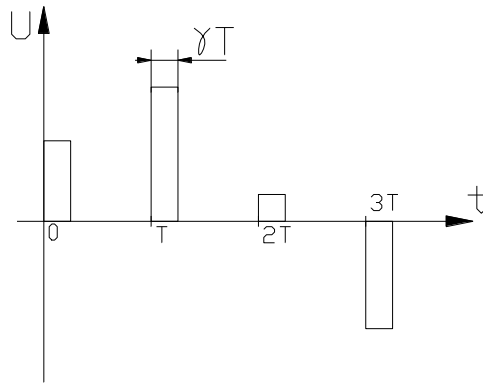


Рис. 7

Если выходная величина ИЭ остается постоянной в течение всего интервала квантования  $T$ , то формирующее звено называется экстраполятором нулевого порядка. Его передаточная функция имеет вид

$$s(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (5)$$

Здесь и далее будем считать, что  $k=1$ . В практике импульсного регулирования могут встречаться и другие формы выходных сигналов ИЭ, однако в САУ наиболее часто используются прямоугольные импульсы. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением формирующих звеньев с передаточными функциями (4) или (5).

## Лекция № 3

Тема:

### Уравнения и передаточные функции разомкнутых импульсных систем.

План лекции:

1. Эквивалентная схема разомкнутой импульсной системы.
2. Уравнения разомкнутой импульсной системы.
3. Передаточная функция разомкнутой импульсной системы.

#### 1. Эквивалентная схема разомкнутой импульсной системы.

Рассмотрим простейшую разомкнутую импульсную систему, состоящую из амплитудно-импульсного элемента и непрерывной части. Импульсный элемент может быть представлен в виде последовательного соединения идеального импульсного элемента и экстраполятора. Таким образом, импульсная система всегда может быть приведена к соединению ИИЭ и непрерывных звеньев, как это показано на рис.8.

При таком представлении используют понятие приведенной непрерывной части (ПНЧ), состоящей из собственно непрерывной части, последовательно соединенной с формирующим звеном ИЭ. Передаточная функция ПНЧ определяется выражением

$$W(p) = S(p)W_{\text{нч}}(p).$$

ПНЧ также может исчерпывающим образом характеризоваться своей весовой функцией

$$w(t) = L^{-1}[W(p)]$$

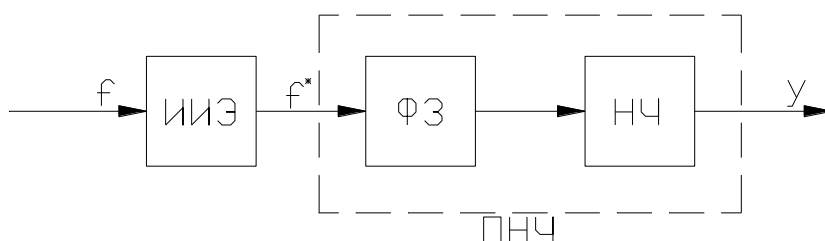


Рис. 8

#### 2. Уравнения разомкнутой импульсной системы.

В соответствии с определением ИИЭ имеем

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \delta(t - kT). \quad (6)$$

Выходной сигнал в силу свойства линейности можно рассматривать как сумму реакций приведенной непрерывной части на модулированную последовательность  $\delta$ -функций (6). В соответствии с известной формулой для непрерывных линейных систем при нулевых начальных условиях получим

$$y(t) = \int_0^t f^*(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad nT \leq t < (n+1)T$$

или с учетом формулы (6)

$$y(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} f[kT]\delta(\tau-kT)w(t-\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \int_0^t \delta(\tau-kT)w(t-\tau)d\tau, \quad (7)$$

$$nT \leq t < (n+1)T.$$

Так как весовая функция  $w(t-\tau)$ , рассматриваемая по аргументу  $\tau$ , удовлетворяет условию

$$w(t-\tau) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \tau > t$$

то

$$\int_0^t \delta(\tau-kT)w(t-\tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad k > n, nT \leq t < (n+1)T.$$

Таким образом, оба сомножителя под знаком интеграла отличны от нуля только при выполнении условия  $0 \leq k \leq n$ . Для этих значений  $k$  в силу фильтрующего свойства  $\delta$ -функции найдем

$$\int_0^t \delta(\tau-kT)w(t-\tau)d\tau = w(t-kT). \quad (8)$$

Так как имеет смысл рассматривать только значения  $k$ , не превосходящие  $n$ , то в выражении (7) можно заменить верхний предел суммирования. Окончательно с учетом формулы (8) получим

$$y(t) = \sum_{k=0}^n f[kT]w(t-kT), \quad nT \leq t < (n+1)T. \quad (9)$$

При этом в дискретные моменты времени  $t=nT$ ,  $n=0,1,\dots$  будем иметь

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n f[kT]w[(n-k)T]. \quad (10)$$

Уравнение (10) представляет собой уравнение импульсной системы во временной области, позволяющее определить выходной сигнал системы при известном входном воздействии.

### 3. Передаточная функция разомкнутой импульсной системы.

Запишем теперь уравнения разомкнутой системы в изображениях. Применим к зависимости (10)  $Z$ -преобразование, с учетом свойств  $Z$ -преобразования найдем

$$Y(z) = F(z)W(z), \quad (11)$$

где  $Y(z) = Z\{y[nT]\}$ ,  $F(z) = Z\{f[nT]\}$ ,  $W(z) = Z\{w[nT]\}$ .

Определим  $Z$ -передаточную функцию импульсной системы как отношение  $Z$ -преобразования выходной величины к  $Z$ -преобразованию входной величины при нулевых начальных условиях:



$$W(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{f[nT]\}}.$$

Из уравнения (11) следует, что  $Z$ -передаточная функция разомкнутой импульсной системы равна  $Z$ -преобразованию дискретной весовой функции  $w[nT]$  ПНЧ, т.е.

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w[nT]z^{-n} = L\left[w(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\right]. \quad (12)$$

Формула (12) используется при вычислении  $Z$ -передаточных функций разомкнутых импульсных систем.

Иногда возникает необходимость определить реакцию системы в смещенные дискретные моменты времени  $t = nT + \varepsilon T$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Подставив в зависимость (9)  $t = nT + \varepsilon T$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , получим

$$y[nT + \varepsilon T] = \sum_{k=0}^n f[kT]w[(n-k)T + \varepsilon T] \quad (13)$$

Перейдя к уравнению в изображениях, найдем

$$Y(z, \varepsilon) = F(z)W(z, \varepsilon) \quad (14)$$

Здесь изображения  $Y(z, \varepsilon), W(z, \varepsilon)$  соответствуют модифицированному  $Z$ -преобразованию решетчатых функций  $y[nT]$ ,  $w[nT]$ . Уравнению (14) соответствует передаточная функция

$$W(z, \varepsilon) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{F(z)},$$

связывающая модифицированное  $Z$ -преобразование выходного сигнала и обычное  $Z$ -преобразование входной переменной. При изменении параметра  $\varepsilon$  от 0 до 1 зависимости (13), (14) позволяют определить значение выходной величины в любой промежуточный момент времени.

## Лекция № 4

Тема:

### Вычисление Z-передаточных функций.

План лекции:

1.  $\bar{Z}$ -преобразование дробно-рациональных функций.
2. Учет экстраполятора при вычислении Z- передаточных функций.
3. Пример вычисления Z –передаточной функции.

#### 1. $\bar{Z}$ -преобразование дробно-рациональных функций.

Рассмотрим вычисление Z -передаточной функции простейшего соединения (см рис 8 ). В соответствии с формулой (12) и свойствами Z -преобразования Z -передаточная функция  $W(Z)$  может быть найдена по известной весовой функции ПНЧ  $w(t)$  или по ее передаточной функции  $W(p)$ .

Связь между передаточными функциями  $W(z)$  и  $W(p)$  задается  $\bar{D}$  -преобразованием с последующей заменой  $e^{pt} = z$  . Обозначим операцию выполнения  $\bar{D}$  -преобразования с заменой  $e^{pt} = z$  через  $\bar{Z}$  . Тогда

$$W(z) = \bar{Z}\{W(p)\}$$

(15)

Приведем таблицу  $\bar{Z}$  -преобразования для некоторых часто встречающихся функций  $W(p)$  [1] .

$W(p)$	$W(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{Z}{Z-1}$
$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{Z}{Z-d}$ , $d = e^{-\alpha T}$
$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{TZd}{(Z-d)^2}$ , $d = e^{-\alpha T}$
$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{Z^2 \sin \beta T}{Z^2 - 2Z \cos \beta T + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{Z^2 - Z \cos \beta T}{Z^2 - 2Z \cos \beta T + 1}$

Так как  $\bar{Z}$  - преобразование обладает свойством линейности, то в случае, если  $W(p)$  - дробно-рациональное выражение, вычисление Z -передаточных функций можно проводить следующим образом:

Передаточную функцию  $W(p)$  разложить на простейшие дроби

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p) .$$

2. Для каждой простейшей дроби  $W_i(p), i=1,2,\dots,n$  с помощью таблицы найти  $\bar{Z}$  - преобразование, т.е.

$$W_i(z) = \bar{Z}\{W_i(p)\}, i=1,2,\dots,n .$$

По теореме линейности  $\bar{Z}$ -преобразования записать  $W(z) = W_1(z) + W_2(z) + \dots + W_n(z)$  и провести необходимые преобразования.

## 2. Учет экстраполятора при вычислении Z- передаточных функций.

Однако предположение о том, что передаточная функция  $W(p)$  ПНЧ есть дробно-рациональное выражение, не всегда выполняется. Как отмечалось ранее

$$W(p) = S(p)W_{HЧ}(p),$$

где  $S(p), W_{HЧ}(p)$  передаточные функции формирователя и собственно непрерывной части соответственно. Если  $W_{HЧ}(p)$  обычно является дробно-рациональной функцией, то  $S(p)$  будет таковой лишь при некоторых упрощающих предположениях (см. [4]). Обычно  $S(p)$  является трансцендентной функцией  $p$ , например, для экстраполятора нулевого порядка

$$S(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}.$$

Рассмотрим этот случай и определим для него порядок нахождения Z- передаточной функции  $W(z)$ . Пусть  $W_{HЧ}(p)$  - дробно-рациональная функция

$$W_{HЧ}(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (16)$$

где  $A(p), B(p)$  - многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно. Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - полюсы передаточной функции (16). Считая, что все полюсы первого порядка, разложим выражение (16) на простейшие дроби:

$$W_{HЧ}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p - p_i}.$$

Тогда

$$W(z) = \bar{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p - p_i} \right\}$$

или

$$W(z) = \bar{Z} \left\{ (1 - e^{-Tp}) \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p(p - p_i)} \right\}.$$

В соответствии со свойствами  $\bar{Z}$ -преобразования множитель  $1 - e^{-Tp} = 1 - z^{-1}$  может быть вынесен за знак преобразования (см. курс “Математические основы ТАУ” или [6, прил.2]). Тогда

$$W(z) = (1 - z^{-1}) \bar{Z} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p(p - p_i)} \right\} = (1 - z^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B(p_i)} \bar{Z} \left\{ \frac{1}{p(p - p_i)} \right\} \quad (17)$$

Найдем  $\bar{Z} \left( \frac{1}{p(p - p_i)} \right)$ . Очевидно, что

$$\frac{1}{p(p-p_i)} = \frac{1}{p_i} \left( \frac{1}{p-p_i} - \frac{1}{p} \right).$$

Пользуясь таблицей  $\bar{Z}$ -преобразования с учетом теоремы линейности, получим

$$\bar{Z}\left(\frac{1}{p(p-p_i)}\right) = \frac{1}{p_i} \left[ \frac{z}{z-e^{p_i T}} - \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1}{p_i} \frac{z(e^{p_i T} - 1)}{(z-e^{p_i T})(z-1)} \quad (18)$$

Подставив выражение (18) в формулу (17), найдем

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \bar{Z} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)p_i} \frac{z(e^{p_i T} - 1)}{(z-e^{p_i T})(z-1)} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)p_i} \frac{e^{p_i T} - 1}{z - e^{p_i T}}, \quad (19)$$

т.е. получена формула для вычисления  $Z$ -передаточной функции  $W(z)$  разомкнутой системы. Отметим, что при  $p_i = 0$ , а также при наличии кратных полюсов в формуле возникают неопределенности. Они могут раскрываться обычным способом, по правилу Лопиталья. Кроме того, формулу (17)) можно записать в виде

$$W(z) = (1-z^{-1}) \bar{Z} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A(p)}{pB(p)} \right\}.$$

Здесь под знаком  $\bar{Z}$ -преобразования стоит дробно-рациональная функция. Определив  $\bar{Z} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A(p)}{pB(p)} \right\}$  так, как излагалось выше (используя разложение выражения на простейшие дроби), можно легко найти  $Z$ -передаточную функцию разомкнутой системы.

В общем случае для определения  $Z$ -передаточной функции  $W(z)$  можно использовать зависимость, полученную ранее в курсе «Математические основы ТАУ»:

$$W(z) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} s_i W(s) \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \Big|_{s=s_i}, \quad z = e^{pT}. \quad (20)$$

где  $s_i$  – полюсы передаточной функции  $W(s)$  ПНЧ ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Следует, однако, иметь в виду, что формула (20) справедлива, если выполняется условие

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ (\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty)}} W(s)s = 0. \quad (21)$$

Например, если передаточная функция ПНЧ имеет вид  $W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  и степень многочлена  $B(p)$  превосходит степень  $A(p)$  не менее чем на 2 порядка, то условие (21) выполняется, и тогда из зависимости (20) получим

$$W(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \frac{z}{z - e^{Ts_i}}. \quad (22)$$

В случае, если передаточная функция ПНЧ содержит выражение  $1-e^{-Tp}$ , ее можно представить в виде

$$W(p) = (1 - e^{-Tp}) W_1(p),$$

где  $W_1(p)$  - дробно-рациональная функция.

Тогда

$$W(z) = (1 - z^{-1}) \bar{D}_z \{W_1(p)\}$$

и

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} s W_1(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=s_i}, \quad (23)$$

где  $s_1, s_2, \dots, s_m$  - полюсы функции  $W_1(s)$ .

### 3. Пример вычисления Z – передаточной функции.

Найдем Z-передаточную функцию разомкнутой системы, состоящей из ИЭ с экстраполятором нулевого порядка и непрерывной части с передаточной функцией

$$W_{нч}(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}.$$

Передаточная функция ПНЧ имеет вид

$$W(p) = \frac{k(1 - e^{-Tp})}{p(T_1 p + 1)}.$$

Для нахождения  $W(z)$  применим формулу (23):

$$W(z) = \frac{k(z-1)}{z} \sum_{i=1}^2 \operatorname{Res} \frac{1}{s(T_1 s + 1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=s_i}.$$

Полюсы выражения  $\frac{1}{s(T_1 s + 1)}$  следующие:  $s_1 = 0, s_2 = -1/T_1 \dots$

Тогда получим

$$\operatorname{Res} \frac{1}{s(T_1 s + 1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=0} = \frac{z}{z-1}; \operatorname{Res} \frac{1}{s(T_1 s + 1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=-1/T_1} = \frac{z}{z - e^{-T/T_1}}$$

Отсюда следует

$$W(z) = \frac{k(z-1)}{z} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} \right] = \frac{k(z-1)}{z} \left[ \frac{z(1 - e^{-T/T_1})}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})} \right] = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})}{z - e^{-T/T_1}}$$

Этот же результат можно получить с помощью таблицы  $\bar{Z}$ -преобразования, а именно

$$W(z) = \bar{Z} \left\{ \frac{(1 - e^{-Tp})k}{p(T_1 p + 1)} \right\} = (1 - z^{-1}) \bar{Z} \left\{ \frac{k}{p(T_1 p + 1)} \right\}.$$

Проводя разложение на простейшие дроби, найдем

$$W(z) = (1 - z^{-1}) \bar{Z} \left\{ \frac{k}{T_1} \left( \frac{T_1}{p} - \frac{T_1}{p + \frac{1}{T_1}} \right) \right\} = \frac{z-1}{z} \left[ \bar{Z} \left\{ \frac{k}{p} \right\} - \bar{Z} \left\{ \frac{k}{p + \frac{1}{T_1}} \right\} \right] = \frac{z-1}{z} \left[ \frac{kz}{z-1} - \frac{kz}{z - e^{-T/T_1}} \right] = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})}{z - e^{-T/T_1}}$$

Отметим некоторые свойства Z-передаточных функций. Передаточная функция есть дробно-рациональная функция  $z$ . При использовании модифицированного Z-преобразования числитель этой функции зависит от  $\varepsilon$ . Порядком передаточной функции  $W(z)$  назовем степень  $n$  ее знаменателя. Порядок дискретной передаточной функции равен степени знаменателя передаточной функции непрерывной части системы  $W_{nc}(p)$ .

Полюсы  $z_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  Z-передаточных функций  $W(z)$  и  $W(z,\varepsilon)$  связаны с полюсами  $p_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  передаточной функции  $W_{nc}(p)$  непрерывной части и определяются соотношением

$$z_i = e^{p_i T}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (24)$$

Рассмотрим задачу определения реакции дискретной системы с передаточной функцией  $W(z)$  на входной сигнал  $f[kT]$ . Определив Z-преобразование входного сигнала  $F(z) = Z\{f[kT]\}$ , запишем уравнение системы в изображениях:

$$Y(z) = F(z)W(z). \quad (25)$$

Таким образом, если Z-преобразование выходной величины известно, процесс на выходе может быть найден по формуле обратного Z-преобразования:

$$y[kT] = Z^{-1}\{Y(z)\}.$$

Для нахождения  $y[kT]$  можно применить известную формулу

$$y[kT] = \sum_{i=1}^{\eta} \operatorname{Res} F(z)W(z)z^{k-1} \Big|_{z=z_i},$$

где  $z_i$  - полюсы функций  $F(z)$ ,  $W(z)$ ,  $i=1,2,\dots,\eta$ .

Для вычисления обратного Z-преобразования, кроме того, может быть использовано разложение изображения в ряд Лорана [4]. Наконец, по известной Z-передаточной функции нетрудно составить соответствующее разностное уравнение импульсной системы. Пусть

$$W(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j z^j}{\sum_{i=0}^n b_i z^i}.$$

Тогда уравнение (25) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^n b_i z^i Y(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j F(z).$$

Переходя к оригиналам и учитывая теорему о смещении аргумента решетчатой функции, получим

$$\sum_{i=0}^n b_i y[k+i] = \sum_{j=0}^m a_j f[k+j].$$

Это соотношение представляет собой разностное уравнение системы, с помощью которого можно рассчитать процесс на выходе дискретной САУ.

## Лекция № 5

Тема:

### Уравнения и передаточные функции замкнутых импульсных систем.

План лекции:

1. Уравнения и передаточные функции простейшей замкнутой импульсной системы.
2. Структурные преобразования в импульсных системах.

#### 1. Уравнения и передаточные функции простейшей замкнутой импульсной системы.

Рассмотрим замкнутую систему с импульсным элементом в цепи сигнала ошибки и единичной обратной связью. Структурная схема системы приведена на рис.10.

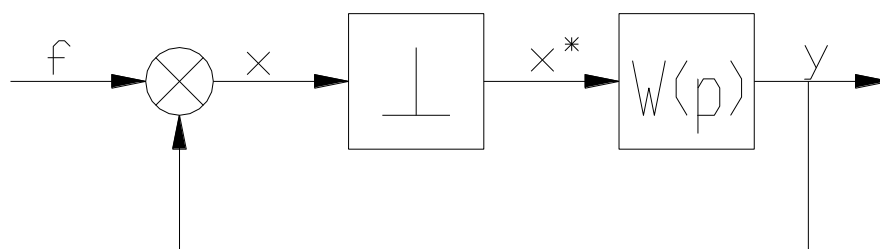


Рис.10

Запишем уравнение замыкания для дискретных моментов времени  $t=nT$ ,  $n=0,1,\dots$

$$x[n]=f[n]-y[n]. \quad (26)$$

Для получения уравнения замкнутой системы воспользуемся уравнением разомкнутой системы

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]w[n-k]. \quad (27)$$

Подставив уравнение (26) в формулу (27), получим

$$y[n] = \sum_{k=0}^n f[k]w[n-k] - \sum_{k=0}^n y[k]w[n-k] \quad (28)$$

Для получения передаточной функции замкнутой импульсной системы применим Z -преобразование к обеим частям уравнения (28). С использованием теоремы свертки получим

$$Y(z) = F(z)W(z) - Y(z)W(z),$$

откуда

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} F(z) \quad (29)$$

Выражение

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}$$

определяет передаточную функцию замкнутой импульсной системы для управляемой переменной по входному воздействию. Из уравнения (29) и уравнения замыкания в изображениях

$$X(z) = F(z) - Y(z)$$

получим для изображения ошибки

$$X(z) = \frac{1}{1 + W(z)} F(z). \quad (30)$$

Выражение

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{1 + W(z)}$$

представляет собой передаточную функцию замкнутой системы по ошибке.

Пусть

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)$$

Найдем передаточную функцию замкнутой импульсной системы по отношению к сигналу  $g(t)$  на выходе звена с передаточной функцией  $W_1(p)$  (рис.11). Выражение, связывающее переменные  $x(t)$  и  $g(t)$  в дискретные моменты времени имеет вид

$$g[n] = \sum_{k=0}^n x[k]w_1[n-k]$$

где  $w_1(t)$  - весовая характеристика звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

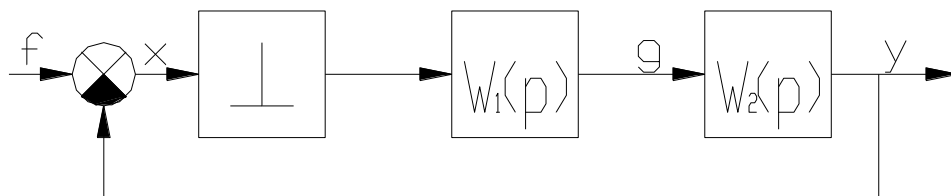


Рис.11

Применив Z-преобразование к обеим частям последнего уравнения, получим

$$G(z) = X(z)W_1(z),$$

где

$$W_1(z) = \bar{Z}\{W_1(p)\}$$

и, с учетом формулы (30), найдем

$$G(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W(z)} F(z).$$

Таким образом, искомая передаточная функция имеет вид

$$\Phi_1(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W(z)}$$



Пример. Найти передаточные функции замкнутой системы  $\Phi(z)$  и  $\Phi_0(z)$ . Приведенная непрерывная часть системы та же, что и в примере предыдущей лекции.

В результате решения предыдущего примера было найдено

$$W(z) = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})}{z - e^{-T/T_1}} = \frac{k(1-d)}{z-d}, \quad d = e^{-T/T_1}.$$

Тогда

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{\frac{k(1-d)}{z-d}}{1 + \frac{k(1-d)}{z-d}} = \frac{k(1-d)}{z+k-d(1+k)};$$

$$\Phi_0(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{1}{1 + \frac{k(1-d)}{z-d}} = \frac{z-d}{z+k-d(1+k)}.$$

## 2. Структурные преобразования в импульсных системах.

При анализе сколько-нибудь сложных импульсных САУ невозможно обойтись без структурных преобразований, сопровождающихся определением эквивалентных передаточных функций отдельных элементов цепи. Правила структурных преобразований дискретных систем имеют отличия от правил преобразования непрерывных систем, вызванные наличием импульсных элементов. Рассмотрим некоторые возможные структуры импульсных систем.

1. Система с импульсным элементом на входе. Структурная схема системы с ИЭ на входе, соответствующая этому случаю, была рассмотрена ранее (см. рис. 8) и получены соотношения

$$Y(z) = W(z)F(z), \quad W(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \bar{Z}\{W(p)\}.$$

2. Последовательное соединение непрерывных звеньев, разделенных импульсными элементами. Структурная схема системы в этом случае представлена на рис.12. Разбив схему на части, каждая из которых состоит из одного непрерывного звена и импульсного элемента перед ним, получим

$$\frac{X_1(z)}{F(z)} = W_1(z) = \bar{Z}\{W_1(p)\}, \quad \frac{X_2(z)}{X_1(z)} = W_2(z) = \bar{Z}\{W_2(p)\},$$

$$\dots, \frac{Y(z)}{X_{n-1}(z)} = W_n(z) = \bar{Z}\{W_n(p)\}$$

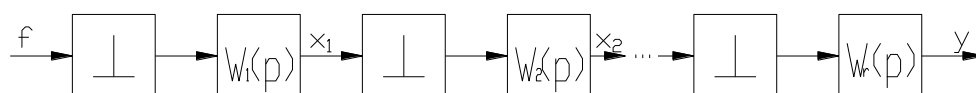


Рис.12

Исключив промежуточные переменные, найдем

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \prod_{i=1}^n W_i(z) = W(z) ,$$

т.е. Z -передаточная функция последовательного соединения звеньев, разделенных ИЭ, равна произведению z-передаточных функций этих звеньев.

3. Последовательное соединение непрерывных звеньев с одним импульсным элементом на входе. Структурная схема данной системы представлена на рис.13.

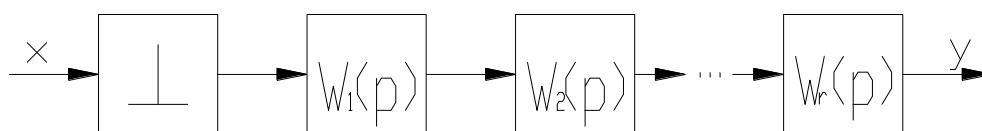


Рис.13

В этом случае эквивалентная передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)...W_n(p) ,$$

после чего соединение сводится к схеме 1. т.е.

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = W(z) = \bar{Z} \left\{ \prod_{i=1}^n W_i(p) \right\} .$$

4. Параллельное соединение непрерывных звеньев с импульсным элементом на входе. Структурная схема системы показана на рис.14. В соответствии с определением Z-передаточной функции и свойством линейности  $\bar{Z}$ -преобразования имеем

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = W(z) = \bar{Z} \left\{ \sum_{i=1}^n W_i(p) \right\} = \sum_{i=1}^n \bar{Z} \{ W_i(p) \} = \sum_{i=1}^n W_i(z) ,$$

где

$$W_i(z) = \bar{Z} \{ W_i(p) \} ,$$

т.е. Z-передаточная функция соединения равна сумме Z -передаточных функций отдельных звеньев, составлявших параллельное соединение.

5. Элементарная структура соединения с обратной связью. Структурная схема этой системы представлена на рис.15.

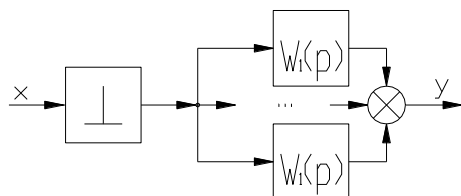


Рис. 14.

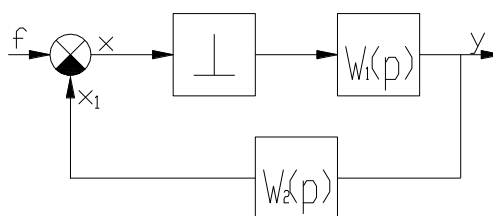


Рис. 15.

На основании результата п. 1 запишем

$$Y(z) = W_1(z)X(z) , \quad X_1(z) = W_2(z)X(z) ,$$

где

$$W_1(z) = \bar{Z} \{ W_1(p) \} , \quad W_2(z) = \bar{Z} \{ W_2(p) \}$$

Добавив уравнение замыкания

$$X(z) = F(z) - X_1(z)$$

и исключив из зависимостей  $X(z)$ ,  $X_1(z)$ , получим выражение для передаточной функции соединения

$$W(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_2(z)}.$$

В частном случае при  $W_2(p)=1$  имеем  $W_1(z)=W_2(z)$  и приходим к результату, полученному ранее.

В общем случае вычисление эквивалентной передаточной функции системы с большим числом импульсных элементов можно производить в следующей последовательности:

1. Ввести вспомогательные переменные, приняв за них сигналы на входах ИИЭ, входящих в схему.

2. Связать введенные вспомогательные координаты, входную и выходную переменные системы между собой с помощью Z-передаточных функций.

3. Исключить промежуточные переменные и разрешить записанную систему уравнений относительно выходной переменной.

4. Записать эквивалентную Z-передаточную функцию системы.

Пример. Найти Z-передаточную функцию импульсной системы, структурная схема которой представлена на рис.16.

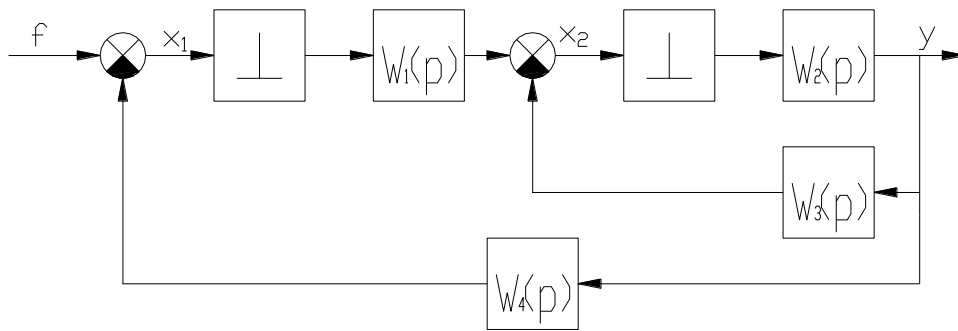


Рис.16

Введем вспомогательные переменные  $X_1$ ,  $X_2$  и запишем систему уравнений в изображениях:

$$X_1(z) = F(z) - W_4(z)X_2(z);$$

$$X_2(z) = W_1(z)X_1(z) - W_3(z)X_2(z);$$

$$Y(z) = W_2(z)X_2(z),$$

где

$$W_1(z) = \bar{Z}\{W_1(p)\}, W_2(z) = \bar{Z}\{W_2(p)\};$$

$$W_3(z) = \bar{Z}\{W_2(p)W_3(p)\}, W_4(z) = \bar{Z}\{W_2(p)W_4(p)\}.$$

Выполнив промежуточные преобразования, получим

$$X_2(z) = W_1(z)F(z) - W_1(z)W_4(z)X_2(z) - W_3(z)X_2(z),$$

откуда следует

$$X_2(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z)W_4(z) + W_3(z)} F(z),$$

и тогда

$$Y(z) = \frac{W_1(z)W_2(z)}{1 + W_1(z)W_4(z) + W_3(z)} F(z) .$$

Таким образом, эквивалентная  $z$ -передаточная функция системы по входному сигналу имеет вид

$$W_{\text{экв}}(z) = \frac{W_1(z)W_2(z)}{1 + W_1(z)W_4(z) + W_3(z)} .$$

## Лекция № 6

Тема:

### Частотные характеристики дискретных систем.

План лекции:

1. Определение установившейся реакции импульсной системы на дискретный гармонический сигнал.
2. Частотные характеристики дискретных систем.
3. Свойства частотных характеристик импульсных систем.

#### 1. Определение установившейся реакции импульсной системы на дискретный гармонический сигнал.

Рассмотрим прохождение дискретного гармонического сигнала

$$f[kT] = A \cos[\omega_0 kT + \alpha].$$

через импульсную систему с передаточной функцией  $W(z)$ . Для этого найдем реакцию системы на воздействие

$$f[kT] = Ae^{j[\omega_0 kT + \alpha]} \quad (31)$$

и далее выделим ее действительную часть,

Найдем изображение сигнала (31). На основании формулы (20) получим

$$F(z) = \text{Res} \frac{Ae^{j\alpha}}{s - j\omega_0} \frac{z}{z - e^{Ts}} \bigg|_{s=j\omega_0} = Ae^{j\alpha} \frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}}.$$

Изображение выходной переменной системы имеет вид

$$Y(z) = W(z)F(z) = W(z)Ae^{j\alpha} \frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}}.$$

Вычислив обратное Z-преобразование, найдем реакцию импульсной системы на сигнал (31):

$$y[kT] = Z^{-1} \{Y(z)\} = \sum_i \text{Res} Y(z) z^{k-1} \bigg|_{z_i} = Ae^{j\alpha} \sum_i \text{Res} W(z) \frac{z^k}{z - e^{j\omega_0 T}} \bigg|_{z_i}$$

где  $z_i$  - особые точки выражения, стоящего под знаком вычета, т.е. это полюсы передаточной функции  $W(z)$  и точка  $z = e^{j\omega_0 T}$ .

Положим для простоты, что полюсы  $z_1, z_2, \dots, z_n$  передаточной функции  $W(z)$  некратные и удовлетворяют условию

$$|z_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Тогда

$$\begin{aligned} y[kT] &= Ae^{j\alpha} \text{Res} W(z) \frac{z^k}{z - e^{j\omega_0 T}} \bigg|_{z=e^{j\omega_0 T}} + Ae^{j\alpha} \sum_{i=1}^n \text{Res} W(z) \frac{z^k}{z - e^{j\omega_0 T}} \bigg|_{z_i} = \\ &= Ae^{j\alpha} e^{j\omega_0 kT} W(e^{j\omega_0 T}) + Ae^{j\alpha} \sum_{i=1}^n \left[ \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{(z - z_i)W(z)}{z - e^{j\omega_0 T}} \right] z_i^k \end{aligned}$$

или

$$y[kT] = A W(e^{j\omega_0 T}) e^{j\omega_0 kT + \alpha} + \sum_{i=1}^n C_i z_i^k \quad (33)$$

где

$$C_i = A e^{j\alpha} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{(z - z_i) W(z)}{z - e^{j\omega_0 T}}.$$

При выполнении условия (32) второе слагаемое правой части формулы (33) стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$  и в системе устанавливается вынужденное движение

$$y[kT] = A W(e^{j\omega_0 T}) e^{j(\omega_0 kT + \alpha)} \quad (34)$$

Выделив в выражении (34) действительную часть, получим реакцию системы на гармонический сигнал в виде

$$y[kT] = A W(e^{j\omega_0 T}) \cos(\omega_0 kT + \alpha) = A |W(e^{j\omega_0 T})| \cos[\omega_0 kT + \alpha + \arg W(e^{j\omega_0 T})]$$

Из последней формулы видно, что при прохождении дискретного гармонического сигнала через импульсную систему у него изменяются амплитуда и фаза: амплитуда увеличивается в  $|W(e^{j\omega_0 T})|$  раз, а фаза изменяется на  $\arg W(e^{j\omega_0 T})$ .

## 2. Частотные характеристики дискретных систем.

Выражение  $W^*(j\omega)$ , полученное из Z-передаточной функции  $W(z)$  подстановкой  $z = e^{j\omega T}$ , называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) импульсной системы. Функция  $A^*(\omega) = |W(e^{j\omega T})|$  называется амплитудной частотной характеристикой, функция  $\varphi^*(\omega) = \arg W(e^{j\omega T})$  – фазовой частотной характеристикой импульсной системы. АФЧХ импульсной системы позволяют найти установившуюся реакцию на гармоническое воздействие, и в этом они сходны с АФЧХ непрерывных систем. АФЧХ импульсных систем определяют по следующим формулам:

$$W(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega T k} w[kT], \quad (38)$$

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} k\right)\right), \quad (39)$$

$$W(e^{j\omega T}) = \sum_{i=1}^{\eta} \text{Res } W(s) \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - e^{sT}} \Big|_{s_i}. \quad (40)$$

Пример. Пусть  $W(z) = \frac{z}{z - 0,5}$ . Найти частотные характеристики звена с такой передаточной функцией.

В соответствии с определением имеем

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 0,5};$$

$$A^*(\omega) = |W(e^{j\omega T})| = \frac{1}{\sqrt{(\cos\omega T - 0,5)^2 + \sin^2 \omega T}} = \frac{1}{\sqrt{1,25 - \cos\omega T}};$$

$$\varphi^*(\omega) = \arg W(e^{j\omega T}) = \omega T - \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - 0,5}.$$

Графики АФЧХ, построенные по приведенным зависимостям, показаны на рис.17 (здесь  $\bar{\omega} = \omega T$ ).

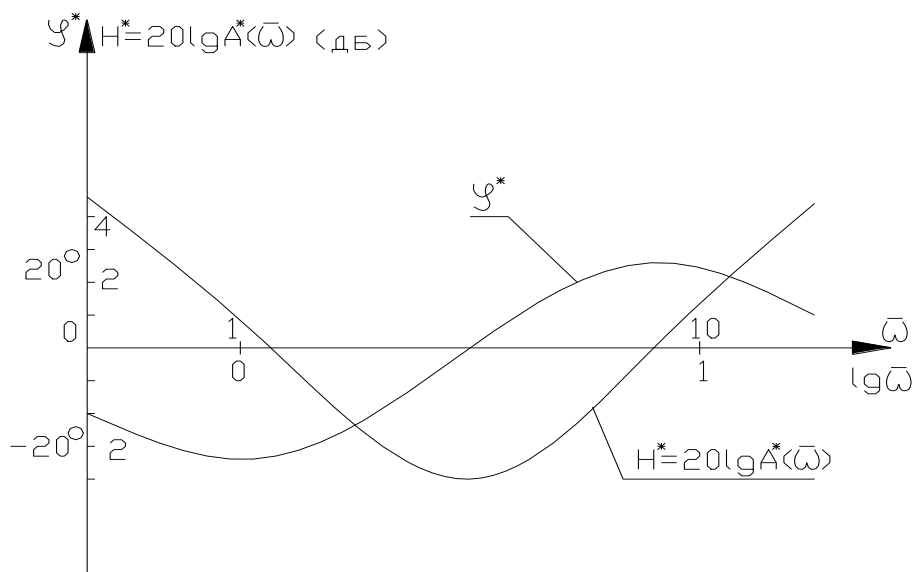


Рис .17

Из рис.17 видно, что частотные характеристики импульсных систем существенно отличаются от АФЧХ непрерывных систем, изучаемых в курсе "Основы ТАУ".

### 3. Свойства частотных характеристик импульсных систем.

Рассмотрим некоторые свойства частотных характеристик импульсных систем.

1. Вследствие периодичности экспоненты  $e^{j\omega T}$  частотная характеристика дискретной системы является периодической функцией частоты с периодом  $2\pi/T$ . Поэтому АФЧХ импульсной системы полностью определяется значениями в диапазоне  $-\pi/T < \omega \leq \pi/T$  (в основной полосе). Периодичность АФЧХ приводит к тому, что импульсная система одинаково пропускает сигналы  $\sin \omega T$  и  $\sin\left(\omega + \frac{2\pi}{T}n\right)t, n=0,1,\dots$ , так как в обоих случаях на выходе ИИЭ существуют одинаковые последовательности импульсов. Это свойство импульсных систем поясняет рис.18.

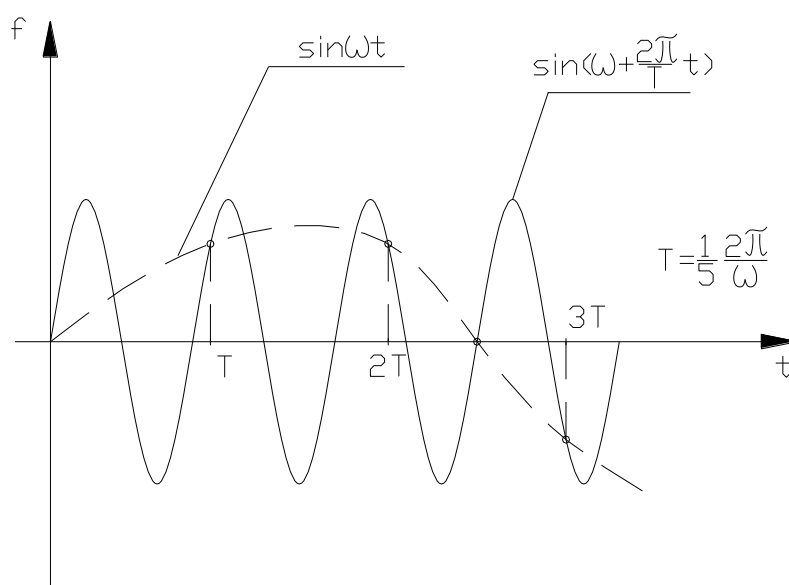


Рис. 18

2. Амплитудно-частотная характеристика  $A^*(\omega)$  является четной функцией частоты, т.е.  $A^*(\omega) = A^*(-\omega)$

Вследствие четности АЧХ и периодичности  $W^*(j\omega)$  достаточно знать значения АЧХ в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \pi/T$ .

Фазово-частотная характеристика  $\varphi^*(\omega)$  является нечетной функцией частоты, т.е.  $\varphi^*(\omega) = -\varphi^*(-\omega)$ .

Она также может быть задана своими значениями в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \pi/T$ .

3. При частотах  $\omega = \frac{\omega_0}{2}n$ , где  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, n = 0, 1, \dots$ , частотная характеристика дискретной системы всегда принимает действительные значения:

$$\operatorname{Im} W^*\left(j \frac{\omega_0}{2} n\right) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

или

$$\varphi^*\left(j \frac{\omega_0}{2} n\right) = \pi k, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Это свойство выполняется за исключением случаев, когда передаточная функция ПНЧ  $W(p)$  имеет полюс  $p = 0$  порядка  $m$ . Тогда передаточная функция  $W(z)$  имеет полюс  $z = 1$  того же порядка  $m$  и при  $\omega \rightarrow 0$   $A^*(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\varphi^*(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}m$ .



## Лекция № 7

Тема:

### Вычисление частотных характеристик дискретных систем.

План лекции:

1. Псевдочастотные характеристики импульсных систем.
2. Методы построения частотных и псевдочастотных характеристик дискретных систем.

#### 1. Псевдочастотные характеристики импульсных систем.

Помимо рассмотренных АФЧХ, для дискретных систем оказывается возможным ввести характеристики, которые по методике построения и по своим свойствам схожи с ЛАФЧХ непрерывных систем. Такие характеристики называются псевдочастотными (ПЧХ).

Как отмечалось выше, АФЧХ дискретной системы рассматривают в диапазоне частот  $0 \leq \omega \leq \omega_0/2$  где  $\omega_0 = 2\pi/T$  - частота квантования. Чтобы использовать привычную методику построения ЛАФЧХ, введем псевдочастоту

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = -j \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}. \quad (41)$$

Зависимость, связывающая  $\omega$  и  $\lambda$ , иллюстрируется рис.19, из которого видно, что изменению частоты  $\omega$  в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \pi/T$  соответствует изменение псевдочастоты  $\lambda$  в диапазоне  $0 \leq \lambda < \infty$ .

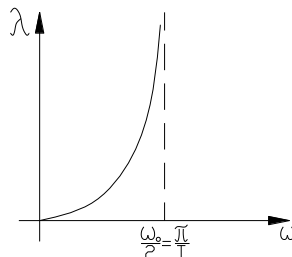


Рис. 19

Рассмотрим передаточную функцию дискретной системы  $W(z)$ . Заменим переменную  $z$  на переменную  $w$  по формуле

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad (42)$$

Такое преобразование переменных называется дробно-линейным или билинейным. После замены переменных по формуле (42) передаточная функция  $W(z)$  преобразуется в передаточную функцию

$$W_w^*(w) = W(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}}.$$

Частотные характеристики дискретных систем получают подстановкой в  $z$ -передаточную функцию  $W(z)$  величины  $z = e^{j\omega T}$ . Возникает вопрос, на какую величину следует заменить переменную  $w$  в передаточной функции  $W_w^*$ , чтобы получить те же частотные характеристики системы.

Из зависимости (42) получим

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

При  $z = e^{j\omega T}$ ,  $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$  имеем

$$w = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \left[ -j \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} \right] = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\lambda, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Таким образом, частотные характеристики дискретной системы в функции псевдочастоты  $\lambda$  могут быть получены заменой в  $w$ -передаточной функции  $W_w^*(w)$  переменной  $w$  на  $j\lambda$ ;

$$W_w^*(j\lambda) = W_w^*(w) \Big|_{w=j\lambda}.$$

Связь псевдочастоты с частотой задается соотношением (41), причем на малых частотах эти величины практически совпадают. Частотная характеристика в функции псевдочастоты  $\lambda$  называется псевдочастотной характеристикой.

По отношению к переменной  $z$  передаточные функции  $W(z)$ -это дробно-рациональные выражения. Следовательно, по отношению к переменной  $w$  они также будут дробно-рациональными, т.е. ПЧХ есть дробно-рациональная функция  $j\lambda$ , причем  $\lambda$  изменяется в пределах от 0 до  $\infty$ . Таким образом, ПЧХ дискретных систем имеют те же асимптотические свойства, что и АФЧХ непрерывных систем.

Наряду с АФЧХ могут быть построены логарифмические псевдочастотные характеристики (ЛПЧХ) дискретных систем. Это позволяет применять известные частотные методы анализа и синтеза непрерывных систем и для дискретных систем.

## 2. Методы построения частотных и псевдочастотных характеристик дискретных систем.

Рассмотрим некоторые возможные способы построения АФЧХ дискретных систем. Заметим, что АФЧХ дискретных систем в отличие от АФЧХ непрерывных систем никогда экспериментально не снимаются. Они строятся либо по частотной характеристике ПНЧ, либо по  $Z$ -передаточной функции системы  $W(z)$ .

Если ПНЧ дискретной системы задана АФЧХ, то АФЧХ импульсной САУ может быть определена по формулам (36), (39). При этом можно либо сначала найти действительную и мнимую частотные характеристики и затем определить  $A^*(\omega)$ ,  $\varphi^*(\omega)$ , либо в формулах (36), (39) выполнить непосредственное векторное сложение. Рассмотрим первый способ. Перепишем формулу (39):

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W \left( j \left( \omega + \frac{2\pi}{T} k \right) \right).$$

При известных действительной и мнимой частотных характеристиках ПНЧ  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$  получим

$$\operatorname{Re} W(e^{j\omega T}) = P^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\omega + \frac{2\pi}{T}k\right), \quad \operatorname{Im} W(e^{j\omega T}) = Q^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q\left(\omega + \frac{2\pi}{T}k\right).$$

Обычно в этих соотношениях удается ограничиться конечным небольшим числом слагаемых, что сильно упрощает процесс вычислений. По известным характеристикам  $P^*(\omega)$ ,  $Q^*(\omega)$  можно построить амплитудно- и фазо-частотные характеристики дискретной системы:

$$A^*(\omega) = \sqrt{P^{*2}(\omega) + Q^{*2}(\omega)}, \quad \varphi^*(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q^*(\omega)}{P^*(\omega)}.$$

При непосредственном векторном сложении в правой части равенства (39) удерживается конечное число членов и выполняется их графическое суммирование. Пусть, например, учитываются слагаемые при  $k=M, -M+1, \dots, 0, 1, \dots, M$ . Тогда получим

$$W(e^{j\omega T}) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-M}^M W\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}k\right)\right).$$

Кроме изложенных способов для построения АФЧХ дискретной системы может быть использована непосредственно ее  $Z$ -передаточная функция  $W(z)$ . Логарифмические ПЧХ строятся по  $w$ -передаточной функции  $W_w^*(w)$  совершенно аналогично тому, как строятся ЛАФЧХ непрерывных систем, с использованием тех же шаблонов для типовых звеньев. При этом возможно использование таблиц  $\bar{W}$ -преобразования [4], которое представляет собой результат последовательного применения к передаточной функции  $W(p)$  ПНЧ  $\bar{Z}$ -преобразования и  $W$ -преобразования.

Пример. Построить логарифмические ПЧХ импульсной системы, схема которой представлена на рис.20.

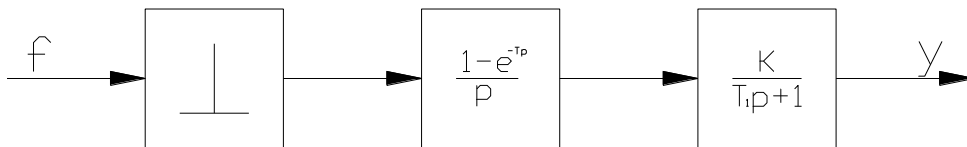


Рис. 20

Ранее была найдена  $z$ -передаточная функция этой системы:

$$W(z) = \frac{k(1-d)}{z-d}, \quad d = e^{-T/T_1}.$$

Выполним подстановку  $z = \frac{1+T/2w}{1-T/2w}$  и найдем  $W_w^*(w)$ :

$$W_w^*(w) = \frac{k(1-d)}{\frac{1+T/2w}{1-T/2w} - d} = \frac{k(1-d)(1-T/2w)}{T/2(1+d)w + 1-d} = \frac{k(1-T/2w)}{\frac{T(1+d)}{2(1-d)}w + 1} = \frac{k\left(1 - \frac{T}{2}w\right)}{T_s w + 1},$$

$$\text{где } T_s = \frac{T(1+d)}{2(1-d)}.$$

В числителе полученной передаточной функции  $W_w^*(w)$  имеется неминимально-фазовое звено, что типично для дискретных систем.

Логарифмические ПЧХ данной системы представлены на рис.21. Качественно эти характеристики совпадают с ЛАФЧХ непрерывных систем, что позволяет применить аппарат исследования таких САУ.

При необходимости определения частотных характеристик замкнутой системы по АФЧХ разомкнутой и наоборот, возможно использование номограмм. Отметим, что для схемы, приведенной на рис. 10, применимы все номограммы, разработанные для непрерывных систем.

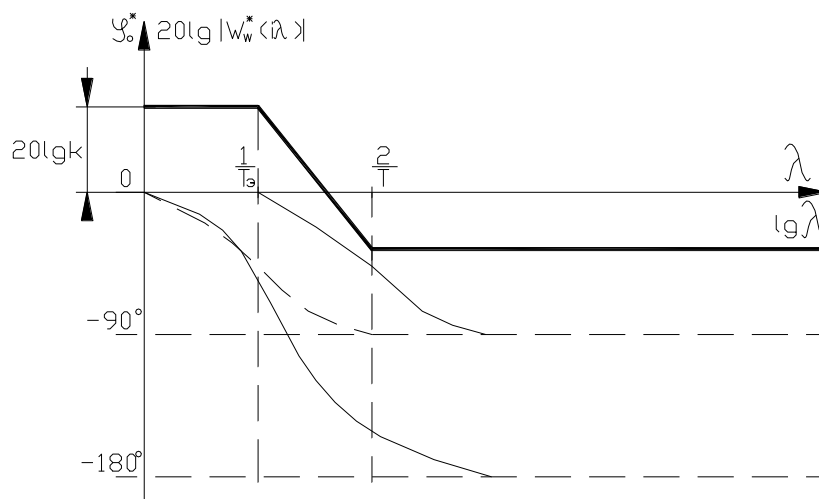


Рис.21

Таким образом, для дискретных систем введено понятие частотных характеристик и рассмотрены некоторые способы их построения. С формальной точки зрения АФЧХ дискретных и непрерывных систем совпадают в том, что они характеризуют прохождение гармонического сигнала через систему. Однако следует помнить, что при этом для дискретных систем рассматривался дискретный гармонический сигнал без изучения спектра по непрерывной огибающей. При прохождении непрерывного гармонического сигнала частотные свойства импульсных систем будут существенно отличаться от свойств непрерывных систем.

## Лекция № 8

Тема:

### Частотные свойства импульсных систем.

План лекции:

1. Прохождение непрерывного гармонического сигнала через дискретную систему.
2. Спектры сигналов в дискретной системе.

#### 1. Прохождение непрерывного гармонического сигнала через дискретную систему.

Рассмотрим вопрос о прохождении непрерывного гармонического сигнала через дискретную систему. В непрерывной системе входному гармоническому сигналу соответствует выходной гармонический сигнал, т.е. качественного изменения спектра не происходит. Дискретная система изменяет спектр входного сигнала, вводит в него дополнительные составляющие. Приведем простейший пример. Определим реакцию дискретной системы с передаточной функцией  $W(z) = \frac{z}{z - 0,5}$  на гармонический сигнал  $f(t) = \cos 0,907t$ .

Такую передаточную функцию имеет система, структурная схема которой изображена на рис.22. При этом  $T_1 = 1c$ , интервал квантования равен 0,693 с и на периоде входного сигнала укладывается 10 таких интервалов.

Используем АФЧХ данной схемы для определения реакции на дискретный сигнал  $f[nT] = \cos 0,907nT$ :

$$A^*(0,907) = \frac{1}{\sqrt{1,25 - \cos \omega T}} \Big|_{\omega=0,907} = 1,506 ;$$

$$\varphi^*(0,907) = \omega T - \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - 0,5} \Big|_{\omega=0,907} = -0,458 .$$

Выходной сигнал, рассматриваемый в моменты квантования, имеет вид.

$$y[kT] = 1,506 \cos [0,907kT - 0,458] .$$

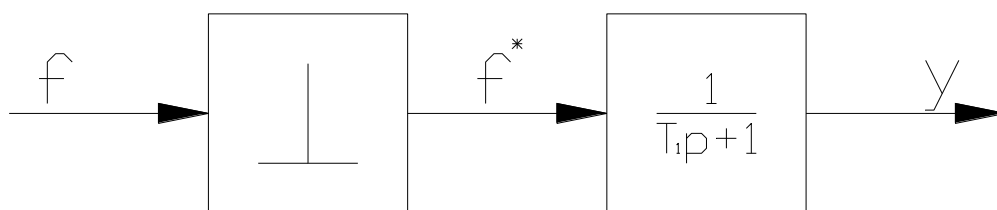


Рис.22.

Полученная формула определяет лишь реакцию в дискретные моменты времени, а не вид всего выходного процесса при произвольном времени  $t$ . Для построения графика установившегося процесса будем действовать в следующей последовательности:

1. Из последней формулы найдем начальное значение  $y(0) = y[kT]_{k=0}$ , соответствующее данному процессу.

2. На интервале  $0 < t < T$   $f^*(t) \equiv 0$ . В соответствии с зависимостью для апериодического звена определим выходную величину

$$y(t) = y(0)e^{-t/T_1},$$

при этом

$$y(T-0) = y(0)e^{-T/T_1}.$$

3. В момент  $t=T$  на вход непрерывной части действует  $\delta$ -функция  $f^*(t) = \cos \omega T \cdot \delta(t-T)$ . Она вызывает скачок выходной переменной  $y(t)$ , при этом

$$y(T+0) = y(T-0) + \cos \omega T.$$

В дальнейшем, при  $kT < t \leq (k+1)T, k=1,2,\dots$  процесс вычисления координаты  $y(t)$  аналогичен описанному. Внутри каждого интервала выходная величина  $y(t)$  имеет вид

$$y(t) = y[kT+0]e^{-t/T}, \quad 0 < t < T.$$

а в точках  $t = kT, k=1,2,\dots$  сигнал терпит разрыв и при этом

$$y[kT+0] = y[kT-0] + \cos \omega kT.$$

График установившегося процесса для рассматриваемой системы приведен на рис.23. Из рисунка видно, что решетчатая функция  $y[kT]$ , рассматриваемая в моменты квантования, является гармонической. Тем не менее сам процесс гармоническим не является, т.е. дискретная система изменяет спектр входного сигнала.

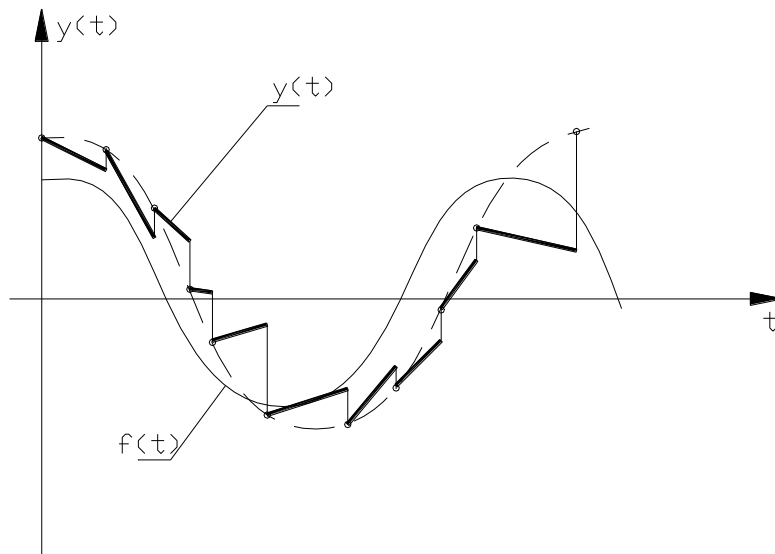


Рис.23

## 2. Спектры сигналов в дискретной системе.

Причина такого изменения спектра с формальной точки зрения становится понятной, если вспомнить связь между изображением решетчатой функции  $f[kT]$  и преобразованием Лапласа исходной непрерывной функции. Это известная формула  $\bar{D}$ -преобразования

$$F^*(p) = L[f^*(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p + j\omega_0 n), \quad \omega_0 = 2\pi/T.$$

Из этой зависимости следует, что если  $f(t) = A \cos \omega t$ , то

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos(\omega + \omega_0 n)t, \quad \text{т.е. процесс квантования сопровождается}$$

возникновением бесконечного множества дополнительных гармонических составляющих, каждая из которых преобразуется непрерывной частью системы.

Пусть теперь  $f(t)$  - некоторая непрерывная преобразуемая по Фурье функция. Рассмотрим спектр соответствующей решетчатой функции. В соответствии с формулой  $\bar{Z}$ -преобразования он определится по зависимости

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j(\omega + \omega_0 n)), \quad \omega_0 = 2\pi/T.$$

Таким образом, частотный спектр  $F^*(j\omega)$  включает спектр непрерывной функции при  $n=0$  (основной спектр) и боковые дополнительные спектры, смещенные по оси частот на  $n\omega_0$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  (рис. 24). Полезная информация содержится лишь в основном спектре. Если спектр входного сигнала не содержит составляющих с частотой, большей половины частоты квантования, т.е.

$$\omega_m \leq \omega_0/2, \quad (43)$$

где  $\omega_m$  - максимальная частота спектра входного сигнала, то боковые спектры не накладываются друг на друга и спектр дискретного сигнала представляет собой простое повторение основного спектра. Тогда, отфильтровывая высокочастотные составляющие ( $\omega \geq \omega_m$ ), можно восстановить входной непрерывный сигнал из его дискретного представления. Если условие (43) не выполняется, дополнительные спектры перекрываются и восстановление непрерывного сигнала без искажений невозможно. Отметим, что этот результат соответствует теореме Котельникова, рассматриваемой в курсе "Математические основы ТАУ".

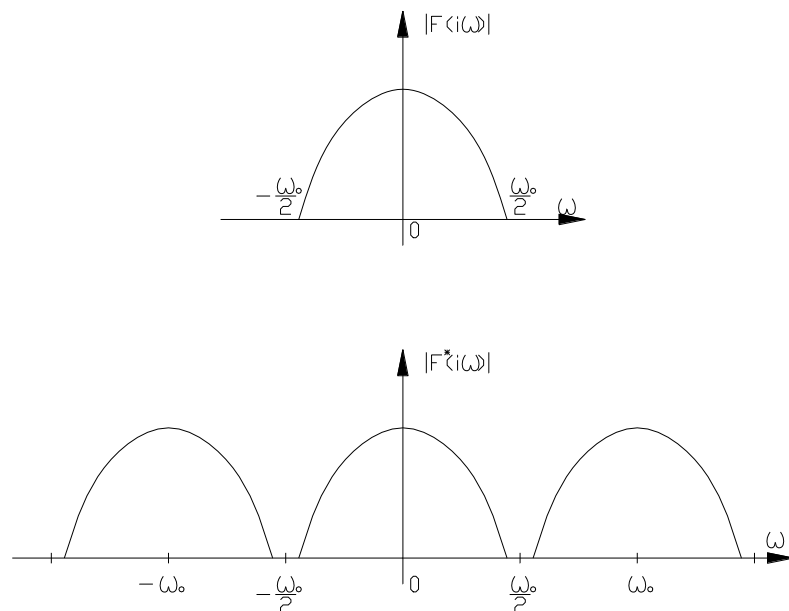


Рис.24

Аналогичные рассуждения можно провести и для частотных характеристик дискретных систем. Перепишем зависимость (39)

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(j\omega + \omega_0 n).$$

Пусть  $\omega_{m_1}$  - максимальная частота существования АФЧХ приведенной непрерывной части, т.е.

$$|W(j\omega)| = 0 \text{ при } \omega \geq \omega_{m_1}.$$

Тогда, если  $\omega \geq 2\omega_{m_1}$ , то АФЧХ дискретной системы  $W^*(j\omega)$  имеет вид, аналогичный характеристикам, приведенным на рис.24. Если на вход такой системы подать сигнал, спектр которого удовлетворяет условию (43), то окажется, что выходная величина импульсной САУ будет такой же, как и при подаче соответствующего непрерывного сигнала на вход ПНЧ. В этом случае можно говорить об эквивалентности дискретной системы и ее ПНЧ. Обычно указанные условия выполняются лишь приближенно, при этом спектр непрерывного сигнала при прохождении через дискретную систему искажается. Эти искажения уменьшаются с увеличением частоты квантования  $\omega_0$ , а также при уменьшении частоты  $\omega_{m_1}$ , т.е. при улучшении фильтрующих свойств непрерывной части системы. Так как увеличение частот квантования не всегда возможно, то обычно используют второй способ уменьшения искажений передаваемого сигнала. При этом для достижения лучшего эффекта на выходе ИЭ могут включаться дополнительные сглаживающие фильтры. Следует, однако, иметь в виду, что уменьшение полосы пропускания ПНЧ приводит к ухудшению динамики системы, поэтому выбор решения, обеспечивающего хорошую фильтрацию и высокую динамику системы, является сложной задачей. Выше отмечалось, что если  $f(t) = A \cos \omega t$ , то

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos(\omega + \omega_0 n) t. \quad (44)$$

Из зависимости (44) следует, что даже при малых частотах входного сигнала на вход ПНЧ поступают составляющие высокой частоты  $\omega + \omega_0, \omega + 2\omega_0, \dots$ , т.е. происходит перенос низкочастотного сигнала в высокочастотную область. В правильно спроектированных САУ ПНЧ фильтрует высокочастотные составляющие и это явление не сказывается на работе системы. Значительно более неблагоприятным оказывается явление переноса высокочастотного сигнала в низкочастотную область. Если на вход системы действует сигнал высокой частоты (например, помеха), то после ИЭ появляются составляющие с частотами  $\omega - \omega_0, \omega - 2\omega_0, \dots$ . Отдельные составляющие этого набора частот могут попасть в полосу пропускания ПНЧ системы, и тогда в замкнутой САУ при высокочастотном входном воздействии возникнут низкочастотные движения, что крайне нежелательно, так как они накладываются на полезный сигнал. Для устранения этого явления следует использовать фильтры, включая их перед импульсным элементом. При этом уменьшается амплитуда помехи, приходящей на импульсный элемент.

Несмотря на то, что АФЧХ дискретной системы не дают полной информации о ее выходном сигнале, они позволяют исследовать устойчивость системы, оценивать качественные показатели САУ, проводить синтез корректирующих устройств. Методы анализа и синтеза цифровых СУ, основанные на использовании частотных характеристик, наиболее часто применяются как инженерные методы расчета таких систем.



## Лекция № 9

Тема:

### Устойчивость импульсных систем.

План лекции:

1. Понятие устойчивости.
2. Условия устойчивости импульсных систем

#### 1. Понятие устойчивости.

Анализ устойчивости является необходимым этапом исследования любой системы автоматического управления, так как именно это свойство в решающей степени определяет принципиальную возможность практического использования САУ. Основные понятия теории устойчивости непрерывных систем рассматривались в курсах "Математические основы ТАУ" и "Основы ТАУ".

Будем считать, что линейная импульсная система устойчива тогда и только тогда, когда ее реакция на любое ограниченное воздействие ограничена. Соответственно, если найдется хотя бы одно ограниченное внешнее воздействие, реакция системы на которое не будет ограничено, то такая импульсная система называется неустойчивой.

#### 2. Условия устойчивости импульсных систем.

Изложим условия устойчивости и линейной импульсной системы, следуя [6]. Рассмотрим полученное ранее уравнение системы во временной области (10)

$$y[kT] = \sum_{n=0}^k f[nT]w[(k-n)T]$$

и приведем его к виду

$$y[kT] = \sum_{n=0}^k w[nT]f[(k-n)T]. \quad (45)$$

Пусть внешнее воздействие ограничено, т.е.

$$|f[kT]| \leq M.$$

Произведем оценку выходного сигнала

$$|y[kT]| \leq \sum_{n=0}^k |w[nT]| |f[(k-n)T]| \leq M \sum_{n=0}^k |w[nT]|.$$

Поднимая в последнем неравенстве верхний предел суммирования до бесконечности (это может только усилить неравенство), получим

$$|y[kT]| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} |w[nT]|. \quad (46)$$

Очевидно, что импульсная система устойчива, если ряд в правой части (46) сходится, т.е. если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |w[nT]| < \infty. \quad (47)$$

Таким образом, импульсная система устойчива, если ряд дискрет весовой функции ПНЧ абсолютно сходится. В приведенной формулировке условие (47) является достаточным.

Покажем его необходимость. Положим, что условие (47) не выполняется, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |w[nT]| = \infty. \quad (48)$$

Тогда можно найти ограниченное входное воздействие, при котором реакция системы будет неограниченной. Пусть при фиксированном  $k$

$$f[(k-n)T] = M \operatorname{sign} w[nT]$$

(набор дискрет входного сигнала меняется для каждого). Тогда

$$y[kT] = \sum_{n=0}^k M \operatorname{sign} w[nT] w[nT] = M \sum_{n=0}^k |w[nT]|.$$

Согласно условию (48) для любого наперед заданного числа  $N$  всегда можно подобрать такое  $k$ , когда

$$y[kT] > N,$$

что доказывает необходимость условия (48).

Таким образом, условие (48) является необходимым и достаточным условием устойчивости линейной импульсной системы.

Рассмотрим, как оценивается устойчивость линейной импульсной системы по ее передаточной функции. По определению

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w[kT] z^{-k}$$

откуда

$$|W(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| |z|^{-k}.$$

Если  $|z| \geq 1$ , то  $|z|^{-k} \leq 1$  и тогда

$$|W(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| \quad \text{при} \quad |z| \geq 1.$$

Отсюда следует, что у устойчивой импульсной системы передаточная функция должна быть ограничена в области  $|z| \geq 1$ , т.е. функция  $W(z)$  не должна иметь особых точек-полюсов в области  $|z| \geq 1$ .

Таким образом, импульсная система устойчива, когда все полюсы  $W(z)$  удовлетворяют соотношению

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $n$  - число полюсов. Случай, когда существуют полюсы  $z_i$  такие, что  $|z_i| = 1$ , является критическим. Можно показать, что устойчивость обеспечивается, если  $|z_i| = 1$  и  $z_i$  - полюс первого порядка передаточной функции  $W(z)$ .

Как правило, передаточная функция импульсной системы является дробно-рациональной функцией, т.е.

$$W(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

где,  $A(z)$ ,  $B(z)$  -многочлены.

Тогда уравнение

$$B(z)=0 \quad (49)$$

будет характеристическим уравнением импульсной системы и для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы:

1) все корни уравнения (49) удовлетворяли условию

$$|z_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2) корни, модули которых равны единице, были простыми.

Таким образом, на комплексной плоскости  $z$  устойчивой импульсной системе соответствуют корни  $B(z)$ , находящиеся внутри единичной окружности или принадлежащие этой окружности. Асимптотической устойчивости системы, характеризующейся тем, что в отсутствие входного сигнала собственные движения  $y_c[k]$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , соответствуют полюса передаточной функции, находящиеся внутри единичной окружности

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Анализ устойчивости импульсной системы заключается в оценке расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости.

## Лекция № 10

Тема:

### Алгебраические критерии устойчивости импульсных систем.

План лекции:

1. Переход к алгебраическим критериям устойчивости непрерывных систем.
2. Критерий Шура-Кона.

#### 1. Переход к алгебраическим критериям устойчивости непрерывных систем.

Непосредственное вычисление корней характеристического уравнения представляет собой громоздкую операцию. Поэтому важно иметь критерии устойчивости, позволяющие установить факт устойчивости многочлена без вычисления его корней.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0 \quad (50)$$

Для оценки устойчивости могут использоваться критерии устойчивости непрерывных систем. Используем преобразование

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad (51)$$

которое переводит внутренность единичного круга плоскости “ $z$ ”,  $|z| < 1$  в левую полуплоскость плоскости “ $w$ ”,  $\operatorname{Re} w < 0$ . Действительно, пусть  $w = u + iv$ , тогда

$$|z| = \sqrt{\frac{(1+u)^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2}}$$

откуда следует, что при  $u < 0$   $|z| < 1$ , при  $u = 0$   $|z| = 1$ , при  $u > 0$   $|z| > 1$ . После преобразования (51) характеристическое уравнение (50) принимает вид

$$b_0 \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^n + \dots + b_{n-1} \left( \frac{w+1}{w-1} \right) + b_n = 0$$

или

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n = 0, \quad (52)$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  выражаются через коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_n$

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости импульсной системы становится расположение корней  $w_1, \dots, w_n$  уравнения (52) в левой полуплоскости плоскости. Для этого могут использоваться известные критерии устойчивости непрерывных систем (Рауса, Гурвица,

Михайлова и др.). Недостатком такого подхода является трудность применения этих критериев для систем высокого порядка из-за громоздких преобразований.

Пример. Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид

$$B(z) = z^3 + 0,5z^2 + 0,1z + 0,5 = 0$$

Оценим устойчивость такой системы. С использованием преобразования (51) характеристическое уравнение примет вид

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 0,5 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 0,1 \frac{w+1}{w-1} + 0,5 = 0$$

Преобразовав левую часть, окончательно получим

$$2,1w^3 + 1,9w^2 + 3,9w + 0,1 = 0$$

Для оценки расположения корней последнего уравнения применим критерий Гурвица. Составим определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1.9 & 0.1 & 0 \\ 2.1 & 3.9 & 0 \\ 0 & 1.9 & 0.1 \end{vmatrix}$$

Легко видеть, что  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta > 0$  ( $\Delta_1, \Delta_2$  - главные диагональные миноры определителя), т.е. импульсная система устойчива.

## 2. Критерий Шура-Кона.

Для оценки устойчивости может использоваться также алгебраический критерий Шура - Кона. Рассмотрим характеристическое уравнение (50) и составим из его элементов следующую последовательность матриц:

$$B_{1k} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-(k-1)} & b_{n-(k-2)} & \dots & b_n \end{pmatrix} \quad B_{2k} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Составим из матриц  $B_{1k}$  и  $B_{2k}$  матрицу  $B_k$  размерности  $(2k \times 2k)$

$$B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} & B_{2k} \\ B_{2k}^T & B_{1k}^T \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Для обеспечения устойчивости импульсной системы с характеристическим уравнением (50) необходимо и достаточно, чтобы число перемен знака в последовательности

$$1, \det B_1, \det B_2, \dots, \det B_n$$

было равно  $n$ , т.е. степени характеристического уравнения. Иначе, должно выполняться условие:

$$\det B_k < 0 \text{ для нечетных } k;$$

$$\det B_k > 0 \text{ для четных } k.$$

Особенностью использования критерия Шура - Кона и его существенным неудобством является необходимость вычисления определителей высокого порядка.

Рассмотрим пример применения критерия Шура – Кона для исследования устойчивости импульсной системы. Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$B(z) = z^3 - 2z^2 + 1,28z - 0,256 = 0.$$

Составляем последовательно:

$$B_{11} = (-0,256)$$

$$B_{21} = (1)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0,256 & 1 \\ 1 & -0,256 \end{pmatrix},$$

$$\det B_1 = -0,9345,$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} -0,256 & 0 \\ 1,28 & -0,256 \end{pmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0,256 & 0 & 1 & 0 \\ 1,28 & 0,256 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0,256 & 1,28 \\ 0 & 1 & 0 & 0,256 \end{pmatrix}$$

$$\det B_2 = 0,2841,$$

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 0,256 & 0 & 0 \\ 1,28 & 0,256 & 0 \\ -2 & 1,28 & 0,256 \end{pmatrix}$$

$$B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1,28 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0,256 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1,28 & 0,256 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1,28 & 0,256 & 1,28 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1,28 & 0,256 & 1,28 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0,256 & 1,28 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,256 \end{pmatrix}$$

$$\det B_3 = -0,0894$$

Используя критерий Шура-Кона, можно заключить, что система с данным характеристическим уравнением устойчива.

## Лекция № 11

Тема:

### Частотные критерии устойчивости импульсных систем.

План лекции:

1. Аналог критерия Михайлова.
2. Анализ устойчивости с помощью критерия Найквиста.
3. Анализ устойчивости импульсной системы с помощью ЛАФПЧХ.

#### 1. Аналог критерия Михайлова.

Частотные критерии устойчивости удобно применять к системам высокого порядка. Одним из распространенных критериев устойчивости непрерывных систем является критерий Михайлова. Для импульсных систем можно сформулировать аналог этого критерия.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой импульсной системы имеет вид

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0, \quad b_0 > 0.$$

В соответствии с принципом аргумента [3] число корней характеристического многочлена, лежащих внутри единичной окружности, равно числу полных оборотов вектора  $B(z)$  при обходе точкой  $z$  единичной окружности, т.е.

$$\Delta_c \arg B(z) = 2\pi m, \quad c: |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq 2\pi.$$

Очевидно, что если  $m = n$ , то все корни  $z_i, i=1,2,\dots,n$  удовлетворяют соотношению

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

и система устойчива.

Наибольшую сложность при использовании этого критерия представляет нахождение отображения единичной окружности на плоскости  $B$ . При этом рассматривать многочлен  $B(z)$  в функции  $z$  неудобно, так как аргумент  $z$  меняется сложным образом. Проще перейти к переменной  $\omega$  по формуле  $z = e^{j\omega T}$ . При этом движению точки  $z$  по единичной окружности соответствует изменение  $\omega$  в следующих пределах:

$$0 \leq \omega < \frac{2\pi}{T}$$

Таким образом, рассматривается функция  $B(e^{j\omega T})$  и строится ее годограф в пределах  $0 \leq \omega < \frac{2\pi}{T}$ . Так как имеет место соотношение

$$B(\bar{z}) = \overline{B(z)},$$

то годограф  $B(e^{j\omega T})$  при изменении  $\omega$  в пределах  $0 \leq \omega < \frac{2\pi}{T}$  симметричен относительно оси абсцисс. Отсюда следует, что можно рассматривать лишь полуветвь годографа, соответствующую половине исходного диапазона

$0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$ . При этом приращение аргумента функции  $B(e^{j\omega T})$  также уменьшится

вдвое, т.е.  $\Delta \arg B(e^{j\omega T}) = \pi n$  ;  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$

Примеры годографов, соответствующих устойчивым системам при  $n = 1, 2, 3$ , показаны на рис.25.

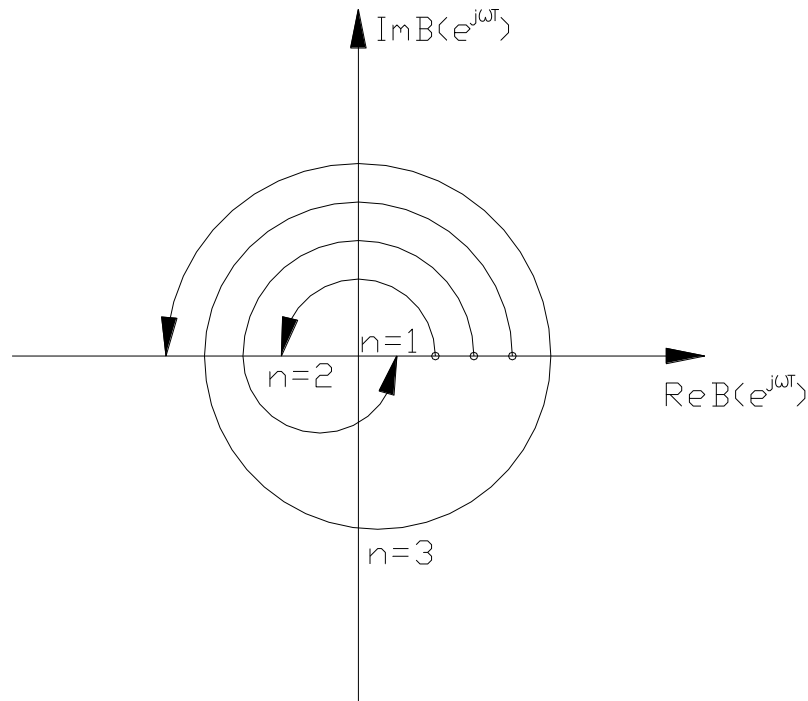


Рис.25.

## 2. Анализ устойчивости с помощью критерия Найквиста.

Анализ устойчивости импульсных систем может быть выполнен также с помощью критерия Найквиста, который основан на использовании частотных характеристик разомкнутой системы. Рассмотрим простейшую схему замкнутой системы, представленную на рис.10. Пусть  $W(e^{j\omega T})$  - частотная характеристика разомкнутой импульсной системы. Приведем формулировку критерия Найквиста без доказательства.

Пусть характеристическое уравнение разомкнутой импульсной системы имеет  $l$  корней вне единичного круга плоскости  $z$ . Для того, чтобы была устойчива замкнутая импульсная система, необходимо и достаточно, чтобы годограф  $W(e^{j\omega T})$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\frac{\pi}{T}$  охватывал точку  $(-1, j0)$  на комплексной плоскости  $W$  ровно  $l/2$  раз, т.е.

$$\Delta \arg W(e^{j\omega T}) = \pi l,$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

Пусть разомкнутая система устойчива. Тогда годограф 1 на рис.26 соответствует системе, устойчивой в замкнутом состоянии, а годограф 2 - системе, неустойчивой в замкнутом виде.



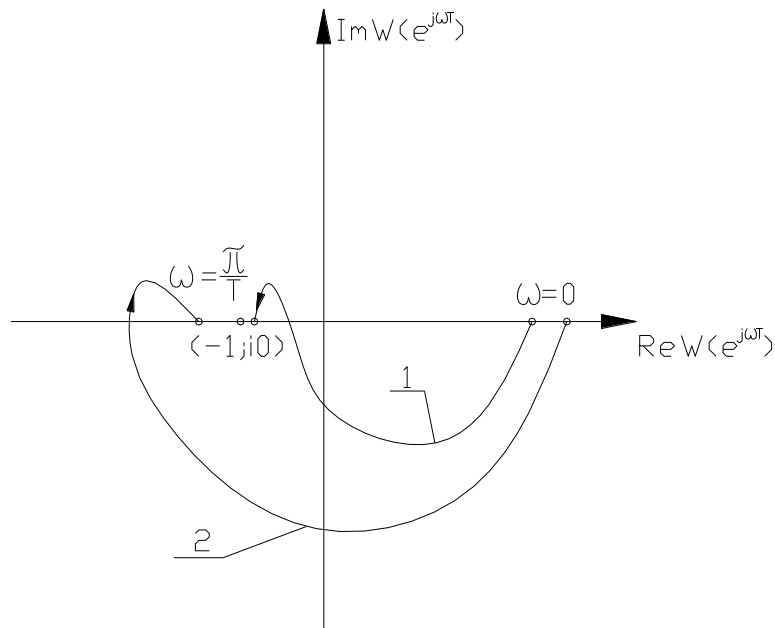


Рис. 26

Случай, когда передаточная функция  $W(z)$  разомкнутой системы имеет полюса на единичной окружности плоскости  $z$ , относится к числу особых. В этом случае необходимо дополнить годограф частотной характеристики разомкнутой системы дугой бесконечного радиуса аналогично тому, как это делалось при исследовании непрерывных систем. Обычно полюсами, лежащими на единичной окружности, оказываются полюса  $z=1$ , что соответствует наличию полюсов  $p=0$  (интегрирующих звеньев) в передаточной функции ПНЧ. При этом годограф АФЧХ разомкнутой системы дополняется дугой бесконечного радиуса, охватывающей столько квадрантов, каков порядок полюса  $z=1$ .

Пусть  $l=0$  и разомкнутая система имеет полюс  $z=1$  второго порядка. Годограф АФЧХ, представленный на рис.27а, соответствует системе, неустойчивой в замкнутом состоянии, на рис.27б - системе, устойчивой в замкнутом виде.

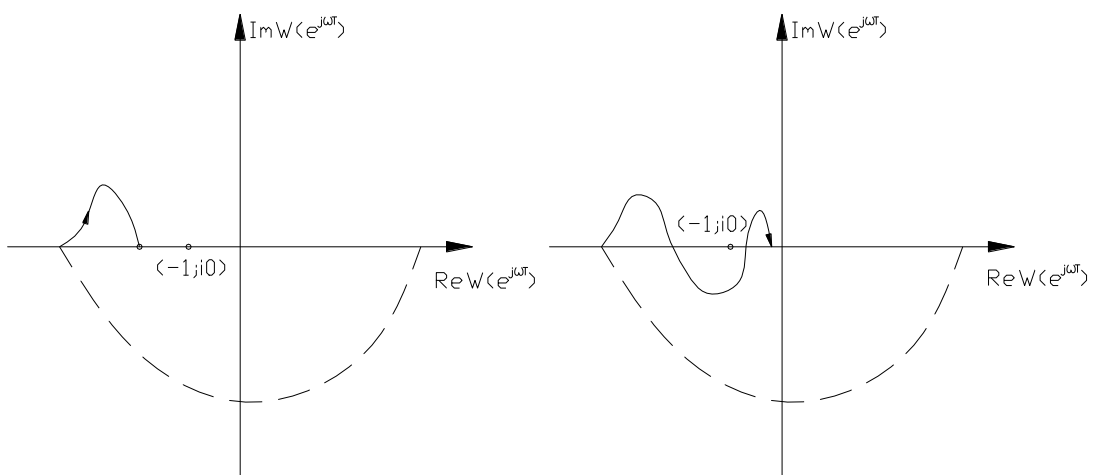


Рис.27а

Рис.27б.

### 3. Анализ устойчивости импульсной системы с помощью ЛАФПЧХ.

Для выполнения анализа устойчивости импульсной системы с помощью ее логарифмических ПНЧ, обратимся к простейшей структурной схеме замкнутой системы (см. рис.10) и рассмотрим, как должны выглядеть псевдочастотные ЛАФЧХ устойчивых и неустойчивых САУ. С формальной точки зрения критерий Найквиста для дискретных систем аналогичен критерию Найквиста для непрерывных систем [1]. Поэтому все рассуждения, связанные с формулировкой этого критерия в терминах ЛАФЧХ, могут быть перенесены и на дискретные системы. В частности, если разомкнутая импульсная САУ устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в интервале псевдочастот, где ЛАФЧХ дискретной системы положительна, разность  $n_+ - n_-$  между числом положительных и отрицательных переходов ЛАФЧХ через линию  $-\pi$  равнялась нулю. При этом, как и ранее, положительным переходом считаем переход в сторону возрастания ЛАФЧХ, отрицательным - в сторону убывания ЛАФЧХ. Если передаточная функция разомкнутой системы имеет  $l$  полюсов вне единичного круга, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в области положительности ЛАЧХ выполнялось условие

$$n_+ - n_- = l/2$$

Псевдочастотные ЛАФЧХ системы, устойчивой в разомкнутом и замкнутом состояниях, показаны на рис.28, где  $n_+ = 0$ ,  $n_- = 0$ .

Если передаточная функция разомкнутой системы имеет полюсы, лежащие на единичной окружности, то при соответствующих значениях аргумента ЛАЧХ системы стремится к бесконечности, а ЛАФЧХ изменяется скачком на величину  $-\pi r$ , где  $r$  - порядок полюса.

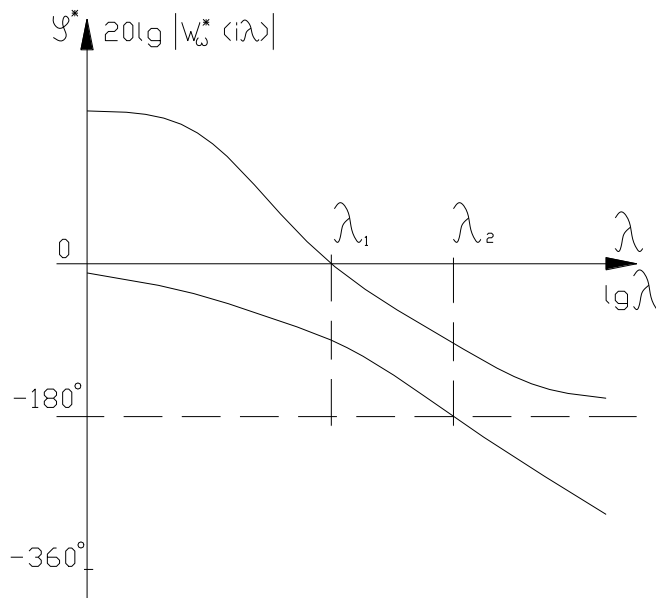


Рис.28

Аналогичные особенности использования этого критерия характерны и для непрерывных САУ. Так как наиболее часто единичной окружности принадлежит полюс разомкнутой системы  $z=1$ , то приведем окончательный результат для этого случая. Полюсу  $z=1$  соответствуют  $\omega=\lambda=0$ . Так как при  $\omega=0$  учитывается не вся величина скачка ЛАФЧХ, а только его половина, то

при исследовании устойчивости для  $\lambda=0$  следует дополнить ЛАФЧХ скачком на  $-\frac{\pi}{2}r$ , где  $r$  - порядок полюса  $z=1$ .

Пусть, например  $Z$ -передаточная функция разомкнутой системы имеет полюс  $z=1$  третьего порядка. АФЧХ и псевдочастотные ЛАФЧХ такой системы представлены на рис.29,а,б, где  $n_+=1, n_-=1, l=0$ . Таким образом, замкнутая система будет устойчивой.

Пример. Оценим устойчивость замкнутой системы, структурная схема которой приведена на рис.30, где  $T=0.1$  с,  $T_1=0.2$  с,  $k=2$ .  $T=0.1$ с,  $T_1=0.2$ с,  $k=2$

Передаточная функция такой системы была получена ранее. Она имеет вид

$$W(z) = \frac{k(1-d)}{z-d}, \quad d = e^{-T/T_1}$$

или в численном выражении

$$W(z) = \frac{0,788}{z - 0,806}$$

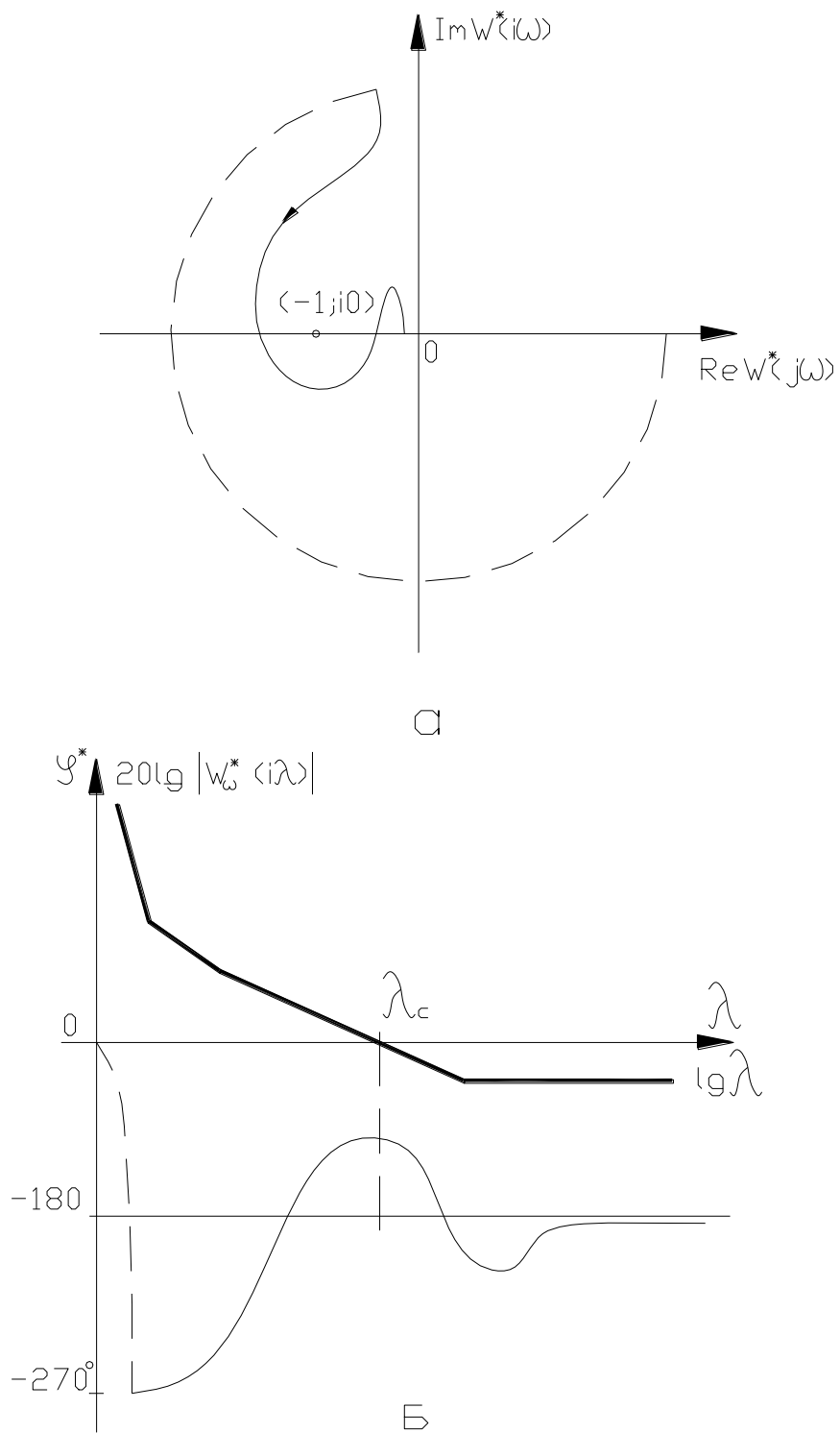


Рис.29

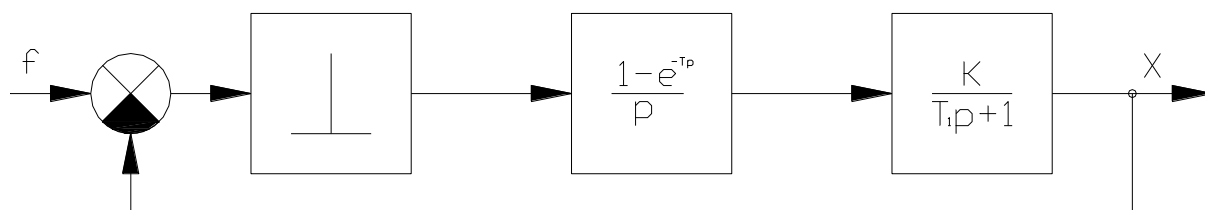


Рис.30

Соответствующие псевдочастотные АФЧХ приведены на рис.31. Из их анализа можно заключить, что система является устойчивой. Увеличение коэффициента усиления может привести к возникновению неустойчивости системы.

Как и для непрерывных систем, для дискретных САУ можно ввести понятие запаса устойчивости по амплитуде и фазе (рис.32).

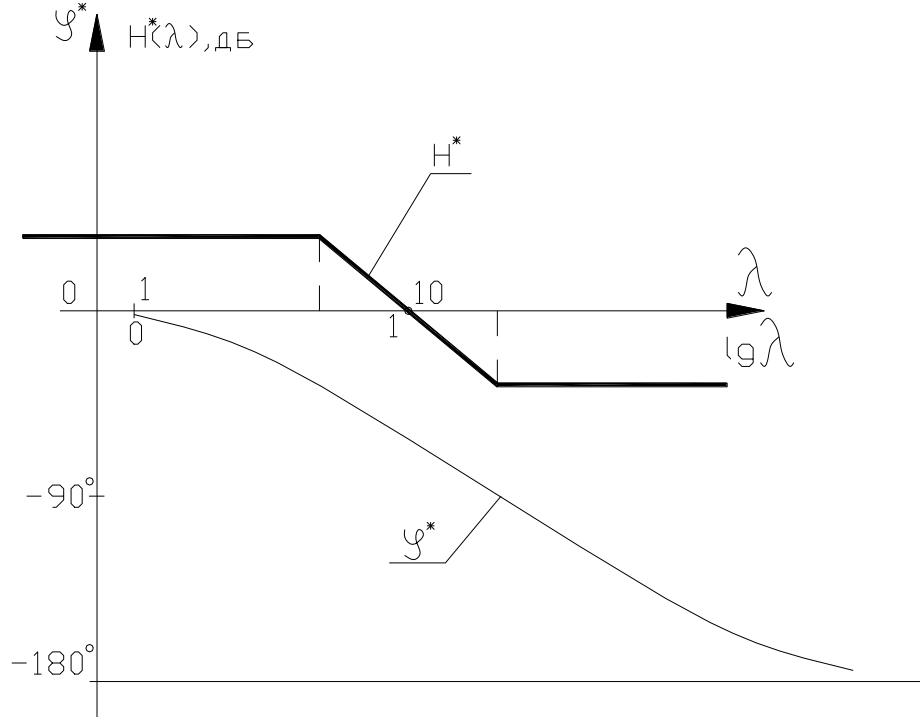


Рис.31

Запас устойчивости по амплитуде показывает, во сколько раз можно увеличить коэффициент передачи разомкнутой системы без потери устойчивости, а запас устойчивости по фазе показывает, насколько можно увеличить величину дополнительного фазового запаздывания без потери устойчивости системы.

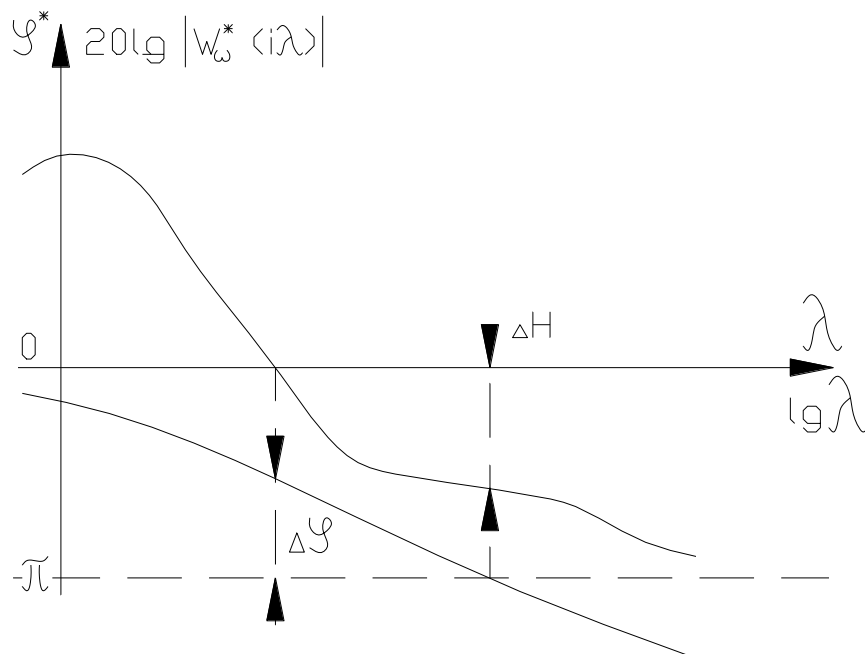


Рис. 32

## Лекция № 12

Тема:

### Математическое описание импульсных систем с помощью пространства состояний.

План лекции:

1. Пространство состояний дискретной системы.
2. Уравнения состояний дискретной системы.
3. Некоторые способы вычисления переходной матрицы.

#### 1. Пространство состояний дискретной системы

Метод пространства состояний является весьма эффективным инструментом исследования дискретных САУ, получившим в настоящее время широкое распространение. Ниже излагаются некоторые аспекты его приложения к анализу импульсных систем. При этом используются сведения из теории решетчатых функций и разностных уравнений, рассматриваемые в курсе "Математические основы ТАУ".

Пусть процессы в дискретной системе характеризуются переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые изменяются под влиянием входных воздействий  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Если набор переменных  $x$  оказывается таким, что знание их значений в некоторый начальный момент вместе с заданием входных воздействий  $u_1, u_2, \dots, u_m$  оказывается достаточным для того, чтобы определить последующие значения  $x$ , то набор можно назвать полным. Полный набор переменных может обладать избыточной информацией о поведении системы, некоторые переменные могут оказаться излишними, дублировать другие. Переменные  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , принадлежащие минимальному полному набору, назовем переменными состояния системы. Таким образом, состояние системы может быть охарактеризовано как минимальная информация о системе, достаточная для описания ее настоящего и будущего при известном входе.

Если при этом переменные состояния принадлежат  $n$ -мерному евклидову пространству  $X$ , то пространство  $X$  называют пространством состояния системы.

Число переменных состояния обычно превышает число реально интересующих нас физических величин, по которым оценивается качество работы системы. Переменные состояния необязательно являются физическими измеряемыми переменными, характеризующими отдельные элементы системы. В общем случае переменные состояния - абстрактные переменные, хотя они, конечно, могут и совпадать с выходными переменными системы  $y$ . Выходные переменные системы  $y$  выражаются через переменные состояния системы, т.е.

$$Y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, r$$

Для линейных систем уравнения, описывающие изменение переменных состояния, и функции  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  являются линейными.

Представление системы в переменных состояния неоднозначно. Существует бесчисленное число минимальных полных наборов переменных состояния, равнозначных с точки зрения математического описания системы.

## 2. Уравнения состояния дискретных систем

Способ математического описания дискретных систем разностными уравнениями является наиболее общим и применяется как для линейных, так и для нелинейных систем. Разностные уравнения позволяют провести полное исследование системы, они хорошо приспособлены для решения задач анализа и синтеза с помощью ЭВМ

Вопрос о составлении разностных уравнений импульсной системы

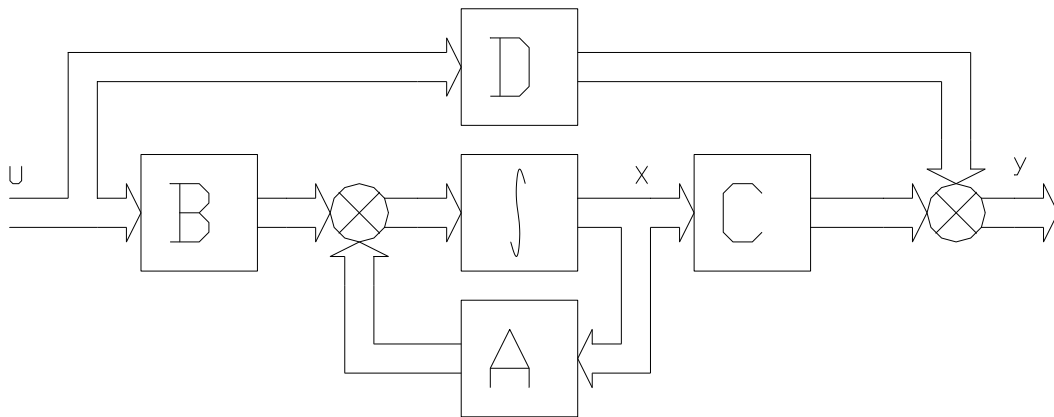


Рис. 33

удобно рассмотреть сразу для многомерной САУ. Уравнения для системы с одним входом и одним выходом получатся тогда как частный случай.

Рассмотрим многомерную синхронную синфазную импульсную систему (рис.33). Импульсные элементы в этой схеме имеют одинаковые частоты квантования и работают синфазно. Пусть непрерывная часть системы описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (53)$$

$$y = Cx + Du \quad (54)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $-(n \times 1)$  -мерный вектор переменных состояния;  
 $u = (u_1, \dots, u_m)$   $-(m \times 1)$  -мерный вектор входных воздействий,  
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$   $-(r \times 1)$  -мерный вектор выходных переменных.

Матрицы A, B, C, D имеют следующие размерности: A- $(n \times n)$  матрица, B- $(n \times m)$  матрица, C- $(r \times n)$  матрица и D- $(r \times m)$  матрица. Графически уравнениям (53), (54) соответствует структурная схема, представленная на рис.34. Здесь и далее двойные стрелки на схеме указывают на то, что связи относятся к векторным величинам.

Матрица A - основная или собственная матрица системы. Она определяет устойчивость системы, характер ее свободных движений Матрица B - матрица формирования управления. Она определяет передаточные свойства системы и характеристики вынужденного движения. Матрица C определяет связь между выходными переменными и переменными состояния, матрица D устанавливает непосредственную зависимость выходных координат системы от входных переменных,



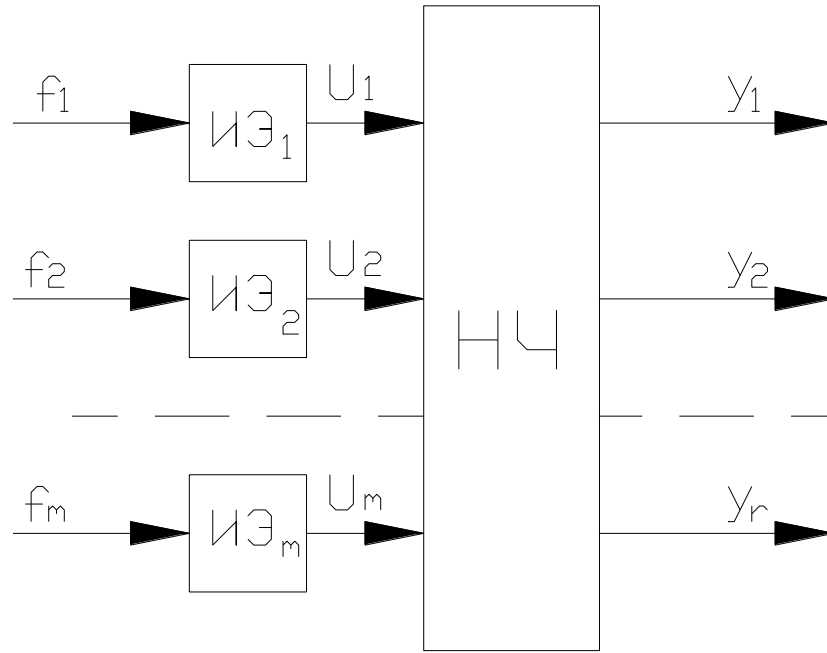


Рис. 34

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (53) при заданных начальных условиях  $x(t=t_0)=x_0$  и известных входных воздействиях  $u(t)$ . Как известно, общее решение неоднородного дифференциального матричного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

где  $X(t)$  - произвольная фундаментальная матрица соответствующего однородного дифференциального уравнения. Выбрав в качестве  $X(t)$  нормированную фундаментальную матрицу (для стационарной системы она имеет вид  $X(t) = e^{At}$ ), получим

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau. \quad (55)$$

Предположим, что в качестве формирующего звена используется экстраполятор нулевого порядка. Тогда в течение каждого из интервалов квантования  $kT \leq t < (k+1)T$ ,  $k=0,1,\dots$  на вход непрерывной части поступает постоянный сигнал  $u(t)=\text{const}=u[kT]$ . Полагая известными значения переменных состояния при  $t_0=kT$ , найдем их значения при  $t=(k+1)T$ . Подставив соответствующие значения в уравнение (55), получим

$$x[(k+1)T] = e^{AT} X[kT] + \int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau Bu[kT]. \quad (56)$$

Таким образом, получена система разностных уравнений в матричной форме, определяющая значения переменных состояния на  $k+1$  такте через значения вектора состояния и вектора входных воздействий на предыдущем шаге. Векторное уравнение (56) можно представить в виде

$$x[(k+1)T] = \Phi x[kT] + H u[kT]$$

Дополняя его дискретным аналогом уравнения (54), получим окончательную систему разностных уравнений в виде

$$x[(k+1)T] = \Phi x[kT] + Nu[kT] \quad (57)$$

$$y[kT] = Cx[kT] + Du[kT] \quad (58)$$

где  $\Phi$  - собственная матрица импульсной системы,  $\Phi = e^{AT}$ ;  $N$  матрица входа,

$N = \int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau B = A^{-1}(e^{AT} - E)B$ ;  $E$  - единичная матрица соответствующей размерности. Матрицы  $C$  и  $D$  при переходе от уравнений (54) и (58) не изменяются.

Таким образом, получена система разностных уравнений, описывающая рассматриваемую импульсную систему.

### 3. Некоторые способы вычисления переходной матрицы.

Из выражений для матриц  $\Phi$  и  $N$ , входящих в уравнение (57) легко видеть, что основные сложности при переходе от системы (53), (54) к системе разностных уравнений (57), (58) заключаются в вычислении собственной матрицы  $\Phi = e^{AT}$ , которая является переходной матрицей непрерывной части. Для ее нахождения используют как аналитические, так и численные методы. Наиболее часто аналитические методы связаны с решением однородного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax \quad (59)$$

при произвольных начальных условиях  $x(0) = x_0$ . Применяя для решения уравнения преобразование Лапласа, получаем

$$pX(p) - x(0) = AX(p),$$

где  $X(p) = L[x(t)]$ . Отсюда

$$X(p) = (pE - A)^{-1}x(0)$$

и тогда

$$x(t) = L^{-1}[(pE - A)^{-1}]x(0).$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\Phi = e^{AT} = L^{-1}[(pE - A)^{-1}]|_{t=T}$$

Существуют и другие аналитические методы нахождения матрицы  $\Phi = e^{AT}$  [2]. Однако все аналитические методы отличаются сложностью и трудоемкостью, которые возрастают с ростом размерности вектора состояния системы.

Численные методы определения матрицы  $\Phi = e^{AT}$  основаны на вычислении суммы матричного ряда

$$\Phi = e^{AT} = E + AT + \frac{(AT)^2}{2!} + \dots \approx \sum_{i=0}^l \frac{(AT)^i}{i!}$$

где  $l$  - число удерживаемых членов бесконечного ряда.

Недостаток вычисления матрицы  $\Phi$  по этому методу - плохая сходимость степенного разложения, которая вместе с учетом конечной разрядности ЭВМ может привести к существенным погрешностям в вычислениях (вплоть до неверного определения знака у элементов матрицы  $\Phi$ ).

Лучшей сходимостью обладают алгоритмы, основанные на использовании степенных рядов, полученных в результате разложения по полиномам Чебышева [2]. Наконец, элементы матрицы  $\Phi$  могут быть получены в результате повторного  $n$ -кратного численного решения дифференциального уравнения (59). После численного интегрирования в интервале от 0 до  $T$  уравнения (59) для  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ , найденный вектор  $x(T)$  при  $t=T$  будет представлять собой первый столбец матрицы  $\Phi$ . Аналогично, решив численно уравнение (59) при  $x_2 = 1$ ,  $x_1 = x_3 = \dots = x_n = 0$ , получим второй столбец матрицы  $\Phi$ , а в результате  $n$ -кратного интегрирования матрица  $\Phi$  будет определена полностью. Таким же способом можно численно вычислить и матрицу  $N$ . Для этого необходимо проинтегрировать  $m$  раз уравнение (53), положив  $x=0$  и приравнявая к единице поочередно компоненты вектора входных воздействий  $u$ .

## Лекция № 13

Тема:

### Выбор переменных состояния дискретной системы.

План лекции:

1. Способ прямого программирования.
2. Способ параллельного программирования.
3. Способ последовательного программирования.

#### 1. Способ прямого программирования.

Рассмотрим переход от описания импульсной системы с помощью  $Z$ -передаточных функций к описанию с помощью переменных состояния. Как уже отмечалось, выбор переменных состояния не является единственным, и определяется выбором соответствующего базиса. Практически удобным приемом выбора переменных состояния является составление схем моделирования дискретных систем. Схемы включают в себя элементы задержки на такт и сумматоры. При выборе переменных состояния импульсных систем за них удобно принимать выходы элементов задержки на такт.

Рассмотрим три способа перехода от  $Z$ -передаточной функции дискретной системы к уравнениям (57), (58): способы прямого программирования, последовательного программирования и параллельного программирования на примере звена второго порядка с одним входом и одним выходом и передаточной функцией

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + a z + b}{z^2 + c z + d}$$

При способе прямого программирования, разделив числитель и знаменатель передаточной функции на  $z^2$  (в общем случае на  $z^n$ ), получим

$$W(z) = \frac{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}{1 + c z^{-1} + d z^{-2}} \quad (60)$$

По определению передаточной функции

$$Y(z) = \frac{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}{1 + c z^{-1} + d z^{-2}} U(z)$$

Введем новую переменную  $e[kT]$ ,  $Z$ -преобразование которой имеет вид

$$E(z) = Z\{e[kT]\} = \frac{U(z)}{1 + c z^{-1} + d z^{-2}}.$$

Тогда

$$E(z)(1 + c z^{-1} + d z^{-2}) = U(z)$$

или

$$E(z) = U(z) - c z^{-1} E(z) - d z^{-2} E(z)$$

В соответствии с выражением (60) составляем схему моделирования (рис.35). При этом учитываем, что множитель  $z^{-1}$  соответствует задержке переменной на один такт квантования.

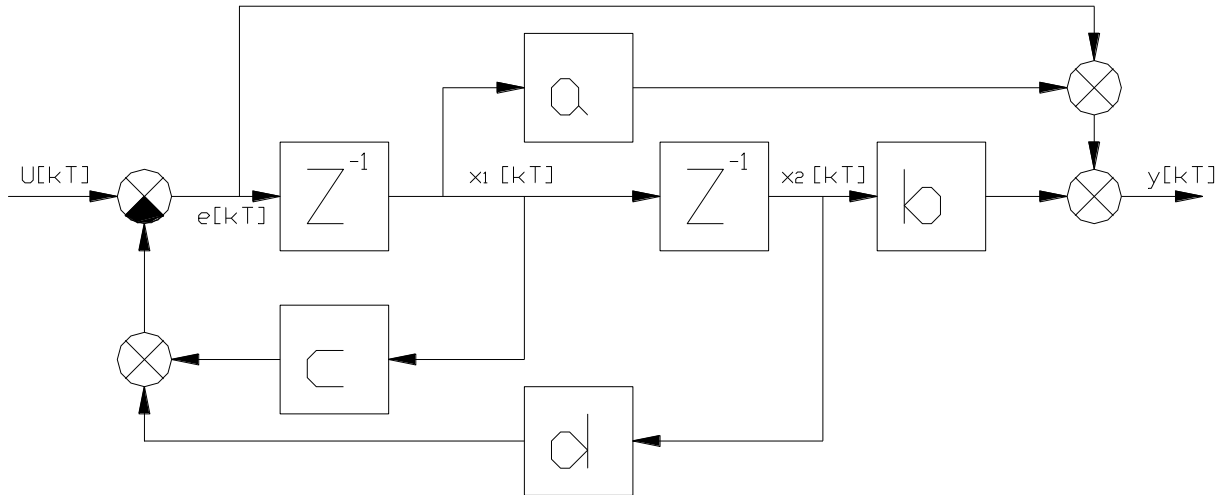


Рис. 35

Уравнения состояния системы можно получить, записывая соотношения, связывающие координаты на выходах элементов задержки. В итоге имеем

$$\begin{aligned} x_1[(k+1)T] &= x_2[kT] \\ x_2[(k+1)T] &= -d x_1[kT] - c x_2[kT] + u[kT]. \end{aligned} \quad (61)$$

Так как

$$Y(z) = (1 + a z^{-1} + b z^{-2}) E(z)$$

и при этом

$$X_2(z) = z^{-1} E(z); \quad X_1(z) = z^{-2} E(z); \quad E(z) = U(z) - c X_2(z) - d X_1(z),$$

то для выходной переменной  $y[kT]$  получим уравнение

$$y[kT] = (b - d) x_1[kT] + (a - c) x_2[kT] + u[kT] \quad (62)$$

Таким образом, уравнения (57), (58) принимают вид (61). (62), а матрицы  $\Phi$ ,  $H$ ,  $C$ ,  $D$  определяются выражениями

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d & -c \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = (b - d, a - c); \quad D = (1).$$

Запись системы уравнений (61) для общего случая не представляет сложности. При этом матрица  $\Phi$  будет иметь структуру, аналогичную собственной матрице системы дифференциальных уравнений, записанных в первой нормальной форме Коши.

## 2. Способ параллельного программирования.

Рассмотрим способ параллельного программирования. Передаточная функция системы, приведенная к виду (60), разбивается на сумму элементарных звеньев.

$$W(z) = \left[ \frac{1 + \alpha_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} + \frac{1 + \alpha_2 z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}} \right] * \frac{1}{2}$$

Изображение переменных состояния определяется выражениями

$$x_1(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} U(z); \quad x_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}} U(z);$$

Соответствующая схема моделирования представлена на рис.36.

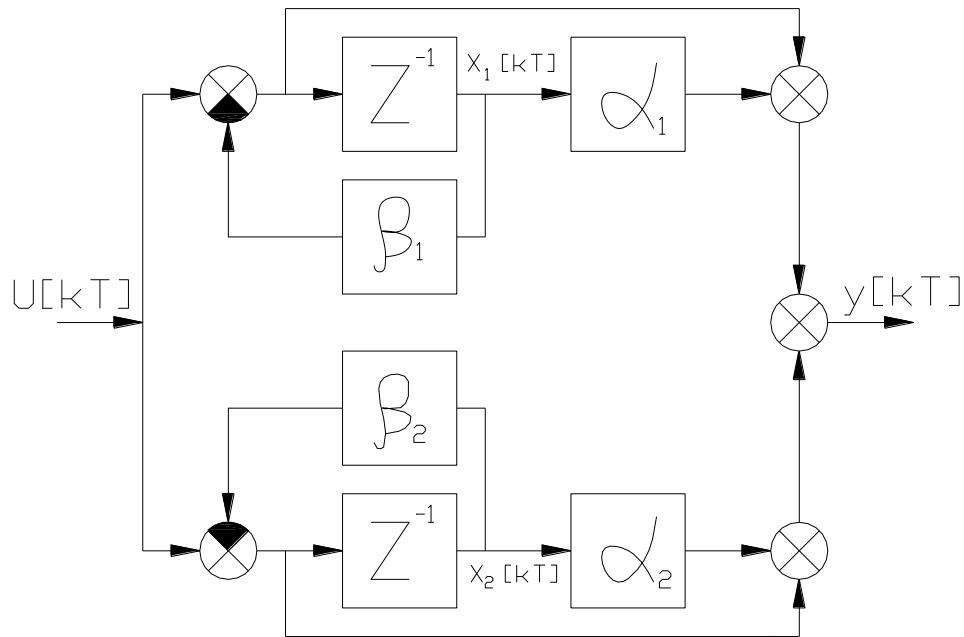


Рис.36

Разностные уравнения системы имеют вид

$$x_1[k+1] = -\beta_1 x_1[k] + u[k]$$

$$x_2[k+1] = -\beta_2 x_2[k] + u[k]$$

Прежде чем записать уравнение для выходной переменной системы, напомним некоторые преобразования передаточной функции

$$\begin{aligned} W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{1 + \alpha_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} + \frac{1 + \alpha_2 z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}} = \frac{1 + \beta_1 z^{-1} + (\alpha_1 - \beta_1)z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} + \frac{1 + \beta_2 z^{-1} + (\alpha_2 - \beta_2)z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}} = \\ &= 2 + (\alpha_1 - \beta_1) \frac{z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} + (\alpha_2 - \beta_2) \frac{z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}} \end{aligned}$$

Переходя от изображений к оригиналам, получим

$$Y[k] = (\alpha_1 - \beta_1)x_1[k] + (\alpha_2 - \beta_2)x_2[k] + 2U[k]$$

При таком выборе переменных состояния матрицы  $\Phi$ ,  $H$ ,  $C$ ,  $D$  соответственно имеют вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \left( \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}, \frac{\alpha_2 - \beta_2}{2} \right); \quad D = (2)$$

Преимущество этого подхода состоит в том, что собственная матрица дискретной системы  $\Phi$  оказывается диагональной, но при этом числа  $-\beta_1, -\beta_2$  (корни характеристического уравнения системы) могут оказаться комплексными. Такие же уравнения можно получить, если передаточную функцию  $W(z)$  непосредственно разложить на простейшие дроби и каждой дроби поставить в соответствие переменную состояния.

### 3. Способ последовательного программирования.

При использовании способа последовательного программирования уравнению системы в операторной форме придается вид

$$y(z) = \left( u(z) \frac{1 + \gamma_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}} \right) \frac{1 + \gamma_2 z^{-1}}{1 + \beta_2 z^{-1}},$$

полученный разложением на множители числителя и знаменателя передаточной функции (60). Схема моделирования в этом случае строится в виде последовательности однотипных каскадов (рис.37)

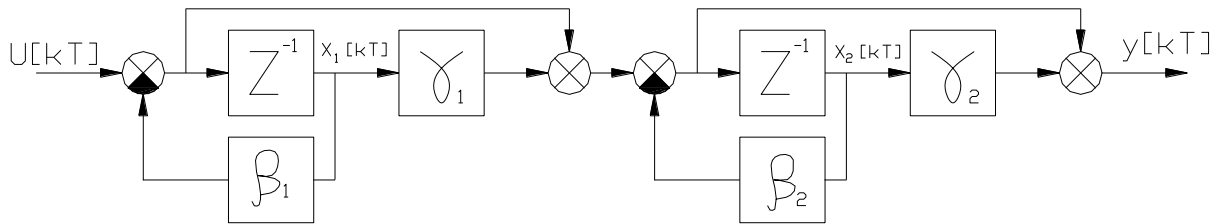


Рис.37

Уравнения состояния системы имеют вид

$$x_1[k+1] = -\beta_1 x_1[k] + u[k]$$

$$x_2[k+1] = (\gamma_1 - \beta_1)x_1 - \beta_2 x_2[k] + u[k]$$

$$y[k] = (\gamma_1 - \beta_1)x_1[k] + (\gamma_2 - \beta_2)x_2[k] + u[k]$$

а матрицы  $\Phi$ ,  $H$ ,  $C$ ,  $D$  определяются выражением

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 \\ -\gamma_1 - \beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 - \beta_1}{2}, \frac{\gamma_2 - \beta_2}{2} \end{pmatrix}; \quad D = (1)$$

Матрица  $\Phi$  при этом оказывается треугольной.

Составление блок-схем моделирования дискретных систем является важным этапом их исследования. С помощью этих схем можно рационально выбрать переменные состояния системы, а также перейти к описанию в рамках дискретного преобразования Лапласа или Z-преобразования.

## Лекция № 14

Тема:

### Анализ дискретных систем с использованием пространства состояний.

План лекции:

1. Вычисление  $Z$  – передаточной функции системы.
2. Вычисление  $Z$  – передаточной функции дискретной системы управления электродвигателем.

#### 1. Вычисление $Z$ – передаточной функции системы.

Рассмотрим выполнение обратного перехода от уравнений состояния к передаточным функциям системы. Пусть уравнения состояния дискретной системы имеют вид

$$x[k+1] = \Phi x[k] + Hu[k] \quad (63)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] \quad (64)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) - (n \times 1)$  вектор переменных состояния,  $u = (u_1, \dots, u_m) - (m \times 1)$  вектор входных воздействий,  $y = (y_1, \dots, y_\eta) - (\eta \times 1)$  вектор выходных переменных.

С другой стороны, система может быть описана матричной  $Z$  - передаточной функцией, устанавливающей связь между входными и выходными переменными. Найдем  $Z$  - передаточную функцию.

Введем  $Z$  - преобразования:

$$x(z) = Z\{x[k]\} ; \quad y(z) = Z\{y[k]\} ; \quad u(z) = \{u[k]\}$$

Применяя  $Z$  - преобразование к обеим частям уравнений (63), (64), найдем

$$Z X(z) - Z x[0] = \Phi X(z) + H U(z) ; \quad Y(z) = C X(z) + D U(z)$$

откуда получим

$$X(z) = (zE - \Phi)^{-1} H U(z) + (zE - \Phi)^{-1} z x[0]$$

и тогда

$$Y(z) = [C(zE - \Phi)^{-1} H + D] U(z) + C(zE - \Phi)^{-1} z x[0]$$

При нахождении передаточных функций полагаем начальные условия нулевыми,  $x[0] \equiv 0$ . С учетом этого имеем

$$Y(z) = [C(zE - \Phi)^{-1} H + D] U(z) \quad (65)$$

Из уравнения (65) получим выражение для матричной передаточной функции дискретной системы в виде

$$W(z) = (W_{ij}(z)) = C(zE - \Phi)^{-1} H + D \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \eta \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix}$$

Матричная передаточная функция имеет размерность  $(\eta \times m)$ , элемент  $W_{ij}(z)$  представляет собой передаточную функцию, связывающую  $j$  вход и  $i$  выход.

Раскрывая выражение для матричной передаточной функции, получим



$$W(z) = \frac{C(zE - \Phi)^s H + \det(zE - \Phi)D}{\det(zE - \Phi)}$$

где  $(zE - \Phi)^s$  - присоединенная матрица (напомним, что это транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов исходной матрицы).

Из последней зависимости видно, что полюсы передаточной функции  $W(z)$  являются корнями уравнения  $\det(zE - \Phi) = 0$

определяющего характеристические числа матрицы  $\Phi$ . Таким образом, матричная Z-передаточная функция  $W(z)$  имеет своими полюсами характеристические числа матрицы  $\Phi$ .

Алгоритмы получения передаточных функций, основанные на использовании уравнений состояния, удобнее алгоритмов, построенных на формулах  $\bar{D}_z$ -преобразования. Использование ЭВМ в задачах исследования дискретных систем позволяет применять стандартные программы обращения матриц, что приводит к существенному снижению трудоемкости выполняемых вычислений.

## 2. Вычисление Z – передаточной функции дискретной системы управления электродвигателем.

Рассмотрим получение уравнений состояния и вычисление передаточной функции для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Уравнения непрерывной части (объекта управления) имеют вид

$$\sigma = \omega;$$

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{T_1}\omega + \frac{k}{T_1}u$$

где  $\sigma$  - угол поворота выходного вала двигателя;  $\omega$  - частота вращения выходного вала двигателя;  $u$  - управляющее якорное напряжение;  $k$  - коэффициент передачи двигателя по напряжению;  $T$  - электромеханическая постоянная времени двигателя.

Возмущающими воздействиями, действующими на объект управления, пренебрежем. Будем считать, что управление  $u(t)$  остается постоянным на интервале квантования  $kT \leq t < (k+1)T$

Выберем вектор состояния  $x = (\delta, \omega)$  и запишем уравнения объекта в матричной форме:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ k/T_1 \end{pmatrix} u$$

Для вычисления собственной матрицы системы разностных уравнений  $\Phi$  воспользуемся формулой

$$\Phi = L^{-1}[(pE - A)^{-1}] \Big|_{t=T}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_1 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную матрицу

$$(pE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 0 & p + 1/T_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} p + 1/T_1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}}{p(p + 1/T_1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p + 1/T_1)} \\ 0 & \frac{1}{p + 1/T_1} \end{pmatrix}$$

и найдем обратное преобразование Лапласа

$$L^{-1}[(pE - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & (1 - e^{-t/T_1})T_1 \\ 0 & e^{-t/T_1} \end{pmatrix}$$

Подставив в последнее равенство  $t=T$ , получим собственную матрицу системы разностных уравнений:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & T_1(1 - e^{-T/T_1}) \\ 0 & e^{-T/T_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12} \\ 0 & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

где

$$\varphi_{12} = T_1(1 - e^{-T/T_1}); \quad \varphi_{22} = e^{-T/T_1}$$

Для определения элементов матрицы  $H$  найдем решение дифференциальных уравнений объекта при нулевых начальных условиях и  $u=1$

$$\sigma(t) = kt - kT_1(e^{-t/T_1} - 1); \quad \omega(t) = k(1 - e^{-t/T_1})$$

Подставив в полученные зависимости  $t=T$ , найдем матрицу  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kT - kT_1(e^{-T/T_1} - 1) \\ k(1 - e^{-T/T_1}) \end{pmatrix}$$

Система разностных уравнений, описывающая поведение объекта при выбранных переменных состояния, будет иметь вид

$$\sigma[k+1] = \sigma[k] + \varphi_{12}\omega[k] + h_1u[k]$$

$$\omega[k+1] = \varphi_{22}\omega[k] + h_2u[k]$$

Примем за выходную переменную угол поворота вала двигателя, т.е.  $y[k] = \delta[k]$ . При этом

матрицы  $C$  и  $D$  преобразуются к виду

$$C = (1, 0); \quad D = (0)$$

Тогда выражение для  $z$ -передаточной функции будет следующим:

$$W(z) = \frac{\delta(z)}{U(z)} = C(zE - \Phi)^{-1}H$$

Раскрывая выражения для матриц  $C$ ,  $\Phi$ ,  $H$  и произведя преобразования, получим

$$\begin{aligned} W(z) &= (1, 0) \begin{pmatrix} z-1 & -\varphi_{12} \\ 0 & z-\varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (1, 0) \frac{\begin{pmatrix} z-\varphi_{22} & \varphi_{12} \\ 0 & z-1 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-\varphi_{22})} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(z-\varphi_{22}, \varphi_{12})}{(z-1)(z-\varphi_{22})} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{(z-\varphi_{22})h_1 + \varphi_{12}h_2}{(z-1)(z-\varphi_{22})} \end{aligned}$$

## Лекция № 15

Тема:

### Анализ дискретных систем с использованием пространства состояний (продолжение).

План лекции:

1. Анализ устойчивости дискретных систем.
2. Определение переходных процессов при описании дискретных систем уравнениями состояния.

#### 1. Анализ устойчивости дискретных систем.

Рассмотрим вопрос исследования устойчивости при описании дискретных систем уравнениями состояния. Устойчивость определяется характером собственных движений дискретной системы, т.е. характером движений под действием только ненулевых начальных условий. Если входное воздействие отсутствует, уравнение состояния (63) принимает вид

$$x[k+1] = \Phi x[k] \quad (66)$$

Общее решение системы уравнений (66)

$$x[k] = \Phi^k x[0]$$

Устойчивость системы (66), а следовательно, и исходной неоднородной системы (63) определяется собственными числами матрицы  $\Phi$ , т.е. корнями характеристического уравнения

$$\det(zE - \Phi) = 0 \quad (67)$$

Если все корни  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  удовлетворяют условию

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

то система устойчива. Если существует хотя бы один корень такой, что  $|z_i| > 1$ , то импульсная система, описываемая уравнением (63), неустойчива. Случай, когда  $|z_i| = 1$ , является критическим. При этом система устойчива, если данный корень имеет первый порядок кратности.

При использовании математического описания импульсных систем в терминах пространства состояний оказывается возможным применить простой и удобный в вычислительном отношении критерий устойчивости. Справедливы утверждения:

Если все корни характеристического уравнения (67)  $z_i(\Phi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяют условию

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (68)$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi^k\| = 0 \quad (69)$$

При этом в уравнении (69) может использоваться любая из известных форм нормы матрицы. Справедливо и обратное утверждение, т.е. из условия (69) следует условие (68).

2. Если  $|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (70)$

и кратные корни на единичной окружности отсутствуют, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi^k\| = M < \infty \quad (71)$$

и обратно, выполнение условия (71) влечет за собой выполнение условия (70).

3. Если существует  $|z_i(\Phi)| > 1, i = 1, 2, \dots, n$

или имеются кратные собственные числа матрицы  $\Phi$ , принадлежащие единичной окружности, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi^k\| = \infty$$

Справедливо также и обратное утверждение.

Таким образом, исследование устойчивости может производиться по анализу элементов матрицы при . Обычно рассматривают последовательность матриц

$$\{\Phi^{2k}\} = \{\Phi, \Phi^2, \Phi^4, \dots\}$$

(эта последовательность просто формируется с помощью ЭВМ), задаются малым числом и достаточно большим числом и с помощью ЭВМ проверяют выполнение одного из условий

$$\|\Phi^{2k}\| < \varepsilon, k = 1, 2, \dots$$

или

$$\|\Phi^{2k}\| > N, k = 1, 2, \dots$$

В первом случае соответствующая импульсная система устойчива, во втором случае она неустойчива. Возможна модификация этого алгоритма на основе привлечения ум оценки неустойчивости следов матрицы  $\Phi^k$  при  $k \rightarrow \infty$ , При используется следующее утверждение :если существует такое  $k$ , что

$$|Sp \Phi^k| > n$$

где  $n$  - порядок системы, то среди собственных чисел матрицы имеется хотя бы одно  $z_j$ , удовлетворяющее условию  $|z_i| > 1$ , и тогда импульсная система неустойчива. Справедливость этого утверждения следует из равенства

$$Sp \Phi^k = \sum_{i=1}^n z_i^k$$

Очевидно, что если все собственные числа матрицы удовлетворяют условию

$$|Sp \Phi^k| = \left| \sum_{i=1}^n z_i^k \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^k \leq n \quad (72)$$

поэтому нарушение условия (72) влечет за собой появление собственного числа, определяющего неустойчивость системы.

### **Определение переходных процессов при описании дискретных систем уравнениями состояния.**

Одной из основных и часто встречающихся задач анализа и импульсных систем является определение переходных процессов. Запишем уравнение (63) импульсной системы в переменных состояния:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + Hu[k]$$

Переходный процесс в такой системе может быть легко найден рекуррентным способом, для систем низкого порядка - непосредственным вычислением, для систем высокого порядка - с применением ЭВМ. Исходными данными для вычислений являются входные воздействия  $u[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и начальное состояние системы

$$x[k=0] = x[0]$$

Тогда

$$x[1] = \Phi x[0] + Hu[0]; \quad x[2] = \Phi x[1] + Hu[1]$$

и т.д.

Недостатком рекуррентной процедуры является то, что для нахождения решения при определенном значении аргумента необходимо вычислить решение при всех предшествующих значениях аргумента. Поэтому имеет смысл получить решение системы разностных уравнений (63) в явном виде.

Из теории разностных уравнений, которые рассматривались в курсе "Математические основы ТАУ" фундаментальной матрицей однородной системы

$$x[k+1] = \Phi x[k] \quad (73)$$

называется  $(n \times n)$  - матрица, столбцы которой представляют собой линейно независимые решения системы (73). Фундаментальная матрица  $x[k]$  является нормированной при  $k=0$ , если  $x[0]=E$ . Общее решение однородной системы (73) имеет вид

$$x[k] = X[k]X^{-1}[0]x[0] \quad (74)$$

где  $x[k]$ - произвольная фундаментальная матрица.

Если  $x[k]$ - нормированная фундаментальная матрица, выражение (74) примет вид

$$x[k] = x[k]x[0] \quad (75)$$

Для определения нормированной фундаментальной матрицы применим Z-преобразование к обеим частям уравнения (73):

$$zX(z) - X[0] = \Phi x(z)$$

где

$$x(z) = Z\{x[k]\}$$

Отсюда следует, что

$$X(z) = (zE - \Phi)^{-1} z x[0] \quad (76)$$

$$x[k] = Z^{-1}\{(zE - \Phi)^{-1} z\}x[0]$$

Так как решение линейного разностного уравнения при заданных начальных условиях определяется единственным образом, то из сравнения выражений (76) и (75) будем иметь

$$X[k] = Z^{-1}\{(zE - \Phi)^{-1} z\}$$

Связь между Z-преобразованием решетчатой функции и оригиналом задается соотношением

$$f[k] = \sum_i \text{Res } F(z) z^{k-1}$$

где  $z_i$  - особые точки .

Применив эту формулу для нашего случая, получим

$$x[k] = \sum_i \text{Res}[(zE - \Phi)^{-1} z^k],$$

где  $z_i$  - собственные числа матрицы  $\Phi$ , т.е. корни характеристического уравнения

$$\det(zE - \Phi) = 0$$

Возможны и некоторые другие способы вычисления матрицы [2].

Перейдем к определению решения неоднородной системы разностных уравнений (63). Получим последовательно

$$x[1] = \Phi x[0] + Hu[0]$$

$$x[2] = \Phi x[1] + Hu[1] = \Phi^2 x[0] + \Phi Hu[0] + Hu[1]$$

$$x[3] = \Phi x[2] + Hu[2] = \Phi^3 x[0] + \Phi^2 Hu[0] + \Phi Hu[1] + Hu[2]$$

Общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$x[k] = \Phi^k x[0] + \Phi[k-1]Hu[0] + \dots + \Phi Hu[k-2] + Hu[k-1]$$

или

$$x[k] = \Phi^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} Hu[i]$$

Учитывая, что

$$\Phi^k = X[k], \quad \Phi^{k-i-1} = x[k-i-1]$$

получим окончательное выражение в виде

$$x[k] = X[k] x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} X[k-i-1] Hu[i] \quad (77)$$

Таким образом, для численного расчета переходных процессов в дискретной системе можно использовать либо рекуррентную процедуру, либо выражения (75), (77). Для изучения общих свойств решения, анализа поведения системы при различных начальных условиях используются формулы (75), (77), характеризующие зависимость переменных состояния от дискретного времени в явном виде.

## Лекция № 16

Тема:

### Описание импульсных систем с несколькими импульсными элементами с помощью пространства состояний.

План лекции:

1. Математическое описание синхронных импульсных систем с кратными периодами квантования ИЭ.
2. Пример составления математического описания импульсной системы.

#### 1. Математическое описание синхронных импульсных систем с кратными периодами квантования ИЭ.

Импульсная система может иметь в своем составе несколько импульсных элементов (ИЭ). Наиболее простым является ранее рассмотренный случай, когда у всех ИЭ одинаковые периоды квантования и все они срабатывают одновременно. Такие системы называются синхронными и синфазными. В противном случае говорят об асинхронных (различные периоды квантования) и асинфазных (неодинаковое время срабатывания ИЭ) системах. Математическое описание и анализ таких систем представляют собой сложную задачу, для решения которой можно успешно использовать метод пространства состояний.

Ограничимся рассмотрением асинхронных систем с кратными периодами дискретности импульсных элементов. Такие системы имеют в своем составе непрерывную часть, описываемую линейными дифференциальными уравнениями, и дискретную часть, состоящую из идеальных импульсных элементов (ИИЭ) и формирующих звеньев. Изложим общий подход к математическому описанию данных САУ. Рассмотрим интервал квантования ИЭ и выделим их наименьшее общее кратное  $T$ . Эта величина определяет цикл работы всей системы. Разделим цикл на  $\eta$  подынтервалов в соответствии с моментами срабатывания отдельных ИЭ (рис.38).

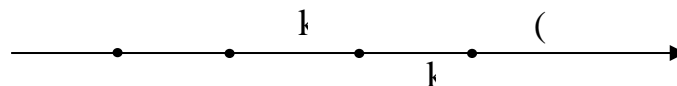


Рис.38

На каждом полуинтервале  $[kT + t_i, kT + t_{i+1})$  в системе можно выделить два типа преобразования вектора состояния:

изменение вектора состояния в интервале между моментами квантования. Эти переходы характеризуются уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x$  - вектор состояния;  $u$  - вектор управления.

Данному уравнению соответствует решение

$$x(t_1^-) = \Phi x(t_0^+) + Hu(t_0^+) \quad (78)$$

где

$$\Phi = e^{A(t_1 - t_0)} ; H = A^{-1} e^{A(t_1 - t_0)} B ;$$

2) изменение вектора состояния в моменты квантования. Эти изменения описываются уравнениями вида

$$\Phi = e^{A(t_1 - t_0)} ; H = A^{-1} e^{A(t_1 - t_0)} B ; \quad (79)$$

(индексы "-" и "+" соответствуют левым и правым пределам при стремлении аргумента  $t$ ).

Осуществляя последовательно переходы (78) и (79), можно установить связь между интересующими нас моментами времени. Например, рассмотрим полуинтервал  $[kT, kT + t_1)$ . При  $t = kT$  имеем переход

$$x[kT^+] = Fx[kT^-] + Gu[kT^+] \quad (80)$$

На интервале  $(kT, kT + t_1)$  имеем переход

$$x[(kT + t_1)^-] = \Phi x[kT^+] + Hu[kT^+] \quad (81)$$

Подставив выражение (80) в формулу (81), получим уравнения, связывающие значения вектора состояния в моменты  $t = kT^-$  и  $t = (kT + t_1)^-$

$$x[(kT + t_1)^-] = \Phi Fx[kT^-] + (\Phi G + H)u[kT^+]$$

или

$$x[(kT + t_1)^-] = \theta x[kT^-] + Ru[kT^+]$$

где

$$\theta = \Phi F ; R = \Phi G + H$$

Аналогично рассматриваются и стыкуются между собой последующие интервалы.

## 2. Пример составления математического описания импульсной системы.

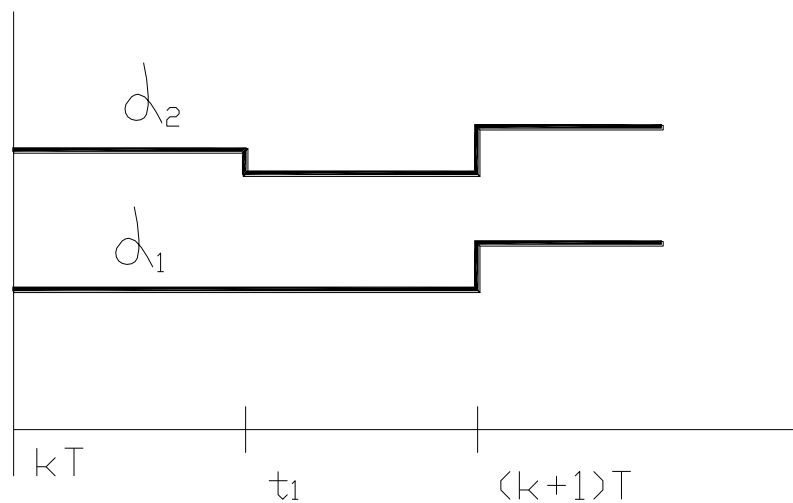
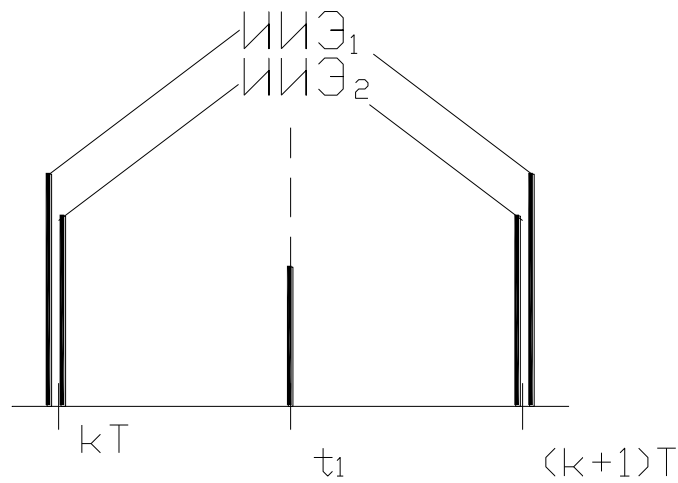
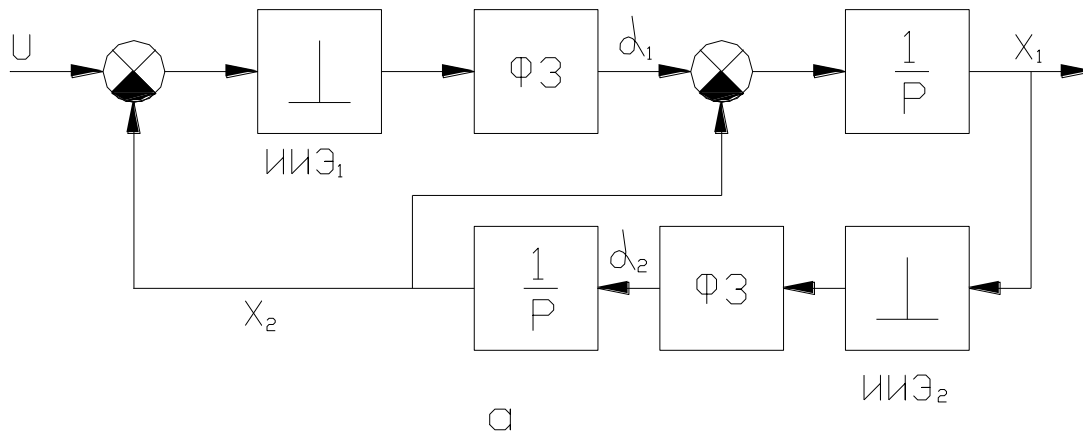
Рассмотрим более подробно математическое описание подобных систем на примере. Пусть структурная схема дискретной системы имеет вид, представленный на рис.39,а. Данная система является асинхронной. Периоды повторения первого ИЭ  $T$  и второго кратные числа, причем  $T = 2T_1$ . Формирующие звенья обоих импульсных элементов представляют собой экстраполяторы нулевого порядка. Временная диаграмма работы импульсных элементов представлена на рис.39.б.

Примем за переменные состояния координаты  $x_1, x_2$ . Входное воздействие  $u(t)$  будем считать непрерывной функцией. Рассмотрим временной интервал  $(kT, t_1)$  и запишем дифференциальные уравнения, соответствующие переходу

$$kT^+ \rightarrow t_1^-$$

$$x_1 = u[kT] - x_2[kT^+] - x_2 ; \quad x_2 = x_1[kT^+]$$





б

Рис. 39

Решив данную систему, получим при  $kT < t < t_1$

$$x_1(t) = x_1[kT^+] - x_1[kT^+] \frac{(t-kT)^2}{2} - 2x_2[kT^+](t-kT) + u[kT](t-kT)$$

$$x_2(t) = x_1[kT^+](t-kT) + x_2[kT^+]$$

Подставим  $t = t_1 = kT + T/2$  найдем

$$x_1[t_1^-] = (1 - T^2/8)x_1[kT^+] - Tx_2[kT^+] + T/2 u[kT]$$

$$x_2[t_1^-] = T/2 x_1[kT^+] + x_2[kT^+]$$

Представим систему в виде

$$x[t_1^-] = \Phi_0 x[kT^+] + H_0 u[kT]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 - T^2/8 & -T \\ T/2 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_0 = \begin{pmatrix} T/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим далее дискретный переход  $kT^- \rightarrow kT^+$

$$x_1[kT^+] = x_1[kT^-]$$

$$x_2[kT^+] = x_2[kT^-]$$

т.е.

$$x[kT^+] = F_0 x[kT^-] \quad (83)$$

где

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединив результаты двух рассмотренных переходов, получим

$$x[t_1^-] = \Phi_0 F_0 x[kT^-] + H_0 u[kT]$$

или

$$x[t_1^-] = \Phi_0 x[kT^-] + H_0 u[kT] \quad (84)$$

так как для данного случая  $F_0 = E$ .

Рассмотрим следующий временной интервал  $(t_1, (k+1)T)$  Запишем дифференциальные уравнения, соответствующие переходу  $t_1^+ \rightarrow (k+1)T$ . При этом следует иметь в виду, что в момент времени  $t_1$  срабатывает только второй ИЭ, а выходной сигнал первого ИЭ не меняется. Уравнения имеют вид

$$x_1 = u[kT] - x_2[kT^+] - x_2; \quad x_2 = x_1[t_1^+]$$

Решив данную систему, получим при  $t_1 < t < (k+1)T$

$$x_1(t) = x_1[t_1^+] - x_1[t_1^+] \frac{(t-t_1)^2}{2} - x_2[kT^+](t-t_1) - x_2[t_1^+](t-t_1) + u[kT](t-t_1)$$

$$x_2(t) = x_2[t_1^+] + x_1[t_1^+](t-t_1)$$

При  $t=(k+1)T$  имеем  $t-t_1 = T/2$  и тогда

$$x_1[(k+1)T^-] = (1 - \frac{T^2}{8})x_1[t_1^+] - x_2[t_1^+] \frac{T}{2} - x_2[kT^+] \frac{T}{2} + u[kT] \frac{T}{2}$$

$$x_2[(k+1)T^-] = \frac{T}{2} x_1[t_1^+] + x_2[t_1^+]$$

или, переходя к матричной форме записи,

$$x[(k+1)T^-] = \Phi_1 x[t_1^+] + R x[kT^+] + H_1 u[kT] \quad (85)$$

где

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 - T^2/8 & -T/2 \\ T/2 & 1 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H_1 = \begin{pmatrix} T/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дискретный переход  $t_1^- \rightarrow t_1^+$  аналогичен рассмотренному дискретному переходу  $kT^- \rightarrow kT^+$ , т.е.

$$x[t_1^+] = x[t_1^-] \quad (86)$$

Объединив выражения (83), (85), (86), получим

$$x[(k+1)T^-] = \Phi_1 x[t_1^-] + R x[kT^-] + H_1 u[kT] \quad (87)$$

Подставляя в зависимость (87) выражение для  $x[t_1^-]$ , будем иметь

$$x[(k+1)T^-] = (\Phi_1 \Phi_0 + R) x[kT^-] + (H_1 + \Phi_1 H_0) u[kT]$$

или

$$x[(k+1)T^-] = \Phi x[kT^-] + H u[kT] \quad (88)$$

где

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_0 + R ; H = H_1 + \Phi_1 H_0$$

Таким образом, получена система разностных уравнений (88), определяющая связь между значениями переменных состояния на интервале основного квантования  $T$ . Устойчивость рассматриваемой дискретной системы определяется собственными числами матрицы  $\Phi$ . Полученные зависимости позволяют провести расчет переходных процессов в данной системе.

## Лекция № 17

Тема:

### Особенности вынужденных процессов в импульсных системах.

План лекции:

1. Свободный и вынужденный процессы в импульсных системах.
2. Расчет вынужденных процессов с помощью моментов весовой характеристики
3. Процессы конечной длительности в импульсных системах.

#### 1. Свободный и вынужденный процессы в импульсных системах

Точность воспроизведения входных воздействий является одной из наиболее важных характеристик импульсных систем. При исследовании точности рассматриваются вынужденные процессы, т.е. процессы, устанавливающиеся по истечении бесконечно большого промежутка времени после подачи входного воздействия. Остановимся на аналитическом способе определения вынужденного процесса в импульсной системе.

Реакция импульсной системы (безразлично, замкнутой или разомкнутой) на входное воздействие  $f[kT]$  определяется по выражению

$$x[kT] = \sum_{i=0}^k \omega[(k-i)T] f[iT] \quad (89)$$

где  $\omega[kT]$ -импульсная переходная функция системы, связанная с ее Z-передаточной функцией зависимостью

$$\omega[kT] = Z^{-1} \{W(z)\}$$

Формула (89) описывает процесс в системе при условии, что входное воздействие приложено в моменты  $k=0$ . При произвольном моменте приложения воздействия  $k = k_0$  она принимает вид

$$x[kT] = \sum_{i=k_0}^k \omega[(k-i)T] f[iT], \quad k > k_0.$$

Полагая  $k_0 = -\infty$ , получим, что между приложением входного воздействия и настоящим моментом прошел бесконечно большой промежуток времени. Назовем процесс, соответствующий этому условию, вынужденным процессом импульсной системы. Обозначая его  $x_B[kT]$ , будем иметь

$$x_B[kT] = \sum_{i=-\infty}^k \omega[(k-i)T] f[iT]$$

или, заменяя переменную  $i$  на переменную  $j$  по формуле  $k-i=j$ ,

$$x_B[kT] = \sum_{j=0}^{\infty} \omega[jT] f[(k-j)T] \quad (90)$$

Свободным процессом импульсной системы назовем разность между общим процессом (89) и вынужденным процессом (90), т.е.

$$x_c[kT] = x[kT] - x_B[kT] = - \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega[jT] f[(k-j)T] \quad (91)$$

## 2. Расчет вынужденных процессов с помощью моментов весовой характеристики

Вернемся к формуле (90). Разложим входное воздействие  $f[(k-j)T]$  в ряд Тейлора по переменной  $j$  в окрестности точки  $kT$  (это разложение можно получить дискретизацией его непрерывного аналога):

$$f[(k-j)T] = \sum_{\eta=0}^{\infty} (-1)^{\eta} \frac{(jT)^{\eta}}{\eta!} f^{(\eta)}[kT] \quad (92)$$

где

$$f^{(\eta)}[kT] = \left. \frac{d^{\eta} f(t)}{dt^{\eta}} \right|_{t=kT}$$

Подставив выражение (92) в формулу (90), получим

$$x_B[kT] = \sum_{j=0}^{\infty} \omega[jT] \left\{ \sum_{\eta=0}^{\infty} (-1)^{\eta} \frac{(jT)^{\eta}}{\eta!} f^{(\eta)}[kT] \right\} = \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\eta} f^{(\eta)}[kT]}{\eta!} \sum_{j=0}^{\infty} \omega[jT] (jT)^{\eta}$$

Обозначим

$$d_{\eta} = (-1)^{\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \omega[jT] (jT)^{\eta}; \quad \eta = 0, 1, \dots$$

и назовем эту величину моментом  $\eta$ -го порядка весовой характеристики  $W[kT]$  [6]. Тогда выражение для вынужденного процесса в системе приобретает вид

$$x_B[kT] = \sum_{r=0}^{\infty} d_r \frac{f^{(r)}[kT]}{r!} \quad (93)$$

Числа  $d_0, d_1, \dots$  характеризуют только дискретную систему и могут быть вычислены заранее. Производные  $f^{(r)}[kT]$  также легко поддаются определению (особенно просто это делается для степенных входных воздействий) и, таким образом, зависимость (93) позволяет построить вынужденные процессы в системе.

Для определения моментов  $d_0, d_1, \dots$  можно использовать следующую формулу [6]

$$d_{\eta} = \left[ \frac{d^{\eta} W^*(p)}{d p^{\eta}} \right]_{p=0} \quad (94)$$

где  $W^*(p)$  - передаточная функция импульсной системы, соответствующая дискретному преобразованию Лапласа,

$$W^*(p) = W(z)_{z=e^{pT}}$$

Зависимость (94) получается  $\eta$ -кратным дифференцированием формулы D-преобразования функции  $W[kT]$

$$W^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] e^{-pkT}$$

с последующей подстановкой  $p=0$ .

## 3. Процессы конечной длительности в импульсных системах.

Протекание переходных процессов в импульсных системах имеет свои особенности. В частности, здесь оказываются возможными процессы, затухающие за конечное время, так называемые процессы конечной длительности. Определим условия их возникновения в дискретной системе с

передаточной функцией  $w(z)$ . Рассмотрим импульсную переходную функцию  $W[kT]$  установив, когда возможно выполнение равенства

$$\omega[kT] \equiv 0 \text{ при } k > k_0 \quad (95)$$

Пусть передаточная функция  $w(z)$  является дробно-рациональным выражением, т.е.

$$W(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}.$$

Умножив числитель и знаменатель на  $z^{-n}$ , приведем передаточную функцию к виду

$$W(z) = \frac{a_n + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}{b_n + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}$$

Функции  $W[kT]$  и  $w(z)$  связаны между собой  $z$ -преобразованием, т.е. с учетом равенства (95)

$$W(z) = \frac{a_n + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}{b_n + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}} = \sum_{k=0}^{k_0} \omega[kT] z^{-k} \quad (96)$$

Очевидно, что равенство (96) возможно при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= n \\ b_0 &= b_1 = \dots = b_{n-1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Таким образом, выполнение условий (97) влечет за собой выполнение равенства (95). С учетом равенства (95) при  $k_0 = n$  из выражения (91) имеем

$$x_c[kT] \equiv 0, \quad k = n, n+1, \dots$$

т.е. свободные процессы в системе заканчиваются за  $n$  шагов квантования, где  $n$  - порядок системы.

После этого в системе устанавливается вынужденный процесс  $x_B[kT]$ . Наличие процессов с конечной длительностью, т.е. выполнение условий (97), обеспечивается надлежащим выбором параметров исходной системы или параметров дополнительного корректирующего устройства. Отметим, что характеристическое уравнение такой системы имеет вид

$$b_n z^n = 0,$$

т.е. устойчивость дискретной САУ гарантируется.

## Лекция № 18

Тема:

### Анализ вынужденных процессов в импульсных системах.

План лекции:

1. Вынужденные процессы при степенных входных воздействиях.
2. Установившиеся ошибки при типовых входных сигналах.
3. Коэффициенты ошибок дискретной системы.

#### 1. Вынужденные процессы при степенных входных воздействиях.

Рассмотрим вынужденные процессы, возникающие в дискретных системах при степенных воздействиях и оценим точность воспроизведения входного сигнала.

Пусть входной сигнал является постоянным, т.е.  $f[kT] = A = \text{const}$ . Тогда  $f^{(\eta)}[kT] = 0$ ,  $\eta = 1, 2, \dots$  и из зависимости (93) следует

$$x_B[kT] = d_0 A.$$

В соответствии с формулой (94)

$$d_0 = W^*(0) = W(z) \Big|_{z=1},$$

т.е. вынужденный процесс при постоянном входном воздействии также является постоянной величиной. Пусть

$$f[kT] = AkT,$$

т.е. входной сигнал изменяется по линейному закону. Тогда

$$f'[kT] = A, \quad f^{(\eta)}[kT] = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Из выражения (93) получим

$$x_B[kT] = d_0 AkT + d_1 A,$$

$$\text{где } d_0 = W^*(a), \quad d_1 = \left. \frac{dW^*(p)}{dp} \right|_{p=0} = \left. \frac{dW(z)}{dz} T \right|_{z=1},$$

т.е. вынужденный процесс при линейном входном воздействии является также сигналом, изменяющимся по линейному закону, параметры которого определяются коэффициентами передаточной функции системы.

Продолжая рассмотрение, можно прийти к следующему результату: вынужденный процесс при степенном воздействии является полиномом, той же степени, что и входной сигнал. Коэффициенты этого полинома определяются коэффициентами входного воздействия и параметрами передаточной функции системы.

Оценим точность воспроизведения степенного входного сигнала замкнутой импульсной системой. Структурная схема системы представлена на рис.40. Входное воздействие имеет вид

$$f[kT] = A_0 + A_1 kT + \dots + A_l [kT]^l \quad (98)$$

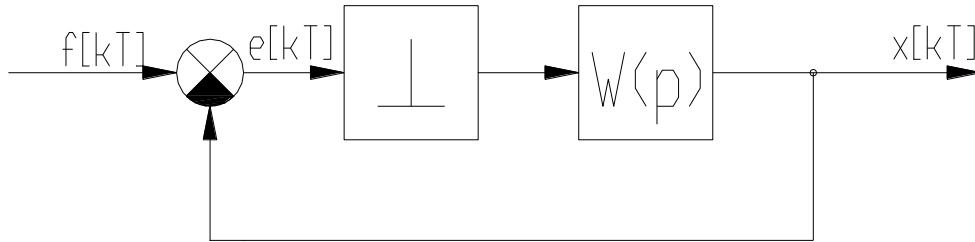


Рис.40

## 2. Установившиеся ошибки при типовых входных сигналах.

Найдем установившуюся ошибку системы  $l[kT]$ . Из теории непрерывных САУ известно, что величина установившейся ошибки определяется соотношением степени полинома входного воздействия с порядком астатизма разомкнутой системы. Аналогичное положение сохраняется и для дискретных систем. Из п.2.3 следует, что полюсу  $p=0$  передаточной функции ПНЧ соответствует полюс  $z=1$  Z-передаточной функции  $W(z)$ , причем порядки этих полюсов (степени астатизма) совпадают (см. зависимость (24)). Тогда Z-передаточная функция  $W(z)$  дискретной системы, приведенная непрерывная часть которой обладает астатизмом порядка  $\eta$ , может быть записана в виде

$$W(z) = \frac{W_0(z)}{(z-1)^\eta}$$

где  $W_0(z)$  - дробно-рациональная функция, причем  $z=1$  не входит в число ее нулей или полюсов.

Определим передаточную функцию ошибки замкнутой импульсной системы:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{1+W(z)}$$

или

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{1 + \frac{W_0(z)}{(z-1)^\eta}} = \frac{(z-1)^\eta}{(z-1)^\eta + W_0(z)} = (z-1)^\eta \Phi_{00}(z)$$

где  $\Phi_{00}(z) = [(z-1)^\eta + W_0(z)]^{-1}$ .

Установившееся значение сигнала ошибки найдем по теореме о предельном значении решетчатой функции:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[kT] = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{\eta+1} \Phi_{00}(z)F(z).$$

где  $F(z) = Z\{f[kT]\}$ .

Из формулы (98) и таблиц z-преобразования получим



$$F(z) = \frac{A_0 z}{z-1} + \frac{A_1 z T}{(z-1)^2} + \dots + \frac{A_e z T^e}{(z-1)^{e+1}} = \frac{A_0 (z-1)^e z + A_1 (z-1)^{e-1} z T + \dots + A_e T^e}{(z-1)^{e+1}} = \frac{P(z)}{(z-1)^{e+1}}$$

где  $P(z)$  - полином степени  $l$ , причем  $P(1) \neq 0$ .

Тогда зависимость для установившейся ошибки принимает вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^{\eta+1} \Phi_{00}(z) P(z)}{(z-1)^{l+1}} \quad (99)$$

Из анализа формула (99) видно, что могут представиться три случая:

$\eta < l$  - порядок астатизма меньше степени полинома входного воздействия. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\Phi_{00}(z) P(z)}{(z-1)^{e-\eta}} = \Phi_{00}(1) P(1) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^{e-\eta}} = \infty$$

т.е. ошибка неограниченно увеличивается с увеличением времени»

$\eta = l$  - порядок астатизма равен степени полинома входного воздействия.

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[kT] = \Phi_{00}(1) P(1) \neq 0$$

т.е. установившееся значение ошибки является постоянной величиной, отличной от нуля;

3)  $\eta > l$  - порядок астатизма больше степени полинома входного воздействия. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} \Phi_{00}(z) P(z) (z-1)^{\eta-e} = 0,$$

т.е. в этом случае установившееся значение ошибки равно нулю.

Если система является статической  $\eta = 0$ , то установившаяся ошибка при отработке ступенчатого сигнала

$$e_y[kT] = \frac{A_0}{1 + W(1)}.$$

Величина  $W(1)$  представляет собой коэффициент передачи разомкнутой дискретной системы  $K$ . Нетрудно показать, что для случая экстраполятора нулевого порядка он совпадает со значением коэффициента передачи приведенной непрерывной части  $K_{нч}$ . Таким образом, установившаяся ошибка статической системы на постоянный сигнал определяется по выражению

$$e_y = \frac{A_0}{1 + k_{нч}}$$

Для системы с астатизмом первого порядка ( $\eta = 1$ ) установившаяся ошибка на линейно нарастающий сигнал  $f[kT] = A_0 + A_1 kT$  определяется по выражению

$$e_y = \lim_{k \rightarrow \infty} e[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)A_0 + A_1 z}{z-1 + W_0(z)} = \frac{A_1}{W_0(1)} = \frac{A_1}{k},$$

где  $K$  - коэффициент передачи системы по скорости,  $K = W(1)$

В импульсных системах в установившемся режиме могут возникать колебания внутри интервала квантования (так называемые "скрытые колебания"). Отметим, что в линейных импульсных системах с экстраполятором нулевого порядка в качестве формирующего звена появление

таких колебаний принципиально невозможно. Возникновение "скрытых колебаний" связано с использованием формирующего звена, поддерживающего величину импульса на интервале  $\gamma T, \gamma < 1$ , т.е. звена с передаточной функцией

$$S(p) = \frac{1 - e^{-p\gamma T}}{p},$$

При необходимости их исследования выходной сигнал рассматривают в смещенные моменты времени  $t = kT + \xi T, k = 0, 1, \dots, 0 \leq \xi < 1$ , т.е. используют смещенные Z-передаточные функции  $W(z, \xi)$  и

$$\Phi(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z)}$$

дискретной системы.

### 3. Коэффициенты ошибок дискретной системы

Для анализа точности непрерывных систем при степенных входных воздействиях успешно применяется метод, основанный на понятии коэффициентов ошибок. Этот же метод может быть применен и для дискретных систем.

Рассмотрим вынужденный процесс в замкнутой системе. Передаточная функция системы по ошибке имеет вид

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{1 + W(z)},$$

где  $W(z)$ - передаточная функция разомкнутой системы. Пусть

$$\varpi_e[k] = Z^{-1}\{\Phi_0(z)\}.$$

Тогда для сигнала ошибки системы в вынужденном процессе можно записать уравнение, аналогичное зависимости (90):

$$e[kT] = \sum_{j=0}^{\infty} \varpi_e[jT] f[(k-j)T] \quad (100)$$

Выразим значение смещенной функции  $f[(k-j)T]$  через ее конечные разности:

$$f[(k-j)T] = \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} \Delta^i f[(k-i)T], \quad (101)$$

где 
$$\binom{j}{i} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$$

Подставив выражение (101) в уравнение (100), получим

$$e[kT] = \sum_{j=0}^{\infty} \varpi_e[jT] \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} \Delta^i f[(k-i)T]$$

Меняя порядок суммирования, будем иметь

$$e[kT] = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Delta^i f[(k-i)T] \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{i} \varpi_e[jT]. \quad (102)$$

Введем коэффициенты  $c_i$ , определяемые соотношениями

$$c_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{(j-i)!} \varpi_e[jT]$$

Тогда выражение (102) приобретает вид

$$e[kT] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i!} \Delta^i f[(k-i)T] \quad (103)$$

Коэффициенты  $c_i$  называются коэффициентами ошибок дискретной системы. Они могут быть вычислены заранее. Из формулы (103) следует, что величина вынужденной ошибки полностью определяется коэффициентами ошибки и разностями квантованного входного сигнала. Коэффициенты ошибок  $c_i$  могут быть определены по передаточной функции замкнутой системы  $\Phi_0(z)$ . Запишем выражение для этой передаточной функции:

$$\Phi_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varpi_e[jT] z^{-j}$$

Продифференцировав последнюю зависимость по  $Z$ , получим для  $i$ -й производной

$$\left. \frac{d^i \Phi_0(z)}{dz^i} \right|_{z=1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i j(j-1)\dots(j-i+1) \varpi_e[jT] = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i \frac{j!}{(j-i)!} \varpi_e[jT]$$

или

$$c_i = \left. \frac{d^i \Phi_0(z)}{dz^i} \right|_{z=1}.$$

При вычислении коэффициентов ошибок производные  $\Phi_0^{(i)}(z)$  обычно находят не непосредственным дифференцированием, а определяя коэффициента разложения функции  $\Phi_0(z)$  в ряд Тейлора по степеням  $z-1$ . Действительно, данное разложение имеет вид

$$\Phi_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Phi_0^{(i)}(z)}{i!} (z-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i!} (z-1)^i$$

Коэффициенты разложения легко находятся переходом от переменной  $z$  к переменной  $\alpha = z-1$  и последующим делением числителя полученного дробно-рационального выражения на знаменатель.

В качестве примера рассмотрим определение ошибки, устанавливающейся в импульсной системе, если

$$\Phi_0(z) = \frac{(z-0.5)(z-1)}{z^2 - 0.5z + 0.8};$$

$$f[kT] = A_0 + A_1 kT; \quad A_0 = 2; \quad A_1 = 4; \quad T = 1c$$

Введя новую переменную  $\alpha = z-1$ , получим

$$\Phi_0(\alpha) = \frac{(\alpha+0.5)\alpha}{\alpha^2 + 1.5\alpha + 1.3}$$

Разделив числитель на знаменатель, найдем разложение функции  $\Phi_0(\alpha)$  в ряд по степеням  $\alpha$  (запишем только два первых члена):

$$\Phi_0(\alpha) = 0.384\alpha + 0.402\alpha^2 + \dots,$$

Отсюда  $c_0 = 0, c_1 = 0.384$  и тогда

$$e[kT] = C_0 f[kT] + C_1 \Delta f[(k-1)T] + C_2 \Delta^2 f[(k-2)T] + \dots = C_1 \Delta f[(k-1)T] = 0.384 \cdot 4 = 1.536.$$

Отметим, что, кроме коэффициентов ошибок, для определения величины  $e[kT]$  могут использоваться моменты  $d_\eta, \eta = 0, 1, \dots$  весовой характеристики  $W_e[kT]$ . В основном рассмотренные подходы к определению

вынужденных процессов эквивалентны и отличаются один от другого лишь деталями, не имеющими принципиального значения.

Анализ точности при гармоническом входном сигнале при необходимости его проведения выполняется с помощью частотных характеристик импульсной системы аналогично тому, как это делалось для непрерывных систем. При этом для перехода от ЛАФЧХ разомкнутой дискретной системы к частотным характеристикам по сигналу ошибки могут использоваться те же номограммы замыкания, что и для непрерывных систем.

## Лекция 19.

### Синтез цифровых автоматических систем.

План лекции.

Основные схемы коррекции цифровых систем.

#### 1. Основные схемы коррекции цифровых систем.

При проектировании как цифровых так и непрерывных САУ решаются одни и те же задачи. Обычно имеется процесс, которым нужно управлять таким образом, чтобы его выходные переменные удовлетворяли некоторым заранее установленным требованиям. Традиционная философия проектирования вначале приводит к идее об использовании обратной связи для образования сигнала ошибки между выходным и входным сигналом. Затем выявляется необходимость применения регулятора, который обрабатывал бы сигнал ошибки так, чтобы удовлетворить требованиям, предъявляемые к системе. В цифровых САУ решение этой задачи отличается большой гибкостью и имеет множество вариантов. Проектировщик может использовать аналоговый или цифровой регулятор, варьировать места их включения и т.д.

Рассмотрим традиционные методы синтеза, в основе которых лежит представление о жестко заданной конфигурации системы. При этом проектировщик с самого начала устанавливает конфигурацию системы, включая неизменяемую часть и регулятор.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике конфигурации цифровых САУ.

Цифровая система с аналоговым регулятором (рис.41)

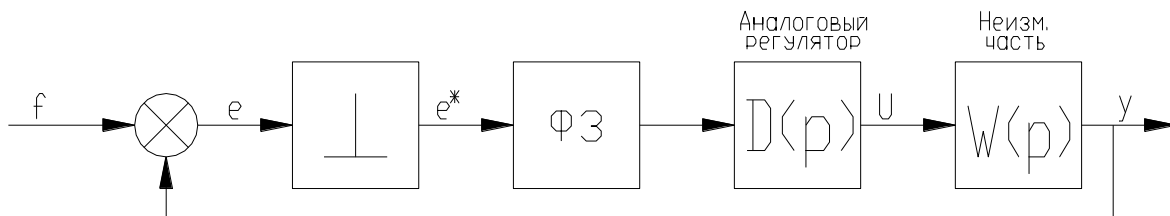


Рис.41

Система может иметь цифровой характер из-за того, что информация на входе системы или в канале обратной связи имеет цифровой характер (цифровые датчики). Аналоговое устройство обрабатывает выходной сигнал цифровой части после его декодирования и сглаживания с помощью фильтра.

Система с цифровым регулятором в прямой цепи (рис.42)

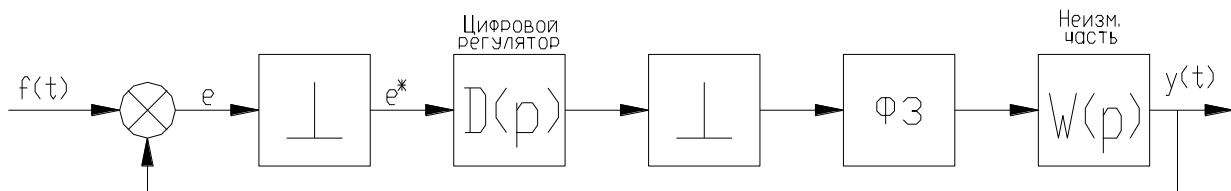


рис.42

Цифровая САУ с аналоговым регулятором в цепи местной ОС

(рис.43)

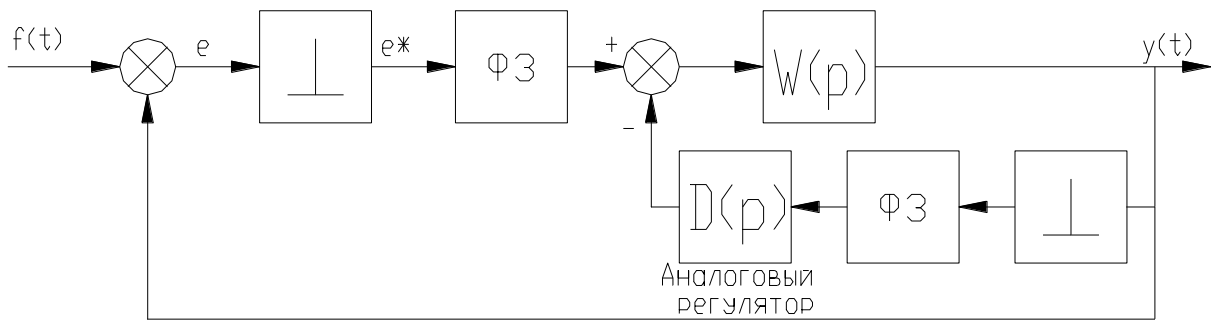


рис.43

Цифровая САУ с цифровым регулятором в цепи местной ОС (рис.44)

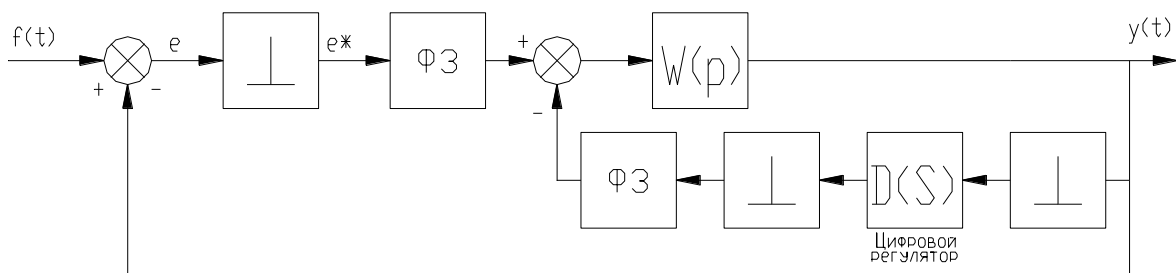


рис.44

Кроме традиционных методов разработаны методы синтеза цифровых САУ в пространстве состояний. Мощным средством синтеза является использование обратной связи по переменным состояния.

Многомерная цифровая САУ с обратной связью по переменным состояния (рис.45)

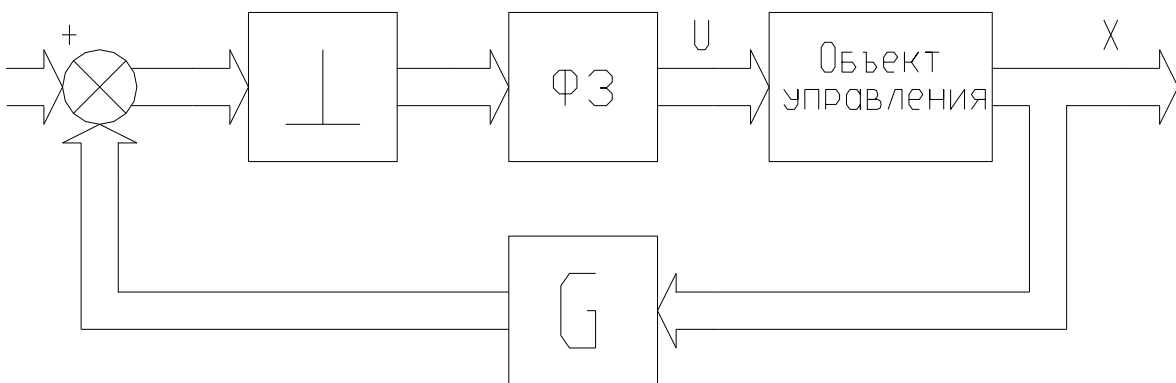


рис.45

При этом предполагается, что все переменные состояния доступны наблюдению. На практике это условие не всегда выполняется, поэтому необходимо либо использовать наблюдателя, либо осуществлять обратную связь по выходу системы.

Цифровая САУ с обратной связью по состоянию и наблюдателем (рис.46)

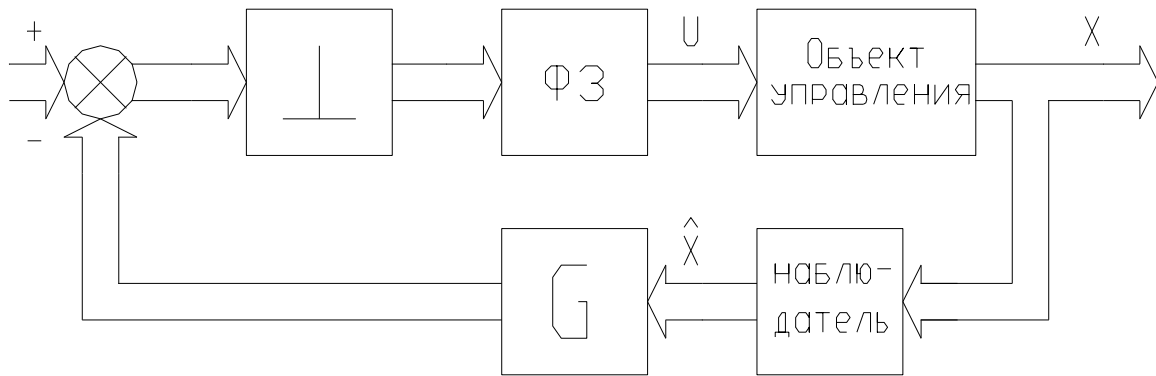


рис.46

Цифровая САУ с ОС по выходу (рис.47)

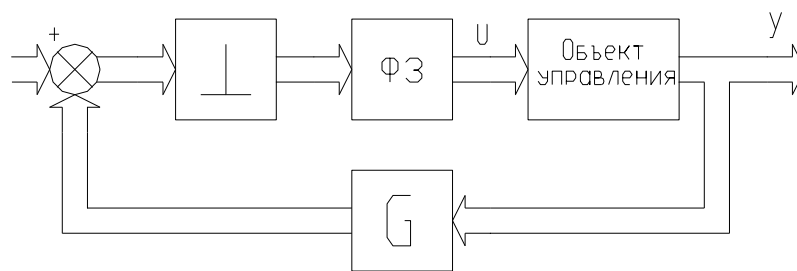


рис.47

здесь  $G$ -матрица коэффициентов обратной связи.

Так как в общем случае выходных переменных меньше, чем переменных состояния, то обратная связь по выходу менее эффективна, чем обратная связь по состоянию.

## Лекция 20.

### Синтез последовательных аналоговых регуляторов.

План лекции.

1. Общая последовательность синтеза.
2. Пример синтеза последовательного аналогового корректирующего устройства.

#### 1. Общая последовательность синтеза.

Рассмотрим синтез цифровой САУ с аналоговым регулятором, включенным последовательно с объектом управления. Z-передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = W_p(z) = \bar{Z} \{ D(p) S(p) W(p) \} = \frac{z-1}{z} \bar{Z} \{ D(p) W(p) / p \}$$

Цель синтеза состоит в определении физически реализуемой передаточной функции  $D(p)$ , обеспечивающей требуемые показатели качества системы управления. Из выражения видно, что передаточная функция  $D(p)$  преобразуется совместно с  $W(p)$  и независимо исследовать эффект, производимый регулятором, нельзя. Синтез последовательного аналогового устройства можно проводить с использованием W-преобразования и ПЧХ цифровой системы. Рассмотрим этот способ

W-преобразование задаваемое формулами

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \quad w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

отображает Z-передаточную функцию  $W(z)$  в новую передаточную функцию  $W^*(w)$ . Для W-передаточной функции  $W^*(w)$  можно построить логарифмические ПЧХ, то есть зависимость амплитуды в децибелах и фазы в градусах от  $\lambda = \text{Im } w$ . По этим характеристикам можно определить запасы устойчивости по амплитуде и фазе, оценить точность системы в установившемся режиме. Переноса эти характеристики на номограмму замыкания можно получить информацию о резонансном пике (показатель колебательности) и частоте, на которой этот пик имеется.

Рассмотрим прямой метод синтеза цифровых СУ с аналоговыми регуляторами, основанный на применении W-преобразования. Применительно к рассмотренной схеме можно предложить следующие основные этапы синтеза:

1. Находим передаточную функцию системы без коррекции

$$W^*(w) = \bar{Z} \{ S(p) W(p) \}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}}$$

2. Полагая  $w=j\lambda$ , строят ЛАФПЧХ для функции  $W^*(w)$

$$H(\lambda) = 20 \lg |W^*(j\lambda)|$$

$$\varphi(\lambda) = \arg W^*(j\lambda)$$



При необходимости переносят эти характеристики на номограмму замыкания. Находят запасы устойчивости, показатель колебательности, оценивают динамические свойства нескорректированной САУ.

3. Если нужна коррекция, то ПФ  $W^*(w)$  умножают на передаточную функцию последовательного регулятора  $D^*(w)$ . Регулятор вводят для изменения формы ЛАФПЧХ. При этом желаемые частотные характеристики формируются аналогично коррекции непрерывных систем, то есть

низкочастотная часть - исходя из требований к точности системы;

среднечастотная часть – с наклоном 20 дБ/дек;

высокочастотная часть с учетом неминимально-фазового звена  $1-j\lambda T/2$

По полученной  $W$ -передаточной функции  $D^*(w)W^*(w)=W_{ск}(w)$  необходимо перейти к выражению  $D(p) W(p) S(p)$ , и выделить передаточную функцию аналогового регулятора  $D(p)$ , так как выражение  $S(p)W(p)$  известно.

При этом ПФ  $D(p)$  должна быть физически реализуемой, то есть:

а) полюсы  $D(p)$  должны лежать в левой полуплоскости плоскости “ $p$ ” и быть простыми и действительными;

б) количество полюсов  $D(p)$  должно превосходить число нулей или быть равным ему. Полюсы  $D(p)$  обусловлены полюсами  $D^*(p)$ . При

$$Re p_i < 0 \quad ; \quad 0 < z_i < 1 \quad \text{и} \quad 0 > w_i > -\frac{2}{T}.$$

Отсюда следует, что  $D^*(w)$  может иметь только простые действительные полюсы в диапазоне  $(-2/T, 0)$ .

4. При известном  $W_{ск}(w)=D^*(w)W^*(w)$  для получения  $D(p) S(p) W(p)$  нужно сделать переход от переменной  $W$  к переменной  $P$ . При этом

$$W_{ск}(w) = \bar{Z} \left\{ D(p) S(p) W(p) \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}} [0,1]$$

но

$$D^*(w) \neq \bar{Z} \left\{ D(p) \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}}.$$

Для нескорректированной системы имеем

$$W(z) = \bar{Z} \{ S(p) W(p) \} = \frac{z-1}{z} \bar{Z} \left\{ \frac{W(p)}{P} \right\}$$

или, переходя к переменной  $w$ ,

$$W^*(z) = \frac{z-1}{z} \bar{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}} = \frac{Tw}{1+Tw/2} \bar{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}}$$

Запишем передаточную функцию скорректированной САУ

$$D^*(w) W^*(w) = W_{ск}(w) = \frac{Tw}{1+Tw/2} \bar{Z} \left\{ D(p) W(p) / p \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}}$$

отсюда

$$\bar{Z} \left\{ \frac{D(p) W(p)}{p} \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}} = \frac{1+Tw/2}{Tw} W_{ск}(w)$$

Передаточная функция  $D(p)W(p)/p$  получается из последнего выражения разложением  $\frac{1+Tw/2}{Tw}W_{CK}(w)$  на сумму элементарных дробей и нахождением соответствующих оригиналов. Для этого используют таблицы.

5. Из найденного выражения  $D(p)W(p)/p$  нетрудно найти  $D(p)$ . Однако во многих случаях  $D(p)$  будет иметь нулей больше, чем полюсов. Чтобы сделать  $D(p)$  физически реализуемой, можно добавить несколько удаленных полюсов в передаточную функцию  $D(p)$ . Эти добавленные полюсы не должны оказывать сколько нибудь заметного влияния на показатели качества системы.

## 2. Пример синтеза последовательного аналогового корректирующего устройства.

Пусть неизменяемая часть системы имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k}{p(1.27p+1)}.$$

Тогда Z-передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид

$$W(z) = \bar{Z} \left\{ \frac{1-e^{-Tp}}{p} \frac{k}{p(Tp+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} \bar{Z} \left\{ \frac{k}{p^2(Tp+1)} \right\} = \frac{1.22(z+0.598)}{(z-1)(z-0.208)}$$

Применяя W-преобразование получим

$$W^*(w) = W(z)_{\substack{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}}} = \frac{1.232(1+0.251w)(1-w)}{w(1+1.525w)}.$$

Соответствующие ЛАФПЧХ изображены на рисунке 48.

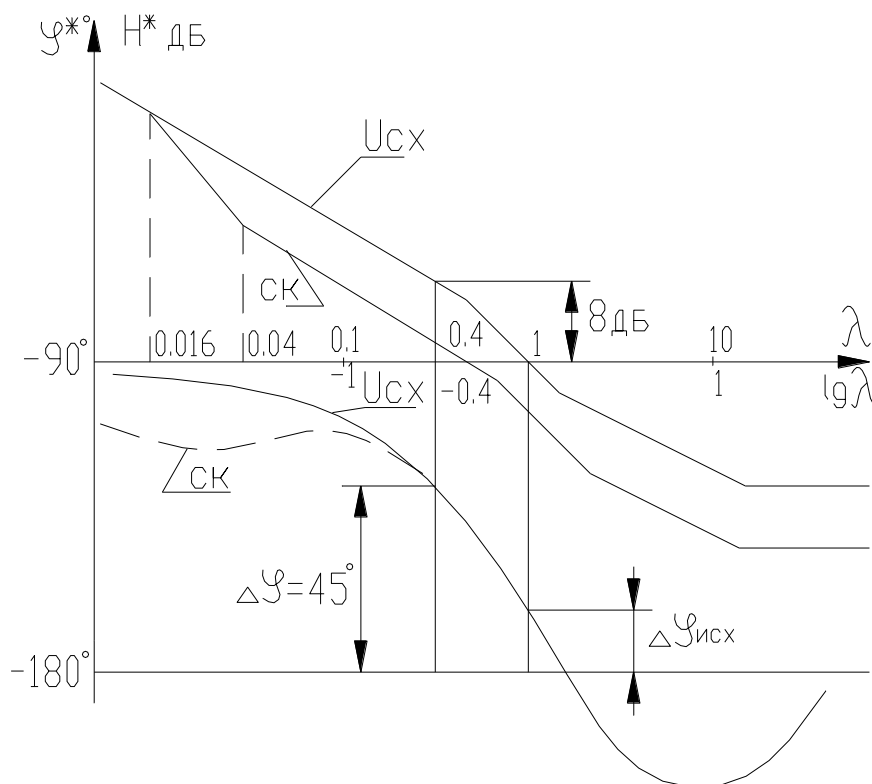


рис.48

Фазовая характеристика пересекает уровень  $-180$  при  $\lambda=1$  и САУ имеет малые запасы устойчивости. Чтобы получить  $\Delta\varphi = 45^\circ$  частоту среза нужно сдвинуть в точку  $\lambda=0.4$ , где  $|W(j\lambda)| = 8\text{дБ}$ . Для этого АЧХ в окрестности  $\lambda=0.4$  нужно опустить на 8 дБ без уменьшения коэффициента передачи системы. Выберем в качестве аналогового регулятора  $D^*(w)$  модель с передаточной функцией:

$$D^*(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} \quad (a < 1).$$

Считая, что частота  $\lambda=0.4$  будет находиться на высокочастотных асимптотах числителя и знаменателя, определим  $a$  из условия требуемого ослабления:

$$20\lg a = -8\text{дБ}$$

и тогда

$$a = 10^{-8/20} = 0.398$$

Чтобы отрицательный фазовый сдвиг, вносимый регулятором, незначительно влиял на ФЧХ в окрестности новой частоты среза значение  $1/a\tau$  должно быть на порядок меньше этой новой частоты, то есть

$$1/a\tau = 0.04.$$

Тогда  $W$ -передаточная функция  $D^*(w)$  примет вид

$$D^*(w) = \frac{1 + 25w}{1 + 62.5w}$$

Таким образом

$$W_{СК}(w) = D^*(w)W^*(w) = \frac{1.232(1 + 0.251w)(1 - w)(1 + 25w)}{w(1 + 1.525w)(1 + 62.5w)}.$$

$Z$ -передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{СК}(z) = W_{СК}(w) \Big|_{w=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.497(z - 0.92)(z + 0.6)}{(z - 0.97)(z - 1)(z - 0.208)}$$

Переходная функция скорректированной САУ представлена на рис.49. Качество переходных процессов в скорректированной системе является хорошим.

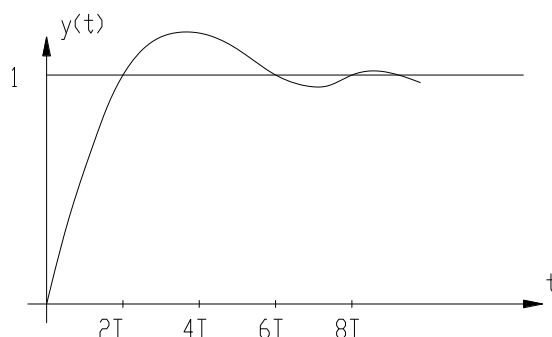


рис. 49

Определим ПФ аналогового регулятора. Имеем

$$\bar{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} D(p) W(p) \right\}_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}} = \frac{1.232(1 + 0.251w)(1 + 25w)(1 - w)}{w(1 + 1.525w)(1 + 62.5w)}$$

причем, учитывая, что в таблицах преобразований всегда присутствует член  $(1 - Tw/2)$ , необходимо раскладывать на элементарные дроби выражение

$$\frac{1.232(1 + 0.25w)(1 + 25w)}{w(1 + 1.525w)(1 + 62.5w)} = 1.23/w - 0.603/(1 + 1.525w) - 46.9/(1 + 62.5w).$$

Каждому слагаемому правой части последнего выражения по таблице подбираем пару

$$1.23/p - 0.603/(1.27p + 1) - 46.9/(1 + 62.5w)$$

и тогда

$$D(p) W(p) = \frac{0.38p^2 + 30.9p + 1.23}{p(1.27p)(62.5p + 1)}$$

откуда

$$D(p) = \frac{0.31p^2 + 25.1p + 1}{62.5p + 1}.$$

Чтобы  $D(p)$  была физически реализуема добавим удаленный полюс  $p = -10$ . В итоге получим:

$$D(p) = \frac{0.31p^2 + 25.1p + 1}{(0.1p + 1)(62.5p + 1)}.$$

## Лекция 21.

### Синтез цифровых САУ с цифровыми регуляторами.

План лекции.

1. Синтез цифровых САУ с цифровыми регуляторами.
2. Некоторые вопросы реализации импульсных фильтров.
3. Реализация цифровых регуляторов в виде импульсных фильтров.
4. Реализация цифровых регуляторов на микроЭВМ.

#### 1. Синтез цифровых САУ с цифровыми регуляторами.

Рассмотрим применение частотного метода синтеза цифровой САУ с цифровым регулятором. По сравнению с аналоговым регулятором, цифровой регулятор в состоянии обеспечить лучшее качество управления.

Другое их преимущество состоит в том, что алгоритм управления может быть легко изменен заменой программы. Структурная схема системы приведена на рисунке:

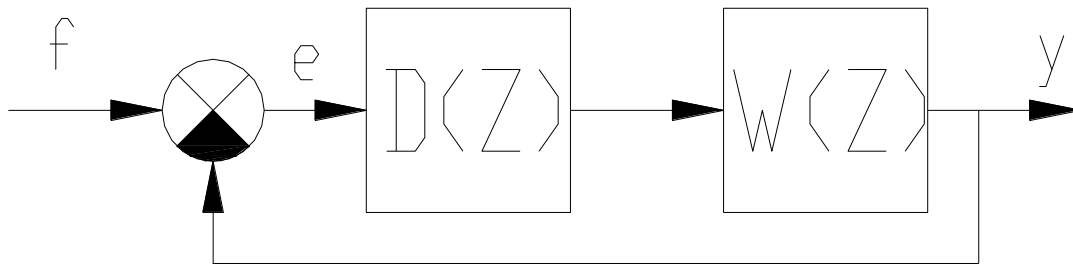


рис. 50

Задача синтеза САУ с цифровым регулятором решается проще, чем задача с аналоговым регулятором, так как передаточная функция регулятора и неизменяемой части разделены ИИЭ и эффект введения регулятора непосредственно учитывается с помощью ЛАФЧХ. Можно сформулировать основные этапы синтеза:

1. Находим передаточную функцию системы без коррекции

$$W^*(w) = \bar{z} \{ S(p)W(p) \}_{z=\frac{1+T/2w}{1-T/2w}}$$

2. Полагая  $W=j\lambda$ , строят ЛАФЧХ для функции  $W^*(w)$

$$H^*(\lambda) = 20 \lg W^*(j\lambda)$$

$$\varphi^*(\lambda) = \arg W^*(j\lambda)$$

При необходимости эти характеристики переносят на номограмму замыкания. По этим кривым определяют показатели качества нескорректированной системы: запасы устойчивости по модулю и фазе, полосу пропускания, показатель колебательности, резонансную частоту, точностные показатели.

3. Если необходима коррекция, то передаточная функция системы с цифровым регулятором в прямой цепи будет иметь вид  $W_{ск}(w) = D^*(w)W^*(w)$ . Передаточная функция цифрового регулятора должна быть такой, чтобы удовлетворялись все требования к качеству системы. При выборе  $D^*(w)$  (при

построении желаемой ЧХ) исходят из тех же соображений, что и в случае аналоговой коррекции.

4. При известной W-передаточной функции цифрового регулятора  $D^*(w)$  находим Z-передаточную функцию:

$$D(z) = D^*(w)_{w=2/T \frac{z-1}{z+1}}$$

Заключительный этап синтеза состоит в реализации Z-передаточной функции  $D(z)$  цифрового регулятора.

## 2. Некоторые вопросы реализации импульсных фильтров.

Существует множество способов реализации цифрового регулятора. Он может представлять собой пассивный RC-фильтр, расположенный между двумя устройствами выборки и хранения. Возможна также реализация цифрового регулятора на основе микроЭВМ. В этом случае необходимо учитывать имеющиеся ограничения на быстродействие ЭВМ и ее объем памяти.

При синтезе цифрового регулятора требуется прежде всего, чтобы передаточная функция регулятора  $D(z)$  была физически реализуемой.

Пусть  $D(z)$ -дробно-рациональная функция

$$D(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}$$

Соответствующее разностное уравнение имеет вид:

$$b_n x[k+n] + \dots + b_1 x[k+1] + b_0 x[k] = a_m e[k+m] + \dots + a_1 e[k+1] + a_0 e[k]$$

Здесь “х”-выходная, “е”-входная переменные цифрового регулятора. В физически реализуемом устройстве входной сигнал в настоящий момент определяется:

— своими прошлыми значениями

— прошлым и настоящим значением входного сигнала и он не может зависеть от будущих значений входа.

Таким образом,  $m \leq n$  и не может быть  $m > n$ , так как при этом выходной сигнал опережает входной.

## 3. Реализация цифровых регуляторов в виде импульсных фильтров.

Импульсный фильтр — это четырехполюсник, расположенный между двумя устройствами выборки и хранения (ИЭ с экстраполятором нулевого порядка). Мы ограничимся рассмотрением наиболее простого последовательного импульсного фильтра.

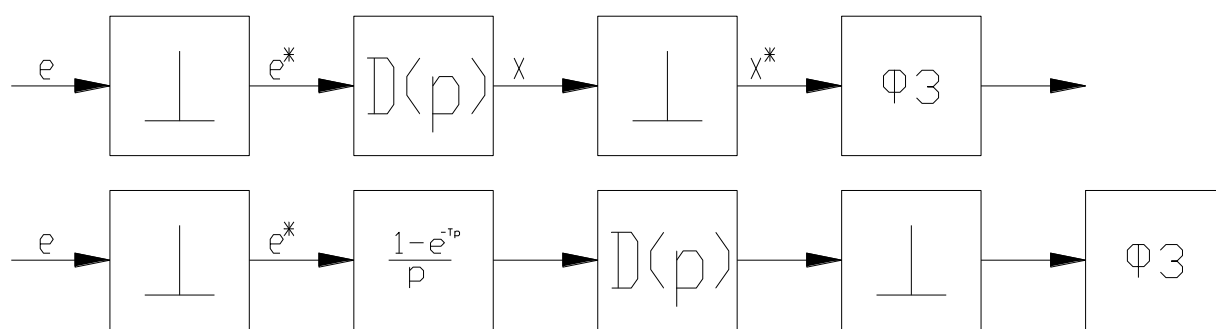


рис.51

имеем

$$D(z) = \bar{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} D(p) \right\} = \frac{z-1}{z} \bar{Z} \{ D(p) / p \}$$

и тогда

$$\bar{Z} \{ D(p) / p \} = \frac{z}{z-1} D(z)$$

Это соотношение позволяет найти передаточную функцию последовательного фильтра на заданной Z-передаточной функции цифрового регулятора  $D(z)$ . Если импульсный фильтр реализуется в виде RC-четырёхполосника, то полюсы  $p_1, p_2, \dots, p_n$  должны быть простыми, действительными, отрицательными. Нули  $D(p)$  могут быть произвольными. Пусть

$$\frac{D(p)}{p} = A_0 / p + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p_1 p_k}$$

$p_1 \dots p_n$  - простые действительные отрицательные числа

Тогда

$$\bar{Z} \{ D(p) / p \} = \frac{A_0(z)}{z-1} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k z}{z - e^{-p_k T}}$$

откуда

$$D(z) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k (z-1)}{z - e^{-p_k T}}$$

Для соответствия  $D(p)$  RC-четырёхполоснику необходимо, чтобы:

- число полюсов  $D(z)$  было не меньше числа нулей этой функции
- нули  $D(z)$  могут быть произвольными
- полюсы  $D(z)$  должны быть действительными, положительными и большими единицы.

Возможна реализация цифрового регулятора в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи, схемы комбинированного типа. Каждая из таких схем имеет свои условия физической реализуемости.

#### 4. Реализация цифровых регуляторов на микроЭВМ.

Это наиболее универсальный способ. Передаточная функция регулятора может быть реализована в виде программы для ЭВМ. Известны три основных метода программирования : прямое, параллельное и

последовательное. С аналитической точки зрения они непосредственно связаны с методами выбора переменных состояния. По существу, при использовании какого-либо из этих способов мы соответствующим способом получаем совокупность уравнений состояния и уравнение для выходной переменной и далее составляем алгоритм решения данных уравнений на ЭВМ. Таким образом, каждый из этих способов программирования отличается системой уравнений, решаемой на ЭВМ.

Рассмотрим передаточную функцию цифрового регулятора. Расчет на ЭВМ ведется в реальном времени. При  $m < n$  значение  $x[kT]$  определяется прошлыми значениями  $x$  и прошлыми значениями  $e$ . При этом быстродействие ЭВМ должно быть таким, чтобы за время  $T$  выполнить все необходимые расчеты. При  $m = n$  быстродействие ЭВМ должно обеспечивать расчет за время, пренебрежимо малое с величиной  $T$  или необходимо учитывать величину запаздывания, вносимую ЭВМ.

Пример:

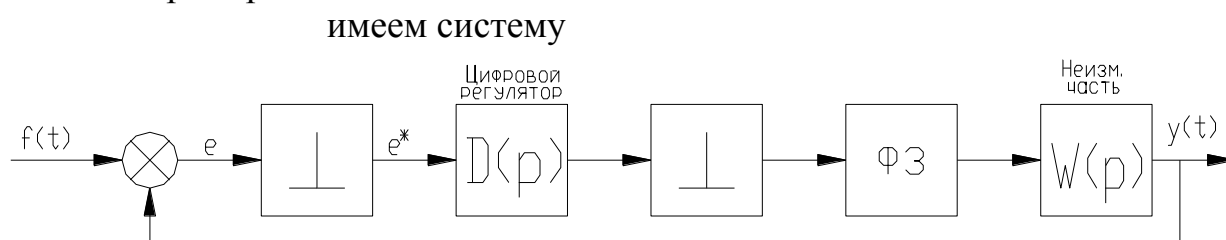


рис.52

пусть

$$W(p) = \frac{k}{p(1 + 0.1p)(1 + 0.5p)}$$

Необходимо синтезировать цифровой регулятор с учетом следующих требований:

— установившаяся ошибка при отработке сигнала  $f(t)=t$   
 $E_{уст} \leq 0.33$

— запас по фазе  $\geq 50$

— показатель колебательности  $M \leq 1.3$

Z-передаточная функция разомкнутой САУ без коррекции имеет вид :

$$W(Z) = \bar{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \frac{k}{p(1 + 0.1p)(1 + 0.5p)} \right\} = \frac{0.13k(z + 1.31)(z + 0.045)}{z(z - 1)(z - 0.368)}$$

В нескорректированной системе в установившемся режиме имеем:

$$f(t)=t;$$

$$y(t)=t-A$$

$$E_{уст}=A$$

$$A \cdot K = 1 \text{ и следовательно } A = 1/K$$

$$A < 0.33 \text{ и тогда } K \geq 3$$

На рис. 52 представлены ХПЧХ данной передаточной функции.

Из характеристик видно, что при  $K=3$  система без коррекции находится практически на границе устойчивости. Запасы почти нулевые. Можно показать, что  $K_{кр}=3.3$ ; для обеспечения запаса устойчивости по фазе 50 при сохранении коэффициента  $K=3$  предлагается использовать регулятор с отставанием по фазе. Регулятор с опережением фазы (ИДФ с преобладанием



дифференцирования в данном случае будет неэффективен из-за резкого завала фазы в районе  $-180^\circ$

Выберем  $D^*(w)$  в виде

$$D^*(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} \quad a < 1$$

Для получения запаса  $\gamma = 50$  частоту среза нужно сдвинуть из  $(.) \lambda = 2.4$  в точку  $\lambda = 0.8$  при условии, что регулятор  $D^*(w)$  не окажет на новой частоте среза существенного влияния на ФЧХ. ЛАФЧХ показывает, что  $H^*(0.8) = 12$  дБ. Следовательно  $D^*(w)$  на частоте 0.8 должен вносить ослабление  $-12$  дБ. Из этих соображений находим “а”

$$20 \lg a = -12 \text{ дБ}; \quad a = 0.25;$$

Чтобы фазовая характеристика  $D^*(w)$  не влияла на фазовый сдвиг САУ при  $\lambda = 0.8$  выберем частоту, соответствующую правому излому  $D^*(w)$  на декаду меньше значения 0.8, таким образом

$$1/a\tau = 0.08 \quad \text{и} \quad 1/\tau = 0.02$$

W-передаточная функция цифрового регулятора принимает вид:

$$D^*(w) = \frac{1 + 12.5w}{1 + 50w}$$

ЛАФЧХ скорректированной системы представлены на рисунке 52. Теперь  $\Delta\varphi = 50^\circ$ ;  $\Delta A = 12$  дБ

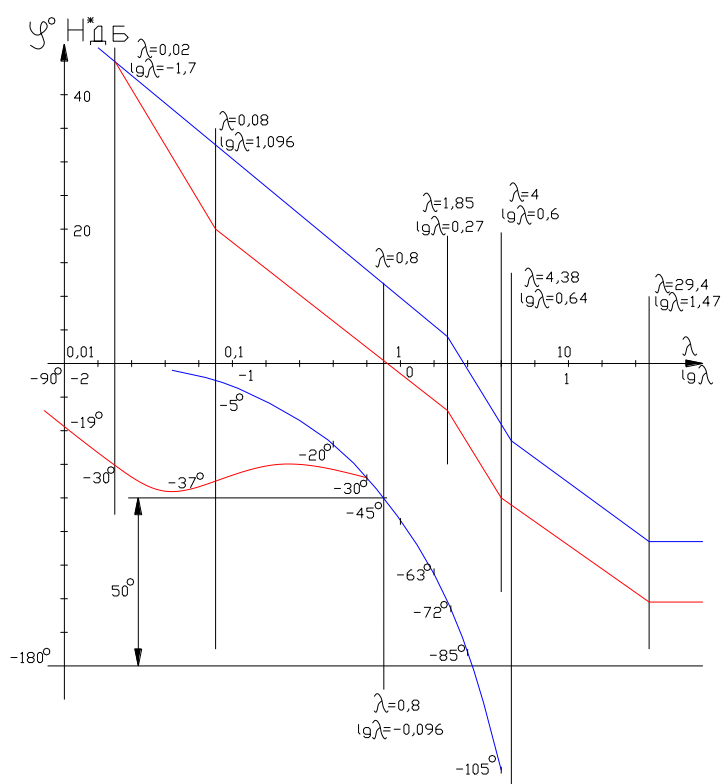


Рис. 52.

Если перенести ЛАФЧХ на номограмму замыкания, то можно видеть, что ранее  $M$  было практически бесконечным, в скорректированной САУ  $M = 1.2$

Передаточная функция  $D(z)$  получается подстановкой в  $D^*(w)$

$$W = 4 \frac{z-1}{z+1}$$

$$D(z) = 0.25 \frac{z-0.96}{z-0.99}$$

Чтобы убедиться в правильности решения задачи синтеза запишем передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)} = \frac{0.098z^3 + 0.0385z^2 - 0.121z - 0.0055}{z^4 - 2.26z^3 + 1.76z^2 - 0.485z - 0.0055}$$

Переходная характеристика представлена на рисунке:

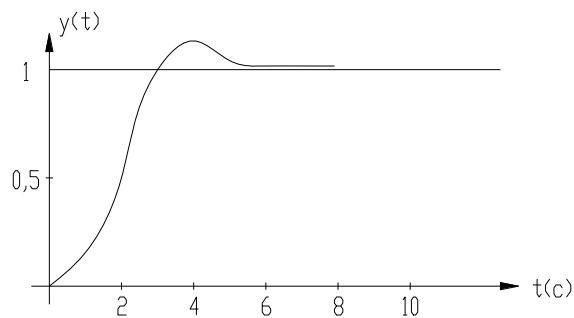


рис.53

Заключительный этап синтеза включает в себя реализацию  $D(z)$  каким-либо из рассмотренных способов.

## Лекция 22.

### Синтез ЦСУ с апериодическим переходным процессом.

План лекции:

1. Общие положения.
2. Пример решения задач синтеза ЦСУ с минимальным временем ПП.
3. Общий случай синтеза системы с апериодическим переходным процессом.

#### 1. Общие положения.

Рассмотренные способы синтеза базировались на основе непрерывных систем, использующих ЛАФЧХ, регуляторы с опережением или отставанием по фазе. Однако структура ЦР отличается большой гибкостью, поэтому можно разработать оригинальные методы, отличные от метода синтеза непрерывных САУ.

Большая часть СУ проектируется так, чтобы переходный процесс в них возможно быстрее достигал требуемого значения. Этот класс систем называется системами с минимальным временем переходных процессов или системами оптимальными по быстродействию. Решение задач синтеза ЦСУ с минимальным временем ПП рассматривается далее.

#### 2. Пример.

Рассмотрим пример:

$$W(p) = \frac{10}{(p+1)(p+2)} \quad T = 0.1c$$

$$W(z) = \bar{Z} \left\{ S(p) \frac{10}{(p+1)(p+2)} \right\} = \frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)}$$

Пусть последовательный цифровой регулятор имеет ПФ

$$D(z) = \frac{(z-0.905)(z-0.819)}{0.0453(z-1)(z+0.904)}$$

Тогда ПФ разомкнутой скорректированной системы

$$W_{ск}(z) = D(z)W(z) = \frac{1}{z-1}$$

То есть введение КУ приводит к компенсации всех нулей и полюсов исходной системы и появлению нового полюса  $Z=1$

Соответствующая ПФ замкнутой системы:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = 1/z$$

Тогда при ступенчатом входном сигнале

$$f[kT] = 1[kT]$$

$$y(z) = \frac{1}{z-1} = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Это означает, что выходной сигнал  $y[kT]$  достигает требуемого значения за один период квантования и с этого момента сохраняет требуемое значение. Перерегулирование нулевое. Однако в общем случае, хотя  $y(kT)$  может иметь малое перерегулирование, действительная реакция  $y(t)$  может сопровождаться импульсами.

Так как  $T \ll$  постоянных времени объекта, можно ожидать, что  $y[kT]$  достаточно хорошо совпадает с  $y(t)$ . Поэтому можно ожидать, что переходная функция достигает установившегося значения через  $T=0.1c$ , а между моментами квантования пульсаций не будет или они будут малы. Такой тип реакции называется апериодическим переходным процессом.

Апериодический переходный процесс можно получить только в случае, когда есть полная компенсация нулей и полюсов. На практике реальное ограничение приводит к тому, что достичь идеального апериодического процесса невозможно.

### 3. Общий случай синтеза системы с апериодическим переходным процессом.

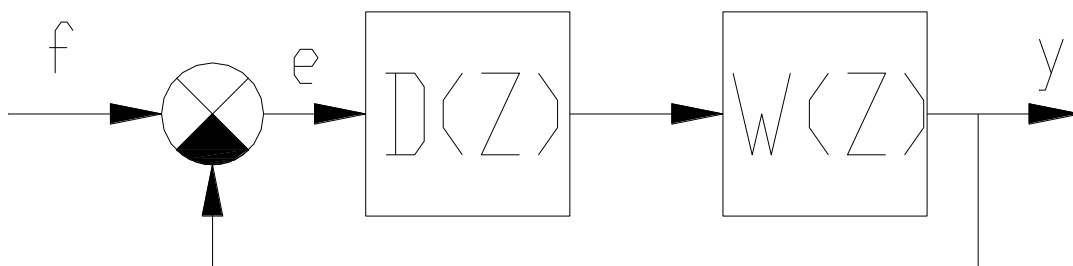


Рис. 54.

Что должно быть в результате синтеза:

1. Нулевая установившаяся ошибка при определении входного сигнала.
2. Длительность переходного процесса должна быть минимальной
3. Цифровой регулятор должен быть физически реализуемым

ПФ замкнутой скорректированной системы имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)} \quad (1)$$

откуда

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \quad (2)$$

при этом

$$E(z) = Z\{e(kT)\} = F(z) - Y(z) = F(z)[1 - \Phi(z)] \quad (3)$$

Будем рассматривать класс входных сигналов, изображение которых имеет вид:

$$F(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^N} \quad (4)$$

где  $N$ -натуральное число

$A(z)$ - многочлен от  $z$

В общем случае выражение (\*) соответствует входному сигналу типа

$$f(t) = t^{N-1}$$

Например, при

$$f(t) = 1(kT); F(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}; N=1; A(z) = 1$$

$$f(t) = kT; F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}; N=2; A(z) = Tz^{-1}$$

С учетом (\*), используя теорему определеном значении найдем установившуюся ошибку

$$E_{уст} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})A(z)[1 - \Phi(z)]}{(1 - z^{-1})^N} \quad (5)$$

Исходя из полученного выражения выясним, что необходимо, чтобы  $E_{уст}=0$ . Так как  $A(1) \neq 0$ , то очевидно, что для этого  $1 - \Phi(z)$  должно содержать скобку  $(1 - z^{-1})^N$  т.е.

$$1 - \Phi(z) = (1 - z^{-1})^N R(z) \quad (6)$$

где  $R(z)$ -полином от  $Z$

Следствием того, что  $1 - \Phi(z)$  представимо в форме (6) будет выражение:

$$\Phi(z) = \frac{z^N - (z-1)^N R(z)}{z^N}$$

Полюсы  $\Phi(z)$  могут возникать как :

— нули знаменателя  $Z=0$

— полюсы числителя, так как  $R(z)$ -многочлен от  $Z$ , то это может быть только  $Z=0$

Таким образом, при сделанных предложениях,  $\Phi(z)$  имеет единственный полюс  $Z=0$ . Характеристическое уравнение имеет вид:

$$z^p = 0 \quad p \geq N$$

Подставив (6) и (4) в (3) получим

$E(z) = A(z)R(z)$  — это  $Z$ -преобразование ошибки.

При этом, так как  $A(z)$  и  $R(z)$  -полиномы от  $Z$ , то  $E(z)$  тоже полином от  $Z$  и следовательно  $E(z)$  имеет конечное число членов при разложении в ряд по степеням  $Z$ . Таким образом, при сделанных предложениях сигнал ошибки сводится к нулю за конечное число периодов квантования.

Таким образом, синтез цифрового регулятора может проводиться так

$$R(z) \rightarrow \Phi(z) \rightarrow D(z)$$

При этом необходимо иметь физически реализуемую ПФ. Это можно проконтролировать при выборе  $\Phi(z)$

$$W(z) = \frac{L(z)}{N(z)}; \quad m = n - l; \quad m \geq 0$$

$$\Phi(z) = \frac{L_1(z)}{N_1(z)}; \quad m_1 = n_1 - l_1;$$

$$D(z) = \frac{N(z)}{L(z)} \frac{L_1}{L_1 - N_1}; \quad n_1 + l - n - l_1 = m_1 - m \geq 0$$

разность степеней числителя и знаменателя не меньше, чем у  $W(z)$ , это необходимо учитывать при определении  $\Phi(z)$ . Вернемся к соотношению(6).  $N$  определяется типом входного сигнала. Тогда

	$N$	$\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^N R(z)$
ступенчатый сигнал	1	$1 - (1 - z^{-1})R(z)$
линейный	2	$1 - (1 - z^{-1})^2 R(z)$
парабола	3	$1 - (1 - z^{-1})^3 R(z)$

Видно, что при этом для ступенчатого сигнала минимальное время установления  $e=0$  составляет один такт, для линейного — 2 такта и т.д.

Рассмотренный алгоритм определения  $D(z)$  имеет ряд особенностей:

1. Если  $W(z)$  имеет нули на единичной окружности или вне ее, то будет нужен неустойчивый регулятор. Этот случай нужно рассматривать отдельно

2. В таблице  $m=1$  и должно быть, чтобы  $m \leq 1$

Таким образом: если есть такие нули или  $m > 1$ , то  $R(z)$  не может быть 1

Пример:

Пусть

$$W(z) = \frac{1}{z^2 - z - 1}; \quad m = 2; \quad f(t) = 1(t)$$

Нельзя взять  $\Phi(z) = 1/z$  из таблицы

Попробуем взять  $\Phi(z) = 1/z^2$ , тогда

$$D(z) = \frac{z^2 - z - 1}{z^2 - 1}$$

При этом

$$R(z) = \frac{1 - \Phi(z)}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1}$$

и процесс заканчивается за два такта.

В общем случае при заданном входе, определяющем  $N$ , минимальное число периодов квантования, составляющих переходный процесс, равно

$$N + m - 1$$

## Лекция 23.

### Реализация аналогового прототипа с помощью цифрового фильтра.

План лекции:

1. Общие положения.
2. Реализация интегрирующих цифровых фильтров.
3. Пример нахождения цифрового фильтра, соответствующего данному прототипу.

#### 1. Общие положения.

Задача реализации аналогового прототипа цифровым фильтром может встретиться при построении непрерывной системы, если корректирующее устройство слишком сложно и трудно реализуется на аналоговых элементах. В этом случае его заменяют эквивалентным цифровым корректирующим устройством. Кроме того, благодаря чисто конструктивным и эксплуатационным преимуществам может оказаться оправданным перевод на цифровое управление уже имеющихся непрерывных систем. И, наконец, возможен вариант, когда систему синтезируют как непрерывную, заранее зная, что корректирующее устройство будет реализовываться в цифровом виде. Такой подход можно оправдать тем, что аппарат синтеза непрерывных САУ более развит, чем аппарат синтеза дискретных систем. Следует отметить, что этот подход в общем случае малоперспективен, так как при этом заведомо нельзя получить результаты лучше, чем в непрерывном варианте.

#### 2. Реализация интегрирующих цифровых фильтров.

Перед решением общей задачи дискретизации аналогового прототипа рассмотрим предварительно реализацию интегрирующих цифровых фильтров. Уравнение непрерывного аналога имеет вид

$$x(t) = \int_0^t f(t) dt + x(0).$$

Применяя для численного интегрирования метод прямоугольников, получим

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt \approx Tf[kT]$$

и тогда

$$x[(k+1)T] = x[kT] + f[kT]T.$$

Разностному уравнению соответствует передаточная функция

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{T}{z-1}. \quad (114)$$

Применяя вместо формулы прямоугольников формулу трапеций, получим

$$x[(k+1)T] = x[kT] + \frac{T}{2}(f[(k+1)T] + f[kT]),$$

при этом

$$W(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (115)$$

Логарифмические частотные характеристики цифрового фильтра (115) представлены на рис.46, откуда видно, что ЛАФЧХ непрерывного и дискретного корректирующих устройств совпадают только в диапазоне низких частот. Отметим, что возможно применение более точных формул численного интегрирования, дающих лучшее приближение к непрерывному звену,

Рассмотрим задачу реализации непрерывного корректирующего устройства, заданного своей передаточной функцией

$$D(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

с помощью цифрового фильтра. Один из способов ее решения [5] состоит в замене непрерывного интегратора цифровым с передаточной функцией (114) или (115). При этом передаточную функцию  $D(p)$  записывают по отрицательным степеням  $P$ , т.е.

$$D(p) = \frac{1}{p^{n-m}} \frac{b_m + b_{m-1} p^{-1} + \dots + b_0 p^{-m}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_0 p^{-n}}.$$

Передаточная функция цифрового фильтра находится с помощью перехода  $P^{-e} \leftrightarrow f(z)$ , где  $f(z)$  - определенная функция, соответствующая тому или иному способу численного интегрирования. Например, при использовании формулы (115)

$$\frac{1}{P^e} \leftrightarrow \frac{T^e}{2^e} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^e,$$

и тогда

$$D(z) = \left[ \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \right]^{n-m} \frac{\sum_{i=0}^m b_i \left[ \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \right]^{m-i}}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left[ \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \right]^{n-j}}.$$

Возможно применение других форм  $f(z)$ , при которых цифровой фильтр будет иметь иную  $z$ -передаточную функцию  $D(z)$ .

### 3. Пример нахождения цифрового фильтра, соответствующего данному прототипу.

Пример. Пусть

$$D(p) = \frac{0.4p+1}{0.1p+1}.$$

Найдем цифровой фильтр, соответствующий данному прототипу. Имеем



$$D(p) = \frac{0.4 + p^{-1}}{0.1 + p^{-1}}.$$

Используя соответствие (115), получим

$$D(z) = \frac{0.4 + \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}}{0.1 + \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}}$$

или

$$D(z) = \frac{(T+0.8)z + T - 0.8}{(T+0.2)z + T - 0.2},$$

где  $T$  - период дискретности цифрового фильтра.

## Лекция 24.

### Синтез алгоритма управления на основе решения обратной задачи динамики

План лекции:

1. Обзор задач динамики.
2. Задача аналитического построения замкнутой системы программного движения.
3. Синтез алгоритма управления на примере системы третьего порядка.

#### 1. Обзор задач динамики.

Одной из основных задач динамики механических систем является задача определения управляющих сил по заданным свойствам движения. Задачи такого рода с различными их видоизменениями называют обратными задачами динамики. Обратные задачи динамики всегда привлекали к себе внимание, так как имеют широкие прикладные возможности.

Из возможных постановок обратных задач динамики рассмотрим задачу аналитического построения программного движения. При этом необходимо построить такую физическую систему, чтобы процессы в ней удовлетворяли заранее заданным свойствам. Назовем заданные свойства процесса программой движения, а весь процесс - программным движением рассматриваемой системы.

В конечном счете программное движение осуществляется действием на систему управляющих сил. Построение уравнений движения управляющих устройств составляет задачу аналитического построения замкнутых систем программного движения. При этом в задачу аналитического построения систем программного движения включаются как задачи установления осуществимости самой программы, так и задачи обеспечения устойчивости движения при наличии начальных отклонений переменных системы от их заданных значений.

#### 2. Задача аналитического построения замкнутой системы программного движения.

В общем случае задачу аналитического построения замкнутой системы программного движения можно поставить таким образом

Уравнения движения объекта заданы и имеют вид

$$\dot{x} = f(x, U, t)$$

где  $x$  - вектор состояния системы,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ;

$U$  - вектор управления  $U = (U_1, \dots, U_m)$ . Требуется построить уравнение для вектора  $U$  в виде

$$\dot{U} = V(U, x, t)$$

так, чтобы программное движение с заданными свойствами являлось одним из возможных движений системы и было устойчивым по отношению к этим свойствам при наличии отклонений от них.

Рассмотрим класс следящих систем автоматического управления. В их задачу входит возможно более точное воспроизведение некоторого, обычно заранее неизвестного, входного сигнала. Задача формирования управления следящей системой может быть поставлена как задача аналитического построения системы программного движения. В литературе приведен ряд методов управления на основе решения обратной задачи динамики, но в них обычно рассматривается только свободное движение. Алгоритм управления, формируемый на основе решения обратной задачи динамики, позволяет обеспечить высокое качество слежения за входным сигналом общего вида. Алгоритм реализуется с помощью ЦВУ, входящего в контур управления.

### 3. Синтез алгоритма управления на примере системы третьего порядка.

Рассмотрим синтез алгоритма управления на примере системы третьего порядка. Обобщение алгоритма на системы более высокого порядка не представляет сложности.

Пусть дифференциальное уравнение объекта имеет вид

$$\ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 x + a_0 x = bU \quad (116)$$

где  $x(t)$  - скаляр - выходная переменная;  $U$  - управление.

На вход системы поступает сигнал  $f(t)$ , который должен воспроизводиться переменной  $x(t)$ . Поставим задачу формирования управления  $U = u(f(t), x(t))$

минимизирующего ошибку системы.

Введем интервал квантования  $T$  и будем стремиться к тому, чтобы в моменты времени  $t = kT, k=0,1,\dots$  выходной сигнал и его первая производная совпадали с входным сигналом и его первой производной. При этом управление строится отдельно на каждом временном отрезке  $kT < t \leq (k+1)T$ . Пусть при  $t = kT$  известны величины  $x[kT], \dot{x}[kT]$ . Предположим далее, что можно измерить или вычислить производную  $\dot{x}[kT]$ , а также, что в момент  $t = kT$  возможно экстраполировать функцию  $f(t)$  и оценить ее значение и значение ее первой производной при  $t = (k+1)T$ . Обозначим эти оценки  $\hat{f}[(k+1)T]$  и  $\hat{\dot{f}}[(k+1)T]$ . Поставим задачу определения управления  $U(t)$  на отрезке  $kT < t \leq (k+1)T$ , переводящего изображающую точку на плоскости  $\begin{pmatrix} x, \dot{x} \end{pmatrix}$  из начального положения  $\begin{pmatrix} x[kT], \dot{x}[kT] \end{pmatrix}$ , в конечное положение  $\begin{pmatrix} \hat{f}[(k+1)T], \hat{\dot{f}}[(k+1)T] \end{pmatrix}$ .

Задачу определения управления будем решать как обратную задачу динамики, т.е. задавшись траекторией на плоскости  $\begin{pmatrix} x, \dot{x} \end{pmatrix}$  соединяющей

имеющуюся начальную и желаемую конечную точки, найдем управление  $U$  при  $kT < t \leq (k+1)T$ . Зададимся следующим законом изменения координаты  $x(t)$ :

$$x(t) = C_3 t^3 + C_2 t^2 + C_1 t + C_0, \quad (117)$$

где время  $t$  отсчитывается заново для каждого отрезка. Коэффициенты  $C_0 - C_3$  постоянны на каждом временном отрезке и изменяются при его смене.

Определим коэффициенты  $C_0 - C_3$ , исходя из начальных величин  $x[kT], \dot{x}[kT]$  и желаемых конечных величин  $\hat{f}[(k+1)T], \hat{\dot{f}}[(k+1)T]$ . Найдем производную  $\dot{x}(t)$  согласно формуле (117):

$$\dot{x}(t) = 3C_3 t^2 + 2C_2 t + C_1. \quad (118)$$

Тогда система уравнений для определения коэффициентов  $C_0 - C_3$  примет вид

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= x[kT]; \\ C_1 &= \dot{x}[kT]; \\ C_3 T^3 + C_2 T^2 + C_1 T + C_0 &= \hat{f}[(k+1)T]; \\ 3C_3 T^2 + 2C_2 T + C_1 &= \hat{\dot{f}}[(k+1)T] \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Система (119) всегда имеет единственное решение

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= x[kT], C_1 = \dot{x}[kT], \\ C_2 &= \frac{3}{T^2} \left[ \hat{f}[(k+1)T] - x[kT] \right] - \frac{1}{T} \left[ \hat{\dot{f}}[(k+1)T] + 2\dot{x}[kT] \right], \\ C_3 &= \frac{2}{T^3} \left[ \hat{f}[(k+1)T] - x[kT] \right] - \frac{1}{T^2} \left[ \hat{\dot{f}}[(k+1)T] + \dot{x}[kT] \right]. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Найдем высшие производные по  $t$  выражения (117):

$$\ddot{x}(t) = 6C_3 t + 2C_2, \quad \ddot{\dot{x}}(t) = 6C_3. \quad (121)$$

Подставляя выражения (117), (118), (121) с коэффициентами (120) в уравнение объекта (116), найдем

$$U(t) = \frac{1}{b} [a_0 C_3 t^3 + (3C_3 a_1 + C_2 a_0) t^2 + (6C_3 a_2 + 2C_2 a_1 + a_0 C_1) t + 6C_3 + 2a_2 C_2 + a_1 C_1 + a_0 C_0].$$

Здесь управление выражается в явном виде, так как уравнение (116) не содержит производных  $u(t)$ .

Данный алгоритм может быть реализован при использовании ЭВМ в контуре управления. При этом  $U(t)$  может реализовываться либо с помощью аналогового устройства с переменными коэффициентами, либо с помощью цифрового вычислительного устройства, работающего с периодом

дискретности  $T_1$ , значительно меньшим  $T$ . Оценки  $\hat{f}[(k+1)T]$ ,  $\hat{\dot{f}}[(k+1)T]$  в простейшем случае могут получаться с помощью конечных разностей решетчатой функции  $f[kT]$ . Следует отметить, что даже при идеальной экстраполяции система будет следить за входным сигналом с ошибкой. Это объясняется тем, что в системе третьего порядка для однозначного задания движения необходимо знать еще и начальную величину ускорения  $\ddot{x}(t)$ . Здесь же контролируются только координата и ее первая производная. Процесс (117) возможен при условии

$$\ddot{x}[kT] = 2C_2.$$

В противном случае реальный процесс  $x(t)$  отличается от определяемого по формуле (117) и в точку  $(\hat{f}[(k+1)T], \hat{\dot{f}}[(k+1)T])$  система попадет с некоторой ошибкой, к которой еще добавится ошибка экстраполяции. Однако приведенный алгоритм не накапливает ошибки, более того, возникшую на каком-либо этапе ошибку он постарается исправить на следующем шаге. При необходимости можно включить в число контролируемых параметров и вторую производную  $\ddot{x}(t)$ .