

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ**

**ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

**А.А. КЛАВДИЕВ**

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**

**в примерах и задачах**

**ЧАСТЬ I**

**Анализ линейных непрерывных систем автоматики**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**

**2005**

Утверждено редакционно-издательским советом университета.  
УДК 519.71

Клавдиев А.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах.  
Ч.І: Учеб. пособие. – СПб: СЗТУ, 2005. 74 с.

Учебное пособие соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки бакалавра 553000 – «Системный анализ и управление».

Учебное пособие состоит из трех частей. Оно посвящено вопросам анализа качества и синтеза устройств автоматического управления посредством применения системы автоматизированного моделирования и параметрической оптимизации. В данном пособии изложены возможности и порядок работы с ней.

В первой части рассматриваются вопросы раскрытия основных понятий теории автоматического управления, исследования динамических характеристик, анализа устойчивости и оценки точности линейных непрерывных систем автоматики. Представленные материалы иллюстрируются примерами и сопровождаются задачами для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов Северо-Западного государственного заочного университета изучающих дисциплину «Теория автоматического управления», специальностей и направления 553000 – «Системный анализ и управление».

Рецензенты: А.В.Воловик; кандидат технических наук старший научный сотрудник ВМАУ;-----?

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Теория автоматического управления» является основой ряда дисциплин: «Современные проблемы системного анализа и управления», «Теория и практика моделирования сложных систем», «Методы системного анализа данных», «Управление в системах диагностики» и других дисциплин.

Указанную дисциплину изучают на четвёртом курсе. Теоретической базой для освоения являются материалы следующих дисциплин «Математика», «Вычислительная математика», «Системный анализ и принятие решений», «Математические методы системного анализа и теории принятия решений».

Данное учебное пособие состоит из трех частей. В нем рассматриваются вопросы, связанные с анализом качества и синтеза устройств автоматического управления посредством применения системы автоматизированного моделирования и параметрической оптимизации, а так же изложены возможности и порядок работы с ней.

В первой части рассматриваются вопросы раскрытия основных понятий теории автоматического управления, исследования динамических характеристик, анализа устойчивости и оценки точности линейных непрерывных систем автоматики. Представленные материалы иллюстрируются примерами и сопровождаются задачами для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов четвёртого курса подготовки бакалавров по направлению 553000 – «Системный анализ и управление», изучающих дисциплину «Теория автоматического управления».

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие современных систем «Человек-Машина» идёт по пути дальнейшего возрастания степени автоматизации и роботизации их функционирования. Основной элементной базой таких систем являются автоматические устройства различного рода. Раскрытию теоретических основ исследования автоматов и применению их на практике и посвящено это пособие.

Создание простейших автоматических устройств относится к глубокой древности. С необходимостью построения автоматических регуляторов столкнулись создатели высокоточных механизмов, в первую очередь – часов. Первые автоматические устройства промышленного значения появились в XVIII веке – изобретение регулятора уровня воды в котле паровой машины Ползунова И.И. и автоматического регулятора скорости вращения вала паровой машины Д. Уайта. Дальнейшее развитие автоматики было связано с целым рядом работ русских и иностранных ученых, работавших в области автоматики и смежных областях.

Учебное пособие разработано в соответствии с программой дисциплины «Теория автоматического управления».

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Управление – это процесс формирования управляющих воздействий на управляемый объект, направленных на поддержание режима работы объекта в соответствии с имеющейся целью управления.

Закон (алгоритм) управления – математическое описание способа образования управляющего воздействия с учетом безынерционности объекта управления.

Устройство управления – техническое устройство, обеспечивающее формирование управляющих воздействий на объект управления в соответствии с имеющейся целью управления.

Объект управления – любой объект техники, требуемый режим работы которого поддерживается извне специально организованными управляющими воздействиями.

Воздействие – любой фактор, приводящий к изменению состояния объекта управления или какого-либо элемента управляющего устройства (сила, момент, напряжение и т.д.).

Принцип разомкнутого управления – такая организация управления, когда отсутствует связь между выходом объекта управления и управляющим устройством.

Принцип замкнутого управления – такая организация управления, когда управляющее устройство связано с выходом объекта управления (отрицательная и положительная обратная связь).

АС (автоматическая система) – совокупность объекта управления и управляющего устройства, взаимодействующих между собой для достижения заданной цели управления.

Непрерывные автоматические системы – системы, в которых во всех элементах управляющего устройства входные и выходные сигналы являются непрерывными функциями времени.

Непрерывные линейные автоматические системы – непрерывные АС, процессы в которых описываются линейными законами (линейными дифференциальными уравнениями).

Непрерывные стационарные автоматические системы – непрерывные системы с постоянными во времени конструктивными параметрами.

Модель АС – математическое (графическое) представление системы и протекающих в ней процессов.

Типовые воздействия АС – воздействия, отражающие наиболее существенные стороны реальных входных сигналов и математически описываемые сравнительно простыми функциями времени.

Передачная функция АС – отношение изображения по Лапласу выходной величины АС к входной при нулевых начальных условиях.

Переходная функция (характеристика) АС – функция  $h(t)$  (ее графическое представление), определяющая реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$  при нулевых начальных условиях.

Переходная импульсная или весовая функция АС – функция  $w(t)$ , определяющая реакцию системы на единичное импульсное воздействие  $\delta(t)$  при нулевых начальных условиях.

Передачная частотная функция АС (АФЧХ, комплексный коэффициент передачи) – функция, определяющая реакцию системы на гармоническое воздействие при нулевых начальных условиях.

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) – график, характеризующий усиление или ослабление входных гармонических сигналов различной фиксированной частоты в установившемся режиме.

Логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ) – представление АЧХ в логарифмическом масштабе.

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) – график, характеризующий сдвиг по фазе гармонических выходных сигналов относительно входных различной фиксированной частоты в установившемся режиме.

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) – проекция амплитудно-фазовой характеристики системы на вещественную ось в прямоугольной системе координат на комплексной плоскости.

Мнимая частотная характеристика (МЧХ) – проекция амплитудно-фазовой характеристики системы на мнимую ось в прямоугольной системе координат на комплексной плоскости.

Частота среза – частота колебаний входного гармонического сигнала, при которой АЧХ системы равна единице (точка перехода ЛЧХ через ось частот).

Типовые динамические звенья – элементарные звенья, описываемые обыкновенными линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями связи не выше второго порядка с положительными постоянными коэффициентами.

Структурно-динамическая схема АС (СДС) – условное графическое изображение системы, показывающее из каких динамических звеньев она состоит и как эти звенья соединены между собой.

Тождественное структурное преобразование – перестановка элементов структурно-динамической схемы АС, обеспечивающая получение одноконтурной схемы, которая эквивалентна исходной многоконтурной (все входные и выходные величины исходного и преобразованного участка схемы остаются неизменными).

Качество АС – характеристика поведения системы в установившемся и переходном процессах при определенном виде внешних воздействий.

Устойчивость АС – свойство системы обеспечить сколь угодно малое отклонение возмущенного движения при достаточно малых начальных возмущениях за конечный отрезок времени.

Нуль АС – корень характеристического уравнения, представленного приравненным к нулю числителем передаточной функции разомкнутой системы.

Полюс АС – корень характеристического уравнения, представленного приравненным к нулю знаменателем передаточной функции разомкнутой системы.

Минимально-фазовая АС – система, все нули и полюса которой имеют отрицательные или равные нулю вещественные части.

Критерии устойчивости АС – математически сформулированные правила, позволяющие исследовать устойчивость системы без вычисления корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение системы – уравнение, получаемое приравниванием к нулю числителя или знаменателя передаточной функции системы (характеристического многочлена дифференциального уравнения). Соответственно, получается характеристическое уравнение разомкнутой и замкнутой систем.

Запас устойчивости АС по амплитуде – величина АЧХ (ЛЧХ) в относительных единицах (дБ), которая показывает на сколько нужно изменить коэффициент передачи системы при неизменных фазовых соотношениях, что бы привести ее к границе устойчивости.

Запас устойчивости АС по фазе – величина угла разности фаз в градусах, которая показывает на сколько должен возрасти отрицательный сдвиг по фазе (запаздывание по фазе) в системе на частоте среза при неизменном значении коэффициента передачи, чтобы система оказалась на границе области устойчивости (выходной и входной сигнал находились бы в противофазе).

Частота сопряжения – частота, на которой происходит сопряжение низкочастотной и высокочастотной асимптотических составляющих ЛАХ.

Время регулирования – время, за которое переходный процесс практически заканчивается.

Величина перерегулирования – отношение максимального отклонения управляемой величины от установившегося значения к этому установившемуся значению, выраженное в процентах.



Число колебаний за время регулирования – количество колебаний управляемой величины за время переходного процесса около ее установившегося значения.

Статическая АС – система, в которой при постоянном задающем или возмущающем воздействии устанавливается ошибка, зависящая от величины этого воздействия.

Астатическая АС – система, в которой при постоянном задающем или возмущающем воздействии устанавливается равная нулю ошибка, не зависящая от величины этого воздействия.

Порядок астатизма АС – параметр АС, характеризующий ее свойства как астатической системы и определяемый структурной схемой АС. При ступенчатом входном сигнале порядок астатизма замкнутой АС равен числу интегрирующих звеньев в соответствующей цепи обратной связи.

Синтез АС – определение структуры и параметров системы по заданным требованиям к качеству процесса управления.

Дискриминатор АС – устройство, предназначенное для обнаружения рассогласования сигналов в системе (измеритель рассогласования).

Дискриминационная характеристика АС – зависимость математического ожидания выходного напряжения дискриминатора от ошибки слежения при постоянных амплитуде входного сигнала и спектральной плотности входного шума.

Спектральная характеристика АС (флуктуационная) – зависимость спектральной плотности выходного сигнала от ошибки слежения (при фиксированных амплитуде входного сигнала и спектральной плотности входного шума).

### 1.1. Понятие динамической системы

Реакция системы на скачкообразное воздействие в общем случае не является скачкообразной и описывается более гладкой функцией. Вид такой функции характеризует динамические свойства системы, а саму систему, обладающую динамическими свойствами, называют *динамической*.

Таким образом, в динамической системе воздействие и реакция являются функциями времени, причем текущее значение реакции определяется не только текущим, но и предыдущими значениями воздействия, т.е. система обладает некоторой «памятью», инерционностью. Математической моделью динамической системы служит неоднородное дифференциальное или разностное уравнение, левая часть которого записана относительно реакции, а в правую часть входит внешнее воздействие.

В одном из возможных определений под динамической системой понимается *структура, в которую в определенные моменты времени вводится нечто (вещество, энергия или информация) и из которой в какие-то моменты времени выводится что-то. Она служит для описания причинно-следственных связей из прошлого в будущее.*

#### Примеры динамических систем

В области *технических систем*: электромеханическая следящая система воспроизведения угла поворота; система стабилизации температуры в отсеке космической орбитальной станции; система автоматической подстройки частоты излучения постановщика радио помех при радио противодействии средствам управления ракетным оружием; цифровая система управления движением самолета в режиме захода на посадку и другие.

В области *физико-биологических систем*: система стабилизации кровяного давления человека; система контроля за распространением инфекционных заболеваний; система воспроизводства запасов рыбы в

некотором районе рыболовецкого промысла; систем поддержания теплового баланса Земли и другие.

В области *социально-экономических систем*: система управления отраслью промышленности; система прогнозирования покупательского спроса на некоторую группу товаров и другие.

Схема классификации динамических систем по характеру и взаимосвязи протекающих в них процессов показана на рис.1а.

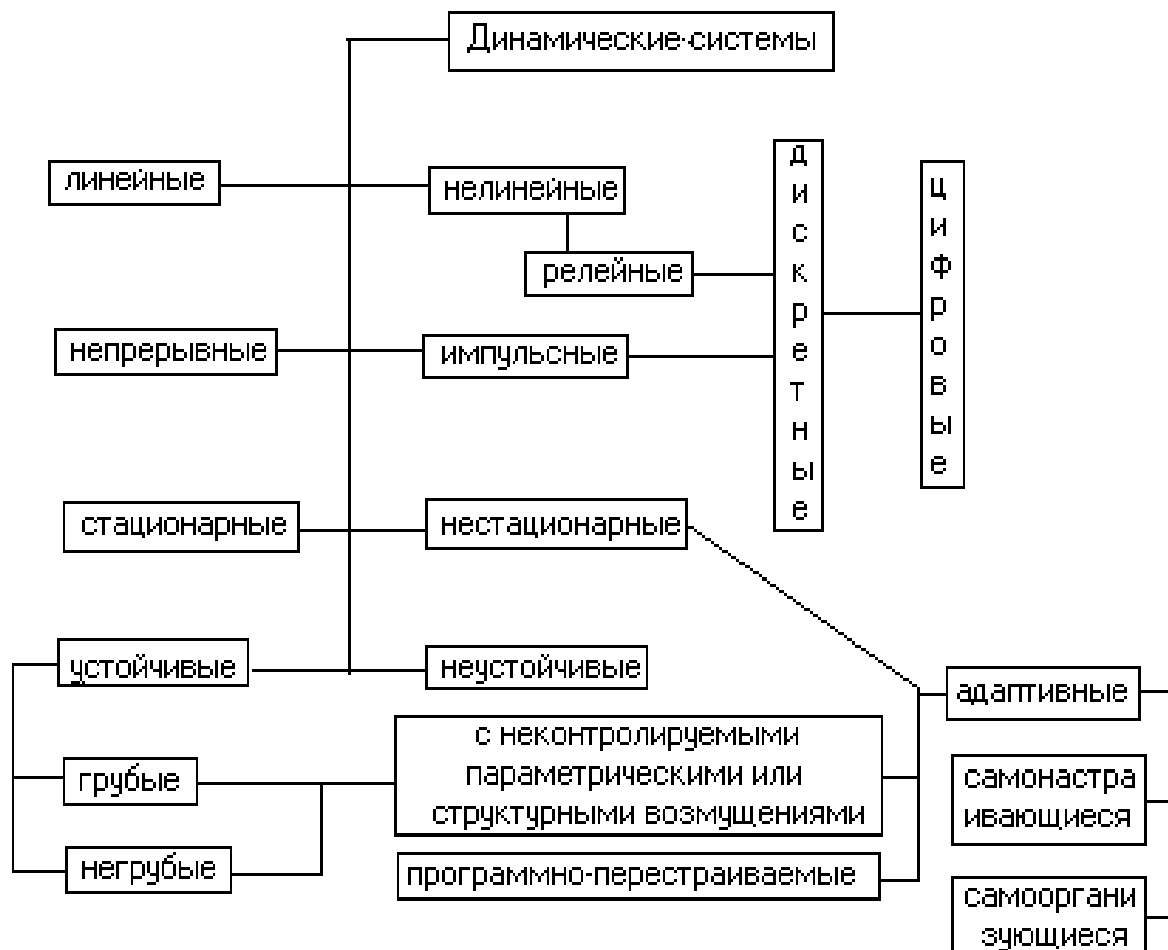


Рис.1а. Классификация динамических систем

## 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследование свойств АС предусматривает выполнение следующих операций:

- определение факта ее устойчивости (неустойчивости);
- анализ качества перехода АС из одного состояния в другое;
- исследование точности АС в установившемся режиме.

Процесс перехода АС из одного состояния в другое называется переходным процессом. Характеристики поведения системы в переходном процессе называются динамическими. Следовательно, переходный процесс есть реакция системы на любое входное воздействие. При исследовании АС входные воздействия желательно выбирать так, чтобы в переходном процессе наиболее полно проявлялись все свойства системы. Такие воздействия называются типовыми:

- импульсное;
- степенные;
- гармонические.

Реакция системы (рис.1б.) на эти воздействия и будет оцениваться динамическими характеристиками.

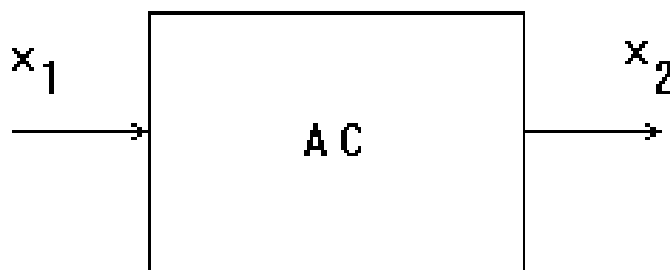


Рис.1б. Обобщенная схема исследования характеристик АС

В качестве таких характеристик чаще всего используются следующие (табл. 1).

Таблица 1

### Основные динамические характеристики АС

Типовые воздействия	Характеристики
$x_1=l(t)$	$x_2=h(t)$
$x_1=\delta(t)$	$x_2=w(t)$
$x_1=A_1\sin\omega t$	$x_2=A_2\sin(\omega t+\varphi)$

Ниже рассмотрен алгоритм определения динамических характеристик АС, основанный на представлении системы в виде математической модели и решении описывающих АС уравнений.

Основной формой представления математической модели (ММ) АС является линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ). В случае, если система описывается нелинейным дифференциальным уравнением (ЛНДУ), то его линеаризация производится позднее, на этапе решения ЛНДУ.

Математическая модель АС как правило изображается в *общей форме*

$$d_2 x_2''(t) + d_1 x_2'(t) + d_0 x_2(t) = b_1 x_1'(t) + b_0 x_1(t),$$

$$\text{где } d_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_2''} \right)_0, d_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_2'} \right)_0, d_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_0, b_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1'} \right)_0, b_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_0$$

(1)

или в стандартной форме

$$T^2 x_2''(t) + 2\xi T x_2'(t) + x_2(t) = k [T_1 x_1'(t) + x_1(t)],$$

$$\text{где } k = \frac{b_0}{d_0}, T = \sqrt{\frac{d_2}{d_0}}, T_1 = \frac{b_1}{b_0}, \xi = \frac{d_1}{2Td_0} = \frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_0}}. \quad (2)$$

Математическая модель АС, представленная в виде ЛДУ является основой для нахождения динамических характеристик систем в соответствии с алгоритмом (рис.2).

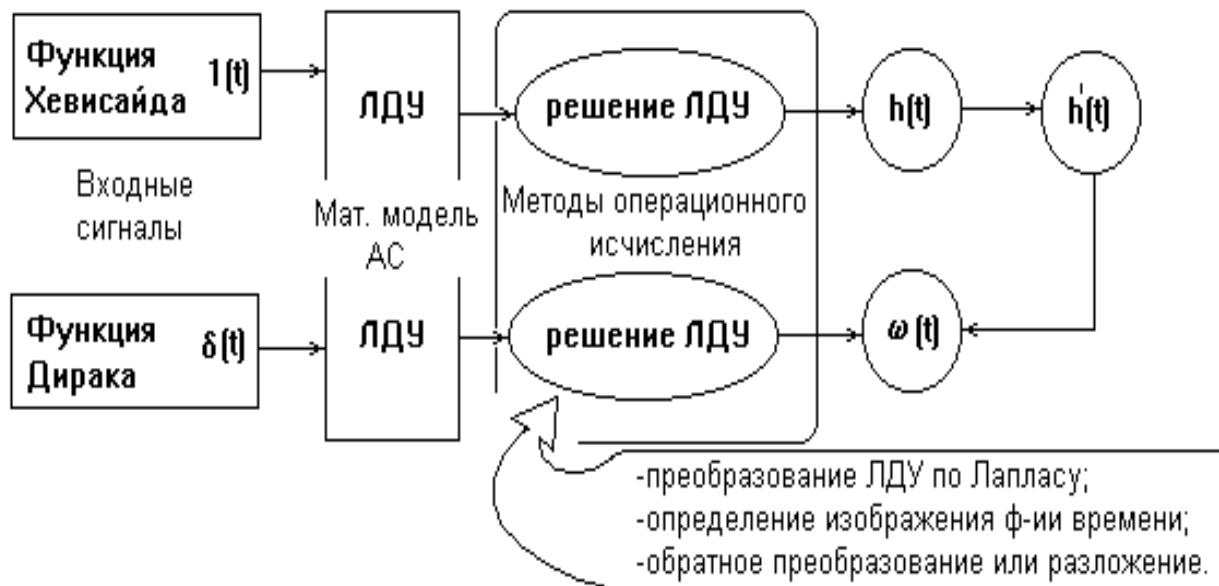


Рис.2. Алгоритм определения динамических характеристик АС

### Пример

Найти функцию веса  $w(t)$  по известной переходной функции  $h(t)$

$$h(t) = 2(1 - e^{-0,2t}).$$

Решение. Известно [1], что  $w(t) = h'(t)$ . Поэтому, продифференцировав исходное выражение, получим

$$w(t) = 0,4e^{-0,2t}.$$

**Задачи для самостоятельного решения**

1.  $h(t)=5t$ .

2.  $h(t)=10$ .

Найти переходную функцию  $h(t)$  по известной функции веса  $w(t)$ .

3.  $w(t)=7t$ .

4.  $w(t)=3$ .

5.  $w(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ .

Для описания АС и исследования их устойчивости применяется аппарат передаточных функций (ПФ). На практике применяются следующие виды передаточных функций:

- передаточные функции по Лапласу;
- передаточные функции по Фурье;
- дискретные передаточные функции;
- передаточные функции по Хевисайду-Карсону;
- передаточные функции – дифференциальные операторы.

В ПФ по Лапласу аргументом является комплексная величина  $p=C+j\omega$ .

ПФ по Фурье являются частным случаем операторов Лапласа, когда  $C=0$  и, следовательно,  $p=j\omega$ . В ПФ - дифференциальных операторах аргумент  $p = d/dt$ .

Остальные ПФ получили распространение лишь в узких задачах теории АС.

ПФ могут быть получены различными способами, например:

с использованием преобразований Лапласа от входной и выходной величин объекта;

с использованием дифференциального уравнения объекта;

с использованием соответствующей функции веса.

В первом случае ПФ объекта численно равна отношению преобразования Лапласа его выходной величины к преобразованию Лапласа от его входного воздействия при нулевых начальных условиях

$$W_{ij}(p) = \frac{L\{x_i(t)\}}{L\{x_j(t)\}} = \frac{x_i(p)}{x_j(p)} = \frac{\int_0^{\infty} x_i(t)e^{-pt} dt}{\int_0^{\infty} x_j(t)e^{-pt} dt}, \quad p = C + j\omega. \quad (3)$$

В остальных случаях ПФ находятся по следующим зависимостям

$$W(S) = \frac{B(S)}{A(S)} \begin{array}{l} \text{— оператор внешних воздействий;} \\ \text{— собственный оператор системы;} \end{array} \quad (4)$$

$$W(S) = L\{w(t)\} \quad \text{или} \quad W(S) = L\{h'(t)\}. \quad (5)$$

### **Пример**

Найти передаточную функцию системы по известному дифференциальному уравнению. Начальные условия – нулевые.

$$4 \cdot \ddot{x}_2(t) + 2 \cdot \dot{x}_2(t) + 10 \cdot x_2(t) = 5 \cdot x_1(t).$$

Решение. Приведя уравнение к стандартной форме, получим

$$0,4 \cdot \ddot{x}_2(t) + 0,2 \cdot \dot{x}_2(t) + x_2(t) = 0,5 \cdot x_1(t).$$

Запишем полученное уравнение в операторной форме, используя преобразование Лапласа

$$(0,4 \cdot p^2 + 0,2 \cdot p + 1) \cdot x_2(p) = 0,5 \cdot x_1(p).$$

Тогда передаточная функция будет иметь вид

$$W(p) = \frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{0,5}{0,4 \cdot p^2 + 0,2 \cdot p + 1}.$$



**Задачи для самостоятельного решения**

$$6. \quad 2 \cdot \dot{x}_2(t) + 4 \cdot x_2(t) = 2 \cdot \dot{x}_1(t) + 5 \cdot x_1(t).$$

$$7. \quad 8 \cdot \dot{x}_2(t) + 5 \cdot x_2(t) = 4 \cdot \dot{x}_1(t) + 2 \cdot x_1(t).$$

$$8. \quad 6 \cdot \ddot{x}_2(t) + \dot{x}_2(t) + 2 \cdot x_2(t) = 8 \cdot x_1(t) + 2 \cdot f(t).$$

Найти передаточную функцию  $W(p)$  системы по известной функции веса  $w(t)$

$$w(t) = 5 \cdot t.$$

Решение. Используя связь между передаточной функцией и функцией веса  $W(p) = L[w(t)]$ , получим

$$W(p) = L[5 \cdot t] = 5/p^2.$$

**Задачи для самостоятельного решения**

$$9. \quad w(t) = 12.$$

$$10. \quad w(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

$$11. \quad w(t) = 4 \cdot t^2.$$

По передаточной функции системы найти ее реакцию на единое ступенчатое воздействие (переходную функцию).

$$W(p) = \frac{k_1}{p} + k_2.$$

Решение. Как следует из условия, звенья с передаточными функциями  $\frac{k_1}{p}$  и  $k_2$  соединены параллельно. По принципу суперпозиции, справедливому для линейных систем, имеем

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t),$$

где  $h(t)$  – переходная функция всей системы;

$h_1(t)$  – переходная функция интегрирующего звена;

$h_2(t)$  – переходная функция усилительного звена.

Известно, что  $h_1(t) = k_1 \cdot t$ ,  $h_2(t) = k_2 \cdot 1(t)$ .

Тогда  $h(t) = k_1 \cdot t + k_2 \cdot 1(t)$ .

***Задачи для самостоятельного решения***

$$12. W(p) = \frac{4}{p} + \frac{5}{2p+1} + 2(4p+1).$$

$$13. W(p) = k_1 + k_2 p + \frac{k_3}{p}.$$

$$14. W(p) = \frac{2}{p} + (8p+1) + \frac{4}{5p+1}.$$

Кроме передаточных функций по Лапласу в теории автоматического управления (ТАУ) активно используются передаточные функции по Фурье, называемые также частотными передаточными функциями.

Они позволяют получить информацию о всех показателях синусоидального выходного сигнала объекта, если известна амплитуда и частота его входного синусоидального воздействия. При этом рассматривается только установившийся процесс.

Частотные передаточные функции (передаточные функции по Фурье) получаются теми же тремя способами, что и операторы Лапласа. Только вместо преобразования Лапласа используется преобразование Фурье, определяемое выражением

$$x(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6)$$

где  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  – любая функция времени, удовлетворяющая условию применения преобразования Фурье.

Кроме того, частотные ПФ не трудно получить, если использовать *мнемоническое правило*

$$W(S) \rightarrow W(j\omega). \quad (7)$$

При этом частотные ПФ могут быть представлены:

*в прямоугольной форме*

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega); \quad (8)$$

*в показательной форме*

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}; \quad (9)$$

*в тригонометрической форме*

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot [\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)]; \quad (10)$$

Применение частотных передаточных функций позволяет получить частотные характеристики автоматических систем. К ним относятся:

*амплитудная частотная характеристика (АЧХ)*

$$A(j\omega) = |W(j\omega)|; \quad (11)$$

*логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ)*

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega); \quad (12)$$

*фазовая частотная характеристика (ФЧХ)*

$$\varphi(\omega) = \arg \left\{ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right\}; \quad (13)$$

*вещественная частотная характеристика (ВЧХ)*

$$P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos\varphi(\omega); \quad (14)$$

*мнимая частотная характеристика (МЧХ)*

$$Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin\varphi(\omega). \quad (15)$$

**Пример**

Найти АЧХ и АФХ по известной передаточной функции системы

$$W(j\omega) = \frac{2}{4p + 1}.$$

Решение. Если записать

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega)$  – действительная часть;

$Q(\omega)$  – мнимая часть,

то АЧХ и ФЧХ определяются соответственно по формулам

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (16)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (17)$$

Часто  $W(j\omega)$  представляет собой дробь

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{P_1(\omega) + jQ_1(\omega)}{P_2(\omega) + jQ_2(\omega)}.$$

Тогда, используя известные в теории комплексных чисел соотношения и подставив исходную ПФ, получим

$$A(\omega) = \frac{|R(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{\sqrt{P_1^2(\omega) + Q_1^2(\omega)}}{\sqrt{P_2^2(\omega) + Q_2^2(\omega)}} = \frac{2}{\sqrt{16\omega^2 + 1}};$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg R(j\omega) - \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_1(\omega)}{P_1(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{Q_2(\omega)}{P_2(\omega)} = \\ &= 0 - \operatorname{arctg} 4\omega = -\operatorname{arctg} 4\omega. \end{aligned}$$

**Задачи для самостоятельного решения**

$$15. \quad W(p) = \frac{5}{p}.$$

$$16. \quad W(p) = \frac{8}{5p + 1}.$$

$$17. \quad W(p) = 10(2p + 1).$$

$$18. \quad W(p) = \frac{10p + 1}{4p + 1}.$$

**Пример**

Определить сигнал  $x_2(t)$  на выходе системы по известному входному сигналу и передаточной функции системы

$$x_1(t) = 2 \cdot \sin 10t,$$

$$W(p) = \frac{4}{0,1p + 1}.$$

Решение. Известно, что при воздействии входного сигнала  $x_1(t) = X_1 \sin \omega t$  на систему выходной сигнал  $x_2(t)$  по истечении времени переходного процесса также будет гармоническим, но отличается от входного амплитудой и фазой

$$x_2(t) = A(\omega) X_1 \sin[\omega t + \varphi(\omega)], \quad (18)$$

где  $A(\omega)$  – АЧХ системы;

$\varphi(\omega)$  – ФЧХ системы.

Следовательно для определения  $x_2(t)$  необходимо найти  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  и воспользоваться выражением (18).

По передаточной функции найдем

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{0,1\omega^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} 0,1\omega.$$

На частоте  $\omega=10$   $A(\omega = 10) = \frac{4}{\sqrt{2}}; \quad \varphi(\omega = 10) = -\pi/4.$

Тогда  $x_2(t) = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \sin(10t - \pi/4).$

***Задачи для самостоятельного решения***

19.  $x_1(t) = 5 \cdot \sin t; \quad W(p) = \frac{4}{p}.$

20.  $x_1(t) = 8 \cdot \sin 0,25t; \quad W(p) = \frac{10}{4p + 1}.$

21.  $x_1(t) = 2 \cdot \sin 10t; \quad W(p) = 2 \cdot p.$

22.  $x_1(t) = 4 \cdot \sin 25t; \quad W(p) = 10(4p + 1).$

23.  $x_1(t) = 3 \cdot \sin 4t; \quad W(p) = \frac{2p + 1}{4p + 1}.$

### 3. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основные задачи структурного анализа:

изучение способов соединений между звеньями и влияния этих соединений на свойства звеньев;

- изучение влияния звеньев и их соединений на свойства всей системы в целом;

- преобразование многоконтурных структурно-динамических схем к эквивалентным одноконтурным схемам с целью определения по ним требуемых передаточных функций для последующего анализа устойчивости и качества процесса управления.

Основой структурного анализа АС является составление их структурно-динамических схем. Структурная схема обычно составляется на основе анализа функциональной схемы по следующему алгоритму:

- составить уравнения связи объекта управления и элементов управляющего устройства;

- перейти от полученных уравнений связи к уравнениям связи в форме преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях;

- решить каждое уравнение относительно изображения выходной величины и построить по ним структурно-динамические схемы;

- соединить построенные схемы между собой в соответствии с прохождением сигналов и получить искомую СДС системы.

Порядок отображения элементов на схеме. Динамические звенья на схеме обозначаются в виде прямоугольника с указанием входной и выходной величин в операторной форме при нулевых начальных условиях. Внутри прямоугольника записывается передаточная функция. Точки, от которых сигналы начинают проходить по двум или нескольким направлениям, называются узлами разветвления или точками съема. Суммирование сигнала обозначается сумматором. Связи между звеньями, а также между звеньями и

сумматорами изображаются сплошными линиями со стрелками, указывающими направление передачи воздействий.

Основными способами соединения звеньев являются:

*последовательное*, в котором выходной сигнал предыдущего звена является входным сигналом последующего звена (рис.3).

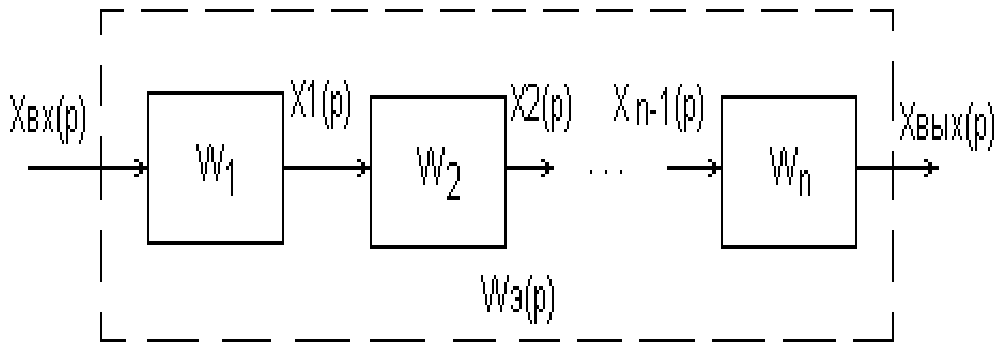


Рис. 3. Последовательное соединение звеньев

Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в это соединение

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdots W_n(p); \quad (19)$$

*параллельное*, в котором на вход всех звеньев подается одновременно один и тот же входной сигнал, а выходные сигналы этих звеньев алгебраически суммируются, образуя общую выходную величину (рис.4).

Передаточная функция параллельного соединения звеньев равна алгебраической сумме передаточных функций звеньев, входящих в это соединение

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W_1(p) + W_2(p) + \cdots + W_n(p); \quad (20)$$



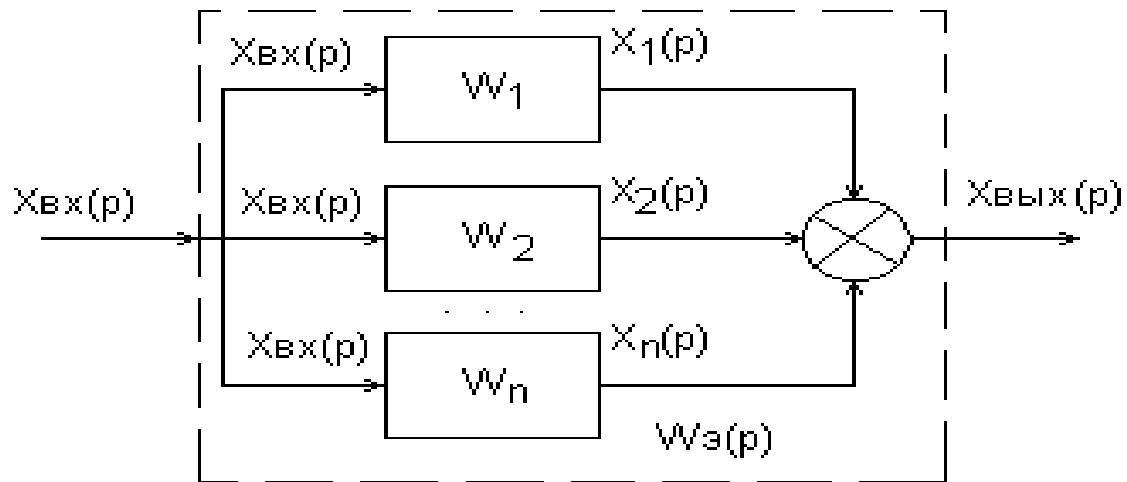


Рис.4. Параллельное соединение звеньев

*соединение с обратной связью*, в котором выход звена соединяется с его входом через звено с передаточной функцией  $W_{oc}(p)$ , в результате чего образуется замкнутый контур передачи воздействий (рис.5).

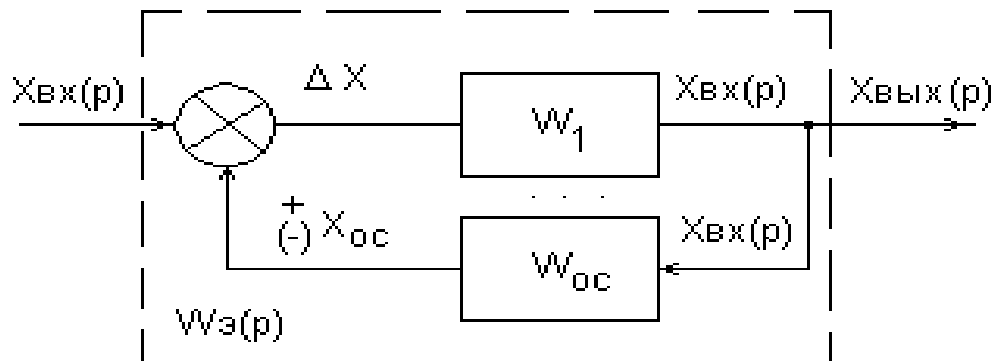


Рис.5. Соединение с обратной связью

Передаточная функция соединения с обратной связью определяется выражением

отрицательная обратная связь (ООС)

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{oc}(p)} ; \quad (21)$$

положительная обратная связь (ПОС)

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_{oc}(p)} ; \quad (22)$$

### Пример

Найти передаточную функцию системы по ее структурной схеме (рис.6).

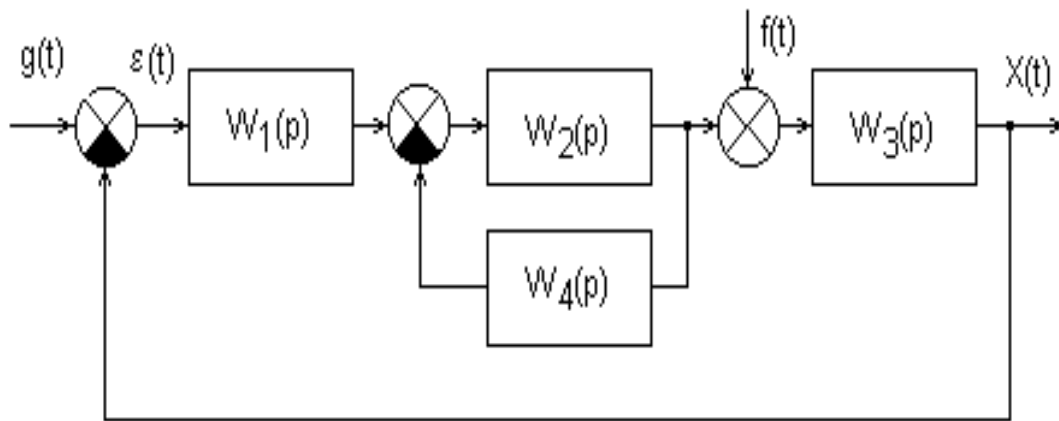


Рис.6. Структурная схема АС

Решение. Приведем структурную схему к одноконтурной. Сворачивая звенья с передаточными функциями  $W_2(p)$ ,  $W_4(p)$  получим

$$W_{24}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_4(p)} .$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = W_1(p) \cdot W_{24}(p) \cdot W_3(p) .$$

Передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию

$$V(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = W_3(p) .$$

Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_{24}(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{24}(p) \cdot W_3(p)}.$$

Передаточная функция системы по сигналу ошибки

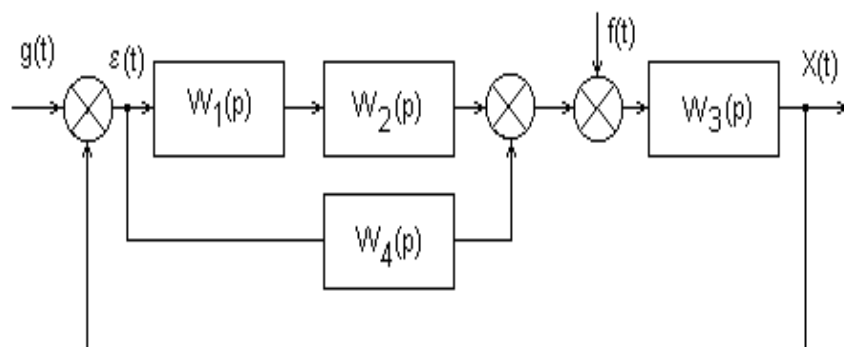
$$\Phi_{\varepsilon}(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_{24}(p) \cdot W_3(p)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию

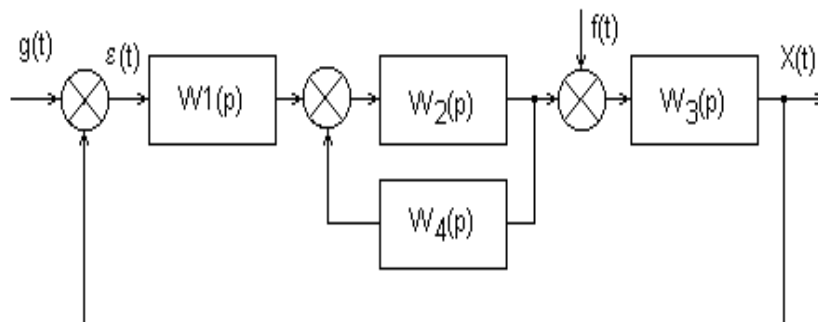
$$\Phi_f(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{24}(p) \cdot W_3(p)}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

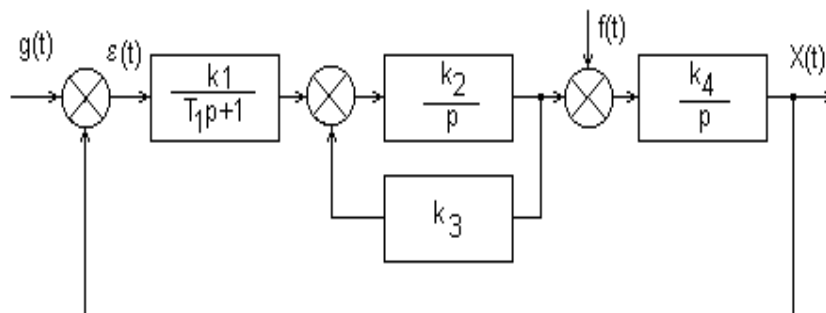
24.



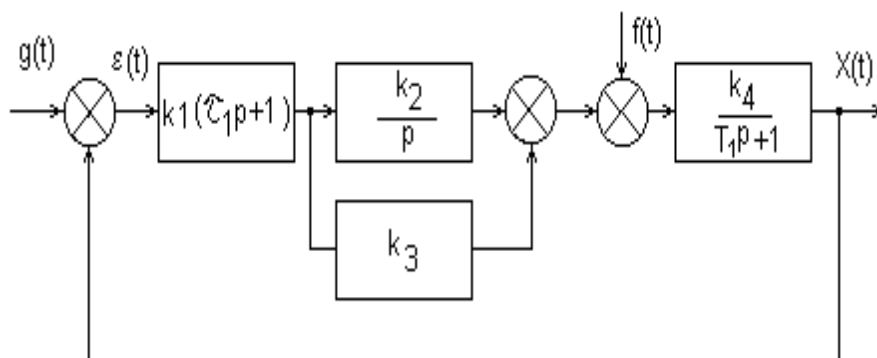
25.



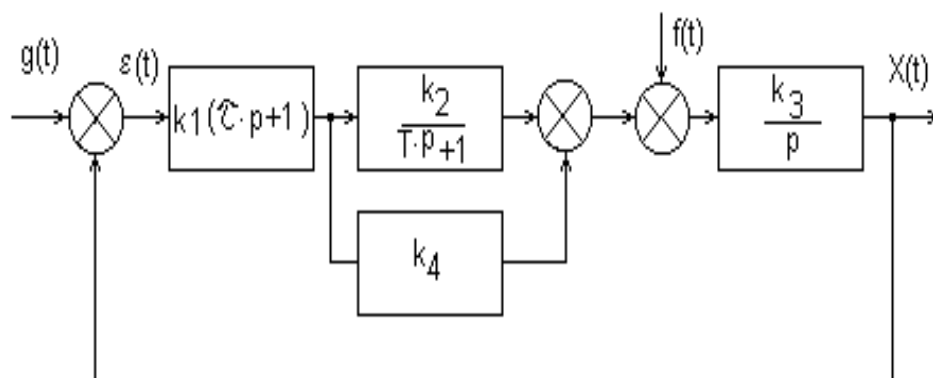
26.



27.



28.



Одноконтурные структурно-динамические схемы АС представляют собой замкнутую цепь последовательно соединенных звеньев и определение передаточных функций по таким схемам не представляет больших затруднений.

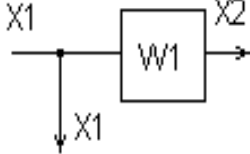
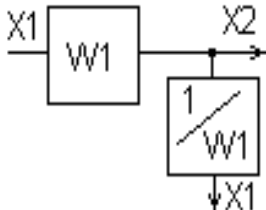
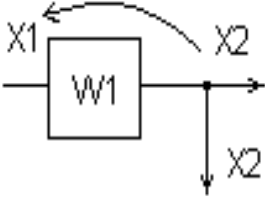
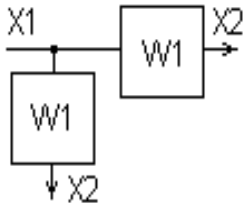
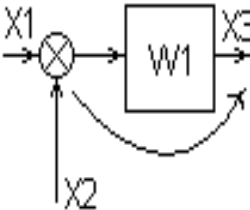
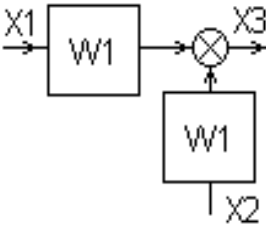
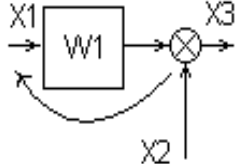
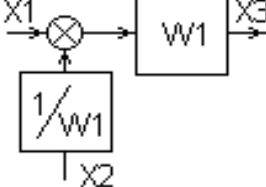
Многоконтурные структурно-динамические схемы характеризуются наличием звеньев, охваченных обратными связями. Поэтому для определения

передаточных функций возникает необходимость в преобразовании таких схем к эквивалентным одноконтурным схемам.

В общем случае преобразование многоконтурных схем к эквивалентным одноконтурным схемам сводится к замене параллельного соединения и соединения с обратной связью эквивалентными звеньями, а также к перестановке различных элементов схемы (точек съема сигналов, сумматоров, звеньев) как по ходу, так и против хода сигнала.

Таблица 2

### Преобразование структурных схем

<i>№</i>	<i>Правило преобразования</i>	<i>Исходная схема</i>	<i>Эквивалентная схема</i>
1	Перенос точки съема сигнала через звено по ходу сигнала		
2	То же против хода сигнала		
3	Перенос сумматора через звено по ходу сигнала		
4	То же против хода сигнала		

Основной принцип перестановки элементов схемы состоит в том, чтобы все входные и выходные величины исходного и преобразованного участка схемы остались неизменными. Выполнение этого принципа при структурных преобразованиях обеспечивает получение одноконтурной схемы, которая эквивалентна (тождественно равноценна) исходной многоконтурной схеме.

Основные правила перестановки элементов структурно-динамической схемы, вытекающие из этого принципа, приведены в табл.2.

Применение представленных в табл.2 правил позволяет так же решить другую важную практическую задачу. Преобразование многоконтурной структурной схемы может быть произведено таким образом, чтобы упростить вид описывающей ее передаточной функции.

### **Пример**

Упростить структурную схему АС (рис.7) путем ее преобразования.

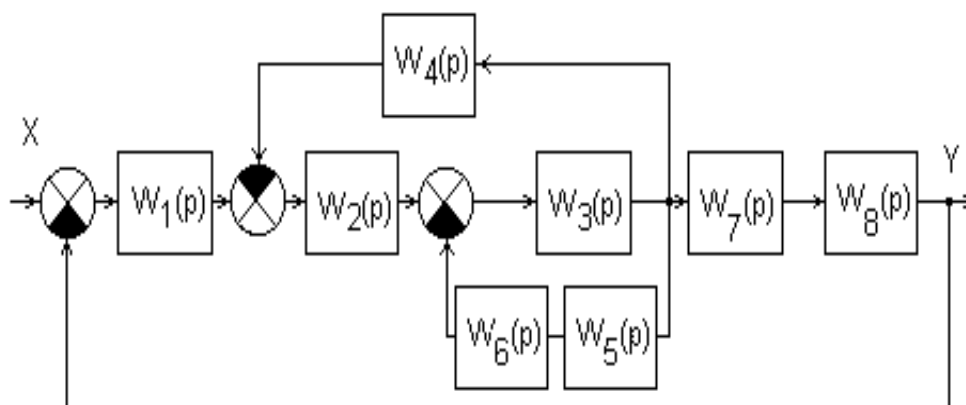


Рис. 7. Исходная многоконтурная схема

Путем поэтапных преобразований получается одноконтурная структурная схема (рис.8) с передаточной функцией

$$W = \frac{W_1 \cdot W_{\Sigma 1} \cdot W_7 \cdot W_8}{1 + W_1 \cdot W_{\Sigma 1} \cdot W_7 \cdot W_8},$$

где 
$$W_{\Sigma 1} = \frac{W_2 \cdot W_3}{1 + W_3 \cdot W_5 \cdot W_6 + W_2 \cdot W_3 \cdot W_4} .$$

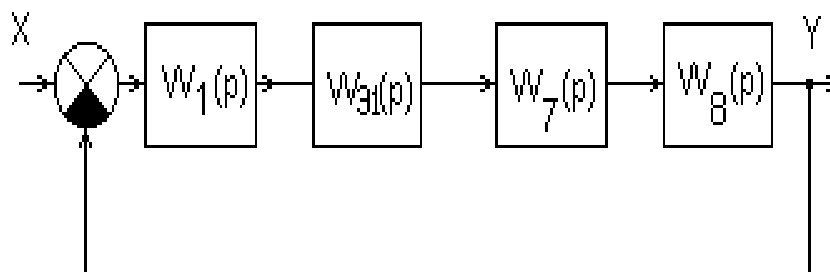


Рис.8. Преобразованная схема

## 4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Автоматическая система считается устойчивой, если она занимает требуемое состояние (положение) и остается в нем по желанию пользователя. В противном случае АС будет неустойчивой.

Существует много критериев устойчивости объекта в зависимости от типов его моделей. Для линейных объектов применяют два подхода к определению устойчивости:

- прямой (непосредственный);
- косвенный.

При прямом подходе записывают любой процесс управления и, зная его желаемое состояние, исходя из определения устойчивости и неустойчивости, делают заключения о его качествах. Однако прямой метод исследования устойчивости объекта не всегда целесообразен, а иногда и невозможен. Это бывает в случае, когда пользователь работает только с его математической моделью, в виде, например, дифференциальных уравнений, передаточных функций и т.д. В этой ситуации для исследования устойчивости объекта используются обычно следующие косвенные методы:

- алгебраический;
- корневой;
- частотные.

Самым старым и, в принципе, универсальным при исследовании устойчивости линейных объектов косвенным образом является корневой метод.

Его сущность может быть иллюстрирована следующим примером.

Дано дифференциальное уравнение объекта

$$A(p) \cdot x(t) = B(p) \cdot f(t), \quad p = \frac{d}{dt},$$

где  $x(t)$  – выходная регулируемая величина;

$f(t)$  – входное воздействие;



$A(p)$  – собственный оператор системы;

$B(p)$  – оператор воздействия.

Характеристическим уравнением такой системы будет выражение

$$A(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0. \quad (23)$$

Корни  $p_i$  характеристического уравнения (23) с отрицательными вещественными частями, в том числе и отрицательные вещественные, называют *левыми* (рис. 9). Если корни  $p_i$  того же уравнения имеют положительные вещественные части, то такие корни называют *правыми*.

Тогда, *корневой критерий* устойчивости заключается в следующем: для устойчивости объекта необходимо и достаточно, чтобы все корни его характеристического уравнения были любыми левыми, т.е. имели отрицательные вещественные части.

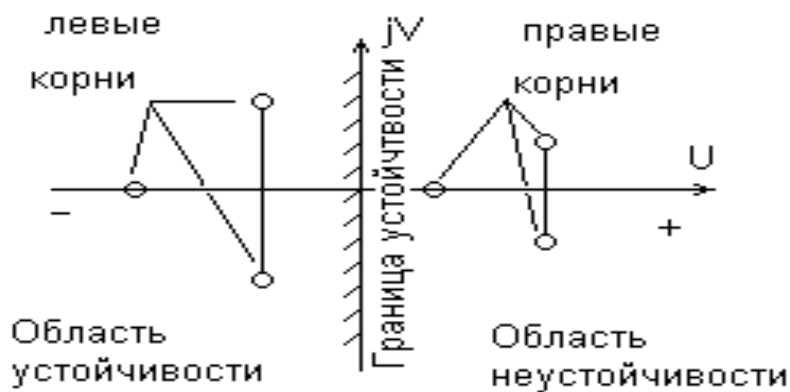


Рис. 9. Область решений характеристического уравнения

Количественная оценка устойчивости систем производится с помощью системы показателей, характеризующих запас устойчивости. Запас устойчивости - это количественная характеристика степени удаления системы от границы устойчивости.

Обеспечение запаса устойчивости необходимо по следующим причинам:  
при составлении уравнений связи отдельных элементов допускается некоторая идеализация протекающих в них физических процессов (учитываются только главные факторы и отбрасываются второстепенные);

- линеаризация нелинейных уравнений приводит к их еще большей приближенности;
- конструктивные параметры элементов, входящие в коэффициенты уравнений, определяются с некоторой погрешностью;
- при эксплуатации систем возможны изменения параметров элементов вследствие температурных колебаний, старения, нестабильности и т.д.

Наличие определенного запаса устойчивости гарантирует сохранение устойчивости системы при изменении ее параметров в определенных пределах. Чем больше запас устойчивости, тем меньше вероятность того, что система в процессе эксплуатации станет неустойчивой. Запас устойчивости необходим еще и потому, что он определяет характер переходных процессов в системах. Наличие определенного запаса устойчивости обеспечивает работу реальной системы в области устойчивости с требуемым качеством переходного процесса.

Различаются следующие основные показатели запаса устойчивости:

- запас устойчивости по амплитуде;
- запас устойчивости по фазе;

Формулировки показателей устойчивости приведены в разделе 1 настоящего пособия и иллюстрируются рис.10.

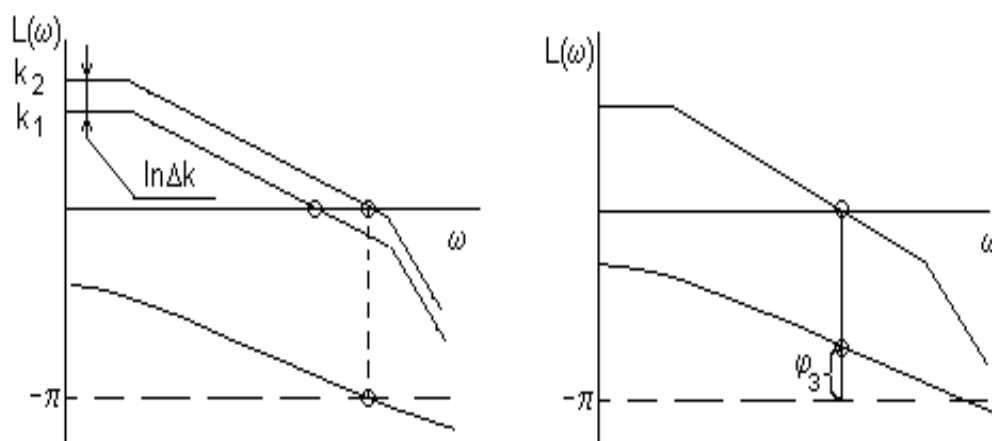


Рис. 10. Графическое представление запаса устойчивости

#### 4.1. Алгебраический критерий устойчивости

Определение корней характеристического уравнения  $A(p)=0$  обычно приводит к большим трудозатратам, а иногда и просто невозможно, если нет цифровых ЭВМ с соответствующими программами для нахождения этих корней. Поэтому чаще пытаются оценить устойчивость объектов косвенными алгебраическими методами, используя коэффициенты его характеристического уравнения. Среди алгебраических способов анализа устойчивости наиболее распространен метод Гурвица.

Исходная информация для использования этого метода заключена в коэффициентах характеристического уравнения объекта, устойчивость которого необходимо определить. Это уравнение записывается в следующей стандартной форме

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0.$$

Далее из коэффициентов  $a_i, i=0, \dots, n$  составляется *матрица Гурвица*

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Формируется она следующим образом: в диагональ сверху вниз записываются последовательно коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Затем от любого члена диагонали вдоль строки вправо записываются коэффициенты с возрастанием на каждом шаге их номера на две единицы. Если коэффициент с таким номером отсутствует, то вместо него записывается ноль.

Так как математической основой критерия является теория определителей, то далее находится главный определитель Гурвица  $\Delta_n$  и его

диагональные миноры  $\Delta_i$ ,  $i=1,2,..n-1$ :

$$\Delta_1 = |a_1|; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots \Delta_n = |H|,$$

причем  $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$ .

Гурвиц доказал:

«если при  $a_0 > 0$  положительны все  $n$  определителей  $\Delta_i$ ,  $i=1,2,..n$ , то объект является устойчивым. Если хотя бы один определитель отрицателен, то объект неустойчив».

Граничные случаи. Например, при  $a_n > 0$  равен нулю предпоследний определитель Гурвица  $\Delta_{n-1}$ . Соответственно, будет равен нулю и последний определитель. Если при этом остальные определители положительны, то объект находится на колебательной границе устойчивости.

Частный случай. Критерий И.А. Вышнеградского.

В 1876 году профессором Вышнеградским был сформулирован критерий устойчивости для системы с характеристическим уравнением третьего порядка:

если произведение параметров

$$A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 \cdot a_3^2}} \quad \text{и} \quad B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 \cdot a_3}}$$

больше единицы при  $A > 0$  и  $B > 0$ , то система третьего порядка устойчива;

если  $A \cdot B < 1$  при  $A > 0$  и  $B > 0$ , то она неустойчива;

граница колебательной устойчивости системы третьего порядка определяется уравнением  $A \cdot B = 1$  при  $A > 0$  и  $B > 0$ .

Подставив в переменные  $A$  и  $B$  значения коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , получим такое же неравенство  $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$ , что и по критерию Гурвица.

**Пример**

Определить устойчивость замкнутой и разомкнутой системы по известной передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + 4p - 2}.$$

Решение. Характеристическое уравнение разомкнутой системы

$$p^3 + 2p^2 + 4p - 2 = 0.$$

Разомкнутая система неустойчива, так как не выполняется необходимое условие устойчивости: положительность всех коэффициентов характеристического уравнения).

Характеристическое уравнение разомкнутой системы

$$p^3 + 2p^2 + 4p + 3 = 0.$$

Так как  $2 \cdot 4 > 3 \cdot 1$ , то в соответствии с критерием Вышнеградского система устойчива.

**Задачи для самостоятельного решения**

$$29. W(p) = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + 4p - 15}.$$

$$30. W(p) = \frac{5}{p^3 + p^2 + 3p - 2}.$$

$$31. W(p) = \frac{10}{p^3 + 2p^2 + 10p + 15}.$$

$$32. W(p) = \frac{4p + 1}{p^4 + 2p^3 + p^2 + 1}.$$

$$33. W(p) = \frac{10p + 1}{p^5 + p^4 - p^3 - 20}.$$

$$34. W(p) = \frac{2p + 1}{p^3 + 2p^2 + p + 2} \cdot$$

$$35. W(p) = \frac{k}{p^2(1 + Tp)} \cdot$$

Известна передаточная функция разомкнутой системы. Определить значение постоянной времени  $T$ , при котором замкнутая система окажется на границе устойчивости.

$$36. W(p) = \frac{500}{p(0,02p + 1)(Tp + 1)} \cdot$$

$$37. W(p) = \frac{100}{p(2p + 1)(Tp + 1)} \cdot$$

$$38. W(p) = \frac{10}{p(4p + 1)(Tp + 1)} \cdot$$

## 4.2. Критерий устойчивости Найквиста

Среди частотных критериев наиболее распространен критерий Найквиста. Он позволяет оценить устойчивость АС по АФЧХ, соответствующей разомкнутой системы.

Для минимально-фазовых систем этот критерий формулируется следующим образом:

для того, что бы АС, устойчивая или нейтральная в разомкнутом состоянии, была устойчива в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы годограф АФЧХ разомкнутой системы не охватывал точку  $M\{-1, j0\}$  на комплексной плоскости при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности и повороте вектора АФЧХ  $W(j\omega)$  по часовой стрелке (рис.11).



Рис. 11. АФЧХ систем с различной устойчивостью

Существует логарифмическая форма частотного критерия Найквиста (рис.12).

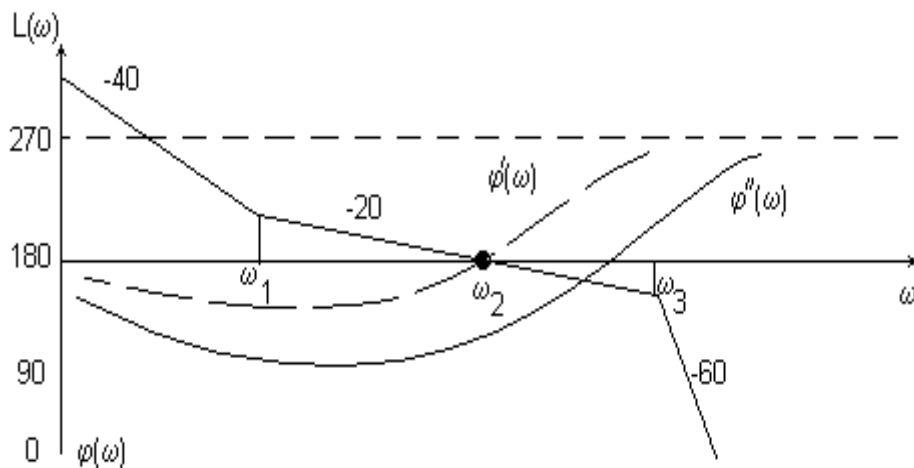


Рис.12. ЛАХ и ФЧХ систем с различной устойчивостью

Формулировка критерия в форме В.А. Бесекерского:

замкнутая АС устойчива, если ее ФЧХ пересекает ось частот правее места пересечения ее ЛАХ разомкнутой системы.

Это относится только к минимально-фазовым разомкнутым АС, нейтральным и устойчивым в разомкнутом состоянии.

Однако такой же универсальной, как основной критерий Найквиста является следующая формулировка:

замкнутая АС устойчива, если положительны все ее запасы по фазе.

***Следствие из критерия Найквиста:***

если разомкнутая система неустойчива, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы АФХ неустойчивой разомкнутой системы охватывала точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении (против хода часовой стрелки)  $\eta/2$  раз, где  $\eta$ -число «правых» корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

***Графо-аналитический критерий (критерий Михайлова):***

для устойчивости АС необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова, начинаясь при  $\omega=0$  на вещественной положительной полуоси, с ростом частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  обходила последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки)  $n$  квадрантов комплексной плоскости, где  $n$  - степень характеристического уравнения (рис. 13).

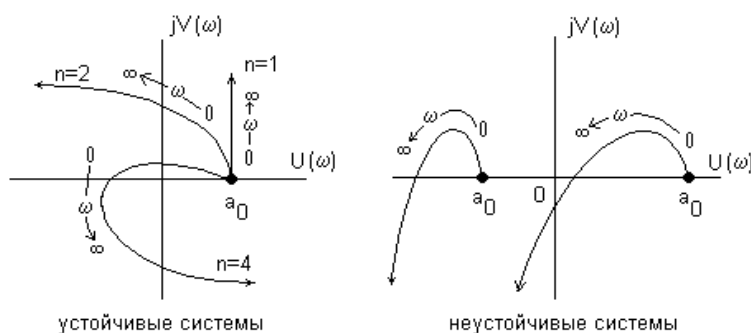


Рис. 13. Вид годографов Михайлова для различных систем



**Пример**

Оценить устойчивость АС по критерию Михайлова, если известен характеристический полином замкнутой системы  $D(p)=p^3+0,5p^2+12p+5$ .

Решение. Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции  $D(j\omega)$

$$U(\omega)=\operatorname{Re} D(j\omega)=5-0,5\omega^2,$$

$$V(\omega)=\operatorname{Im} D(j\omega)=\omega(12-\omega^2).$$

Примерный вид кривой (рис.14) определяется по характерным точкам.

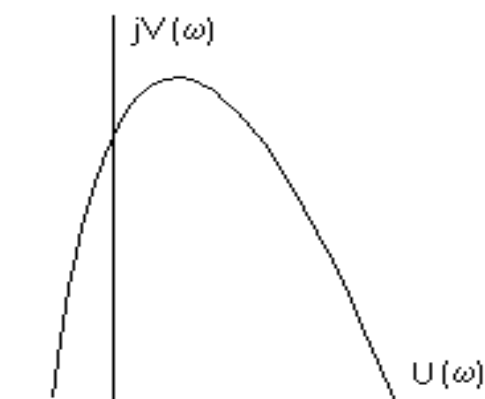


Рис.14 Вид годографа

При  $\omega=0$ ,  $U(0)=5$ ,  $V(0)=0$ .

Из условия  $U(\omega_1)=0$  находится  $\omega_1=\sqrt{10}$  и  $V(\omega_1)=6,4$ .

Из условия  $U(\omega_2)=0$  находится  $\omega_2=\sqrt{12}$  и  $V(\omega_2)=-1$ .

Кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранта. Следовательно, система устойчива.

*Задачи для самостоятельного решения*

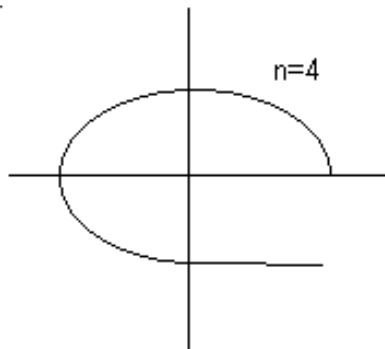
39.  $D(p)=p^3+2p^2+4p+10$ .

40.  $D(p)=p^3+10p^2+6p+2$ .

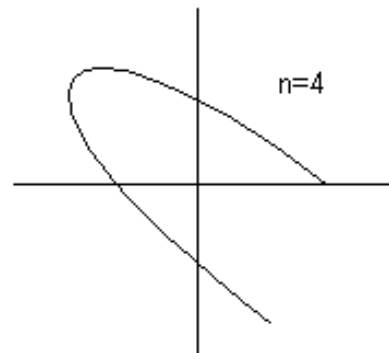
41.  $D(p)=2p^3+4p^2+3p+5$ .

Оценить устойчивость системы по известной кривой Михайлова и степени  $n$  характеристического уравнения (рис.15).

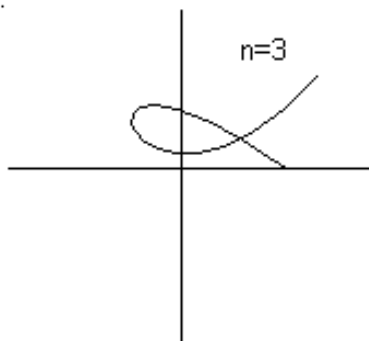
42.



43.



44.



45.

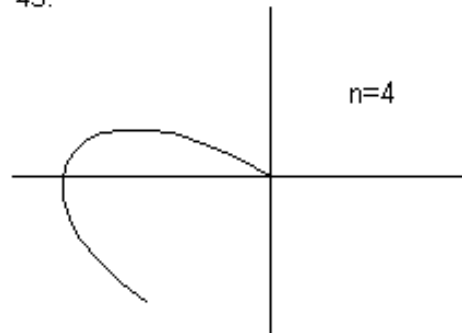


Рис. 15. Исходные данные

Оценить устойчивость замкнутых систем (рис. 16-17) по амплитудно-фазовым характеристикам (с - число «правых» корней характеристического уравнения замкнутой системы).

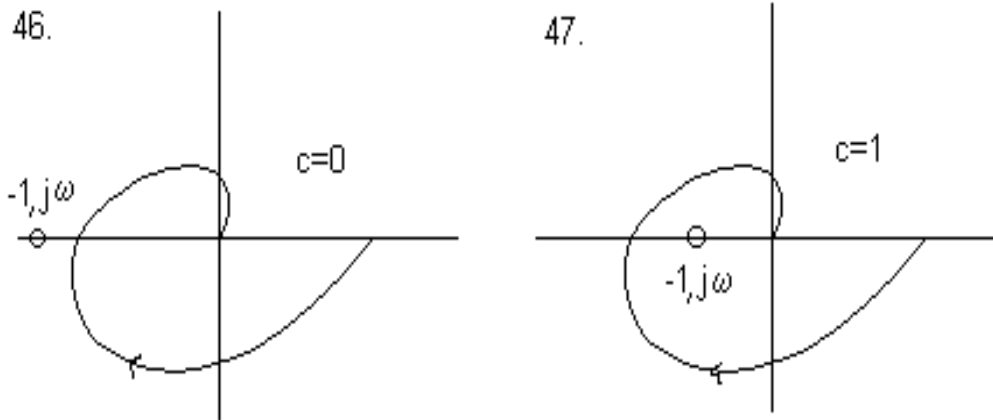


Рис. 16. Исходные данные

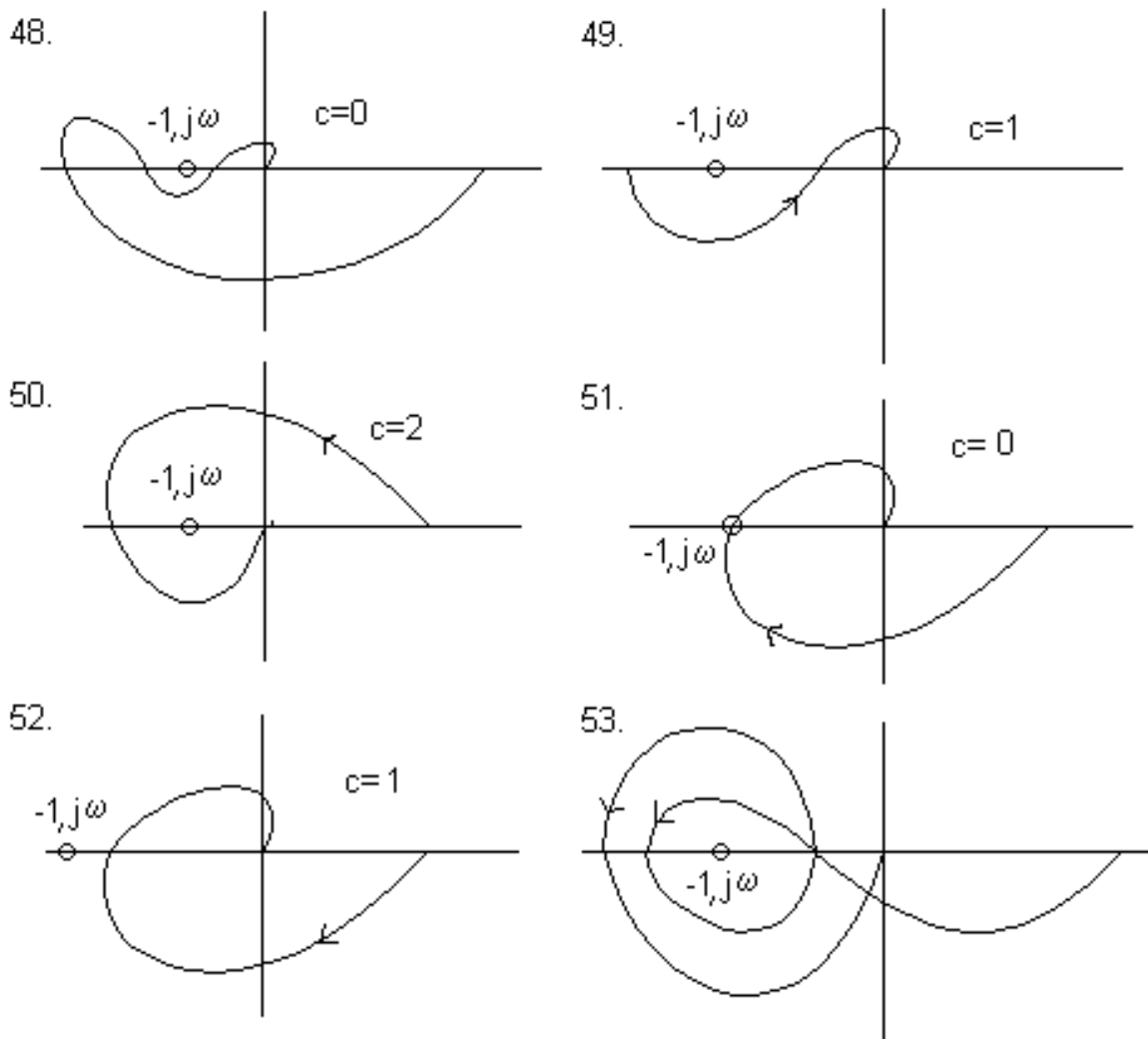


Рис. 17 . Исходные данные

### 4.3. Оценка устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Известно, что логарифмические амплитудная  $L(\omega)$  и фазовая  $\Theta(\omega)$  частотные характеристики однозначно связаны с АФХ  $W(j\omega)$ .

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg|W(j\omega)| = 20 \cdot \lg A(\omega); \quad \Theta(\omega) = \arg W(j\omega).$$

Это значит, что формулировки критерия Найквиста применительно к ЛЧХ можно получить из сопоставления АФХ и соответствующей ей ЛЧХ.

Логарифмический частотный критерий:

если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет  $\nu$  нулевых корней ( $\nu=0, 1, 2, \dots$ ), а все остальные корни «левые», то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в диапазоне частот, где ЛАХ положительна, ЛФХ по абсолютному значению была меньше  $-180^\circ$ , или, иначе, чтобы при достижении ЛФХ  $-180^\circ$  ЛАХ была отрицательна.

#### *Дополнительные интерпретации критерия:*

если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет  $\nu$  нулевых корней ( $\nu=0, 1, 2, \dots$ ), а все остальные корни «левые», то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в диапазоне частот, где ЛАХ положительна, разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФХ через прямую  $-180^\circ$  снизу вверх равнялась числу переходов сверху вниз;

если замкнутая система неустойчива, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы в области частот, где ЛАХ положительна, разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФХ через прямую  $-180^\circ$  была равна  $1/2$ , т.е. чтобы в области частот, где ЛАХ положительна, число переходов ЛФХ через прямую  $-180^\circ$  снизу вверх

превышало на  $1/2$  число переходов снизу вверх, где  $l$  - число «правых» корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Определение устойчивости АС по логарифмическому частотному критерию иллюстрируется следующим примером (рис. 18).

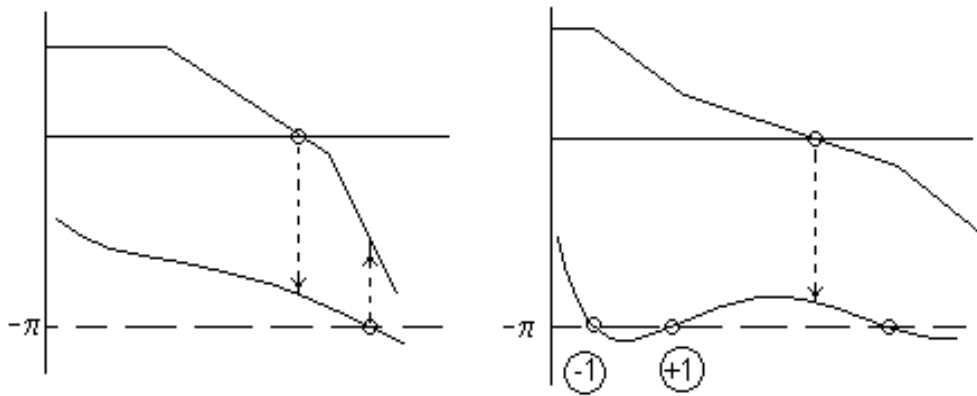


Рис.18. Примеры АС, устойчивых по логарифмическому критерию

### Задачи для самостоятельного решения

Оценить устойчивость замкнутой АС по известным ЛЧХ разомкнутой системы (рис. 19).

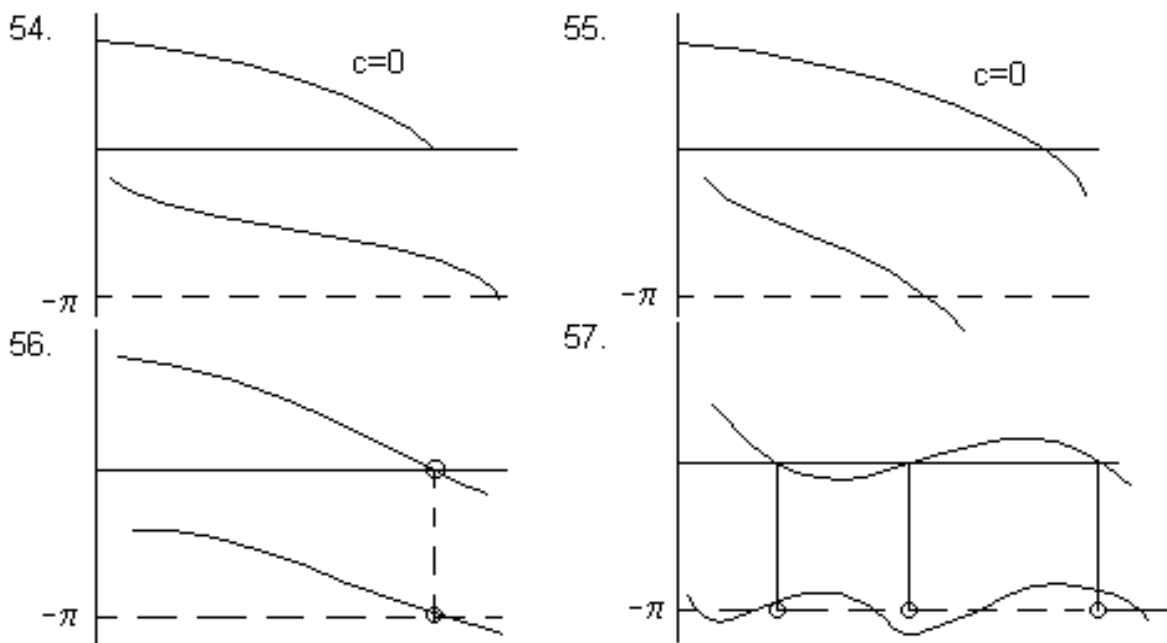


Рис. 19. Исходные данные

## 5. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Оценка точности АС проводится в рамках анализа установившегося состояния. При этом, показатели качества АС обычно определяются в двух режимах:

- при детерминированных воздействиях;
- при случайных воздействиях.

В качестве количественных характеристик точности работы АС при детерминированных воздействиях используются значения трех видов ошибок в установившемся режиме:

- статической;
- динамической;
- переходной.

Статическая ошибка - ошибка в установившемся режиме работы системы при действии на нее постоянного сигнала (стационарного воздействия).

Динамическая ошибка - ошибка в установившемся режиме работы системы при действии на нее изменяющегося, нестационарного сигнала (воздействия).

Переходная ошибка - ошибка системы после завершения переходного процесса, вызванного начальным рассогласованием (в определенном смысле - «уход нуля» системы).

Для оценки качества работы систем при случайных воздействиях используются такие показатели как

- вероятность срыва слежения,
- средняя квадратическая ошибка системы.

Общая схема информационных ситуаций установившегося режима АС представлена на рис.20.

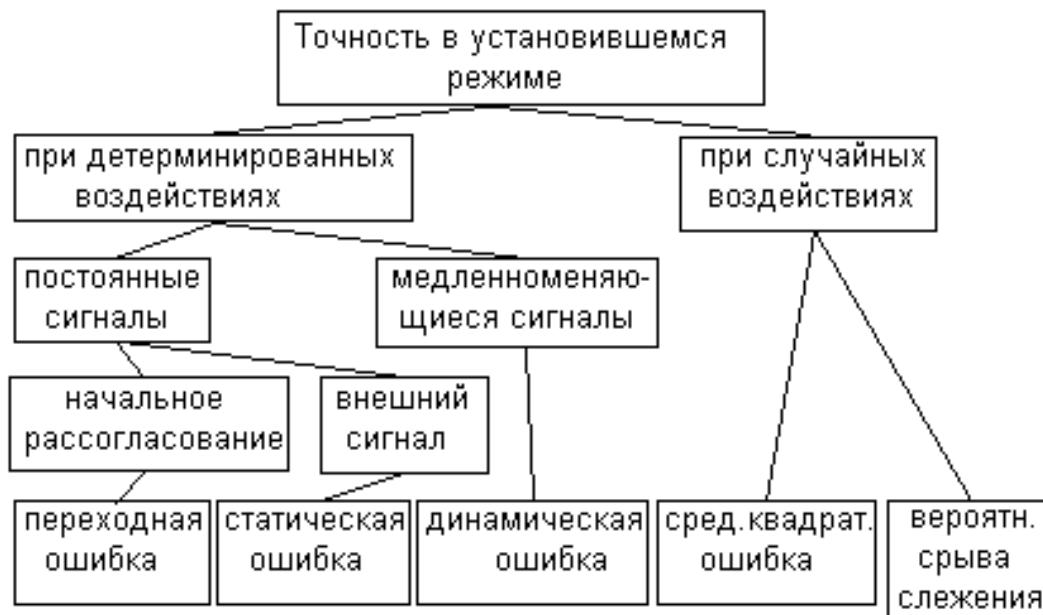


Рис.20. Характеристики точности АС

### 5.1. Оценка точности систем при детерминированных воздействиях

Детерминированными называются воздействия, которые можно отобразить любой аналитической функцией. В результате всегда можно предвидеть последующее возмущение, зная его значение в предыдущие значения времени.

Как правило, в АС рассматривают их поведение при детерминированных воздействиях вида

$$F_j = \begin{cases} c \cdot t^n, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Если система устойчива, то для определения установившихся значений компонент вектора выходных величин можно воспользоваться теоремой

Лапласа о конечном значении функции

$$x_i^0 = x_i(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p x_i(p).$$

Тогда для АС имеем

$$x_i^0 = \lim_{p \rightarrow 0} \Phi(p) \frac{c \cdot n!}{p^n}$$

или для системы с передаточной функцией вида

$$\Phi_{ij}(p) = \frac{p^v B_{ij}^0(p)}{A(p)}$$

получим

$$x_i^0 = \lim_{p \rightarrow 0} c \cdot n! \frac{B_{ij}^0(p)}{A(p)} \cdot p^{v^*}, \quad v^* = v - n.$$

В принципе, при исследовании точности АС учитывают, что ошибка системы не является однородной (рис.6). Обычно, различают ошибку по задающему воздействию  $\varepsilon^x$  и ошибку по возмущению  $\varepsilon^f$

$$\varepsilon_y^x = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + W(p)} X(p),$$

$$\varepsilon_y^f = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_n(p)}{1 + W(p)}.$$

При исследовании точности АС важное значение имеет тип системы: статическая она или астатическая. В разделе 1 пособия приведены определения понятий статической и астатической систем.

Для статических систем характерным является то, что в их одноконтурной структурно-динамической схеме отсутствуют интегрирующие звенья, т.е.  $v=0$ . Следовательно, установившиеся ошибки статических систем  $\varepsilon^x$  и  $\varepsilon^f$  зависят от характера внешних воздействий и от величины коэффициента



передачи. При постоянных внешних воздействиях эти ошибки называют статическими, т.е.  $\varepsilon^x = \varepsilon_{СТ}^x$ ;  $\varepsilon^f = \varepsilon_{СТ}^f$ ;  $\varepsilon^y = \varepsilon_{СТ} = \varepsilon_{СТ}^x + \varepsilon_{СТ}^f$ . Исследования подтверждают тот факт, что при отсутствии в одноконтурной структурно-динамической схеме интегрирующих звеньев АС будет статической. При этом, статические ошибки по задающему воздействию  $\varepsilon_{СТ}^x$  и возмущению  $\varepsilon_{СТ}^f$  пропорциональны величине этих воздействий и коэффициенту статизма системы, который тем меньше, чем больше коэффициент усиления  $k$  разомкнутой системы. Расчеты показывают, что статические ошибки таких АС можно уменьшить за счет увеличения коэффициента передачи участка цепи от входа системы до точки приложения внешнего воздействия. Однако, следует помнить, что при увеличении коэффициента передачи  $k$  уменьшается запас устойчивости системы и при  $k > k_{кр}$  система оказывается неустойчивой.

Следствие. Установившиеся ошибки статических систем, создаваемые внешними воздействиями, изменяющимися с постоянной скоростью, со временем  $t \rightarrow \infty$  увеличиваются до бесконечности. Следовательно, АС можно проектировать статическими в том случае, если они работают в условиях постоянных внешних воздействий или воздействий, близких к постоянным. Примерами таких систем могут служить системы стабилизации, а также системы программного регулирования при условии незначительного изменения регулирующего сигнала во времени.

В отличие от статических АС в одноконтурной структуре астатических систем имеются интегрирующие звенья, т.е.  $v \neq 0$ , причем  $v = 1, 2$ .

Установившиеся ошибки  $\varepsilon^x$  и  $\varepsilon^f$  астатических систем зависят не только от характера внешних воздействий и величины коэффициента передачи, но и от числа и места расположения интегрирующих звеньев в одноконтурной структурно-динамической схеме исследуемой системы.

Анализ структурных схем астатических АС позволяет сделать очень важный для практики вывод:

порядок астатизма системы по отношению к задающему воздействию определяется числом интегрирующих звеньев, содержащихся в одноконтурной структурно-динамической схеме системы, а по отношению к возмущающему воздействию - числом интегрирующих звеньев, расположенных между входом системы и точкой приложения этого возмущения.

**Следствие.** Астатическая система второго порядка при скоростных воздействиях имеет нулевую установившуюся ошибку, а при возмущениях с постоянным ускорением  $a_x$  и  $a_f$  – постоянную ошибку  $2a_x/k$  по внешнему воздействию и установившуюся ошибку, стремящуюся к бесконечности, по возмущению.

## 5.2. Оценка точности систем при случайных воздействиях

Реальные АС работают в условиях действия на них случайных возмущений. Это обусловлено нестабильностью внешних условий (температура, влажность, давление, ветер и т.п.), флуктуациями питающих напряжений.

Кроме того, в следящих системах задающее воздействие в общем случае описывается случайным процессом. И это обусловлено не только случайным характером, например, изменения положения объектом сопровождения, но и поступлением помехи на вход АС вместе с носителем полезной информации – радиосигналом.

Так, в системах автосопровождения цели на вход поступает несколько случайных возмущений, обусловленных следующими причинами:

- федингом;
- угловым шумом (блужданием центра отражения);
- шумами первых каскадов приемника.

*Фединг* – это флуктуация амплитуды принимаемого радиосигнала, обусловленные характером отражения электромагнитных волн от сложных поверхностей и изменениями плотности атмосферы.

*Блуждание центра отражения* – это флуктуации принимаемого сигнала, обусловленные сложением фаз сигналов, отраженных от элементарных площадок поверхности цели.

*Шум приемника* – обусловлен такими явлениями как тепловой шум, дробовой шум (для электронных ламп), шум мерцания (фликкер-эффект), генераторно-рекомбинационный шум (в полупроводниках).

В результате перечисленных причин как рассогласование в системе, ошибка слежения, так и управляемая величина являются случайными процессами.

В большинстве случаев закон распределения случайных значений ошибки и выходной величины можно считать нормальным (гауссовским), который полностью описывается его математическим ожиданием и корреляционной функцией. Если процессы являются также и стационарными, то для их описаний вместо корреляционной функции используется спектральная плотность  $S(\omega)$ , которые связаны между собой преобразованием Фурье. Тогда, для сигнала ошибки можно записать

$$R_{\varepsilon}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Средней квадратической ошибкой системы называют величину

$$\sigma = \sqrt{m_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2};$$

где  $m_{\varepsilon}$  – математическое ожидание сигнала ошибки;

$D_{\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon}^2$  – дисперсия сигнала ошибки.

МО  $m_{\varepsilon}$  рассчитывают по теореме о конечном значении

$$m_{\varepsilon} = \lim_{S \rightarrow 0} S \Phi_{\varepsilon}(S) m_x(S).$$

Точность системы относительно случайных составляющих сигнала и помехи оценивается дисперсией ошибки

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = M[\varepsilon^2(t)] = R_{\varepsilon}(\tau)|_{\tau=0}.$$

Проведенные исследования показывают, что дисперсия искомой ошибки может быть найдена по формуле

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon x}^2 + \sigma_{\varepsilon f}^2.$$

Из этой зависимости следует, что суммарная ошибка состоит из двух составляющих, одна из которых  $m_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2$ , определяющая точность воспроизведения сигнала, зависит от ПФ ошибки и статистических характеристик сигнала  $X$ , а вторая, обусловленная действием помехи  $\sigma_{\varepsilon f}^2$  – от ПФ замкнутой системы и характеристик помехи.

Аналогично находятся частотные и статистические характеристики случайной выходной величины  $Y(t)$ . Например, если задающее воздействие является случайной функцией с нулевым МО и спектральной плотностью  $S_x(\omega)$ , то спектральная плотность и дисперсия выходной величины определяются выражениями

$$S_Y(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_x(\omega); \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega) d\omega.$$

### **Пример**

Определить порядок астатизма системы по задающему  $V_x$  и возмущающему  $V_f$  воздействиям, а также установившиеся ошибки системы от

задающего и возмущающего воздействий, если  $x(t)=x_0 \cdot 1(t)$ ,  $f(t)=f_0 \cdot 1(t)$ , а структурная схема системы имеет вид (рис.20)

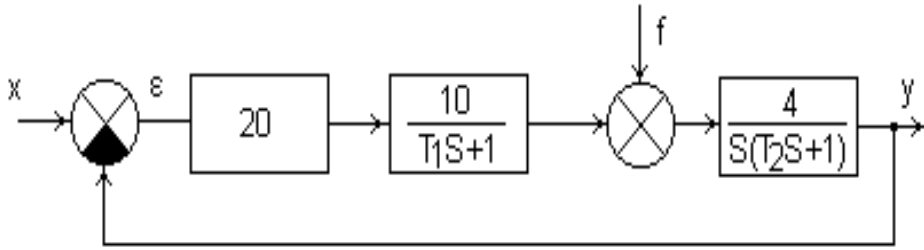


Рис. 21. Структурная схема АС

Решение. Порядок астатизма по задающему воздействию определяется числом интегрирующих звеньев во всем контуре управления. Поэтому  $\nu_x=1$ .

Порядок астатизма по возмущающему воздействию равен числу ИЗ, находящихся между точкой применения воздействия и точкой наблюдения сигнала ошибки. В данном случае  $\nu_f=0$ .

Передаточная функция для ошибки замкнутой системы по задающего  $\Phi_\varepsilon(S)$  и возмущающего  $\Phi_{\varepsilon f}(S)$  воздействий имеют вид

$$\Phi_\varepsilon(S) = \frac{1}{1 + W(S)} = \frac{(T_1S + 1)(T_2S + 2)S}{(T_1S + 1)(T_2S + 1)S + 800};$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon f}(S) &= \frac{W_f(S)}{1 + W(S)} = \frac{4(T_1S + 1)(T_2S + 1)S}{(T_2S + 1)S[(T_1S + 1)(T_2S + 1)S + 800]} = \\ &= \frac{4(T_1S + 1)}{(T_1S + 1)(T_2S + 1)S + 800}. \end{aligned}$$

По теореме Лапласа о конечном значении оригинала

$$\varepsilon_{x \text{ уст}} = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot \frac{x_0}{S} \cdot \frac{(T_1S + 1)(T_2S + 1)S}{(T_1S + 1)(T_2S + 1)S + 800} = 0;$$

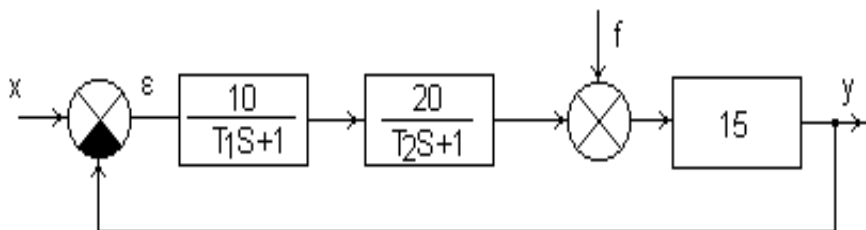
$$\varepsilon_{f_{уст}} = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot \frac{f_0}{S} \cdot \frac{4(TS + 1)}{(TS + 1)(TS + 1)S + 800} = -\frac{f_0 \cdot 4}{800} = -\frac{f_0 \cdot k_f}{k} = -0.005f_0,$$

с учетом того, что  $x(S) = \frac{x_0}{S}$ ;  $f(S) = \frac{f_0}{S}$ .

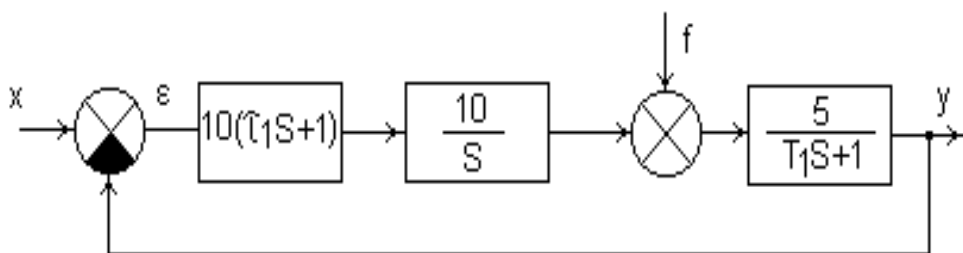
### Задачи для самостоятельного решения

Определить порядок астатизма  $\nu_x$  и  $\nu_f$ , а также установившиеся ошибки системы от задающего и возмущающего воздействий, если  $x(t)=x_0 \cdot 1(t)$ ,  $f(t)=f_0 \cdot 1(t)$  для систем со следующими структурными схемами

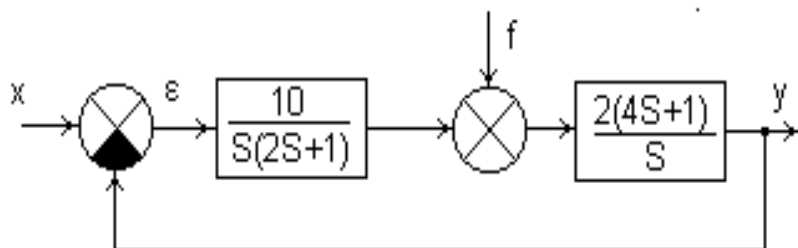
58.



59.



60.



## 6. ОСНОВЫ СИНТЕЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основным и практически наиболее важным приложением изложенных выше вопросов теории автоматического управления является синтез АС. Под синтезом АС понимается определение ее структуры и параметров по заданным требованиям к качеству процессов управления. Часто задача синтеза линейной стационарной АС при детерминированных воздействиях сужается до задачи синтеза корректирующих устройств (КУ), включаемых в нескорректированную систему. При этом, если нескорректированная система удовлетворяет требованию точности, то задачей синтеза КУ является определение типа корректирующего устройства, его схемы и параметров по известным характеристикам нескорректированной системы и требованиям к динамическим характеристикам проектируемой АС. Обычно, при синтезе устройства управления АС применяется следующий алгоритм.

1. Выбор функционально необходимых элементов управляющего устройства и источников питания.
2. Определение параметров функционально необходимых элементов управляющего устройства и составление структурно-динамической схемы исходной АС.
3. Статистический расчет системы по структурно-динамической схеме.
4. Динамический расчет системы.

Заключительным этапом разработки и расчета АС является установление окончательной структуры скорректированной системы и определение показателей ее качества.

### 6.1. Методика выбора модели регулятора

Предполагается, что каким-либо известным способом выбран коэффициент передачи разомкнутой АС и известны требуемые значения постоянных времени ее передаточной функции  $W_{\text{опт}}(p)$ . Такая ПФ и ее ЛАХ называется стандартной (оптимальной). В стандартной ЛАХ частота среза  $\omega_c$  всегда располагается на участке с наклоном  $-20$  дБ/дек. Известна также ПФ объекта управления  $W_{\text{оу}}(p)$ . Для выбора рациональной структуры регулятора, т.е. его ПФ используется схема, изображенная на рис. 22.

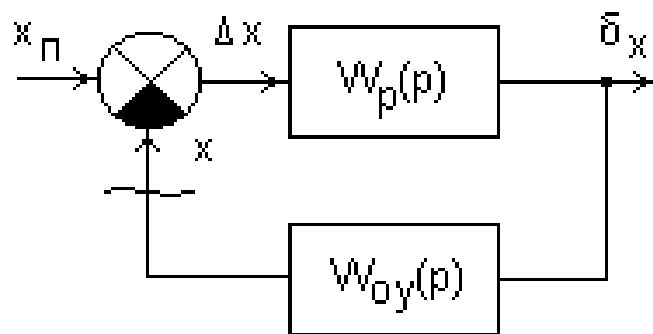


Рис. 22. Обобщенная структурная схема АС

Согласно правилам преобразования ПФ имеем

$$W_{\text{опт}}(p) = W_p(p) \cdot W_{\text{оу}}(p) .$$

Из нее находится ПФ регулятора

$$W_p(p) = \frac{\delta_x(p)}{\Delta x(p)} = \frac{W_{\text{опт}}(p)}{W_{\text{оу}}(p)} ,$$

которая дает ясное представление о структуре и параметрах регулятора.



Аналогичным образом производится выбор регулятора по ЛАХ: чтобы получить ЛАХ желаемого регулятора необходимо из ЛАХ оптимальной разомкнутой САУ вычесть ЛАХ объекта управления

$$L_p(\omega) = L_{\text{опт}}(\omega) - L_{\text{оу}}(\omega).$$

## 6.2. Комбинированный способ поиска параметров регулятора

Под параметрами регулятора понимаются его передаточные числа (абсолютные коэффициенты передачи) или коэффициент передачи и постоянные времени, входящие в передаточную функцию  $W_p(p)$ .

Соответственно в регуляторе можно выделить:

статические передаточные числа – параметры, стоящие в модели регулятора перед регулируемой величиной  $X$  или ошибкой регулирования  $\Delta X$ ;

динамические передаточные числа – параметры, стоящие в модели регулятора перед производными от  $X$  и  $\Delta X$ , интегралами от этих координат и т.п.

Определение статических параметров применяется следующий алгоритм.

1. Задаются входным воздействием  $F_j(t)$ ;
2. Находится передаточная функция замкнутой АС

$$\Phi_{ij}(p) = \frac{x_i(p)}{F_j(p)} = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 + W_{\text{пр}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)} = \Phi_{ij}(p, K_0).$$

3. Находится значение выходного сигнала в установившемся состоянии

$$x_i^0 = \lim_{p \rightarrow 0} \Phi_{ij}(p, K_0) \cdot \frac{c \cdot n!}{p^n}.$$

Из условия  $V=n$  существования функции  $X_i^0 = \text{const}$  получается уравнение синтеза

$$\Phi_{ij}^*(0, K_0) \cdot c \cdot n! - x_i^0 = 0,$$

где  $\Phi_{ij}^*(p)$  – оператор ПФ замкнутой системы без учета дифференцирующих звеньев.

4. Находится искомое передаточное число  $K_0 = K_0(X_i^0)$ .

Для выбора динамических передаточных чисел регулятора берут те характеристики АС, куда входят эти передаточные числа. Наиболее часто для поиска динамических параметров АС (коэффициентов, постоянных времени) используется запас по фазе.

Полагая, что известна структура ПФ разомкнутой АС в виде стандартного оператора  $W(p, K_d)$ , искомый динамический параметр регулятора  $K_d$  находится по следующему алгоритму.

1. Из заданного оператора  $W(p, K_d)$  находится частота среза  $\omega_c$  и запас по фазе  $\varphi_3 = \varphi_3(K_d)$ .

2. Задаваясь требуемым запасом по фазе  $\varphi_3^0$  составляется функциональное уравнение синтеза

$$\varphi_3(K_d) - \varphi_3^0 = 0.$$

3. Полученное уравнение решается относительно параметра  $K_d$

$$K_d = K_d(\varphi_3^0).$$

Функциональное уравнение лучше всего решается табличным методом или графическим путем.

**Пример**

Выбрать структуру и параметры регулятора с инерционным приводом в системе угловой стабилизации тангажа со структурной схемой (рис.23).

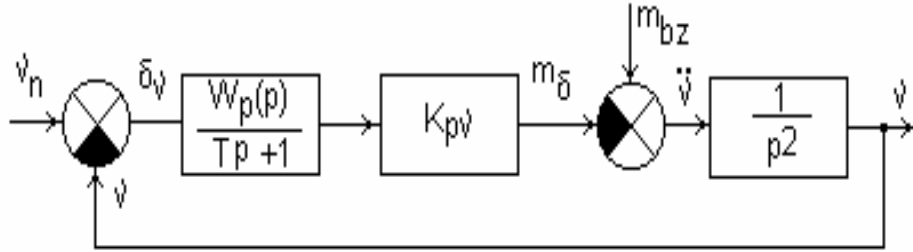


Рис. 23. Структурная схема канала угловой стабилизации тангажа

Решение.

а) Выбор структуры идеального регулятора.

В качестве стандартной ПФ разомкнутой АС берется оператор

$$W_{\text{опт}}(p) = \frac{K(\tau p + 1)}{p^2(Tp + 1)},$$

но согласно схеме (рис.23) ПФ разомкнутой системы будет

$$W(p) = \frac{v(p)}{\Delta v(p)} = \frac{W_p^U(p) \cdot K_{pv}}{p^2 \cdot (Tp + 1)}$$

и, следовательно, имеет смысл уравнение

$$\begin{aligned} \frac{K_{pv} \cdot W_p^U(p)}{p^2(Tp + 1)} - \frac{K(\tau p + 1)}{p^2(Tp + 1)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow W_p^U(p) &= \frac{K}{K_{pv}}(\tau p + 1) = K_v(\tau p + 1) \Rightarrow K_v = \frac{K}{K_{pv}}. \end{aligned}$$

Таким образом идеальный регулятор представляет собой форсирующее звено первого порядка (реальный – является интегро-дифференцирующим звеном).

б) Определение статического коэффициента передачи  $K_v$ .

Для выбора статического параметра необходимо произвести следующие преобразования

$$m_{bz} = m_0 \cdot l(t), \Rightarrow m_{bz}(p) = \frac{m_0}{p};$$

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \nu(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \Phi_{ij}(p) \cdot \frac{c \cdot n!}{p^n} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{m_0 \cdot (Tp + 1)}{p^2 (Tp + 1) + K_v K_{pv} (\tau p + 1)} = \\ &= \frac{m_0}{K_v K_{pv}} \Rightarrow K_v = \frac{m_0}{\nu_0 K_{pv}}. \end{aligned}$$

Пусть  $K_{pv} = 5 \text{ с}^{-2}$ ;  $\nu_0 \leq 0.01 \text{ рад}$ ;  $m_0 = 0.25 \text{ с}^{-2}$ .

Тогда

$$K_v \geq \frac{m_0}{\nu_0 \cdot K_{pv}} = \frac{0.25}{0.01 \cdot 5} = 5.$$

в) Выбор постоянной времени  $\tau$ .

Определяются границы области существования оптимальных значений постоянной времени  $\tau$

$$\tau_{\min} = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ с}; \quad \tau_{\max} = \frac{1}{KT} = \frac{1}{1.25} = 0.8 \text{ с}.$$

Частота среза в данном случае находится из выражения  $\omega_c = K\tau$ .

Записывается общее выражение для действительного запаса по фазе

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \pi + \varphi(\omega_c) = \arctg \tau \omega_c - \arctg T \omega_c = \arctg K \tau^2 - \arctg KT \tau = \\ &= \arctg 25 \tau^2 - \arctg 1.25 \tau. \end{aligned}$$

Вычисляется запас по фазе от  $\tau_{\min} = 0.2 \text{ с}$  до  $\tau_{\max} = 0.8 \text{ с}$  через  $\Delta \tau = 0.05 \text{ с}$ .

Результаты расчетов заносятся в таблицу (см. табл.3.).

Таблица 3

**Расчетные значения запаса устойчивости по фазе**

$\tau, \text{с}$	<b>0,2</b>	<b>0,3</b>	<b>0,4</b>	<b>0,5</b>	<b>0,6</b>	<b>0,7</b>	<b>0,8</b>
$\varphi_{3,^\circ}$	30,9	45,4	49,4	48,9	46,7	44,1	41,
	7	7	0	1	7	3	42

Далее с помощью сформированной таблицы может быть решена обратная задача определения постоянной времени  $\tau$  по заданному значению запаса по фазе  $\varphi_3$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии в ракурсе практического применения рассмотрены большинство основных разделов теории автоматического управления, а именно:

- типовые динамические звенья и их характеристики;
- структурный анализ автоматических систем;
- анализ устойчивости автоматических систем;
- оценка точности АС в установившемся режиме;
- синтез АС.

В каждом разделе кратко приведены основополагающие правила, используемые в теории и практике анализа и синтеза линейных стационарных непрерывных автоматических систем.

Предложенные в компактной форме учебные материалы могут служить основой для более глубокого изучения студентами СЗТУ и других вузов курса «Теория автоматического управления».

Методы исследования линейных дискретных и нелинейных систем автоматического управления в том числе и с помощью моделирования на ПЭВМ будут рассмотрены в последующих частях данного пособия.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

1.  $w(t)=5$ .

2.  $w(t)=10 \cdot 1(t)$ .

3.  $h(t)=3.5t^2$ .

4.  $h(t)=3t$ .

5.  $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ .

6.  $W(p) = \frac{0.5p + 1.25}{0.5p + 1}$ .

7.  $W(p) = \frac{0.8p + 0.4}{1.6p + 1}$ .

8.  $W_1(p) = \frac{4}{3p^2 + 0.5p + 1}, W_2(p) = \frac{1}{3p^2 + 0.5p + 1}$ .

9.  $W(p) = \frac{12}{p}$ .

10.  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ .

11.  $W(p) = \frac{8}{p^3}$ .

12.  $h(t)=4 \cdot t+5(1-e^{-0.5t})+8 \cdot \delta(t)+2 \cdot 1(t)$ .

13.  $h(t)=k_1 \cdot 1(t)+k_2 \cdot \delta(t)+k_3 t$ .

14.  $h(t)=2t+8 \cdot \delta(t)+1(t)+4(1-e^{-0.2t})$ .

15.  $A(\omega)=5/\omega, \varphi(\omega)=-\pi/2$ .

$$16. A(\omega) = \frac{8}{\sqrt{25\omega^2 + 1}}, \varphi(\omega) = -\arctg 5\omega.$$

$$17. A(\omega) = 10\sqrt{4\omega^2 + 1}, \varphi(\omega) = \arctg 2\omega.$$

$$18. A(\omega) = \frac{\sqrt{100\omega^2 + 1}}{\sqrt{16\omega^2 + 1}}, \varphi(\omega) = \arctg 10\omega - \arctg 4\omega.$$

$$19. x_2(t) = 20\sin(t - \pi/4).$$

$$20. x_2(t) = \frac{80}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(0.25t - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$21. x_2(t) = 40\cos 10t.$$

$$22. x_2(t) = 4000\sin(25t + \arctg 100).$$

$$23. x_2(t) = 1.5\sin(4t + \arctg 8 - \arctg 16).$$

$$24. W(p) = W_3(p)W_3(p), V(p) = W_3(p),$$

$$\Phi(p) = \frac{W_3(p)W_3(p)}{1 + W_3(p)W_3(p)}, \Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_3(p)W_3(p)},$$

$$Y(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p)W_3(p)}, \text{ где } W_3(p) = W_4(p) + W_1(p) \cdot W_2(p).$$

$$25. W(p) = W_1(p)W_3(p)W_3(p), V(p) = W_3(p),$$

$$\Phi(p) = \frac{W_1(p)W_3(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_3(p)}, \Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_3(p)W_3(p)},$$

$$Y(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_3(p)}, \text{ где } W_3(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_4(p)}.$$

$$26. W(p) = \frac{K}{p(T_1p + 1)(Tp + 1)}, V(p) = \frac{K_4}{p},$$



$$\Phi(p) = \frac{K}{K + p(T_1p + 1)(Tp + 1)}, \Phi_\varepsilon(p) = \frac{p(T_1p + 1)(Tp + 1)}{K + p(T_1p + 1)(Tp + 1)},$$

$$Y(p) = \frac{K_1(T_1p + 1)(Tp + 1)}{K_1 + p(T_1p + 1)(Tp + 1)}, K = \frac{K_1K_4}{K_3}, T = \frac{1}{K_2K_3},$$

$$\text{где } W_3(p) = \frac{K_2}{K_2K_3 + p} = \frac{1}{K_3(Tp + 1)}.$$

$$27. W(p) = \frac{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1)}{p(Tp + 1)}, V(p) = \frac{K_4}{Tp + 1},$$

$$\Phi(p) = \frac{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1)}{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1) + p(Tp + 1)},$$

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{p(Tp + 1)}{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1) + p(Tp + 1)},$$

$$Y(p) = \frac{K_4p}{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1) + p(Tp + 1)}, \tau_1 = \frac{K_3}{K_2},$$

$$28. W(p) = \frac{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1)}{p(Tp + 1)}, V(p) = \frac{K_3}{p},$$

$$\Phi(p) = \frac{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1)}{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1) + p(Tp + 1)},$$

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{p(Tp + 1)}{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1) + p(Tp + 1)},$$

$$Y(p) = \frac{K_3(Tp + 1)}{K(\tau p + 1)(\tau_1p + 1) + p(Tp + 1)}, K = K_1(K_2 + K_4)K_3, \tau_1 = \frac{K_4T}{K_2 + K_4}.$$

29. Разомкнутая и замкнутая система неустойчивы.

30. Разомкнутая система неустойчива, замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

31. Разомкнутая система устойчива, замкнутая неустойчива.

32. Разомкнутая и замкнутая системы неустойчивы.

33. Разомкнутая и замкнутая системы неустойчивы.

34. Разомкнутая система находится на колебательной границе устойчивости, замкнутая система устойчива.

35. Разомкнутая и замкнутая системы структурно неустойчивы.

$$36. T = \frac{2}{90} \text{ с} = 0.0022.$$

$$37. T = \frac{2}{199} \text{ с} = 0.01005.$$

$$38. T = \frac{4}{39} \text{ с} = 0.10256.$$

39. Система неустойчива.

40. Система устойчива.

41. Система устойчива.

42. Система устойчива.

43. Система находится на колебательной границе устойчивости.

44. Система неустойчива.

45. Система находится на апериодической границе устойчивости.

46. Замкнутая система устойчива.

47. Замкнутая система неустойчива.

48. Замкнутая система устойчива.

49. Замкнутая система устойчива.

50. Замкнутая система устойчива.

51. Замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

52. Замкнутая система неустойчива.

53. Замкнутая система устойчива.

54. Замкнутая система устойчива.

55. Замкнутая система неустойчива.

56. Замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

57. Замкнутая система устойчива.

$$58. v_x = v_f = 0; \varepsilon_{x \text{ уст}} = x_0/3001; \varepsilon_{f \text{ уст}} = -0.0049f_0.$$

$$59. v_x = v_f = 1; \varepsilon_{x \text{ уст}} = \varepsilon_{f \text{ уст}} = -0.$$

$$60. v_x = 2; v_f = 1; \varepsilon_{x \text{ уст}} = \varepsilon_{f \text{ уст}} = -0.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

#### *Безынерционное*

<i>Характеристика</i>	<i>Описание характеристики</i>
Уравнение	$x_2(t) = kx_1(t);$
ПФ	$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = k;$
Частотные характеристики	$\text{АФХ: } W(\omega) = H(\omega)e^{j\Theta(\omega)} = k;$ $\text{АЧХ: } H(\omega) = k;$ $\text{ФЧХ: } \Theta(\omega) = 0^\circ;$ $\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20 \lg k.$

#### *Апериодическое первого порядка*

<i>Характеристика</i>	<i>Описание характеристики</i>
Уравнение	$Tx_2'(t) + x_2(t) = kx_1(t);$
ПФ	$W(p) = \frac{k}{Tp + 1};$
Частотные характеристики	$\text{АФХ: } W(\omega) = H(\omega)e^{j\Theta(\omega)} = \frac{k}{1 + jT\omega};$ $\text{АЧХ: } H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + jT\omega}};$ $\text{ФЧХ: } \Theta(\omega) = -\arctg T\omega;$ $\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega.$

**Колебательное**

<b>Характеристика</b>	<b>Описание характеристики</b>
Уравнение	$T^2 x_2''(t) + 2\xi T x_2'(t) + x_2(t) = k x_1(t);$
ПФ	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1};$
Частотные характеристики	<p>АФХ:</p> $W(\omega) = H(\omega) e^{j\Theta(\omega)} = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2 + j2\xi T \omega};$ <p>АЧХ: <math>H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (j2\xi T \omega)^2}};</math></p> <p>ФЧХ:</p> $\Theta(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq 1/T; \\ -\pi + \arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } \omega \geq 1/T; \end{cases}$ <p>ЛАХ:</p> $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$

**Интегрирующее**

<b>Характеристика</b>	<b>Описание характеристики</b>
Уравнение	$x_2'(t) = k x_1(t);$
ПФ	$W(p) = \frac{k}{p} = \frac{1}{T p};$
Частотные характеристики	<p>АФХ: <math>W(\omega) = H(\omega) e^{j\Theta(\omega)} = \frac{1}{jT \omega};</math></p>

	$\text{АЧХ: } H(\omega) = \frac{1}{T\omega};$ $\text{ФЧХ: } \Theta(\omega) = -90^\circ;$ $\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega = -20\lg T\omega.$
--	--

### *Дифференцирующее*

Характеристика	Описание характеристики
Уравнение	$x_2(t) = kx_1'(t);$
ПФ	$W(p) = Tp;$
Частотные характеристики	$\text{АФХ: } W(\omega) = H(\omega)e^{j\Theta(\omega)} = jT\omega;$ $\text{АЧХ: } H(\omega) = T\omega;$ $\text{ФЧХ: } \Theta(\omega) = 90^\circ;$ $\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20\lg T\omega.$

### *Форсирующее первого порядка*

Характеристика	Описание характеристики
Уравнение	$x_2(t) = k[Tx_1'(t) + x_1(t)];$
ПФ	$W(p) = k(Tp + 1);$
Частотные характеристики	$\text{АФХ: } W(\omega) = H(\omega)e^{j\Theta(\omega)} = k(1 + jT\omega);$ $\text{АЧХ: } H(\omega) = k\sqrt{1 + T^2\omega^2};$ $\text{ФЧХ: } \Theta(\omega) = \arctg T\omega;$ $\text{ЛАХ: } L(\omega) = 20\lg k + 20\lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}.$

**Форсирующее второго порядка**

<b>Характеристика</b>	<b>Описание характеристики</b>
Уравнение	$x_2(t)=k[T^2x_1''(t)+2\xi Tx_1'(t)+x_1(t)];$
ПФ	$W(p) = k(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1) ;$
Частотные характеристики	<p>АФХ:</p> $W(\omega)=H(\omega)e^{j\Theta(\omega)}=k[1-T^2\omega^2 + j2\xi T\omega];$ <p>АЧХ:</p> $H(\omega)=k\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (j2\xi T\omega)^2} ;$ <p>ФЧХ:</p> $\Theta(\omega)=\begin{cases} \arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2} & \text{при } \omega \leq 1/T; \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{T^2\omega^2 - 1} & \text{при } \omega \geq 1/T; \end{cases}$ <p>ЛАХ:</p> $L(\omega)=20\lg k + 20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} .$

**Звено запаздывания**

<b>Характеристика</b>	<b>Описание характеристики</b>
Уравнение	$x_2(t)=kx_1(t-\tau);$
ПФ	$W(p)=ke^{-\tau p};$
Частотные характеристики	<p>АФХ: <math>W(\omega)=H(\omega)e^{j\Theta(\omega)}= ke^{-j\tau\omega};</math></p> <p>АЧХ: <math>H(\omega)=k;</math></p> <p>ФЧХ: <math>\Theta(\omega)=-\tau\omega;</math></p> <p>ЛАХ: <math>L(\omega)=20\lg k.</math></p>

## Библиографический список

- 1.Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М: Наука, 1975.
- 2.Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978.
- 3.Справочник по теории автоматического управления. /Под ред. А.А.Красовского – М.: Наука,1987.
- 4.Небылов А.В. Гарантирование точности управления. – М.: Наука. Физматлит, 1998.
- 5.Земсков В.А. Теория автоматических систем РК. В 2-х частях. Часть 1. Саратов: СВВКИУ, 1992. –100.
- 6.Земсков В.А. Теория автоматических систем РК. В 2-х частях. Часть 2. Саратов: СВВКИУ, 1993. –132.
- 7.Битяй К.Г., Калмыков В.А., Реут Л.М. др. Сборник задач по курсу «Основы автоматического управления». Минск: МВИРУ, 1965. – 72 с.
- 8.Сафронов В.В. Учебные задачи по теории автоматического управления. Саратов СВВКИУ, 1991. – 28 с.

## Предметный указатель

### А, Б

автоматические системы – 5

### В, Г

воздействие – 5,12,47

время регулирования – 8

### Д, Е, Ё, Ж

динамические системы – 10

динамические ошибки – 46

### З, И, Й

закон управления – 5

### К, Л

критерий

    корневой – 33

    алгебраический – 35

    Вишнеградского И.А. – 36

    Найквиста – 38

    В форме Бесекерского В.А. – 39

    Михайлова – 40

### М

мнемоническое правило – 19

многоконтурные структурно-

динамические схемы – 28,30

### Н, О

непрерывные автоматизированные  
системы – 5

объект управления – 5

### П, Р

передаточная функция – 16

переходная ошибка – 46

принцип

    разомкнутого управления – 5

    замкнутого управления – 5

### С, Т

система

    динамическая – 10

    физико-биологическая – 10

    социально-экономическая – 11

соединение звеньев

    последовательное – 24

    параллельное – 24

    с обратной связью – 25

статическая ошибка – 46

### У

управление – 5

### Ф, Х, Ц

фединг – 51

### Ч

частотные периодические функции –  
18,19

частота

    среза – 7

    сокращения – 8

### Ш, Щ, Э, Ю, Я

шум – 51



## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....	5
1.1. Понятие динамической системы.....	10
2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	12
3. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	23
4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	32
4.1. Алгебраический критерий устойчивости.....	35
4.2. Критерий устойчивости Найквиста .....	38
4.3. Оценка устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам	44
5. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	46
5.1. Оценка точности систем при детерминированных воздействиях.....	47
5.2. Оценка точности систем при случайных воздействиях .....	50
6. ОСНОВЫ СИНТЕЗА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	55
6.1. Методика выбора модели регулятора .....	56
6.2. Комбинированный способ поиска параметров регулятора .....	57
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	62
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	63
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	67
Библиографический список.....	71
Предметный указатель .....	72

Александр Александрович Клавдиев

# **Теория автоматического управления в примерах и задачах**

Часть I  
Учебное пособие

Редактор И.Н. Садчикова

Сводный темплан 2004 г.

Лицензия ЛР № 020308 от 14.02.97

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 78.01.07.953.П.005641.11.03. от 24.11.2003 г.

---

Подписано в печать			Формат 60×84 1/16
Б.кн.-журн.	П.л.	Б.л.	РТП РИО СЗТУ
	Тираж 100	Заказ	

---

Северо-Западный государственный заочный технический университет  
РИО СЗТУ,  
член Издательско-полиграфической ассоциации вузов России  
191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, 5