ГЛАВА 3. ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Под первым методом Ляпунова понимают совокупность приемов и средств исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанных непосредственно на анализе общих или частных решений этих систем, а также использующих определенные характеристики указанных решений.

§ 1. Характеристический показатель функции

1^0. Определение характеристического показателя функции. Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$f(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t) \qquad t \geq 0,$$

где f_1 и f_2 – некоторые вещественные функции. Имеет место представление

$$|f(t)| = e^{\alpha(t) \cdot t},$$

где

$$\alpha(t) = \frac{1}{t} \ln|f(t)|.$$

Из данного представления видно, что, исследуя величину $\alpha(t)$, можно изучать скорость роста функции $|f(t)|$ по сравнению со скоростью роста экспоненты.

О п р е д е л е н и е 1. Число (или один из символов $-\infty$, $+\infty$), определяемое равенством

$$\chi[f] = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \cdot \ln|f(t)|,$$

называют *показателем Ляпунова* (*характеристическим показателем*).

З а м е ч а н и е 1. Для обеспечения корректности в приведенном определении предполагается, что существует последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, такая, что $|f(t_k)| \neq 0$ для всех натуральных k, начиная с некоторого номера.

З а м е ч а н и е 2. Отметим следующий факт, вытекающий из определения верхнего предела: *для любой последовательности* $\{t_k\}$, *такой что* $t_k \to +\infty$, *выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{1}{t_k} \cdot \ln|f(t_k)| \leq \chi[f] = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \cdot \ln|f(t)|.$$

Примеры.

1) Пусть $f(t)=e^{\alpha t}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Тогда $\chi[e^{\alpha t}]=\alpha$ и в случае $\alpha>0$ выполнено $f(t)\to+\infty$, а при $\alpha<0$ верно $f(t)\to 0$ ($t\to+\infty$).

2) $\chi[t^m]=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\ln t^m=0$, $m\in\mathbf{R}$.

3) $\chi[e^{t\cdot\sin t}]=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot|t\cdot\sin t|=1$.

4) $\chi[e^{t^2}]=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\ln e^{t^2}=+\infty$.

2⁰. Свойства характеристических показателей.

1) $\chi[f(t)]=\chi[|f(t)|]$.

2) $\chi[c\cdot f(t)]=\chi[f(t)]\quad\forall c\neq 0$.

3) $|f(t)|\le|F(t)|\quad\forall t>T\quad\Rightarrow\quad\chi[f(t)]\le\chi[F(t)]$.

□ Это свойство вытекает из определения характеристического показателя и свойства монотонности верхнего предела:

$$\varphi(t)\le\psi(t)\quad\forall t>T\quad\Rightarrow\quad\overline{\lim_{t\to+\infty}}\varphi(t)\le\overline{\lim_{t\to+\infty}}\psi(t)\ \blacksquare$$

4) *Пусть* $\chi[f(t)]=\alpha\neq\pm\infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *выполнено*

i) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}}=0$; (1)

ii) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t}}=+\infty$; *это означает существование такой последовательности* $\{t_k\}$, $t_k\to+\infty$, *что*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t_k}}=+\infty. \tag{2}$$

Обратно,

если найдется такое $\alpha\in\mathbf{R}$, *что для всякого* $\varepsilon>0$ *верно* (1), *то* $\chi[f]\le\alpha$;

если найдется такое $\alpha\in\mathbf{R}$, *что для всякого* $\varepsilon>0$ *верно* (2), *то* $\chi[f]\ge\alpha$;

если найдется такое $\alpha\in\mathbf{R}$, *что для всякого* $\varepsilon>0$ *выполнено* (1) – (2), *то* $\chi[f]=\alpha$.

□ Необходимость. Выберем произвольное $\varepsilon>0$ и пусть

$$\chi[f] = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\cdot \ln|f(t)| = \alpha \in \mathbf{R}.$$

По определению верхнего предела найдется такое T, что

$$\frac{1}{t}\cdot\ln|f(t)| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t > T$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t_k}\cdot\ln|f(t_k)| = \alpha$$

для некоторой последовательности $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Следовательно, при некотором натуральном N справедливо

$$|f(t)| < e^{(\alpha+\varepsilon/2)\cdot t} = e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}\cdot t} \qquad \forall t > T,$$

$$|f(t_k)| > e^{(\alpha-\varepsilon/2)\cdot t_k} = e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t_k}\cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot t_k} \qquad \forall k > N,$$

где

$$e^{-\frac{\varepsilon}{2}\cdot t} \to 0 \quad (t\to+\infty) \quad \text{и} \quad e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot t_k} \to +\infty \quad (k\to+\infty).$$

Отсюда вытекают равенства (1) – (2).

Достаточность. Из (1) следует

$$\chi[f] \le \chi[e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}] = \alpha+\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0,$$

а значит $\chi[f] \le \alpha$. С другой стороны, из (2) имеем

$$\chi[f] \ge \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{t_k}\cdot\ln|f(t_k)| \ge \alpha-\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0,$$

и поэтому $\chi[f] \ge \alpha$. Полученные неравенства влекут равенство $\chi[f] = \alpha$ ■

Пусть для определенности $\chi[f] = \alpha > 0$ (случай $\alpha < 0$ разбирается аналогично). Величина характеристического показателя дает возможность сравнить скорости роста данной функции (точнее говоря, ее модуля) и экспоненты. А именно, в соответствии с доказанным свойством функция модуля $y = |f(t)|$ для любого $\varepsilon > 0$ растет *медленнее*, чем экспонента $y_1 = e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}$, но по некоторой последовательности $t_k \to +\infty$ *быстрее*, чем экспонента $y_2 = e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t}$ (см. рис. 3.1).

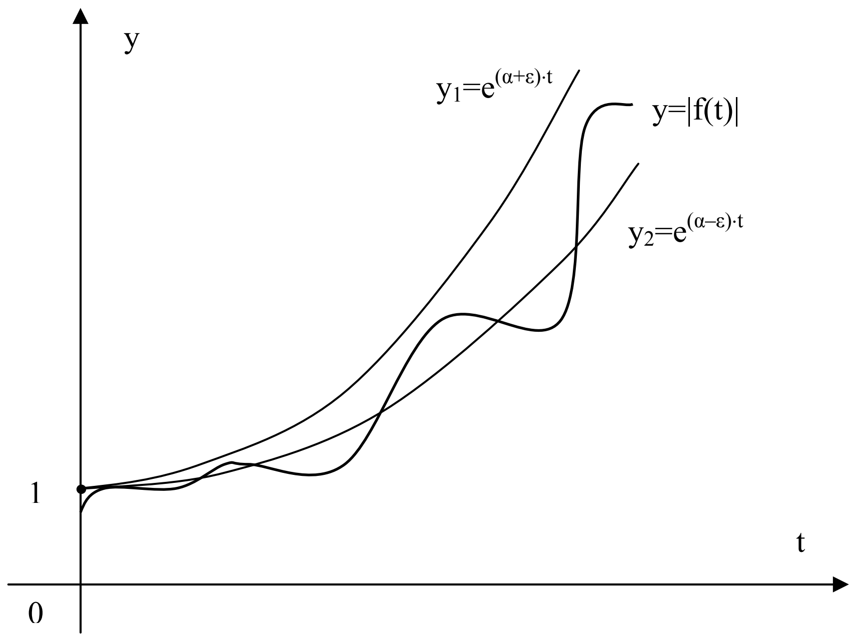

Рис. 3.1. Характеризация скорости роста функции $y = |f(t)|$.

5) *Пусть* $\chi[f_k] \in \mathbf{R},\ k = 1,2,\dots,m$. *Характеристический показатель суммы конечного числа функций* $f_1(t),\dots,f_m(t)$ *не превышает наибольшего из характеристических показателей этих функций и совпадает с ним, если наибольшим характеристическим показателем обладает лишь одно этих из слагаемых*:

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} f_k] \le \max_k \chi[f_k]. \qquad (3)$$

□ Пусть $\alpha := \max_k \chi[f_k] \ne \pm\infty$. Согласно предыдущему свойству (часть «необходимость») для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}} = 0, \qquad k = 1,2,\dots,m.$$

Отсюда

$$0 \le \frac{|\sum_{k=1}^{m} f_k(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}} = o(1) \qquad (t \to +\infty).$$

Согласно предыдущему свойству (часть «достаточность»), верно

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} f_k] \le \alpha = \max_k \chi[f_k]. \qquad (*)$$

Тем самым, неравенство (3) установлено.

Теперь пусть $\max_k \chi[f_k] = \chi[f_p] = \alpha$, причем $\chi[f_k] = \alpha_k < \alpha$ для всех $k \ne p$. В соответствии с частью «необходимость» предыдущего свойства для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{t_q\} : t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$, причем

$$\lim_{q \to +\infty} \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t_q}} = +\infty.$$

Если $0 < \varepsilon < \min_{k \ne p} \frac{\alpha - \alpha_k}{2}$, то при $\alpha_k \ne -\infty$ справедливо неравенство

$$\frac{|\sum_{k=1}^{m} f_k(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t_q}} \ge \underbrace{\frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t_q}}}_{\to +\infty} - \underbrace{\sum_{k \ne p} \frac{|f_k(t_q)|}{e^{(\alpha_k+\varepsilon)\cdot t_q}} \cdot \frac{1}{e^{(\alpha-\alpha_k-2\varepsilon)\cdot t_q}}}_{\to 0},$$

где $q \to +\infty$. Поэтому

$$\lim_{q \to +\infty} \frac{|\sum_{k=1}^{m} f_k(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\cdot t_q}} = +\infty,$$

а значит, в соответствии с частью «достаточность» предыдущего свойства, получаем неравенство

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} f_k] \ge \alpha.$$

Это вместе с неравенством (*) ведёт к требуемому равенству

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} f_k] = \alpha = \max_k \chi[f_k] \ \blacksquare$$

6) *Пусть* $\chi[f_k] \in \mathbf{R}$, $k = 1,2,...,m$. *Характеристический показатель произведения конечного числа функций* $f_1(t),...,f_m(t)$ *не превышает суммы характеристических показателей этих функций, т.е.*

$$\chi[\prod_{k=1}^{m} f_k] \le \sum_{k=1}^{m} \chi[f_k].$$

□ Используя свойство верхнего предела, легко получаем требуемое

$$\chi[\prod_{k=1}^{m} f_k(t)] = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\cdot \ln|\prod_{k=1}^{m} f_k(t)| = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\cdot \sum_{k=1}^{m} \ln|f_k(t)| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\cdot \ln|f_k(t)| = \sum_{k=1}^{m} \chi[f_k(t)] \quad ■$$

Следствие 1. *Характеристический показатель конечной линейной комбинации функций* $f_1(t),...,f_m(t)$ *с ограниченными коэффициентами* $c_1(t),...,c_m(t)$ *не превышает наибольшего из характеристических показателей данных функций*:

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} c_k(t)\cdot f_k(t)] \le \max_k \chi[f_k(t)].$$

□ В самом деле, с учётом $\chi[c_k(t)] \le 0$ имеем

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} c_k(t)\cdot f_k(t)] \le \max_k \chi[c_k(t)\cdot f_k(t)] \le \max_k \{\chi[c_k(t)] + \chi[f_k(t)]\} \le \max_k \chi[f_k(t)] \quad ■$$

Если $c_k(t) \equiv c_k$, то получаем следующий результат.

Следствие 2. *Пусть в линейной комбинации* $\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot f_k(t)$ *с отличными от нуля постоянными коэффициентами есть единственная функция с наибольшим характеристическим показателем. Тогда*

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot f_k(t)] = \max_k \chi[f_k(t)].$$

Упражнения

1) Вычислить характеристические показатели следующих функций:

(i) $y = t\cdot e^{2t}$

(ii) $y = t^{100} / e^{0.1\cdot t}$

(iii) $y = (1 + e^{e^{-t}})\cdot \sin t$

(iv) $y = \dfrac{\ln(1+2^t)}{\sqrt{t}}$.

2) Существуют ли ограниченные на промежутке $[0,+\infty)$ функции, имеющие бесконечные характеристические показатели $+\infty$ или $-\infty$?

§ 2. Характеристический показатель функциональной матрицы

Введенное в предыдущем параграфе понятие характеристического показателя функции здесь распространяется на векторные функции, а также функциональные матрицы. При этом основные из установленных ранее свойств сохраняются.

1^0. Определение.

Определение 1. Пусть $\mathbf{F}(t) = (f_{jk}(t))$ – матрица, определенная на $[0,+\infty)$. Число (или один из символов $+\infty, -\infty$) определяемое равенством

$$\chi[\mathbf{F}(t)] = \max_{j,k} \chi[f_{jk}(t)],$$

называется *характеристическим показателем матрицы* $\mathbf{F}(t)$.

Очевидно, $\chi[\mathbf{F}^T(t)] = \chi[\mathbf{F}(t)]$.

2^0. Свойства характеристических показателей матриц.

1) *Характеристический показатель матрицы* $\mathbf{F}(t) = (f_{jk}(t))$ *совпадает с характеристическим показателем ее нормы*[1], *т.е.*

$$\chi[\mathbf{F}(t)] = \chi[\|\mathbf{F}(t)\|]. \tag{1}$$

□ Для любого $t \ge 0$ и всех j,k верно неравенство $|f_{jk}(t)| \le \|\mathbf{F}(t)\|$, откуда следует $\chi[f_{jk}(t)] \le \chi[\|\mathbf{F}(t)\|]$, а значит

$$\chi[\mathbf{F}(t)] \le \chi[\|\mathbf{F}(t)\|]. \tag{*}$$

С другой стороны, для всех $t \ge 0$ можно записать $\|\mathbf{F}(t)\| \le \sum_{j,k} |f_{jk}(t)|$. Следовательно, согласно свойству 5) характеристических показателей, получаем

$$\chi[\|\mathbf{F}(t)\|] \le \max_{j,k} \chi[f_{jk}] = \chi[\mathbf{F}(t)]. \tag{**}$$

[1] Определение нормы матрицы (три варианта) см. в § 3 гл. 1.

Из неравенств (*) – (**) вытекает равенство (1) ■

2) *Пусть* $\chi[\mathbf{F}_s]\in\mathbf{R}$, $s=1,2,...,N$. *Характеристический показатель суммы конечного числа матриц* $\mathbf{F}_s$ *не превышает наибольшего из характеристических показателей этих матриц.*

□ Пусть $\mathbf{F}_s(t)$ ($s=1,2,...,N$) – матрицы размера $m\times n$ и

$$\mathbf{F}(t):=\sum_{s=1}^{N}\mathbf{F}_s(t)\,.$$

Для всех $t\ge 0$ верно $\|\mathbf{F}(t)\|\le\sum_{s=1}^{N}\|\mathbf{F}_s(t)\|$. Поэтому

$$\chi[\mathbf{F}(t)]=\chi[\|\mathbf{F}(t)\|]\le\chi[\sum_{s=1}^{N}\|\mathbf{F}_s(t)\|]\le\max_s\chi[\|\mathbf{F}_s(t)\|]=\max_s\chi[\mathbf{F}_s(t)]\ \blacksquare$$

Следствие 1. *Если среди матриц* $\mathbf{F}_s(t)$ ($s=1,2,...,N$) *имеется лишь одна, обладающая наибольшим характеристическим показателем, то характеристический показатель суммы данных матриц равен этому наибольшему характеристическому показателю.*

□ В самом деле, пусть $\chi[\mathbf{F}_1(t)]>\chi[\|\mathbf{F}_s(t)\|]$ для всех $s>1$, $\mathbf{F}_s(t)=(f_{jk}^{(s)}(t))$, s = 1,2,...,N, и

$$\mathbf{F}(t):=\sum_{s=1}^{N}\mathbf{F}_s(t)=(f_{jk}(t))\,.$$

Кроме того, пусть $\chi[\mathbf{F}_1(t)]=\max_{j,k}\chi[f_{jk}^{(1)}(t)]=\chi[f_{pq}^{(1)}(t)]$. Поскольку

$$\chi[f_{pq}^{(s)}(t)]\le\chi[\mathbf{F}_s(t)]<\chi[f_{pq}^{(1)}(t)]\qquad\forall s>1,$$

с использованием свойства 5) характеристических показателей получаем

$$\chi[f_{pq}(t)]=\chi[f_{pq}^{(1)}(t)]=\chi[\mathbf{F}_1(t)]\,.$$

Следовательно,

$$\chi[\mathbf{F}(t)]\ge\chi[\mathbf{F}_1(t)]=\max_s\chi[\mathbf{F}_s(t)]\,.$$

Отсюда, в силу доказанного выше свойства 2), следует

$$\chi[\mathbf{F}(t)]=\max_s\chi[\mathbf{F}_s(t)]\ \blacksquare$$

3) *Пусть* $\chi[\mathbf{F}_s] \in \mathbf{R},\ s = 1,2,...,N$. *Характеристический показатель произведения конечного числа матриц* $\mathbf{F}_s$ *не превышает суммы характеристических показателей этих матриц.*

□ Пусть $\mathbf{F}(t) := \prod_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s(t)$. Норма произведения матриц не превышает произведения норм этих матриц: $\|\mathbf{F}(t)\| \le \prod_{s=1}^{N} \|\mathbf{F}_s(t)\|$. Поэтому с использованием свойства 6) характеристических показателей, получаем

$$\chi[\mathbf{F}(t)] = \chi[\|\mathbf{F}(t)\|] \le \sum_{s=1}^{N} \chi[\|\mathbf{F}_s(t)\|] = \sum_{s=1}^{N} \chi[\mathbf{F}_s(t)] \ \blacksquare$$

Следствие 2. *Характеристический показатель линейной комбинации* $\sum_{s=1}^{N} c_s \cdot \mathbf{F}_s(t) \quad (c_s \ne 0,\ s = 1,2,...,N)$ *нескольких матриц с постоянными коэффициентами не превышает наибольшего из характеристических этих матриц и равен ему, если наибольшим характеристическим показателем обладает лишь одна из данных матриц.*

Упражнение

1. Вычислить характеристический показатель матрицы

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{t^2+t+1}-\sqrt{1-t+t^2}} & e^{\sqrt{t^2+t}-t} \\ \sqrt[\ln(1+2^t)]{1+3^t} & (1+2^t)^{\ln(1+3/t)} \end{pmatrix}.$$

§ 3. Спектр линейной однородной системы

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}, \qquad (1)$$

матрица которой составлена из непрерывных на промежутке $[0,+\infty)$ и в общем случае комплекснозначных функций.

Теорема 1. *Если матрица* $\mathbf{A}(t)$ *линейной системы* (1) *ограничена на* $[0,+\infty)$, *т.е. существует такое число* c, *что*

$$\|\mathbf{A}(t)\| \le c < +\infty \qquad \forall t \ge 0,$$

то каждое вещественное или комплексное ненулевое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *системы* (1) *имеет конечный характеристический показатель.*

□ Пусть $\mathbf{x}(t) = (x_1(t),..., x_n(t))^T$ – произвольное ненулевое решение системы (1), $t \ge 0$. Заметим, что $\|\mathbf{x}(0)\| \ne 0$, так как в противном случае благодаря единственности решения с начальными данными $(0, \mathbf{x}(0))$ оно должно было быть нулевым.

Из (1) вытекает

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}(\tau) \cdot \mathbf{x}(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\| \mathbf{x}(t) \| \le \| \mathbf{x}(0) \| + \left| \int_0^t \| \mathbf{A}(\tau) \| \cdot \| \mathbf{x}(\tau) \| d\tau \right| \qquad \forall t \ge 0.$$

Применяя обобщенную лемму Гронуолла-Беллмана (см. § 9 гл. 1), при $t \ge 0$ получим

$$\| \mathbf{x}(0) \| \cdot \exp\left(-\int_0^t \| \mathbf{A}(\tau) \| d\tau \right) \le \| \mathbf{x}(t) \| \le \| \mathbf{x}(0) \| \cdot \exp\left(\int_0^t \| \mathbf{A}(\tau) \| d\tau \right).$$

Предварительно разделив эти неравенства на положительное число $\|\mathbf{x}(0)\|$, с учетом равенства

$$\chi\left[\frac{\|\mathbf{x}(t)\|}{\|\mathbf{x}(0)\|} \right] = \chi[\mathbf{x}(t)]$$

находим

$$\chi\left[\exp\left(-\int_0^t \| \mathbf{A}(\tau) \| d\tau \right) \right] \le \chi[\mathbf{x}(t)] \le \chi\left[\exp\left(\int_0^t \| \mathbf{A}(\tau) \| d\tau \right) \right].$$

Отсюда

$$-\underline{A} \le \chi[\mathbf{x}(t)] \le \overline{A},$$

где

$$\underline{A} = \underline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\cdot\int_0^t \|\mathbf{A}(\tau)\|d\tau \le c, \qquad \overline{A} = \overline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\cdot\int_0^t \|\mathbf{A}(\tau)\|d\tau \le c,$$

т.е. $\chi[\mathbf{x}(t)] \in [-c, c]$ ■

Лемма 1. *Если матрица* $\mathbf{A}(t)$ *линейной системы* (1) *вещественна и некоторое её комплексное решение* $\mathbf{z} = \xi_1(t) + i\cdot\xi_2(t)$ *имеет характеристический показатель* $\chi[\mathbf{z}] = \alpha$, *то найдётся такое вещественное решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (1), *что* $\chi[\mathbf{x}] = \alpha$.

□ Имеем

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{z} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d(\xi_1 + i\cdot\xi_2)}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot(\xi_1 + i\cdot\xi_2) \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} + i\cdot\frac{d\xi_2}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\xi_1 + i\cdot\mathbf{A}(t)\cdot\xi_2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d\xi_i}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\xi_i, \quad i = 1,2.$$

Следовательно, вещественная $\xi_1(t)$ и мнимая $\xi_2(t)$ части решения $\mathbf{z}$ также являются решениями системы (1).

Рассмотрим решение $\mathbf{x} = \xi_s(t)$, где $\chi[\xi_s(t)] = \max_i \chi[\xi_i(t)]$. В силу $|\xi_s| \le |\xi_1 + i\cdot\xi_2| \le |\xi_1| + |\xi_2|$ имеем

$$\chi[\xi_s(t)] \le \chi[\mathbf{z}] = \chi[\xi_1(t) + i\xi_2(t)] \le \max_i \chi[\xi_i(t)] = \chi[\xi_s(t)],$$

что влечёт равенство $\chi[\xi_s] = \chi[\mathbf{z}] = \alpha$ ■

З а м е ч а н и е 1. Не ограничивая общности рассуждений, в лемме 1 всегда можно считать, что $\mathbf{x} = \xi_s(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}$, так как в противном случае (т.е. когда $\xi_s = \mathrm{Im}\,\mathbf{z}$) вместо $\mathbf{z}$ можно рассмотреть решение $\hat{\mathbf{z}} = -i\mathbf{z}(t) = \xi_2(t) - i\cdot\xi_1(t)$.

Лемма 2. *Вектор-функции* $\mathbf{x}^{(k)}(t)$, k = 1,2,...,m, *определённые на промежутке* $[0,+\infty)$ *и обладающие различными характеристическими показателями, линейно независимы.*

□ Пусть $\alpha_k := \chi[\mathbf{x}^{(k)}]$, k=1,2,...,m. Для определённости примем

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m. \tag{*}$$

Предположим противное: найдутся одновременно не равные нулю коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_m$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\cdot\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0} \qquad \forall t \ge 0. \tag{**}$$

Обозначим через p максимальный номер отличного от нуля коэффициента в (**). Из (**) получаем

$$\mathbf{x}^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{p-1}\left[-\frac{c_k}{c_p}\cdot\mathbf{x}^{(k)}(t)\right],$$

а значит, в соответствии со следствием 1 из § 1 и неравенствами (*) при некотором $q < p$ выполнено

$$\alpha_p = \chi[\mathbf{x}^{(p)}(t)] \le \max_{k<p}\chi[\mathbf{x}^{(k)}(t)] = \alpha_q,$$

что противоречит (*) ■

О п р е д е л е н и е 1. Совокупность всех конечных (т.е. отличных от $+\infty$ и $-\infty$) характеристических показателей решений линейной дифференциальной системы (1) называют её *спектром*.

Согласно замечанию 1, спектр линейной системы (1) с вещественной матрицей $\mathbf{A}(t)$ может быть реализован на множестве вещественных функций.

Теорема 2. *Спектр линейной однородной системы* (1) *с непрерывной*, *ограниченной и в общем случае комплекснозначной матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *состоит из конечного числа элементов*:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m \qquad (m \le n).$$

□ Доказательство теоремы прямо следует из леммы 2 и известного из курса дифференциальных уравнений того факта, что линейная система порядка n имеет не более n линейно независимых решений ■

Следующее утверждение показывает, что понятие характеристического показателя решения линейной однородной системы с переменными коэффициентами является прямым обобщением вещественной части собственного значения матрицы линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Следствие 1. *Характеристические показатели* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *ненулевых решений линейной системы* (1) *с постоянной матрицей* $\mathbf{A}$ *совпадают с вещественными частями характеристических* (*собственных*) *значений этой матрицы*, *т.е.* $\alpha_i = \mathrm{Re}\lambda_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, *где* λ_i – *корень характеристического уравнения* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

□ Как известно, фундаментальную совокупность решений линейной системы (1) с постоянными коэффициентами образуют функции вида

$$e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)\cdot t}\cdot[\cos((\mathrm{Im}\lambda_i)\cdot t) + i\cdot\sin((\mathrm{Im}\lambda_i)\cdot t)]\cdot\mathbf{P}_i(t),$$

где $\mathbf{P}_i$ – векторные полиномы, степень которых не превосходит кратности корня λ_i. Характеристический показатель такой функции совпадает с $\alpha_i = \operatorname{Re}\lambda_i$, $i = 1,2,...,m$.

Далее, никакое другое число, кроме $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, не может быть характеристическим показателем решения, поскольку любое решение системы (1) есть линейная комбинация упомянутой фундаментальной совокупности, а характеристический показатель такой линейной комбинации равен одному из характеристических показателей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ ■

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t+1} \cdot \ln x \qquad (t \geq 0).$$

Оно имеет общее решение $x = e^{c\cdot(t+1)}$, а значит, обладает сплошным спектром мощности континуума: $-\infty < \alpha < +\infty$.

§ 4. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной системы с переменными коэффициентами

Теорема 1 (Ляпунов). *Пусть задана линейная система*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

с непрерывной, ограниченной и в общем случае комплекснозначной матрицей $\mathbf{A}(t)$, *причем* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ – *спектр этой системы* $(m \leq n)$. *Для асимптотической устойчивости системы* (1) *достаточно, чтобы все её характеристические показатели были отрицательными, т.е.* $\alpha_k < 0$, $k = 1,2,...,m$.

□ Пусть $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ – произвольное ненулевое решение системы (1). Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для числа $\alpha := \max\limits_k \alpha_k < 0$ имело место неравенство $\alpha + \varepsilon < 0$. В соответствии со свойством 4) характеристических показателей справедлива импликация

$$\chi[\mathbf{x}(t)] < \alpha + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\mathbf{x}(t)\|}{e^{(\alpha+\varepsilon)\cdot t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $\mathbf{x}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, что согласно результатам § 3 главы 1 влечёт асимптотическую устойчивость линейной системы (1) ■

§ 5. Нормальная фундаментальная совокупность решений

Пусть задана линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

с непрерывной, ограниченной и в общем случае комплекснозначной матрицей $\mathbf{A}(t)$, причем

$$-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < +\infty \qquad (m \leq n)$$

– спектр этой системы, записанный в порядке возрастания. Обозначим через

$$\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$$

некоторую фундаментальную совокупность решений (ф.с.р.) этой системы. Она является базисом в пространстве решений.

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию заданной фундаментальной совокупности решений с постоянными коэффициентами. Являясь решением системы (1), она будет иметь характеристический показатель, который всегда меньше, либо равен наибольшему из характеристических показателей функций, участвующих в данной линейной комбинации. В случае реализации равенства получаем следующее понятие.

О п р е д е л е н и е 1. Ф.с.р. $\mathbf{X}(t)$ системы (1) называется *нормальной фундаментальной совокупностью решений* (*н.ф.с.р.*), если для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и для любых $c_{i_l} \neq 0,\ l = 1, 2, \ldots, k$, выполняется равенство

$$\chi\left[\sum_{l=1}^{k} c_{i_l} \cdot \mathbf{x}^{(i_l)}(t)\right] = \max_{l \in \{1, 2, \ldots, k\}} \chi[\mathbf{x}^{(i_l)}(t)], \tag{2}$$

где совокупность попарно различных номеров $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ является подмножеством множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

З а м е ч а н и е 1. В определении 1 вместо включения $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ можно написать $k \in \{2, \ldots, n\}$, так как характеристический показатель линейной комбинации, содержащей лишь одно слагаемое, заведомо удовлетворяет условию максимума (2).

В следующей теореме устанавливается одно экстремальное свойство н.ф.с.р.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ *– н.ф.с.р. системы* (1) *и* n_s *– число решений из* $\mathbf{X}(t)$, *имеющих характеристический показатель* α_s, *а* N_s –

максимальное возможное число линейно независимых решений системы (1) *с характеристическим показателем* α_s, $s = 1,2,...,m$. *Тогда*

$$n_1 + n_2 + ... + n_s = N_s, \qquad s = 1,2,...,m. \tag{3}$$

□ Обозначим через $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ произвольное решение системы (1) с характеристическим показателем α_s. Как и всякое решение, оно может быть представлено в виде линейной комбинации $\mathbf{x} = \sum_{l=1}^{k} c_{i_l} \cdot \mathbf{x}^{(i_l)}(t)$ некоторых k решений из ф.с.р. $\mathbf{X}(t)$ $(k \le n)$ с отличными от нуля коэффициентами. Так как по условию $\mathbf{X}(t)$ – н.ф.с.р., то

$$\alpha_s = \chi[\mathbf{x}] \overset{(2)}{=} \max_{l \in \{1,2,...,k\}} \chi[\mathbf{x}^{(i_l)}(t)] \ge \chi[\mathbf{x}^{(i_p)}(t)], \qquad p = 1,2,...,k.$$

В частности, всякое решение системы (1), имеющее характеристический показатель α_s и входящее в набор из максимального возможного числа N_s линейно независимых решений с характеристическим показателем α_s, может быть представлено в виде линейной комбинации не более чем $n_1 + n_2 + ... + n_s$ решений из $\mathbf{X}(t)$. Поэтому максимальное возможное число N_s линейно независимых решений с характеристическим показателем α_s не может быть больше числа функций, на основе которых они строятся, т.е.

$$N_s \le n_1 + n_2 + ... + n_s. \tag{*}$$

С другой стороны, располагая набором $n_1 + n_2 + ... + n_s$ функций из $\mathbf{X}(t)$ с характеристическими показателями, не превосходящими α_s, всегда можно сделать так, чтобы этот набор остался линейно независимым и все функции входящие в него, имели максимальный возможный характеристический показатель, т.е. равный α_s. Для этого к каждой функции указанного набора с характеристическим показателем, меньшим α_s, достаточно прибавить одну и ту же функцию с характеристическим показателем, равным α_s; при этом линейная независимость, очевидно, не нарушится. Следовательно,

$$N_s \ge n_1 + n_2 + ... + n_s. \tag{**}$$

Неравенства (*) – (**) влекут (3) ■

В обычной ф.с.р. число решений, имеющих тот или иной фиксированный характеристический показатель, может варьироваться в зависимости от выбранной ф.с.р. В частности, все элементы такой ф.с.р. могут иметь один и тот же характеристический показатель.

В нормальной ф.с.р. число решений, имеющих фиксированный характеристический показатель, является инвариантом, причем в каждой н.ф.с.р. будут представлены решения всего спектра этой системы. Это положение подтверждают следующие два утверждения.

Следствие 1. *Во всякой н.ф.с.р. системы* (1) *количество решений с характеристическим показателем* α_s *одно и то же*, $s = 1,2,...,m$.

□ В самом деле, количество решений с характеристическим показателем α_s благодаря (3) равно $n_s = N_s - N_{s-1}$, $s = 1,2,...,m$, где $N_0 = 0$ ■

Следствие 2. *Каждая н.ф.с.р. реализует весь спектр линейной системы* (1), *т.е.* $n_s \geq 1$, $s = 1,2,...,m$.

□ Требуемые неравенства вытекают из строгих неравенств

$$0 = N_0 < N_1 < ... < N_m$$

и равенств $n_s = N_s - N_{s-1}$, $s = 1,2,...,m$ ■

Как показывает следующая теорема, из данной ф.с.р. системы (1) при помощи некоторого линейного преобразования с треугольной матрицей всегда получить некоторую н.ф.с.р.

Теорема 2 (теорема Ляпунова о построении н.ф.с.р.). *Пусть*

$$\mathbf{Z}(t) = \left(\mathbf{z}^{(1)}(t),...,\mathbf{z}^{(n)}(t)\right)^2$$

есть некоторая фундаментальная матрица решений (*ф.м.р.*) *системы* (1) *с непрерывной и ограниченной по норме на* $[0,+\infty)$ *матрицей коэффициентов* $\mathbf{A}(t)$. *Тогда существует такая постоянная треугольная матрица*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ c_{21} & 1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

что

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Z}(t)\cdot\mathbf{C} \tag{5}$$

является нормальной фундаментальной матрицей решений (*н.ф.м.р.*) *системы* (1).

□ 1) Сначала, на основе матрицы $\mathbf{Z}$ построим определенную матрицу

$$\mathbf{X}(t) = \left(\mathbf{x}^{(1)}(t),...,\mathbf{x}^{(n)}(t)\right),$$

столбцы которой образуют ф.м.р. системы (1).

Матрицу $\mathbf{X}$ будем строить в виде (5), т.е.

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{z}^{(1)}(t) + c_{21}\cdot \mathbf{z}^{(2)}(t) + \ldots + c_{n1}\cdot \mathbf{z}^{(n)}(t), \\ \mathbf{x}^{(2)}(t) = \qquad\qquad + \mathbf{z}^{(2)}(t) + \ldots + c_{n2}\cdot \mathbf{z}^{(n)}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x}^{(n)}(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad + \mathbf{z}^{(n)}(t). \end{cases} \tag{*}$$

Подберем в (*) числа c_{jk} $(k < j)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\chi[\mathbf{x}^{(s)}(t)] = \min_{c_{s+1,s},\ldots,c_{ns}} \chi[\mathbf{z}^{(s)}(t) + c_{s+1,s}\cdot \mathbf{z}^{(s+1)}(t) + \ldots + c_{ns}\cdot \mathbf{z}^{(n)}(t)], \quad s = 1,2,\ldots,m. \tag{**}$$

Заметим, что минимум здесь всегда достигается, так как спектр линейной системы конечен и в правой части равенства (**) в квадратных скобках записана линейная комбинация решений системы, а значит, некоторое решение этой системы.

По построению матрица $\mathbf{X}(t)$ с выбранными коэффициентами c_{jk} удовлетворяет равенству (5). Ясно, что столбцы (их ровно n) этой матрицы являются решениями системы (1). Кроме того,

$$\det(\mathbf{X}(t)) = \det(\mathbf{Z}(t))\cdot\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{Z}(t)) \neq 0 \qquad \forall t \geq t_0 > a.$$

Следовательно, $\mathbf{X}(t)$ – ф.м.р. системы (1).

2) Теперь установим, что $\mathbf{X}(t)$ – н.ф.м.р. системы (1).

С этой целью через $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ $(m \leq n)$ обозначим полную совокупность различных характеристических показателей системы решений $\mathbf{X}(t)$ и, зафиксировав произвольно выбранное $s \in \{1,2,\ldots,m\}$, рассмотрим произвольную группу решений $\mathbf{x}^{(n_{1s})}(t),\ldots,\mathbf{x}^{(n_{ks})}(t)$, $n_{is} \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i = 1,2,\ldots,k$, из $\mathbf{X}(t)$, имеющих один и тот же характеристический показатель: $\chi[\mathbf{x}^{(n_{is})}(t)] = \alpha_s$.

Для всякой линейной комбинации

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i a_i\cdot \mathbf{x}^{(n_{is})}(t) \qquad (\forall a_i \neq 0)$$

этих решений с отличными от нуля коэффициентами имеем

$$\chi[\mathbf{x}(t)] \leq \alpha_s.$$

С другой стороны, полагая $n_{ps} = \min_i n_{is}$, на основании (*) получаем

---

[2] Векторы $\mathbf{z}^{(k)}$ в матрице $\mathbf{Z}$ являются столбцами.

$$\mathbf{x}(t) = a_p \cdot \mathbf{x}^{(n_{ps})}(t) + \sum_{n_{is} > n_{ps}} a_i \cdot \mathbf{x}^{(n_{is})}(t) = a_p \cdot \left[\mathbf{z}^{(n_{ps})}(t) + \sum_{i > n_{ps}} c_i' \cdot \mathbf{z}^{(i)}(t) \right],$$

где $a_p \neq 0$ и c_i' – некоторые (не обязательно отличные от нуля) константы. Отсюда с учётом (**) будем иметь

$$\chi[\mathbf{x}(t)] = \chi\left[\mathbf{z}^{(n_{ps})}(t) + \sum_{i > n_{ps}} c_i' \cdot \mathbf{z}^{(i)}(t) \right] \geq$$

$$\geq \min_{c_i' (i > n_{ps})} \chi\left[\mathbf{z}^{(n_{ps})}(t) + \sum_{i > n_{ps}} c_i' \cdot \mathbf{z}^{(i)}(t) \right] = \chi[\mathbf{x}^{(n_{ps})}(t)] = \alpha_s,$$

что вместе с установленным ранее неравенством

$$\chi[\mathbf{x}(t)] = \chi\left[\sum_i a_i \cdot \mathbf{x}^{(n_{is})}(t) \right] \leq \alpha_s$$

влечёт равенство

$$\chi\left[\sum_i a_i \cdot \mathbf{x}^{(n_{is})}(t) \right] = \alpha_s \qquad (\forall a_i \neq 0). \qquad (***)$$

Для завершения доказательства рассмотрим произвольную линейную комбинацию (где $n_i \in \{1,2,...,n\}$):

$$\sum_i b_i \cdot \mathbf{x}^{(n_i)}(t) \qquad (\forall b_i \neq 0)$$

решений из $\mathbf{X}(t)$ с отличными от нуля коэффициентами. Группируя из данных решений максимальные (по числу решений) совокупности $\{\mathbf{x}^{(n_{is})}(t)\}$, обладающие одинаковыми характеристическими показателями α_s, обозначая получающиеся при этом коэффициенты через b_{is}, и, учитывая (***), будем иметь

$$\chi\left[\sum_i b_i \cdot \mathbf{x}^{(n_i)}(t) \right] = \chi\left[\sum_s \sum_i b_{is} \cdot \mathbf{x}^{(n_{is})}(t) \right] =$$

$$= \max_s \chi\left[\sum_i b_{is} \cdot \mathbf{x}^{(n_i)}(t) \right] \overset{(***)}{=} \max_s \alpha_s = \max_i \chi[\mathbf{x}^{(n_i)}(t)].$$

Следовательно, $\mathbf{X}(t)$ – н.ф.м.р. ■

Как известно, произведение двух треугольных матриц является треугольной матрицей, поэтому справедливо

Следствие 3. *Если линейная система* (1) *имеет треугольную ф.м.р., то для этой системы существует треугольная н.ф.м.р.*

Упражнение

1. Убедиться, что $\mathbf{X}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{J}}$ – н.ф.м.р. линейной системы (1), в которой $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A} = \mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ – матрица Жордана.

§ 6. Правильные линейные системы

1^0. Неравенство Ляпунова. Вновь обратимся к линейной однородной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x} \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

с непрерывной, ограниченной и в общем случае комплекснозначной матрицей $\mathbf{A}(t)$, обозначив через

$$-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < +\infty \qquad (m \leq n)$$

спектр этой системы.

Определение 1. Пусть $\mathbf{X}(t)$ – некоторая н.ф.с.р. системы (1) и n_s есть число решений этой совокупности, имеющих характеристический показатель α_s, $s = 1,2,\ldots,m$. Множество всех характеристических показателей нетривиальных решений системы (1), где каждый характеристический показатель встречается столько раз, сколько n_s линейно независимых решений с характеристическим показателем, равным α_s, содержится в $\mathbf{X}(t)$, называют *полным спектром системы* (1), а сумму

$$S = \sum_{s=1}^{m} n_s \cdot \alpha_s$$

именуют *суммой характеристических показателей* системы (1).

Нетрудно понять, что полный спектр и сумма характеристических показателей системы (1) не зависят от выбора н.ф.с.р.

Замечание 1. Понятие суммы характеристических показателей можно использовать и применительно к набору линейно независимых решений системы (1), в частности, для ф.с.р. В этом случае сумма характеристических показателей может меняться в зависимости от набора решений, даже если число решений набора сохраняется.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{X}(t)=\{\mathbf{x}^{(1)},...,\mathbf{x}^{(n)}\}$ *– произвольная ф.с.р. системы* (1) *с вещественной матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *и*

$$S_{\mathbf{X}}=\sum_{k=1}^{n}\chi[\mathbf{x}^{(k)}]=\sum_{s=1}^{m}n_s\cdot\alpha_s \tag{2}$$

– сумма характеристических показателей решений из $\mathbf{X}$, *где* n_s $(n_s\ge 1)$ *– число вектор-функций данной ф.с.р. с характеристическим показателем* α_s, $s=1,2,...,m$.

*Имеет место **неравенство Ляпунова***

$$S_{\mathbf{X}}\ge\chi\left[\exp\left(\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right]. \tag{3}$$

□ Для определителя Вронского

$$W(t)=\det(\mathbf{X}(t))$$

справедливо представление

$$W(t)=\sum_{P}(-1)^{\omega}\cdot x_{p_1 1}(t)\cdot...\cdot x_{p_n n}(t),$$

где $(-1)^{\omega}\in\{1,-1\}$, $x_{p_i k}(t)$ – p_i-я компонента k-го решения $\mathbf{x}^{(k)}\in\mathbf{X}$, а $P=(p_1,...,p_n)$ – перестановка чисел 1,2,...n.

Используя свойства характеристических показателей (для суммы и произведения функций) с учётом (2), получаем

$$\begin{aligned}\chi[W(t)]&\le\max_P\left\{\chi[x_{p_1 1}(t)]+...+\chi[x_{p_n n}(t)]\right\}\le\max_P\left\{\chi[x_{p_1 1}(t)]\right\}+...\\&...+\max_P\left\{\chi[x_{p_n n}(t)]\right\}=\chi[\mathbf{x}^{(1)}(t)]+...+\chi[\mathbf{x}^{(n)}(t)]\overset{(2)}{=}S_{\mathbf{X}}.\end{aligned} \tag{**}$$

Вспомним формулу Остроградского-Лиувилля:

$$W(t)=W(t_0)\cdot\exp\left(\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right).$$

Следовательно,

$$\chi[W(t)]=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\ln|W(t)|=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\left(\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right).$$

Подставляя найденное для $\chi[W(t)]$ выражение в (**), придём к неравенству Ляпунова ■

З а м е ч а н и е 2. В случае комплекснозначной матрицы $\mathbf{A}(t)$ имеем $\mathrm{Sp}\mathbf{A} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\mathbf{A} + i\cdot \mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\mathbf{A}$. А так как согласно формуле Эйлера мнимая часть следа матрицы ограничена, то неравенство Ляпунова принимает вид

$$S_{\mathbf{X}} \geq \chi\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right] = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\frac{1}{t}\cdot\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\,.$$

2^0. Равенство Ляпунова.

Следствие 1. *Если для ф.с.р.* $\mathbf{X}(t)$ *линейной системы* (1) *с непрерывной, ограниченной вещественной матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *имеет место* ***равенство Ляпунова***

$$S_{\mathbf{X}} = \chi\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right] = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\frac{1}{t}\cdot\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\,,$$

то такая ф.с.р. является нормальной.

□ Для доказательства, не ограничивая общности, предположим, что в фундаментальной совокупности $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}\}$ решения записаны в порядке возрастания их характеристических показателей.

Если ф.с.р. $\mathbf{X}(t)$, напротив, не является нормальной, то найдётся $k \in \{2,\ldots,n\}$ и линейная комбинация решений

$$\mathbf{z} = \sum_{l=1}^{k} c_{i_l}\cdot \mathbf{x}^{(i_l)}(t)\,, \qquad (*)$$

$\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $i_1 < \ldots < i_k$, с отличными от нуля коэффициентами (в частности, $c_{i_k} \neq 0$), для которой

$$\chi[\mathbf{z}] < \max_{i_l=1,\ldots,k} \chi[\mathbf{x}^{(i_l)}(t)] = \chi[\mathbf{x}^{(i_k)}(t)]\,. \qquad (**)$$

Рассмотрим совокупность решений

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(i_k-1)},\mathbf{z},\mathbf{x}^{(i_k+1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}\}\,.$$

Она является ф.с.р., так как если предположить обратное, т.е.

$$\sum_{j\neq i_k} a_j\cdot \mathbf{x}^{(j)}(t) + a_{i_k}\cdot \mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0} \qquad \text{при некоторых } a_j\text{: } \sum_{j=1}^{n} |a_j| \neq 0\,,$$

то в силу линейной независимости системы $\left\{\mathbf{x}^{(j)}(t)\right\}_{j\neq i_k}$ верно $a_{i_k} \neq 0$, а значит с учетом (*) получаем

$$\sum_{j<i_k}(a_j + a_{i_k}c_j)\cdot\mathbf{x}^{(j)}(t) + a_{i_k}c_{i_k}\cdot\mathbf{x}^{(i_k)}(t) + \sum_{j>i_k}a_j\cdot\mathbf{x}^{(j)}(t) \equiv \mathbf{0}.$$

Отсюда, благодаря линейной независимости системы векторов $\left\{\mathbf{x}^{(j)}(t)\right\}_{j=1}^{n}$, следует равенство $a_{i_k}\cdot c_{i_k} = 0$, которое невозможно в силу $c_{i_k} \neq 0$, $a_{i_k} \neq 0$.

Полученное противоречие говорит о том, что $\mathbf{Z}$ является ф.с.р., причём благодаря (**) выполнено

$$S_{\mathbf{Z}} < S_{\mathbf{X}} = \chi\left[\exp\left(\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right] = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau.$$

Это неравенство не совместимо с неравенством Ляпунова для ф.с.р. $\mathbf{Z}$ ■

Пример 1. Приведем пример ф.с.р. линейной однородной системы уравнений

$$\begin{cases}\dot{x} = y\cdot[\sin(\ln t) + \cos(\ln t)],\\ \dot{y} = x\cdot[\cos(\ln t) + \sin(\ln t)],\end{cases} \qquad (1 \le t < +\infty),$$

для которой равенство Ляпунова не выполняется.

После сложения и вычитания уравнений данной системы, находим

$$x + y = 2C_1\cdot e^{t\cdot\sin(\ln t)}, \qquad x - y = 2C_2\cdot e^{-t\cdot\sin(\ln t)},$$

откуда получаем её общее решение

$$\begin{cases}x = C_1\cdot e^{t\cdot\sin(\ln t)} + C_2\cdot e^{-t\cdot\sin(\ln t)},\\ y = C_1\cdot e^{t\cdot\sin(\ln t)} - C_2\cdot e^{-t\cdot\sin(\ln t)}.\end{cases}$$

Нетрудно вычислить, что $\chi[x] = \chi[y] = 1$ (при $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$). Поэтому ф.с.р. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{t\cdot\sin(\ln t)} & e^{-t\cdot\sin(\ln t)} \\ e^{t\cdot\sin(\ln t)} & -e^{-t\cdot\sin(\ln t)} \end{pmatrix}$ является нормальной и $S_{\mathbf{X}} = 2$. Однако для матрицы

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \\ \cos(\ln t) + \sin(\ln t) & 0 \end{pmatrix}$$

данной системы верно $\mathrm{Sp}\mathbf{A}(t) \equiv 0$, а значит равенство Ляпунова нарушается:

$$2 = S_{\mathbf{X}} > \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_1^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau = 0 .$$

3⁰. Правильные системы.

Существует известная связь между верхним и нижним пределами одной и той же функции. Благодаря этой связи и неравенству Ляпунова, получаем

$$S \ge \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau \ge \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau ,$$

а значит,

$$S \ge \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau .$$

Линейная система, для которой в последнем неравенстве имеет место равенство, носит специальное название.

О п р е д е л е н и е 2. Линейную систему (1) с непрерывной, ограниченной, вещественной матрицей $\mathbf{A}(t)$ и спектром $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ $(m \le n)$ называют *правильной по Ляпунову* (или просто *правильной*), если

$$S = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau , \tag{4}$$

где

$$S = \sum_{s=1}^{m} n_s \cdot \alpha_s$$

есть сумма характеристических показателей (с учётом кратностей n_s) некоторой н.ф.с.р. системы (1).

З а м е ч а н и е 3. В аналогичном определении для системы (1) с комплекснозначной матрицей $\mathbf{A}(t)$ равенство (4) следует заменить на

$$S = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau .$$

Пример 2 (неправильная система). Рассмотрим линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = x \cdot \cos(\ln t) + y \cdot \sin(\ln t), \\ \dot{y} = x \cdot \sin(\ln t) + y \cdot \cos(\ln t), \end{cases} \qquad (t \ge 1).$$

При помощи подстановки нетрудно убедиться, что вектор-функции

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{t\cdot\sin(\ln t)} \\ \\ e^{t\cdot\cos(\ln t)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{t\cdot\sin(\ln t)} \\ \\ -e^{t\cdot\cos(\ln t)} \end{pmatrix}$$

являются решениями данной системы. Более того, они образуют линейно независимую систему и, тем самым, представляют собой ф.с.р. Кроме того, в силу

$$\chi[C_1\mathbf{x} + C_2\mathbf{y}] = \max\{\chi[\mathbf{x}], \chi[\mathbf{y}]\} = 1,$$

это будет н.ф.с.р. Для такой н.ф.с.р. верно равенство S = 2.

С другой стороны, имеем

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\cdot\int_1^t 2\cos(\ln\tau)d\tau = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\cdot\left(\tau\cdot(\sin(\ln\tau)+\cos(\ln\tau))\right)\Big|_{\tau=1}^{\tau=t} =$$

$$= \varliminf_{t\to+\infty}(\sin(\ln t)+\cos(\ln t)) = -\sqrt{2} \neq 2 = S.$$

Полученное в итоге неравенство свидетельствует о том, что данная система неправильная.

4⁰. Приводимые системы.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$. Линейное преобразование

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}(t)\cdot\mathbf{x} \tag{5}$$

называют *преобразованием Ляпунова*, если непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ матрица n-го порядка $\mathbf{L}(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\sup\limits_{t\geq 0}\|\mathbf{L}(t)\| < +\infty$;
2) $\sup\limits_{t\geq 0}\|\dot{\mathbf{L}}(t)\| < +\infty$;
3) $\exists K > 0,\ \forall t \geq 0 : |\det(\mathbf{L}(t))| \geq K$.

Важное свойство преобразования Ляпунова раскрывает следующая

Лемма 1. *Преобразование Ляпунова сохраняет значение характеристического показателя, т.е.*

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}(t)\cdot\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \chi[\mathbf{y}] = \chi[\mathbf{x}].$$

□ Из (5) на основе условия 3) получаем $\mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1}(t)\cdot\mathbf{y}$. Поэтому

$$\left.\begin{array}{l}\|\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{L}(t)\|\cdot\|\mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{L}^{-1}(t)\|\cdot\|\mathbf{y}\|\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\chi[\mathbf{y}]=\chi[\|\mathbf{y}\|]\le\chi[\|\mathbf{L}(t)\|]+\chi[\|\mathbf{x}\|]=\chi[\|\mathbf{x}\|]=\chi[\mathbf{x}] \\ \chi[\mathbf{x}]=\chi[\|\mathbf{x}\|]\le\chi[\|\mathbf{L}^{-1}(t)\|]+\chi[\|\mathbf{y}\|]=\chi[\|\mathbf{y}\|]=\chi[\mathbf{y}].\end{array}\right.$$

Следовательно, $\chi[\mathbf{y}]=\chi[\mathbf{x}]$ ■

О п р е д е л е н и е 4. Линейная система (1) называется *приводимой*, если при помощи некоторого преобразования Ляпунова (5) (с вообще говоря комплексной матрицей $\mathbf{L}$) её можно привести к системе

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{y} \tag{6}$$

с постоянной матрицей **B**.

Как показывает следующая теорема, класс приводимых систем содержится в классе правильных систем.

Теорема 2. *Всякая приводимая линейная система* (1) *является правильной*.

□ Пусть система (1) является приводимой и $\mathbf{X}(t)$ – некоторая её н.ф.м.р. По определению приводимой системы найдётся матрица $\mathbf{L}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{L}(t)\cdot\mathbf{Y}(t), \tag{*}$$

где $\mathbf{Y}(t)$ – ф.м.р. линейной системы (6) с постоянной матрицей **B**. Из (*) следует

$$\det(\mathbf{X}(t)) = \det(\mathbf{L}(t))\cdot\det(\mathbf{Y}(t)).$$

Отсюда с использованием формулы Остроградского-Лиувилля (см. п.1^0 в §6) получаем

$$\det(\mathbf{X}(0))\cdot\exp\left(\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)=\det(\mathbf{L}(t))\cdot\det(\mathbf{Y}(0))\cdot e^{t\cdot \mathrm{Sp}\mathbf{B}},$$

откуда

$$\exp\left(\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)=c(0)\cdot|\det(\mathbf{L}(t))|\cdot e^{t\cdot \mathrm{Sp}\mathbf{B}},$$

где

$$c(0)=\left|\det\left(\mathbf{Y}(0)\cdot\mathbf{X}^{-1}(0)\right)\right|.$$

Поэтому

$$\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau = \frac{1}{t}\cdot\ln\left[c(0)\cdot|\det(\mathbf{L}(t))|\right] + \frac{1}{t}\cdot\mathrm{Sp}\mathbf{B} =$$

$$= \frac{1}{t}\cdot\overbrace{\ln c(0)}^{\text{const}} + \frac{1}{t}\cdot\overbrace{\ln|\det(\mathbf{L}(t))|}^{\text{огр.}} + \frac{1}{t}\cdot\mathrm{Sp}\mathbf{B} \underset{t\to+\infty}{\to} \mathrm{Sp}\mathbf{B}.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau = \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau = \mathrm{Sp}\mathbf{B}. \qquad (**)$$

Обозначим через $S_\mathbf{X}$ и $S_\mathbf{Y}$ суммы характеристических показателей ф.с.р. $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно. Согласно лемме 1 справедливо равенство

$$S_\mathbf{X} = S_\mathbf{Y}, \qquad (***)$$

причём, так как по условию $\mathbf{X}$ – н.ф.с.р., то и $\mathbf{Y}$ – н.ф.с.р. Но для $\mathbf{Y}$ характеристическими показателями являются вещественные части корней характеристического уравнения $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, где каждый корень считается столько раз, какова его кратность. Поэтому

$$S_\mathbf{Y} = \sum_k \mathrm{Re}\lambda_k = \mathrm{Re}\sum_k \lambda_k = \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\mathbf{B} = \mathrm{Sp}\mathbf{B}.$$

Отсюда вместе с учетом (**)–(***) следует

$$S_\mathbf{X} \overset{(***)}{=} S_\mathbf{Y} = \mathrm{Sp}\mathbf{B} \overset{(**)}{=} \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau,$$

т.е. система (1) действительно правильная ■

Из доказанной теоремы очевидным образом вытекает

Следствие 2. *Любая линейная однородная дифференциальная система с постоянной матрицей является правильной.*

Можно доказать (см. [3]), что в случае, когда матрица $\mathbf{A}(t)$ линейной системы (1) является периодической, эта система также будет правильной.

Упражнение

1. Доказать, что линейная система (1) второго порядка с матрицей

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{при } t \geq 1)$$

неприводима.

§ 7. Теорема Перрона

1^0. Взаимно сопряжённые системы. Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x} \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

матрица $\mathbf{A}(t)$ которой в общем случае может быть комплекснозначной.

О п р е д е л е н и е 1. Линейную однородную систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\mathbf{A}^*(t)\cdot\mathbf{y} \qquad (t \geq 0), \tag{2}$$

где $\mathbf{A}^*(t) = \overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)}$ есть сопряжённая матрица для $\mathbf{A}(t)$, называют *сопряжённой системой* для системы (1).

Если $\mathbf{A}(t)$ – вещественная матрица, то $\mathbf{A}^*(t) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)$ и сопряжённая система для системы (1) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\mathbf{y}\,.$$

Нетрудно проверить, что система (1), в свою очередь, является сопряжённой для системы (2). На этом основании о системах (1) и (2) говорят как о *взаимно сопряжённых системах*.

Лемма 1. 1) *Для любых решений* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *взаимно сопряжённых систем* (1) *и* (2) *выполняется*

$$\mathbf{y}^*\cdot\mathbf{x} = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = C - \text{const}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{y}^*$ *– вектор, сопряжённый для* **y.**

2) *Для любых ф.м.р.* $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ *и* $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(t)$ *указанных систем имеет место равенство*

$$\mathbf{Y}^*\cdot\mathbf{X} = \mathbf{C} - \textit{постоянная матрица}\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{Y}^*$ *– сопряжённая для* $\mathbf{Y}$ *матрица. Обратно*, *из выполнения равенства* (4) *с неособой матрицей* $\mathbf{C}$ *и ф.м.р.* $\mathbf{X}$ *системы* (1) *следует*, *что* $\mathbf{Y}$ *– есть ф.м.р. сопряженной системы* (2).

□ 1) Зафиксируем произвольные решения $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ взаимно сопряжённых систем (1) и (2).

Поскольку

$$(\dot{\mathbf{y}})^* = (-\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{y})^* \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{y}}^* = -\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{A},$$

строка $\mathbf{y}^*$ является решением системы

$$\frac{d\mathbf{y}^*}{dt} = -\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{A}(t). \qquad (5)$$

Из равенств (1) и (5) следует

$$\mathbf{y}^* \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{y}^* \cdot \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}, \qquad \frac{d\mathbf{y}^*}{dt} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}.$$

Складывая почленно последние два равенства, получим

$$\mathbf{y}^* \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\mathbf{y}^*}{dt} \cdot \mathbf{x} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

Отсюда вытекает равенство (3).

2) Первая половина этого утверждения для матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ устанавливается так же, как и для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Для доказательства обратного предположим, что имеет место равенство (4). Из него следует

$$\mathbf{Y} = \left(\mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^{-1}\right)^* = \left(\mathbf{X}^*\right)^{-1} \cdot \mathbf{C}^*, \qquad (6)$$

где матрица $\mathbf{X}^*$ такова, что

$$\dot{\mathbf{X}}^* = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{A}^*(t). \qquad (7)$$

Дифференцируя (6) по правилу дифференцирования обратной матрицы, с учётом (7) получаем

$$\dot{\mathbf{Y}} = \underbrace{-(\mathbf{X}^*)^{-1}\cdot\dot{\mathbf{X}}^*\cdot(\mathbf{X}^*)^{-1}}_{\frac{d}{dt}(\mathbf{X}^*)^{-1}}\cdot\mathbf{C}^* \overset{(7)}{=} -\underbrace{(\mathbf{X}^*)^{-1}\cdot\mathbf{X}^*}_{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{A}^*(t)\cdot(\mathbf{X}^*)^{-1}\cdot\mathbf{C}^* \overset{(6)}{=} -\mathbf{A}^*(t)\cdot\mathbf{Y},$$

причём

$$\det(\mathbf{Y}) = \det\left(\left(\mathbf{X}^*\right)^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\right) = \det\left(\mathbf{X}^*\right)^{-1}\cdot\det(\mathbf{C}^*) = \det\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\cdot\det(\mathbf{C}) \neq 0.$$

Полученное означает, что $\mathbf{Y}$ является ф.м.р. системы (2) ■

2^0. Критерий правильности системы.

Лемма 2. *Линейная однородная система* (1) *с непрерывной*, *ограниченной и в общем случае комплекснозначной матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *является правильной тогда и только тогда*, *когда*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau = S, \tag{8}$$

где S *– сумма всех характеристических показателей данной системы*.

□ Часть «достаточность» вытекает из определения правильной системы.

Для доказательства необходимости введём обозначения

$$\overline{\sigma} = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau, \qquad \underline{\sigma} = \underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau.$$

Согласно неравенству Ляпунова $S \geq \overline{\sigma}$. Но из-за того, что система (1) правильная, верно равенство $S = \underline{\sigma}$. Следовательно, $\underline{\sigma} \geq \overline{\sigma}$, что вместе с неравенством $\underline{\sigma} \leq \overline{\sigma}$, связывающим нижний и верхний пределы, влечёт равенство $\underline{\sigma} = \overline{\sigma}$. Отсюда с учётом $S = \underline{\sigma}$ приходим к (8) ■

3^0. Теорема Перрона.

Теорема 1 (О. Перрон). *Линейная система* (1) *с непрерывной*, *ограниченной и в общем случае комплекснозначной матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *является правильной тогда и только тогда*, *когда полный спектр*

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \ldots \leq \alpha_n$$

этой системы и полный спектр

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$$

сопряжённой системы (2) *симметричны относительно нуля*, *т.е.*

$$\alpha_s + \beta_s = 0, \qquad s = 1,2,\ldots,n.$$

□ Необходимость. Пусть система (1) правильная и $\mathbf{X}(t)=(x_{jk})_{n\times n}$ – её н.ф.м.р., состоящая из столбцов $\mathbf{x}^{(k)}=(x_{1k}(t),...,x_{nk}(t))^T$, $k=1,2,...,n$, таких, что $\chi[\mathbf{x}^{(k)}]=\alpha_k$, причём характеристические показатели α_k упорядочены по возрастанию (как в условиях теоремы).

Согласно лемме 1 матрица

$$\mathbf{Y}(t)=\left[\mathbf{X}^{-1}(t)\right]^{*}=(y_{jk})_{n\times n} \tag{9}$$

является ф.м.р. сопряжённой системы (2), так как $\mathbf{Y}^{*}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{E}$.

Введём обозначение для столбцов матрицы $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{y}^{(k)}=(y_{1k}(t),...,y_{nk}(t))^T, \qquad \chi[\mathbf{y}^{(k)}]=\beta_k,\ \ k=1,2,...,n,$$

причём характеристические показатели β_k упорядочены в порядке убывания (как в условиях теоремы).

Равенство $\mathbf{Y}^{*}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{E}$ влечёт $\mathbf{y}^{(s)^{*}}\cdot\mathbf{x}^{(s)}=1$, $s=1,2,...,n$. Переходя в этом равенстве к характеристическим показателям, получим

$$0=\chi[\mathbf{y}^{(s)^{*}}\cdot x^{(s)}]\le\chi[\mathbf{y}^{(s)^{*}}]+\chi[\mathbf{x}^{(s)}]=\alpha_s+\beta_s \quad\Rightarrow\quad \alpha_s+\beta_s\ge 0. \tag{*}$$

С другой стороны, обозначая через $X_{jk}(t)$ алгебраическое дополнение элемента $x_{jk}(t)$ матрицы $\mathbf{X}$, согласно правилу обращения матрицы получаем

$$y_{js}(t)=\left[\frac{X_{sj}(t)}{\det(\mathbf{X}(t))}\right]^{*}=\frac{\overline{\mathbf{X}}_{js}(t)}{\overline{\det(\mathbf{X}(t))}}, \qquad j=1,2,...,n,$$

где в соответствии с формулой Остроградского-Лиувилля

$$\det(\mathbf{X}(t))=\underbrace{\det(\mathbf{X}(0))}_{\neq 0}\cdot\exp\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\neq 0.$$

Поэтому

$$\chi[y_{js}(t)]\le\chi\left[\frac{1}{\overline{\det(\mathbf{X}(0))}}\right]+\chi\left[\exp\left(-\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right]+\chi[\overline{\mathbf{X}}_{js}(t)], \qquad j=1,2,...,n. \tag{**}$$

Первое слагаемое в правой части (**) равно нулю. Рассмотрим подробнее второе и третье слагаемые. Прежде всего заметим, что система (1) правильная, а значит, в силу леммы 2

$$S = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau) d\tau .$$

Поэтому

$$\chi\left[\exp\left(-\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right] = \chi\left[\exp\left(-\int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau - i\int_0^t \mathrm{ImSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right] =$$

$$= \chi\left[\exp\left(-\int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right) \cdot \underbrace{\left(\cos\left(\int_0^t \mathrm{ImSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right) - i\sin\left(\int_0^t \mathrm{ImSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right)}_{\text{огр.}}\right] =$$

$$= \chi\left[\exp\left(-\int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right)\right] = -S.$$

Учитывая, что при составлении алгебраического дополнения $\mathbf{X}_{js}(t)$ вычёркивается s-й столбец, содержащий решение $\mathbf{x}^{(s)}$, будем иметь

$$\chi[\overline{X}_{js}(t)] = \chi[X_{js}(t)] \le S - \alpha_s , \qquad j = 1,2,...,n .$$

На основе полученного из (**) следует

$$\chi[y_{js}(t)] \le 0 + (-S) + (S - \alpha_s) = -\alpha_s , \qquad j = 1,2,...,n ,$$

а значит

$$\beta_s = \max_j \chi[y_{js}(t)] \le -\alpha_s \quad \Rightarrow \quad \alpha_s + \beta_s \le 0 \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \alpha_s + \beta_s = 0 , \qquad s = 1,2,...,n .$$

Остаётся убедиться, что ф.с.р. $\mathbf{Y}(t)$ – нормальная и, следовательно, набор чисел $\beta_1,...,\beta_n$ реализуют весь спектр сопряжённой системы. Действительно, из равенства $\alpha_s + \beta_s = 0$ следует

$$S_Y = \sum_{s=1}^{n} \beta_s = -\sum_{s=1}^{n} \alpha_s = -\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau) d\tau = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}[-\mathbf{A}^*(\tau)] d\tau .$$

Это означает, что для ф.м.р. $\mathbf{Y}(t)$ сопряжённой системы (2) выполнено равенство Ляпунова. Согласно следствию 1 из § 6, $\mathbf{Y}(t)$ – н.ф.с.р.

Достаточность. Пусть

$$\alpha_1 \le \alpha_2 ... \le \alpha_n \quad \text{и} \quad \beta_1 \ge \beta_2 \ge ... \ge \beta_n$$

суть спектры взаимно сопряжённых систем, причём $\alpha_s + \beta_s = 0$, $s = 1,2,...,n$. Согласно неравенству Ляпунова

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \geq \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau =: \overline{\sigma}$$

и

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_s \geq \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}[-\mathbf{A}^*(\tau)]d\tau = -\underline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau =: -\underline{\sigma}.$$

Складывая почленно последние два неравенства, получаем

$$\sum_{s=1}^{n} \underbrace{(\beta_s + \alpha_s)}_{=0} = 0 \geq \overline{\sigma} - \underline{\sigma}.$$

Отсюда с учётом $\overline{\sigma} \geq \underline{\sigma}$ следует равенство верхнего и нижнего пределов: $\overline{\sigma} = \underline{\sigma}$. Поэтому существует предел

$$\sigma := \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathrm{ReSp}\mathbf{A}(\tau)d\tau.$$

Кроме того, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s = \sigma$, так как если предположить $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s > \sigma$, то благодаря неравенству $\sum_{s=1}^{n} \beta_s \geq -\sigma$ выполнено $0 = \sum_{s=1}^{n} (\beta_s + \alpha_s) > 0$, что невозможно.

В таком случае лемма 2 гарантирует, что система (1) – правильная ■

Следствие 1. *Сопряжённая система для правильной линейной системы является правильной линейной системой.*

Следствие 2. *Если система* (1) *– правильная и* $\mathbf{X}(t)$ *– её н.ф.м.р., то*

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{X}^{-1}(t)\right]^*$$

является н.ф.м.р. сопряжённой системы (2).

Упражнение

1) Записать сопряжённую систему для системы второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2 + i\cdot 3)\cdot x + i\cdot(\sin t^2)\cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = (i + \cos(1-t))\cdot x - (1 - \dfrac{i}{(t+1)^2})\cdot y. \end{cases}$$

§ 8. Оценка нормы матрицы Коши для правильной линейной системы

Теорема 1. *Предположим, что линейная однородная система дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x} \qquad (t \ge 0) \tag{1}$$

с непрерывной, ограниченной и вещественной матрицей $\mathbf{A}(t)$ *является правильной и*

$$\mathbf{X}(t) = (x_{jk})_{n\times n} \tag{2}$$

её н.ф.м.р. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *– характеристические показатели решений*

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_{1k}(t), ..., x_{nk}(t))^T, \ \ k = 1,2,...,n,$$

образующих фундаментальную матрицу $\mathbf{X}(t)$, *и* $\mathbf{K}(t,\tau) = \mathbf{X}(t)\cdot\mathbf{X}^{-1}(\tau)$ *– матрица Коши при всех* $\tau \in [0,t]$.

Тогда если все характеристические показатели $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *отрицательны, то для любого* $\varepsilon > 0$ *и для любого* $\tau \in [0,t]$ *при некотором* $c_0 > 0$ *выполнено неравенство*

$$\|\mathbf{K}(t,\tau)\| \le c_0 \cdot e^{\varepsilon\tau}. \tag{3}$$

□ Введём диагональную матрицу $\mathbf{\Delta} = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Имеем

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{X}(t)\cdot e^{-t\cdot\mathbf{\Delta}} = \begin{pmatrix} x_{11}(t)\cdot e^{-\alpha_1 t} \ldots x_{1n}(t)\cdot e^{-\alpha_n t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}(t)\cdot e^{-\alpha_1 t} \ldots x_{nn}(t)\cdot e^{-\alpha_n t} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\chi\big[\mathbf{\Phi}(t)\big] = \max_{j,k} \chi\big[x_{jk} \cdot e^{-\alpha_k t}\big] = 0 . \qquad (*)$$

Рассмотрим обратную матрицу

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = (y_{jk}(t))_{n\times n} .$$

В силу следствия 2 из предыдущего параграфа её вектор-строки

$$\mathbf{y}^{(j)} = (y_{j1}(t),\dots,y_{jn}(t))$$

имеют характеристические показатели $\chi[\mathbf{y}^{(j)}] = -\alpha_j$. Поэтому

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-t\cdot\mathbf{\Delta}} \cdot \mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t}\cdot y_{11}(t)\dots e^{\alpha_n t}\cdot y_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\alpha_1 t}\cdot y_{n1}(t)\dots e^{\alpha_n t}\cdot y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

и

$$\chi\big[\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\big] = \max_{j,k} \chi\big[e^{\alpha_j t} \cdot y_{jk}\big] = 0 .$$

На основании полученного имеем

$$\|\mathbf{K}(t,\tau)\| = \|\mathbf{X}(t)\cdot e^{(t-\tau)\cdot\mathbf{\Delta}} \cdot e^{-t\cdot\mathbf{\Delta}} \cdot e^{\tau\cdot\mathbf{\Delta}} \cdot \mathbf{X}^{-1}(\tau)\| = \|\mathbf{\Phi}(t)\cdot e^{(t-\tau)\cdot\mathbf{\Delta}} \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\| \le$$

$$\le c\cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot t} \cdot e^{\left(\overline{\alpha}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot(t-\tau)} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\tau} = c\cdot e^{(\overline{\alpha}+\varepsilon)\cdot(t-\tau)} \cdot e^{\varepsilon\cdot\tau}, \qquad 0 \le \tau \le t,$$

где $\overline{\alpha} = \max_k \alpha_k$, положительное ε произвольно и c – положительная константа, зависящая от ε. Отсюда, благодаря тому, что для любых достаточно малых чисел $\varepsilon > 0$ верно $\overline{\alpha}+\varepsilon < 0$, приходим к оценке (3) ■

§ 9. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Рассмотрим вещественную нелинейную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x} + \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \qquad (t \ge 0) \qquad (1)$$

с непрерывной, ограниченной и вещественной матрицей $\mathbf{A}(t)$, где $\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ для всех $t \ge 0$, $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \in C_{tx}^{(0,1)}$ в области $t \ge 0$, $\|\mathbf{x}\| < h$, причём справедливо неравенство

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \le \psi(t) \cdot \|\mathbf{x}\|^m \qquad (m > 1) \tag{2}$$

с некоторой непрерывной положительной функцией $\psi(t)$ $(t \ge 0)$, такой, что $\chi[\psi(t)] = 0$. В качестве нормы матрицы здесь выступает $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_j \sum\limits_k |a_{jk}|$.

Теорема 1 (Ляпунов). *Если система первого приближения*

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \xi \tag{3}$$

правильная и все её характеристические показатели $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *отрицательны*, *причём выполнено условие нелинейности* (2), *то нулевое решение* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *экспоненциально устойчиво*[3].

□ Введём положительное число α таким образом, чтобы $\alpha_k < -\alpha < 0$, $k = 1,2,...,n$. Выполним над решением $\mathbf{x}$ системы (1) преобразование:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot e^{-\gamma t}, \qquad 0 < \gamma < \alpha.$$

Получим следующую систему относительно $\mathbf{y}$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y}), \tag{4}$$

где $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t) + \gamma \cdot \mathbf{E}$,

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) = e^{\gamma t} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{y} \cdot e^{-\gamma t}), \tag{5}$$

причём

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{g}(t,\mathbf{y}) \in C_{ty}^{(0,1)} \qquad (t \ge 0,\ \|\mathbf{y}\| < h \cdot e^{\gamma t}).$$

Рассмотрим систему первого приближения для (4):

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{y}. \tag{6}$$

Обозначим через $\beta_1, ..., \beta_n$ характеристические показатели системы (6). Очевидно, $\beta_k = \alpha_k + \gamma < 0$, $k = 1,2,...,n$. Поскольку система (3) – правильная, имеем

[3] Определение экспоненциально устойчивого решения см. в § 5 гл. 2.

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^n \alpha_k .$$

Поэтому

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \mathrm{Sp}\mathbf{B}(\tau)d\tau=\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\cdot\int_0^t [\mathrm{Sp}\mathbf{A}(\tau)+n\gamma]d\tau=\sum_{k=1}^n \alpha_k+n\gamma=\sum_{k=1}^n \beta_k .$$

Это означает, что система (6) – правильная.

Обозначим через $\mathbf{H}(t)$ ($\mathbf{H}(0)=\mathbf{E}$) нормированную ф.м.р. системы (6). Нелинейную систему (6) с начальным условием $\mathbf{y}(0)$ можно заменить равносильным интегральным уравнением

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{H}(t)\cdot\mathbf{y}(0)+\int_0^t \mathbf{K}(t,\tau)\cdot\mathbf{g}(\tau,y(\tau))d\tau, \tag{7}$$

где $\mathbf{K}(t,\tau)=\mathbf{H}(t)\cdot\mathbf{H}^{-1}(\tau)$.

В соответствии с локальной теоремой о существовании решений системы дифференциальных уравнений для любой пары $(0,x_0)$, такой, что $\|\mathbf{x}_0\|<h$, существует решение $\mathbf{y}(t)$ системы (4), а значит и интегрального уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}(0)=\mathbf{x}_0$, определённое на промежутке $0\le t<l$ и удовлетворяющее на этом промежутке неравенству $\|\mathbf{y}(t)\|<h$, где l, вообще говоря, зависит от $\mathbf{y}(t)$.

Из неравенств $\beta_k<0$, $k=1,2,...,n$, следует существование положительной константы c_1, такой, что

$$\|\mathbf{H}(t)\|<c_1 \qquad \forall t\ge 0 \quad (c_1\ge 1). \tag{8}$$

Кроме того, благодаря теореме 1 предыдущего параграфа, для любого $\varepsilon>0$ выполнено неравенство

$$\|\mathbf{K}(t,\tau)\|<c_2\cdot e^{\varepsilon\tau} \qquad (0\le\tau\le t<+\infty). \tag{9}$$

Далее, на основании (2) и (5) при $0\le t<l$ получаем

$$\|\mathbf{g}(t,\mathbf{y})\|=e^{\gamma t}\cdot\|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}\cdot e^{-\gamma t})\|<c_3\cdot e^{[\varepsilon-(m-1)\gamma]\cdot t}\cdot\|\mathbf{y}\|^m,$$

где c_3 – достаточно большая положительная константа. Оценивая по норме при $0\le t<l$ левую часть интегрального уравнения (7), находим

$$\|\mathbf{y}(t)\|\le\|\mathbf{H}(t)\|\cdot\|\mathbf{y}(0)\|+\int_0^t\|\mathbf{K}(t,\tau)\|\cdot\|\mathbf{g}(\tau,\mathbf{y}(\tau))\|d\tau,$$

или (с учетом полученной выше оценки для $\|\mathbf{g}(t,\mathbf{y})\|$)

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le c_1 \cdot \|\mathbf{y}(0)\| + \int_0^t c_2 \cdot c_3 \cdot e^{[2\varepsilon-(m-1)\gamma]\cdot\tau} \cdot \|\mathbf{y}(t)\|^m \, d\tau. \tag{10}$$

Выберем положительное ε настолько малым, чтобы $\delta := (m-1)\gamma - 2\varepsilon > 0$. Тогда из (10) при $0 \le t < l$ следует неравенство

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le c_1 \cdot \|\mathbf{y}(0)\| + \int_0^t c_4 \cdot e^{-\delta\tau} \cdot \|\mathbf{y}(\tau)\|^m \, d\tau, \tag{11}$$

где $c_4 = c_2 \cdot c_3$.

Неравенство (11) согласно следствию 1 из леммы Бихари (см. § 9, гл. 1) влечёт неравенство

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le \frac{c_1 \cdot \|\mathbf{y}(0)\|}{\left[1-(m-1)\cdot c_1^{m-1} \cdot \|\mathbf{y}(0)\|^{m-1} \cdot \int_0^t c_4 \cdot e^{-\delta\tau} \cdot \|\mathbf{y}(\tau)\|^m \, d\tau\right]^{\frac{1}{m-1}}}, \tag{12}$$

если только

$$(m-1)\cdot c_1^{m-1} \cdot \|\mathbf{y}(0)\|^{m-1} \cdot \int_0^t c_4 \cdot e^{-\delta\tau} \cdot \|\mathbf{y}(\tau)\|^m \, d\tau < 1. \tag{13}$$

Но так как

$$\int_0^t e^{-\delta\tau} d\tau = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta t} < \frac{1}{\delta} < +\infty$$

неравенство (13) всегда можно считать выполненным за счёт выбора достаточно малой окрестности начальных данных $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0)$.

Из (12) следует, что если величина $\|\mathbf{y}(0)\|$ достаточно мала, то для любого $0 \le t < l$ точка $\mathbf{y}(t)$ является внутренней точкой области

$$Z = \{0 \le t < +\infty, \quad \|\mathbf{y}\| \le \frac{h}{2} < h\}.$$

Следовательно, решение $\mathbf{y}(t)$ бесконечно продолжимо вправо, т.е. можно считать, что $l = +\infty$. Тем самым,

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le N \cdot \|\mathbf{y}(0)\| < \frac{h}{2} \qquad \forall t \ge 0, \tag{14}$$

где N – некоторая константа.

Возвращаясь к исходной переменной $\mathbf{x}$ в (14), при $\|\mathbf{x}(0)\| < \Delta < h$ получаем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le N \cdot \|\mathbf{x}(0)\| \cdot e^{-\gamma t} \qquad \forall t \ge 0,$$

где положительная константа Δ достаточно мала. Это означает, что нулевое решение нелинейной системы (1) экспоненциально устойчиво ■

Из асимптотической устойчивости линейной системы с постоянной матрицей следует, что вещественные части собственных значений этой матрицы отрицательны. Поэтому доказанная теорема с учётом следствия 1 из § 3 влечёт следующее утверждение.

Следствие 1 (Ляпунов). *Пусть дана вещественная нелинейная система*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \qquad (t \ge 0), \tag{15}$$

где

$\mathbf{A}$ *– постоянная матрица,*

вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in C^{(0,1)}_{t\mathbf{x}}$ в области $t \ge 0$, $\|\mathbf{x}\| < h$,

$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall t \ge 0$,

существуют константы $c, \alpha > 0$, *при которых*

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \le c \cdot \|\mathbf{x}\|^{1+\alpha} \qquad \forall t \ge 0, \qquad \forall \mathbf{x}: \ \|\mathbf{x}\| < h.$$

Тогда если система линейного приближения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

асимптотически устойчива, то нулевое решение системы (15) *экспоненциально устойчиво.*

Упражнения

С помощью следствия 1 исследовать на экспоненциальную устойчивость нулевые решения следующих систем

1) $$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = x^2 + \sin(x - y). \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dot{x} = \ln(5y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[4]{1 - 6x}. \end{cases}$$

Литература

1. Александров А.Ю., Александрова Е.Б., Екимов А.В., Смирнов Н.В. *Сборник задач и упражнений по теории устойчивости*. СПб.: ООО «СОЛО», 2003.
2. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1984.
3. Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*. М.: ИЛ, 1954.
4. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.
5. Зубов В. И. *Методы Ляпунова и их применение*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
6. Зубов В. И. *Устойчивость движения*. М.: Высшая школа, 1973.
7. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М.: Наука, 1975.
8. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*. В кн. А. М. Ляпунова «Избранные труды» , Изд-во АН СССР, 1948.
9. Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения*. М.–Л., 1952.
10. Меркин Д. Р. *Введение в теорию устойчивости движения*. М.: Наука, 1971.
11. Харитонов В. Л. *Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений*//Дифференциальные уравнения. 1978, т. 14, № 11, С. 2086 – 2088.
12. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнен*иям. М.: Наука, 1979.
13. Четаев Н. Г. *Устойчивость движения*. М.–Л.: ОГИЗ, 1946.