Лекция 1

1.Введение

1.1.Предмет теории автоматического управления

1.2.Основные понятия и определения

2.Динамические характеристики линейных систем

2.1.Дифференциальные уравнения

2.2.Составление математической модели

1.Введение

ТАУ изучается во всех технических вузах мира.

1.1.Предмет ТАУ

ТАУ- это научная дисциплина, которая возникла сравнительно недавно, хотя отдельные устройства, работающие без участия человека известны с глубокой древности.

В результате первого промышленного переворота в Европе в конце XIII века появились регуляторы (1765 г.- регулятор уровня Ползунова, 1784 г. – регулятор скорости паровой машины Д.Уатта).

Они были призваны стабилизировать работу технических устройств, на которые действую внешние факторы из окружающей среды.

Очень эффективным оказалось использование отрицательной обратной связи (ООС), которую в XIX веке вводили ещё полуинтуитивно и без соответствующих расчетов, что не всегда давало нужный эффект. Часто вместо предполагаемого улучшения работы применение регуляторов с ООС приводило неожиданным техническим явлениям, неустойчивости, генерации новых движений.

Для изучения этих явлений потребовались соответствующие методы, которые объясняли эти необычные свойства и позволяли усмотреть общие закономерности поведения регуляторов. Их основы более изложены в появившихся в конце XIX века первых работах “о регуляторах ” английского математика-механика Д.Максвелла (1866 г.) и русского механика И.В. Вышнеградского (1876-1877 гг.).

Активное развитие новой науки началось с появлением электротехнических систем (электромашинных и систем радиоавтоматики).

Впоследствии оказалось, что методы ТАУ позволили объяснить работу объектов различной физической природы: в механике, энергетике, радио- и электротехнике, т.е. везде, где можно усмотреть обратную связь (ОС). Все методы объединяет одна общая задача: обеспечить необходимую точность и удовлетворительное качество переходных процессов (ПП).

На сегодня ТАУ - сложившаяся научная дисциплина, которую изучают во всех технических вузах мира. ТАУ имеет свой аналитический аппарат , в развитие которого большой вклад внесли русские ученые-математики: Ляпунов А.М., Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. и др.

Предметом изучения ТАУ являются свойства, методы расчета и конструирования систем автоматики с ОС. Как и любая теория ТАУ имеет дело не с реальными инженерными конструкциями, а с их моделями.

ТАУ использует аппарат дифференциальных уравнений (ДУ), на языке которых сформированы основные законы механики и физике макромира.

Предмет ТАУ – свойства моделей систем автоматики, которые представлены дифференциальными уравнениями, а также их различными преобразованиями и интерпретациями.

1.2.Основные понятия и определения

Объект управления – техническое устройство или процесс, поведение которого нас не устраивает по каким-либо причинам.

Управление – процесс воздействия на объект управления с целью изменения его поведения нужным образом.

Регулирование - частный случай управления, целью которого является приведение объекта к заданному состоянию.

Автоматический процесс – процесс, который совершается без участия человека.

Система - совокупность элементов, объеденных общим режимом функционирования. При этом элементом можно называть любое техническое устройство.

Динамическая система – система, процессы в которой изменяются с течением времени в силу собственных свойств.

Система автоматического управления (САУ) – динамическая система, которая работает без участия человека.

Теория автоматического управления (ТАУ) - научно-техническая дисциплина, в рамках которой изучаются свойства система автоматического управления, разрабатываются принципы расчета и построения таких систем.

Основные элементами САУ (рис.1.1) являются:

- объект управления (ОУ);

- управляющее устройство или регулятор (Р), который сравнивается выход УО с желаемым и в зависимости от результата вырабатывает управляющий сигнал на объект.

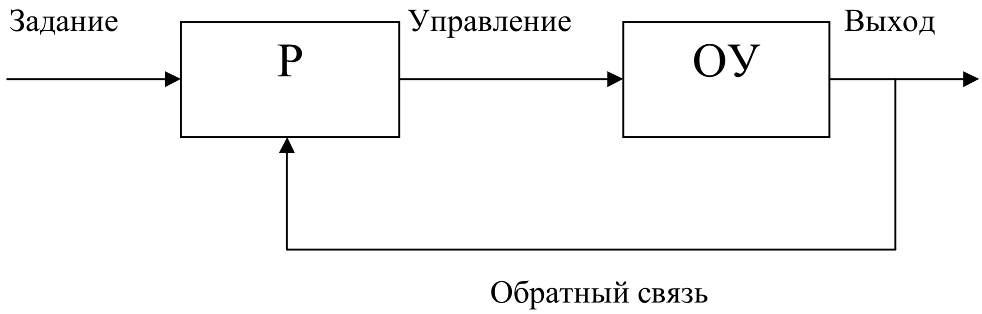


Рис.1.1. Функциональная схема замкнутой системы.

Рассмотрим подробнее объект управления (рис.1.2) и выделим характеризующие его переменные.

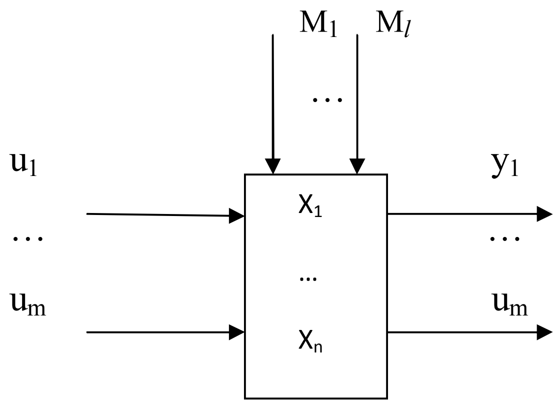


Рис.1.2 Функциональная схема объекта управления

К таким переменным относятся:

- управляющие воздействия ($u_1, \dots, u_m$) – это такие переменные, с помощью которых можно влиять на поведение объекта;

- выходные воздействия ($y_1, \dots, y_p$) – доступные измерению величины, которые отражают реакцию объекта на управляющие воздействия;

- <u>переменные состояния</u> ($x_1, \dots, x_n$) – переменные и часто недоступные измерению переменные, которые определяют состояние объекта в каждый момент времени ($n \geq m$);

- <u>возмущающие воздействия</u> ($M_1, \dots, M_l$) – отражают случайные воздействия окружающей среды на ОУ. Требование парирования их влияния приводит к необходимости создания САУ.

- <u>входные воздействия</u> ($V_1, \dots, V_p$) – физические величины, которые задают нужные режимы работы.

Все переменные удобно задавать в векторной форме:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_l \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_p \end{bmatrix}.$$

Соотношение размерностей:

1) $\dim y = \dim V$ ($p = p$)

2) $\dim y \leq \dim u$ ($m \geq p$)

3) $\dim x \geq \dim y$ ($n \geq m$)

4) $\dim M$ – любое

Если $\dim y = 1$ - одноканальная (одномерная) САУ.

Если $\dim y > 0$ – многоканальные (многомерная) САУ.

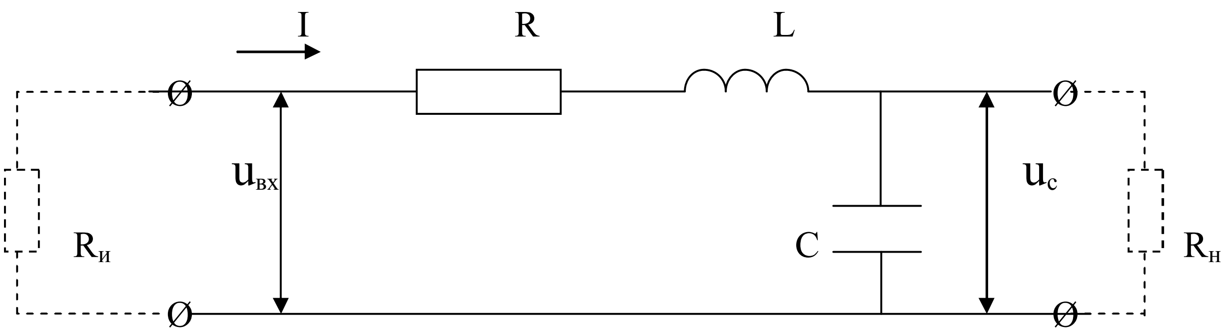
2.Динамические характеристики линейных систем

<u>Динамической характеристикой</u> (математической моделью) системы называется любое соотношение, заданное аналитически, графически или в виде таблицы, которое позволяет оценить её поведение во времени.

Динамическая характеристика дает возможность исследовать поведение системы, т.е. рассчитать для неё переходные процессы.

2.1.Дифференциальные уравнения

<u>Пример:</u> Получим динамическую характеристику RLS-цепочка



Считаем $R_и=0$

$R_н=\infty$

Выберем: $u = u_{вх}$, $y = u_c$, $M = 0$

$x_1 = I$, $x_2 = u_c = y$.

По второму закону Кирхгофа:

$$u_{вх} = u_R + u_н + u_c = RI + L\frac{dI}{dt} + u_c$$

подставляем:

$$u = Rx_1 + L\dot{x}_1 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}(-Rx_1 - x_2 + u_c)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{u}_c = \left(\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau + u_c(0)\right) = \frac{I}{C} = \frac{1}{C}x_1$$

Получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{c} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} u$$

$$\dot{x} \quad = \quad A \quad\quad x \quad + B\,u$$

$$y = \{0;1\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$y = \quad C \quad x$$

Динамическая характеристика системы в векторно-матричной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\,, \ x \epsilon R^n & \text{– дифференциальное уравнение состояния} \\ y = Cx, \ (y, u) \epsilon R^m & \text{– уравнение выхода} \end{cases}$$

В общем виде динамические характеристики системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x \epsilon R^n \\ y = g(t, x), & y, u \in R^m \end{cases}$$

Линейной называют такую систему управления, графики, описывающие которую представляют прямую линию, или в многомерном случае (плоскость или гиперплоскость).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\,, & x \epsilon R^n \\ y = Cx, & (y, u) \epsilon R^m \end{cases}$$

dim A = n x n , dim B = n x m , dim C = m x n

Если элементы матриц A,B,C постоянны, то говорят, что система стационарная или с постоянными параметрами.

Если хотя бы 1 из элементов матриц A,B,C зависит от времени t, то говорят о системе с ……………….. параметрами.

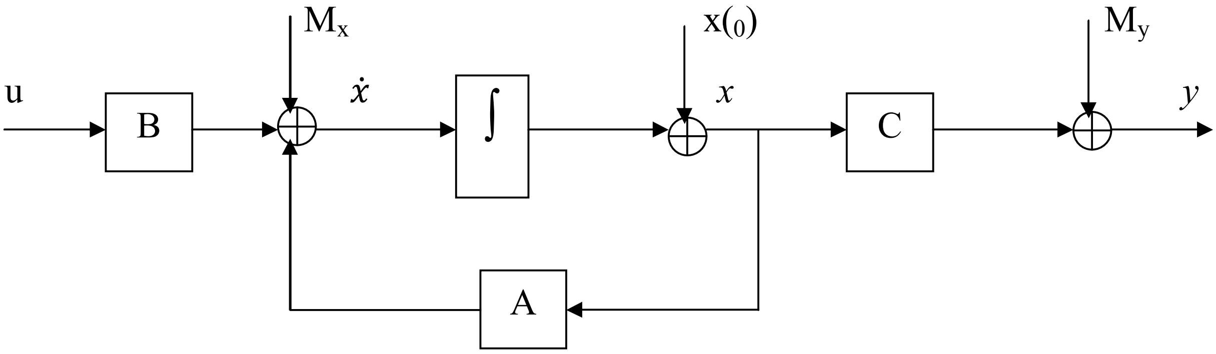
$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + B(t)u\,, & x \epsilon R^n \\ y = C(t)x, & (y, u) \epsilon R^m \end{cases}$$

Система с возможными воздействиями

$$\begin{cases} \dot{X} = Ax + Bu + m_x(t) \\ y = Cx + m_y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t \{Ax + Bu + M_x\}\, d\tau \\ y = Cx + M_y \end{cases}$$

Графическое изображение модели управления

$$\begin{cases} x(\mathrm{t}) = x(0) + \int\limits_0^{\mathrm{t}} \{\mathrm{A}x + \mathrm{Bu}\}\ \mathrm{d}\tau \\ y = \ Cx \end{cases}$$



Мы будем рассматривать линейную САУ с постоянными параметрами в отсутствии возможного воздействия.

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{Bu}\,,\ \ x \epsilon R^n & (2.1) \\ y = \ Cx,\ (y, \mathrm{u}) \epsilon \mathrm{R^m} & (2.2) \end{cases}$$

Для описания одноканального объекта (dim y≠1) n-го порядка используют скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(\mathrm{n})} + \mathrm{a_n}\, y^{(\mathrm{n-1})} + \ldots + \mathrm{a_2}\, \dot{y} + \mathrm{a_1} y = b\mathrm{u} \qquad (2.3)$$

(2.3) → (2.1) и (2.2)

Наиболее простое каноническое описание получается, когда в качестве переменных состоянии выбирается выходная переменная y и её производные до (n-1) включительно

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \ldots, \quad x_{\mathrm{n}} = y^{(\mathrm{n-1})}.$$

Тогда, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \ldots \\ \dot{x_n} = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + b\mathrm{u} \\ y = x_1 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Которая соответствует векторно-матричным уравнениям (2.1) и (2.2). Здесь матрицы А,В и С имеют вид

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix}, \qquad C=[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \ ,$$

причем их размерности следующие: dim A = n x n, dim B = n x 1, dim C = 1 x n

Следует отметить, что переход к описанию (2.1) и (2.2) не является однозначным: для одного объекта можно выбрать множество наборов переменных состояния. Важно, чтобы они были линейно-независимыми. При этом каждой совокупности переменных состояния будут соответствовать свои матрицы объекта А, В и С.

<u>Пример 2.1</u>

Записать уравнение состояния одноканального объекта, модель которого имеет вид

$$\ddot{y} + 3\,\dot{y} + y \ = \ \mathrm{u}$$

Рассмотрим два варианта переменных состояния.

1.Если в качестве переменных состояния выбрать выходную величину и её производную ($x_1=y$, $x_2=\dot{y}$), то получим канонические уравнения состояния и матрицы объекта типа (2.4):

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 - 3x_2 \ + \mathrm{u} \\ y = x_1 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 0].$$

2.Выбирая новые переменные ($x_1=y$, $x_2=\dot{y} + 3y$), получим уравнения состояния и матрицы объекта

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -3x_2 + \ x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + \mathrm{u} \\ y = x_1 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 0].$$

В общем случае одноканальный объект может описываться дифференциальным уравнением вида

$$y^{(n)} + a_n\, y^{(n+1)} + \dots + a_2\, \dot{y} + a_1 y = b_m\, \mathrm{u}^{(m)} + \dots + b_0\, \mathrm{u}, \quad n \geq m. \qquad (2.5)$$

Выбрав соответствующие переменные состояния, от описания (2.5) также можно перейти к векторно-матричным уравнениям типа (2.1), (2.2).

2.2.Составление математической модели

В ТАУ рассматриваются не физические системы управления, а их математические модели. Процедуру получения математической модели объекта можно разбить на следующие этапы:

Составление гносеологической (мысленной) модели объекта. Исходя из технического задания и изучения режимов работы объекта инженер создаёт приближенную мысленную модель, которая в дальнейшем уточняется и приобретает вид математической модели.

Определение независимых переменных, которые характеризуют объект, и уточнение их размерностей. При этом число управляющих воздействий не может быть меньше числа выходных переменных ($\dim \mathrm{u} \geq \dim y$). Размерность переменных состояния не может быть меньше размерности выходных переменных ($\dim x \geq \dim y$). Размерность возмущающих воздействий M может быть произвольной и никак не связана с размерностью y, x, u.

Запись физических законов, в силу которых развиваются процессы в объекте.

Приведение уравнений объекта к удобному с точки зрения ТАУ вида.

Лекция 2

2.Динамические характеристики линейных систем

2.1.Дифференциальные уравнения (продолжение)

Кроме представления в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{Bu}\,, \; x\epsilon R^n & (2.1) \\ \quad y = \; Cx, \; (y, \mathrm{u})\epsilon \mathrm{R^m} & (2.2) \end{cases}$$

Для описания одноканального объекта (dim y≠1) n-го порядка используют скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \dot{y} + a_1 y = b\mathrm{u} \qquad (2.3)$$

которое может быть приведено к виду (2.1) и (2.2) после соответствующего выбора линейно-независимых переменных состояния. Их число всегда равно порядку объекта n.

Наиболее простое каноническое описание получается, когда в качестве переменных состоянии выбирается выходная переменная y и её производные до (n-1) включительно

$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$

Тогда, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \ldots \\ \dot{x_n} = -a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n + b\mathrm{u} \\ y = x_1 \end{cases} \qquad (2.4)$$

(2.4) соответствует (2.1) и (2.2)

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_1 & -a_2 & \ldots - & a_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ b \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{C}= [1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]\,,$$

причем их размерности следующие: dim A = n x n, dim B = n x 1, dim C = 1 x n

Переход к описанию (2.1) и (2.2) не является однозначным: для одного объекта можно выбрать множество наборов переменных состояния. Важно, чтобы они были линейно-независимыми. При этом каждой совокупности переменных состояния будут соответствовать свои матрицы объекта A, B и C.

2.2.Составление математической модели

В ТАУ рассматриваются не физические системы управления, а их математические модели. Процедуру получения математической модели объекта можно разбить на следующие этапы:

Составление гносеологической (мысленной) модели объекта. Исходя из технического задания и изучения режимов работы объекта инженер создаёт приближенную мысленную модель, которая в дальнейшем уточняется и приобретает вид математической модели.

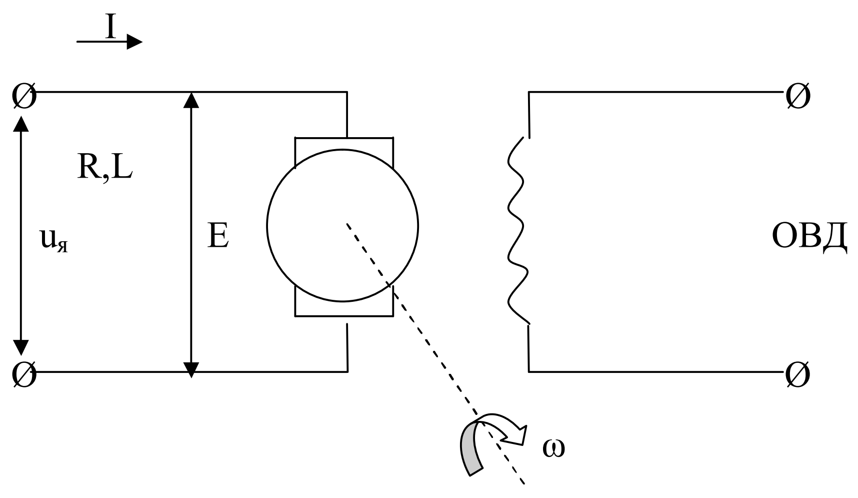
Определение независимых переменных, которые характеризуют объект, и уточнение их размерностей. При этом число управляющих воздействий не может быть меньше числа выходных переменных ($\dim \mathrm{u} \geq \dim y$). Размерность переменных состояния не может быть меньше размерности выходных переменных ($\dim x \geq \dim y$). Размерность возмущающих воздействий M может быть произвольной и никак не связана с размерностью y, x, u.

Запись физических законов, в силу которых развиваются процессы в объекте.

Приведение уравнений объекта к удобному с точки зрения ТАУ вида.

Пример 2.4

Математическая модель двигателя постоянного тока



Основные уравнения, характеризующие процессы в двигателе:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\mathrm{I}}{dt} + \mathrm{RI} + \mathrm{E} = \mathrm{u}_{я} & \text{– уравнение электрического равновесия якорной цепи} \\ J\dfrac{d\omega}{dt} = \mathrm{M}_{д} - \mathrm{M}_{с} & \text{– уравнение равновесия моментов на валу двигателя} \end{cases}$$

С достаточной степенью точности во многих случаях можно считать, что

$E = c_1\,\omega$, $M_д = c_2 I$, $M_c = M_c(t)$, где c_i=const, $i = \overline{1,2}$.

В результате уравнения двигателя принимают вид

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + RI + c_1\omega = u_я \\ J\,\dfrac{d\omega}{dt} = c_2 I - M_c \end{cases}$$

Введём обозначения:

$u = U_я$ –управление;

$x_1 = \omega$, $x_2 = I$ – переменные состояния;

$M = M_c$ - возмущение.

Запишем уравнения двигателя в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \frac{c_2}{J}\,x_2 - \frac{M}{J} \\ \dot{x_2} = -\frac{c_1}{L}\,x_1 - \frac{R}{L}\,x_2 + \frac{1}{L}u \\ y = x_1 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{c_2}{J} \\ -\frac{c_1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad 0].$$

2.3.Переходная характеристика

Эта динамическая характеристика используется для описания одноканальных объектов:

$$y^{(n)} + a_n\, y^{(n+1)} + \ldots + a_2\,\dot{y} + a_1 y = b_m\, u^{(m)} + \ldots + b_0\, u, \quad n \geq m. \quad (2.5)$$

с нулевыми начальными условиями

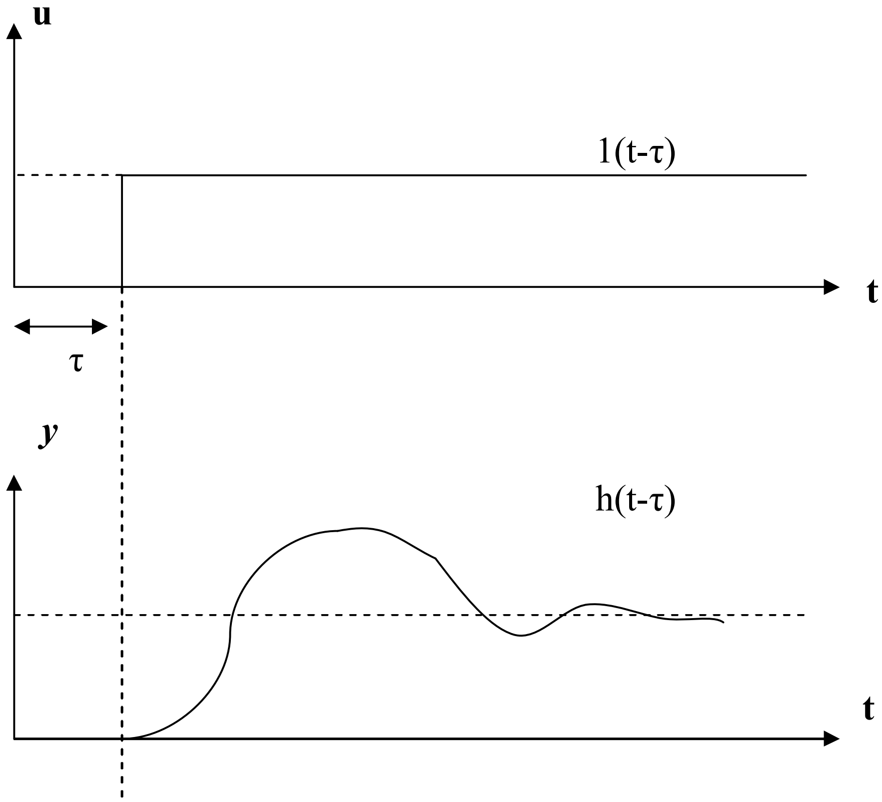
$$y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0, \quad \ldots., \quad y^{(n-1)}(0)=0.$$

Лекция № 2

2.3.Переходная характеристика (ПФ)

Это реакция системы на единичное ступенчатое входное воздействие $u(t\text{-}\tau)= 1(t\text{-}\tau)$ при нулевых начальных условиях.

$$1(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau\\ 1, & t\geq\tau\end{cases}$$ - единичная ступенчатая функция



Для аналитического определения переходной функции следует решать дифференциальные уравнения при нулевых начальных условиях и единичном входном воздействии.

При исследовании реального объекта переходную характеристику можно получить экспериментальным путем, подавая на его вход ступенчатое входное воздействие и фиксируя реакцию на выходе.

Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенчатую функцию

$u(t) = k\ 1(t)$, то

Выходная величина будет $y(t) = k\ h(t)$, т.е. представляет собой переходную характеристику с коэффициентом пропорции k .

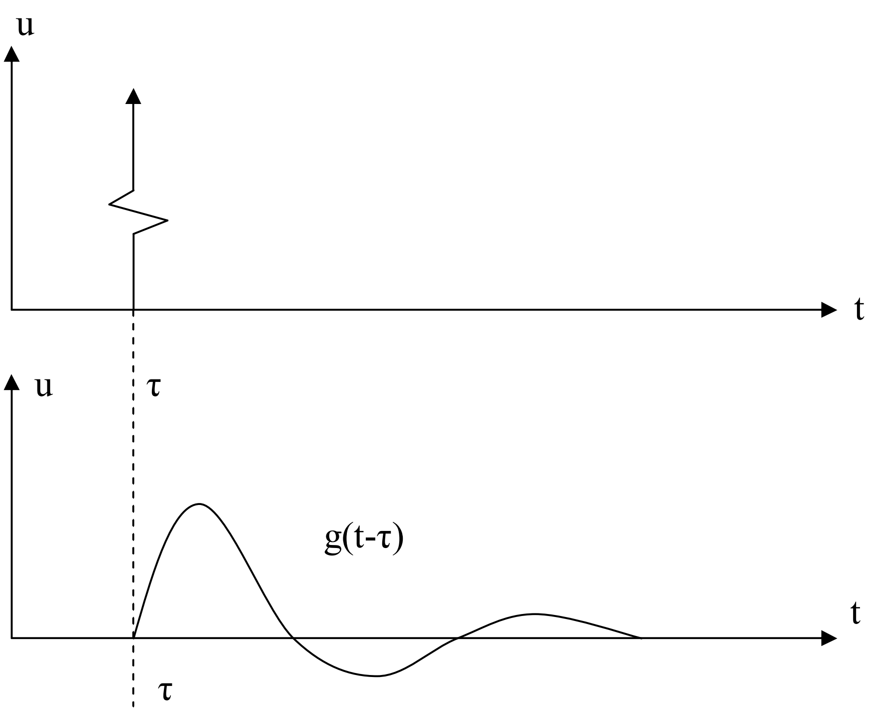
Зная переходную характеристику можно вычислить реакцию системы на произвольное входное воздействие с помощью интеграла свертки

$$y(t) = h(t)\,u(t) + \int_0^t h(t-\tau)\,\dot{u}(\tau)\,d\tau \qquad (2.6)$$

τ- переменная интегрирования

2.4 Импульсная переходная функция g(t)

Импульсная переходная функция (характеристика) g(t) - это реакция системы на входной сигнал в виде δ-функции при нулевых начальных условиях.



δ– функция обладает следующими свойствами

$$1)\ \delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ \infty, & t = \tau \end{cases} \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = 1 \qquad (2.7)$$

С помощью δ– функции можно описать реальное входное воздействие типа удара. В действительности импульсные входные воздействия на объект всегда конечны по уровню и продолжительности. Однако, если их длительность намного меньше длительности переходных процессов ,то с определенной точностью реальный импульс может быть заменен δ– функцией с некоторым коэффициентом .

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \qquad (2.8)$$

Переходная характеристика и импульсная переходная функция однозначно связаны между собой соотношением:

$$g(t) = \dot{h}(t), \qquad h(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau \qquad (2.9)$$

Уравнение (2.9) позволяет при одной известной характеристике определить вторую.

2.5 Переходная матрица.

Данная динамическая характеристика применяется для описания многоканальных систем вида (2.1.) и (2.2.) при нулевых входных воздействиях

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n \\ \quad y = Cx, & (y, u) \in R^m \end{cases} \qquad n \geq m$$

u=0

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & x \in R^n \\ y = Cx, & y \in R^m \end{cases} \qquad \text{- автономная система} \qquad (2.10)$$

Переходная матрица – это решение матричного дифференциального уравнения.

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \text{где } \dim \Phi(t) = n \times n \qquad (2.11)$$

при единичных начальных условиях

$$\Phi(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства $\Phi(t)$

1) $\det \Phi(t) \neq 0$ для любого $t \in [0,\infty)$,

2) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(t)$ (2.12)

Эти свойства переходной матрицы имеют место и для систем с переменной матрицей A .

Зная переходную матрицу можно вычислить реакцию системы на произвольное входное воздействие при любых начальных условиях x(0).

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.13)$$

свободная составляющая вынужденная составляющая

$$y(t) = C\Phi(t)\,x(0) + \int_0^t C\Phi(t,\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau \qquad (2.14)$$

При нулевых начальных условиях ,т.е. $x(0)=0$

$$y(t) = \int_0^t C\Phi(t,\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau = \int_0^t G(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau \qquad (2.15)$$

где $G(t,\tau) = C\Phi(t,\tau)$ – матричная импульсная переходная функция (2.16)

Её каждая компонента представляет собой импульсную переходную функцию $g_{ij}(t,\tau)$, которая является реакцией i-го выхода системы на j –е импульсное входное воздействие при нулевых начальных условиях и отсутствии остальных входных воздействий t.

Матричная переходная характеристика:

$$H(t) = \int_0^t G(t,\tau)\,d\tau \qquad (2.17)$$

Для линейных систем с постоянными параметрами переходная матрица $\Phi(t)$ представляет собой матричную экспоненту.

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots, \qquad (2.18)$$

где $\dim\ e^{At} = n \times n$.

С учетом (2.18), (2.13.) и (2.14.) имеют вид

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)\,d\tau \qquad (2.19)$$

$$y(t) = c\,e^{At}x(0) + \int_0^t c\,e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)\,d\tau \qquad (2.20)$$

В этом случае матричная импульсная переходная функция линейной системы с постоянными коэффициентами может быть найдена

$$G(t,\tau) = c\,e^{At}B \qquad (2.21)$$

При небольших размерах или простой матрице объекта А выражение (2.18.) может быть использовано для точного представления переходной матрицы с помощью элементарных функций .В случае большой размерности матрицы А следует использовать существующие программы для вычисления матричного экспоненциала.

2.6 Передаточная функция

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями в ТАУ используются различные их преобразования. Для линейных систем эти управления удобнее представлять в символической форме применением оператора дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt} ,$$

что позволяет записывать дифференциальные уравнения , как алгебраические и вводит новую динамическую характеристику - передаточную функцию (этот способ был предложен англ.ученым Хэвисайдом в 1845 году ,позднее он был строго обоснован аппаратом интегральных преобразований Лапласа и Карсона).

Рассмотрим этот переход для многоканальных систем общего в

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \mathrm{B}u , & x \in R^n,\ u \in R^m, \\ \quad y = Cx, & y \in R^m, \quad n \geq m. \end{cases}$$

в операторной форме

$$px = Ax + Bu ,$$

определим вектор состояния

$(pI – A)x = Bu$

$(pI – A)^{-1} (pI-A)\, x = (pI-A)^{-1} Bu$

$$x = (pI – A)^{-1} Bu \qquad (2.22)$$

и выходные переменные системы

$$y = C\,(pI – A)^{-1}\, Bu \qquad (2.23)$$

Матрица взаимосвязей между выходными переменными и управляющими воздействиями в выражении (2.23.) при нулевых начальных условиях называется <u>матричной передаточной функцией</u> и обозначается

$$W(p) = C\,(pI – A)^{-1} B \qquad (2.24)$$

где dim W(p) = m x m:

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) \dots W_{1m}(p) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ W_{m1}(p) \dots W_{mm}(p) \end{bmatrix} \qquad (2.25)$$

Где $W_{ij}(p) = \frac{y_i}{u_j}$ – скалярные передаточные функции ,которые представляют собой отношение выходной величины к входной в символической форме при нулевых начальных условиях.

$W_{ii}(p) = \frac{y_i}{u_i}$ - собственная передаточная функция i-того канала

$W_{ij}(p) = \frac{y_i}{u_j}$ - передаточная функция перекрестных связей

Обратная матрица может быть найдена по выражению:

$$(pI - A)^{-1} = \frac{(pI - A)^*}{\det(pI - A)} \quad (2.26)$$

где $(pI - A)^*$ - присоединенная матрица, которая представляет матрицу алгебраических добавлений матрицы $(pI - A)^T$.

Из (2.26.) следует, что все $W_{ij}(p)$ в (2.25.) имеют один и тот же знаменатель

$A(p) = \det(pI\text{-}A) = p^n + a_n p^{(n-1)} + \ldots + a_1$,

который называется характеристическим полиномом и имеет n-й порядок.

Если теперь характеристический полином равен 0 ,то получаем характеристическое уравнение системы:

$$A(p) = \det(pI\text{-}A) = 0 \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27.) имеет n корней ,которые называются полюсами системы ($p_1, p_2, \ldots, p_n$).

Чаще всего передаточные функции применяются для описания одноканальных систем вида:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_0 u, \qquad n \geq m. \quad (2.28)$$

Лекция 3

2.5 Переходная матрица (продолжение темы)

$$\dot{\Phi} = A\Phi$$

Для линейных систем с постоянными параметрами Φ(t) представляет собой матричную экспоненту.

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots, \quad (2.19)$$

где $\dim\ e^{At} = n \times n$.

2.6 Передаточная функция

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями в ТАУ используются различные их преобразования. Для линейных систем эти управления удобнее представлять в символической форме применением оператора дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt} \ ,$$

что позволяет записывать дифференциальные уравнения , как алгебраические и вводит новую динамическую характеристику - передаточную функцию (этот способ был предложен англ.ученым Хэвисайдом в 1845 году ,позднее он был строго обоснован аппаратом интегральных преобразований Лапласа и Карсона).

Рассмотрим этот переход для многоканальных систем общего в

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \mathrm{B}u\ , & x \in R^n,\ u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m, \quad n \geq m. \end{cases}$$

$$p \rightarrow \frac{d}{dt}$$

$$px = Ax + \mathrm{B}u\ ,$$

$$x = (pI - A)^{-1} u \qquad (2.20)$$

и выходные переменные системы

$$y = \underbrace{C\,(pI - A)^{-1}\ B}_{W(p)}u \qquad (2.21)$$

$$W(p) = C\,(pI - A)^{-1}\,B \qquad (2.22)$$

Матричная передаточная функция

Это матрица взаимосвязей между выходными переменными и управляющими воздействиями при нулевых начальных условиях $x(0)=0$.

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) \dots W_{1m}(p) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ W_{m1}(p) \dots W_{mm}(p) \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

Где $W_{ij}(p) = \frac{y_i}{u_j}$ – <u>скалярные передаточные функции</u> ,которые представляют собой отношение выходной величины к входной в символической форме при нулевых начальных условиях.

$W_{ii}(p) = \frac{y_i}{u_i}$ - <u>собственная передаточная функция i-того канала</u>

$$(pI - A)^{-1} = \frac{(pI - A)^*}{\det(pI - A)} \qquad (2.24)$$

где $(pI - A)^*$ - присоединенная матрица, которая представляет матрицу алгебраических добавлений матрицы $(pI - A)^T$.

все $W_{ij}(p)$ содержат один и тот же знаменатель det (pI-A):

$$A(p) = \det(pI\text{-}A) = p^n + a_n p^{(n-1)} + \dots + a_1 , \qquad (2.25)$$

который называется <u>характеристическим полиномом</u> .

$$A(p) = \det(pI\text{-}A) = 0 \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26.) имеет *n* корней ,которые называются полюсами системы $(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

<u>Пример 2.3</u> Определить передаточную функцию объекта

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^2, \quad u \in R^2 \\ \quad y = Cx, & y \in R^2 \end{cases}$$

Где $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

найдём обратную матрицу:

$$pI\text{-}A=\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & (p-2) \end{bmatrix}.$$

1) $(pI\text{-}A)^T = \begin{bmatrix} p & 1 \\ -1 & (p-2) \end{bmatrix}$

2) $(pI-A)^* = \begin{bmatrix} (p-2) & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix}$

3) $\det(pI-A) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & (p-2) \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 1$

4) $(pI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p-2}{p^2-2p+1} & \frac{1}{p^2-2p+1} \\ \frac{-1}{p^2-2p+1} & \frac{p}{p^2-2p+1} \end{bmatrix}$ $\qquad C\,(pI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p-3}{p^2-2p+1} & \frac{1+p}{p^2-2p+1} \\ \frac{2p}{p^2-2p+1} & \frac{-2p}{p^2-2p+1} \end{bmatrix}$

передаточная матрица объекта:

$$C\,(pI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2(p-3)}{p^2-2p+1} & \frac{1+p}{p^2-2p+1} \\ \frac{4p}{p^2-2p+1} & \frac{-2p}{p^2-2p+1} \end{bmatrix}$$

Чаще всего передаточные функции применяются для описания одноканальных систем

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1}{p^n + a_m p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} \qquad (2.27)$$

где $A(p) = p^n + a_m p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1 = 0$

$\wedge = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - корни системы (полюса системы)

$B(p) = b_m p^m + \dots b_1 = 0$

$N = \{n_1, \dots, n_m\}$ – нули системы

Пример 2.4 Определить передаточную функцию, нули и полюса системы.

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2\dot{u} + 12u$$

$p \to \frac{d}{dt}$

$$p^2 y + 6py + 5y = 2pu + 12u$$

преобразуем: $(p^2 + 6p + 5)\,y = (2p + 12)\,u$

определим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2p+12}{p^2+6p+5}$$

характеристическое уравнение имеет вид:

$$A(p) = p^2 + 6p + 5 = 0$$

D= 36-20=16

$p = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} -5 \\ -1 \end{cases}$ $\qquad \wedge = \{-1;-5\}$

B(p) = 2p + 12 = 0

p= -6 $\qquad$ N = {6]

2.7 Частотные характеристики

Используются для описания одноканальных систем.

$$\xrightarrow[sin]{u} \boxed{\text{ОУ}} \xrightarrow[sin]{y}$$

Если на вход подать *sin* то с течением времени t на выходе будет *sin*

Взаимосвязь между амплитудой и фазой входных и выходных сигналов определяет <u>частотная характеристика.</u>

$u = A_1 \cos \omega t \qquad y = A_2 (\cos \omega t + u)$

Для нахождения взаимосвязи между u и y можно воспользоваться передаточной функцией, формально заменив $p \rightarrow j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{y}{u} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1}{(j\omega)^n + a_m (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 (j\omega) + a_1}$$

$(j)^2 = -1 \quad => \quad (j\omega)^2 = -\omega^2 \qquad (j\omega)^3 = -j\omega^3 \qquad (j\omega)^4 = \omega^4$

$$W(j\omega) = \frac{P(\omega) + jQ(\omega)}{F(\omega 0 + jH(\omega)} \Big| * \frac{(F(\omega) - jH(\omega))}{(F(\omega) - j\,H(\omega))} = \frac{P(\omega)F(\omega) + Q(\omega)H(\omega) + j\,(Q(\omega)F(\omega) - P(\omega)H(\omega))}{F(\omega)^2 + H(\omega)^2}$$

$$W(j\omega) = \underbrace{\frac{P(\omega)F(\omega) + Q(\omega)H(\omega)}{F(\omega)^2 + H(\omega)^2}}_{Re(\omega)} + j \underbrace{\frac{Q(\omega)F(\omega) - P(\omega)H(\omega)}{F(\omega)^2 + H(\omega)^2}}_{Im(\omega)}$$

Можно представить в общем виде

$$W(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = Re\,(\omega) + j\, Im\,(\omega) \qquad (2.28)$$

Составляющие обобщенной частотной характеристики $W(j\omega)$ имеют самостоятельное значение и следующие названия:

Re (ω) – <u>вещественная частотная характеристика</u> (ВЧХ)

Im (ω) – <u>мнимая частотная характеристика</u> (МЧХ)

$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$ (2.29)

- <u>амплитудная частотная характеристика</u> (АЧХ)

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{I(\omega)}{R(\omega)}$ (2.30)

- <u>фазовая частотная характеристика</u> (ФЧХ)

$L(\omega) = 20\, lg\, A(\omega)$ (2.31)

- <u>логарифмическая амплитудная частотная характеристика</u> (ЛАЧХ) – АЧХ , построенная в логарифмическом масштабе. Удобство работы с ними объясняется тем, что операции умножения и деления заменяются на операции сложения и вычитания.

Для исследования частотных свойств объекта или системы удобно использовать графическое представление частотных характеристик. $W(j\omega)$ может быть построена на комплексной плоскости в соответствии с выражением (2.28). При этом $\omega = \overline{0, \infty}$

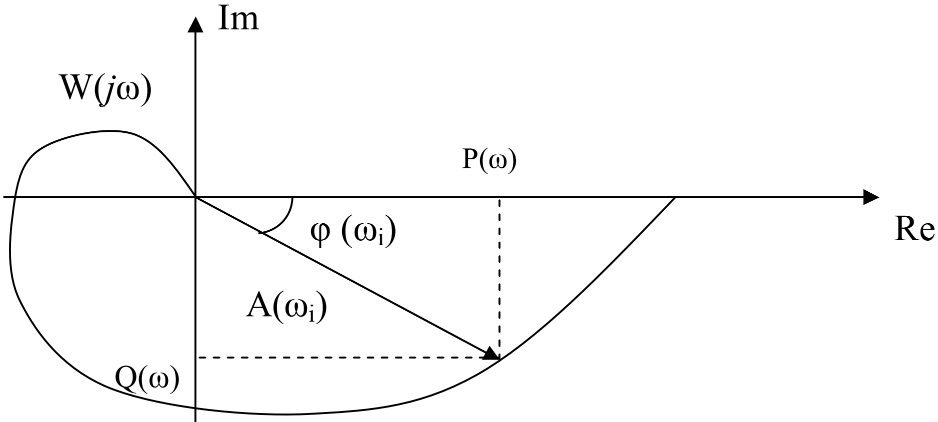


Рис. пример амплитудно-фазовой характеристики системы (АФХ)

<u>Пример 2.5</u> Построить частотные характеристики для апериодического звена 1-го порядка

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}$$

замена $p \rightarrow j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{jT\omega+1} = \frac{k\,(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2} = \underbrace{\frac{k}{1+T^2\omega^2}}_{Re} - \underbrace{j\frac{kT\,\omega}{1+T^2\omega^2}}_{Im}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kT\,\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\,\omega^2}}$$ - <u>АЧХ</u>

$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,(-\omega T)$ - <u>ФЧХ</u>

$$L(\omega) = 20\,lg\left(\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2\,\omega^2}}\right) = 20lg(\mathrm{k}\,(1 + T^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}) = 20lg\mathrm{k} - 20lg(1+\mathrm{T}^2\omega^2)$$ –ЛАЧХ

$\omega << \frac{1}{\mathrm{T}}$ Вместо точной ,рассматриваем приближенную.

$L(\omega) = 20lg\mathrm{k}$

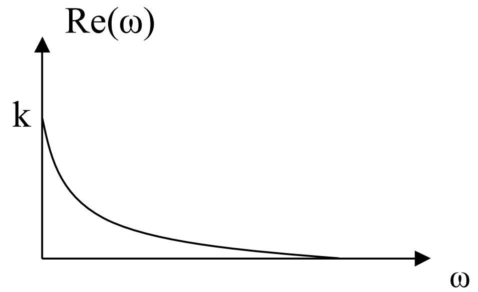
$\omega >> \frac{1}{\mathrm{T}}$ $L(\omega) = 20lg\mathrm{k} - 20lg(\mathrm{T}\omega)$

На частоте $\omega_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}$ $L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0)$

Собственная частота

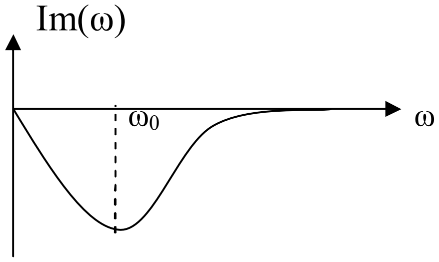
$\mathrm{Re}(\omega) = \frac{k}{1+\mathrm{T}^2\omega^2}$

ω	0	∞
Re	k	0



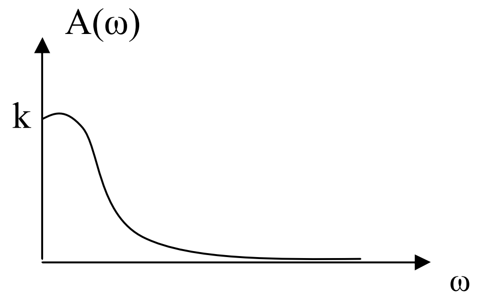
$\mathrm{Im}(\omega) = \frac{\mathrm{kT}\,\omega}{1+\mathrm{T}^2\omega^2}$

ω	0	∞
Im	0	$\to 0_-$

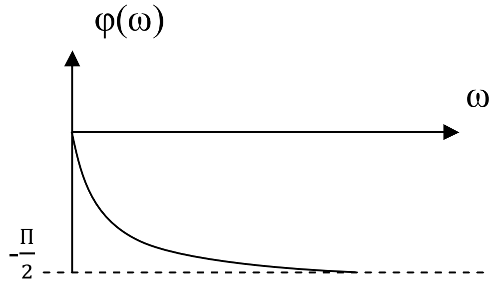


$A(\omega) = \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2\,\omega^2}}$

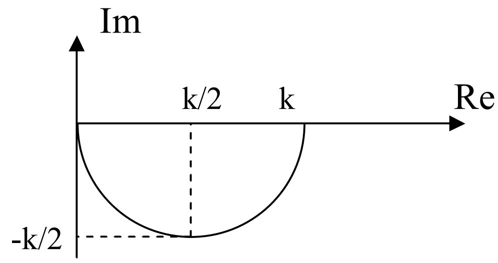
ω	0	∞
A	k	$\to 0_+$

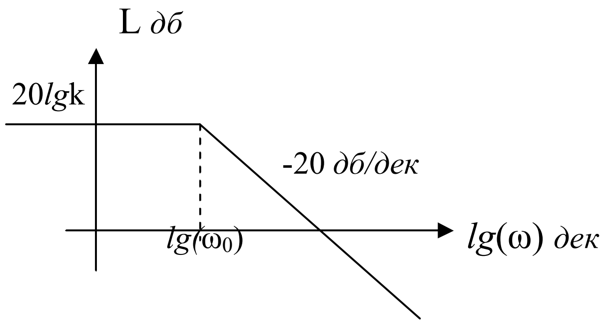


$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,(-\omega T)$



$W(j\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + j\ \mathrm{Im}(\omega)$



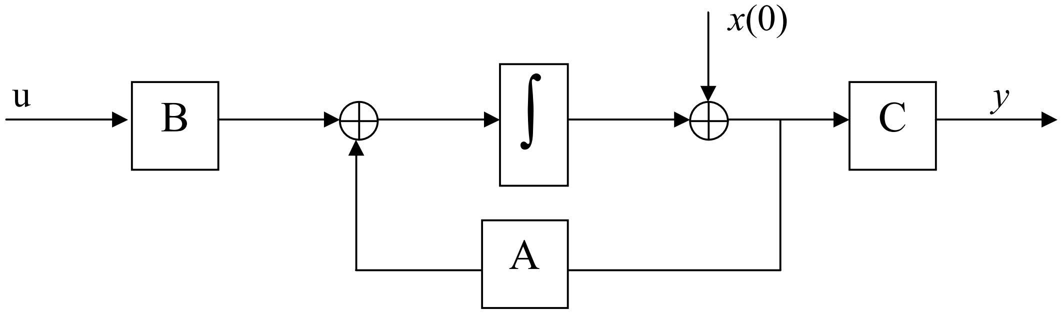


\- <u>ЛАЧХ</u>

<u>Структурные схемы ,соотношение дифференциальных уравнений</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n \\ y = Cx, & (y, \mathrm{u}) \in R^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int\limits_0^t (Ax + Bu)d\tau \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$



Лекция 3

2.5.Переходная матрица

Эта динамическая характеристика применяется для описания многоканальных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n \\ \quad y = Cx, & (y, \mathrm{u}) \in R^m \end{cases} \qquad n \geq m$$

при нулевых воздействиях:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}x, & x \in R^n \\ y = Cx, & y \in R^m \end{cases} \quad \text{- автономная система} \qquad (2.10)$$

<u>Переходная матрица</u> – это решение матричного дифференциального уравнения.

$$\dot{\Phi} = \mathrm{A}\Phi, \quad \text{где } \dim \Phi(t) = n \times n \qquad (2.11)$$

при единичных начальных условиях

$$\Phi(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства Φ(t)

1) $\det \Phi(t) \neq 0$ для любого $t \in [0,\infty)$,

2) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(t)$ (2.12)

Зная переходную матрицу можно вычислить реакцию системы на произвольное входное воздействие при любых начальных условиях x(0).

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.13)$$

свободная составляющая — вынужденная составляющая

$$y(t) = C\Phi(t)\, x(0) + \int_0^t C\Phi(t,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.14)$$

При нулевых начальных условиях ,т.е. $x(0)=0$

$$y(t) = \int_0^t C\Phi(t,\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau = \int_0^t G(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad (2.15)$$

где $G(t,\tau) = C\Phi(t,\tau)$ – матричная импульсная переходная функция (2.16)

Её каждая компонента представляет собой импульсную переходную функцию $g_{ij}(t,\tau)$, которая является реакцией *i*-го выхода системы на *j* –е импульсное входное воздействие при нулевых начальных условиях и отсутствии остальных входных воздействий t.

Для многоканальных систем может быть определена также матричная переходная характеристика:

$$H(t) = \int_0^t G(t,\tau)\, d\tau \qquad (2.17)$$

Для линейных систем с постоянными параметрами переходная матрица Φ(t) представляет собой матричную экспоненту.

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots, \qquad (2.18)$$

где $\dim\ e^{At} = n \times n$.

С учетом (2.18), (2.13.) и (2.14.) имеют вид

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.19)$$

$$y(t) = c\, e^{At}\, x(0) + \int_0^t c\, e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau \qquad (2.20)$$

В этом случае матричная импульсная переходная функция линейной системы с постоянными коэффициентами может быть найдена

$$G(t,\tau) = c\, e^{At}\, B \qquad (2.21)$$

При небольших размерах или простой матрице объекта A выражение (2.18.) может быть использовано для точного представления переходной матрицы с помощью элементарных функций .В случае большой размерности матрицы A следует использовать существующие программы для вычисления матричного экспоненциала.

Лекция 4

2.6 Передаточная функция (продолжение)

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1}{p^n + a_m p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} \qquad (2.29)$$

где A(p) = $p^n + a_m p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$ - <u>характеристический полином</u>

Его корни $\wedge = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$ называются полюсами системы.

Корни полинома числителя $B(p) = b_m p^m + \dots b_0$

$N = \{n_1, \dots, n_m\}$ – нули системы

Преобразовываем (2.29)

$$W(p) = \frac{\left(\frac{b_m}{b_0} p^m + \dots + 1\right) b_0}{\left(\frac{1}{a_1} p^n + \frac{a_n}{a_1} p^{(n-1)} + \dots + \frac{a_2}{a_1} p + 1\right) a_1} = k\,\frac{d_m p^m + \dots + 1}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1} \qquad (2.30)$$

где $k = b_0/a_1$ – коэффициент усиления; $c_n = 1/a_1$, $c_j = a_j + 1/a_1$, $j = \overline{1, (n-1)}$;

$d_i = b_i/b_0$, $i = \overline{1, m}$;

Возможен и обратный переход $p \rightarrow \frac{d}{dt}$

Взаимосвязь между переходными характеристиками и передаточной функцией

<u>Импульсная переходная функция:</u> $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ (2.8)

Подвергаем его преобразованию Лапласа

$$L[y(t)] = L\left[\int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right]$$

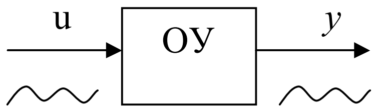
$$\frac{d}{dt} \rightarrow S$$

$$y(S) = g(S)\, u(s) \Rightarrow g(S) = \frac{y(s)}{u(s)} = W(S)$$

Таким образом, <u>Переходная функция</u> - это преобразованная по Лапласу импульсная переходная функция.

2.7 Частотные характеристики

Используются для описания одноканальных систем. Они определяют взаимосвязь между параметрами периодических сигналов на входе и выходе.



Частотные характеристики можно рассматривать как взаимосвязь изображений Фурье входной и выходной величины.

$$u = A_1 \cos \omega t \text{ , то}$$

на выходе в установившемся режиме у устойчивого объекта будет также гармонический сигнал той же частоты ω ,но с другой амплитудой ос сдвигом по фазе:

$$y = A_2 (\cos \omega t + \varphi).$$

Для нахождения взаимосвязи между u и y можно воспользоваться передаточной функцией, формально заменив p→ jω

$$W(p) = k \frac{d_m p^m + \cdots + 1}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \cdots + 1}$$

$$W(j\omega) = k \frac{d_m (j\omega)^m + \cdots + 1}{c_n (j\omega)^n + c_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + 1} \quad (2.31)$$

$$W(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}\,(\omega) + j\, \mathrm{Im}\,(\omega) \qquad (2.32)$$

W(jω) – обобщенная частотная характеристика

Re (ω) – вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

Im (ω) – мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$ (2.33)

- амплитудная частотная характеристика (АЧХ)

$\varphi\,(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{I(\omega)}{R(\omega)}$ (2.34)

- фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

Для исследования частотных свойств объекта или системы удобно использовать графическое представление частотных характеристик. В общем случае обобщенная частотная характеристика W(jω) может быть представлена на комплексной плоскости в соответствии с выражением (2.32). когда каждому значению ω_i соответствует вектор W($j\omega_i$). Длина (модуль) которого равна A(ω), а аргумент 9угол,образованный этим вектором с действительной положительной осью) – φ (ω). При изменении ω от 0 до ∞ конец этого вектора прочерчивает на комплексной плоскости кривую, которой характеризуется амплитудно-фазовая характеристикой.

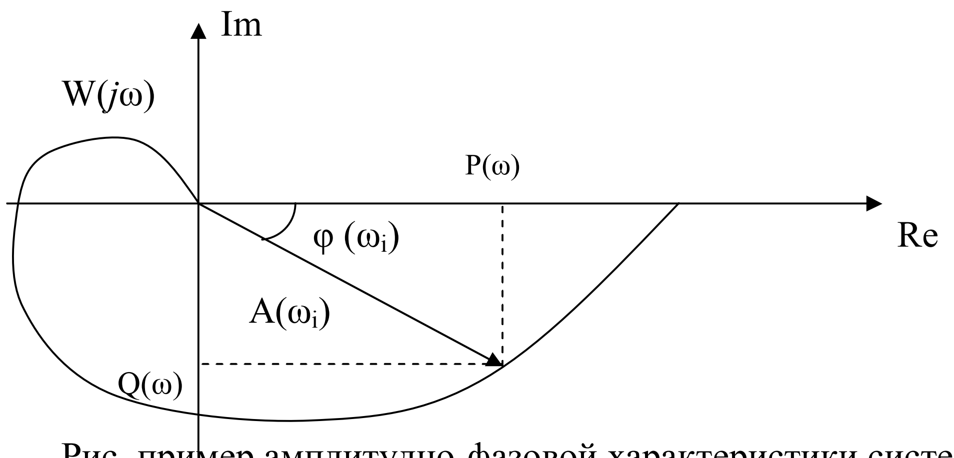


Рис. пример амплитудно-фазовой характеристики системы (АФХ)

Кроме АФХ можно построить все остальные частотные характеристики.

Так, АЧХ показывает, как звено пропускает сигналы различной частоты ; причем оценкой пропускания является отношение амплитуд выходного сигнала A_2 и входного сигналов A_1.

1) ВЧХ - P(ω)

2) МЧХ - Q(ω)

3) АЧХ - $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

4) ФЧХ - $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{Q}{P}$

<u>Логарифмическая амплитудная частотная характеристика</u>

$$L(\omega) = 20\, lg\, A(\omega) \qquad (2.34)$$

- это амплитудная частотная характеристика, построенная в логарифмическом масштабе. При этом она изменяется в (дБ). При изображении удобнее по оси абсцисс откладывать частоту также логарифмическом масштабе, т.е. $lg(\omega)$, выраженную в декадах (дек).

Частотную передаточную функцию будем также называть АФЧХ. Её действительную частоту:

$P(\omega) = \mathrm{Re}\, W(j\omega)$ – <u>вещественной частотной функцией</u>

$Q(\omega) = \mathrm{Im}\, W(j\omega)$ – <u>мнимой частотной функцией</u>

А их графики: ВЧХ и МЧХ соответственно.

Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ – амплитудо–частотная функция, её график АЧХ.

Аргумент $\Phi(\omega) = \operatorname{arctg} W(j\omega)$ - фазовая частотная функция, её график ФЧХ.

Кроме перечисленных частотных характеристик используют еще логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Логарифмические амплитудо – частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические частотные характеристики (ЛФЧХ).

$$\text{ЛАЧХ -}\quad L(\omega) = 20lgA(\omega) = 20lg|W(j\omega)|$$

График зависимости логарифмической амплитудной частотной характеристики $L(\omega)$ от логарифма частоты $lg(\omega)$называют ЛАЧХ.

При построении по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе. На отметке, соответствующей значению $lg(\omega)$, пишут само значение частоты ω ,а не значение $lg(\omega)$, а по оси ординат - $L(\omega)$.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости фазовой частотной функции $\varphi(\omega)$ от логарифма ($lg(\omega)$. При его построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ ,на отметке соответствующей $lg(\omega)$, пишут значение ω.

Единицей измерения $L(\omega)$ является децибел, а единицей измерения $lg(\omega)$ - декада. Декада – это интервал ,на котором частота изменяется в 10 раз . При изменении частоты в 10 раз, говорят, что она изменилась на декаду.

Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку ω=0. Частоте ω=0 соответствует бесконечно удаленная точка: $lg(\omega)\to -\infty$ при $\infty\to 0$.

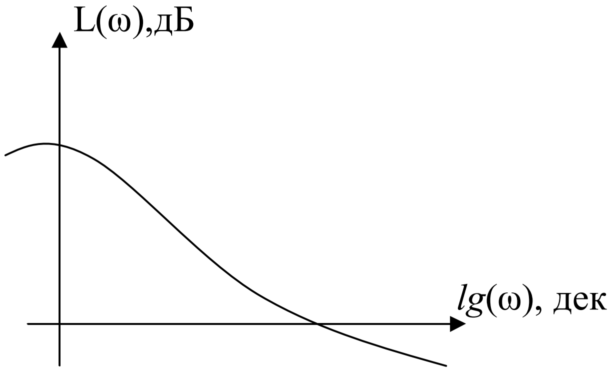


рис. пример ЛАЧХ

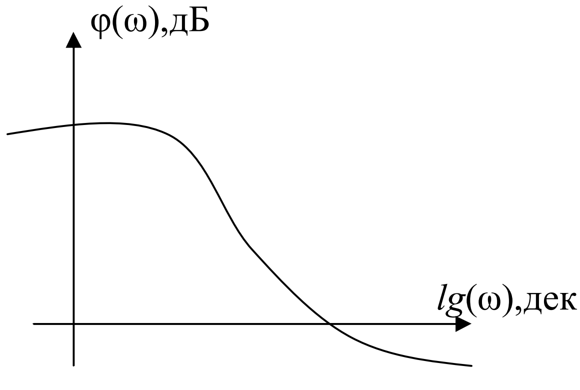


рис. пример ЛФЧХ

При гармоническом воздействии в устойчивых системах, после окончания переходного процесса ,выходная величина также изменяется по гармоническому закону, но с другими амплитудой и фазой . При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю ,а сдвиг фазы - аргументу частотной передаточной функции. Значит физический смысл частотных характеристик :

АЧХ показывает изменение отношения амплитуд , а ФЧХ - сдвиг фазы выходной величины в зависимости от частоты входного гармонического сигнала.

<u>Пример</u>: Для объекта с заданной передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{p+1}$$

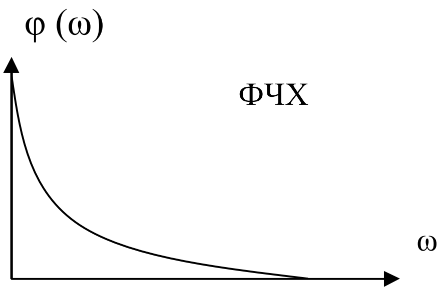
Построить АФХ, ВЧХ, ФЧХ.

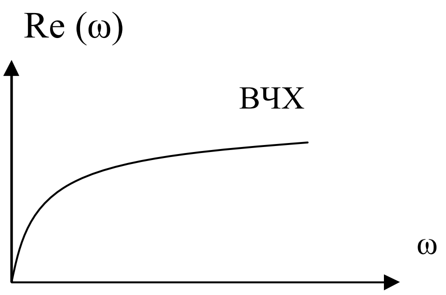
Запишем выражение для обобщенной частотной характеристики, сделав замену в передаточной функции p→ jω :

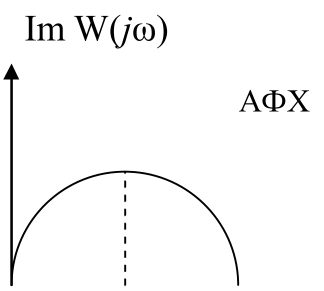
$$W(j\omega) = \frac{10j\omega}{j\omega+1} = \frac{10j\omega\,(-j\omega+1)}{(j\omega+1)\,(-j\omega+1)} = \frac{10\omega^2+j10\omega}{\omega^2+1} = \frac{10\,\omega^2}{\omega^2+1} + j\frac{10\,\omega}{\omega^2+1}$$

$$\mathrm{Re}\;W(j\omega) = \frac{10\,\omega^2}{\omega^2+1} \qquad \mathrm{Im}\,W(j\omega) = \frac{10\,\omega}{\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,W(j\omega)}{\mathrm{Re}\;W(j\omega)} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\omega}$$







$\mathrm{Re}\ W(j\omega)$

Заключение к 2

Мы рассмотрели основные способы представления математических моделей, которые в дальнейшем будут использованы для исследования свойств объектов и СУ. Введённые характеристики отражают их поведение не только в динамике, но и в статике, поскольку статистический режим представляет собой предел переходных процессов.

Обращаем внимание на то, что ни одна математическая модель не может точно отражать свойства физической системы, как бы не повышали её сложность с целью уточнения. Поэтому обычно стремятся получить модель, которая достаточно адекватно отражает свойства физического устройства и не является слишком сложной.

Лекция 5

3.Структурный метод

Для расчета различных систем автоматизированного управления их обычно разбивают на отдельные элементы, динамическими характеристиками которых являются дифференциальные уравнения не выше 2-го порядка. Причем различные по своей природе элементы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениям, поэтому их относят к определенным классам, называемым динамическими звеньями.

Изображение системы в виде совокупности типовых звеньев с указанием связи между ними называется структурной схемой.

Типы структурных схем:

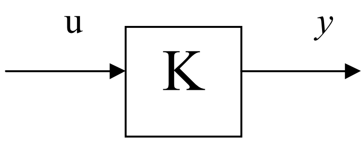
1. В дифференциальных уравнениях

2. В передаточных функциях

Структурный метод позволяет наглядно представить взаимосвязь элементов и оценить свойства переходных и статических процессов. Структурный метод настолько широко используется в практике проектирования. Что может считаться одним из “языков”, на котором обсуждаются свойства САУ.

3.1 Типовые динамические звенья

3.1.1 Пропорциональное (усилительное) звено



Его поведение описывает алгебраическое уравнение

$$y = \mathrm{K}u \qquad (3.1)$$

K – коэффициент усиления

Пример: Безынерциальный усилитель, механические редукторы, многие датчики сигналов

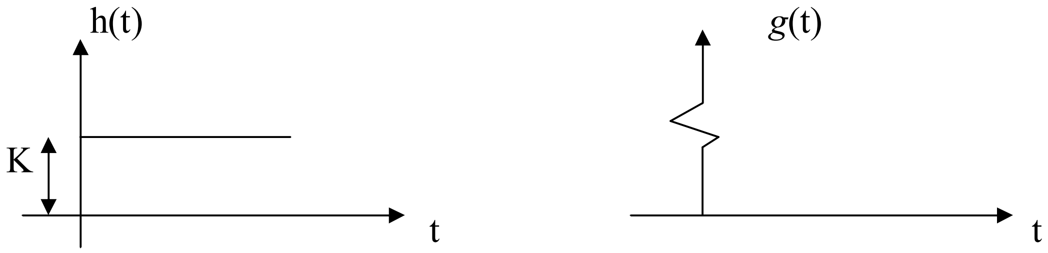
$$W(p) = \frac{y}{u} = K \qquad (3.2)$$

Переходная характеристика – реакция на скачкообразное входное воздействие 1(t).

$$h(t) = K\,1(t) \qquad (3.3)$$

Импульсная переходная функция

$g(t) = K\,\delta(t)$



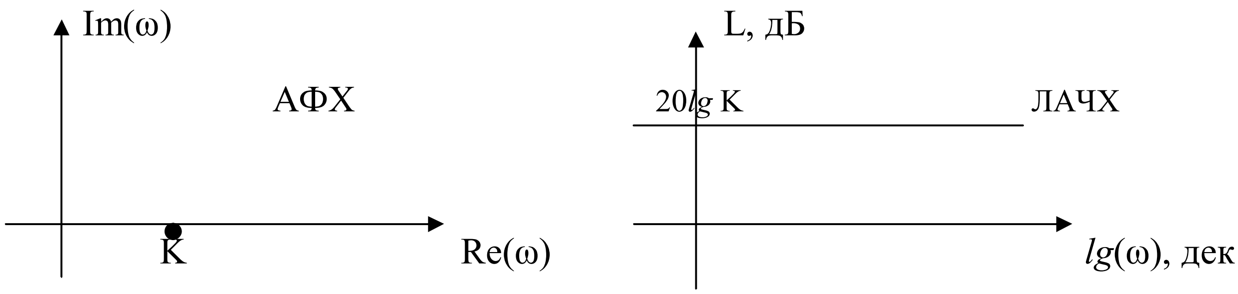
Частотные характеристики: $p \to j\omega$

$$W(j\omega) = K \qquad (3.4)$$

$$Re(\omega) = K \qquad Im(\omega) = 0 \qquad (3.5)$$

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega)} = Re(\omega) = K \qquad (3.6)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{I(\omega)}{R(\omega)} = 0 \qquad (3.7)$$

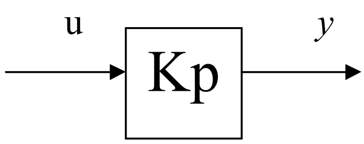


Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20lgA(\omega) = 20lgK \qquad (3.8)$$

Из выражений (3.6) и (3.7) и последнего рисунка => что пропорциональное звено пропускает входные сигналы без искажений.

3.1.2 Дифференцирующее звено



$$y = K\,\dot{u} \qquad (3.9)$$

$$W(p) = \frac{y}{u} = Kp \quad => \text{при } p \to j\omega \quad W(j\omega) = K \qquad (3.10)$$

Пример: тахогенератор постоянного тока.

Переходная характеристика с учетом (2.9)

$$h(t) = K\,\delta(t) \qquad (3.11)$$

и имеет вид δ- функции.

$$\dot{h}(t) = g(t)$$

Импульсная переходная функция

$$g(t) = K\,\dot{\delta}(t) \qquad (3.12)$$

и представляет собой “дуплет” δ-функции.

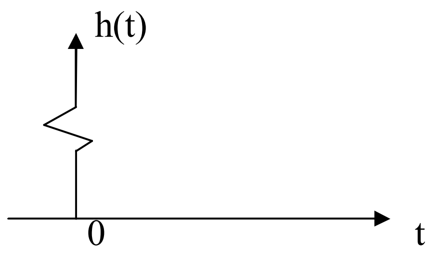


Рис.Переходная характеристика звена

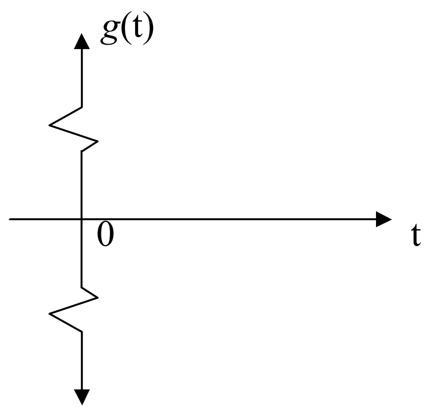


Рис.Импульсная переходная характеристика

Частотные характеристики: $p \rightarrow j\omega$

$$W(j\omega) = j\,K\omega \qquad (3.13)$$

$$Re(\omega) = 0 \qquad Im(\omega) = K\omega \qquad (3.14)$$

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = K\,\omega \qquad (3.15)$$

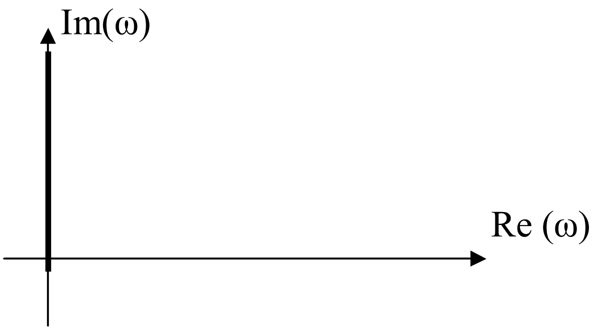
$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{I(\omega)}{R(\omega)} = 90^{O} \qquad (3.16)$$

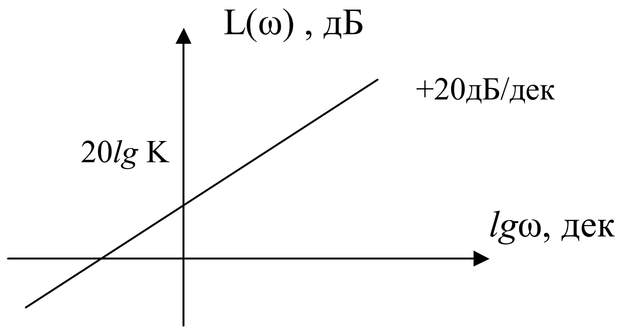
т.е. на всех частотах имеется постоянный фазовый сдвиг.

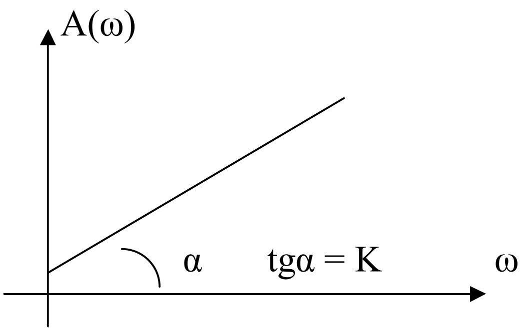
Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20lgK\omega = 20lgK + 20lg\omega \qquad (3.17)$$

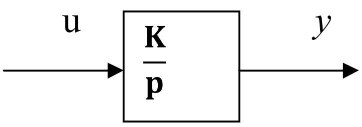
Из графика видно, что дифференцирующее звено усиливает высокочастотные сигналы:







3.1.3 Интегрирующее звено



Его поведение описывает уравнение

$$y = \mathrm{K} \int_0^{\infty} u(\tau)\, d\tau + y(0) \qquad (3.18)$$

<u>пример</u>: Операционный усилитель в режиме интегрирования

$$\dot{y} = \mathrm{K}\, u \qquad (3.19)$$

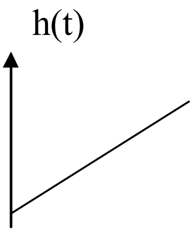
$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{\mathrm{K}}{p}$$

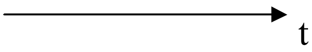
Характеристическое уравнение A(0) = p = 0. Оно имеет единственный корень (полюс) p=0.

Переходная характеристика

$$h(t) = \mathrm{K} \int_0^{t} 1(\tau)\, d\tau = \mathrm{K}t\, 1(t) \qquad (3.20)$$

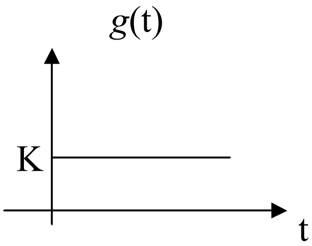
линейно возрастающая функция.





Импульсная переходная функция

$$g(\mathrm{t}) = \mathrm{K} \int_0^t \delta(\tau)\, d\tau = \mathrm{K}\ 1(\mathrm{t}) \qquad (3.21)$$



ступенчатая функция

Частотные характеристики: $p \rightarrow j\omega$

$$\mathrm{W}(j\omega) = j\,\frac{K}{\omega} \qquad (3.22)$$

$$\mathrm{Re}\,(\omega) = 0 \qquad \mathrm{Im}(\omega) = -\,\frac{K}{\omega} \qquad (3.23)$$

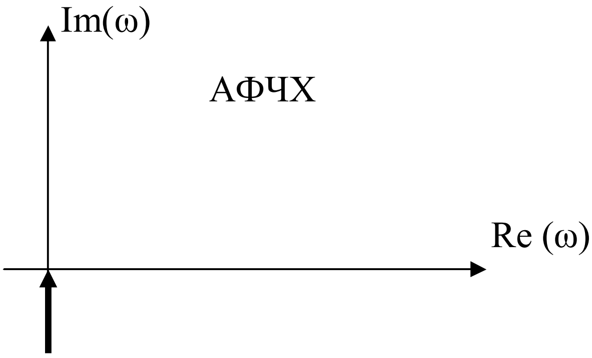
$$\mathrm{A}(\omega) = \frac{K}{\omega} \qquad (3.24)$$

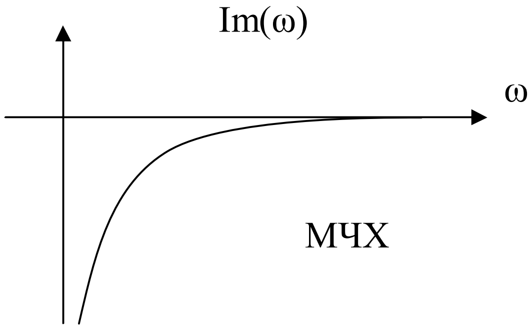
$$\varphi\,(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{I}(\omega)}{\mathrm{R}(\omega)} = -\,90^{\mathrm{O}} \qquad (3.25)$$

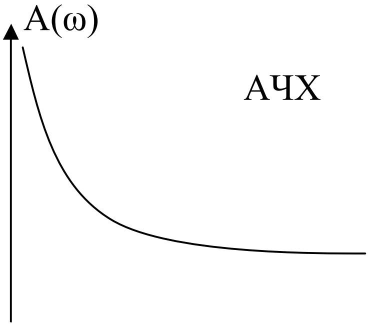
т.е. звено имеет постоянный фазовый сдвиг, который не зависит от частоты.

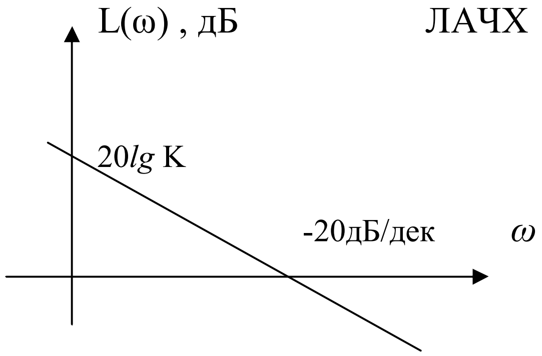
Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$\mathrm{L}(\omega) = 20lg\frac{K}{\omega} = 20lg\mathrm{K} - 20lg\omega \qquad (3.26)$$









ЛАЧХ показывает, что звено усиливает низкочастотные сигналы и ослабляет высокочастотные.

3.1.4 Апериодическое звено

Дифференциальное уравнение, которого имеет вид:

$$\dot{y} \neq a_0 y = b\mathrm{u} \quad (3.27)$$

В стандартном виде:

$$\mathrm{T}\dot{y} + y = \mathrm{Ku} \quad (3.28)$$

где $\mathrm{T} = \frac{1}{a_0}$ - постоянная времени ; $\mathrm{K} = \frac{b}{a_0}$ - коэффициент усиления.

$\frac{d}{dt} \rightarrow \mathrm{p}$

$$\mathrm{Tp}y + y = \mathrm{Ku}$$

$$(\mathrm{Tp}+1)y = \mathrm{Ku} \quad (3.29)$$

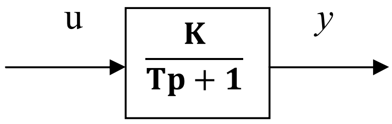
$$\mathrm{W(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{Tp}+1} \quad (3.30)$$

Характеристическое уравнение:

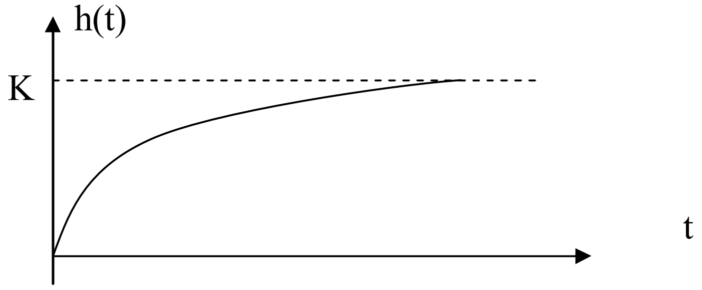
$$\mathrm{A(p)} = \mathrm{Tp} + 1 = 0 \quad (3.31)$$

$\mathrm{p} = -\frac{1}{T}$ - полюс

Переходную характеристику звена можно найти как решение уравнения (3,28) при u=1(t), y(0)=0.



$$h(t) = K\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})\,1(t) \qquad (3.32)$$



Импульсная переходная функция

$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{K}{T}\, e^{-\frac{t}{T}}\, 1(t) \qquad (3.33)$$

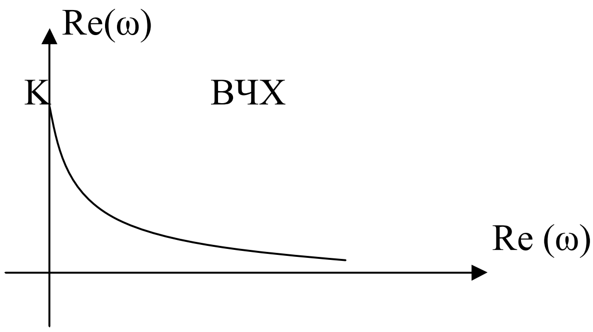
Частотные характеристики: p→ jω

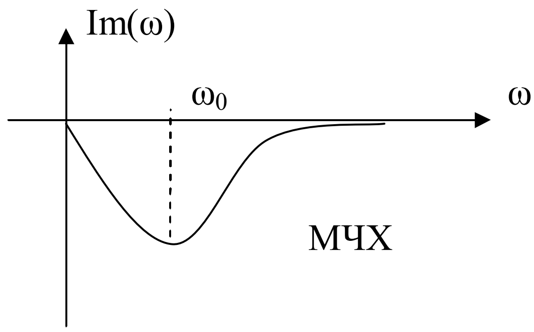
$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1} = \frac{(1-jT\omega)K}{1+T^2\omega^2} = \frac{K}{1+T^2\omega^2} - j\,\frac{T\omega K}{1+T^2\omega^2} \qquad (3.34)$$

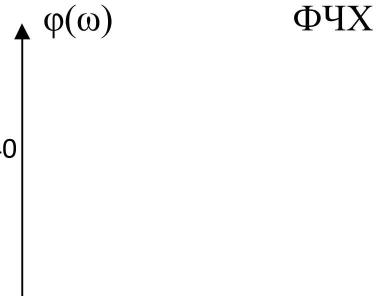
$$\mathrm{Re}\,(\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2} \qquad \mathrm{Im}(\omega) = -\,\frac{T\omega K}{1+T^2\omega^2} \qquad (3.35)$$

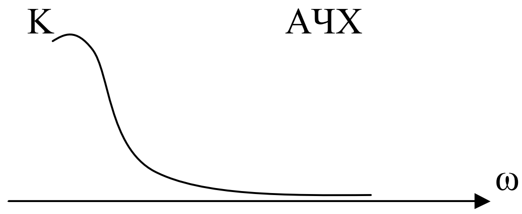
$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{K}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{T\omega K}{1+T^2\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{K^2(1+T^2\omega^2)}{(1+T^2\omega^2)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \qquad (3.36)$$

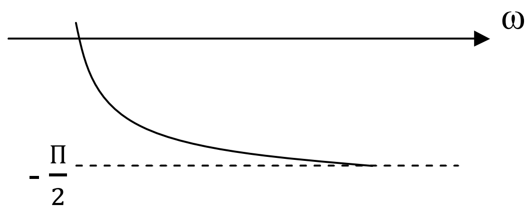
$$\varphi\,(\omega) = \mathrm{arctg}\,(-T\omega) \qquad (3.37)$$

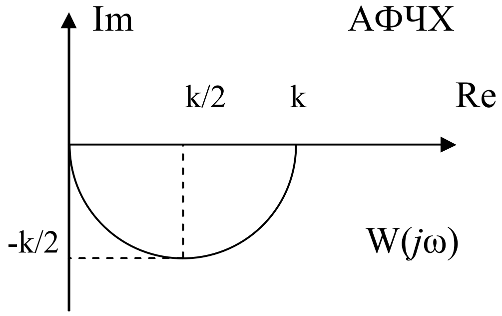












Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20lgA(\omega) = 20lgK - 10lg\,(1 + T^2\,\omega^2) \qquad (3.38)$$

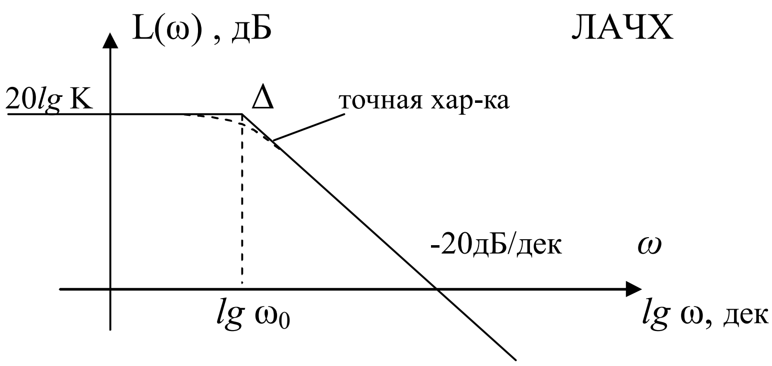
Наиболее просто для апериодического звена можно построить асимптотическую логарифмическую амплитудную частотную характеристику. Рассматриваем отдельно области высоких и низких частот и для каждой определяем свою асимптоту:

1) $\omega << \frac{1}{T}$ вместо точной ЛАЧХ (3.38) можно рассмотреть $L_1(\omega)=20lgK$ (3.39)

2) $\omega >> \frac{1}{T}$ $L_2(\omega) = 20lgK - 20lg\,(T\omega)$ (3.40)

На частоте $\omega_0 = \frac{1}{T}$, которая называется <u>собственной частотой</u> апериодического звена,

$$L_1(\omega_0)= L_2(\omega_0) \qquad (3.14)$$



Наибольшая погрешность Δ будет на собственной частоте ω_0.

Лекция 6

3.1.5 Форсирующее звено

$$y = K_1\, u + K_2\, \dot{u} \quad (3.42)$$

(3.42) можно представить как сумму уравнений пропорционального (3.1) и дифференцирующего (3.9) звеньев.

$$W(p) = \frac{y}{u} = K_1 + K_2\, p \quad (3.43)$$

$$W(p) = K\,(1+Tp) \quad (3.44)$$

где $K=K_1$ - коэффициент усиления

$T=\frac{K_1}{K_2}$ - постоянная времени.

Передаточная функция (3.44.)содержит полином в числителе, корень которого $n=\frac{1}{T}$ называется “нулём” форсирующего звена.

Переходная характеристика

$$h(t) = K_1\, 1(t) + K_2\, \delta(t) \quad (3.45)$$

Импульсная переходная функция

$$g(t) = \dot{h}(t) = K_1\, \delta(t) + K_2\, \delta(t) \quad (3.46)$$

Частотные характеристики: $p \rightarrow j\omega$

$$W(j\omega) = K\,(1+jT\omega) \quad (3.47)$$

$$Re\,(\omega) = K \qquad Im(\omega) = KT\omega \quad (3.48)$$

$$A(\omega) = \sqrt{K^2 + (KT\omega)^2} = K\sqrt{1 + T^2\omega^2} \quad (3.49)$$

$$\varphi\,(\omega) = arctg\,(T\omega) \text{ в пределе } \varphi(\infty) = \frac{\Pi}{2} \quad (3.50)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

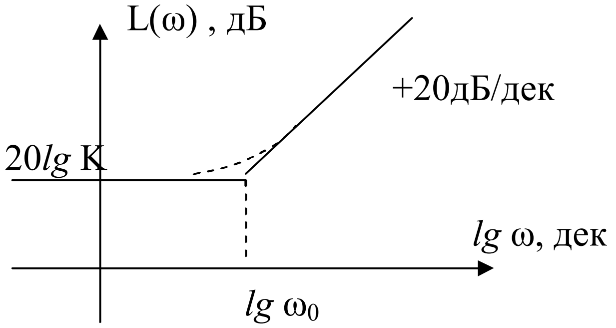
$$L(\omega) = 20lgA(\omega) = 20lgK + 10lg(1+T^2\,\omega^2) \quad (3.51)$$

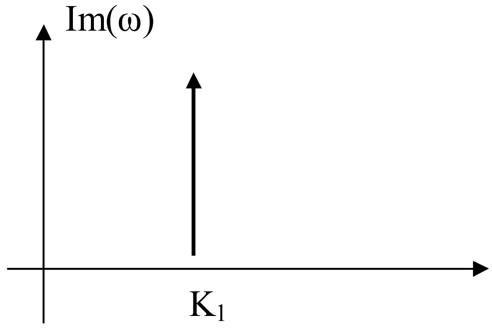
Строим асимптотическую ЛАЧХ:

1) $\omega << \frac{1}{T}$ $\quad L_1(\omega)=20lgK$

2) $\omega >> \frac{1}{T}$ $\quad L_2(\omega) = 20lg(T\omega)$

$$L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{1}{T}$$





3.1.6. Звено второго порядка

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bu \qquad (3.52)$$

стандартная запись:

$$T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = Ku \qquad (3.53)$$

Где $T = \frac{1}{\sqrt{a_0}}$ - постоянная времени

d – коэффициент демпфирования, который определяет складность переходных процессов к колебаниям;

$2dT = \frac{a_1}{a_0}$; $K = \frac{b}{a_0}$ – коэффициент усиления

$T^2p^2\, y + 2dTp\, y + y = Ku$,

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{K}{T2p2 + 2dTp + 1} \qquad (3.54)$$

$$A(p) = T^2p^2 + 2dTp + 1 \qquad (3.55)$$

имеет 2 полюса, которые в зависимости от d могут быть вещественными или комплексно-сопряженными.

1. $d \geq 1$, корни (3.55.) вещественные и положительные. Обозначим их $p_1 = \lambda_1$ и $p_2 = \lambda_2$.

Переходная характеристика

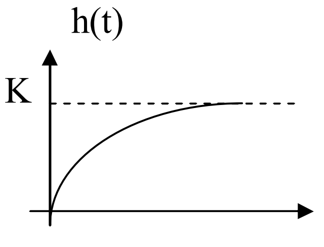
$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + K\, 1(t) \qquad (3.56)$$

2. $0 \leq d < 1$,корни (3.55.)-комплексно-сопряженные, т.е. $p1,2 = -\alpha \pm j\beta$. При $d=0$ получаем $p1,2 = \pm j\beta$.

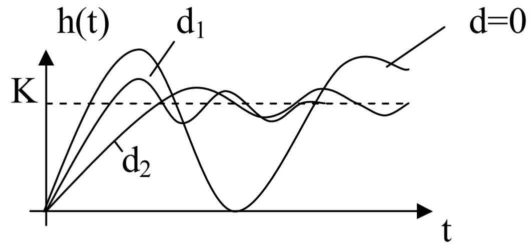
В случае $0<d<1$ звено второго порядка называют колебательным.

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha t}\ (\cos \beta t + c_2) + K1(t). \qquad (3.57)$$

Колебательность переходного процесса будет тем больше, чем меньше d. В пределе при d=0 будут иметь место незатухающие колебания.



$d \geq 1$



$1 > d \geq 0$; $d_1 > d_2$

Частотные характеристики: $p \rightarrow j\omega$

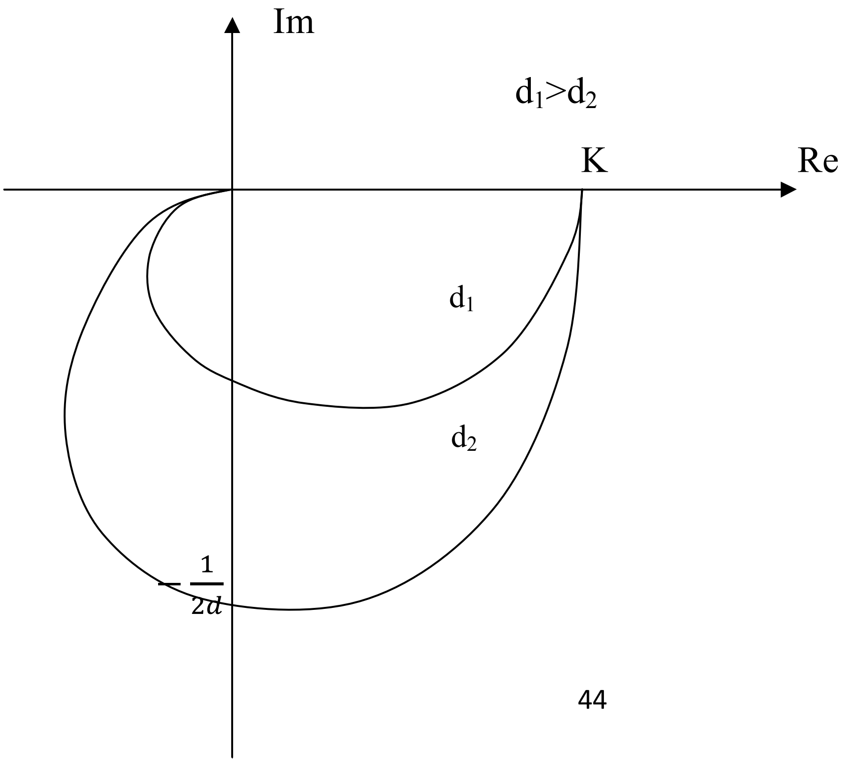
$$W(j\omega) = \frac{K}{1+2dTj\omega+(-T^2\omega^2)} = \frac{K-KT^2\omega^2-jK2dT\omega}{(1-T^2)^2+4d^2T^2\omega^2} \qquad (3.58)$$

$$Re\ (\omega) = \frac{K(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+4d^2T^2\omega^2} \qquad (3.59)$$

$$Im(\omega) = \frac{K2dT\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+4d^2T^2\omega^2} \qquad (3.60)$$

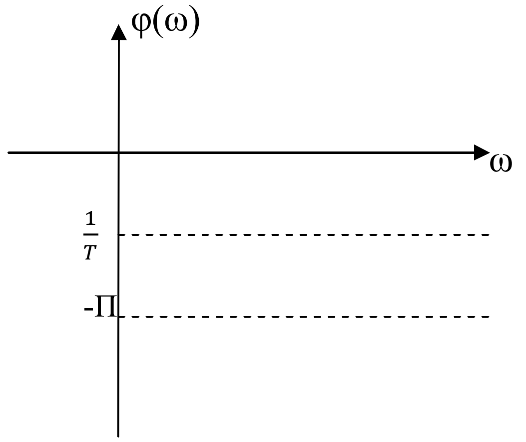
На основе (3.59.) и (3.60.) строим АЧХ, рассматриваем характерные точки:

$\omega=0$, $\omega= 1/T$, …, $\omega\rightarrow\infty$. Её внешний вид существенно зависит от коэффициента демпфирования d.



$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-T^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}} \qquad (3.61)$$

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\frac{2d\omega T}{1-\omega^2T^2} \qquad (3.62)$$



ω=0 φ(ω)→0

ω→∞ φ(ω)→-П

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

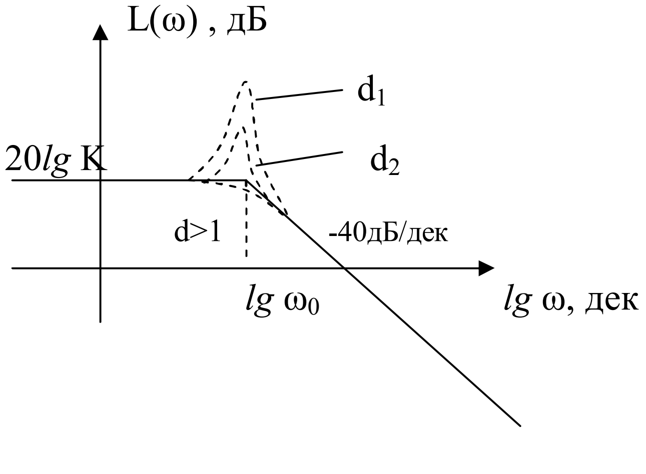
$$L(\omega) = 20lgA(\omega) = 20lgK - 20lg\sqrt{(1-T^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \qquad (3.63)$$

Строим асимптотическую ЛАЧХ:

1) <u>ОНЧ:</u> $\omega \ll \frac{1}{T}$ $L_1(\omega)=20lgK$

2) <u>ОВЧ:</u> $\omega \gg \frac{1}{T}$ $L_2(\omega) = 20lg(T\omega) - 40lgT\omega$

$$L_1(\omega_0)= L_2(\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{1}{T}$$



Реальная характеристика значительно отличается.

ЛАЧХ

0<d<1 по соотношению (3.61)

$$L(\omega) = 20lgA(\omega) = 20lgK - 20lg\sqrt{(1-T^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \qquad (3.63)$$

При $0{,}3 \le d \le 1$ можно строить упрощенную асимптотическую ЛАЧХ, отдельно рассматривая ОНЧ и ОВЧ

1) ОНЧ: $\omega << \frac{1}{T}$ $\quad L_1(\omega)=20lgK$

2) ОВЧ: $\omega >> \frac{1}{T}$ $\quad L_2(\omega) = 20lgK - 40lg(T\omega)$

На собственной частоте $L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0)$ $\qquad \omega_0 = \frac{1}{T}$

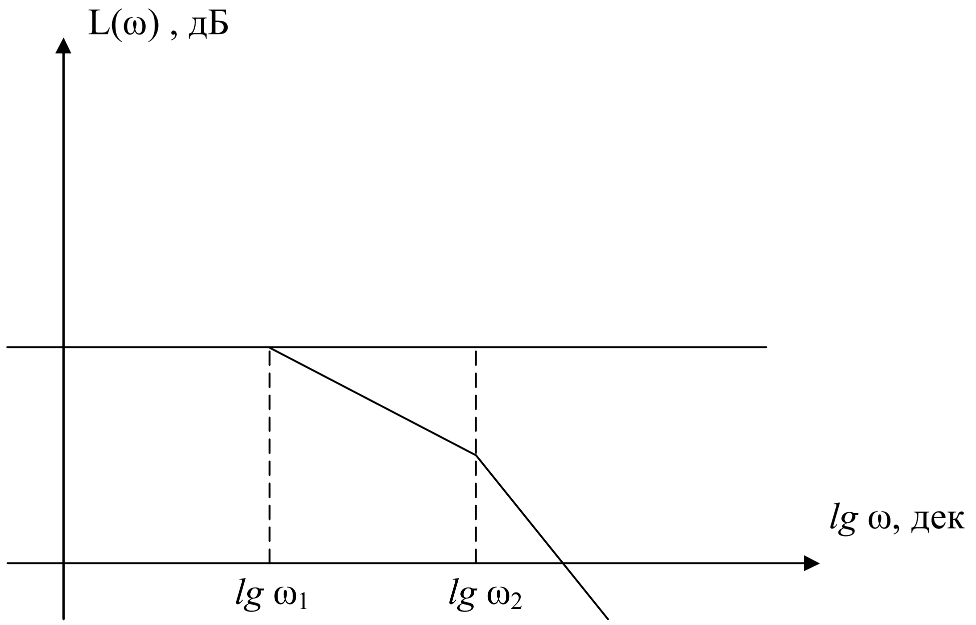
Наибольшее отличие ЛАЧХ от асимптотической характеристики наблюдается на $\omega=\omega_0$.

При $d<0{,}3$ нужно строить только точную ЛАЧХ

При $d>1$ корни характера уравнения вещественные

$$\text{и } W(p) = \frac{K}{T^2p^2 + 2dTp+1} = \frac{K}{(T_1p+1)(T_2+1)}$$

где $T_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $T_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ - постоянные времени апериодических звеньев. В этом случае асимптотическая ЛАЧХ имеет 2 “излома” на частотах $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ и может быть получена суммированием асимптотических ЛАЧХ двух апериодических звеньев.



Лекция 7

3.2 Структурные схемы

Структурная схема - графическая модель, в которой каждому элементу ставится в соответствии его динамическая характеристика.

Структурная схема может быть построена на основе дифференциальных уравнений или передаточной функции W(p).Переход дифференциального уравнения или передаточной функции W(p) к схеме может иметь несколько вариантов решения.

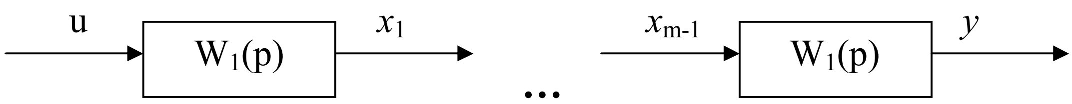
Обратная задача имеет единственное решение.

В структурную схему входят блоки и сумматоры.

3.3.Структурные преобразования

Рассматриваем способ представления структурной схемы на W(p)

3.3.1.Последовательное соединение



$$W_1(p) = \frac{y_1}{u} \qquad W_2(p) = \frac{y_2}{y_1}$$

$y_2 = W_2(p)\, y_1$

$y_1 = W_1(p)$ u.

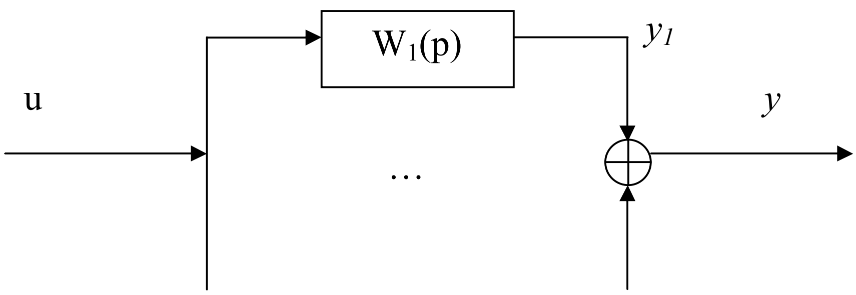
$y_2 = W_2(p)\, W_1(p)\, u \;\Rightarrow\; W_{общ}(p) = W_1(p)\, W_2(p)$

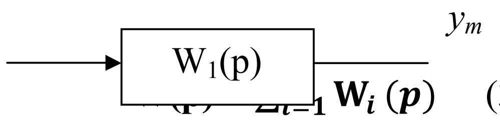
в общем виде :

$$\mathbf{W(p)} = \prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{W_i(p)} \qquad (3.64)$$

передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев.

3.3.2 Параллельное соединение звеньев

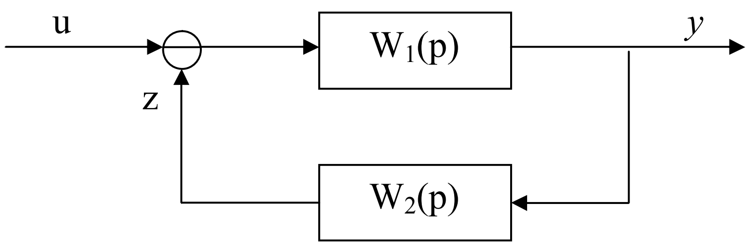




$\ldots \sum_{i=1} \mathbf{W}_{\boldsymbol{i}}\,(\boldsymbol{p})$ (3.65)

передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

3.3.3 Обратная связь



выражение для выходной переменной системы:

$$y = \mathrm{W}_1(\mathrm{p})\,[\mathrm{u}\text{-}y_2] = \mathrm{W}_1(\mathrm{p})\,[\mathrm{u} - \mathrm{W}_2(\mathrm{p})\,y] \quad =>$$

$$\mathbf{W(p)} = \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{W_1}(\boldsymbol{p})}{\mathbf{1+W_1}(\boldsymbol{p})\mathbf{W_2}(\boldsymbol{p})} \qquad (3.66)$$

Правило: передаточная функция системы с отрицательной обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого канала W_1(p), а в знаменателе сумма единицы и произведения передаточных функций прямого и обратного каналов связи.

При положительной обратной связи:

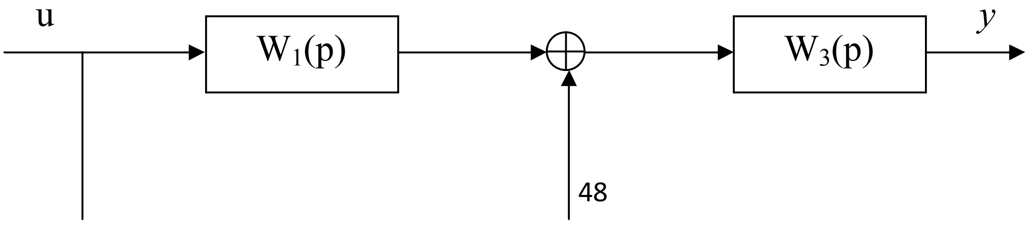
$$\mathbf{W(p)} = \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{W_1}(\boldsymbol{p})}{\mathbf{1-W_1}(\boldsymbol{p})\mathbf{W_2}(\boldsymbol{p})} \qquad (3.67)$$

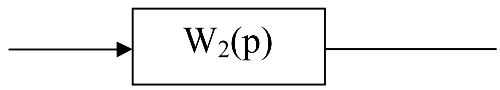
3.3.4 Правило переноса

В некоторых случаях для получения общей передаточной функции системы с помощью структурных преобразований удобнее было бы перенести точку приложения сигнала через звено ближе ко входу или выходу.

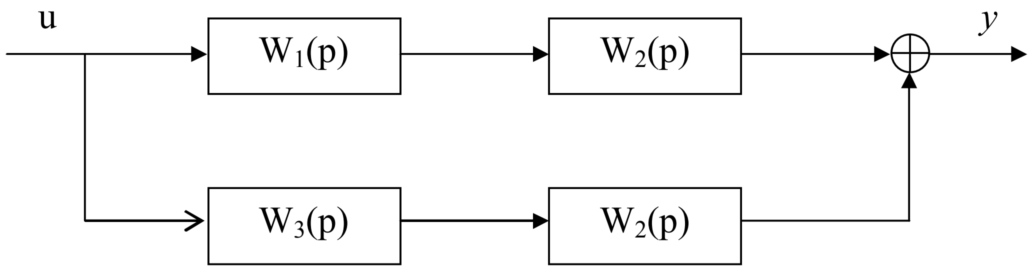
Правило: передаточная функция системы должна оставаться неизменной.

1)Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения сигнала переносится через звено ближе к выходу.





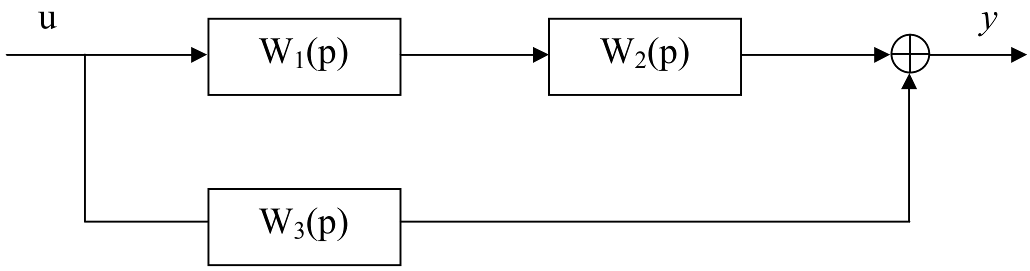
$$W(p) = (W_1(p) + W_2(p))\ W_3(p) = W_1(p)\ W_3(p) + W_2(p)\ W_3(p) \qquad (3.68)$$



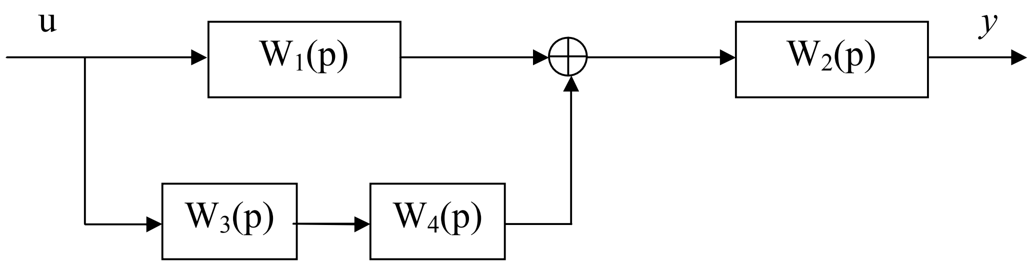
Видно, что при переносе ближе к выходу точки приложения сигнала через звено в канал добавляется передаточная функция $W_3(p)$

Правило: При переносе точки приложения сигнала ближе к выходу системы, в канал следует добавить передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

2)Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения сигнала переносится через звено ближе к входу.



$$W(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p) \qquad (3.69)$$

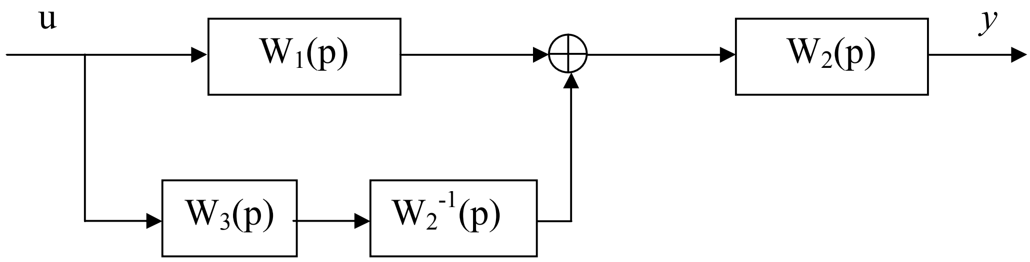


$$W(p) = (W_1(p) + W_3(p)W_4(p))\ W_2(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p)W_4(p)W_2(p) \qquad (3.70)$$

В соответствии с правилом преобразования передаточные функции обеих структурных систем должны быть одинаковыми.

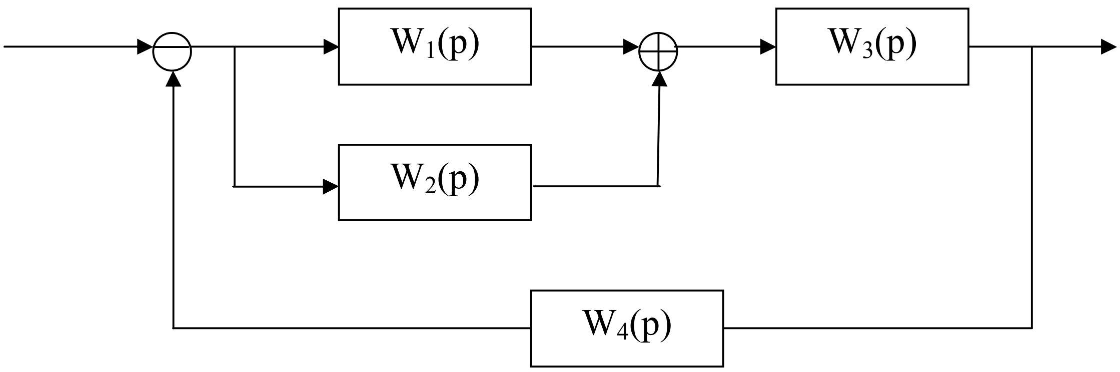
$$W_1(p)W_2(p) + W_3(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p)W_4(p)W_2(p) \qquad (3.71)$$

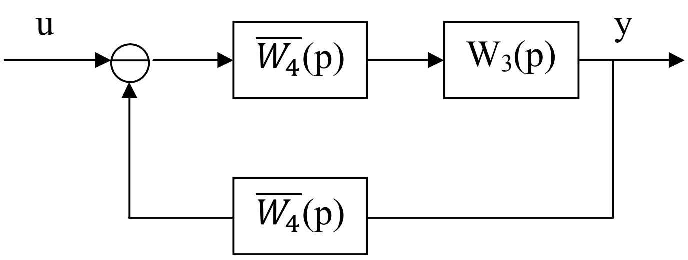
$$\Rightarrow \; W_1(p) = W_1^{-1}(p)$$

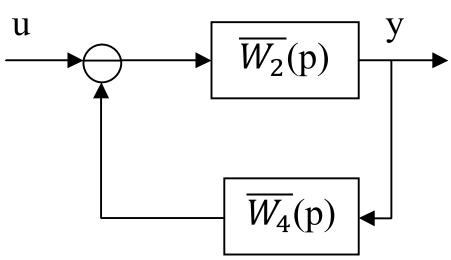


<u>Правило:</u> При переносе точки приложения сигнала ближе ко входу системы через звено, в соответствующий канал системы следует добавить передаточную функцию обратной передаточной функции звена, через которое осуществляется перенос.

<u>Пример 3.1</u> : Определить общую передаточную функцию системы







$\overline{W_1}(p) = W_1(p) + W_2(p)$

$\overline{W_2}(p) = \overline{W_1}(p) + W_1(p)$

$$W(p) = \frac{\overline{W_2}(p)}{1+\overline{W_2}(p)\,W_4(p)}$$

С учётом $\overline{W_1}(p)$ и $\overline{W_2}(p)$ W(p) будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{[W_1(p)+W_2(p)]\,W_3(p)}{1+[W_1(p)+W_2(p)]\;W_3(p)\,W_4(p)}\ .$$

3.4 Структурные схемы, соответствующие дифференциальным уравнениям

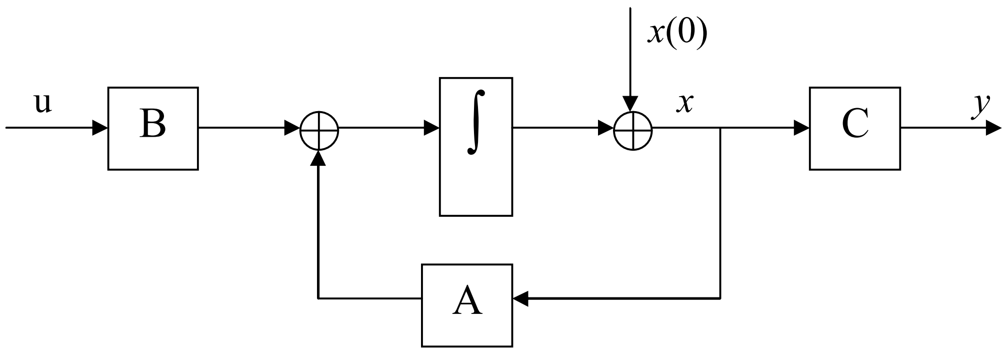
Этот метод основан на использовании дифференциальных уравнений для составления структурных систем. Рассмотрим объект, поведение которого описывают векторно – матричными уравнениями (2.1.) и (2.2.).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\,, & x\epsilon R^n, \quad u\epsilon R^m \\ y = Cx, & y\epsilon R^m\,, \quad n \geq m \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение состояния (первое уравнение) по времени и определим переменные состояния и выхода в виде:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t (Ax + Bu)\; d\tau \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad (3.72)$$

Уравнение (3.72.) является основанием для составления схемы:



Структурную схему ,соответствующую уравнениям (3.72) удобнее изображать с выходных переменных y,причем выходные и входные переменные объекта желательно располагать на одной горизонтальной прямой.

Для одноканального объекта структурную схему можно составить по уравнению (2.3)

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y = bu$$

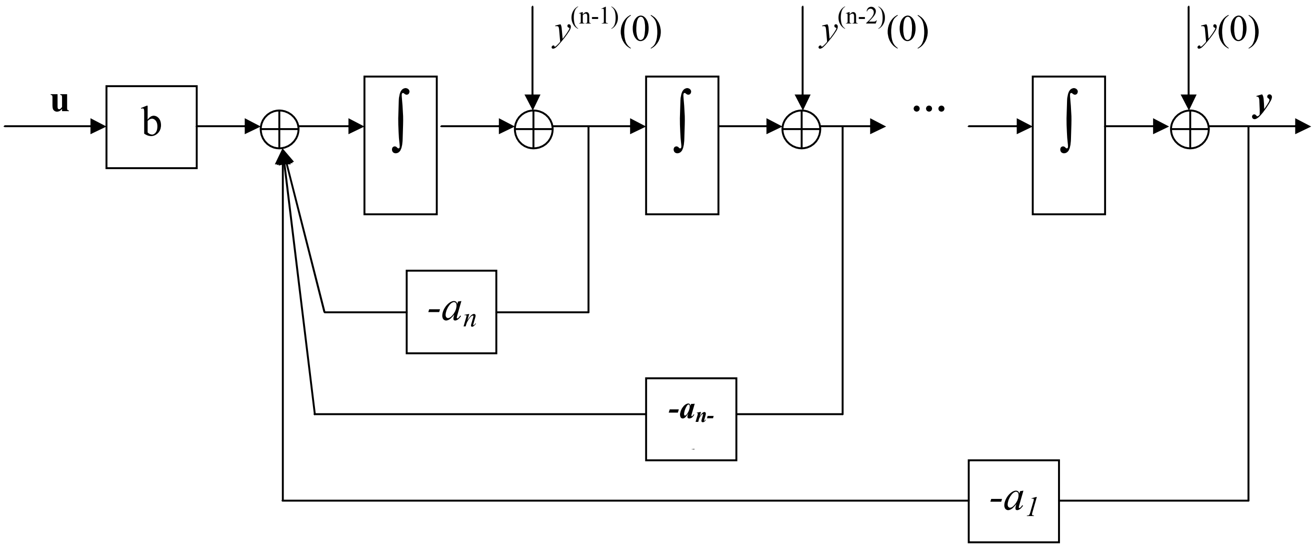
Разрешим его относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = - a_1 y - \ldots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + b u \qquad (3.73)$$

Проинтегрировав (3.73) n раз, получим:

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(0) + \int_0^t y^{(n)}(t)\,dt, \\ \ldots \\ \dot{y}(t) = \dot{y}(0) + \int_0^t \ddot{y}(t)\,dt \\ y(t) = y(0) + \int_0^t \left(-a_1 y - \cdots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + b\mathrm{u}\right) dt \end{cases} \qquad (3.74)$$

Системе уравнений (3.74.) соответствует структурная схема:



Как видим, одноканальный объект управления , поведение которого описывается уравнением (3.73.) структурно всегда можно представить в виде цепочки из n последовательно соединенных интеграторов с обратными связями.

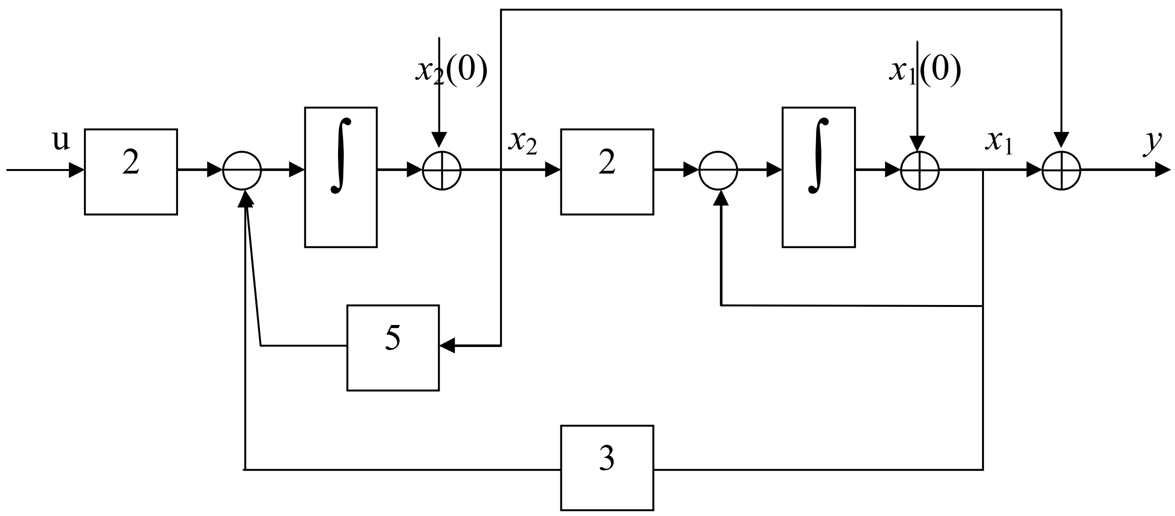
<u>Пример 3.2 </u>: Изобразить структурную схему объекта, модель которого задана системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 + 2\mathrm{u} \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (3.75)$$

Предварительно проинтегрируем 2 первых уравнения

$$\begin{cases} x_1(\mathrm{t}) = x_1(0) + \int_0^{\mathrm{t}} (-x_1 + 2x_2)\ \mathrm{dt} \\ x_2(\mathrm{t}) = x_2(0) + \int_0^{\mathrm{t}} (-3x_1 - 5x_2 + 2\mathrm{u})\ \mathrm{dt} \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (3.76)$$

В соответствии с интегральными уравнениями изобразим структурную схему системы:



3.5 Переход от придаточной функции к каноническому описанию.

Мы уже убедились, что систему, описанную в переменных состояниях легко представить в виде структурной схемы.

Теперь обсудим наиболее известные способы преобразования математической модели ОУ в виде произвольной передаточной функции к описанию в переменных состояниях. Для этой цели используем соответствующие структурные схемы.

Рассмотрим объект управления, описываемый периодической функцией:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{p^n + a_n p^{(n-1)} + \ldots + a_1} \quad (m < n) \qquad (3.77)$$

Есть 2 варианта перехода от W(p) к описанию в переменных состояниях. Предварительно представим (3.77) в виде произведения двух передаточных функций:

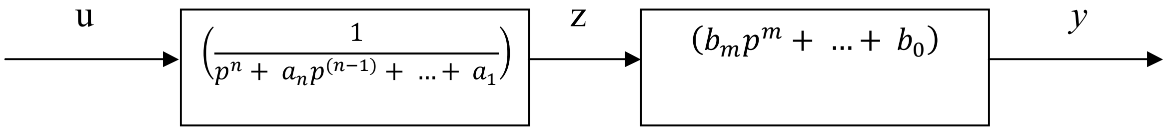
$$1)\ W(p) = \left(\frac{1}{p^n + a_n p^{(n-1)} + \ldots + a_1}\right)(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0) \quad (3.78)$$

$$2)\ W(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0)\left(\frac{1}{p^n + a_n p^{(n-1)} + \ldots + a_1}\right) \quad (3.79)$$

Каждому из этих представлений (3.77) соответствует своя простая модель в переменных состояниях, которая называется <u>канонической формой</u>.

3.5.1 Первая каноническая форма

Она соответствует W(p) (3.78.). Представим соответствующую структурную схему:



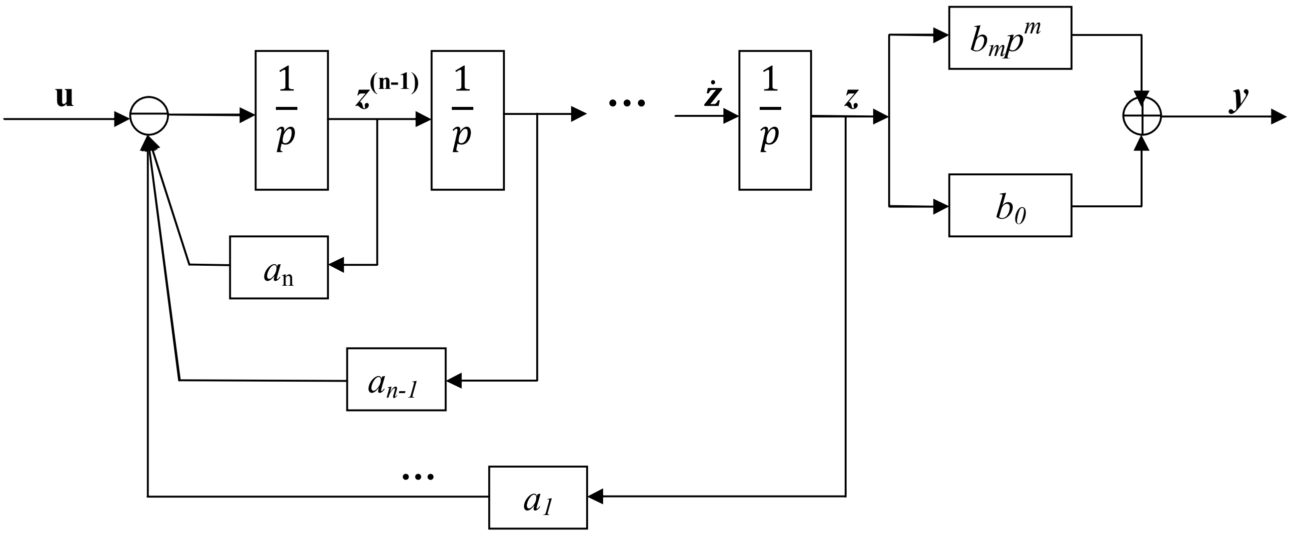
Для каждого звена системы запишем соответствующие операторные уравнения:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{p^n + a_n p^{(n-1)} + \ldots + a_1}\right) z = u \\ x(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0)\, z = y \end{cases} \qquad (3.80)$$

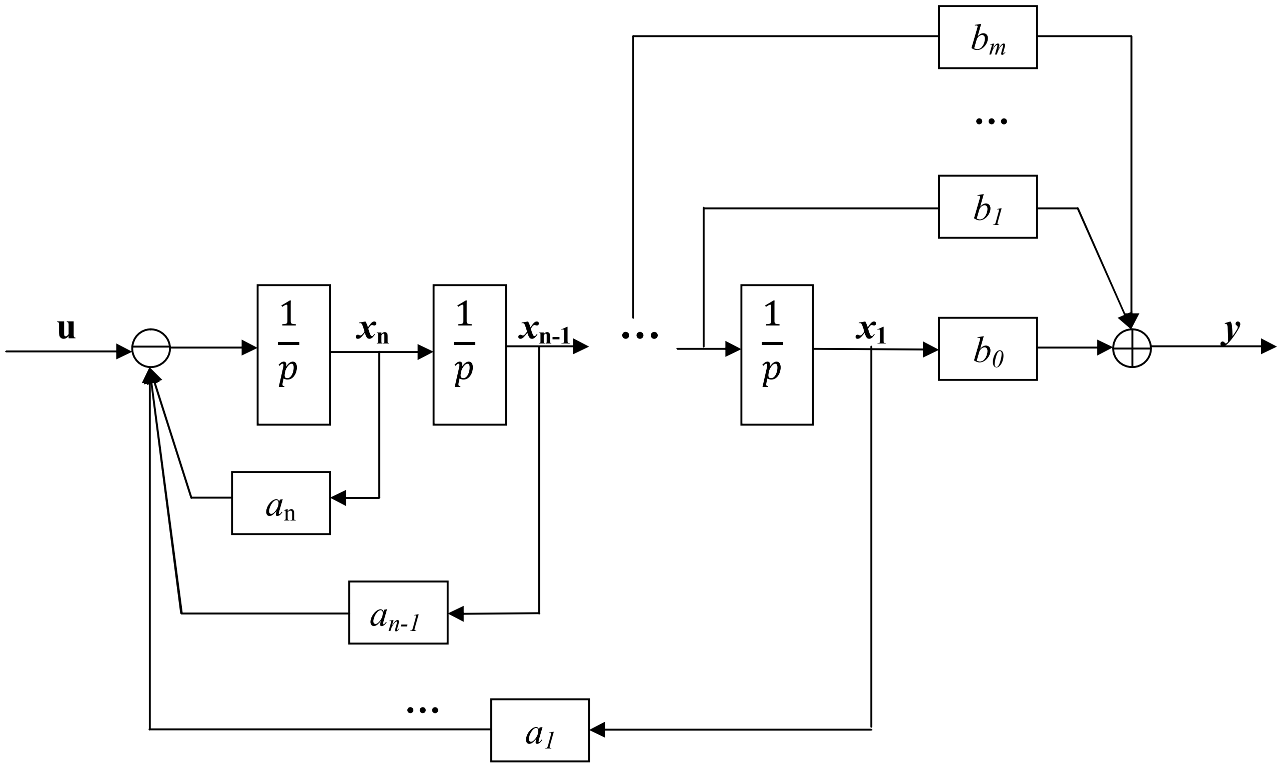
Из первого уравнения системы (3.80) выразим старшую производную:

$$p^n z = u - a_n p^{n-1} z - \ldots - a_1 z$$

(3.81) позволяет представить первое уравнение (3.80) в виде цепочки n интеграторов с обратными связями, а выходная переменная y формируется в соответствии со вторым уравнением (3.80) как сумма переменной z и её m производных.



Используя структурные преобразования, получим структурную схему системы:



Итак, структурная схема, соответствующая W(p) (3.78) состоит из цепочки *n* интеграторов , где *n*-порядок системы. Причем в обратной связи находятся коэффициенты знаменателя исходной W(p) (3.77), а в прямой связи коэффициенты полинома ее числителя.

От полученной структурной схемы легко перейти к модели системы в переменных состояния. С этой целью выход каждого интегратора примем за переменную состояния:

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}\ , \quad \dots \quad x_n = z^{(n-1)} \qquad (3.82)$$

С учетом (3.82) запишем дифференциальные уравнения состояния и уравнение выхода системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + \mathrm{u} \\ y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m-1} \end{cases} \qquad m \leq n \qquad (3.88)$$

(3.83) можно представить в векторно-матричной форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \;\; b_1 \;\; \dots \;\; b_m \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0].$$

Модель системы в переменных состояния (3.83) называют первой канонической формой.

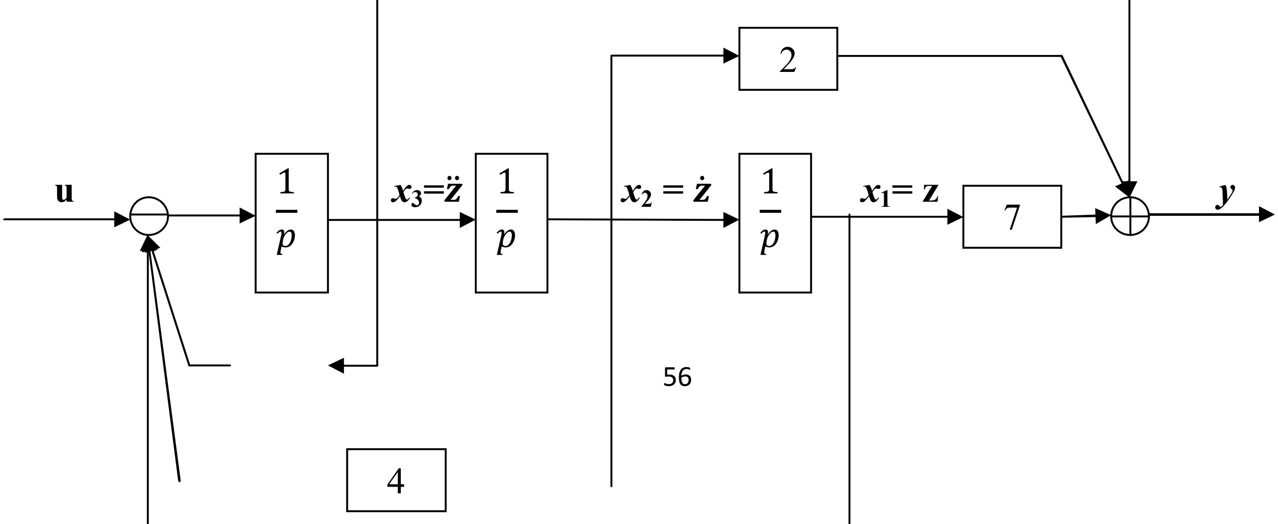
3.5.2 Вторая каноническая форма.

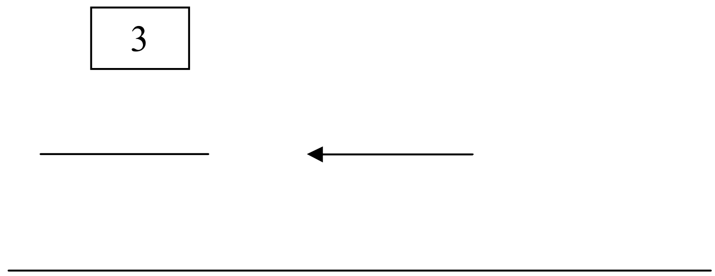
Все рассуждения аналогичны (3.51.) работаем с W(p) (3.79). Рассматривать не будем.

пример 3.3: Изобразить структурную схему, соответствующую первой канонической форме для системы, модель которой описывается:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p^2 + 2p + 7}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}$$

$$\begin{cases} (p^3 + 3p^2 + 4p + 1)z = \mathrm{u} \\ (5p^2 + 2p + 7)z = y \end{cases}$$





На основании этой структурной схемы запишем описание системы в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + \mathrm{u} \\ y = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

3.6 Область применения структурного метода.

Этот метод удобен при расчете линейных автоматических систем, но имеет свои ограничения. Метод предполагает использование передаточных функций, поэтому может применяться при нулевых начальных условиях.

При использовании структурного метода необходимо придерживаться следующего правила: при любом преобразовании системы ее порядок не должен уменьшаться, т.е. недопустимо сокращение одинаковых множителей в числителе и знаменателе W(p).

Сокращая одинаковые множители, мы тем самым выбрасываем из системы реально существующие звенья.

Лекция 8

4.Устойчивость линейных систем

В этом разделе мы начинаем исследование свойств процессов, происходящих в САУ. Важнейшим из них является устойчивость – основное качественное свойство САУ, без которых они неработоспособны.

Физически устойчивость означает, что при ограниченном входном воздействии выходной сигнал также является ограниченным и процессы в системе стремятся к определенному значению при любых начальных условиях.

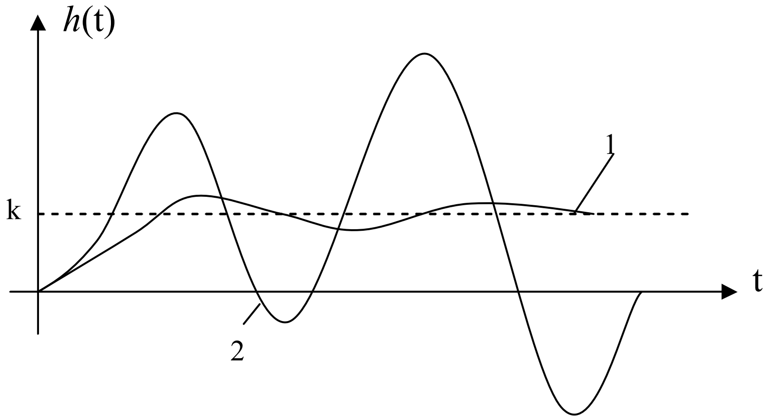
В случае линейных систем устойчивость определяется только её структурой и параметрами и не зависит от величины внешних воздействий и начальных условий.

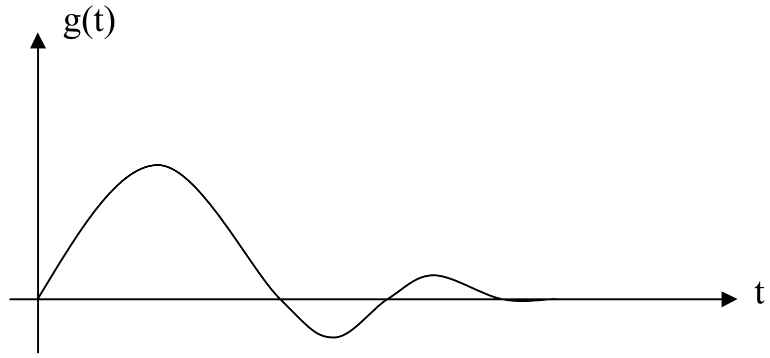
Переходные характеристики устойчивых (1) и неустойчивых (2) САУ

Для переходной характеристики устойчивой системы:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = k$$

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$





Оценим поведение линейных САУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{Bu}\,, \; x\epsilon R^n, \; \mathrm{u}\epsilon\mathrm{R^m} \\ \quad y = \; Cx, \; y\epsilon\mathrm{R^m}\,, \quad \mathrm{n} \geq \mathrm{m} \end{cases} \qquad (4.1)$$

Переходные процессы определим как решение векторно-матричного уравнения следующим образом

$$\mathrm{x(t)} = e^{At}\,\mathrm{x(0)} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\mathrm{u}\,(\tau)\,d\tau \qquad (4.2)$$

Свободная составляющая движения(из произвольных начальных условий)

Вынужденная составляющая движения (под действием управляющих воздействия)

Равновесный (статический) режим

Это один из основных режимов работы САУ, при котором переменные состояния с течением t не меняются, а все производные координат состояния равны нулю.

$$\mathrm{u} = \mathrm{const} \qquad \dot{x} = 0.$$

Покажем .ч то процесс движения к равновесию можно считать свободным, т.е. соответствующим первому слагаемому. (4.2)

Запишем уравнения статики:

$0 = \mathrm{A}x^0 + \mathrm{Bu} \qquad (4.3)$

$x^{0\,=}\,(-\mathrm{A}^{-1})\,\mathrm{Bu} \qquad (4.4)$

Введём новые координаты. Равные отклонениям от точки равновесия

$$\Delta = x - x^0 \qquad (4.5)$$

$\dot{\Delta} = \dot{x} - \dot{x}^0 = \dot{x}$, т.к. $\dot{x}^0 = 0$

$$\dot{\Delta} = \mathrm{A}x + \mathrm{Bu} \quad (4.6)$$

Выразим из (4.5) x и подставим в (4.6)

$\dot{\Delta} = \mathrm{A}\,(\Delta + x^0) + \mathrm{Bu}$

С учетом (4.4), получаем:

$$\dot{\Delta} = A\Delta + A(-A^{-1})\,Bu + Bu = A\Delta \qquad (4.7)$$

(4.7) не содержит u, поэтому переходный процесс по Δ порождается только ненулевыми начальными условиями согласно уравнению

$$\Delta(t) = e^{At}\,\Delta(0) \qquad (4.8)$$

Линейная САУ, описываемая уравнениями (4.1) будет устойчива. Если для её процессов выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(t) = 0 \qquad (4.9)$$

(4.9) можно записать:

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\,\Delta(0) = 0$$

Таким образом, видно, что устойчивость линейной системы (4.1) определяется только свойствами автономной системы, которая не зависит от внешних воздействий. Это означает, что для анализа устойчивости можно не переходить к уравнениям в отклонениях от состояния равновесия, а исследовать свойства матрицы А.

4.1 Условия устойчивости линейных систем

4.1.1 Общие условия устойчивости линейных САУ.

Для устойчивости линейных САУ (4.1) необходимо и достаточно, чтобы вещественная часть всех собственных значений матрицы А(корней характеристического уравнения)была отрицательная.

$$A(p) = det(pI - A) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1 = 0 \qquad (4.10)$$

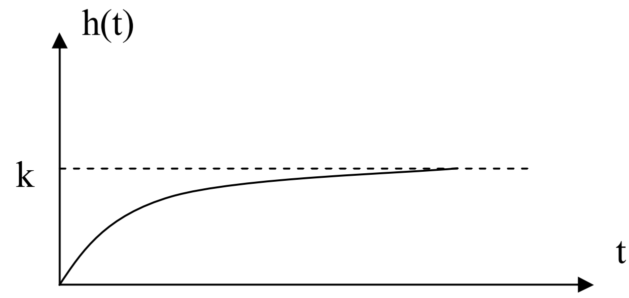
Корни (4.10) λ_i ($i = \overline{1,n}$) $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$

Условие устойчивости:

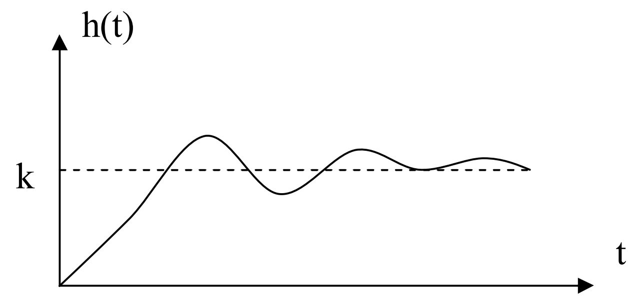
$$\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\} < 0 \quad (\text{где } i = \overline{1,n}) \qquad (4.11)$$

Характер переходных процессов в системе определяется значениями λ_i

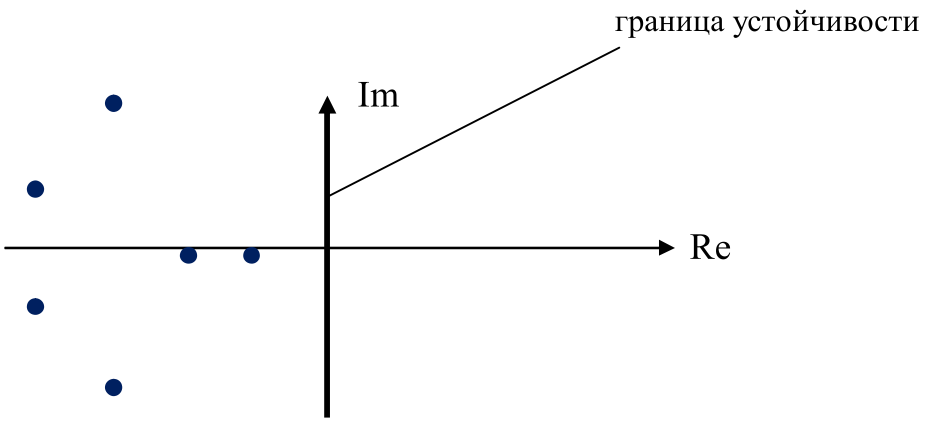
1) λ_i - вещественные отрицательные корни



2) λ_i - комплексно –сопряженные с отрицательной вещественной частью $\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\} < 0$



Итак:



Для устойчивости линейных САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения располагались в левой полуплоскости плоскости корней.

4.1.2 Необходимое условие устойчивости

Если все λ_i - вещественные

$A(p) = det(pI - A) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1 = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\ldots(p - \lambda_n).$

$\lambda_i = -\alpha_i$, $\alpha_i > 0$ =>

$$A(p) = (p + \alpha_1)(p + \alpha_2) \ldots (p + \alpha_n) = 0$$

Тот же результат получим для левых комплексно-сопряженных корней.

Таким образом, коэффициенты характеристического уравнения устойчивой системы всегда будут положительными.

Если хотя бы один коэффициент характеристического уравнения САУ < 0 , то она неустойчива и дополнительной проверки не требует.

<u>Пример 4.1</u>: Проверить устойчивость системы первого порядка:

$W(p) = \frac{K}{Tp+1}$

$A(p) = Tp + 1 = 0$

Корень - $\lambda = -\frac{1}{T}$, который при T>0 будет вещественным отрицательным.

=> является необходимым и достаточным условием устойчивости.

<u>Пример 4.2</u>: Проверит устойчивость системы второго порядка

$W(p) = \frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}$

$T^2p^2 + 2dTp + 1 = 0$

$D = 4d^2T^2 - 4T^2 = 4T^2(d^2-1)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2dT \pm 2T\sqrt{d^2-1}}{2T^2} = -\frac{d}{T} \pm \frac{\sqrt{d^2-1}}{T}$$

$Re\{\lambda_1, \lambda_1\} < 0$ при $T>0$ $d>0$.

Таким образом, следует, что *положительность коэффициентов характеристического уравнения для линейных САУ первого и второго порядка является необходимым и достаточным условием устойчивости*.

4.2 Критерии устойчивости

4.2.1 Критерий устойчивости Гурвица

Сформулирован в 1895 г.

Критерий: Для устойчивости линейных САУ необходимо и достаточно . чтобы все диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными.

$$\Delta_i > 0 \qquad i = \overline{1, n} \qquad (4.12)$$

Составление матрицы Гурвица

$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a_n > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0$$

…………..

$\Delta_n = det\mathrm{H} = a_1\,\Delta_{n-1}$

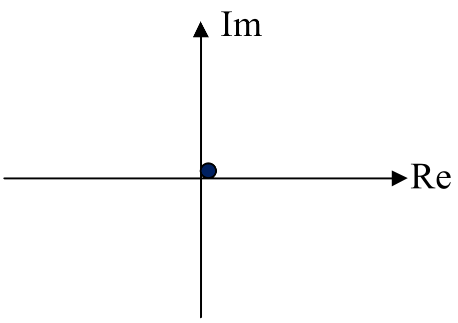
Условие границы устойчивости:

$$\begin{cases} \Delta_n = det\mathrm{H} = a_1\,\Delta_{\mathrm{n-1}} = 0 \\ \Delta_i > 0,\ i = \overline{1, (n-1)} \end{cases} \qquad (4.13)$$

Условие (4.13) делится на 2

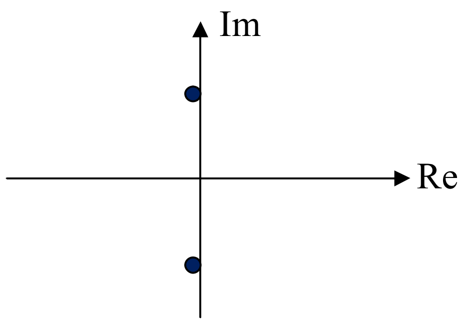
1) $\begin{cases} a_1 = 0, \\ \Delta_i > 0,\ i = \overline{1, (n-1)} \end{cases}$

Один из полюсов равен 0.
.



2) $\begin{cases} \Delta_{n-1} = 0, \\ \Delta_i > 0,\ i = \overline{1, (n-1)} \end{cases}$

2 комплексно – сопряженных корня, расположенных на мнимой Im оси.



Пример 4.3: Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость.

$$\dddot{y} + a_3\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1 = b\mathrm{u}$$

$A(p) = p^3 + a_3p^2 + a_2p + a_1 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a_3 > 0$

$\Delta_2 = a_3a_2 - a_1 > 0 \qquad a_3a_2 > a_1$

$\Delta_3 = a_1\,\Delta_2 \qquad a_1 > 0$

Т.к. необходимое условие устойчивости : $a_i > 0 \qquad i = \overline{1,3}$,
то условие устойчивости для системы третьего порядка будет: $a_3a_2 > a_1$

4.2.2 Критерий устойчивости Михайлова

Сформулирован в 1938 г.

Для анализа устойчивости системы предлагается исследовать характеристический комплекс $F(j\omega)$, который получается из характеристического полинома.

$A(p) = p^n + a_np^{n-1} + \ldots + a_2p + a_1$

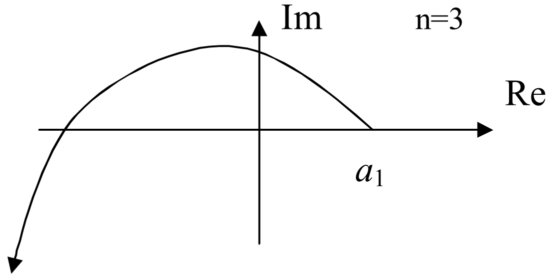
$p \rightarrow j\omega$

$$F(j\omega) = (j\omega)^n + a_n(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_2 j\omega + a_1 = \mathrm{Re}_F(\omega) + j\,\mathrm{Im}_F(\omega) = A_F(\omega)e^{j\varphi_F(\omega)} \quad (4.14)$$

При конкретном значении $\omega = \omega_1$ $F(j\omega)$ (4.14) - это число, которое можно отметить на комплексной плоскости в виде вектора, соединяющего начало координат с точкой: $\{\mathrm{Re}_F(\omega_1); j\,\mathrm{Im}_F(\omega_1)\}$.

При изменении $\omega = \overline{0,\infty}$ конец вектора $F(j\omega)$ описывает на комплексной плоскости кривую. Которую называют годографом Михайлова $\omega=0$ на вещественной оси в точке : $\{a_1; j0\}$.

Критерий: для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при $\omega = \overline{0,\infty}$ начинался на вещественной очи в точке a_1 и проходил последовательно против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, не обращаясь в нуль и стремясь к ∞ в n-ом квадранте.

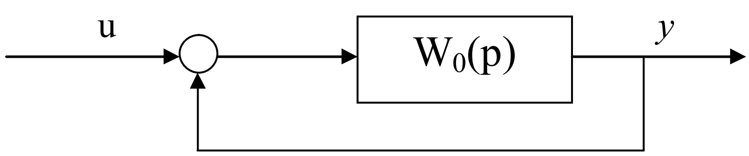


Условия границы устойчивости

$$\begin{cases} Re_F(\omega_0) = 0 \\ Im_F(\omega_0) = 0 \end{cases} \qquad (4.15)$$

ω_0 – частота незатухающих колебаний, которые возникают в системе на границе устойчивости.

<u>Пример 4.4</u> :Проверить устойчивость системы, структурная схема которой приведена:



$W_0(p) = \frac{2}{p^3+2p^2+2p+1}$

Передаточной функции замкнутой системы:

$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2}{p^3+2p^2+2p+3}$

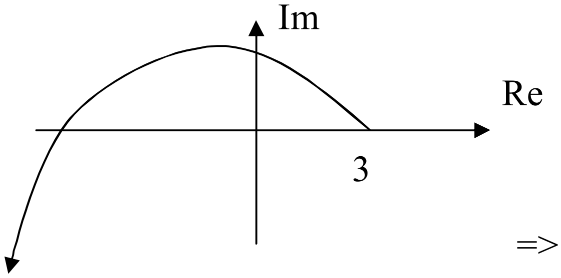
Характеристический полином:

$F(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 3$

Выражения для годографа Михайлова

$$F(p) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3 = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 3 = \underbrace{(3-2\omega^2)}_{Re_F(\omega)} + j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im_F(\omega)}$$

ω	0	1	1.22	1.41	…	∞
$Re_F(\omega)$	3	1	0	-1	…	$-\infty$
$Im_F(\omega)$	0	1	0.61	0	…	$-\infty$



=> система устойчива.

Лекция 9

4.Устойчивость линейных непрерывных систем

4.1.Основные понятия

Мы начинаем исследовать свойства процессов , происходящих в системах автоматики.

Устойчивость – важнейшее свойство САУ, без которого она неработоспособна.

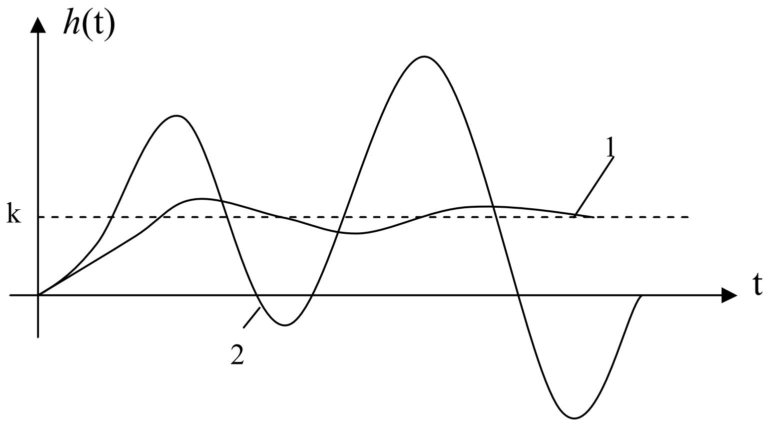
Физически устойчивость означает , что при ограниченном входном воздействии выходной сигнал также ограничен и процессы в системе стремятся к определенному значению при любых начальных условиях.

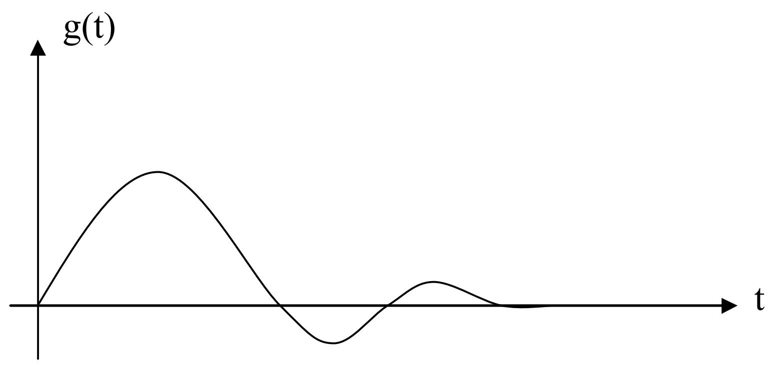
Для линейной системы устойчивость определяется только её структурой и параметрами , и не зависит от величины внешних воздействий и начальных условий.

Для переходной характеристики устойчивой системы:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = k \qquad (4.1)$$

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \qquad (4.2)$$





Рассмотрим линейную систему :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{Bu}\,, \ x \epsilon R^n, \\ \quad y = \ Cx, \ y, u \epsilon \mathrm{R^m}\,, \qquad \mathrm{n} \geq \mathrm{m} \end{cases} \qquad (2.1); \ (2.2)$$

Нас интересует изменение переменных состояния x(t) во времени.

Одним из основных режимов работы САУ является равновесный (статистический) режим.

Равновесный –это такой режим ,при котором переменные состояния с течением времени не меняются ,т.е.

$$\dot{x}=0 \qquad (4.3)$$

с учетом (4.3.) и (2.1.) примет вид:

$$0 = \mathrm{A}x^0 + \mathrm{Bu} \qquad (4.4)$$

Где x^0 - равновесное состояние

$$x^{0\,=}(-\mathrm{A}^{-1})\ \mathrm{Bu} \qquad (4.5)$$

при $det\mathrm{A} \neq 0$

Рассмотрим поведение системы в окрестностях равновесного состояния x^0.

Введем новые координаты равные отклонениям от точки равновесия.

$$\Delta = x - \ x^0 \qquad (4.6)$$

$$\dot{\Delta} = \dot{x} - \dot{x}^0 = \dot{x}\ , \quad \text{т.к. } \dot{x}^0 = 0 \quad (4.7)$$

$$\dot{\Delta} = \mathrm{A}x + \mathrm{Bu} = \ \mathrm{A}\ (\Delta + x^0) + \mathrm{Bu}\ (\text{с учётом } (4.5) = \mathrm{A}\Delta + \mathrm{A}(-\mathrm{A}^{-1})\ \mathrm{Bu} + \mathrm{Bu} = \mathrm{A}\Delta$$

$$\dot{\Delta} = \mathrm{A}\Delta \quad (4.8)$$

Из (4.8.) видно ,что устойчивость движения зависит только от свойств ОУ и не зависит от u.

Определение: Система называется устойчивой, если с течением времени отклонение от РС→0

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(t) = 0 \qquad (4.9)$$

4.2 Условия устойчивости линейных систем

В соответствии с (4.9.) можно сказать , что устойчивость линейной системы определяется теми свойствами автономной системы , которая не зависит от внешних воздействий .Это означает ,что для анализа устойчивости достаточно исследовать свойства А.

$$det(pI - A) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1 = 0 \qquad (4.10)$$

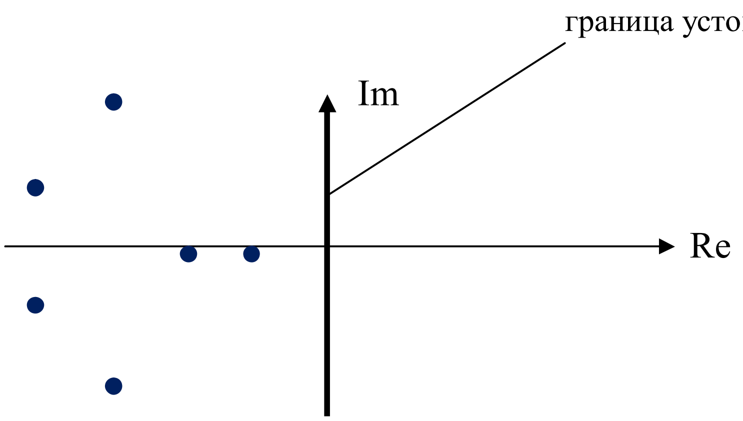
-характеристический полином

4.2.1 Необходимое и достаточное условия устойчивости линейной системы

Линейная система будет устойчива только тогда ,когда все корни характеристического уравнения (4.10.) будет иметь отрицательную вещественную часть

$$\mathrm{Re}\ \{\lambda_i\} < 0 \qquad (\text{где } i = \overline{1, n}\,) \qquad (4.11)$$

$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ - корни



4.2.2. Необходимое условие устойчивости

Чтобы линейная система была устойчива , надо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения (4.10.) были положительными.

Внимание! Положительность коэффициентов (4.10.) не гарантирует устойчивость системы, необходима дополнительная проверка.

Пример 4.1: Проверить устойчивость системы

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}$$

$$A(p) = Tp + 1 = 0$$

Корень - $\lambda = -\frac{1}{T}$, который при T>0 будет вещественным отрицательным.

=> является необходимым и достаточным условием устойчивости.

Пример 4.2: Проверит устойчивость системы второго порядка

$W(p) = \frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}$

$T^2p^2 + 2dTp + 1 = 0$

$D = 4d^2T^2 - 4T^2 = 4T^2(d^2-1)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2dT \pm 2T\sqrt{d^2-1}}{2T^2} = -\frac{d}{T} \pm \frac{\sqrt{d^2-1}}{T}$$

$Re\{\lambda_1, \lambda_1\} < 0$ при $T>0$ $d>0$.

Таким образом, *положительность коэффициентов характеристического уравнения является таким же необходимым и достаточным условием устойчивости систем 2 порядка.*

4.2 Критерии устойчивости

4.2.1 Критерий устойчивости Гурвица

Сформулирован в 1895 г.

Матрица Гурвица составляется по характеристическому уравнению:

$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_1 \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

Правило составления матрицы Гурвица : на главной диагонали сверху вниз выписываются по порядку коэффициенты ($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$). В каждом столбце вниз от диагонали записывают коэффициенты при возрастающих степенях оператора p, вверх –при убывающих степенях p. Недостающие элементы в столбце дополняются нулями.

Критерий: Для устойчивости линейных САУ необходимо и достаточно . чтобы все диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными.

$$\Delta_i > 0 \qquad i = \overline{1,n} \qquad (4.13)$$

Где Δ_i - определитель Гурвица

$\Delta_1 = a_n$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0$

…………..

$\Delta_n = det\text{H} = a_1\,\Delta_{n-1}$

Поскольку Δ_{n-1} должно быть положительным ,то последнее условие соответствует требованию $a_1>0$.

Следствие: Условие границы устойчивости.

границы устойчивости:

$$\begin{cases} \Delta_n = det\text{H} = a_1\,\Delta_{\text{n}-1} = 0 \\ \Delta_i > 0,\ i = \overline{1,(n-1)} \end{cases} \qquad (4.14)$$

Условие (4.13) делится на 2

1) $\begin{cases} a_1 = 0, \\ \Delta_i > 0,\ i = \overline{1,(n-1)} \end{cases}$

Один из полюсов равен 0.

.

2) $\begin{cases} \Delta_{n-1} = 0, \\ \Delta_i > 0,\ i = \overline{1,(n-1)} \end{cases}$

2 комплексно – сопряженных корня, расположенных на мнимой Im оси.

На практике критерий Гурвица применяют для анализа устойчивости систем невысокого порядка.

Пример 4.3: Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость.

$$\dddot{y} + a_3\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1 = b\text{u}$$

$\text{A(p)} = \text{p}^3 + a_3\text{p}^2 + a_2\text{p} + a_1 = 0$

$\text{H} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = a_3 > 0$

$\Delta_2 = a_3a_2 - a_1 > 0 \qquad a_3a_2 > a_1$

$\Delta_3 = a_1 \Delta_2$ $\qquad$ $a_1 > 0$

Т.к. необходимое условие устойчивости : $a_i > 0$ $\quad i = \overline{1,3}$,
то условие устойчивости для системы третьего порядка будет: $a_3 a_2 > a_1$

4.2.2 Критерий устойчивости Михайлова

Сформулирован в 1938 г.

Для анализа устойчивости системы предлагается исследовать характеристический комплекс $F(j\omega)$, который получается из характеристического полинома.

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1$$

$$p \rightarrow j\omega$$

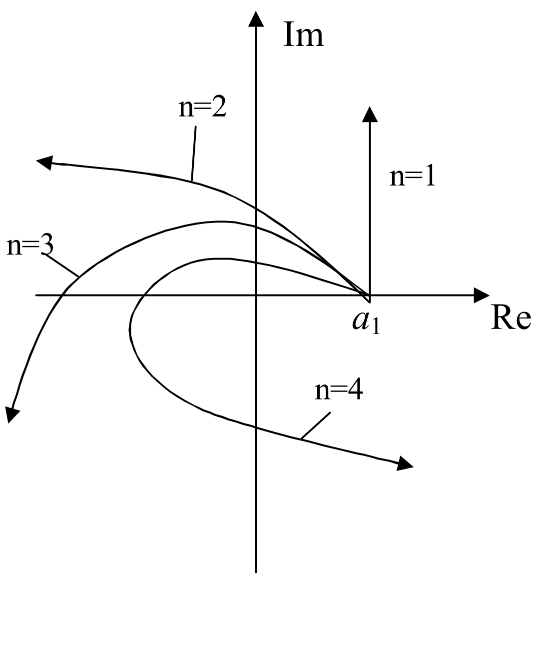
$$F(j\omega) = (j\omega)^n + a_n (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_2 j\omega + a_1 = \mathrm{Re}_F(\omega) + j\,\mathrm{Im}_F(\omega) = A_F(\omega) e^{j\varphi_F(\omega)} \quad (4.15)$$

Задавая разные значения ω от 0 до ∞, считаем $F(j\omega)$.

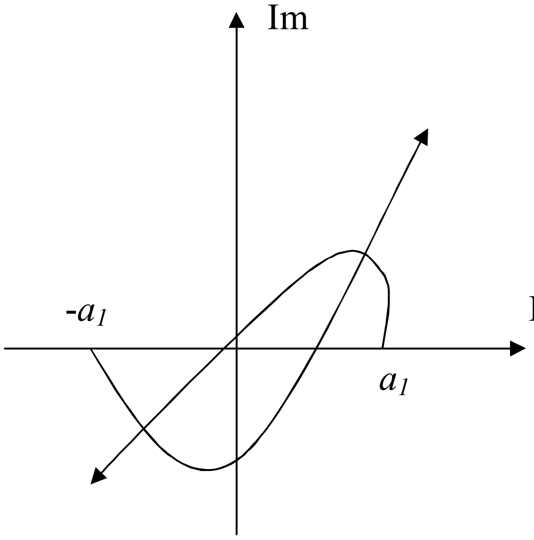
Точка $F(j\omega)$ выписывает на комплексной плоскости кривую, которую называют <u>годографом Михайлова .</u> Причем начинает годограф в точке : $\{ a_1; j0\}$.

<u>Критерий</u>: для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при $\omega = \overline{0,\infty}$ начинался на вещественной очи в точке a_1 и проходил последовательно против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, не обращаясь в нуль и стремясь к ∞ в n-ом квадранте.

Годографы Михайлова для устойчивых линейных систем n-го порядка, где $n = \overline{1,4}$



Годографы Михайлова для неустойчивых линейных систем

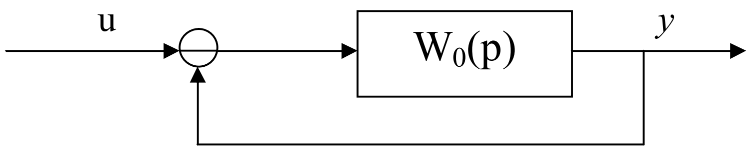


Условия границы устойчивости

$$\begin{cases} Re_F(\omega_0) = 0 \\ Im_F(\omega_0) = 0 \end{cases} \qquad (4.15)$$

ω_0 – частота незатухающих колебаний, которые возникают в системе на границе устойчивости.

Пример 4.4 :Проверить устойчивость системы, структурная схема которой приведена:



$W_0(p) = \frac{2}{p^3+2p^2+2p+1}$

Передаточной функции замкнутой системы:

$W\,(p) = \frac{y}{u} = \frac{2}{p^3+2p^2+2p+3}$

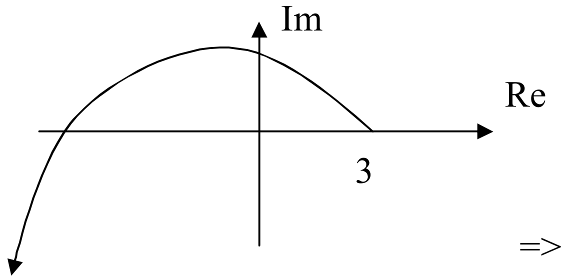
Характеристический полином:

F(p) = $p^3 + 2p^2 + 2p + 3$

Выражения для годографа Михайлова

F(p) = $(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3$ = $-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 3 = \underbrace{(3-2\omega^2)}_{Re_F(\omega)} + j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im_F(\omega)}$

ω	0	1	1.22	1.41	…	∞
Re_F (ω)	3	1	0	-1	…	-∞
Im_F (ω)	0	1	0.61	0	…	-∞



=> система устойчива.

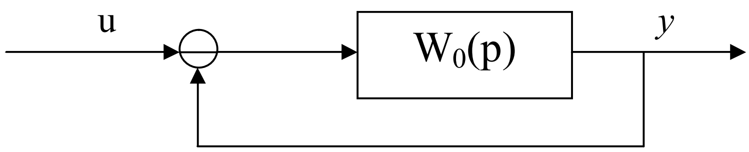
Лекция 10

4.3.3 Критерий устойчивости Найквиста.

(более распространённый на практике по сравнению с критериями Михайлова)

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость системы в ООС (так называемой замкнутой системы) по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы. АФХЧ разомкнутой системы снимаем экспериментально или получаем на основе передаточной функции.

Рассмотрим этот критерий для системы ,структурная схема которой:



$W_0(p)$ - передаточная функция устойчивой разомкнутой системы, которая в общем виде записывается:

$$W_0(p) = \frac{B_0(p)}{A_0(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{p^n + a_n p^{(n-1)} + \ldots + a_1} \quad (m < n) \qquad (4.17)$$

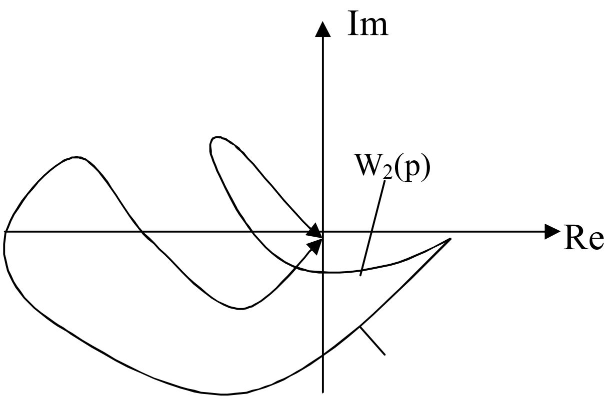
$p \rightarrow j\omega$

$$\underbrace{W_0(j\omega)}_{} = \frac{B_0(j\omega)}{A_0(j\omega)} = Re_{W_0}(\omega) + jIm_{W_0}(\omega) \qquad (4.18)$$

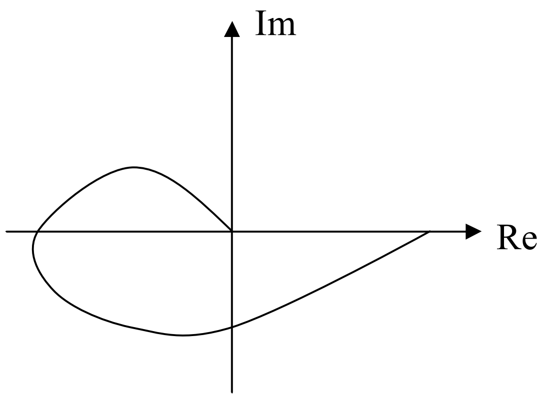
амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы

Критерий Найквиста: Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой системы при изменении ω от 0 до бесконечности не охватывала точку с координатами {-1; j0}

Устойчивые:



Неустойчивые:



$W_1(p)$

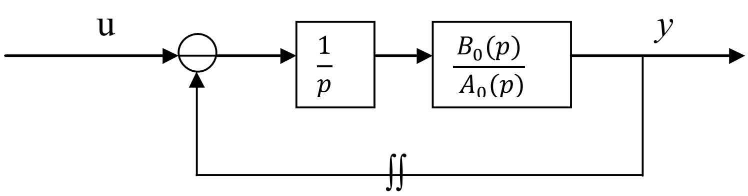
Разомкнутая система может быть неустойчивая, однако, это не означает, что и замкнутая система будет неустойчива. В этой ситуации следует использовать <u>видоизмененную формулировку критерия Найквиста</u> :

Замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика неустойчивой разомкнутой системы при изменении ω от 0 до бесконечности охватывает точку {-1; j 0} в положительном направлении $\frac{r}{2}$ раз ,где r-число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью.

Критерий Найквиста можно применять, если разомкнутая система имеет в своем составе интегратор , т.е. находится на границе устойчивости . В этом случае передаточную функцию $W_0(p)$ можно записать в виде:

$$W_0(p) = \frac{B_0(p)}{p\,A_0(p)}, \qquad (4.19)$$

где $A_0(p)$ - характеристический полином устойчивой системы.



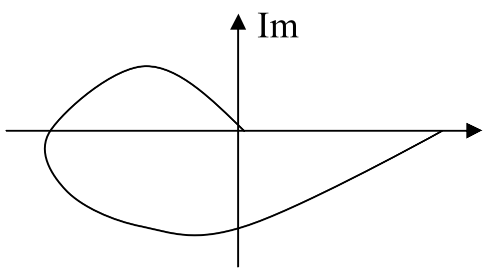
АФХ разомкнутой системы

$W_0(j\omega)$ будет иметь неопределенность при ω=0: A(0→∞, а φ(0) скачком изменится на 180⁰.

Для получения определенности характеристику при построении дополняют полуокружностью бесконечно большого радиуса так , чтобы она начиналась на положительной вещественной полуоси. Такое дополнение АФХ разомкнутой системы позволяет использовать исходную формулировку критерия Найквиста.

<u>Условия границы устойчивости</u>:

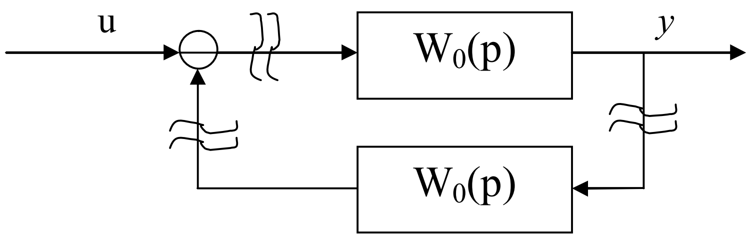
Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если при некоторой чистоте $\omega=\omega_0$ АФХ разомкнутой системы проходит через точку {-1;j 0}.



$$1 + W_0(j\omega_0) = 0 \qquad (4.20)$$

- аналитическая запись условия границы устойчивости

Если в обратном канале W(p)≠1.

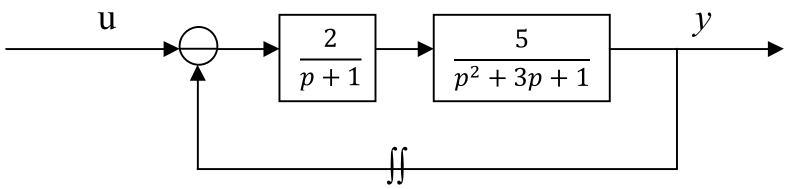


Сначала получаем W_0(p)-разомкнутой системы , для чего можно размыкать связь произвольным образом , а выход и вход системы следует рассматривать в месте разрыва.

$$W_0(p) = W_1(p)\, W_2(p) \qquad (4.21)$$

Далее следует использовать соответствующую формулировку критерия.

Пример 4.5: Проверить устойчивость системы с помощью критерия Найквиста



$$W_0(p) = \frac{10}{p^3 + 4p^2 + 1}$$

$$H = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 16 - 15 = 1 > 0$

$\Delta_3 = 15 * 1 = 15 > 0$

По критерию Гурвица разомкнутая система устойчива.

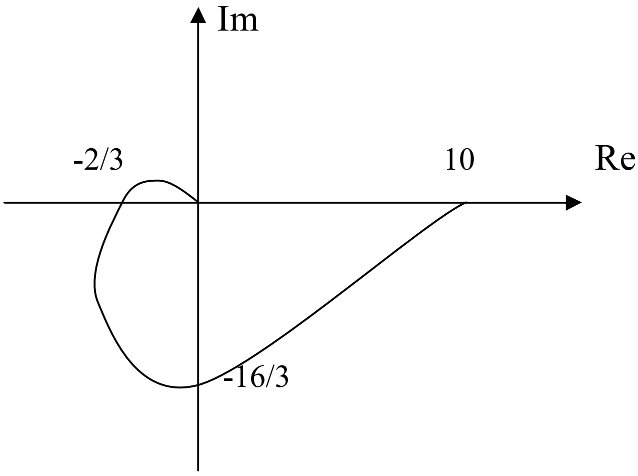
$p \rightarrow j\omega$

$$W_0(p) = \frac{10}{-j\omega^3 - 4\omega^2 + 4j\omega + 1} = \frac{10}{(1-4\omega^2)^2 + j\,(4\omega - \omega^3)^2}$$

$$W_0(p) = \frac{10\,(1-4\omega^2)}{(1-4\omega^2)^2 + (4\omega - \omega^3)^2} - j\,\frac{10\,(4\omega^2 - \omega^3)}{(1-4\omega^2)^2 + (4\omega - \omega^3)^2}$$

Изменяем ω от 0 до ∞

ω	0	0,5	2	∞
Re_F (ω)	0	-16/3	0	0
Im_F (ω)	10	0	-2/3	0



Не охватывает точку {-1;j 0} => система устойчива.

4.4 Области и запасы устойчивости

4.4.1 Основные определения

Поскольку математическая модель никогда не бывает тождественна физической системе, а при ее составлении делается ряд допущений, параметры реальной системы несколько отличаются от расчётных. Кроме того, с течением времени параметры могут меняться в некотором диапазоне, но для нормального функционирования системы свойство устойчивости должно сохраниться , т.е. она должна обладать определенным запасом устойчивости.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \ x \in R^n, \ u \in R^m \\ \quad y = Cx, \ y \in R^m, \quad n \geq m \end{cases} \qquad (2.1) ; (2.2)$$

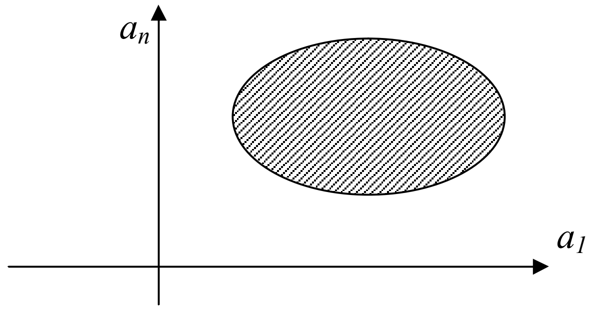
Характеристическое уравнение системы:

$det(pI - A) = 0$ имеет n корней: $\lambda_i = \lambda_i(A)$ $(i = \overline{1,n})$

Определение: Областью устойчивости по параметрам называют множество матриц A , для которого выполняется общее условие устойчивости линейных систем:

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i(A) < 0, \quad i = \overline{1,n}$$

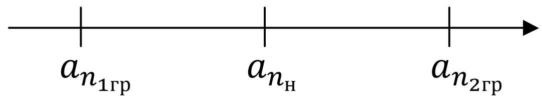
Совокупность всех этих матриц A отображается в некоторую область на плоскости параметров:



Область устойчивости.

Определение: Критическими (граничными) называются значения матриц $A_{гр}$, при которых система находится на границе устойчивости.

В реальной ситуации часто требуется оценить влияние одного параметра системы (например, a_n) на ее устойчивость. Поэтому можно говорить о <<левом>> и <<правом>> граничных значениях:



Определение: Запасом устойчивости называется диапазон значений параметра от номинального до граничного.

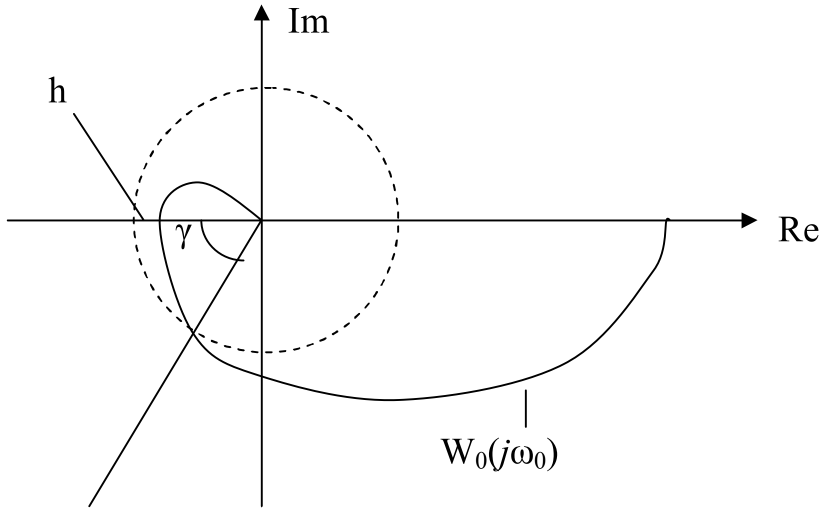
$| a_{n_н} - a_{n_{1гр}} |$ или $| a_{n_н} - a_{n_{2гр}} |$

4.4.2 Частотные оценки запаса устойчивости

На основе критерия Найквиста можно получить частотные оценки запаса устойчивости , которые характеризуют удаление АФХ разомкнутой системы от критической точки {-1;j 0}

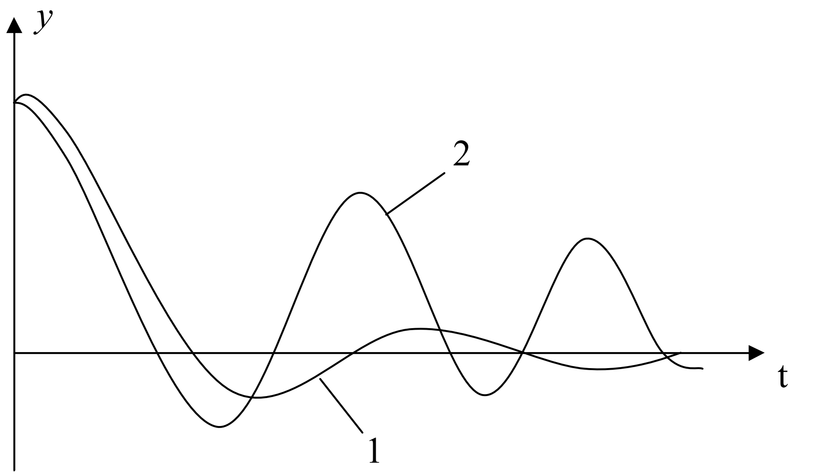
Запас устойчивости по модулю (h) показывает на сколько можно увеличить модуль АФХ разомкнутой системы без потери устойчивости замкнутой .

Запас устойчивости по фазе γ определяется по частоте ω_c где $|W_0(j\omega_c)|=1$. Он показывает ,насколько можно изменить фазу АФХ разомкнутой системы без потери устойчивости замкнутой.



4.4.3 Корневые оценки запаса устойчивости

Оценить запас устойчивости можно также по корневому портрету.



Система 2 обладает меньшим запасом устойчивости, поскольку склонность к неустойчивости выражается в большой колебательности процессов.

В свою очередь , характер процессов в системе определяется её полюсами. Колебания будут возникать, если характеристическое уравнение содержит комплексно-сопряженные корни:

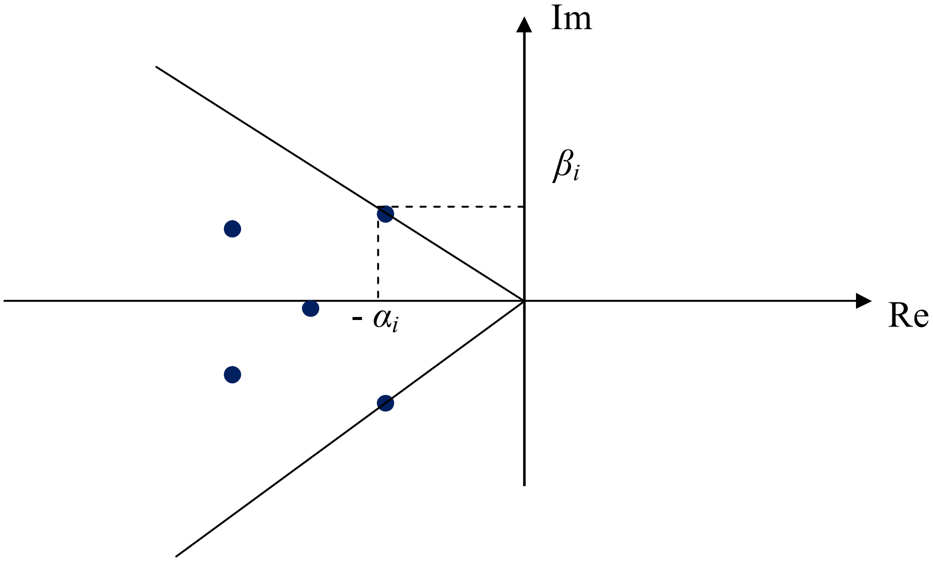
$\lambda_{i,\, i+1} = -\,\alpha_i \pm j\,\beta_i$,

α_i – определяет скорость затухания ;

β_i – частоту колебаний.

Паре корней с самым широким сектором будет соответствовать составляющая процесса с наибольшими колебаниями, поэтому в качестве оценки запаса устойчивости можно рассматривать соотношение :

$$\gamma = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \quad , \quad \gamma \in (0; \infty) \qquad (4.22)$$



Чем меньше γ, тем система ближе к границе устойчивости.

γ = 0 – граница устойчивости;

γ = ∞ - бесконечный запас устойчивости.

Таким образом, корневая оценка запаса устойчивости γ характеризует , на сколько можно изменять корни характеристического уравнения без потери системой запаса устойчивости. Обычно такая оценка используется на этапе проектирования САУ.

4.4.4 Метод D-разбиения

При создании реальной системы управления бывает необходимо знать не только запас устойчивости , но и всю область устойчивости по параметрам.

Метод D-разбиения позволяет построить область устойчивости в плоскости одного или двух параметров системы.

Рассмотрим суть метода по одному параметру D , который входит в характеристическое уравнение системы линейно.

$$A(p) = N(p) + DM(p) = 0 \qquad (4.23)$$

$p \to j\omega$

$$A(j\omega) = N(j\omega) + DM(j\omega) = 0 \qquad (4.24)$$

Согласно критерию Михайлова уравнение (4.24) соответствует границам устойчивости (см.(4.16.))

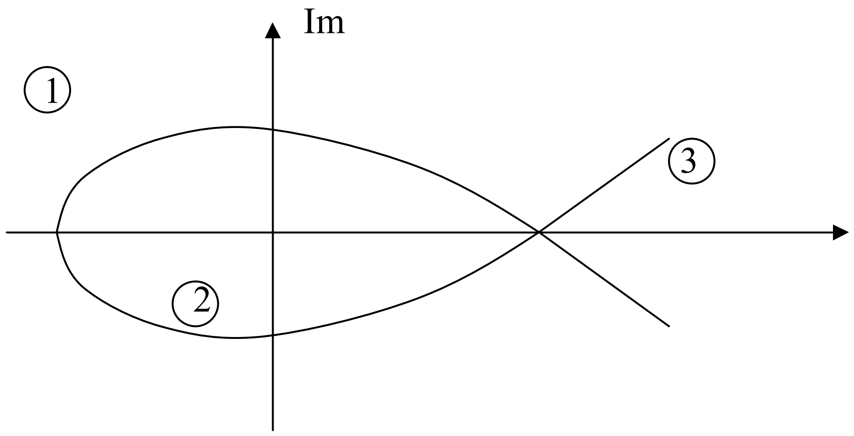
Разрешим (4.24.) относительно D

$$D(j\omega) = -\ \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} = Re_D(\omega) + j\ Im_D(\omega) \qquad (4.25)$$

Получил комплексное представление параметра D. Изобразим $D(j\omega)$ на комплексной плоскости.

При изменении от -∞ до ∞, конец вектора на комплексной плоскости описывает кривую D-разбиения. Кривая D-разбиения представляет границу устойчивости. Она симметрична относительно Re-оси , поэтому достаточно построить ее часть, соответствующую положительным значениям частоты ω , а вторую получим отображением.

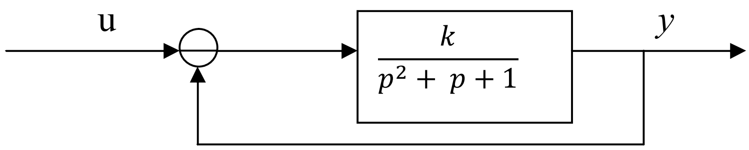
Кривая разбивает комплексную плоскость на несколько подобластей с различным соотношением корней.



Для определения области устойчивости нужно выбрать по одному значению D в каждой из них и проверить устойчивость системы. Если система устойчива при конкретном D, то она будет устойчива при всех его значениях из этой области.

Обычно в качестве параметра D фигурирует реальный параметр системы (коэффициент усиления, постоянная времени t и т.п.), который может иметь только вещественное значение. Представление комплексным выражением $D(j\omega)$ носить формальный характер, а область устойчивости ограничивается отрезком вещественной оси.

Пример 4.6.: Определить область устойчивости системы по коэффициенту усиления :



$$W(p) = \frac{\frac{k}{p^2 + p+1}}{1+\frac{k}{p^2 + p+1}} = \frac{k}{p^2 + p+1}$$

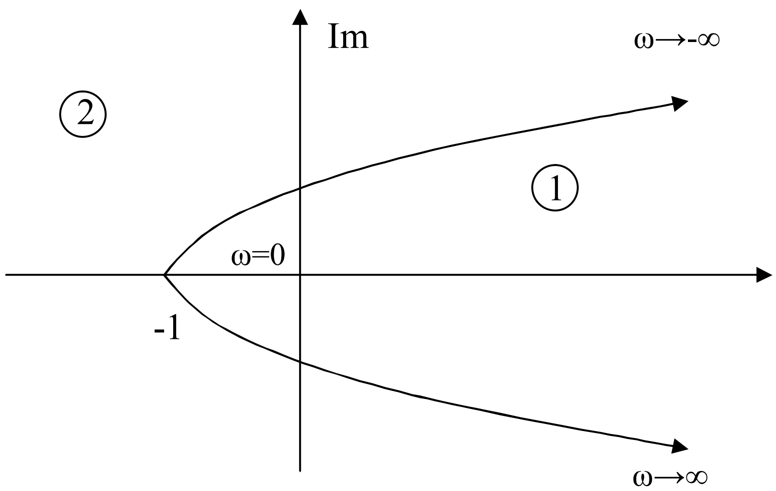
$A(p) = p^2 + p + k + 1 = 0$

k – параметр, по которому строится область устойчивости. D=k. $p \to j\omega$

$-\omega^2 + j\omega + D + 1 = 0$

$$D(j\omega) = \omega^2 - j\omega - 1 = (\omega^2 - 1) - j\omega .$$

ω	0	1	2	…	∞
$Re_D(\omega)$	-1	0	3	…	∞
$Im_D(\omega)$	0	-1	-2	…	-∞



Выберем по одному вещественному значению из 1 и 2 и оценим устойчивость. Система второго порядка , необходимо и достаточно, чтобы $a_i > 0$ => 1 - область устойчивости.

Лекция 11

5. Анализ процессов линейных систем

Работа систем автоматического управления помимо устойчивости оценивается еще рядом показателей, основными из которых являются точность отработки входных воздействий и характер переходных процессов.

Задача анализа процессов линейной системы:

При известной структуре системы, заданной:

a. W(p) - передаточной функцией
b. Матрицами {A,B,C}
c. Какой-либо динамической характеристикой (ПФ, ИПФ, АЧХ) и известном входном воздействии ν, оценить переходные процессы на выходе, то есть определить y(t).

О качестве работы системы можно судить по показателям качества переходного процесса. При этом всегда предполагается, что исследуемая система устойчива, т.к. бессмысленно оценивать качество неустойчивых процессов.

5.1. Показатели качества переходных процессов

Рассмотрим одноканальную систему стабилизации, для которой входное воздействие является постоянной величиной (ν =const), и цель регулирования состоит в организации свойства:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \nu \qquad (5.1)$$

Основными показателями качества систем стабилизации являются количественные характеристики переходного процесса.

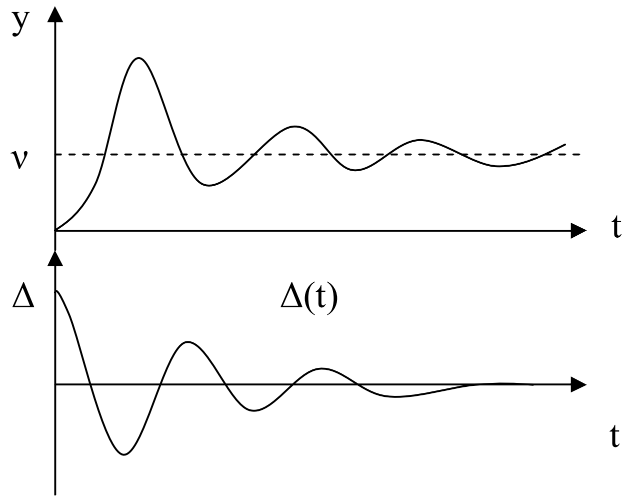
5.1.1. Ошибка регулирования.

$$\Delta(t) = \nu - y(t) \qquad (5.2)$$

Δ(t) С течением времени t стремится к некоторому постоянному значению - статистической ошибке.

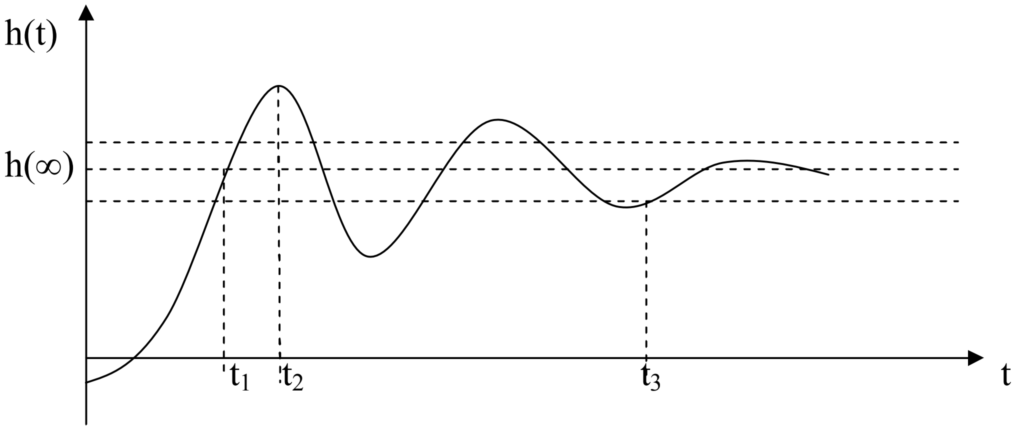
Ошибка (статистическая ошибка) одна из основных количественных характеристик системы.

$$\Delta^0 = \lim_{t\to\infty} \Delta(t) \qquad (5.3)$$



5.1.2 Быстродействие

Используются несколько различных величин, причем все они определяют t от начала переходного процесса до какого-либо характерного значения.



t_1 – время от начала переходного процесса до первого момента достижения установившегося значения $h(\infty)$;

t_2 – время достижения первого максимума;

t_3 - время от начала до момента достижения установившегося значения $h(\infty)$ со статической ошибкой Δ^0.

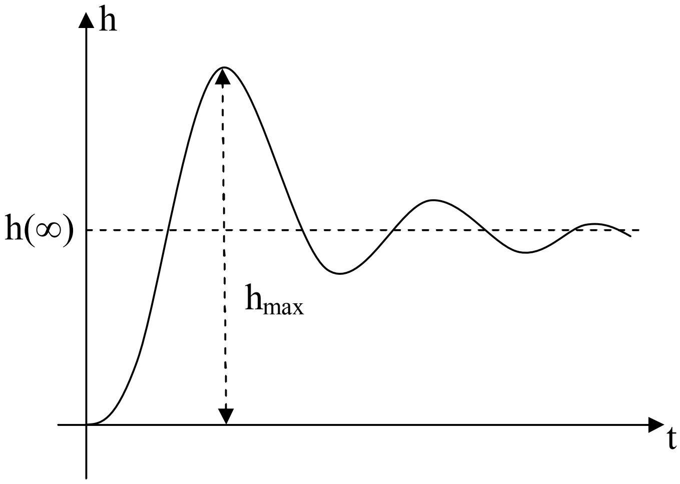
t_1 и t_2 для колебательных процессов.

t_3 чаще всего применяют на практике, обозначают t_n и называют временем переходного процесса.

5.1.3. Перерегулирование

Это количественная характеристика описывающая колебательные свойства процесса.

$$\sigma = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} * 100\% \qquad (5.4)$$



Чем больше перерегулирование σ, тем больше система склона к колебаниям.

5.2 Анализ статистических режимов

<u>Определение</u>: *Статический (установившийся) режим работы* линейной системы, при котором переменные с течением времени не изменяются.

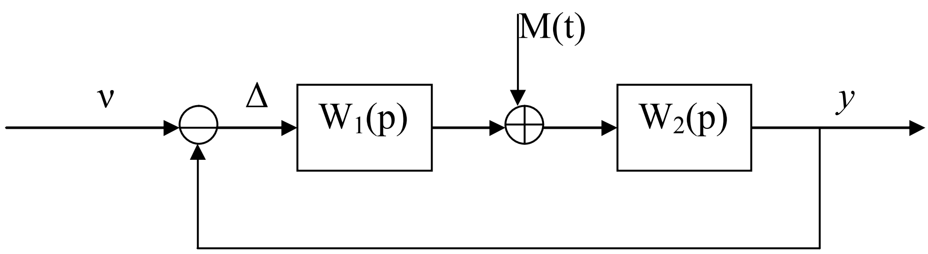
$$\dot{x} = 0$$

В зависимости величины статической ошибки Δ^0, выделяют основные типы систем:

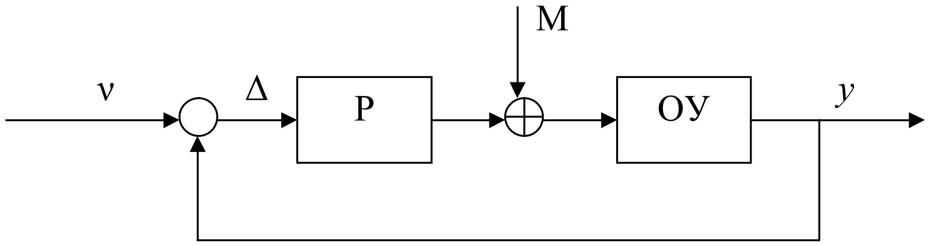
- статические
- астатические
- следящие

5.2.1 Статические системы

Статическая система управления - это система управления, функционирование которой всегда приводит к возникновению статической ошибки.



Периодические функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ не содержат в своем составе интегралов. В статическом режиме они вырождаются в коэффициенты усиления: $W_1(0) = k_1$ и $W_2(0) = k_2$. Как правило:



$$\Delta = \nu - y = \nu - W_2(p)\,[M + W_1(p)\,\Delta]$$

После преобразований получаем:

$$\Delta = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}\nu - \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}\,M \qquad (5.5)$$

Полная ошибка регулирования складывается из двух: одна порождена входным воздействием, другая - возмущения. Этот факт соответствует принципу суперпозиции (он справедлив для линейных систем): реакция системы на несколько внешних воздействии представляет собой сумму реакций на каждое входное воздействие в отдельности.

В статике (полагая p=0) получаем полную статическую ошибку:

$$\Delta^0 = \frac{1}{1+k_1k_2}\nu - \frac{k_2}{1+k_1k_2}M \qquad (5.6)$$

Где $k = k_1k_2$ – общий коэффициент усиления, характеризующий глубину обратной связи. В системах такого типа присутствует отличная от 0 статическая ошибка, которую всегда стремятся к уменьшить.

Статическая ошибка по водному воздействию $\mathbf{\Delta^0_\nu}$ определяется коэффициентом **k**, а ошибка по возмущению $\mathbf{\Delta^0_M}$ зависит только от $\mathbf{k_1}$.

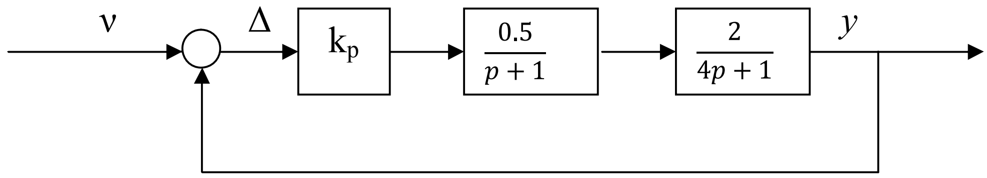
С целью уменьшения полной статической ошибки Δ^0 необходимо увеличивать общий коэффициент k, но при этом до такой степени, чтобы устойчивость системы сохранялась. Таким образом, требования точности и устойчивости являются противоположными.

В системах стабилизации, когда требуется выполнения свойства (5.1)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \nu \qquad \nu = const$$

В этом случаи путем масштабирования входного сигнала всегда может уменьшается статическая ошибка, а коэффициент k_1 следует выбирать из условия заданной Δ^0_M.

пример 5.1: Для системы управления , структурная схема, которой :



определить коэффициент усиления регулятора k_p так, чтобы статическая ошибка не превышала значения $\Delta_*^{\mathbf{0}}$ = 5 % от ν.

$$\Delta = \frac{1}{1+k_p W_1(p) W_2(p)}\nu = \frac{1}{1+\frac{k_p}{(p+1)(4p+1)}}\nu = \frac{4p^2+5p+1}{4p^2+5p+(k_p+1)}\nu$$

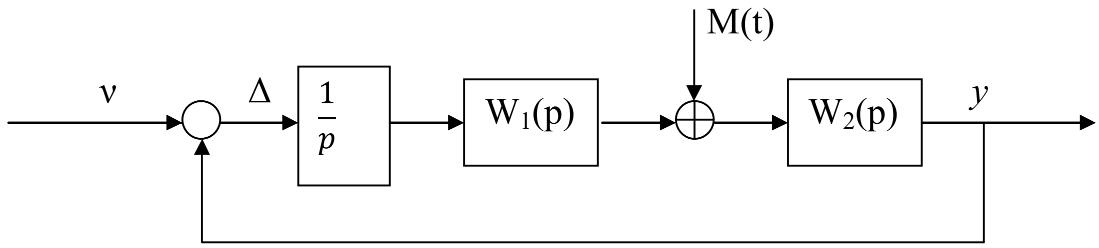
При p=0 $\quad \Delta^0 = \frac{1}{1+k_p}\nu$

$\Delta^0 \le \Delta_*^{\mathbf{0}}$ => $\Delta^0 \le 0.05 \qquad \frac{1}{1+k_p} \le 0.05$

=> необходимый коэффициент усиления регулятора $k_p = 19$.

5.2.2 Астатические системы

Астатические - это системы, в которых отсутствует статическая ошибка, порожденная постоянным входным взаимодействием. Астатизм достигается путем введения в регулятор интегратора.



$\Delta = \nu - y = \nu - W_2(p)\,[M + \frac{W_1(p)}{p}\Delta]$

$$\Delta = \frac{p}{p+W_1(p)W_2(p)}\nu - \frac{pW_2(p)}{p+W_1(p)W_2(p)}M \qquad (5.7)$$

В статике p=0 $\quad \Delta^0 = 0$.

Для астатических систем представляет интерес режим линейной заводки, когда входной сигнал ν представляет собой линейное воздействие :

$\nu(t) = \nu(0) + \int_0^t \eta \, d\tau$

в операционной форме:

$$\nu = \frac{1}{p}\eta \qquad (5.8)$$

где η = *const* (5.8) → (5.7)

$$\Delta = \frac{p}{p + W_1(p)W_2(p)}\frac{1}{p}\eta - \frac{pW_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)}M$$

В статике p=0

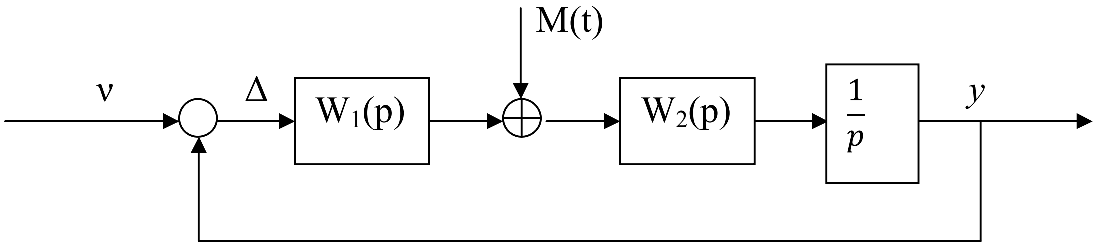
$$\Delta^0 = \frac{1}{k_1 k_2}\eta \qquad (5.9)$$

Скоростная ошибка

Для уменьшения (5.9) можно масштабировать входное взаимодействие η или увеличить $k = k_1 k_2$.

5.2.3. Следящие системы.

В следящей системе выходная переменная должна отслеживать(повторять) изменения входной величины. В этих системах в ОУ присутствует интегратор в чистом виде.



$$\Delta = \nu - y = \nu - \frac{W_2(p)}{p}[M + W_1(p)\,\Delta]$$

$$\Delta = \frac{p}{p + W_1(p)W_2(p)}\nu - \frac{W_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)}M \qquad (5.9)$$

В статике p=0 $\Delta^0 = -\frac{1}{k_1}M$ (5.10)

В этих системах тоже может рассматривать режим линейной заводки.

$$\Delta = \frac{p}{p + W_1(p)W_2(p)}\frac{1}{p}\eta - \frac{W_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)}M$$

В статике p=0

$$\Delta^0 = -\frac{1}{k_1 k_2}\eta - \frac{1}{k_1}M(t) \qquad (5.11)$$

Режим линейной заводки используется для оценки точности следящих систем.

5.3 Частотный метод анализа.

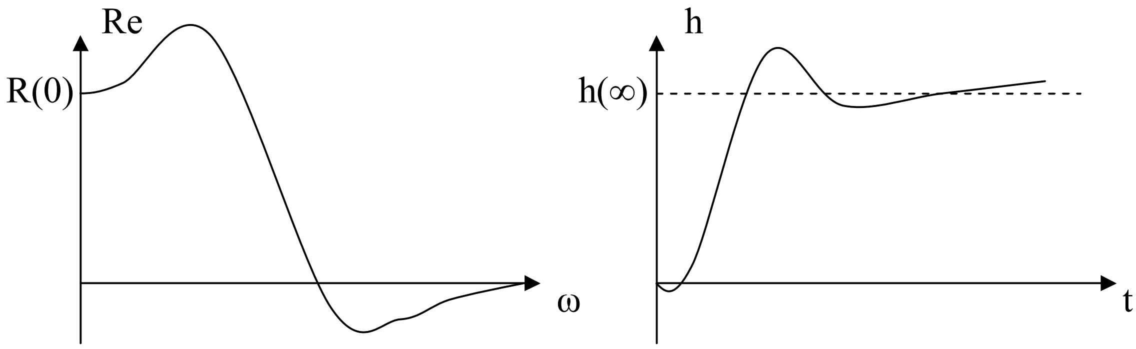
В большинстве случаев, аналитического вычисление переходной характеристики СУ является трудоёмкой задачей, поэтому используются косвенные методы оценки качества процессов.

Качество переходного процесса в САУ можно исследовать непосредственно по её частотным характеристикам.

Частотный метод анализа позволяет оценить реакцию систем на ν(t) при начальных условиях равных 0.

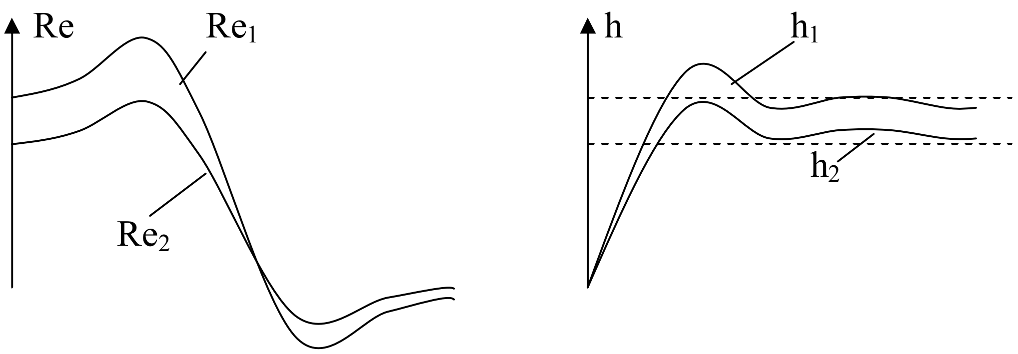
5.3.1 Оценки качества переходного процесса по вещественной частотной характеристики .

Оценка 01: Начальное значение переходной характеристики соответствует конечному значению ВХЧ.

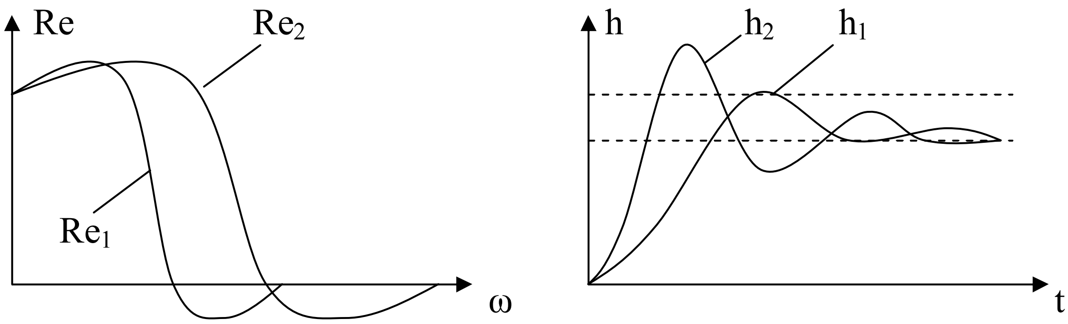


Оценка 02: Установившиеся значения переходной характеристики равно начальному значению ВХЧ .

Оценка 03: Если для частотных характеристик $R_1(\omega)$ и $R_2(\omega)$ справедливо: $R_2(\omega) = m\,R_1(\omega)$ или $R_2(\omega) = \frac{1}{m}\,R_1(\omega)$, то аналогичное отношение будет связывать и переходные характеристики $h_2(t) = m\,h_1(t)$ или $h_2(t) = \frac{1}{m}\,h_1(t)$.



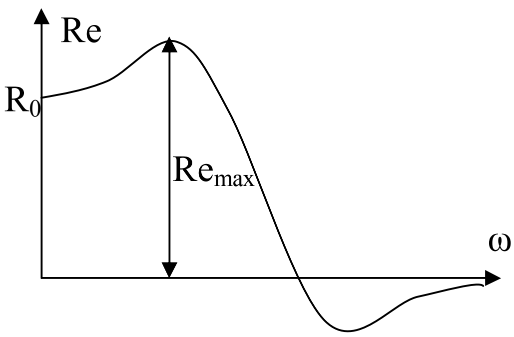
*<u>Оценка **04**</u>*: $R_2(\omega) = R_1(m\omega)$ => $h_2(\omega) = h_1(\frac{t}{m})$



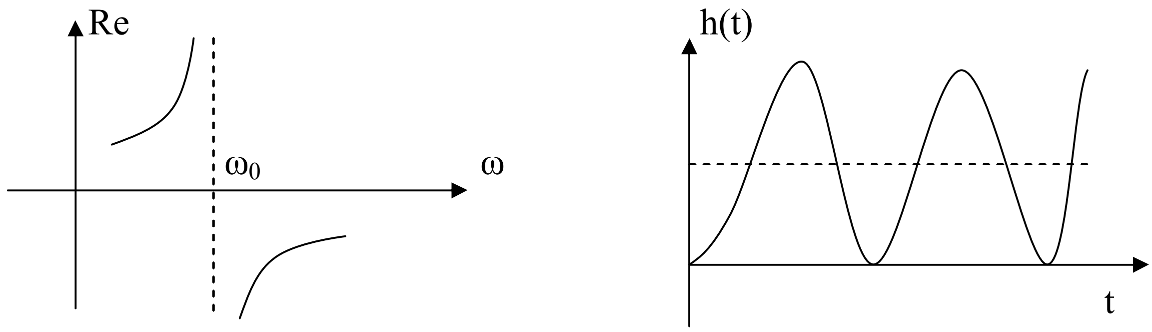
*<u>Оценка **05**</u>*: Если R(ω) - положительная, не возрастающая, то перерегулирование меньше 18% . (σ<18%)

*<u>Оценка **06**</u>*: h(t) имеет монотонный характер, если *d*R(ω)/ dω представляет собой отрицательную, убывающую по модулю непрерывную функцию.

*<u>Оценка **07**</u>*: Re(ω) - локально возрастающая функция, то перерегулирование σ можно приближенно оценить $\sigma < \left(\frac{1.18\,R_{max} - R_0}{R_0}\right) * 100\%$

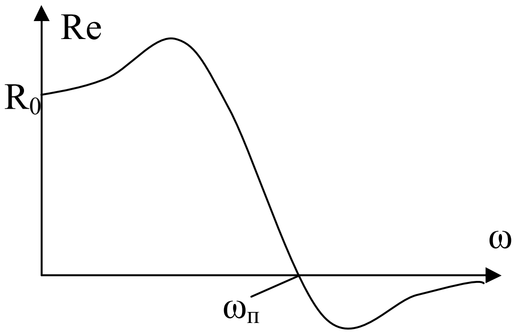


*<u>Оценка **08**</u>*: Если на частоте $\omega=\omega_0$ R(ω) терпит разрыв, то h(t) будет иметь незатухающие колебания этой частоты.

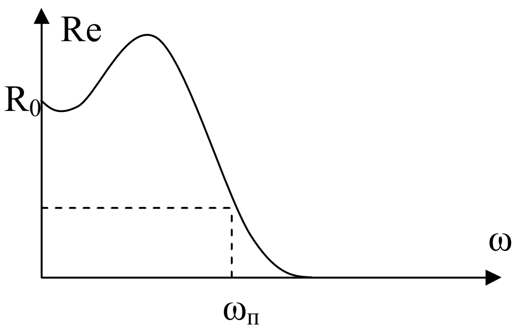


*<u>Оценка **09**</u>*: В случае монотонной характеристики R(ω) можно приближённо оценить время t переходного процесса:

$t_{пп} = \frac{k_п}{\omega_п}$,   где k=(1 … 4)



Если R(ω) всегда > 0 , то в качестве частоты $\omega_п$ выбирается частота , на которой $R(\omega_п) = 0,5\ Re_0$.



Таким образом, с помощью оценок **01÷ 09** можно приближенно оценить качество переходного процесса.

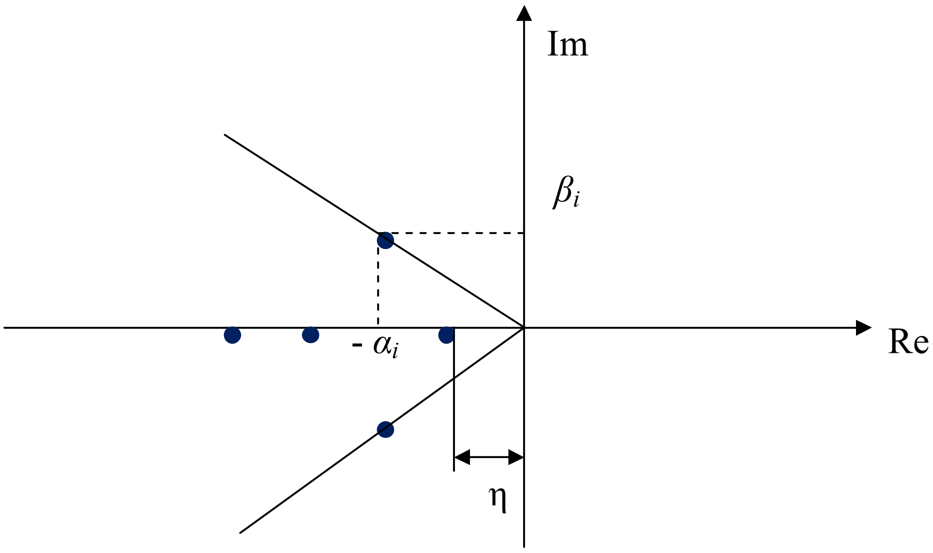
5.4 Корневой метод анализа

Здесь можно проследить реакцию системы на начальные условия не равные 0. Он может применяться как для одноканальных, так и для многоканальных систем.

$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1 = 0$

Корни $\lambda_i(A)$ ($i = \overline{1,n}$) $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$

Корни, расположенные ближе к мнимой оси определяют длительность переходного процесса.



Корневая оценка быстродействия (расстояние до мнимой оси):

$$\eta = \min_i |Re\ \lambda_i| \qquad i = \overline{1,n} \qquad (5.12)$$

приближенно оценить время переходного процесса можно:

$$t_{пп} \cong \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta^0} \qquad (5.13)$$

δ^0 –относительная статическая ошибка

для $\delta^0 \cong 0{,}05$ можно пользоваться оценкой $t_{пп} \cong \frac{3}{\eta}$ (5.14)

Колебательные процессы в системе будут только в том случае, когда характеристическое уравнение содержит комплексно-сопряженные корни $\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm \beta_i$.

$$\mu = \max_i \frac{\beta_i}{\alpha_i} \qquad i = \overline{1,n} \qquad (5.15)$$

Чем больше колебательность μ, тем более её колебательный характер будет иметь переходный процесс.

μ = ∞ - все полюса чисто мнимые, и в системе наблюдается переходный процесс в виде незатухающих колебаний.

$\mu = 0$ – все корни вещественные. и в системе будут возникать апериодические процессы.

Эмпирическим птём установлена взаимосвязь между колебательностью и перерегулированием в виде соотношения:

$$\sigma = 100 \exp\left(\frac{-\Pi}{\mu}\right) \%$$

Лекция №12

5.5 Анализ процессов в системах низкого порядка.

Проведение многих реально существующих объектов и систем можно описать уравнениями не выше третьего порядка. Поэтому важно установить взаимосвязь между параметрами математической модели и качеством протекающих в системах переходных процессов.

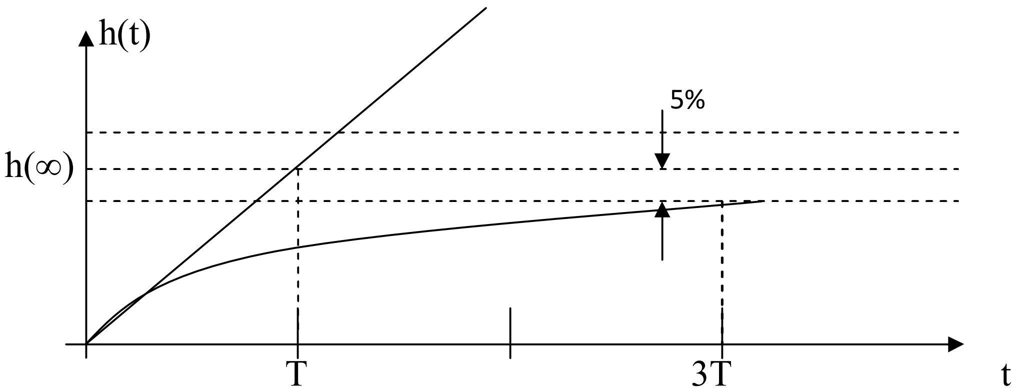
5.5.1 Система первого порядка

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1} \quad (5.16)$$

Переходный процесс определяют: k – коэффициент усиления;
T – постоянная времени.

$\nu = conts$

y(t) – экспонента, скорость затухания которой зависит от времени t.



В статике

$$y_0 = W(0)\,\nu = k\nu \quad (5.7)$$

Переходный процесс можно считать закончившимся, когда выходная переменная достигает установившегося значения с точностью не менее 5%

т.к. A(p) = Tp + 1 имеет 1 корень: $\lambda = -\frac{1}{T}$, то $\eta = \frac{1}{T}$

время переходного процесса :

$$t_{пп} \approx \frac{3}{\eta} = 3\ T$$

Таким образом, k определяет установившееся значение переходных процессов , а постоянная времени T – их длительность.

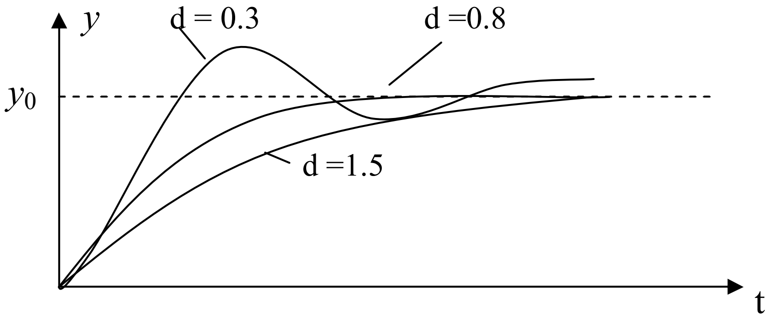
5.5.2 Система второго порядка

$$W(p) = \frac{K}{T^2p^2 + 2dTp + 1} \qquad (5.18)$$

$y_0 = W(0)\,\nu = k\nu$

$t_{пп}$ зависит от T и d.

В литературе переходный процесс в зависимости от разных d.



При $0{,}5 \le d \le 1 \quad t_{пп} \approx 3T$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 1}}{T} \quad =>$$

при d< 1 корни комплексно-сопряженные и есть колебательность системы.

$$\mu = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d} = \mu(d) \qquad (5.20)$$

Перерегулирование при этом определяем (5.15):

$d \ge 1$ – процессы имеют апериодический характер

$d = 0$ – незатухающие колебания.

5.5.3 Система третьего порядка

$$W(p) = \frac{K}{T^3p^3 + AT^2p^2 + BTp + 1} \qquad (5.18)$$

Переходный процесс определяют: k, T, A, B

$y_0 = W(0)\,\nu = k\nu$

Инерционность системы зависит от T, колебательность от A и B.

Для исследования этой системы используется диаграмма Вышнеградского. (1876 г.).

Для переходного процесса постоянная времени T не влияет на колебательность, то перейдём к нормированному характеристическому уравнению:

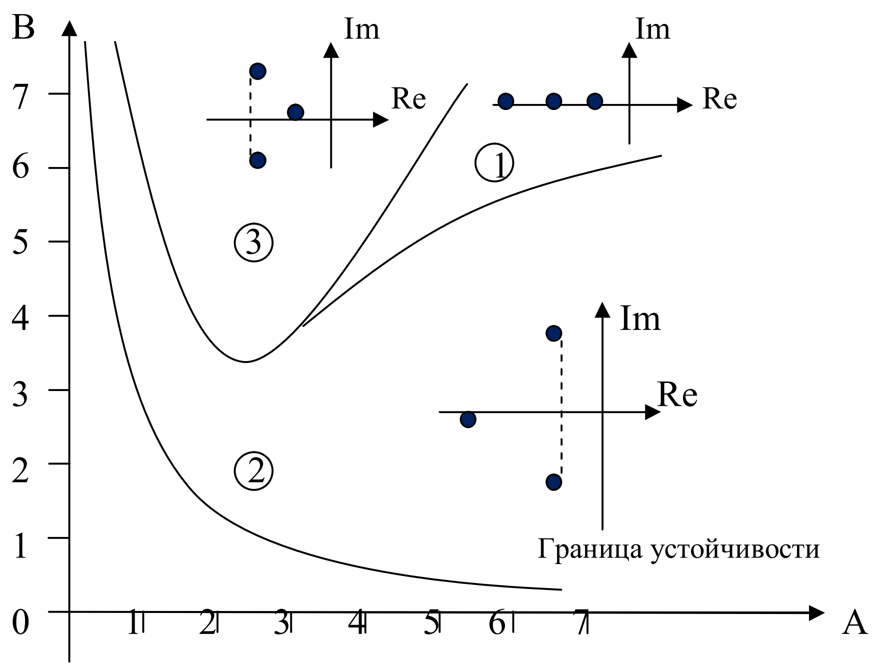
$q = Tp$

$q^{3+} Aq^3 + Bq + 1 = 0$

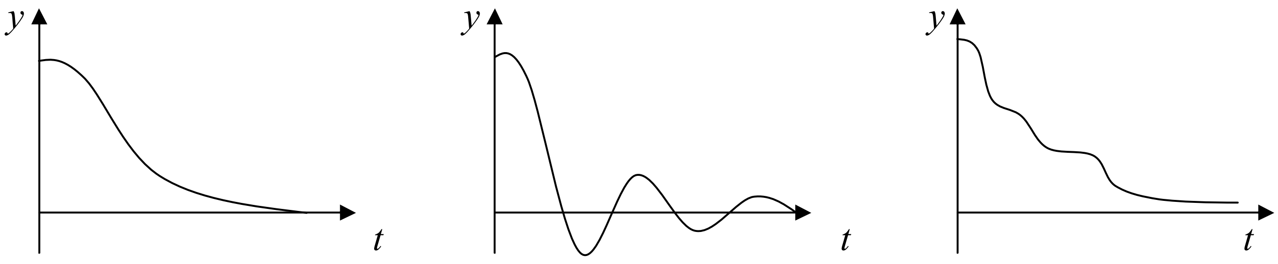
A и B – параметры Вышнеградского. Они определяют колебательность и устойчивость системы.

По Гурвицу   AB > 1.

Рассмотрим область значений A и B, и нанесём границу устойчивости, AB=1. Разобьем ее на подобласти с разным расположением корней, а, следовательно, и вида процессов



Характерный вид переходных процессов, соответствующих каждой подобласти:



а *б* *в*

Примеры процессов в системах:

а) с вещественными корнями

б) с доминирующей парой комплексных корней

в) с доминирующим вещественным корнем

Заключение:

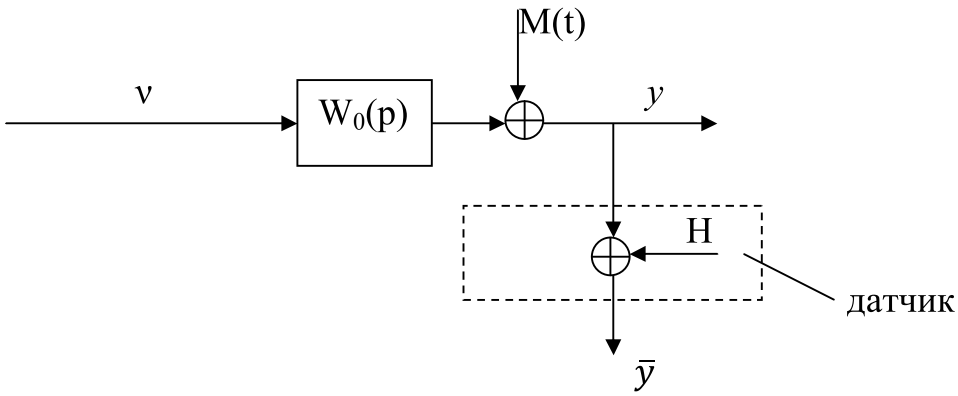
В разделе рассмотрены основные способы оценки вида переходного процесса по динамическим характеристикам систем. Точность модели зависит не только от применяемых оценок, но и от точности составления математической модели.

Лекция №14

6. Синтез линейных систем.

Синтез - это проектирование регулятора для САУ по заданным требованиям к динамическим и статическим свойствам последней.

6.1 Постановка задачи синтеза



Обсудим содержание задачи синтеза для одноканального объекта.

$$W_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \qquad (6.1)$$

Ресурс управления объекта ограничен, $u \le \bar{u}$

Воздействие M(t) отражает влияние окружающей среды.

Выходная переменная измеряется датчиком с помехой измерения H(f).

$$\tilde{y} = y + H(t) \qquad (6.2)$$

$\tilde{y}$ - измеренное значение выходной переменной y.

Цепь функции замкнутой системы регулирования является обеспечение с заданной точностью Δ^0_*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \nu \qquad (6.3)$$

Наряду с условием статики (6.3) предъявляются требования к динамике системы:

$$t_{пп} \le t_п^* \quad и \quad \sigma \le \sigma^* \qquad (6.4)$$

Необходимо определить параметры регулятора, обеспечивающего выполнение условий (6.3) и (6.4).

В реалии в системе с заданной точностью можно обеспечивать выполнение условия

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{y}(t) = \nu \quad \text{вместо} \qquad (6.3)$$

Для уменьшения влияния помехи H(t) рекомендуется:

- датчик должен обладать значительно большей точностью, чем требуемая точность системы в целом.

- нужно отфильтровать помеху, частотный состав которой отличается от рабочих частот системы.

В соответствии с принципом суперпозиции ошибка регулирования замкнутой системы:

$$\Delta = \nu - y = \Delta_\nu + \Delta_н + \Delta_м \qquad (6.5)$$

Δ_ν - может быть легко скомпенсирована масштабированием;

$\Delta_н$ - в основном проявляется в динамике, т.к H(t) высокочастотная.

Значит, регулятор необходимо рассчитать таким образом, чтобы в системе управления статическая ошибка:

$$\boldsymbol{\Delta_M^0 \le \Delta_*^0} \qquad (6.6)$$

6.2 Условия разрешимости задачи синтеза.

Прежде чем выбрать подходящий метод расчёта необходимо убедиться в том, что задача синтеза будет разрешима. Для этого нужно исследовать свойства ОУ и требования предъявляемые к качеству замкнутой системы.

Рассмотрим ОУ (6.1), полагая, что H(t) удалось исключить.

$$y(p) = M(p) + W_0(p)\, u(p) \qquad (6.7)$$

Желаемое уравнение замкнутой системы

$$y(p) = W_*(p)\, \nu(p) \qquad (6.8)$$

$$\text{где } W_*(p) = \frac{y(p)}{\nu(p)} \qquad (6.9)$$

-это желаемая передаточная функция . сформулированная в соответствии с требованиями. Она составляется на основе требований, предъявляемых к качеству замкнутой системы.

Приравниваем (6.7) и (6.8)

$$u\,(p) = W_0^{-1}(p)\, W_*(p)\, \nu(p) - W_0^{-1}(p)\, M(p) \qquad (6.10)$$

Если удаётся реализовать закон управления (6.10), то поведение замкнутой системы будет точно соответствовать желаемой передаточной функции (6.9)

Для реального объекта ресурс управления всегда ограничен. Задача синтеза будет разрешима при выполнении условия:

$$\bar{u} \geq \{W_0^{-1}(p)\, W_*(p)\, \nu(p) - W_0^{-1}(p)\, M(p)\}\,, \qquad (6.11)$$

(6.11) – *ресурсное ограничение* (первое условие разрешимости задачи синтеза)

На практике реализовать закон управления (6.10) невозможно, так как неизвестен закон изменения возмущения M(t) (кроме границ его изменения).

6.2.2 Устойчивость обратного объекта.

Это условие предполагает исследование свойств объекта.

Рассмотрим выражение для точного управляющего воздействия (6.10)

Так как $W_*(p)$ - имеет левые полюса (корни характеристического уравнения). Тогда устойчивость точного регулятора определяется $W_0^{-1}(p)$

=> $\mathrm{Re}\,\lambda\,\{B(p) = 0\} < 0$ (6.12)

(6.12) – второе условие разрешимости задачи синтеза

6.2.3. Управляемость

Объект называется *управляемым*, если существует ограниченное управляющее воздействие u(t),с помощью которого можно перевести его из начального состояния $x(0)$ в заданное конечное $x(T)$ за конечное время T.

Рассмотрим условие управляемости для общего класса объектов вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\,, \; x \in R^n, \; u \in R^m \\ \quad y = Cx, \; y \in R^m\,, \quad n \geq m \end{cases} \qquad (6.13)$$

Критерий управляемости:

Объект будет управляемым тогда и только тогда, когда матрица управляемости будет иметь полный ранг.

$$u = [\,B, AB, \ldots A^{n-1}B\,] \qquad n*(n*m) \qquad (6.14)$$

$$r\{u\} = r\{B\,, AB\,, \ldots, A^{n-1}B\} = n \qquad (6.15)$$

Можно проверить *det* ($u\,u^T$) ≠ 0.

В случае одноканального объекта (6.15) преобразуется в вид *det* {u} ≠ 0 (6.16)

Условие управляемости (6.15) - <u>третье условие разрешимости задачи синтеза</u>

Невыполнение условия (6.15) ещё не означает, что такой объект нельзя стабилизировать.

С помощью специального приёма можно выделить в ОУ неуправляемую часть, при этом, если она будет устойчива, то в целом можно решить задачу синтеза.

<u>Пример 6.1</u>: Проверить управляемость объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - u \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$u = [\,B \quad AB \quad A^2B\,]$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -15 \end{bmatrix}$$

det u = -33≠ 0 – объект управляем.

6.2.4 Наблюдаемость

Это возможность оценки переменных состояния ОУ (6.13) по результатам изменения выходных переменных.

ОУ <u>наблюдаемый</u>, если в любой момент времени t можно оценить состояние *x* по данным изменения выходных переменных y(t) и управляющих воздействий u(t).

Критерий наблюдаемости:

ОУ наблюдаемый, если N имеет полный ранг

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (6.17)$$

$$\mathrm{r}\{\mathrm{N}\} = n \qquad (6.18)$$

(6.18) можно проверить : $det\,(\mathrm{NN}^{\mathrm{T}}) \neq 0$

Для одноканального объекта:

$$det\,(\mathrm{N}) \neq 0 \qquad (6.19)$$

(6.18) - четвертое условие разрешимости задачи синтеза

Если в ОУ есть ненаблюдаемая часть для разрешимости задачи синтеза, она должна быть устойчива.

Лекция №15

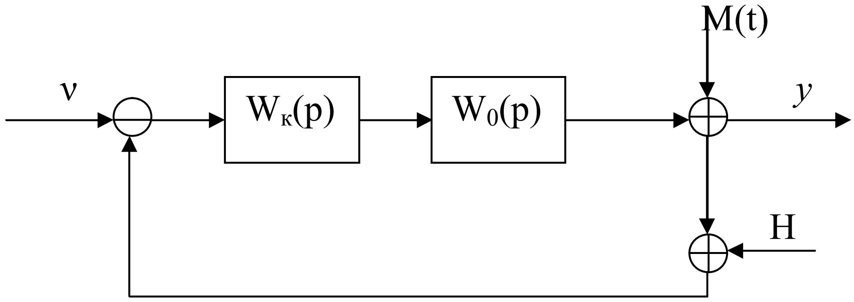
6.3 Частотный метод синтеза

6.3.1. Постановка задачи при частотного метода синтеза

Рассмотрим ОУ (6.1) с измеряемым выходом (6.2).

Требования к поведению замкнутой системы: (6.3) и (6.4).

Необходимо определить передаточную функцию регулятора $W_к(p)$ (корректирующего звена), включение которого в систему обеспечит в ней заданные свойства.



Рассмотрим реакцию системы только на входное воздействие ν, полагая возмущение M и помеху H равными 0 (M=0; H=0)

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(p) = W_K(p) * W_0(p) \qquad (6.20)$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} \qquad (6.21)$$

Таким образом, $W_з(p)$ однозначно определяет $W_p(p)$.

Таким образом, если удаётся сформировать определённую передаточную функцию или частотную характеристику разомкнутой системы, то можно обеспечить требуемые свойства замкнутой системы.

6.3.2 Влияние частотной характеристики разомкнутой системы на свойства замкнутой.

Рассмотрим связь между $W_p(j\omega)$ и $W_з(j\omega)$

$$W_p(j\omega) = W_к(j\omega)\ W_0(j\omega) \qquad (6.22)$$

Исследуем (6.22) в различных областях частот.

Область низких частот (ОНЧ):

Область изменения ω вблизи 0. В статике $W_0(0) = K_0$, где K_0 - коэффициент усиления объекта. Обычно $K_0 >> 1$, поэтому

$$|W_р(j\omega)|_{\omega\to 0} >> 1 \qquad (6.23)$$

$|W_з(j\omega)| \approx 1$ => частотная характеристика $W_р(j\omega)$ практически не влияет на $W_з(j\omega)$.

Область высоких частот (ОВЧ):

Совокупность частот, намного превышающих полосу пропускания системы

$$|W_0(j\omega)| \approx 0 \qquad |W_р(j\omega)| \approx 0 \qquad (6.24)$$

$|W(j\omega)| \approx 0$ => частотная характеристика $W_р(j\omega)$ не влияет на $W_з(j\omega)$.

Область средних частот (ОСЧ):

Это промежуток между ОНЧ и ОВЧ, где выполняются условия:

$$|W_0(j\omega)| \approx 1 \qquad |W_р(j\omega)| \approx 1 \qquad (6.25)$$

Наибольшие влияние разомкнутой системы на свойства замкнутой в ОСЧ, где необходимо наиболее тщательно формировать $W_р(j\omega)$.

6.3.3. Основные соотношения частотного метода синтеза.

На основании (6.20). Если удаётся задать определённую частотную характеристику $W_р^*(j\omega)$, то можно вычислить $W_к(j\omega)$. Но это слишком громоздко, поэтому этот метод не нашел практического применения, но на его основе разработан удобный метод синтеза по логарифмической амплитудной частотной характеристике (ЛАЧХ).

$$W_р(j\omega) = A_р(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

В соответствии с (6.20) для амплитудных частотных характеристик $W_к(j\omega)$ и $W_0(j\omega)$ справедливо:

$$A_р(\omega) = A_к(\omega)\, A_0(\omega), \qquad (6.26)$$

(6.26) в логарифмическом масштабе:

$$L_р(\omega) = L_к(\omega) + L_0(\omega) \qquad (6.27)$$

Приравнять правую часть (6.27) $L_*(\omega)$, получим:

$$L_*(\omega) = L_к(\omega) + L_0(\omega) \;\; => \;\; L_к(\omega) = L_*(\omega) - L_0(\omega) \qquad (6.28)$$

Таким образом, для расчёта регулятора необходимо построить ЛАХЧ $L_0(\omega)$ и на и на основе требований к качеству процессов замкнутой системы (6.3) и (6.4) сформировать ЛАХЧ $L_*(\omega)$ разомкнутой системы, => ЛАЧХ $L_p(\omega)$ по (6.28).

6.3.4 Построение асимптотической ЛАЧХ.

Часто модель ОУ - это последовательность типовых звеньев, поэтому $L_0(\omega)$ можно получить, суммируя отдельные ЛАЧХ.

Процедура построения ЛАЧХ $L_0(\omega)$:

1.на ω=1 (в логарифмическом масштабе $lg\omega=0$), соответствующая значению 20 $lg(k_0)$, где k_0 – k*у* – оу.

2.на оси абсцисс отмечаются частоты сопряжения $\omega_i = T_i^{-1}$ (или $lg\omega_i = lg\, T_i^{-1}$),$i=\overline{1,n}$, где *n* - число типовых динамических звеньев в составе $W_0(p)$.

3.до первой частоты сопряжения строится низкочастотную асимптоту с наклоном -20*r* дБ/дек. Если $W_0(p)$ содержит интеграторы , *l* -число интеграторов.

Наклон будет +20е дБ/дек, если $W_0(p)$ содержит дифференцированные звенья, е - число таких звеньев. Низкочастотная асимптота строится таким образом, чтобы она сама или ее продолжение проходили через точку 20$lg(k_0)$.

4.на частотах сопряжения проходит излом асимптотической ЛАЧХ объекта. Наклон ЛАЧХ изменяется на -20r дБ/дек, если соответствующая частоте сопряжения постоянная времени находится в знаменателе передаточной функции, r-число таких звеньев. “Излом” асимптотической ЛАЧХ будет равен +20*l* дБ/дек, если постоянная времени находится в числителе передаточной функции, *l*-число звеньев. Новая асимптота проводится до следующей частоты сопряжения, где также происходит излом в соответствии с указанным правилом.

пример 6.2: Построить асимптотическую ЛАЧХ объекта управления:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p(T_1p+1)(T_2+1)}$$

$k_0 = 10$, $T_1 = 10$ с, $T_2 = 1$с.

1) Определяем характерные точки

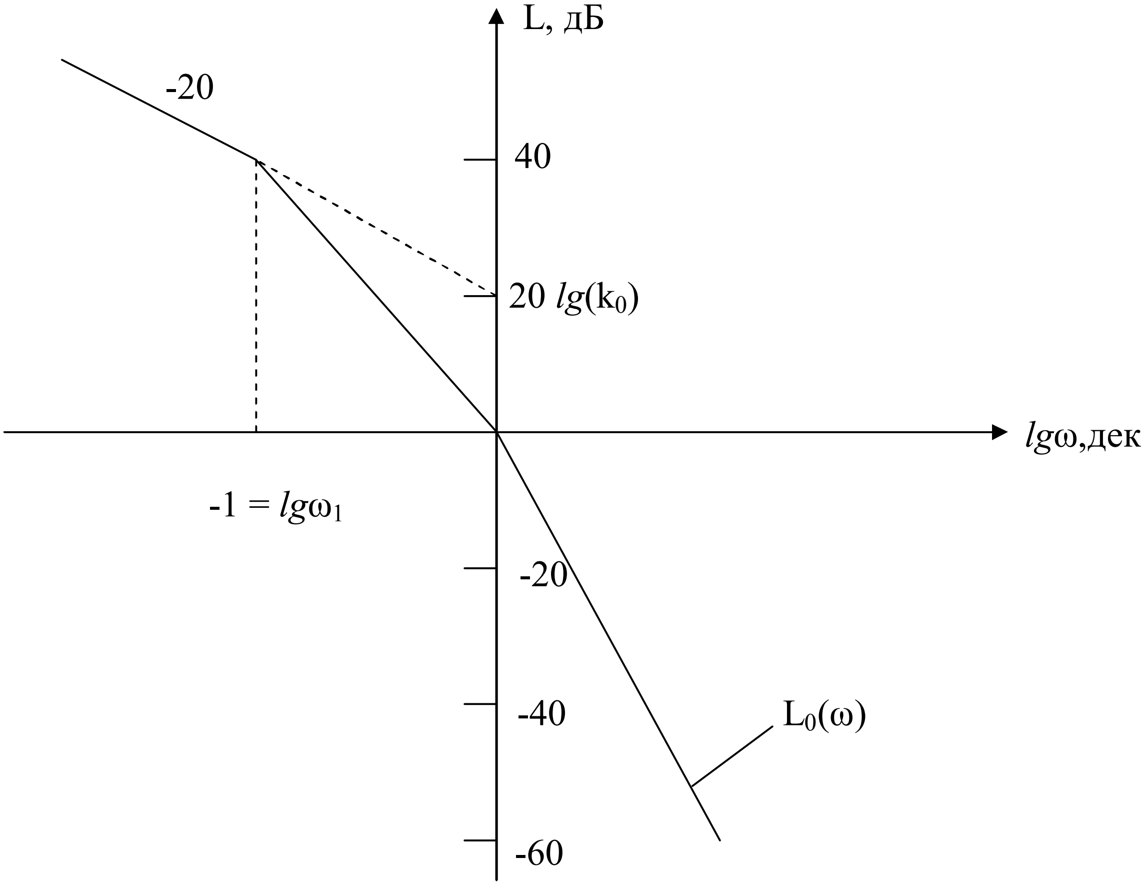
$20lg(k_0) = 20$ дБ

$lg\omega_1 = lg\left(\frac{1}{T_1}\right) = lg\, 0.1 = -1$ дек

$lg\omega_2 = lg\left(\frac{1}{T_2}\right) = lg1 = 0$

и отметим их на осях координат точки.

Построение ЛАЧХ начинается на ОНЧ, которая располагается левее первой частоты сопряжения. В ОНЧ наклон $L_0(\omega)$ -20 дБ/дек содержит интегрирующее звено. Проводится она до частоты $lg\omega$, так чтобы ее продолжение пересекало ось ординат в точки 20 $lg(k_0)$. На частоте $lg\omega_1$ происходит излом.



Характеристики на -20 дБ/дек, что соответствует апериодическому звену $W_o(p)$. До следующей частоты сопряжения $lg\omega_2$ асимптота имеет наклон -40 дБ/дек. Излом на частоте $lg\omega_2$ = -20дБ/дек, т.к.$W_o(p)$ апериодическое звено с постоянной времени T_2. И $L_0(\omega)$ получается наклон -60 дБ/дек.

Для построения ЛАЧХ объекта управления с произвольной передаточной функции

$$W_o(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$p \rightarrow j\omega$

$$W_o(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

$$A_0(\omega) = \frac{A_B(\omega)}{A_A(\omega)} \Rightarrow$$

$$L_0(\omega) = L_B(\omega) - L_A(\omega) \qquad (6.29)$$

6.3.5 Построение желаемой ЛАЧХ.

$L_*(\omega)$ строится на основе (6.3.)и (6.4.)

Т.к. в основном статическую ошибку в системе порождает возмущающее воздействие (см.прошлую лекцию), то

$|\Delta_M{}^0| \le \Delta_*{}^0 \rightarrow \delta_*{}^0$ – относительное значение статической ошибки (6.30)

$\Delta_M{}^0 = \frac{1}{1+k_0 k_k} M = \frac{1}{1+ k_p} M$

$$\frac{1}{1+ k_p} \le \delta_*{}^0 \qquad (6.31)$$

Для астатических систем ,работающих в режиме линейной заводки, k_p можно определить на основе выражения:

$$\Delta^0 = \frac{1}{k_p}\eta \qquad (\nu = \frac{1}{p}\eta\ )$$

При синтезе систем частотным методом удобно выровнять по коэффициенту ЛАЧХ ОУ и ЛАЧХ разных систем и строить $L_o(\omega)$ с коэффициентом усиления k_p. Таким образом, требования по статике (6.3.) учитывается на этапе построения ЛАЧХ ОУ.

Построение желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы, которую будем выбирать из условий требуемой динамики замкнутой системы (6.4.)

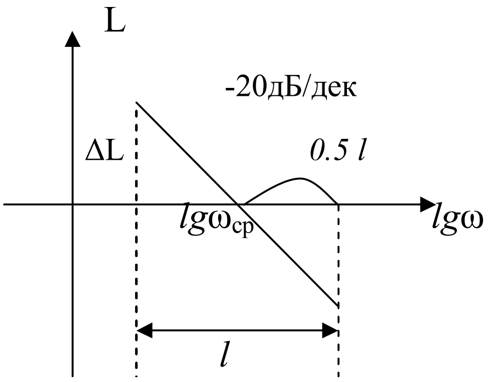
Опытным путем установлено, что для обеспечения заданных динамических свойств, наклон среднечастотной асимптоты $L_*(\omega)$ следует выбрать равным -20 дБ/дек, ось абсцисс она пересекает в точке $lg\omega_{ср}$. Частота $\omega_{ср}$ в данном методе играет роль граничной частоты полосы пропускания, при этом значение АЧХ системы становится равным 1.

$\omega_{ср}$ по $t_{пп}{}^*$ и σ^* замкнутой системы

Соотношения $t_{пп}{}^*$ и $\omega_{ср}$ устанавливают номограммы (справ. литература).

Для предварительных расчетов можно пользоваться выражением

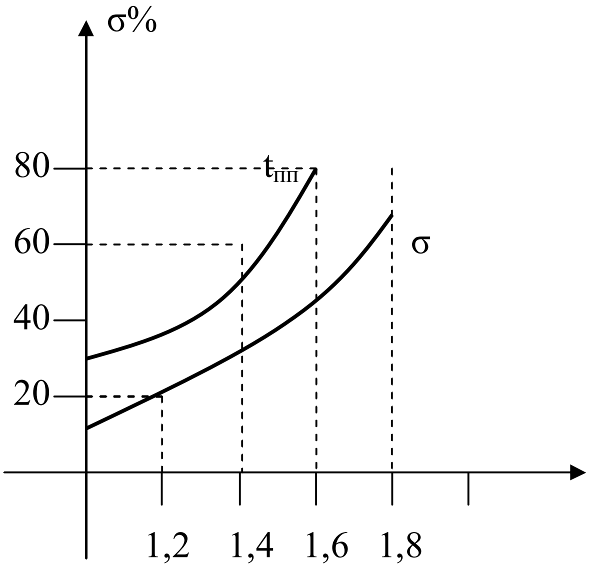
$$\omega_0 \cong \frac{k\,\Pi}{t^*{}_{пп}} \qquad k = (2 \ldots 4) \qquad (6.32)$$



Длина среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ ограничивается запасом устойчивости по модулю ΔL, которая отклоняется вверх и вниз оси ординат.

ΔL находится по номограммам по σ^*.

Т.к. наибольшее влияние на свойства замкнутой системы разомкнутая оказывает в ОСЧ, построение $L_*(\omega)$ начинается с этой области.



l = (1 … 1.5) декады. Это соответствует $\sigma \cong (20 \div 30)\%$.

Далее переходим построению $L_*(\omega)$

<u>ОНЧ</u> : $L_*(\omega) = L_0(\omega)$

<u>ОВЧ</u>: $L_*(\omega) = L_0(\omega)$ или $L_*(\omega) \parallel L_0(\omega)$.

Далее среднечастотная часть $L_*(\omega)$ сопрягается с ОНЧ и ОВЧ. Наклон $L_*(\omega)$ на участках сопряжения должен быть кратким 20 дБ/дек. Их следует проводить так, чтобы $L_*(\omega)$ получила наиболее простую характеристику.

6.3.6 Определение передаточной функции регулятора

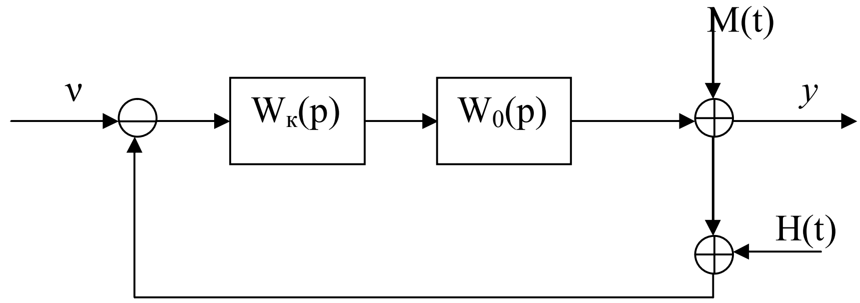
$$\tilde{L}_к(\omega) = L_*(\omega) - \tilde{L}_0(\omega)$$

По найденной характеристики определяем частоты сопряжения и соответствующие им постоянные времени. $\tilde{W}_к(p)$ определяется на основе процедуры, обратной п.6.3.4. В окончательную передаточную функцию регулятора следует добавить $k_к = \frac{k_p}{k_0}$ рассчитанный по условию статики (6.3)

$$W_к(p) = k_к \tilde{W}_к(p)$$

Реализовать полученную передаточную функцию можно на пассивных и активных элементах. Можно воспользоваться рекомендациями (3.5.)

<u>Пример 6.3</u>:

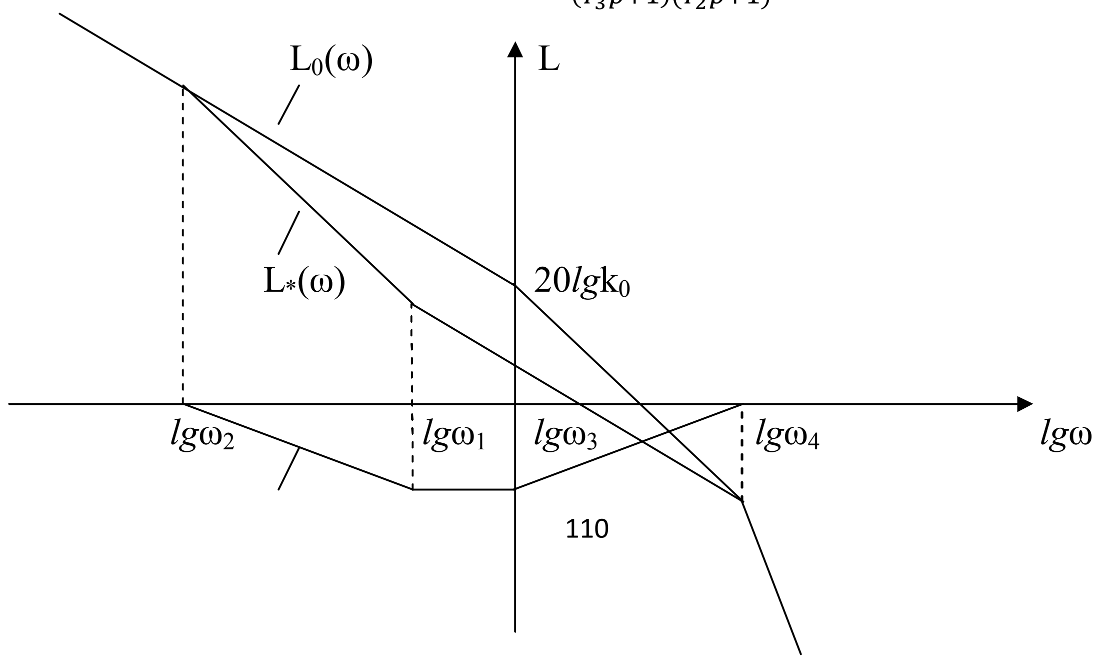


$W_0(p) = \frac{k_0}{p\,(T_1p+1)(T_2p+1)}$ и построенной $L_*(\omega)$. Определить $W_к(p)$ - ?

$lg\omega_3 \Rightarrow \omega_3$

$lg\omega_4 \Rightarrow \omega_4$

$$W_к(p) = \frac{(T_4p+1)(T_1p+1)}{(T_3p+1)(T_2p+1)}$$



$L_к(\omega)$

Лекция № 16

6.3.8 Процедура синтеза регулятора частотным методом

1.Определяется k_p из условия статики, затем:

$$k_к = \frac{k_p}{k_0}$$

2. Строится ЛАЧХ с учетом расчетного $k_к$

$$\tilde{L}_0(\omega) = k_к\ L_0(\omega)$$

3. На основании $t_{пп}^*$ и σ^* формируется $L_*(\omega)$

4. Графически вычисляется $L_к(\omega)$

$$\tilde{L}_к(\omega) = L_*(\omega) - \tilde{L}_0(\omega)$$

5. По $\tilde{L}_к(\omega)$ восстанавливается $\tilde{W}_к(p)$, затем записывается

$$W_к(p) = k_к\ \tilde{W}_к(p)$$

6. Анализируется влияние возмущения M(t) и при необходимости увеличивается частота среза $\omega_{ср}$, для которой повторяется процедуры 3-5 расчета регулятора.

7. С целью уменьшения влияния помехи измерения к рассчитанной передаточной функции $W_к(p)$ корректирующего звена добавляется передаточная функция W(p) апериодического звена с малой постоянной времени.

8. Предлагается схемная реализация регулятора на активных или пассивных элементах.

6.4 Модальный метод синтеза

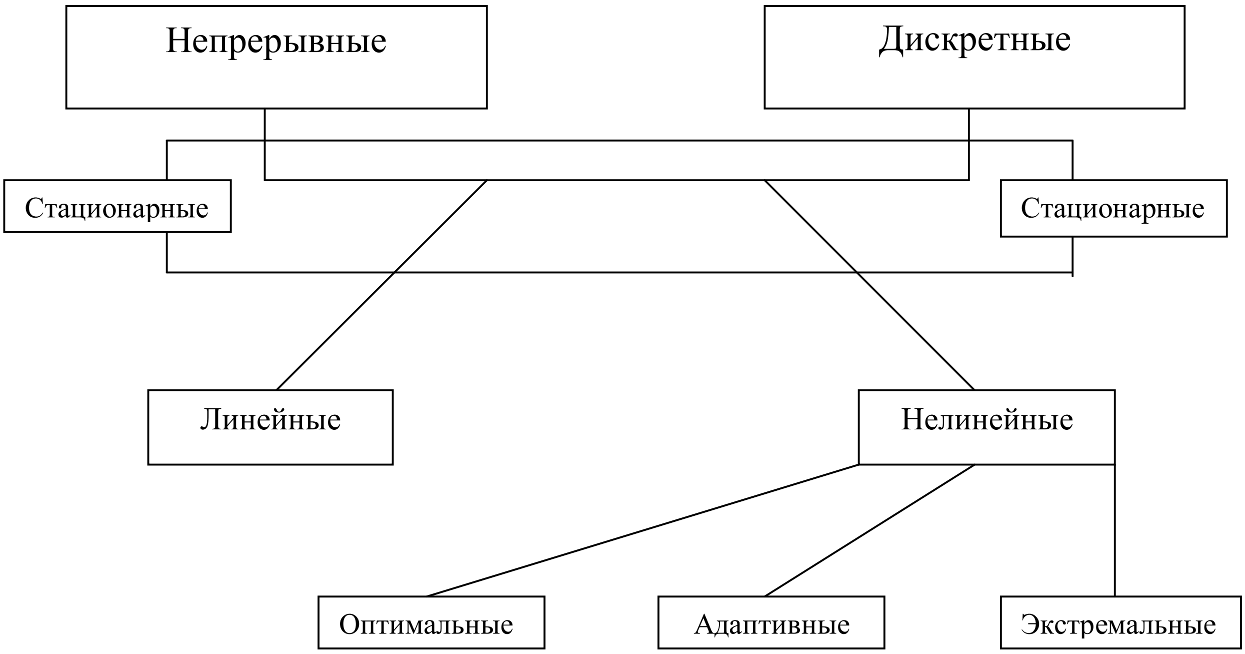
Как правило он применяется для расчета систем, работающих в режиме обработки начальных условий. Процедура основана на использовании корней характеристического уравнения .

Частотный метод синтеза - используется для синтеза систем, работающих в режиме слежения или обработки входного воздействия.

Выбирая подходящий метод расчета системы, нужно убедиться в том, что задача синтеза будет разрешима. С этой целью, необходимо исследовать свойства объекта управления и реальные ограничения на переменные состояния и управления, а также требования, которые предъявляемых к качеству работы замкнутой системы. Следует убедиться в том, что эти требования и возможности объекта не противоречат друг другу.

Заключительным этапом любой процедуры расчета и проектирования регулятора является эксперимент на реальной системе, следовательно может возникнуть необходимость уточнения модели объекта, а затем корректировка параметров и структуры регулятора. Таким образом, это итерационная процедура.

7. Виды САУ



Дискретные САУ – САУ, в которых векторы X, Y, U определены в конкретные моменты времени t.

Системы поиска экстремума - это САУ, которые в процессе работы обеспечивают достижения min и max некоторого показателя качества при недостаточной априорной информации о характере его изменения.

Адаптивные (самонастраивающиеся) САУ - это САУ объектами, полностью описать поведение которых невозможно. В этом случае заранее сложно определить характер изменения динамических свойств системы и ОУ. Адаптивные САУ подстраиваются под указанные изменения в ходе функции ОУ. К адаптивному способу управления обращаются, когда сложность управляемого процесса достигает такого уровня, при котором влияние неопределенности или неполноты априорной информации об условиях работы системы становится существенным для обеспечения заданного качества процессов управления.

Оптимальные системы – САУ, в которых полностью в каком-либо формальном смысле используются динамические возможным ОУ для совершение переходных процессов при заданных ресурсных ограничениях . В отличии от экстремальных САУ эти САУ наилучших показателей работы добиваются, заставляя ОУ работать на пределе своих возможностей.

Адаптивные - это САУ, в которых в след за изменяющимися параметрами ОУ изменяются и параметры регулятора. Изменение параметров происходит таким образом, чтобы поведение системы в целом оставалось неизменным и соответствует желаемому.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x \in R^n, \\ y = C(t)x, & y, u \in R^m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f\,(x, u, A(t)) \\ y = g(t) \end{cases}$$

A(p) –

Экстремальные системы:

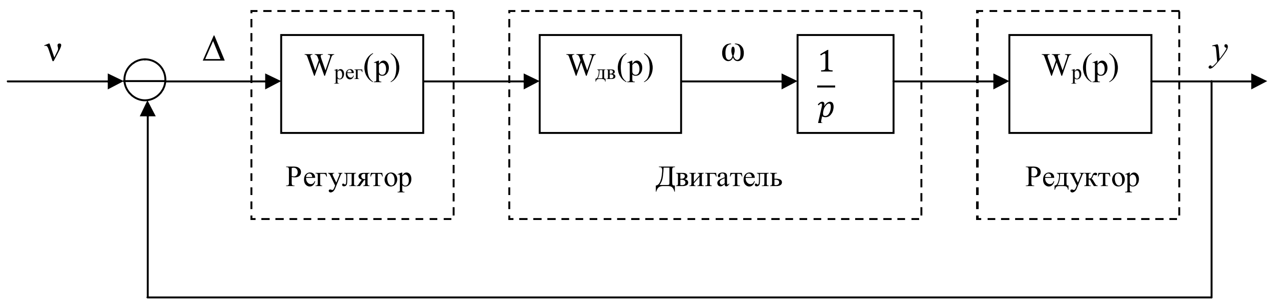
$$\begin{cases} \dot{x} = f\,(x, u,) \\ y = g(t) \\ Y = Y(y, t) \end{cases}$$

$$U: \text{ext } Y\,(y, t) = Y_0$$

Лекция № 17

Решение задачи синтеза частотным методом (пример)

Для следящей системы, структурная схема которой представлена на рис. Рассчитать регулятор, который обеспечивал бы следующее качество процессов: время установления $t_{пп} \le 2$с, перерегулирование $\sigma \le 30\%$, скоростная ошибка $\delta_{ск} \le 2{,}5\%$.



$W_{дв}(p) = \frac{4.5}{(p+1)(p+5)}$, $W_р(p) = \frac{1}{30}$

$W_{рег}(p) = W_к(p)\, W_{ум}(p)$

Корректирующее звено усилитель мощности

$W_{ум}(p) = k_{ум} = 30$

При расчете $W_к(p)$ $k_{ум}$ добавим к передаточной функции объекта.

Будем рассматривать ОУ

$$W_0(p) = k_{ум}\, \widetilde{W}_{дв}(p)\, W_р(p) = \frac{30*4,5}{30\, p\, (p+1)(p+5)} = \frac{4.5}{p\, (p+1)(p+5)}$$

$$\widetilde{W}_{дв}(p) = W_{дв}(p)\, \frac{1}{p}$$

1) Проверяем условии разрешимости задачи синтеза

1. <u>Ресурсное ограничение отсутствует</u>.

2. <u>Устойчивость обратного объекта B(p)=4.5 проверять не нужно.</u>

3. <u>Управляемость :</u>

$$W_0(p) = \frac{4.5}{p^3 + 6p^2 + 5p}$$

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 5\dot{y} = 4.5u$$

$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_3 = \ddot{y}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -5\,x_2 - 6x_3 + 4.5\,u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.5 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$U = B \quad AB \quad A^2B$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ -2.7 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 30 & 31 \end{bmatrix} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.7 \\ 139.5 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.5 \\ 0 & 4.5 & -27 \\ 4.5 & -27 & 139.5 \end{bmatrix}$$

$\det\{U\} = 0+0+0-4.5^3 = 91.125 \neq 0$ =>объект управляемый.

4. Проверка наблюдаемости:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$CA = [0 \quad 1 \quad 0]$

$CA^2 = [0 \quad 0 \quad 1]$

$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det\{N\} = 1 \neq 0$ => объект наблюдаемый

2) Процедура синтеза частотным методом

1.определим коэффициент устойчивости корректирующего звена из условия скоростной ошибки $\delta_{скор} \leq 2{,}5\%$

$$\Delta = \nu - y = \nu - W_{рег}(p) * \widetilde{W}_{дв}(p) * \frac{1}{p} * W_р(p)\ \Delta$$

$$\Delta = \frac{p}{p + W_{рег}(p) W_{дв}(p) W_p(p)} \nu$$

Рассмотрим режим линейной заводки $\nu = \frac{1}{p}\eta$

$\delta_{ск} = \frac{1}{p + W_{рег}(p) W_{дв}(p) W_p(p)}\eta$

В статике p=0

$W_{рег}(0) = K_к$, $W_{дв}(0) = 0,9$ $W_р(0) = \frac{1}{30}$

$\delta_{ск}{}^0 = \frac{1}{K_K 30 \frac{1}{30} 0.9}\eta = \frac{1}{K_K}\eta \leq 0.025\,\eta$

$$\frac{1}{0.9\,K_K} \leq 0.025$$

$K_K \geq \frac{1}{0.025*0.9} = 44.(4)$

$K_K = 50$ ← Выбираем

2. Строим ЛАЧХ ОУ.

Для построения асимптотической ЛАЧХ $\widetilde{L_0}(\omega)$ запишем $\widetilde{W}_0$(p) в виде

$\widetilde{W}_0(p) = K_K\, W_0(p) = \frac{50*4,5}{p\,(p+1)\,(p+5)}$ = (изменим для удобства построения) = $\frac{5*45}{p\,(p+1)\,(p+5)} = \frac{45}{0,2\,p\,(p+1)\,(p+5)} = \frac{45}{p\,(p+1)\,(0,2\,p+5)}$

Определяем характеристические точки

а) Пересечение с осью L(ω)

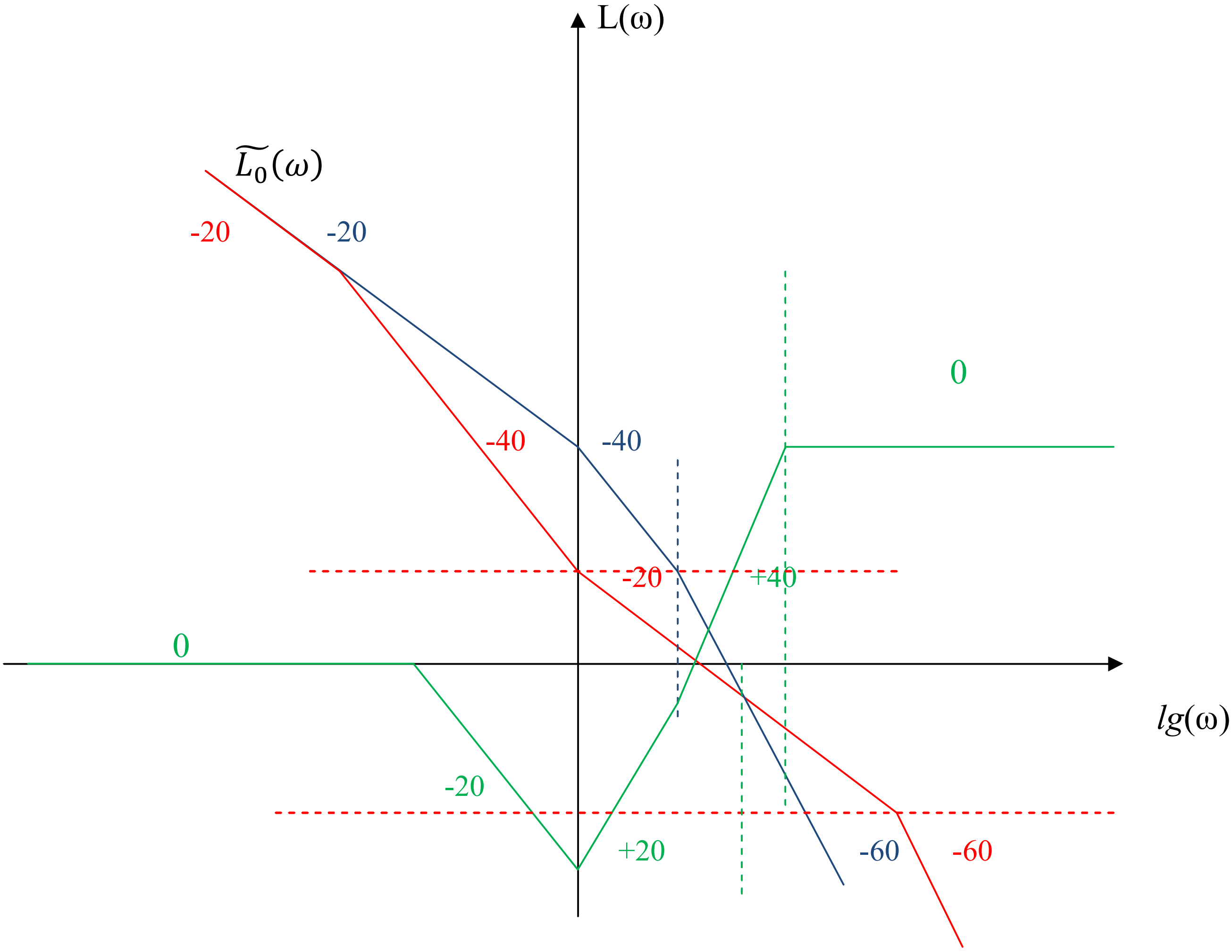
$20lgK = 20lg45 = 33$дБ

Точка излома

б) $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{1} = 1c^{-1}$ $lg(\omega_1) = lg(1) = 0$ дек

$\omega_1 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,2} = 5c^{-1}$ $lg(\omega_2) = lg(5) = 0,7$ дек

С учетом а) и б) строим асимптотическую ЛАЧХ $\widetilde{L_0}(\omega)$



3. Построение желаемой ЛАЧХ L*(p)

а) ОСИ

-Наклон – 20дБ/дек

-$\sigma^* \leq 30\%$, по номограмме $t_{пп} = \frac{4П}{\omega_н}$

$$\omega_н = \frac{4П}{{t_{пп}}^*} = \frac{4 * 3{,}14}{2} = 6{,}5\ с^{-1}$$

$\omega_{ср} = (0{,}6 \ldots 0{,}9)\ \omega_н$

Выбираем $\omega_{ср} = 5\ с^{-1}$

$lg\omega_с = lg5 = 0.7$ дек

-запас устойчивости ΔL определяем по номограмме с учетом σ^*

$\Delta L = 16$ дБ

4. Построение ЛАЧХ $\widetilde{L_К}(\omega)$ и определение $\widetilde{W}_К(p)$

$$\widetilde{W}_К(p) = \frac{(\tau_2{}^2p^2 + \tau_2 p+1)\,(\tau_3 p+1)}{(\tau_1 p+1)(\tau_4{}^2 p^2 + \tau_4 p+1)}$$

$$lg\frac{1}{\tau_1} = -1 \quad => \tau_1 = 10c$$

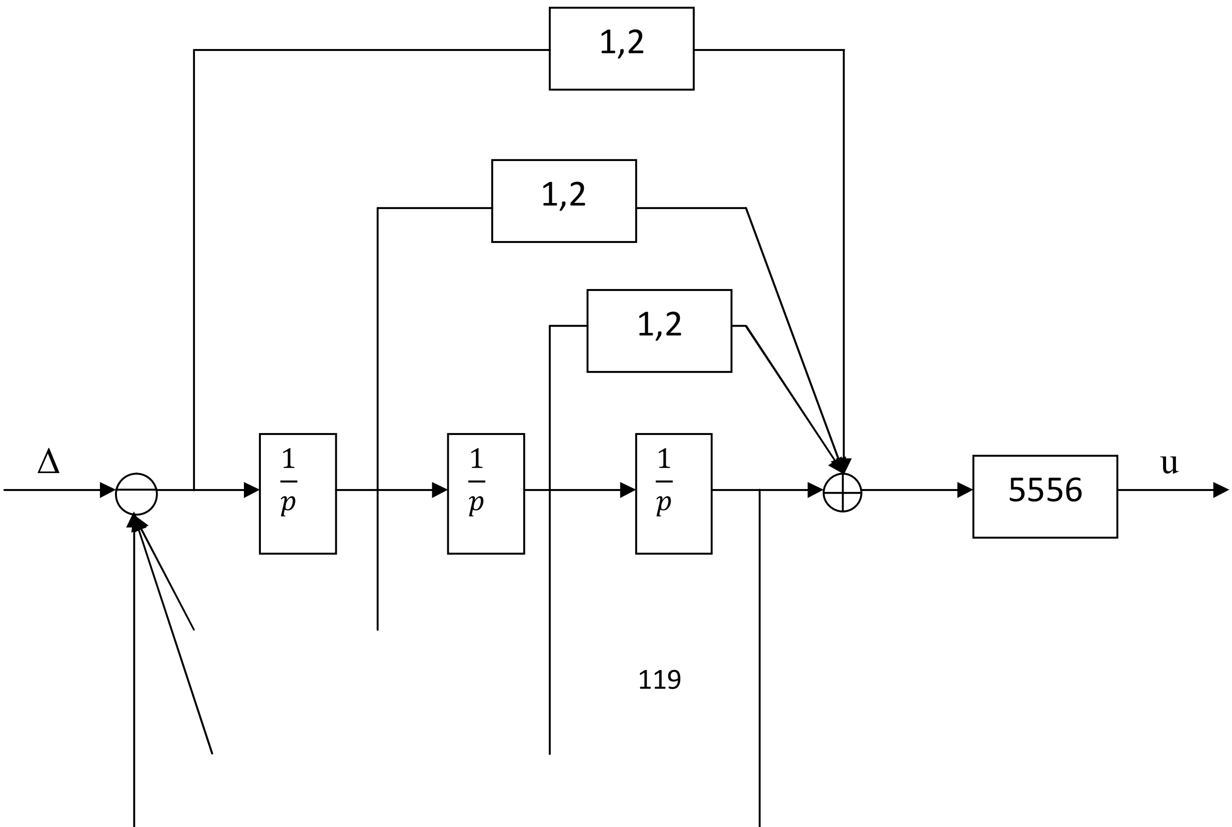
$$lg\frac{1}{\tau_2} = 0 \quad => \tau_2 = 1\ c$$

$$lg\frac{1}{\tau_3} = 0.7 \quad => \tau_3 = 0.2c$$

$$lg\frac{1}{\tau_4} = 1.5 \quad => \tau_4 = 0.03\ c$$

$$W_К(p) = K_К\widetilde{W}_0(p) = 50\frac{(p^2+p+1)(0.2p+1)}{(10p+1)(0.0009p^2+0.003p+1)} = 5556\ \frac{0.2\,p^3+1.2p^2+1.2p+1}{p^3+33.4p^2+1114.4p+111.1}$$

5. Схемная организация регулятора



33.4

1114.

111.

Лекция 18

7.Дискретные системы управления

7.1 Основные определения

Дискретные САУ – САУ, в которых векторы X,Y,U определены в конкретные моменты времени.

$$X(k\Delta t),\ \ Y(k\Delta t),\ \ U(k\Delta t).$$

Дискретные САУ

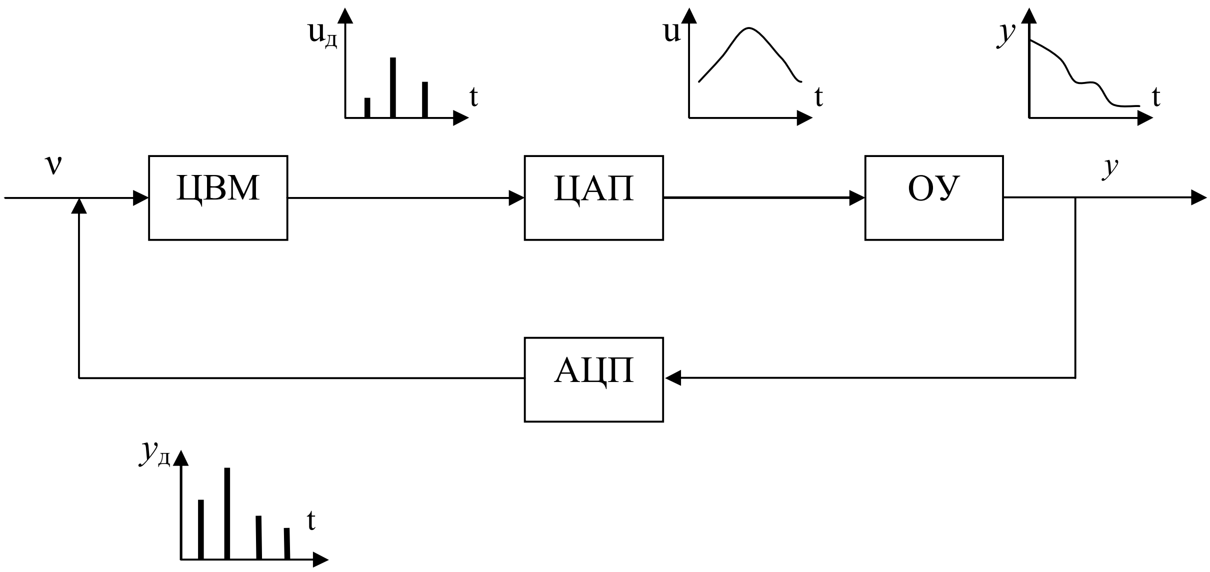
Собственно дискретные САУ | Комбинированные дискретные системы

Собственно дискретные системы – это САУ, в которых все переменные имеют дискретный характер изменения.

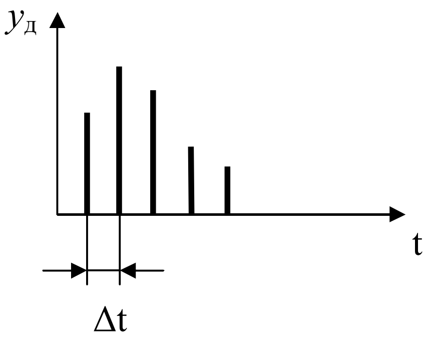
Комбинированные дискретные системы – это САУ, в которых наряду с собственно дискретной частью есть непрерывная часть.

САУ, где для управления непрерывным объектом используется цифровой регулятор.

Функциональная схема комбинированной системы:



Составляющей частью *аналого-цифровой преобразователь* (АЦП) является экстраполятор. Это устройство, которое на определенное время t запоминает поступающее на него входное воздействие.



Δt – шаг дискретизации

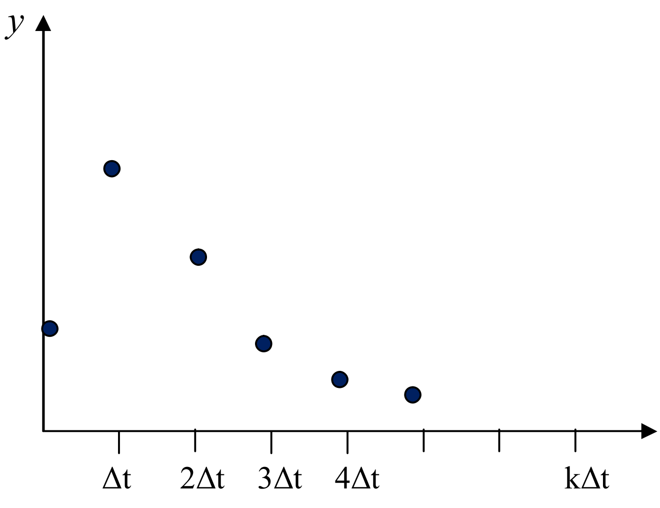
Если экстраполятор запоминает значение входного воздействия на весь шаг дискретизации Δt, то его называют экстраполятором нулевого порядка.

Для исследования свойств комбинированной дискретной системы, прежде всего, необходимо одинаково описать обе части системы. При этом обычно рассматривают дискретную аппроксимацию непрерывного объекта.

7.2 Динамические характеристики дискретных систем

7.2.1 Разностные уравнения

Рассмотрим систему, состояние которой изменяется во времени дискретно.



Введём обозначения:

y(0)

y(Δt) → y(1)

y(2Δt)→ y(2)

y(3Δt)→ y(3)

…

y(kΔt) = y(k)

Аналогично вводятся обозначения для других дискретных переменных.

Если в произвольный момент t= kΔt выходная переменная зависит от предыдущего значения и от управляющего воздействия в тот и предыдущий момент времени t, то мы имеем дело с дискретным объектом первого порядка.

$y(1) = -a_1y(0) + b_2\mathrm{u}(1) + b_1\mathrm{u}(0)$

Разностное уравнение первого порядка:

$$y(1) + a_1y(0) = b_2\mathrm{u}(1) + b_1\mathrm{u}(0)$$

Разностное уравнение n – го порядка:

$$y(\mathrm{n}) + a_{\mathrm{n}}\,y(\mathrm{n}-1) + a_{\mathrm{n}-1}\,y(\mathrm{n}-2) + \ldots + a_1y(0) = b_{\mathrm{n}+1}\,\mathrm{u}(\mathrm{n}) + \ldots + b_1\mathrm{u}(0) \qquad (7.1)$$

В качестве t=0 может быть выбран произвольный момент времени t.

При неизменном управляющем воздействии разностное уравнение может иметь вид:

$$y(\mathrm{n}) + a_{\mathrm{n}}\,y(\mathrm{n}-1) + a_{\mathrm{n}-1}\,y(\mathrm{n}-2) + \ldots + a_1y(0) = b\mathrm{u}(0) \qquad (7.2)$$

Для описания дискретных систем также используются переменные состояния. От уравнения (7.1) записанного в развернутой форме можно перейти к описанию объекта в переменных состояния.

В качестве переменных состояния выбирают значения выходных переменных в различные моменты времени t. Для каждой переменной состояния записывают разностное уравнение первого порядка:

$$\begin{cases} x_1(0) = y(0) \\ x_2(0) = y(1) \\ \quad\ldots \\ x_n(0) = y(n-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1) = x_2(0) \\ x_2(1) = x_3(0) \\ \quad\ldots \\ x_n(1) = -a_1x_1(0) - \ldots - a_nx_n(0) + b\mathrm{u}(0) \\ y(0) = x_1(0) \end{cases}$$

<u>Пример 7.1</u>: Перейти от разностного уравнения дискретной системы к описанию в переменных состояния.

$$y(3) - 5y(2) + y(1) - 2y(0) = 2u(0)$$

$$x_1(0) = y(0)\ ,\quad x_2(0) = y(1),\quad x_3(0) = y(2)$$

$$\begin{cases} x_1(1) = x_2(0) \\ x_2(1) = x_3(0) \\ x_3(1) = -2x_1(0) - x_2(0) + 5x_3(0) + 2u(0) \\ y(0) = x_1(0) \end{cases}$$

Для описания ДОУ используют векторно-матричные уравнения.

$$\begin{cases} X(1) = Ax(0) + Bu(0),\ X \in R^n \\ Y(0) = Cx(0),\ (u, Y) \in R^m \end{cases}, m \le n \qquad (7.3)$$

7.2.2 Дискретная передаточная функция

Дискретная передаточная функция (ДПФ) одноканальных систем – это отношение выходной величины к входной, взятых в один и тот же момент времени t.

Для перехода от разностного уравнения к ДПФ используют оператор сдвига Z.

$Z = e^{p\Delta t}$

$y(1) = Z\, y(0)$

$y(2) = Z\, y(1) = Z^2\, y(0)$

…

$y(n) = Z^n\, y(0)$

Переходим к операторному уравнению

$y(n) + a_n y(n-1) + a_{n-1} y(n-2) + \ldots + a_1 y(0) = b_{n+1} u(n) + \ldots + b_1 u(0)$

$Z^n y(0) + a_n Z^{n-1} y(0) + \ldots + a_1 y(0) = b_{n+1} Z^n u(0) + \ldots + b_1 u(0)$

$$(Z^n + a_n Z^{n-1} + \ldots + a_1)\, y(0) = (b_{n+1} Z^n + \ldots + b_1)\, u(0)$$

$$W(Z) = \frac{y(0)}{u\,(0)} = \frac{b_{n+1}Z^n + \ldots + b_1}{Z^n + a_n Z^{n-1} + \ldots + a_1} \qquad (7.4)$$

Лекция 19

Свойства передаточной функции дискретного объекта

Порядки полиномов числителя и знаменателя для дискретного объекта:

-могут совпадать (~40%)

-может порядок числителя на 1 больше полинома знаменателя (~40%)

Важное свойство дискретной передаточной функции:

По ДПФ можно определить коэффициент усиления системы(по аналогии с непрерывными системами W(p) = K при p=0)

Режим статики для дискретных систем управления:

$Z = e^{pt}$, p=0 => $Z = e^{0} = 1$

$$W(Z) = \frac{y(0)}{u\,(0)} = \frac{b_{n+1}Z^n + \ldots + b_1}{Z^n + a_n Z^{n-1} + \ldots + a_1} \qquad (7.4)$$

В статике Z=1

$$W(Z)\,|_{Z=1} = \frac{b_{n+1} + \ldots + b_1}{1 + a_n + \ldots + a_1} = K$$

K – коэффициент усиления дискретных систем управления

Пример: определить дискретную передаточную функцию системы

$$\begin{cases} x_1(1) = x_2(0) \\ x_2(1) = x_3(0) \\ x_3(1) = -2x_1(0) + x_2(0) + 5\mathrm{u}(0) \\ y(0) = x_1(0) \end{cases}$$

$x_1(0) = y(0)$

$x_2(0) = x_1(1) = y(1)$

$x_3(0) = x_2(1) = x_1(2) = y(2)$

$x_3(1) = x_2(2) = x_1(3) = y(3)$

$y(3) = -2y(0) + y(1) + 5\mathrm{u}(0)$

$y(3) - y(1) + 2y(0) = 5\mathrm{u}(0)$

$(Z^3 - Z + 2)\, y(0) = 5\mathrm{u}(0)$

$$W(Z) = \frac{y(0)}{u(0)} = \frac{5}{Z^3 - Z + 2}$$

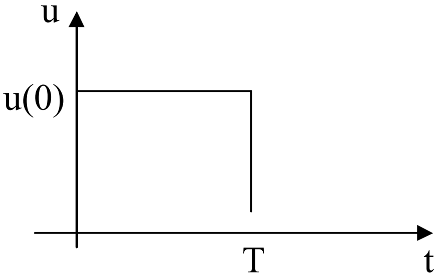
7.2.3 Дискретная аппроксимация на основе отношения приращений

Дискретная аппроксимация предполагает переход от непрерывного объекта к эквивалентному дискретному.

Рассмотрим непрерывный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A^{*}x + B^{*}u, \; X \in R^{n} \\ \qquad y = C^{*}x, \; (u, Y) \in R^{m} \end{cases} \qquad (7.5)$$

Предполагаем, что в системе есть экстраполятор нулевого порядка. Это означает:



$\Delta t = T$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Будем рассматривать приращение на шаге дискретизации $\Delta t = T$

$$\Delta x = x(1) - x(0)$$

Чем меньше T, тем точнее замена

$$\begin{cases} \dfrac{x(1) - x(0)}{T} = A^{*}x(0) + B^{*}u(0), \qquad x \in R^{n} \\ \qquad\qquad y(0) = C^{*}x\,(0), \qquad (y, u) \in R' \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $x(1)$:

$x(1) = (I + A^{*}T)\,x(0) + B^{*}Tu(0)$

Введём обозначения

$$A = I + A^{*}T$$
$$B = B^{*}T \qquad (7.6)$$
$$C = C^{*}$$

$$\begin{cases} x(1) = Ax(0) + Bu(0), \; x \in R^n \\ \qquad\qquad y(0) = Cx(0), \; (y, u) \in R' \end{cases} \qquad (7.7)$$

Система уравнений (7.7) – дискретная модель непрерывного объекта (7.5). Причем (7.7) будет тем ближе к (7.5), чем меньше Т.

<u>Пример</u>: Записать дискретную модель непрерывного объекта управления:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 2\mathrm{u}$$

T = 0.1

$\dot{y} = \frac{y(1) - y(0)}{T}$

$\ddot{y} = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\dot{y}(1) - \dot{y}}{T} = \frac{y(2) - y(1)}{T^2} - \frac{y(1) - y(0)}{T^2} = \frac{y(2) - 2y + y(0)}{T^2}$

$\frac{y(2) - 2y(1) + y(0)}{T^2} + 5\frac{y(1) - y(0)}{T} + y(0) = 2u(0)$

$y(2) - 2y(1) + y(0) + 5\mathrm{T}(y(1) - y(0)) + \mathrm{T}^2 y(0) = 2\mathrm{T}^2\mathrm{u}(0)$

$y(2) - (2\text{-}5\mathrm{T})y(1) + y(0) + 5\mathrm{T}(y(1) - y(0)) + \mathrm{T}^2 y(0) = 2\mathrm{T}^2\mathrm{u}(0)$

$y(2) - 1.5\, y(1) + 0.51\, y(0) = 0.02\, \mathrm{u}(0)$

7.2.4 Дискретная аппроксимация методом точной замены

Рассмотрим непрерывный объект (7.5)

$$x(\mathrm{t}) = e^{A^* t}\, x(0) + \int_0^t e^{A^*(t-\tau)} B^* u(\tau)\, d\tau$$

Переходя к дискретному описанию, предполагаем, что в системе есть экстраполятор первого порядка. u(1) = u(0) = *const.*

Найдём решение на интервале дискретизации

$$x(\mathrm{T}) = e^{A^* T}\, x(0) + \int_0^T e^{A^*(T-\tau)} B^* u(\tau)\, d\tau$$

$$x(1) = \underbrace{e^{A^* T}}_{\mathrm{A}}\, x(0) + \underbrace{\left[\int_0^T e^{A^*(T-\tau)} B^*\, d\tau\right]}_{\mathrm{B}} \mathrm{u}(0)$$

С учетом обозначений, получаем

$$\begin{cases} x(1) = Ax(0) + Bu(0), \; x \in R^n \\ \qquad\qquad y(0) = Cx(0), \; (y, u) \in R' \end{cases} \text{,где}$$

$$A = e^{A^*T}, \quad B = \int_0^T e^{A^*(T-\tau)} B^* \, d\tau \qquad (7.8)$$

$$C = C^*$$

$$A = e^{A^*T} = I + \frac{T}{1!}A^* + \frac{T^2}{2!}(A^*)^2 + \ldots \qquad (7.9)$$

матричная экспонента

Если ограничиться только линейными членами ряда (7.9). то мы получим способ дискретизации 7.2.3

Достоинства способа: Способ точной замены дискретному описанию непрерывному ОУ с любой наперед заданной точностью. При этом следует учитывать определенное число членов ряда разложения.

Недостаток: Дискретную модель можно получить только для линейного объекта.

Способ замены производной отношением конечных разностей (7.2.3) обладает меньшей точностью и применяется при любых интервалах дискретизации, но его можно использовать и дискретизации нелинейных непрерывных объектов.

7.2.5 Использование Z – преобразование Лапласа

Этот способ удобно применять для одноканальных объектов, которые описываются с помощью передаточной функции.

$$W_0(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}$$

Используя Z-преобразование, переходят к ДПФ

$$W(Z) = W_э(Z)\, Z\left\{\frac{W_0(p)}{p}\right\}$$

Наиболее часто используется экстраполятор нулевого порядка.

$$W_э(Z) = \frac{Z-1}{Z}$$

$$W(Z) = \frac{Z-1}{Z}\, Z\left\{\frac{W_0(p)}{p}\right\} \qquad (7.10)$$

Пример: записать ДПФ для непрерывного объекта управления:

$$W_0(p) = \frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$$

$$\frac{W_0(p)}{p} = \frac{k}{p\,(T_1p+1)(T_2p+1)} = \mathrm{k}\left[\frac{1}{p} + \frac{a}{T_1p+1} + \frac{b}{T_2p+1}\right]$$

$$a = \frac{{T_1}^2}{T_1 - T_2} \qquad\qquad b = \frac{{T_2}^2}{T_1 - T_2}$$

$$\mathrm{W}(Z) = \frac{Z-1}{Z}\, Z\left\{\frac{W_0(p)}{p}\right\} = \mathrm{k}\,\frac{z-1}{2}\left[\frac{z-1}{z} + \frac{az}{T_1(z-d_1)} + \frac{bz}{T_2(z-d_2)}\right],$$ где

$$d_1 = e^{-\frac{T}{T_1}} \quad , \quad d_2 = e^{-\frac{T}{T_2}} ,$$

T-шаг дискретизации

Лекция 21

8.2 Устойчивость нелинейных систем

Методы исследования устойчивости нелинейных систем существенно отличаются от способов анализа линейных систем. В первую очередь это связано с тем, что свойство устойчивости нелинейных систем зависит от начальных условий и внешних воздействий : при одних входных сигналах и система будет устойчива, а при других становиться неустойчивой. Для анализа нелинейных систем *нельзя* применять критерии устойчивости, разработанных для линейных систем.

Устойчивость нелинейных САУ означает, что малые изменения входного сигнал или возмущений, начальных условий или параметров объекта не выведут выходную переменную за пределы достаточно малой окрестности точки равновесия или предельного цикла. Поскольку для нелинейных систем могут существовать несколько положений равновесия, анализировать устойчивость следует в окрестности каждого из них.

8.2.1 Основные определения

Исследуем понятие устойчивости для нелинейной стационарной системы

$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \; u \in R^m, \quad m \leq n$

Устойчивость – это способность системы с течением времени t возвращаться в равновесное состояние.

$\dot{x} = 0$

$0 = f(x^0, u)$

$u_1 \rightarrow x^0, \ldots, u_i \rightarrow x_i^0$

x^0 – множество равновесных состояний

$x^0 = \varphi(u)$

Рассмотрим уравнения в отклонении x от состояния равновесия

$\Delta = x - x^0$

$x = \Delta + x^0$

Рассмотрим изменение Δ с течением времени t

$\dot{\Delta} = \dot{x} - \dot{x}^0 = \dot{x} = f(x, u)$

$\dot{\Delta} = f(\Delta + x^0, u)$

$\dot{\Delta} = \bar{f}$ (Δ, u)

Поведение системы вблизи равновесного состояния определяется численным значением управления.

Поэтому, анализируя устойчивость нелинейной системы необходимо оговаривать вид управляющей воздействия.

Если u=0 =>система автономна

$\dot{\Delta} = \bar{f}$ (Δ)

0 = $\bar{f}$ (Δ) – равновесное состояние соответствует координат для Δ.

8.2.2 Виды устойчивости нелинейных систем

Далее будем рассматривать нелинейную стационарную автономную систему:

$\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$

Уравнение равновесия которой

$0 = f(0)$

Рассмотрим условие устойчивости автономной системы относительно точки x=0.

1. Если в некоторой окрестности состояния равновесия для произвольных начальных условий выполняются условия

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \qquad \forall\, x(0) \in R^n \qquad (*)$$

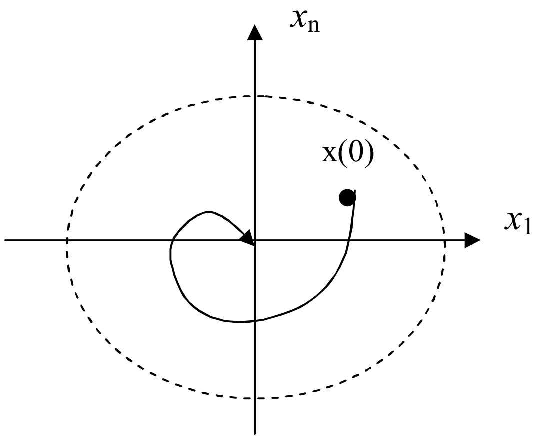
То система называется асимптотически устойчивой в этой окрестности.

Это условие означает, что с течением времени t фазовые траектории системы “стягиваются” к началу координат. Пр неустойчивом движении фазовая траектория удаляется от точки равновесия и вырождается в предельный цикл.

В зависимости от значений x(0), для которой выполняется условие (*) различают устойчивость:

-в малом

-в большом

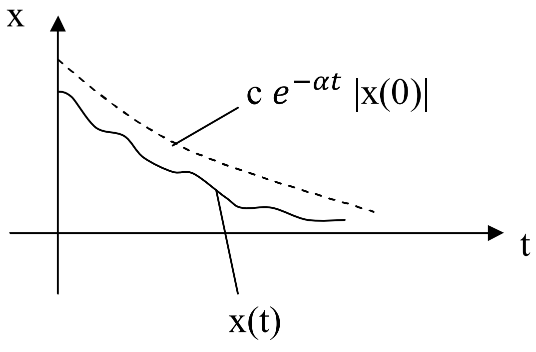


Состояние равновесия системы называется асимптотически устойчивым “в малом”, это свойство выполняется для малой окрестности положения равновесия.

Состояние равновесия системы называется асимптотически устойчивым “в большом”, если (*) выполняет для любых начальных условий из рабочей области пространства состояний.

Второе состояние равновесия системы называется экспоненциально устойчивым, если существует также C и α, что

$$|x(t)| \le c\, e^{-\alpha t}\, |x(0)|$$



Зная, что система экспоненциально устойчива, мы можем определить время переходного процесса $t_{пп}$

-в малом

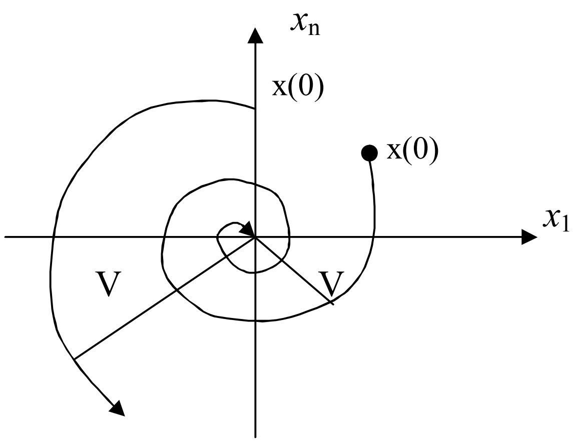
-в большом

8.2.3 Второй метод Ляпунова

Рассмотрим автономную систему

$\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$, $f(0) = 0$

В случае устойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы с течением времени стягиваются к началу координат .



При этом сокращается расстояние от текущей точки до точки равновесия. Для неустойчивого состояния равновесия фазовые траектории расходятся и расстояние увеличивается.

Суть второго метода Ляпунова заключается в отыскании некоторой скалярной функции координат состояния. Исследование свойств, которой позволяет ответить на вопрос, устойчива ли система.

V(x) – функция Ляпунова

Рассмотрим функции V(x) определенные и непрерывные в некоторой области пространства состояний D, содержащей начало координат и обладающие в этой области непрерывными частями производными по переменным *x*.

Функция V(x) называется положительно определенной в области D, если она положительна для любых значений переменных из этой области и обращается в ноль только в начале координат.

$$\begin{cases} V(x) > 0,\ \forall x \in D \\ V(0) = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Функция переменных состояния называется отрицательно определенной в области D, если она отрицательна $\forall\ x \in D$ и обращается в ноль только в начале координат.

$$\begin{cases} V(x) < 0,\ \forall x \in D \\ V(0) = 0 \end{cases}$$

Полной производной функции Ляпунова в силу системы (производной функции Ляпунова вдоль траектории движения системы) называется $\dot{V}$(x)

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x)$$

где $\frac{\partial V}{\partial x^T} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]$

$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x)$ →скаляр.

$\dot{V}$(x) обращается в ноль в начале координат, так как $f(0) = 0$

<u>Теорема об асимптотической устойчивости</u>

Состояние равновесия системы называется асимптотически устойчивым. Если для положительно определенной функции Ляпунова V(x) её полная производная в силу системы есть отрицательно определенная функция, т.е. при выполнении условий

$$\begin{cases} V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0,\ V(0) = 0 \\ \dot{V}(x) < 0,\ \forall x \neq 0,\ \dot{V}(0) = 0 \end{cases}$$

<u>Теорема о неустойчивости</u>

Состояние равновесия системы (***) является неустойчивым, ели для положительно определенной функции Ляпунова. V(x) её полная производная в силу системы представляет собой тоже положительно определенную функцию

$$\begin{cases} V(x) > 0, & \forall x \neq 0, \; V(0) = 0 \\ \dot{V}(x) > 0, & \forall x \neq 0, \; \dot{V}(0) = 0 \end{cases}$$

Так как от V(x) требуется только знакоопределенность, то для одной и той же системы (***) можно выбрать различные функции Ляпунова, которую могут привести к более “широким” или “узким” условием устойчивости.

Приведенные теоремы дают только достаточные условия устойчивости и неустойчивости и не указывают способы нахождения подходящих V(x), в чем и заключается основная сложность применения второго метода Ляпунова.

Пример: С помощью второго метода Ляпунова оценить устойчивость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + \mathrm{u} \end{cases}$$

полагаем u=0

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

B1

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0$

$V(0) = 0$

$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 10x_2^2 = -10x_2^2$

Полная производная $\dot{V}(x)$ не является отрицательно определенной функцией. Поскольку обращается в ноль не только в начале координат пространства состояний, но и на всей оси x_1. Не выполняются условия выше приведенных теорем.

B2

$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0, \; V(0) = 0$

$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\dot{x}_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1 + x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2$

$\dot{V}(x) = -2x_1^2 - 10x_1x_2 - 8x_2^2 < 0$

=> система асимптотически устойчива.

Лекция 22

8.3 Анализ процессов в нелинейных системах

Характер процессов нелинейных систем существенно зависит от величины внешних воздействий и начальных условий (как и устойчивость). То здесь неприменимы методы, используемые для линейных систем. Трудность анализа и оценивания процессов в них соответствуют сложности решения нелинейных дифференциальных уравнений.

К настоящему времени t не разработано общей теории анализа процессов в нелинейных системах. Существуют методики, которые позволяют решать отдельные задачи.

<u>*Метод фазовой плоскости (МФП)*</u>

МФП применяется для анализа свойств систем второго порядка и основан на использовании аппарата пространства состояний. Суть метода заключается в отображении частотных решений дифференциальных уравнении в совокупность фазовых траектории.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overline{f(}x_1, x_2, \mathrm{u}) \\ \dot{x}_2 = \bar{f}(x_1, x_2, \mathrm{u}) \end{cases} \qquad (1)$$

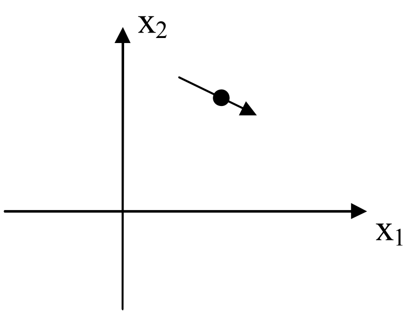
Управляющее воздействие входит в правую часть (1) как параметр

Полагаем u=*const* и его численное значение учтем в соответствующих функциях

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, \mathrm{u}) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, \mathrm{u}) \end{cases} \qquad (2)$$

Задавая множество наборов значений x_1 и x_2 можно получить поле векторов скорости, и двигаясь вдоль них, построить фазовую траекторию системы определенных начальных условий.

Необходимо знать в каждой точке фазовой плоскости направление движения изображающей точку. Оно характеризуется вектором скорости в этой точке.



Построить фазовую траекторию можно, подставляя координаты конкретной точки в уравнения объекта , и вычисляя скорость изменения тих переменных. Это позволяет построить вектор скорости. Двигаясь из начальной точки в соответствии с полученным вектором скорости можно построить фазовую траекторию.

Один из способов построения фазового портрета - способ изоклин.

Изоклина - это линия в пространстве состояний с одинаковым наклоном фазовых траекторий.

Выражение для коэффициента наклона траектории k

$$k = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)} \qquad (3)$$

Если (3) разрешить относительно x_2, то получим6

$$x_2 = \varphi(x_1,k) \qquad (4)$$

Задаваясь рядом численных значений k из диапазона от $-\infty$ до $+\infty$ получим из (4) совокупность конкретных *изоклин*. Чем больше будет *изоклин*, тем полнее и точнее будет фазовый портрет. Технику поясним на примере.

Пример: Построить фазовый портрет системы:

$$\ddot{y} + 0.5\dot{y} + y = 2u$$

При u=1

$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 0.5x_2 + 2 \end{cases}$

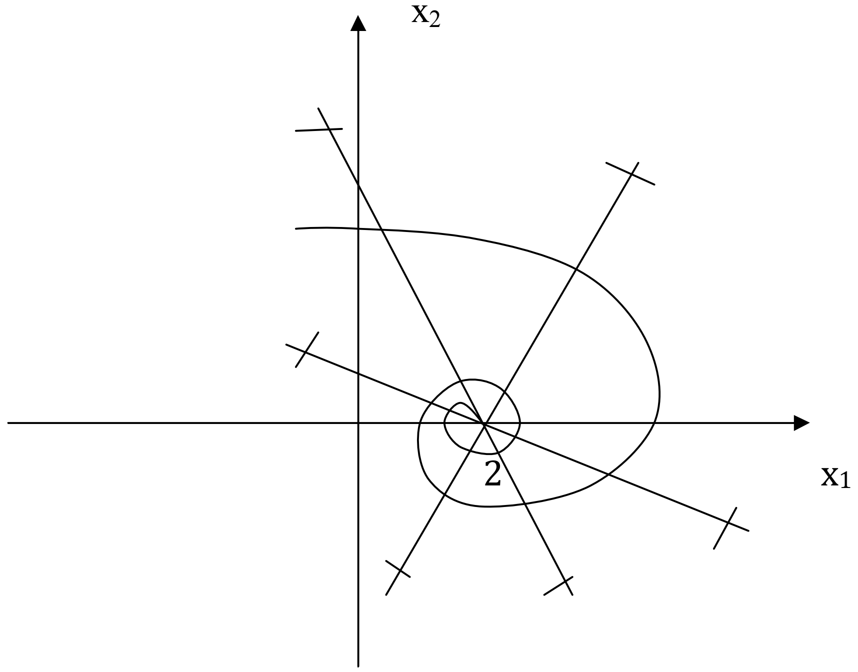
$$k = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1 - 0.5x_2 + 2}{x_2}$$

$$kx_2 + 0.5x_2 = -x_1 + 2$$

$x_2 = \frac{2 - x_1}{k + 0.5}$ -уравнение семейства изоклин

Придавая коэффициенту k определенные численные значении, получим уравнение конкретных изоклин.

k	0	1	-1	…	∞
$\alpha = \mathrm{arctg}\, k$	0	$\frac{\Pi}{4}$	$-\frac{\Pi}{4}$	…	$\frac{\Pi}{2}$
изоклина	$4-2x_1$	$\frac{4-2x_1}{3}$	$-4+2x_1$	…	$x_2=0$



Оценив знаки производных переменных состояния в начальной точке, определим направление движения.

Точка {0; 3}

$x_1 = 0$

$x_1 = 3$ =>

$\dot{x}_1 = 5 > 0$

$\dot{x}_2 = -0.5 < 0$

Если фазовая траектория имеет форму спирали, то процессы в системе имеют колебательный характер.

Если в фазовом портрете замкнутая кривая . то в системе устанавливаются автоколебания.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \approx \frac{\Delta x_1}{\frac{\Delta x_1}{\Delta \mathrm{t}}} = \Delta \mathrm{t}$$

Разбив всю траекторию на небольшие участки можно найти время переходного процесса $\mathrm{t}_{пп} = \sum \Delta\, \mathrm{t_i}$

Также для анализа процессов в нелинейных системах, существуют:

- *Метод гармонического баланса*
- *Метод малого параметра*
- *Метод разделения движений*

Лекция 23

8.4 Синтез нелинейных систем

8.4.1 Постановка задачи синтеза

Рассматриваем нелинейную систему с адаптивным уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, t) + B(t, x)u \\ y = g(t, x), \quad x \in R^n, (u, y) \in R^m, \qquad m \le n \end{cases}$$

$f(\cdot)$ – нелинейная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица (о существовании и единственности решения дифференциальных уравнении).

B($\cdot$) – нелинейная матрица коэффициентов, которая имеет полный ранг.

dim B = n x m

r{B(t,x)} = m $\quad \forall\, t, x$

$g(\cdot)$ – нелинейная вектор-функция

Зависимость правой части уравнений объекта от времени t означает, что с течением времени t параметры объекта могут меняться . ил на объект действуют сигнальные возмущения . с которыми нужно бороться.

Ресурс правления |u| ≤ $\bar{u}$

<u>Требования к замкнутой системе</u>

1.
$\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = V^0$, (требования к статике)

2. Требования к виду переходного процесса по выходным переменным $t_{пп}$, σ^*, Δ^*

От 1 и 2 переходят к формированию желаемого дифференциального уравнения для выходных переменных

$$\dot{Y} = F(Y.V) \qquad (*)$$

Переходов к желаемому дифференциальному уравнению несколько .Один из них: желаемое ДУ выбирают в линейном виде.

Нужно найти такое управляющее воздействия: u=u(). При подстановке которого в уравнение объекта, поведение замкнутой системы соответствует желаемому (*).

8.4.2 Условия разрешимости задачи синтеза

Разрешимость задачи синтеза означает, что существует такое конечное управляющее воздействие, которое обеспечивает в замкнутой системе желаемые свойства

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, t) + B(t, x)u \\ y = g(t, x), \quad x \in R^n, (u, y) \in R^m, \quad m \le n \end{cases}$$

$$\dot{y} = \frac{dg}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x^T}\dot{x} = \frac{\partial g}{\partial x^T}[f(t, x) + B(t, x)u] + g_T'(tx)$$

$$\mathrm{G} = \frac{\partial g}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\dot{Y} = g_T'(tx) + \mathrm{G}\, f(\mathrm{t}, x) + \mathrm{G}\, B(\mathrm{t}, x)\, \mathrm{u}$

$\dot{Y} = \mathrm{F(Y, V)}$ – желаемое ДУ

$$g_T'(tx) + \mathrm{G}\, f(\mathrm{t}, x) + \mathrm{G}\, B(\mathrm{t}, x)\, \mathrm{u} = \mathrm{F(Y, V)}$$

Если матрица G $B(\mathrm{t}, x)$ невырожденная ,

$$\mathrm{u} = [\mathrm{G}\, B(\mathrm{t}, x)]^{-1}\, [\mathrm{F(Y, V)} - g_T'(tx) - \mathrm{G}\, f(\mathrm{t}, x)] \quad (**)$$

det (GB) ≠ 0 – *условие разрешимости задачи синтеза.*

Реализовать на практике закон управления (**) невозможно т.к., как правило, $f(x_1, t), B(t, x)$, $g(t, x)$ неизвестны полностью. Известны лишь границы изменения этих элементов.

$f_{\min} \le f(x_1, t) \le f_{\max}$

$\mathrm{B}_{\min} \le B(t, x) \le \mathrm{B}_{\max}$

$\mathrm{g}_{\min} \le g(t, x) \le \mathrm{g}_{\max}$

Так как закон управления (**) реализовать не можем. Разрабатываются методы синтеза, которые позволяют найти управление, достаточно близкое по свойствам к точному (**).

8.4.3 Методы синтеза нелинейных систем

1.*Метод скользящих режимов* .

Уткин В.И. “Скользящие режимы и их применение в управлении и оптимизации” 1982.

2.*Метод локализации.*

Востриков А.С..Синтез нелинейных систем методом локализации .1990г.

3. *Метод большого коэффициента*.

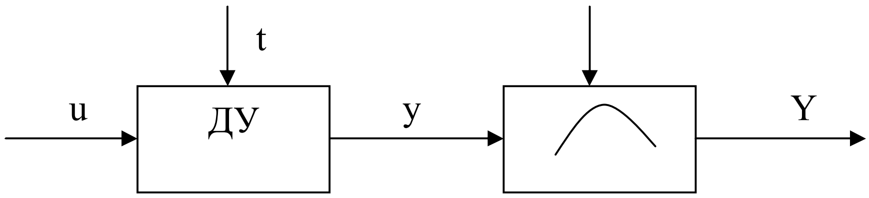
Бесекерский В.А., Попов Е.П.. Теория автоматического регулирования.1974 г.

9. Отдельные виды нелинейных систем

9.1 Экстремальные системы (ЭСУ)

ЭСУ – это система автоматизированного управления, в которой один из показателей качества работы системы поддерживается на предельном (max или min) уровне.

Будем рассматривать задачу синтеза для объектов, описание которых включает в себе динамическую часть и статистическую экстремальную характеристику (модель показателя качества).



$$\begin{cases} \dot{x} = f(x_1, t) + B(t, x)u \\ y = g(t, x), \quad x \in R^n, (u, y) \in R^m, \qquad m \le n \\ Y = Y(t, y), \qquad Y \in R^1 \end{cases}$$

Предварительно рассчитывается локальная система стабилизации для ДУ, т.е. находится такое УВ, чтобы ДУ описывалась желаемым уравнением:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ y = g(x) \\ Y = Y(t, y) \end{cases}$$

Требуется определить УВ такое, чтобы показатель качества достигал своего экстремального значения

$$u: \underset{y}{\operatorname{ext}} \; Y(t, y) = Y_0$$

для определения, достигнут ли экстремум, нужно оценивать градиент и проверять равенство его 0.

Задача: Найти такое УВ, которое с течением времени t обеспечивало бы выход градиента на 0.

1) оценка градиента

2) формирование закона управления, обеспечивающего выполнение условия (*)

3) стабилизация системы в точке экстремума или, если он меняется отслеживание положения экстремума.

9.2 Оптимальные системы управления (ОСУ)

Оптимальной называют такую САУ, в которой полностью используются динамические возможности ОУ для совершения переходных процессов при заданных ресурсных ограничениях.

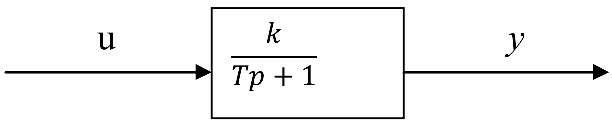
Управление, обеспечивающее в системе оптимальные процессы, называется оптимальным.

Основное свойство ОСУ – *ОУ работает на пределе своих возможностей*.

Рассмотрим особенности задачи синтеза на примере.

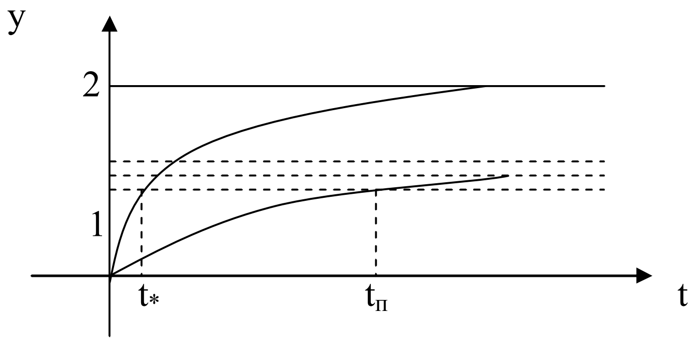
Пример: Для ОУ, структурная схема которого представлена на рис.Рассчитать регулятор, обеспечивающий переход из начального состояния $y(0)$ в конечное состояние $y_*(0)$ за min возможное время. Ресурс управления ограничен:

$|u| \leq \bar{u}$,   k = 1



Рассмотрим переходные процессы при подаче на вход ОУ различных управляющих воздействий

1) если подать УВ, численно равное y_* . то переходный процесс завершается за $t=t_п$



2) При подаче на ОУ max возможного управления $\bar{u}$ получаем выход 2, причем при $t = t_*$ $y=y_*$

3) если сначала подать max возможное управление $\bar{u}$, а при $t = t_*$ сформировать $u=y_*$, то процесс перехода в требуемое состояние будет заканчиваться за min возможное для объекта время, при $|u| \leq \bar{u}$.

Реализовать на практике описанный алгоритм управления можно 2-мя способами:

1) $u^0(t) = \begin{cases} \bar{u}, & t \leq t_* \\ y_*, & t > t_* \end{cases}$ - закон управления в виде программного управления

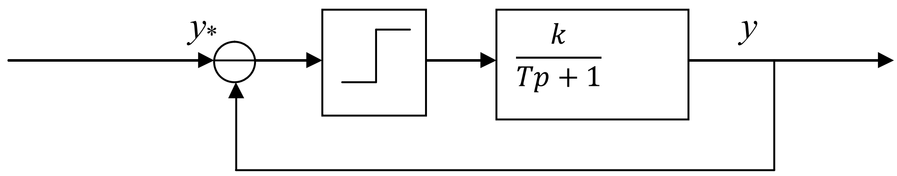
В этом случае оптимальная система будет разомкнутой, следовательно, не позволит обеспечить требуемые свойства при действии на ОУ внешних воздействий.

2) Закон управления в виде обратной связи

1) $u^0(t) = \begin{cases} \bar{u}, & y < y_* \\ y_*, & y \geq y_* \end{cases}$

Обратная связь по y позволяет автоматически реагировать на любые изменения, происходящие с системой.

Структурная схема замкнутой системы



<u>Основные свойства ОСУ</u>: ОУ работает на пределе своих возможностей (полное использование ресурса $\bar{u}$). Управление имеет релейный характер.

<u>Постановка задачи синтеза ОСУ</u>

1. Описание модели ОУ в определенном виде

2. Ограничения на переменные состояния

3.Описывают начальные и конечные состояния

4. Оговаривают критерий оптимальности

5. Определяют форму расчета регулятора

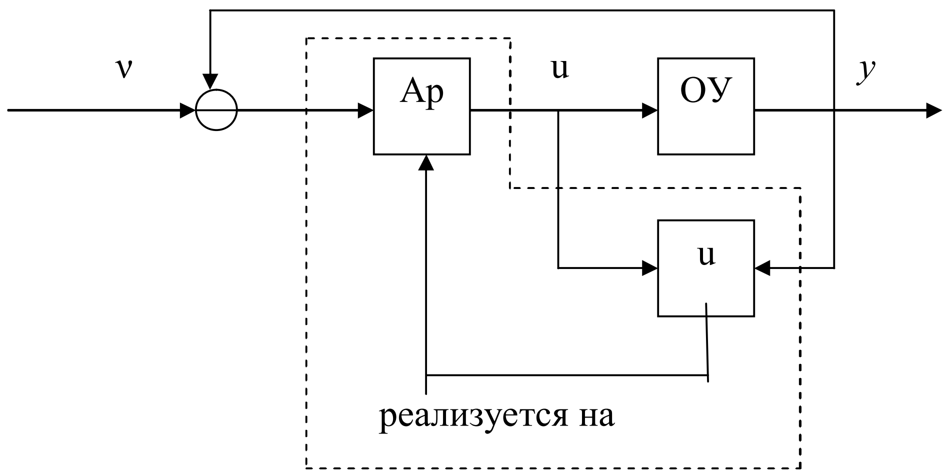
9.3 Адаптивные САУ

Адаптивными называют системы, в которых вслед за изменившимися параметрами ОУ изменяются и параметры регулятора. Это изменение параметров регулятора происходит таким образом, чтобы поведение системы в цело оставалось неизменным и соответствовало бы желаемому.

Функциональная схема системы

Как правило АСУ используют для систем вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x \in R^n \\ y = C(t)x, & (y,u) \in R^m, \ m \leq n \end{cases}$$



Если параметры ОУ не меняются во времени. То не подстраиваются и параметры регулятора. СУ ведет себя как обычная СУ с главной ООС.

Если параметры ОУ меняются во времени, то они предварительно оцениваются идентификатором u, а затем по определенной программе перестраиваются параметры регулятора. (Ар)

Т.к. управление происходит в реальном времени и перестройка регулятора требует определенных затрат времени, то АСУ может создаться только для объектов, параметры которых меняются медленно по сравнению с темпом переходных процессов.