РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем передачи информации

**Е.А. Асарин В.С. Козякин
М.А. Красносельский Н.А. Кузнецов**

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
А.В. ПОКРОВСКИЙ

МОСКВА
1992

УДК 62–504.2

Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем/ Е.А. Асарин, В.С. Козякин, М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1992. — 408 с. — ISBN 5–02–006946–9

Монография посвящена математическим методам изучения влияния рассинхронизации обмена данными между отдельными подсистемами на динамику системы в целом. Теория рассинхронизованных систем находится в стадии формирования; многие принципиальные вопросы, простые в случае синхронизованных систем, для рассинхронизованных систем либо открыты до сих пор, либо для своего решения требуют развития специальной техники. Предлагается систематическое изложение теории устойчивости рассинхронизованных систем в различных классах рассинхронизаций. Часть результатов относится к линейным системам, представляя собой новую главу теории матриц, в которой изучаются свойства бесконечных произведений так называемых помесей матриц. Значительное внимание уделено анализу корректности предлагаемых моделей. Книга содержит большое число примеров и постановок открытых вопросов.

Для инженеров, математиков, специалистов по теории управления и системному анализу.

Ил. 13. Библиогр.: 225 назв.

Stability Analysis of Desynchronized Discrete Events Systems/
E.A. Asarin, V.S. Kozyakin, M.A. Krasnoselskii, N.A. Kuznetsov. — Moscow: Nauka, 1992. — 408 p. — ISBN 5–02–006946–9

Control systems with asynchronous data exchange are considered. The stability theory of such systems (for various desynchronization classes) is presented. Some results may be considered as a new chapter of the theory of matrices. The correctness of the proposed models is also investigated. Many open problems are set forth.

For engineers, mathematicians and control theorists.

Рецензенты д.ф.-м.н. Н.А. БОБЫЛЕВ, д.т.н. Р.Ш. ЛИПЦЕР
Редактор издательства Т.П. ТРИФОНОВА

А $\frac{1402060000\text{–}000}{042(02)\text{–}92}$ 000–92, II полугодие
ISBN 5–02–006946–9

Предисловие к электронному варианту

Предлагаемый текст представляет собой незначительно измененный вариант «бумажной» монографии ©**Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем**, М.: Наука, 1992. Изменения, в основном, были вызваны необходимостью переформатирования текста, а также желанием воспользоваться удобствами техники гиперссылок, присущей формату PDF. Были исправлены замеченные опечатки, а также в ряде мест и словесное оформление формулировок результатов — в целях «втиснуть» получившийся текст в требуемый формат страниц. В электронном варианте книги нумерация разделов полностью сохранена. В то же время количество страниц в монографии изменилось. Кроме того, были удалены номера формул, на которые отсутствовали ссылки в тексте, а сама нумерация формул была дополнена номерами глав. Все рисунки были выполнены заново, так как их оригиналов не сохранилось.

Естественно, вся ответственность за возможные ошибки и прочие ухудшения по сравнению с бумажным вариантом монографии лежит полностью на мне.

21 сентября 2008 г. *В.С. Козякин*

Предисловие

Вопросы влияния синхронности работы отдельных частей технических, биологических и иных объектов на функционирование этих объектов издавна привлекали внимание исследователей. В последнее время интерес к этой тематике усилился, что в значительной степени объясняется развитием многопроцессорных вычислительных систем, сетей ЭВМ и т.п.

Основным объектом анализа в книге является система, состоящая из нескольких компонент (элементов, подсистем). Состояние каждой компоненты может изменяться лишь в дискретные моменты времени по некоторому функциональному закону, учитывающему состояния остальных компонент системы в данный момент. Если все компоненты системы изменяют свои состояния одновременно, то система называется *синхронизованной*. Однако различные причины могут привести к тому, что некоторые компоненты будут изменять свое состояние неодновременно с другими. Такие системы называются *рассинхронизованными*.

Как оказывается, переход от состояния «синхронизованности» к состоянию «рассинхронизованности» и наоборот может привести к качественным изменениям динамики системы. Многие вопросы, на которые в случае синхронизованных систем ответы очевидны или могут быть получены сравнительно легко, в случае рассинхронизованных систем становятся весьма трудными и для своего решения требуют развития новых математических подходов.

В настоящее время теория рассинхронизованных систем ни в коей мере не может считаться завершенной и даже сформировавшейся. Скорее можно говорить о ее становлении. Поэтому авторы не претендуют на полноту охвата проблематики, связанной с анализом рассинхронизованных систем. Представленные в книге результаты в значительной степени отражают круг интересов авторов. Заинтересовавшемуся читателю можно порекомендовать близкие по тематике монографии [Белецкий, 1988; Нестеренко, Марчук, 1989; Bertsekas, Tsitsiklis, 1988].

В книге приводится много примеров. Некоторые из них могут показаться читателю совсем очевидными, другие же требуют определенных усилий для понимания. Мы стремились сделать изложение независимым от внешних источников информации. Поэтому, как правило, утверждения приводятся с полными доказательствами. Не доказываются лишь совсем очевидные факты и результаты, хорошо известные в теории устойчивости дифференциальных и разностных уравнений. Каждая глава завершается литературным обзором. Хотя для понимания излагаемого материала достаточно знания основ математического анализа и линейной алгебры, определенная математическая культура желательна.

Книга состоит из восьми глав. В первой вводятся основные определения рассинхронизации и рассинхронизованной системы. Приводятся необходимые факты теории устойчивости разностных уравнений. Динамика рассинхронизованных систем описывается как с помощью импульсных уравнений в непрерывном времени, так и с помощью разностных уравнений. Необходимость такой двойственности вызвана тем, что физически содержательные формулировки и интерпретацию получаемых результатов легче давать в терминах импульсных уравнений. Для математических же конструкций более пригодны разностные уравнения. Мы ограничиваемся не самым общим из существующих понятием рассинхронизации — это сделано для того, чтобы не отвлекаясь на многочисленные второстепенные детали, все же быть в состоянии изучить принципиальные свойства рассинхронизованных систем. Краткий обзор некоторых обобщений понятия рассинхронизованной системы приводится в конце главы.

Во второй главе изучается устойчивость рассинхронизованных систем. Основное внимание уделяется системам с фазочастотной рассинхронизацией, — т.е. случаю, когда различные компоненты системы изменяют свое состояние периодически (возможно, с различными периодами). Когда периоды изменения компонент одинаковы (фазовая рассинхронизация), анализ устойчивости линейной системы удается провести полностью. При общей же фазочастотной рассинхронизации возникают значительные математические трудности. Преодолеть их к настоящему времени удалось лишь в случае двухкомпонентных систем, что потребовало разработки специального аппарата равномерно полных словарей, основанного на идеях символической динамики. Глава завершается серией примеров, демонстрирующих «экзотические» черты рассинхронизованных систем. Показывается, в частности, что сколь угодно малая в разумном понимании рассинхронизация изначально синхронизованной системы может превратить устойчивую систему в неустойчивую и наоборот.

Примеры, приведенные в конце второй главы, показывают, что выбор моментов изменения состояния компонент может оказать существенное влияние на устойчивость системы. Во многих прикладных задачах эти моменты могут быть известны неточно. Тогда, чтобы гарантировать устойчивость рассинхронизованной системы, ее приходится рассматривать в некотором классе рассинхронизаций — это приводит к центральному в третьей главе понятию абсолютной устойчивости рассинхронизованной системы в некотором классе рассинхронизаций. В главе устанавливается ряд критериев абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем. Один из них формулируется в удобной при теоретическом анализе форме принципа отсутствия ограниченных решений. Перенос понятия абсолютной асимптотической устойчивости на случай рассинхронизованных систем сопряжен с определенными трудностями, вызванными возможными различиями в «частотах срабатывания» различных компонент системы. Поэтому авторы сочли целесообразным ввести специальное понятие абсолютной r-асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем.

В четвертой главе развивается метод эквивалентных норм, родственный методу функций Ляпунова, но учитывающий специфику линейных рассинхронизованных систем. Метод эквивалентных норм позволяет установить некоторые простые, но достаточно эффективные необходимые условия абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем в распространенных классах рассинхронизаций. Значительное внимание уделяется формальному обоснованию интуитивного представления о том, что анализ устойчивости рассинхронизованных систем сложнее анализа устойчивости синхронизованных систем.

Аппарат анализа устойчивости рассинхронизованных систем, развитый в главах 3 и 4, дает возможность получить в пятой главе две группы эффективных признаков устойчивости линейных рассинхронизованных систем. Первая группа таких признаков относится к системам, матрицы которых имеют неотрицательные скалярные элементы или мажорируются такими матрицами. При анализе этой ситуации существенным оказывается факт наличия специального базиса в пространстве состояний рассинхронизованной системы, в определенном смысле согласованного со структурой рассинхронизации. Вторая группа признаков связана с анализом устойчивости в различных классах рассинхронизаций линейных систем с симметрическими матрицами. В конце главы проводится полный анализ абсолютной устойчивости в основных классах рассинхронизаций двухкомпонентных рассинхронизованных систем со скалярными компонентами.

В связи с теоремой об абсолютной r-асимптотической устойчивости в классе всех рассинхронизаций линейной системы с симметрической матрицей, доказанной в главе 5, возникает естественный вопрос: сохраняется ли свойство абсолютной r-асимптотической устойчивости при малом возмущении матрицы, делающем ее несимметрической? Аналогичный вопрос о корректности понятия абсолютной r-асимптотической устойчивости возникает и в общем случае: сохраняется ли свойство абсолютной r-асимптотической устойчивости при малом возмущении матрицы системы? Поставленный вопрос оказывается тесно связанным с вопросом об устойчивости рассинхронизованных систем по Перрону, рассматриваемым в шестой главе. Термин «абсолютная устойчивость по Перрону» избран нами для того, чтобы подчеркнуть отличие соответствующего свойства разностных уравнений, возникающих при описании рассинхронизованных систем, от близкого, но все же иного свойства устойчивости общих разностных уравнений при постоянно действующих возмущениях. Как оказывается, абсолютно устойчивые по Перрону рассинхронизованные системы обладают рядом сильных свойств: они абсолютно r-асимптотически устойчивы, любые их подсистемы также абсолютно r-асимптотически устойчивы, малая деформация их матриц не приводит к потере свойства абсолютной устойчивости по Перрону. Центральный результат шестой главы — теорема об эквивалентности (в ряде общих ситуаций) понятий абсолютной устойчивости по Перрону и абсолютной r-асимптотической устойчивости. Следствием этого утверждения является теорема о корректности понятия абсолютной r-асимптотической устойчивости по отношению к малым возмущениям матриц систем. В случае систем с симметрическими матрицами дается оценка величины возмущения, не приводящего к потере системой свойства абсолютной r-асимптотической устойчивости.

В седьмой главе мы вновь возвращаемся к вопросу об устойчивости систем, рассинхронизованных по фазе и частоте. Здесь основное внимание уделяется численным приемам анализа устойчивости. Излагается пригодный для анализа систем с произвольным числом компонент метод интервалов. Приводится пример применения этого метода. В случае двухкомпонентных линейных систем излагаются алгоритмы А.Ф. Клепцына, позволяющие существенно сократить объем вычислительной работы.

Восьмая глава посвящена анализу той ситуации, когда компоненты рассинхронизованной системы изменяют свои состояния в случайные моменты времени. Для анализа этой ситуации естественно привлечь вероятностные методы.

В книге применяется тройная нумерamия разделов, утверждений и примеров (например, п. 1.2.1, теорема 3.4.5), включающая номер главы, номер параграфа в главе и номер соответствующего раздела или утверждения в параграфе. В пределах одной главы применяется двойная нумерация формул, включающая номер параграфа и номер формулы в параграфе (например, (1.1)). При ссылке на формулы из других глав применяется тройная нумерация формул.

Работа авторов по исследованию явления рассинхронизации началась с обсуждения ряда вопросов, поставленых инженерами перед М.А. Красносельским и Н.А. Кузнецовым, которые и предложили первые математические модели. Позднее к анализу возникших задач были привлечены молодые математики А.Ф. Клепцын, В.С. Козякин и Е.А. Асарин. Основные результаты, связанные с анализом абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем, были получены В.С. Козякиным; трудности, возникающие при изучении систем со случайными моментами коррекции, преодолел Е.А. Асарин.

Ряд ярких результатов на начальном этапе наших исследований был получен А.Ф. Клепцыным. К сожалению, судьба почему-то наиболее жестока к молодым и талантливым — тяжелая болезнь оборвала жизнь Алексея Феликсовича Клепцына. Настоящую работу мы посвящаем его памяти.

Авторы

Глава 1

Рассинхронизованные системы

Пусть имеется система, состоящая из компонент (элементов, частей, подсистем), взаимодействующих друг с другом в определенные дискретные моменты времени — моменты коррекции (изменения) компонент. Если эти моменты для всех компонент совпадают, то описание динамики системы может быть проведено традиционным способом — с помощью разностных или импульсных уравнений. Более сложная ситуация возникает при неодновременном изменении компонент. В этом случае динамика системы также может быть описана разностными или импульсными уравнениями, — но на этот раз весьма специфического вида и с рядом непривычных свойств. Глава посвящена описанию динамики систем с несинхронно взаимодействующими компонентами.

§ 1.1. Разностные уравнения

Разностные уравнения возникают при исследовании самых разнообразных физических и механических процессов, процессов управления и обработки информации. Такие процессы протекают, как правило, в естественном непрерывном времени. Распространенным приемом их исследования является введение искусственного дискретного времени и переход к разностным уравнениям. Этот переход, конечно же, приводит к потере части информации. Но в то же время часто он существенно упрощает задачу и позволяет ее эффективно проанализировать. При этом знание «происхождения» разностного уравнения делает естественными те или иные постановки вопросов.

1.1.1. Под разностным уравнением понимается выражение

$$x(n+1) = f[n, x(n)]. \tag{1.1.1}$$

Здесь при каждом значении целочисленного аргумента n функция $f(n, x)$ определена по x в некоторой области координатного пространства $\mathbb{R}^N$, а $x(n)$ является вектором-столбцом соответствующей размерности.

1.1.2. Пример. Пусть $\varphi(t, x)$ — непрерывная при $t \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^N$ функция. Пусть заданы числа $\cdots < T^0 < T^1 < \cdots < T^k < \cdots$, причем $T^k \to \infty$. Рассмотрим три векторных уравнения:

$$\xi(T^{n+1}) = \varphi[T^n, \xi(T^n)], \qquad \xi(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T^n \le t < T^{n+1}, \tag{1.1.2}$$

$$\xi(T^{n+1}) = \varphi[T^n, \xi(T^n)], \qquad \xi(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T^n < t \le T^{n+1}, \tag{1.1.3}$$

$$\xi(T^n + 0) = \varphi[T^n, \xi(T^n - 0)], \qquad \xi(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T^n < t < T^{n+1}. \tag{1.1.4}$$

Все эти уравнения с непрерывным временем сводятся к одному и тому же разностному уравнению (1.1.1), если положить

$$x(n) = \xi(T^n - 0), \qquad f(n, x) = \varphi(T^n, x).$$

Три приведенных уравнения в равной степени используются для описания динамики так называемых *импульсных систем*. Разница между ними заключается лишь в способе задания решения $\xi(t)$ в моменты времени $t = T^n$ — моменты коррекции (переключения, срабатывания) рассматриваемых уравнений. При этом в описании уравнения (1.1.4) вообще не важно, какое значение принимает решение $\xi(t)$ в момент коррекции T^n. Однако ниже будет показано, что эти уравнения перестают быть равноценными, если интересоваться их поведением при определенного рода возмущениях.

1.1.3. Пример. Пусть $h > 0$. Рассмотрим уравнение с запаздыванием:

$$\xi(t) = \varphi[t, \xi(t - h)]. \tag{1.1.5}$$

Положив $x(n) = \xi(t_0 + nh - h)$ и $f(n, x) = \varphi(t_0 + nh, x)$, получим, что $x(n+1) = f[n, x(n)]$. Следовательно, выбирая различные значения t_0, можно сопоставить уравнению (1.1.5) бесконечное множество разностных уравнений (1.1.1).

Переход от уравнений с непрерывным временем к разностным уравнениям, как правило, неоднозначен. Поэтому однозначно восстановить по разностному уравнению порождающее его уравнение с непрерывным временем можно лишь в исключительных случаях и при дополнительной информации о структуре решений в непрерывном времени. Например, это возможно, если разностное уравнение автономно, т.е. $f(n, x)$ от n не зависит, и функция $\varphi(t, x)$ в уравнениях (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) или (1.1.5) также ищется в классе не зависящих от t функций.

Построение разностного уравнения (1.1.1) в рассмотренных примерах зависит от выбора моментов коррекции T^n. Поэтому даже автономной системе с непрерывным временем может быть сопоставлено неавтономное разностное уравнение. Выбор моментов коррекции делается исследователем; за счет разумного определения чисел T^n задача анализа системы может быть существенно упрощена. Наиболее часто в качестве моментов коррекции выбираются числа $T^n = nh + \tau$, где $h > 0$. Число h называют в этом случае *периодом коррекции*.

1.1.4. Оператор перехода. Обозначим через $F(n, k; x)$ решение уравнения (1.1.1), выделяемое условием $x(k) = x$. Это решение однозначно определено при $n \geq k$, причем $F(k, k; x) = x$. При фиксированных значениях n и k вектор-функция $F(n, k; x)$ определяет отображение (по x) некоторого подмножества пространства $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, которое называют *оператором перехода* уравнения (1.1.1) от состояния x в момент времени k к состоянию в момент времени n. Важную роль играет равенство (*полугрупповое свойство*):

$$F(m, k; x) = F[m, n; F(n, k; x)], \qquad k \leq n \leq m.$$

Оператор перехода в теории разностных уравнений играет роль, аналогичную роли оператора сдвига в теории дифференциальных уравнений. Однако оператор сдвига лишь в частных случаях может быть выписан в явном виде по правой части дифференциального уравнения, а оператор перехода имеет явный вид:

$$F(n, k; x) = f(n - 1, f(n - 2, \ldots f(k, x) \ldots)). \tag{1.1.6}$$

Если уравнение (1.1.1) автономно, то оператор (1.1.6) зависит лишь от разности $n - k$:

$$F(n, k; x) = H(n - k; x) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n-k \text{ раз}} x) \ldots)).$$

1.1.5. Важный класс составляют линейные разностные уравнения

$$x(n + 1) = A(n)x(n) + b(n). \tag{1.1.7}$$

Свойства неоднородного уравнения (1.1.7) тесно связаны со свойствами однородного уравнения

$$x(n + 1) = A(n)x(n). \tag{1.1.8}$$

Так как разность двух произвольных решений уравнения (1.1.7) является решением уравнения (1.1.8), то сумма решений уравнений (1.1.7) и (1.1.8) является решением уравнения (1.1.7). Поэтому каждое решение уравнения (1.1.7) можно представить в виде суммы произвольного заранее выделенного решения этого уравнения и соответствующего решения уравнения (1.1.8). В качестве такого выделенного решения неоднородного уравнения часто берут решение $x^*(n)$, удовлетворяющее при некотором значении k условию $x^*(k) = 0$.

Обозначим оператор перехода уравнения (1.1.7) через $F(n, k; x)$, а через $F_0(n, k; x)$ — оператор перехода однородного уравнения (1.1.8). Оба эти оператора определены по переменной x на всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Справедливо равенство

$$F(n, k; x) = F(n, k; 0) + F_0(n, k; x).$$

В силу (1.1.6) оператор $F_0(n, k; x)$ линеен по переменной x, т.е. $F_0(n, k; x) = F(n, k)x$, где $F(n, k)$ — матрица. Эта матрица, называемая *матрицей перехода* однородного разностного уравнения (1.1.8), обладает свойствами:

$$F(n, n) = I, \quad F(m, k) = F(m, n)F(n, k), \qquad k \le n \le m.$$

Явный вид матриц $F(n, k)$ следующий:

$$F(n, k) = A(n-1)A(n-2)\ldots A(k). \tag{1.1.9}$$

При $n > k$ решение $F(n, k; 0)$ уравнения (1.1.7) имеет вид:

$$F(n, k; 0) = \sum_{i=k+1}^{n} F(n, i)b(i-1).$$

Поэтому верна формула вариации произвольной постоянной

$$F(n, k; x) = F(n, k)x + \sum_{i=k+1}^{n} F(n, i)b(i-1)$$

для общего решения неоднородной системы (1.1.7).

Если матрицы $A(n)$ не зависят от переменной n, то уравнения (1.1.7) и (1.1.8) принимают вид

$$x(n+1) = Ax(n) + b(n), \tag{1.1.10}$$

$$x(n+1) = Ax(n). \tag{1.1.11}$$

В силу (1.1.9) матрица перехода автономного уравнения (1.1.11) выражается равенством $F(n, k) = A^{n-k}$; оператор перехода неоднородного уравнения (1.1.10) имеет вид

$$F(n, k; x) = A^{n-k}x + \sum_{i=k+1}^{n} A^{n-i}b(I-1).$$

§ 1.2. Устойчивость разностных уравнений

Пусть нулевая функция является решением уравнения (1.1.1), т.е.

$$F(n,0) = 0, \qquad -\infty < n < \infty.$$

1.2.1. Нулевое решение уравнения (1.1.1) называют *устойчивым* (при $n \geq n_0$), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что из $\|x(n_0)\| < \delta$ следуют неравенства $\|x(n)\| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Нулевое решение называют *асимптотически устойчивым* (при $n \geq n_0$), если оно устойчиво при $n \geq n_0$ и существуют такие $\delta_0 > 0$ и натуральное $N(\varepsilon)$, что из $\|x(n_0)\| < \delta_0$ следуют неравенства $\|x(n)\| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$. Нулевое решение называют *равномерно устойчивым*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что при любом целом k неравенство $\|x(k)\| < \delta$ влечет выполнение неравенств $\|x(n)\| < \varepsilon$ при $n \geq k$. Наконец, нулевое решение называют *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и существуют такие $\delta_0 > 0$ и натуральное $N(\varepsilon)$, что при любом целом k неравенство $\|x(k)\| < \delta_0$ влечет выполнение неравенств $\|x(n)\| < \varepsilon$ при $n \geq k + N(\varepsilon)$.

Существуют различные модификации понятия устойчивости решения разностного уравнения — они будут приводиться в дальнейшем по мере необходимости.

1.2.2. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения линейного разностного уравнения

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{1.2.1}$$

с матрицей $A = (a_{ij})$ из $N \times N$ вещественных или комплексных элементов a_{ij}. Комплексное число λ называется *собственным значением* матрицы A, если уравнение $(\lambda I - A)x = 0$, где I — единичная матрица, имеет по крайней мере одно ненулевое решение x. Множество всех собственных значений называют *спектром* матрицы A; обозначим его через $\sigma(A)$. Число λ является собственным значением матрицы A, если и только если оно является корнем характеристического полинома

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^N + p_1\lambda^{N-1} + \cdots + p_N.$$

Следовательно, матрица A имеет конечное число собственных значений. Максимальную из абсолютных величин собственных значений называют *спектральным радиусом* матрицы A; обозначим его символом $\rho(A)$.

Пусть λ — собственное значение матрицы A. Каждое ненулевое (комплексное) решение x уравнения $(\lambda I - A)x = 0$ называется *собственным вектором* матрицы A, отвечающим ее собственному значению λ. Линейное подпространство E_λ всех решений уравнения $(\lambda I - A)x = 0$ называют *собственным подпространством*, отвечающим λ. Комплексную размерность подпространства E_λ называют *порядком* собственного значения. Множество решений уравнений $(\lambda I - A)^n x = 0$ при всех натуральных n также является линейным подпространством; это подпространство K_λ называют *спектральным* (или *корневым*) *подпространством* матрицы A, отвечающим λ. Комплексную размерность подпространства K_λ называют *кратностью* собственного значения λ. Так как подпространство E_λ содержится в K_λ , то порядок собственного значения не превосходит его кратности. Если порядок и кратность совпадают, то собственное значение называется *полупростым*. Полупростое собственное значение кратности 1 называется *простым*. Собственное значение λ полупростое тогда и только тогда, когда каждое ненулевое решение x уравнения $(\lambda I - A)^2 x = 0$ является собственным вектором.

1.2.3. Теорема. *Если* $\rho(A) < \rho < 1$*, то для каждого решения* $x(n)$ *уравнения* (1.2.1) *при всех натуральных n справедлива оценка* $\|x(n)\| \le c\rho^n \|x(0)\|$*, где c — некоторая константа. Если* $\rho(A) = 1$ *и все равные по абсолютной величине* 1 *собственные значения матрицы A полупростые, то справедлива оценка* $\|x(n)\| \le c\|x(0)\|$*. Во всех остальных случаях найдется решение* $x(n)$ *уравнения* (1.2.1)*, норма которого неограниченно возрастает с ростом n:* $\|x(n)\| \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Сформулированная и хорошо известная теорема представляет полный анализ условий устойчивости нулевого решения уравнения (1.2.1). Эти условия выражены в терминах расположения собственных значений матрицы A в комплексной плоскости. Наиболее простой (или, по крайней мере, кажущийся таковым на первый взгляд) способ проверки этих условий заключается в нахождении корней характеристического полинома. Однако этот способ связан со значительными вычислительными трудностями. Поэтому используются достаточные признаки устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости, с некоторыми из них читатель познакомится в последующих главах. Здесь упомянем лишь критерии устойчивости уравнения (1.2.1), вытекающие из теоремы Рауса-Гурвица. Они не требуют вычисления корней характеристического полинома, а заключаются в проверке некоторых алгебраических соотношений, непосредственно выписываемых по коэффициентам характеристического полинома.

Пусть $q(\lambda)$ — полином с вещественными коэффициентами

$$q(\lambda) = q_0\lambda^N + q_1\lambda^{N-1} + \cdots + q_N.$$

Ниже удобно полагать коэффициенты q_i определенными при всех натуральных i; будем считать $q_i = 0$ при $i \geq N + 1$. *Матрицей Гурвица* порядка i называют матрицу

$$\left\| \begin{matrix} q_1 & q_3 & q_5 & q_7 & \dots \\ q_0 & q_2 & q_4 & q_6 & \dots \\ 0 & q_1 & q_3 & q_5 & \dots \\ 0 & q_0 & q_2 & q_4 & \dots \\ . & . & . & . & . \ . \ . \ . \ . \ . \end{matrix} \right\|. \tag{1.2.2}$$

Определитель матрицы (1.2.2) обозначим через Δ_i.

1.2.4. Теорема (Рауса-Гурвица)**.** *Пусть $q_0 > 0$ и $\Delta_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Корни полинома $q(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части, если и только если выполняются неравенства: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_N > 0$.*

Условия, накладываемые на определители Δ_i, не являются независимыми. Поэтому часто полезно использовать теорему Льенара-Шипара.

1.2.5. Теорема (Льенара-Шипара)**.** *Пусть $q_0 > 0$ и $\Delta_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Корни полинома $q(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части, если и только если выполняется произвольный из следующих наборов неравенств:*

а) $q_N > 0, q_{N-2} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots;$

б) $q_N > 0, q_{N-2} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots;$

в) $q_N > 0, q_{N-1} > 0, q_{N-3} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots;$

г) $q_N > 0, q_{N-1} > 0, q_{N-3} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots\ .$

Основная трудность в проверке условий теоремы Рауса-Гурвица заключается в вычислении определителей Δ_i. Теорема Льенара-Шипара позволяет уменьшить (в два раза) количество таких вычислений.

Отображение $\lambda \to z = (1+\lambda)/(1-\lambda)$ переводит множество комплексных чисел с отрицательной вещественной частью на внутренность единичного круга в комплексной плоскости. Это простое соображение позволяет воспользоваться одним из приведенных выше критериев для анализа устойчивости линейного разностного уравнения (1.2.1). Действительно, пусть $p(\lambda)$ — характеристический полином матрицы A. Тогда функция

$$q(\lambda) = (1-\lambda)^N p\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \tag{1.2.3}$$

также является полиномом. При этом все корни полинома $q(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, если и только если все корни полинома $p(\lambda)$ по абсолютной величине меньше 1. Следовательно, построив по $p(\lambda)$ полином (1.2.3), с помощью критерия Рауса-Гурвица или критерия Льенара-Шипара можно решить вопрос о расположении корней характеристического полинома матрицы A, а тем самым в силу теоремы 1.2.3 — и вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1.2.1).

1.2.6. Пример. а. Рассмотрим квадратный многочлен $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$. Если $|p_2| < 1$, $1 + p_2 > |p_1|$, то все корни многочлена $p(\lambda)$ лежат в круге $|\lambda| < 1$. Если $|p_2| > 1$ или $1 + p_2 < |p_1|$, то по крайней мере один корень многочлена $p(\lambda)$ лежит вне круга $|\lambda| < 1$. Остальные случаи требуют дополнительного анализа.

б. Рассмотрим кубический многочлен $p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$. Положим

$$q_0 = 1 - p_1 + p_2 - p_3, \qquad q_1 = 3 - p_1 - p_2 + 3p_3,$$
$$q_2 = 3 + p_1 - p_2 - 3p_3, \qquad q_3 = 1 + p_1 + p_2 + p_3.$$

Если $q_0 > 0$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_2q_1 - q_0q_3 > 0$, то все корни многочлена $p(\lambda)$ лежат в круге $|\lambda| < 1$. Если выполнено хотя бы одно из неравенств $q_0 < 0$, $q_1 < 0$, $q_2 < 0$ или $q_2q_1 - q_0q_3 < 0$, то по крайней мере один корень многочлена $p(\lambda)$ лежит вне круга $|\lambda| < 1$. Остальные случаи требуют дополнительного анализа.

Утверждения этого примера следуют из теоремы Рауса-Гурвица, примененной к многочлену (1.2.3) при $N = 2, 3$. Существенно сложнее вопрос об устойчивости нулевого решения неавтономного линейного разностного уравнения

$$x(n+1) = A(n)x(n). \tag{1.2.4}$$

Ограничимся некоторыми качественными результатами.

Нулевое решение уравнения (1.2.4) называют *экспоненциально устойчивым*, если найдутся такие числа $c \in (0, \infty)$ и $q \in (0, 1)$, что $\|x(n)\| \le cq^{n-k}\|x(k)\|$ при $0 \le k \le n$.

1.2.7. Теорема. *Нулевое решение разностного уравнения* (1.2.4) *равномерно асимптотически устойчиво, если и только если оно экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Покажем, как из равномерной асимптотической устойчивости следует экспоненциальная устойчивость. Зафиксируем некоторое положительное $\varepsilon < 1$ и выберем такое N, чтобы из неравенств $\|x(k)\| < \delta_0$, $n \geq k + N$ следовало неравенство $\|x(n)\| < \varepsilon\delta_0$ (это можно сделать в силу равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения). Но тогда для матрицы перехода $F(n, k)$ уравнения (1.2.4) при $n \geq k + N$, $\|x\| < \delta_0$ справедливы неравенства $\|F(n, k)x\| < \varepsilon\delta_0$. Следовательно,

$$\|F(n, k)\| < \varepsilon\delta_0 \quad \text{при} \quad n \geq k + N. \tag{1.2.5}$$

Положим

$$q = \varepsilon^{1/N}, \qquad c = \sup_{0\leq n-k\leq N-1} \frac{1}{\varepsilon}\|F(n, k)\|.$$

Пусть теперь n — произвольное натуральное число, превосходящее k. Обозначим через r целую часть числа $(n-k)/N$ и положим $n_i = k+iN$ при $i = 0$, $1, \ldots, r$. Тогда $n_0 = k$ и

$$F(n, k) = F(n, n_r)F(n, n_{r-1}) \cdots F(n_1, k),$$

откуда $\|F(n, k)\| \leq \|F(n, n_r)\| \cdot \|F(n, n_{r-1})\| \cdots \|F(n_1, k)\|$. Поскольку $n_i - n_{i-1} = N$, то в силу (1.2.5) и определения числа c имеет место оценка: $\|F(n, k)\| \leq (\varepsilon c)\varepsilon^r = c\varepsilon^{r+1}$. Но $\varepsilon^{r+1} = q^{N(r+1)} \leq q^{n-k}$. Следовательно, $\|F(n, k)\| \leq cq^{n-k}$ и далее $\|x(n)\| \leq cq^{n-k}\|x(k)\|$. Теорема 1.2.7 доказана. □

В случае разностных уравнений с периодической последовательностью матриц $A(n)$ верно условие устойчивости, аналогичное теореме 1.2.3.

1.2.8. Теорема. *Пусть матрицы $A(n)$ в уравнении* (1.2.4) *периодичны с некоторым периодом p, т.е. $A(n + p) = A(n)$ при $-\infty < n < \infty$. Положим $C = A(p - 1)A(p - 2) \cdots A(0)$. Если $\rho(C) < \rho < 1$, то для каждого решения $x(n)$ уравнения* (1.2.4) *при всех натуральных n имеет место оценка $\|x(n)\| \leq c\rho^n\|x(0)\|$, где c — некоторая константа. Если $\rho(C) = 1$ и все равные по абсолютной величине* 1 *собственные значения матрицы C полупростые, то имеет место оценка $\|x(n)\| \leq c\|x(0)\|$. Во всех остальных случаях найдется решение $x(n)$ уравнения* (1.2.4)*, норма которого неограниченно возрастает с ростом n.*

Говорят, что уравнение (1.2.4) обладает *свойством Перрона*, если при любой ограниченной последовательности $\{b(n)\}$ решение $x(n)$ неоднородного разностного уравнения

$$x(n + 1) = A(n)x(n) + b(n), \tag{1.2.6}$$

удовлетворяющее нулевому начальному условию $x(0) = 0$, ограничено.

1.2.9. Теорема. *Нулевое решение уравнения* (1.2.4) *равномерно асимптотически устойчиво, если и только если уравнение* (1.2.4) *обладает свойством Перрона.*

Вопрос об устойчивости произвольного решения $x^*(n)$ неоднородного линейного уравнения (1.2.6) с помощью замены переменных $y(n) = x(n) - x^*(n)$ сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения однородного уравнения $y(n + 1) = A(n)y(n)$. Поэтому либо все решения неоднородного уравнения одновременно устойчивы, либо все неустойчивы.

Упомянем, наконец, некоторые приемы исследования устойчивости нелинейных разностных уравнений. Рассмотрим сначала автономное уравнение

$$x(n + 1) = f[x(n)], \qquad f(0) = 0, \tag{1.2.7}$$

1.2.10. Теорема. *Нулевое решение уравнения* (1.2.7) *равномерно устойчиво, если и только если существует функция $V(x)$, обладающая свойствами:*

а) $h(\|x\|) \le V(x) \le H(\|x\|)$, где $h(t)$ и $H(t)$ непрерывны и строго возрастают, $h(0) = H(0) = 0$;

б) $V[x(n)] \ge V[x(n + 1)]$ для любого решения $x(n)$ уравнения (1.2.7).

1.2.11. Теорема. *Пусть $\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|$ при малых x и y. Нулевое решение уравнения* (1.2.7) *равномерно асимптотически устойчиво, если и только если существует функция $V(x)$, обладающая свойствами:*

а) $h(\|x\|) \le V(x) \le H(\|x\|)$;

б) $\|V(x) - V(y)\| \le M\|x - y\|$;

в) $V[x(n + 1)] - V[x(n)] \le -g[\|x(n + 1)\|]$,

где $h(t), H(t)$ и $g(t)$ строго возрастают, $h(0) = H(0) = g(0) = 0$, причем $h(t)$ и $H(t)$ непрерывны; $x(n)$ — произвольное решение уравнения (1.2.7).

Функцию $V(x)$, участвующую в условиях теорем 1.2.10 и 1.2.11, называют *функцией Ляпунова*. Аналогичные упомянутым теоремам критерии устойчивости имеют место и для неавтономных разностных уравнений

$$x(n + 1) = f[n, x(n)], \quad f(n, 0) = 0, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{1.2.8}$$

1.2.12. Теорема. *Нулевое решение уравнения* (1.2.8) *равномерно устойчиво, если и только если существует функция $V(n, x)$, обладающая свойствами:*

а) $h(\|x\|) \le V(n,x) \le H(\|x\|)$, *где* $h(t)$ *и* $H(t)$ *непрерывны и строго возрастают,* $h(0) = H(0) = 0$*;*

б) $V[n, x(n)] \ge V[n+1, x(n+1)]$ *для любого решения* $x(n)$ *уравнения* (1.2.8).

1.2.13. Теорема. *Пусть* $\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|$ *при малых* x *и* y*. Тогда нулевое решение уравнения* (1.2.8) *равномерно асимптотически устойчиво, если и только если существует функция* $V(n,x)$*, обладающая свойствами:*

а) $h(\|x\|) \le V(n,x) \le H(\|x\|)$*;*

б) $\|V(n,x) - V(n,y)\| \le M\|x - y\|$*;*

в) $V[n+1, x(n+1)] - V[n, x(n)] \le -g[\|x(n+1)\|]$,

где $h(t), H(t)$ *и* $g(t)$ *строго возрастают,* $h(0) = H(0) = g(0) = 0$*, причем* $h(t)$ *и* $H(t)$ *непрерывны;* $x(n)$ *— произвольное решение уравнения* (1.2.8).

Важную роль при исследовании устойчивости нелинейных разностных уравнений играют признаки устойчивости по первому приближению. Эти признаки не требуют построения функции Ляпунова. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f[n, x(n)], \tag{1.2.9}$$

где $f(n, 0) = 0, \|f(n,x)\| \le \gamma\|x\|$ при $-\infty < n < \infty$.

1.2.14. Теорема. *Пусть число* γ *достаточно мало. Если уравнение первого приближения* $y(n+1) = A(n)x(n)$ *равномерно асимптотически устойчиво, то нулевое решение уравнения* (1.2.9) *также равномерно асимптотически устойчиво (причем экспоненциально).*

1.2.15. Теорема. *Пусть число* γ *достаточно мало, а матрицы* $A(n)$ *в уравнении* (1.2.9) *от* n *не зависят:* $A(n) = A$*. Если* $\rho(A) < 1$*, то нулевое решение уравнения* (1.2.9) *равномерно асимптотически устойчиво. Если* $\rho(A) > 1$*, то нулевое решение неустойчиво.*

Пограничный случай $\rho(A) = 1$ в теореме 1.2.15 требует дополнительного анализа.

§ 1.3. Системы импульсных уравнений и их рассинхронизация

В параграфе рассматриваются системы импульсных уравнений. При их изучении обычно считают, что все компоненты подвергаются коррекции одновременно или, как говорят, — синхронно. Обсудим некоторые эффекты, возникающие в результате отказа от синхронности.

1.3.1. Пусть $\varphi_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$, где $i = 1, 2, \ldots, N$ — функции, определенные и непрерывные при всех вещественных значениях аргументов. Пусть $\cdots T^0 < T^1 < \cdots < T^n < \cdots$ — числовая последовательность, определенная при всех целых значениях n и обладающая свойствами:

$$\lim_{n\to-\infty} T^n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} T^n = +\infty.$$

Выражения

$$\xi_i(T^n + 0) = \varphi_i[T^n, \xi_1(T^n - 0), \ldots, \xi_N(T^n - 0)], \tag{1.3.1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$ назовем системой *импульсных уравнений* (с непрерывным временем). Решением системы (1.3.1) будем считать вектор-функцию $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_N(t)\}$, постоянную на каждом интервале (T^n, T^{n+1}) и удовлетворяющую равенствам (1.3.1). Символы $T^n - 0$ и $T^n + 0$ в (1.3.1) обозначают пределы слева и справа соответствующих функций. Поскольку искомые функции $\xi_i(t)$ предполагаются кусочно-постоянными, а функции $\varphi_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ непрерывны, то все величины, стоящие в левой и правой частях равенств (1.3.1), определены и не зависят от способа перехода к соответствующим пределам. Следовательно, определение уравнения (1.3.1) корректно.

Поскольку решение $\xi(t)$ системы (1.3.1) может менять значения только при $t = T^n$, то числа (моменты времени) T^n будем называть *моментами коррекции* (*переключения*, *срабатывания*) импульсной системы (1.3.1)

Структура функций $\varphi_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ может быть такова (например, $\varphi_i = \mathrm{const}$), что в некоторые моменты коррекции решение $\xi(t)$ изменяться не будет. Тем не менее соответствующий момент $t = T^n$ все равно целесообразно рассматривать как момент коррекции поскольку всегда существует импульсная система со сколь угодно близкими к φ_i правыми частями, решения которой в момент $t = T^n$ меняются.

1.3.2. Рассинхронизация. Приведем шутливую интерпретацию системы (1.3.1). Представим, что собралась компания из N учеников (ленивых, но гениальных) некоторой школы, решающих задачи по математике. На протяжении некоторого промежутка времени $T^{n-1} < t < T^n$ эти ученики предаются лени, отдыхая от решения предыдущих задач. Но затем в момент времени $t = T^n$ под воздействием некоторой побудительной силы (например, в виде учителя) ученики одновременно осознают необходимость решения очередной задачи. Наши лентяи достаточно дисциплинированы и немедленно принимаются за решение каждый своей задачи $\varphi_i(T^n)$. Ознакомившись с решениями $\xi_1(T^n - 0)$, $\xi_2(T^n - 0)$, …, $\xi_N(T^n - 0)$ тех задач, которые были ими решены к моменту времени T^n, в силу своей гениальности мгновенно, т.е. к моменту $T^n + 0$, каждый из них решил свою задачу:

$$\xi_i(T^n + 0) = \varphi_i[T^n, \xi_1(T^n - 0), \ldots, \xi_N(T^n - 0)],$$

и затем снова забыл о всяких задачах до следующего появления учителя — момента времени $t = T^{n+1}$.

Сделаем теперь вполне правдоподобное в описываемой ситуации допущение, что с течением времени наши ленивые гении стали еще и недисциплинированными. Это привело к тому, что часть из них решает задачи в своем собственном темпе, не обращая внимания на то, чем в этот момент времени заняты другие. Некоторые же из них решают задачи хотя и в близкие к T^n моменты времени, но с некоторыми задержками или опережениями. В результате теперь i-й ученик решает задачи в моменты времени $\{T_i^n\}$, которые могут не совпадать с моментами $\{T_j^n\}$ при $i \neq j$ (см. рис. 1.1). Тогда процесс решения задач i-м учеником будет описываться уравнением

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n - 0), \ldots, \xi_N(T_i^n - 0)]. \tag{1.3.2}$$

Жизненный опыт подсказывает, что динамика системы «ленивые гении» может существенно измениться при переходе от состояния дисциплинированности к состоянию недисциплинированности. Дадим формальное описание динамики системы «ленивые гении».

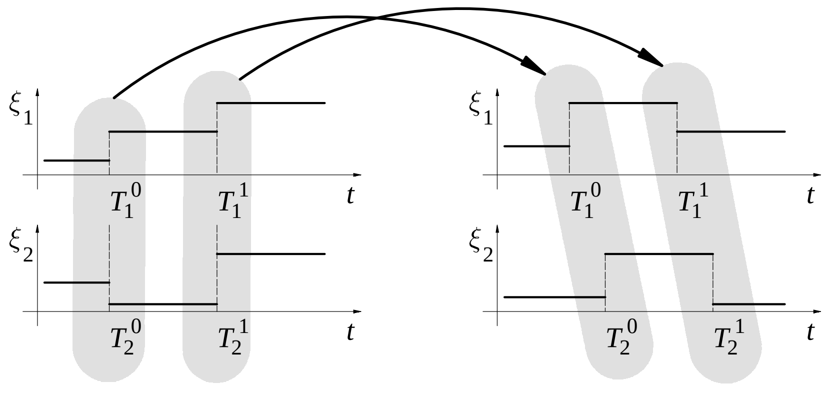

Рис. 1.1. Пример рассинхронизации моментов изменения компонент

Пусть имеется некоторая система W (см. рис. 1.2), состоящая из подсистем $W_1, W_2, \ldots, W_N$, которые в процессе своего функционирования могут обмениваться информацией друг с другом и на которые оказывает воздействие некая «внешняя среда». Будем считать, что состояние подсистемы W_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, — это вектор ξ_i из некоторого конечномерного пространства $\mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \geq 1$. В наиболее простых случаях вектор ξ_i может быть одномерным, т.е. скаляром.

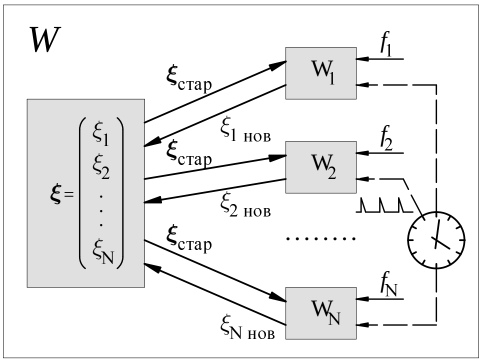

Рис. 1.2. Пример синхронизованной системы

Основное предположение о характере функционирования системы W заключается в следующем. Пусть состояние каждой подсистемы W_i может изменяться лишь в некоторые дискретные моменты времени $\cdots < T_i^0 < T_i^1 < \cdots < T_i^n < \ldots$, оставаясь неизменным на интервалах времени $T_i^n < t < T_i^{n+1}$. Пусть, кроме того, изменение состояния подсистемы W_i в моменты времени $T \in \{T_i^n\}$ описывается некоторой функциональной зависимостью

$$\xi_{i\,\text{нов}} = \varphi_i(T, \xi_{1\,\text{стар}}, \xi_{2\,\text{стар}}, \ldots, \xi_{N\,\text{стар}}),$$

где $\xi_{i\,\text{нов}}$ — состояние подсистемы W_i в моменты времени, непосредственно следующие за моментом T коррекции этой подсистемы. А $\xi_{1\,\text{стар}}, \xi_{2\,\text{стар}}, \ldots, \xi_{N\,\text{стар}}$ — состояния подсистем системы W в моменты времени, непосредственно предшествующие моменту коррекции T подсистемы W_i.

Если все подсистемы системы W изменяют свои состояния в одни и те же моменты времени, т.е. синхронно, как на рис. 1.2, то эту систему называют *синхронной* или *синхронизованной*. Если некоторые подсистемы системы W изменяют свои состояния неодновременно, то систему W называют *асинхронной* или *рассинхронизованной*.

На рис. 1.3 приведен пример рассинхронизованной системы, компоненты которой изменяют свои состояния с одинаковой частотой, но с некоторыми фазовыми запаздываниями друг относительно друга. На рис. 1.4 приведен пример рассинхронизованной системы, компоненты которой изменяют свои состояния с разными частотами.

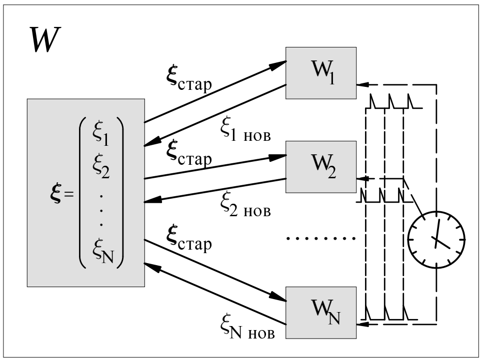

Рис. 1.3. Пример системы, рассинхронизованной по фазе

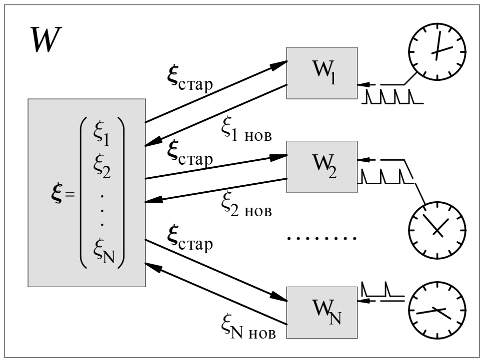

Рис. 1.4. Пример системы, рассинхронизованной по частоте

Вводя при $i = 1, 2, \ldots, N$ переменные по времени состояния $\xi_i(t)$ подсистем системы W, нетрудно убедиться, что они удовлетворяют уравнениям (1.3.2).

Данное выше определение рассинхронизованной системы не самое общее; оно дано в объеме, который позволит сравнительно просто провести достаточно полный математический анализ устойчивости рассинхронизованных систем.

1.3.3. Рассинхронизованные системы уравнений. Пусть $\{T_i^n\}$, где $i = 1$, $2, \ldots, N$, — возрастающие числовые последовательности, определенные при всех целых значениях n и обладающие свойствами:

$$\lim_{n\to-\infty} T_i^n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} T_i^n = +\infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Совокупность выражений (1.3.2), где $i = 1, 2, \ldots, N$, будем называть *рассинхронизованной системой импульсных уравнений*. Под решением системы уравнений (1.3.2) будем понимать вектор-функцию

$$\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_N(t)\},$$

i-я компонента которой удовлетворяет уравнению (1.3.2) и постоянна на любом интервале (T_i^n, T_i^{n+1}).

Если $T_1^n = T_2^n = \cdots = T_N^n$ при каждом значении n, то уравнения (1.3.1) и (1.3.2) совпадают. В этой особой ситуации будем говорить, что (1.3.1) — это *синхронизованная система* импульсных уравнений. В общем случае можно считать, что система (1.3.2) получается рассинхронизацией изначально синхронизованной системы (1.3.1).

§ 1.4. Эквивалентное разностное уравнение

В ряде случаев удобным способом анализа свойств рассинхронизованных систем импульсных уравнений является переход к специальным образом построенным разностным уравнениям. В настоящем параграфе описывается одна из возможных конструкций построения таких уравнений.

1.4.1. Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество моментов коррекции всех компонент рассинхронизованной системы (1.3.2). Поскольку

$$\mathfrak{T} = \{T_i^n : \ i = 1, 2, \ldots, N, \ -\infty < n < \infty\},$$

а последовательности $\{T_i^n\}$ не имеют конечных предельных точек, то и множество $\mathfrak{T}$ также не имеет конечных предельных точек. Поэтому $\mathfrak{T}$ можно представить как множество элементов некоторой возрастающей последовательности $\{T^n\}$, где $-\infty < n < \infty$:

$$\mathfrak{T} = \{T^n\}, \qquad \cdots < T^0 < T^1 < \cdots < T^n < \cdots .$$

Числа T^n будем называть *моментами коррекции* рассинхронизованной системы (1.3.2). Выбор последовательности $\{T^n\}$ неоднозначен; однозначно определить ее можно, если, например, потребовать выполнения условия: $T^{-1} < 0 \le T^0$.

Типом $\omega(T^n)$ момента коррекции T^n назовем множество всех индексов компонент системы (1.3.2), подвергающихся коррекции в момент $t = T^n$. По определению при каждом $t = T^n$ подвергается коррекции не менее одной и не более N компонент системы (1.3.2). Поэтому при каждом значении n множество $\omega(T^n)$ непусто и содержит не более N элементов. *Кратностью* $\vartheta(T^n)$ *момента коррекции* T^n назовем число элементов множества $\omega(T^n)$, т.е. число компонент системы (1.3.2), одновременно подвергающихся коррекции в момент T^n. Система (1.3.2) синхронизована, если $\vartheta(T^n) = N$ при $-\infty < n < \infty$.

Сопоставим каждому целому числу n вектор-функцию (со значениями в $\mathbb{R}^N$), определяемую равенствами:

$$f_i(n, x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \varphi_i(T^n, x_1, \dots, x_N) & \text{при} \quad i \in \omega(T^n), \\ x_i & \text{при} \quad i \notin \omega(T^n). \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Компоненты $f_i(n, x_1, \dots, x_N)$ вектор-функции $f(n, x) = f(n, x_1, \dots, x_N)$, индексы которых принадлежат множеству $\omega(T^n)$, совпадают с соответствующими компонентами $\varphi_i(T^n, x_1, \dots, x_N)$ вектор-функции

$$\varphi(T^n, x) = \varphi(T^n, x_1, \dots, x_N).$$

Остальные компоненты вектор-функции $f(n, x)$ совпадают с соответствующими компонентами тождественного отображения. Поэтому $f(n, x)$ будем называть $\omega(T^n)$-*помесью* функции $\varphi(T^n, x)$ (и тождественного отображения).

Аналогично вводится понятие ω-помеси произвольного отображения

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \{\varphi_1(x_1, \dots, x_N), \dots, \varphi_N(x_1, \dots, x_N)\}.$$

Если ω — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \dots, N\}$, то ω-*помесью* отображения φ (и тождественного отображения) назовем отображение

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \{\psi_1(x_1, \dots, x_N), \dots, \psi_N(x_1, \dots, x_N)\},$$

компоненты которого определяются равенствами:

$$\psi_i(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \varphi_i(x_1, \dots, x_N) & \text{при} \quad i \in \omega, \\ x_i & \text{при} \quad i \notin \omega. \end{cases}$$

1.4.2. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = f[n, x(n)] \tag{1.4.2}$$

с правой частью (1.4.1). Поставим в соответствие решению $x(n)$ этого уравнения, определенному при $m \le n \le r$, функцию

$$\xi^*(t) = x(n), \qquad T^{n-1} < t \le T^n, \; n = m, \dots, r, \tag{1.4.3}$$

определенную на полуоткрытом интервале $(T^{m-1}, T^r]$.

Пусть теперь $\xi(t)$ — некоторое решение рассинхронизованной системы (1.3.2), определенное при $T^{m-1} < t < T^r$. Поставим ему в соответствие функцию целочисленного аргумента

$$x^*(n) = \xi(T^n - 0), \qquad m \le n \le r. \tag{1.4.4}$$

1.4.3. Теорема. *Если $\xi(t)$ является решением рассинхронизованной системы* (1.3.2)*, то $x^*(n)$ удовлетворяет разностному уравнению* (1.4.2)*. Если $x(n)$ является решением разностного уравнения* (1.4.2)*, то функция $\xi^*(t)$ является решением рассинхронизованной системы* (1.3.2).

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ — решение рассинхронизованной системы (1.3.2), а $x^*(n)$ — функция, определяемая равенствами (1.4.4). Зафиксируем $n \in [m, r]$. Пусть $i \in \omega(T^n)$. Тогда

$$\xi_i(T^n + 0) = \varphi_i[T^n, \xi_1(T^n - 0), \dots, \xi_N(T^n - 0)] = \\ = \varphi_i[T^n, x_1^*(n), \dots, x_N^*(n)] = f_i[n, x_1^*(n), \dots, x_N^*(n)].$$

Так как на интервале $(T^n, T^{n+1}]$ нет моментов коррекции рассинхронизованной системы (1.3.2), то на нем функция $\xi_i(t)$ постоянна. Следовательно, $\xi_i(T^n + 0) = \xi_i(T^{n+1} - 0) = x_i^*(n + 1)$, откуда

$$x_i^*(n + 1) = f_i[n, x_1^*(n), \dots, x_N^*(n)], \qquad i \in \omega(T^n).$$

Пусть теперь $i \notin \omega(T^n)$. Тогда i-я компонента решения $\xi(t)$ в окрестности момента $t = T^n$ не изменяется. Значит, $x_i^*(n) = \xi_i(T^n - 0) = \xi_i(T^n + 0) = \xi_i(T^{n+1} - 0) = x_i^*(n + 1)$ и поэтому

$$x_i^*(n + 1) = x_i^*(n), \qquad i \notin \omega(T^n).$$

Следовательно, по определению (1.4.1) функции $f(n, x)$, функция $x^*(n)$ является решением разностного уравнения (1.4.2).

Пусть теперь $x(n)$ — решение разностного уравнения (1.4.2), а $\xi^*(t)$ — функция, определяемая равенствами (1.4.3). Тогда

$$\xi^*(T^n + 0) = x(n + 1) = f[n, x_1(n), \dots, x_N(n)] = \\ = \varphi[T^n, \xi_1^*(T^n - 0), \dots, \xi_N^*(T^n - 0)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\xi_i^*(T^n + 0) = \varphi_i[T^n, \xi_1(T^n - 0), \dots, \xi_N(T^n - 0)] \qquad &&\text{при} \quad i \in \omega(T^n), \\ &\xi_i^*(T^n + 0) = \xi_i^*(T^n - 0) &&\text{при} \quad i \notin \omega(T^n). \end{aligned}$$

Первое из этих равенств показывает, что при каждом $i = 1, 2, \dots, N$ функция $\xi_i^*(t)$ удовлетворяет уравнениям (1.3.2). А так как в силу (1.4.3)

$\xi^*(T^n) = \xi^*(T^n - 0)$, то вследствие второго равенства функция $\xi_i^*(t)$ не меняет значения на любом интервале, не содержащем моментов коррекции i-ой компоненты. Следовательно, функция $\xi^*(t)$ является решением рассинхронизованной системы (1.3.2). Теорема доказана. □

Приведенная теорема устанавливает связь между решениями рассинхронизованной системы (1.3.2) и построенного по ней разностного уравнения (1.4.2). В связи с этим уравнение (1.4.2) будет в дальнейшем называться *эквивалентным* (векторным) разностным уравнением рассинхронизованной системы (1.3.2).

1.4.4. Пример. Рассмотрим систему двух скалярных импульсных уравнений

$$\xi_1(T_1^n + 0) = -\xi_1(T_1^n - 0), \qquad \xi_2(T_2^n + 0) = \xi_1(T_2^n - 0).$$

Если $T_1^n = T_2^n = n$ (рассматриваемая система уравнений синхронизована), то эквивалентные разностные уравнения имеют вид

$$x_1(n+1) = -x_1(n), \qquad x_2(n+1) = x_1(n)$$

и компоненты решения $\xi(t)$ имеют вид типа, показанного на рис. 1.5а.

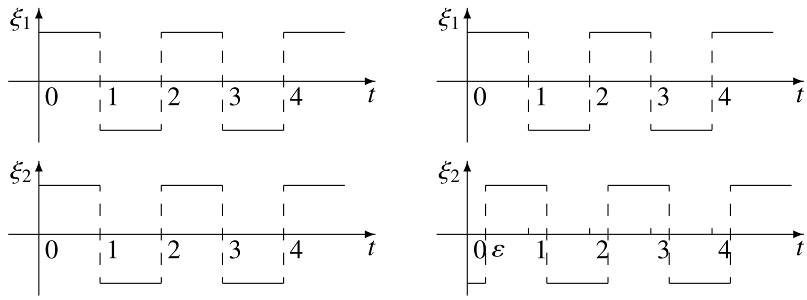

Рис. 1.5. Пример изменения решений системы в результате рассинхронизации

Пусть теперь $T_1^n = n$, $T_2^n = n + \varepsilon$, где ε — малое число. Тогда рассматриваемая система рассинхронизована с моментами коррекции $T^{2n} = n$, $T^{2n+1} = n + \varepsilon$. Соответствующие разностные уравнения при четных значениях n имеют вид

$$x_1(n+1) = -x_1(n), \qquad x_2(n+1) = x_2(n),$$

а при нечетных значениях n

$$x_1(n+1) = x_1(n), \qquad x_2(n+1) = x_1(n).$$

Соответствующие компоненты решения $\xi(t)$ изображены на рис. 1.5б.

Обратим внимание на резкие изменения второй компоненты решения $\xi(t)$ при рассинхронизации исходной системы.

Правая часть разностного уравнения (1.4.2) по построению определена при каждом целом значении n и всех значениях переменной x. Поэтому (см. § 1.1) при каждых $n \geq m$ решение уравнения (1.4.2), удовлетворяющее условию $x(m) = x$, определяется равенством

$$x(n) = F(n, m; x), \tag{1.4.5}$$

где $F(n, m; x)$ — оператор перехода уравнения (1.4.2), причем

$$F(n, m; x) = f(n - 1, f(n - 2, \dots f(m, x) \dots)).$$

§ 1.5. Начальная задача и оператор сдвига

Аналогом оператора перехода для разностного уравнения в случае систем с непрерывным временем является так называемый оператор сдвига. В параграфе вводится понятие оператора сдвига для рассинхронизованных систем импульсных уравнений и выясняются его простейшие свойства.

1.5.1. Зададимся вектором $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ и моментом времени $t_0 \in\in \mathbb{R}^1$. *Начальной задачей* для рассинхронизованной системы уравнений (1.3.2) назовем задачу отыскания при $t > t_0$ решения $\xi(t)$, удовлетворяющего условию $\xi(t_0 + 0) = \xi_0$.

Выберем целое число m, удовлетворяющее условию $T^{m-1} \leq t_0 < T^m$. Рассмотрим определенное при всех $n \geq m$ решение $x(n) = F(n, m; \xi_0)$ разностного уравнения (1.4.2). По $x(n)$ построим (см. (1.4.3)) функцию $\xi^*(t)$; эта функция определена при $t > T^{m-1}$ и

$$\xi^*(t) = x(m) = \xi_0 \quad \text{при} \quad T^{m-1} < t \leq T^m.$$

Так как $T^{m-1} \leq t_0 < T^m$, то $\xi^*(t_0 + 0) = \xi_0$. В силу теоремы 1.4.3 функция $\xi^*(t)$ является решением рассинхронизованной системы (1.3.2). Итак, начальная задача для рассинхронизованной системы (1.3.2) всегда имеет решение. Построенное решение $\xi^*(t)$ начальной задачи будем называть *каноническим*.

Пусть $\xi(t)$ — некоторое решение рассинхронизованной системы (1.3.2). Изменим значение одной из компонент этого решения в произвольный момент коррекции T_i^n данной компоненты. Полученная функция $\xi(t)$ снова будет решением рассинхронизованной системы (1.3.2). Таким образом, решения рассинхронизованной системы определяются неоднозначно.

Пусть $\xi(t)$, $\zeta(t)$ — два решения рассинхронизованной системы (1.3.2), определенные при $t > t_0$, для которых $\xi(t_0 + 0) = \zeta(t_0 + 0)$. Выберем целое число m так, что $T^{m-1} \le t_0 < T^m$ и построим при $n \ge m$ по $\xi(t), \zeta(t)$ функции $x^*(n), z^*(n)$ согласно формулам (1.4.4). По теореме 1.4.3 эти функции являются решениями эквивалентного разностного уравнения (1.4.2). Так как $x^*(m) = \xi(T^m - 0) = \xi(t_0 + 0)$, $z^*(m) = \zeta(T^m - 0) = \zeta(t_0 + 0)$, то $x^*(m) = z^*(m)$, и в силу (1.4.5) $x^*(n) = z^*(n) = F(n, m; x_m)$, где $x_m = x^*(m) = z^*(m)$.

Итак, значения решений $x^*(n)$, $z^*(n)$ разностного уравнения (1.4.2) совпадают при $n \ge m$. Но тогда из (1.4.4) следует, что $\xi(t) = \zeta(t)$ при $t > t_0$, $t \ne T^n$. Отсюда и из определения решения рассинхронизованной системы вытекают более сильные равенства: $\xi_i^*(t) = \zeta_i^*(t)$ при $t > t_0$, $t \ne T_i^n$, $i = 1, 2, \dots, N$. Доказана следующая теорема.

1.5.2. Теорема. *Любая начальная задача для рассинхронизованной системы* (1.3.2) *разрешима. Если $\xi(t)$ — некоторое решение системы* (1.3.2)*, то при каждом $i = 1, 2, \dots, N$ его i-я компонента может отличаться от соответствующей компоненты канонического решения начальной задачи лишь в моменты коррекции $\{T_i^n\}$ этой компоненты.*

Приведем в явном виде выражение для канонического решения начальной задачи $\xi(t_0 + 0) = \xi_0$ $(T^{m-1} \le t_0 < T^m)$:

$$\xi^*(t) = f(n-1, f(n-2, \dots f(m, \xi_0) \dots))$$

при $T^{n-1} < t \le T^n$, $n = m, m+1, \dots$.

Так как синхронизованные системы являются частным случаем рассинхронизованных систем, то теоремы 1.4.3 и 1.5.2 справедливы и для них.

Решение разностного уравнения осуществляется последовательно, по шагам: сначала по начальному значению $x(m) = x_m$ находится $x(m+1)$, затем $x(m+2)$ и т.д. Способ решения системы импульсных уравнений, продемонстрированный при доказательстве теорем 1.4.3 и 1.5.2, сводится к решению эквивалентного разностного уравнения. Поэтому такой способ решения называется *методом шагов*. Смысл его для импульсных уравнений заключается в последовательном (по шагам) нахождении значений решения на интервалах его постоянства.

1.5.3. Оператор сдвига. Пусть $s \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Согласно теореме 1.5.2 решение начальной задачи $\xi(s+0) = \xi$ рассинхронизованной системы (1.3.2) существует. Чтобы подчеркнуть зависимость этого решения от начальных значений s и ξ, обозначим его через $\xi(t, s; \xi)$. Так как функция $\xi(t, s; \xi)$ кусочно-постоянна по первому аргументу, то при каждом значении $t \ge s$ однозначно определен предел справа функции $\xi(\tau, s; \xi)$ при $\tau \to t$, $\tau > t$. Этот предел обозначим через $\Phi(t,s;\xi)$ и будем называть *оператором сдвига* системы рассинхронизованных уравнений (1.3.2). Следует помнить, что интервалы постоянства компонент решения $\xi(t) = \Phi(t,s;\xi)$ включают левые концы, что отличает это решение от канонического решения $\xi^*(t)$ системы (1.3.2).

1.5.4. Теорема. *Значения оператора сдвига однозначно определены при $t \ge s$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. При этом для любой тройки чисел $t \ge \tau \ge s$ справедливо равенство*

$$\Phi(t,s;\xi) = \Phi[t,\tau;\Phi(\tau,s;\xi)], \qquad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.5.1}$$

Пусть правые части уравнений (1.3.2) *непрерывны по пространственным переменным $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_N$ при фиксированной временной переменной. Тогда оператор сдвига $\Phi(t,s;\xi)$ непрерывен по последнему аргументу, причем эта непрерывность равномерная по любым конечным промежуткам изменения t и s.*

Равенство (1.5.1) называют *полугрупповым свойством* оператора сдвига. Если в качестве оператора сдвига взять оператор, сопоставляющий начальной задаче $\xi(s+0) = \xi$ каноническое решение, то сохраняют силу все утверждения теоремы 1.5.4, за исключением полугруппового свойства.

Между оператором сдвига и оператором перехода соответствующего эквивалентного разностного уравнения имеется простая связь. Пусть $t > s$, а целые числа m и n определены условиями: $T^{m-1} \le s < T^m$, $T^{n-1} \le t < T^n$. Тогда

$$\Phi(t,s;x) = F(n,m;x).$$

§ 1.6. Простейшие свойства рассинхронизованных систем

Как показывает пример 1.4.4, при рассинхронизации изначально синхронизованной системы импульсных уравнений решения могут изменяться весьма сильно. Изучим влияние рассинхронизации на динамику импульсных систем.

1.6.1. Систему импульсных уравнений (1.3.2) называют *автономной*, если функции $\varphi_i(t,\xi_1,\dots,\xi_N)$ от первого аргумента не зависят:

$$\varphi_i(t,\xi_1,\dots,\xi_N) \equiv \psi_i(\xi_1,\dots,\xi_N).$$

Аналогично, если $f(n,x)$ не зависит от первого аргумента, то разностное уравнение (1.4.2) называют *автономным*.

Эквивалентное автономной рассинхронизованной системе импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \psi_i[\xi_1(T_i^n - 0), \dots, \xi_i(T^n - 0)], \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{1.6.1}$$

разностное уравнение имеет вид

$$x(n+1) = f[n, x(n)], \tag{1.6.2}$$

где вектор-функция $f(n,x) = f(n, x_1, \dots, x_N)$ с компонентами $f_i(n,\ x_1,\ \dots,\ x_N)$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ N$, определяется равенствами

$$f_i(n, x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \psi_i(x_1, \dots, x_N) & \text{при} \quad i \in \omega(T^n), \\ x_i & \text{при} \quad i \notin \omega(T^n). \end{cases} \tag{1.6.3}$$

1.6.2. Лемма. *Если синхронизованная система автономна, то и эквивалентное ей разностное уравнение автономно.*

Доказательство леммы очевидно. Интерес к автономным разностным уравнениям объясним — именно такие уравнения чаще встречаются в прикладных задачах.

Назовем i-ю компоненту рассинхронизованной системы уникальной, если $i \notin \omega(T^n)$ при некотором целом n. Уникальность компоненты означает, что найдется такой момент T^n коррекции системы, в который данная компонента не изменяется. Очевидно, система синхронизована тогда и только тогда, когда никакая ее компонента не является уникальной.

1.6.3. Лемма. *Если каждая компонента рассинхронизованной системы уникальна и эквивалентное ей разностное уравнение* (1.4.2) *автономно, то* $f(n,x) = x$ *при* $-\infty < n < \infty$.

Доказательство. Если уравнение (1.4.2) автономно, то $f(n,x) = g(x)$ при $-\infty < n < \infty$. Так как каждая компонента рассматриваемой рассинхронизованной системы уникальна, то для каждого $i = 1,\ 2,\ \dots,\ N$ найдется такое n, что $i \notin \omega(T^n)$. Тогда в силу определения правой части эквивалентного разностного уравнения (см. (1.4.1) или (1.6.3)) $f_i(n,x) = g_i(x) = x_i$ при $i = 1,\ 2,\ \dots,\ N$. Следовательно, $g(x) = x$. Лемма доказана. □

Таким образом, эквивалентное разностное уравнение рассинхронизованной системы может быть автономным только в том исключительном и малоинтересном случае, когда $x(n+1) = x(n)$.

1.6.4. Теорема. *Пусть каждая компонента автономной рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (1.6.1) *уникальна и* $\psi(x) \neq x$*. Тогда эквивалентное разностное уравнение неавтономно.*

Доказательство. В силу леммы 1.6.3 автономность эквивалентного разностного уравнения (1.6.2) влечет равенства $f(n, x) = f(x) = x$ при $-\infty < n < \infty$. Из уникальности компонент системы (1.6.1) вытекает существование для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ такого числа n, что $i \notin \omega(T^n)$. В силу (1.6.3) при $i = 1, 2, \ldots, N$ будут справедливы равенства $\psi_i(x) = f_i(x) = x_i$. Следовательно, $\psi(x) = x$. Теорема доказана. □

Итак, эквивалентные разностные уравнения рассинхронизованных систем импульсных уравнений, как правило, неавтономны.

Скажем, что решение $\xi(t)$ синхронизованной системы (1.3.1) *сохраняется при рассинхронизации*, если функция $\xi(t)$ является решением любой рассинхронизованной системы импульсных уравнений (1.3.2), правая часть $f(t, x)$ которой совпадает с правой частью синхронизованной системы.

1.6.5. Теорема. *Каждое решение* $\xi(t) = \mathrm{const}$ *автономной системы синхронизованных уравнений сохраняется при рассинхронизации.*

Доказательство теоремы очевидно. Отметим что решения синхронизованной системы, отличные от констант, могут измениться (и, как правило, изменяются) при рассинхронизации.

1.6.6. Фазочастотная рассинхронизация. Приведем пример рассинхронизации импульсных систем, часто встречающейся в технических приложениях.

Импульсные уравнения (впрочем, как и уравнения других типов) обычно возникают при моделировании реальных явлений или процессов. Сложность реальных процессов приводит к необходимости различных идеализаций. В частности синхронизованные системы импульсных уравнений можно считать идеализациями ситуаций, в которых моменты коррекции отдельных компонент близки друг к другу, но не обязательно одинаковы.

В технических приложениях часто имеют дело с синхронизованными импульсными уравнениями, компоненты которых подвергаются коррекции периодически с некоторым периодом $h > 0$. В этом случае моменты коррекции имеют вид:

$$T_i^n = T^n = nh, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \ -\infty < n < \infty. \tag{1.6.4}$$

Эквивалентное разностное уравнение для системы (1.3.1) с моментами коррекции компонент (1.6.4) принимает в этом случае вид:

$$x(n+1) = \varphi[nh, x(n)], \qquad -\infty < n < \infty. \tag{1.6.5}$$

Рассмотрим важный случай, когда моменты коррекции (1.6.4) возникают как идеализация следующей ситуации:

$$T_i^n = nh_i + \tau_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \ -\infty < n < \infty,$$

где числа $\delta_i = h_i - h$ и τ_i малы, причем не все δ_i совпадают между собой или не все τ_i совпадают между собой.

Систему импульсных уравнений (1.3.2) с моментами коррекции компонент (1.6.5) назовем *рассинхронизованной по фазе и частоте* (*фазочастотно рассинхронизованной*). Числа δ_i будем называть *частотными рассогласованиями*, а числа τ_i — *фазовыми рассогласованиями*.

Если все частотные рассогласования δ_i равны между собой, а некоторые из фазовых рассогласований различны, то систему (1.3.2) назовем *рассинхронизованной по фазе* (фазово рассинхронизованной). Если все фазовые рассогласования τ_i равны между собой, а некоторые из частотных рассогласований различны, то систему (1.3.2) назовем *рассинхронизованной по частоте* (частотно рассинхронизованной).

Характеристическим свойством систем, рассинхронизованных по фазе и частоте, является то, что каждая их компонента подвергается коррекции периодически.

Выясним некоторые свойства систем импульсных уравнений, рассинхронизованных по фазе. Пусть моменты коррекции в этом случае имеют вид:

$$T_i^n = nh + \tau_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \ -\infty < n < \infty. \tag{1.6.6}$$

Предположим, что индексация по переменной n для каждой из последовательностей $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, введена таким образом, чтобы выполнялись неравенства: $0 \le T_i^0 < h$. Этого всегда можно добиться. Поэтому без ограничения общности можно считать (так и делается всюду в дальнейшем), что для фазовых рассогласований выполнены неравенства

$$0 \le \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N < h.$$

Некоторые из фазовых рассогласований τ_i могут совпадать между собой. Поэтому число L различных фазовых рассогласований, вообще говоря, меньше числа N компонент системы. Обозначим упорядоченные по возрастанию различные фазовые рассогласования через τ_i^*, $i = 1, 2, \ldots, L$. Тогда

$$0 \leq \tau_1^* < \tau_2^* < \cdots < \tau_L^* < h.$$

Обозначим через $\{T^n\}$ последовательность всех моментов коррекции компонент системы (1.3.2), (1.6.6), фиксированную условием: $T^{-1} < 0 \leq T^0$. Свойства моментов коррекции $\{T^n\}$, типов моментов коррекции $\{\omega(T^n)\}$ и кратностей моментов коррекции $\{\vartheta(T^n)\}$ сведены в следующую лемму.

1.6.7. Лемма. *Справедливы утверждения:*

а) если $n = kL + i$, где $1 \leq i \leq L$, то $T^n = kh + \tau_i^*$;

б) последовательности $\{\omega(T^n)\}$ и $\{\vartheta(T^n)\}$ периодичны с периодом L, т.е. $\omega(T^{n+L}) = \omega(T^n)$, $\vartheta(T^{n+L}) = \vartheta(T^n)$;

в) $\omega(T^i) \cap \omega(T^j) = \emptyset$ при $1 \leq i < j \leq L$;

г) $\omega(T^1) \cup \omega(T^2) \cup \cdots \cup \omega(T^L) = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\vartheta(T^1) + \vartheta(T^2) + \cdots + \vartheta(T^L) = N$.

Утверждения леммы непосредственно вытекают из уравнения (1.6.6) для моментов коррекции компонент системы (1.3.2). В качестве отдельного утверждения выделим следствие.

Следствие. *На любом интервале $[t, t + h)$ каждая компонента рассинхронизованной по фазе системы импульсных уравнений подвергается коррекции ровно одни раз.*

1.6.8. Теорема. *Пусть рассинхронизованная по фазе система импульсных уравнений автономна (см.* (1.6.1)*). Тогда правая часть эквивалентного разностного уравнения* (1.6.2) *периодична с периодом L по первому аргументу.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное целое число n. В силу леммы 1.6.7б справедливо равенство $\omega(T^{n+L}) = \omega(T^n)$. Если $j \notin \omega(T^n)$, то $j \notin \omega(T^{n+L})$. Поэтому согласно (1.6.3) $f_j(n, x) = f_j(n+L, x) = x_j$. Если же $j \in \omega(T^n)$, то $j \in \omega(T^{n+L})$, и потому в силу (1.6.3) $f_j(n, x) = f_j(n + L, x) = \psi_j(x)$. Теорема доказана. □

Следствие 1. $F(n, m; x) \equiv F(n + L, m + L; x)$.

Следствие 2. $\Phi(t, s; \xi) \equiv \Phi(t + h, s + h; \xi)$.

В лемме 1.6.3 показано, что эквивалентное разностное уравнение рассинхронизованной системы импульсных уравнений автономно лишь в исключительных и малоинтересных случаях. Это неприятный факт, поскольку исследование неавтономных разностных уравнений существенно сложнее исследования автономных уравнений. Теорема 1.6.8 представляет в этом плане некоторое утешение: для важного класса рассинхронизованных систем эквивалентные разностные уравнения хотя и не являются автономными, но все же обладают таким свойством, как периодичность правой части. Последнее свойство сильно облегчает их анализ.

Отметим принципиальный факт, вытекающий из теоремы 1.6.8. Пусть при фазовой рассинхронизации исходной автономной системы получены две системы, которые мы обозначим буквами W и $\overline{W}$. Пусть система W имеет фазовые рассогласования $\{\tau_i\}$, а система $\overline{W}$ имеет фазовые рассогласования $\{\overline{\tau}_i\}$. Предположим,что обе системы имеют одинаковое число L различных фазовых рассогласований. Пусть, наконец, типы моментов коррекции τ_i и $\overline{\tau}_i$ совпадают (т.е. $\omega(\tau_i) = \omega(\overline{\tau}_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, L$), хотя сами моменты коррекции τ_i и $\overline{\tau}_i$ могут отличаться друг от друга. Тогда эквивалентные разностные уравнения систем W и $\overline{W}$ совпадают друг с другом. В этом смысле динамика систем W и $\overline{W}$ определяется не величинами фазовых рассогласований, а их взаимным расположением на числовой оси.

Интересно отметить, что к понятию фазовой рассинхронизации мы пришли, считая равенства (1.6.4) идеализацией равенств (1.6.6) с малыми фазовыми рассогласованиями τ_i. Как мы только что убедились, в действительности малость чисел τ_i здесь роли не играет.

Исследование свойств рассинхронизованных систем при частотной или фазочастотной рассинхронизации существенно сложнее, чем при фазовой рассинхронизации. В этих случаях трудно даже в явном виде указать последовательность $\{T^n\}$ всех моментов коррекции рассинхронизованной системы; последовательности типов $\{\omega(T^n)\}$ и кратностей $\{\vartheta(T^n)\}$ оказываются, как правило, непериодическими. Исследование фазочастотной рассинхронизации будет проведено в гл. 7.

1.6.9. Системы с векторными компонентами. До сих пор рассматривались рассинхронизованные системы импульсных уравнений с вещественными скалярными компонентами. Однако скалярный характер компонент часто не играет роли. Кроме того, в ряде задач возникают ситуации, когда некоторые компоненты системы импульсных уравнений всегда подвергаются коррекции одновременно. Такие компоненты целесообразно рассматривать как одну векторную компоненту. Утверждения этого и предыдущих параграфов останутся справедливы и для рассинхронизованных систем импульсных уравнений с векторными компонентами. В дальнейшем, как правило, рассматриваются системы с векторными компонентами. Всякий раз, когда скалярность компонент играет роль, это оговаривается специально.

Приведем примеры импульсных уравнений, исследование которых сводится к анализу рассинхронизованных систем.

1.6.10. Пусть $\xi(t)$ — решение рассинхронизованной системы уравнений (1.3.2), удовлетворяющее условиям:

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n < t \le T_i^{n+1}, \tag{1.6.7}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$. Такое решение названо нами каноническим; в п. 1.5.1 показано, что рассинхронизованная система импульсных уравнений (1.3.2) всегда имеет каноническое решение.

В силу условия (1.6.7) справедливы равенства

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \xi_i(T_i^{n+1}), \qquad \xi_j(T_i^n - 0) = \xi_j(T_i^n). \tag{1.6.8}$$

Поэтому компонента $\xi_i(t)$ решения $\xi(t)$, удовлетворяющая уравнению (1.3.2), удовлетворяет также уравнению

$$\xi_i(T_i^{n+1}) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n), \ldots, \xi_N(T_i^n)], \tag{1.6.9}$$

где $-\infty < n < \infty$.

Обратно, пусть $\xi(t)$ — решение системы уравнений (1.6.9), удовлетворяющее условию (1.6.7). Тогда для каждой компоненты $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, верны равенства (1.6.8). Заменив в (1.6.9) $\xi_j(T_i^{n+1})$ на $\xi_j(T_i^n + 0)$, а $\xi_j(T_i^n)$ — на $\xi_j(T_i^n - 0)$, получим, что вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет также и рассинхронизованной системе импульсных уравнений (1.3.2).

Итак, уравнения (1.6.7), (1.6.9) и рассинхронизованная система импульсных уравнений (1.3.2) эквивалентны — каждое решение системы уравнений (1.6.7), (1.6.9) является решением системы (1.3.2), а каждое каноническое решение рассинхронизованной системы импульсных уравнений (1.3.2) удовлетворяет уравнениям (1.6.7), (1.6.9).

Импульсными часто называют именно уравнения вида (1.6.9), а не уравнения (1.3.2). Иногда рассмотрение импульсных уравнений в виде (1.6.9) проще, поскольку здесь отсутствует необходимость взятия левого и правого пределов.

1.6.11. Рассмотрим теперь систему уравнений (1.6.9) в предположении, что решение $\xi(t)$ этой системы удовлетворяет условию:

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n \le t < T_i^{n+1}, \tag{1.6.10}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$. Единственное отличие уравнений (1.6.9), (1.6.10) от уравнений (1.6.7), (1.6.9) заключается в том, какие концы — левые или правые — считать принадлежащими интервалам постоянства компонент решения $\xi(t)$. Оказывается, столь «незначительная» переделка уравнений (1.6.7), (1.6.9) приводит к существенному изменению решений.

1.6.12. Пример. Рассмотрим уравнения

$$\xi_1(T_1^{n+1}) = -\xi_1(T_1^n), \qquad \xi_2(T_2^{n+1}) = \xi_1(T_2^n),$$

где $T_1^n = n, T_2^n = n + \varepsilon$. Если компоненты решения удовлетворяют условию (1.6.7), то они имеют следующий вид:

$$\xi_1(t) = (-1)^n \quad \text{при} \quad n < t \le n + 1,$$

$$\xi_2(t) = (-1)^n \quad \text{при} \quad n + \varepsilon < t \le n + 1 + \varepsilon.$$

Если же компоненты решения удовлетворяют условию (1.6.10), то они имеют следующий вид:

$$\xi_1(t) = (-1)^n \quad \text{при} \quad n \le t < n + 1,$$

$$\xi_2(t) = (-1)^{n+1} \quad \text{при} \quad n + \varepsilon \le t < n + 1 + \varepsilon.$$

Назовем импульсную систему уравнений (1.3.2) (или (1.6.9)) полностью рассинхронизованной при $t > t_*$, если при $t > t_*$ никакие две компоненты не подвергаются коррекции одновременно. Условие полной рассинхронизованности может быть также записано в следующем виде:

$$\vartheta(T^n) = 1 \quad \text{при} \quad T^n > t_*.$$

Импульсную систему уравнений назовем *полностью рассинхронизованной*, если никакие две ее компоненты не подвергаются коррекции одновременно на интервале $-\infty < t < \infty$.

Определим по уравнениям (1.6.9) новую систему уравнений с векторными компонентами. Пусть компонента ξ_i в уравнениях (1.6.9) векторная, причем $\xi \in \mathbb{R}^{m_i}$. Положим $\zeta_i = \{\mu_i, \eta_i\}$, где $\mu_i, \eta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, можно считать, что $\zeta_i \in \mathbb{R}^{2m_i}$. Положим $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N\}$, где N — количество (векторных) компонент системы (1.6.9). Рассмотрим при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ вектор-функцию $\psi_i(t,\zeta)$ со значениями в $\mathbb{R}^{2m_i}$, зависящую от времени t и векторной переменной ζ:

$$\psi_i(t,\zeta) = \{\varphi_i(t,\eta_1,\ldots,\eta_{i-1},\mu_i,\eta_{i+1},\ldots,\eta_N),\mu_i\}. \tag{1.6.11}$$

Поставим теперь в соответствие системе уравнений (1.6.9), (1.6.10) рассинхронизованную импульсную систему уравнений

$$\zeta_i(T_i^n+0) = \psi_i[T_i^n,\zeta(T_i^n-0)], \tag{1.6.12}$$

$$\zeta_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n < t < T_i^{n+1}, \tag{1.6.13}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$.

Скажем, что вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнениям (1.6.9) при $t > \tau$, если она определена при этих значениях t, и для каждой компоненты $\xi_i(t)$ справедливы равенства (1.6.9) при всех n, для которых $T_i^n > \tau$.

1.6.13. Теорема. *Пусть при $t > \tau$ вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет полностью рассинхронизованной системе импульсных уравнений* (1.6.9), (1.6.10). *Тогда вектор-функция $\zeta(t)$, компоненты которой определяются соотношениями $\zeta_i(t) = \{\mu_i(t),\eta_i(t)\}$, где*

$$\mu_i(t) = \xi_i(T_i^{n+1}), \quad \eta_i(t) = \xi_i(T_i^{n+1}-0) \qquad \text{при} \quad T_i^n < t \le T_i^{n+1}, \tag{1.6.14}$$

удовлетворяет при $t > \tau$ рассинхронизованной системе импульсных уравнений (1.6.12), (1.6.13).

Пусть $\zeta(t)$ — решение при $t > \tau$ полностью рассинхронизованной (при этих значениях t) системы уравнений (1.6.12), (1.6.13). *Тогда вектор-функция $\xi(t)$, компоненты которой определяются равенствами*

$$\xi_i(t) = \mu_i(T_i^{n+1}-0) \quad \text{при} \quad T_i^n \le t < T_i^{n+1}, \tag{1.6.15}$$

удовлетворяет при $t > \tau$ системе уравнений (1.6.9), (1.6.10).

Доказательство. Пусть вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет при $t > \tau$ уравнениям (1.6.9), (1.6.10). Зафиксируем целое число $i \in [1,N]$ и выберем такое n_i, при котором $T_i^{n_i-1} \le \tau < T_i^{n_i}$. Тогда соотношения (1.6.14) определяют функции $\mu_i(t)$ и $\eta_i(t)$ при $t > T_i^{n_i-1}$. Следовательно, эти функции и подавно определены при $t > \tau$.

Зададимся целым числом $n \ge n_i$; для него $T_i^n > \tau$. В силу (1.6.14)

$$\mu_i(T_i^n+0) = \xi_i(T_i^{n+1}),$$

откуда на основании (1.6.9)

$$\mu_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T^n, \xi_1(T_i^n), \ldots, \xi_i(T_i^n), \ldots, \xi_N(T_i^n)].$$

Здесь в силу (1.6.14)

$$\xi_i(T_i^n) = \mu_i(T_i^n) = \mu_i(T_i^n - 0).$$

Если $j \neq i$, то в силу полной рассинхронизованности системы (1.6.9) момент T_i^n попадает внутрь некоторого интервала постоянства компоненты $\xi_j(t)$. Но в силу (1.6.14), (1.6.9) внутри интервала постоянства компоненты $\xi_j(t)$ ее значения совпадают с $\mu_j(t)$. Значит,

$$\xi_j(T_i^n) = \mu_j(T_i^n) = \mu_j(T_i^n - 0).$$

Следовательно,

$$\mu_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \eta_1(T_i^n - 0), \ldots, \mu_i(T_i^n - 0), \ldots, \eta_N(T_i^n - 0)]. \tag{1.6.16}$$

Рассмотрим теперь компоненту $\eta_i(t)$. В силу (1.6.14)

$$\eta_i(T_i^n + 0) = \xi_i(T_i^{n+1} - 0).$$

Но из (1.6.10) видно, что $\xi_i(T_i^{n+1} - 0) = \xi_i(T_i^n)$. Так как при этом $\xi_i^n(T_i) = \mu_i^n(T_i - 0)$, то

$$\eta_i(T_i^n + 0) = \mu_i(T_i^n - 0). \tag{1.6.17}$$

Воспользовавшись (1.6.11), запишем равенства (1.6.16), (1.6.17) в виде: $\zeta_i(T_i^n{+}0) = \psi_i[T_i^n, \zeta(T_i^n{-}0)]$. В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $\zeta(t)$ — функция, удовлетворяющая при $t > \tau$ рассинхронизованной системе импульсных уравнений (1.6.12), (1.6.13). Зафиксируем целое число $i \in [1, N]$ и выберем n_i удовлетворяющее неравенствам $T_i^{n_i-1} \leq \tau < T_i^{n_i}$. Тогда равенства (1.6.15) определят функцию $\xi_i(t)$ при $t \geq T_i^{n_i-1}$. Следовательно, эта функция будет определена и при $t > \tau$.

Зададимся целым числом $n \geq n_i$; для него $T_i^n > \tau$. При каждом таком значении n для функции $\zeta_i(t)$ справедливо равенство (1.6.12), которое, воспользовавшись представлением (1.6.11) функции $\psi_i(t, \zeta)$, запишем в виде равенств (1.6.16), (1.6.17). Рассмотрим теперь цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\xi_i(T_i^{n+1}) = \eta_i(T_i^{n+2} - 0) = \eta_i(T_i^{n+1} + 0) = \mu_i(T_i^{n+1} - 0) = \mu_i(T_i^n + 0) = \\ = \varphi_i[T_i^n, \eta_1(T_i^n - 0), \ldots, \mu_i(T_i^n - 0), \ldots, \eta_N(T_i^n - 0)].\end{aligned} \tag{1.6.18}$$

Здесь первое равенство следует из (1.6.15); второе и четвертое являются следствием постоянства функций $\eta_i(t)$ и $\mu_i(t)$ на интервалах, заключенных между соответствующими моментами коррекции; третье равенство выполняется в силу (1.6.17); а последнее — в силу (1.6.16). Из (1.6.18) получаем:

$$\xi_i(T_i^{n+1}) = \varphi_i[T_i^n, \eta_1(T_i^n - 0), \ldots, \mu_i(T_i^n - 0), \ldots, \eta_N(T_i^n - 0)].$$

В силу (1.6.17) здесь $\mu_i(T_i^n - 0) = \eta_i(T_i^n + 0)$, а поскольку согласно (1.6.15) $\eta_i(T_i^n+0) = \xi_i(T_i^n)$, то $\mu_i(T_i^n-0) = \xi_i(T_i^n)$. Из полной рассинхронизованности системы (1.6.9) следует, что $T_i^n \neq T_j^k$ при $j \neq i$, $-\infty < k < \infty$. Значит, при $j \neq i$ момент T_i^n попадает внутрь некоторого интервала постоянства функции $\eta_j(t)$. Но тогда в силу (1.6.15) $\xi_j(t) = \eta_j(t) = \eta_j(T_i^n)$ при всех значениях t, достаточно близких к T_i^n. Следовательно,

$$\eta_j(T_i^n - 0) = \eta_j(T_i^n) = \xi_j(T_i^n).$$

Итак,

$$\xi_i(T_i^{n+1}) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n - 0), \ldots, \xi_i(T_i^n - 0), \ldots, \xi_N(T_i^n - 0)].$$

Теорема доказана. □

Отметим, что изучение систем вида (1.6.9), (1.6.10) сводится к изучению рассинхронизованных систем за счет удвоения размерностей компонент.

Системы вида (1.6.9), (1.6.10), также как и рассинхронизованные системы импульсных уравнений, допускают шутливую интерпретацию, позволяющую лучше уяснить их различие. Рассмотрим снова компанию N учеников, занимающихся решением задач. Пусть на этот раз — это компания прилежных тугодумов, в которой поведение i-го ученика описывается следующей схемой.

В момент времени T_i^n i-й ученик знакомится с решениями $\xi_1(T_i^n)$, …, $\xi_N(T_i^n)$ задач, выполненных к этому моменту его товарищами. Затем он начинает решать свою задачу. Затратив на это время $T_i^{n+1} - T_i^n$ (тугодум!), ученик к моменту $t = T_i^{n+1}$ находит ответ:

$$\xi_i(T_i^{n+1}) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n), \ldots, \xi_N(T_i^n)].$$

Сообщив ответ товарищам, ученик мгновенно (без какого-либо отдыха — прилежный!) приступает к решению следующей задачи, и т.д.

Принципиальным отличием рассмотренной ситуации от случая «ленивых гениев» является то, что в промежуток времени $T_i^n < t < T_i^{n+1}$ ученик настолько поглощен решением своей задачи, что не воспринимает информацию о задачах, решенных за это время его товарищами.

1.6.14. Уравнения (1.6.9) часто возникают в форме уравнений с запаздыванием. Обозначим разности $T_i^{n+1} - T_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, N$, через σ_i^{n+1}. Числа σ_i^{n+1} положительны; будем называть их *запаздываниями*. Уравнения (1.6.9) могут быть представлены в следующем виде:

$$\xi_i(T_i^{n+1}) = \varphi_i[T_i^{n+1} - \sigma_i^{n+1}, \xi_1(T_i^{n+1} - \sigma_i^{n+1}), \ldots, \xi_N(T_i^{n+1} - \sigma_i^{n+1})].$$

В рассмотренных нами случаях величины запаздываний равнялись длинам интервалов постоянства соответствующих компонент. В общем случае они могут быть произвольными.

§ 1.7. Обобщения рассинхронизованных систем

Явление рассинхронизации может иметь место в ситуациях, формально более широких, чем описанные в предыдущих параграфах. Кроме того, в некоторых случаях удобно иметь возможность представлять рассинхронизованные системы импульсных уравнений как объекты более привычной природы, например, как уравнения с запаздывающим аргументом в непрерывном времени. В настоящем параграфе проводится обсуждение некоторых трактовок рассинхронизованных систем, отличных от описанных выше.

1.7.1. Приведем пример системы уравнений, формально более широкой, чем рассинхронизованные импульсные системы уравнений, но во многих случаях сводящейся к последним.

Пусть заданы N последовательностей пар чисел $\{S_1^n, T_1^n\}$, $\{S_2^n, T_2^n\}$, $\ldots$, $\{S_N^n, T_N^n\}$, для которых при всех $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$ выполняются неравенства: $S_i^n < T_i^n$, $T_i^n < T_i^{n+1}$. Пусть, кроме того,

$$\lim_{n\to-\infty} T_i^n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} S_i^n = \infty,$$

и каждой паре сопоставлен набор из N чисел $\{T_{i1}^n, T_{i2}^n, \ldots, T_{iN}^n\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$S_i^n \le T_{i1}^n, T_{i2}^n, \ldots, T_{iN}^n < T_i^n. \tag{1.7.1}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i(T_i^n) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_{i1}^n), \xi_2(T_{i2}^n), \ldots, \xi_N(T_{iN}^n)], \tag{1.7.2}$$

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n \le t < T_i^{n+1}, \tag{1.7.3}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$. Здесь компоненты ξ_i предполагаются векторными, принимающими значения в пространствах $\mathbb{R}^{m_i}$, $m_i > 1$.

Система уравнений (1.7.2), (1.7.3) по виду промежутков постоянства компонент решения аналогична уравнениям (1.6.9), (1.6.10); отличие заключается в более общей зависимости правых частей уравнений (1.7.2) от компонент решения.

Систему уравнений (1.7.2) назовем *полностью рассинхронизованной*, если $T_{ij}^n \neq T_j^k$ при $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $i \neq j$, $-\infty < n, k < \infty$.

Запишем систему (1.7.2) в виде уравнений с запаздыванием:

$$\xi_i(T_i^n) = \varphi[T_i^n, \xi_1(T_i^n - \sigma_{i1}^n), \ldots, \xi_N(T_i^n - \sigma_{iN}^n)]. \tag{1.7.4}$$

положив $\sigma_{ij}^n = T_i^n - T_{ij}^n$. В силу (1.7.1) $\sigma_{ij}^n > 0$, т.е. (1.7.2) действительно система уравнений с запаздыванием.

Уравнения (1.7.2) (или (1.7.4)) назовем уравнениями *с малыми запаздываниями*, если $\sigma_{ij}^n < T_i^n - T_i^{n-1}$ при всех допустимых i, j и n. Очевидно, (1.7.2) будут уравнениями с малыми запаздываниями при выполнении неравенств $T_i^{n-1} < S_i^n$. Отметим, что уравнения (1.6.9) не являются уравнениями с малыми запаздываниями.

Поставим в соответствие системе уравнений (1.7.2), (1.7.3) N^2-компонентную рассинхронизованную систему импульсных уравнений следующего вида:

$$\zeta_{ij}(T_{ij}^n + 0) = \zeta_{jj}(T_{ij}^n - 0), \qquad j \neq i, \tag{1.7.5}$$

$$\zeta_{ij}(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_{ij}^n < t < T_{ij}^{n+1}, \tag{1.7.6}$$

$$\zeta_{ii}(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \zeta_{i1}(T_i^n - 0), \ldots, \zeta_{iN}(T_i^n - 0)], \tag{1.7.7}$$

$$\zeta_{ii}(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n < t < T_i^{n+1}, \tag{1.7.8}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, N$.

1.7.2. Теорема. *Пусть система уравнений* (1.7.2), (1.7.3) *с малыми запаздываниями полностью рассинхронизована. Если* $\xi(t)$ *— ее решение, то вектор-функция*

$$\zeta(t) = \{\zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \ldots, \zeta_{NN-1}(t), \zeta_{NN}(t)\}$$

с компонентами (возможно векторными), определяемыми равенствами

$$\zeta_{ij}(t) = \xi_j(T^n) \quad \textit{при} \quad T_{ij}^n < t \leq T_{ij}^{n+1}, \quad j \neq i, \tag{1.7.9}$$

$$\zeta_{ii}(t) = \xi_i(T^n) \quad \textit{при} \quad T_i^n < t \leq T_i^{n+1}, \tag{1.7.10}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, N$, *являются решением рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (1.6.17), (1.6.18). *Если* $\zeta(t)$ — *решение рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (1.6.17), (1.6.18), *то функция* $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t)\}$ *с компонентами* $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, *определяемыми равенствами*

$$\xi_i(t) = \zeta_{ii}(T_i^n + 0) \quad \text{при} \quad T_i^n \le t < T_i^{n+1}, \tag{1.7.11}$$

является решением системы уравнений (1.7.2), (1.7.3).

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ — решение системы уравнений (1.7.2), (1.7.3). Покажем, что функции $\zeta_{ij}(t)$, определяемые равенствами (1.7.10), (1.7.11), удовлетворяют уравнениям (1.7.5), (1.7.8). Соотношения (1.7.6) и (1.7.8) следуют из определения функций $\zeta_{ij}(t)$. Поэтому нуждаются в доказательстве только равенства (1.7.5) и (1.7.7).

Пусть сначала индекс j компоненты $\zeta_{ij}(t)$ отличен от i. Тогда в силу (1.7.9) $\zeta_{ij}(T_{ij}^n + 0) = \xi(T_{ij}^n)$. Из полной рассинхронизованности уравнений (1.7.2) следуют неравенства: $T_{ij}^n \ne T_j^k$ при $-\infty < k < \infty$. Значит, точка T_{ij}^n принадлежит внутренности некоторого интервала постоянства функции $\xi_j(t)$. Но на каждом таком интервале согласно (1.7.2) $\xi_j(t) = \zeta_{jj}(t)$. Следовательно, $\xi_j(T_{ij}^n) = \zeta_{jj}(T_{ij}^n) = \zeta_{jj}(T_{ij}^n - 0)$. Отсюда $\zeta_{ij}(T_{ij}^n + 0) = \zeta_{jj}(T_{ij}^n - 0)$. Равенства (1.7.5) доказаны.

Обратимся к случаю, когда индексы компоненты $\zeta_{ij}(t)$ равны, т.е. $j = i$. В этом случае в силу (1.7.10) $\zeta_{ii}(T_i^n + 0) = \xi_i(T_i^n)$. Поскольку $\xi_i(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7.10), то $\zeta_{ii}(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_{i1}^n), \ldots, \xi_N(T_{iN}^n)]$. Равенства (1.7.8) будут доказаны, если мы установим, что

$$\xi_j(T_{ij}^n) = \zeta_{ij}(T_i^n - 0), \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.7.12}$$

Прежде чем доказывать эти равенства, заметим, что в силу малости запаздываний в уравнениях (1.7.2) верны неравенства

$$T_i^{n-1} < T_{ij}^n < T_i^n, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.7.13}$$

$$T_{ij}^n < T_i^n < T_{ij}^{n+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.7.14}$$

Если теперь $j \ne i$ в (1.7.12), то в силу (1.7.9) $\xi_j(T_{ij}^n) = \zeta_{ij}(t)$ при $T_{ij}^n < t < T_{ij}^{n+1}$. Значит, последнее равенство в силу (1.7.14) верно и при $t = T_i^n$. Но тогда $\xi_j(T_{ij}^n) = \zeta_{ij}(T_i^n) = \zeta_{ij}(T_i^n - 0)$; равенства (1.7.12) при $j \ne i$ доказаны. Если в (1.7.12) $j = i$, то в силу (1.7.13) из постоянства функции $\xi_i(t)$ на интервале $[T_i^{n-1}, T_i^n)$ вытекает ссоотношение $\xi_i(T_{ii}^n) = \xi_i(T_i^{n-1})$. Но тогда в силу (1.7.10) $\zeta_{ii}(T_i^n - 0) = \xi_i(T_i^{n-1})$. Итак, $\xi_i(T_{ii}^n) = \zeta_{ii}(T_i^n - 0)$, т.е. равенства (1.7.12) верны и при $j = i$.

Равенства (1.7.12) полностью доказаны. Следовательно компонента $\zeta_{ii}(t)$ удовлетворяет уравнениям (1.7.7).

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Пусть функции $\zeta_{ij}(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.7.5)–(1.7.8). Покажем, что в этом случае функции $\xi_i(t)$, определяемые соотношениями (1.7.11), удовлетворяют уравнениям (1.7.2). Из равенств (1.7.11) и (1.7.7) получаем:

$$\xi_i(T_i^n) = \varphi_i[T_i^n, \zeta_{i1}(T_i^n - 0), \ldots, \zeta_{iN}(T_i^n - 0)].$$

В силу (1.7.13), (1.7.14) и условий (1.7.6), (1.7.8) каждая функция $\zeta_{ij}(t)$ постоянна на интервале $T_{ij}^n < t < T_i^n$. Следовательно, $\zeta_{ij}(T_i^n - 0) = \zeta_{ij}(T_{ij}^n + 0)$. При $j = i$ последнее равенство приобретает вид:

$$\zeta_{ii}(T_i^n - 0) = \zeta_{ii}(T_{ii}^n + 0),$$

а при $j \neq i$ в силу (1.7.6) можно написать:

$$\zeta_{ij}(T_i^n - 0) = \zeta_{jj}(T_{ij}^n - 0),$$

Заметим теперь, что по условию теоремы система уравнений (1.7.2) полностью рассинхронизована. Следовательно, при каждом $j = 1, 2, \ldots, N$ число T_{ij}^n отлично от моментов коррекции T_j^k функции $\xi_j(t)$. Но в силу (1.7.8), (1.7.11) внутри интервалов постоянства функции $\xi_j(t)$ и $\zeta_{jj}(t)$ (с точностью до границ эти функции постоянны на одних и тех же интервалах) совпадают. Значит,

$$\zeta_{ij}(T_{ij}^n - 0) = \zeta_{jj}(T_{ij}^n + 0) = \xi_j(T_{ij}^n),$$

Откуда окончательно получаем:

$$\xi_i(T_i^n) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_{i1}^n), \ldots, \xi_N(T_{iN}^n)].$$

Теорема полностью доказана. □

Теорема 1.7.2 доказана в предположении полной рассинхронизованности рассматриваемых уравнений при всех вещественных значениях t. Однако справедлив аналог теоремы 1.7.2 в случае, когда рассматриваемые системы уравнений полностью рассинхронизованы лишь при $t > \tau$, где τ — некоторое число. Формулировку и доказательство соответствующего утверждения оставляем читателю.

1.7.3. Уравнения с переменными запаздываниями. Выше показано, что правая часть системы уравнений и набор моментов коррекции ее компонент еще не определяют однозначно решение данной системы. Для нахождения решений необходимо указать на каких интервалах — замкнутых справа или слева — постоянны компоненты решения. В этом пункте укажем форму представления импульсных уравнений, которая формально свободна от указанного требования.

Пусть рассматривается рассинхронизованная по фазе система импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n - 0), \dots, \xi_N(T_i^n - 0)], \tag{1.7.15}$$

где $T_i^n = nh + \tau_i$, и $\xi_i(t) = \text{const}$ при $T_i^n < t < T_i^{n+1}$, $-\infty < n < \infty$. Как обычно, предположим что компоненты ξ_i векторные со значениями в $\mathbb{R}^{m_i}$, период h коррекции компонент h положителен, а фазовые рассогласования τ_i удовлетворяют соотношениям: $0 \le \tau_1 \le \dots \le \tau_N < h$.

Рассмотрим пилообразную функцию

$$\sigma(t) = t - nh \quad \text{при} \quad nh < t \le (n+1)h. \tag{1.7.16}$$

Эта функция положительна, периодична с периодом h и имеет в точках nh разрывы справа. Положим $\sigma_i(t) = \sigma(t - \tau_i)$, где $i = 1, 2, \dots, N$, и рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i(t) = \varphi_i\{t - \sigma_i(t), \xi_1[t - \sigma_i(t)], \dots, \xi_N[t - \sigma_i(t)]\}, \tag{1.7.17}$$

где $i = 1, 2, \dots, N$. В этих уравнениях при каждом значении времени t величины $\sigma_i(t)$ положительны. Поэтому (1.7.17) — это разностные уравнения с переменными запаздываниями.

1.7.4. Теорема. *Каждое каноническое решение рассинхронизованной системы* (1.7.15) *удовлетворяет уравнениям с запаздываниями* (1.7.17) *и, наоборот, каждое решение уравнений с запаздываниями* (1.7.17) *является каноническим решением рассинхронизованной системы* (1.7.15).

Доказательство. Пусть $\xi(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)\}$ — каноническое решение системы (1.7.15). Тогда $\xi_i(t) = \xi_i(T_i^n + 0) = \xi_i(T_i^{n+1})$ при $T_i^n < t \le T_i^{n+1}$. Следовательно, равенство (1.7.15) (при фиксированном i и рассматриваемых значениях t) можно записать в виде:

$$\xi_i(t) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n - 0), \dots, \xi_N(T_i^n - 0)].$$

Для канонического решения при каждом $j = 1, 2, \ldots, N$ справедливы равенства $\xi_j(T_i^n - 0) = \xi_j(T_i^n)$. Наконец, воспользовавшись тем, что в силу (1.7.16) при $T_i^n = nh + \tau_i < t \le T_i^{n+1} = (n+1)h + \tau_i$ справедливо равенство $T_i^n = t - \sigma_i(t)$, получаем, что функция $\xi_i(t)$ удовлетворяет равенству (1.7.17). В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t)\}$ — решение уравнений (1.7.17). Тогда по определению (1.7.16) функции $\sigma(t)$ при каждом $t \in (nh, nh + h]$ справедливо равенство $t - \sigma(t) = nh$. Следовательно, $t - \sigma_i(t) = nh + \tau_i = T_i^n$. Воспользовавшись полученным равенством, перепишем (1.7.17) в виде:

$$\xi_i(t) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n), \ldots, \xi_N(T_i^n)] \quad \text{при} \quad T_i^n < t \le T_i^{n+1},$$

откуда

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n), \ldots, \xi_N(T_i^n)].$$

Осталось заметить, что здесь $\xi_j(T_i^n) = \xi_j(T_i^n - 0)$, поскольку, как уже упоминалось, каждая компонента $\xi_j(t)$ постоянна на замкнутых справа интервалах. Окончательно получено:

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n - 0), \ldots, \xi_N(T_i^n - 0)].$$

Теорема полностью доказана. □

Отметим, что формально вид интервалов постоянства компонент решения системы уравнений (1.7.17) никак не участвует в определении решения. Интересно отметить также, что если вместо $\sigma(t)$ взять любую функцию, удовлетворяющую условиям

$$t = nh \le \sigma(t) \le h \quad \text{при} \quad nh < t \le (n+1)h,$$

то решение системы уравнений (1.7.15) будет удовлетворять системе уравнений (1.7.17).

Рассмотрим теперь функцию $\sigma(t)$, определяемую условиями

$$\sigma(t) = t - nh \quad \text{при} \quad nh \le t < (n+1)h.$$

Функция $\sigma(t)$ положительна, периодична с периодом h и имеет в точках nh разрывы слева. Положим $\overline{\sigma}_i(t) = \sigma(t - \tau_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, N$, и рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i(t) = \varphi_i\{t - \overline{\sigma}_i(t), \xi_1[t - \overline{\sigma}_i(t)], \ldots, \xi_N[t - \overline{\sigma}_i(t)]\}, \tag{1.7.18}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$. Уравнения (1.7.18) отличаются от уравнений (1.7.17) лишь видом переменных запаздываний $\overline{\sigma}_i(t)$.

1.7.5. Теорема. *Решения систем уравнений* (1.6.9)*,* (1.6.10) *и* (1.7.18) *совпадают.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.7.4. □

Замечания и библиографические справки

Разностным уравнениям посвящена обширная литература (см., например, [Биркгоф, 1941; Гельфонд, 1967; Мартынюк, 1972; Неймарк, 1972, 1978; Халанай, Векслер, 1971; Шарковский, Майстренко, Романенко, 1986]; в этих же книгах содержатся многочисленная библиография, обсуждения, примеры и приложения). В изложении пунктов 1.1.4, 1.1.5, а также § 1.2 использованы построения из монографии [Халанай, Векслер, 1971]. Доказательства теорем Рауса-Гурвица и Льенара-Шипара можно найти, например, в работах [Гантмахер, 1967; Хорн, Джонсон, 1989]. Подробное изложение теории импульсных систем содержится в книгах [Воронов, 1981; Джури, 1963; Мельников, Шевченко, 1983; Цыпкин, 1963; Цыпкин, Попков, 1973], там же можно найти библиографию и примеры.

Вопросы влияния синхронности работы отдельных частей технических, биологических и иных объектов на функционирование этих объектов издавна привлекали внимание исследователей (см., например, [Фань Чун-Вуй, 1958; Kranc, 1957a,b; Sklansky, 1955; Sklansky, Ragazzini, 1955]).

Синхронность работы элементов системы в ряде случаев возникает естественно, в других — достигается сравнительно просто. В некоторых же ситуациях синхронизация работы отдельных элементов становится трудной технической проблемой приходится вводить дополнительные устройства или специальным образом организовывать процедуры обмена информацией между элементами системы (см., например, [Белецкий, 1988; Белецкий, Стасюк, Мазурчук, 1983; Белецкий, Чемерис, 1985; Прангишвили, 1981; Cristian, Aghili, Strong, 1986; Deminer, 1982; Halang, 1990; Kopetz, Ochsenreiter, 1987; Kung, 1976; Lamport, 1978; Lamport, Melliar Smith, 1985; Langdon, 1969; Lin, 1983; Nishimura, 1990]. Это усложняет конструкцию систем управления и часто приводит к непроизводительным затратам времени при работе таких систем [Фаддеева, Фаддеев, 1977, 1981; Baudet, 1978; Kung, 1976].

Указанные особенности систем с синхронно работающими элементами (а также другие причины) побудили исследователей обратиться к системам, элементы которых могут работать несинхронно друг с другом. Этому способствовал также замеченный рядом исследователей [Джури, 1963; Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Розенблюм, 1985; Kranc, 1957a,b; Marshall, 1979; Tokarzewski, 1987] факт улучшения в ряде случаев динамических характеристик системы при преднамеренной рассинхронизации работы их импульсных элементов.

В некоторых ситуациях (экологические [Васин, 1987] и нейронные [Гелиг, 1982] системы, системы коллективного поведения [Васин, 1987; Опойцев, 1977], системы управления с радиоизотопными датчиками [Артемьев, Ивановский, 1986; Melsa, Dannenberg, 1975], сбои в процессорах [Lin, 1983; Rekasius, 1985, 1986], «дрейф» параметров, «старение» элементов и т.п.) несинхронность работы элементов системы вызвана внешними причинами, на которые человек повлиять не в состоянии. В различных модификациях и постановках вопрос об асинхронном взаимодействии объектов возникал при анализе систем с дискретным множеством состояний [Ангер, 1977; Варшавский, Кишиневский, Мараховский и др., 1986; Краковяк, 1988; Cassandras, Gong, 1990; Cassandras, Strickland, 1989; Rosier, Yen Hsu-Chun, 1985].

Интерес к системам с несинхронно работающими элементами усилился в последние годы с развитием вычислительной техники и особенно, с появлением многопроцессорных вычислительных комплексов, что потребовало разработки специальных классов вычислительных методов (см. обзоры [Фаддеева, Фаддеев, 1977, 1981], а также библиографию в [Белецкий, 1988; Нестеренко, Марчук, 1989; Bertsekas, Tsitsiklis, 1988; Miller, 1977; Stark, 1984]). Появилось значительное число публикаций (см., например, [Белецкий, 1981, 1982, 1983, 1985, 1988; Белецкий, Стасюк, Мазурчук, 1983; Белецкий, Чемерис, 1985; Гончаренко, Нестеренко, 1981, 1982; Давиташвили, 1988; Марчук, Котов, 1978a,b; Миренков, 1968; Нестеренко, Новотарский, 1982; Семенов, Чемерис, 1988; Шевченко, 1975; Araki, Hagiwara, 1986; Araki, Yemamoto, 1986; Artzrouni, 1987; Baudet, Brent, Kung, 1980; Baudet, Stevenson, 1978; Berg, Amit, Powell, 1988; Bertsekas, El Baz, 1987; Birdwell, Castanon, Athans, 1979; Borkar, Varaija, 1982; Boykin, Frazier, 1975; Brandt, 1980; Campo, Bar-Shalom, 1990; Chizeck, Willsky, Castanon, 1986; El Tarazi, 1980, 1982, 1984; Glasson, 1982; Godbaut, Jordan, Streifer, 1990; Griffits, Loparo, 1985; Hagiwara, Araki, 1988; Hisashi, Tetsuo, 1986; Jury, 1967; Kalman, Bertram, 1959; Keller, 1972; Keller R.M. , 1975; Litkouhi, Khalil, 1985; Lubachevsky, Mitra, 1986; Miranker, 1969; Mitra, 1987; Robinson, 1977, 1979; Ronsch, 1984; Rosberg, Varaiya, Walrand, 1982; Sen, 1986; Sworder, 1986; Tugnait, 1982; Wu Jiun-Wen, Brown, 1987; Yaz, 1990]) с описаниями различных конкретных примеров вычислительных процедур, в которых за счет асинхронности выполнения различных фаз вычислительного алгоритма достигались те или иные преимущества.

К наиболее ранним проявлениям идеи асинхронности применительно к вычислительным процедурам можно отнести метод Гаусса-Зейделя решения систем линейных уравнений (см., например, [Бахвалов, 1973; Красносельский, Вайникко, Забрейко и др., 1969; Ортега, Рейнболдт, 1975]), а также метод координатной релаксации (см., например, [Бахвалов, 1973; Любич, 1967; Любич, Майстровский, 1970a,b; Майстровский, 1967; Ортега, Рейнболдт, 1975; Elkin, 1968; Ostrowski, 1954; Schechter, 1968]) минимизации нелинейных функционалов.

Существенным шагом в понимании свойств вычислительных процедур, основанных на принципах асинхронности, явилась работа [Chazan, Miranker, 1969], в которой введено понятие хаотической релаксации для решения линейных алгебраических уравнений и установлены необходимые и достаточные условия ее сходимости. Работа [Chazan, Miranker, 1969] послужила отправной точкой для серии исследований [Charnay, 1975; Donnelly, 1970; Robert, 1969, 1970, 1976, 1977; Robert, Charnay, Musy, 1975], в которых понятие хаотической релаксации обобщалось в различных направлениях. В [Miellow, 1974, 1975a,b; Miellow, Comte, Spiteri, 1976] часть достаточных условий сходимости хаотической релаксации распространена на нелинейные уравнения. В работах [Марчук, Нестеренко, 1983, 1984a,b, 1986a,b] идеи работы [Chazan, Miranker, 1969] использовались для решения задач математической физики.

Обобщением понятия хаотической релаксации явилось понятие асинхронной итерации [Baudet, 1977, 1978]. Частными случаями метода асинхронной итерации являются методы (обычные и блочные) простых итераций и Гаусса-Зейделя [Бахвалов, 1973; Красносельский, Вайникко, Забрейко и др., 1969], метод свободно шатающейся релаксации [Elkin, 1968; Schechter, 1968], периодически-хаотическая схема вычислений [Donnelly, 1970], а также методы хаотической итерации с запаздыванием [Miellow, 1974, 1975a,b] и последовательно-параллельной хаотической итерации [Robert, Charnay, Musy, 1975]. В работе [Baudet, 1977, 1978] было отмечено, впрочем, что как понятие хаотической релаксации, так и понятие асинхронной итерации представляют скорее идейный, чем практический интерес, поскольку первое из них в общем случае требует для реализации значительной (хотя и конечной) памяти, а второе — бесконечной памяти. В связи с этим в [Baudet, 1977, 1978] был введен метод чисто асинхронной итерации, требующий для реализации минимальной (в определенном смысле) памяти, и установлена его высокая вычислительная эффективность.

Излагаемые в § 1.3 понятия и определения следуют работам [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]; они наиболее близки к понятию чисто асинхронной итерации [Baudet, 1977, 1978]. Введенное в § 1.5 понятие оператора сдвига заимствовано нами из теории дифференциальных уравнений [Красносельский М., 1960]. Некоторые из изложенных в § 1.6 свойств рассинхронизованных импульсных систем обсуждались в работах [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]. Обсуждения пунктов 1.6.11–1.6.14 следуют работе [Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]. Обобщение понятия рассинхронизованной системы в пункте 1.7.1 следует работе [Красносельский А., 1985], близкие конструкции рассматривались в [Baudet, 1977, 1978; Chazan, Miranker, 1969; Tsitsiklis, Bertsekas, Athans, 1986].

Глава 2

Устойчивость рассинхронизованных систем

Примеры предыдущей главы показывают, что свойства систем импульсных уравнений резко меняются при рассинхронизации. Решения синхронизованных систем при рассинхронизации в общем случае не сохраняются. Поэтому особое значение приобретают вопросы о характере изменения качественных свойств решений систем импульсных уравнений при рассинхронизации. К ним отнесем в первую очередь вопросы существования и количества положений равновесия импульсных систем уравнений и их устойчивость.

В настоящей главе введены основные понятия теории устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений. Существенную часть главы составляют примеры. Эти примеры показывают, что вопросы теории устойчивости, имеющие для разностных или дифференциальных уравнений естественные ответы и простые решения, в случае рассинхронизованных систем импульсных уравнений зачастую перестают быть таковыми. Читателю, знакомому с теорией устойчивости разностных или обыкновенных дифференциальных уравнений приведенные примеры на первых порах покажутся экзотическими.

§ 2.1. Основные понятия

2.1.1. Рассмотрим рассинхронизованную систему импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[T_i^n, \xi_1(T_i^n - 0), \ldots, \xi_N(T_i^n - 0)], \tag{2.1.1}$$

где при каждом значении $i = 1, 2, \ldots, N$ функция $\xi_i(t)$ постоянна на интервалах $T_i^n < t < T_i^{n+1}$, $-\infty < n < \infty$, и принимает значения в некотором координатном пространстве $\mathbb{R}^{m_i}$.

Предполагаем, что функция

$$\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_N(t)\}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

является решением системы уравнений (2.1.1) при всех возможных последовательностях моментов коррекции компонент $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Это предположение равносильно системе равенств:

$$\varphi_i(t, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad -\infty < t < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.1.2}$$

Равенства (2.1.2) заведомо выполняются, если уравнения (2.1.1) автономны и нулевая функция является решением этих уравнений хотя бы для одного набора последовательностей моментов коррекции компонент $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^{m_i}$ значений компоненты ξ_i системы уравнений (2.1.1) определена некоторая норма $|\cdot|$. Норму вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$, где $\xi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, определим в этом случае равенством

$$\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_N|.$$

Норма вектора ξ может быть определена и по-другому, например, с помощью одного из соотношений:

$$\|\xi\| = \max_i |\xi_i|, \qquad \|\xi\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_N|^2},$$

а также другими способами. Необходимо иметь в виду, что пространство $\mathbb{X}$ значений вектора x конечномерно (его можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_N} = \mathbb{R}^{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$). Поэтому, как известно из функционального анализа, все нормы в нем эквивалентны; выбор же одной или другой нормы определяется ее удобством для проведения тех или иных оценок.

Положение равновесия $\xi = 0$ (нулевое решение) рассинхронизованной системы импульсных уравнений (2.1.1) назовем *устойчивым* при $t > t_0$, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для каждого решения $\xi(t)$ системы (2.1.1), удовлетворяющего условию $\|\xi(t_0 + 0)\| < \delta$, справедливы оценки:

$$\|\xi(t_0 + 0)\| < \varepsilon, \qquad t_0 < t < \infty.$$

Так как решение $\xi(t)$ рассинхронизованной системы импульсных уравнений является по определению кусочно-постоянной функцией, то предел $\xi(t+0) = \lim_{s\to 0,\, s>0} \xi(t+s)$ определен при всех значениях t. В отличие от $\xi(t+0)$ функция $\xi(t)$ не определяется однозначно в моменты коррекции ее компонент. Вследствие этого вводить понятие устойчивости разумно в терминах функции $\xi(t+0)$, а не $\xi(t)$.

Положение равновесия $\xi = 0$ рассинхронизованной системы импульсных уравнений назовем *асимптотически устойчивым* при $t > t_0$, если оно устойчиво при этих значениях t и существуют такие $\delta_0 > 0$ и положительная при $\varepsilon > 0$ функция $\rho(\varepsilon)$, что из $\|\xi(t_0+0)\| < \delta_0$ следуют неравенства

$$\|\xi(t_0+0)\| < \varepsilon, \qquad \rho(\varepsilon) < t - t_0 < \infty.$$

В терминах оператора сдвига $\Phi(t, s; \xi)$ условие устойчивости может быть записано в виде:

$$\sup_{t>t_0} \|\Phi(t, t_0; \xi)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to 0. \tag{2.1.3}$$

Для формулировки условия асимптотической устойчивости положения равновесия $\xi = 0$ системы (2.1.1) в терминах оператора сдвига необходимо к (2.1.3) добавить условие:

$$\sup_{\xi:\|\xi\|<\delta_0} \|\Phi(t, t_0; \xi)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2.1.4}$$

Как отмечалось в гл. 1, основным инструментом исследования рассинхронизованных систем импульсных уравнений для нас будет эквивалентное векторное разностное уравнение

$$x(n+1) = f[n, x(n)] \tag{2.1.5}$$

с правой частью, определяемой по правой части исходной системы уравнений (2.1.1) и моментам коррекции компонент $\{T_i^n\}$ с помощью равенств (1.4.1).

Обозначим через $\{T^n\}$ упорядоченную по возрастанию последовательность моментов коррекции всех компонент системы (2.1.1), фиксированную условием: $T^{-1} < 0 \le T^0$ (см. пункт 1.4.1). Через n_0 обозначим целое число, определяемое неравенствами: $T^{n_0-1} \le t_0 < T^{n_0}$.

2.1.2. Теорема. *Положение равновесия* $\xi = 0$ *рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (2.1.1) *устойчиво (асимптотически устойчиво) при* $t > t_0$*, если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) при* $n \ge n_0$ *положение равновесия* $x = 0$ *разностного уравнения* (2.1.5).

Условия устойчивости и асимптотической устойчивости уравнения (2.1.5) можно выразить в терминах оператора перехода $F(n,m;x)$ этого уравнения в виде, аналогичном условиям (2.1.3) и (2.1.4). Так, условием устойчивости нулевого решения уравнения (2.1.5) является соотношение

$$\sup_{n\geq n_0} \|F(n,n_0;x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{2.1.6}$$

Для получения условия асимптотической устойчивости нулевого решения к (2.1.6) достаточно добавить соотношение

$$\sup_{x:\|x\|<\delta_0} \|F(n,n_0;x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.1.7}$$

Оператор перехода разностного уравнения (2.1.5) может быть определен по правой части этого уравнения (а значит и по правым частям уравнений (2.1.1)) с помощью явного выражения (см. формулу (1.1.10)):

$$F(n,k;x) = f(n-1, f(n-2, \dots f(k,x)\dots)).$$

Поэтому с формальной точки зрения выражения (2.1.6) и (2.1.7) содержат полную информацию для решения вопроса об устойчивости положения равновесия. Однако в большинстве случаев вопрос заключается в определении условий устойчивости в терминах уравнения (2.1.1), а это оказывается непростой задачей.

§ 2.2. Устойчивость при разных начальных временах

Пусть положение равновесия $\xi = 0$ рассинхронизованной системы импульсных уравнений (2.1.1) устойчиво при $t > t_0$. В общем случае это не означает, что положение равновесия будет устойчивым при $t > t_1$, где $t_1 \neq t_0$.

2.2.1. Предположим, что правые части уравнений (2.1.1) — функции

$$\varphi_i(t,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_N), \qquad i = 1,2,\dots,N,$$

непрерывны по пространственным переменным. Пусть положение равновесия $\xi = 0$ рассинхронизованной системы импульсных уравнений (2.1.1) устойчиво (или асимптотически устойчиво) при $t > t_0$. Тогда оно устойчиво (асимптотически устойчиво) и при $t > t_1$, если только момент времени t_1 не превосходит t_0. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вытекающее из полугруппового свойства оператора сдвига (см. теорему 1.5.4) равенство

$$\sup_{t \geq t_1} \|\Phi(t, t_1; \xi)\| = \max \left\{ \sup_{t_0 \geq t \geq t_1} \|\Phi(t, t_1; \xi)\|, \sup_{t \geq t_0} \|\Phi[t, t_0; \Phi(t_0, t_1; \xi)]\| \right\}.$$

Здесь первое выражение под знаком максимума стремится к нулю при $\xi \to 0$ по теореме 1.5.4. По этой же теореме $\Phi(t_0, t_1; \xi) \to 0$ при $\xi \to 0$, откуда в силу устойчивости положения равновесия $\xi = 0$ при $t > t_0$ стремится к нулю и второе выражение под знаком максимума (см. (2.1.3)). Следовательно,

$$\sup_{t \geq t_1} \|\Phi(t, t_1; \xi)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to 0,$$

т.е. положение равновесия устойчиво при $t > t_1$. Аналогично, из асимптотической устойчивости положения равновесия при $t > t_0$ следует его асимптотическая устойчивость при $t > t_1$.

Несколько сложнее вопрос о том, при каких условиях из устойчивости положения равновесия при $t > t_0$ следует устойчивость этого положения равновесия при $t > t_1$, где $t_1 > t_0$.

Обозначим через Ω множество типов $\omega(T^n)$ моментов коррекции системы (2.1.1). Каждому типу $\omega \in \Omega$ отвечает ω-помесь

$$\varphi_\omega(t, \xi) = \{\varphi_{\omega 1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_N), \ldots, \varphi_{\omega N}(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)\}$$

отображения $\varphi(t, \xi)$ с компонентами $\varphi_{\omega i}(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$, определяемыми равенствами

$$\varphi_{\omega i}(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \begin{cases} \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_N) & \text{при} \quad i \in \omega, \\ \xi_i & \text{при} \quad i \notin \omega. \end{cases}$$

Назовем правые части системы уравнений (2.1.1) *невырожденными* относительно последовательности $\{T^n\}$ моментов коррекции, если при всех $t \in \{T^n\}$, $\omega \in \Omega$ вектор-функция $\varphi_\omega(t, \xi)$ является гомеоморфизмом (т.е. непрерыным отображением, имеющим однозначное непрерывное обратное) в некоторой окрестности нуля $\xi = 0$.

2.2.2. Теорема. *Пусть функции $\varphi_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ в правой части системы импульсных уравнений* (2.1.1) *непрерывны по пространственным переменным ξ_1, ξ_2, …, ξ_N при каждом значении t. Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения при $t > t_0$ следует* *его устойчивость (асимптотическая устойчивость) при $t > t_1$ для любого $t_1 \le t_0$. Если правые части уравнений* (2.1.1) *невырождены относительно $\{T^n\}$, то из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения при $t > t_0$ следует его устойчивость (асимптотическая устойчивость) при $t > t_1$ для любого $t_1 > t_0$.*

Первое утверждение теоремы уже доказано. Для доказательства второго утверждения заметим, что при каждом n имеет место включение $\omega(T^n) \in \Omega$. Тогда в силу невырожденности правых частей уравнений (2.1.1) при малых $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ определены и непрерывны отображения $f^{-1}(n, x)$, обратные к отображениям $f(n, x)$ в уравнении (2.1.5). Следовательно, при $n \ge m$ и малых x определены и непрерывны обратные к операторам перехода $F(n, m; x)$ операторы

$$F^{-1}(n, m; x) = f^{-1}(m, f^{-1}(m+1, \dots f^{-1}(n-1, x) \dots)).$$

Представим теперь при $n > m$ оператор перехода $F(k, n; x)$ в виде

$$F(k, n; x) = F(k, m; F^{-1}(n, m; x)].$$

Тогда в силу непрерывности $F^{-1}(n, m; x)$ соотношение

$$\sup_{k \ge m} \|F(k, m; x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0$$

влечет соотношение

$$\sup_{k \ge n} \|F(k, n; x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Отсюда при подходящем выборе n и m (в силу (2.1.6) и теоремы 2.1.2) следует устойчивость нулевого решения системы (2.1.1) при $t > t_1 > t_0$. Аналогично из асимптотической устойчивости нулевого решения при $t > t_0$ выводится его асимптотическая устойчивость при $t > t_1 > t_0$. Теорема 2.2.2 доказана. □

Смысл условия невырожденности правых частей системы импульсных уравнений (2.1.1) заключается, как мы видели, в возможности «обращения времени» в разностном уравнении (2.1.5).

Приведем примеры условий, обеспечивающих невырожденность правых частей уравнений системы (2.1.1).

2.2.3. Пример. Рассмотрим полностью рассинхронизованную систему уравнений (2.1.1).

а. Пусть компоненты ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, скалярные. Тогда необходимым и достаточным условием невырожденности правых частей является строгая монотонность (возрастание или убывание — безразлично) каждой функции $\varphi_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ по одноименной переменной ξ_i при каждом t и малых $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N$.

б. Пусть компоненты ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, векторные. Тогда для невырожденности правых частей необходимо и достаточно, чтобы каждая функция $\varphi_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ являлась гомеоморфизмом по одноименной переменной ξ_i при каждом t и малых $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N$.

Если в некоторый момент времени подвергаются коррекции одновременно две или более компоненты системы (2.1.1), то приведенные в примере критерии невырожденности правых частей перестают быть справедливыми. В этих случаях требуются другие условия невырожденности. Часто такие условия формулируются в терминах системы первого приближения (или линеаризации) к системе уравнений (2.1.1).

Говорят, что функция $\varphi(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ *дифференцируема* при $t = t^0$, $\xi = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_N^0\}$ по (векторным) переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, если найдутся такие матрицы a_i, что

$$\varphi(t^0, \xi_1^0 + \eta_1, \ldots, \xi_N^0 + \eta_N) = \varphi(t^0, \xi_1^0, \ldots, \xi_N^0) + \sum_{i=1}^{N} a_i \eta_i + \nu(\eta_1, \ldots, \eta_N)$$

для всех малых $\eta_1, \ldots, \eta_N$, где

$$\frac{\|\nu(\eta_1, \ldots, \eta_N)\|}{|\eta_1| + \cdots + |\eta_N|} \to 0 \quad \text{при} \quad |\eta_1| + \cdots + |\eta_N| \to 0.$$

В этом случае матрицы a_i называют частными производными функции φ по ξ_i. В случае скалярных переменных ξ_i матрицы a_i становятся числами

$$a_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(t^0, \xi_1^0, \ldots, \xi_N^0),$$

поэтому и в случае векторных переменных для обозначения a_i будем использовать символ $\partial\varphi/\partial\xi_i$.

Пусть функции $\varphi_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ непрерывно дифференцируемы по $\xi_1, \ldots, \xi_N$ при всех t и малых $\xi_1, \ldots, \xi_N$, т.е. при этих значениях t и ξ_i определены частные производные $\partial\varphi(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)/\partial\xi_i$, являющиеся непрерывными функциями переменных $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Положим

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial\varphi(t, 0, \ldots, 0)}{\partial\xi_i}.$$

Рассинхронизованную систему линейных импульсных уравнений

$$\eta_i(T_i^n + 0) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(T_i^n)\eta_j(T_i^n - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2.1}$$

назовем системой *первого приближения* к системе (2.1.1) (или линеаризацией системы (2.1.1)).

2.2.4. Пример. Если правые части системы первого приближения невырождены относительно некоторых моментов коррекции $\{T^n\}$, то и правые части исходной системы импульсных уравнений (2.1.1) невырождены относительно $\{T^n\}$.

Это утверждение является следствием теоремы о неявной функции, доказываемой в курсах математического анализа.

2.2.5. Пример. а. Пусть компоненты η_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, системы первого приближения (2.2.1) скалярные. Если при каждом значении t выполнены условия Адамара

$$|a_{ii}(t)| > \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}(t)|, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2.2}$$

или

$$|a_{jj}(t)| > \sum_{i=1, i\neq j}^{N} |a_{ij}(t)|, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2.3}$$

то правые части линейной рассинхронизованной системы (2.2.1) невырождены относительно любой последовательности моментов коррекции.

б. Пусть компоненты η_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, системы первого приближения (2.2.1) векторные и $|\cdot|_i$ — некоторая норма в пространстве $\mathbb{R}^{m_i}$ значений компоненты η_i. Определим норму $\|a_{ij}(t)\|_{ij}$ матрицы $a_{ij}(t)$ равенством:

$$\|a_{ij}(t)\|_{ij} = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m,\, |\eta|_j=1} \frac{|a_{ij}(t)\eta|_i}{|\eta|_j}.$$

Если при каждом значении t матрицы $a_{ii}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, обратимы и выполнены блочные условия Адамара

$$\|a_{ii}^{-1}(t)\|_{ii}^{-1} > \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \|a_{ij}(t)\|_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2.4}$$

или более слабые условия

$$1 > \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \|a_{ii}^{-1}(t)a_{ij}(t)\|_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.2.5}$$

то правые части системы уравнений (2.2.1) невырождены относительно любой последовательности моментов коррекции.

Неравенства (2.2.4) и (2.2.5) являются блочными аналогами неравенств (2.2.2). Естественно, можно выписать и блочные аналоги неравенств (2.2.3).

2.2.6. Пример. Пусть компоненты η_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, системы импульсных уравнений (2.2.1) скалярные. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Если при всех значениях t матрица $A(t) = (a_{ij}(t))$ положительно определена (т.е. $\langle A(t)\eta, \eta\rangle > 0$ при всех $\eta \neq 0$), либо отрицательно определена (т.е. $\langle A(t)\eta, \eta\rangle < 0$ при всех $\eta \neq 0$), то правые части системы уравнений (2.2.1) невырождены относительно любой последовательности моментов коррекции.

Отметим, что матрица $A(t)$ в этом примере не обязана быть симметричной. Условие положительной (отрицательной) определенности матрицы A выполнены, если и только если все собственные значения ее симметричной части $B = (A + A^*)/2$ положительны (отрицательны).

2.2.7. Пример. Пусть компоненты η_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, системы импульсных уравнений (2.2.1) скалярные. Если при каждом значении t внедиагональные элементы матрицы $A(t) = (a_{ij}(t))$ неотрицательны и найдутся такие числа $s_1(t), \ldots, s_N(t)$, что

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)s_j(t) < 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то правые части системы импульсных уравнений (2.2.1) невырождены относительно любой последовательности моментов коррекции.

§ 2.3. Равномерная устойчивость

Пусть нулевое решение рассинхронизованной системы импульсных уравнений (2.1.1) устойчиво при $t > t_0$. Тогда вектор $\xi(t)$ решения системы (2.1.1), попавший в момент времени $t_0 + 0$ в достаточно малую δ-окрестность нуля (т.е. $\|\xi(t_0 + 0)\| < \delta$), не выйдет во все последующие моменты времени из некоторой достаточно малой ε-окрестности нуля: $\|\xi(t + 0)\| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$). Число $\delta > 0$ зависит от ε, и чем меньше выбирается $\varepsilon > 0$, тем меньше должно быть и δ. В общем случае δ зависит также и от момента времени t_0. В параграфе продолжается изучение зависимости устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений при $t > t_0$ от начального времени t_0. Основное внимание уделяется анализу зависимости числа δ от t_0.

2.3.1. Нулевое решение $\xi = 0$ системы импульсных уравнений (2.1.1) назовем *равномерно устойчивым*, если любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что для каждого решения $\xi(t)$ системы (2.1.1) неравенство $\|\xi(s + 0)\| < \delta$ влечет выполнение неравенства $\|\xi(t + 0)\| < \varepsilon$ при любых s и t, удовлетворяющих соотношениям: $s \le t < \infty$.

Нулевое решение $\xi = 0$ системы импульсных уравнений (2.1.1) назовем *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и найдутся такие $\delta_0 > 0$ и положительная при $\varepsilon > 0$ функция $\rho(\varepsilon)$, что для каждого решения $\xi(t)$ системы (2.1.1) неравенство $\|\xi(s+0)\| < \delta_0$ влечет выполнение неравенства $\|\xi(t+0)\| < \varepsilon$ при любых s и t, удовлетворяющих соотношениям: $\rho(\varepsilon) + s \le t < \infty$.

Как видно, нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво, если оно равномерно устойчиво и все решения импульсной системы равномерно быстро стремятся к нулю по мере удаления t от s.

2.3.2. Пример. Рассмотрим линейное скалярное уравнение вида (2.1.1): $\xi(T^n + 0) = \varphi(T^n)\xi(T^n - 0)$.

а. Если $\varphi(t) = t\sin(t) + (|t| + \pi/2)^{-1}\cos(t)$ и $T^n = \pi n/2$ при $-\infty < n < \infty$, то рассматриваемое уравнение устойчиво, но не является равномерно устойчивым.

б. Если $\varphi(t) = t(|t| + 1)^{-1}$ и $T^n = n$ при $-\infty < n < \infty$, то рассматриваемое уравнение асимптотически устойчиво, но не является равномерно асимптотически устойчивым.

Представляется естественным привлечь для анализа условий равномерной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений эквивалентные разностные уравнения.

2.3.3. Теорема. *Нулевое решение рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (2.1.1) *равномерно устойчиво, если и только если равномерно устойчиво нулевое решение эквивалентного разностного уравнения* (2.1.5).

После этой теоремы, возможно, неожиданным покажется следующий пример, демонстрирующий, что из равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения эквивалентного разностного уравнения не следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения рассинхронизованной системы импульсных уравнений.

2.3.4. Пример. Рассмотрим линейное скалярное импульсное уравнение вида (2.1.1):

$$\xi(T^n + 0) = \lambda\xi(T^n - 0),$$

где $|\lambda| < 1$. Независимо от выбора моментов коррекции T^n эквивалентное разностное уравнение $x(n + 1) = \lambda x(n)$ равномерно асимптотически устойчиво. Если $T^n = n$ при $-\infty < n < \infty$, то исходное импульсное уравнение также равномерно асимптотически устойчиво. Если же $T^n = n^2$ при $-\infty < n < \infty$, то исходное импульсное уравнение не является равномерно асимптотически устойчивым при $t > t_0$ для любого t_0.

Возрастающую числовую последовательность $\{\alpha_n\}$ назовем *равномерно возрастающей*, если $|\alpha_n - \alpha_m| \to \infty$ тогда и только тогда, когда $|n - m| \to \infty$.

2.3.5. Теорема. *Пусть последовательность* $\{T^n\}$ *моментов коррекции рассинхронизованной системы* (2.1.1) *равномерно возрастает. Тогда нулевое решение этой системы равномерно асимптотически устойчиво, если и только если равномерно асимптотически устойчиво нулевое решение эквивалентного разностного уравнения* (2.1.5).

Доказательство. Пусть равномерно асимптотически устойчиво нулевое решение эквивалентного разностного уравнения (2.1.5). Тогда нулевое решение рассинхронизованной системы (2.1.1) по теореме 2.3.3 равномерно устойчиво. Поэтому нуждается в доказательстве только равномерность стремления к нулю при $t \to \infty$ решений системы (2.1.1). По предположению о равномерной асимптотической устойчивости разностного уравнения (2.1.5) существуют такие $\delta_0 > 0$ и функция $N(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что для каждого решения $x(n)$ уравнения (2.1.5) из неравенств $\|x(m)\| < \delta_0$, $N(\varepsilon) + m \le n$ следует неравенство $\|x(n)\| < \varepsilon$. Выберем произвольное s и рассмотрим решение $\xi(t)$ рассинхронизованной системы (2.1.1), удовлетворяющее условию: $\|\xi(s+0)\| < \delta_0$. Выберем целое число m, при котором $T^{m-1} \le s < T^m$, и рассмотрим решение $x(n)$ разностного уравнения, удовлетворяющее условию: $x(m) = \xi(s + 0)$. По теоремам 1.4.3 и 1.5.2

$$\xi(t) = x(n) \quad \text{при} \quad T^{n-1} < t < T^n, \qquad -\infty < n < \infty.$$

В силу равномерности возрастания последовательности $\{T^n\}$ для каждого $N = N(\varepsilon)$ найдется такое число $\rho = \rho(\varepsilon)$, что неравенство $|T^n - T^m| > \rho(\varepsilon)$ влечет неравенство $|n - m| > N(\varepsilon)$. Но тогда при $t > \rho(\varepsilon) + s$ выполняется цепочка равенств: $\|\xi(t + 0)\| = \|\xi(T^n - 0)\| = \|x(n)\|$, где t и n связаны соотношениями $T^{n-1} < t < T^n$. По выбору $\rho(\varepsilon)$, тогда $n > N(\varepsilon) + m$ и, следовательно, $\|\xi(t + 0)\| = \|x(n)\| < \varepsilon$.

В одну сторону утверждение теоремы доказано. Доказательство теоремы в другую сторону проводится аналогично. Теорема доказана. □

С помощью приводимой ниже леммы проверка равномерности возрастания последовательности моментов коррекции осуществляется достаточно легко.

2.3.6. Лемма. *Возрастающая последовательность $\{\alpha_n\}$ равномерно возрастает, если и только если найдутся такие положительные числа r, R и M, что $R(n - m) \ge \alpha_n - \alpha_m \ge r(n - m)$ при $n - m \ge M$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение леммы очевидно. Докажем, что из равномерности возрастания последовательности $\{\alpha_n\}$ вытекают требуемые оценки. Заметим сначала, что соотношение $\alpha_n - \alpha_m \to \infty$ влечет соотношение $n - m \to \infty$. Поэтому разности $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ равномерно ограничены сверху некоторой константой R. Но тогда

$$\alpha_n - \alpha_m = (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \cdots + (\alpha_{m+1} - \alpha_m) \le$$
$$\le R + R + \cdots + R = R(n - m).$$

Одна из требуемых оценок доказана.

Так как соотношение $n - m \to \infty$ влечет соотношение $\alpha_n - \alpha_m \to \infty$, то найдется такое число M, что при $n - m \geq M$ выполняется неравенство $\alpha_n - \alpha_m \geq 1$. Возьмем теперь произвольные два числа n и m, удовлетворяющие условию $n - m \geq M$ и представим разность $\alpha_n - \alpha_m$ в виде:

$$\alpha_n - \alpha_m = (\alpha_n - \alpha_{kM+m}) + (\alpha_{kM+m} - \alpha_{(k-1)M+m}) + \cdots + (\alpha_{M+m} - \alpha_m),$$

где $k = [(n - m)/M]$ — целая часть числа $(n - m)/M$. Из полученного представления видно, что $\alpha_n - \alpha_m \geq k$. Но

$$k \geq \frac{n-m}{M} - 1 \geq \frac{n-m}{2M}$$

при $n - m \geq 2M$. Поэтому при $n - m \geq 2M$ выполняется неравенство $\alpha_n - \alpha_m \geq r(n - m)$, где $r = 1/(2M)$. Лемма доказана. □

Для возрастающих последовательностей $\{\alpha_n\}$ неравенство $R(n - m) \geq \alpha_n - \alpha_m$ при $n - m \geq M$ равносильно неравенству $\alpha_{n+1} - \alpha_n \leq R$, $-\infty < n < \infty$. Последнее неравенство проще проверять.

Если нулевое решение системы импульсных уравнений (2.1.1) равномерно асимптотически устойчиво, то последовательность $\{T^n\}$ моментов коррекции удовлетворяет при некотором R неравенству $T^{n+1} - T^n \leq R$. Действительно, выберем $\varepsilon < \delta_0$ и рассмотрим произвольное решение $\xi(t)$ системы (2.1.1), удовлетворяющее соотношениям $\varepsilon < \|\xi(s + 0)\| < \delta_0$. Тогда при $t = s + 2\rho(\varepsilon)$ имеют место неравенства $\|\xi(t + 0)\| < \varepsilon < \|\xi(s + 0)\|$. Следовательно, на отрезке $(s, t]$ решение $\xi(t)$ претерпевает по крайней мере одну коррекцию. Так как длина этого отрезка не превосходит $2\rho(\varepsilon)$, а момент времени s произвольный, то $T^{n+1} - T^n \leq 2\rho(\varepsilon)$ при любом целом n.

2.3.7. Пример. а. Пусть последовательности $\{T_1^n\}$ и $\{T_2^n\}$ равномерно возрастают. Если последовательность $\{T^n\}$ образована упорядочением по возрастанию чисел T_i^n, где $i = 1$, 2, $-\infty < n < \infty$, то она также равномерно возрастает.

б. Пусть последовательности $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, имеют вид: $T_i^n = nh_i + \tau_i$, где $h_i > 0$. Если последовательность $\{T^n\}$ образована упорядочением по возрастанию чисел T_i^n, где $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$, то она также равномерно возрастает.

Пример 2.3.7б показывает, что изучение равномерной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем с фазочастотной рассинхронизацией всегда сводится к исследованию равномерной асимптотической устойчивости эквивалентного разностного уравнения.

Частным случаем равномерной асимптотической устойчивости является устойчивость экспоненциальная. Скажем, что нулевое решение рассинхронизованной системы импульсных уравнений (2.1.1) *экспоненциально устойчиво*, если найдутся такие положительные числа $\lambda < 1$, δ_0 и q, что неравенство $\|\xi(s+0)\| < \delta_0$ влечет неравенство $\|\xi(t+0)\| \leq q\lambda^{t-s}\|\xi(s+0)\|$ при всех $s \leq t$.

Аналогом теоремы 2.3.5 для случая экспоненциальной устойчивости является приводимая ниже теорема 2.3.8. При ее доказательстве существенна лемма 2.3.6.

2.3.8. Теорема. *Пусть последовательность* $\{T^n\}$ *моментов коррекции рассинхронизованной импульсной системы* (2.1.1) *равномерно возрастает. Тогда нулевое решение этой системы экспоненциально устойчиво, если и только если экспоненциально устойчиво нулевое решение эквивалентного разностного уравнения* (2.1.5).

В одном частном случае равномерная асимптотическая устойчивость равносильна экспоненциальной устойчивости.

2.3.9. Теорема. *Линейная рассинхронизованная система импульсных уравнений равномерно асимптотически устойчива, если и только если она экспоненциально устойчива.*

В формулировке этой теоремы говорится не об устойчивости нулевого решения, а об устойчивости всей системы, так как решения линейной системы либо одновременно неустойчивы, либо одновременно устойчивы (равномерно, асимптотически, экспоненциально и т.д.).

В случае равномерного возрастания моментов коррекции $\{T^n\}$ рассматриваемой в теореме 2.3.9 линейной системы (2.2.1) доказательство теоремы можно провести следующим образом. По теоремам 2.3.5 и 2.3.8 равномерная асимптотическая устойчивость и экспоненциальная устойчивость системы (2.2.1) имеет место, если и только если соответствующим свойством обладают решения эквивалентного разностного уравнения. Но в силу теоремы 1.2.8 эквивалентное разностное уравнение равномерно асимптотически устойчиво, если и только если оно экспоненциально устойчиво. Следовательно, и исходная рассинхронизованная система импульсных уравнений равномерно асимптотически устойчива, если и только если она экспоненциально устойчива.

Отметим, что утверждение теоремы 2.3.9 справедливо и без каких-либо предположений о свойствах последовательности моментов коррекции.

В этом случае доказательство проводится непосредственно для рассматриваемой импульсной системы (2.2.1) (без перехода к эквивалентному разностному уравнению) по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.2.7. При этом используется лишь полугрупповое свойство оператора сдвига системы (2.2.1) и его линейность по пространственной переменной.

Теорема 2.3.9 отчасти объясняет интерес к понятию равномерной асимптотической устойчивости. По теореме 2.3.5 равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы импульсных уравнений (2.1.1) равносильна равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения эквивалентного разностного уравнения (2.1.5), которая, в свою очередь, согласно теоремам 1.2.11 и 1.2.13 равносильна существованию функции Ляпунова (обладающей рядом свойств). Связь между равномерной асимптотической устойчивостью и геометрически наглядным вопросом о существовании функции Ляпунова — второй факт, объясняющий интерес к понятию равномерной асимптотической устойчивости.

Из всего множества утверждений, вытекающих из существования функции Ляпунова для разностного уравнения, эквивалентного рассинхронизованной системе (2.1.1), отметим лишь одно — теорему об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим рассинхронизованную импульсную систему с векторными компонентами

$$\xi_i(T_i^n+0)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(T_i^n)\xi_j(T_i^n-0)+\psi_i[T_i^n,\xi_1(T_i^n-0),\ldots,\xi_N(T_i^n-0)], \quad (2.3.1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть при всех достаточно малых $\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_N\}$ равномерно по $t\in(-\infty,\infty)$ для функций $\psi_i(t,\xi_1,\ldots,\xi_N)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, выполняются оценки

$$|\psi_i(t,\xi_1,\ldots,\xi_N)|\le\gamma(|\xi_1|+\cdots+|\xi_N|). \quad (2.3.2)$$

Тогда система импульсных уравнений (2.3.1) имеет нулевое решение. Рассмотрим наряду с (2.3.1) рассинхронизованную систему линейных импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n+0)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(T_i^n)\xi_j(T_i^n-0). \quad (2.3.3)$$

2.3.10. Теорема. *Пусть моменты коррекции* $\{T^n\}$ *рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (2.3.1) *равномерно возрастают. Если рассинхронизованная система уравнений первого приближения* (2.3.3) *равномерно асимптотически устойчива, то при малых* γ *нулевое решение системы* (2.3.1) *также равномерно асимптотически устойчиво (причем экспоненциально).*

2.3.11. Пример. Пусть правые части уравнений (2.1.1) обладают частными производными $\partial\varphi_i(t,\xi_1,\ldots,\xi_N)/\partial\xi_j$ по пространственным переменным $\xi_1,\ldots,\xi_N$ при всех значениях t и малых $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Пусть эти частные производные равномерно по $t \in (-\infty,\infty)$ непрерывны по пространственным переменным. Тогда система импульсных уравнений (2.1.1) допускает представление (2.3.1), (2.3.2) со сколь угодно малой константой γ, где матрицы $a_{ij}(t)$ определяются равенствами $a_{ij}(t) = \partial\varphi_i(t,0,\ldots,0)/\partial\xi_j$.

Приведенный пример представляет наиболее распространенную ситуацию, в которой применима теорема 2.3.10. Специально остановимся на важном случае автономной системы уравнений (2.3.1). Рассмотрим рассинхронизованную систему импульсных уравнений с векторными компонентами

$$\xi_i(T_i^n+0) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\xi_j(T_i^n-0) + \psi_i[\xi_1(T_i^n-0),\ldots,\xi_N(T_i^n-0)], \qquad (2.3.4)$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть при малых $\xi_1, \ldots, \xi_N$ для функций $\psi_i(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ справедливы оценки

$$|\psi_i(\xi_1,\ldots,\xi_N)| \le \gamma(|\xi_1|+\cdots+|\xi_N|), \qquad i = 1,2,\ldots,N. \qquad (2.3.5)$$

Рассмотрим наряду с (2.3.4) автономную рассинхронизованную систему линейных импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n+0) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\xi_j(T_i^n-0), \qquad i = 1,2,\ldots,N. \qquad (2.3.6)$$

2.3.12. Теорема. *Пусть моменты коррекции* $\{T^n\}$ *рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (2.3.4) *равномерно возрастают. Если система уравнений первого приближения* (2.3.6) *равномерно асимптотически устойчива, то и нулевое решение системы* (2.3.4) *равномерно асимптотически устойчиво (причем экспоненциально) при всех достаточно малых значениях* γ.

Пусть в исходной системе импульсных уравнений (2.3.4) вектор-функции $\psi_i(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ линейные. Тогда систему можно представить в виде

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\xi_j(T_i^n - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.3.7}$$

Условие (2.3.5) в этом случае приобретает форму

$$\left|\sum_{j=1}^{N}(b_{ij} - a_{ij})\xi_j\right| \le \gamma(|\xi_1| + \cdots + |\xi_N|), \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

и его можно записать следующим образом: $\|B - A\| \le \gamma$, где A и B - соответственно матрицы с элементами a_{ij} и b_{ij}. Следствием теоремы 2.3.12 является следующий важный результат.

2.3.13. Теорема. *Пусть моменты коррекции* $\{T^n\}$ *рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (2.3.6) *равномерно возрастают, а сама она равномерно асимптотически устойчива. Тогда любая близкая (в смысле близости по норме матриц правых частей) к ней рассинхронизованная система импульсных уравнений* (2.3.7) *также равномерно асимптотически устойчива.*

Эта теорема допускает обобщение на случай линейных неавтономных рассинхронизованных систем импульсных уравнений; на соответствующей формулировке не останавливаемся.

Теорема 2.3.13 показывает, что множество равномерно асимптотически устойчивых линейных рассинхронизованных систем открыто в пространстве линейных рассинхронизованных систем.

До сих пор не приводилось никаких примеров конкретных классов систем импульсных уравнений с равномерно асимптотически устойчивыми решениями. Обычно равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения имеет место в случае автономных систем — разностных или дифференциальных. К сожалению, эквивалентные разностные уравнения рассинхронизованных систем импульсных уравнений автономны лишь в исключительных случаях (см. лемму 1.6.3). Поэтому даже для автономной рассинхронизованной системы импульсных уравнений вопрос о равномерной устойчивости ее нулевого решения непрост.

Приведем несколько примеров, в которых равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения следует из свойств правых частей импульсных уравнений (2.1.1) — функций $\psi_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ — при весьма слабых предположениях относительно моментов коррекции.

2.3.14. Рассмотрим сначала линейную автономную рассинхронизованную систему импульсных уравнений (2.3.6). Как обычно, будем считать компоненты ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, векторными со значениями в пространствах $\mathbb{R}^{m_i}$, $m_i \geq 1$. В этом случае элементы a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})$ правой части системы (2.3.6) сами являются матрицами размера $m_i \times m_j$. Напомним, что через $\rho(A)$ обозначается спектральный радиус матрицы A. Если A — число, то $\rho(A)$ — абсолютная величина A.

2.3.15. Пример. Пусть при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ последовательность $\{T^n\}$ равномерно возрастает. Пусть система импульсных уравнений (2.3.6) диагональная, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Если $\rho(a_{ii}) < 1$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$, то система (2.3.6) равномерно асимптотически устойчива.

Для доказательства достаточно заметить, что рассматриваемая система (2.3.6) распадается на N не связанных друг с другом синхронизованных импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = a_{ii}\xi_i(T_i^n - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Поэтому система (2.3.6) равномерно асимптотически устойчива, если и только если равномерно асимптотически устойчивы указанные импульсные уравнения. Но каждое из этих импульсных уравнений эквивалентно разностному уравнению $x(n+1) = a_{ii}x(n)$, и потому (в силу теорем 2.3.8 и 1.2.3) равномерно асимптотически устойчиво при $\rho(a_{ii}) < 1$.

Следствием приведенного примера является следующее утверждение.

2.3.16. Пример. Пусть при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ последовательность $\{T^n\}$ равномерно возрастает. Пусть система импульсных уравнений (2.3.6) треугольная, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i > j$, либо $a_{ij} = 0$ при $i < j$. Если $\rho(a_{ii}) < 1$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$, то система (2.3.6) равномерно асимптотически устойчива.

Если $|\cdot|_i$ — норма, заданная в пространстве $\mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то норма $\|a_{ij}\|_{ij}$ матрицы a_{ij} зависит от норм, заданных в пространствах $\mathbb{R}^{m_i}$ и $\mathbb{R}^{m_j}$ и определяется равенством

$$\|a_{ij}\|_{ij} = \sup_{x \in \mathbb{R}^{m_j}, x \neq 0} \frac{|a_{ij}x|_i}{|x|_j}.$$

Из примера 2.3.15 и теоремы 2.3.13 вытекает утверждение следующего примера.

2.3.17. Пример. Пусть при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ последовательность $\{T^n\}$ равномерно возрастает. Пусть система импульсных уравнений (2.3.6) удовлетворяет условиям: $\rho(a_{ii}) < 1$ при $i = 1, 2, \ldots, N$ и $\|a_{ij}\|_{ij} < \gamma$ при $i \neq j$. Если γ достаточно мало, то система (2.3.6) равномерно асимптотически устойчива.

§ 2.4. Устойчивость при фазочастотной рассинхронизации

В примерах предыдущего параграфа равномерность асимптотической устойчивости явилась следствием свойств правых частей импульсных уравнений. При этом оказалось, что нулевое решение рассинхронизованной системы с правой частью, обладающей этими свойствами, равномерно асимптотически устойчиво при почти любых последовательностях моментов коррекции компонент. Другие примеры утверждений такого рода приведены в гл. 5.

Интерес представляют утверждения и другого типа, в которых равномерность асимптотической устойчивости нулевого решения является следствием каких-либо свойств моментов коррекции компонент. В этом параграфе обсуждаются три подобных утверждения. Первые два достаточно просты, третье требует развития специальной техники.

2.4.1. Рассмотрим рассинхронизованную автономную систему импульсных уравнений с векторными компонентами

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[\xi_1(T_i^n - 0), \dots, \xi_N(T_i^n - 0)], \qquad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.4.1}$$

Всюду в этом параграфе предполагается, что функции $\varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_N)$ обращаются в нуль при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_N = 0$. В этом случае система уравнений (2.4.1) обладает нулевым решением $\xi(t) \equiv 0$. Функции $\varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_N)$ будем считать непрерывными при всех значениях переменных.

Исследование устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений (2.4.1) удобно проводить в терминах эквивалентного разностного уравнения

$$x(n+1) = f[n, x(n)], \tag{2.4.2}$$

компоненты $f_i(n, x) = f_i(n, x_1, \dots, x_N)$ правой части которого определяются, как показано в § 1.4, равенствами

$$f_i(n, x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \varphi_i(x_1, \dots, x_N) & \text{при} \quad i \in \omega(T^n), \\ x_i & \text{при} \quad i \notin \omega(T^n). \end{cases} \tag{2.4.3}$$

При каждом n множество $\omega(T^n)$ номеров компонент, подвергающихся коррекции в момент времени T^n, является подмножеством множества целых чисел $\{1, 2, \dots, N\}$. Поэтому в последовательности $\{\omega(T^n)\}$ имеется лишь конечное число различных элементов. Из этого факта, а также формулы (2.4.3) следует лемма.

2.4.2. Лемма. *Множество функций $\{f(n, \cdot)\}$, $-\infty < n < \infty$, состоит из конечного числа элементов.*

Оператор перехода $F(n, m; x)$ разностного уравнения (2.4.2) имеет вид (см. равенство (1.4.6))

$$F(n, m; x) = f(n-1, f(n-2, \dots f(m, x) \dots)).$$

По лемме 2.4.2 при каждом натуральном k в последовательности $\{F(m + k, m; x)\}$ имеется лишь конечное число различных элементов. Значит, при каждом натуральном k и каждом неотрицательном ε определено и конечно число

$$\nu(k, \varepsilon) = \sup_{-\infty<m<\infty,\, \|x\|<\varepsilon} \|F(m + k, m; x)\|,$$

называемое k-м *модулем непрерывности* оператора перехода $F(n, m; x)$.

Основные свойства модулей непрерывности оператора перехода сведем в следующую лемму.

2.4.3. Лемма. *Пусть функции $\varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_N)$, $i = 1, 2, \dots, N$, непрерывны и обращаются в нуль при $\xi_1 = \dots = \xi_N = 0$. Тогда*

а) $\nu(k, 0) = 0$, $\nu(k, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $k = 1, 2, \dots;$

б) функции $\nu(k, \varepsilon)$ не убывают по ε при каждом $k = 1, 2, \dots;$

в) $\nu(k + s, \varepsilon) \le \nu[k, \nu(s, \varepsilon)]$.

Первое утверждение леммы является следствием непрерывности при каждом n вектор-функций $f(n, x)$ и конечности числа различных элементов в последовательности $\{f(n, \cdot)\}$. Второе утверждение следует из определения модулей непрерывности. Третье утверждение вытекает из полугруппового свойства оператора перехода.

Модули непрерывности удобны при изучении равномерной устойчивости разностного уравнения. Так нулевое решение разностного уравнения (2.4.2) равномерно устойчиво, если и только если при каждом малом $\varepsilon > 0$ величина

$$\nu(\varepsilon) = \sup_{k\ge1} \nu(k, \varepsilon)$$

конечна и обладает свойством:

$$\nu(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.4.4}$$

Нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво, если и только если в дополнение к (2.4.4) при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполняется соотношение:

$$\nu(k, \varepsilon_0) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

2.4.4. Теорема. *Пусть система импульсных уравнений* (2.4.1) *рассинхронизована по фазе. Если нулевое решение устойчиво (асимптотически устойчиво) при $t > t_0$ для некоторого t_0, то оно равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво).*

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение (2.4.2). Так как система импульсных уравнений (2.4.1) рассинхронизована по фазе, то (см. пример 2.3.7б) последовательность ее моментов коррекции равномерно возрастает. Значит, по теоремам 2.1.2, 2.3.3 и 2.3.5 для доказательства теоремы достаточно показать, что из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения разностного уравнения (2.4.2) при $n > n_0$ вытекает его равномерная устойчивость (равномерная асимптотическая устойчивость).

Так как система импульсных уравнений (2.4.1) рассинхронизована по фазе, то по следствию 1 из теоремы 1.6.8 для оператора перехода разностного уравнения (2.4.2) при некотором целом L справедливо равенство

$$F(n + L, m + L; x) = F(n, m; x), \qquad n \geq m. \tag{2.4.5}$$

Зафиксируем пару целых чисел $n \geq m$ и выберем целое число k, удовлетворяющее неравенствам $n_0 + (k-1)L < m \leq n_0 + kL$. Положим $m_0 = n_0 + kL$. Тогда в силу полугруппового свойства оператора перехода при $n \geq m_0$ имеет место равенство:

$$F(n, m; x) = F[n, m_0; F(m_0, m; x)].$$

Отсюда и из (2.4.5) получаем:

$$F(n, m; x) = F[n - kL, n_0; F(m_0, m; x)], \qquad n \geq m_0. \tag{2.4.6}$$

По определению числа m_0 разность $m_0 - m$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq m_0 - m \leq L$. Поэтому

$$\|F(n, m; x)\| \leq \max_{1 \leq k \leq L} \nu(k, \|x\|), \qquad m + 1 \leq n \leq m_0. \tag{2.4.7}$$

Пусть теперь нулевое решение уравнения (2.4.2) устойчиво при $n \geq n_0$. Тогда, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta > 0$, что $\|F(n, n_0; x)\| < \varepsilon$ при $\|x\| < \delta$. Выберем теперь число δ_1 так, чтобы выполнялись неравенства $\max_{1 \leq k \leq L} \nu(k, \delta_1) \leq \min\{\varepsilon, \delta\}$. Тогда при $m + 1 \leq n \leq m_0$ и $\|x\| < \delta_1$ в силу неравенства (2.4.7) будет выполняться неравенство $\|F(n, m; x)\| < \min\{\varepsilon, \delta\}$. При $n = m_0$ это неравенство примет вид:

$\|F(m_0, m; x)\| < \delta$. Следовательно, при $n \geq m_0$ в силу (2.4.6) и выбора δ будет выполняться неравенство $\|F(n, m; x)\| < \varepsilon$. Таким образом, $\|F(n, m; x)\| < \varepsilon$ при $\|x\| < \delta_1$ и произвольных $n \geq m$. Равномерная устойчивость нулевого решения уравнения (2.4.2) доказана.

Осталось доказать, что из асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.4.2) при $n \geq n_0$ следует его равномерная асимптотическая устойчивость. Поскольку нулевое решение асимптотически устойчиво, то существуют такое $\delta_0 > 0$ и такая функция $N(\varepsilon) > 0$, что $\|F(n, n_0; x)\| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$, $\|x\| < \delta_0$. Выберем число $\delta^0 > 0$ так, чтобы при $1 \leq k \leq L$ выполнялись неравенства $\nu(k, \delta^0) < \delta_0$. Тогда в силу (2.4.6), (2.4.7) при $\|x\| < \delta^0$ и $n - kL > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $\|F(n, m; x)\| < \varepsilon$. Но по определению числа k справедлива оценка $kL \geq n - m_0$; поэтому неравенство $n - kL > N(\varepsilon)$ заведомо выполняется, если $n > [N(\varepsilon) - n_0] + m$.

Итак, при $\|x\| < \delta^0$, $n > [N(\varepsilon) - n_0] + m$ выполняется неравенство $\|F(n, m; x)\| < \varepsilon$. Равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (2.4.2) доказана. Теорема доказана. □

2.4.5. Рассмотрим теперь рассинхронизованную по фазе и частоте систему импульсных уравнений (2.4.1). Пусть моменты коррекции компонент имеют вид $T_i^n = nh_i + \tau_i$, где $h_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Напомним, что два числа α и β называются *соизмеримыми*, если при некоторых целых ненулевых m и n имеет место равенство $\alpha m = \beta n$.

2.4.6. Пример. а. Любые два рациональных числа соизмеримы.

б. Числа 1 и $\sqrt{2}$ несоизмеримы.

2.4.7. Теорема. *Пусть система импульсных уравнений* (2.4.1) *рассинхронизована по фазе и частоте, причем периоды коррекции любых двух ее компонент соизмеримы. Если нулевое решение устойчиво (асимптотически устойчиво) при $t > t_0$ для некоторого t_0, то оно равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво).*

Наименьшим общим кратным чисел $h_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, называется наименьшее $H > 0$, делящееся нацело на каждое h_i. Для существования наименьшего общего кратного чисел h_i необходимо и достаточно, чтобы они были попарно соизмеримы. Обозначим через L число всех различных моментов коррекции системы (2.4.1), попавших в интервал $(0, H]$.

2.4.8. Лемма. *Если периоды коррекции компонент рассинхронизованной по фазе и частоте импульсной системы уравнений* (2.4.1) *попарно соизмеримы, то правая часть эквивалентного разностного уравнения* (2.4.2) *периодична по первому аргументу с периодом L.*

Приведенная лемма вытекает из определения (2.4.3) правой части эквивалентного разностного уравнения. Доказательство теоремы 2.4.7 проводится дословным повторением доказательства теоремы 2.4.4, опиравшегося лишь на факт периодичности правой части эквивалентного разностного уравнения.

2.4.9. Двухкомпонентные системы. Исследование устойчивости фазочастотно рассинхронизованных систем импульсных уравнений усложняется, если некоторые из периодов коррекции их компонент несоизмеримы. Проанализируем простейшую из таких ситуаций — когда система импульсных уравнений (2.4.1) имеет всего две компоненты, причем периоды их коррекции несоизмеримы. В этом случае система (2.4.1) приобретает вид:

$$
\begin{aligned}
\xi_1(T_1^n + 0) &= \varphi_1[\xi_1(T_1^n - 0), \xi_2(T_1^n - 0)],\\
\xi_2(T_2^n + 0) &= \varphi_2[\xi_1(T_2^n - 0), \xi_2(T_2^n - 0)],
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

где $T_1^n = nh_1 + \tau_1$, $T_2^n = nh_2 + \tau_2$ при $-\infty < n < \infty$.

2.4.10. Теорема. *Пусть двухкомпонентная система импульсных уравнений* (2.4.8) *рассинхронизована по фазе и частоте. Пусть ее правые части невырождены относительно моментов коррекции компонент. Тогда из асимптотической устойчивости нулевого решения при $t > t_0$ для некоторого t_0 следует его равномерная асимптотическая устойчивость.*

Если периоды коррекции h_1 и h_2 системы (2.4.8) соизмеримы, то утверждение теоремы 2.4.10 вытекает из теоремы 2.4.7. Пусть периоды h_1 и h_2 несоизмеримы. Здесь возможны два случая — когда система (2.4.8) полностью рассинхронизована, и когда она не является полностью рассинхронизованной.

Если система (2.4.8) полностью рассинхронизована (т.е. $T_1^n \neq T_2^k$ при $-\infty < n, k < \infty$), то условия невырожденности ее правых частей сформулированы в примере 2.2.3б.

Если система импульсных уравнений (2.4.8) не является полностью рассинхронизованной, то в некоторый момент времени t_* подвергаются коррекции обе ее компоненты, т.е. $t_* = T_1^{n_*} = T_2^{k_*}$. В этом случае для невырожденности правых частей системы уравнений (2.4.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия примера 2.2.3б и, кроме того, отображение

$$\{\xi_1, \xi_2\} \mapsto \{\varphi_1(\xi_1, \xi_2), \varphi_2(\xi_1, \xi_2)\}$$

являлось гомеоморфизмом в окрестности нуля. Из несоизмеримости периодов h_1 и h_2 вытекает, что момент времени t_*, а с ним и целые числа n_* и k_*, определяются однозначно.

В условиях теоремы 2.4.10 нулевое решение по теореме 2.2.2 асимптотически устойчиво при $t > t_0$ для любого t_0. Когда система импульсных уравнений (2.4.8) полностью рассинхронизована, выбор t_0 несуществен. Но если система (2.4.8) не является полностью рассинхронизованной, то в качестве t_0 целесообразно взять t_* с тем, чтобы при $t > t_0$ компоненты системы (2.4.8) не подвергались коррекции одновременно.

Метод доказательства равномерной устойчивости нулевого решения системы импульсных уравнений (2.4.8) основан на переходе к некоторому разностному уравнению, отличающемуся от вида уравнений (2.4.2), (2.4.3). Приступим к построению этого разностного уравнения. Пусть $\Phi(t, s; \xi)$ — оператор перехода системы (2.4.8). Не ограничивая общности, можно считать, что $h_2 < h_1$. Положим

$$g(n, x) = \Phi(T_2^n, T_2^{n-1}; x)$$

и рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = g[n, x(n)]. \tag{2.4.9}$$

2.4.11. Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.10*. Тогда нулевое решение уравнения* (2.4.9) *асимптотически устойчиво при* $n \geq n_0$ *для любого* n_0*; нулевое решение уравнения* (2.4.9) *равномерно асимптотически устойчиво, если и только если равномерно асимптотически устойчиво нулевое решение рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (2.4.8).

Очевидная по своей сути лемма 2.4.11 позволяет свести вопрос о равномерной устойчивости нулевого решения системы (2.4.8) к аналогичному вопросу для разностного уравнения (2.4.9). Изучение свойств этого уравнения, а также доказательство теоремы 2.4.10 проведем в следующем параграфе.

§ 2.5. Теорема о равномерно полных словарях

В параграфе развивается основанная на идеях символической динамики техника анализа динамики разностного уравнения (2.4.9). Доказывается теорема 2.4.10.

2.5.1. Пусть даны два числа p и q, причем $q > 0$. Через $p \pmod q$ обозначают число вида $p + nq$, где n — целое, попадающее в промежуток $[0, q)$. Величина $p \pmod q$ всегда определена, притом однозначно.

2.5.2. Пример. Если $0 \le p < 1$, то $p \pmod 1 = p$. Если $k \le p < k + 1$, где k — целое, то $p \pmod 1 = p - k$.

Циклическим сдвигом отрезка [0,1) на величину η называется отображение $x \to S_\eta(x)$, задаваемое функцией

$$S_\eta(x) = x + \eta \pmod 1.$$

Отображение $S_\eta(x)$ разрывно и взаимно-однозначно на отрезке [0,1). Обратным к нему является отображение $x \to S_{-\eta}(x)$ — это вытекает из справедливого при всех вещественных η и ν соотношения

$$S_\eta[S_\nu(x)] = S_{\eta+\nu}(x).$$

Пусть $0 \le x \le y < 1$. Если при этом $0 \le S_\eta(x) \le S_\eta(y) < 1$, то $S_\eta(y) - S_\eta(x) = y - x$; если же $0 \le S_\eta(y) < S_\eta(x) < 1$, то $1 + S_\eta(y) - S_\eta(x) = y - x$. Когда хотят сослаться на свойство, выраженное последними двумя равенствами, говорят, что отображение $S_\eta(x)$ *сохраняет расстояние*.

Выберем произвольную точку $x_0 \in [0, 1)$ и построим бесконечную в обе стороны последовательность $\{x_n\}$, полагая $x_{n+1} = S_\eta(x_n)$ при $n \ge 0$ и $x_{n-1} = S_{-\eta}(x_n)$ при $n < 0$. Последовательность $\{x_n\}$ может быть определена также при всех целых значениях n равенством

$$x_n = x_0 + n\eta \pmod 1.$$

Необходимые для дальнейших построений свойства последовательности $\{x_n\}$ содержатся в следующей лемме.

2.5.3. Лемма. *a. Если $x_n = x_{n+k}$ при некоторых целых n и k, то последовательность $\{x_n\}$ периодична с периодом k, т.е. $x_n = x_{n+k}$ при всех n; последовательность $\{x_n\}$ периодична тогда и только тогда, когда число η рационально.*

б. Если η иррационально, то $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$ и множество точек $\{x_n\}$ плотно в полуинтервале [0,1).

в. Если η иррационально и $0 \leq \alpha < \beta < 1$, то существует такое $k = k(\eta, \alpha, \beta)$, что для любой точки $x_0 \in [0,1)$ среди чисел x_n, x_{n+1}, $\ldots$, x_{n+k-1} по крайней мере одно попадает в интервал (α, β).

Вернемся к разностному уравнению (2.4.9). Зададимся целым числом n и обозначим через t_n наибольший из моментов коррекции T_1^k первой компоненты, не превосходящий T_2^n. Положим $\alpha_n = (T_2^n - t_n)/h_1$ при $-\infty < n < \infty$. Так как числа T_1^k имеют вид $T_1^k = kh_1 + \tau_1$, то $T_2^n - h_1 < t_n \leq T_2^n$. Поэтому $0 \leq \alpha_n < 1$.

Существует простая связь между свойствами последовательности $\{\alpha_n\}$ и видом функции $g(n,x)$. Положим $\eta = h_2/h_1$.

2.5.4. Лемма. *Пусть $0 < h_2 < h_1$. Тогда*

а. $\alpha_{n+1} = S_\eta(\alpha_n)$ при всех целых n.

б. Если $\alpha_n = 0$, то $g(n,x) = \{\varphi_1(x_1,x_2), \varphi_1(x_1,x_2)\}$; если $0 < \alpha_n < \eta$, то $g(n,x) = \{\varphi_1(x_1,x_2), \varphi_2[\varphi_1(x_1,x_2), x_2]\}$; если $\eta \leq \alpha_n < 1$, то $g(n,x) = \{x_1, \varphi_2(x_1,x_2)\}$.

Доказательство. а. Зададимся некоторым $\alpha_n = (T_2^n - t_n)/h_1$ и найдем α_{n+1}. Для этого необходимо вычислить t_{n+1}. Число t_{n+1} — это наибольшее из чисел вида $t_n + kh_1$, где $k = 0, 1, \ldots$, не превосходящих T_2^n. Из соотношений $T_2^{n+1} = T_2^n + h_2$, $T_2^n - h_1 < t_n \leq T_2^n$ и $h_2 < h_1$ видна возможность только двух ситуаций: $t_{n+1} = t_n$ и $t_{n+1} = t_n + h_1$. Действительно, $t_n + kh_1 > T_2^n - h_1 + kh_1 > T_2^n + h_2 + (kh_1 - h_1 - h_2) > T_2^n + h_2$ при $k \geq 2$. Если $t_{n+1} = t_n$, то $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \eta \pmod 1 = S_\eta(\alpha_n)$. Если же $t_{n+1} = t_n + h_1$, то $\alpha_{n+1} = (T_2^{n+1} - t_{n+1})/h_1 = (T_2^n - t_n + h_2 - h_1)/h_1 = \alpha_n + \eta - 1$. И снова в силу неравенств $0 \leq \alpha_{n+1} < 1$ получаем, что $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \eta \pmod 1 = S_\eta(\alpha_n)$. Утверждение а леммы доказано.

б. Обозначим через $\{T^m\}$ последовательность всех моментов коррекции компонент рассинхронизованной импульсной системы (2.4.8). Зафиксируем некоторое целое n. Тогда найдется q, при котором $T^q = T_2^n$.

Если $\alpha_n = 0$, то $T_1^k = T_2^n$ при некотором целом k. Следовательно, при $T_2^{n-1} < t \leq T_2^n$ рассинхронизованная импульсная система (2.4.8) подвергается коррекции лишь один раз — в момент времени $t = T_2^n = T^q$. Причем в этот момент подвергаются коррекции сразу обе компоненты. Значит,

$$g(n,x) = \Phi(T_2^n, T_2^{n-1}, x) = \Phi(T^q, T^{q-1}, x) = F(q+1, q, x),$$

где $F(n,m,x)$ — оператор перехода эквивалентного разностного уравнения. Но, в силу (1.4.1) и (1.4.6),

$$F(q+1, q, x) = f(q,x) = \{\varphi_1(x_1,x_2), \varphi_2(x_1,x_2)\}.$$

Если $0 < \alpha_n < \eta$, то $T_2^{n-1} < T_1^k < T_2^n$ при некотором целом k. Следовательно, при $T_2^{n-1} < t \le T_2^n$ рассинхронизованная импульсная система (2.4.8) имеет два момента коррекции. Сначала при $t = T_1^k = T^{q-1}$ происходит коррекция первой компоненты, а затем при $t = T_2^n = T^q$ — второй. Тогда $T_2^{n-1} = T^{q-2}$ и $g(n, x) = \Phi(T_2^n, T_2^{n-1}, x) = \Phi(T^q, T^{q-2}, x) = F(q+1, q-1, x)$. В силу (1.4.1) и (1.4.6) получаем, что

$$F(q+1, q-1, x) = f[q, f(q-1, x)],$$

где

$$f(q, x) = \{x_1, \varphi_2(x_1, x_2)\}, f(q-1, x) = \{\varphi_1(x_1, x_2), x_2\}.$$

Отсюда

$$g(n, x) = f[q, f(q-1, x)] = \{\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2[\varphi_1(x_1, x_2), x_2]\};$$

Если $\eta \le \alpha_n < 1$, то при $T_2^{n-1} < t \le T_2^n$ рассинхронизованная импульсная система (2.4.8) имеет единственный момент коррекции $t = T_2^n = T^q$, в который изменяется вторая компонента. Значит, $T_2^{n-1} = T^{q-1}$ и

$$g(n, x) = \Phi(T_2^n, T_2^{n-1}, x) = \Phi(T^q, T^{q-1}, x) = F(q+1, q, x).$$

Отсюда, так же, как и выше, получаем, что

$$g(n, x) = f(q, x) = \{x_1, \varphi_2(x_1, x_2)\}.$$

Лемма доказана. □

2.5.5. Обозначим через $G(n, m; x)$ оператор перехода уравнения (2.4.9). В силу (1.1.10) он имеет вид

$$G(n, m; x) = g(n-1, g(n-2, \ldots, g(m, x) \ldots)). \tag{2.5.1}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$, состоящее из символов A, B и C. Сопоставим оператору перехода $G(n; m, x)$ конечный набор символов $\{s_m, \ldots, s_{n-2}, s_{n-1}\}$, определяемый следующим образом:

$$s_k = \begin{cases} A, & \text{если} \quad g(k, x) = \{\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2[\varphi_1(x_1, x_2), x_2]\}, \\ B, & \text{если} \quad g(k, x) = \{\varphi_1(x_1, x_2), x_2\}, \\ C, & \text{если} \quad g(k, x) = \{\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_1(x_1, x_2)\}, \end{cases}$$

где $m \le k \le n-1$. Полученный таким образом набор символов назовем *словом оператора перехода* $G(n; m, x)$. В силу леммы 2.5.4 определение слова оператора перехода корректно. Слово оператора перехода полностью и однозначно определяет структуру этого оператора (при данных n и m) в смысле порядка появления вектор-функций $g(k, x)$ в выражении (2.5.1).

2.5.6. Лемма. *а. Символ s_k совпадает с A, если и только если $\eta \le \alpha_k < 1$; символ s_k совпадает с B, если и только если $0 < \alpha_k < \eta$; символ s_k совпадает с C, если и только если $\alpha_k = 0$.*

б. Если $q \ge n \ge m$ и $\{s_m, \dots, s_{n-2}, s_{n-1}\}$ — слово оператора $G(n, m; x)$, а $\{s_n, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}\}$ — слово оператора $G(q, n; x)$, то

$$\{s_n, \dots, s_{n-2}, s_{n-1}s_n, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}\}$$

— слово оператора $G(q, n; x)$.

Утверждение а этой леммы непосредственно вытекает из определений последовательности $\{\alpha_n\}$ и слова оператора перехода, а также из леммы 2.5.4. Утверждение б является следствием полугруппового свойства оператора перехода.

Лемма 2.5.6 устанавливает связь между порядком следования вектор-функций $g(k, x)$ в выражении (2.5.1) и порядком попадания членов последовательности $\{\alpha_n\}$ в одно из множеств: $[\eta, 1), (0, \eta)$ и $\{0\}$. Поэтому изучим порядок попадания членов последовательности $\{\alpha_n\}$ в указанные множества.

Множество $\mathfrak{A}$, состоящее из конечного числа некоторых символов назовем *алфавитом*. Упорядоченный конечный набор символов алфавита $\mathfrak{A}$ назовем *словом*, а бесконечный — *текстом*. Непустое множество текстов назовем *библиотекой*. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый набор слов. Назовем $\mathfrak{M}$ словарем текста $t = \{s_0, s_1, \dots\}$, если найдутся такие натуральные числа $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$, что каждое слово $\{s_{n_k}, \dots, s_{n_{k+1}-1}\}$, $k = 0, 1, \dots$, принадлежит $\mathfrak{M}$. Назовем $\mathfrak{M}$ полным словарем некоторой библиотеки $\mathfrak{L}$, если для любого текста $t = \{s_0, s_1, \dots\}$ из $\mathfrak{L}$ найдется такое натуральное число $N = N(\mathfrak{M}, t)$, что $\mathfrak{M}$ является словарем «хвоста» $t' = \{s_N, s_{N+1}, \dots\}$ текста t. Если при этом числа $N(\mathfrak{M}, t)$ равномерно ограничены при всех $t \in \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{M}$ называется *равномерно полным словарем* библиотеки $\mathfrak{L}$.

2.5.7. Пример. а. Пусть множество $\mathfrak{M}$ состоит из двух слов: $\{A\}$ и $\{B\}$. Тогда $\mathfrak{M}$ является словарем любой последовательности символов A и B.

б. Пусть последовательность $\{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ символов A и B периодична с периодом p, т.е. $s_{n+p} = s_n$ при $n \ge 0$. Тогда в качестве словаря этой последовательности можно взять слово $\{s_0, s_1, \dots, s_{p-1}\}$.

в. Пусть последовательность $\{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ символов A и B периодична с периодом p, начиная с некоторого $n = k$, т.е. $s_{n+p} = s_n$ при $n \ge k$. Тогда слова $\{s_0, \dots, s_{k-1}\}$, $\{s_k, \dots, s_{k+p-1}\}$ образуют словарь рассматриваемой последовательности.

Разобьем отрезок [0,1) на две непересекающиеся и взаимно дополняющие друг друга части — отрезок $[0, \eta)$ и отрезок $[\eta, 1)$. *Сдвиговым текстом* (порожденным сдвигом $S_\eta(x)$ и отвечающим точке $\alpha \in [0,1)$) назовем последовательность

$$\mathrm{text}(\alpha) = \{s_0(\alpha), s_1(\alpha), \dots, s_n(\alpha), \dots\}$$

символов A и B, определяемую соотношениями: $s_n(\alpha) = B$ при $S_{n\eta}(\alpha) \in [0,\eta)$ и $s_n(\alpha) = A$ при $S_{n\eta}(\alpha) \in [\eta, 1)$. Символы $\{s_n(\alpha)\}$ можно определить также следующим образом: $s_n(\alpha) = B$ при $\alpha_n \in [0,\eta)$ и $s_n(\alpha) = A$ при $\alpha_n \in [\eta, 1)$, если предварительно построить по точке $\alpha_0 = \alpha$ последовательность $\alpha_{n+1} = S_\eta(\alpha_n)$, $n = 0, 1, \dots$.

При каждом натуральном n сдвиговый текст точки α может быть представлен в виде объединения двух частей — начального отрезка

$$\mathrm{text}_n(\alpha) = \{s_0(\alpha), s_1(\alpha), \dots, s_{n-1}(\alpha)\}$$

и “хвоста” $\{s_n(\alpha), s_{n+1}(\alpha), \dots\}$.

Множество всех сдвиговых текстов $\mathrm{text}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$), назовем *библиотекой сдвига* $S_\eta(x)$ и обозначим через $\mathfrak{L}_\eta$.

2.5.8. Теорема (о равномерно полных словарях)**.** *Для любого $x \in [0,1)$, $x \neq \eta$, найдутся сколь угодно большие натуральные числа $\beta \neq \gamma$, при которых множество $\mathfrak{M} = \{\mathrm{text}_\beta(x), \mathrm{text}_\gamma(x)\}$ образует равномерно полный словарь библиотеки сдвига $\mathfrak{L}_\eta$. При этом $N[\mathfrak{M}, \mathrm{text}(y)] \le \max\{\beta,\gamma\} - 1$ для любого $y \in [0,1)$.*

Теорема о равномерно полных словарях оставляет в стороне случай $x = \eta$. Назовем слово $\mathrm{text}^s_n(\alpha) = \{s, s_0(\alpha), \dots, s_{n-1}(\alpha)\} = \{s, \mathrm{text}_n(\alpha)\}$ *s-пополнением слова* $\mathrm{text}_n(\alpha)$.

Следствие. *Найдутся сколь угодно большие натуральные числа $\beta \neq \gamma$, при которых слова $\mathrm{text}^B_\beta(\eta)$, $\mathrm{text}^B_\gamma(\eta)$ образуют равномерно полный словарь библиотеки сдвига $\mathfrak{L}_\eta$.*

В формулировке теоремы о равномерно полных словарях точка $x = \eta$ занимает особое положение. Иногда удобно, чтобы такая «особая» точка лежала на границе интервала $[0,1)$. Этого легко добиться, введя на $[0,1)$ новую систему координат $\tilde{x}$ с помощью взаимно-однозначного разрывного преобразования $\tilde{x} = x - \eta \pmod 1$, где x — старая координата на $[0,1)$. Рассмотрев теперь формулировку теоремы о равномерно полных словарях, в которой в качестве η взято число $1-\eta$, и заметив, что отображения циклического сдвига $S_{1-\eta}(x)$ и $S_{-\eta}(x)$ совпадают, нетрудно прийти к следующей эквивалентной формулировке теоремы о равномерно полных словарях.

2.5.9. Теорема. *Для любого* $x \in (0,1)$ *найдутся сколь угодно большие натуральные числа* $\beta \neq \gamma$*, при которых множество* $\mathfrak{M} = \{\mathrm{text}_\beta(x), \mathrm{text}_\gamma(x)\}$ *образует равномерно полный словарь библиотеки сдвига* $\mathfrak{L}_{-\eta}$*. При этом* $N[\mathfrak{M}, \mathrm{text}(y)] \le \max\{\beta,\gamma\} - 1$ *для любого* $y \in [0,1)$.

Следствие. *Найдутся сколь угодно большие натуральные числа* $\beta \neq \gamma$*, при которых слова* $\mathrm{text}^A_\beta(0)$*,* $\mathrm{text}^A_\gamma(0)$ *образуют равномерно полный словарь библиотеки сдвига* $\mathfrak{L}_{-\eta}$*.*

Для упрощения обозначений при доказательстве теоремы 2.5.9 отображение $S_{-\eta}(x)$ обозначим через Sx, а обратное к нему — через $S^{-1}x$. Через $S^n x$ обозначим n-ю операторную степень отображения Sx, т.е. отображение, определяемое при $n \ge 1$ рекуррентно по формуле: $S^n x = S(S^{n-1}x)$, а при $n \le -1$ по формуле: $S^n x = S^{-1}(S^{n+1}x)$. Полезно помнить, что

$$S^n x = x - n\eta \pmod 1, \qquad S^{-n}x = x + n\eta \pmod 1. \tag{2.5.2}$$

Заметим также, что в условиях теоремы 2.5.9

$$S^{-1}0 = \eta \neq 0, \qquad \mathrm{text}_{n+1}(S^{-1}0) = \mathrm{text}^A_n(0).$$

Отсюда и из теоремы 2.5.9, где взято $x = S^{-1}0 = \eta$, вытекает утверждение следствия.

2.5.10. Для доказательства теоремы 2.5.9 потребуются вспомогательные утверждения и конструкции.

Пару натуральных чисел $\{p,q\}$ назовем *правильной* относительно точки $x \in (0,1)$, если

$$p > q, \quad 0 < S^p x < \eta \le S^q x < 1, \quad S^q x - S^p x < x < 1 + S^p x - S^q x,$$

и

$$S^k x \notin [S^p x, S^q x) \quad \text{при} \quad 0 \le k < p.$$

2.5.11. Лемма. *Для любой точки* $x \in (0,1)$ *найдутся правильные пары* $\{p,q\}$ *со сколь угодно малыми величинами* $S^q x - S^p x$*.*

Пусть $\{p,q\}$ — некоторая правильная относительно точки $x \in (0,1)$ пара. Тогда $S^p x < S^q x$ и, поскольку по лемме 2.5.3 множество точек $\{S^n x\}$, $n = 0, 1, \ldots$, в силу иррациональности η плотно в [0,1), найдется наименьшее $r \ge 0$, при котором $S^p x < S^r x < S^q x$. Положим $x_n = x + \eta - S^n x$ при $n = 0, 1, \ldots$.

2.5.12. Лемма. *Справедливы соотношения:* $0 < x_q < x_r < x_p < 1$, $x_q \le x < x_p$, $r > p > q$.

Рассмотрим интервалы $I = [x_q, x_p)$, $I^0 = (x_q, x_p)$, $I_q = [x_q, x_r)$ и $I_p = [x_r, x_p)$. В силу леммы 2.5.12 определения интервалов корректны.

2.5.13. Лемма. *Справедливы соотношения:*

$$I_p \cap I_q = \emptyset, \qquad I_p \cup I_q = I, \qquad S^{r-p} I_q \subset I, S^{r-q} I_p \subset I,$$

$$\left(\bigcup_{k=0}^{r-p-1} S^k I_q\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{r-q-1} S^k I_p\right) = [0, 1), \qquad \eta \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0.$$

Следствие. *Если* $y \in I$, *то* $\mathrm{text}_n(y) = \mathrm{text}_n(x)$ *при* $1 \le n \le r$.

2.5.14. Доказательство теоремы 2.5.9. Покажем, как из лемм 2.5.11–2.5.13 вытекает утверждение теоремы 2.5.9. Пусть $x \in (0, 1)$ и $\{p, q\}$ — некоторая правильная относительно точки x пара, существование которой гарантируется леммой 2.5.11. Пусть $y \in (0, 1)$. В силу иррациональности η по лемме 2.5.3 множество точек $\{S^n y\}$, $n = 0, 1, \ldots$, плотно в $[0, 1)$. Поэтому при некотором $N = N(y)$ справедливо включение $S^N y \in I$. Положим $N_0 = N$. По лемме 2.5.13 найдется такое N_1, что $S^{N_1} S^{N_0} y \in I$; далее, найдется такое N_2, что $S^{N_2} S^{N_1} S^{N_0} y \in I$, и т.д. При этом по лемме 2.5.13 каждое из чисел N_k равно либо $\beta = r - p$, либо $\gamma = r - q$. Положим $n_k = N_0 + N_1 + \cdots + N_k$ и разобьем последовательность символов

$$\mathrm{text}^N(y) = \{s_N(y), s_{N+1}(y), \ldots\}$$

на части

$$\{s_{n_0}(y), \ldots, s_{n_1-1}(y)\}, \ \{s_{n_1}(y), \ldots, s_{n_2-1}(y)\}, \ \ldots, \{s_{n_k}(y), \ldots, s_{n_{k+1}-1}(y)\}, \ \ldots$$

По построению чисел n_k выполняются включения

$$S^{n_k} y = S^{N_k} S^{N_{k-1}} \ldots S^{N_0} y \in I, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

При этом $n_{k+1} - n_k = \beta$, либо $n_{k+1} - n_k = \gamma$. Значит, в силу следствия из леммы 2.5.13, выполнено равенство

$$\mathrm{text}_{n_{k+1}-n_k}(S^{n_k} y) = \mathrm{text}_{n_{k+1}-n_k}(x).$$

Так как $s_i(S^{n_k} y) = s_{i+n_k}(y)$, то

$$\mathrm{text}_{n_{k+1}-n_k}(S^{n_k} y) = \{s_{n_k}(y), \ldots, s_{n_{k+1}-1}(y)\}.$$

В то же время $n_{k+1} - n_k$ равно либо $\beta = r - p$, либо $\gamma = r - q$. Поэтому $\mathrm{text}_{n_{k+1}-n_k}(x)$ совпадает либо с $\mathrm{text}_\beta(x)$, либо с $\mathrm{text}_\gamma(x)$. Таким образом, пара слов $\mathfrak{M} = \{\mathrm{text}_\beta(x), \mathrm{text}_\gamma(x)\}$ является словарем последовательности $\mathrm{text}^N(y)$.

Заметим теперь, что в силу леммы 2.5.13 по крайней мере одна из точек $y, Sy, \ldots, S^{k-1}y$, где $k = \max\{r-p, r-q\} - 1$, попадает в интервал I. Отсюда сразу следует оценка:

$$N[\mathfrak{M}, \mathrm{text}(y)] = N \le \max\{r-p, r-q\} - 1 = \max\{\beta, \gamma\} - 1.$$

Осталось доказать, что числа $\beta = r - p$ и $\gamma = r - q$ могут быть выбраны произвольно большими. Если это не так, то по лемме 2.5.11 найдутся правильные относительно x пары $\{p_n, q_n\}$, для которых $S^{q_n}x - S^{p_n}x \to 0$, и в то же время числа $\beta_n = r_n - p_n > 0$ равномерно ограничены. Тогда без ограничения общности можно считать, что все они совпадают с некоторым числом $\beta_* > 0$, и потому $r_n - p_n = \beta_* > 0$. В силу правильности пары $\{p_n, q_n\}$ и по определению числа r_n справедливы неравенства: $S^{p_n}x < S^{r_n}x < S^{q_n}x$. Отсюда и из соотношения $S^{q_n}x - S^{p_n}x \to 0$ получаем: $S^{r_n}x - S^{p_n}x \to 0$. Так как отображение S сохраняет расстояние, то $S^{r_n}x - S^{p_n}x = S^{r_n - p_n}x - x$. А поскольку при этом $r_n - p_n = \beta_*$, то приходим к выводу, что $S^{\beta_*}x = x$. Это противоречит иррациональности числа η (см. утверждение а леммы 2.5.3). Значит, $\beta_n \to \infty$. Аналогично доказывается, что $\gamma_n \to \infty$. Теорема 2.5.9 доказана. □

Перейдем к доказательству лемм 2.5.11–2.5.13.

2.5.15. Доказательство леммы 2.5.11. Зададимся малым $\varepsilon > 0$, удовлетворяющим неравенствам $\varepsilon < x$, $\varepsilon < 1 - x$. Наименьшее натуральное q, при котором $\eta \le S^q x < \eta + \varepsilon/2$, обозначим через q_1; такое q_1 по лемме 2.5.3 существует в силу плотности множества точек $\{S^n x\}$, $n = 0, 1, \ldots$, в $[0, 1)$. Обозначим через $\mathfrak{P}$ множество таких натуральных p, $p \le q_1$, при которых $\eta - S^p x > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/2, \min_{p \in \mathfrak{P}}[\eta - S^p x]\}$, если в $\mathfrak{P} \ne \emptyset$, и $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ в противном случае. По определению множества $\mathfrak{P}$ число ε_1 удовлетворяет условиям: $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon/2$. При этом $S^p x \notin (\eta - \varepsilon_1, \eta)$ для $p = 0, 1, \ldots, q_1$. Обозначим через p_1 наименьшее натуральное p, для которого $S^p x \in (\eta - \varepsilon_1, \eta)$. В силу выбора ε_1 выполняется неравенство $p_1 > q_1$. Наконец, обозначим через q_2 натуральное q, $q < p_1$, при котором величина $S^q x - \eta$ достигает наименьшего неотрицательного значения. Очевидно, $q_1 \le q_2 < p_1$. По построению чисел p_1 и q_2 выполняются соотношения $h - \varepsilon/2 < S^{p_1}x < \eta < S^{q_2}x < \eta + \varepsilon/2$ и $S^k x \notin [S^{p_1}x, S^{q_2}x)$ при $k = 0, 1, \ldots, p_1 - 1$. Отсюда $0 < S^{q_2}x - S^{p_1}x \le \varepsilon$, и значит, $S^{q_2}x - S^{p_1}x < x < 1 + S^{p_1}x - S^{q_2}x$. Итак, пара $\{p_1, q_2\}$ правильная и $0 < S^{q_2}x - S^{p_1}x \le \varepsilon$. Лемма 2.5.11 доказана. □

2.5.16. Доказательство леммы 2.5.12. Так как пара $\{p, q\}$ правильная относительно x, то $S^p x < \eta \leq S^q x$. По определению, $x_p = x + \eta - S^p x$, $x_q = x + \eta - S^q x$, откуда $x_q \leq x < x_p$. Так как пара $\{p, q\}$ правильна, то выполняется неравенство $S^q x - S^p x < x$, в силу которого $x_q > 0$, и неравенство $x < 1 + S^p x - S^q x$, в силу которого $x_p < 1$. Заменив в неравенствах $S^p x < S^r x < S^q x$, определяющих число r, элементы $S^n x$, $n = p, r, q$, равными им выражениями $x + \eta - x_n$, получим: $x_q < x_r < x_p$. Наконец, в силу правильности пары $\{p, q\}$ включение $S^n x \in (S^p x, S^q x)$ не может выполняться при $0 \leq n \leq p$. Поскольку по определению числа r верно включение $S^r x \in (S^p x, S^q x)$, то $r > p$. Лемма 2.5.12 доказана. □

2.5.17. Доказательство леммы 2.5.13. Соотношения $I_p \cap I_q = \emptyset$ и $I_p \cup I_q = I$ вытекают из определения интервалов I, I_p, I_q и неравенств $x_q < x_r < x_p$ (см. лемму 2.5.12).

Докажем соотношение $\eta \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0$. Пусть оно неверно и $\eta \in S^k I^0$ при некотором $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда по определению интервала I^0 выполняются неравенства $S_q^k x < \eta < S_p^k x$. С другой стороны из леммы 2.5.12 вытекают оценки $x_q \leq x < x_p$, и потому $S^k x_q \leq S^k x < S^k x_p$. Следовательно, имеют место либо неравенства $S^k x_q < \eta \leq S^k x$, либо $S^k x < \eta < S^k x_p$. Рассмотрим оба случая.

Пусть $S_q^k x < \eta \leq S^k x$. Отображение S сохраняет расстояния, поэтому $S^k x - S^k x_q = x - x_q = S^q x - \eta$. Следовательно, $0 \leq S^k x - \eta < S^k x - S^k x_q = S^q x - \eta$, откуда $\eta \leq S^k x < S^q x$. Значит, $S^k x \in (S^p x, S^q x)$, и по определению числа r выполняется неравенство $k \geq r$.

Пусть $S^k x < \eta < S^k x_p$. Так же, как и в предыдущем случае, выводим отсюда неравенства $S^p x < S^k x < \eta$. Значит, $S^k x \in (S^p x, S^q x)$ и снова из определения числа r вытекает неравенство $k \geq r$.

Итак, в любом случае включение $\eta \in S^k I^0$ влечет неравенство $k \geq r$. Следовательно, $\eta \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0$.

Докажем включение $S^{r-q} I_q \subset I$. Покажем вначале, что $S^p x_p = \eta$. Действительно, в силу (2.5.2) $S^p x_p = x_p - p\eta \pmod 1$ и $x_p = x + \eta - S^p x = x + \eta - [x - p\eta] \pmod 1$. Отсюда $S^p x_p = x + \eta - x + p\eta - p\eta \pmod 1 = \eta \pmod 1 = \eta$. Аналогично доказываются соотношения $S^q x_q = S^r x_r = \eta$. Тогда

$$S^{r-p} I_q = [S^{r-p} x_q, S^{r-p} x_r) = [S^{r-p} x_q, S^{-p} S^r x_r) = \\ = [S^{r-p} x_q, S^{-p} \eta) = [S^{r-p} x_q, x_p).$$

Следовательно, интервалы $I = [x_q, x_p)$ и $S^{r-p} I_q$ имеют одинаковые правые концы. Но длина интервала $S^{r-p}I_q$ равна длине интервала $I_q \subset I$. Значит, длина интервала $S^{r-p}I_q$ меньше длины интервала I, откуда $S^{r-p}I_q \subset I$ (см. рис. 2.1).

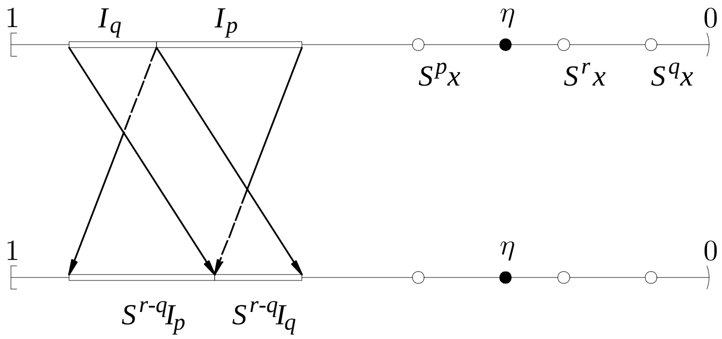

Рис. 2.1. Взаимное расположение интервалов $S^{r-q}I_p$ и $S^{r-p}I_q$

Аналогично доказывается, что интервалы $S^{r-q}I_p$ и I имеют одинаковые левые концы, а длина интервала $S^{r-q}I_p$ меньше длины интервала I. Значит, $S^{r-q}I_p \subset I$.

Докажем последнее утверждение леммы:

$$\left(\bigcup_{k=0}^{r-p-1} S^k I_q\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{r-q-1} S^k I_p\right) = [0, 1).$$

Рассмотрим для произвольной точки $z \in [0, 1)$ последовательность $S^{-k}z$, где $k = 0, 1, \ldots$. В силу иррациональности η найдется наименьшее k, при котором $S^{-k}z \in I$. Пусть, для определенности, $S^{-k}z \in I_q$. Тогда $k \le r - p - 1$. Действительно, если $k \ge r - p$, то в силу соотношения $S^{r-p}I_q \subset I$ будет выполняться включение $S^{r-p-k}z \in I$, что противоречит выбору k. Значит, $z = S^k(S^{-k}z) \in S^k I_q$ при некотором $k \le r - p - 1$. Аналогично доказывается включение $z \in S^k I_p$, где $k \le r-q-1$, в предположении, что $S^{-k}z \in I_p$. Лемма доказана. □

2.5.18. Доказательство следствия из леммы 2.5.13. Покажем, что $0 \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0$. Действительно, по лемме 2.5.13 $\eta \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0$, откуда $0 = S\eta \notin S\left(\bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0\right) = \bigcup_{k=1}^{r} S^k I^0$. Значит, $0 \notin \bigcup_{k=1}^{r-1} S^k I^0$. С другой стороны, по лемме 2.5.12 $0 < x_q < x_p < 1$, откуда $0 \notin (x_q, x_p) = I^0 = S^0 I^0$. Следовательно, $0, \eta \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I^0$. Пусть теперь $y \in I$, тогда $S^k x, S^k y \in S^k I$ при $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Но в силу соотношений $0, \eta \notin \bigcup_{k=0}^{r-1} S^k I$ каждый интервал $S^k I$, $k = 0$, 1,

$\ldots, r-1$, целиком лежит либо в $[0, \eta)$, либо в $[\eta, 1)$. Поэтому $s_k(y) = s_k(x)$ при $k = 0, 1, \ldots, r-1$, откуда $\text{text}_k(y) = \text{text}_k(x)$ при $k = 1, 2, \ldots, r$. Следствие доказано. □

2.5.19. Продолжим вспомогательные построения, необходимые для доказательства теоремы 2.5.9. Введем для суперпозиции $h(x) = f[g(x)]$ отображений $f(x)$ и $g(x)$ обозначение: $h = f \circ g$. Тогда равенство (2.5.1), позволяющее вычислять значения оператора перехода разностного уравнения (2.4.9), можно записать в следующем виде:

$$G(n, m) = g(n-1) \circ g(n-2) \circ \cdots \circ g(m).$$

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n\}$, построенную по исходной рассинхронизованной системе импульсных уравнений (2.4.8). В силу иррациональности числа $\eta = h_2/h_1$ каждое из равенств $\alpha_n = 0$, $\alpha_n = \eta$ может выполняться не более чем для одного значения n (см. лемму 2.5.3). Поэтому существует такое число q, для которого

$$\alpha_n \neq 0, \eta, \quad \text{при} \quad n \geq q. \tag{2.5.3}$$

2.5.20. Лемма (о декомпозиции оператора перехода)**.** *Если $\alpha_i \neq 0$ при $m \leq i < n$, то для любого $N > 0$ найдутся такие целые числа $\gamma \geq \beta \geq N$, что*

$$G(n, m) = G(p_{k+1}, p_k) \circ \cdots \circ G(p_1, p_0), \tag{2.5.4}$$

где

$$\begin{gathered} p_0 = m, \quad p_{k+1} = n, \quad 0 \leq p_1 - p_0, \ p_{i+1} - p_i \leq \gamma, \\ p_{i+1} - p_i = \beta, \quad \textit{либо} \quad p_{i+1} - p_i = \gamma \quad \textit{при} \quad 1 \leq i \leq k-1. \end{gathered} \tag{2.5.5}$$

При этом

$$G(p_{i+1}, p_i) = G(q + p_{i+1} - p_i, q), \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{2.5.6}$$

Смысл леммы 2.5.20 заключается в том, что оператор перехода разностного уравнения (2.4.9) с точностью до начального «сомножителя» $G(p_1, p_0)$ представляется как суперпозиция операторов перехода частного вида — вида $G(n, q)$. Но именно операторы перехода $G(n, q)$ появляются при анализе устойчивости уравнения (2.4.9) на интервале $[q, \infty)$.

Доказательство. Положим $x = \alpha_q$, $y = \alpha_m$. По теореме 2.5.8 (о равномерно полных словарях) найдутся такие целые числа $\beta, \gamma \geq N$, $\beta < \gamma$, при которых слова $\mathrm{text}_\beta(x)$ и $\mathrm{text}_\gamma(x)$ образуют равномерно полный словарь библиотеки сдвига $\mathfrak{L}_\eta$. Поэтому текст $\mathrm{text}(y)$ имеет вид:

$$\mathrm{text}(y) = \{s_{r_0}, \ldots, s_{r_1-1}, s_{r_1}, \ldots, s_{r_1-1}, \ldots, s_{r_k}, \ldots, s_{r_{k+1}-1}, \ldots\}, \qquad (2.5.7)$$

где $r_0 = 0$, а при $i \geq 1$ справедливы равенства либо $\{s_{r_i}, \ldots, s_{r_{i+1}-1}\} = \mathrm{text}_\beta(x)$ либо $\{s_{r_i}, \ldots, s_{r_{i+1}-1}\} = \mathrm{text}_\gamma(x)$. Выберем такое целое k, при котором $r_k < n - m \leq r_{k+1}$, и положим $p_i = m + r_i$ при $0 \leq i \leq k$, $p_{k+1} = n$. Тогда в силу полугруппового свойства оператора перехода имеет место равенство (2.5.4). Из равномерной полноты словаря $\{\mathrm{text}_\beta(x), \mathrm{text}_\gamma(x)\}$ вытекает оценка $p_1 - p_0 = r_1 < \gamma$, а по определению числа p_{k+1} верна цепочка неравенств $p_{k+1} - p_k \leq n - m - r_k \leq r_{k+1} - r_k \leq \gamma$. Остальные соотношения (2.5.5) следуют из определения чисел r_i и p_i.

Докажем равенство (2.5.7). Пусть $W_\beta = \{s'_0, \ldots, s'_{\beta-1}\}$ слово оператора перехода $G(q + \beta, q)$, а $W_\gamma = \{s''_0, \ldots, s''_{\gamma-1}\}$ слово оператора перехода $G(q + \gamma, q)$. По определению, элементами слов W_β и W_γ могут быть символы A, B и C. Из соотношений (2.5.3) и леммы 2.5.6 следует, что символ C ни в одно из слов W_β и W_γ не входит. Поэтому

$$W_\beta = \mathrm{text}_\beta(x) = \mathrm{text}_\beta(\alpha_q), \qquad W_\gamma = \mathrm{text}_\gamma(x) = \mathrm{text}_\gamma(\alpha_q), \qquad (2.5.8)$$

Пусть $W_{n,m} = \{s^*_0, \ldots, s^*_{n-m-1}\}$ — слово оператора перехода $G(n, m)$; по определению оно также состоит из символов A, B и C. По лемме 2.5.6 $s^*_i = A$ при $\alpha_{m+i} \in [\eta, 1)$, $s^*_i = B$ при $\alpha_{m+i} \in (0, \eta)$, $s^*_i = C$ при $\alpha_{m+i} = 0$. Так как по условию леммы $\alpha_i \neq 0$ при $m \leq i < n$, то символ C в слово $W_{n,m}$ не входит. В этом случае $W_{n,m} = \mathrm{text}_{n-m}(\alpha_m)$, и потому в силу (2.5.7), (2.5.8) сомножители $G(p_{i+1}, p_i)$ в (2.5.4) выражаются равенствами (2.5.6) при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Лемма 2.5.20 доказана. □

2.5.21. Доказательство теоремы 2.4.10. По лемме 2.4.11 достаточно показать, что асимптотическая устойчивость нулевого решения разностного уравнения (2.4.9) на некотором интервале $[q, \infty)$ влечет его равномерную асимптотическую устойчивость. При этом в силу невырожденности правой части уравнения (2.4.9) интервал $[q, \infty)$ может быть выбран произвольно. Поэтому число q выберем таким образом, чтобы выполнялись соотношения (2.5.3) — как отмечалось в пункте 2.5.19, это возможно в силу иррациональности η.

Итак, пусть нулевое решение уравнения (2.4.9) асимптотически устойчиво на интервале $[q, \infty)$. Тогда найдется такая определенная при $\varepsilon > 0$

возрастающая функция $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, что для каждого малого ε

$$\|G(n, q; x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|x\| < \delta(\varepsilon). \tag{2.5.9}$$

Кроме того, найдутся такие число $\delta_0 > 0$ и функция $N(\varepsilon) \geq q$, $\varepsilon \geq 0$, что для каждого малого $\varepsilon > 0$ при $\|x\| < \delta_0$, $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|G(n, q; x)\| < \varepsilon$. Но тогда существует такая функция $N_*(\varepsilon)$, что

$$\|G(n, q; x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|x\| < \varepsilon, \qquad n \geq N_*(\varepsilon). \tag{2.5.10}$$

Обозначим k-й модуль непрерывности оператора перехода $G(n, m; x)$ (см. пункт 2.4.2) через $\nu(k, \varepsilon)$. По лемме 2.4.3 $\nu(k, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$. Так как $\|G(n, m; x)\| \leq \nu(k, \varepsilon)$ при $n - m = k$, $\|x\| \leq \varepsilon$, то найдутся такие функции $\mu(k, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots, \varepsilon \geq 0$, что

$$\|G(n, m; x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq n - m \leq k, \quad \|x\| < \mu(k, \varepsilon),$$

причем $\mu(k, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для каждого k.

Докажем сначала равномерную устойчивость нулевого решения разностного уравнения (2.4.9). Для этого нужно по каждому $\varepsilon > 0$ указать такое $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, при котором для любой пары чисел $n > m$ выполняется неравенство:

$$\|G(n, m; x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|x\| < \sigma(\varepsilon). \tag{2.5.11}$$

Неравенство (2.5.11) докажем вначале в предположении, что $\alpha_i \neq 0$ при $m \leq i < n$. Пусть $N = N_*[\delta(\varepsilon)]$, а γ ($\gamma \geq N$) — число из леммы 2.5.20. По лемме 2.5.20 оператор $G(n, m)$ имеет вид

$$G(n, m) = G(q + r_k, q) \circ \cdots \circ G(q + r_1, q) \circ G(m_1, m), \tag{2.5.12}$$

где $m \leq m_1 \leq m + \gamma$, $r_k \leq \gamma$, $r_1, \ldots, r_{k-1} \geq N$.

В силу (2.5.9) $\|G(q + r_k, q; x)\| < \varepsilon$ при $\|x\| < \delta(\varepsilon)$. Так как $r_1, \ldots, r_{k-1} \geq N$, то по определению числа N для каждого $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ при $\|x\| < \delta(\varepsilon)$ верно неравенство

$$\|G(q + r_i, q; x)\| < \delta(\varepsilon)$$

(см. неравенство (2.5.10)). Так как $m_1 - m \leq \gamma$, то $\|G(m_1, m; x)\| < \delta(\varepsilon)$ при $\|x\| < \tilde{\sigma}(\varepsilon) = \mu[\delta(\varepsilon)]$. Положив $\sigma(\varepsilon) = \tilde{\sigma}(\varepsilon)$, получаем неравенство (2.5.11).

Пусть теперь $\alpha_i = 0$ для некоторого $i \in [m, n)$. Представив оператор перехода $G(n, m)$ в виде

$$G(n, m) = G(n, i + 1) \circ G(i + 1, i) \circ G(i, m),$$

убеждаемся, что неравенство (2.5.11) будет выполняться, если положить $\sigma(\varepsilon) = \tilde{\sigma}\{\mu[1, \tilde{\sigma}(\varepsilon)]\}$. Равномерная устойчивость нулевого решения уравнения (2.4.9) доказана.

Приступим к доказательству равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.4.9). Для доказательства достаточно указать $\delta_* > 0$ и такую функцию $K(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что

$$\|G(n, m; x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|x\| < \delta_*, \quad n \geq m + K(\varepsilon). \tag{2.5.13}$$

Доказательство неравенства (2.5.13) сначала проведем в случае, когда $\alpha_i \neq 0$ при $i \in [m, n)$. В силу устойчивости нулевого решения уравнения (2.4.9) на интервале $[q, \infty)$, найдутся число $\delta_0 > 0$ и функция $N^*(\varepsilon) \geq q$, для которых $\|G(n, q; x)\| < \sigma(\varepsilon)$ при $\|x\| < \delta_0$, $n \geq N^*(\varepsilon)$. Число δ_* зададим равенством $\delta_* = \sigma(\delta_0)$. Определим функцию $K(\varepsilon)$ следующим образом. При данном $\varepsilon > 0$ в силу леммы 2.5.20 по числу $N = N^*[\sigma(\varepsilon)]$ определяются некоторые целые $\beta, \gamma \geq N$. Положим $K(\varepsilon) = 3\gamma$ и докажем требуемую оценку нормы $\|G(n, m; x)\|$.

Возьмем целые числа n и m, удовлетворяющие условию $n \geq m + K(\varepsilon)$. Рассмотрим представление (2.5.12) оператора $G(n, m)$, получаемое при $N = N^*[\sigma(\varepsilon)]$ по лемме 2.5.20. Так как в (2.5.12) $n - m \geq 3\gamma$, а $m_1 - m \leq \gamma$ и $r_k \leq \gamma$, то $k \geq 2$. Значит, оператор $G(n, m)$ может быть представлен в виде:

$$G(n, m) = G(q + r_k, q) \circ G(q + r_{k-1}, q) \circ G(m_2, m), \tag{2.5.14}$$

где $r_k \leq \gamma$, $r_{k-1} \geq N$, m_2 — некоторое число из интервала $[m, n)$. Пусть $\|x\| < \delta_* = \sigma(\delta_0)$. Тогда в силу уже доказанной равномерной устойчивости нулевого решения $\|G(m_2, m; x)\| < \delta_0$. Так как $r_{k-1} \geq N$, то в силу выбора числа N выполняется неравенство $\|G[q + r_{k-1}, q; G(m_2, m; x)]\| < \sigma(\varepsilon)$. Наконец, вновь воспользовавшись равномерной непрерывностью нулевого решения уравнения (2.4.9), получаем в силу (2.5.14):

$$\|G(n, m; x)\| = \|G(q + r_k, q; G[q + r_{k-1}, q; G(m_2, m; x)])\| < \varepsilon.$$

Неравенство (2.5.13) в случае, когда $\alpha_i \neq 0$ при $i \in [m, n)$ доказано.

Пусть теперь $\alpha_i = 0$ при некотором $i \in [m, n)$; по лемме 2.5.3 такое α_i единственно. Поэтому для доказательства неравенства (2.5.13) достаточно разбить интервал $[m, n)$ на две равные части и воспользоваться уже доказанной равномерной устойчивостью нулевого решения уравнения (2.4.9) и неравенством (2.5.13) для случая, когда $\alpha_i \neq 0$ при $i \in [m, n)$. Теорема 2.4.10 доказана. □

§ 2.6. Рассинхронизация по фазе линейных систем

В этом параграфе устанавливается критерий устойчивости рассинхронизованных по фазе систем линейных автономных импульсных уравнений.

2.6.1. Рассмотрим рассинхронизованную систему линейных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\xi_j(T_i^n - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.6.1}$$

с векторными компонентами $\xi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$. Тогда для каждой пары индексов $i, j = 1, 2, \ldots, N$ матрица a_{ij} содержит m_i строк и m_j столбцов. Предположим, что система импульсных уравнений (2.6.1) рассинхронизована по фазе, т.е. моменты коррекции имеют вид: $T_i^n = nh + \tau_i$, где $h > 0$. Без ограничения общности можно считать выполненными неравенства

$$0 \le \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_N < h,$$

поскольку такого расположения величин фазовых рассогласований τ_i всегда можно добиться их перенумерацией и объединением компонент с одинаковыми фазовыми рассогласованиями.

При исследовании устойчивости рассинхронизованных по фазе линейных систем плодотворна аналогия с исследованием сходимости различных итерационных процедур решения систем $y = By + b$ линейных алгебраических уравнений. Сходимость многих таких процедур эквивалентна сходимости разностной схемы метода простых итераций

$$x(n + 1) = Ax(n), \tag{2.6.2}$$

где A — некоторая (определяемая по B) блочная матрица с матричными элементам a_{ij} Условие сходимости итерационной процедуры (2.6.2) выражено в терминах элементов матрицы A в теореме 1.2.3. Это же условие в силу теоремы 2.1.2 является условием асимптотической устойчивости системы (2.6.1) при синхронном способе коррекции ее компонент.

Из итерационных процедур особый интерес представляет метод Зейделя. Метод Зейделя в терминах системы (2.6.2) заключается в следующем. Пусть известен вектор $x(n) = \{x_1(n), \ldots, x_N(n)\}$. Вектор $x(n + 1)$ ищется следующим образом: сначала по формуле (2.6.2) вычисляется компонента $x_1(n+1)$, вектора $x(n+1)$, затем, используя найденное приближение $x_1(n+1)$ первой компоненты решения и значения $x_2(n), \dots, x_N(n)$ остальных компонент, вычисляется вторая компонента $x_2(n+1)$ вектора $x(n+1)$, и т.д. Формально процедура метода Зейделя записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1N}x_N(n), \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n+1) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2N}x_N(n), \\ &\dots \\ x_N(n+1) &= a_{N1}x_1(n+1) + a_{N2}x_2(n+1) + \dots + a_{NN}x_N(n), \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Если через B обозначить (блочную) матрицу, поддиагональные элементы которой совпадают с соответствующими элементами матрицы A, а диагональные и наддиагональные — нули, т.е.

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

то процедура метода Зейделя в векторной форме примет вид:

$$x(n+1) = Bx(n+1) + (A - B)x(n).$$

Учитывая, что матрица $I - B$ обратима (ее собственные значения — единицы), итерационная процедура метода Зейделя запишется в виде:

$$x(n+1) = (I - B)^{-1}(A - B)x(n). \tag{2.6.4}$$

По теореме 1.2.3 метод Зейделя сходится, если и только если собственные значения матрицы $C = (I - B)^{-1}(A - B)$ меньше 1 по абсолютной величине. Но собственные значения матрицы C совпадают с корнями ее характеристического многочлена $q(\lambda) = \det(C - \lambda I)$. Поскольку

$$\det(C - \lambda I) = \det[(I - B)^{-1}(A - B) - \lambda I] = \det[(I - B)^{-1}] \det[A - B - \lambda(I - B)],$$

то собственные значения матрицы C совпадают с корнями уравнения

$$\det[A - B - \lambda(I - B)] = 0.$$

В развернутой форме это уравнение имеет вид:

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda I & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \lambda a_{21} & a_{22} - \lambda I & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{N1} & \lambda a_{N2} & \dots & a_{NN} - \lambda I \end{Vmatrix} = 0. \qquad (2.6.5)$$

Выражение (2.6.5) не требует для нахождения собственных значений матрицы $C = (I - B)^{-1}(A - B)$ обращения матрицы $I - B$. Итак, доказана следующая лемма.

2.6.2. Лемма. *Итерационная процедура Зейделя* (2.6.3) *сходится, если и только если собственные значения матрицы* $C = (I - B)^{-1}(A - B)$ *по абсолютной величине меньше* 1.

Простых зависимостей между собственными значениями исходной матрицы A и матрицы C не известно.

2.6.3. Пример. Характеристический многочлен $p(\lambda)$ скалярной матрицы $A = (a_{ij})$ второго порядка имеет вид

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Характеристический многочлен $q(\lambda)$ соответствующей матрицы C имеет вид:

$$q(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21}) + a_{11}a_{22}.$$

Пусть $a_{11} = a_{22} = a_{21} = -0.5$. Тогда при $a_{12} = 1$ метод простых итераций с матрицей A сходится, а метод Зейделя расходится; при $a_{12} = -0.6$ метод простых итераций расходится, а метод Зейделя сходится; при $a_{12} = 0$ оба метода сходятся; при $a_{12} = 2$ оба метода расходятся.

Представляют интерес простые признаки в терминах исходной матрицы A сходимости метода Зейделя. Некоторые из них приводятся без доказательства в примерах 2.6.3–2.6.6.

2.6.4. Пример. Пусть A — числовая матрица с неотрицательными элементами. Если $\rho(A) < 1$, то и $\rho(C) < 1$.

2.6.5. Пример. Пусть A — числовая симметрическая матрица, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$. Если $\rho(A) < 1$, то и $\rho(C) < 1$.

2.6.6. Пример. Пусть $A = (a_{ij})$, $D = (d_{ij})$ - числовые матрицы, причем $d_{ij} = |a_{ij}|$. Если $\rho(D) < 1$, то $\rho(A) < 1$ и $\rho(C) < 1$.

Доказательства утверждений примеров 2.6.4–2.6.6 будут получены как следствие более сильных утверждений из гл. 5.

Объясним теперь интерес к методу Зейделя с точки зрения рассинхронизованных по фазе систем импульсных уравнений. Процесс перехода от вектора $x(n)$ к вектору $x(n+1)$ при решении линейного векторного уравнения (2.6.2) по методу Зейделя можно представить как последовательное нахождение векторов y^i, $i = 0, 1, \ldots, N$, первый из которых совпадает с $x(n)$, последний — с $x(n+1)$, а промежуточные определяются равенствами

$$y^i = \{y^i_1, \ldots, y^i_{i-1}, y^i_i, \ldots, y^i_N\},$$

где $y^i_j = x_j(n)$ при $j > i$ и $y^i_j = x_j(n+1)$ при $j \le i$. Другими словами, при переходе от вектора y^i к вектору y^{i+1} компонента с номером $i+1$ изменяет свое значение с $x_i(n)$ на $x_i(n+1)$. Легко видеть, что векторы y^{i+1} и y^i связаны соотношением

$$y^{i+1} = A_{\{i+1\}} y^i \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{2.6.6}$$

где через $A_{\{i\}}$ обозначена $\{i\}$-помесь матрицы A. Из равенств (2.6.6) вытекает следующее утверждение

2.6.7. Лемма. *$C = A_{\{N\}} \cdots A_{\{1\}}$, где $C = (I - B)^{-1}(A - B)$.*

Вернемся к рассинхронизованной по фазе системе линейных импульсных уравнений (2.6.1). Обозначим через T^n упорядоченные по возрастанию моменты коррекции этой системы, фиксированные, как обычно, условием: $T^{-1} < 0 \le T^0$. Тогда по лемме 1.6.7 $T^0 = \tau_1$, $T^1 = \tau_2$, $\ldots$, $T^{N-1} = \tau_N$, $T^N = h + \tau_0$, и т.д. Значит, эквивалентное разностное уравнение системы импульсных уравнений (2.6.1) имеет (см. § 1.4) вид

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{2.6.7}$$

где

$$A(n) = A_{\{n+1\}} \quad \text{при} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.6.8}$$

причем по лемме 1.6.7 последовательность матриц $A(n)$ периодична с периодом N, т.е. $A(n+N) = A(n)$ при $-\infty < n < \infty$. Следовательно, по теореме 1.2.8 устойчивость разностного уравнения (2.6.7) определяется матрицей $C = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$, имеющей в силу (2.6.8) вид:

$$C = A_{\{N\}} A_{\{N-1\}} \cdots A_{\{1\}}. \tag{2.6.9}$$

По лемме 2.6.7 полученная матрица C — это матрица, определяющая сходимость метода Зейделя. Так как по теореме 2.1.2 устойчивость нулевого решения рассинхронизованной системы (2.6.1) равносильна устойчивости нулевого решения разностного уравнения (2.6.7), приходим к следующему утверждению.

2.6.8. Теорема. *Если для матрицы* (2.6.9) *выполняется условие* $\rho(C) < 1$, *то рассинхронизованная по фазе система импульсных уравнений* (2.6.1) *асимптотически устойчива. Если* $\rho(C) = 1$ *и каждое собственное значение* λ *матрицы* C, *удовлетворяющее условию* $|\lambda| = 1$, *полупростое, то система* (2.6.1) *устойчива. В остальных случаях система* (2.6.1) *неустойчива. Собственные значения матрицы* C *совпадают с корнями полиномиального уравнения* (2.6.5).

Сопоставление теоремы 2.6.8 с примером 2.6.3 показывает, что при фазовой рассинхронизации изначально синхронизованная система импульсных уравнений может из асимптотически устойчивой стать неустойчивой, а из неустойчивой стать устойчивой. Возможны также ситуации, когда рассинхронизация не влияет на устойчивость системы.

Часто в приложениях фазовые рассогласования предполагаются малыми. Теорема 2.6.8 показывает, что при исследовании устойчивости линейных фазово рассинхронизованных систем импульсных уравнений играют роль не величины фазовых рассогласований, а порядок их взаимного расположения на числовой оси. В этом легко убедиться, заметив, что построение матрицы (2.6.9), определяющей устойчивость системы (2.6.1), зависит только от взаимного порядка чисел τ_i.

Следствие 1. *Пусть даны две рассинхронизованные системы* (2.6.1) *с моментами коррекции* $T_i^n = nh + \tau_i$ *и* $T^n = n\tilde{h} + \tilde{\tau}_i$. *Если при этом* $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_N < h$ *и* $0 \le \tilde{\tau}_1 < \tilde{\tau}_2 < \cdots < \tilde{\tau}_N < \tilde{h}$, *то обе системы одновременно либо устойчивы, либо асимптотически устойчивы, либо неустойчивы.*

Утверждение следствия верно и для нелинейных автономных рассинхронизованных по фазе систем импульсных уравнений.

Асимптотически устойчивые рассинхронизованные по фазе автономные системы импульсных уравнений в силу теоремы 2.4.4 равномерно асимптотически устойчивы. Поэтому (см. теорему 2.3.13) при малом возмущении элементов матрицы правой части асимптотически устойчивой рассинхронизованной по фазе линейной автономной системы импульсных уравнений система с возмущенной правой частью будет также асимптотически устойчивой. Аналогичная нечувствительность систем с фазовой рассинхронизацией имеет место и в отношении возмущений фазовых рассогласований.

Следствие 2. *Пусть рассинхронизованная по фазе система импульсных уравнений* (2.6.1) *с моментами коррекции* $T_i^n = nh + \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$ *асимптотически устойчива. Если фазовые рассогласования* τ_i *попарно различны, то асимптотически устойчива любая система* (2.6.1) *с моментами коррекции* $T_i^n = nh + \tilde{\tau}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$, *где фазовые рассогласования* $\tilde{\tau}_i$ *близки к соответствующим фазовым рассогласованиям* τ_i.

§ 2.7. Экзотика рассинхронизованных систем

Как отмечалось в предыдущем параграфе (следствие 2 теоремы 2.6.8), свойство асимптотической устойчивости линейной автономной рассинхронизованной по фазе системы импульсных уравнений сохраняется при малых возмущениях фазовых рассогласований, если только эти рассогласования попарно различны. Если же некоторые из фазовых рассогласований совпадают между собой, то в результате их малых возмущений импульсная система может из асимптотически устойчивой превратиться в неустойчивую и наоборот. Как отмечалось в § 1.7, рассинхронизованные системы импульсных уравнений могут трактоваться как уравнения с запаздывающим аргументом. В теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом малое изменение запаздываний линейной автономной асимптотически устойчивой системы в типичных ситуациях не приводит к нарушению ее устойчивости. Поэтому изменение характера устойчивости рассинхронизованных систем при малом возмущении фазовых рассогласований выглядит (на первый взгляд) необычно. В этом параграфе рассматриваются некоторые примеры такого поведения рассинхронизованных систем.

2.7.1. Рассмотрим двухкомпонентную рассинхронизованную по фазе систему импульсных уравнений со скалярными компонентами и моментами коррекции

$$T_1^n = nh + \tau_1, \quad T_2^n = nh + \tau_2, \qquad -\infty < n < \infty$$

где $\tau_1 \le \tau_2$. Рассматриваемую систему запишем в виде уравнений (ср. (1.6.12)):

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1^{n+1}) &= a_{11}\xi_1(T_1^n) + a_{12}\xi_2(T_1^n), \\ \xi_2(T_2^{n+1}) &= a_{21}\xi_1(T_2^n) + a_{22}\xi_2(T_2^n), \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

где

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n < t \le T_i^{n+1}, \qquad i = 1, 2. \tag{2.7.2}$$

Как показано в § 1.6, запись рассинхронизованных систем импульсных уравнений в виде (2.7.1), (2.7.2) эквивалентна принятой в настоящей главе стандартной записи в виде (2.1.1) или (2.6.1).

Нас будет интересовать случай, когда фазовые рассогласования τ_1 и τ_2 близки к некоторому числу τ_0. Рассмотрим синхронизованную систему

$$\begin{aligned} \xi_1(T^{n+1}) &= a_{11}\xi_1(T^n) + a_{12}\xi_2(T^n), \\ \xi_2(T^{n+1}) &= a_{21}\xi_1(T^n) + a_{22}\xi_2(T^n), \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

где $\xi_i(t) = \text{const}$ при $T^n < t \le T^{n+1}$, с моментами коррекции $T^n = nh + \tau_0$. Коэффициенты a_{ij} в правых частях уравнений (2.7.3) предполагаются совпадающими с соответствующими коэффициентами уравнений (2.7.1); различаются же эти две системы уравнений только величинами фазовых рассогласований.

Характер устойчивости системы уравнений (2.7.3) не изменится, если интервалы постоянства компонент ξ_i будут включать левые границы: $\xi_i(t) = \text{const}$ при $T_i^n \le t < T_i^{n+1}$. В этом случае при рассинхронизации системы уравнений (2.7.3) приходим к системе

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1^{n+1}) &= a_{11}\xi_1(T_1^n) + a_{12}\xi_2(T_1^n), \\ \xi_2(T_2^{n+1}) &= a_{21}\xi_1(T_2^n) + a_{22}\xi_2(T_2^n), \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

где

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n \le t < T_i^{n+1}, \qquad i = 1, 2. \tag{2.7.5}$$

Пусть $a_{11} = a_{22} = a_{21} = -0.5$, а коэффициент $a_{12} = \vartheta$ играет роль параметра. Выясним, при каких значениях этого параметра рассматриваемые нами системы уравнений асимптотически устойчивы.

По теореме 1.2.3 устойчивость синхронизованной системы уравнений (2.7.3) определяется расположением корней ее характеристического многочлена $p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. В нашем случае этот многочлен следующий: $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 0.25 + 0.5\vartheta$. Его корни удовлетворяют условию $|\lambda| < 1$, если (см. пример 1.2.6а) $|0.25 + 0.5\vartheta| < 1$, $1 + (0.25 + 0.5\vartheta) > 1$. Значит, синхронизованная система уравнений (2.7.3) асимптотически устойчива при

$$-0.5 < \vartheta < 1.5 \tag{2.7.6}$$

и неустойчива при

$$\vartheta < -0.5 \quad \text{или} \quad \vartheta > 1.5.$$

По теореме 2.6.8 устойчивость рассинхронизованной по фазе импульсной системы (2.7.1), (2.7.2) определяется расположением корней уравнения (2.6.5), имеющего в силу примера 2.6.3 вид: $\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21}) - a_{11}a_{22} = 0$. В нашем случае это следующее уравнение: $\lambda^2 + \lambda(1 + 0.5\vartheta) + 0.25 = 0$. Корни этого уравнения удовлетворяют условию $|\lambda| < 1$, если $1 + 0.25 > |1 + 0.5\vartheta|$ (см. пример 1.2.6а). Значит, рассинхронизованная по фазе система уравнений (2.7.1), (2.7.2) асимптотически устойчива при

$$-4.5 < \vartheta < 0.5 \tag{2.7.7}$$

и неустойчива при

$$\vartheta < -4.5 \quad \text{или} \quad \vartheta > 0.5.$$

Для рассмотрения вопроса об устойчивости рассинхронизованной системы уравнений (2.7.4), (2.7.5) приведем ее к стандартному виду (см. формулы (1.6.11)–(1.6.13)):

$$\begin{aligned} \zeta_1(T_1^{n+1}) &= a_{11}\zeta_1(T_1^n) + a_{12}\zeta_2(T_1^n), \\ \zeta_2(T_2^{n+1}) &= a_{21}\zeta_1(T_2^n) + a_{22}\zeta_2(T_2^n), \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

где $\zeta_i(t) = \text{const}$ при $T_i^n < t \le T_i^{n+1}$. Здесь компоненты ζ_1 и ζ_2 векторные, двумерные. Матрицы w_{ij} имеют вид (см. формулу (1.6.11)):

$$w_{11} = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad w_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$w_{21} = \begin{Vmatrix} 0 & a_{21} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad w_{22} = \begin{Vmatrix} a_{22} & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

По теореме 1.6.13 системы уравнений (2.7.4), (2.7.5) и (2.7.8) эквивалентны. Поэтому устойчивость системы уравнений (2.7.4), (2.7.5) определяется расположением корней уравнения (2.6.4) системы (2.7.8), имеющего в рассматриваемом случае вид:

$$\det\left\|\begin{matrix} w_{11}-\lambda I & w_{21} \\ w_{12} & w_{22}-\lambda I \end{matrix}\right\| = 0.$$

Раскрывая определитель в последнем равенстве, получаем:

$$\lambda^4 - \lambda^3(a_{11}+a_{22}) + \lambda^2 a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = 0.$$

Выписанное уравнение имеет корень $\lambda = 0$ и еще три корня, удовлетворяющих уравнению

$$\lambda^3 - \lambda^2(a_{11}+a_{22}) + \lambda a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

В нашем случае последнее уравнение таково: $\lambda^3 + \lambda^2 + 0.25\lambda + 0.5\vartheta = 0$. Корни этого уравнения удовлетворяют условию $|\lambda| < 1$, если (см. пример 1.2.6б)

$$0.25 - 0.5\vartheta > 0, \quad 1.75 - 0.5\vartheta > 0, \quad 2.25 + 0.5\vartheta > 0,$$

$$(1.75 + 0.5\vartheta)(3.75 - 1.5\vartheta) - (0.25 - 0.5\vartheta)(2.25 + 0.5\vartheta) > 0.$$

Значит, система уравнений (2.7.4), (2.7.5) асимптотически устойчива при

$$-\frac{7}{6} < \vartheta < \frac{1}{2}. \tag{2.7.9}$$

Как видно из неравенств (2.7.6), (2.7.7) и (2.7.9), при подходящем выборе значений параметра ϑ возможны любые комбинации устойчивости и неустойчивости для каждой пары рассматриваемых систем уравнений.

Заметим, что в условиях примера 1.2.6 асимптотическая устойчивость систем уравнений (2.7.3) и (2.7.4), (2.7.5) влечет асимптотическую устойчивость системы уравнений (2.7.1), (2.7.2) при любых скалярных a_{ij}.

2.7.2. Рассмотрим рассинхронизованную по фазе автономную систему линейных импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\xi_j(T_i^n - 0) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.7.10}$$

где $T_i^n = nh + \tau_i$. Наряду с этой системой уравнений рассмотрим еще одну систему с теми же моментами коррекции

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\xi_j(T_i^n - 0) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, N). \tag{2.7.11}$$

Как соотносятся свойства устойчивости систем импульсных уравнений (2.7.10) и (2.7.11) в случае, когда матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ подобны, т.е. связаны соотношением: $A = QBQ^{-1}$, где Q — некоторая невырожденная матрица?

Если системы (2.7.10) и (2.7.11) с подобными матрицами A и B синхронизованы, то по теоремам 2.1.2 и 1.2.3 их свойства устойчивости одинаковы, поскольку собственные значения матриц A и B совпадают. Если системы (2.7.10) и (2.7.11) рассинхронизованы, то одна из них может быть устойчивой, а другая — неустойчивой.

2.7.3. Пример. Пусть $a_{11} = 0.5$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = -0.5$, $b_{11} = 1.5$, $b_{12} = -2$, $b_{21} = 1$, $b_{22} = -1.5$. Тогда матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ подобны ($A = QBQ^{-1}$, где $Q = (q_{ij})$, $q_{11} = 2$, $q_{12} = q_{21} = q_{22} = 1$).

Пусть $0 < \tau_1 \le \tau_2 < h$. Тогда по теореме 2.6.8 устойчивость системы импульсных уравнений (2.7.10) определяется расположением корней уравнения $\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21}) + a_{11}a_{22} = 0$; в нашем случае эти корни следующие: $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = -0.5$. Значит, система импульсных уравнений (2.7.10) асимптотически устойчива.

Устойчивость рассинхронизованной системы (2.7.11) по теореме 2.6.8 определяется расположением корней уравнения $\lambda^2 - \lambda(b_{11} + b_{22} + b_{12}b_{21}) + b_{11}b_{22} = 0$. В нашем случае эти корни таковы: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3.75}$. Поскольку $|\lambda_2| > 1$, то система импульсных уравнений (2.7.11) неустойчива.

Таким образом, в отличие от синхронизованных систем импульсных уравнений свойства устойчивости рассинхронизованных линейных систем неинвариантны по отношению к заменам матриц правых частей на подобные. Это может привести к тому, что две изначально синхронизованные системы импульсных уравнений с подобными матрицами правых частей после сколь угодно малой фазовой рассинхронизации станут обладать различными свойствами устойчивости.

Как отмечалось выше, рассинхронизация изначально синхронизованной импульсной системы уравнений может привести к потере ею устойчивости. Синхронизованную асимптотически устойчивую линейную систему импульсных уравнений назовем *чувствительной к рассинхронизации* определенного вида, если после рассинхронизации она перестает быть асимптотически устойчивой. Синхронизованные системы импульсных уравнений с подобными матрицами правых частей эквивалентны, поскольку переход от одной такой системы к другой осуществляется заменой переменных. В связи с этим возникает естественный вопрос: если некоторая синхронизованная система импульсных уравнений чувствительна к рассинхронизации, то можно ли ее сделать нечувствительной путем подходящей замены переменных? Если этого сделать нельзя, то систему импульсных уравнений естественно назвать экстремально чувствительной к рассинхронизации. Дадим формальное определение. Скажем, что система импульсных уравнений (2.7.10) *экстремально чувствительна к рассинхронизации*, если любая система (2.7.11) с матрицей B, подобной матрице A, чувствительна к рассинхронизации. Как показывает следующий пример, класс синхронизованных систем уравнений, экстремально чувствительных к фазовой рассинхронизации, непуст.

2.7.4. Пример. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная скалярная матрица второго порядка, собственные значения $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ которой лежат в круге $|\lambda| < 1$. Синхронизованная система (2.7.10) экстремально чувствительна к фазовой рассинхронизации тогда и только тогда, когда $|1 + \alpha| \leq |\beta|$ (см. рис. 2.2, заштрихована область пар $\{\alpha, \beta\}$, при которых система (2.7.10) экстремально чувствительна к рассинхронизации).

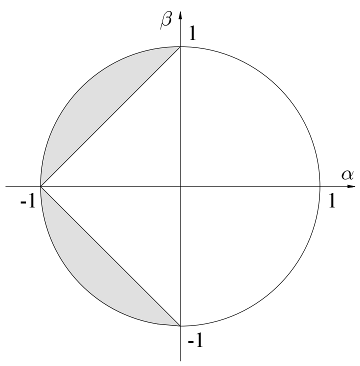

Рис. 2.2. Область параметров $\{\alpha,\beta\}$, при которых система (2.7.10) экстремально чувствительна к рассинхронизации

Для доказательства заметим, что каждая матрица $B = (b_{ij})$, подобная матрице A, может быть представлена в виде

$$B = \frac{1}{xv - yu} \begin{Vmatrix} x & y \\ u & v \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} v & -y \\ -u & x \end{Vmatrix}.$$

где x, y, u, v — действительные числа, удовлетворяющие условию: $xv - yu \neq 0$. Подсчет показывает, что в этом случае

$$b_{11} = \alpha + \beta r, \quad b_{12} = -\beta s, \quad b_{21} = \beta t, \quad b_{22} = \alpha - \beta r,$$

где

$$r = \frac{xu + yv}{xv - yu}, \quad s = \frac{x^2 + y^2}{xv - yu}, \quad t = \frac{u^2 + v^2}{xv - yu}.$$

Условия $|b_{11}b_{22}| < 1$, $1 + b_{11}b_{22} > |b_{11} + b_{22} + b_{12}b_{21}|$, гарантирующие асимптотическую устойчивость рассинхронизованной системы импульсных уравнений (2.7.11) с матрицей B, приобретают вид:

$$|\alpha^2 - \beta^2 r^2| < 1, \qquad 1 + \alpha^2 - \beta^2 r^2 > |2\alpha - \beta^2(1 + r^2)|. \tag{2.7.12}$$

Последние неравенства равносильны условиям:

$$\beta^2 r^2 < 1 + \alpha^2, \qquad 2\beta^2 r^2 < (1 + \alpha)^2 - \beta^2.$$

Следовательно, они удовлетворяются при малых r, если и только если $(1 + \alpha)^2 > \beta^2$ или, что эквивалентно, $|1 + \alpha| > |\beta|$.

Если неравенство $|1 + \alpha| > |\beta|$ выполнено, то можно взять $x = v = 1$, $u = y = 0$. Тогда $r = 0$, матрица B совпадает с матрицей A, и рассинхронизованная по фазе система (2.7.11) с матрицей B асимптотически устойчива. Если же $|1 + \alpha| \leq |\beta|$, то при любом наборе параметров x, y, u, v по крайней мере одно из неравенств (2.7.12) не удовлетворяется. Следовательно, рассинхронизованная по фазе система (2.7.11) с соответствующей матрицей B не будет асимптотически устойчивой.

В свете приведенного примера несколько неожиданной представляется следующая лемма, показывающая, что каждая трехкомпонентная асимптотически устойчивая синхронизованная система (2.7.10) со скалярными компонентами не является экстремально чувствительной к любой фиксированной фазовой рассинхронизации.

2.7.5. Лемма. *Пусть A — скалярная вещественная квадратная матрица третьего порядка с простыми собственными значениями. Тогда найдется скалярная вещественная матрица B, подобная матрице A, для которой корни соответствующего уравнения* (2.6.5) *совпадают с собственными значениями матрицы A.*

Доказательство. Пусть $p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$ — характеристический полином матрицы A. Рассмотрим также полиномы

$$q(\lambda) = \lambda^3 + q_1\lambda^2 + q_2\lambda + q_3 = \det \left\| \begin{matrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{matrix} \right\|$$

и

$$r(\lambda) = \lambda^3 + r_1\lambda^2 + r_2\lambda + r_3 = \det \begin{Vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ \lambda b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} & b_{33} - \lambda \end{Vmatrix}.$$

По условию леммы собственные значения матрицы A простые. В этом случае, как известно из линейной алгебры, матрица B подобна матрице A, если и только если ее характеристический полином $q(\lambda)$ совпадает с характеристическим полиномом $p(\lambda)$ матрицы A. Следовательно, для доказательства леммы достаточно указать такую матрицу B, для которой

$$q(\lambda) = p(\lambda), \quad r(\lambda) = p(\lambda). \tag{2.7.13}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\begin{aligned}
q_1 &= -b_{11} - b_{22} - b_{33}, \\
q_2 &= b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31} - b_{23}b_{32}, \\
q_3 &= -b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{32}b_{21} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} + b_{33}b_{12}b_{21}, \\
r_1 &= -b_{11} - b_{22} - b_{33} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31} - b_{23}b_{32} - b_{13}b_{32}b_{21}, \\
r_2 &= b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} + b_{33}b_{12}b_{21}, \\
r_3 &= -b_{11}b_{22}b_{33}.
\end{aligned}$$

При этом, как нетрудно убедиться, между коэффициентами q_i и r_i имеются следующие соотношения:

$$r_1 = q_1 + q_2 + s_1, \quad r_2 = q_3 - s_1 + s_2, \quad r_3 = -s_2, \tag{2.7.14}$$

где

$$\begin{aligned}
s_1 &= -b_{11}b_{22} - b_{11}b_{33} - b_{22}b_{33} - b_{13}b_{32}b_{21}, \\
s_2 &= b_{11}b_{22}b_{33}.
\end{aligned}$$

Полиномиальные равенства (2.7.13) равносильны системе из шести уравнений:

$$q_i = p_i, \quad r_i = p_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 3,$$

которая в силу (2.7.14) сводится к системе из пяти уравнений:

$$q_1 = p_1, \quad q_2 = p_2, \quad q_3 + s_2 = 0, \quad s_1 = -p_2, \quad s_2 = -p_3$$

или, что то же,

$$\begin{aligned}
&b_{11} + b_{22} + b_{33} = -p_1,\\
&b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31} - b_{23}b_{32} = p_2,\\
&b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{32}b_{21} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{22}b_{13}b_{31} - b_{33}b_{12}b_{21} = 0,\\
&b_{12}b_{22} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} + b_{13}b_{32}b_{21} = p_2,\\
&b_{11}b_{22}b_{33} = -p_{3.}
\end{aligned} \tag{2.7.15}$$

Покажем, что переопределенная система уравнений (2.7.15) имеет хотя бы одно вещественное решение. Положим

$$b_{11} = b_{22} = \alpha. \tag{2.7.16}$$

Тогда в силу первого уравнения (2.7.15)

$$b_{33} = -p_1 - 2\alpha, \tag{2.7.17}$$

а в силу последнего уравнения (2.7.15) число α должно удовлетворять уравнению

$$2\alpha^3 + p_1\alpha^2 - p_3 = 0. \tag{2.7.18}$$

Пусть α — некоторый корень уравнения (2.7.18), а элементы b_{11}, b_{22}, b_{33} определены равенствами (2.7.16) и (2.7.17). Тогда для определения остальных элементов матрицы B получаем:

$$\begin{aligned}
&b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31} + b_{23}b_{32} = -(3\alpha^2 + 2p_1\alpha + p_2),\\
&b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{32}b_{21} - \alpha b_{23}b_{32} - \alpha b_{13}b_{31} + (2\alpha + p_1)b_{12}b_{21} = 0,\\
&b_{13}b_{32}b_{21} = 3\alpha^2 + 2\alpha p_1 + p_2.
\end{aligned} \tag{2.7.19}$$

Положим

$$b_{13} = b_{21} = b_{32} = \beta. \tag{2.7.20}$$

Тогда в силу последнего уравнения (2.7.19) число β должно удовлетворять уравнению

$$\beta^3 = 3\alpha^2 + 2p_1\alpha + p_2. \tag{2.7.21}$$

Пусть β — некоторый вещественный корень уравнения (2.7.21), а элементы b_{13}, b_{21}, b_{32} определены равенствами (2.7.20). Тогда для определения оставшихся элементов матрицы B получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &b_{12} + b_{23} + b_{31} = -\beta^2, \\ &b_{12}b_{23}b_{31} - \alpha\beta b_{23} - \alpha\beta b_{31} + (2\alpha + p_1)\beta b_{12} + \beta^3 = 0, \end{aligned} \tag{2.7.22}$$

Положим

$$b_{23} = b_{31} = \gamma. \tag{2.7.23}$$

Тогда в силу первого уравнения (2.7.22)

$$b = -\beta^2 - 2\gamma, \tag{2.7.24}$$

а в силу второго уравнения (2.7.22) число γ должно удовлетворять уравнению

$$2\gamma^3 + \beta^2\gamma^2 + 2(3\alpha + p_1)\beta\gamma + (2\alpha + p_1 - 1)\beta^3 = 0. \tag{2.7.25}$$

Определив теперь число γ из уравнения (2.7.25), мы сможем по формулам (2.7.23) и (2.7.24) вычислить значения элементов b_{23}, b_{31} и b_{12}.

Итак, система уравнений (2.7.15) имеет по крайней мере одно вещественное решение и, следовательно, требуемая матрица B существует. Лемма доказана. □

2.7.6. Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.6 \\ 0 & -0.6 & -0.6 \end{Vmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -0.6 \pm 0.6i$. Значит, $|\lambda_i| < 1$, и в то же время, как нетрудно видеть, система импульсных уравнений (2.7.10) с рассматриваемой матрицей чувствительна к фазовой рассинхронизации.

Матрица

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & -0.667 & 0.896 \\ 0.896 & 0 & 0.068 \\ -0.068 & 0.896 & -1.200 \end{Vmatrix}$$

подобна матрице A (ее элементы рассчитаны по формулам (2.7.16)–(2.7.25)). Система уравнений (2.7.11) с матрицей B нечувствительна к фазовой рассинхронизации с фазовыми рассогласованиями $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < h$.

Лемма 2.7.5 дает возможность сформулировать следующее условие экстремальной нечувствительности систем импульсных уравнений к фазовой рассинхронизации. Пусть синхронизованная система с матрицей A *асимптотически устойчива*, причем все собственные значения матрицы A *простые и количество вещественных среди них не меньше половины количества комплексных*. Тогда система не является экстремально чувствительной к фазовой рассинхронизации с фазовыми рассогласованиями τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_N$, удовлетворяющими условию

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_N < h.$$

2.7.7. Существование систем, не являющихся экстремально чувствительными к какому-либо виду рассинхронизации, может быть использовано при конструировании систем управления для противодействия возможным нежелательным последствиям рассинхронизации. Пусть, например, система W состоит из линейных подсистем W_i со скалярными состояниями. Для определения динамических параметров системы W (синхронизованной) существенное значение имеет спектр матрицы $A = (a_{ij})$, т.е. набор ее собственных значений. Остальные параметры, в частности конкретные значения элементов a_{ij}, часто не играют существенной роли. Пусть в системе W возможна фазовая рассинхронизация. Тогда целесообразно воспользоваться леммой 2.7.5 (если, конечно, это возможно) или сформулированным выше следствием из нее для такого выбора элементов матрицы A, при котором система W становится нечувствительной к фазовой рассинхронизации.

Замечания и библиографические справки

В изложении понятий устойчивости рассинхронизованных импульсных систем уравнений мы с точностью до тривиальных изменений, вызванных спецификой рассинхронизованных систем, следуем терминологии теории устойчивости дифференциальных и разностных уравнений. Основные факты, идеи и методы теории устойчивости достаточно подробно изложены в книгах [Былов, Виноград, Гробман, Немыцкий, 1966; Воронов, 1981; Демидович, 1967; Красносельский М., 1960; Мартынюк, 1972; Хартман, 1970; Халанай, Векслер, 1971; Хейл, 1984; Цыпкин, 1963]. Формулировку теоремы о неявной функции, используемой при обосновании утверждения примера 2.2.4, можно найти в курсах математического (см., например, [Рудин, 1966; Хирш, 1979]. Условие Адамара широко используется в линейной алгебре [Гантмахер, 1967; Маркус, Минк, 1972; Хорн, Джонсон, 1989] для оценки областей локализации собственных значений матриц.

Ряд утверждений § 2.4 в случае линейных рассинхронизованных систем импульсных уравнений содержатся в работах [Клепцын, 1983, 1985a,b,c; Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Красносельский А., 1985; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]. В анализе линейных двухкомпонентных фазочастотно рассинхронизованных систем многое стало понятным, благодаря блестящим работам [Клепцын, 1983, 1985a,b,c]. Позднее была установлена теорема 2.5.8 о равномерно полных словарях [Козякин, 1990b,c], с помощью которой удалось распространить часть утверждений А.Ф. Клепцына на нелинейные фазочастотно рассинхронизованные двухкомпонентные системы. В основе доказательства теоремы 2.4.10 лежит базовая идея метода символической динамики — идея сопоставления решениям рассматриваемой системы уравнений некоторой последовательности символов. Идеи метода символической динамики восходят к работам [Биркгоф, 1941; Hadamard, 1898]. Ознакомиться с современным состоянием символической динамики можно по работам [Боуэн, 1979; Корнфельд, Синай, Фомин, 1980; Нитецки, 1975].

Отображение циклического сдвига возникает в самых разнообразных вопросах теории динамических систем. Детальное описание глубоких и нетривиальных свойств отображения циклического сдвига можно найти в книгах [Арнольд, 1978; Корнфельд, Синай, Фомин, 1980; Нитецки, 1975]. Теорема 2.5.8 о равномерно полных словарях описывает свойства отображения циклического сдвига с позиций символической динамики. Следует отметить однако, что в современной теории символической динамики утверждениям типа теоремы о равномерно полных словарях уделяется сравнительно мало внимания.

Основные утверждения § 2.6 содержатся в работах [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1984a,b,c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]. Описание, свойства и условия сходимости методов простых итераций и Зейделя можно найти в большинстве монографий по численным методам линейной алгебры (см., например, [Бахвалов, 1973; Красносельский, Вайникко, Забрейко и др., 1969]). Часть примеров § 2.7 заимствована из [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984].

Глава 3

Абсолютная устойчивость

Примеры § 2.7 показывают, что выбор моментов коррекции компонент рассинхронизованной системы импульсных уравнений может оказать существенное влияние на ее устойчивость. Так, при одном наборе моментов коррекции компонент рассинхронизованная система может быть устойчивой, а при другом — неустойчивой. Допустим теперь, что моменты коррекции компонент известны неточно. Тогда, чтобы гарантировать устойчивость рассинхронизованной системы импульсных уравнений, необходимо рассмотреть некоторый класс рассинхронизованных систем с одинаковыми правыми частями и различными наборами моментов коррекции компонент. Если известны неточно не только моменты коррекции, но и правые части рассинхронизованной системы, то гарантировать устойчивость можно, лишь включив ее в некоторый класс рассинхронизованных систем с различными правыми частями и различными наборами моментов коррекции компонент.

Таков лишь небольшой круг вопросов, приводящих к центральному в настоящей главе понятию — абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений.

§ 3.1. Абсолютная устойчивость рассинхронизованных систем

В параграфе вводится понятие классов рассинхронизаций. Дается определение абсолютной устойчивости в классе рассинхронизаций.

3.1.1. Рассмотрим рассинхронизованную систему

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[\xi_1(T_i^n - 0), \ldots, \xi_N(T_i^n - 0)], \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.1.1}$$

со скалярными или векторными компонентами. Пусть система (3.1.1) имеет нулевое положение равновесия, т.е.

$$\varphi_i(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Система (3.1.1) будет интересовать нас как член некоторого семейства рассинхронизованных систем с одинаковыми правыми частями — функциями $\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$, но различными наборами моментов коррекции компонент. Принадлежность системы (3.1.1) к такому семейству определяется принадлежностью конкретного набора моментов коррекции $\{T_i^n\}$ к некоторому семейству $\mathfrak{S}$ наборов моментов коррекции, называемому *классом рассинхронизаций*. Приведем примеры.

Класс $\mathfrak{S}_p$ *фазовых рассинхронизаций* образуют все возрастающие наборы моментов коррекции вида $T_i^n = nh + \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $-\infty < n < \infty$.

Класс $\mathfrak{S}_f$ *частотных рассинхронизаций* образуют все возможные наборы моментов коррекции вида $T_i^n = nh_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $-\infty < n < \infty$.

Класс $\mathfrak{S}_{pf}$ *фазочастотных рассинхронизаций* образуют все возможные наборы моментов коррекции вида $T_i^n = nh_i + \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $-\infty < n < \infty$. Ясно, что $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{S}_{pf}$.

Класс $\mathfrak{S}_k$ ($\mathfrak{S}_k^-$ или $\mathfrak{S}_k^+$) рассинхронизаций с одновременной коррекцией ровно k (не более k, не менее k) компонент образуют все возможные наборы моментов коррекции T_i^n, для которых при каждом n ровно k (соответственно не более k, не менее k) из чисел T_1^n, T_2^n, $\dots$, T_N^n совпадают между собой. Класс $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1$ будем называть также классом *полностью рассинхронизованных моментов коррекции*, а класс $\mathfrak{S}_N = \mathfrak{S}_N^+$ — классом *синхронизованных моментов коррекции*.

Завершим перечень классов рассинхронизаций описанием трех, пожалуй наиболее важных, классов.

Назовем последовательность моментов коррекции T_i^n *слабо рассинхронизованной*, если найдется такая монотонно возрастающая последовательность чисел s_n, $-\infty < n < \infty$, что каждый интервал $(s_n, s_{n+1}]$ содержит ровно по одному моменту коррекции каждой компоненты. Семейство всех слабо рассинхронизованных последовательностей моментов коррекции назовем классом $\mathfrak{S}_w$ *слабых рассинхронизаций*. Очевидно, $\mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}_w$.

Класс $\mathfrak{S}_u$ *равномерных рассинхронизаций* образуют все наборы моментов коррекции T_i^n, *равномерно возрастающие* (см. пункт 2.3.4) по n при каждом $i = 1, 2, \dots, N$. Этот класс содержит в себе классы $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_f$ и $\mathfrak{S}_{pf}$.

Наконец, самым широким классом рассинхронизаций, содержащим в себе все остальные классы рассинхронизаций, является класс $\mathfrak{S}_N$, состоящий из всех наборов моментов коррекции. Для этого класса введем специальное обозначение: $\mathfrak{G}_N = \mathfrak{G}_*$.

Представить происхождение слабо и равномерно рассинхронизованных систем импульсных уравнений можно следующим образом. Пусть имеется система (3.1.1), моменты коррекции T_i^n которой зависят от некоторого параметра λ, т.е. $T_i^n = T_i^n(\lambda)$. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ эта система синхронизована, причем $T_i^n(\lambda) = nh$. Если при малом изменении параметра λ в окрестности λ_0 для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ выполняются неравенства $|T_i^n(\lambda) - T_i^n(\lambda_0)| \leq \varepsilon$, то $\{T_i^n(\lambda)\} \in \mathfrak{G}_u$. Если при этом ε достаточно мало ($\varepsilon < h/2$), то $\{T_i^n(\lambda)\} \in \mathfrak{G}_w$.

3.1.2. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{G}, \varphi)$ множество всех решений системы (3.1.1) при всех возможных наборах моментов коррекций компонент из некоторого класса рассинхронизаций $\mathfrak{G}$. В общем случае элементами множества $\mathfrak{M}$ являются функции $\xi(t)$ с кусочно-постоянными компонентами, определенные на конечных или бесконечных интервалах изменения времени t. В этой главе нас будут интересовать малые решения рассинхронизованных систем. Поэтому функции $\varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_N)$ можно считать определенными при всех значениях переменных $\xi_1, \dots, \xi_N$. Тогда элементами множества $\mathfrak{M}$ будут функции, определенные на интервалах (α, ∞), $-\infty \leq \alpha < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha(\mathfrak{G}, \varphi)$ часть множества $\mathfrak{M}$, состоящую из функций, определенных на интервале (α, ∞). Например, $\mathfrak{M}_0$ — это множество функций $\xi(t)$ из $\mathfrak{M}$, определенных при $t > 0$, а $\mathfrak{M}_{-\infty}$ — это множество функций $\xi(t)$ из $\mathfrak{M}$, определенных на всей числовой оси.

Норму $|x|$ вектора $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ определим равенством $|x| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$. Если $\xi \in \mathfrak{M}_\alpha$, то при $\beta \geq \alpha$ положим

$$\|\xi\|_\beta = \sup_{t>\beta} |\xi(t+0)|;$$

величина $\|\xi\|_\beta$ может принимать значение “∞”.

Назовем рассинхронизованную систему импульсных уравнений (3.1.1) абсолютно устойчивой в классе рассинхронизаций $\mathfrak{G}$, если любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждой функции $\xi(t)$ из $\mathfrak{M}_0$, удовлетворяющей оценке $|\xi(0+0)| < \delta$, выполняется неравенство $\|\xi\|_0 < \varepsilon$.

Понятие абсолютной устойчивости включает в себя два требования. Одно из них — это устойчивость нулевого решения каждой рассинхронизованной системы уравнений с данными правыми частями $\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$

и моментами коррекции компонент из класса $\mathfrak{G}$. Второе требование заключается в возможности указать по каждому $\varepsilon > 0$ единого (для всех рассинхронизованных систем с правыми частями $\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ и наборами моментов коррекции из $\mathfrak{G}$) числа $\delta(\varepsilon) > 0$. По существу, второе требование — это равномерность свойства устойчивости нулевого решения системы (3.1.1) по всем наборам моментов коррекции компонент из класса рассинхронизаций $\mathfrak{G}$.

Казалось бы, естественное определение понятия абсолютной асимптотической устойчивости системы импульсных уравнений (3.1.1) в классе рассинхронизаций $\mathfrak{G}$ должно также состоять из двух требований: асимптотической устойчивости нулевого решения каждой рассинхронизованной системы (3.1.1) с моментами коррекции из $\mathfrak{G}$ и равномерности (по всем возможным наборам моментов коррекции из класса $\mathfrak{G}$) стремления к нулю при $t \to \infty$ решений системы (3.1.1). Однако такое «естественное» определение оказывается неработоспособным, поскольку абсолютно асимптотически устойчивых в данном смысле рассинхронизованных систем с ненулевой правой частью попросту не существует.

Выяснить причины, влияющие на скорость стремления к нулю решений рассинхронизованных систем импульсных уравнений поможет следующий пример.

3.1.3. Пример. Рассмотрим полностью рассинхронизованную линейную систему импульсных уравнений

$$\xi_1(T_1^n + 0) = \lambda \xi_2(T_1^n - 0), \qquad \xi_2(T_2^n + 0) = \lambda \xi_1(T_2^n - 0). \tag{3.1.2}$$

Оператор сдвига $\Phi(t, 0; \xi)$ системы (3.1.2) линеен и в зависимости от взаимного расположения моментов коррекции компонент может быть выражен одним из четырех равенств:

а) $\Phi(t, 0; \xi) = \lambda^{2\nu-2} A_{\{2\}} A_{\{1\}} \xi$,

б) $\Phi(t, 0; \xi) = \lambda^{2\nu-2} A_{\{1\}} A_{\{2\}} \xi$,

в) $\Phi(t, 0; \xi) = \lambda^{2\nu} A_{\{1\}} \xi$,

г) $\Phi(t, 0; \xi) = \lambda^{2\nu} A_{\{2\}} \xi$,

где $A_{\{1\}}$ и $A_{\{2\}}$ — матрицы вида

$$A_{\{1\}} = \left\| \begin{matrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad A_{\{2\}} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ \lambda & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Равенство а) имеет место, если первой на интервале $(0, t]$ подвергается коррекции компонента с номером 1, а последней — с номером 2. Равенство б) имеет место, если первой на $(0, t]$ подвергается коррекции компонента с номером 2, а последней — с номером 1. Равенство в) имеет место, когда как первой, так и последней на $(0, t]$ подвергается коррекции компонента с номером 1. Равенство г) имеет место, когда как первой, так и последней на $(0, t]$ подвергается коррекции компонента с номером 2.

Величина ν, фигурирующая в равенствах а)-г), равна максимальному числу непересекающихся интервалов $(\alpha,\beta] \subset (0,t]$, содержащих моменты коррекции обеих компонент.

При $|\lambda| < 1$ из равенств а)-г) следует асимптотическая устойчивость рассинхронизованной системы (3.1.2).

Напомним некоторые элементарные понятия. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — некоторые функции, определенные при $0 \le t < \infty$, причем $\eta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Говорят, что $\xi(t) \to 0$ при $\eta(t) \to \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, что $|\xi(t)| < \varepsilon$ при $\eta(t) \ge \Delta$. Пусть имеется семейство пар функций $\{\xi_\alpha(t), \eta_\alpha(t)\}$ $(0 \le t < \infty,\ \alpha \in \mathfrak{A})$, причем $\eta_\alpha(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Скажем, что функции $\xi_\alpha(t)$ *равномерно стремятся к нулю* при $\eta_\alpha(t) \to \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое не зависящее от α число $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, что для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ неравенство $|\eta_\alpha(t)| \ge \Delta$ влечет неравенство $|\xi_\alpha(t)| < \varepsilon$.

3.1.4. Пример. а. Для любой рассинхронизованной системы импульсных уравнений, содержащей более одной компоненты, решения, удовлетворяющие начальному условию $\xi(0+0) = \xi_0 \ne 0$, не могут равномерно стремиться к нулю при $t \to \infty$.

б. Пусть $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*)$. Обозначим через $p_\xi(t)$ число моментов коррекции решения $\xi(t)$ системы (3.1.2), лежащих в интервале $(0,t]$. Решения системы (3.1.2) из примера 3.1.3, удовлетворяющие условию $|\xi(0+0)| < 1$, не стремятся равномерно к нулю при $p_\xi(t) \to \infty$.

в. Пусть $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*)$. Обозначим через $p^*_\xi(t)$ наименьшую из величин $p^{*1}_\xi(t)$ и $p^{*2}_\xi(t)$, где $p^{*i}_\xi(t)$ — число моментов коррекции i-й компоненты решения $\xi(t)$ системы (3.1.2), лежащих в интервале $(0,t]$. Решения системы (3.1.2), удовлетворяющие условию $|\xi(0+0)| < 1$, не стремятся равномерно к нулю при $p^*_\xi(t) \to \infty$.

Пусть $\xi(t)$ — решение рассинхронизованной системы (3.1.1) из семейства систем с рассинхронизациями из некоторого класса $\mathfrak{G}$. Пусть $\tau > 0$, а $\mathfrak{T}(\xi,\tau)$ — множество всех наборов моментов коррекции из $\mathfrak{G}$, для каждого из которых система (3.1.1) имеет некоторое решение, совпадающее с $\xi(t)$ на интервале $(0,\tau]$. Для каждого набора $\{T^n_i\} \in \mathfrak{T}(\xi,\tau)$ обозначим через $\kappa(\{T^n_i\},\tau)$ максимальное число непересекающихся подынтервалов $(\alpha,\beta]$ интервала $(0,\tau]$, содержащих элементы каждого из множеств $\{T^n_1\}, \{T^n_2\}, \ldots, \{T^n_N\}$. Величину

$$\nu_\xi(\mathfrak{G},\tau) = \sup_{\{T^n_i\} \in \mathfrak{T}(\xi,\tau)} \kappa(\{T_i\},\tau)$$

назовем *числом коррекций компонент* решения $\xi(t)$ системы (3.1.1) в классе $\mathfrak{G}$ на $(0,\tau]$. Ясно, что $\nu_\xi(\mathfrak{G},\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$.

Назовем рассинхронизованную систему (3.1.1) *абсолютно асимптотически устойчивой* в классе рассинхронизаций $\mathfrak{G}$, если она абсолютно устойчива в этом классе и если при некотором $\delta_0 > 0$ функции $\xi(t)$ из

$\mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}, \varphi)$, удовлетворяющие условию $|\xi(0+0)| < \delta_0$, равномерно стремятся к нулю при $\nu_\xi(\mathfrak{G}, \tau) \to \infty$.

3.1.5. Пример. Рассинхронизованная система (3.1.2) при $|\lambda| < 1$ абсолютно асимптотически устойчива в классах рассинхронизаций $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_*$.

Если система (3.1.1) абсолютно устойчива в классе $\mathfrak{G}_*$ всех рассинхронизаций, то при каждом индивидуальном наборе моментов коррекции она равномерно устойчива. Если система (3.1.1) абсолютно асимптотически устойчива в классе всех рассинхронизаций, то при каждом индивидуальном наборе моментов коррекции и при любом $t_0 \in (-\infty, \infty)$ она устойчива при $t > t_0$. Однако из абсолютной асимптотической устойчивости в общем случае не следует равномерная асимптотическая устойчивость рассинхронизованной системы (3.1.1), отвечающей некоторому фиксированному набору моментов коррекции компонент.

§ 3.2. Абсолютная устойчивость разностных уравнений

При анализе абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем плодотворен переход к эквивалентным разностным уравнениям. В § 3.2 вводится понятие абсолютной устойчивости разностного уравнения в некотором классе правых частей. Устанавливается «принцип ограниченности» для абсолютно устойчивых в конечном классе правых частей разностных уравнений.

3.2.1. Рассмотрим векторное разностное уравнение

$$x(n+1) = f[n, x(n)], \qquad x(n) \in \mathbb{X}, \tag{3.2.1}$$

где $\mathbb{X}$ — некоторое конечномерное линейное пространство. Пусть при каждом значении n отображение $f(n, \cdot)$ принадлежит некоторому множеству отображений $\mathfrak{F}$. Множество решений всех разностных уравнений (3.2.1) со всевозможными последовательностями правых частей из $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$. Если каждое отображение из $\mathfrak{F}$ определено на всем пространстве $\mathbb{X}$ (что будет предполагаться в дальнейшем), то элементами множества $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ являются вектор-функции $x(n)$ целочисленного аргумента со значениями в $\mathbb{X}$, определенные либо при всех значениях n, либо при всех значениях n, больших некоторого n_0. Часть множества $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$, состоящую из решений уравнения (3.2.1), определенных при $n \geq m$, обозначим через $\mathfrak{N}_m(\mathfrak{F})$. Часть множества $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$, состоящую из решений уравнения (3.2.1), определенных при всех значениях n, обозначим через $\mathfrak{N}_{-\infty}(\mathfrak{F})$.

Пусть в пространстве $\mathbb{X}$ фиксирована некоторая норма $|\cdot|$. Если $x \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F})$, то при $q \geq p$ положим

$$\|x\|_q = \sup_{b \geq q} |x(n)|;$$

величина $\|x\|_q$ может принимать значение ∞.

Пусть $f(n, 0) = 0$ при всех значениях n. Тогда уравнение (3.2.1) имеет нулевое решение: $x(n) \equiv 0$. Назовем разностное уравнение (3.2.1) *абсолютно устойчивым* в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ из $|x(0)| < \delta$ вытекает неравенство $\|x\|_0 < \varepsilon$.

Как и понятие абсолютной устойчивости рассинхронизованной системы импульсных уравнений, понятие абсолютной устойчивости разностного уравнения сводится к двум требованиям. Одно из них — устойчивость нулевого положения равновесия каждого разностного уравнения (3.2.1) с правыми частями, принадлежащими при каждом значении n множеству $\mathfrak{F}$. Другое — равномерность свойства устойчивости разностных уравнений (3.2.1) относительно всевозможных последовательностей $\{f(n, \cdot)\}$ правых частей из $\mathfrak{F}$.

Исследование абсолютной устойчивости разностных уравнений использует свойства множества $\mathfrak{N}$. Простейшие свойства этого множества сведены в следующую лемму.

3.2.2. Лемма. *а. Пусть* $\{x(n)\} \in \mathfrak{N}_p$ *и* q *— целое число. Тогда* $\{x(n-q)\} \in \mathfrak{N}_{p+q}$.

б. Пусть множество $\mathfrak{F}$ состоит из конечного числа непрерывных отображений. Если $x_k \in \mathfrak{N}_{p_k}$, где $p_k \to -\infty$ и $x_k(n) \to x_*(n)$ при каждом фиксированном n, то $x_* \in \mathfrak{N}_{-\infty}$.

в. Пусть множество $\mathfrak{F}$ состоит из конечного числа непрерывных отображений. Пусть $x_k \in \mathfrak{N}_0$ и при некоторых ω и Ω выполняются неравенства

$$\omega \leq |x_k(n)| \leq \Omega \quad \text{при} \quad 0 \leq n \leq p_k, \tag{3.2.2}$$

где $p_k \to \infty$. Тогда найдется функция $x_* \in \mathfrak{N}_{-\infty}$, удовлетворяющая неравенствам

$$\omega \leq |x_*(n)| \leq \Omega \quad \text{при} \quad -\infty < n < \infty. \tag{3.2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение а очевидно. Для доказательства утверждения б зададимся произвольным целым числом n. Тогда для всех достаточно больших k найдутся такие отображения $f_k(n,\cdot) \in \mathfrak{F}$, что $x_k(n+1) = f_k[n, x_k(n)]$ при $n \geq p_k$. В силу конечности множества $\mathfrak{F}$ существует такая последовательность $\{k_i\}$, для которой отображения $f_{k_i}(n,\cdot)$ одинаковы: $f_{k_i}(n,\cdot) = f_*(n,\cdot)$ при $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $x_{k_i}(n+1) = f_*[n, x_{k_i}(n)]$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем, что $x_*(n+1) = f_*[n, x_*(n)]$ при всех целых значениях n. Следовательно, $x_* \in \mathfrak{N}_{-\infty}$. Утверждение б леммы доказано.

Перейдем к доказательству утверждения в. Обозначим через q_k целую часть числа $p_k/2$ и положим $y_k(n) = x_k(n+q_k)$. Тогда для каждого k функция $y_k(n)$ определена при $n = -q_k, \ldots, q_k$ и удовлетворяет в силу (3.2.2) при этих значениях аргумента неравенствам

$$\omega \leq |y_k(n)| \leq \Omega. \tag{3.2.4}$$

Поскольку каждая функция x_k лежит в $\mathfrak{N}_0$, то по утверждению а леммы $y_k \in \mathfrak{N}_{-q_k}$. Значит, найдутся такие $f_k(n,\cdot) \in \mathfrak{F}$, что

$$y_k(n+1) = f_k[n, y_k(n)] \quad \text{при} \quad n = -q_k, \ldots, q_k - 1. \tag{3.2.5}$$

В силу (3.2.4) найдется последовательность $\{k_{0i}\}$, для которой элементы $y_{k_{0i}}(0)$ сходятся к некоторому y_*. Положим

$$x_*(0) = y_*.$$

Выберем из последовательности $\{k_{0i}\}$ подпоследовательность $\{k_{1i}\}$ так, чтобы сходились каждая из последовательностей элементов $\{y_{k_{1i}}(-1)\}$ и $\{y_{k_{1i}}(1)\}$, а в каждой последовательности $\{f_{k_{1i}}(-1,\cdot)\}$ и $\{f_{k_{1i}}(1,\cdot)\}$ все отображения совпадали между собой. Такой выбор возможен в силу (3.2.4) и конечности множества $\mathfrak{F}$. Положим

$$x_*(-1) = \lim y_{k_{1i}}(-1), \qquad x_*(1) = \lim y_{k_{1i}}(1),$$
$$f_*(-1,\cdot) = f_{k_{1i}}(-1,\cdot), \qquad f_*(1,\cdot) = f_{k_{1i}}(1,\cdot).$$

Тогда, переходя к пределу в равенствах (3.2.5), где $k = k_{1i}$, получим

$$x_*(n+1) = f_*[n, x_*(n)] \tag{3.2.6}$$

при $n = -1, 0$.

Выберем из последовательности $\{k_{1i}\}$ подпоследовательность $\{k_{2i}\}$ так, чтобы сходились последовательности элементов $\{y_{k_{2i}}(-2)\}$ и $\{y_{k_{2i}}(2)\}$, а в каждой последовательности $\{f_{k_{2i}}(-2,\cdot)\}$ и $\{f_{k_{2i}}(2,\cdot)\}$ все отображения совпадали между собой. Положим в этом случае

$$x_*(-2) = \lim y_{k_{2i}}(-2), \qquad x_*(2) = \lim y_{k_{2i}}(2),$$
$$f_*(-2,\cdot) = f_{k_{2i}}(-2,\cdot), \qquad f_*(2,\cdot) = f_{k_{2i}}(2,\cdot).$$

Тогда из (3.2.5) вытекает справедливость равенств (3.2.6) уже при $n = -2, -1, 0, 1$.

Аналогично продолжая описанную процедуру, получим последовательность элементов $x_*(n)$ и отображений $f_*(n,\cdot) \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющих при каждом целом n равенствам (3.2.6). Значит, $x_* \in \mathfrak{N}_{-\infty}$. Так как по построению каждый элемент $x_*(n)$ является предельной точкой множества элементов $\{y_1(n), y_2(n), \dots\}$, то из (3.2.4) вытекают оценки (3.2.3). Утверждение в, а с ним и лемма полностью доказаны.

Назовем отображение $f(x)$, $x \in \mathbb{X}$, $f(x) \in \mathbb{X}$, *слабо невырожденным*, если образ $f(U)$ каждой окрестности U нуля является окрестностью нуля.

3.2.3. Пример. Вещественная непрерывная функция слабо невырождена, если и только если найдутся такие последовательности чисел $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, что $f(x_n) > 0$ и $f(y_n) < 0$. Так, слабо невырождены функции $f_1(x) = x\sin(1/x)$ и $f_2(x) = xh(x)$, где $h(x) > 0$.

3.2.4. Пример. Линейное отображение Ax слабо невырождено, если и только если оно обратимо, т.е. $\det A \neq 0$.

3.2.5. Пример. Пусть отображение $f(x)$ дифференцируемо в нуле, т.е. $f(x) = Ax + o(x)$, где $o(x)$ — члены более высокого порядка малости в нуле, чем $|x|$. Если $\det A \neq 0$, то отображение $f(x)$ слабо невырождено.

3.2.6. Пример. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Если $\langle x, f(x)\rangle \neq 0$ при $x \neq 0$, то отображение $f(x)$ слабо невырождено.

Как показывает следующая теорема, решение вопроса об абсолютной устойчивости разностных уравнений значительно упрощается, если их правые части слабо невырождены.

3.2.7. Теорема. *Пусть все отображения из класса $\mathfrak{F}$ слабо невырождены. Если положение равновесия каждого разностного уравнения* (3.2.1) *с правыми частями из $\mathfrak{F}$ устойчиво при $n \geq 0$, то уравнение* (3.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$.*

Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть в условиях теоремы уравнение (3.2.1) не является абсолютно устойчивым в $\mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие отображения $f_k(n,\cdot) \in \mathfrak{F}$, $k = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots,$ что при каждом k уравнение

$$x(n+1) = f_k[n, x(n)]$$

обладает решением $x_k(n)$, удовлетворяющим соотношениям

$$|x_k(0)| \le \frac{1}{k}, \qquad \sup_{n\ge 0} |x_k(n)| \ge \varepsilon_0, \tag{3.2.7}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ - некоторое не зависящее от k число. Построим в этих предположениях последовательность отображений $f_*(n,\cdot)$ из $\mathfrak{F}$, для которых нулевое решение разностного уравнения

$$x(n+1) = f_*[n, x(n)] \tag{3.2.8}$$

неустойчиво при $n \ge 0$.

В силу (3.2.7) найдется такое целое число $n_1 \ge 1$, что $|x_1(n_1)| \ge \varepsilon_0$. Положим

$$f_*(n,\cdot) = f_1(n,\cdot) \quad \text{при} \quad 0 \le n < n_1.$$

Оператор перехода $F(n_1, 0; x)$ уравнения (3.2.8) в этом случае определен и имеет вид

$$F(n_1, 0; x) = f_1(n_1 - 1, f_1(n_1 - 2, \ldots, f_1(0, x)\ldots)).$$

Так как по условию теоремы здесь каждое отображение $f_1(n, x)$ слабо невырождено по переменной x, то и оператор перехода $F(n_1, 0; x)$ также слабо невырожден по переменной x. Значит, образ окрестности нуля $|x| < 1/2$ при отображении $F(n_1, 0; \cdot)$ содержит некоторую окрестность нуля $|x| < 1/k_2$.

В силу (3.2.7) найдется такое целое число $n_2 \ge 1$, что $|x_{k_2}(0)| < 1/k_2$, $|x_{k_2}(n_2)| \ge \varepsilon_0$. Положим

$$f_*(n,\cdot) = f_{k_2}(n - n_1,\cdot) \quad \text{при} \quad n_1 \le n < n_1 + n_2. \tag{3.2.9}$$

Покажем, что в этом случае уравнение (3.2.8) имеет решение $u_2(n)$, определенное при $0 \le n \le n_1 + n_2$, для которого

$$|u_2(0)| < \frac{1}{2}, \qquad |u_2(n_1 + n_2)| \ge \varepsilon_0. \tag{3.2.10}$$

Действительно, в силу слабой невырожденности оператора перехода $F(n_1, 0; x)$ найдется такой элемент u_2, $|u_2| < 1/2$, что $F(n_1, 0; u_2) = x_{k_2}(0)$. Тогда решение $u_2(n)$ начальной задачи $u_2(0) = u_2$ для разностного уравнения (3.2.8) удовлетворяет условию: $u_2(n_1) = F(n_1, 0; u_2) = x_{k_2}(0)$. Отсюда (в силу (3.2.9) и полугруппового свойства оператора перехода) вытекает, что $u_2(n_1 + n_2) = x_{k_2}(n_2)$. Значит, в силу (3.2.7) $|u_2(n_1 + n_2)| \geq \varepsilon_0$. Соотношения (3.2.10) доказаны.

Аналогично описанной процедуре можно для произвольного $p = 3$, $4, \ldots$ указать такие целые числа k_p и n_p, что уравнение (3.2.8) с правой частью $f_*(n, \cdot)$, определенной при $n_1 + \cdots + n_{p-1} \leq n < n_1 + \cdots + n_{p-1} + n_p$ равенствами $f_*(n, x) = f_{k_p}(n - n_1 - \cdots - n_{p-1}, x)$, будет иметь решение $u_p(n)$, обладающее свойствами:

$$|u_p(0)| < \frac{1}{p}, \qquad |u_p(n_1 + n_2 + \cdots + n_p)| \geq \varepsilon_0. \tag{3.2.11}$$

Соотношения (3.2.11) показывают, что положение равновесия $x = 0$ разностного уравнения (3.2.8) с правыми частями $f_*(n, \cdot)$ из $\mathfrak{F}$ неустойчиво.

Итак, в предположении, что разностное уравнение (3.2.1) в условиях теоремы не является абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{F}$, построена последовательность отображений $f_*(n, \cdot) \in \mathfrak{F}$, при которой положение равновесия соответствующего разностного уравнения неустойчиво. Полученное противоречие доказывает теорему.

Возникает вопрос о том, справедливо ли утверждение теоремы 3.2.7 без предположения о слабой невырожденности правых частей разностного уравнения? В случае линейных разностных уравнений ответ положителен.

3.2.8. Теорема (принцип ограниченности)**.** *Пусть множество $\mathfrak{F}$ состоит из линейных отображений с равномерно ограниченными нормами. Тогда уравнение* (3.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если каждое решение каждого уравнения* (3.2.1) *с правыми частями из $\mathfrak{F}$ ограничено при $n \geq 0$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно — абсолютная устойчивость влечет ограниченность каждого решения уравнений (3.2.1). Покажем, что ограниченность решений уравнения (3.2.1) влечет его абсолютную устойчивость. Будем ради простоты отождествлять линейные отображения из $\mathfrak{F}$ с их матрицами. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество всех конечных произведений матриц из $\mathfrak{F}$. Очевидна следующая лемма.

3.2.9. Лемма. *В условиях теоремы уравнение* (3.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}$, *если и только если*

$$\sup_{R\in\mathfrak{R}} \|R\| < \infty. \tag{3.2.12}$$

В силу леммы 3.2.9 для доказательства теоремы достаточно установить справедливость неравенства (3.2.12). Доказательство неравенства (3.2.12) проведем от противного.

Пусть неравенство (3.2.12) неверно. Покажем, что в этом случае найдется последовательность матриц $R_n \in \mathfrak{R}$, для которой

$$\|R_nR_{n-1}\cdots R_1\| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.2.13}$$

Доказательству существования требуемой последовательности матриц R_n посвящены приводимые ниже две леммы. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех матриц $B \in \mathfrak{R}$, для которых выполняется неравенство $\sup_{R\in\mathfrak{R}} \|RB\| < \infty$.

3.2.10. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{B} \neq \emptyset$. *Тогда найдется такое число* $\beta < \infty$, *что* $\|RB\| \le \beta\|B\|$ *для любых матриц* $R \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Обозначим через E подпространство всех конечных сумм $B_1u_1 + \cdots + B_ku_k$, где $B_i \in \mathfrak{B}$, $u_i \in \mathbb{X}$. Выберем в E базис $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Тогда найдутся такие матрицы $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ и элементы $u_{ij} \in \mathbb{X}$, что

$$e_i = B_{i1}u_{i1} + B_{i2}u_{i2} + \cdots + B_{im_i}u_{im_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

По определению множества $\mathfrak{B}$ для каждой матрицы B_{ij} существует такая константа β_{ij}, что $\|RB_{ij}\| \le \beta_{ij}\|B_{ij}\|$ для любой матрицы $R \in \mathfrak{R}$. Следовательно, при

$$\gamma = \max_i \{\beta_{i1}\|B_{i1}u_{i1}\| + \beta_{i2}\|B_{i2}u_{i2}\| + \cdots + \beta_{im_i}\|B_{im_i}u_{im_i}\|\}$$

верна оценка

$$\|Re_i\| \le \gamma, \qquad R \in \mathfrak{R},\ i = 1, 2, \ldots, p,$$

и в силу конечномерности пространства E при некотором $\beta < \infty$ выполняется неравенство $\|Ru\| \le \beta\|u\|$ для любого элемента $u \in E$. А поскольку $Bu \in E$ для любых $B \in \mathfrak{B}$, $u \in \mathbb{X}$, то окончательно получаем: $\|RBu\| \le \beta\|Bu\|$ ($R \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{B}$, $u \in \mathbb{X}$), откуда и следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Положим $\mathfrak{C} = \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{B}$. Множество $\mathfrak{C}$ состоит из матриц $C \in \mathfrak{R}$, для которых справедливо равенство: $\sup_{R\in\mathfrak{R}} \|RC\| = \infty$. Из леммы 3.2.10 вытекает следствие.

Следствие. *Если $R, C \in \mathfrak{R}$ и $\|RC\| > \beta\|C\|$, то $C \in \mathfrak{C}$.*

Выберем произвольное число ω, удовлетворяющее неравенству

$$\omega > \max\{1, \beta, \sup_{A \in \mathfrak{F}} \|A\|\}. \tag{3.2.14}$$

Так как нормы матриц $A \in \mathfrak{F}$ по условию теоремы равномерно ограничены, то требуемое ω существует.

3.2.11. Лемма. *Если $C \in \mathfrak{C}$, то найдется матрица $R \in \mathfrak{R}$, для которой $RC \in \mathfrak{C}$ и $\|RC\| \geq \omega\|C\|$.*

Доказательство. Так как $C \in \mathfrak{C}$, то существует матрица

$$W_r = A_r \cdots A_2 A_1, \qquad A_i \in \mathfrak{F},$$

для которой верно неравенство $\|W_r C\| \geq \omega^3 \|C\|$. Положим $W_i = A_i \cdots A_1$ и $V_i = A_r \cdots A_{i+1}$ при $1 \leq i \leq r-1$ и обозначим через p наименьшее целое число, при котором $\|W_p A\| \geq \omega\|C\|$. Поскольку

$$\|W_r C\| \geq \omega^3 \|C\| \geq \omega\|C\|, \tag{3.2.15}$$

то $p \leq r$. А поскольку $\|W_1 C\| = \|A_1 u\| \leq \|A_1\| \cdot \|C\| < \omega\|C\|$, то $p > 1$. Значит, существует матрица W_{p-1}, для которой в силу определения числа p выполняется неравенство $\|W_{p-1}C\| < \omega\|C\|$. Отсюда $\|W_p C\| = \|A_p(W_{p-1}C)\| \leq \|A_p\| \cdot \|W_{p-1}C\| < \omega^2\|C\|$, и потому в силу (3.2.15) $p \neq r$. Тогда $p \leq r-1$. Следовательно, определена матрица V_p, для которой $\|V_p(W_p C)\| = \|W_r C\| \geq \omega\|C\| > \omega\|W_p C\|$. Отсюда по следствию из леммы 3.2.10 $W_p C \in \mathfrak{C}$. Положив $R = W_p$, получаем утверждение леммы. Лемма доказана. □

Из леммы 3.2.10 вытекает непустота множества $\mathfrak{C}$. Действительно, если $\mathfrak{C} = \emptyset$, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда в силу следствия из леммы 3.2.10 $\|SA\| \leq \beta\|A\| \leq \beta\omega$ для любых матриц $S \in \mathfrak{R}$ и $A \in \mathfrak{F}$. Но каждая матрица $R \in \mathfrak{R}$ представима в виде $R = SA$, где $A \in \mathfrak{F}$, а $S \in \mathfrak{R}$ или $S = I$. Поэтому неравенство $\|R\| \leq \beta\omega$ верно для любой матрицы $R \in \mathfrak{R}$. Это противоречит предположению $\sup\|R\| = \infty$, что и доказывает непустоту множества $\mathfrak{C}$.

Завершим доказательство теоремы 3.2.8. Выберем произвольную матрицу $R_1 \in \mathfrak{C}$; очевидно, $R_1 \neq 0$. По лемме 3.2.11 найдется матрица $R_2 \in \mathfrak{R}$, для которой $R_2 R_1 \in \mathfrak{C}$ и $\|R_2 R_1\| \geq \omega\|R_1\|$. Матрице $R_2 R_1$ по лемме 3.2.11 соответствует такая матрица $R_3 \in \mathfrak{R}$, что $R_3 R_2 R_1 \in \mathfrak{C}$ и $\|R_3 R_2 R_1\| \geq \omega\|R_2 R_1\| \geq \omega^2\|R_1\|$. Продолжая этот процесс, получим последовательность матриц $R_n \in \mathfrak{R}$, для которых справедливы неравенства

$\|R_n R_{n-1} \cdots R_1\| \geq \omega^{n-1} \|R_1\|$. Поскольку $\|R_1\| \neq 0$, а в силу (3.2.14) $\omega > 1$, то справедливо соотношение (3.2.13).

Итак, если $\sup_{R \in \mathfrak{R}} \|R\| = \infty$, то найдется последовательность матриц $R_n \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющих соотношению (3.2.13). Но тогда в силу конечномерности пространства $\mathbb{X}$ существует элемент $x_* \in \mathbb{X}$ и последовательность $n_i \to \infty$, для которых

$$R_{n_i} R_{n_i - 1} \cdots R_1 x_* \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{3.2.16}$$

Так как $R_n \in \mathfrak{R}$ при $n = 1, 2, \ldots$, то каждая матрица R_n допускает представление $R_n = A_{nk_n} \cdots A_{n2} A_{n1}$, где матрицы A_{ij} принадлежат множеству $\mathfrak{F}$. Определим теперь линейные отображения $f(n, \cdot) \in \mathfrak{F}$, последовательно полагая:

$$f(0, \cdot) = A_{11},\ f(1, \cdot) = A_{12},\ \ldots,\ f(k_1 - 1, \cdot) = A_{1k_1},$$

$$f(k_2, \cdot) = A_{21},\ \ldots,\ f(k_1 + \cdots + k_n - 1, \cdot) = A_{nk_n},\ \ldots\ .$$

Решение $x(n)$ линейного разностного уравнения с построенной правой частью $f(n, x)$, для которого $x(0) = x_*$, обладает свойством:

$$x(k_1 + \cdots + k_{n_i}) = R_{n_i} R_{n_i - 1} \ldots R_1 x_*.$$

Следовательно, в силу (3.2.16) $\overline{\lim} |x(n)| = \infty$.

Итак, предположение $\sup_{R \in \mathfrak{R}} \|R\| = \infty$ противоречит ограниченности каждого решения каждого уравнения (3.2.1). Теорема 3.2.8 доказана. □

Множество $\mathfrak{F}$ в теореме 3.2.8 может содержать бесконечное число линейных отображений. Этот факт существен в дальнейшем. Освободиться в теореме 3.2.8 от предположения о равномерной ограниченности норм отображений из $\mathfrak{F}$ нельзя. Это видно из примера семейства $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ нильпотентных матриц

$$F_\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad -\infty < \alpha < \infty.$$

§ 3.3. Абсолютная асимптотическая устойчивость разностных уравнений

Вводится и изучается понятие абсолютной асимптотической устойчивости положения равновесия разностного уравнения. Устанавливаются критерии абсолютной асимптотической устойчивости. Один из них (принцип отсутствия малых ограниченных решений) сводит вопрос об абсолютной асимптотической устойчивости к вопросу об отсутствии решений определенного типа. Другой утверждает, что для абсолютной асимптотической устойчивости линейного разностного уравнения его правые части должны быть равномерно «сжимающими» в некоторой норме.

3.3.1. Назовем уравнение (3.2.1) *абсолютно асимптотически устойчивым* в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если оно абсолютно устойчиво в этом классе и найдется такое $\delta_0 > 0$, что функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0$, удовлетворяющие условию $|x(0)| \le \delta_0$, равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

3.3.2. Теорема. *Пусть разностное уравнение* (3.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}$, *состоящем из конечного числа непрерывных отображений. Тогда оно абсолютно асимптотически устойчиво в классе* $\mathfrak{F}$, *если и только если найдется такое* $\delta_0 > 0$, *что в множестве* $\mathfrak{N}_{-\infty}$ *нет ненулевых функций* $x(n)$, *удовлетворяющих условию* $\|x\|_{-\infty} \le \delta_0$.

Утверждения типа теоремы 3.3.2 в проблеме абсолютной устойчивости называют *принципами отсутствия ограниченных решений*. В ряде случаев установить отсутствие ограниченных решений совсем просто. В отличие от классического принципа отсутствия ограниченных решений Красносельского-Покровского теорема 3.3.2 говорит об отсутствии малых решений уравнения (3.2.1). Поэтому теорему 3.3.2 естественно назвать *принципом отсутствия малых ограниченных решений*.

Утверждению теоремы 3.3.2 можно придать следующую эквивалентную формулировку.

3.3.3. Теорема. *Пусть разностное уравнение* (3.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}$, *состоящем из конечного числа непрерывных отображений. Тогда оно абсолютно асимптотически устойчиво в классе* $\mathfrak{F}$, *если и только если найдется такое* $\delta_0 > 0$, *что в множестве* $\mathfrak{N}_{-\infty}$ *нет ненулевых ограниченных функций* $x(n)$, *для которых* $|x(n)| \le \delta_0$ *при* $n \le 0$.

Доказательство теоремы 3.3.2. Если уравнение (3.2.1) абсолютно асимптотически устойчиво, то найдется такое $\delta_0 > 0$, что все функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0$, удовлетворяющие условию $|x(0)| \le \delta_0$, равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$. Пусть $x_*(n)$ — некоторая функция из $\mathfrak{N}_{-\infty}$, для которой $\|x_*\|_{-\infty} \le \delta_0$. В силу утверждения а леммы 3.2.2 функции

$u_k(n) = x_*(n+k)$ при каждом целом значении k принадлежат $\mathfrak{N}_0$. А так как $|u_k(0)| = |x_*(k)| \le \delta_0$, то по условию теоремы верно соотношение

$$\sup_k |u_k(n)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.3.1}$$

Но $\sup_k |u_k(n)| = \sup_k |x_*(k)| = \|x_*\|_{-\infty}$. Тогда из (3.3.1) следует равенство $\|x_*\|_{-\infty} = 0$. Поэтому $x_*(n) \equiv 0$.

Итак, из абсолютной асимптотической устойчивости уравнения (3.2.1) вытекает отсутствие малых ненулевых решений, определенных при всех значениях аргумента.

Покажем теперь, что отсутствие малых ненулевых функций в $\mathfrak{N}_{-\infty}$ влечет в условиях теоремы абсолютную асимптотическую устойчивость уравнения (3.2.1). Пусть число $\delta_0 > 0$ таково, что соотношения $x \in \mathfrak{N}_{-\infty}$, $\|x\|_{-\infty} \le \delta_0$ выполняются только для функции $x(n)$, тождественно равной нулю. В силу абсолютной устойчивости уравнения (3.2.1) по данному δ_0 можно указать такое число $\delta_1 > 0$, что из соотношений $x \in \mathfrak{N}_0$, $|x(0)| \le \delta_1$ следует неравенство $\|x\|_0 \le \delta_0$. Поскольку по предположению уравнение (3.2.1) не является абсолютно асимптотически устойчивым, то найдутся такие функции $x_k \in \mathfrak{N}_0$ и натуральные числа $p_k \to \infty$, для которых $|x_k(0)| \le \delta_1$ и $|x_k(p_k)| \ge \varepsilon_0$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$. В силу абсолютной устойчивости уравнения (3.2.1) существует $\alpha > 0$, при котором из $|x_k(p_k)| \ge \varepsilon_0$ следуют оценки

$$|x_k(n)| \ge \alpha \quad \text{при} \quad 0 \le n \le p_k, \tag{3.3.2}$$

а в силу определения числа δ_1 из $|x_k(0)| \le \delta_1$ следуют оценки

$$|x_k(n)| \le \delta_0 \quad \text{при} \quad 0 \le n \le p_k. \tag{3.3.3}$$

В силу утверждения в леммы 3.2.2, из оценок (3.3.2) и (3.3.3) вытекает существование ненулевой функции $x_* \in \mathfrak{N}_{-\infty}$, удовлетворяющей неравенству $\|x_*\|_{-\infty} \le \delta_0$. Мы пришли к противоречию с определением числа δ_0. Теорема 3.3.2 доказана. □

Абсолютно асимптотически устойчивые линейные разностные уравнения обладают рядом важных свойств, не присущих разностным уравнениям общего вида. Одно из них — экспоненциальная скорость стремления решений к нулю.

3.3.4. Теорема. *Пусть множество $\mathfrak{F}$ состоит из линейных отображений. Тогда разностное уравнение* (3.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если найдутся такие константы $c < \infty$ и $q < 1$, что для любой функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0$ справедлива* *оценка*

$$|x(n)| \leq cq^n |x(0)|, \qquad n \geq 0. \tag{3.3.4}$$

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Поэтому нужно лишь показать, что из абсолютной асимптотической устойчивости уравнения (3.2.1) следует экспоненциальное убывание (3.3.4) решений при $n \to \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ множество всех произведений $A_n A_{n-1} \cdots A_1$ матриц отображений из $\mathfrak{F}$, и положим $\alpha_0 = 1$,

$$\alpha_n = \sup_{A \in \mathfrak{A}_n} \|A\|, \qquad n \geq 1. \tag{3.3.5}$$

Каждую матрицу $A \in \mathfrak{A}_{n+m}$ можно представить в виде произведения $A = BC$, где $B \in \mathfrak{A}_n$, $C \in \mathfrak{A}_m$. Следовательно, $\|A\| \leq \|B\| \cdot \|C\| \leq \alpha_n \alpha_m$. Взяв верхнюю грань в левой части неравенства $\|A\| \leq \alpha_n \alpha_m$ по всем матрицам $A \in \mathfrak{A}_{n+m}$, получаем:

$$\alpha_{n+m} \leq \alpha_n \alpha_m, \qquad n, m \geq 0. \tag{3.3.6}$$

3.3.5. Лемма (Фекете). *Пусть неотрицательные числа α_n удовлетворяют условию* (3.3.6). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $c_\varepsilon < \infty$, что $\alpha_n \leq c_\varepsilon (\lambda + \varepsilon)^n$, где $\lambda = \inf_{n \geq 1} \alpha_n^{1/n}$.*

Утверждение леммы 3.3.5 хорошо известно и широко используется в теории устойчивости. Приведем доказательство ради полноты изложения.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое натуральное $r \geq 1$, при котором $\alpha_r^{1/r} \leq \lambda + \varepsilon$. Положим $c_\varepsilon = \max_{0 \leq n < r} \{(\lambda + \varepsilon)^{-n} \alpha_n\}$. В силу (3.3.6) верно соотношение $\alpha_{kr} \leq (\lambda + \varepsilon)^{kr}$. Представив произвольное натуральное n в виде $n = kr + s$, где $0 \leq s < r$, получим из (3.3.6):

$$\alpha_n \leq \alpha_s \alpha_{kr} \leq \alpha_s (\lambda + \varepsilon)^{kr} = \{(\lambda + \varepsilon)^{-s} \alpha_s\} (\lambda + \varepsilon)^n \leq c_\varepsilon (\lambda + \varepsilon)^n.$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Очевидно, каждая матрица $A = A_n A_{n-1} \cdots A_1$ из $\mathfrak{A}_n$ является матрицей оператора перехода $F(n, 0; x)$ некоторого уравнения (3.2.1) с правыми частями из $\mathfrak{F}$. Поэтому (в силу абсолютной асимптотической устойчивости разностного уравнения (3.2.1)) величины α_n, определяемые равенствами (3.3.5), конечны и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Но тогда $\lambda = \inf \alpha_n^{1/n} < 1$. Выбрав $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\lambda + \varepsilon < 1$ и положив $q = \lambda + \varepsilon$, получим из леммы 3.3.5:

$$\alpha_n \le cq^n, \qquad n \ge 0, \tag{3.3.7}$$

при некотором $c < \infty$.

Поскольку для каждой функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0$ и каждого натурального n имеет место представление $x(n) = A_{n-1} \cdots A_0 x(0)$, где A_i — матрицы некоторых отображений из $\mathfrak{F}$, то $|x(n)| \le \alpha_n |x(0)|$. В силу (3.3.7) отсюда вытекает оценка (3.3.4) Теорема 3.3.4 доказана. □

Теорема 3.3.4 утверждает, что абсолютная асимптотическая устойчивость линейного разностного уравнения равносильна достаточно жесткому свойству решений этого уравнения — экспоненциальной скорости их стремления к нулю. Следующая теорема утверждает, на первый взгляд, обратное: что абсолютная асимптотическая устойчивость линейного разностного уравнения равносильна достаточно слабому свойству стремления решений к нулю с произвольной скоростью. Таким образом, как это часто бывает в различных задачах теории устойчивости, экспоненциальный характер стремления решений разностного уравнения к нулю является следствием самого факта стремления к нулю этих решений.

3.3.6. Теорема. *Пусть множество $\mathfrak{F}$ состоит из линейных отображений с равномерно ограниченными нормами. Тогда разностное уравнение* (3.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если каждая функция $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0$ стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Для линейных разностных уравнений принцип отсутствия ограниченных решений принимает совсем простой вид.

3.3.7. Теорема. *Пусть множество $\mathfrak{F}$ состоит из линейных отображений с равномерно ограниченными нормами. Тогда разностное уравнение* (3.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если каждая функция из $\mathfrak{N}_0$ ограничена, а единственной ограниченной функцией из $\mathfrak{N}_{-\infty}$ является нулевая функция.*

Обратим внимание на тот факт, что в теоремах 3.3.6 и 3.3.7, как и в теореме 3.2.8, множество $\mathfrak{F}$ может состоять из бесконечного числа элементов.

Доказательство теорем 3.3.6 и 3.3.7. Пусть уравнение (3.2.1) абсолютно асимптотически устойчиво в классе $\mathfrak{F}$. Тогда каждая функция из $\mathfrak{N}_0$ стремится к нулю. Покажем, что единственной ограниченной функцией из $\mathfrak{N}_{-\infty}$ является нулевая функция. Действительно, пусть $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_{-\infty}$ и $|x(n)| \leq \nu$ при всех целых n. Тогда для каждой функции $x_k(n) = x(n+k)$, $-\infty < k < \infty$, выполняется неравенство $|x_k(0)| \leq \nu$. Значит, по теореме 3.3.4 $|x_k(n)| \leq c\nu q^n$ при $n \geq 0$, где $c < \infty$ и $0 \leq q < 1$. Представив произвольное число n_0 в виде $n_0 = n + (n_0 - n)$, где $n \geq 0$, получим соотношения $|x(n_0)| = |x_{n_0-n}(n)| \leq c\nu q^n$. Так как n в последней оценке произвольно, то $x(n) = 0$ при $-\infty < n < \infty$.

В одну сторону утверждения теорем 3.3.6 и 3.3.7 доказаны. Покажем теперь, что абсолютную асимптотическую устойчивость уравнения (3.2.1) влекут как стремление функций из $\mathfrak{N}_0$ к нулю, так и ограниченность функций из $\mathfrak{N}_0$ вместе с отсутствием ограниченных ненулевых функций в $\mathfrak{N}_{-\infty}$.

Прежде всего заметим, что в условиях обеих теорем функции из $\mathfrak{N}_0$ ограничены. Следовательно, по теореме 3.2.8 уравнение (3.2.1) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

3.3.8. Лемма. *Существует норма $\|\cdot\|_*$, в которой $\|A\|_* \leq 1$ для матрицы A любого отображения из $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. В силу леммы 3.2.2 справедливо неравенство $r = \sup_{R\in\mathfrak{R}} \|R\| < \infty$, где $\mathfrak{R}$ — множество всех конечных произведений матриц отображений из $\mathfrak{F}$. Положим

$$\|x\|_* = \max\{|x|, \sup_{R\in\mathfrak{R}} |Rx|\}.$$

Так как $|x| \leq \|x\|_* \leq |x| \max\{1, r\}$, а неравенство треугольника и свойство положительной однородности для функции $\|x\|_*$очевидны, то $\|\cdot\|_*$ — норма. Но для матрицы A любого отображения из $\mathfrak{F}$ верны включения $A \in \mathfrak{R}$, $RA \in \mathfrak{R}$, где $R \in \mathfrak{R}$. Значит, $|Ax| \leq \sup_{R\in\mathfrak{R}} |Bx|$ и $|RAx| \leq \sup_{R\in\mathfrak{R}} |Bx|$. Поэтому

$$\|Ax\|_* = \max\left\{|Ax|, \sup_{R\in\mathfrak{R}} |RAx|\right\} \leq \sup_{B\in\mathfrak{R}} |Bx| \leq \|x\|_*.$$

Следовательно, $\|A\|_* \leq 1$. Лемма 3.3.8 доказана. □

Важную информацию о свойствах линейного уравнения (3.2.1), как видно из доказательства теоремы 3.3.4, содержит последовательность чисел $\alpha_n = \sup \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\|_*$, $n \geq 1$, где supremum берется по всем наборам матриц $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ отображений из $\mathfrak{F}$. В силу леммы 3.3.8 $\alpha_n \leq 1$ при $n \geq 1$.

3.3.9. Лемма. *Либо $\alpha_n = 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, либо $\alpha_n < 1$ при некотором n. В последнем случае уравнение* (3.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если $\alpha_n < 1$ при некотором $n \geq 1$, то $\inf \alpha_n^{1/n} < 1$. В этом случае по лемме 3.3.5 найдутся такие числа $c < \infty$ и $q < 1$, что $\alpha_n \leq cq^n$. Отсюда и из определения чисел α_n вытекает справедливость для любого решения $x(n)$ уравнения (3.2.1) оценки $\|x(n)\|_* \leq cq^n \|x(0)\|_*$. Следовательно, неравенство $\alpha_n < 1$ влечет абсолютную асимптотическую устойчивость уравнения (3.2.1). Лемма 3.3.9 доказана. □

Продолжим доказательство теорем 3.3.6 и 3.3.7. Допустим, что уравнение (3.2.1) (которое, как уже доказано, абсолютно устойчиво) абсолютно асимптотически устойчивым не является. Тогда по лемме 3.3.9 $\alpha_n = 1$ при всех натуральных n. Следовательно, при каждом $n \geq 1$ существуют элементы $y_n \in \mathbb{X}$ и матрицы $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$ отображений из $\mathfrak{F}$, для которых справедливы равенства

$$\|A_n^{(n)} A_{n-1}^{(n)} \cdots A_1^{(n)} y_n\|_* = 1, \qquad \|y_n\|_* = 1. \tag{3.3.8}$$

Положим

$$\begin{aligned} B_i^{(n)} &= A_{n+1+i}^{(2n+1)} \quad \text{при} \quad -n \leq i \leq n; \\ z_{-n}^{(n)} &= y_{2n+1}, \\ z_i^{(n)} &= A_{n+i}^{(2n+1)} \cdots A_1^{(2n+1)} y_{2n+1} \quad \text{при} \quad -n+1 \leq i \leq n+1. \end{aligned}$$

Тогда

$$z_{i+1}^{(n)} = B_i^{(n)} z_i^{(n)} \quad \text{при} \quad -n \leq i \leq n, \tag{3.3.9}$$

причем в силу леммы 3.3.8 $B_i^{(n)}$ — матрицы отображений из $\mathfrak{F}$ и

$$\|B_i^{(n)}\|_* \leq 1, \qquad -n \leq i \leq n. \tag{3.3.10}$$

Из (3.3.9) и (3.3.10) вытекает цепочка неравенств: $\|z_{-n}^{(n)}\|_* \leq \|z_{-n+1}^{(n)}\|_* \leq \cdots \leq \|z_{n+1}^{(n)}\|_*$. Но из равенств (3.3.8) следует, что $\|z_{-n}^{(n)}\|_* = \|y_{2n+1}\|_* = 1$ и $\|z_{n+1}^{(n)}\|_* = \|A_{2n+1}^{(2n+1)} \cdots A_1^{(2n+1)} y_{2n+1}\|_* = 1$. Поэтому

$$\|z_i^{(n)}\|_* = 1 \quad \text{при} \quad -n \leq i \leq n+1. \tag{3.3.11}$$

В силу компактности единичных шаров как в конечномерном пространстве $\mathbb{X}$, так и в пространстве матриц линейных отображений $\mathbb{X}$ в себя, последовательности элементов $\{z_i^{(n)}\}$ и матриц $\{B_i^{(n)}\}$ можно считать сходящимися при каждом значении i:

$$z_i^{(n)} \to z_i, \qquad B_i^{(n)} \to B_i. \tag{3.3.12}$$

При этом в силу (3.3.9)–(3.3.11)

$$z_{i+1} = B_i z_i, \quad \|z_i\|_* = 1, \quad \|B_i\|_* \leq 1, \qquad -\infty < i < \infty. \tag{3.3.13}$$

Здесь B_i не являются, вообще говоря, матрицами отображений из $\mathfrak{F}$, поскольку замкнутость $\mathfrak{F}$ не предполагается.

В силу (3.3.12) можно выбрать при каждом i такое число m_i, что для матрицы $C_i = B_i^{(m_i)}$ выполняется неравенство

$$\|(C_i - B_i)z_i\|_* \leq 2^{-|i|-2} \tag{3.3.14}$$

Определим при каждом $k \geq 0$ последовательность элементов $w_n^{(k)} \in \mathbb{X}$, полагая $w_{-k}^{(k)} = z_{-k}$ и

$$w_{n+1}^{(k)} = C_n w_n^{(k)} \quad \text{при} \quad n \geq -k. \tag{3.3.15}$$

Отсюда и из (3.3.13) получаем при $n \geq -k$

$$w_{n+1}^{(k)} - z_{n+1} = C_n w_n^{(k)} - B_n z_n = (C_n - B_n)z_n + C_n(w_n^{(k)} - z_n).$$

В силу (3.3.14) здесь $\|(C_n - B_n)z_n\|_* \leq 2^{-|n|-2}$, а в силу (3.3.13)

$$\|C_n(w_n^{(k)} - z_n)\|_* = \|B_n^{(m_n)}(w_n^{(k)} - z_n)\|_* \leq \|w_n^{(k)} - z_n\|_*.$$

Значит,

$$\|w_{n+1}^{(k)} - z_{n+1}\|_* \leq 2^{-|n|-2} + \|w_n^{(k)} - z_n\|_* \quad \text{при} \quad n \geq -k.$$

Здесь, поскольку $\|w_{-k}^{(k)} - z_{-k}\|_* = 0$, то $\|w_n^{(k)} - z_n\| \leq 1/2$ при $n \geq -k$. А так как в силу (3.3.13) $\|z_n\|_* = 1$, то

$$\frac{1}{2} \leq \|w_n^{(k)}\|_* \leq \frac{3}{2} \quad \text{при} \quad n \geq -k. \tag{3.3.16}$$

В силу (3.3.16) последовательность $\{w_n^{(k)}\}$ можно считать сходящейся при каждом значении n к некоторому пределу $x(n)$. Тогда, переходя к пределу в (3.3.15) и (3.3.16), получаем:

$$x(n+1) = C_n x(n), \quad \frac{1}{2} \leq \|x(n)\|_* \leq \frac{3}{2}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

где $C_n = B_n^{(m_n)}$ — матрицы некоторых отображений из $\mathfrak{F}$.

Итак, уравнение (3.2.1) имеет ненулевое ограниченное решение $x(n)$, определенное при всех n и не стремящееся к нулю при $n \to \infty$. Существование такого решения противоречит как условиям теоремы 3.3.6, так и условиям теоремы 3.3.7. Полученное противоречие доказывает теоремы 3.3.6 и 3.3.7.

§ 3.4. Признаки абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем

В § 3.4 полученные выше условия абсолютной устойчивости разностных уравнений применяются для анализа устойчивости нулевого состояния равновесия рассинхронизованной системы

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[\xi_1(T_i^n - 0), \dots, \xi_N(T_i^n - 0)], \qquad i = 1, 2, \dots, N. \qquad (3.4.1)$$

3.4.1. Сопоставим системе (3.4.1) с набором $\{T_i^n\}$ моментов коррекции компонент эквивалентное разностное уравнение

$$x(n+1) = f[n, x(n)]. \qquad (3.4.2)$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(\varphi)$ множество всех помесей отображения

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \{\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_N), \dots, \varphi_N(\xi_1, \dots, \xi_N)\};$$

через $\mathfrak{P}^i(\varphi)$ обозначим подмножество множества $\mathfrak{P}(\varphi)$, состоящее из помесей отображения $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N)$ с i-й компонентой, равной $\varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_N)$.

По теореме 1.4.3 при каждом значении n правая часть уравнения (3.4.2) является элементом множества $\mathfrak{P}(\varphi)$. При этом различным наборам моментов коррекции T_i^n компонент системы (3.4.1) отвечают разностные уравнения (3.4.2) с различными, вообще говоря, последовательностями $\{f(n, \cdot)\}$ правых частей из $\mathfrak{P}(\varphi)$. Но как показывает следующий пример, не всякое разностное уравнение (3.4.2) с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$ является эквивалентным разностным уравнением некоторой рассинхронизованной системы (3.4.1) (так как каждая компонента рассинхронизованной системы по определению должна подвергаться коррекции бесконечное число раз). Значит в последовательности правых частей эквивалентного разностного уравнения бесконечное число отображений должно попадать в каждое из множеств $\mathfrak{P}^1(\varphi), \mathfrak{P}^2(\varphi), \dots, \mathfrak{P}^N(\varphi)$.

3.4.2. Пример. а. Пусть $f(n,x) = f_*(x)$ при $-\infty < n < \infty$, где $f_* \in \mathfrak{P}(\varphi) \setminus \mathfrak{P}^i(\varphi)$ при некотором значении i. Тогда (3.4.2) не является эквивалентным разностным уравнением никакой системы импульсных уравнений (3.4.1).

б. Пусть $f(n,\cdot) \in \mathfrak{P}(\varphi)$ при $n = 0, 1, \ldots, k$. Тогда можно указать такие отображения $\ldots f(-3,\cdot)$, $f(-2,\cdot)$, $f(-1,\cdot)$, $f(k+1,\cdot)\ldots$ из $\mathfrak{P}(\varphi)$, что (3.4.2) будет эквивалентным разностным уравнением некоторой рассинхронизованной системы (3.4.1).

в. Разностное уравнение (3.4.2) является эквивалентным разностным уравнением некоторой рассинхронизованной системы (3.4.1), если и только если каждому из множеств $\mathfrak{P}^1(\varphi), \mathfrak{P}^2(\varphi), \ldots, \mathfrak{P}^N(\varphi)$ принадлежит бесконечное число отображений $f(n,\cdot)$ как с положительными, так и с отрицательными значениями n.

Итак, не всякое разностное уравнение (3.4.2) с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$ является эквивалентным разностным уравнением рассинхронизованной системы (3.4.1) с правой частью φ. Поэтому возможность сведения анализа абсолютной устойчивости системы (3.4.1) к анализу абсолютной устойчивости уравнения (3.4.2) представляется, на первый взгляд, проблематичной. В связи с этим важна следующая лемма.

3.4.3. Лемма. *Если $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*,\varphi)$, то найдется такая функция $x \in \mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$, что для любого $t > 0$ при некотором $n \geq 0$ справедливо равенство $\xi(t-0) = x(n)$. Если $x \in \mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$, то для любого целого $n \geq 0$ найдутся такие функция $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*,\varphi)$ и число $t > 0$, что $x(n) = \xi(t-0)$.*

Лемма 3.4.3 является простым следствием теоремы 1.4.3. Обратим внимание читателя на различия в формулировках первого и второго утверждений леммы. Следствием леммы 3.4.3 является теорема 3.4.4.

3.4.4. Теорема. *Рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *абсолютно устойчива в классе всех рассинхронизаций $\mathfrak{G}_*$, если и только если разностное уравнение* (3.4.2) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}(\varphi)$.*

Теперь для анализа условий абсолютной устойчивости рассинхронизованных импульсных систем можно привлечь признаки из § 3.2 абсолютной устойчивости разностных уравнений.

3.4.5. Теорема. *Линейная рассинхронизованная система импульсных уравнений абсолютно устойчива в классе всех рассинхронизаций, если и только если каждое решение уравнения* (3.4.2) *с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$ ограничено при $n \geq 0$.*

Теорема 3.4.5 вытекает из теорем 3.2.8 и 3.4.4.

Назовем правую часть $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N)$ рассинхронизованной системы импульсных уравнений (3.4.1) *слабо невырожденной*, если слабо невырождены (см. пункт 3.2.2) все помеси отображения $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N)$, т.е. если слабо невырождены все отображения из множества $\mathfrak{P}(\varphi)$.

3.4.6. Пример. Пусть $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\} \in \mathbb{R}^N$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Правая часть рассинхронизованной системы (3.4.1) слабо невырождена, если отображение $\varphi(\xi)$ непрерывно и $\langle \xi, \varphi(\xi) \rangle \neq 0$ при $\xi \neq 0$.

3.4.7. Пример. Пусть $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\} \in \mathbb{R}^N$. Пусть правая часть рассинхронизованной системы (3.4.1) дифференцируема по переменным $\xi_1, \dots, \xi_N$ в нуле, и $A = (a_{ij})$ — матрица с элементами $a_{ij} = \partial\varphi_i(0, \dots, 0)/\partial\xi_j$. Если матрица $B = A + A^*$ обратима, то правая часть системы (3.4.1) слабо невырождена.

Как и в случае разностных уравнений, при наличии слабой невырожденности правой части исследование рассинхронизованной системы импульсных уравнений существенно упрощается.

3.4.8. Теорема. *Пусть правая часть рассинхронизованной системы импульсных уравнений* (3.4.1) *слабо невырождена. Если положение равновесия рассинхронизованной системы устойчиво при любом наборе моментов коррекции компонент, то эта система абсолютно устойчива в классе всех рассинхронизаций.*

Привлечение разностных уравнений для анализа абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений возможно и в случае классов рассинхронизаций, отличных от класса $\mathfrak{G}_*$ всех рассинхронизаций. Рассмотрим, например, подмножество $\mathfrak{P}_k(\varphi)$ множества $\mathfrak{P}(\varphi)$, состоящее из всех помесей отображения φ, ровно k компонент которых совпадают с соответствующими компонентами отображения φ. Тогда рассинхронизованная система импульсных уравнений (3.4.1) абсолютно устойчива в классе рассинхронизаций $\mathfrak{G}_k$ (см. пункт 3.1.1), если и только если разностное уравнение (3.4.2) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}_k(\varphi)$. Аналогично, естественным образом вводятся классы $\mathfrak{P}_k^-(\varphi)$ и $\mathfrak{P}_k^+(\varphi)$ и устанавливается, что абсолютная устойчивость рассинхронизованной системы (3.4.1) в классах $\mathfrak{G}_k^-$ и $\mathfrak{G}_k^+$ равносильна абсолютной устойчивости уравнения (3.4.2) в классах правых частей $\mathfrak{P}_k^-(\varphi)$ и $\mathfrak{P}_k^+(\varphi)$, соответственно.

В некоторых случаях сведение анализа абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений к анализу абсолютной устойчивости разностных уравнений требует изобретательности для выбора соответствующего класса уравнений. Пусть, например, рассматривается вопрос об абсолютной устойчивости рассинхронизованной системы (3.4.1) в классе $\mathfrak{G}_w$ слабых рассинхронизаций (см. пункт 3.1.1). Обозначим через $\Phi_{\mathfrak{T}}(t, s; \xi)$ оператор сдвига рассинхронизованной системы (3.4.1) с набором моментов коррекции $\mathfrak{T} = \{T_i^n\}$ из класса $\mathfrak{G}_w$. Скажем, что отображение D принадлежит множеству $\mathfrak{D}(\varphi)$, если найдется такой набор $\mathfrak{T} = \{T_i^n\}$ моментов коррекции компонент, что $D(x) = \Phi_{\mathfrak{T}}(t, s; \xi)$ при некоторых $s < t$, причем при каждом $i = 1, 2, \dots, N$ интервал $(s, t]$ содержит ровно один элемент множества $\{T_i^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Иногда удобнее пользоваться другим описанием множества $\mathfrak{D}(\varphi)$: отображение $D(\xi)$ принадлежит множеству $\mathfrak{D}(\varphi)$, если и только если найдутся такие ϑ_i-помеси $P_i(\xi) \in \mathfrak{P}(\varphi)$, $i = 1, 2, \dots, k$, отображения $\varphi(\xi)$, что $D(\xi) = P_k(\dots P_1(\xi)\dots)$, причем $\vartheta_i \cap \vartheta_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^k \vartheta_i = \{1, 2, \dots, N\}$. Из такого описания следует, что каждое отображение из $\mathfrak{D}(\varphi)$ является произведением (операторным) не более N отображений из $\mathfrak{P}(\varphi)$. Поскольку множество $\mathfrak{P}(\varphi)$ конечно, то конечно и $\mathfrak{D}(\varphi)$.

3.4.9. Пример. Пусть $A\xi$ — линейное отображение с квадратной скалярной матрицей второго порядка. Тогда множество $\mathfrak{D}(A)$ состоит из трех линейных отображений с матрицами

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}a_{21} + a_{22} \end{Vmatrix}.$$

3.4.10. Теорема. *Рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *с непрерывной правой частью $\varphi(\xi)$ абсолютно устойчива в классе слабых рассинхронизаций $\mathfrak{G}_w$, если и только если разностное уравнение* (3.4.2) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{D}(\varphi)$.*

Опустим доказательство этой теоремы, поскольку в § 3.5 будет приведено подробное доказательство аналогичного утверждения для случая абсолютной асимптотической устойчивости.

В ряде случаев найти класс правых частей, в котором абсолютная устойчивость разностного уравнения (3.4.2) была бы равносильна абсолютной устойчивости рассинхронизованной импульсной системы, сложно. Но и в этих случаях проведенный в предыдущих параграфах анализ абсолютной устойчивости разностных уравнений небесполезен.

3.4.11. Лемма. *Рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *абсолютно (асимптотически) устойчива в классе $\mathfrak{G}_u$ равномерных рассинхронизаций, если и только если она абсолютно (асимптотически) устойчива в классе $\mathfrak{G}_*$ всех рассинхронизаций.*

Доказательство. То, что абсолютная (асимптотическая) устойчивость в классе $\mathfrak{G}_*$ влечет абсолютную (асимптотическую) устойчивость в классе $\mathfrak{G}_u$, очевидно.

То, что абсолютная (асимптотическая) устойчивость в классе $\mathfrak{G}_u$ влечет абсолютную (асимптотическую) устойчивость в классе $\mathfrak{G}_*$, верно, так как для каждой функции $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$ и произвольного $\tau > 0$ найдется функция $\xi_\tau \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_u, \varphi)$, совпадающая с ξ на $(0, \tau]$.

Лемма 3.4.11 позволяет свести анализ абсолютной устойчивости системы импульсных уравнений (3.4.1) в классе равномерных рассинхронизаций к анализу абсолютной устойчивости в классе всех рассинхронизаций, а значит, с помощью теорем 3.4.4, 3.4.5, 3.4.8 — к анализу абсолютной устойчивости разностных уравнений в классе $\mathfrak{P}(\varphi)$. В частности, справедливо следующее утверждение.

3.4.12. Теорема. *Линейная рассинхронизованная система импульсных уравнений абсолютно устойчива в классе $\mathfrak{G}_u$ равномерных рассинхронизаций, если и только если каждое решение уравнения* (3.4.2) *с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$ ограничено при $n \geq 0$.*

§ 3.5. Абсолютная асимптотическая устойчивость при слабой рассинхронизации

Анализ абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений сложнее анализа абсолютной устойчивости. Пусть нас интересует абсолютная асимптотическая устойчивость системы уравнений (3.4.1) в классе всех рассинхронизаций. В силу теорем 3.4.4, 3.4.5 и 3.4.8 для соответствующего анализа, казалось бы, естественно провести анализ абсолютной асимптотической устойчивости разностного уравнения (3.4.2) в классе правых частей $\mathfrak{P}(\varphi)$. Но уравнение (3.4.2) никогда (за исключением тривиального случая однокомпонентной системы) не бывает абсолютно асимптотически устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{P}(\varphi)$. Таким образом, исключается самая «очевидная» возможность воспользоваться для изучения абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных импульсных систем результатами предыдущих параграфов. Тем не менее эти результаты небесполезны. В наиболее простой ситуации слабо рассинхронизованных систем импульсных уравнений ими можно воспользоваться непосредственно. В более сложных ситуациях результаты предыдущих параграфов могут существенно упростить анализ устойчивости рассинхронизованных систем.

3.5.1. Теорема. *Рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *с непрерывной правой частью* $\varphi(\xi)$ *абсолютно асимптотически устойчива в классе* $\mathfrak{S}_w$ *слабых рассинхронизаций, если и только если разностное уравнение* (3.4.2) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{D}(\varphi)$.

Доказательство. Пусть разностное уравнение (3.4.2) абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{D}(\varphi)$. Рассмотрим слабо рассинхронизованную систему импульсных уравнений (3.4.1) с некоторым набором моментов коррекции компонент $\{T_i^n\}$. В силу слабой рассинхронизации моментов коррекции $\{T_i^n\}$ найдется такая монотонно возрастающая последовательность чисел s_n, $-\infty < n < \infty$, что $s_{-1} \le 0 < s_0$ и каждый отрезок $(s_n, s_{n+1}]$ содержит по одному моменту коррекции каждой компоненты. Пусть $\xi(t)$ — некоторое решение системы уравнений (3.4.1), удовлетворяющее начальному условию $\xi(0+0) = \xi_0$, и пусть $s_n < t \le s_{n+1}$. Тогда справедливо равенство

$$\xi(t+0) = \Phi(t, s_n; \Phi(s_n, s_0; \Phi(s_0, 0; \xi_0))), \tag{3.5.1}$$

где $\Phi(u, v; \xi)$ — оператор сдвига системы (3.4.1).

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая лемма.

3.5.2. Лемма. *а. Оператор сдвига* $\Phi(s_n, s_0; \xi)$ *системы импульсных уравнений* (3.4.1) *при каждом значении n допускает представление*

$$\Phi(s_n, s_0; \xi) = f(n, f(n-1, \dots, f(1, \xi)\dots)),$$

где $f(k, \cdot) \in \mathfrak{D}(\varphi)$ *при* $k = 1, 2, \dots, n$.

б. Для числа коррекций компонент $\nu_\xi(t)$ решения $\xi(t)$ (см. пункт 3.1.4) верны оценки: $n \le \nu_\xi(t) \le n+2$.

в. Операторы $\Phi(t, s_n; \xi)$ и $\Phi(s_0, 0; \xi)$ непрерывны по ξ равномерно относительно t и выбора набора моментов коррекции $\{T_i^n\}$.

Доказательство леммы 3.5.2. Оператор сдвига $\Phi(s_n, s_0; \xi)$ в силу полугруппового свойства имеет вид:

$$\Phi(s_n, s_0; \xi) = \Phi(s_n, s_{n-1}; \dots; \Phi(s_1, s_0; \xi)\dots).$$

На отрезках $(s_i, s_{i+1}]$ каждая компонента системы (3.4.1) подвергается коррекции по одному разу. Поэтому по определению множества отображений $\mathfrak{D}(\varphi)$ при каждом $i = 0, 1, \dots, n-1$ имеют место включения: $\Phi(s_{i+1}, s_i; \cdot) \in \mathfrak{D}(\varphi)$. Утверждение а доказано.

Неравенство $\nu_\xi(t) \geq n$ очевидно, поскольку отрезок $(0, t]$ содержит n интервалов $(s_0, s_1]$, $(s_1, s_2]$, $\dots$, $(s_{n-1}, s_n]$, на каждом из которых каждая компонента системы импульсных уравнений (3.4.1) подвергается коррекции ровно один раз. Неравенство $\nu_\xi(t) \leq n+2$ следует из того факта, что $(0, t] \subset (s_{-1}, s_{n+1}]$ и, значит, на отрезке $(0, t]$ каждая компонента системы (3.4.1) подвергается коррекции не более $n+2$ раз. Утверждение б доказано.

При любом наборе $\{T_i^n\}$ моментов коррекции компонент на отрезках $(s_n, t]$ и $(0, s_0]$ содержится не более N моментов коррекции. Значит, в силу формул (1.4.6) и (1.5.3) каждый из операторов $\Phi(t, s_n; \xi)$ и $\Phi(s_n, 0; \xi)$ является операторным произведением не более чем N отображений из $\mathfrak{P}(\varphi)$. Из конечности множества $\mathfrak{P}(\varphi)$ и непрерывности отображений — элементов $\mathfrak{P}(\varphi)$ вытекает утверждение в леммы. Лемма 3.5.2 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 3.5.1. Абсолютная устойчивость разностного уравнения (3.4.2) означает (см. § 3.2), что

$$f(n, f(n-1, \dots, f(1, x)\dots)) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0$$

равномерно относительно $n \geq 1$ и выбора отображений $f(i, \cdot)$ из $\mathfrak{D}(\varphi)$. Отсюда и из утверждений а и в леммы 3.5.2 в силу (3.5.1) следует равномерное (относительно $t > 0$ и выбора слабо рассинхронизованных наборов моментов коррекции компонент) стремление $\xi(t+0)$ к нулю при $\xi_0 \to 0$. Другими словами, рассинхронизованная система импульсных уравнений (3.4.1) абсолютно устойчива в классе слабых рассинхронизаций.

Покажем, что решение $\xi(t)$ равномерно стремится к нулю при $n_\xi(t) \to \infty$, если его начальное значение $\xi_0 = \xi(0+0)$ достаточно мало. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу утверждения в леммы 3.5.2 найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что при $|x| < \sigma$, любом $t > 0$ и любом слабо рассинхронизованном наборе моментов коррекции компонент системы (3.4.1) выполняется неравенство

$$|\Phi(t, s_n; x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad s_n < t \leq s_{n+1}. \tag{3.5.2}$$

В силу утверждения а леммы 3.5.2

$$\Phi(s_n, s_0; x) = f(n, f(n-1, \dots, f(1, x)\dots)),$$

где $f(i,\cdot) \in \mathfrak{D}(\varphi)$. Но из абсолютной асимптотической устойчивости разностного уравнения (3.4.2) в классе правых частей $\mathfrak{D}(\varphi)$ вытекает существование такого числа $\delta_0 > 0$ и функции $N(\sigma)$, что при любых $f(i,\cdot) \in \mathfrak{D}(\varphi)$ из $|x| \le \delta_0$, $n \ge N(\sigma)$ вытекает неравенство

$$|\Phi(s_n, s_0; x)| < \sigma(\varepsilon)$$

при $|x| \le \delta_0$, $n \ge N[\sigma(\varepsilon)]$. Наконец, в силу утверждения в леммы 3.5.2 найдется такое число $\delta^0 > 0$, что при $|\xi_0| < \delta^0$ и любом слабо рассинхронизованном наборе моментов коррекции компонент системы импульсных уравнений (3.4.1) выполняется неравенство

$$|\Phi(s_0, 0; \xi_0)| < \delta_0. \tag{3.5.3}$$

Из неравенств (3.5.2)–(3.5.3) и представления (3.5.1) следует, что для всякого решения $\xi(t)$ слабо рассинхронизованной системы импульсных уравнений (3.4.1), удовлетворяющего начальному условию $\xi(0+0) = \xi_0$, где $|\xi_0| < \delta^0$, при $s_n < t < s_{n+1}$ и $n \ge N[\sigma(\varepsilon)]$ верна оценка $|\xi(t+0)| < \varepsilon$. В силу утверждения б леммы 3.5.2 неравенство $n \ge N[\sigma(\varepsilon)]$ имеет место при тех значениях t, для которых $\nu_\xi(t) \ge N[\sigma(\varepsilon)] + 2$. Это говорит о равномерности стремления к нулю $\xi(t+0)$ при $\nu_\xi(t) \to \infty$. Абсолютная асимптотическая устойчивость рассинхронизованной системы (3.4.1) в классе слабых рассинхронизаций полностью доказана.

Пусть теперь рассинхронизованная система (3.4.1) абсолютно асимптотически устойчива в классе слабых рассинхронизаций. Покажем, что в этом случае уравнение (3.4.2) абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{D}(\varphi)$. Пусть $x(n)$ — функция из $\mathfrak{N}_0[\mathfrak{D}(\varphi)]$. Тогда найдутся такие отображения $f(n,\cdot) \in \mathfrak{D}(\varphi)$, что

$$x(n+1) = f[n, x(n)], \qquad n = 0, 1, \dots .$$

Доказательство теоремы 3.5.1 будет завершено ниже.

3.5.3. Лемма. *Любой последовательности отображений $f(n,\cdot) \in \mathfrak{D}(\varphi)$ соответствует такая слабо рассинхронизованная система* (3.4.1)*, что*

$$\Phi(n, n-1; x) = f(n, x).$$

Для доказательства леммы достаточно указать слабо рассинхронизованный набор моментов коррекции $\mathfrak{T} = \{T_i^n\}$, при котором $\Phi_{\mathfrak{T}}(n, n-1; x) = f(n, x)$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку при каждом значении n отображение

$f(n,\cdot)$ является элементом множества $\mathfrak{D}(\varphi)$, то найдутся такие наборы моментов коррекции $\mathfrak{T}(n) = \{T_i^k(n)\}$ и пары чисел $\{s_n, t_n\}$ $(s_n < t_n)$, что $f(n,x) = \Phi_{\mathfrak{T}(n)}(t_n, s_n; x)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Произведя растяжение и сдвиг $S_i^k(n) = n - 1 + (T_i^k(n) - s_n)/(t_n - s_n)$ элементов набора $\mathfrak{T}(n)$, получим при каждом $n \geq 1$ новый набор моментов коррекции компонент $\mathfrak{S}(n) = \{S_i^k(n)\}$, для которого $f(n,x) = \Phi_{\mathfrak{S}(n)}(n, n-1; x)$. Наконец, образуем набор моментов коррекции $\mathfrak{T} = \{T_i^k\}$, включив в него при каждом $n \geq 1$ те элементы из $\mathfrak{S}(n)$, которые попали в интервал $(n-1, n]$. Тогда при каждом $n = 1, 2, \ldots$ будет выполнено равенство $f(n,x) = \Phi_{\mathfrak{T}}(n, n-1; x)$. Из определения набора моментов коррекции $\mathfrak{T}(n)$ следует, что набор $\mathfrak{S}(n)$ содержит на интервале $(n-1, n]$ ровно по одному моменту коррекции каждой компоненты. Но тогда набор моментов коррекции $\mathfrak{T}$ на каждом интервале $(n-1, n]$, $n = 1, 2, \ldots$, также содержит по одному моменту коррекции каждой компоненты. Итак, набор моментов коррекции $\mathfrak{T}$ слабо рассинхронизован. Лемма 3.5.3 доказана. □

Следствие. *Для каждой функции* $x(n)$ *из* $\mathfrak{R}_0[\mathfrak{D}(\varphi)]$ *найдется такое решение* $\xi(t)$ *слабо рассинхронизованной системы* (3.4.1)*, что* $x(n) = \xi(n+0)$ *и* $\nu_\xi(n) = n$ *при* $n = 0, 1, \ldots$.

Завершим доказательство теоремы 3.5.1. Абсолютная асимптотическая устойчивость разностного уравнения (3.4.2) в классе правых частей $\mathfrak{D}(\varphi)$ теперь вытекает из абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованной системы импульсных уравнений (3.4.1) в классе слабых рассинхронизаций и следствия из леммы 3.5.3. Теорема 3.5.1 доказана. □

Доказанная теорема предоставляет возможность воспользоваться теоремами 3.3.3, 3.3.6 и 3.3.7 для обоснования формулируемых ниже принципов отсутствия ограниченных решений слабо рассинхронизованных систем импульсных уравнений.

3.5.4. Теорема. *Рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *с непрерывной правой частью* $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ *абсолютно асимптотически устойчива в классе* $\mathfrak{G}_w$ *слабых рассинхронизаций, если и только если она абсолютно устойчива в этом классе рассинхронизаций и найдется такое* $\delta_0 > 0$*, что ни при каком слабо рассинхронизованном наборе моментов коррекции компонент система* (3.4.1) *не имеет определенного при всех* t *ненулевого решения* $\xi(t)$*, удовлетворяющего неравенству* $|\xi(t+0)| < \delta_0$, $-\infty < t < \infty$.

3.5.5. Теорема. *Линейная рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *абсолютно асимптотически устойчива в классе* $\mathfrak{G}_w$ *слабых рассинхронизаций, если и только если каждая функция* $\xi(t)$ *из* $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_w, \varphi)$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$.

3.5.6. Теорема. *Линейная рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *абсолютно асимптотически устойчива в классе* $\mathfrak{G}_w$ *слабых рассинхронизаций, если и только если каждая функция* $\xi(t)$ *из* $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_w, \varphi)$ *ограничена при* $t > 0$, *а единственной ограниченной функцией из* $\mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{G}_w, \varphi)$ *является нулевая функция.*

§ 3.6. Абсолютная асимптотическая устойчивость рассинхронизованных систем и абсолютная r-асимптотическая устойчивость разностных уравнений

Продолжается анализ абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений. Выясняется, как вопрос об абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем сводится к вопросу о так называемой абсолютной r-асимптотической устойчивости эквивалентного разностного уравнения.

3.6.1. Рассмотрим рассинхронизованную систему (3.4.1) с правой частью $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ и связанное с ней эквивалентное разностное уравнение (3.4.2). Пусть $x(n)$ — функция из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — некоторое подмножество множества $\mathfrak{P}(\varphi)$. Для нее существует последовательность таких отображений $f(n, \cdot) \in \mathfrak{F}$, что $x(n+1) = f[n, x(n)]$ при $n \geq 0$. Но по определению множества $\mathfrak{P}(\varphi)$ каждое отображение $f(n, \cdot) \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$ является некоторой ϑ-помесью отображения φ. Значит, найдется такая последовательность $\{\vartheta_n\}$ подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, что каждое отображение $f(n, \cdot)$ является ϑ_n-помесью отображения φ. Обозначим через $N_x(\{f(n, \cdot)\}, n)$ максимальное количество непересекающихся подынтервалов $[\alpha, \beta]$ интервала $[0, n-1]$, обладающих тем свойством, что $\bigcup_{\alpha \leq n \leq \beta} \vartheta_n = \{1, 2, \ldots, N\}$. Число $N_x(n) = \sup N_x(\{f(n, \cdot)\}, n)$, где supremum берется по всем последовательностям отображений $f(n, \cdot) \in \mathfrak{F}$, определяющим функцию $x(n)$ на отрезке $[0, n]$, назовем *числом коррекций компонент* функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ на отрезке $[0, n]$.

Функция $N_x(n)$, определяемая для решений разностных уравнений с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$, аналогична функции $\nu_\xi(t)$, определяемой для решений рассинхронизованных систем импульсных уравнений с правой частью φ. В то же время эти функции обладают различными свойствами. Например, $\nu_\xi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ для любой функции $\xi(\cdot) \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$, а в множестве $\mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$ имеются функции $x(\cdot)$, для которых $N_x(n) = 0$ при всех n (см. пример 3.4.2). Наличие в множестве $\mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$ функций $x(\cdot)$, число коррекций $N_x(n)$ компонент которых не стремится к бесконечности при $n \to \infty$, тесно связано с тем (см. снова пример 3.4.2), что не всякое разностное уравнение с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$ эквивалентно некоторой рассинхронизованной системе (3.4.1) с правой частью φ.

3.6.2. Лемма. *Пусть* $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$; *тогда существует такая функция* $x \in \mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$, *что для любого* $t \geq 0$ *при некотором* $n \geq 0$ *справедливы соотношения* $|\nu_\xi(\mathfrak{G}_*, t) - N_x(n)| \leq 1$, $x(n) = \xi(t - 0)$. *Обратно, пусть* $x \in \mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$ *и* $N_x(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$; *тогда существует такая функция* $\xi \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$, *что для любого целого* $n \geq 0$ *при некотором* $t \geq 0$ *справедливы соотношения* $|\nu_\xi(\mathfrak{G}_*, t) - N_x(n)| \leq 1$, $x(n) = \xi(t - 0)$.

Приведенная лемма аналогична лемме 3.4.3 и, как и последняя, является следствием теоремы 1.4.3. Смысл леммы 3.6.2 в том, что функциям $\xi(t)$ из $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$ при каноническом соответствии (см. § 1.4) отвечают те и только те функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0[\mathfrak{P}(\varphi)]$, которые имеют бесконечное число коррекций компонент, т.е. для которых $N_x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Назовем разностное уравнение (3.4.2) с правыми частями из $\mathfrak{P}(\varphi)$ *абсолютно r-асимптотически устойчивым* в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$, если оно абсолютно устойчиво в этом классе правых частей и найдется такое число $\delta_0 > 0$, что функции $x(n)$ из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ с бесконечным числом коррекций компонент, удовлетворяющие условию $|x(0)| < \delta_0$, равномерно стремятся к нулю при $N_x(n) \to \infty$.

Говорить об абсолютной r-асимптотической устойчивости в некотором классе $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$ можно только в случае, когда класс $\mathfrak{F}$ порождающий, т.е. в нем имеются такие помеси $\varphi_{\vartheta_1}, \varphi_{\vartheta_2}, \ldots, \varphi_{\vartheta_p}$ отображения φ, что

$$\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_p = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

3.6.3. Теорема. *Рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *с правой частью* $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ *абсолютно асимптотически устойчива в классе* $\mathfrak{G}_*$ *всех рассинхронизаций, если и только если разностное уравнение* (3.4.2) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{P}(\varphi)$.

Постараемся установить связь между абсолютной r-асимптотической устойчивостью и «обычной» абсолютной асимптотической устойчивостью разностного уравнения.

Как отмечалось выше, каждое отображение $f \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$ является некоторой ϑ_f-помесью отображения φ. Рассмотрим отображение $g(x)$, являющееся суперпозицией

$$g(x) = f_n(f_{n-1}(\ldots(f_1(x))\ldots)) \tag{3.6.1}$$

некоторых отображений $f_i \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$. Тогда ему можно сопоставить множество $\vartheta_g = \bigcup_{i=1}^n \vartheta_{f_i}$. Назовем отображение $g(x)$ вида (3.6.1) *минимальным*, если $\vartheta_g = \{1, 2, \ldots, N\}$, но его нельзя представить в виде суперпозиции $g(x) = g_1(g_2(x))$ отображений (3.6.1), для которых $\vartheta_{g_1} = \vartheta_{g_2} = \{1, 2, \ldots, N\}$. Множество всех минимальных отображений (3.6.1) обозначим через $\mathfrak{F}^\infty$.

3.6.4. Пример. Пусть

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \{\varphi_1(\xi_1, \xi_2), \varphi_2(\xi_1, \xi_2)\}.$$

Тогда множество $\mathfrak{P}(\varphi)$ состоит из отображений

$$\varphi_{\{1,2\}}(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2), \quad \varphi_{\{1\}}(\xi_1, \xi_2) = \{\varphi_1(\xi_1, \xi_2), \xi_2\}, \quad \varphi_{\{2\}}(\xi_1, \xi_2) = \{\xi_1, \varphi_2(\xi_1, \xi_2)\}.$$

Множество $\mathfrak{P}^\infty(\varphi)$ состоит из отображений

$$\varphi_{\{1,2\}}, \quad \varphi_{\{1\}}\varphi_{\{2\}}^n, \quad \varphi_{\{1\}}^n\varphi_{\{2\}}, \quad \varphi_{\{2\}}\varphi_{\{1\}}^n, \quad \varphi_{\{2\}}^n\varphi_{\{1\}}, \qquad n \geq 1,$$

где произведение отображений понимается в операторном смысле — как суперпозиция.

Из приведенного примера видно, что структура множества $\mathfrak{F}^\infty$ сложнее структуры множества $\mathfrak{F}$. В частности, множество $\mathfrak{F}^\infty$ бесконечно, в то время как множество $\mathfrak{F}$ конечно. Соответственно более сложной по сравнению с $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ оказывается и структура множества $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$. Тем не менее, между свойствами функций, являющихся элементами этих множеств, существует достаточно простая связь.

3.6.5. Лемма. *Пусть* $y(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$*; тогда найдутся такие функция* $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ *и возрастающая последовательность натуральных чисел* m_n*, что* $y(n) = x(m_n)$ *и* $N_x(m_n) \geq n$.

Обратно, пусть $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ *и* $N_x(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$*, тогда найдутся такие функция* $y(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$ *и возрастающая последовательность натуральных чисел* m_n*, что* $x(m_n) = y(n)$ *и* $N_x(m_n) = n$.

Доказательство. Пусть $y(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$. Тогда найдутся отображения $g(n,\cdot) \in \mathfrak{F}^\infty$, при которых

$$y(n+1) = g[n, y(n)].$$

По определению множества $\mathfrak{F}^\infty$ каждое отображение $g(n,\cdot)$ можно представить в виде суперпозиции

$$g(n,x) = f_{nk_n}(f_{nk_n-1}(\dots(f_{n1}(x))\dots)) \tag{3.6.2}$$

некоторых отображений $f_{ni} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$. Рассмотрим последовательность отображений $f(n,\cdot) \in \mathfrak{F}$, полученную упорядочением отображений f_{ni}:

$$f(0,x) = f_{11}(x),\ f(1,x) = f_{12}(x), \dots,$$

$$f(k_1-1,x) = f_{1k_1}(x),\ f(k_1,x) = f_{21}(x),\ f(k_1+1,x) = f_{22}(x), \dots,$$

$$f(k_1+k_2-1,x) = f_{2k_2}(x),\ f(k_1+k_2,x) = f_{31}(x), \dots$$

Пусть $x(n)$ — решение уравнения

$$x(n+1) = f[n, x(n)],$$

определяемое начальным условием $x(0) = y(0)$. Тогда $x(m_n) = y(n)$, где $m_0 = 0$, $m_i = k_1 + \dots + k_i$ при $i \geq 1$.

Покажем, что

$$N_x(m_n) \geq n. \tag{3.6.3}$$

Выделим в интервале $[0, m_n - 1] = [0, k_1 + \dots + k_n - 1]$ непересекающиеся подынтервалы $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$, $\dots$, $[\alpha_n,\beta_n]$, где $\alpha_i = m_{i-1}$, $\beta_i = m_i - 1$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда отображения $f(\alpha_i, x)$, $f(\alpha_i + 1, x)$, $\dots$, $f(\beta_i, x)$ совпадут с отображениями $f_{i1}(x)$, $f_{i2}(x)$, $\dots$, $f_{ik_i}(x)$. Так как последние равенством (3.6.2) задают отображение $g(i,\cdot) \in \mathfrak{F}^\infty$, то по определению множества $\mathfrak{F}^\infty$ выполняется равенство $\bigcup_{j=1}^{k_i} \vartheta_{f_{ij}} = \{1, 2, \dots, N\}$. Следовательно, $\bigcup_{\alpha_i \leq j \leq \beta_i} \vartheta_{f(j,\cdot)} = \{1, 2, \dots, N\}$. Но это и означает справедливость неравенства (3.6.3).

Итак, первое утверждение леммы доказано. Докажем второе утверждение. Пусть $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ и $N_x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Отметим, прежде всего, что $N_x(n) \leq N_x(n+1) \leq N_x(n) + 1$, причем $N_x(1) = 0$. Поэтому каждому натуральному числу n соответствует решение уравнения $N_x(m) = n$; наименьшее m, удовлетворяющее выписанному уравнению, обозначим через m_n. Очевидно, $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$.

По определению числа m_1 и функции $N_x(n)$ найдутся такие отображения $f_{00}, f_{01}, \ldots, f_{0m_1-1} \in \mathfrak{F}$, что

$$\bigcup_{0\le j\le m_1-1} \vartheta_{f_{0j}} = \{1, 2, \ldots, N\}$$

и

$$x(n+1) = f_{0n}[x(n)] \quad \text{при} \quad 0 \le n \le m_1 - 1. \tag{3.6.4}$$

При этом ни для каких двух непересекающихся подынтервалов $[p, q]$ и $[r, s]$ интервала $[0, m_1 - 1]$ не могут выполняться равенства

$$\bigcup_{p\le j\le q} \vartheta_{f_{0j}} = \{1, 2, \ldots, N\}, \qquad \bigcup_{r\le j\le s} \vartheta_{f_{0j}} = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Значит, отображение $g(0, x) = f_{0m_1-1}(\ldots(f_{00}(x))\ldots)$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}^\infty$, причем в силу (3.6.4) $x(m_1) = g[0, x(0)]$.

По определению числа m_2 найдутся такие отображения f_{10}, f_{11}, $\ldots$, $f_{1m_2-1} \in \mathfrak{F}$, что

$$x(n+1) = f_{1n}[x(n)] \quad \text{при} \quad 0 \le n \le m_2 - 1, \tag{3.6.5}$$

причем в интервале $[0, m_2 - 1]$ можно выделить непересекающиеся подынтервалы $[p, q]$ и $[r, s]$, $q < r$, для которых

$$\bigcup_{p\le j\le q} \vartheta_{f_{1j}} = \bigcup_{r\le j\le s} \vartheta_{f_{1j}} = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Так как m_1 — наименьшее m, удовлетворяющее уравнению $N_x(m) = 1$, то $q \ge m_1 - 1$, и значит, $r \ge m_1$. Но тогда

$$\bigcup_{m_1\le j\le m_2-1} \vartheta_{f_{1j}} = \{1, 2, \ldots, N\},$$

поскольку $[r, s] \subseteq [m_1, m_2 - 1]$. Теперь нетрудно видеть, что отображение $g(1, x) = f_{1m_2-1}(\ldots(f_{1m_1}(x))\ldots)$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}^\infty$, так как в предположении противного выполнялось бы неравенство $N_x(m_2) \ge 3$. При этом в силу (3.6.5) $x(m_2) = g[1, x(m_1)]$.

Аналогично при каждом $n \ge 2$ может быть определено такое отображение $g(n, \cdot) \in \mathfrak{F}^\infty$, для которого

$$x(m_{n+1}) = g[n, x(m_n)]. \tag{3.6.6}$$

Положив теперь $y(0) = x(0)$, $y(n) = x(m_n)$ при $n \geq 1$, в силу (3.6.6) получим, что $y(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$. При этом по определению чисел m_n при $n \geq 1$ справедливы равенства $N_x(m_n) = n$. Лемма 3.6.5 доказана. □

Теперь мы в состоянии провести анализ абсолютной r-асимптотической устойчивости.

3.6.6. Теорема. *Разностное уравнение* (3.4.2) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$, если и только если оно абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$ и абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}^\infty$.*

Доказательство. Пусть сначала разностное уравнение (3.4.2) абсолютно r-асимптотически устойчиво. Тогда по определению оно абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. В силу леммы 3.6.5 для каждой функции $y(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$ имеет место представление $y(n) = x(m_n)$, $n \geq 0$, где $x(\cdot)$ — некоторая функция из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$, а $\{m_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Отсюда вытекает абсолютная устойчивость уравнения (3.4.2) в классе правых частей $\mathfrak{F}^\infty$. Так как при этом по лемме 3.6.5 $N_x(m_n) \geq n$, то равномерность стремления функций $x(m)$ из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ к нулю при $N_x(m) \to \infty$ влечет равномерность стремления функций $y(n)$ из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$ к нулю при $n \to \infty$. Абсолютная асимптотическая устойчивость уравнения (3.4.2) в классе правых частей $\mathfrak{F}^\infty$ доказана.

Пусть теперь уравнение (3.4.2) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$ и абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}^\infty$. Тогда для доказательства абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (3.4.2) достаточно показать, что функции $x(\cdot) \subset \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$, удовлетворяющие при некотором $\delta_0 > 0$ условию $|x(0)| < \delta_0$, равномерно стремятся к нулю при $N_x(n) \to \infty$. Но это действительно так, поскольку по лемме 3.6.5 для каждой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ с бесконечным числом коррекций компонент справедливо представление $x(m_n) = y(n)$, где $y(\cdot)$ — некоторая функция из $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}^\infty)$, последовательность чисел m_n возрастает и $N_x(m_n) = n$. Теорема 3.6.6 доказана. □

Теорема 3.6.6 и лемма 3.6.5 позволяют достаточно просто перенести на случай абсолютной r-асимптотической устойчивости ряд утверждений § 3.3, относящихся к абсолютной асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{3.6.7}$$

в правой части которого $A(n)x$ — помесь некоторого линейного отображения Ax. Матрица $A = (a_{ij})$ может быть как скалярной, так и блочной.

3.6.7. Теорема. *Разностное уравнение* (3.6.7) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если найдутся такие константы $c < \infty$ и $q < 1$, при которых для любой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ имеют место оценки $|x(n)| \leq c|x(0)|q^{N_x(n)}$.*

Доказательство теоремы вытекает из теорем 3.3.4, 3.6.6 и леммы 3.6.5. Следствием теорем 3.3.6 и 3.3.7 являются приводимые ниже теоремы 3.6.8 и 3.6.9. Напомним, что функция $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_\alpha(\mathfrak{F})$ называлась *имеющей бесконечное число коррекций компонент*, если $N_x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

3.6.8. Теорема. *Разностное уравнение* (3.6.7) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если каждая функция $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ ограничена, а каждая функция $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ с бесконечным числом коррекций компонент стремится к нулю при $n \to \infty$.*

3.6.9. Теорема. *Разностное уравнение* (3.6.7) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если каждая функция $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ ограничена, а единственной ограниченной функцией $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_{-\infty}(\mathfrak{F})$ с бесконечным числом коррекций компонент является нулевая функция.*

Исследование абсолютной r-асимптотической устойчивости принципиально отличается от анализа абсолютной асимптотической устойчивости, например, в классе $\mathfrak{D}(\varphi)$ тем, что в силу теоремы 3.6.6 оно сводится к анализу абсолютной асимптотической устойчивости в некотором классе $\mathfrak{F}^\infty$, состоящем из бесконечного числа элементов. Эта особенность не сказывается при исследовании линейных уравнений, поскольку для них верны теоремы 3.3.6 и 3.3.7, относящиеся к бесконечным классам правых частей $\mathfrak{F}$; однако она препятствует применению теоремы 3.3.3 для анализа абсолютной r-асимптотической устойчивости нелинейных разностных уравнений.

Теоремы 3.6.6–3.6.9 позволяют сформулировать следующие критерии абсолютной асимптотической устойчивости линейных рассинхронизованных систем импульсных уравнений в классе $\mathfrak{G}_*$ всех рассинхронизаций.

3.6.10. Теорема. *Линейная рассинхронизованная система импульсных уравнений* (3.4.1) *абсолютно асимптотически устойчива в классе* $\mathfrak{G}_*$ *всех рассинхронизаций, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

а) существуют такие константы $c < \infty$ *и* $q < 1$, *что для любой функции* $\xi(\cdot) \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$ *имеет место оценка:*

$$|\xi(t+0)| \leq c|\xi(0+0)| \exp[\nu_\xi(\mathfrak{G}_*, t) \ln q] \quad \textit{при} \quad t \geq 0;$$

б) каждая функция $\xi(\cdot) \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$;

в) каждая функция из $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{G}_*, \varphi)$ *ограничена, а единственной ограниченной функцией из* $\mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{G}_*, \varphi)$ *является нулевая.*

Ряд признаков абсолютной устойчивости и абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений в различных классах рассинхронизаций читатель найдет в последующих главах.

§ 3.7. Абсолютная устойчивость и разностные включения

В предыдущих параграфах главы показано, как свести в ряде ситуаций изучение абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений к изучению абсолютной устойчивости некоторых специальным образом построенных разностных уравнений. Понятие абсолютной устойчивости разностных уравнений допускает простую интерпретацию, описание которой приводится в настоящем параграфе.

3.7.1. Пусть при некотором целом n и $x \in \mathbb{R}^M$ задано подмножество $\mathfrak{S}(n, x)$ пространства $\mathbb{R}^M$. Выражение

$$x(n+1) \in \mathfrak{S}[n, x(n)] \tag{3.7.1}$$

называют *разностным включением*. Функцию $x(n)$ целочисленного аргумента n назовем *решением разностного включения* (3.7.1), если при всех n (из некоторого интервала) она удовлетворяет включениям (3.7.1). Если множество $\mathfrak{S}(n, x)$ определено при всех $x \in \mathbb{R}^M$ и целых n, то разностное включение (3.7.1) всегда обладает решением, удовлетворяющим начальному условию $x(n_0) = x_0$ и определенным при $n \geq n_0$. В общем случае такое решение неединственно.

Пусть $0 \in \mathfrak{S}(n, 0)$ при всех целых n. Тогда функция $x(n) \equiv 0$ является решением разностного включения (3.7.1). Нулевое решение разностного включения назовем *устойчивым* при $n \geq n_0$, если любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что всякое решение $x(n)$ включения (3.7.1), для которого $|x(n_0)| < \delta$, удовлетворяет при $n \geq n_0$ неравенству $|x(n)| < \varepsilon$. Нулевое решение разностного включения назовем *асимптотически устойчивым* при $n \geq n_0$, если оно устойчиво при $n \geq n_0$ и найдутся такие число $\delta_0 > 0$ и функция $N(\varepsilon)(\varepsilon > 0)$, что всякое решение $x(n)$ включения (3.7.1), для которого $|x(n_0)| < \delta_0$, удовлетворяет при $n \geq N(\varepsilon)$ неравенству $|x(n)| < \varepsilon$.

Рассмотрим теперь разностное уравнение

$$x(n+1) = f[n, x(n)] \tag{3.7.2}$$

с правой частью из некоторого класса $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathfrak{S}(x)$ множество, определяемое равенством

$$\mathfrak{S}(x) = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(x), \tag{3.7.3}$$

и поставим в соответствие уравнению (3.7.2) разностное включение

$$x(n+1) \in \mathfrak{S}[x(n)]. \tag{3.7.4}$$

3.7.2. Теорема. *Разностное уравнение* (3.7.2) *абсолютно (асимптотически) устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если (асимптотически) устойчиво (при $n \geq 0$) нулевое решение разностного включения* (3.7.4) *с правой частью* (3.7.3).

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что множество определенных при $n \geq 0$ решений разностного включения (3.7.4) совпадает с множеством $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$.

Замечания и библиографические справки

Развитию идеи абсолютной устойчивости систем, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями посвящена обширная библиография; ограничимся ссылками на книги [Айзерман, Гантмахер, 1963; Барбашин, 1967; Воронов, 1981; Попов, 1970; Халанай, Векслер, 1971; Якубович, 1975]. Классическое понятие абсолютной устойчивости подразумевает устойчивость асимптотическую. Мы различаем понятия абсолютной (нейтральной) и абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем и разностных уравнений; это вызвано спецификой рассинхронизованных систем импульсных уравнений, требующей различных подходов для анализа абсолютной (нейтральной) и абсолютной асимптотической устойчивости. Понятие абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем в классе всех рассинхронизаций в неявном виде используется в работах [Андрусевич, 1987; Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Козякин, 1990a; Красносельский А., 1985; Asarin, Kozjakin, Krasnoselskii, Kuznetsov, Pokrovski, 1988; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]; близкие понятия хаотической релаксации, полностью асинхронного процесса, свободно шатающейся релаксации и др. используются в работах [Белецкий, 1981, 1982, 1983, 1988; Марчук, Нестеренко, 1984a,b, 1986a,b; Baudet, 1978; Bertsekas, 1982, 1983; Bertsekas, Tsitsiklis, 1988; Brayton, Tong, 1980a,b; Chazan, Miranker, 1969; Elkin, 1968; Lubachevsky, Mitra, 1986; Miellow, 1974, 1975a,b; Robert, 1970, 1976; Schechter, 1968; Tsitsiklis, 1984, 1986, 1987; Tsitsiklis, Athans, 1984; Tsitsiklis, Bertsekas, 1986; Tsitsiklis, Bertsekas, Athans, 1986]. Понятие класса рассинхронизации и абсолютной устойчивости в некотором классе рассинхронизаций, по-видимому, впервые введено в работах [Козякин, 1990d,e]. Понятие абсолютной устойчивости разностного уравнения в некотором классе правых частей, в той мере, в какой это требуется для анализа рассинхронизованных систем, оказалось изученным весьма слабо.

Возможность применения многих классических методов теории абсолютной устойчивости к анализу рассинхронизованных систем и их эквивалентных разностных уравнений до сих пор остается неясной. Более подходящей для анализа рассинхронизованных систем оказался принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости [Красносельский, Покровский, 1977, 1978, 1981]. Конечно, в случае рассинхронизованных систем как формулировки, так и методы доказательства претерпевают существенные изменения [Козякин, 1990d,e].

Переход к дифференциальным или разностным включениям широко используется при анализе устойчивости (см., например, работы [Молчанов, 1983; Молчанов, Пятницкий, 1986, 1987; Филиппов, 1967, 1985]). Теорема 3.7.2 позволяет применить методы анализа устойчивости разностных включений для исследования рассинхронизованных систем.

Глава 4

Метод эквивалентных норм

В настоящей главе излагается простой геометрически наглядный метод анализа устойчивости рассинхронизованных систем. Суть его заключается в построении эквивалентной нормы, в которой все операторы сдвига данной рассинхронизованной системы оказываются нерастягивающими или сжимающими. Уже сам факт существования такой нормы обеспечивает ряд неочевидных свойств рассинхронизованных систем и приводит к некоторым общим необходимым условиям абсолютной устойчивости. Развитие упомянутого метода (эквивалентных норм) позволяет получить достаточные условия абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем.

§ 4.1. Спектральная норма

4.1.1. Напомним некоторые факты спектральной теории матриц. Рассмотрим линейное автономное разностное уравнение в пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$x(n+1) = Ax(n). \tag{4.1.1}$$

Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус матрицы A, т.е. верхнюю грань абсолютных величин ее собственных значений. Неравенство $\rho(A) < 1$ равносильно (см. теорему 1.2.3) асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ уравнения (4.1.1). Спектральный радиус матрицы A выражается формулой И.М. Гельфанда:

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}, \tag{4.1.2}$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^N$. Поскольку при каждом натуральном n выполняется неравенство $\|A^n\| \le \|A\|^n$, то $\rho(A) \le \|A\|$. Надлежащим выбором нормы в $\mathbb{R}^N$ соответствующая норма матрицы A может быть сделана сколь угодно близкой к ее спектральному радиусу.

4.1.2. Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^N$, в которой*

$$\|A\|_\varepsilon \le \rho(A) + \varepsilon. \tag{4.1.3}$$

Норма, в которой выполняется неравенство (4.1.3), называется *ε-спектральной нормой* матрицы A. Как показывает пример 4.1.3, при $\varepsilon = 0$ утверждение теоремы 4.1.2 неверно.

4.1.3. Пример. Пусть A — ненулевая нильпотентная матрица, т.е. $A^k = 0$ при некотором k. Тогда $\rho(A) = 0$, но $\|A\| > 0$ для любой нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^N$.

Доказательство теоремы 4.1.2 совсем простое. Положим

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{n\ge 0}[\rho(A) + \varepsilon]^{-n}\|A^n x\|.$$

Из формулы (4.1.2) следует ограниченность сверху некоторой константой $\gamma < \infty$ чисел $[\rho(A) + \varepsilon]^{-n}\|A^n\|$. Поэтому $\|x\| \le \|x\|_\varepsilon \le \gamma\|x\|$. Следовательно, $\|x\|_\varepsilon = 0$, если и только если $x = 0$. Так как неравенство треугольника $\|x + y\|_\varepsilon \le \|x\|_\varepsilon + \|y\|_\varepsilon$ очевидно, то $\|\cdot\|_\varepsilon$ — норма в $\mathbb{R}^N$. Простой подсчет показывает, что $\|Ax\|_\varepsilon = \sup_{n\ge 0}[\rho(A) + \varepsilon]^{-n}\|A^{n+1}x\| \le [\rho(A) + \varepsilon]\|x\|_\varepsilon$, откуда вытекает неравенство (4.1.3). Теорема 4.1.2 доказана. □

Спектральная норма определяется не единственным способом (см. пример 4.1.4), что предоставляет некоторую свободу в выборе ее свойств. Это замечание будет неоднократно использовано в последующих главах.

4.1.4. Пример. Зададимся таким числом k, чтобы при данном $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $\|A\|^k \le [\rho(A) + \varepsilon]^k$ — это возможно в силу формулы И.М. Гельфанда. Тогда

$$\|x\|_* = \sum_{i=1}^{k}[\rho(A) + \varepsilon]^{i-1}\|A^{k-i}x\|$$

является ε-спектральной нормой.

§ 4.2. Критерии абсолютной устойчивости

В этом параграфе формулируются и доказываются критерии абсолютной устойчивости, абсолютной асимптотической устойчивости и абсолютной r-асимптотической устойчивости разностных уравнений в терминах существования эквивалентных норм с некоторыми специальными свойствами. Доказывается корректность задачи об абсолютной асимптотической устойчивости разностных уравнений по отношению к малым возмущениям матриц правых частей.

4.2.1. Скажем, что матрица A *сжимает* (*не растягивает*) в норме $\|\cdot\|$, если $\|A\| < 1$ ($\|A\| \le 1$). Условию $\rho(A) < 1$ асимптотической устойчивости уравнения (4.1.1) можно придать эквивалентную форму: положение равновесия $x = 0$ уравнения (4.1.1) асимптотически устойчиво, если и только если матрица A в некоторой норме сжимает. Сформулированный критерий находит применение при анализе асимптотической устойчивости уравнений (4.1.1) в той же мере, в какой функции Ляпунова используются при анализе устойчивости дифференциальных уравнений. Использование этого критерия для получения конкретных признаков асимптотической устойчивости, как правило, затруднительно. Это объясняется тем, что построение требуемой нормы даже в простейших ситуациях сопряжено в общем случае с громоздкими вычислениями, в то время как условие $\rho(A) < 1$ часто проверить несложно.

Ситуация в корне меняется, когда возникает вопрос об абсолютной устойчивости разностного уравнения

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{4.2.1}$$

в некотором классе $\mathfrak{F}$ правых частей. Здесь, как будет показано в § 4.6, предложить общий эффективно проверяемый критерий абсолютной устойчивости, аналогичный условию $\rho(A) < 1$ для уравнения (4.1.1), невозможно. Поэтому резко возрастает значение критериев устойчивости, выраженных в терминах норм матриц $A(n) \in \mathfrak{F}$. По сути такого рода критерии в настоящее время оказываются одним из немногих рабочих инструментов анализа абсолютной устойчивости уравнения (4.2.1).

Различные элементы приводимой ниже теоремы 4.2.2 неоднократно использовались в рассуждениях предыдущей главы. Для удобства ссылок и ради полноты изложения сформулируем их заново. Напомним, что мы не делаем различия между линейными отображениями в $\mathbb{R}^N$ и их матрицами.

4.2.2. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— семейство линейных отображений в* $\mathbb{R}^N$. *Тогда уравнение* (4.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}$, *если и только если в некоторой норме* $\|\cdot\|_*$ *в* $\mathbb{R}^N$ *все матрицы из* $\mathfrak{F}$ *не растягивают, т.е.*

$$\|A\|_* \le 1, \qquad A \in \mathfrak{F}. \tag{4.2.2}$$

Уравнение (4.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}$, *если и только если в некоторой норме* $\|\cdot\|_*$ *в* $\mathbb{R}^N$ *все матрицы из* $\mathfrak{F}$ *равномерно сжимают, т.е.*

$$\|A\|_* \le q, \qquad A \in \mathfrak{F}, \tag{4.2.3}$$

где $0 \le q < 1$.

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно — условия (4.2.2) и (4.2.3) влекут абсолютную устойчивость и абсолютную асимптотическую устойчивость соответственно уравнения (4.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Докажем обратное утверждение. Напомним (см. § 3.2), что через $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех определенных при $n \ge 0$ решений $x(n)$ всех уравнений (4.2.1) с матрицами $A(n)$ из $\mathfrak{F}$. Если уравнение (4.2.1) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, то по определению конечна величина

$$c = \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, \|x(0)\|\le 1} \|x(n)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^N$. Поэтому при каждом $x \in \mathbb{R}^N$ функция

$$\|x\|_* = \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x} \|x(n)\|,$$

определена, конечна и удовлетворяет неравенствам $\|x\| \le \|x\|_* \le c\|x\|$. Следовательно, $\|x\|_* = 0$ только при $x = 0$ и, значит, функция $\|x\|_*$ является нормой в $\mathbb{R}^N$ (неравенство треугольника для $\|x\|_*$ очевидно). Справедливость неравенств $\|Ax\|_* \le \|x\|_*$, $A \in \mathfrak{F}$, равносильных неравенствам (4.2.2), вытекает теперь из следующей цепочки соотношений:

$$\|Ax\|_* = \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=Ax} \|x(n)\| = \sup_{n\ge 1,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x,\, x(1)=Ax} \|x(n)\| \le$$
$$\le \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x,\, x(1)=Ax} \|x(n)\| \le \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x} \|x(n)\| = \|x\|_*.$$

Пусть теперь уравнение (4.2.1) абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Тогда согласно теореме 3.3.4 для любой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0$ верна оценка $\|x(n)\| \leq cq^n\|x(0)\|$, где $c < \infty$ и $q < 1$ — некоторые неотрицательные константы. Определим норму $\|\cdot\|_*$ равенством:

$$\|x\|_* = \sup_{n\geq 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x} q^{-n}\|x(n)\|.$$

Справедливость неравенств $\|Ax\|_* \leq q\|x\|_*$ для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{F}$ следует из соотношений

$$\|Ax\|_* = \sup_{n\geq 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=Ax} q^{-n}\|x(n)\| = q\left(\sup_{n\geq 1,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x,\, x(1)=Ax} q^{-n}\|x(n)\|\right) \leq$$

$$\leq q\left(\sup_{n\geq 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x,\, x(1)=Ax} q^{-n}\|x(n)\|\right) \leq q\left(\sup_{n\geq 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0,\, x(0)=x} q^{-n}\|x(n)\|\right) = q\|x\|_*.$$

Неравенства (4.2.3), а с ними и теорема 4.2.2 доказаны.

4.2.3. Теорема 4.2.2 подсказывает направление поиска условий абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем. Как было показано в предыдущей главе, анализ абсолютной устойчивости линейных рассинхронизованных систем импульсных уравнений сводится к анализу разностных уравнений (4.2.1), матрицы $A(n)$ правой части которых принадлежат классу $\mathfrak{P}(A)$ всех помесей некоторой матрицы A. Рассмотрим эту ситуацию.

Пусть ϑ — некоторое непустое подмножество множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$. Обозначим ϑ-помесь матрицы $A = (a_{ij})$ через A_ϑ. Тогда разностное уравнение (4.2.1) с матрицами $A(n)$ из $\mathfrak{P}(A)$ удобно представить в виде:

$$x(n+1) = A_{\vartheta(n)}x(n), \tag{4.2.4}$$

где $\{\vartheta(n)\}$ — последовательность непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. Критерий абсолютной устойчивости уравнения (4.2.4) в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ следует из теоремы 4.2.2.

4.2.4. Теорема. *Уравнение* (4.2.4) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если все матрицы $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$ не растягивают в некоторой норме.*

Анализ абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем в классе всех рассинхронизаций, как было показано в предыдущей главе, сводится не к анализу абсолютной асимптотической устойчивости уравнения (4.2.4), а к анализу абсолютной r-асимптотической устойчивости этого уравнения в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$.

4.2.5. Теорема. *Уравнение* (4.2.4) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если найдется такая норма $\|\cdot\|_*$, что для любой помеси $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$ верна оценка*

$$\|A_\vartheta\|_* \le 1, \tag{4.2.5}$$

и существует $q < 1$, при котором для каждого набора помесей A_{ϑ_1}, A_{ϑ_2}, $\ldots$, $A_{\vartheta_k} \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющих условию $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$, выполняется неравенство

$$\|A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_2} A_{\vartheta_1}\|_* \le q. \tag{4.2.6}$$

Доказательство теоремы близко к доказательству теоремы 4.2.2. Допустим сначала, что в некоторой норме $\|\cdot\|_*$ имеет место неравенство (4.2.5) и найдется $q < 1$, при котором выполняется неравенство (4.2.6). Если $x(\cdot)$ — решение некоторого уравнения (4.2.4), то найдется последовательность подмножеств $\vartheta(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, для которой

$$x(n) = A_{\vartheta(n-1)} \cdots A_{\vartheta(0)} x(0) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $A_{\vartheta(n)} \in \mathfrak{F}$. Значит (в силу (4.2.5)), $\|x(n)\|_* \le \|x(0)\|_*$ при каждом значении $n \ge 1$. Следовательно, уравнение (4.2.4) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Выделим в интервале $[0, n-1]$ максимальное число k непересекающихся подынтервалов $[\alpha, \beta]$, обладающих тем свойством, что

$$\bigcup_{\alpha \le n \le \beta} \vartheta(n) = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Тогда, в силу неравенств (4.2.5) и (4.2.6), верна оценка $\|x(n)\|_* \le q^k \|x(0)\|_*$. А поскольку k без ограничения общности можно считать равным числу коррекций компонент $N_x(n)$ решения $x(\cdot)$ на интервале $[0, n-1]$ (см. § 3.6), то $\|x(n)\|_* \le q^{N_x(n)} \|x(0)\|_*$. Полученное неравенство доказывает абсолютную r-асимптотическую устойчивость уравнения (4.2.4) в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь уравнение (4.2.4) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. По теореме 3.6.7 найдутся такие $c < \infty$ и $q < 1$, что для любой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{R}_0(\mathfrak{F})$ верны неравенства

$$\|x(n)\| \le cq^{N_x(n)}\|x(0)\| \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \dots . \tag{4.2.7}$$

Положим

$$\|x\|_* = \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{R}_0(\mathfrak{F}),\, x(0)=x} q^{-N_x(n)}\|x(n)\| \tag{4.2.8}$$

и покажем, что $\|\cdot\|_*$ — требуемая норма.

В силу (4.2.7) $\|x\| \le \|x\|_* \le c\|x\|$. Поэтому $\|x\|_* = 0$, если и только если $x = 0$; неравенство треугольника $\|x + y\|_* \le \|x\|_* + \|y\|_*$ очевидно.

Перейдем к доказательству неравенств (4.2.5) и (4.2.6). Зададимся некоторыми подмножествами $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Пусть $\mathfrak{K}(x)$ — множество функций $x(\cdot) \in \mathfrak{R}_0(\mathfrak{F})$, для которых $x(0) = x$. Тогда в силу (4.2.8) верно равенство

$$\|A_{\vartheta_k}A_{\vartheta_{k-1}}\cdots A_{\vartheta_1}x\|_* = \sup_{n\ge 0,\, x(\cdot)\in\mathfrak{R}_0(A_{\vartheta_k}A_{\vartheta_{k-1}}\cdots A_{\vartheta_1}x),\, x(0)=x} q^{-N_x(n)}\|x(n)\|. \tag{4.2.9}$$

Поставим в соответствие каждой функции $x(\cdot)$ из $\mathfrak{K}(A_{\vartheta_k}\cdots A_{\vartheta_1}x)$ функцию $x^*(\cdot)$ из $\mathfrak{R}_0(\mathfrak{F})$, полагая $x^*(0) = x$,

$$x^*(n) = \begin{cases} A_{\vartheta_n}x^*(n-1) & \text{при} \quad 1 \le n \le k-1, \\ x(n-k) & \text{при} \quad n \ge k. \end{cases}$$

Тогда

$$N_{x^*}(n) \ge N_x(n-k) + \sigma \quad \text{при} \quad n \ge k, \tag{4.2.10}$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k \ne \{1, 2, \dots, N\}, \\ 1, & \text{если} \quad \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Обозначим множество всех функций $x(\cdot)$ через $\mathfrak{K}_{\vartheta_1,\dots,\vartheta_k}(x)$; из (4.2.9) и (4.2.10) вытекают соотношения

$$\|A_{\vartheta_k}A_{\vartheta_{k-1}}\cdots A_{\vartheta_1}x\|_* = \sup_{n\ge k,\, x^*(\cdot)\in\mathfrak{K}_{\vartheta_1,\dots,\vartheta_k}(x)} q^{-N_x(n-k)}\|x^*(n)\| \le$$

$$\le \sup_{n\ge k,\, x^*(\cdot)\in\mathfrak{K}_{\vartheta_1,\dots,\vartheta_k}(x)} q^{\sigma-N_{x^*}(n)}\|x^*(n)\|$$

Расширяя в правой части последнего неравенства множество, по которому берется супремум, имеем:

$$\|A_{\vartheta_k}A_{\vartheta_{k-1}}\cdots A_{\vartheta_1}x\|_* \le \sup_{n\ge k,\, x(\cdot)\in\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F}),\, x(0)=x} q^{\sigma}q^{-N_x(n)}\|x(n)\| = q^{\sigma}\|x\|_*. \qquad (4.2.12)$$

Полученное неравенство в силу (4.2.11) при $\vartheta_1\cup\vartheta_2\cup\cdots\cup\vartheta_k = \{1,2,\ldots,N\}$ превращается в (4.2.6), а при $k=1$ и $\vartheta_1=\vartheta$ из (4.2.12) вытекает (4.2.5). Теорема 4.2.5 доказана. □

4.2.6. Корректность задачи об устойчивости. В приложениях элементы матрицы A уравнения (4.1.1) или элементы матриц $A\in\mathfrak{F}$ уравнения (4.2.1) бывают известны с некоторой погрешностью. Поэтому, ставя задачу об устойчивости этих уравнений, одновременно нужно рассматривать и вопрос о корректности самой постановки задачи об устойчивости: не может ли случиться так, что некоторое уравнение (4.1.1) (или (4.2.1)) асимптотически устойчиво и в то же время существуют сколь угодно близкие к нему (в смысле близости матриц правых частей) уравнения того же вида, свойством асимптотической устойчивости не обладающие. Из теоремы 4.2.2 вытекает следующее утверждение.

4.2.7. Теорема. *Пусть уравнение* (4.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$ и пусть $\tilde{\mathfrak{F}}$ — множество матриц A вида $\tilde{A}=A+B$, где $A\in\mathfrak{F}$, $\|B\|<\varepsilon$. Тогда уравнение* (4.2.1) *абсолютно асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если ε достаточно мало.*

Теорема 4.2.7 говорит о корректности постановки задачи об абсолютной асимптотической устойчивости уравнения (4.2.1) (а значит, и уравнения (4.1.1)). Для доказательства теоремы 4.2.7 достаточно заметить, что в силу теоремы 4.2.2 для матриц $A\in\mathfrak{F}$ в некоторой норме $\|\cdot\|_*$ верны неравенства $\|A\|_*\le q<1$. Но тогда при малых ε для матриц $\tilde{A}\in\tilde{\mathfrak{F}}$ будут выполняться аналогичные неравенства $\|\tilde{A}\|_*\le\tilde{q}$ при некотором $\tilde{q}<1$. В силу теоремы 4.2.2 это влечет абсолютную асимптотическую устойчивость уравнения (4.2.1) в классе правых частей $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Вопрос о корректности возникает и при постановке задачи об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (4.2.4) с правыми частями из класса $\mathfrak{P}(A)$ (или какого-либо порождающего класса $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{P}(A)$). В этом случае указанный вопрос принимает следующую форму: влечет ли абсолютная r-асимптотическая устойчивость уравнения (4.2.4) в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$ аналогичное свойство этого уравнения в классе $\mathfrak{P}(\tilde{A})$ с близкой к A матрицей A? Казалось бы, ответ на этот вопрос должен следовать из теоремы 4.2.5 столь же легко, как теорема 4.2.7 следует из теоремы 4.2.2, потому что формулировки теорем 4.2.5 и 4.2.2 очень сходны. Однако реализовать подобную схему рассуждений не удается, так как при сколь угодно близких к A матрицах A для матриц $\tilde{A}_\vartheta$ могут не выполняться неравенства (4.2.6)! К вопросу о корректности задачи об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (4.2.4) вернемся в гл. 6.

4.2.8. Близкие по смыслу к утверждениям теорем 4.2.2, 4.2.4 и 4.2.5 критерии абсолютной устойчивости разностных уравнений предлагались различными авторами. Опишем один из таких критериев.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ — некоторый порождающий класс правых частей уравнения (4.2.4). Для описания $\mathfrak{F}$ достаточно указать семейство Θ тех подмножеств $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, для которых $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$. Очевидно, семейство Θ состоит из конечного числа элементов; перенумеруем их, тогда $\Theta = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k\}$, причем $\vartheta_i \neq \vartheta_j$ при $i \neq j$.

Обозначим при каждом $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$ через $\mathfrak{L}_i$ множество всех конечных произведений $B = A_{\nu_1} A_{\nu_2} \cdots A_{\nu_m}$ матриц A_{ν_j} из $\mathfrak{F}$, для которых $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \ldots \vartheta_i \subseteq \nu_1 \cup \nu_2 \cup \cdots \cup \nu_m$.

Пусть уравнение (4.2.4) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 4.2.5 найдется норма $\|\cdot\|_*$, в которой верны неравенства (4.2.5), а при некотором $q < 1$ — и неравенства (4.2.6). Положим $\|x\|_0 = \|x\|_*$ и

$$\|x\|_i = \max\{q\|x\|_*, \sup_{L \in \mathfrak{L}_i} \|Lx\|_*\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

В нормах $\|\cdot\|_i$ выполняются соотношения

$$\|A_{\vartheta_j} x\|_i \leq \|x\|_i \quad \text{при} \quad 0 \leq i, j \leq k-1, \tag{4.2.13}$$

$$\|A_{\vartheta_{i+1}} x\|_i \leq \|x\|_{i+1} \quad \text{при} \quad 0 \leq i \leq k-2, \tag{4.2.14}$$

$$\|A_{\vartheta_k} x\|_{k-1} \leq q\|x\|_0. \tag{4.2.15}$$

Справедливо и обратное утверждение: если в некоторых нормах $\|\cdot\|_i$, $0 \leq i \leq k-1$, для матриц A_{ϑ_i} выполняются соотношения (4.2.13)–(4.2.15), то уравнение (4.2.4) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} = \{A_{\vartheta_1}, A_{\vartheta_2}, \ldots, A_{\vartheta_k}\}$.

4.2.9. В заключение отметим, что при рассмотрении уравнения (4.2.4) вектор $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ считался принадлежащим пространству $\mathbb{R}^N$, т.е. его компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_N$ предполагались скалярными. Утверждение теоремы 4.2.5 остается в силе и в случае, когда компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_N$ векторные, а матрица $A = (a_{ij})$ — блочная, с матричными блоками a_{ij} соответствующих размерностей.

§ 4.3. Инвариантные множества

Анализ тех или иных утверждений, формулируемых в терминах норм, иногда предпочтительнее проводить в геометрических терминах. Возможность такого геометрического рассмотрения основана на ряде простых фактов теории векторных топологических пространств.

4.3.1. Пусть E — конечномерное линейное нормированное пространство; норму в нем обозначим через $|\cdot|$. Пусть $\|\cdot\|$ некоторая другая норма в E. Множество

$$S = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

называют *единичным шаром* нормы $\|\cdot\|$; это множество замкнуто, выпукло, ограничено в норме $|\cdot|$ и центрально-симметрично относительно точки $x = 0$. Точка $x = 0$ принадлежит S вместе с некоторой своей окрестностью в норме $|\cdot|$.

Пусть теперь U — некоторое замкнутое, выпуклое, ограниченное в норме $|\cdot|$ и центрально-симметричное относительно точки $x = 0$ множество в E. Пусть, кроме того, точка $x = 0$ лежит в S вместе с некоторой своей окрестностью в норме $|\cdot|$. Тогда для каждого вектора $x \in E$ определена конечная величина $\|x\| = \inf\{t > 0 : x/t \in U\}$. При этом функция $\|x\|$ оказывается нормой в E, а ее единичный шар совпадает с U.

Таким образом, между нормами в E и выпуклыми, замкнутыми, ограниченными, центрально-симметричными множествами в E, содержащими точку $x = 0$ вместе с некоторой ее окрестностью, существует взаимно-однозначное соответствие. При этом линейное отображение A в E удовлетворяет условию $\|A\| \leq 1$, если и только если шар S инвариантен относительно A, т.е. $Ax \in S$ при $x \in S$ (при этом пишут: $AS \subseteq S$, см. рис. 4.1). Неравенство $\|A\| < 1$ равносильно тому, что множество AS лежит в некотором шаре $qS = \{x \in E : q^{-1}x \in S\}$, где $q < 1$.

Таким образом (см. теорему 4.2.5), уравнение (4.2.4) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и толь-

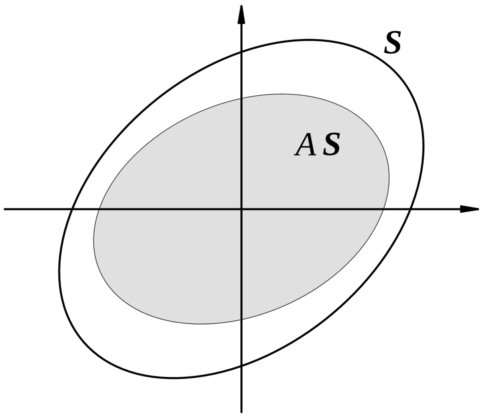

Рис. 4.1. Пример множества, инвариантного относительно матрицы

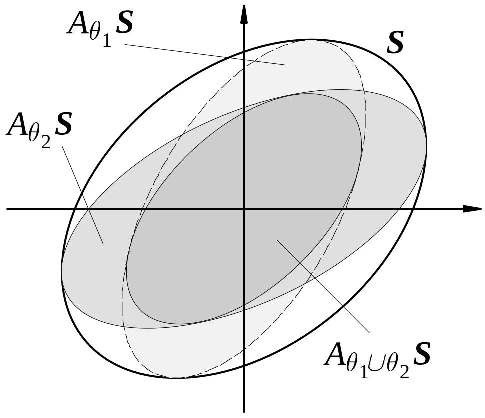

Рис. 4.2. Пример множества, инвариантного относительно всех помесей матрицы

ко если найдется такое выпуклое, центрально-симметричное и т.д. множество S, инвариантное относительно отображений $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$, что каждое множество $A_{\vartheta_1}\cdots A_{\vartheta_k}S$, где $A_{\vartheta_j} \in \mathfrak{F}$, $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$, лежит внутри S (см. рис. 4.2).

4.3.2. Пример. Пусть $A = (a_{ij})$ — вещественная квадратная матрица второго порядка, удовлетворяющая условиям $|a_{11}| + |a_{12}| < 1$, $|a_{21}| + |a_{22}| < 1$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ квадрат

$$S = \{x = \{x_1, x_2\} : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1\}.$$

Множество S инвариантно относительно любой помеси матрицы A, причем множества AS, $A_{\{1\}}A_{\{2\}}S$, $A_{\{2\}}A_{\{1\}}S$ лежат во внутренности S.

Нетрудно переформулировать в терминах инвариантных множеств и критерий (4.2.13)–(4.2.15) абсолютной r-асимптотической устойчивости. Уравнение (4.2.4) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $F = \{A_{\vartheta_1}, \ldots, A_{\vartheta_k}\} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если найдутся такие центрально-симметричные, выпуклые и т.д. (см. выше) множества $S_1, \ldots, S_k$, что

$$A_{\vartheta_j}S_i \subseteq S_i \quad \text{при} \quad 0 \le i, j \le k-1,$$
$$A_{\vartheta_{i+1}}S_i \subseteq S_{i+1} \quad \text{при} \quad 0 \le i \le k-2,$$
$$A_{\vartheta_k}S_{k-1} \subseteq \{\text{внутренность } S_0\}.$$

4.3.3. Изложенный выше подход к анализу абсолютной r-асимптотической устойчивости распространяется на нелинейные уравнения. Приведем пример.

Пусть $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_N(x)\}$ — вектор-функция, определенная в $\mathbb{R}^N$ и принимающая значения также в $\mathbb{R}^N$; будем считать, что $\varphi(0) = 0$. Поставим вопрос об абсолютной r-асимптотической устойчивости разностного уравнения

$$x(n+1) = f[n, x(n)] \tag{4.3.1}$$

в классе правых частей $\mathfrak{F} = \{\varphi_{\vartheta_1}, \varphi_{\vartheta_2}, \ldots, \varphi_{\vartheta_k}\} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^N$ найдется последовательность множеств C_n, каждое из которых содержит точку $x = 0$ вместе с некоторой окрестностью (своей для каждого множества C_n). Пусть выполнены условия:

$$\sup\{\|x\| : x \in C_n\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{4.3.2}$$

$$\varphi_{\vartheta_j}(C_n) \subseteq C_n \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, k, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{4.3.3}$$

$$\varphi_{\vartheta_{i_n}}(C_n) \subseteq C_{n+1}, \tag{4.3.4}$$

где $\{i_n\}$ — некоторая последовательность целых чисел со значениями во множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$. Подчеркнем, что от множеств C_n не требуется выпуклости, замкнутости и т.п.

4.3.4. Теорема. *Уравнение* (4.3.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} = \{\varphi_{\vartheta_1}, \varphi_{\vartheta_2}, \ldots, \varphi_{\vartheta_k}\} \subseteq \mathfrak{P}(\varphi)$, если и только если найдется последовательность множеств C_n, удовлетворяющая условиям* (4.3.2)–(4.3.4).

§ 4.4. Необходимые условия

Чтобы использовать утверждения § 4.2 для анализа абсолютной устойчивости эквивалентных разностных уравнений рассинхронизованных систем импульсных уравнений, знать конкретный вид нормы $\|\cdot\|_*$, обладающей свойствами (4.2.5), (4.2.6), не обязательно. Некоторые эффективные необходимые условия абсолютной устойчивости уравнения (4.2.1) вытекают из самого факта существования упомянутой нормы $\|\cdot\|_*$. Такие условия должны, вообще говоря, зависеть и от класса $\mathfrak{F}$ правых частей, в котором рассматривается уравнение (4.2.1). В настоящем параграфе изучается случай, когда класс $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{P}_k(A)$ или $\mathfrak{P}_k(A)$ (см. § 3.4), или содержит эти множества матриц.

4.4.1. Пусть сначала уравнение (4.2.1) рассматривается в пространстве $\mathbb{R}^N$, т.е. компоненты вектора $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ скалярные. Элементы матрицы A обозначим через a_{ij}.

4.4.2. Теорема. *Если уравнение* (4.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ *и* $\mathfrak{P}_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$*, то при каждом* $i = 1, 2, \dots, N$ *выполняется либо условие*

$$-1 \le a_{ii} < 1,$$

либо условие

$$a_{ii} = 1, \qquad a_{ij} = 0 \quad \text{при всех} \quad j \ne i.$$

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{P}_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$, то при каждом $i = 1, 2, \dots, N$ множеству $\mathfrak{F}$ принадлежит матрица

$$A_{\{i\}} = \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{iN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда в норме $\|\cdot\|_*$ из теоремы 4.2.2 для степеней матрицы $A_{\{i\}}$ при $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства $\|A^n_{\{i\}}\|_* \le 1$. Значит, элементы матриц $A^n_{\{i\}}$ при $n = 1, 2, \dots$ равномерно ограничены. Но

$$A^n_{\{i\}} = \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1 + \dots + a^{n-1}_{i1})a_{i1} & \dots & a^n_{ii} & \dots & (1 + \dots + a^{n-1}_{i1})a_{iN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Из требования равномерной ограниченности при $j \ne i$ элементов матриц $A^n_{\{i\}}$, величин $(1 + \dots + a^{n-1}_{ii})a_{ij}$, вытекает утверждение теоремы 4.4.2.

Сформулированное в теореме 4.4.2 необходимое условие абсолютной устойчивости весьма грубое.

4.4.3. Пример. Рассмотрим уравнение (4.2.1) в $\mathbb{R}^2$. Пусть диагональные элементы a_{11} и a_{22} матрицы $A = (a_{ij})$ равны нулю; тогда выполнены условия теоремы 4.4.2. Рассматриваемое уравнение абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$, если и только если $|a_{12}a_{21}| \le 1$. Это следует из того, что любое конечное произведение матриц из $\mathfrak{P}_1(A)$ либо равно нулевой матрице, либо имеет вид; $(A_{\{1\}}A_{\{2\}})^n$, или $(A_{\{2\}}A_{\{1\}})^n$, или $A_{\{2\}}(A_{\{1\}}A_{\{2\}})^n$, или $A_{\{1\}}(A_{\{2\}}A_{\{1\}})^n$.

4.4.4. Теорема. *Пусть уравнение* (4.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ *и* $\mathfrak{P}_k(A) \subseteq \mathfrak{F}$ *при некотором* $k \in [1, N]$. *Тогда собственные значения матрицы A лежат в круге* $|\lambda + (N-k)/k| \le N/k$ *комплексной плоскости.*

Доказательство. Для каждого множества $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, состоящего из k различных элементов, в норме $\|\cdot\|_*$ из теоремы 4.2.2 справедливо неравенство $\|A_\vartheta\|_* \le 1$. Положим $B = \sum A_\vartheta$, где сумма берется по всем множествам $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, состоящим из k различных элементов. Поскольку имеется всего $C_N^k = N!/(k!(n-k)!)$ таких множеств, то $\|B\|_* \le C_N^k$. С другой стороны, $B = C_{N-1}^k I + C_{N-1}^{k-1} A$. Поэтому $\|C_{N-1}^k I + C_{N-1}^{k-1} A\|_* \le C_N^k$ или, что то же,

$$\left\| A + \frac{N-k}{k} I \right\|_* \le \frac{N}{k}. \tag{4.4.1}$$

Пусть теперь λ — собственное значение матрицы A. Тогда $\xi = \lambda + (N-k)/k$ — собственное значение матрицы $\frac{N-k}{k} I + A$, и для него в силу (4.4.1) и формулы И.М. Гельфанда верна оценка $|\xi| \le N/k$. Следовательно, $|\lambda + (N-k)/k| \le N/k$. Теорема 4.4.4 доказана. □

При использовании дополнительной информации о матрице A могут быть получены и более сильные утверждения.

4.4.5. Теорема. *Пусть уравнение* (4.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. *Если* $\mathfrak{P}_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$ *и* $0 < \alpha \le a_{ii} \le 1$ *при* $1 \le i \le N$, *то собственные значения матрицы A лежат в круге* $|\lambda - 1 + (1-\alpha)N| \le (1-\alpha)N$ *комплексной плоскости.*

Доказательство. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ матрица $A_{\{i\}}$ удовлетворяет в норме $\|\cdot\|_*$ из теоремы 4.2.2 условию $\|A_{\{i\}}\| \le 1$. Тогда и при $n = 2, 3, \ldots$ для матриц $A_{\{i\}}^n$ справедливы неравенства $\|A_{\{i\}}^n\|_* \le 1$. А поскольку $0 \le (a_{ii} - \alpha)/(1-\alpha) \le 1$, то и для матриц

$$B_{i,n} = \frac{a_{ii} - \alpha}{1-\alpha} I + \left(1 - \frac{a_{ii} - \alpha}{1-\alpha}\right) A_{\{i\}}^n \tag{4.4.2}$$

также справедливы неравенства $\|B_{i,n}\|_* \le 1$. Но, как показывает непосредственный подсчет,

$$B_{i,n} \to \frac{1}{1-\alpha}(A_{\{i\}} - \alpha I) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для матрицы $B_i = (1-\alpha)^{-1}(A_{\{i\}} - \alpha I)$ имеет место оценка $\|B_i\|_* \le 1$. Отсюда $\|B\|_* \le N$, где

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_N = (1-\alpha)^{-1}(A_{\{1\}} + A_{\{2\}} + \dots + A_{\{N\}} - N\alpha I) = \\ = (1-\alpha)^{-1}[A + (N-1-\alpha N)I].$$

Значит,

$$\|A + (N-1-\alpha N)I\|_* \le (1-\alpha)N, \tag{4.4.3}$$

Из неравенства (4.4.3) вытекает (сравните доказательство теоремы 4.4.4) утверждение теоремы 4.4.5.

4.4.6. Продемонстрированный в теоремах 4.4.2, 4.4.4 и 4.4.5 способ получения необходимых условий абсолютной устойчивости может развиваться в различных направлениях. Но уже и теорем 4.4.2, 4.4.4 и 4.4.5 достаточно для анализа многих ситуаций. Укажем некоторые полезные следствия из установленных теорем.

Из теоремы 4.4.4 следует, что уравнение (4.2.1) с матрицей A, имеющей собственное значение с вещественной частью, превосходящей 1, не может быть абсолютно устойчивым ни в одном классе $\mathfrak{P}_k(A)$ или $\mathfrak{P}_k(A)$.

Если $(N-1)/N \le a_{ii} \le 1$ при $i = 1, 2, \dots, N$, то в силу теоремы 4.4.5 из абсолютной устойчивости уравнения (4.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ следует устойчивость разностного уравнения (4.1.1). В терминах рассинхронизованных систем это утверждение означает, что абсолютная устойчивость линейной рассинхронизованной в классе рассинхронизаций $\mathfrak{S}_1$ системы импульсных уравнений влечет при $(N-1)/N \le a_{ii} \le 1$, $1 \le i \le N$, устойчивость соответствующей синхронизованной системы.

Идея доказательства теорем 4.4.4 и 4.4.5 заключалась в представлении матрицы $A+(N-k)I/N$ (в случае теоремы 4.4.4) или $[A+(N-1-\alpha N)I]/(1-\alpha)$ (в случае теоремы 4.4.5) в виде выпуклой комбинации матриц, нормы которых не превосходят 1. Эта идея помогает и в других случаях. Пусть, например, $(k-1)/k \le a_{ii} \le 1$ при $1 \le i \le N$, где k — некоторое целое число из интервала $[1, N]$. Тогда при подходящем выборе числа α каждая матрица $A_\vartheta \in \mathfrak{P}_k(A)$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации пределов матриц (4.4.2), и потому $\|A_\vartheta\|_* \le 1$. Следовательно, при условии $(k-1)/k \le a_{ii} \le 1$, $1 \le i \le N$, абсолютная устойчивость уравнения (4.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ влечет его абсолютную устойчивость в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$.

При анализе уравнения (4.2.1) с векторными компонентами удобна приводимая ниже лемма. Обозначим через $\sigma(U)$, $\rho(U)$ и $\operatorname{rank}(U)$ соответственно множество собственных значений, спектральный радиус и ранг матрицы U. Пусть

$$U = \begin{Vmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{Vmatrix}$$

— блочная матрица, элементы P и I которой являются квадратными матричными блоками.

4.4.7. Лемма. *Если $\|U\| \le 1$, то справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

а) $\rho(U) \le 1$ и 1 является полупростым собственным значением матрицы U;

б) $\rho(P) \le 1$; если при этом $1 \in \sigma(P)$, то собственное значение 1 матрицы P полупростое и $\operatorname{rank}(I-P) = \operatorname{rank}(I-U) = \operatorname{rank}\{I-P, -Q\}$.

Доказательство. Неравенство $\|U\| \le 1$ влечет неравенства: $\|U^n\| \le 1$ при $n \ge 2$. Следовательно, элементы матриц

$$U^n = \begin{Vmatrix} P^n & (I + P + \cdots + P^{n-1})Q \\ 0 & I \end{Vmatrix}$$

равномерно ограничены. Дальнейшие рассуждения очевидны.

4.4.8. Вернемся к рассмотрению уравнения (4.2.1). Предположим теперь, что компоненты вектора $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ сами являются векторами из некоторых конечномерных подпространств. Тогда элементы матрицы $A = (a_{ij})$ в свою очередь являются матрицами соответствующих размерностей.

4.4.9. Теорема. *Пусть уравнение* (4.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Тогда для каждой матрицы $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$, где ϑ — собственное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, имеет место оценка $\rho(A_\vartheta) \le 1$, причем 1 является полупростым собственным значением матрицы A_ϑ.*

Эта теорема обобщает теорему 4.4.2 на случай уравнений (4.2.1) с произвольными (скалярными или векторными) компонентами, и на случай матриц A_ϑ с множествами ϑ, содержащими более одного элемента. Доказательство теоремы вытекает из утверждения а леммы 4.4.7.

4.4.10. Из результатов этого параграфа вытекают следующие утверждения.

а. Пусть

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{array} \right\|, \qquad \tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \frac{a_{12}}{1-a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1N}}{1-a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 & \ldots & \frac{a_{2N}}{1-a_{22}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{a_{N1}}{1-a_{NN}} & \frac{a_{N2}}{1-a_{NN}} & \ldots & 0 \end{array} \right\|.$$

Пусть $0 \le a_{ii} < 1$ при $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда уравнение (4.2.1) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$, если и только если оно абсолютно устойчиво в классе $\mathfrak{P}_1(\tilde{A})$.

б. Уравнение (4.2.1) с матрицей $A = (a_{ii})$ второго порядка, удовлетворяющей условию $0 \le a_{11}, a_{22} < 1$, абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$, если и только если $|a_{12}a_{21}| \le (1 - a_{11})(1 - a_{22})$.

4.4.11. Для анализа необходимых условий абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (4.2.1) нам понадобится вспомогательное утверждение.

4.4.12. Лемма. *Пусть блочные матрицы*

$$U = \left\| \begin{array}{cc} P & Q \\ 0 & I \end{array} \right\|, \qquad U = \left\| \begin{array}{cc} I & 0 \\ R & S \end{array} \right\|$$

с квадратными диагональными блоками удовлетворяют условиям

$$\|U\|, \|V\| \le 1, \qquad \|UV\| \le q < 1. \tag{4.4.4}$$

Тогда $\rho(P) < 1$.

Доказательство. В силу утверждения б леммы 4.4.7 $\rho(P) \leq 1$. Поэтому достаточно показать, что матрица P не имеет собственных значений на единичной окружности.

Предположим противное. Пусть матрица P имеет собственное значение λ, для которого $|\lambda| = 1$. Тогда найдется последовательность целых чисел $n_k \to \infty$, при которой $\lambda^{n_k} \to 1$. Рассмотрим последовательность матриц U^{n_k}. Поскольку матрицы

$$U^n = \begin{Vmatrix} P^n & (I + P + \cdots + P^{n-1})Q \\ 0 & I \end{Vmatrix}$$

удовлетворяют неравенствам $\|U^n\| \leq 1$ при $n \geq 1$, то их элементы ограничены в совокупности. Значит, без ограничения общности можно считать последовательность матриц U^{n_k} сходящейся к некоторой матрице

$$U_* = \begin{Vmatrix} P_* & Q_* \\ 0 & I \end{Vmatrix},$$

где $P_* = \lim P^{n_k}$, $Q_* = \lim(I + P + \cdots + P^{n_k-1})Q$. Следовательно, $1 \in \sigma(P_*)$. Но в силу (4.4.4) $\|U^n\| \leq 1$ и $\|U^n V\| \leq q < 1$, поэтому

$$\|U_*\|, \|V\| \leq 1, \qquad \|U_* V\| \leq q < 1.$$

В силу оценки $\|U_*\| \leq 1$ по лемме 4.4.7 собственное значение 1 матрицы P_* полупростое. Значит (переходя при необходимости к некоторому новому базису) матрицу P_* можно представить в следующем блочном виде:

$$P_* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{Vmatrix}.$$

При этом, поскольку в силу утверждения а леммы 4.4.7 собственное значение 1 матрицы U_* полупростое, матрица U_* при соответствующем разбиении на блоки примет вид

$$U_* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & Q_1 \\ 0 & 0 & I \end{Vmatrix},$$

а матрица V при разбиении на аналогичные блоки — вид

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ R_1 & R_2 & S \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$U_* V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Q_1 R_1 & P_1 + Q_1 R_2 & Q_1 S \\ R_1 & R_2 & S \end{Vmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица $U_* V$ имеет собственное значение 1. Но это противоречит неравенствам $\rho(U_* V) \le \|U_* V\| < 1$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.4.12.

Приведенная лемма является развитием леммы 4.4.7; ниже она используется для анализа абсолютной r-асимптотической устойчивости.

4.4.13. Вернемся к рассмотрению уравнения (4.2.1); компоненты вектора $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ в нем могут быть как скалярными, так и векторными. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ — некоторый класс правых частей уравнения (4.2.1). Назовем матрицу $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$ *дополняемой* (в классе $\mathfrak{F}$), если либо $\vartheta = \{1, 2, \dots, N\}$, либо найдутся такие матрицы $A_{\vartheta_1}, A_{\vartheta_2}, \dots, A_{\vartheta_k} \in \mathfrak{F}$, что

$$\{1, 2, \dots, N\} \setminus \vartheta = \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \dots \cup \vartheta_k. \tag{4.4.5}$$

4.4.14. Пример. а. Если класс $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ содержит множество $\mathfrak{P}_1(A)$, то любая матрица из $\mathfrak{F}$ дополняема в $\mathfrak{F}$.

б. Пусть A — квадратная матрица второго порядка и $\mathfrak{F} = \{A, A_{\{1\}}\}$. Тогда матрица $A_{\{1\}}$ недополняема в $\mathfrak{F}$.

Подматрицу матрицы A (или, что то же, матрицы A_ϑ), составленную из элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами, принадлежащими множеству $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, обозначим через $A_{\vartheta\times\vartheta}$.

4.4.15. Теорема. *Пусть уравнение* (4.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ *и матрица* $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$ *дополняема в* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\rho(A_{\vartheta\times\vartheta}) < 1$.

Доказательство. Пусть сначала $\vartheta = \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда $A_\vartheta = A_{\vartheta\times\vartheta} = A$, и по теореме 4.2.5 в некоторой норме $\|\cdot\|_*$ выполняется неравенство $\|A\|_* \le q < 1$. Следовательно, $\rho(A_{\vartheta\times\vartheta}) = \rho(A) < 1$.

Пусть теперь $\vartheta \ne \{1, 2, \ldots, N\}$. Так как матрица A_ϑ дополняема в $\mathfrak{F}$, то найдутся множества ϑ_1, ϑ_2, $\ldots$, ϑ_k, для которых выполняется равенство (4.4.5), и $A_{\vartheta_1}, A_{\vartheta_2}, \ldots, A_{\vartheta_k} \in \mathfrak{F}$. Положим $U = A_\vartheta$, $V = A_{\vartheta_1} A_{\vartheta_2} \cdots A_{\vartheta_k}$. Тогда перенумерацией строк и столбцов можно добиться того, что матрицы U и V примут вид

$$U = \begin{Vmatrix} A_{\vartheta\times\vartheta} & Q \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \qquad U = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ R & S \end{Vmatrix}$$

Пусть $\|\cdot\|_*$ — норма из теоремы 4.2.5. Тогда $\|U\|_* \le 1$, $\|V\|_* \le 1$. Кроме того, $\|UV\|_* < 1$, так как в силу (4.4.5) имеет место равенство

$$\vartheta \cup \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Следовательно (по лемме 4.4.12), $\rho(A_{\vartheta\times\vartheta}) < 1$. Теорема 4.4.15 доказана. □

Как отмечалось, абсолютная устойчивость уравнения (4.2.1) в ряде классов $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ может иметь место лишь при отсутствии у матрицы A собственных значений с вещественными частями, превосходящими 1. В случае абсолютной r-асимптотической устойчивости полезным дополнением является следующая теорема.

4.4.16. Теорема. *Пусть уравнение* (4.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Тогда $1 \notin \sigma(A)$.*

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что включение $1 \in \sigma(A)$ означает существование такого вектора $x_* = 0$, для которого $Ax_* = x_*$. Но тогда $A_\vartheta x_* = x_*$ для любого множества $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$. Следовательно, функция $x(n) = x_*$, $-\infty < n < \infty$, является решением любого уравнения (4.2.1) с правыми частями из $\mathfrak{P}(A)$, а значит, и из класса $\mathfrak{F}$. Но это противоречит абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (4.2.1), что и доказывает теорему.

В следующем примере сформулированы необходимые условия абсолютной r-асимптотической устойчивости некоторых уравнений (4.2.1). В следующей главе будет показано, что эти условия необходимы и достаточны.

4.4.17. Пример. а. Пусть уравнение (4.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Если матрица A скалярная, ее элементы неотрицательны и $\mathfrak{P}_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\rho(A) < 1$.

б. Пусть уравнение (4.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем $\mathfrak{P}_k(A)$. Если матрица A скалярная и симметрическая, то ее собственные значения лежат в интервале $(-\infty, 1)$, а собственные значения каждой матрицы $A_{\vartheta\times\vartheta}$ порядка k лежат в интервале $(-1, \infty)$.

Доказательство утверждения а примера требует знания некоторых фактов теории матриц с неотрицательными элементами; оно будет приведено в следующей главе. Утверждение б является следствием теорем 4.4.4, 4.4.15 и 4.4.16; его доказательство также отложим до следующей главы.

§ 4.5. Алгебраические и полуалгебраические множества

В параграфе излагаются некоторые факты алгебраической геометрии, необходимые для § 4.6.

4.5.1. Пусть $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ — элемент вещественного координатного пространства $\mathbb{R}^N$. Вещественным *полиномом* переменной $x \in \mathbb{R}^N$ называют конечную сумму

$$p(x) = \sum p_{i_1 i_2 \dots i_N} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_N^{i_N}$$

с вещественными коэффициентами $p_{i_1 i_2 \dots i_N}$; числа i_1, i_2, …, i_N предполагаются целыми неотрицательными. Множество $G \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *алгебраическим*, если оно совпадает с множеством всех нулей некоторого вещественного полинома $p(x)$ (т.е. решений уравнения $p(x) = 0$).

4.5.2. Пример. а. Пустое множество является вещественным алгебраическим, поскольку оно совпадает с (пустым!) множеством нулей полинома $p(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^N$.

б. Пространство $\mathbb{R}^N$ является вещественным алгебраическим множеством, так как является множеством нулей полинома $p(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

в. Произвольная точка $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*\} \in \mathbb{R}^N$ является алгебраическим множеством, так как совпадает со множеством нулей полинома

$$p(x) = (x_1 - x_1^*)^2 + \dots + (x_N - x_N^*)^2 \qquad (x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^N).$$

Каждое алгебраическое множество замкнуто. Если G_1 и G_2 — алгебраические множества в $\mathbb{R}^N$, определяемые полиномами $p_1(x)$ и $p_2(x)$, то множества $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \cup G_2$ также алгебраические — первое из них определяется полиномом $p(x) = p_1^2(x) + p_2^2(x)$, а второе — полиномом $p(x) = p_1(x) p_2(x)$. Одно и то же множество может определяться различными полиномами.

Говорят, что множество $G \subseteq \mathbb{R}^N$ обладает SA-свойством, если найдутся такие вещественные полиномы $p_1(x)$, ..., $p_r(x)$, $q_1(x)$, ..., $q_s(x)$, что G состоит из тех и только тех точек $x \in \mathbb{R}^N$, для которых

$$p_1(x) = \dots = p_r(x) = 0,\ q_1(x) > 0,\ \dots,\ q_s(x) > 0.$$

Множество $G \subseteq \mathbb{R}^N$ называют *полуалгебраическим*, если оно является объединением конечного числа множеств, обладающих SA-свойством. Пересечение и объединение конечного числа полуалгебраических множеств снова является полуалгебраическим множеством. Дополнение одного полуалгебраического множества до другого также является полуалгебраическим множеством.

Интерес к полуалгебраическим множествам объясняется двумя причинами. С одной стороны, множество всех полуалгебраических множеств достаточно богато, а свойства полуалгебраических множеств разнообразны. С другой стороны, полуалгебраические множества допускают простое описание — для проверки принадлежности точки данному полуалгебраическому множеству достаточно уметь выполнять операции сложения, вычитания, умножения и сравнения чисел. Из-за этого полуалгебраические множества обычно воспринимаются как объекты простые, допускающие конечное (алгоритмическое) описание. Тем не менее, часто в конкретных случаях непросто выписать полиномы, определяющие данное полуалгебраическое множество. Во многих задачах знание конкретного вида полиномов, определяющих полуалгебраическое множество, бывает не нужно — важен лишь сам факт полуалгебраичности. Опишем одну конструкцию, позволяющую во многих ситуациях устанавливать факт полуалгебраичности множества.

Пусть $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)\}$ — отображение, определенное на $\mathbb{R}^N$ и принимающее значения в $\mathbb{R}^M$. Назовем его *полиномиальным*, если все компоненты $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, M$, являются вещественными полиномами.

4.5.3. Теорема (Зайденберга-Тарского)**.** *Образ и полный прообраз при полиномиальном отображении полуалгебраического множества является полуалгебраическим множеством.*

Полуалгебраичность полного прообраза полуалгебраического множества при полиномиальном отображении очевидна. Полуалгебраичность же образа полуалгебраического множества — глубокий факт. Заметим, что прообраз алгебраического множества при полиномиальном отображении является алгебраическим множеством, а образ, вообще говоря, — не является.

4.5.4. Пример. а. Пусть G — это гипербола $x_1x_2 - 1 = 0$ в $\mathbb{R}^2$, а $p(x_1, x_2) = x_2$. Множество G алгебраическое. Множество $p(G)$, состоящее из двух полупрямых, $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$, — полуалгебраическое.

б. Рассмотрим квадратный многочлен $q(x) = x^2 + p_1x + p_2$. Он однозначно определяется заданием точки $\{p_1, p_2\}$ в $\mathbb{R}^2$. Поставим вопрос: является ли полуалгебраическим множество G пар $\{p_1, p_2\} \in \mathbb{R}^2$, при которых многочлен $q(x)$ имеет вещественные корни x_1, x_2, лежащие в интервале $[-1, 1]$? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что по теореме Виета $p_1 = -(x_1 + x_2)$, $p_2 = x_1x_2$. Поэтому множество G является образом при полиномиальном отображении $\{x_1, x_2\} \mapsto \{-(x_1 + x_2), x_1x_2\}$ полуалгебраического множества (квадрата) $-1 \le x_1 \le 1$, $-1 \le x_2 \le 1$. Следовательно, по теореме Зайденберга-Тарского множество G полуалгебраическое.

в. Пусть A — квадратная матрица порядка N с вещественными элементами. Матрицу A можно отождествить с точкой координатного пространства $\mathbb{R}^{N^2}$, перенумеровав в каком-либо порядке ее элементы. Следовательно, можно говорить об алгебраичности или неалгебраичности некоторого множества матриц. Справедливо утверждение: множества квадратных матриц A порядка N, удовлетворяющих условиям $\rho(A) \le 1$ или $\rho(A) < 1$, полуалгебраические. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица (см. теорему 1.2.4), чтобы в явном виде выписать алгебраические соотношения между элементами матрицы A, равносильные условиям $\rho(A) \le 1$ или $\rho(A) < 1$. Другой подход к доказательству сформулированного утверждения использует идею примера 4.5.4б и теорему Зайденберга-Тарского; этот подход устанавливает лишь факт полуалгебраичности соответствующих множеств, но не дает их явного описания.

Теорема Зайденберга-Тарского является мощным орудием доказательства полуалгебраичности множеств. Но иногда необходимо установить обратный факт, — что то или иное множество не является полуалгебраическим. Часто это можно сделать, используя топологические свойства полуалгебраических множеств. Множество $G \subseteq \mathbb{R}^N$ называют *линейно связным*, если для любых двух его точек x, y найдется такая непрерывная функция $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^N$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ и $\gamma(t) \in G$ при $0 \le t \le 1$. Всякое максимальное (т.е. не содержащееся в другом) линейно связное подмножество множества G называют *компонентой линейной связности*.

4.5.5. Теорема (Уитни). *Дополнение одного вещественного алгебраического множества до другого содержит не более конечного числа компонент линейной связности.*

Из этой теоремы следует, что любое алгебраическое множество (как и его дополнение) состоит не более чем из конечного числа компонент линейной связности.

Следствие. *Дополнение одного вещественного полуалгебраического множества до другого содержит не более конечного числа компонент линейной связности.*

4.5.6. Пример. а. График функции $x_2 = \sin(1/x_1)$, $x_1 > 0$ в $\mathbb{R}^2$, объединенный с осью $x_1 = 0$, не является линейно связным множеством.

б. График функции $x_2 = \sin(1/x_1)$, $x_1 > 0$ в $\mathbb{R}^2$ является линейно связным множеством.

В силу следствия из теоремы Уитни ни множество из примера а, ни множество из примера б не является полуалгебраическим, поскольку в обоих случаях дополнение соответствующего множества до алгебраического множества $x_2 = 0$ содержит бесконечное число компонент линейной связности.

§ 4.6. Алгебраическая неразрешимость проблемы абсолютной устойчивости

Мы уже неоднократно сталкивались с ситуацией, когда те или иные вопросы устойчивости в случае синхронизованных систем решались сравнительно просто, а при переходе к рассинхронизованным системам превращались в сложную проблему. Естественно возникает вопрос: в чем причина этого — в недостатке нашего знания о рассинхронизованных системах, нашем неумении и т.п., или в том, что рассинхронизованные системы действительно являются объектом более сложным по сравнению с синхронизованными системами? Конечно, роль первой причины (нашего незнания и неумения) весьма велика. В то же время, как будет показано ниже, вторая причина также имеет место.

4.6.1. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = A(n)x(n), \qquad x(n) \in \mathbb{R}^N. \tag{4.6.1}$$

Пусть матрицы $A(n)$ при всех n принимают значения из некоторого класса $\mathfrak{F}$. Если класс матриц $\mathfrak{F}$ состоит из M квадратных матриц $F_1 = (f_{1,ij})$, $F_2 = (f_{2,ij})$, $\ldots$, $F_M = (f_{M,ij})$, то для его описания нужно задать MN^2 чисел: $f_{1,11}$, $f_{1,12}$, $\ldots$, $f_{1,NN}$, $f_{2,11}$, $f_{2,12}$, $\ldots$, $f_{2,NN}$, $\ldots$, $f_{M,11}$, $f_{M,12}$, $\ldots$, $f_{M,NN}$. Таким образом, каждый класс $\mathfrak{F}$, состоящий из M квадратных матриц порядка N, можно отождествить с некоторой точкой в координатном пространстве $\mathfrak{R}(M,N) = \mathbb{R}^{MN^2}$. При этом отвечающая классу $\mathfrak{F}$ точка в $\mathbb{R}^{MN^2}$ зависит от способа нумерации элементов этого класса; на дальнейшие рассмотрения неоднозначность сопоставления классу $\mathfrak{F}$ точки в $\mathbb{R}^{MN^2}$ не влияет. Выделим в пространстве $\mathfrak{R}(M,N)$ множество $\mathfrak{S}(M,N)$ тех классов $\mathfrak{F}$, в которых разностное уравнение (4.6.1) абсолютно устойчиво. Через $\mathfrak{A}(M,N)$ обозначим множество тех классов $\mathfrak{F} \in \mathfrak{R}(M,N)$, в которых разностное уравнение (4.6.1) абсолютно асимптотически устойчиво.

Задачу анализа абсолютной устойчивости разностного уравнения (4.6.1) в некотором классе правых частей можно рассматривать теперь как задачу описания множеств $\mathfrak{S}(M,N)$ и $\mathfrak{A}(M,N)$. Чем проще в каком-либо смысле структура этих множеств, тем проще должны быть критерии абсолютной устойчивости или абсолютной асимптотической устойчивости. Простому описанию поддаются множества $\mathfrak{S}(M,N)$ и $\mathfrak{A}(M,N)$ при $M = 1$ или $N = 1$.

Если $M = 1$, то класс $\mathfrak{F} \in \mathfrak{R}(M,N)$ состоит из одной матрицы и речь идет об устойчивости или асимптотической устойчивости некоторого разностного уравнения $x(n+1) = Ax(n)$. Как следует из примера 4.5.4б, множества $\mathfrak{S}(M,N)$ и $\mathfrak{A}(M,N)$ в этом случае полуалгебраические, т.е. имеют достаточно простую структуру.

Если $N = 1$, то пространство $\mathbb{R}^N$ одномерное, уравнение (4.6.1) скалярное, а класс $\mathfrak{F} \in \mathfrak{R}(M,N)$ состоит из M вещественных чисел F_1, F_2, ..., F_M. Условие абсолютной устойчивости уравнения (4.6.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}$ очевидно:

$$|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_M| \le 1;$$

столь же очевидно и условие абсолютной асимптотической устойчивости:

$$|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_M| < 1.$$

Следовательно, и в этом случае множества $\mathfrak{S}(M,N)$ и $\mathfrak{A}(M,N)$ полуалгебраические.

Ситуация принципиально меняется при $M, N \ge 2$.

4.6.2. Теорема. *Пусть $M, N \ge 2$. Если множество $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{R}(M,N)$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{A}(M,N) \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}(M,N)$, то оно не полуалгебраическое.*

В условиях этой теоремы не является полуалгебраическим ни множество $\mathfrak{S}(M,N)$, ни множество $\mathfrak{A}(M,N)$.

Доказательство теоремы 4.6.2 проведем сначала для случая $M = N = 2$. Идея доказательства проста. Строятся два семейства матриц, зависящих от параметра $t \in [-1, 1]$:

$$
\begin{aligned}
F_1(t) &= (1 - t^4)\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{t}{(1-t^2)^{1/2}} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \\
F_2(t) &= (1 - t^4)\begin{Vmatrix} 1 - 2t^2 & -2t(1 - t^2)^{1/2} \\ 2t(1 - t^2)^{1/2} & 1 - 2t^2 \end{Vmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.6.2}
$$

Множество $\mathfrak{D}$ всех классов $\mathfrak{F}(t) = \{F_1(t), F_2(t)\}$ в пространстве $\mathfrak{R}(2, 2)$ алгебраическое. Если множество $\mathfrak{C}$ полуалгебраическое, то множество $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ также полуалгебраическое, и по следствию из теоремы Уитни оно должно иметь не более конечного числа компонент линейной связности. Мы покажем, что множество $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ имеет бесконечное число компонент линейной связности, откуда и будет вытекать его неполуалгебраичность (см. рис. 4.3).

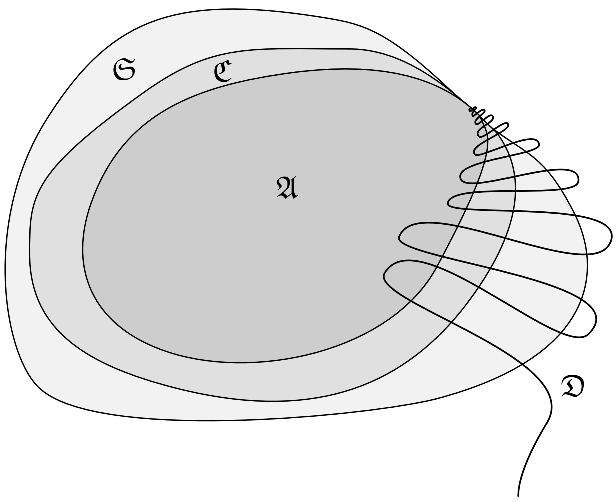

Рис. 4.3. Пример ситуации, в которой множество $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ имеет бесконечное число компонент линейной связности

Перейдем к доказательству. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение, а $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим зависящие от вещественного параметра φ матрицы

$$
P(\varphi) = \begin{Vmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\varphi \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad Q(\varphi) = \begin{Vmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{Vmatrix}. \tag{4.6.3}
$$

Здесь $P(\varphi)$ является матрицей проектирования, т.е. $P^2(\varphi) = P(\varphi)$, а $Q(\varphi)$ является матрицей поворота на угол φ, т.е. $Q^m(\varphi) = Q(m\varphi)$. Положим $\sigma_n = \pi/(2n+1)$, $\tau_n = \pi/(2n)$. Непосредственной проверкой устанавливается справедливость равенств

$$(PQ^mP)(\varphi) = \frac{\cos[(2m+1)\varphi]}{\cos\varphi} P(\varphi), \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

следствиями которых являются равенства (см. рис. 4.4)

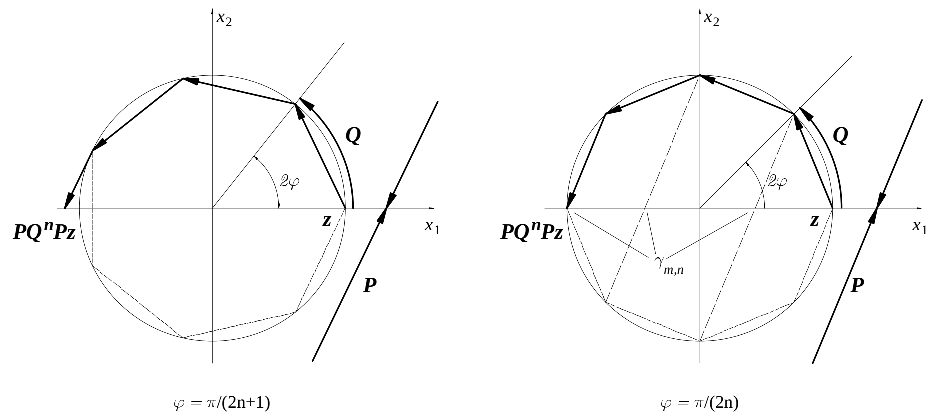

Рис. 4.4. Примеры поведения итераций точки под действием отображения PQ^mP

$$(PQ^nP)(\varphi) = -\frac{1}{\cos\varphi} P(\varphi) \quad \text{при} \quad \varphi = \sigma_n, \tag{4.6.4}$$

$$(PQ^mP)(\varphi) = \lambda_{m,n} P(\varphi) \quad \text{при} \quad \varphi = \tau_n, \tag{4.6.5}$$

где $|\lambda_{m+n,n}| = |\lambda_{m,n}|$, $|\lambda_{m,n}| \le 1$.

4.6.3. Лемма. *Пусть $\varphi = \tau_n$ и $H_i = P(\varphi)$ или $H_i = Q(\varphi)$ при $1 \le i \le m$. Тогда матрица $G = H_m H_{m-1} \cdots H_1$ имеет вид:*

$$G = \alpha Q^q(\varphi) P^r(\varphi) Q^s(\varphi), \tag{4.6.6}$$

где $|\alpha| \le 1$, целые числа q и s неотрицательны, $r = 0, 1$.

Доказательство леммы проведем по индукции. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно; пусть оно верно при $m = k - 1 \geq 1$. Тогда при $m = k$ матрицу $G = H_m H_{m-1} \cdots H_1$ можно представить в виде $G = H\tilde{\alpha}Q^{\tilde{q}}P^{\tilde{r}}Q^{\tilde{s}}_m$, где $|\tilde{\alpha}| \leq 1$, $\tilde{r} = 0$ или $\tilde{r} = 1$, $Q = Q(\varphi)$, $P = P(\varphi)$.

Если $H_m = Q = Q(\varphi)$, то $G = \tilde{\alpha}Q^{\tilde{q}+1}P^{\tilde{r}}Q^{\tilde{s}}$. Следовательно, для матрицы G имеет место представление (4.6.6), в котором $\alpha = \tilde{\alpha}$, $q = \tilde{q} + 1$, $r = \tilde{r}$, $s = \tilde{s}$.

Если $H_m = P = P(\varphi)$ и $\tilde{r} = 0$, то $G = \tilde{\alpha}PQ^{\tilde{q}+\tilde{s}}$. Следовательно, для матрицы G имеет место представление (4.6.6), в котором $\alpha = \tilde{\alpha}$, $q = 0$, $r = 1$, $s = \tilde{q} + \tilde{s}$.

Если, наконец, $H_m = P = P(\varphi)$ и $\tilde{r} = 1$, то $G = \tilde{\alpha}PQ^{\tilde{q}}PQ^{\tilde{s}}$. Здесь произведение матриц $PQ^{\tilde{q}}P$ согласно (4.6.5) можно заменить на $\lambda\tilde{q}_{,n}P$. Поэтому $G = \lambda_{\tilde{q},n}\tilde{\alpha}P^{\tilde{s}}Q$. Значит, и в этом случае для матрицы G верно представление (4.6.6), в котором $\alpha = \lambda_{\tilde{q},n}\tilde{\alpha}$, $q = 0$, $r = 1$, $s = \tilde{s}$. При этом $|\alpha| \leq |\lambda_{\tilde{q},n}| \cdot |\tilde{\alpha}| \leq 1$.

Итак, шаг индукции проведен. Лемма 4.6.3 доказана. □

Так как матрица $Q(\varphi)$ унитарна, т.е. $|Q(\varphi)x| = |x|$ при $x \in \mathbb{R}^2$, то в силу леммы 4.6.3 верна оценка

$$|H_m H_{m-1} \cdots H_1| \leq |P(\tau_n)|. \tag{4.6.7}$$

4.6.4. Лемма. *Пусть* $t_n = \sin\tau_n$. *Тогда* $\mathfrak{F}(t_n) \in \mathfrak{A}(2, 2)$.

Доказательство. Пусть $\{A(k)\}$ — последовательность матриц из $\mathfrak{F}(t_n) = \{F_1(t_n), F_2(t_n)\}$. Тогда при каждом k выполняется либо равенство $A(k) = F_1(t_n)$, либо равенство $A(k) = F_2(t_n)$. Из (4.6.2) и (4.6.3) вытекает, что $F_1(t_n) = \mu_n P(\tau_n)$, $F_2(t_n) = \mu_n Q(\tau_n)$, где $\mu_n = 1 - (\sin\tau_n)^4$. Поэтому произведение матриц $A(0), A(1), \ldots, A(k)$ имеет вид:

$$A(k)A(k-1)\cdots A(0) = \mu_n^{k+1} H_k H_{k-1} \cdots H_0,$$

где $H_i = P(\tau_n)$ или $H_i = Q(\tau_n)$. Тогда воспользовавшись оценкой (4.6.7), получаем

$$|A(k)A(k-1)\cdots A(0)| \leq \mu_n^{k+1}|P(\tau_n)|,$$

где $|\mu_n| \leq 1$. Отсюда следует абсолютная асимптотическая устойчивость уравнения (4.6.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}(t_n)$. Лемма 4.6.4. доказана. □

4.6.5. Лемма. *Пусть* $s_n = \sin\sigma_n$. *Тогда* $\mathfrak{F}(s_n) \notin \mathfrak{S}(2, 2)$ *при всех достаточно больших* n.

Доказательство. Лемма будет доказана, если при каждом достаточно большом значении n найдется такая последовательность матриц $A(k) \in \mathfrak{F}(s_n)$, что

$$|A(k_i)A(k_i-1)\cdots A(0)| \to \infty \tag{4.6.8}$$

для некоторой последовательности индексов k_i.

Зафиксируем какое-либо значение n и определим последовательность матриц $A(k)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A[(n+2)i] &= F_1(s_n), \\ A[(n+2)i+j] &= F_2(s_n), \qquad 1 \le j \le n, \\ A[(n+2)i+n+1] &= F_1(s_n), \end{aligned}$$

где $i = 0, 1, \ldots$. Положим $k_i = (n+2)i + n + 1$. Тогда

$$A(k_i)A(k_i-1)\cdots A(0) = [F_1(s_n)F_2^n(s_n)F_1(s_n)]^{i+1}.$$

Поскольку в силу (4.6.2) и (4.6.3) $F_1(s_n) = \nu_n P(\sigma_n)$, $F_2(s_n) = \nu_n Q(\sigma_n)$, где $\nu_n = 1 - (\sin\sigma_n)^4$, то

$$A(k_i)A(k_i-1)\cdots A(0) = [\nu_n^{n+2}P(\sigma_n)Q^n(\sigma_n)P(\sigma_n)]^{i+1}.$$

Отсюда в силу (4.6.4)

$$A(k_i)A(k_i-1)\cdots A(0) = \left(-\frac{\nu_n^{n+2}}{\cos\sigma_n}\right)^{i+1} P(\sigma_n).$$

Но $P(\varphi)$ — проектор, и потому $|P(\varphi)| \ge 1$. Следовательно,

$$|A(k_i)A(k_i-1)\cdots A(0)| \ge \left|-\frac{\nu_n^{n+2}}{\cos\sigma_n}\right|^{i+1}.$$

Разложив $\cos\sigma_n$ и $\nu_n^{n+2} = [1 - (\sin\sigma_n)^4]^{n+2}$ в ряды по степеням переменной $1/n$, придем к представлению

$$\frac{\nu_n^{n+2}}{\cos\sigma_n} = 1 + \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} + o(n^{-2}).$$

Значит, при всех достаточно больших значениях n выполняется неравенство $\nu_n^{n+2}/\cos\sigma_n > 1$. Отсюда и из (4.2.8) следует соотношение (4.6.8). Лемма 4.6.5 доказана. □

Итак, согласно утверждениям лемм 4.6.4 и 4.6.5, $\mathfrak{F}(t_n) \in \mathfrak{A}(2,2)$, $\mathfrak{F}(s_n) \notin \mathfrak{S}(2,2)$. Поскольку по условию теоремы $\mathfrak{A}(2,2) \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}(2,2)$, то $\mathfrak{F}(t_n) \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}(s_n) \notin \mathfrak{C}$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество всех значений t, при которых $\mathfrak{F}(t) \in \mathfrak{C}$. Поскольку точки $t_n \in \mathfrak{T}$ перемежаются с точками $s_n \notin \mathfrak{T}$, то число компонент линейной связности множества $\mathfrak{T}$ бесконечно. Тогда бесконечное число компонент связности имеет и множество $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — множество всех классов $\mathfrak{F}(t)$, $-1 < t < 1$. Но множество $\mathfrak{D}$ полуалгебраическое, поэтому по следствию из теоремы Уитни множество $\mathfrak{C}$ не может быть полуалгебраическим. Теорема доказана при $M = N = 2$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\tilde{\mathfrak{F}}(t)$, где $-1 < t < 1$, — класс матриц $\tilde{F}_1(t), \tilde{F}_2(t), \ldots, \tilde{F}_M(t)$ из $\mathfrak{R}(M,N)$, определяемых условиями:

$$\tilde{F}_1(t) = \begin{Vmatrix} F_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{F}_2(t) = \begin{Vmatrix} F_2(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{F}_3(t) = \cdots = \tilde{F}_M(t) = 0.$$

Тогда справедливо одно из соотношений

$$\tilde{\mathfrak{F}}(t) \in \mathfrak{A}(M,N) \quad \text{или} \quad \tilde{\mathfrak{F}}(t) \notin \mathfrak{S}(M,N),$$

если и только если

$$\mathfrak{F}(t) \in \mathfrak{A}(2,2) \quad \text{или} \quad \mathfrak{F}(t) \notin \mathfrak{S}(2,2)$$

соответственно. При этом из полуалгебраичности множества $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{F}(t) : -1 < t < 1\}$ следует полуалгебраичность множества $\tilde{\mathfrak{D}} = \{\tilde{\mathfrak{F}}(t) : -1 < t < 1\}$. Дословным повторением рассуждений, проводившихся в случае $M = N = 2$, можно показать, что удовлетворяющее условиям теоремы множество $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{R}(M,N)$ не является полуалгебраическим. Теорема 4.6.2 доказана. □

4.6.6. Согласно теореме 4.6.2 множества $\mathfrak{S}(M,N)$ и $\mathfrak{A}(M,N)$ не являются полуалгебраическими. В этом смысле задача об абсолютной устойчивости или абсолютно асимптотической устойчивости разностного уравнения (4.6.1) в классе правых частей, состоящем из конечного числа матриц, алгебраически неразрешима. Следовательно, алгебраически неразрешима и задача существования нормы, в которой все матрицы из некоторого конечного набора были бы нерастягивающими или сжимающими.

Необходимо подчеркнуть, что алгебраические (вернее — полуалгебраические) критерии абсолютной устойчивости уравнений вида (4.6.1) могут существовать, если правые части этих уравнений не произвольные, а принадлежат некоторым классам. Примеры таких ситуаций приводятся в следующей главе.

Замечания и библиографические справки

О спектральных свойствах матриц, проблемах существования и свойствах спектральной нормы см., например, монографии [Гантмахер, 1967; Глазман, Любич, 1969; Иосида, 1967; Маркус, Минк, 1972; Хорн, Джонсон, 1989]. Утверждение примера 4.1.4 взято из работы [Красносельский, Вайникко, Забрейко и др., 1969].

Вопросы, обсуждаемые в § 4.2, идейно близки к задаче о существовании функции Ляпунова устойчивого дифференциального уравнения (см., например, [Демидович, 1967; Красовский, 1959], а также к задаче обратимости принципа сжимающих отображений [Опойцев, 1976; Coldman, Meyers, 1969; Meyers, 1965]. В случае разностных уравнений (отображений) аналогичные вопросы применительно к сходимости асинхронных итерационных процедур исследовались в работах [Brayton, Tong, 1980a,b; Robert, 1970; Tsitsiklis, 1987]. В изложении теорем 4.2.2, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.7 мы следуем работам [Козякин, 1990d,e]; утверждения, близкие к теореме 4.2.2, содержатся в работах [Brayton, Tong, 1980a,b]. Утверждения п.4.2.8 представляют собой несложную модификацию результатов из [Tsitsiklis, 1987].

Необходимые условия абсолютной устойчивости, абсолютной асимптотической устойчивости и абсолютной r-асимптотической устойчивости, по-видимому, ранее не изучались. В изложении § 4.5 мы следуем работе [Козякин, 1990e].

Основные факты теории вещественных алгебраических множеств см. в работах [Брекер, Ландер, 1977; Мальгранж, 1968; Милнор, 1971; Трев, 1965; Чирка, 1985]. Нам неизвестны публикации, в которых в доступной для неалгебраиста форме с единых позиций доказывались бы все необходимые факты теории вещественных алгебраических множеств.

В изложении § 4.6 мы следуем работе [Козякин, 1990d]. Идея доказательства теоремы 4.6.2 близка к идеям работ [Арнольд, 1970a,b]. Свойство алгебраической разрешимости или неразрешимости некоторой задачи можно истолковать как меру сложности данной задачи. Существуют и отличные от изложенного в § 4.6 подходы к классификации сложности задачи абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем. Так, в [Tsitsiklis, 1987] установлено, что задача об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем является NP-трудной, т.е. является трудной в комбинаторном смысле.

Сложность задачи об абсолютной устойчивости существенно зависит от того, что понимается под рассинхронизованной системой. Так, например, из [Chazan, Miranker, 1969] следует алгебраичность необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости линейных рассинхронизованных систем со скалярными компонентами, описываемых в терминах хаотической релаксации [Chazan, Miranker, 1969], асинхронной итерации [Baudet, 1978] или в терминах уравнений (1.7.1)–(1.7.3) (см. [Красносельский А., 1985].

Глава 5

Признаки устойчивости

Результаты предыдущей главы, особенно последнего ее параграфа, не дают оснований надеяться на получение эффективно проверяемых необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем в сколько-нибудь общих ситуациях. Тем не менее, в некоторых достаточно важных в приложениях случаях относительно полный анализ абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем провести удается. В этой главе излагаются критерии абсолютной устойчивости линейных рассинхронизованных систем (вернее эквивалентных им разностных уравнений) с неотрицательными или симметрическими матрицами, а также с произвольными скалярными матрицами второго порядка.

§ 5.1. Матрицы с неотрицательными элементами

В параграфе приводятся необходимые в дальнейшем факты теории матриц с неотрицательными элементами.

5.1.1. В этом параграфе $A = (a_{ij})$ — матрица с вещественными элементами. Матрицу A называют *положительной* (или неотрицательной) и пишут $A > 0$ (или $A \geq 0$), если все элементы a_{ij} положительны (или неотрицательны).

5.1.2. Теорема (Перрона). *Положительная матрица A имеет положительное собственное значение λ, строго большее модулей всех остальных собственных значений. Это собственное значение простое, а отвечающий ему собственный вектор имеет положительные компоненты.*

Следствие. *Неотрицательная матрица A имеет неотрицательное собственное значение λ, не меньшее модулей остальных собственных значений. Этому собственному значению отвечает по крайней мере один собственный вектор с неотрицательными компонентами.*

Произвольная неотрицательная матрица может быть представлена как предел последовательности положительных матриц. Отсюда и из теоремы Перрона предельным переходом получается утверждение следствия.

5.1.3. Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \left\| \begin{matrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{matrix} \right\|, \qquad \varepsilon \geq 0.$$

Она имеет собственные значения $\lambda_1 = 1+\varepsilon, \lambda_2 = 1-\varepsilon$. При $\varepsilon > 0$ матрица A положительна и $|\lambda_2| < \lambda_1$. При $\varepsilon = 0$ матрица A неотрицательна. В этом случае $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, т.е. $|\lambda_2| = \lambda_1$.

Как видно из примера 5.1.3, теорема Перрона неверна для неотрицательных матриц. Однако для некоторых из них справедливо утверждение, близкое к теореме Перрона.

Матрица $A = (a_{ij})$, где $1 \leq i, j \leq N$, называется *разложимой*, если множество $\{1, 2, \ldots, N\}$ можно представить в виде объединения таких двух непустых непересекающихся подмножеств ϑ_1 и ϑ_2, что $a_{ij} = 0$ при $i \in \vartheta_1$, $j \in \vartheta_2$. Матрица $P = (p_{ij})$, где $1 \leq i, j \leq N$, называется *матрицей перестановок*, если в каждом ее столбце и в каждой строке ровно один элемент отличен от нуля, причем все ненулевые элементы равны 1. Матрица перестановок обладает свойством: $P^N = I$; поэтому она обратима. Разложимость матрицы A равносильна существованию такой матрицы перестановок P, что

$$PAP^{-1} = \left\| \begin{matrix} B & 0 \\ C & D \end{matrix} \right\|.$$

где B и D — квадратные матрицы.

5.1.4. Признак неразложимости. Последовательность элементов $a_{i_1 i_2}$, $a_{i_2 i_3}$, …, $a_{i_p i_1}$ матрицы A называют *дорожкой невырожденности*, если все эти элементы отличны от нуля и среди чисел i_1, i_2, …, i_p встречаются все числа 1, 2, …, N. Матрица, имеющая дорожку невырожденности, *неразложима* (т.е. не является разложимой).

5.1.5. Теорема (Фробениуса)**.** *Неразложимая неотрицательная матрица A имеет положительное собственное значение λ, не меньшее модулей остальных собственных значений. Это собственное значение простое, а отвечающий ему собственный вектор имеет положительные компоненты. Если при этом матрица A имеет n собственных значений $\mu_0 = \lambda$, μ_1, $\dots$, μ_n, равных по модулю λ, то все они различны, а их множество совпадает с множеством всех корней уравнения $\mu^n = \lambda^n$. При $n > 1$ найдется такая матрица перестановок P, что*

$$PAP^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n} \\ A_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

где вдоль диагонали стоят квадратные матричные блоки.

Доказательства основных в теории неотрицательных матриц теорем Перрона и Фробениуса достаточно сложны.

5.1.6. Опишем один из подходов, позволяющих перенести многие результаты теории матриц с неотрицательными элементами на другие классы матриц.

Множество в векторном пространстве называют *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками x и y оно содержит и весь отрезок, их соединяющий. *Лучом*, проходящим через точку $x \neq 0$, называют множество точек tx, где $t \geq 0$. Замкнутое выпуклое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ называют *конусом*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит луч, проходящий через эту точку, и если из $x, -x \in K$ следует, что $x = 0$.

5.1.7. Пример. а. Множество точек $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^N$ с неотрицательными компонентами ($x_i \geq 0$ для $i = 1, 2, \dots, N$) образует конус K_+.

б. Пусть σ_1, σ_2, $\dots$, σ_N — числа, равные ± 1. Множество точек $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^N$, для которых $x_i\sigma_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$, образует конус $K_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N}$.

в. Пусть e_1, e_2, $\dots$, e_k — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^N$. Множество точек $x = t_1e_1 + t_2e_2 + \dots + t_ke_k$, где t_1, t_2, $\dots$, $t_k \geq 0$, образует конус.

г. Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество, не содержащее точку $x = 0$. Множество точек $x = tm$, где $t \geq 0$, $m \in M$, образует конус.

д. Множество точек $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^N$, для которых $x_1 \geq 0$, конусом не является.

Конус называют *телесным*, если его внутренность непуста. Телесными являются конусы из примеров 5.1.7а и 5.1.7б. Конус из примера 5.1.7в телесен тогда и только тогда, когда векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ образуют базис в $\mathbb{R}^N$. Конус из примера 5.1.7г обязательно телесен, когда непуста внутренность множества M; однако может быть телесен и в других случаях.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^N$ задан некоторый конус K. Говорят, что элемент $x \in \mathbb{R}^N$ не превосходит элемента $y \in \mathbb{R}^N$ и пишут $x \leq y$, если $y - x \in K$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то говорят, что x меньше y (или y больше x) и пишут $x < y$. Введенное отношение порядка обладает обычными свойствами: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$; если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$; наконец, если $x \leq y$ и t — некоторое неотрицательное число, то $tx \leq ty$. Два элемента $x, y \in \mathbb{R}^N$ сравнимы, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Если пространство $\mathbb{R}^N$ многомерное, т.е. $N > 1$, то в нем при любом конусе K найдутся несравнимые элементы. Этим упорядоченность в многомерных пространствах отличается от отношения порядка между вещественными числами.

Элемент $x \in \mathbb{R}^N$ называют *положительным* относительно конуса K, если $x \geq 0$. Соответственно линейное отображение A в $\mathbb{R}^N$ называют *положительным* относительно конуса K, если $Ax \geq 0$ для любого элемента $x \geq 0$. Так как множество положительных элементов в $\mathbb{R}^N$ совпадает с конусом K, то свойство положительности линейного отображения A относительно конуса K равносильно соотношению $AK \subset K$. Если конус K телесен и A переводит каждую ненулевую точку конуса K в его внутреннюю точку, то отображение A называют *сильно положительным*.

5.1.8. Пример. Пусть A — линейное отображение в $\mathbb{R}^N$, задаваемое матрицей $A = (a_{ij})$.

а. Отображение A положительно (сильно положительно) относительно конуса K_+ векторов с неотрицательными координатами, если и только если матрица A неотрицательна (положительна).

б. Отображение A положительно (сильно положительно) относительно определенного в примере 5.1.7б конуса $K_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N}$, если и только если матрица $B = (a_{ij}\sigma_i\sigma_j)$ неотрицательна (положительна).

в. Чтобы выяснить, является ли отображение A положительным относительно какого-нибудь конуса из примера 5.1.7б, определим числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ следующим образом. Положим $\sigma_1 = 1$. Пусть уже определены числа $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \ldots, \sigma_{n_{k-1}}$ для некоторого множества индексов $n_1 = 1, n_2, \ldots, n_{k-1}$. Если при некотором $m(1 \leq m \leq k-1)$ найдется такое $j \neq n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, что $a_{n_m j} \neq 0$, то положим $n = j$ и в качестве σ_{n_k} возьмем знак произведения $a_{n_m j}\sigma_{n_m}$. Аналогично определим числа n_k и σ_{n_k} в случае, когда $a_{jn_m} \neq 0$ при некоторых $j \neq n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ и $1 \leq m \leq k-1$. Наконец, если $a_{ij} = a_{ji} = 0$ при всех $i = n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ и $j \neq n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, то в качестве n_k возьмем произвольное отличное от $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ целое число из интервала $[1, N]$ и положим $\sigma_{n_k} = 1$. Отображение A положительно относительно некоторого конуса из примера 5.1.7б, если и только если матрица $B = (a_{ij}\sigma_i\sigma_j)$ неотрицательна. При выполнении этого требования отображение A

согласно 5.1.8б положительно относительно конуса $K_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N}$.

Теоремы Перрона и Фробениуса допускают обобщение на линейные отображения в $\mathbb{R}^N$, положительные относительно некоторого конуса.

5.1.9. Теорема (Карлина-Бонсалла)**.** *Спектральный радиус $\rho(A)$ является собственным значением положительного относительно телесного конуса $K \subset \mathbb{R}^N$ линейного отображения A. Этому собственному значению отвечает по крайней мере один собственный вектор, принадлежащий K.*

Отображение A называют *u-ограниченным* ($u \in K$, $u \neq 0$), если для каждого $x \in K$ найдутся такие числа $\alpha, \beta > 0$, что $\alpha u \leq Ax \leq \beta u$. Отображение A называют *неразложимым* относительно телесного конуса $K \subset \mathbb{R}^N$, если из соотношений $x \geq \alpha Ax$, $\alpha > 0$, $x \in K$, $x \neq 0$ вытекает, что x — внутренний элемент K.

5.1.10. Теорема (Крейна)**.** *Пусть положительное относительно конуса K линейное отображение A имеет в K нормированный собственный вектор u, отвечающий собственному значению λ. Тогда собственное значение λ простое и A не имеет в K отличных от u нормированных собственных векторов, если выполнено одно из следующих условий:*

а) отображение A сильно положительно;

б) конус K телесен, отображение A обладает свойством u-ограниченности;

в) отображение A неразложимо относительно телесного конуса K.

Отметим, что как теорема Карлина-Бонсалла, так и теорема Крейна справедливы в существенно более общей ситуации, — когда отображение A действует в бесконечномерном банаховом пространстве.

Введение упорядоченности в пространстве $\mathbb{R}^N$ позволяет предложить сравнительно простые способы оценки спектральных радиусов линейных отображений. Упомянем простейшие из них.

5.1.11. Теорема. *Пусть линейное отображение A положительно относительно телесного конуса $K \subset \mathbb{R}^N$. Если линейное отображение B удовлетворяет условию $-Ax \leq Bx \leq Ax$ при $x \in K$, то $\rho(B) \leq \rho(A)$.*

5.1.12. Теорема. *Пусть линейное отображение A положительно относительно телесного конуса $K \subset \mathbb{R}^N$. Если выполнено неравенство $Ax_0 \geq \gamma x_0$, где $-x_0 \in K$, то $\rho(A) \geq \gamma$. Если выполнено неравенство $Ax_0 \leq \delta x_0$ и x_0 является внутренним элементом K или отображение A x_0-ограничено, то $\rho(A) \leq \delta$.*

5.1.13. Пример. а. Пусть $A = (a_{ij})$ — неотрицательная квадратная матрица порядка N. Если $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{iN} \le \lambda$ при $i = 1, 2, \dots, N$, то $\rho(A) \le \lambda$. Этот факт следует из теоремы 5.1.12, где $K = K_+$ (см. пример 5.1.7а), $x_0 = \{1, 1, \dots, 1\}$.

б. Пусть $B = (b_{ij})$ — произвольная квадратная матрица порядка N. Если $|b_{i1}| + |b_{i2}| + \dots + |b_{iN}| \le \lambda$ при $i = 1, 2, \dots, N$, то $\rho(B) \le \lambda$. Этот факт следует из предыдущего примера и теоремы 5.1.11, где $A = (|a_{ij}|)$.

Указанные выше оценки спектральных радиусов матриц A и B можно получить, если заметить, что $\|A\| \le \lambda$ и $\|B\| \le \lambda$ в норме $\|x\| = \max_i |x_i|$ ($x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$).

Как отмечалось, удобным приемом анализа эквивалентных разностных уравнений рассинхронизованных систем является введение спектральной нормы. В случае положительных отображений спектральная норма может быть указана в явном виде. Множество элементов x, удовлетворяющих неравенствам $u \le x \le v$, где $u, v \in \mathbb{R}^N$, называется *конусным отрезком* и обозначается символом $\langle u, v\rangle$. Всякий непустой конусный отрезок является выпуклым ограниченным множеством. Если конус K телесный и v — его внутренняя точка, то конусный отрезок $\langle -v, v\rangle$ содержит точку 0 вместе с некоторой ее окрестностью и является центрально-симметричным множеством. Следовательно, как отмечалось в § 4.3, инвариантный конусной отрезок $\langle -v, v\rangle$ можно рассматривать как единичный шар некоторой нормы $\|\cdot\|_{K,v}$ в пространстве $\mathbb{R}^N$. Эта норма определяется формулой

$$\|x\|_{K,v} = \min\{t \ge 0 : -tv \le x \le tv\}. \qquad (5.1.1)$$

В некоторых случаях норма $\|\cdot\|_{K,v}$ может быть описана явно.

5.1.14. Пример. Пусть v — внутренний элемент конуса K_+, тогда $v = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, где $v_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Норму $\|\cdot\|_{K_+,v}$ можно определить равенством $\|x\|_{K_+,v} = \max |x_i|/v_i$, где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

Как показывает приводимая ниже теорема, для положительных линейных отображений в качестве спектральной всегда может быть взята норма $\|\cdot\|_{K,v}$.

5.1.15. Теорема. *Если отображение A положительно относительно телесного конуса K, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор v из внутренности конуса K, что $\|A\|_{K,v} \le \rho(A) + \varepsilon$. Если отображение A сильно положительно, то $\|A\|_{K,v} = \rho(A)$, где v — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\rho(A)$ отображения A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададимся произвольным вектором z из внутренности K и рассмотрим уравнение

$$(\rho(A) + \varepsilon)x = Ax + z. \tag{5.1.2}$$

Поскольку число $\rho(A) + \varepsilon$ превосходит спектральный радиус отображения A, то уравнение (5.1.2) разрешимо и его решение v представляется сходящимся по норме рядом Неймана

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho(A) + \varepsilon)^{-(n+1)} A^n z. \tag{5.1.3}$$

Первое слагаемое $A^0 z = z$ в правой части равенства (5.1.3) принадлежит внутренности K, а остальные принадлежат K. Следовательно, вектор v также принадлежит внутренности K. Кроме того, поскольку v является решением уравнения (5.1.2), то

$$Av \leq (\rho(A) + \varepsilon)v. \tag{5.1.4}$$

Пусть теперь x — произвольный вектор, для которого $\|x\|_{K,v} \leq 1$. Тогда из (5.1.4) вытекают соотношения $-(\rho(A) + \varepsilon)v \leq Ax \leq (\rho(A) + \varepsilon)v$. Значит, $\|Ax\|_{K,v} \leq \rho(A) + \varepsilon$ при $\|x\|_{K,v} \leq 1$, откуда $\|A\|_{K,v} \leq \rho(A) + \varepsilon$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. В условиях теоремы 5.1.15 число $\rho(A)$ по теореме Карлина-Бонсалла является собственным значением отображения A и ему отвечает по крайней мере один собственный вектор w, лежащий в K. Если отображение A сильно положительно, то по теореме Крейна вектор w принадлежит внутренности K; положим в этом случае $v = w$. Зададимся произвольным вектором x, для которого $\|x\|_{K,v} \leq 1$. Тогда $-v \leq x \leq v$ и $-\rho(A)v \leq -Av \leq Ax \leq Av \leq \rho(A)v$. Отсюда в силу (5.1.1) вытекает оценка $\|Ax\|_{K,v} \leq \rho(A)$ при $\|x\|_{K,v} \leq 1$. Поэтому $\|A\|_{K,v} \leq \rho(A)$, а значит, $\|A\|_{K,v} = \rho(A)$ (так как спектральный радиус любого оператора не превосходит его нормы). Теорема 5.1.15 доказана. □

Второе утверждение теоремы 5.1.15 справедливо для любых отображений A, удовлетворяющих условиям теоремы Крейна.

§ 5.2. Уравнения с неотрицательными матрицами

В параграфе исследуется вопрос об абсолютной асимптотической устойчивости разностного уравнения

$$x(n+1) = A(n)x(n), \qquad x(n) \in \mathbb{R}^N, \tag{5.2.1}$$

в котором матрицы $A(n)$ предполагаются принадлежащими классу правых частей, положительных относительно некоторого конуса.

5.2.1. Теорема. *Пусть матрица A неотрицательна. Тогда разностное уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если $\rho(A) < 1$.*

Доказательство. По следствию из теоремы Перрона число $\rho(A)$ является собственным значением матрицы A и ему отвечает по крайней мере один собственный вектор v с неотрицательными компонентами. Пусть A_ϑ — некоторая помесь матрицы A. Положим $A_\vartheta v = \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$. Тогда $w_i = v_i$ при $i \notin \vartheta$, $w_i = \rho(A)v_i$ при $i \in \vartheta$. Следовательно, при $\rho(A) \geq 1$ выполняется неравенство $A_\vartheta v \geq v$, где упорядоченность понимается в смысле конуса K_+ (см. пример 5.1.7а). При этом как матрица A, так и все ее помеси оказываются отображениями, положительными относительно конуса K_+. Но тогда для каждого удовлетворяющего начальному условию $x(0) = v$ решения $x(n)$ каждого уравнения (5.2.1) с матрицами $A(n) \in \mathfrak{F}$ при $n \geq 0$ будут выполняться неравенства $x(n) \geq v$. Значит, при $\rho(A) \geq 1$ уравнение (5.2.1) не может быть абсолютно r-асимптотически устойчивым ни в каком классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Покажем, что условие $\rho(A) < 1$ влечет абсолютную r-асимптотическую устойчивость уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Как отмечалось выше, матрица A может рассматриваться как отображение, положительное относительно конуса K_+. Зададимся настолько малым положительным числом ε, чтобы выполнялось неравенство $\mu = \rho(A) + \varepsilon < 1$. Тогда по теореме 5.1.15 найдется вектор $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \in \mathbb{R}^N$ с положительными компонентами, для которого $\|A\|_{K_+,v} \leq \mu$.

5.2.2. Лемма. *Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная квадратная матрица порядка N. Неравенство $\|A\|_{K_+,v} \leq \mu$, где вектор v принадлежит внутренности K_+, выполняется, если и только если*

$$|a_{i1}|v_1 + |a_{i2}|v_2 + \cdots + |a_{iN}|v_N \leq \mu v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.2.2}$$

Утверждение леммы хорошо известно; приведем доказательство ради полноты изложения. Неравенство $\|A\|_{K_+,v} \le \mu$ по определению нормы линейного отображения равносильно неравенству $\|Ax\|_{K_+,v} \le \mu\|x\|_{K_+,v}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Воспользовавшись выражением для нормы $\|\cdot\|_{K_+,v}$, указанным в примере 5.1.14, последнее неравенство представим в виде

$$\max \frac{1}{v_p}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{pj}x_j\right| \le \mu \max_p \frac{|x_p|}{v_p}. \tag{5.2.3}$$

Пусть выполняются неравенства (5.2.2). Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ справедливы оценки

$$\frac{1}{v_i}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j=1}^{N} \frac{|a_{ij}|v_j}{v_i} \cdot \frac{|x_j|}{v_j} \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{|a_{ij}|v_j}{v_i}\right)\max_p \frac{|x_p|}{v_p} \le \mu \max_p \frac{|x_p|}{v_p}.$$

Следовательно, неравенства (5.2.2) влекут неравенство (5.2.3).

Пусть выполняется неравенство (5.2.3). Зададимся произвольным числом $i = 1, 2, \ldots, N$ и положим $x_j = v_i v_j$ при $a_{ij} \ge 0$, $x_j = -v_i v_j$ при $a_{ij} < 0$. Тогда из (5.2.3) следуют оценки

$$\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|\, v_j = \frac{1}{v_i}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j\right| \le \max_p \frac{1}{v_p}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{pj}x_j\right| \le \mu \max_p \frac{|x_p|}{v_p} = \mu v_i.$$

Поскольку число i произвольно, то неравенство (5.2.3) влечет неравенства (5.2.2). Лемма 5.2.2 доказана. □

Обозначим через $a_{ij\vartheta}$ элемент некоторой помеси A_ϑ матрицы $A = (a_{ij})$. Тогда при $i \in \vartheta$ элементы $a_{ij\vartheta}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы A, и в силу леммы 5.2.2

$$a_{i1\vartheta}v_1 + a_{i2\vartheta}v_2 + \cdots + a_{iN\vartheta}v_N \le \mu v_i, \qquad i \in \vartheta. \tag{5.2.4}$$

Если $i \notin \vartheta$, то элементы $a_{ij\vartheta}$ совпадают с элементами соответствующей строки единичной матрицы I. Значит,

$$a_{i1\vartheta}v_1 + a_{i2\vartheta}v_2 + \cdots + a_{iN\vartheta}v_N \le v_i, \qquad i \notin \vartheta. \tag{5.2.5}$$

Поскольку элементы матрицы A_ϑ неотрицательны, то из неравенств (5.2.4) и (5.2.5) в силу леммы 5.2.2 следует оценка

$$\|A_\vartheta\|_{K_+,v} \le 1, \qquad \vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{5.2.6}$$

Пусть теперь ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_k — некоторый набор непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. Положим $B = A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_1}$. Тогда в силу (5.2.6) $\|B\|_{K_+,v} \le 1$, и по лемме 5.2.2

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{iN}v_N \le v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.2.7}$$

где $b_{ij} \ge 0$ — элементы матрицы B. При $i \in \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k$ неравенства (5.2.7) допускают уточнение, аналогичное (5.2.4):

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{iN}v_N \le \mu v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.2.8}$$

Доказательства неравенств (5.2.8) проведем индукцией по числу k сомножителей A_{ϑ_i} в произведении $B = A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_1}$. При $k = 1$ неравенства (5.2.8) совпадают с (5.2.4) и потому верны. Пусть неравенства (5.2.8) верны при $k = n - 1 \ge 1$. Покажем, что они верны при $k = n$. Положим $C = A_{\vartheta_{k-1}} \cdots A_{\vartheta_1}$, $D = A_{\vartheta_k}$. Пусть $c_{ij} \ge 0$ и $d_{ij} \ge 0$ — элементы матриц C и D соответственно. По предположению индукции

$$c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \cdots + c_{iN}v_N \le \mu v_i, \qquad i \in \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_{k-1}, \tag{5.2.9}$$

$$d_{i1}v_1 + d_{i2}v_2 + \cdots + d_{iN}v_N \le v_i, \qquad i \in \vartheta_k. \tag{5.2.10}$$

Кроме того, справедливы аналогичные (5.2.7) неравенства

$$c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \cdots + c_{iN}v_N \le v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.2.11}$$

Обозначим элементы матрицы $B = DC$ через $b_{ij} \ge 0$. Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ справедливо равенство

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{iN}v_N = \sum_{p=1}^{N} \left(d_{ip}v_p \sum_{j=1}^{N} \frac{c_{pj}v_j}{v_p} \right). \tag{5.2.12}$$

Если $i \in \vartheta_k$, то каждый сомножитель $\sum c_{pj} v_j / v_p$ в правой части (5.2.12) в силу (5.2.11) не превосходит 1. Следовательно, вся сумма в правой части (5.2.12) не превосходит $\sum d_{ip}v_p$. Отсюда и из (5.2.10) при $i \in \vartheta_k$ вытекает неравенство (5.2.8)

Если $i \in \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_{k-1}$, но $i \notin \vartheta_k$, то как следует из вида матрицы $D = A_{\vartheta_k}$, лишь один сомножитель $d_{ip}v_p$ в правой части (5.2.12) отличен от нуля — это сомножитель $d_{ii}v_i = v_i$. В этом случае $b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{iN}v_N = \sum c_{ij}v_j$, и неравенство (5.2.8) следует из (5.2.10).

Шаг индукции проведен, и неравенства (5.2.8) доказаны.

Завершим доказательство теоремы. Пусть объединение множеств ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_k \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ совпадает с $\{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда неравенства (5.2.8) для элементов матрицы $B = A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_1}$ выполняются при всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Значит, по лемме 5.2.2

$$\|A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_1}\|_{K_+,v} \le \mu \quad \text{при} \quad \vartheta_1 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{5.2.13}$$

Неравенства (5.2.6) и (5.2.13) показывают, что для уравнения (5.2.1) выполнены условия теоремы 4.2.5. Следовательно, уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в любом порождающем классе правых частей. Теорема 5.2.1 доказана. □

Как видно из теоремы 5.2.1, вопрос об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в некотором классе правых частей, образованном помесями неотрицательной матрицы, решается сравнительно просто. Более сложным оказывается вопрос об абсолютной устойчивости.

5.2.3. Теорема. *Пусть уравнение* (5.2.1) *абсолютно устойчиво в некотором порождающем классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$*, где* A *— неотрицательная матрица. Тогда* $\rho(A) \le 1$.

Доказательство теоремы проведем от противного — докажем, что при $\rho(A) > 1$ уравнение (5.2.1) не является абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Итак, пусть $\rho(A) > 1$. По следствию из теоремы Перрона число $\rho(A)$ является собственным значением матрицы A и ему отвечает собственный вектор $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ с неотрицательными компонентами.

Пусть A_{ϑ_1}, A_{ϑ_2}, ..., A_{ϑ_k} — некоторые матрицы из $\mathfrak{F}$. Обозначим элементы матрицы $B = A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_1}$ через b_{ij}, $1 \le i, j \le N$. Тогда аналогично доказательству неравенств (5.2.7), (5.2.8) в теореме 5.2.1 доказываются неравенства

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{iN}v_N \ge v_i \quad \text{при} \quad i \notin \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k,$$

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{iN}v_N \ge \rho(A)v_i \quad \text{при} \quad i \in \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k.$$

Если теперь множества ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_k таковы, что их объединение совпадает с $\{1, 2, \ldots, N\}$ (такой набор множеств существует, поскольку класс $\mathfrak{F}$ порождающий), то

$$A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_2} A_{\vartheta_1} v \ge \rho(A) v.$$

Для завершения доказательства теоремы зададим последовательность матриц $A(n) \in \mathfrak{F}$, $n \geq 0$, равенствами

$$A(nk) = A_{\vartheta_1},\ A(nk+1) = A_{\vartheta_2},\ \ldots,\ A(nk+k-1) = A_{\vartheta_k}. \qquad (5.2.14)$$

Тогда для решения $x(n)$ уравнения (5.2.1) с матрицами (5.2.14), удовлетворяющего начальному условию $x(0) = v$, будут выполняться соотношения $x(nk) \geq \rho(A)^n v$. Следовательно, $x(nk) \to \infty$ при $n \to \infty$. Значит, при условии $\rho(A) > 1$ уравнение (5.2.1) не является абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Теорема 5.2.3 доказана. □

5.2.4. Теорема 5.2.1 утверждает, что при $\rho(A) < 1$ уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво, а согласно теореме 5.2.3 при $\rho(A) > 1$ уравнение (5.2.1) не является абсолютно устойчивым. Остался неразобранным случай, когда $\rho(A) = 1$. Для его анализа понадобятся некоторые понятия. Говорят, что матрица B получается из матрицы A перестановкой рядов, если найдется такая матрица перестановок P, что $B = PAP^{-1}$. Пусть A — это матрица некоторого линейного отображения L в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Тогда матрица B, получающаяся из A перестановкой рядов, является матрицей линейного отображения L в некотором базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_N$, образующемся перенумерацией элементов базиса $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Множество $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ назовем *уникально-порождающим*, если для любых неравных целых чисел $i, j \in [1, N]$ найдется такое множество $\vartheta \in \{1, 2, \ldots, N\}$, что $i \in \vartheta$, $j \notin \vartheta$ и $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$. Например, уникально-порождающими являются классы $\mathfrak{P}_k(A)$, $\mathfrak{P}_k^-(A)$ и $\mathfrak{P}_k^+(A)$ при $1 \leq k \leq N-1$.

5.2.5. Теорема. *Пусть A — квадратная матрица порядка N с неотрицательными элементами, $\rho(A) = 1$, и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ — уникально-порождающий класс. Тогда уравнение* (5.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если матрица A перестановкой рядов приводится к виду*

$$\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} B & 0 \\ 0 & C \end{matrix} \right\|, \qquad (5.2.15)$$

где B — квадратная матрица, имеющая собственное значение 1, *которому отвечает собственный вектор с положительными компонентами; C — квадратная матрица (возможно, пустая), для которой $\rho(C) < 1$.*

В условиях теоремы 5.2.5 элементы матриц B и C неотрицательные.

Доказательство. Пусть уравнение (5.2.1) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Обозначим через V множество собственных векторов с неотрицательными компонентами, отвечающих собственному значению $\rho(A) = 1$ матрицы A. По следствию из теоремы Перрона множество V непусто. Пусть $v \in V$ — вектор, имеющий максимальное число ненулевых компонент среди векторов из V. Перенумерацией компонент вектора v (или, что то же, перенумерацией элементов базиса в $\mathbb{R}^N$) можно добиться отличия от нуля первых p компонент v (остальные — равны нулю):

$$v = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, 0, \ldots, 0\}, \qquad v_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.2.16}$$

Поэтому без ограничения общности можно считать, что вектор v с самого начала имел вид (5.2.16).

Разобьем матрицу A на блоки

$$A = \begin{Vmatrix} B & D \\ E & C \end{Vmatrix},$$

где B — квадратная матрица порядка p, а C - квадратная матрица порядка $N - p$. Введем вектор $u = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Тогда равенство $Av = v$ равносильно двум равенствам:

$$Bu = u, \qquad Eu = 0. \tag{5.2.17}$$

Первое из этих равенств означает, что число 1 является собственным значением матрицы B. А поскольку элементы матрицы E неотрицательны и компоненты вектора u положительны, то второе равенство (5.2.17) может выполняться только при условии $E = 0$. Следовательно,

$$A = \begin{Vmatrix} B & D \\ 0 & C \end{Vmatrix}.$$

Поскольку $\rho(A) = 1$, то $\rho(C) \leq 1$. Покажем, что $\rho(C) < 1$. В предположении противного можно указать (см. теорему Перрона) ненулевой вектор $w = \{w_1, \ldots, w_{N-p}\} \in \mathbb{R}^{N-p}$ с неотрицательными компонентами, для которого $Cw = w$. Тогда вектор $\tilde{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{N-p}\}$ является собственным вектором с неотрицательными компонентами матрицы A, отвечающим собственному значению 1. При этом число ненулевых компонент вектора $\tilde{v}$ превосходит p, поскольку по крайней мере одна компонента w_i вектора w ненулевая. Мы пришли к противоречию с определением вектора v, что и доказывает неравенство $\rho(C) < 1$.

Покажем, что $D = 0$. В предположении противного найдутся такие натуральные числа $i_0 \in [1, p]$ и $j_0 > p$, что

$$a_{i_0 j_0} > 0. \qquad (5.2.18)$$

Обозначим через $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\} \in \mathbb{R}^N$ вектор, компоненты которого определяются следующим образом:

$$y_i = \begin{cases} v_i & \text{при} \quad 1 \le i \le p, \\ 1 & \text{при} \quad i = j_0, \\ 0 & \text{при} \quad i > p,\ i \ne i_0. \end{cases}$$

Поскольку по условию теоремы множество $\mathfrak{F}$ уникально-порождающее, то найдется множество $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, для которого $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$, причем $i_0 \in \vartheta$, $j_0 \notin \vartheta$. Тогда

$$A_\vartheta y = y + z, \qquad (5.2.19)$$

где $z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, причем $z_i \ge 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$. В силу (5.2.18) компонента z_{i_0} вектора z имеет вид

$$z_{i_0} = a_{i_0 p+1} y_{p+1} + \dots + a_{i_0 j_0} y_{j_0} + \dots + a_{i_0 N} y_N = a_{i_0 j_0} > 0, \qquad (5.2.20)$$

откуда $z \ne 0$. Из (5.2.19) и (5.2.20) вытекают неравенства

$$A_\vartheta^n y \ge y + nz \quad \text{при} \quad z \ne 0,\ n = 1, 2, \dots . \qquad (5.2.21)$$

Рассмотрим теперь удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y$ решение $x(n)$ уравнения (5.2.1) с матрицами $A(n) = A_\vartheta \in \mathfrak{F}$, $n = 0, 1, \dots$. В силу (5.2.21) $x(n) \ge y + nz$ при $n \ge 1$, и значит, $x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Мы пришли к противоречию с предположением об абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Следовательно, $D = 0$, и этим доказательство необходимости сформулированных в теореме условий абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) завершено.

Покажем, что в условиях теоремы уравнение (5.2.1) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. При этом можно считать, что матрица A имеет вид (5.2.15).

По условию теоремы найдется вектор $u = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ с положительными компонентами, для которого

$$Bu = u. \qquad (5.2.22)$$

В силу неотрицательности матрицы C и условия $\rho(C) < 1$ по теореме 5.1.15 найдется вектор $w = \{w_1, \dots w_{N-p}\}$ с положительными компонентами, для которого

$$-w \le Cw \le w, \tag{5.2.23}$$

где упорядоченность понимается в смысле конуса K_+. Тогда компоненты вектора

$$v = \{u_1, u_2, \dots, u_p, w_1, \dots, w_{N-p}\}$$

положительны, и в силу (5.2.22), (5.2.23)

$$-v \le Av \le v. \tag{5.2.24}$$

Как отмечалось при доказательстве теоремы 5.2.1, неравенства (5.2.24) влекут выполнение неравенств

$$-v \le A_\vartheta v \le v$$

для любого множества $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$. Значит, $\|A_\vartheta\|_{K_+,v} \le 1$, откуда по теореме 4.2.2 вытекает абсолютная устойчивость уравнения (5.2.1) в любом (!) классе правых частей. Теорема 5.2.5 доказана. □

Идеи, использованные при доказательствах утверждений этого параграфа могут быть применены для получения достаточных условий абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) не только с неотрицательной, но и с произвольной матрицей A.

5.2.6. Теорема. *Пусть A — матрица с неотрицательными элементами и v — вектор с положительными компонентами. Если $Av \le v$, то уравнение* (5.2.1) *абсолютно устойчиво в любом классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Если $Av \le \alpha v$, где $0 \le \alpha < 1$, то уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в любом порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$.*

Доказательство. Если $Av \le v$, то конусный отрезок $\langle -v, v\rangle$ переводится отображением A в себя. Отсюда, как неоднократно показывалось в доказательствах теорем 5.2.1 и 5.2.5, вытекают неравенства $\|A_\vartheta\|_{K_+,v} \le 1$, $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$. Первое утверждение теоремы теперь следует из теоремы 4.2.4.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно сначала заметить, что по теореме 5.1.12 из условия $Av \le \alpha v$, $\alpha < 1$, следуют неравенства $\rho(A) \le \alpha < 1$, а затем воспользоваться теоремой 5.2.1. Теорема 5.2.6 доказана. □

5.2.7. Принцип мажоранты. Рассмотрим уравнение (5.2.1) с правыми частями из некоторого класса $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$; элементы матрицы A могут быть как положительными, так и отрицательными. Класс $\mathfrak{F}$ состоит из помесей A_ϑ матрицы A. Поэтому для описания $\mathfrak{F}$ достаточно задать множество Θ тех подмножеств $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, для которых $A_\vartheta \in \mathfrak{F}$. В случаях, когда необходимо указать способ задания класса $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, будем использовать обозначение $\mathfrak{F}(\Theta)$.

5.2.8. Теорема (принцип мажоранты). *Пусть $A = (a_{ij})$ и $S = (s_{ij})$ — квадратные матрицы порядка N, причем $|a_{ij}| \le s_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots, N$. Тогда из абсолютной устойчивости уравнения* (5.2.1) *в классе правых частей $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(S)$ следует абсолютная устойчивость этого уравнения в классе $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Из абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения* (5.2.1) *в порождающем классе $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(S)$ следует абсолютная r-асимптотическая устойчивость этого уравнения в классе $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$.*

Удобные признаки абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) приводятся ниже.

5.2.9. Пример. а. Пусть для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка N выполнено одно из трех условий

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{iN}| < 1 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$|a_{1i}| + |a_{2i}| + \dots + |a_{Ni}| < 1 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\rho(S) < 1, \quad \text{где} \quad S = (|a_{ij}|).$$

Тогда уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в любом порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$.

Для доказательства достаточно заметить, что первые два условия влекут третье, и воспользоваться теоремой 5.2.8.

б. Пусть для матрицы $A = (a_{ij})$ выполнено условие

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{iN}| \le 1 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

Тогда уравнение (5.2.1) абсолютно устойчиво в любом классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$.

Для доказательства достаточно заметить, что приведенное условие эквивалентно неравенству $Sv \le v$, где $S = (|a_{ij}|)$, $v = \{1, 1, \dots, 1\}$, а упорядоченность в $\mathbb{R}^N$ понимается в смысле конуса K_+, и затем воспользоваться теоремами 5.2.6 и 5.2.8.

Теорема 5.2.8 является частным случаем более общего утверждения об абсолютной устойчивости уравнений с векторными компонентами. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{5.2.25}$$

где компоненты векторов $x(n) = \{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)\}$ в свою очередь являются векторами, принадлежащими некоторым конечномерным пространствам:

$$x_i(n) \in \mathbb{X}_i, \quad \dim \mathbb{X}_i = N_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Тогда при каждом значении n матрица $A(n) = (a_{ij}(n))$ является блочной, элементы $a_{ij}(n)$ которой — $(N_i \times N_j)$-матрицы (т.е. матрицы, состоящие из N_i строк и N_j столбцов).

Пусть в каждом из пространств $\mathbb{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, задана некоторая норма $\|\cdot\|_i$. Если $A = (a_{ij})$ — квадратная блочная матрица порядка N, элементы a_{ij} которой являются $(N_i \times N_j)$-матрицами, то для нее при любых $i, j = 1, 2, \ldots, N$ определены нормы элементов a_{ij}:

$$\|a_{ij}\| = \sup_{x \in \mathbb{X}_j,\, x \neq 0} \frac{\|a_{ij}x\|_i}{\|x\|_j}.$$

5.2.10. Теорема. *Пусть A — блочная, а S — скалярная квадратные матрицы порядка N, причем $\|a_{ij}\| \leq s_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда из абсолютной устойчивости уравнения* (5.2.1) *в классе правых частей $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(S)$ следует абсолютная устойчивость уравнения* (5.2.25) *в классе $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Из абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения* (5.2.1) *в порождающем классе $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(S)$ следует абсолютная r-асимптотическая устойчивость уравнения* (5.2.25) *в классе $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$.*

Доказательство. Пусть $x(n) = \{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)\}$ — некоторое решение уравнения (5.2.25) с правыми частями из $\mathfrak{F}(\Theta)$. Тогда найдутся такие множества $\vartheta(n) \in \Theta$, что

$$x(n+1) = A_{\vartheta(n)}x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{5.2.26}$$

Пусть $z(n)$ — вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^N$, определяемая равенством

$$z(n) = \{\|x_1(n)\|_1, \|x_2(n)\|_2, \ldots, \|x_N(n)\|_N\}.$$

Тогда из равенств (5.2.26) следует, что

$$z(n+1) \leq S_{\vartheta(n)}z(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.2.27}$$

где неравенство понимается в смысле конуса K_+ в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $u(n)$ решение уравнения

$$u(n+1) = S_{\vartheta(n)}u(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.2.28}$$

удовлетворяющее начальному условию $u(0) = z(0)$. Из (5.2.27), (5.2.28) и неотрицательности матриц S_ϑ относительно конуса K_+ вытекают оценки $0 \le z(n) \le u(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, откуда

$$\|z(n)\| \le \|u(n)\|, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.2.29}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^N$, определяемая равенством $\|u\| = \max_i |u_i|$, где $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\} \in \mathbb{R}^N$. Если теперь определить норму $\|\cdot\|_*$ в пространстве векторов $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, где $x_i \in \mathbb{X}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, N$, равенством $\|x\|_* = \max_i \|x_i\|_i$, то из (5.2.29) и определения функции $z(n)$ получим:

$$\|x(n)\|_* \le \|u(n)\|, \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{5.2.30}$$

Итак, показано, что любому решению $x(n)$ уравнения (5.2.25) с правыми частями из $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$ соответствует решение $u(n)$ уравнения (5.2.1) с правыми частями из $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(S)$, для которого верны соотношения (5.2.30) и $\|x(0)\|_* = \|u(0)\|$. Отсюда и из определений абсолютной устойчивости и r-асимптотической устойчивости вытекают утверждения теоремы 5.2.10.

5.2.11. Пример. Пусть $A = (a_{ij})$ — блочная треугольная матрица, у которой спектральный радиус $\rho(a_{ii})$ каждого диагонального элемента меньше 1. Тогда уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе $\mathfrak{P}(A)$.

§ 5.3. Согласованный базис

Результаты предыдущих двух параграфов показывают плодотворность привлечения теории конусов для анализа устойчивости разностных уравнений, порождаемых рассинхронизованными системами. Теоремы предыдущего параграфа использовали свойство положительности матрицы A и ее помесей A_ϑ относительно конуса K_+ векторов с неотрицательными компонентами. Обоснованным представляется предположение, что в случае, когда матрица A и ее помеси положительны относительно некоторого конуса K, отличного от K_+, справедливы аналоги теорем 5.2.1, 5.2.3, 5.2.5 и 5.2.6. Развитие этого соображения зависит от того, существуют ли отличные от K_+ конусы, инвариантные относительно некоторых матриц A и их помесей, а если существуют, — то каковы их свойства.

Из теорем 5.2.1, 5.2.3 и 5.2.5 вытекает еще один факт: уравнения (5.2.1) с правыми частями из классов $\mathfrak{P}(A)$ и $\mathfrak{P}(A^*)$, где A^* — сопряженная к A матрица, обладают одинаковыми свойствами устойчивости — они одновременно абсолютно устойчивы или не являются абсолютно устойчивыми. В связи с этим возникает вопрос: является указанное свойство спецификой уравнений (5.2.1) с неотрицательными матрицами A или это общее свойство уравнений (5.2.1)?

Решение поставленных вопросов оказывается тесно связанным с существованием некоторого базиса, в определенном смысле согласованного со структурой матрицы A и ее помесей.

5.3.1. Пусть A — квадратная скалярная матрица порядка N, а ϑ — некоторое подмножество множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$. Назовем *столбцовой помесью* матрицы A и обозначим через $A^{\natural}_{\vartheta}$ матрицу, столбцы которой с номерами $i \in \vartheta$ совпадают с соответствующими столбцами матрицы A, а столбцы с номерами $i \notin \vartheta$ — с соответствующими столбцами единичной матрицы I. Столбцовая помесь может быть представлена в следующем виде:

$$A^{\natural}_{\vartheta} = ((A^*)_{\vartheta})^*. \tag{5.3.1}$$

Другими словами, столбцовая помесь получается из матрицы A тремя операциями: транспонированием (или сопряжением), образованием обычной помеси и снова транспонированием. Например,

$$A_{\{i\}} = \begin{Vmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} & \ldots & a_{iN} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^{\natural}_{\{i\}} = \begin{Vmatrix} 1 & \ldots & a_{1i} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & a_{ii} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & a_{Ni} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим через e_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, вектор, i-я компонента которого равна 1, а остальные — нули. Множество векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$ образует естественный базис в координатном пространстве $\mathbb{R}^N$. Пусть 1 не является собственным значением матрицы A. В этом случае множество векторов

$$E_i = (I - A)^{-1} e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.3.2}$$

также образует базис в пространстве $\mathbb{R}^N$. Назовем этот базис *согласованным* (с матрицей A). Как показывает следующая лемма, базис $E_1, E_2, \ldots, E_N$ в определенном смысле согласован не только с матрицей A, но и со структурой ее помесей, а значит, — и со структурой рассинхронизации как таковой.

5.3.2. Лемма. *Если* 1 *не является собственным значением матрицы* A, *то для любого* $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ *верно равенство*

$$A_\vartheta^\natural = (I - A)A_\vartheta(I - A)^{-1},$$

т.е. матрица A_ϑ *в базисе* E_1, E_2, ..., E_N *имеет вид* $A_\vartheta^\natural$.

Доказательство. Так как в условиях леммы матрица $A - I$ обратима, то достаточно доказать равенство

$$A_\vartheta^\natural(I - A) = (I - A)A_\vartheta.$$

Положим $I - A = (\hat{a}_{ij})$, $A^\natural(I - A) = B = (b_{ij})$, $(I - A)A_\vartheta = C = (c_{ij})$. Определим при $i, j = 1, 2, \dots, N$ числа

$$\beta_{ij} = \sum_{p\in\vartheta} a_{ip}\hat{a}_{pj}, \qquad \gamma_{ij} = \sum_{p\in\vartheta} \hat{a}_{ip}a_{pj}. \tag{5.3.3}$$

Тогда

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij} & \text{при} \quad i \in \vartheta, \\ \beta_{ij} + \hat{a}_{ij} & \text{при} \quad i \notin \vartheta. \end{cases} \tag{5.3.4}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} \gamma_{ij} & \text{при} \quad i \in \vartheta, \\ \gamma_{ij} + \hat{a}_{ij} & \text{при} \quad i \notin \vartheta. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

Наконец,

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{при} \quad i \in \vartheta, \\ 1 - a_{ij} & \text{при} \quad i \notin \vartheta. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

Тогда в силу (5.3.3) и (5.3.6)

$$b_{ij} = \gamma_{ij} = a_{ij} - \sum_{p\in\vartheta} a_{ip}a_{pj},$$

а в силу (5.3.4) и (5.3.5) $b_{ij} = \beta_{ij}$, $c_{ij} = \gamma_{ij}$. Следовательно, $b_{ij} = c_{ij}$.

Пусть $i \in \vartheta$, $j \notin \vartheta$. Тогда $i \neq j$, и в силу (5.3.3) и (5.3.4)

$$b_{ij} = \beta_{ij} = -\sum_{p\in\vartheta} a_{ip}a_{pj},$$

а в силу (5.3.3) и (5.3.5)

$$c_{ij} = \gamma_{ij} - a_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{p \in \vartheta} a_{ip} a_{pj} \right) - a_{ij}.$$

Следовательно, $b_{ij} = c_{ij}$.

Пусть $i \notin \vartheta$, $j \in \vartheta$. Этот случай аналогичен предыдущему, и потому $b_{ij} = c_{ij}$.

Пусть, наконец, $i, j \notin \vartheta$. Тогда в силу (5.3.4) и (5.3.5) $b_{ij} = \beta_{ij} + \hat{a}_{ij}$, $c_{ij} = \gamma_{ij} + \hat{a}_{ij}$, а в силу (5.3.3)

$$b_{ij} = \gamma_{ij} = - \sum_{p \in \vartheta} a_{ip} a_{pj}.$$

Следовательно, $b_{ij} = c_{ij}$.

Итак, матрицы $B = A_{\vartheta}^{\natural}(I - A)$ и $C = (I - A)A_{\vartheta}$ равны. Лемма 5.3.2 доказана. □

5.3.3. Обратимся к вопросу об инвариантных конусах матрицы A и ее помесей. Пусть K — телесный конус в $\mathbb{R}^N$. Тогда найдется вектор $\sigma \in K$, $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$, все компоненты которого отличны от нуля. Изменением знака некоторых элементов базиса можно добиться положительности компонент вектора σ. При этом, конечно, изменится и вид помесей матрицы A — часть их элементов также изменит знак. Таким образом, без ограничения общности можно считать компоненты вектора σ положительными, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Как показывает пример 5.3.4, конусы, инвариантные относительно всех помесей матрицы A и отличные от K_+, существуют.

5.3.4. Пример. Пусть $A = (a_{ij})$ — вещественная квадратная матрица второго порядка с элементами, удовлетворяющими соотношениям: $0 \le a_{11} < 1$, $-1 < a_{22} < 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} \ge 0$, $-a_{22}(1 - a_{11}) \le a_{12}a_{21} \le a_{11}(1 - a_{11})$. Тогда множество векторов $x = \{x_1, x_2\}$, для которых $(1 - a_{11})x_1 \ge a_{12}x_2 \ge 0$, образует конус, инвариантный относительно всех помесей матрицы A. При этом конус элементов с неотрицательными компонентами K_+ не является инвариантным относительно A, поскольку $a_{22} < 0$.

Обозначим через K_E конус элементов $x = t_1E_1 + t_2E_2 + \cdots + t_NE_N$, где t_1, t_2, …, $t_N \ge 0$, а E_1, E_2, …, E_N — векторы согласованного базиса.

5.3.5. Теорема. *Пусть уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{P}(A)$. *Если некоторый телесный конус K, содержащий элемент с положительными компонентами, инвариантен относительно всех матриц из* $\mathfrak{P}(A)$, *то* $K_E \subseteq K \subseteq K_+$.

Доказательство. Обозначим множество $\{1, 2, \ldots, N\} \setminus \{i\}$, где $i = 1, 2, \ldots, N$, через ϑ_i.

5.3.6. Лемма. *При каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ найдется такое число $\alpha_i \neq 0$, что для любого вектора $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \in K$ верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty} A^n_{\vartheta_i} v = v_i \alpha_i E_i.$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда $i = N$ (к нему можно прийти перестановкой рядов матрицы A). Представим матрицу A_{ϑ_N} в виде

$$A_{\vartheta_N} = \left\| \begin{matrix} B & C \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{5.3.7}$$

где B — квадратная матрица порядка $N - 1$. По теореме 4.4.15

$$\rho(B) < 1. \tag{5.3.8}$$

Поэтому последовательность матриц

$$A^n_{\vartheta_N} = \left\| \begin{matrix} B^n & (I + B + \cdots + B^{n-1})C \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

имеет при $n \to \infty$ предел $A^\infty_{\vartheta_N}$, где

$$A^\infty_{\vartheta_N} = \left\| \begin{matrix} 0 & (I + B + \cdots +)C \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & (I - B)^{-1}C \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{5.3.9}$$

Следовательно, $A^n_{\vartheta_N} v \to A^\infty_{\vartheta_N} v$.

В силу (5.3.9) вектор $A^\infty_{\vartheta_N} v$ определяется лишь значением последней компоненты вектора v. Поэтому

$$A^\infty_{\vartheta_N} v = v_N w, \tag{5.3.10}$$

где $w = A^\infty_{\vartheta_N} e_N$, а $e_N = \{0, \ldots, 0, 1\}$.

Покажем, что $w = \alpha_N E_N$, где число α_N отлично от нуля — отсюда будет следовать утверждение леммы. В силу (5.3.9) последняя компонента вектора w совпадает с последней компонентой вектора e_N, и значит, отлична от нуля. Поэтому $w \neq 0$; кроме того из цепочки очевидных равенств

$$w = \lim_{n\to\infty} A^n_{\vartheta_N} e_N = \lim_{n\to\infty} A_{\vartheta_N}(A^n_{\vartheta_N} e_N) = A_{\vartheta_N} A^\infty_{\vartheta_N} e_N = A_{\vartheta_N} w$$

следует, что w является собственным вектором матрицы A_{ϑ_N}, отвечающим собственному значению 1.

Покажем, что E_N также является собственным вектором матрицы A_{ϑ_N}, отвечающим собственному значению 1. Действительно, для вектора E_N справедливо равенство (см. (5.3.2))

$$(I - A)E_N = e_N. \tag{5.3.11}$$

Запишем вектор E_N в координатной форме: $E_N = \{E_{1N}, \ldots, E_{NN}\}$, и выпишем первые $N - 1$ компонент векторного равенства (5.3.11) в эквивалентном виде

$$a_{i1}E_{1N} + a_{i2}E_{2N} + \cdots + a_{iN}E_{NN} = E_{iN}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N - 1.$$

Добавляя к последним равенствам тождество $E_{NN} = E_{NN}$, приходим к выводу, что $A_{\vartheta_N}E_N = E_N$.

Итак, w и E_N являются собственными векторами матрицы A_{ϑ_N}, отвечающими собственному значению 1. В силу (5.3.7) и (5.3.8) это собственное значение простое. Следовательно, $w = \alpha_N E_N$, где $\alpha_N \neq 0$ поскольку $w \neq 0$. Из полученного представления вектора w и равенства (5.3.10) вытекает, что $A^{\infty}_{\vartheta_N}v = \lim_{n\to\infty} A^n_{\vartheta_N}v = v_N\alpha_N E_N$. Лемма 5.3.6 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 5.3.5. Включение $K \subseteq K_+$ докажем от противного. Если оно не верно, то найдется $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \in K$, некоторая координата v_i которого отрицательна. По условию теоремы конус K инвариантен относительно матрицы A_{ϑ_i}. Поэтому $A^n_{\vartheta_i}v \in K$ при $n = 1, 2, \ldots$. Тогда по лемме 5.3.6

$$v_i\alpha_i E_i = \lim_{n\to\infty} A^n_{\vartheta_i}v \in K, \qquad v_i < 0. \tag{5.3.12}$$

Пусть теперь $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\} \in K$ — элемент с положительными компонентами, существующий по условию теоремы. Тогда, так же, как (5.3.12), могут быть доказаны включения

$$\sigma_i\alpha_i E_i \in K, \qquad \sigma_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.3.13}$$

Но включения $v_i\alpha_iE_i \in K$ и $\sigma_i\alpha_iE_i \in K$, где $v_i < 0$, $\sigma_i > 0$ и $\alpha_i \neq 0$, не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие доказывает включение $K \subseteq K_+$.

Докажем включение $K_E \subseteq K$. Конус K_E состоит из элементов $t_1E_1 + t_2E_2 + \cdots + t_NE_N$ с неотрицательными коэффициентами t_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Поэтому достаточно показать, что

$$E_i \in K \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.3.14}$$

5.3.7. Лемма. *Пусть вектор E_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, в координатной форме имеет вид $E_i = \{E_{1i}, \ldots, E_{Ni}\}$. Тогда $E_{ii} > 0$.*

Включения (5.3.14) вытекают из леммы 5.3.7. В самом деле, в силу (5.3.13) $\sigma_i\alpha_i E_i \in K$. Но так как $K \subseteq K_+$, то $\sigma_i\alpha_i E_i \subset K_+$. Значит, компонента с номером i вектора $\sigma_i\alpha_i E_i$ неотрицательна: $\sigma_i\alpha_i E_{ii} \geq 0$. Поскольку $\sigma_i > 0$, $E_{ii} > 0$ и $\alpha_i \neq 0$, то $\alpha_i > 0$. Следовательно, сомножители $\sigma_i\alpha_i$ в (5.3.13) положительны, и потому включения (5.3.14) вытекают из (5.3.13).

Для завершения доказательства теоремы осталось установить справедливость леммы 5.3.7. Проведем ее доказательство $i = N$; при других i рассуждения аналогичны.

Представим матрицу A в виде

$$A = \left\| \begin{matrix} B & C \\ F & G \end{matrix} \right\|, \tag{5.3.15}$$

где B — некоторая квадратная матрица порядка $N-1$, а F — число (сравните с (5.3.7)). Рассмотрим вектор $u = \{E_{1N}, E_{2N}, \ldots, E_{N-1N}\} \in \mathbb{R}^{N-1}$, образованный из первых $N-1$ компонент вектора E_N. Тогда уравнение $(I-A)E_N = e_N$, определяющее вектор E_N, можно представить в виде системы двух уравнений

$$(I - B)u - CE_{NN} = 0, \qquad -Fu + (1 - G)E_{NN} = 1.$$

Разрешив первое из них относительно u (это возможно в силу (5.3.8)) и подставив соответствующее выражение для u во второе уравнение, получим:

$$\left\{1 - G - F(I - B)^{-1}C\right\} E_{NN} = 1. \tag{5.3.16}$$

Так как по условию теоремы уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво, то в силу теоремы 4.4.15 $|G| < 1$. Следовательно, уравнение (5.3.16) равносильно уравнению

$$\left\{1 - (1 - G)^{-1}F(I - B)^{-1}C\right\} E_{NN} = (1 - G)^{-1}.$$

Поэтому $E_{NN} > 0$, если и только если

$$(1 - G)^{-1}F(I - B)^{-1}C < 1. \tag{5.3.17}$$

Докажем неравенство (5.3.17); тем самым будет завершено доказательство леммы. Рассмотрим подмножества $\alpha = \{N\}$ и $\beta = \{1, 2, \ldots, N - 1\}$

множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. Матрицы A_α и A_β могут быть представлены в аналогичном (5.3.15) виде:

$$A_\alpha = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ F & G \end{Vmatrix}, \qquad A_\beta = \begin{Vmatrix} B & C \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как по условию уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво, то в силу теоремы 4.2.5 найдется такое число $q \in (0, 1)$, что в некоторой норме $\|\cdot\|_*$ верны неравенства

$$\|A_\alpha^n A_\beta^k\|_* \le q, \qquad n, k \ge 1. \tag{5.3.18}$$

Но $A_\alpha^n \to A_\alpha^\infty$, $A_\beta^n \to A_\beta^\infty$ при $n \to \infty$, где

$$A_\alpha^\infty = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ (1-G)^{-1}F & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_\beta^\infty = \begin{Vmatrix} 0 & (I-B)^{-1}C \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, $A_\alpha^n A_\beta^n \to A_\alpha^\infty A_\beta^\infty$ при $n \to \infty$. При этом в силу (5.3.18)

$$\|A_\alpha^\infty A_\beta^\infty\|_* \le q.$$

Поэтому собственные значения матрицы

$$A_\alpha^\infty A_\beta^\infty = \begin{Vmatrix} 0 & (I-B)^{-1}C \\ 0 & (1-G)^{-1}F(I-B)^{-1}C \end{Vmatrix}$$

не превосходят по модулю числа $q < 1$. Одно них совпадает с $(1-G)^{-1}F(I-B)^{-1}C$, откуда вытекает неравенство (5.3.17). Лемма 5.3.7, а с ней и теорема 5.3.5 полностью доказаны.

5.3.8. В оставшейся части параграфа укажем одно неожиданное свойство согласованного базиса. Элементы матрицы A, определяющей правую часть уравнения (5.2.1), могут иметь теперь произвольные знаки. Через A^* обозначим матрицу, симметричную к матрице A.

5.3.9. Теорема. *Пусть* 1 *не является собственным значением матрицы* A. *Тогда уравнение* (5.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, *если и только если оно абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A^*)$.

5.3.10. Теорема. *Уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей* $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$*, если и только если оно абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе* $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A^*)$.

Проведем доказательство теоремы 5.3.10; теорема 5.3.9 доказывается аналогично.

Так как уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво, то по теореме 4.4.16 число 1 не является собственным значением матрицы A. По лемме 5.3.2 помеси A_ϑ матрицы A имеют в согласованном базисе вид $A_\vartheta^\natural$. Этот факт согласно той же лемме 5.3.2 выражается равенством $A_\vartheta^\natural = (I - A)A_\vartheta(I - A)^{-1}$, справедливым для любого множества $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$. С другой стороны, в силу (5.3.1) $A_\vartheta^\natural = ((A^*)_\vartheta)^*$, откуда

$$(A^*)_\vartheta = ((I - A)^*)^{-1}(A_\vartheta)^*(I - A)^*. \tag{5.3.19}$$

Если уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, то по теореме 4.2.5 найдется такая норма $\|\cdot\|_*$, что

$$\|A_\vartheta\|_* \le 1, \tag{5.3.20}$$

если $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, и

$$\|A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_2} A_{\vartheta_1}\|_* \le q < 1, \tag{5.3.21}$$

если $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$. Определим в $\mathbb{R}^N$ еще одну норму $\|\cdot\|^*$, полагая

$$\|x\|^* = \sup_{\|y\|_* \le 1} |\langle (I - A)^* x, y\rangle|,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Тогда

$$\|(A^*)_\vartheta x\|^* = \sup_{\|y\|_* \le 1} |\langle (A_\vartheta)^*(I - A)^* x, y\rangle| = \sup_{\|y\|_* \le 1} |\langle (I - A)^* x, A_\vartheta y\rangle| \le$$

$$\le \sup_{\|z\|_* \le \|A_\vartheta\|_*} |\langle (I - A)^* x, z\rangle| = \|A_\vartheta\|_* \|x\|^*.$$

Поэтому $\|(A^*)_\vartheta\|^* \le \|A_\vartheta\|_*$. Отсюда в силу (5.3.19), (5.3.20)

$$\|(A^*)_\vartheta\|^* \le 1 \quad \text{при} \quad \vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{5.3.22}$$

Аналогично из (5.3.21) следует неравенство

$$\|(A^*)_{\vartheta_1}(A^*)_{\vartheta_2} \cdots (A^*)_{\vartheta_k}\|^* \le \|A_{\vartheta_k} \cdots A_{\vartheta_2} A_{\vartheta_1}\|_* \le q, \tag{5.3.23}$$

где $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$.

В силу теоремы 4.2.5 из неравенств (5.3.22), (5.3.23) вытекает абсолютная r-асимптотическая устойчивость уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}(\Theta) \subseteq \mathfrak{P}(A^*)$.

Итак, в одну сторону утверждение теоремы доказано; аналогично оно доказывается и в обратную сторону. Теорема 5.3.10 доказана. □

Как показывает следующий пример, утверждение теоремы 5.3.9 неверно, если 1 — собственное значение матрицы A.

5.3.11. Пример. Пусть элементы матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{Vmatrix}$$

удовлетворяют условиям $a > 0$, $0 \le b < 1$. Тогда по теореме 5.2.5 уравнение (5.2.1) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$. Помеси матрицы A^* имеют вид

$$(A^*)_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad (A^*)_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}, \quad (A^*)_{\{1,2\}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{Vmatrix}.$$

Так как собственное значение 1 матрицы $(A^*)_{\{1\}}$ не является полупростым, то по теореме 4.4.2 уравнение (5.2.1) не является абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{P}(A^*)$.

§ 5.4. Уравнения с симметрическими матрицами

В параграфе продолжается анализ абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в некотором классе правых частей из $\mathfrak{P}(A)$. Матрица $A = (a_{ij})$ предполагается скалярной и симметрической.

5.4.1. Напомним, что собственные значения симметрической матрицы A вещественные и полупростые; обозначим наибольшее из них через $\lambda_{\max}$, а наименьшее — через $\lambda_{\min}$. Тогда

$$\lambda_{\min}\langle x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle \le \lambda_{\max}\langle x, x\rangle, \tag{5.4.1}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, т.е.

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N.$$

Матрица A симметрична, если и только если

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Равенства в (5.4.1) достигаются тогда и только тогда, когда x — это собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_{\min}$ или $\lambda_{\max}$ соответственно. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям матрицы A, ортогональны, т.е. их скалярное произведение равно нулю.

Симметрическая матрица A называется *неотрицательно определенной*, если $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$; если при этом $\langle Ax, x\rangle = 0$ только при $x = 0$, то матрицу A называют *положительно определенной*. Матрица A неотрицательно определена, если и только если $\lambda_{\min} \geq 0$; она положительно определена, если и только если $\lambda_{\min} > 0$.

При исследовании матриц важны справедливые для неотрицательно определенных матриц неравенства Шварца

$$\langle Ax, y\rangle^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle$$

и Минковского

$$\sqrt{\langle A(x+y), x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle Ax, x\rangle} + \sqrt{\langle Ay, y\rangle}.$$

а также верное для произвольных матриц неравенство

$$\langle Ax, x\rangle^2 \leq \langle Ax, Ax\rangle\langle x, x\rangle.$$

Пусть ϑ — некоторое непустое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$; обозначим через $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq N$ его элементы. Рассмотрим квадратную матрицу $A_{\vartheta\times\vartheta} = (a^{\vartheta}_{mn})$ порядка p, элементы которой определяются равенствами $a^{\vartheta}_{mn} = a_{i_m i_n}$, где a_{ij} — элементы матрицы A и $1 \leq m$, $n \leq p$. Матрица $A_{\vartheta\times\vartheta}$ симметрична, если симметрична матрица A. Матрицу $A_{\vartheta\times\vartheta}$ называют *главной диагональной ϑ-подматрицей* матрицы A. Собственные значения каждой главной диагональной подматрицы матрицы A заключены между числами $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$. Поэтому каждая главная диагональная подматрица неотрицательно или положительно определена, если этим свойством обладает матрица A.

5.4.2. Теорема. *Пусть матрица A симметрическая. Уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}_p(A)$, $1 \leq p \leq N$, если и только если собственные значения матрицы A лежат в интервале* $(-\infty, 1)$*, а собственные значения каждой главной диагональной подматрицы порядка p матрицы A лежат в интервале* $(-1, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе $\mathfrak{P}_p(A)$. Тогда по теореме 4.4.4 собственные значения матрицы A лежат в интервале $[1 - 2N/p, 1]$. По теореме 4.4.16 число 1 не является собственным значением матрицы A. Значит, собственные значения матрицы A лежат в интервале $[1-2N/p, 1) \subset (-\infty, 1)$. Принадлежность собственных значений главных диагональных подматриц порядка p интервалу $(-1, \infty)$ следует из теоремы 4.4.15.

Необходимость сформулированных в теореме условий абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_p(A)$ доказана. Докажем их достаточность. Рассмотрим квадратичный функционал $\Delta(x) = \langle (I - A)x, x\rangle$. По условию теоремы собственные значения матрицы A лежат в некотором интервале $(-\infty, 1 - \kappa]$, $\kappa > 0$. Значит, в силу (5.4.1),

$$\Delta(x) \geq \kappa|x|^2,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^N$, и в силу неравенства Минковского функция $\|x\|_* = \sqrt{\Delta(x)}$ является нормой в $\mathbb{R}^N$. Покажем, что в этой норме для матриц из $\mathfrak{P}_p(A)$ выполняются условия теоремы 4.2.5.

5.4.3. Лемма. *Существует такое число $\mu > 0$, что для каждого множества $\vartheta \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, содержащего p различных элементов, верно неравенство $\Delta(A_\vartheta x) \leq \Delta(x) - \mu|(A_\vartheta - I)x|^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим цепочку равенств

$$\Delta(A_\vartheta x) = \Delta[x + (A_\vartheta - I)x] = \Delta(x) + 2\langle (I - A)x, (A_\vartheta - I)x\rangle + \\ + \langle (I - A)(A_\vartheta - I)x, (A_\vartheta - I)x\rangle \quad (5.4.2)$$

Здесь $(A_\vartheta - I)x \in \mathbb{R}_\vartheta$, где $\mathbb{R}_\vartheta$ — это подпространство пространства $\mathbb{R}^N$, образованное всеми векторами $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, для которых $x_i = 0$ при $i \notin \vartheta$. Но

$$\langle (I - A)x, y\rangle = \langle (I - A_\vartheta)x, y\rangle, \qquad y \in \mathbb{R}_\vartheta.$$

Поэтому

$$\langle (I - A)x, (A_\vartheta - I)x\rangle = -\langle (A_\vartheta - I)x, (A_\vartheta - I)x\rangle,$$

и сумма последних двух слагаемых в (5.4.2) равна

$$-\langle (I + A)(A_\vartheta - I)x, (A_\vartheta - I)x\rangle.$$

Следовательно,

$$\Delta(A_\vartheta x) = \Delta(x) - \langle (I + A)(A_\vartheta - I)x, (A_\vartheta - I)x\rangle,$$

и для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\langle (I+A)(A_\vartheta - I)x, (A_\vartheta - I)x\rangle \geq \mu |(A_\vartheta - I)x|^2. \tag{5.4.3}$$

Как отмечалось выше, $(A_\vartheta - I)x \in \mathbb{R}_\vartheta$, где множество ϑ содержит не более p различных элементов. Подпространство $\mathbb{R}_\vartheta$ может быть включено в некоторое подпространство $\mathbb{R}_\omega$, где множество ω содержит ровно p различных элементов. Поэтому для доказательства (5.4.3) достаточно доказать неравенство

$$\langle (I+A)y, y\rangle \geq \mu |y|^2 \quad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}_\omega, \tag{5.4.4}$$

где множество ω состоит из p различных элементов.

Пусть $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq N$ — элементы множества ω. Поставим в соответствие вектору $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\} \in \mathbb{R}_\omega$ вектор $\pi y = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_p}\}$ из пространства $\mathbb{R}^p$. Тогда

$$\langle (I+A)y, y\rangle = \langle (I + A_{\omega\times\omega})\pi y, \pi y\rangle. \tag{5.4.5}$$

Здесь в правой части символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^p$. Но по условию теоремы собственные значения матрицы $A_{\omega\times\omega}$ лежат в некотором интервале $[-1+\mu_\omega, \infty)$, где $\mu_\omega > 0$. Следовательно, в силу (5.4.1)

$$\langle (I + A_{\omega\times\omega})\pi y, \pi y\rangle \geq \mu_\omega |\pi y|^2.$$

Но $|\pi y|^2 = |y|^2$ и из неравенств (5.4.4), (5.4.5) следует оценка

$$\langle (I+A)y, y\rangle \geq \mu_\omega |y|^2 \quad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}_\omega. \tag{5.4.6}$$

Неравенство (5.4.4) теперь вытекает из (5.4.6) и из конечности подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. Лемма 5.4.3 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Следствием леммы 5.4.3 является неравенство

$$\|A_\vartheta x\|_* \leq \|x\|_*, \tag{5.4.7}$$

где ϑ — множество, содержащее p различных элементов.

Докажем существование такого числа $q < 1$, для которого

$$\|A_{\vartheta_k} A_{\vartheta_{k-1}} \cdots A_{\vartheta_1} x\|_* \leq q\|x\|_*, \tag{5.4.8}$$

если $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$ и каждое из множеств ϑ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, содержит p различных элементов. Но прежде докажем более слабое утверждение

5.4.4. Лемма. *Для каждого $x \neq 0$ найдется такое $Q(x) < 1$, что*

$$\Delta(A_{\vartheta_k} A_{\vartheta_{k-1}} \cdots A_{\vartheta_1} x) \le Q(x)\Delta(x), \tag{5.4.9}$$

если $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$ и каждое из множеств ϑ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, содержит p различных элементов.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{X}_p$ множество всех подмножеств $\vartheta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, состоящих из p элементов, а через через $\mathfrak{X}_p(x)$ — множество всех $\vartheta \in \mathfrak{X}_p$, удовлетворяющих условию $A_\vartheta x \neq x$. Заметим, что $\mathfrak{X}_p(x) \neq \emptyset$, поскольку в предположении противного $A_\vartheta x = x$ для любого $\vartheta \in \mathfrak{X}_p$, что влечет $Ax = x$, и чего не может быть, поскольку по условию теоремы 5.4.2 число 1 не является собственным значением матрицы A.

Поскольку множество $\mathfrak{X}_p(x)$ непусто и состоит из конечного числа элементов, то для каждого $x \neq 0$ может быть определено число

$$Q(x) = \max_{\vartheta \in \mathfrak{X}_p(x)} \frac{\Delta(A_\vartheta x)}{\Delta(x)}.$$

Отметим теперь, что для каждого $\vartheta \in \mathfrak{X}_p(x)$ в силу леммы 5.4.3 справедливы оценки

$$\frac{\Delta(A_\vartheta x)}{\Delta(x)} \le \frac{\Delta(x) - \mu|(A_\vartheta - I)x|^2}{\Delta(x)}.$$

Здесь по определению множества $\mathfrak{X}_p(x)$ норма $|(A_\vartheta - I)x|$ отлична от нуля, и потому

$$\frac{\Delta(A_\vartheta x)}{\Delta(x)} < 1,$$

откуда, в силу конечности множества $\mathfrak{X}_p(x)$,

$$Q(x) < 1, \qquad x \neq 0.$$

Осталось доказать оценку (5.4.9). Обозначим через i_0, $1 \le i_0 \le k$, минимальное i, для которого $A_{\vartheta_i} x \neq x$. Такое i существует, поскольку в предположении противного равенства $A_{\vartheta_i} x = x$ будут выполняться при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Но тогда в силу условия $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}$ будет выполняться и равенство $Ax = x$, что, как уже отмечалось, невозможно, поскольку по условию теоремы 5.4.2 число 1 не является собственным значением матрицы A.

Осталось заметить, что по лемме 5.4.3

$$\Delta(A_{\vartheta_k} A_{\vartheta_{k-1}} \cdots A_{\vartheta_1} x) \le \Delta(A_{\vartheta_{k-1}} \cdots A_{\vartheta_1} x) \le \cdots \le \Delta(A_{\vartheta_{i_0}} \cdots A_{\vartheta_1} x),$$

где по определению чисел $Q(x)$ и i_0

$$\Delta(A_{\vartheta_{i_0}} \cdots A_{\vartheta_1} x) = \Delta(A_{\vartheta_{i_0}} x) \le Q(x)\Delta(x),$$

откуда и следует оценка (5.4.9). □

Вернемся к доказательству теоремы 5.4.2 и установим справедливость оценки (5.4.8). В предположении противного найдется такая последовательность элементов $x^{(n)}$, $\|x^{(n)}\|_* = 1$, и последовательность наборов множеств $\vartheta_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, k_n$, содержащих ровно p различных элементов, для которых выполняются соотношения

$$\vartheta_1^{(n)} \cup \vartheta_2^{(n)} \cup \cdots \cup \vartheta_{k_n}^{(n)} = \{1, 2, \ldots, N\}$$

и оценки

$$\|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} x^{(n)}\|_* \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x^{(n)}\|_*.$$

В силу компактности единичного шара в норме $\|\cdot\|_*$ последовательность $x^{(n)}$ можно считать сходящейся к некоторому элементу x^*, $\|x^*\|_* = 1$. Тогда при каждом значении n будет выполняться неравенство

$$\|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} x^*\|_* \ge \|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} x^{(n)}\|_* - \\ - \|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} (x^{(n)} - x^*)\|_* \quad (5.4.10)$$

Здесь первое слагаемое в правой части неравенства по определению последовательности $x^{(n)}$ оценивается снизу числом $1 - 1/n$. Второе же слагаемое в силу неравенства (5.4.7) оценивается следующим образом:

$$\|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} (x^{(n)} - x^*)\|_* \le \|x^{(n)} - x^*\|_*.$$

Значит, несколько ослабив, неравенство (5.4.10) можно переписать в виде

$$\|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} x^*\|_* \ge 1 - \frac{1}{n} - \|x^{(n)} - x^*\|_*,$$

откуда получаем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \|A_{\vartheta_{k_n}^{(n)}} A_{\vartheta_{k_n-1}^{(n)}} \cdots A_{\vartheta_1^{(n)}} x^*\|_* \ge 1. \quad (5.4.11)$$

С другой стороны по лемме 5.4.4

$$\|A_{\vartheta^{(n)}_{k_n}} A_{\vartheta^{(n)}_{k_{n-1}}} \cdots A_{\vartheta^{(n)}_{1}} x^*\|_* = \sqrt{\Delta(A_{\vartheta^{(n)}_{k_n}} A_{\vartheta^{(n)}_{k_{n-1}}} \cdots A_{\vartheta^{(n)}_{1}} x^*)} \le$$
$$\le \sqrt{Q(x^*)\Delta(x^*)} = \sqrt{Q(x^*)}\|x^*\|_* = \sqrt{Q(x^*)} < 1,$$

что противоречит неравенству (5.4.11). Полученное противоречие доказывает справедливость при некотором $q < 1$ оценки (5.4.8).

Из неравенств (5.4.7) и (5.4.8) в силу теоремы 4.2.5 вытекает абсолютная r-асимптотическая устойчивость уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_p(A)$. Теорема 5.4.2 доказана. □

Особо отметим два частных случая теоремы 5.4.2.

5.4.5. Теорема. *Уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{P}_1(A)$*, где A — симметрическая матрица, если и только если собственные значения матрицы A меньше* 1*, а ее диагональные элементы больше* -1.

5.4.6. Теорема. *Уравнение* (5.2.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{P}(A)$*, где A — симметрическая матрица, если и только если собственные значения матрицы A по модулю меньше* 1.

5.4.7. Отметим еще, что для абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_p(A)$ необходимо, чтобы собственные значения матрицы A лежали в интервале $(-\infty, 1]$, а собственные значения каждой ее главной диагональной подматрицы порядка p лежали в интервале $[-1, \infty)$. Как показывает следующий пример, эти условия недостаточны для обеспечения абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1).

5.4.8. Пример. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A ($\lambda_{1,2} = 1, -3$) принадлежат интервалу $(-\infty, 1]$. Диагональные элементы матрицы A принадлежат интервалу $[-1, \infty)$. Значит, выполнено указанное в п.5.4.7 необходимое условие абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$. Тем не менее уравнение (5.2.1) не является абсолютно устойчивым в классе $\mathfrak{P}_1(A)$. Действительно, из равенств

$$A_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}, \quad A_{\{2\}}A_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

видно, что спектр матрицы $A_{\{2\}}A_{\{1\}}$ состоит из одной точки $\lambda = 1$, причем собственное значение 1 не полупростое — ему отвечает собственный вектор $x = \{1, 1\}$ и присоединенный вектор $y = \{0, 1/2\}$. Следовательно, $(A_{\{2\}}A_{\{1\}})^n y \to \infty$ при $n \to \infty$, и потому уравнение (5.2.1) не является абсолютно устойчивым в классе $\mathfrak{P}_1(A)$.

5.4.9. Теорема. *Пусть A — симметрическая матрица. Если ее собственные значения лежат в интервале $(-\infty, 1)$, а собственные значения каждой ее главной диагональной подматрицы порядка p лежат в интервале $[-1, \infty)$, то уравнение* (5.2.1) *абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}_p(A)$.*

Доказательство теоремы 5.4.9 фактически содержится в доказательстве теоремы 5.4.2. Теорема 5.4.9 показывает, что указанные в п. 5.4.7 необходимые условиям абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) с правой частью, порождаемой симметрической матрицей A, весьма близки к достаточным.

5.4.10. Существование квадратичной сжимающей нормы. Идея доказательства теоремы 5.4.2 заключалась в использовании некоторой квадратичной формы для определения нормы, в которой для уравнения (5.2.1) выполнялись бы условия теоремы 4.2.5. Эта идея близка к идее построения квадратичной функции Ляпунова для исследования устойчивости дифференциальных уравнений. Метод построения квадратичных функций Ляпунова хорошо развит. Естественна попытка распространить метод доказательства теоремы 5.4.2 на уравнения (5.2.1) с правыми частями, порождаемыми несимметрическими матрицами A. К сожалению, здесь справедлив неутешительный результат, к изложению которого мы переходим.

Рассмотрим квадратичный функционал

$$H(x) = \langle Px, x\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

задаваемый положительно определенной симметрической матрицей P. Тогда функция $\sqrt{H(x)}$ является нормой в $\mathbb{R}^N$.

5.4.11. Лемма. *Пусть при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ для помесей $A_i = A_{\{i\}}$ матрицы A выполняются условия*

$$H(A_i x) \le H(x). \tag{5.4.12}$$

Тогда найдется такая диагональная матрица D с положительными диагональными элементами, что матрица DAD^{-1} симметрична.

Согласно этой лемме метод доказательства теоремы 5.4.2 допускает распространение только на достаточно тривиальный случай уравнений, которые растяжением или сжатием компонент вектора состояния могут быть приведены к уравнению (5.2.1), порождаемому симметрической матрицей A.

Доказательство леммы 5.4.11. Так же, как при доказательстве теоремы 5.4.2, можно установить справедливость при каждом $i = 1, 2, \dots, N$ равенств

$$H(A_i x) = H(x) + 2\langle x, P(A_i - I)x\rangle + \langle P(A_i - I)x, (A_i - I)x\rangle. \tag{5.4.13}$$

Пусть e_i — вектор из $\mathbb{R}^N$, i-я компонента которого равна 1, а остальные - нули. Тогда $(A_i - I)x = \langle (A_i^* - I)e_i, x\rangle e_i$. Поэтому равенства (5.4.13) можно представить в следующем виде

$$H(A_i x) = H(x) + 2\langle Pe_i, x\rangle\langle (A^* - I)e_i, x\rangle + \langle Pe_i, e_i\rangle\langle (A_i^* - I)e_i, x\rangle^2,$$

где $i = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, неравенства (5.4.12) могут выполняться только в случае, когда

$$\langle Pe_i, x\rangle\langle (A^* - I)e_i, x\rangle \le 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$

при всех $x \in \mathbb{R}^N$. Последнее неравенство возможно лишь в случае, если

$$Pe_i = -\mu_i(A^* - I)e_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{5.4.14}$$

где $\mu_i \ge 0$. Поскольку матрица P положительно определена, то ее собственные значения положительны. Значит, $Pe_i \ne 0$, и потому $\mu_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$.

Введем матрицу

$$M = \left\| \begin{matrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu_N \end{matrix} \right\|.$$

Тогда равенства (5.4.14) можно записать в виде $P = (A^* - I)M$. Транспонируя матрицы в обеих частях последнего равенства, получаем: $P = P^* = M(A - I)$, откуда

$$MA = A^* M. \tag{5.4.15}$$

Наконец, полагая

$$D = M^{1/2} = \begin{Vmatrix} \mu_1^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_N^{1/2} \end{Vmatrix},$$

запишем равенство (5.4.15) в виде $DAD^{-1} = D^{-1}A^{*}D = (DAD^{-1})^{*}$. Лемма 5.4.11 доказана. □

§ 5.5. Двухкомпонентные уравнения со скалярными компонентами

В этом параграфе рассматриваются уравнения (5.2.1), порождаемые двумерной скалярной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Суть многих утверждений, приведенных выше и тех, которые будут приведены ниже, удалось понять лишь после анализа двумерного случая.

5.5.1. Сначала рассмотрим вопрос об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$.

Помеси матрицы A имеют следующий вид:

$$A_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad A_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Поэтому по теореме 4.4.15 для абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$|a_{11}| < 1, \qquad |a_{22}| < 1. \tag{5.5.1}$$

Если уравнение (5.2.1) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе $\mathfrak{P}_1(A)$, то по теореме 4.2.5 найдутся норма $\|\cdot\|_*$ и число $q < 1$, для которых

$$\|A^m_{\{1\}}A^n_{\{2\}}\|_* \le q, \qquad \|A^n_{\{2\}}A^m_{\{1\}}\|_* \le q$$

при любых $m, n \ge 1$. Следовательно,

$$\|A_{\{1\}}A_{\{2\}}\|_*,\ \|A^\infty_{\{1\}}A^\infty_{\{2\}}\|_*,\ \|A_{\{1\}}A^\infty_{\{2\}}\|_*,\ \|A_{\{2\}}A^\infty_{\{1\}}\|_* \le q,$$

где

$$A^\infty_{\{1\}} = \lim_{n\to\infty} A^n_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{1-a_{11}} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad A^\infty_{\{2\}} = \lim_{n\to\infty} A^n_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} &\rho(A_{\{1\}}A_{\{2\}}) < 1, \qquad &\rho(A^\infty_{\{1\}}A^\infty_{\{2\}}) < 1, \\ &\rho(A_{\{1\}}A^\infty_{\{2\}}) < 1, \qquad &\rho(A_{\{2\}}A^\infty_{\{1\}}) < 1, \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

где через $\rho(\cdot)$ обозначен спектральный радиус соответствующей матрицы. Подсчет показывает, что

$$A_{\{1\}}A_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} a_{11}+a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \qquad A^\infty_{\{1\}}A^\infty_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} \frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})} & 0 \\ \frac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_{\{1\}}A^\infty_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} a_{11}+\frac{a_{12}a_{21}}{1-a_{22}} & 0 \\ \frac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_{\{2\}}A^\infty_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{1-a_{11}} \\ 0 & a_{22}+\frac{a_{12}a_{21}}{1-a_{11}} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда с помощью критерия Рауса-Гурвица (см. пример 1.2.6) условия (5.5.2) можно выразить в следующей эквивалентной форме:

$$|a_{11}a_{22}| < 1, \quad 1 + a_{11}a_{22} > |a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21}|, \tag{5.5.3}$$

$$|a_{12}a_{21}| < (1-a_{11})(1-a_{22}), \tag{5.5.4}$$

$$|a_{11}(1-a_{22}) + a_{12}a_{21}| < 1 - a_{22}, \tag{5.5.5}$$

$$|a_{22}(1-a_{11}) + a_{12}a_{21}| < 1 - a_{11}, \tag{5.5.6}$$

Таким образом, для абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) необходимо, чтобы выполнялась система неравенств (5.5.1), (5.5.3)–(5.5.6) или, что то же,

Условие (AS1): $|a_{11}| < 1$, $|a_{22}| < 1$,

$$-(1 - |a_{11}|)(1 - |a_{22}|) < a_{12}a_{21} < (1 - a_{11})(1 - a_{22}).$$

Доказательство достаточности условия (AS1) для абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ проведем, опираясь на теорему 4.2.5. Удовлетворяющая условиям теоремы 4.2.5 норма $\|\cdot\|_*$ будет определяться по-разному, в зависимости от соотношений между элементами матрицы A. При этом воспользуемся геометрической интерпретацией из § 4.3, согласно которой для задания нормы $\|\cdot\|_*$ достаточно описать ее единичный шар.

Если $a_{12} = a_{21} = 0$, то матрица A диагональная, и достаточность условия (AS1) для абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ очевидна. Поэтому будем считать, что $a_{12} \neq 0$ или $a_{21} \neq 0$. Тогда перенумерацией и изменением знака одной из компонент вектора $x = \{x_1, x_2\}$ в уравнении (5.2.1) можно добиться выполнения неравенства $a_{12} > 0$, что и будет предполагаться ниже.

Обозначим через $\mathbb{L}_1$ одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$, порожденное вектором $l_1 = \{a_{12}/(1 - a_{11}), 1\}$. Матрица $A^{\infty}_{\{1\}}$ является проектором на подпространство $\mathbb{L}_1$ вдоль прямой $x_2 = 0$. При $a_{12} > 0$ подпространство $\mathbb{L}_1$ принадлежит первому и третьему квадрантам в $\mathbb{R}^2$.

Через $\mathbb{L}_2$ обозначим одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$, порожденное вектором $l_2 = \{1, a_{21}/(1 - a_{22})\}$. Матрица $A^{\infty}_{\{2\}}$ является проектором на подпространство $\mathbb{L}_2$ вдоль прямой $x_1 = 0$. При $a_{21} \geq 0$ подпространство $\mathbb{L}_2$ принадлежит первому и третьему квадрантам в $\mathbb{R}^2$, а при $a_{21} < 0$ — второму и четвертому.

Через $\tilde{\mathbb{L}}_2$ обозначим одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$, порожденное вектором $\tilde{l}_2 = \{1, |a_{21}|/(1 - a_{22})\}$. Подпространство $\tilde{\mathbb{L}}_2$ принадлежит первому и третьему квадранту в $\mathbb{R}^2$. При $a_{21} \geq 0$ оно совпадает с $\mathbb{L}_2$, а при $a_{21} < 0$ подпространство $\tilde{\mathbb{L}}_2$ симметрично подпространству $\mathbb{L}_2$ относительно прямой $x_2 = 0$.

В силу условия (5.5.4) прямая $\mathbb{L}_1$ в первом квадранте лежит «выше» прямой $\mathbb{L}_2$. Поэтому найдется такой прямоугольник

$$\Pi = \{\{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| \leq Q, \ |x_2| \leq 1\}, \tag{5.5.7}$$

что подпространство $\mathbb{L}_1$ пересекает его границу по верхней и нижней сторонам, а подпространства $\mathbb{L}_2$ и $\tilde{\mathbb{L}}_2$ — по боковым.

Чтобы определить требуемую норму $\|\cdot\|_*$, рассмотрим следующие случаи.

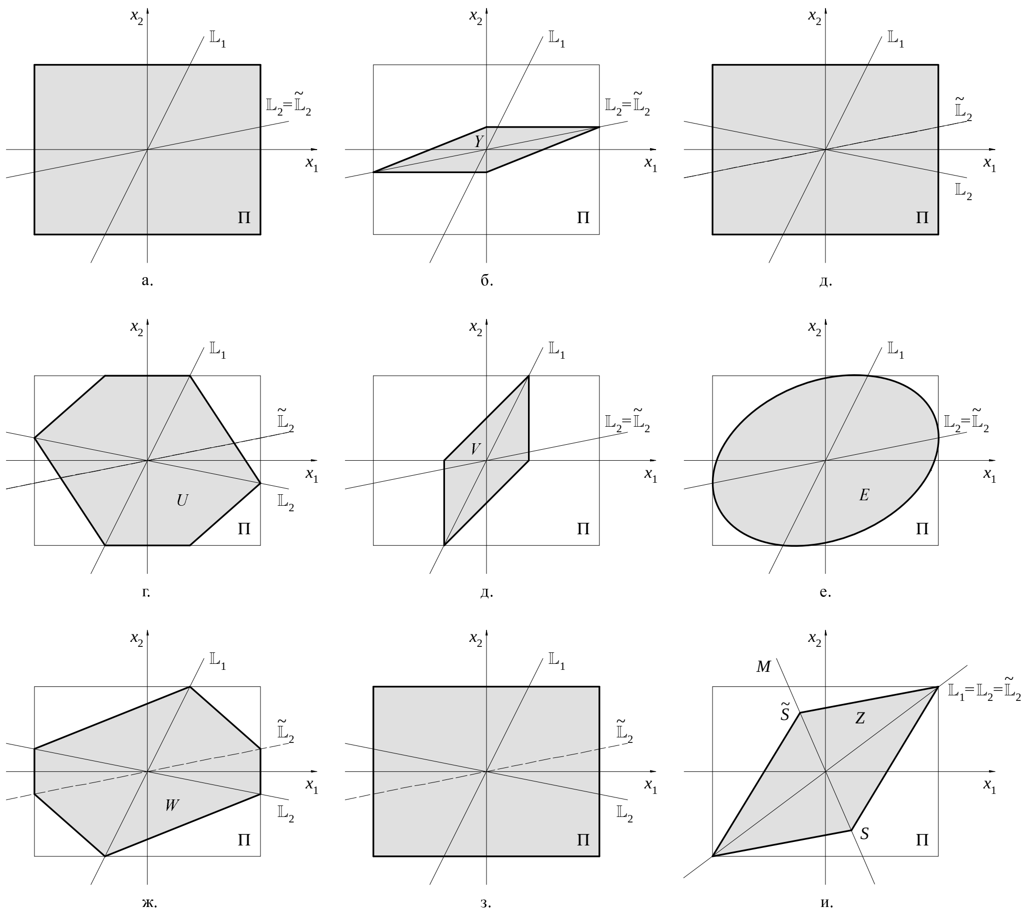

Рис. 5.1. Примеры посторения инвариантных норм для двумерной рассинхронизованной системы

а. $a_{12} > 0$, $a_{11} > 0$, $a_{21} > 0$, $a_{22} > 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается прямоугольником П (рис. 5.1а).

б. $a_{12} > 0$, $a_{11} > 0$, $a_{21} > 0$, $a_{22} \leq 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается параллелограммом Y (рис. 5.1б), две стороны которого параллельны оси $x_2 = 0$, а вершины находятся на пересечении $\mathbb{L}_2$ с границей прямоугольника П и на прямой $x_1 = 0$.

в. $a_{12} > 0$, $a_{11} > 0$, $a_{21} \leq 0$, $a_{22} > 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается прямоугольником П (рис. 5.1в).

г. $a_{12} > 0$, $a_{11} > 0$, $a_{21} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается шестиугольником U (рис. 5.1г), две вершины которого находятся на пересечении $\mathbb{L}_1$ с границей прямоугольника П, две другие вершины симметричны первым двум относительно прямой $x_2 = 0$, а последние две вершины находятся на пересечении $\mathbb{L}_2$ с границей П.

д. $a_{12} > 0$, $a_{11} \le 0$, $a_{21} > 0$, $a_{22} > 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается параллелограммом V (рис. 5.1д), две стороны которого параллельны прямой $x_1 = 0$, а вершины находятся на пересечении $\mathbb{L}_1$ с границей прямоугольника П и на прямой $x_1 = 0$.

е. $a_{12} > 0$, $a_{11} \le 0$, $a_{21} > 0$, $a_{22} \le 0$. Напомним, что *эллипсом* называется множество точек $x = \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих при некоторых α, β и γ ($\alpha > 0, \gamma > 0, \beta^2 < \alpha\gamma$) условию $\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 \le 1$. В рассматриваемом случае существует и единственно число Q в (5.5.7), при котором эллипс E, проходящий через точки пересечения прямых $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ с границей П и касающийся границы П в точках ее пересечения с $\mathbb{L}_1$ (этими условиями эллипс определяется однозначно), будет касаться границы П и в точках ее пересечения с $\mathbb{L}_2$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ тогда задается эллипсом E (рис. 5.1е). Доказательство требуемых свойств нормы $\|\cdot\|_*$ следует из теоремы 5.4.2, если заметить, что «растяжением» координат в $\mathbb{R}^2$ матрица A может быть сделана симметрической.

ж. $a_{12} > 0$, $a_{11} \le 0$, $a_{21} \le 0$, $a_{22} > 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается шестиугольником W (рис. 5.1ж), две вершины которого находятся на пересечении $\mathbb{L}_2$ с границей П, две другие вершины симметричны первым двум относительно прямой $x_1 = 0$, а две последние вершины находятся на пересечении $\mathbb{L}_1$ с границей П.

з. $a_{12} > 0$, $a_{11} \le 0$, $a_{21} \le 0$, $a_{22} \le 0$. Единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ задается прямоугольником П (рис. 5.1з).

Отметим, что норма $\|\cdot\|_*$ в общем случае определяется неединственным способом. Так, например, единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ может быть задан в виде эллипса не только в случае е, но и в случаях а, б и д.

5.5.2. Обратимся теперь к вопросу об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$. В этом случае к условию (AS1) абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе $\mathfrak{P}_1(A)$ необходимо в силу теоремы 4.4.15 добавить условие $\rho(A) < 1$. В терминах элементов матрицы A это условие может быть записано в виде следующих неравенств:

$$|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| < 1, \qquad 1 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > |a_{11} + a_{22}|. \tag{5.5.8}$$

Условие (AS1) и неравенства (5.5.8) выполняются, если и только если выполняется следующее условие.

Условие (AS): $|a_{11}| < 1,\ |a_{22}| < 1,$

$$-(1-|a_{11}|)(1-|a_{22}|) < a_{12}a_{21} < \min\{(1-a_{11})(1-a_{22}),\ (1+a_{11})(1+a_{22})\}.$$

Итак, условие (AS) необходимо для абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе всех правых частей $\mathfrak{P}(A)$. Доказательство достаточности условия (AS) для абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе всех правых частей $\mathfrak{P}(A)$ можно провести, опираясь на теорему 4.2.5. Единичный шар требуемой в теореме 4.2.5 нормы $\|\cdot\|_*$ в случаях а, б, д и е (см. пункт 5.5.1) может быть задан как некоторый эллипс — возможность такого задания нормы вытекает из теоремы 5.4.2, поскольку в рассматриваемых случаях «растяжением» координат в $\mathbb{R}^2$ матрица A может быть сделана симметрической. В случаях в, г, ж и з единичный шар нормы $\|\cdot\|_*$ определяется так же, как в пункте 5.5.1.

5.5.3. Обратимся к вопросу об абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в классе правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ или $\mathfrak{P}(A)$. Казалось бы, для анализа этих случаев достаточно в условиях (AS1) или (AS) соответственно заменить строгие неравенства нестрогими. Это не так. Для абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в классах правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ или $\mathfrak{P}(A)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись приводимые ниже условия (S1) или (S) соответственно.

Условие (S1): *элементы матрицы $A = (a_{ij})$ удовлетворяют одной из пяти систем соотношений*

а) $a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} = a_{21} = 0;$

б) $a_{11} = 1,\ a_{22} = -1,\ a_{12} = 0,\ a_{21}$ *— произвольное;*

в) $a_{11} = -1,\ a_{22} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{12}$ *— произвольное;*

г) $a_{11} = a_{22} = -1,\ 0 \le a_{12}a_{21} < 4;$

д) $|a_{11}| < 1,\ |a_{22}| < 1,\ -(1-|a_{11}|)(1-|a_{22}|) \le a_{12}a_{21} \le (1-a_{11})(1-a_{22}).$

Условие (S): *элементы матрицы $A = (a_{ij})$ удовлетворяют одной из пяти систем соотношений*

а) $a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} = a_{21} = 0;$

б) $a_{11} = 1,\ a_{22} = -1,\ a_{12} = 0,\ a_{21}$ *— произвольное;*

в) $a_{11} = -1,\ a_{22} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{12}$ *— произвольное;*

г) $a_{11} = a_{22} = -1,\ a_{12} = a_{21} = 0;$

д) $|a_{11}| < 1,\ |a_{22}| < 1,\ -(1-|a_{11}|)(1-|a_{22}|) \le a_{12}a_{21} \le \min\{(1-a_{11})(1-a_{22}), (1+a_{11})(1+a_{22})\}.$

Доказательство необходимости выполнения условий (S1) и (S) для абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в классах правых частей $\mathfrak{P}_1(A)$ и $\mathfrak{P}(A)$, соответственно, не вызывает затруднений. Несколько необычным, на первый взгляд, здесь представляется появление строгого неравенства в соотношениях г условия (S1); по этому поводу можно обратиться к примеру 5.4.8.

Доказательство достаточности соотношений а-г условий (S1) и (S) для абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в соответствующих классах правых частей также не вызывает особых затруднений.

Если $a_{12}a_{21} < (1-a_{11})(1-a_{22})$ и выполнены соотношения д условий (S1) или (S), то доказательство абсолютной устойчивости уравнения (5.2.1) в соответствующих классах правых частей не отличается от доказательства абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (5.2.1) в классе $\mathfrak{P}(A)$ при выполнении условия (AS) (см. п.5.5.2). Поэтому осталось рассмотреть лишь случай, когда выполнены соотношения д и

$$a_{12}a_{21} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}), \quad |a_{11}| < 1, \quad |a_{22}| < 1. \tag{5.5.9}$$

При выполнении условия (5.5.9) $a_{12} \neq 0$ и $a_{21} \neq 0$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$. В этом случае подпространства $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\tilde{\mathbb{L}}_2$ совпадают с подпространством собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному значению 1. При этом подпространство $\mathbb{L}_1$ $(= \mathbb{L}_2 = \tilde{\mathbb{L}}_2)$ пересекает границу прямоугольника Π в его вершинах (рис. 5.1и). При выполнении условия (5.5.9) матрица A имеет еще одно вещественное собственное значение $\lambda = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Подпространство M собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, лежит во втором и четвертом квадрантах. Возьмем в качестве единичного шара нормы $\|\cdot\|_*$ параллелограмм Z, две вершины которого лежат на пересечении $\mathbb{L}_1$ с границей прямоугольника Π, а другие вершины, S и $\tilde{S}$, лежат на прямой M (рис. 5.1и).

Если S (и симметричная ей точка $\tilde{S}$) взята достаточно близко к началу координат, то в норме $\|\cdot\|_*$, порождаемой параллелограммом Z, при выполнении соотношений д условия (S1) верны неравенства $\|A_{\{1\}}\|_*$, $\|A_{\{2\}}\|_* \leq 1$, а при выполнении соотношений д условия (S) верны неравенства $\|A_{\{1\}}\|_*$, $\|A_{\{2\}}\|_*$, $\|A\|_* \leq 1$. Следовательно, по теореме 4.2.4 уравнение (5.2.1) абсолютно устойчиво в соответствующем классе правых частей.

5.5.4. Замечания. а. Условия (AS1), (AS), (S1), (S) полуалгебраические (см. § 4.6).

б. Множество матриц A, удовлетворяющих условиям (AS1) или (AS) открыто (в естественном смысле) в пространстве всех скалярных квадратных матриц второго порядка. Этот факт может быть сформулирован в следующей форме: если уравнение (5.2.1) с правыми частями, порождаемыми матрицей A, абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей, то абсолютно r-асимптотически устойчивым в соответствующем классе правых частей будет и любое уравнение (5.2.1) с правыми частями, порождаемыми достаточно близкой к A матрицей $\hat{A}$. Доказательству аналогичного принципиального утверждения для общего случая будет посвящена следующая глава.

Замечания и библиографические справки

Использованные в гл. 5 факты теории матриц с неотрицательными элементами можно найти, например, в [Гантмахер, 1967; Маркус, Минк, 1972; Хорн, Джонсон, 1989]. В изложении элементов теории конусов мы следовали работам [Красносельский М., 1962; Красносельский, Лифшиц, Соболев, 1985].

По поводу теоремы 5.2.1 см. [Белецкий, 1988; Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b; Нестеренко, Марчук, 1989; Bertsekas, Tsitsiklis, 1988; Chazan, Miranker, 1969; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984; Lubachevsky, Mitra, 1986; Miellow, 1975a; Miellow, Comte, Spiteri, 1976; Robert, 1969, 1976]; здесь приводятся также различные модификации принципа мажоранты. Желателен более глубокий анализ абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем с неотрицательными матрицами.

Утверждение теоремы 5.3.5 говорит об узости класса конусов, инвариантных относительно всех помесей некоторой матрицы. Это существенно ограничивает возможности использования методов теории конусов для анализа рассинхронизованных систем. Факт, сформулированный в теоремах 5.3.9 и 5.3.10, в случае синхронизованных систем тривиален; для его доказательства в случае рассинхронизованных систем потребовалась специальная техника. Полностью результаты § 5.3 ранее не публиковались; отдельные фрагменты утверждений этого параграфа можно найти в [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b; Козякин, 1990d,e; Asarin, Kozjakin, Krasnoselskii, Kuznetsov, Pokrovski, 1990].

Достаточные условия абсолютной r-асимптотической устойчивости, содержащиеся в теореме 5.4.6, взяты из [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1984a]. В полном объеме как теорема 5.4.6, так и более общая теорема 5.4.2 сформулированы в [Козякин, 1990e]. Утверждение леммы 5.4.11 приводится впервые.

Часть результатов § 5.5 содержится в [Козякин, 1990a]. Систематический анализ абсолютной устойчивости двухкомпонентных систем со скалярными компонентами, по-видимому, ранее не проводился.

Глава 6

Абсолютная устойчивость по Перрону

До сих пор анализ устойчивости рассинхронизованных систем (и эквивалентных им разностных уравнений) проводился в предположении отсутствия внешних воздействий на систему. В настоящей главе этот пробел до известной степени восполняется. Вводится понятие абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем по Перрону. Абсолютно устойчивые по Перрону рассинхронизованные системы обладают рядом сильных свойств: они абсолютно r-асимптотически устойчивы, их подсистемы также абсолютно r-асимптотически устойчивы, малая деформация матриц не приводит к потере свойства абсолютной устойчивости по Перрону. Центральный результат главы — теорема об эквивалентности (в ряде общих ситуаций) понятий абсолютной устойчивости по Перрону и абсолютной r-асимптотической устойчивости. Следствием этого утверждения является теорема о корректности понятия абсолютной r-асимптотической устойчивости по отношению к малым возмущениям матриц систем. В случае систем с симметрическими матрицами дается оценка величины возмущения, не приводящего к потере системой свойства абсолютной r-асимптотической устойчивости.

§ 6.1. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и устойчивость по Перрону

Аналогом математического понятия устойчивости при постоянно действующих возмущениях в случае рассинхронизованных систем является понятие абсолютной устойчивости по Перрону.

6.1.1. Рассмотрим линейное разностное уравнение

$$x(n+1) = A(n)x(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.1.1}$$

где $x(n)$ — вектор из $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, а $A(n)$ — квадратная матрица порядка N. Предположим, что при каждом значении n на правую часть уравнения (6.1.1) воздействует внешнее аддитивное возмущение $b(n) \in \mathbb{R}^N$. Тогда функция $x(n)$ будет решением уже не уравнения (6.1.1), а неоднородного уравнения

$$x(n+1) = A(n)x(n) + b(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.1.2}$$

Если при любой ограниченной последовательности внешних возмущений $b(n)$ решение $x(n)$ уравнения (6.1.2), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$, ограничено при $n \geq 0$, то говорят (см. § 1.1), что уравнение (6.1.1) удовлетворяет *условию Перрона*. Про уравнение, удовлетворяющее условию Перрона, говорят также, что оно обладает *свойством Перрона* или, — что оно *устойчиво при постоянно действующих возмущениях*. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях в силу теоремы 1.2.9 равносильна равномерной асимптотической устойчивости.

Пусть теперь рассматривается не одно уравнение (6.1.1), а целое семейство таких уравнений со всевозможными последовательностями матриц $A(n)$ из некоторого множества $\mathfrak{F}$. Назовем уравнение (6.1.1) *абсолютно устойчивым при постоянно действующих возмущениях* в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если найдется такая константа $c < \infty$, что при любой последовательности векторов $b(n)$, нормы которых не превосходят 1, и любой последовательности матриц $A(n) \in \mathfrak{F}$ для решения $x(n)$ соответствующего уравнения (6.1.2), удовлетворяющего начальному условию $x(0) = 0$, верны оценки: $\|x(n)\| \leq c$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В достаточно общих ситуациях понятие абсолютной устойчивости при постоянно действующих возмущениях эквивалентно понятию абсолютной асимптотической устойчивости.

6.1.2. Пусть в уравнениях (6.1.1) и (6.1.2) матрицы $A(n)$ при каждом значении n являются помесями некоторой матрицы A, т.е. $A(n) = A_{\omega(n)}$ при $n \geq 0$, где $\omega(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$. В этом случае уравнение (6.1.1) примет вид

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.1.3}$$

а уравнение (6.1.2) — вид

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n) + b(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6.1.4}$$

6.1.3. Пример. Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка N, и множество $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ содержит более одного элемента. Тогда уравнение (6.1.3) не является абсолютно устойчивым при постоянно действующих возмущениях в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Действительно, поскольку множество $\mathfrak{F}$ содержит более одного элемента, то найдется собственное подмножество ν множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, для которого $A_\nu \in \mathfrak{F}$. Без ограничения общности можно считать, что $1 \notin \nu$. Положим

$$\alpha = \max_{B \in \mathfrak{F}} \|B\| = \max_{B \in \mathfrak{F}} \max_{\|x\|=1} \|Bx\|,$$

где $\|x\| = \max |x_i|$, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Ясно, что $\alpha \geq 1$.

Зададимся произвольной последовательностью натуральных чисел n_i, удовлетворяющих условию: $n_0 = 0$ и

$$n_{i+1} \geq n_i + \frac{\alpha^{n_i} - 1}{\alpha - 1} + i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots;$$

последовательность $\{n_i\}$ монотонно возрастает. Векторы $b(n)$ в (6.1.4) зададим тождественно равными вектору $\{1, 0, \ldots, 0\}$; множества $\omega(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ при $n \neq n_i$ положим равными множеству ν, а при $n = n_i$ определим произвольным способом, лишь бы выполнялись включения $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$. Тогда, как показывает несложный подсчет, для решения $x(n)$ уравнения (6.1.4), удовлетворяющего начальному условию $x(0) = 0$, при $n \geq 1$ верны оценки $\|x(n)\| \geq 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}$, а для его первой компоненты $x_1(n)$ — оценки $x_1(n_i) \geq i$, $i \geq 0$. Следовательно, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|x(n)\| = \infty$, и уравнение (6.1.4) не является абсолютно устойчивым при постоянно действующих возмущениях в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

6.1.4. Приведенный пример показывает, что в сколько-нибудь интересных ситуациях эквивалентные разностные уравнения рассинхронизованных систем не могут быть абсолютно устойчивыми при постоянно действующих возмущениях. Заключается ли причина этого в том, что постоянно действующие на реальную рассинхронизованную систему (например, систему управления) возмущения могут «раскачать» ее и привести к потере устойчивости? Или в том, что формальный перенос понятия абсолютной устойчивости при постоянно действующих возмущениях на уравнения (6.1.3) и (6.1.4) не отражает важных аспектов поведения реальных рассинхронизованных систем? Чтобы разобраться, обсудим ситуацию, приводящую к понятию рассинхронизации.

Пусть имеется система W, состоящая из компонент (элементов, частей, подсистем) $W_1, W_2, \ldots, W_N$, состояния которых описываются векторами x_1, x_2, …, x_N, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ при $n_i \geq 1$, и могут изменяться лишь в некоторые дискретные моменты времени. Предположим, что изменение состояния компоненты W_i в некоторый момент T подчиняется закону

$$x_{i\,\text{нов}} = a_{i1}x_{1\,\text{стар}} + a_{i2}x_{2\,\text{стар}} + \cdots + a_{iN}x_{N\,\text{стар}} + b_i. \tag{6.1.5}$$

Здесь a_{ij} — матрицы соответствующих размерностей; b_i — вектор внешних воздействий на компоненту W_i; $x_{j\,\text{стар}}$, $j = 1, 2, \dots, N$, — векторы состояния компонент системы W в моменты времени, непосредственно предшествующие моменту T коррекции компоненты W_i; $x_{i\,\text{нов}}$ — вектор состояния компоненты W_i в моменты времени, непосредственно следующие за T.

В момент T может быть подвергнута коррекции, вообще говоря, не одна, а сразу несколько компонент системы W; пусть $\omega \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ — множество их номеров. Обозначим через $\mathbb{X}$ пространство состояний системы W, т.е. множество векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Через $\mathbb{X}_\omega$ обозначим подпространство пространства $\mathbb{X}$, состоящее из всех векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, у которых $x_i = 0$ при $i \notin \omega$. Тогда изменение состояния системы W в момент T описывается равенством

$$x_{\text{нов}} = A_\omega x_{\text{стар}} + b_\omega, \tag{6.1.6}$$

где $b_\omega = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ — вектор, компоненты которого с номерами $i \notin \omega$ равны нулю, т.е. $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$.

Пусть, наконец, $\dots < T^0 < T^1 < \dots < T^n < \dots$ — все моменты коррекции компонент системы W. Обозначив через $\omega(n)$ множество номеров подвергающихся коррекции в момент времени T^n компонент, а через $x(n)$ — вектор состояния системы W в моменты времени, непосредственно предшествующие моменту коррекции T^n, приходим, в силу (6.1.6), к следующему уравнению динамики системы W:

$$x(n+1) = A_{\omega(n)} x(n) + b(n), \qquad b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}. \tag{6.1.7}$$

6.1.5. Динамика рассинхронизованной линейной системы W при наличии постоянно действующих на нее внешних возмущений описывается разностным уравнением (6.1.7), в котором векторы $b(n)$ не произвольны, а принадлежат «согласованным» с матрицами $A_{\omega(n)}$ подпространствам $\mathbb{X}_{\omega(n)}$. Как раз это условие согласованности не выполнялось в примере 6.1.3. Теперь можно указать естественный аналог понятия абсолютной устойчивости при постоянно действующих возмущениях для разностных уравнений, описывающих динамику рассинхронизованных систем.

Уравнение (6.1.3) назовем *абсолютно устойчивым по Перрону* в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если найдется такая константа $c < \infty$, что при любой последовательности множеств $\omega(n) \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, для которой $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$, и любой последовательности векторов $b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}$, нормы которых не превосходят 1, для решения $x(n)$ уравнения (6.1.7), удовлетворяющего начальному условию $x(0) = 0$, верны оценки: $\|x(n)\| \le c$ при $n = 0, 1, \dots$.

6.1.6. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Как выяснено в предыдущих главах, говорить об асимптотической устойчивости применительно к эквивалентным разностным уравнениям рассинхронизованных систем разумно лишь тогда, когда предполагается, что каждая компонента системы подвергается коррекции бесконечное число раз. Требование бесконечности числа коррекций каждой компоненты привело к понятию абсолютной r-асимптотической устойчивости; в техническом плане это требование влечет ряд трудностей. В понятии же абсолютной устойчивости по Перрону не делается никаких предположений о числе коррекций компонент.

§ 6.2. Теорема об эквивалентной норме

В параграфе устанавливается критерий абсолютной устойчивости по Перрону в терминах существования эквивалентной нормы с определенными свойствами.

6.2.1. В общем случае компоненты вектора $x(n)$ в уравнении (6.1.3) векторные, тогда как матрицы A (порождающая правую часть уравнения (6.1.3)) и $A_{\omega(n)}$ — блочные с матричными элементами соответствующих размерностей.

Напомним (см. § 3.6), что класс правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ уравнения (6.1.3) называется *порождающим*, если найдутся такие множества ϑ_1, ϑ_2, $\dots$, $\vartheta_k \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, что A_{ϑ_1}, A_{ϑ_2}, $\dots$, $A_{\vartheta_k} \in \mathfrak{F}$ и $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \dots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \dots, N\}$.

6.2.2. Теорема. *Уравнение* (6.1.3) *абсолютно устойчиво по Перрону в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, если и только если найдутся такие норма $\|\cdot\|_*$ и число $\delta > 0$, что для любого вектора x, любой матрицы $A_\omega \in \mathfrak{F}$ и согласованного с ней вектора $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, удовлетворяющего оценке $\|b_\omega\|_* \le \delta \|x\|_*$, выполняется неравенство*

$$\|A_\omega x + b_\omega\|_* \le \|x\|_*. \tag{6.2.1}$$

Геометрический смысл условия (6.2.1) заключается в том, что единичный шар S в норме $\|\cdot\|_*$ должен иметь в местах пересечения множеств неподвижных точек $\mathbb{L}_\omega$ матриц A_ω с границей S «плоские» участки «параллельные» соответствующим подпространствам $\mathbb{X}_\omega$, таким образом, чтобы образ $A_\omega S$ единичного шара S принадлежал бы S при всех малых сдвигах $A_\omega S + b_\omega$ «вдоль» подпространства $\mathbb{X}_\omega$ (см. рис. 6.1).

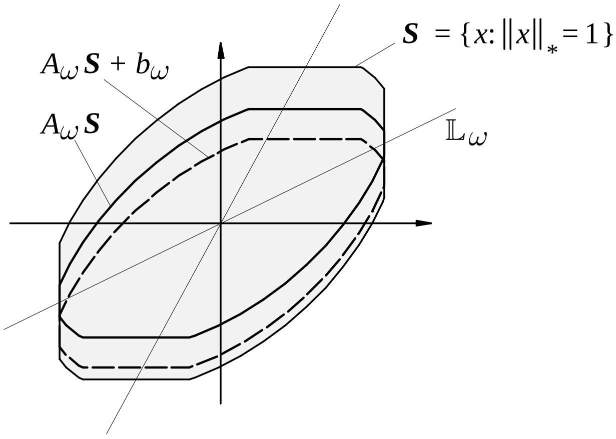

Рис. 6.1. Иллюстрация к объяснению геометрического смысла условия (6.2.1): пример единичного шара с «плоскими» участками границы

Доказательство теоремы 6.2.2. Пусть уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Зададимся некоторой нормой $\|\cdot\|$ в пространстве $\mathbb{X}$ векторов $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Обозначим через U множество всех векторов $u \in \mathbb{X}$, каждый из которых при некотором $p = p(u) \geq 0$ может быть представлен в виде $u = x(p+1)$, где

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n) + b(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, p,$$

причем $x(0) = 0$, а множества $\omega(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ и векторы $b(n)$, $n = 0$, 1, $\ldots$, p, таковы, что

$$A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}, \quad b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}, \quad \|b(n)\| \leq 1, \qquad n = 0, 1, \ldots, p.$$

Множество U центрально-симметрично. В силу абсолютной устойчивости по Перрону уравнения (6.1.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}$ множество U ограничено. Наконец, из определения следует, что

$$A_\omega u + b_\omega \in U,$$

если $u \in U$, $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$ и $\|b_\omega\| \leq 1$.

Обозначим через S замыкание выпуклой оболочки множества U. Тогда множество S будет обладать теми же свойствами, что и множество U: оно ограничено, центрально-симметрично и

$$A_\omega u + b_\omega \in S, \tag{6.2.2}$$

если $u \in S$, $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$ и $\|b_\omega\| \le 1$. Кроме того, $x = 0$ является внутренней точкой множества S. На доказательстве последнего факта остановимся подробнее.

По условию теоремы класс $\mathfrak{F}$ порождающий. Поэтому найдутся такие множества $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, для которых $A_{\vartheta_1}, A_{\vartheta_2}, \ldots, A_{\vartheta_k} \in \mathfrak{F}$ и

$$\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \cdots \cup \vartheta_k = \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{6.2.3}$$

В силу (6.2.3) множество всех сумм $y_1 + y_2 + \cdots + y_k$, где $y_i \in \mathbb{X}_{\vartheta_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, совпадает с пространством $\mathbb{X}$. Но тогда в $\mathbb{X}$ найдется базис, состоящий из векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, каждый из которых лежит в одном из пространств $\mathbb{X}_{\vartheta_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. При этом можно считать, что $\|e_1\|$, $\|e_2\|$, $\ldots$, $\|e_m\| \le 1$. Но как следует из определения множеств U и S, каждый вектор из $\mathbb{X}_{\vartheta_i}$, норма которого не превосходит 1, лежит в S. Поэтому

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \in S. \tag{6.2.4}$$

Осталось заметить, что $x = 0$ является внутренней точкой выпуклой оболочки векторов $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_m\}$. Поскольку в силу (6.2.4) выпуклая оболочка этих векторов лежит в S, то $x = 0$ является внутренней точкой множества S.

Итак, S — выпуклое, ограниченное, центрально-симметричное множество с внутренней точкой $x = 0$. В этом случае S является (см. § 4.3) единичным шаром некоторой нормы $\|\cdot\|_*$. Включение (6.2.2) в терминах нормы $\|\cdot\|_*$ может быть представлено в виде неравенства

$$\|A_\omega x + b_\omega\|_* \le 1, \tag{6.2.5}$$

выполняющегося при $\|x\|_* \le 1$, $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$ и $\|b_\omega\| \le 1$. Но так как нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны (в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны), то найдется такое число $\delta > 0$, что при $\|b_\omega\|_* \le \delta$ выполняется неравенство $\|b_\omega\| \le 1$. Значит, неравенство (6.2.5) верно при $\|x\|_* \le 1$, $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$ и $\|b_\omega\|_* \le \delta$, что равносильно условию (6.2.1).

Итак, в одну сторону утверждение теоремы доказано. Покажем теперь, что условие (6.2.1) влечет абсолютную устойчивость по Перрону уравнения (6.1.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

6.2.3. Лемма. *Пусть $\|A_\omega z + u_\omega\|_* \le \|z\|_*$ при $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $u_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|u_\omega\|_* \le \delta\|z\|_*$. Тогда при $\|x\|_* \le 1$, $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|b_\omega\|_* \le \delta$ имеет место неравенство*

$$\|A_\omega x + b_\omega\|_* \le 1. \tag{6.2.6}$$

Доказательство. Пусть сначала $\|b_\omega\|_* \leq \delta\|x\|_*$. Тогда в силу условия (6.2.1) $\|A_\omega x + b_\omega\|_* \leq \|x\|_* \leq 1$, и значит, неравенство (6.2.6) верно.

Пусть теперь $\delta\|x\|_* < \|b_\omega\|_* \leq \delta$. Запишем очевидную цепочку неравенств

$$\|A_\omega x + b_\omega\|_* = \left\| A_\omega x + \frac{\delta\|x\|_*}{\|b_\omega\|_*} b_\omega + \left(1 - \frac{\delta\|x\|_*}{\|b_\omega\|_*}\right) b_\omega \right\|_* \leq$$

$$\leq \left\| A_\omega x + \frac{\delta\|x\|_*}{\|b_\omega\|_*} b_\omega \right\|_* + \left(1 - \frac{\delta\|x\|_*}{\|b_\omega\|_*}\right) \|b_\omega\|_*.$$

Здесь первое слагаемое в правой части в силу (6.2.1) не превосходит $\|x\|_*$. Поэтому $\|A_\omega x + b_\omega\|_* \leq \|x\|_* + \|b_\omega\|_* - \delta\|x\|_*$. Так как по предположению $\|b_\omega\|_* \leq \delta$ и $\|x\|_* \leq 1$, то $\|A_\omega x + b_\omega\|_* \leq 1$. Лемма 6.2.3 доказана. □

Для завершения доказательства теоремы 6.2.2 рассмотрим произвольное уравнение

$$x(n+1) = A_{\omega(n)} x(n) + b(n),$$

где $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$, $b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}$ и $\|b(n)\|_* \leq \delta$ при $n = 0, 1, \ldots$. Пусть $x(n)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$. Поскольку $\|x(0)\|_* \leq 1$, $\|b(0)\|_* \leq \delta$, то по лемме 6.2.3 $\|x(1)\|_* \leq 1$. Аналогично, из неравенств $\|x(1)\|_* \leq 1$, $\|b(1)\|_* \leq \delta$ вытекает, что $\|x(2)\|_* \leq 1$, и т.д. Следовательно, $\|x(n)\|_* \leq 1$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$. Это означает, что уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Теорема 6.2.2 полностью доказана. □

6.2.4. Утверждение теоремы 6.2.2 с небольшими изменениями справедливо и когда класс правых частей $\mathfrak{F}$ не является порождающим. Обозначим в этом случае через Ω множество всех подмножеств $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, для которых $A_\omega \in \mathfrak{F}$. Пусть $\nu = \bigcup_{\omega\in\Omega} \omega$. Тогда уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в классе правых частей $\mathfrak{F}$, если и только если в некоторой норме $\|\cdot\|$ неравенство (6.2.1) выполняется для всех $x \in \mathbb{X}_\nu$, $\|x\|_* \leq 1$, $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|b_\omega\|_* \leq \delta$, где $\delta > 0$.

6.2.5. Теорема 6.2.2 идейно близка к теоремам 4.2.2, 4.2.4 и 4.2.5, составляющим основу изложенного в § 4.2 метода эквивалентных норм. Выше показано, что использование метода эквивалентных норм дает возможность выяснить некоторые свойства рассинхронизованных систем. Теорема 6.2.2 также позволяет выяснить ряд принципиальных свойств разностных уравнений, использующихся для описания динамики рассинхронизованных систем. Остановимся на двух фактах.

6.2.6. Корректность устойчивости по Перрону. Рассмотрим разностное уравнение (6.1.3) с правыми частями из некоторого класса матриц $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Для задания множества $\mathfrak{F}$ требуется указать два объекта — матрицу A (скалярную или блочную) и множество Ω тех подмножеств $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, при которых $A_\omega \in \mathfrak{F}$. Поэтому в случаях, когда необходимо явно указать способ задания множества $\mathfrak{F}$, мы пишем: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$.

Предположим, что уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$. В приложениях элементы матрицы A часто известны с определенной степенью точности. Поэтому утверждение «уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в классе $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$» можно считать корректным (по отношению к малым деформациям матрицы A) только в том случае, когда уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в любом классе $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(\tilde{A})$ с достаточно близкими к A матрицами $\tilde{A}$.

6.2.7. Теорема. *Если уравнение* (6.1.3) *абсолютно устойчиво по Перрону в некотором классе правых частей* $\mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$ *и матрица* $\tilde{A}$ *достаточно близка к* A, *то оно абсолютно устойчиво по Перрону и в классе правых частей* $\mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(\tilde{A})$.

Доказательство проведем для случая, когда класс $\mathfrak{F}(\Omega)$ порождающий; в общем случае доказательство теоремы проводится аналогично. По условию теоремы уравнение (6.1.3) абсолютно устойчиво по Перрону в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Поэтому по теореме 6.2.2 найдутся такие норма $\|\cdot\|_*$ и число $\delta > 0$, что при $A_\omega \in \mathfrak{F}$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|b_\omega\|_* \le \delta\|x\|_*$ выполняется неравенство (6.2.1). Пусть матрица $\tilde{A}$ настолько близка к матрице A, что

$$\|\tilde{A}_\omega - A_\omega\|_* \le \frac{\delta}{2} \tag{6.2.7}$$

для любого множества $\omega \subseteq \Omega$. Зададимся произвольным вектором x и выберем произвольный вектор $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, удовлетворяющий неравенству $\|b_\omega\|_* \le \delta\|x\|_*/2$. Тогда

$$\|\tilde{A}_\omega x + b_\omega\|_* = \|A_\omega x + [(\tilde{A}_\omega - A_\omega)x + b_\omega]\|_*. \tag{6.2.8}$$

Слагаемое $(\tilde{A}_\omega - A_\omega)x + b_\omega$ в правой части последнего равенства принадлежит подпространству $\mathbb{X}_\omega$. При этом из (6.2.7) и неравенства $\|b_\omega\| \le \delta\|x\|_*/2$ вытекает оценка $\|(\tilde{A}_\omega - A_\omega)x + b_\omega\|_* \le \delta\|x\|_*$. Значит, в силу (6.2.1) правая часть равенства (6.2.8) оценивается сверху числом $\|x\|_*$. Тогда $\|\tilde{A}_\omega x + b_\omega\|_* \le \|x\|_*$ при $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|b_\omega\|_* \le \delta\|x\|_*/2$.

Итак, для матриц $\tilde{A}_\omega \in \mathfrak{F}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $\|\tilde{A}_\omega - A_\omega\|_* \le \delta/2$, при $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|b_\omega\|_* \le \delta\|x\|_*/2$ верно неравенство (6.2.1). По теореме 6.2.2 отсюда следует абсолютная устойчивость по Перрону уравнения (6.1.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Теорема 6.2.7 доказана. □

В силу теоремы 6.2.7 понятие абсолютной устойчивости по Перрону корректно по отношению к малым деформациям матриц. Другое важное свойство абсолютной устойчивости по Перрону сформулировано в следующей теореме.

6.2.8. Теорема. *Если уравнение* (6.1.3) *абсолютно устойчиво по Перрону в порождающем классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$*, то оно абсолютно* r*-асимптотически устойчиво в этом классе.*

Доказательство. Пусть $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ — произвольное множество, для которого $A_\omega \in \mathfrak{F}$. Тогда для любых векторов $x \in \mathbb{X}$ и $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, удовлетворяющих в норме $\|\cdot\|_*$ из теоремы 6.2.2 условию $\|b_\omega\|_* \le \delta\|x\|_*$, $\delta > 0$, выполняется неравенство $\|A_\omega x + b_\omega\|_* \le \|x\|_*$. Положив в нем $b_\omega = 0$, получим:

$$\|A_\omega\|_* \le 1 \quad \text{при} \quad A_\omega \in \mathfrak{F}. \tag{6.2.9}$$

Пусть теперь $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ — множества, для которых $A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, \ldots, A_{\omega_n} \in \mathfrak{F}$, $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_n = \{1, 2, \ldots, N\}$. Покажем, что в этом случае найдется такое число $q < 1$ (не зависящее от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$), что

$$\|A_{\omega_n} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1}\|_* \le q. \tag{6.2.10}$$

Для доказательства неравенства (6.2.10) определим набор множеств $\nu_i \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, полагая $\nu_n = \omega_n$,

$$\nu_i = \omega_i \setminus (\omega_{i+1} \cup \cdots \cup \omega_n), \qquad i = n-1, \ldots, 2, 1.$$

Множества ν_i, $1 \le i \le n$, попарно не пересекаются и в объединении дают $\{1, 2, \ldots, N\}$. При этом $\nu_i \subseteq \omega_i$.

Зададимся произвольным вектором x и положим $y = A_{\omega_n} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1} x$. Определим при некотором $\gamma > 0$ векторы y_i и b_i рекуррентно, полагая $y_0 = x$,

$$b_i = \gamma P_{\nu_i} y, \quad y_i = A_{\omega_i} y_{i-1} + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2.11}$$

Здесь P_ν — линейный проектор, переводящий произвольный вектор $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ в такой вектор $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$, у которого $u_i = x_i$ при

$i \in \nu$ и $u_i = 0$ при $i \notin \nu$. Другими словами, P_ν — это линейный проектор в $\mathbb{X}$ на подпространство $\mathbb{X}_\nu$ вдоль подпространства $\mathbb{X}_{\{1,2,\ldots,N\}\setminus\nu}$. В силу (6.2.9) и (6.2.11) при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ верны оценки $\|b_i\|_* \leq \gamma\|P_{\nu_i}\|_*\|x\|_*$. Поскольку различных операторов P_{ν_i} имеется лишь конечное число, то $\gamma > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы при $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнялись неравенства $\gamma\|P_{\nu_i}\|_* \leq \delta$. Тогда

$$\|b_i\|_* \leq \delta\|x\|_*, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2.12}$$

В силу абсолютной устойчивости по Перрону уравнения (6.1.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}$ выполняются условия леммы 6.2.3. Тогда из леммы 6.2.3 и из неравенств (6.2.12) индукцией по i получаем оценки:

$$\|y_i\|_* \leq \|x\|_*, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2.13}$$

Заметим теперь, что $\nu_i \cap \omega_j = \emptyset$ при $j > i$, и значит, $A_{\omega_j} b_i = b_i$ при $j > i$. С помощью последних равенств по индукции можно показать, что

$$y_i = A_{\omega_i} \cdots A_{\omega_1} x + \gamma(P_{\nu_i} y + \cdots + P_{\nu_1} y), \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{6.2.14}$$

Поскольку множества $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ по построению попарно не пересекаются и их объединение совпадает с $\{1, 2, \ldots, N\}$, то $P_{\nu_n} y + \cdots + P_{\nu_2} y + P_{\nu_1} y = y = A_{\omega_n} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1} x$. Отсюда и из (6.2.14) вытекает равенство $y_n = (1 + \gamma) A_{\omega_n} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1} x$. Значит, для любого x в силу (6.2.13) верна оценка $(1 + \gamma)\|A_{\omega_n} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1} x\|_* \leq \|x\|_*$, откуда следует неравенство (6.2.10) с $q = (1 + \gamma)^{-1} < 1$.

Из неравенств (6.2.9) и (6.2.10) и из теоремы 4.2.5 вытекает абсолютная r-асимптотическая устойчивость уравнения (6.1.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Теорема 6.2.8 доказана. □

6.2.9. Если не требовать, чтобы множество $\mathfrak{F}$ было порождающим, то утверждение теоремы 6.2.8 теряет силу. Можно лишь утверждать, что абсолютная устойчивость по Перрону уравнения (6.1.3) в классе $\mathfrak{F}$ влечет его абсолютную устойчивость в классе $\mathfrak{F}$. Чтобы установить этот факт, достаточно воспользоваться методом доказательства теоремы 6.2.8 и комментарием 6.2.4 к теореме 6.2.2.

§ 6.3. Подчиненные системы

В параграфе изучаются свойства систем, получаемых удалением из некоторой рассинхронизованной системы части ее компонент. Указываются условия, в которых такие системы обладают свойствами абсолютной устойчивости и абсолютной r-асимптотической устойчивости.

6.3.1. Обратимся еще раз к описанному в § 6.1 «управленческому» примеру системы W с несинхронно взаимодействующими компонентами W_1, W_2, ..., W_N. Пусть α — некоторый набор целых чисел $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ из интервала $[1, N]$. Рассмотрим систему $W^\alpha = \{W_1^\alpha, W_2^\alpha, \ldots, W_k^\alpha\}$, состоящую из компонент $W_j^\alpha = W_{i_j}$, где $j = 1, 2, \ldots, k$. Систему W^α естественно представить как систему, полученную из W удалением всех компонент с номерами $i \in \alpha$. В этом случае всю информацию, поступающую на «оборванные» входы компонент системы W^α разумно отнести к разряду внешних относительно W^α воздействий. Полученную таким образом систему W^α назовем системой, *подчиненной* W.

Динамика подчиненной системы W^α описывается уже не уравнениями (6.1.5), а уравнениями

$$x_{i\,\text{нов}} = a_{ii_1}x_{i_1\,\text{стар}} + \cdots + a_{ii_k}x_{i_k\,\text{стар}} + \tilde{b}_i, \tag{6.3.1}$$

где $i = i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Если W_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$, рассматривается как компонента системы W, то ее вектор состояния обозначается через x_{i_j}. Если же W_{i_j} рассматривается как компонента системы W^α, т.е. $W_{i_j} = W_j^\alpha$, то ее вектор состояния обозначается через z_j. Через $\mathbb{X}^\alpha$ обозначим пространство состояний системы W^α — множество векторов $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Наконец (см. § 5.5), через $A_{\alpha\times\alpha} = (a_{mn}^\alpha)$ обозначим главную диагональную подматрицу матрицы A, т.е. матрицу с элементами $a_{mn}^\alpha = a_{i_m i_n}$, $1 \le m, n \le k$. Тогда уравнение (6.3.1) примет вид

$$z_{j\,\text{нов}} = a_{j1}^\alpha z_{1\,\text{стар}} + \cdots + a_{jk}^\alpha z_{k\,\text{стар}} + c_j,$$

где $c_j = \tilde{b}_{i_j}$. Динамика подчиненной системы W^α согласно построениям § 6.1 описывается аналогичным (6.1.7) уравнением

$$z(n+1) = (A_{\alpha\times\alpha})_{\omega(n)}z(n) + c(n), \qquad c(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}^\alpha, \tag{6.3.2}$$

где $\omega(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ и $z(n) \in \mathbb{X}^\alpha$ при каждом значении n.

6.3.2. Пример. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка, $\alpha = \{1, 3\}$. Тогда

$$A_{\alpha\times\alpha} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

При анализе динамики системы W^α класс ее рассинхронизаций должен быть определенным образом согласован с классом рассинхронизаций системы W. Формальные определения дадим в терминах уравнений (6.1.7) и (6.3.2). Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ — некоторый класс правых частей уравнения (6.1.7) и α — подмножество множества $\{1, 2, \dots, N\}$, состоящее из чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. *Индуцированным* классом правых частей $\mathfrak{F}^\alpha \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$ уравнения (6.3.2) назовем множество всех матриц $(A_{\alpha\times\alpha})_\nu$, для которых $\nu = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, $\omega = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_k}\} \subseteq \alpha$ и $A_\omega \in \mathfrak{F}$.

6.3.3. Пример. а. Пусть A — матрица порядка N; α — подмножество $\{1, 2, \dots, N\}$, состоящее из k элементов. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}_m(A) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, то $\mathfrak{F}^\alpha = \mathfrak{P}_m(A_{\alpha\times\alpha}) \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$ при $m \le k$ и $\mathfrak{F}^\alpha = \emptyset$ при $m > k$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}_m^-(A) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, то $\mathfrak{F}^\alpha = \mathfrak{P}_m^-(A_{\alpha\times\alpha}) \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$ при $m < k$ и $\mathfrak{F}^\alpha = \mathfrak{P}_k(A_{\alpha\times\alpha}) \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$ при $m \ge k$.

б. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица третьего порядка и класс $\mathfrak{F}$ состоит из матриц $A_{\{1\}}$, $A_{\{2\}}$ и $A_{\{1,3\}}$. Если $a = \{2, 3\}$, то класс $\mathfrak{F}^\alpha$ состоит из одной матрицы $(A_{\alpha\times\alpha})_{\{2\}}$. Класс $\mathfrak{F}$ порождающий в $\mathfrak{P}(A)$, а класс $\mathfrak{F}^\alpha$ не является порождающим в $\mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$.

Как видно из примера 6.3.3, индуцированный класс правых частей уравнения (6.3.2) может при определенных условиях оказаться пустым. Такая ситуация имеет место тогда, когда каждая компонента системы W^α подвергается коррекции одновременно с некоторой компонентой системы W, не принадлежащей W^α. В этом случае подчиненная система W^α не может быть вычленена из системы W и рассматриваться независимо от последней.

Приведенный пример показывает также, что индуцированный класс $\mathfrak{F}^\alpha$ может не быть порождающим, даже если класс $\mathfrak{F}$ порождающий. Подчиненную систему W^α назовем *нормальной* относительно класса рассинхронизаций $\mathfrak{F}$, если индуцированные классы $\mathfrak{F}^\alpha$ и $\mathfrak{F}^\beta$, где $\beta = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \alpha$, являются порождающими. Свойство нормальности подчиненной системы W^α можно трактовать и так — система W есть объединение двух подчиненных систем W^α и W^β, где $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \dots, N\}$ и $\alpha \cap \beta = \emptyset$, любые две компоненты W_i^α и W_j^β которых могут подвергаться коррекции независимо друг от друга. Как видно из примера 6.3.3, любая система, подчиненная W, нормальна относительно любого класса рассинхронизаций $\mathfrak{F}$, содержащего множество матриц $\mathfrak{P}_1(A)$.

6.3.4. Обсудим вопрос о связи свойств устойчивости рассинхронизованной системы и подчиненных ей систем. Пусть на систему W не действуют внешние возмущения. Тогда ее динамика описывается уравнением

$$x(n+1) = A_{\omega(n)} x(n), \qquad \omega(n) \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \tag{6.3.3}$$

Динамика подчиненной системы W^{α} при условии, что на нее также не действуют внешние возмущения, согласно (6.3.2) описывается уравнением

$$z(n+1) = (A_{\alpha\times\alpha})_{\nu(n)} z(n), \qquad \nu(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{6.3.4}$$

6.3.5. Теорема. *Если уравнение* (6.3.3) *абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, *то уравнение* (6.3.4) *абсолютно устойчиво в индуцированном классе правых частей* $\mathfrak{F}^{\alpha} \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$.

6.3.6. Теорема. *Если уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ *и подчиненная система* W^{α} *нормальна, то уравнение* (6.3.4) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в индуцированном классе правых частей* $\mathfrak{F}^{\alpha} \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$.

Теоремы 6.3.5 и 6.3.6 на первый взгляд производят странное впечатление. Ведь в случае гораздо более простого объекта — разностного уравнения

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{6.3.5}$$

его асимптотическая или нейтральная устойчивость в общем случае не влекут ни асимптотическую, ни нейтральную устойчивость разностного уравнения

$$z(n+1) = A_{\alpha\times\alpha} z(n). \tag{6.3.6}$$

Дело в том, что уравнения (6.3.3) и (6.3.4) более сложны, чем (6.3.5) и (6.3.6), но вместе с тем на них накладываются и более жесткие требования абсолютной устойчивости в некотором классе правых частей.

Приведем доказательство менее очевидного утверждения — теоремы 6.3.6; фактически при этом будет доказана и теорема 6.3.5.

Доказательство теоремы 6.3.6. Не ограничивая общности можно считать, что

$$\alpha = \{1, 2, \ldots, k\};$$

в противном случае достаточно соответствующим образом перенумеровать компоненты системы W. Представим матрицу A в следующем виде:

$$A = \begin{Vmatrix} U & V \\ W & Z \end{Vmatrix}, \tag{6.3.7}$$

где U — квадратная матрица порядка k, а Z — квадратная матрица порядка $N - k$. Тогда
$$U = A_{\alpha\times\alpha}. \tag{6.3.8}$$

В силу абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (6.3.3) в классе $\mathfrak{F}$ по теореме 4.2.5 найдется такая норма $\|\cdot\|_*$, в которой
$$\|A_\omega\|_* \le 1 \quad \text{при} \quad A_\omega \in \mathfrak{F} \tag{6.3.9}$$
и
$$\|A_{\omega_p}\cdots A_{\omega_2}A_{\omega_1}\|_* \le q < 1, \tag{6.3.10}$$
если $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_p = \{1, 2, \ldots, N\}$, $A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, \ldots, A_{\omega_p} \in \mathfrak{F}$.

Пусть множество $\nu \subseteq \alpha$ таково, что $(A_{\alpha\times\alpha})_\nu \in \mathfrak{F}^\alpha$. Тогда по определению индуцированного класса $A_\nu \in \mathfrak{F}$. При этом в силу (6.3.7) и (6.3.8) матрица A_ν имеет вид
$$A_\nu = \begin{Vmatrix} (A_{\alpha\times\alpha})_\nu & ? \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \tag{6.3.11}$$
где вопросительным знаком обозначены элементы, вид которых несуществен. Из (6.3.11) и (6.3.9) вытекает оценка
$$\|(A_{\alpha\times\alpha})_\nu\|_* \le 1. \tag{6.3.12}$$

Итак, для каждой матрицы $(A_{\alpha\times\alpha})_\nu$ из $\mathfrak{F}^\alpha$ справедливо неравенство (6.3.12). Тогда по теореме 4.2.4 уравнение (6.3.4) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha \subseteq \mathfrak{P}(A_{\alpha\times\alpha})$.

Дальнейшее доказательство проведем от противного. Пусть абсолютно устойчивое в классе $\mathfrak{F}^\alpha$ уравнение (6.3.4) не является абсолютно r-асимптотически устойчивым в этом классе. Обозначим через $\mathfrak{F}^\alpha_*$ множество всех конечных произведений
$$F = (A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_p}\cdots(A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_2}(A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_1} \tag{6.3.13}$$
матриц $(A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_i}$ из $\mathfrak{F}^\alpha$, для которых $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p \subseteq \alpha$ и
$$\nu_1 \cup \nu_2 \cup \cdots \cup \nu_p = \alpha. \tag{6.3.14}$$

В силу нормальности подчиненной системы W^α класс $\mathfrak{F}^\alpha$ порождающий, и потому наборы множеств $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$, удовлетворяющие условию (6.3.14), существуют. Значит, множество $\mathfrak{F}^\alpha_*$ непусто. Обозначим через $\mathfrak{R}^\alpha_*$

замыкание множества $\mathfrak{F}^\alpha_*$. В силу (6.3.14) для каждой матрицы (6.3.13) верно неравенство $\|F\|_* \le 1$, а значит, и неравенство

$$\|R\|_* \le 1 \quad \text{при} \quad R \in \mathfrak{R}^\alpha_*.$$

Таким образом, $\mathfrak{R}^\alpha_*$ — замкнутое ограниченное подмножество пространства матриц. Следовательно, $\mathfrak{R}^\alpha_*$ — компакт.

6.3.7. Лемма. *Если уравнение* (6.3.4) *абсолютно устойчиво, но не является абсолютно r-асимптотически устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha$, то найдется матрица $R \in \mathfrak{R}^\alpha_*$, имеющая собственное значение* 1.

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение

$$z(n+1) = B(n)z(n) \tag{6.3.15}$$

с матрицами $B(n)$, принадлежащими при каждом значении n классу $\mathfrak{F}^\alpha_*$. По условию леммы уравнение (6.3.4) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha$, но не является абсолютно r-асимптотически устойчивым в этом классе. Поэтому по теореме 3.6.6 уравнение (6.3.15) абсолютно устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha_*$, но не является абсолютно асимптотически устойчивым в этом классе. Тогда по теореме 3.3.6 найдутся такие удовлетворяющие при $n \ge 0$ уравнению (6.3.15) последовательности векторов $z(n)$ и матриц $B(n) \in \mathfrak{F}^\alpha_*$, что $z(n) \ne 0$, $\|z(n)\|_* \le c$ при $0 \le n < \infty$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|z(n)\|_* \ne 0.$$

Значит, существует последовательность целых чисел $n_k \to \infty$, для которой $z(n_k) \to z_* \ne 0$. При этом в силу (6.3.15)

$$z(n_{k+1}) = B(n_{k+1}-1)\cdots B(n_k+1)B(n_k)z(n_k). \tag{6.3.16}$$

Так как по определению множества $\mathfrak{F}^\alpha_*$ каждая матрица $B(n_k)$ является произведением матриц из $\mathfrak{F}^\alpha$, то и матрица $F(k) = B(n_{k+1}-1)\cdots B(n_k+1)B(n_k)z(n_k)$ является произведением матриц из $\mathfrak{F}^\alpha$. Значит $F(k) \in \mathfrak{F}^\alpha \subseteq \mathfrak{R}^\alpha_*$ и при этом в силу (6.3.16)

$$z(n_{k+1}) = F(k)z(n_k). \tag{6.3.17}$$

В силу компактности множества $\mathfrak{R}^\alpha_*$ последовательность матриц $F(n)$ можно считать сходящейся к некоторой матрице $R \in \mathfrak{R}^\alpha_*$. Переходя в

(6.3.17) к пределу, получаем: $z_* = Rz_*$, $z_* \neq 0$. Следовательно, 1 является собственным значением матрицы R. Лемма 6.3.7 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 6.3.6. Пусть $R \in \mathfrak{R}_*^\alpha$ — матрица из леммы 6.3.7. Тогда по определению множества $\mathfrak{R}_*^\alpha$ найдется такая последовательность матриц $F_n \in \mathfrak{F}_*^\alpha$, что

$$R = \lim_{n\to\infty} F_n. \tag{6.3.18}$$

Каждая матрица F_n по определению множества $\mathfrak{F}_*^\alpha$ имеет вид (см. (6.3.13))

$$F_n = (A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_{np_n}} \cdots (A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_{n2}} (A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_{n1}},$$

где $(A_{\alpha\times\alpha})_{\nu_{ni}} \in \mathfrak{F}^\alpha$, причем $\nu_{n1}, \nu_{n2}, \ldots, \nu_{np_n} \subseteq \alpha$ и объединение множеств $\nu_{n1}, \nu_{n2}, \ldots, \nu_{np_n}$ совпадает с α.

Определим при каждом значении n матрицу G_n равенством

$$G_n = A_{\nu_{np_n}} \cdots A_{\nu_{n2}} A_{\nu_{n1}}. \tag{6.3.19}$$

Здесь при $1 \leq i \leq p_n$ каждая матрица $A_{\nu_{ni}}$принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ и имеет вид (6.3.11). Следовательно,

$$G_n = \begin{Vmatrix} F_n & H_n \\ 0 & I \end{Vmatrix},$$

где H_n — некоторая матрица, точное значение которой не важно. Заметим лишь, что в силу (6.3.11) и (6.3.12) $\|G_n\|_* \leq 1$. Поэтому последовательность матриц H_n можно считать сходящейся к некоторой матрице S. Тогда и последовательность матриц G_n сходится к некоторой матрице G, имеющей в силу (6.3.18) вид

$$G = \begin{Vmatrix} R & S \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \tag{6.3.20}$$

В силу нормальности подчиненной системы W^α относительно класса правых частей $\mathfrak{F}$ найдутся такие множества $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}\backslash\alpha$, что $A_{\mu_1}, A_{\mu_2}, \ldots, A_{\mu_m} \in \mathfrak{F}$ и

$$\mu_1 \cup \mu_2 \cup \cdots \cup \mu_m = \{1, 2, \ldots, N\} \setminus \alpha. \tag{6.3.21}$$

Рассмотрим матрицу

$$H = A_{\mu_m} \cdots A_{\mu_2} A_{\mu_1}. \tag{6.3.22}$$

Она имеет вид

$$H = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ P & Q \end{Vmatrix},$$

причем размерности ее матричных элементов совпадают с размерностями соответствующих элементов матриц G_n, $n \geq 0$, и G. Заметим теперь, что при каждом значении $n = 0, 1, \ldots$ матрицы $A_{\nu_{n1}}, \ldots, A_{\nu_{np_n}}, A_{\mu_1}, \ldots, A_{\mu_m}$ принадлежат $\mathfrak{F}$, а в силу (6.3.14) и (6.3.21) объединение множеств $\nu_{n1}, \ldots, \nu_{np_n}, \mu_1, \ldots, \mu_m$ совпадает с $\{1, 2, \ldots, N\}$. Поэтому в силу (6.3.10)

$$\|A_{\nu_{np_n}} \cdots A_{\nu_{n1}} A_{\mu_m} \cdots A_{\mu_1}\|_* \leq q < 1. \tag{6.3.23}$$

Но в силу (6.3.19) и (6.3.20) произведение матриц под знаком нормы в (6.3.23) совпадает с произведением матриц G_n и H, откуда $\|G_n H\|_* \leq q < 1$. Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем:

$$\|GH\|_* \leq q < 1. \tag{6.3.24}$$

Наконец, из определения (6.3.19) и (6.3.22) матриц G_n, H и из (6.3.9) вытекают оценки $\|G_n\|_* \leq 1$, $\|H\|_* \leq 1$, откуда

$$\|G\|_* \leq 1, \qquad \|H\|_* \leq 1. \tag{6.3.25}$$

В силу леммы 4.4.12 из (6.3.24) и (6.3.25) вытекает, что спектральный радиус левого верхнего диагонального элемента в (6.3.20), т.е. матрицы R, строго меньше 1. Но это противоречит определению матрицы R, которая согласно лемме 6.3.7 имеет собственное значение 1. Полученное противоречие вызвано предположением о том, что уравнение (6.3.4) не обладает свойством абсолютной r-асимптотической устойчивости в классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha$. Теорема 6.3.6 доказана. □

6.3.8. В заключение сделаем одно замечание. Когда интересуются динамикой не одной, а сразу нескольких систем, подчиненных системе W, переход к уравнениям (6.3.2) или (6.3.4) не очень удобен, поскольку для каждой подчиненной системы требуется составление своего уравнения динамики. Чтобы избежать этих трудностей поступим следующим образом. Пусть α — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, состоящее из чисел $i_1 < \cdots < i_k$. Отождествим пространство состояний S^α подчиненной системы W^α с подпространством $\mathbb{X}_\alpha$ пространства состояний $\mathbb{X}$ системы W, сопоставив вектору $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \in \mathbb{X}^\alpha$ вектор $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbb{X}_\alpha$ по следующему правилу:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \notin \alpha, \\ z_j & \text{при} \quad i = i_j \in \alpha, \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

В этом случае уравнение динамики подчиненной системы W^α будет описываться совпадающим по форме с (6.1.7) уравнением

$$x(n+1) = A_{\omega(n)} x(n) + b(n), \qquad b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}, \tag{6.3.26}$$

к которому, однако, должны быть добавлены условия

$$\omega(n) \subseteq \alpha, \quad x(n) \in \mathbb{X}_\alpha, \quad \mathbb{X}_{\omega(n)} \subseteq \mathbb{X}_\alpha. \tag{6.3.27}$$

Мы не стали с самого начала записывать уравнения динамики подчиненной системы W^α в виде (6.3.26), (6.3.27), поскольку матрицы правой части уравнения (6.3.26) в силу (6.3.27) при $\alpha \neq \{1, 2, \ldots, N\}$ не принадлежат никакому порождающему классу, а потому говорить об абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (6.3.26) с формальной точки зрения нельзя.

В дальнейшем будет удобно пользоваться приводимыми ниже теоремами 6.3.9 и 6.3.10, выражающими условия абсолютной r-асимптотической устойчивости систем, подчиненных системе W, в терминах уравнений (6.3.26), (6.3.27). Утверждения теорем 6.3.9 и 6.3.10 вытекают из теорем 4.2.5, 6.3.5 и 6.3.6.

6.3.9. Теорема. *Пусть W^α — система, подчиненная W, нормальная относительно некоторого класса $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Тогда уравнение* (6.3.4) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в индуцированном классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha$, если и только если найдутся такие число $q_\alpha < 1$ и норма $\|\cdot\|_\alpha$ в подпространстве $\mathbb{X}_\alpha$, что*

$$\|A_\omega x\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{X}_\alpha,\ \omega \subseteq \alpha,\ A_\omega \in \mathfrak{F} \tag{6.3.28}$$

и для каждого набора множеств $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \subseteq \alpha$, удовлетворяющего условиям $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_k = \alpha$, $A_{\omega_1}, A_{\omega_2}, \ldots, A_{\omega_k} \in \mathfrak{F}$, верно неравенство

$$\|A_{\omega_k} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1}\|_\alpha \leq q_\alpha \|x\|_\alpha \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{X}_\alpha. \tag{6.3.29}$$

6.3.10. Теорема. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ и W^α — система, подчиненная W, нормальная относительно класса $\mathfrak{F}$. Тогда найдутся число $q_\alpha < 1$ и норма $\|\cdot\|_\alpha$ в $\mathbb{X}_\alpha$, при которых верны неравенства* (6.3.28) *и* (6.3.29).

§ 6.4. Вариация решений рассинхронизованных уравнений

До сих пор при анализе абсолютно r-асимптотически устойчивых уравнений мы ограничивались рассмотрением тех их решений, каждая компонента которых подвергается коррекции бесконечное число раз. В параграфе исследуются свойства тех решений абсолютно r-асимптотически устойчивых уравнений, некоторые компоненты которых подвергаются коррекции лишь конечное число раз или не подвергаются коррекции вовсе.

6.4.1. Рассмотрим уравнение (6.3.3), описывающее динамику линейной рассинхронизованной системы W. Предположим, что оно абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей из $\mathfrak{P}(A)$. Пусть $x(\cdot)$ — произвольное решение этого уравнения, а $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве состояний $\mathbb{X}$ системы W. Число

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] = \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k+1) - x(k)\| \tag{6.4.1}$$

назовем *вариацией* решения $x(\cdot)$ уравнения (6.3.3). Ряд в правой части равенства (6.4.1) может расходиться; в этом случае будем писать $\operatorname{Var}[x(\cdot)] = \infty$.

6.4.2. Теорема. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей из $\mathfrak{P}(A)$, содержащем множество матриц $\mathfrak{P}_1(A)$. Тогда найдется такая константа $\nu < \infty$, что для любого решения $x(\cdot)$ уравнения* (6.3.3) *с правыми частями из этого класса верно неравенство*

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] \le \nu \|x(0)\|.$$

Следствие. *Для решения $x(\cdot)$ в условиях теоремы* 6.4.2 *существует и конечен предел*

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x(n). \tag{6.4.2}$$

Для доказательства следствия воспользуемся равенством

$$x(n) = x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} [x(k+1) - x(k)]. \tag{6.4.3}$$

Из конечности величины $\mathrm{Var}\,[x(\cdot)]$ вытекает сходимость ряда в правой части равенства (6.4.1), а это влечет сходимость ряда $\sum[x(k+1)-x(k)]$. Но тогда в равенстве (6.4.3) можно перейти к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = x(0) + \sum_{k=0}^{\infty}[x(k+1) - x(k)].$$

Следствие доказано. □

Существование предела (6.4.2) для решений $x(\cdot)$ с бесконечным числом коррекций компонент следует из определения абсолютной r-асимптотической устойчивости; в этом случае $x_* = 0$. Для решений же, некоторые компоненты которых подвергаются коррекции лишь конечное число раз на интервале $[0, \infty)$, утверждение следствия неочевидно; в этом случае предел (6.4.2), вообще говоря, отличен от нуля.

6.4.3. Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 6.4.2, остановимся на одном вспомогательном утверждении. Пусть $\mathbb{X}$ — пространство состояний системы W, описываемой уравнением (6.3.3). Обозначим через P_ω, где $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, линейный оператор, переводящий вектор $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \in \mathbb{X}$ в вектор $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ с компонентами, определяемыми соотношениями

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \notin \omega, \\ x_i & \text{при} \quad i \in \omega. \end{cases}$$

Очевидно, $P_\omega^2 = P_\omega$, $P_\omega\mathbb{X} = \mathbb{X}_\omega$ и $P_\omega\mathbb{X}_\nu = 0$, если $\nu = \{1, 2, \ldots, N\} \setminus \omega$, т.е. P_ω является проектором на подпространство $\mathbb{X}_\omega$ вдоль $\mathbb{X}_\nu$.

Пусть $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$. Обозначим через $\mathbb{L}_\omega$ множество неподвижных точек оператора A_ω.

6.4.4. Лемма. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем класс матриц $\mathfrak{P}_1(A)$. Тогда для любого множества $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ линейная оболочка подпространств $\mathbb{L}_\omega$ и $\mathbb{X}_\omega$ совпадает с $\mathbb{X}$, а $\mathbb{L}_\omega \cap \mathbb{X}_\omega = 0$. Проектор A_ω^∞ на подпространство $\mathbb{L}_\omega$ вдоль $\mathbb{X}_\omega$ коммутирует с A_ω и обладает свойством*

$$(I - A_\omega^\infty)\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_\omega.$$

Если $\nu \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $u_\nu \in \mathbb{X}_\nu$, то

$$A_\omega^\infty(A_\nu x + u_\nu) = A_\omega^\infty(A_{\nu\setminus\omega}x + P_{\nu\setminus\omega}u_\nu), \tag{6.4.4}$$

$$A_\nu A_\omega^\infty = A_{\nu\setminus\omega}A_\omega^\infty \tag{6.4.5}$$

(здесь $A_\omega = P_\omega = A_\omega^\infty = I$, если $\omega = \emptyset$).

Подчеркнем, что матрицы A_ω и A_ν, фигурирующие в условии леммы 6.4.4, не предполагаются принадлежащими классу $\mathfrak{F}$. Из равенств (6.4.4) и (6.4.5) вытекает следствие.

Следствие. *Если $\nu \subseteq \omega$, $u_\nu \in \mathbb{X}_\nu$, то*

$$A_\omega^\infty(A_\nu x + u_\nu) = A_\omega^\infty x, \qquad A_\nu A_\omega^\infty = A_\omega^\infty.$$

Доказательство леммы 6.4.4. Без ограничения общности можно считать, что множество ω имеет вид $\omega = \{1, 2, \ldots, k\}$, где $k \leq N$. Представим матрицу A в виде квадратной блочной матрицы второго порядка, левый верхний блок которой — квадратная матрица порядка k. Тогда в соответствии с предположением о строении множества ω получим:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{\omega\times\omega} & U \\ V & W \end{Vmatrix}.$$

Отсюда

$$A_\omega = \begin{Vmatrix} A_{\omega\times\omega} & U \\ 0 & I \end{Vmatrix}. \tag{6.4.6}$$

По условию леммы $\mathfrak{P}_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$, поэтому система W^ω, подчиненная описываемой уравнением (6.3.3) системе W, нормальна относительно класса $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 6.3.6 уравнение (6.3.4) абсолютно r-асимптотически устойчиво в индуцированном классе правых частей $\mathfrak{F}^\omega \subseteq \mathfrak{P}(A_{\omega\times\omega})$, и по теореме 4.4.16 число 1 не является собственным значением матрицы $A_{\omega\times\omega}$. Значит, определена матрица

$$A_\omega^\infty = \begin{Vmatrix} 0 & (I - A_{\omega\times\omega})^{-1}U \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \tag{6.4.7}$$

порождающая линейный оператор A_ω^∞, который является проектором (т.е. $(A_\omega^\infty)^2 = A_\omega^\infty$), коммутирующим с A_ω. При этом $A_\omega^\infty x = x$, если и только если $A_\omega x = x$, причем $(I - A_\omega^\infty)\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_\omega$ и $A_\omega^\infty \mathbb{X}_\omega = 0$. Следовательно, оператор A_ω^∞ является проектором на подпространство $\mathbb{L}_\omega$ неподвижных точек оператора A_ω вдоль подпространства $\mathbb{X}_\omega$.Отсюда вытекает, что $\mathbb{L}_\omega \cap \mathbb{X}_\omega = 0$ и линейная оболочка подпространств $\mathbb{L}_\omega$ и $\mathbb{X}_\omega$ совпадает с $\mathbb{X}$.

Для доказательства равенства (6.4.4) введем обозначение $A_\nu x + u_\nu = y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$. В силу (6.4.7) значение вектора $A_\omega^\infty y$ определяется лишь теми компонентами y_i вектора y, номера которых не принадлежат ω. Эти компоненты вектора y совпадают с соответствующими компонентами вектора $\tilde{y} = A_{\nu\setminus\omega}x + P_{\nu\setminus\omega}u_\nu$. Поэтому $A_\omega^\infty y = A_\omega^\infty \tilde{y}$, откуда и следует равенство (6.4.4).

При доказательстве равенства (6.4.5) будем считать, что множества ω и ν имеют вид $\omega = \{1, 2, \dots, k\}$, $\nu = \{p, \dots, q\}$, где $1 \le p \le k \le q \le N$. Этого можно добиться подходящей перестановкой строк и столбцов матрицы A. Представим матрицу A в следующей блочной форме:

$$A = \begin{Vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{Vmatrix},$$

где диагональные блоки $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$, $\tilde{a}_{33}$ и $\tilde{a}_{44}$ являются квадратными матрицами порядков p, $k - p$, $q - k$ и $N - q$ соответственно. Тогда

$$A_\omega = \begin{Vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{Vmatrix}, \quad A_\nu = \begin{Vmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{Vmatrix}, \qquad (6.4.8)$$

и

$$A_{\nu\setminus\omega} = \begin{Vmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{Vmatrix}. \qquad (6.4.9)$$

Пусть x — произвольный вектор пространства состояний $\mathbb{X}$ системы W.

Представим $A_\omega^\infty x$ в виде вектора-столбца

$$A_\omega^\infty x = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \tag{6.4.10}$$

с векторными компонентами u_i, размерности которых соответствуют размерностям матричных блоков в представлениях (6.4.8) и (6.4.9). Как видно из (6.4.6) и (6.4.7), $A_\omega^\infty = A_\omega A_\omega^\infty$. Поэтому $A_\omega u = u$, что эквивалентно в силу (6.4.8) равенствам

$$\tilde a_{11}u_1 + \tilde a_{12}u_2 + \tilde a_{13}u_3 + \tilde a_{14}u_4 = u_1,$$

$$\tilde a_{21}u_1 + \tilde a_{22}u_2 + \tilde a_{23}u_3 + \tilde a_{24}u_4 = u_2.$$

С одной стороны (по (6.4.8))

$$A_\nu u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \tilde a_{21}u_1 + \tilde a_{22}u_2 + \tilde a_{23}u_3 + \tilde a_{24}u_4 \\ \tilde a_{31}u_1 + \tilde a_{32}u_2 + \tilde a_{33}u_3 + \tilde a_{34}u_4 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tilde a_{31}u_1 + \tilde a_{32}u_2 + \tilde a_{33}u_3 + \tilde a_{34}u_4 \\ u_4 \end{pmatrix},$$

а с другой, в силу (6.4.9) вектор в правой части последних равенств совпадает с $A_{\nu\setminus\omega}u$. Значит, $A_\nu u = A_{\nu\setminus\omega}u$, что ввиду (6.4.10) равносильно (6.4.5). Лемма 6.4.4 доказана. □

6.4.5. Доказательство теоремы 6.4.2. По условию теоремы уравнение (6.3.3) абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем $\mathfrak{P}_1(A)$. Тогда для любого непустого множества $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ система W^α, подчиненная описываемой уравнением (6.3.3) системе W, нормальна относительно класса $\mathfrak{F}$. Поэтому по теореме 6.3.10 для любого непустого множества $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ найдутся такие число $q_\alpha < 1$ и норма $\|\cdot\|_\alpha$ в подпространстве $\mathbb{X}_\alpha$, что

$$\|A_\omega x\|_\alpha \le \|x\|_\alpha$$

при

$$x \in \mathbb{X}_\alpha, \quad \omega \subseteq \alpha, \quad A_\omega \in \mathfrak{F},$$

и

$$\|A_{\omega_k} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1} x\|_\alpha \le q_\alpha \|x\|_\alpha \tag{6.4.11}$$

при $x \in \mathbb{X}_\alpha$, $\omega_i \subseteq \alpha$, $\bigcup \omega_i = \alpha$, $A_{\omega_i} \in \mathfrak{F}$. Поскольку число различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ конечно, то найдется такое $q < 1$, при котором

$$q_\alpha \le q < 1, \qquad \alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{6.4.12}$$

Пусть $\|\cdot\|$ — та норма в пространстве состояний $\mathbb{X}$ системы W, описываемой уравнением (6.3.3), с помощью которой определяется вариация (6.4.1) решений. Из конечности числа различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ и конечномерности $\mathbb{X}$ вытекает существование единых для всех $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ констант $m, M \in (0, \infty)$, при которых

$$m\|x\| \le \|x\|_\alpha \le M\|x\|, \qquad x \in \mathbb{X}_\alpha. \tag{6.4.13}$$

Так как класс правых частей $\mathfrak{F}$ содержит $\mathfrak{P}_1(A)$, то для любого непустого множества $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ множество решений уравнений (6.3.3) с правыми частями $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющими условию $\omega(n) \subseteq \alpha$, также непусто. Обозначим через $\kappa(\alpha)$ число элементов множества $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$. Докажем индукцией по $k = 1, 2, \ldots, N$ следующее утверждение: существует такое число $\nu_k < \infty$, при котором для каждого решения $x(\cdot)$ уравнения (6.3.3) с правыми частями $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющими условию

$$\omega(n) \subseteq \alpha, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{6.4.14}$$

где $\kappa(\alpha) \le k$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] \le \nu_k \|x(0)\|. \tag{6.4.15}$$

При $k = N$ отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $k = 1$. Рассмотрим решение $x(\cdot)$ уравнения (6.3.3) с правыми частями $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющими при некотором $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $\kappa(\alpha) = 1$, условию (6.4.14). Так как $\omega(n) \subseteq \alpha$ и $\kappa(\alpha) = 1$, то при каждом значении n множество $\omega(n)$ совпадает с α. Следовательно, $x(\cdot)$ является решением уравнения

$$x(n+1) = A_\alpha x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

и потому $x(n) = (A_\alpha)^n x(0)$ при $n \ge 0$. Значит,

$$x(n+1) - x(n) = (A_\alpha)^n (A_\alpha - I) x(0), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{6.4.16}$$

Заметим теперь, что $(A_\alpha - I)x \in \mathbb{X}_\alpha$ для любого вектора x, и $A_\alpha x \in \mathbb{X}_\alpha$ при $x \in \mathbb{X}_\alpha$. Поэтому в силу (6.4.16) $x(n+1) - x(n) \in \mathbb{X}_\alpha$, откуда в силу (6.4.11)

$$\|x(n+1) - x(n)\|_\alpha \le q_\alpha^n \|(A_\alpha - I)x(0)\|_\alpha, \qquad n \ge 0.$$

Но в силу (6.4.13)

$$\|x(n+1) - x(n)\|_\alpha \ge m\|x(n+1) - x(n)\|,$$

$$\|(A_\alpha - I)x(0)\|_\alpha \le M\|A_\alpha - I\|\,\|x(0)\|,$$

а в силу (6.4.12) $q_\alpha \le q$. Поэтому

$$\|x(n+1) - x(n)\| \le q^n \frac{M\|A_\alpha - I\|}{m}\|x(0)\|,$$

откуда

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] = \sum_{n=0}^{\infty} \|x(n+1) - x(n)\| \le$$

$$\le \frac{M\|A_\alpha - I\|}{m}\|x(0)\| \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{M\|A_\alpha - I\|}{(1-q)m}\|x(0)\|.$$

Положив

$$v_1 = \max_{\kappa(\alpha)=1} \frac{M\|A_\alpha - I\|}{(1-q)m},$$

завершим доказательство неравенства (6.4.15) при $k = 1$.

Проведем шаг индукции. Пусть утверждение индукции верно при $k = p - 1$, где $1 < p \le N$. Покажем, что оно верно и для $k = p$. Рассмотрим решение $x(\cdot)$ уравнения (6.3.3) с правыми частями $A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющими при некотором $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $\kappa(\alpha) \le k$, условию (6.4.14). Как отмечалось выше, множество таких решений непусто. Обозначим через η объединение множеств $\omega(n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Если $\eta \ne \alpha$, то $\kappa(\eta) \le k - 1$. При этом для правых частей $A_{\omega(n)}$ уравнения (6.3.3), определяющего рассматриваемое решение $x(\cdot)$, при $n = 0, 1, \ldots$ выполняются включения $\omega(n) \subseteq \eta$, и потому неравенство (6.4.15) выполняется по предположению индукции. Следовательно, интерес представляет только случай, когда $\eta = \alpha$, т.е. $\bigcup_{n=0}^{\infty} \omega(n) = \alpha$. В этом случае можно выбрать такие числа $0 = p_0 < p_1 < \ldots$, при которых

$$\bigcup_{p_i \le n < p_{i+1}} \omega(n) = \alpha, \tag{6.4.17}$$

и

$$\bigcup_{p_i+1\le n<p_{i+1}} \omega(n) \neq \alpha \quad \text{при} \quad p_{i+1} > p_i + 1. \qquad (6.4.18)$$

Если набор чисел p_0, p_1, ... бесконечен, то $p_i \to \infty$ при $i \to \infty$; если же он конечен и состоит из чисел p_0, p_1, ..., p_m, то

$$\bigcup_{p_m+1\le n} \omega(n) = \vartheta \neq \alpha.$$

Поставим в соответствие рассматриваемому решению $x(\cdot)$ функцию $y(\cdot)$, полагая

$$y(n) = x(n) - A_\alpha^\infty x(0), \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad (6.4.19)$$

где A_α^∞ — матрица (6.4.7). Так как при каждом n верно включение $\omega(n) \subseteq \alpha$, то $\omega(n) \setminus \alpha = \emptyset$, и по следствию из леммы 6.4.4 $A_{\omega(n)} A_\alpha^\infty x(0) = A_\alpha^\infty x(0)$. Поэтому

$$A_{\omega(n)} y(n) = A_{\omega(n)} x(n) - A_{\omega(n)} A_\alpha^\infty x(0) = x(n+1) - A_\alpha^\infty x(0) = y(n+1),$$

т.е. функция $y(\cdot)$ является решением того же уравнения

$$y(n+1) = A_{\omega(n)} y(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad (6.4.20)$$

решением которого является $x(\cdot)$. При этом

$$y(n+1) - y(n) = x(n+1) - x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

откуда в силу (6.4.1)

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] = \operatorname{Var}[y(\cdot)]. \qquad (6.4.21)$$

Применим к обеим частям уравнения (6.3.3), определяющего решение $x(\cdot)$, оператор A_α^∞:

$$A_\alpha^\infty x(n+1) = A_\alpha^\infty A_{\omega(n)} x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Так как здесь в силу (6.4.14) $\omega(n) \subseteq \alpha$, то $\omega(n) \setminus \alpha = \emptyset$, и по лемме 6.4.4

$$A_\alpha^\infty A_{\omega(n)} x(n) = A_\alpha^\infty A_{\omega(n)\setminus\alpha} x(n) = A_\alpha^\infty x(n).$$

Значит, $A_\alpha^\infty x(n+1) = A_\alpha^\infty x(n)$ при $n = 0, 1, \ldots$, откуда

$$A_\alpha^\infty x(n) = A_\alpha^\infty x(0), \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Следовательно, в силу (6.4.19) $y(n) = (I - A_\alpha^\infty)x(n)$ при $n \geq 0$. Но тогда по лемме 6.4.4

$$y(n) \in \mathbb{X}_\alpha, \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{6.4.22}$$

В силу (6.4.20) для каждой пары чисел p_i и p_{i+1}, определенных выше, верно соотношение

$$y(p_{i+1}) = A_{\omega(p_{i+1}-1)} \cdots A_{\omega(p_i)} y(p_i).$$

Используя для оценки нормы вектора $y(p_{i+1})$ неравенство (6.4.11) (условия которого в силу (6.4.17) и (6.4.22) выполнены), получим: $\|y(p_{i+1})\|_\alpha \leq q_\alpha \|y(p_i)\|_\alpha$, откуда

$$\|y(p_i)\|_\alpha \leq q_\alpha^i \|y(p_0)\|_\alpha = \|y(0)\|_\alpha, \qquad i = 0, 1, \dots .$$

Отсюда в силу (6.4.12) и (6.4.13) следуют неравенства

$$\|y(p_i)\| \leq \frac{M}{m} q^i \|y(0)\|, \qquad i = 0, 1, \dots . \tag{6.4.23}$$

В дальнейших рассуждениях будем считать набор чисел $p_0, p_1, \dots$ бесконечным; случай конечного набора рассматривается аналогично. Представим число $\mathrm{Var}\,[y(\cdot)]$ в виде суммы

$$\mathrm{Var}\,[y(\cdot)] = \sum_{i=0}^{\infty} s_i, \tag{6.4.24}$$

где

$$s_i = \sum_{n=p_i}^{p_{i+1}-1} \|y(n+1) - y(n)\|, \qquad i = 0, 1, \dots .$$

Положим

$$r = \max_{\omega \subseteq \{1,2,\dots,N\}} \|A_\omega\|, \qquad R = \max_{\omega \subseteq \{1,2,\dots,N\}} \|A_\omega - I\|, \tag{6.4.25}$$

и оценим числа s_i. Будем различать два случая: $p_{i+1} = p_i + 1$ и $p_{i+1} > p_i + 1$.

Если $p_{i+1} = p_i + 1$, то $s_i = \|y(p_i + 1) - y(p_i)\|$. Здесь в силу (6.4.20) $y(p_i + 1) = A_{\omega(p)} y(p_i)$. Поэтому в силу (6.4.25) $s_i \leq R\|y(p_i)\|$, а тогда в силу (6.4.23) $s_i \leq (MR/m) q^i \|y(0)\|$.

Если $p_{i+1} > p_i + 1$, то

$$s_i = \|y(p_i + 1) - y(p_i)\| + \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}-1} \|y(n+1) - y(n)\|.$$

Здесь для первого слагаемого в правой части аналогично предыдущему случаю можно получить оценку

$$\|y(p_i + 1) - y(p_i)\| \le \frac{MR}{m} q^i \|y(0)\|. \tag{6.4.26}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части заметим, что при $p_i + 1 \le n < p_{i+1}$ векторы $y(n)$ удовлетворяют уравнению (6.4.20) с матрицами $A_{\omega(n)}$ из рассматриваемого класса, где для множеств $\omega(n)$ имеют место соотношения (6.4.18). Следовательно, $\bigcup_{p_i+1\le n<p_{i+1}} \omega(n) = \vartheta$, где $\vartheta \ne \alpha$, и потому $\kappa(\vartheta) \le k - 1$. Тогда по предположению индукции

$$\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}-1} \|y(n + 1) - y(n)\| \le \nu_{k-1} \|y(p_i + 1)\|.$$

Здесь в силу (6.4.20) $y(p_i+1) = A_{\omega(p_i)} y(p_i)$. Поэтому в силу (6.4.25) и (6.4.23)

$$\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}-1} \|y(n + 1) - y(n)\| \le \nu_{k-1} \frac{Mr}{m} q^i \|y(0)\|.$$

Отсюда и из (6.4.26) вытекает следующая оценка

$$s_i \le (R + r\nu_{k-1}) \frac{M}{m} q^i \|y(0)\|, \tag{6.4.27}$$

которая верна как в случае $p_{i+1} > p_i + 1$, так и в случае $p_{i+1} = p_i + 1$.

Оценив слагаемые s_i в (6.4.24) с помощью (6.4.27), придем к следующему неравенству:

$$\operatorname{Var}[y(\cdot)] \le (R + r\nu_{k-1}) \frac{M}{m} \|y(0)\| \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{(R + r\nu_{k-1})M}{(1 - q)m} \|y(0)\|.$$

Осталось заметить, что в силу (6.4.19) $y(0) = (I - A_\alpha^\infty) x(0)$. Значит, в силу (6.4.21)

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] \le \frac{(R + r\nu_{k-1})M}{(1 - q)m} \|I - A_\alpha^\infty\| \, \|x(0)\|.$$

Положив

$$\nu_k = \max_{\alpha\subseteq\{1,2,\ldots,N\}} \frac{(R + r\nu_{k-1})M}{(1 - q)m} \|I - A_\alpha^\infty\|,$$

получим требуемую оценку (6.4.15).

Шаг индукции проведен. Теорема 6.4.2 доказана. □

6.4.6. Будем говорить, что порождающий класс правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ обладает P-свойством, если для произвольного набора матриц A_{ω_1}, A_{ω_2}, $\dots$, $A_{\omega_k} \in \mathfrak{F}$ найдутся такие матрицы $A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \dots, A_{\nu_p} \in \mathfrak{F}$, что

$$\nu_1 \cup \nu_2 \cup \dots \cup \nu_p = \{1, 2, \dots, N\} \setminus (\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_k).$$

В теореме 6.4.2 вместо класса правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащего множество матриц $\mathfrak{P}_1(A)$, можно рассматривать произвольный класс правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, обладающий P-свойством. Убедимся в этом. Если класс $\mathfrak{F}$ обладает P-свойством, то вместе с любыми двумя матрицами A_{ω_1}, $A_{\omega_2} \in \mathfrak{F}$ ему принадлежит и матрица A_{ω_0}, где $\omega_0 = \omega_1 \cap \omega_2$. Пусть $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ — некоторый максимальный набор (т.е. не являющийся собственной частью другого такого же набора) непустых попарно непересекающихся подмножеств множества $\{1, 2, \dots, N\}$, для которых $A_{\vartheta_1}, A_{\vartheta_2}, \dots, A_{\vartheta_m} \in \mathfrak{F}$. Если при этом класс $\mathfrak{F}$ обладает P-свойством, то $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \cup \dots \cup \vartheta_m = \{1, 2, \dots, N\}$ и перестановкой строк и столбцов матрицы A можно добиться того, что множества ϑ_i предстанут в виде непересекающихся смежных подынтервалов интервала целых чисел $[1, N]$:

$$\vartheta_i = \{q_i + 1, q_i + 2, \dots, q_{i+1}\}, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $0 = q_1 < q_2 < \dots < q_{m+1} = N$. Разобьем матрицу $A = (a_{ij})$ на блоки $\tilde{a}_{rs}$ $(1 \le r, s \le m)$, состоящие из элементов a_{ij} матрицы A с индексами $i = q_r + 1$, $\dots$, q_{r+1}, $j = q_s + 1$, $\dots$, q_{s+1}. Получившуюся блочную матрицу обозначим через $\tilde{A}$. При описанном переходе от A к $\tilde{A}$ класс матриц $\mathfrak{F}$ перейдет в некоторый класс матриц $\tilde{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{P}(\tilde{A})$. При этом $\tilde{\mathfrak{F}}$ будет содержать множество матриц $\mathfrak{P}_1(\tilde{A})$, если класс $\mathfrak{F}$ обладал P-свойством.

6.4.7. Согласно следствию из теоремы 6.4.2 каждое решение абсолютно r-асимптотически устойчивого в классе $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{P}_1(A) \subseteq \mathfrak{F})$ уравнения (6.3.3) имеет предел при $n \to \infty$. В некоторых случаях найти значение этого предела совсем просто.

6.4.8. Теорема. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем $\mathfrak{P}_1(A)$. Пусть α — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \dots, N\}$, а $x(\cdot)$ — решение уравнения*

$$x(n+1) = A_{\omega(n)} x(n), \qquad \omega(n) \subseteq \alpha, \ A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}. \tag{6.4.28}$$

Если при этом каждое $i \in \alpha$ принадлежит бесконечному количеству множеств $\omega(n)$, то $\lim_{n\to\infty} x(n) = A_\alpha^\infty x(0)$.

Следствие. *Если* $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \cdots \cup \alpha_k$, *причем* $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_k} \in \mathfrak{F}$, *то* $\lim_{n\to\infty} (A_{\alpha_k} \cdots A_{\alpha_2} A_{\alpha_1})^n = A_\alpha^\infty$.

Доказательство. В условиях теоремы по лемме 6.4.4 матрица A_α^∞ определена для каждого множества $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ и является проектором на подпространство $\mathbb{L}_\alpha$ (неподвижных точек матрицы A_α) вдоль подпространства $\mathbb{X}_\alpha$. Положим

$$y(n) = A_\alpha^\infty x(n), \quad z(n) = x(n) - A_\alpha^\infty x(n), \qquad n \geq 0. \tag{6.4.29}$$

Так как в силу (6.4.28) $\omega(n) \subseteq \alpha$, то по следствию из леммы 6.4.4 $A_\alpha^\infty A_{\omega(n)} = A_{\omega(n)} A_\alpha^\infty = A_\alpha^\infty$. Поэтому

$$y(n+1) = A_\alpha^\infty x(n+1) = A_\alpha^\infty A_{\omega(n)} x(n) = A_\alpha^\infty x(n) = y(n), \qquad n \geq 0,$$

откуда $y(n+1) = \cdots = y(0) = A_\alpha^\infty x(0)$. Значит, в силу (6.4.29)

$$x(n) = z(n) + A_\alpha^\infty x(0), \qquad n \geq 0. \tag{6.4.30}$$

В силу (6.4.29) $z(n) = (I - A_\alpha^\infty) x(n)$. А так как по лемме 6.4.4 $(I - A_\alpha^\infty)\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_\alpha$, то

$$z(n) \in \mathbb{X}_\alpha, \qquad n \geq 0.$$

Кроме того, как отмечалось выше, $A_\alpha^\infty A_{\omega(n)} = A_{\omega(n)} A_\alpha^\infty$. Поэтому

$$(I - A_\alpha^\infty) A_{\omega(n)} = A_{\omega(n)} (I - A_\alpha^\infty),$$

а тогда

$$z(n+1) = (I - A_\alpha^\infty) x(n+1) = (I - A_\alpha^\infty) A_{\omega(n)} x(n) = \\ = A_{\omega(n)} (I - A_\alpha^\infty) x(n) = A_{\omega(n)} z(n).$$

Следовательно, функция $z(\cdot)$ является решением уравнения

$$z(n+1) = A_{\omega(n)} z(n), \qquad \omega(n) \subseteq \alpha, \ A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F}. \tag{6.4.31}$$

Заметим теперь, что в условиях доказываемой теоремы по теореме 6.3.6 система W^α, подчиненная описываемой уравнением (6.3.3) системе W, абсолютно r-асимптотически устойчива в индуцированном классе правых частей $\mathfrak{F}^\alpha$. Но как отмечалось в п.6.3.8, одной из форм описания динамики подчиненной системы W^α являются уравнения (6.3.26), (6.3.27), с точностью до обозначений совпадающие с уравнением (6.4.31). А так как по условию теоремы каждая компонента $z_i(n)$ функции $z(n)$ с номерами $i \in \alpha$ претерпевает бесконечное число коррекций на интервале $[0, \infty)$, то отсюда следует стремление $z(n)$ к нулю при $n \to \infty$. Тогда (см. выражение (6.4.30)) $x(n) \to A_\alpha^\infty x(0)$ при $n \to \infty$. Теорема 6.4.8 доказана. □

Для доказательства следствия рассмотрим разностное уравнение (6.4.28) с множествами $\omega(n)$, определяемыми равенствами

$$\omega(kn) = \alpha_1,\ \omega(kn+1) = \alpha_2,\ \ldots,\ \omega(kn+k-1) = \alpha_k, \qquad n \ge 0.$$

Пусть $x(\cdot)$ — решение уравнения (6.4.28), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x$. Тогда по теореме 6.4.2 $x(n) \to A_\alpha^\infty x$. С другой стороны, $x(kn) = (A_{\alpha_k} \cdots A_{\alpha_2} A_{\alpha_1})^n x$. Отсюда

$$(A_{\alpha_k} \cdots A_{\alpha_2} A_{\alpha_1})^n\, x \to A_\alpha^\infty x.$$

В силу конечномерности вектора x последнее соотношение влечет сходимость последовательности матриц $(A_{\alpha_k} \cdots A_{\alpha_2} A_{\alpha_1})^n$ к A_α^∞. Следствие доказано. □

6.4.9. Выше (см. гл. 4, а также § 6.2) было показано, что многие свойства эквивалентных разностных уравнений, описывающих динамику рассинхронизованных систем, выражаются в терминах эквивалентных норм, обладающих рядом специальных свойств. Укажем еще одно утверждение подобного рода. Напомним, что через $\mathfrak{R}_0(\mathfrak{F})$ обозначается множество определенных при $n \ge 0$ решений всех уравнений (6.3.3) с правыми частями из класса $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Положим

$$\|x\|^* = \sup_{x(\cdot)\in\mathfrak{R}_0,\, x(0)=x} \operatorname{Var}[x(\cdot)]. \tag{6.4.32}$$

6.4.10. Теорема. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в порождающем классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$*, содержащем множество матриц* $\mathfrak{P}(A)$*. Тогда равенство* (6.4.32) *определяет норму, причем найдется такое* $\gamma > 0$*, что*

$$\|A_\omega x\|^* + \gamma\|(I - A_\omega)x\|^* \le \|x\|^*, \qquad A_\omega \in \mathfrak{F}. \tag{6.4.33}$$

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — норма, с помощью которой определяется (см.равенство (6.4.1)) вариация решений $\operatorname{Var}[x(\cdot)]$. Тогда по теореме 6.4.2 найдется такая константа $v < \infty$, что $\operatorname{Var}[x(\cdot)] \le v\|x(0)\|$. Поэтому

$$\|x\|^* \le v\|x\| \tag{6.4.34}$$

для любого вектора x. Неравенство треугольника для функции $\|x\|^*$ очевидно. Покажем, что равенство $\|x\|^* = 0$ имеет место только при $x = 0$.

Зададимся произвольным целым числом $i \in [1, N]$. По условию теоремы матрица $A_i = A_{\{i\}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Рассмотрим функцию $x(n)(x(0) = 0)$, удовлетворяющую уравнению

$$x(n+1) = A_i x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

В силу (6.4.1) $\operatorname{Var}[x(\cdot)] \ge \|x(1) - x(0)\| = \|(A_i - I)x\|$. Так как $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$, то из уравнения (6.4.31) вытекает оценка $\|x\|^* \ge \|(A_i - I)x\|$. Отсюда в силу произвольности числа $i \in [1, N]$ получаем:

$$\|x\|^* \ge \max_{i \in [1,N]} \|(A_i - I)x\|. \tag{6.4.35}$$

Если теперь $\|x\|^* = 0$, то в силу (6.4.35)

$$(A_i - I)x = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{6.4.36}$$

Так как $A - I = (A_1 - I) + \cdots + (A_N - I)$, то из (6.4.36) следует равенство

$$(A - I)x = 0. \tag{6.4.37}$$

Но в силу абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (6.3.3) в классе $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ число 1 не является собственным значением матрицы A (см. теорему 4.4.16). Поэтому равенство (6.4.37) возможно только при $x = 0$.

Итак, $\|x\|^*$ действительно является нормой. Установим справедливость неравенства (6.4.33). Пусть $A_\omega \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим произвольную функцию $x(\cdot) \in \mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$, удовлетворяющую начальному условию $x(0) = A_\omega x$. Определим функцию $y(\cdot)$, полагая $y(0) = x$, $y(n) = x(n-1)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Функция $y(\cdot)$ также принадлежит $\mathfrak{N}_0(\mathfrak{F})$. При этом в силу (6.4.1)

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] = \operatorname{Var}[y(\cdot)] - \|y(1) - y(0)\|.$$

Но по определению функции $y(\cdot)$ имеют место равенства $y(0) = x$, $y(1) = x(0) = A_\omega x$. Следовательно,

$$\operatorname{Var}[x(\cdot)] = -\|(I - A_\omega)x\| + \operatorname{Var}[y(\cdot)].$$

Поэтому

$$\sup_{x(\cdot)\in\mathfrak{R}_0,\, x(0)=A_\omega x} \mathrm{Var}\,[x(\cdot)] = -\|(I - A_\omega)x\| + \sup_{y(\cdot)\in\mathfrak{R}_0(\mathfrak{F}),\, y(0)=x,\, y(1)=A_\omega x} \mathrm{Var}\,[y(\cdot)] \le$$
$$\le -\|(I - A_\omega)x\| + \sup_{y(\cdot)\in\mathfrak{R}_0,\, y(0)=x} \mathrm{Var}\,[y(\cdot)],$$

откуда в силу (6.4.32) $\|A_\omega x\|^* \le -\|(I - A_\omega)x\| + \|x\|^*$. Перенеся слагаемое $\|(I - A_\omega)x\|$ в левую часть получившегося неравенства и оценив его снизу (см. (6.4.34)) числом $\|(I - A_\omega)x\|^*/\nu$, получаем:

$$\|A_\omega x\|^* + \frac{1}{\nu}\|(I - A_\omega)x\|^* \le \|x\|^*.$$

Обозначив теперь $1/\nu$ через γ, приходим к требуемому неравенству (6.4.33). Теорема 6.4.10 доказана. □

6.4.11. Обратное к теореме 6.4.10 утверждение, вообще говоря, неверно. Например, если $A = I$, то в любой норме для помесей матрицы A верно неравенство (6.4.33). Однако уравнение (6.3.3) не будет абсолютно r-асимптотически устойчивым ни в одном классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Тем не менее, в некоторых случаях утверждение теоремы 6.4.10 допускает обращение.

Пусть матрица A такова, что для любого непустого множества $\omega \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ число 1 не является собственным значением главной диагональной подматрицы $A_{\omega\times\omega}$. Пусть в некоторой норме $\|\cdot\|^*$ для любой помеси A_ω выполняется неравенство (6.4.33), где $\gamma > 0$. Тогда уравнение (6.3.3) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$. Для доказательства достаточно показать, что в норме $\|\cdot\|^*$ помеси матрицы A удовлетворяют условию теоремы 4.2.5.

§ 6.5. Основная теорема

В настоящем параграфе доказывается центральное утверждение главы — теорема 6.5.1 об эквивалентности понятий абсолютной устойчивости по Перрону и абсолютной r-асимптотической устойчивости. Важным следствием этого утверждения является корректность абсолютной r-асимптотической устойчивости разностного уравнения в классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ по отношению к малым возмущениям матрицы A.

6.5.1. Теорема. *Разностное уравнение* (6.3.3) *абсолютно устойчиво по Перрону в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, *содержащем множество матриц* $\mathfrak{P}_1(A)$, *если и только если оно абсолютно r-асимптотически устойчиво в этом классе.*

Доказательство. Так как любой класс правых частей, содержащий множество матриц $\mathfrak{P}_1(A)$, порождающий, то по теореме 6.2.8 из абсолютной устойчивости по Перрону уравнения (6.3.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}$ следует его абсолютная r-асимптотическая устойчивость в этом классе. В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Докажем утверждение теоремы в другую сторону. Пусть уравнение (6.3.3) абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F}$. В этом случае по теореме 6.4.10 можно считать, что при некотором $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$\|A_\alpha x\| + \gamma \|(I - A_\alpha)x\| \le \|x\| (A_\alpha \in \mathfrak{F}). \tag{6.5.1}$$

Сведем вспомогательные факты, необходимые для доказательства теоремы, в следующую лемму.

6.5.2. Лемма. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, *содержащем множество матриц* $\mathfrak{P}_1(A)$. *Тогда существуют такие константы* c_1, c_2, $c_3 \in (0, \infty)$, *что для любых множеств* $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ *верны неравенства*

$$\|(I - A_\beta)x\| + \|(I - A_\alpha)A_\beta x\| \ge c_1 \|(I - A_{\alpha\cup\beta})x\|, \tag{6.5.2}$$

$$\|(I - A_\alpha^\infty)x\| \le c_2 \|(I - A_\alpha)x\|, \tag{6.5.3}$$

$$\|A_\alpha^\infty x\| \le \|x\| - c_3 \|(I - A_\alpha)x\|. \tag{6.5.4}$$

Отметим, что неравенства (6.5.2) и (6.5.3) имеют место при произвольном выборе нормы $\|\cdot\|$. В отличие от (6.5.1) неравенство (6.5.4) верно при любом множестве $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$.

6.5.3. Доказательство леммы 6.5.2. Докажем неравенство (6.5.2). По лемме 6.4.4 для любого множества $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ определен оператор A_ω^∞ проектирования на подпространство $\mathbb{L}_\omega$ неподвижных точек оператора A_ω вдоль подпространства $\mathbb{X}_\omega$. Представим произвольный вектор x в виде суммы

$$x = A_{\alpha\cup\beta}^\infty x + u, \tag{6.5.5}$$

тогда $u = (I - A^{\infty}_{\alpha\cup\beta})x$. По следствию из леммы 6.4.4

$$(I - A_\beta)A^{\infty}_{\alpha\cup\beta}x = 0, \quad (I - A_\alpha)A_\beta A^{\infty}_{\alpha\cup\beta}x = 0, \quad (I - A_{\alpha\cup\beta})A^{\infty}_{\alpha\cup\beta}x = 0.$$

Поэтому, подставив выражение (6.5.5) для x в (6.5.2), убедимся в эквивалентности неравенства (6.5.2) неравенству

$$\|(I - A_\beta)u\| + \|(I - A_\alpha)A_\beta u\| \geq c_1\|(I - A_{\alpha\cup\beta})u\|. \tag{6.5.6}$$

Но по лемме 6.4.4 $(I - A^{\infty}_{\alpha\cup\beta})\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$. Значит, $u = (I - A^{\infty}_{\alpha\cup\beta})x \in \mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$, и потому для доказательства (6.5.2) достаточно установить справедливость (6.5.6) при $u \in \mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$.

Предположим, что (6.5.6) неверно. Тогда найдется последовательность векторов $u_n \in \mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$, $\|u_n\| = 1$, для которых

$$\|(I - A_\beta)u_n\| + \|(I - A_\alpha)A_\beta u_n\| \leq \varepsilon_n\|(I - A_{\alpha\cup\beta})u_n\|, \tag{6.5.7}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как подпространство $\mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$ конечномерно, то последовательность $\{u_n\}$ можно считать сходящейся к некоторому вектору

$$u_* \in \mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}, \qquad \|u_*\| = 1. \tag{6.5.8}$$

Правая часть неравенства (6.5.7) при каждом значении n оценивается сверху числом

$$\varepsilon_n\|I - A_{\alpha\cup\beta}\|\,\|u_n\| = \varepsilon_n\|I - A_{\alpha\cup\beta}\|,$$

и потому стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу в (6.5.7), получаем равенство

$$\|(I - A_\alpha)A_\beta u_*\| + \|(I - A_\beta)u_*\| = 0.$$

Следовательно, $(I - A_\beta)u_* = 0$ и $(I - A_\alpha)A_\beta u_* = 0$, что равносильно равенствам $(I - A_\beta)u_* = 0$ и $(I - A_\alpha)u_* = 0$. Отсюда вытекает (достаточно расписать соответствующие векторные равенства покомпонентно), что $(I - A_{\alpha\cup\beta})u_* = 0$. В силу последнего равенства $u_* \in \mathbb{L}_{\alpha\cup\beta}$, что противоречит (6.5.8), поскольку по лемме 6.4.4 $\mathbb{X}_{\alpha\cup\beta} \cap \mathbb{L}_{\alpha\cup\beta} = 0$. Полученное противоречие доказывает неравенство (6.5.6) для $u \in \mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$, а с ним — и неравенство (6.5.2).

Докажем неравенство (6.5.3). По лемме 6.4.4 подпространство $\mathbb{X}_\alpha$ инвариантно относительно оператора A_α, а значит, — и оператора $I - A_\alpha$. При этом $\mathbb{X}_\alpha$ пересекается с подпространством $\mathbb{L}_\alpha$ нулей оператора $I - A_\alpha$ только в точке $x = 0$. Следовательно, сужение оператора $I - A_\alpha$ на подпространство $\mathbb{X}_\alpha$ обратимо, а потому найдется такая константа $c_\alpha > 0$, что

$$\|(I - A_\alpha)u\| \geq c_\alpha \|u\|, \qquad u \in \mathbb{X}_\alpha. \tag{6.5.9}$$

Представим теперь произвольный вектор x в виде суммы $x = A_\alpha^\infty x + (I - A_\alpha^\infty)x$. Тогда

$$(I - A_\alpha)x = (I - A_\alpha)A_\alpha^\infty x + (I - A_\alpha)(I - A_\alpha^\infty)x.$$

Здесь по следствию из леммы 6.4.4 слагаемое $(I - A_\alpha)A_\alpha^\infty x$ равно нулю. Поэтому $(I - A_\alpha)x = (I - A_\alpha)(I - A_\alpha^\infty)x$. Но так как $(I - A_\alpha^\infty)x \in \mathbb{X}_\alpha$, то в силу (6.5.9) имеют место соотношения $\|(I - A_\alpha^\infty)x\| = \|(I - A_\alpha)(I - A_\alpha^\infty)x\| \geq c_\alpha \|(I - A_\alpha)x\|$. Отсюда в силу конечности числа различных подмножеств α множества $\{2, 3, \ldots, N\}$ следует неравенство (6.5.3).

Осталось доказать неравенство (6.5.4). Пусть множество α состоит из чисел $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. По условию леммы каждая матрица $A_{i_j} = A_{\{i_j\}}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, принадлежит классу $\mathfrak{F}$. Поэтому по следствию из теоремы 6.4.8

$$A_\alpha^\infty = \lim_{n\to\infty} \left(A_{i_1} \cdots A_{i_k}\right)^n. \tag{6.5.10}$$

Но так как в силу неравенства (6.5.1) $\|A_{i_j}\| \leq 1$ при $j = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\| \left(A_{i_1} \cdots A_{i_k}\right)^n x\| \leq \|A_{i_1} \cdots A_{i_k} x\|, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Переходя в полученных неравенствах к пределу, в силу (6.5.10) получаем оценку

$$\|A_\alpha^\infty x\| \leq \|A_{i_1} \cdots A_{i_k} x\|. \tag{6.5.11}$$

В силу (6.5.1) справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\|A_{i_1} \cdots A_{i_k} x\| &\leq \|A_{i_2} \cdots A_{i_k} x\| - \gamma \|(I - A_{i_1})A_{i_2} \cdots A_{i_k} x\|, \\
\|A_{i_2} \cdots A_{i_k} x\| &\leq \|A_{i_3} \cdots A_{i_k} x\| - \gamma \|(I - A_{i_2})A_{i_3} \cdots A_{i_k} x\|, \\
&\ldots \\
\|A_{i_k} x\| &\leq \|x\| - \gamma \|(I - A_{i_k})x\|.
\end{aligned}$$

Сложив эти неравенства друг с другом, а затем — с неравенством (6.5.11), получим:

$$\|A_\alpha^\infty x\| \leq \|x\| - \gamma\sigma(x), \tag{6.5.12}$$

где

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{k} \|(I - A_{i_j})A_{i_{j+1}} \cdots A_{i_k}x\|.$$

Заметим теперь, что при $k = 2$ сумма $\sigma(x)$ совпадает с левой частью неравенства (6.5.2), если положить $\alpha = \{i_1\}$, $\beta = \{i_2\}$. Поэтому, аналогично (6.5.2) можно доказать неравенство

$$\sigma(x) \geq \tilde{c}_\alpha \|(I - A)_\alpha x\|, \qquad \tilde{c}_\alpha > 0.$$

Из полученной оценки функции $\sigma(x)$, неравенства (6.5.12) и конечности числа различных подмножеств α множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ вытекает неравенство (6.5.4). Лемма 6.5.2 доказана. □

6.5.4. Продолжим доказательство теоремы 6.5.1. Обозначим через $\kappa(\alpha)$ число элементов множества $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$. Если $\alpha = \emptyset$, то положим $\kappa(\alpha) = 0$. Покажем, что при подходящем выборе чисел

$$1 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{N-1} \tag{6.5.13}$$

для помесей матрицы A в норме $\|\cdot\|_*$, определяемой равенством

$$\|x\|_* = \max_{\alpha \subset \{1,2,\ldots,N\}} \mu_{\kappa(\alpha)} \|A_\alpha^\infty x\|, \tag{6.5.14}$$

выполнены условия теоремы 6.2.2, т.е. найдется такое число $\delta > 0$, при котором условия

$$A_\beta \in \mathfrak{F}, \quad b_\beta \in \mathbb{X}_\beta, \quad \|b_\beta\|_* \leq \delta \|x\|_*, \qquad \beta \neq \emptyset, \tag{6.5.15}$$

влекут неравенство

$$\|A_\beta x + b_\beta\|_* \leq \|x\|_*. \tag{6.5.16}$$

Отсюда по теореме 6.2.2 будет следовать абсолютная устойчивость по Перрону уравнения (6.3.3) в классе правых частей $\mathfrak{F}$.

Геометрически, процедура (6.5.14) построения нормы $\|\cdot\|_*$ по норме $\|\cdot\|$ заключается в «отсечении» от единичного шара в норме $\|\cdot\|$ «шапочек», окружающих места пересечения подпространств неподвижных точек матриц A_α со сферой $\|x\| = 1$ (см. рис. 6.2).

Заметим, что функция $\|x\|_*$, определяемая равенством (6.5.14), действительно является нормой. В самом деле, неравенство треугольника для нее очевидно, и она положительно однородна. А так как среди множеств

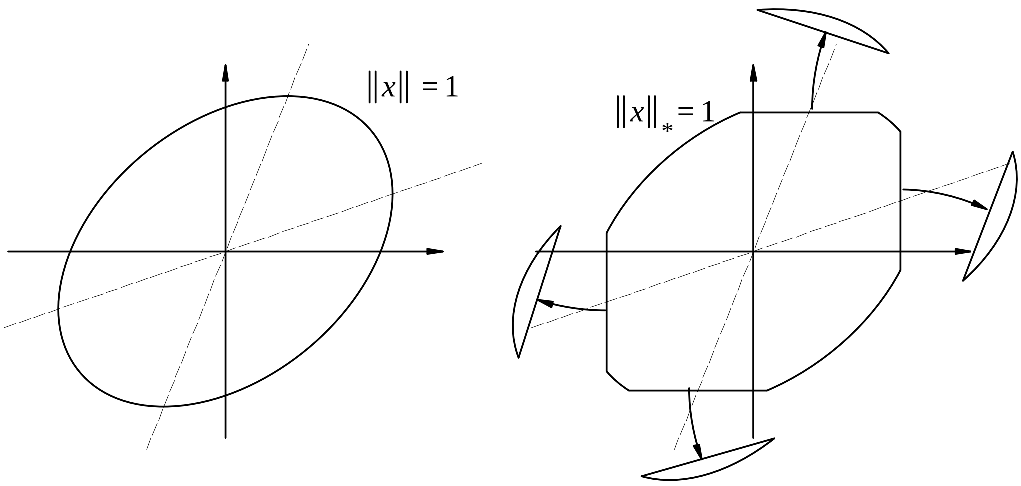

Рис. 6.2. Иллюстрация процедуры (6.5.14) «отсечения шапочек» от единичного шара при доказательстве абсолютной устойчивости системы по Перрону

$\alpha \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ имеется пустое множество, для которого $A_\emptyset = I$, $\kappa(\emptyset) = 0$, $\mu_0 = 1$, то $\|x\|_* \geq \|x\|$. С другой стороны по лемме 6.5.2 (см. неравенство (6.5.4)) $\|A_\alpha^\infty x\| \leq \|x\|$, откуда в силу (6.5.13) $\|x\|_* \leq \mu_{N-1}\|x\|$. Поэтому

$$\|x\| \leq \|x\|_* \leq \mu_{N-1}\|x\|, \tag{6.5.17}$$

и $\|x\|_* = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Значит, $\|\cdot\|_*$ — норма.

Для доказательства неравенства (6.5.16) достаточно показать, что для любых двух множеств $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ и $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ из (6.5.15) вытекает неравенство

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \leq \|x\|_*. \tag{6.5.18}$$

Доказательство этого неравенства будем проводить по-разному, в зависимости от того, какой из трех случаев: 1) $\beta \subseteq \alpha$, 2) $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \ldots, N\}$ или 3) $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta \neq \{1, 2, \ldots, N\}$ имеет место.

Случай 1: $\beta \subseteq \alpha$. В силу условий (6.5.15) и следствия из леммы 6.4.4 справедливо равенство $A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta) = A_\alpha^\infty x$. Поэтому неравенство (6.5.18) вытекает из определения нормы $\|\cdot\|_*$.

Случай 2: $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \ldots, N\}$. По лемме 6.5.2 (см. (6.5.4)) справедлива цепочка неравенств

$$\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \le \|A_\beta x + b_\beta\| - c_3\|(I - A_\alpha)A_\beta x + b_\beta\| \le$$
$$\le \|A_\beta x\| - c_3\|(I - A_\alpha)A_\beta x\| + (1 + c_3\|I - A_\alpha\|)\|b_\beta\|. \quad (6.5.19)$$

Положим

$$c_4 = \max_{\alpha\subset\{1,2,\ldots,N\}} (1 + c_3\|I - A_\alpha\|).$$

Тогда в силу (6.5.15) и (6.5.17) третье слагаемое в правой части (6.5.19) оценивается следующим образом: $(1 + c_3\|I - A_\alpha\|)\|b_\beta\| \le c_4\mu_{N-1}\delta\|x\|$. А в силу (6.5.1) и (6.5.15) первое слагаемое в правой части (6.5.19) не больше числа $\|x\| - \gamma\|(I - A_\beta)x\|$. Значит,

$$\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \le (1 + c_4\mu_{N-1}\delta)\|x\| - \gamma\|(I - A_\beta)x\| - c_3\|(I - A_\alpha)A_\beta x\|.$$

Обозначим наименьшее из чисел γ и c_3 через $c_5 > 0$. Тогда по лемме 6.5.2 (см. неравенство (6.5.2))

$$\gamma\|(I-A_\beta)x\|+c_3\|(I-A_\alpha)A_\beta x\| \ge c_5(\|(I-A_\beta)x\|+\|(I-A_\alpha)A_\beta x\|) \ge c_1c_5\|(I-A_{\alpha\cup\beta})x\|.$$

Поэтому

$$\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \le (1 + c_4\mu_{N-1}\delta)\|x\| - c_1c_5\|(I - A_{\alpha\cup\beta})x\|. \quad (6.5.20)$$

В рассматриваемом случае выполняется равенство $\alpha\cup\beta = \{1, 2, \ldots, N\}$, а значит, $A_{\alpha\cup\beta} = A$. Но в силу абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (6.3.3) в классе $\mathfrak{F}$ число 1 не является собственным значением матрицы A (см. теорему 4.4.16). Поэтому матрица $I - A$ обратима, и при некотором $c_6 > 0$ верна оценка $\|(I - A_{\alpha\cup\beta})x\| = \|(I - A)x\| > c_6\|x\|$. Отсюда и из (6.5.20) получаем:

$$\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \le (1 - c_1c_5c_6 + c_4\mu_{N-1}\delta)\|x\|.$$

Но так как в силу (6.5.13) $\mu_{\kappa(\alpha)} \le \mu_{N-1}$ для любого собственного подмножества α множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, то

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \le \mu_{N-1}(1 - c_1c_5c_6 + c_4\mu_{N-1}\delta)\|x\|. \quad (6.5.21)$$

Пусть теперь числа μ_{N-1} и δ удовлетворяют условию

$$\mu_{N-1}(1 - c_1c_5c_6 + c_4\mu_{N-1}\delta) < 1. \quad (6.5.22)$$

Тогда правая часть (6.5.21) не превосходит $\|x\|$, а значит, в силу (6.5.17) она не превосходит и $\|x\|_*$. Следовательно, при выполнении условия (6.5.22) выполняется и неравенство (6.5.18).

Случай 3: $\beta \not\subseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta \neq \{1, 2, \ldots, N\}$. Поскольку множество α является собственной частью множества $\alpha \cup \beta$, а последнее в силу условия $\alpha \cup \beta \neq \{1, 2, \ldots, N\}$ является собственной частью множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, то $\kappa(\alpha) \leq N - 2$. Покажем, что при выполнении условия (6.5.15) для каждого вектора x либо

$$\mu_{\kappa(\alpha)} \|A_\alpha^\infty (A_\beta x + b_\beta)\| \leq \|x\|, \tag{6.5.23}$$

либо это неравенство не выполнено и имеет место неравенство

$$\mu_{\kappa(\alpha)} \|A_\alpha^\infty (A_\beta x + b_\beta)\| \leq \mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)} \|A_{\alpha\cup\beta}^\infty x\|. \tag{6.5.24}$$

Так как по определению нормы $\|\cdot\|_*$ и в силу условия $\alpha \cup \beta \neq \{1, 2, \ldots, N\}$ правые части обоих неравенств (6.5.23) и (6.5.24) не превосходят $\|x\|_*$, то из (6.5.23) и (6.5.24) вытекает (6.5.18).

Обозначим $\kappa(\alpha)$ через k. Предположим, что неравенство (6.5.23) для некоторых x и b_β, неверно. Тогда при этих x и b_β выполняется неравенство $\mu_k \|A_\alpha^\infty (A_\beta x + b_\beta)\| > \|x\|$, откуда в силу (6.5.20)

$$\mu_k (1 + c_4 \mu_{N-1} \delta) \|x\| - \mu_k c_1 c_6 \|(I - A_{\alpha\cup\beta}) x\| > \|x\|.$$

Значит,

$$\|(I - A_{\alpha\cup\beta}) x\| \leq \frac{\mu_k - 1 + c_4 \mu_{N-1} \delta}{c_1 c_6 \mu_k} \|x\|. \tag{6.5.25}$$

В силу условия $\beta \not\subseteq \alpha$ верна оценка $\kappa(\alpha \cup \beta) \geq \kappa(\alpha) + 1$, и потому $\kappa(\alpha \cup \beta) \geq k + 1$. Но тогда в силу (6.5.13)

$$\mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)} \|A_{\alpha\cup\beta}^\infty x\| \geq \mu_{k+1} \left\{ \|x\| - \|(I - A_{\alpha\cup\beta}^\infty) x\| \right\}. \tag{6.5.26}$$

По лемме 6.5.2 (см. (6.5.3))

$$\|(I - A_{\alpha\cup\beta}^\infty) x\| \leq c_2 \|(I - A_{\alpha\cup\beta}) x\|.$$

Оценив здесь правую часть с помощью (6.5.25) и подставив получившуюся оценку величины $\|(I - A_{\alpha\cup\beta}^\infty) x\|$ в (6.5.26), получим:

$$\mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)} \|A_{\alpha\cup\beta}^\infty x\| \geq \mu_{k+1} \left(1 - \frac{c_2 (\mu_k - 1 + c_4 \mu_{N-1} \delta)}{c_1 c_6 \mu_k} \right) \|x\|.$$

Кроме того, в силу (6.5.20), верна оценка

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\|A_\alpha^\infty(A_\beta x + b_\beta)\| \le \mu_k(1 + c_4\mu_{N-1}\delta)\|x\|.$$

Поэтому при выполнении условий

$$\mu_k(1 + c_4\mu_{N-1}\delta) < \mu_{k+1}\left(1 - \frac{c_2(\mu_k - 1 + c_4\mu_{N-1}\delta)}{c_1c_6\mu_k}\right)\|x\|, \tag{6.5.27}$$

где $0 \le k \le N-2$, будет выполняться и неравенство (6.5.24), что и требовалось установить.

Для завершения доказательства теоремы 6.5.1 осталось найти такие числа δ, μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{N-1}, которые удовлетворяли бы условиям (6.5.13), (6.5.22) и (6.5.27). Для этого рассмотрим сначала неравенства (6.5.22) и (6.5.27) при $\delta = 0$:

$$\begin{aligned} &\mu_{N-1}(1 - c_1c_5c_6) < 1, \\ &\mu_k < \mu_{k+1}\left(1 - \frac{c_2(\mu_k - 1)}{c_1c_6\mu_k}\right), \qquad 0 \le k \le N-2. \end{aligned} \tag{6.5.28}$$

Здесь константы c_1, c_2, c_5 и c_6 положительны по построению, и потому числа μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{N-1}, удовлетворяющие неравенствам (6.5.13) и (6.5.28), существуют. Но тогда при всех достаточно малых $\delta > 0$ будут верны и неравенства (6.5.22) и (6.5.27). Теорема 6.5.1 полностью доказана. □

6.5.5. Корректность абсолютной устойчивости. Одним из принципиальных следствий теоремы 6.5.1 является корректность понятия абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (6.3.3) в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ по отношению к малым возмущениям матрицы A. Напомним, что имеется в виду под термином «корректность».

Для задания класса $\mathfrak{F}$ правых частей уравнения (6.3.3) необходимо указать два объекта: матрицу A и множество Ω тех $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, при которых $A_\omega \in \mathfrak{F}$. Чтобы подчеркнуть зависимость класса $\mathfrak{F}$ от Ω пишется: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Пусть теперь уравнение (6.3.3) абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Если оно остается абсолютно r-асимптотически устойчивым в любом классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(\tilde{A})$, где матрица $\tilde{A}$ достаточно близка к A, то говорится о *корректности* понятия абсолютной r-асимптотической устойчивости по отношению к малым возмущениям A.

6.5.6. Теорема. *Пусть уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем $\mathfrak{P}_1(A)$. Тогда найдется такое $\sigma = \sigma(A) > 0$, что уравнение* (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво и в классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(\tilde{A})$, если $\|\tilde{A} - A\| < \sigma$.*

Таким образом, согласно теореме 6.5.6 понятие абсолютной r-асимптотической устойчивости корректно по отношению к малым возмущениям матриц, если речь идет о классах правых частей уравнения (6.3.3), содержащих множество матриц $\mathfrak{P}_1(A)$. Утверждение теоремы 6.5.6 вытекает из теорем 6.2.7 и 6.5.1. Впрочем, как теорема 6.2.7, так и теорема 6.5.6 являются частными случаями доказываемой в § 6.7 теоремы об устойчивости по первому приближению для рассинхронизованных уравнений.

§ 6.6. Возмущение уравнений с симметрическими матрицами

Теорема 6.5.6 может служить источником новых достаточных условий абсолютной r-асимптотической устойчивости, если получить эффективные оценки величины возмущения $\sigma(A)$. В настоящем параграфе эта идея реализуется для уравнений, порождаемых симметрическими матрицами.

6.6.1. Рассмотрим уравнение (6.3.3) с правыми частями, порождаемыми матрицей $A = (a_{ij})$ со скалярными элементами. В этом случае пространство состояний $\mathbb{X}$ рассинхронизованной системы W, описываемой уравнениями (6.3.3), совпадает с $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, определяемое равенством:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N,$$

где $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \in \mathbb{R}^N$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\} \in \mathbb{R}^N$. Через $|\cdot|$ обозначим евклидову норму $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ в $\mathbb{R}^N$.

Сопоставим матрице A симметрическую и кососимметрическую матрицы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ с элементами

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad c_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}, \qquad 1 \le i, j \le N.$$

Рассмотрим наряду с уравнением (6.3.3) с правыми частями из класса $\mathfrak{P}(A)$ уравнение

$$x(n+1) = B_{\omega(n)} x(n), \qquad B_{\omega(n)} \in \mathfrak{P}(B);\ n \ge 0. \tag{6.6.1}$$

Укажем новые достаточные условия абсолютной r-асимптотической устойчивости уравнения (6.3.3).

6.6.2. Теорема. *Пусть собственные значения симметрической матрицы B лежат в интервале $[-\rho, \rho]$, где $\rho < 1$, а спектральный радиус r кососимметрической матрицы C удовлетворяет условию*

$$r < \rho \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-\rho^2)^N}} - 1 \right).$$

Тогда уравнение (6.3.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$, где $A = B + C$.*

В случае, когда матрица A симметрическая (т.е. $A = B + C$ и $C = 0$), сформулированные в теореме 6.6.2 достаточные условия абсолютной r-асимптотической устойчивости в силу теоремы 5.4.6 являются также необходимыми.

6.6.3. Доказательство теоремы 6.6.2 идейно близко к доказательству теоремы 6.5.6. Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ квадратичную форму $\Delta(x) = \langle (I - B)x, x \rangle$ и определим с ее помощью функцию

$$\|x\| = \sqrt{\max_{\alpha \subset \{1,2,\dots,N\}} \mu_{\kappa(\alpha)} \Delta(B_\alpha^\infty x)}, \tag{6.6.2}$$

где $\kappa(\alpha)$ — количество элементов множества $\alpha \subset \{1, 2, \dots, N\}$, причем считается, что $\kappa(\emptyset) = 0$. Предполагается, что подлежащие дальнейшему определению числа $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ удовлетворяют условию

$$1 = \mu_0 \le \mu_1 \le \cdots \le \mu_{N-1}. \tag{6.6.3}$$

Через B_α^∞ при каждом $\alpha \subset \{1, 2, \dots, N\}$ обозначим проектор на подпространство $\mathbb{L}_\alpha$ неподвижных точек линейного оператора B_α вдоль подпространства $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^N$. Так как в условиях теоремы 6.6.2 уравнение (6.6.1) в силу теоремы 5.4.6 абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}(B)$, то по лемме 6.4.4 проекторы B_α^∞ при каждом $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ существуют.

Доказательство теоремы разобьем на три этапа. На первом покажем, что функция $\|x\|$, определяемая равенством (6.6.2), является нормой. На втором покажем, что числа $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ могут быть выбраны так, что для любых матрицы B_β $(\beta \neq \emptyset)$ и вектора $u_\beta \in \mathbb{X}_\beta$, удовлетворяющего условию

$$|u_\beta| \leq e|x|, \tag{6.6.4}$$

где

$$e = \rho\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-\rho^2)^N}} - 1\right), \tag{6.6.5}$$

выполняется неравенство

$$\|B_\beta x + u_\beta\| \leq \|x\|. \tag{6.6.6}$$

Наконец, на третьем этапе докажем существование такого числа $\varepsilon > 0$, при котором для любых матрицы A_β $(\beta \neq \emptyset)$ и вектора $u_\beta \in \mathbb{X}_\beta$, удовлетворяющего условию

$$\|u_\beta\| \leq \varepsilon\|x\|, \tag{6.6.7}$$

выполняется неравенство

$$\|A_\beta x + u_\beta\| \leq \|x\|. \tag{6.6.8}$$

Отсюда по теореме 6.2.2 будет следовать абсолютная устойчивость по Перрону уравнения (6.3.3) в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$, а значит, по теореме 6.2.8 и его абсолютная r-асимптотическая устойчивость в этом классе правых частей.

Этап 1. По условию теоремы собственные значения матрицы B лежат в интервале $[-\rho, \rho]$. Поэтому собственные значения матрицы $I - B$ лежат в интервале $[1-\rho, 1+\rho]$, откуда в силу (5.4.1)

$$(1-\rho)|x|^2 \leq \Delta(x) \leq (1+\rho)|x|^2. \tag{6.6.9}$$

Так как по условию теоремы $\rho < 1$, то в силу (6.6.9) выражение в фигурных скобках в (6.6.2) неотрицательно, значит функция $\|x\|$ определена корректно.

Положительная однородность функции $\|x\|$ очевидна. Неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ вытекает из неравенства Минковского (6.4.2) для квадратичных функционалов. Остается доказать, что $\|x\| = 0$, если и только если $x = 0$.

Так как среди множеств $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, по которым в (6.6.2) берется максимум, имеется пустое, для которого $\kappa(\emptyset) = 0$, $\mu_0 = 1$, $B_\emptyset^\infty = I$, то $\|x\| \geq \sqrt{\Delta(x)}$. Отсюда в силу (6.6.9)

$$\|x\| \geq \sqrt{\Delta(x)} \geq \sqrt{1-\rho}|x|. \tag{6.6.10}$$

Следовательно, из $\|x\| = 0$ вытекает равенство $|x| = 0$, что возможно только при $x = 0$. Обратно, если $x = 0$, то $B_\alpha x = 0$ для любого множества α, и в силу (6.6.2) $\|x\| = 0$.

Итак, для функции $\|x\|$ выполняются все аксиомы нормы.

Этап 2. Сведем необходимые в дальнейшем факты в одну лемму.

6.6.4. Лемма. *Пусть $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $u_\beta \in \mathbb{X}_\beta$, причем*

$$\Delta(u_\beta) \le E^2 \Delta(x), \tag{6.6.11}$$

где $E > 0$. Тогда

$$\Delta(B_\alpha^\infty x) = \Delta(x) - \langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha - I)x \rangle, \tag{6.6.12}$$

$$\langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha - I)x \rangle \ge 0, \tag{6.6.13}$$

$$\langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha - I)x \rangle \le \frac{1}{1-\rho^2} \langle (I + B)(B_\alpha - I)x, (B_\alpha - I)x \rangle, \tag{6.6.14}$$

$$\Delta(B_\alpha^\infty B_\beta x) \ge \Delta(x) - \langle (B_{\alpha\cup\beta}^\infty - I)x, (B_{\alpha\cup\beta} - I)x \rangle, \tag{6.6.15}$$

$$\begin{aligned} \Delta[B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta)] \le (1 + 2rE + E^2)\Delta(x) - \\ - \langle (I + B)(B_{\alpha\cup\beta} - I)x, (B_{\alpha\cup\beta} - I)x \rangle. \end{aligned} \tag{6.6.16}$$

Доказательство. Пусть множество α состоит из чисел $1, 2, \ldots, k$ (этого всегда можно добиться соответствующей перестановкой строк и столбцов матрицы B). Обозначим через P_α проектор на подпространство $\mathbb{X}_\alpha$ вдоль $\mathbb{X}_{1,2,\ldots,N\setminus\alpha}$. Тогда матрицы B, B_α, B_α^∞ и P_α могут быть представлены в виде квадратных блочных матриц второго порядка (с квадратным левым верхним блоком порядка k) следующим образом:

$$B = \begin{Vmatrix} B_{\alpha\times\alpha} & U \\ V & W \end{Vmatrix}, \qquad B_\alpha = \begin{Vmatrix} B_{\alpha\times\alpha} & U \\ 0 & I \end{Vmatrix},$$

$$B_\alpha^\infty = \begin{Vmatrix} 0 & (I - B_{\alpha\times\alpha})^{-1}U \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \qquad P_\alpha = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Положим $H_\alpha = P_\alpha B P_\alpha$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} B_\alpha - I &= (I - H_\alpha)(B_\alpha - I), \\ B_\alpha - I &= P_\alpha(B - I), \\ P_\alpha B_\alpha &= P_\alpha B. \end{aligned} \tag{6.6.17}$$

Кроме того, $\langle H_\alpha x, x\rangle = \langle P_\alpha B P_\alpha x, x\rangle = \langle BP_\alpha x, P_\alpha x\rangle$, откуда

$$-\rho|x|^2 \le \langle H_\alpha x, x\rangle \le \rho|x|^2, \tag{6.6.18}$$

так как по условию теоремы спектр матрицы B лежит в интервале $[-\rho, \rho]$, а в силу (5.4.1) $|\langle BP_\alpha x, P_\alpha x\rangle| \le \rho|P_\alpha x|^2 \le \rho|x|^2$.

Докажем равенство (6.6.12). Так как

$$\Delta(B_\alpha^\infty x) = \langle (I-B)B_\alpha^\infty x, B_\alpha^\infty x\rangle = \langle (I-B)[x + (B_\alpha^\infty - I)x, x + (B_\alpha^\infty - I)x\rangle,$$

то

$$\Delta(B_\alpha^\infty x) = \Delta(x) - 2\langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B-I)x\rangle - \langle (B-I)(B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha^\infty - I)x\rangle.$$

Но по лемме 6.4.4 $BB_\alpha^\infty = B_\alpha$, откуда $(B-I)(B_\alpha^\infty - I) = -(B-I)$. Следовательно,

$$\Delta(B_\alpha^\infty x) = \Delta(x) - \langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B-I)x\rangle. \tag{6.6.19}$$

По лемме 6.4.4. $(B_\alpha^\infty - I)x \in \mathbb{X}_\alpha$, следовательно $B_\alpha^\infty - I = P_\alpha(B_\alpha^\infty - I)$. Поэтому из второго равенства (6.6.17) вытекает, что

$$\langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B-I)x\rangle = \langle P_\alpha(B_\alpha^\infty - I)x, (B-I)x\rangle =$$
$$= \langle (B_\alpha^\infty - I)x, P_\alpha(B-I)x\rangle = \langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha - I)x\rangle.$$

Отсюда и из (6.6.19) следует равенство (6.6.12).

Докажем неравенство (6.6.13). В силу (6.6.17)

$$\langle (B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha - I)x\rangle = \langle (I - H_\alpha)(B_\alpha^\infty - I)x, (B_\alpha^\infty - I)x\rangle.$$

Но правая часть этого равенства в силу (6.6.18) оценивается снизу неотрицательным числом $(1-\rho)|(B_\alpha^\infty - I)x|^2$. Неравенство (6.6.13) доказано.

Докажем неравенство (6.6.14). В силу соотношений (6.6.17) $B_\alpha - I = (I - H_\alpha)(B_\alpha^\infty - I)$. Поэтому (6.6.14) равносильно неравенству

$$\langle (I - H_\alpha)z, z\rangle \le \frac{1}{1-\rho^2}\langle (I - H_\alpha)(I - H_\alpha^2)z, z\rangle, \tag{6.6.20}$$

где $z = (B_\alpha^\infty - I)x$, или, что то же, неравенству

$$\langle (I - H_\alpha)(H_\alpha^2 - \rho^2 I)z, z\rangle \le 0. \tag{6.6.21}$$

Но если неравенство (6.6.21) будет верно при всех $z \in \mathbb{R}^N$, то оно будет верно и при $z = (B_\alpha^\infty - I)x$, $x \in \mathbb{R}^N$. Следовательно, для доказательства (6.6.14) достаточно установить справедливость неравенства (6.6.21) при $z \in \mathbb{R}^N$.

6.6.5. Лемма. *Пусть собственные значения симметрической матрицы G лежат в интервале $[-\rho,\rho]$, где $\rho \le 1$. Тогда*

$$\langle (I-G)(G^2-\rho^2 I)x, x\rangle \le 0.$$

Доказательство. Рассмотрим матричный полином $F = Q(G)$ от матрицы G, где $Q(t) = (1-t)(t^2-\rho^2)$. Тогда каждое собственное значение ξ матрицы F имеет вид: $\xi = Q(\lambda)$, где λ — собственное значение матрицы G. Но $Q(t) \le 0$ при $t \in [-\rho,\rho]$. Поэтому собственные значения матрицы $F = (I-G)(G^2-\rho^2 I)$ неположительны. Отсюда и из (5.4.1) вытекает утверждение леммы 6.6.5.

6.6.6. Продолжим доказательство леммы 6.6.4. Неравенство (6.6.21) вытекает из леммы 6.6.5, поскольку в силу (6.6.18) собственные значения симметрической матрицы H_α лежат в интервале $[-\rho,\rho]$, где по условию теоремы $\rho < 1$. Как отмечалось выше, из (6.6.21) следует неравенство (6.6.14). Докажем неравенство (6.6.15). Из (6.6.12) и (6.6.13) следует, что $\Delta(B_\alpha x) \le \Delta(x)$. Взяв здесь в качестве α множество $\alpha\cup\beta$, получим:

$$\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x) \le \Delta(x). \tag{6.6.22}$$

По лемме 6.4.4 оператор $B^\infty_{\alpha\cup\beta}$ является проектором на подпространство неподвижных точек оператора $B_{\alpha\cup\beta}$ вдоль подпространства $\mathbb{X}_{\alpha\cup\beta}$. Следовательно, вектор $B^\infty_{\alpha\cup\beta}x$, $x = \{x_1,\ldots,x_N\}$, зависит только от тех компонент x_i вектора x, номера которых не принадлежат множеству $\alpha\cup\beta$. Но эти компоненты вектора x совпадают с соответствующими компонентами вектора $B^\infty_\alpha B_\beta x$. Поэтому $B^\infty_{\alpha\cup\beta}x = B^\infty_{\alpha\cup\beta}(B^\infty_\alpha B_\beta x)$. Тогда в силу (6.6.22)

$$\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x) = \Delta[B^\infty_{\alpha\cup\beta}(B^\infty_\alpha B_\beta x)] \le \Delta(B^\infty_\alpha B_\beta x).$$

С другой стороны, в силу (6.6.12)

$$\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x) = \Delta(x) - \langle (B^\infty_{\alpha\cup\beta}-I)x, (B_{\alpha\cup\beta}-I)x\rangle,$$

откуда и следует неравенство (6.6.15).

Осталось доказать неравенство (6.6.16). По лемме 6.4.4

$$B^\infty_\alpha(B_\beta x + u_\beta) = B^\infty_\alpha(B_{\alpha\cup\beta}x + u_\beta),$$

откуда

$$\Delta[B^\infty_\alpha(B_\beta x + u_\beta)] = \Delta[B^\infty_\alpha(B_{\alpha\cup\beta}x + u_\beta)].$$

В силу (6.6.12) и (6.6.13) правая часть последнего равенства не превосходит числа $\Delta(B_{\alpha\cup\beta}x + u_\beta)$. Поэтому

$$\Delta[B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta)] \le \Delta(B_{\alpha\cup\beta}x + u_\beta). \qquad (6.6.23)$$

Оценим правую часть неравенства (6.6.23). Для этого положим $\omega = \alpha \cup \beta$ и обозначим вектор u_β через u_ω. Тогда

$$\Delta(B_\omega x + u_\omega) = \langle (I - B)[x + (B_\omega - I)x + u_\omega], x + (B_\omega - I)x + u_\omega \rangle,$$

откуда

$$\Delta(B_\omega x + u_\omega) = \Delta(x) + \langle (I - B)(B_\omega + I)x, (B_\omega - I)x \rangle + \\ + \langle (I - B)(2B_\omega x + u_\omega), u_\omega \rangle. \qquad (6.6.24)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части равенства (6.6.24). Так как $(B_\omega - I)x \in \mathbb{X}_\omega$, то $B_\omega - I = P_\omega(B_\omega - I)$, и потому

$$\langle (I - B)(B_\omega + I)x, (B_\omega - I)x \rangle = \langle (I - B)(B_\omega + I)x, P_\omega(B_\omega - I)x \rangle = \\ = \langle P_\omega(I - B)(B_\omega + I)x, (B_\omega - I)x \rangle.$$

Здесь в силу второго равенства (6.6.17)

$$P_\omega(I - B) = P_\omega(I - B_\omega),$$

откуда

$$P_\omega(I - B)(B_\omega + I) = P_\omega(I - B_\omega)(B_\omega + I) = P_\omega(I + B_\omega)(I - B_\omega).$$

Следовательно,

$$\langle (I - B)(B_\omega + I)x, (B_\omega - I)x \rangle = \langle P_\omega(I + B_\omega)(I - B_\omega)x, (B_\omega - I)x \rangle.$$

Но в силу (6.6.17) $P_\omega(I + B_\omega) = P_\omega(I + B)$. Поэтому

$$\langle (I - B)(B_\omega + I)x, (B_\omega - I)x \rangle = \langle P_\omega(I + B)(I - B_\omega)x, (B_\omega - I)x \rangle = \\ = \langle (I + B)(I - B_\omega)x, P_\omega(B_\omega - I)x \rangle = -\langle (I + B)(B_\omega - I)x, (B_\omega - I)x \rangle.$$

Значит, (6.6.24) равносильно равенству

$$\Delta(B_\omega x + u_\omega) = \Delta(x) - \langle (I+B)(B_\omega - I)x, (B_\omega - I)\rangle + \\ + \langle (I-B)(2B_\omega x + u_\omega), u_\omega\rangle. \quad (6.6.25)$$

Оценим третье слагаемое в правой части равенства (6.6.25). Представим его в следующем виде:

$$\langle (I-B)(2B_\omega x + u_\omega), u_\omega\rangle = 2\langle (I-B)B_\omega x, u_\omega\rangle + \Delta(u_\omega). \quad (6.6.26)$$

Так как по определению $u_\omega = u_\beta$, то в силу (6.6.11)

$$\Delta(u_\omega) \le E^2\Delta(x). \quad (6.6.27)$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части равенства (6.6.26) заметим, что $u_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, и потому $u_\omega = P_\omega u_\omega$. Значит,

$$\langle (I-B)B_\omega x, u_\omega\rangle = \langle (I-B)B_\omega x, P_\omega u_\omega\rangle = \langle P_\omega(I-B)B_\omega x, u_\omega\rangle.$$

Как видно из определения матрицы H_ω и равенств (6.6.17), $P_\omega(I-B)B_\omega = H_\omega(I-B)$. Следовательно,

$$\langle (I-B)B_\omega x, u_\omega\rangle = \langle H_\omega(I-B)x, u_\omega\rangle = \langle (I-B)x, H_\omega u_\omega\rangle, \quad (6.6.28)$$

где по неравенству Шварца (см. формулу (5.4.2))

$$|\langle (I-B)x, H_\omega u_\omega\rangle|^2 \le \langle (I-B)x, x\rangle\langle (I-B)H_\omega u_\omega, H_\omega u_\omega\rangle. \quad (6.6.29)$$

Здесь в силу (6.6.17)

$$\langle (I-B)H_\omega u_\omega, H_\omega u_\omega\rangle = \langle (I-H_\omega^2)H_\omega u_\omega, u_\omega\rangle,$$

и потому согласно неравенству (6.6.20)

$$\langle (I-B)H_\omega u_\omega, H_\omega u_\omega\rangle \le \rho^2\langle (I-H_\omega)u_\omega, u_\omega\rangle.$$

Правая часть полученного неравенства в силу (6.6.17) совпадает с $\rho^2\langle (I-B)u_\omega, u_\omega\rangle$, и в силу (6.6.27) не превосходит $\rho^2E^2\Delta(x)$. Следовательно, в силу (6.6.28) и (6.6.29)

$$|\langle (I-B)B_\omega x, u_\omega\rangle| \le \rho E\Delta(x),$$

и в силу (6.6.26) и (6.6.27)

$$|\langle (I-B)(2B_\omega x + u_\omega), u_\omega\rangle| \le (2\rho E + E^2)\Delta(x). \quad (6.6.30)$$

Но так как символ ω применяется для обозначения множества $\alpha \cup \beta$, а $u_\omega = u_\beta$, то из (6.6.23), (6.6.25) и (6.6.30) вытекает неравенство (6.6.16). Лемма 6.6.4 полностью доказана. □

6.6.7. Продолжим доказательство теоремы 6.6.2. Как видно из определения нормы $\|\cdot\|$, для доказательства неравенства (6.6.6) достаточно показать, что при подходящем выборе чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{N-1}$ для любых множеств $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ и $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $\beta \neq \emptyset$ из (6.6.4) следует неравенство

$$\mu_{\kappa(\alpha)} \Delta[B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta)] \le \|x\|^2. \tag{6.6.31}$$

В силу (6.6.9) неравенство (6.6.4) влечет неравенство

$$\Delta(u_\beta) \le E^2 \Delta(x), \tag{6.6.32}$$

где

$$E = \rho \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \rho^2)^N}} - 1 \right). \tag{6.6.33}$$

Поэтому неравенство (6.6.31) достаточно доказать при условиях (6.6.32), (6.6.33). Доказательство неравенства (6.6.31) разобьем на три случая: 1) $\beta \subseteq \alpha$; 2) $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \ldots, N\}$; 3) $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta \neq \{1, 2, \ldots, N\}$.

Случай 1: $\beta \subseteq \alpha$. Здесь по следствию из леммы 6.4.4 $B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta) = B_\alpha^\infty x$, и неравенство (6.6.31) следует из определения нормы $\|\cdot\|$.

Случай 2: $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \ldots, N\}$. Здесь $B_{\alpha\cup\beta} = B$, и по лемме 6.6.4 (см. (6.6.16)) верно неравенство

$$\Delta[B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta)] \le \\ \le (1 + 2\rho E + E^2)\Delta(x) - \langle ((I + B)(B - I)x, (B - I)x\rangle. \tag{6.6.34}$$

Так как матрица B по условию теоремы симметрична, то второе слагаемое в правой части неравенства (6.6.34) может быть представлено в следующем виде:

$$\langle ((I + B)(B - I)x, (B - I)x\rangle = \\ = -\langle (I - B)(B^2 - \rho^2 I)x, x\rangle - (\rho^2 - 1)\langle (I - B)x, x\rangle.$$

Здесь $(\rho^2 - 1)\langle (I - B)x, x\rangle = (\rho^2 - 1)\Delta(x)$, а по лемме 6.6.5 имеет место неравенство $\langle (I - B)(B^2 - \rho^2 I)x, x\rangle \le 0$. Поэтому из (6.6.34) вытекает неравенство

$$\Delta[B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta)] \le (\rho + E)^2 \Delta(x),$$

откуда в силу (6.6.3) следует оценка

$$\mu_{\kappa(\alpha)} \Delta[B_\alpha^\infty(B_\beta x + u_\beta)] \le \mu_{N-1}(\rho + E)^2 \Delta(x). \tag{6.6.35}$$

Заметим теперь, что в силу (6.6.10) $\Delta(x) \le \|x\|^2$. Поэтому в силу (6.6.35) неравенство (6.6.31) выполняется при

$$\mu_{N-1}(\rho + E)^2 \le 1. \tag{6.6.36}$$

Случай 3: $\beta \nsubseteq \alpha$, $\alpha \cup \beta \ne \{1, 2, \dots, N\}$. Множество α является собственной частью множества $\alpha \cup \beta$, а последнее в силу условия $\alpha \cup \beta \ne \{1, 2, \dots, N\}$ является собственной частью множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Поэтому $\kappa(\alpha) \le N-2$.

Покажем, что при выполнении условия (6.6.32) либо

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\Delta[B^\infty_\alpha(B_\beta x + u_\beta)] \le \Delta(x), \tag{6.6.37}$$

либо это неравенство не выполняется (при данных x и u_β) и имеет место

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\Delta[B^\infty_\alpha(B_\beta x + u_\beta)] \le \mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)}\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x). \tag{6.6.38}$$

Так как правые части неравенств (6.6.37) и (6.6.38) не превосходят $\|x\|^2$, то в каждой из указанных ситуаций будет выполняться и неравенство (6.6.31).

Пусть неравенство (6.6.37) при данных x и u_β не выполняется, т.е.

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\Delta[B^\infty_\alpha(B_\beta x + u_\beta)] > \Delta(x), \tag{6.6.39}$$

По лемме 6.6.4 (см. оценку (6.6.16)) справедлива оценка

$$\mu_{\kappa(\alpha)}\Delta[B^\infty_\alpha(B_\beta x + u_\beta)] \le \mu_k\Big((1 + 2\rho E + E^2)\Delta(x) - \langle (I + B)Dx, Dx\rangle\Big), \tag{6.6.40}$$

где $k = \kappa(\alpha)$, $D = B_{\alpha\cup\beta} - I$, откуда в силу (6.6.39) получаем:

$$\langle (I + B)Dx, Dx\rangle \le \left(\frac{\mu_k - 1}{\mu_k} + 2\rho E + E^2\right)\Delta(x). \tag{6.6.41}$$

Но множество α является собственной частью множества $\alpha \cup \beta$. Поэтому $\kappa(\alpha \cup \beta) \ge \kappa(\alpha) + 1 = k + 1$, и в силу (6.6.3)

$$\mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)}\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x) \ge \mu_{k+1}\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x).$$

Отсюда и из леммы 6.6.4 (см.равенство (6.6.12)) вытекает, что

$$\mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)}\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x) \ge \mu_{k+1}\{\Delta(x) - \langle (B^\infty_{\alpha\cup\beta} - I)x, (B_{\alpha\cup\beta} - I)x\rangle\},$$

а тогда в силу леммы 6.6.4 (см. (6.6.14)) верна оценка

$$\mu_{\kappa(\alpha\cup\beta)}\Delta(B^\infty_{\alpha\cup\beta}x) \ge \mu_{k+1}\left(\Delta(x) - \frac{1}{1-\rho^2}\langle (I + B)Dx, Dx\rangle\right).$$

Поэтому из (6.6.40) следует, что неравенство (6.6.36) выполняется, если выполняется неравенство

$$\mu_k\Big((1+2\rho E+E^2)\Delta(x)-\langle(I+B)Dx,Dx\rangle\Big)\le$$
$$\le\mu_{k+1}\left(\Delta(x)-\frac{1}{1-\rho^2}\langle(I+B)Dx,Dx\rangle\right),$$

равносильное

$$\left(\frac{\mu_{k+1}}{1-\rho^2}-\mu_k\right)\langle(I+B)Dx,Dx\rangle\le\Big(\mu_{k+1}-\mu_k(1+2\rho E+E^2)\Big)\Delta(x). \qquad (6.6.42)$$

При этом, в силу условия (6.6.3), $\mu_{k+1}\ge\mu_k\ge(1-\rho^2)\mu_k$, и в силу (6.6.41) неравенство (6.6.42) является следствием оценки

$$\left(\frac{\mu_{k+1}}{1-\rho^2}-\mu_k\right)\left(\frac{\mu_k-1}{\mu_k}+2\rho E+E^2\right)\Delta(x)\le\Big(\mu_{k+1}-\mu_k(1+2\rho E+E^2)\Big)\Delta(x),$$

которая после приведения подобных членов принимает вид:

$$\mu_{k+1}[1-(\rho+E)^2\mu_k]\ge(1-\rho^2)\mu_k. \qquad (6.6.43)$$

Мы показали, что при условии (6.6.43) невыполнение неравенства (6.6.37) влечет справедливость неравенства (6.6.38). Анализ третьего случая завершен.

Итак, если выполнены соотношения (6.6.36) и (6.6.43), то из (6.6.32) следуют неравенства (6.6.31), а с ними — и неравенства (6.6.6). Требуемые числа $\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_{N-1}$ можно задать следующим образом:

$$\mu_i=\frac{\rho^2(1-\rho^2)^i}{\rho^2-(\rho+E)^2[1-(1-\rho^2)^i]},\qquad i=0,1,\ldots,N-1,$$

где E определяется равенством (6.6.33).

Перейдем к заключительному этапу доказательства теоремы. Пусть $\beta\subseteq\{1,2,\ldots,N\}$, $x\in\mathbb{R}^N$, $u_\beta\in\mathbb{X}_\beta$. Поскольку по условию теоремы $A=B+C$, то $A_\beta=B_\beta+P_\beta C$. Следовательно, для вектора $A_\beta x+u_\beta$ справедливо представление

$$A_\beta x+u_\beta=B_\beta x+(P_\beta Cx+u_\beta). \qquad (6.6.44)$$

По условию теоремы спектральный радиус r матрицы C строго меньше числа e, определяемого равенством (6.6.5). Но поскольку матрица C кососимметрическая, то $|Cx|\le r|x|$. Поэтому

$$|P_\beta Cx+u_\beta|\le|P_\beta Cx|+|u_\beta|\le r|x|+|u_\beta|. \qquad (6.6.45)$$

Так как в пространстве $\mathbb{R}^N$ все нормы эквивалентны между собой, то найдется такое число $M < \infty$, при котором

$$\|x\| \le M|x|. \tag{6.6.46}$$

Положим теперь

$$\varepsilon = \frac{(e-r)\sqrt{1-\rho}}{M}, \tag{6.6.47}$$

и предположим, что $\|u_\beta\| \le \varepsilon\|x\|$. Тогда в силу (6.6.10) и (6.6.46) $|u_\beta| \le (e-r)|x|$, и в силу (6.6.45)

$$|P_\beta Cx + u_\beta| \le e|x|. \tag{6.6.48}$$

Поскольку $P_\beta Cx + u_\beta \in \mathbb{X}_\beta$, то из (6.6.48), как было показано на втором этапе доказательства теоремы, следует в силу (6.6.44) неравенство

$$\|A_\beta x + u_\beta\| = \|B_\beta x + (P_\beta Cx + u_\beta)\| \le \|x\|.$$

Итак, из неравенства (6.6.7), где $\varepsilon > 0$ определяется равенством (6.6.47), вытекает неравенство (6.6.8). По теореме 6.2.2 отсюда следует абсолютная устойчивость по Перрону уравнения (6.3.3) в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$, а тогда по теореме 6.2.8 — и абсолютная r-асимптотическая устойчивость этого уравнения в классе $\mathfrak{P}(A)$. Теорема 6.6.2 доказана. □

6.6.8. В заключение параграфа скажем несколько слов о геометрической трактовке формулы (6.6.2), определяющей норму $\|x\|$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ норму

$$\|x\|_0 = \sqrt{\Delta(x)} = \sqrt{\langle (I-B)x, x\rangle}.$$

Как показано при доказательстве теоремы 5.4.2, помеси матрицы B в норме $\|\cdot\|_0$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2.5. В частности, справедливы неравенства $\|B_\beta x\|_0 \le \|x\|_0$, говорящие об инвариантности единичного шара в норме $\|\cdot\|_0$ относительно помесей матрицы B. В то же время неравенства $\|B_\beta x + u_\beta\|_0 \le \|x\|_0$, где $u_\beta \in \mathbb{X}_\beta$, $\|u_\beta\|_0 \le \delta\|x\|_0$, ни при каком сколь угодно малом $\delta > 0$ не верны. Они нарушаются, например, при $x \in \mathbb{L}_\beta$. Норма $\|\cdot\|$, определяемая формулой (6.6.2), как раз и получается «исправлением» нормы $\|\cdot\|_0$ в окрестности всех возможных подпространств $\mathbb{L}_\beta$. Смысл формулы (6.6.2) заключается в отсечении от единичного шара в норме $\|\cdot\|_0$ цилиндрическими поверхностями $\Delta(B_\beta^\infty x) = \mathrm{const}$ кольцевых слоев, содержащих в себе пересечения всех возможных подпространств $\mathbb{L}_\beta$ со сферой $\|x\|_0 = 1$.

§ 6.7. Устойчивость по первому приближению

6.7.1. Обозначим через $\mathbb{X}$ пространство векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, компоненты которых x_1, x_2, …, x_N в свою очередь предполагаются в общем случае векторными: $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \geq 1$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Будем считать, что в пространстве $\mathbb{X}$ зафиксирована некоторая норма $\|\cdot\|$. Пусть

$$F(x) = \{F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x)\}, \qquad F_i(x) \in \mathbb{R}^{n_i},\ i = 1, 2, \dots, N,$$

— некоторое отображение со значениями в $\mathbb{X}$, определенное в окрестности точки $x = 0$. Обозначим через $\mathfrak{P}(F)$ множество всех помесей $F_\omega(x)$ отображения $F(x)$ и рассмотрим при $n \geq 0$ разностное уравнение

$$x(n+1) = F_{\omega(n)}[x(n)], \qquad \omega(n) \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \tag{6.7.1}$$

Предположим, что отображение $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = Ax + f(x),$$

где Ax — линейное отображение в $\mathbb{X}$, а нелинейная добавка $f(x)$ в определенном смысле мала по сравнению с Ax при всех значениях x из некоторой окрестности точки $x = 0$:

$$\|f(x)\| \leq \sigma\|x\|. \tag{6.7.2}$$

Рассмотрим при $n \geq 0$ наряду с нелинейным уравнением (6.7.1) линейное

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n), \qquad \omega(n) \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \tag{6.7.3}$$

В случае, когда добавка $f(x)$ является величиной более высокого порядка малости в окрестности нуля, чем $\|x\|$, т.е. $\|f(x)\|/\|x\| \to 0$ при $\|x\| \to 0$, то уравнение (6.7.3) называют *уравнением первого приближения* к уравнению (6.7.1) или его линеаризацией. Сохраним эти названия и в случае, когда $f(x)$ удовлетворяет условию (6.7.2) с малым $\sigma > 0$.

6.7.2. Теорема. *Пусть уравнение первого приближения* (6.7.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в некотором классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем $\mathfrak{P}_1(A)$, и $\sigma > 0$ достаточно мало. Тогда уравнение* (6.7.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(F)$.*

Частным случаем теоремы 6.7.2 является доказанная выше теорема 6.5.6. Для доказательства теоремы 6.7.2 понадобится одно вспомогательное утверждение.

6.7.3. Лемма. *Пусть уравнение* (6.7.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(A)$, *содержащем* $\mathfrak{P}_1(A)$. *Тогда найдутся числа* $q_0 < 1$ *и* $\sigma_0 > 0$, *а также норма* $\|\cdot\|_*$ *в* $\mathbb{X}$, *для которых соотношения*

$$A_\omega \in F, \quad b_\omega \in \mathbb{X}_\omega, \quad \|b_\omega\|_* \le \sigma_0 \|x\|_* \tag{6.7.4}$$

влекут неравенство

$$\|A_\omega x + b_\omega\|_* \le \|x\|_*, \tag{6.7.5}$$

а соотношения

$$z(n+1) = A_{\omega(n)} z(n) + b(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{6.7.6}$$

где

$$\begin{gathered} A_{\omega(n)} \in F, \quad b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}, \quad \|b(n)\|_* \le \sigma_0 \|z(n)\|_*, \\ \omega(0) \cup \omega(1) \cup \cdots \cup \omega(k-1) = \{1, 2, \ldots, N\}, \end{gathered} \tag{6.7.7}$$

влекут неравенство

$$\|z(k)\|_* \le q_0 \|z(0)\|_*. \tag{6.7.8}$$

Доказательство. Уравнение (6.7.3) в силу теоремы 6.5.1 абсолютно устойчиво по Перрону в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Тогда в силу теоремы 6.2.2 найдутся число $\delta > 0$ и норма $\|\cdot\|_*$ в $\mathbb{X}$, для которых неравенство (6.7.5) выполняется при

$$A_\omega \in F, \quad b_\omega \in \mathbb{X}_\omega, \quad \|b_\omega\|_* \le \delta \|x\|_*. \tag{6.7.9}$$

Следовательно, достаточно выбрать такое $\sigma_0 \le \delta$, чтобы соотношения (6.7.4) влекли неравенство (6.7.5).

Осталось показать, что при подходящем выборе чисел $q_0 < 1$ и $\sigma_0 \in (0, \delta]$ соотношения (6.7.6), (6.7.7) влекут неравенство (6.7.8).

Определим множества $\nu(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, полагая

$$\nu(k-1) = \omega(k-1),$$
$$\nu(n) = \omega(n) \setminus \{\omega(n+1) \cup \cdots \cup \omega(k-1)\}, \qquad n = k-2, \ldots, 1, 0.$$

Эти множества попарно не пересекаются и

$$\nu(0) \cup \cdots \cup \nu(k-1) = \omega(0) \cup \cdots \cup \omega(k-1) = \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{6.7.10}$$

Обозначим через P_ω проектор на подпространство $\mathbb{X}_\omega$ вдоль подпространства $\mathbb{X}_{1,2,\dots,N\setminus\omega}$. Выберем в качестве $\sigma_0 > 0$ произвольное число, для которого

$$\sigma_0\|P_\omega\|_* \le \frac{\delta}{2}, \qquad \omega \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \tag{6.7.11}$$

В силу конечности количества различных операторов P_ω требуемое σ_0 существует. А поскольку среди проекторов P_ω в (6.7.11) имеется проектор $P_\emptyset = I$, то

$$\sigma_0 \le \frac{\delta}{2}. \tag{6.7.12}$$

Из неравенств (6.7.5) (выполняющихся, как уже доказано, при условии (6.7.4)) и из соотношений (6.7.6), (6.7.7) вытекают при $n = 0, 1, \dots, k-1$ неравенства $\|z(n+1)\|_* \le \|z(n)\|_*$, откуда

$$\|z(n)\|_* \le \|z(0)\|_*, \qquad n = 0, 1, \dots, k. \tag{6.7.13}$$

Положим

$$c(n) = \sigma_0 P_{\nu(n)} z(k), \qquad n = 0, 1, \dots, k-1, \tag{6.7.14}$$

и определим векторы $w(n)$, полагая $w(0) = z(0)$,

$$w(n+1) = A_{\omega(n)} w(n) + b(n) + c(n), \qquad n = 0, 1, \dots, k-1. \tag{6.7.15}$$

Здесь в силу (6.7.11), (6.7.13) и (6.7.14) $\|c(n)\|_* \le \|z(0)\|_*/2 = \|w(0)\|_*/2$. А в силу (6.7.7), (6.7.12) и (6.7.13) $\|b(n)\|_* \le \|z(0)\|_*/2 = \|w(0)\|_*/2$. При этом, по определению множества $\nu(n)$ имеет место включение $\nu(n) \subseteq \omega(n)$, откуда в силу (6.7.14) $c(n) \in \mathbb{X}_{\nu(n)} \subseteq \mathbb{X}_{\omega(n)}$. Значит,

$$\|b(n) + c(n)\|_* \le \delta\|w(0)\|_*, \qquad b(n) + c(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}, \tag{6.7.16}$$

при $n = 0, 1, \dots, k-1$.

Как отмечалось выше (см. начало доказательства леммы 6.7.3), при выполнении условий (6.7.9) имеет место неравенство (6.7.5). В этом случае по лемме 6.2.3$\|A_\omega x + b_\omega\|_* \le 1$ при $\|x\|_* \le 1, A_\omega \in F$, $b_\omega \in \mathbb{X}_\omega$, $\|b_\omega\|_* \le \delta$. Отсюда и из (6.7.15), (6.7.16) индукцией по n получаем оценки

$$\|w(n)\|_* \le \|w(0)\|_*, \qquad n = 0, 1, \dots, k. \tag{6.7.17}$$

Множества $\nu(i)$ по определению не пересекаются с множеством $\omega(n)$ при $i < n$, откуда $A_{\omega(n)} c(i) = c(i)$ при $i < n$. Из этих равенств, а также из равенств (6.7.6) и (6.7.15), определяющих наборы векторов $z(n)$ и $w(n)$, индукцией по n получаем, что $w(0) = z(0)$ и $w(n) = z(n) + c(n-1) + \cdots + c(0)$ при $n = 1, 2, \ldots, k$. В частности, $w(k) = z(k) + c(k-1) + \cdots + c(0)$, а это равенство в силу (6.7.14) может быть записано в виде:

$$w(k) = z(k) + \sigma_0\{P_{\nu(k-1)} + \cdots + P_{\nu(0)}\}z(k). \tag{6.7.18}$$

Так как множества $\nu(n)$, $n = 0, 1, \ldots, k-1$, попарно не пересекаются, а их объединение в силу (6.7.10) совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, N\}$, то сумма проекторов в (6.7.18) равна единичному оператору I. Поэтому $w(k) = (1 + \sigma_0)z(k)$. Отсюда и из неравенства (6.7.17) для $n = k$ следует оценка

$$(1 + \sigma_0)\|z(k)\|_* \leq \|w(0)\|_* = \|z(0)\|_*.$$

Положив $q_0 = 1/(1 + \sigma_0) < 1$, приходим к неравенству (6.7.8). Лемма 6.7.3 доказана. □

6.7.4. Доказательство теоремы 6.7.2. Пусть $q_0 < 1$, $\sigma_0 > 0$ — числа, а $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве $\mathbb{X}$ из леммы 6.7.3. Обозначим через P_ω проектор на подпространство $\mathbb{X}_\omega$ вдоль подпространства $\mathbb{X}_{\{1,2,\ldots,N\}\setminus\omega}$. Выберем число $\sigma > 0$ настолько малым, чтобы для каждого множества $\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ выполнялось неравенство

$$\sigma\|P_\omega\|_* \leq \sigma_0. \tag{6.7.19}$$

Поскольку различных операторов P_ω имеется лишь конечное число, то требуемое $\sigma > 0$ существует.

Для произвольной помеси $F_\omega(x)$ отображения $F(x) = Ax + f(x)$ справедливо представление $F_\omega(x) = A_\omega x + P_\omega f(x)$. Здесь в силу (6.7.2) и (6.7.19)

$$\|P_\omega f(x)\|_* \leq \sigma_0, \qquad P_\omega f(x) \in \mathbb{X}_\omega.$$

Поэтому по лемме 6.7.3 (см. (6.7.5))

$$\|F_\omega(x)\|_* \leq \|x\|_*, \qquad F_\omega \in \mathfrak{F}. \tag{6.7.20}$$

Пусть теперь подмножества $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}$ множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ таковы, что

$$F_{\omega_0}, F_{\omega_1}, \ldots, F_{\omega_{k-1}} \in \mathfrak{F}, \quad \omega_0 \cup \omega_1 \cup \ldots \omega_{k-1} = \{1, 2, \ldots, N\} \tag{6.7.21}$$

Обозначим через $F_{\omega_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{\omega_1} \circ F_{\omega_0}$ суперпозицию отображений F_{ω_i}, т.е отображение

$$\left(F_{\omega_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{\omega_1} \circ F_{\omega_0}\right)(x) = F_{\omega_{k-1}}\left(\ldots\left(F_{\omega_1}\left(F_{\omega_0}(x)\right)\right)\ldots\right),$$

и покажем, что из (6.7.21) вытекает оценка

$$\|(F_{\omega_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{\omega_1} \circ F_{\omega_0})(x)\|_* \le q_0\|x\|_*. \tag{6.7.22}$$

Действительно, определим для произвольного вектора x наборы множеств $\omega(n)$ и векторов $z(n)$ и $b(n)$, полагая $z(0) = x$,

$$\omega(n) = \omega_n, \quad b(n) = P_{\omega(n)}f[z(n)], \quad z(n+1) = A_{\omega(n)}z(n) + b(n), \tag{6.7.23}$$

при $n = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда в силу (6.7.2), (6.7.19) и (6.7.21)

$$\|b(n)\|_* \le \sigma_0\|z(n)\|_*, \quad b(n) \in \mathbb{X}_{\omega(n)}, \quad A_{\omega(n)} \in \mathfrak{F},$$

откуда по лемме 6.7.3

$$\|z(k)\|_* \le q_0\|z(0)\|_* = q_0\|x\|_*. \tag{6.7.24}$$

С другой стороны, в силу (6.7.23) $z(n+1) = F_{\omega_n}[z(n)]$ при $n = 0, 1, \ldots, k-1$, а поскольку $z(0) = x$, то

$$z(k) = (F_{\omega_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{\omega_1} \circ F_{\omega_0})(x).$$

Отсюда и из (6.7.24) вытекает (6.7.22).

Завершим доказательство теоремы 6.7.2. Пусть $x(n)$ — произвольное решение разностного уравнения (6.7.1) с правыми частями из класса $\mathfrak{F}$. Тогда из неравенств (6.7.20) и (6.7.22) вытекает оценка

$$\|x(n)\|_* \le q_0^{N_x(n)}\|x(0)\|_*, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

где $N_x(n)$ — число коррекций компонент (см. § 3.6) решения $x(\cdot)$ на отрезке $[0, n)$. Поскольку $q_0 < 1$, отсюда следует абсолютная r-асимптотическая устойчивость уравнения (6.7.1) в классе правых частей $\mathfrak{F}$. Теорема 6.7.2 доказана. □

Наибольшее применение находит следующее следствие теоремы 6.7.2.

6.7.5. Теорема. *Пусть линейное уравнение* (6.7.3) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, содержащем $\mathfrak{P}_1(A)$. Пусть $F(x) = Ax + f(x)$, где*

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \to 0, \qquad x \ne 0. \tag{6.7.25}$$

Тогда уравнение (6.7.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(F)$.*

В заключение параграфа укажем один достаточный признак абсолютной r-асимптотической устойчивости, относящийся к случаю «почти треугольных» систем.

6.7.6. Теорема. *Пусть $A = (a_{ij})$ — блочная треугольная матрица, спектральные радиусы $\rho(a_{ii})$ диагональных элементов которой меньше* 1. *Если $F(x) = Ax + f(x)$, где $f(x)$ удовлетворяет условию* (6.7.2) *с достаточно малым $\sigma > 0$, либо условию* (6.7.25)*, то уравнение* (6.7.1) *абсолютно r-асимптотически устойчиво в классе правых частей $\mathfrak{P}(A)$.*

Доказательство теоремы 6.7.6 следует из примера 5.2.11 и, в зависимости от накладываемых на $f(x)$ ограничений, теорем 6.7.2 или 6.7.5.

Замечания и библиографические справки

Обсуждение свойства Перрона для разностных уравнений содержится, например, в [Халанай, Векслер, 1971]. Понятие абсолютной устойчивости по Перрону для разностных уравнений (без использования этого термина), описывающих динамику рассинхронизованных систем, по-видимому, впервые введено в [Козякин, 1991a,b; Asarin, Kozjakin, Krasnoselskii, Kuznetsov, 1990]; там же сформулированы теоремы о корректности абсолютной r-асимптотической устойчивости, об абсолютной r-асимптотической устойчивости подчиненных систем, а также приведены оценки величины возмущений симметрических матриц, не приводящих к потере системой свойства абсолютной r-асимптотической устойчивости. Доказательства этих утверждений в полном объеме ранее не публиковались.

Излагаемые в главе вопросы в общей постановке могут быть сформулированы следующим образом. В $\mathbb{R}^N$ заданы неотрицательный функционал $\varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$, и итерационная процедура $x(n+1) = A(n)x(n)$, обладающая тем свойством, что $\varphi[x(n+1)] \le \varphi[x(n)]$. На рассматриваемую итерационную процедуру накладывается аддитивный шум $b(n)$, сравнимый с величинами итераций. В результате «зашумленная» итерационная процедура выглядит следующим образом: $y(n+1) = A(n)y(n) + b(n)$, $\|b(n)\| \le \varepsilon\|y(n)\|$. Ставится вопрос об ограниченности итераций $\{y(n)\}$ и о существовании такого функционала $\psi(x)$, для которого $\psi[y(n+1)] \le \psi[y(n)]$.

В такой постановке вопросы, обсуждаемые в главе, близки к вопросам устойчивости релаксационных процессов; см., например, [Любич, 1967; Любич, Майстровский, 1970a,b; Майстровский, 1967; Ортега, Рейнболдт, 1975; Bertsekas, Tsitsiklis, 1988; Elkin, 1968; Schechter, 1968]. Следует подчеркнуть, что отличия в постановках, предположениях и т.п., рассматриваемых в главе задач от традиционных задач теории релаксационных процессов, не позволяют непосредственно воспользоваться достижениями последней. Более того, утверждения настоящей главы доказываются, как правило, в более широких предположениях по сравнению с предположениями, обычно делаемыми в теории релаксационных процессов.

Глава 7

Фазочастотная рассинхронизация

В настоящей главе мы возвращаемся к анализу устойчивости индивидуальных рассинхронизованных систем. Исследуется один из наиболее важных и интересных с точки зрения технических приложений случай рассинхронизации по фазе и частоте. Отличительной чертой такого типа рассинхронизации является периодичность коррекций каждой компоненты системы.

Случай, когда периоды коррекции всех компонент одинаковы (рассинхронизация по фазе), поддается сравнительно полному анализу. Исследование систем, различные компоненты которых подвергаются коррекции с различными периодами (общая частотная рассинхронизация), существенно сложнее. Общие эффективные методы исследования устойчивости таких систем авторам не известны. Ориентированные на численный анализ приемы исследования устойчивости изложены в § 7.2. Анализ устойчивости двухкомпонентных систем проведен в § 7.3 и § 7.4. Значительная часть этих параграфов посвящена результатам А.Ф. Клепцына.

§ 7.1. Рассинхронизация по фазе

В этом коротком параграфе напоминаются основные свойства рассинхронизованных по фазе систем. Они являются следствием периодичности оператора перехода соответствующего разностного уравнения.

7.1.1. Пусть система W состоит из компонент (элементов, частей, подсистем) $W_1, W_2, \ldots, W_N$. Предполагается, что состояние каждой компоненты

W_i, описываемое некоторым вектором $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \geq 1$, может изменяться лишь в дискретные моменты времени — моменты коррекции соответствующей компоненты. Считается, что коррекция каждой компоненты W_i происходит мгновенно, причем значение ее вектора состояния $x_{i\,\text{нов}}$ в моменты времени, непосредственно следующие за моментом коррекции T, определяются лишь значениями векторов $x_{1\,\text{стар}}$, $x_{2\,\text{стар}}$, ..., $x_{N\,\text{стар}}$ состояния компонент системы W в моменты времени, непосредственно предшествующие моменту коррекции компоненты W_i:

$$x_{i\,\text{нов}} = \varphi_i(x_{1\,\text{стар}}, x_{2\,\text{стар}}, \ldots, x_{N\,\text{стар}}) \tag{7.1.1}$$

В технических системах коррекция компонент часто вызывается сигналами (тактовыми импульсами), периодически выдаваемыми некоторым специальным устройством — тактовым генератором. Если все компоненты системы W обслуживаются одним тактовым генератором, то они подвергаются коррекции периодически с одним и тем же периодом. Моменты коррекции различных компонент в этом случае могут совпадать друг с другом, — тогда говорят о синхронизованной системе W. Но из-за различных задержек в каналах передачи тактовых импульсов (и по другим причинам) моменты коррекции различных компонент могут быть смещены друг относительно друга на некоторые фиксированные величины — фазовые рассогласования. Тогда говорят о *фазовой рассинхронизации* системы W.

Если каждая компонента системы W обслуживается собственным тактовым генератором, то периоды коррекции различных компонент системы W могут оказаться различными. В этом случае говорят о *частотной рассинхронизации* системы W.

7.1.2. Рассинхронизованные уравнения. Напомним основные определения и конструкции, дающие формализованное описание динамики рассинхронизованных систем (см. § 1.3–§ 1.6). Обозначим переменное состояние компоненты W_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, системы W через $\xi_i(t)$. В общем случае фазочастотной рассинхронизации значения моментов коррекции T_i^n компоненты W_i определяются равенствами

$$T_i^n = nh_i + \tau_i, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.1.2}$$

Согласно приведенному выше описанию функционирования рассинхронизованной системы, каждая функция $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, изменяет свои значения только в моменты коррекции T_i^n соответствующей компоненты:

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \varphi_i[\xi_1(T_I^n - 0), \ldots, \xi_N(T_I^n - 0)], \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{7.1.3}$$

оставаясь постоянной на интервалах (T_i^n, T_i^{n+1}). В моменты коррекции $t = T_i^n$ значения функции $\xi_i(t)$ не определены. Будем полагать $\xi_i(T_i^n) = \xi_i(T_I^n - 0)$, так что

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n < t \leq T_i^{n+1}, \tag{7.1.4}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $-\infty < n < \infty$.

Уравнения (7.1.3), (7.1.4) описывают динамику общей рассинхронизованной системы W (см. § 1.3). Случай, когда моменты коррекции компонент системы W имеют вид (7.1.2), отвечает системам, рассинхронизованным по фазе и частоте. Если при этом

$$T_i^n = nh + \tau_i, \qquad -\infty < n < \infty, \ h > 0, \tag{7.1.5}$$

то речь идет о рассинхронизации по фазе (см. § 1.6). Если же

$$T_i^n = nh_i, \qquad -\infty < n < \infty, \ h_i > 0, \tag{7.1.6}$$

то говорят о *рассинхронизации по частоте*. В более широком смысле систему W, описываемую уравнениями (7.1.3), (7.1.4), называют *рассинхронизованной по частоте*, если в (7.1.2) не все периоды h_i коррекции компонент совпадают между собой.

В ряде случаев удобной формой описания динамики рассинхронизованных систем являются разностные уравнения. Вектор

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, \tag{7.1.7}$$

образованный из векторов состояния x_i компонент W_i назовем *вектором состояния* системы W. Множество всех векторов (7.1.7) образует пространство состояний $\mathbb{X}$ системы W. Таким образом, пространство состояний системы W можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_N} = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_N}$. Пусть $\cdots < T^0 < T^1 < \cdots < T^n < \ldots$ — последовательность всех моментов коррекции компонент системы W. Тогда в каждый момент времени $t = T^n$ подвергается коррекции одна или несколько компонент; обозначим через $\omega(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ множество их номеров. Через $x(n) = \{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)\}$ обозначим состояние системы W в моменты времени, непосредственно предшествующие моменту коррекции $t = T^n$:

$$x(n) = \{x_1(T^n - 0), x_2(T^n - 0), \ldots, x_N(T^n - 0)\}.$$

Тогда вектор-функция $x(n)$ является решением разностного уравнения

$$x(n+1) = \varphi_{\omega(n)}[x(n)], \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.1.8}$$

Здесь отображение

$$\varphi_\omega(x) = \{\varphi_1^\omega(x_1, \ldots, x_N), \varphi_2^\omega(x_1, \ldots, x_N), \ldots, \varphi_N^\omega(x_1, \ldots, x_N)\}$$

для каждого множества $\omega = \omega(n) \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ получается из отображения

$$\varphi(x) = \{\varphi_1(x_1, \ldots, x_N), \varphi_2(x_1, \ldots, x_N), \ldots, \varphi_N(x_1, \ldots, x_N)\}$$

следующим образом:

$$\varphi_i^\omega(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} \varphi_i(x_1, \ldots, x_N), & \text{если} \quad i \in \omega, \\ x_i, & \text{если} \quad i \notin \omega. \end{cases}$$

Отображение $\varphi_\omega(x)$ называется *ω-помесью* отображения $\varphi(x)$. Если $\omega = \emptyset$, то $\varphi_\omega(x) = x$. Если $\omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, то $\varphi_\omega(x) = \varphi(x)$. В случае, когда $\varphi(x) = Ax$, где $A = (a_{ij})$ — блочная матрица, а множество ω состоит из одного элемента i, матрица A_ω линейного отображения $\varphi_\omega(x)$ имеет вид

$$A_\omega = \begin{Vmatrix} I & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} & \ldots & a_{iN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & I \end{Vmatrix}.$$

7.1.3. Устойчивость рассинхронизованных по фазе систем. Напомним основные факты, касающиеся анализа устойчивости систем, рассинхронизованных по фазе (см. § 1.6 и § 2.6). Пусть система W рассинхронизована по фазе, т.е. моменты коррекции ее компонент выражаются при некотором $h > 0$ равенствами (7.1.5). Величины фазовых рассогласований τ_i можно считать неотрицательными и меньшими h. Перенумерацией компонент системы W всегда можно добиться того, что величины фазовых рассогласований будут удовлетворять соотношениям

$$0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \cdots \le \tau_N < h.$$

Некоторые из фазовых рассогласований могут совпадать. Поэтому общее число L различных значений фазовых рассогласований, вообще говоря, отличается от числа N компонент системы W. Обозначим упорядоченные по возрастанию значения величин фазовых рассогласований через τ_i^*,

$i = 1, 2, \ldots, L$. Тогда одна из возможных последовательностей моментов коррекции компонент системы W будет определяться равенствами

$$T^{kL+1} = kh + \tau_1^*, \ \ldots, \ T^{kL+L} = kh + \tau_L^*, \qquad -\infty < k < \infty.$$

Последовательность множеств $\omega(n)$, состоящих из номеров компонент системы W, подвергающихся коррекции в момент T^n, оказывается в этом случае периодической с периодом L (см. лемму 1.6.7). Значит, по теореме 1.6.8 периодическим с периодом L оказывается и разностное уравнение (7.1.8).

7.1.4. Периодичность уравнения (7.1.8), описывающего динамику рассинхронизованной по фазе системы W, влечет важные следствия.

Во-первых, анализ устойчивости состояния равновесия рассинхронизованной по фазе системы W не сложнее анализа устойчивости синхронизованной системы: оба случая сводятся к анализу устойчивости некоторого автономного разностного уравнения.

Если система W синхронизована, то все множества $\omega(n)$ тождественно равны множеству $\{1, 2, \ldots, N\}$, и таким автономным уравнением оказывается уравнение (7.1.8), принимающее в этом случае вид

$$x(n+1) = \varphi[x(n)], \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.1.9}$$

Если же система W рассинхронизована (по фазе), то уравнение (7.1.8) периодично. Поэтому некоторое его положение равновесия устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) соответствующее положение равновесия автономного уравнения

$$x(n+1) = \Phi[x(n)], \qquad -\infty < n < \infty, \tag{7.1.10}$$

правая часть которого является суперпозицией отображений $\varphi_{\omega(i)}(x)$:

$$\Phi(x) = \varphi_{\omega(L)}(\ldots(\varphi_{\omega(2)}(\varphi_{\omega(1)}(x)))\ldots). \tag{7.1.11}$$

Хотя в принципиальном плане анализ устойчивости уравнения (7.1.10) не сложнее анализа устойчивости уравнения (7.1.9), с технической стороны могут возникнуть значительные (а в прикладных задачах даже непреодолимые) трудности. Это связано со сложностью вычисления отображения (7.1.11). Еще труднее сформулировать условия устойчивости уравнения (7.1.10) в терминах отображения $f(x)$.

Во-вторых, к анализу устойчивости положения равновесия рассинхронизованной по фазе нелинейной системы W принцип линеаризации может быть применен в той же мере, в какой он применим для анализа устойчивости синхронизованных систем. Смысл этого принципа заключается в следующем. Пусть вектор-функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в уравнениях (7.1.1), описывающих изменение состояния компонент системы W при их коррекции, могут быть линеаризованы, т.е. представлены в виде

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iN}x_N + o(x),$$

где в общем случае a_{ij} — матрицы соответствующих размерностей, а через $o(x)$ обозначены члены более высокого порядка малости в нуле относительно некоторой нормы вектора x. Тогда наряду с уравнениями (7.1.3) и (7.1.8), описывающими динамику системы W, могут быть соответственно рассмотрены линейные уравнения

$$\xi_i(T_i^n + 0) = a_{i1}\xi_1(T_I^n - 0) + \cdots + a_{iN}\xi_N(T_I^n - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N \quad (7.1.12)$$

и

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n), \quad (7.1.13)$$

где $A_{\omega(n)}$ — помеси блочной матрицы $A = (a_{ij})$. Уравнения (7.1.12) и (7.1.13) называют уравнениями *первого приближения* к уравнениям (7.1.3) и (7.1.8) или *линеаризациями* уравнений (7.1.3) и (7.1.8) соответственно.

Пусть система W синхронизована. Тогда уравнение первого приближения к уравнению (7.1.9), описывающему динамику такой системы, имеет следующий вид:

$$x(n+1) = Ax(n). \quad (7.1.14)$$

В этом случае справедлив следующий принцип устойчивости по первому приближению: если уравнение (7.1.14) асимптотически устойчиво, то и нулевое положение равновесия уравнения (7.1.9) асимптотически устойчиво; если уравнение (7.1.14) неустойчиво, причем по крайней мере одно собственное значение матрицы A по модулю больше 1, то и нулевое положение равновесия уравнения (7.1.9) неустойчиво (см. теорему 1.2.15).

Пусть теперь система W рассинхронизована по фазе. Свойства устойчивости уравнения (7.1.8), описывающего ее динамику, такие же, как и свойства устойчивости уравнения (7.1.10) — оба уравнения одновременно устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы. Но как нетрудно убедиться, линеаризация уравнения (7.1.10) имеет вид

$$x(n+1) = Bx(n), \quad (7.1.15)$$

где матрица B является произведением помесей $A_{\omega(1)}, A_{\omega(2)}, \ldots, A_{\omega(L)}$ матрицы A:

$$B = A_{\omega(L)} \cdots A_{\omega(2)} A_{\omega(1)}. \tag{7.1.16}$$

Осталось заметить, что свойства устойчивости уравнения (7.1.15) такие же, как и уравнения (7.1.13) — линеаризации уравнения (7.1.10). Следовательно, для рассинхронизованных по фазе систем W принцип устойчивости по первому приближению верен в следующей форме: если уравнение первого приближения (7.1.13) асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво и нулевое положение равновесия уравнения (7.1.8); если уравнение (7.1.13) неустойчиво, причем по крайней мере одно собственное значение матрицы B по модулю больше 1, то и нулевое положение равновесия уравнения (7.1.8) неустойчиво.

Принцип устойчивости по первому приближению во многих случаях позволяет преодолеть те технические трудности анализа устойчивости нелинейных рассинхронизованных систем, о которых говорилось выше. Достигается это благодаря тому, что вычисление матрицы (7.1.16) для анализа устойчивости уравнения (7.1.15) не обязательно. Действительно, характер устойчивости уравнения (7.1.15) по теореме 1.2.3 определяется расположением собственных значений матрицы B. Но в § 2.6 показано, что собственные значения матрицы B удовлетворяют некоторому уравнению, непосредственно выписываемому по матрице A.

Третье следствие периодичности уравнения (7.1.8), описывающего динамику рассинхронизованной по фазе системы, заключается в том, что устойчивость такой системы определяется не величинами фазовых рассогласований τ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, а порядком их взаимного расположения на числовой оси. Действительно, пусть моменты коррекции компонент рассинхронизованной системы W в одном случае определяются равенствами (7.1.5), а в другом — равенствами $T_i^n = n\tilde{h} + \tilde{\tau}_i$ $(-\infty < n < \infty, \tilde{h} > 0)$. Пусть при этом порядок расположения чисел $\tilde{\tau}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, на числовой оси такой же, как и порядок расположения чисел τ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, т.е. $\tilde{\tau}_i < \tilde{\tau}_j$, если и только если $\tau_i < \tau_j$. Тогда в обоих случаях анализ устойчивости системы W сводится к исследованию одного и того же уравнения (7.1.10).

Указанное свойство рассинхронизованных систем выходит на первый план, когда значения фазовых рассогласований известны с некоторой погрешностью:

$$\tau_i = \tau_i^o + \delta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Если при этом числа τ_i^o, $i = 1, 2, \ldots, N$, попарно различны, а величины погрешностей их определения δ_i достаточно малы, то погрешность определения фазовых рассогласований не влияет на суждение об устойчивости рассинхронизованной системы. Если же некоторые из чисел τ_i^o совпадают (например, $\tau_1^o = \tau_2^o = \cdots = \tau_N^o$), то при одних (сколь угодно малых) значениях погрешностей δ_i система может оказаться устойчивой, а при других неустойчивой (см. примеры из § 2.7). В этом смысле рассинхронизованные по фазе системы с попарно различными фазовыми рассогласованиями обладают бóльшим запасом устойчивости по отношению к погрешностям измерения фазовых рассогласований, чем синхронизованные системы или системы с пренебрежимо малыми фазовыми рассогласованиями. Из этого важного вывода следует целесообразность введения в отдельных случаях преднамеренных фазовых рассогласований в работу компонент для придания системе меньшей чувствительности к возможным колебаниям моментов коррекции компонент.

7.1.5. В заключение обратим внимание еще на одну особенность рассинхронизованных по фазе систем. Как уже отмечено, одним из неприятных с точки зрения анализа устойчивости является случай «почти синхронизованных» систем, когда величины фазовых рассогласований с точностью до погрешностей их измерения одинаковы. Чтобы гарантировать устойчивость системы в этом случае, необходимо рассмотреть уравнения (7.1.10) со всевозможными правыми частями (7.1.11). Но таких уравнений имеется лишь конечное число, поскольку конечно число различных способов взаимного расположения на числовой оси фазовых рассогласований τ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Следовательно, в этом случае существует принципиальная возможность гарантировать устойчивость системы (по крайней мере в случае линейных систем). В прикладных исследованиях эта возможность может быть реализована с помощью численных методов.

Для получения достаточных признаков устойчивости или асимптотической устойчивости рассинхронизованных по фазе систем можно воспользоваться признаками абсолютной устойчивости или абсолютной асимптотической устойчивости рассинхронизованных систем либо в классе всех рассинхронизаций, либо в классе слабых рассинхронизаций (см. гл. 3).

§ 7.2. Рассинхронизация по частоте

В предыдущем параграфе отмечалось, что анализ устойчивости рассинхронизованных по фазе систем может оказаться в техническом плане более трудной задачей, чем анализ устойчивости синхронизованных систем. В то же время в принципиальном плане такой анализ не сложнее анализа устойчивости синхронизованных систем или анализа устойчивости автономных разностных уравнений.

При рассинхронизации по частоте ситуация более сложная — соответствующее разностное уравнение в общем случае уже не является периодическим. В результате иными по сравнению с синхронизованными или рассинхронизованными по фазе оказываются как свойства частотно рассинхронизованных систем, так и методы их анализа. Здесь трудно надеяться на получение общих эффективных критериев устойчивости или неустойчивости. На первый план выходят отдельные необходимые или достаточные условия, ориентированные преимущественно на применение численных методов анализа.

7.2.1. Метод интервалов. Рассмотрим рассинхронизованную по частоте (и фазе) линейную систему W. Ее динамика описывается системой импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = a_{i1}\xi_1(T_I^n - 0) + \cdots + a_{iN}\xi_N(T_I^n - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (7.2.1)$$

с моментами коррекции компонент

$$T_i^n = nh_i + \tau_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N;\ -\infty < n < \infty, \quad (7.2.2)$$

где $\xi_i(t)$ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \geq 1$, постоянные на интервалах $(T_i^n, T_i^{n+1}]$:

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n < t \leq T_i^{n+1}, \quad (7.2.3)$$

а a_{ij} — матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что периоды h_i коррекции компонент положительны. Величины фазовых рассогласований можно считать удовлетворяющими соотношениям $0 \leq \tau_i < h_i$ при $i = 1, 2, \ldots, N$.

Для получения достаточных условий устойчивости или асимптотической устойчивости системы (7.2.1) могут быть использованы результаты предыдущих глав — достаточно заметить, что из абсолютной устойчивости системы (7.2.1) в классе всех рассинхронизаций следует ее устойчивость при любом выборе моментов коррекции компонент, а значит, и в случае, когда моменты коррекции компонент имеют вид (7.2.2). А из абсолютной асимптотической устойчивости системы (7.2.1) в классе всех рассинхронизаций следует ее асимптотическая устойчивость при любом выборе моментов коррекции компонент вида (7.2.2).

Если периоды $h_1, h_2, \ldots, h_N$ коррекции компонент системы (7.2.1) попарно несоизмеримы, то найдется такой момент времени T_*, что при $t \geq T_*$ никакие две компоненты системы (7.2.1) не подвергаются коррекции одновременно. Это позволяет воспользоваться для получения достаточных условий устойчивости или асимптотической устойчивости системы (7.2.1) с попарно несоизмеримыми периодами коррекции компонент признаками абсолютной устойчивости или абсолютной асимптотической устойчивости системы (7.2.1) в классе рассинхронизаций $\mathfrak{S}_1$ (см. гл. 3).

Пусть среди периодов коррекции компонент системы (7.2.1) найдется группа из k попарно соизмеримых периодов и в то же время в любой группе, состоящей из $k+1$ периодов, имеются несоизмеримые периоды. Тогда существует такой момент времени T_*, что при $t \geq T_*$ одновременно могут подвергаться коррекции не более k компонент системы (7.2.1). Следовательно, для получения достаточных условий устойчивости или асимптотической устойчивости системы (7.2.1) с указанным свойством периодов коррекции компонент можно использовать признаки абсолютной устойчивости или абсолютной асимптотической устойчивости системы (7.2.1) в классе рассинхронизаций $\mathfrak{S}_k$ (см. гл. 3).

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости системы (7.2.1) можно воспользоваться и излагаемым ниже методом интервалов.

Зададимся некоторым числом $H > 0$ и представим числовую ось как объединение непересекающихся интервалов $(T^n, T^{n+1}]$ с граничными точками

$$T^n = nH, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.2.4}$$

Обозначим через $x(n)$ значение вектора состояния системы W, описываемой уравнениями (7.2.1)–(7.2.3), в моменты времени, непосредственно следующие за T^n:

$$x(n) = \{\xi_1(T^n + 0), \xi_2(T^n + 0), \ldots, \xi_N(T^n + 0)\}, \tag{7.2.5}$$

а через $C(n)$ обозначим блочную матрицу линейного оператора сдвига $\Phi(T^{n+1}, T^n; x)$ от состояния системы в момент времени $T^n + 0$ к состоянию системы в моменты времени $T^{n+1} + 0$ (см. пункт 1.5.3). Тогда вектор-функция (7.2.5) удовлетворяет уравнению

$$x(n+1) = C(n)x(n). \tag{7.2.6}$$

Система импульсных уравнений (7.2.1) устойчива (асимптотически устойчива), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) разностное уравнение (7.2.6). Поэтому нужен анализ устойчивости уравнения (7.2.6). Прежде всего, необходимо уметь вычислять матрицы $C(n)$. Если на интервале $(T^n, T^{n+1}]$ ни одна компонента системы не подвергается коррекции, то $C(n) = I$. Пусть система обладает компонентами, подвергающимися коррекции на интервале $(T^n, T^{n+1}]$. Тогда непусто множество $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ упорядоченных по возрастанию моментов коррекции компонент системы, принадлежащих интервалу $(T^n, T^{n+1}]$. Обозначив через ω_i множество номеров компонент, подвергающихся коррекции в момент t_i, приходим к следующему представлению матрицы $C(n)$ (см. § 1.5, § 1.6):

$$C(n) = A_{\omega_m} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1}, \tag{7.2.7}$$

где A_{ω_i}, $i = 1, 2, \dots, m$, — ω_i-помеси блочной матрицы $A = (a_{ij})$.

7.2.2. Пример. Пусть рассматривается трехкомпонентная система (7.2.1) с моментами коррекции компонент $T_1^n = n$, $T_2^n = \sqrt{2}\,n$, $T_3^n = \sqrt{3}\,n$. Пусть $H = 1.5$. Тогда $C(0) = A_{\{2\}}A_{\{1\}}$, $C(1) = A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{3\}}$, $C(2) = A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{3\}}$ и т.д. (см. рис. 7.1).

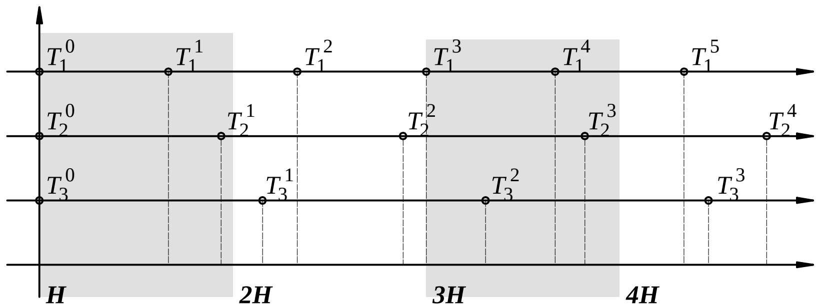

Рис. 7.1. Пример группировки моментов коррекции компонент при исследовании устойчивости рассинхронизованной системы методом интервалов

В силу (7.2.2) компонента с номером i подвергается коррекции на каждом интервале $(T^n, T^{n+1}]$ не более $[H/h_i] + 1$ раз, где $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α. Поэтому общее количество сомножителей в формуле (7.2.7) конечно — оно не превосходит числа $N + [H/h_1] + \dots + [H/h_N]$. А поскольку количество различных помесей матрицы A также конечно, то конечно и количество различных матриц $C(n)$. Обозначим их через $D_1, D_2, \dots, D_L$.

Обозначим через $\eta(n, i)$ число матриц вида D_i среди матриц $C(0)$, $C(1)$, $\dots$, $C(n-1)$. Ниже будет показано, что при каждом $i = 1, 2, \dots, L$ существует и конечен предел

$$p_i = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta(n, i)}{n}, \tag{7.2.8}$$

причем

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1. \qquad (7.2.9)$$

Число p_i — это средняя частота появления матрицы вида D_i в последовательности матриц $C(n)$ при $n \geq 0$.

Пусть в пространстве состояний системы W, описываемой уравнениями (7.2.1)–(7.2.3), задана некоторая норма $\|\cdot\|$. Положим

$$\nu = \|D_1\|^{p_1}\|D_2\|^{p_2}\cdots\|D_L\|^{p_L}, \qquad (7.2.10)$$

если матрицы D_i, $i = 1, 2, \ldots, L$, ненулевые, и $\nu = 0$, если хотя бы одна из них нулевая.

7.2.3. Теорема. *Если* $\nu < 1$, *то уравнение* (7.2.6) *асимптотически устойчиво. При этом для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $c < \infty$, *что*

$$\|x(n)\| \leq c(\nu + \varepsilon)^n\|x(0)\|, \qquad n = 0, 1, \ldots . \qquad (7.2.11)$$

Доказательство. Если среди матриц D_i, $i = 1, 2, \ldots, L$, имеется нулевая, то найдется такое число $n_0 \geq 0$, при котором $C(n_0) = 0$. Тогда каждое решение $x(n)$ уравнения (7.2.6) обращается в нуль при $n > n_0$, и утверждение теоремы очевидно. Поэтому рассмотрим лишь случай ненулевых матриц D_i, $i = 1, 2, \ldots, L$. В этом случае найдется число $d \geq 1$, при котором

$$\frac{1}{d} \leq \|D_i\| \leq d, \qquad i = 1, 2, \ldots, L. \qquad (7.2.12)$$

Для каждого решения $x(n)$ уравнения (7.2.6) верно представление $x(n) = C(n-1)\cdots C(1)C(0)x(0)$, откуда

$$\|x(n)\| \leq q(n)\|x(0)\|, \qquad (7.2.13)$$

где $q(n) = \|C(n-1)\|\cdots\|C(1)\|\,\|C(0)\|$. В правой части полученного равенства $\eta(n,1)$ раз встречается сомножитель $\|D_1\|$, $\eta(n,2)$ раз встречается сомножитель $\|D_2\|$ и т.д. Поэтому

$$q(n) = \|D_1\|^{\eta(n,1)}\cdots\|D_L\|^{\eta(n,L)}$$

или, что то же в силу (7.2.9) и (7.2.10),

$$q(n) = \nu^n\|D_1\|^{\eta(n,1)-np_1}\cdots\|D_L\|^{\eta(n,L)-np_L}. \qquad (7.2.14)$$

По определению чисел p_i (см. выражение (7.2.8)) при каждом $\delta > 0$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\eta(n,i)}{n} - p_i\right| \leq \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots, L,$$

как только n превосходит некоторое число $n(\delta)$. Но тогда найдется такое число $\sigma(\delta) < \infty$, что $|\eta(n,i) - np_i| \leq \sigma(\delta) + n\delta$ при $i = 1, 2, \ldots, L$ и всех $n \geq 0$. Следовательно, в силу (7.2.12)

$$\|D_i\|^{\eta(n,i)-np_i} \leq d^{\sigma(\delta)+n\delta}, \qquad n \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, L,$$

откуда в силу (7.2.14)

$$q(n) \leq \nu^n d^{L\sigma(\delta)+Ln\delta}, \qquad n \geq 0. \tag{7.2.15}$$

Выбрав теперь число δ настолько малым, чтобы при данном $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $d^{L\delta} \leq 1 + \varepsilon/\nu$, из (7.2.15) получим неравенство

$$q(n) \leq d^{L\sigma(\delta)}(\nu + \varepsilon)^n, \qquad n \geq 0.$$

Отсюда и из (7.2.13) следует оценка (7.2.11) норм решений уравнения (7.2.6). Взяв число $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $\nu + \varepsilon < 1$, из оценок (7.2.11) получаем абсолютную устойчивость уравнения (7.2.6). Теорема 7.2.3 доказана. □

Применение теоремы 7.2.3 требует знания частот p_i появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$. Один способ вычисления этих частот вытекает из их определения (7.2.8). Другой, менее трудоемкий способ вычисления p_i, применимый при небольшом числе компонент, будет изложен ниже.

Объем необходимых для нахождения величины ν вычислений существенно зависит от длины H интервалов $(T^n, T^{n+1}]$.

7.2.4. Пример. Рассмотрим двухкомпонентную систему импульсных уравнений (7.2.1) с моментами коррекции компонент $T_1^n = n$, $T_2^n = \sqrt{2}\,n$.

Пусть $1 < H < \sqrt{2}$. В этом случае при $n \geq 0$ в последовательности $\{C(n)\}$ встречается 7 различных матриц: $A_{\{1\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{2\}}$, $A_{\{2\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{1\}}$.

Пусть $\sqrt{2} < H < 2$. В этом случае при $n \geq 0$ в последовательности $\{C(n)\}$ встречается также 7 различных матриц: $A_{\{1\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}$, $A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}$, $A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}$.

Пусть $H = \sqrt{2}$. В этом случае при $n \geq 0$ в последовательности $\{C(n)\}$ встречается только 2 различных матрицы: $A_{\{2\}}A_{\{1\}}$ и $A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{1\}}$.

Как показывает приведенный пример, выбор в качестве H одного из периодов $h_1, h_2, \ldots, h_N$ коррекции компонент может значительно уменьшить объем вычислений, необходимых для проверки условий теоремы 7.2.3.

Число $\nu = \nu(H)$ зависит от выбора длины H интервалов $(T^n, T^{n+1}]$. При кратном увеличении H значение $\nu(H)$ не возрастает: $\nu(kH) \le \nu(H)$ при $k = 2, 3, \ldots$. Поэтому, получив при некотором значении H величину $\nu(H)$, большую 1, можно увеличить число H в целое число раз и попытаться проверить условия теоремы 7.2.3 при этом новом значении H. Таким образом, в последовательности неравенств

$$\nu(H) < 1, \ \nu(2H) < 1, \ \ldots, \ \nu(2^k H) < 1, \ \ldots$$

каждое последующее служит более сильным признаком устойчивости уравнения (7.2.6), чем предыдущее. Следует только иметь в виду, что с ростом H быстро растет количество матриц D_i.

7.2.5. Пример. Рассмотрим трехкомпонентную систему импульсных уравнений (7.2.1)–(7.2.3) со скалярной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 0.35 & -0.35 & 0.35 \\ 0.35 & 0.35 & -0.35 \\ 0.35 & -0.35 & -0.35 \end{Vmatrix}.$$

Пусть $h_1 = 1$, $h_2 = \sqrt{2}$, $h_3 = \sqrt{3}$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$. Выберем $H = \sqrt{3}$ и обозначим матрицы $A_{\{i\}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, через A_i. Тогда при выбранном H имеется 9 различных матриц $\{D_i\}$:

$$D_1 = A_3A_2A_1 = \begin{Vmatrix} 0.35 & -0.35 & 0.35 \\ 0.12 & 0.23 & -0.23 \\ 0.08 & -0.20 & -0.15 \end{Vmatrix}, \quad \|D_1\| = 1.05, \quad p_1 = 0.10;$$

$$D_2 = A_3A_1A_2 = \begin{Vmatrix} 0.23 & -0.12 & 0.47 \\ 0.35 & 0.35 & -0.35 \\ -0.04 & -0.17 & -0.06 \end{Vmatrix}, \quad \|D_2\| = 1.05, \quad p_2 = 0.10;$$

$$D_3 = A_3A_2A_1A_1 = \begin{Vmatrix} 0.12 & -0.47 & 0.47 \\ 0.04 & 0.18 & -0.18 \\ 0.03 & -0.23 & -0.12 \end{Vmatrix}, \quad \|D_3\| = 1.07, \quad p_3 = 0.06;$$

$$D_4 = A_3A_1A_2A_1 = \begin{Vmatrix} 0.08 & -0.20 & 0.55 \\ 0.12 & 0.23 & -0.23 \\ -0.02 & -0.15 & -0.08 \end{Vmatrix}, \quad \|D_4\| = 0.83, \quad p_4 = 0.42;$$

$$D_5 = A_3A_1A_1A_2 = \begin{Vmatrix} -0.04 & -0.17 & 0.64 \\ 0.35 & 0.35 & -0.35 \\ -0.14 & -0.18 & -0.00 \end{Vmatrix}, \quad \|D_5\| = 1.05, \quad p_5 = 0.06;$$

$$D_6 = A_3A_2A_1A_2 \quad = \left\| \begin{matrix} 0.23 & -0.12 & 0.47 \\ 0.20 & 0.08 & -0.31 \\ 0.01 & -0.07 & -0.08 \end{matrix} \right\|, \quad \|D_6\| = 0.82, \quad p_6 = 0.06;$$

$$D_7 = A_3A_2A_1A_2A_1 \quad = \left\| \begin{matrix} 0.08 & -0.20 & 0.55 \\ 0.07 & 0.01 & -0.24 \\ 0.00 & -0.07 & -0.07 \end{matrix} \right\|, \quad \|D_7\| = 0.83, \quad p_7 = 0.04;$$

$$D_8 = A_3A_2A_1A_1A_2 \quad = \left\| \begin{matrix} -0.04 & -0.17 & 0.64 \\ 0.11 & 0.06 & -0.25 \\ -0.05 & -0.08 & -0.04 \end{matrix} \right\|, \quad \|D_8\| = 0.85, \quad p_8 = 0.09;$$

$$D_9 = A_3A_1A_2A_1A_2 \quad = \left\| \begin{matrix} 0.01 & -0.07 & 0.62 \\ 0.20 & 0.08 & -0.31 \\ -0.07 & -0.05 & -0.02 \end{matrix} \right\|, \quad \|D_9\| = 0.70, \quad p_7 = 0.04.$$

Здесь норма матрицы порождается нормой $\|x\| = \max|x_i|$ в пространстве состояний $\mathbb{R}^3$ системы W. Из приведенных данных получаем, что $\nu = 0.90$. Поэтому по теореме 7.2.3 рассматриваемая трехкомпонентная система асимптотически устойчива.

Отметим, что утверждение теоремы 7.2.3 останется в силе, если в качестве $(T^n, T^{n+1}]$ взять интервалы с граничными точками более общего, чем (7.2.4) вида:

$$T^n = nH + T_*, \qquad -\infty < n < \infty.$$

Свяжем с набором матриц D_1, D_2, ..., D_L величину μ, определяемую равенством

$$\mu = |\det D_1|^{p_1} \cdots |\det D_L|^{p_L},$$

если определители $\det D_i$ при $i = 1, 2, \ldots, L$ отличны от нуля, и равную нулю, если хотя бы один из определителей $\det D_i$ равен нулю.

7.2.6. Теорема. *Если $\mu > 1$, то разностное уравнение* (7.2.6) *неустойчиво.*

Доказательство теоремы основывается на идее, аналогичной идее доказательства теоремы 7.2.3. Показывается, что для каждого малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $c > 0$, при котором $|\det\{C(n-1)\cdots C(1)C(0)\}| \geq c(\mu - \varepsilon)^n$ для $n \geq 0$. Отсюда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ вытекает соотношение

$$|\det\{C(n-1)\cdots C(1)C(0)\}| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7.2.16}$$

Так как определитель матрицы равен произведению ее собственных значений, то из (7.2.16) следует, что максимум модулей собственных значений матрицы $C(n-1)\cdots C(1)C(0)$, т.е. ее спектральный радиус, стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Но поскольку норма матрицы не меньше ее спектрального радиуса (см. п. 4.1.1), то $\|C(n-1)\cdots C(1)C(0)\| \to \infty$ при $n \to \infty$, откуда и следует утверждение теоремы 7.2.6.

Величина μ не зависит от выбора H. Поэтому при проверке условий теоремы 7.2.6 целесообразно задавать число H достаточно малым, чтобы уменьшить количество матриц D_i и тем самым сократить объем требуемых для нахождения μ вычислений.

7.2.7. В системе импульсных уравнений (7.2.1) с попарно несоизмеримыми периодами коррекции компонент никакие две компоненты, начиная с некоторого момента времени не подвергаются коррекции одновременно. Поэтому среди матриц D_i имеется ровно N матриц, частоты появления которых в последовательности $\{C(n)\}$ отличны от нуля. Это помеси матрицы $A = (a_{ij})$ вида $D_i = A_{\{i\}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Заметим теперь, что (в общем случае блочной матрицы A) $\det A_{\{i\}} = \det a_{ii}$, поэтому в рассматриваемой ситуации верно равенство

$$\mu = |\det a_{11}|^{p_1} \cdots |\det a_{NN}|^{p_N},$$

а если элементы матрицы A скалярные, то равенство

$$\mu = |a_{11}|^{p_1} \cdots |a_{NN}|^{p_N}.$$

7.2.8. Отображение сдвига. Возможность применения теорем 7.2.3 и 7.2.6 для анализа устойчивости конкретных систем в значительной степени зависит от существования эффективных приемов вычисления средних частот p_i появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$. Опишем один из таких приемов.

Каждая матрица $C(n)$ является произведением некоторого числа помесей матрицы A:

$$C(n) = A_{\omega_m} \cdots A_{\omega_2} A_{\omega_1}. \tag{7.2.17}$$

Матрицу $C(n)$ (или D_i) назовем *простой*, если каждое множество ω_i в (7.2.17) состоит из одного элемента. Простота матрицы $C(n)$ равносильна отсутствию на интервале $(T^n, T^{n+1}]$ моментов одновременной коррекции нескольких компонент системы (7.2.1).

Пусть периоды $h_1, h_2, \ldots, h_N$ коррекции компонент системы импульсных уравнений (7.2.1) попарно несоизмеримы. Тогда система (7.2.1) имеет не более конечного числа моментов одновременной коррекции нескольких компонент. Поэтому в последовательности $\{C(n)\}$ может быть только конечное число матриц, не являющихся простыми. Отсюда в силу (7.2.8) вытекает равенство нулю значений средних частот p_i появления непростых матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$. Следовательно, при вычислении p_i нетривиален лишь случай простых матриц D_i.

Поставим в соответствие каждой матрице $C(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, вектор $\alpha(n) = \{\alpha_1(n), \ldots, \alpha_N(n)\} \in \mathbb{R}^N$ с компонентами

$$\alpha_i(n) = \min_{T_i^k \le T^{n+1}} \left\{T^{n+1} - T_i^k\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.2.18}$$

Поскольку (см. равенство (7.2.2)) каждое значение в последовательности $\cdots < T_i^0 < T_i^1 < \cdots < T_i^n < \ldots$ больше предыдущего на h_i, то $0 \le \alpha_i(n) < h_i$ при $i = 1, 2, \ldots, N$. Поэтому при каждом значении n вектор $\alpha(n)$ лежит в параллелепипеде

$$\Gamma = [0, h_1) \times [0, h_2) \times \cdots \times [0, h_N) \subset \mathbb{R}^N.$$

При вычислении векторов $\alpha(n)$ нет необходимости каждый раз обращаться к формуле (7.2.18). Проще воспользоваться описываемой ниже рекуррентной процедурой нахождения $\alpha(n)$.

Пусть $h > 0$. В теории чисел через $x \pmod h$ принято обозначать число вида $x + nh$ (n — целое), попадающее в интервал $[0, h)$. Это обозначение позволяет выразить связь между компонентами векторов $\alpha(n+1)$ и $\alpha(n)$ в следующей форме:

$$\alpha_i(n+1) = \alpha_i(n) + H \pmod{h_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.2.19}$$

Определим равенством

$$S\alpha = \{\alpha_1 + H \pmod{h_1}, \ldots, \alpha_N + H \pmod{h_N}\}, \tag{7.2.20}$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \in \Gamma$, отображение сдвига параллелепипеда Γ на себя. Тогда в силу (7.2.19)

$$\alpha(n+1) = S\alpha(n). \tag{7.2.21}$$

В случае, когда $N = 1$ и $h_1 = 1$, отображение (7.2.20) называлось в § 2.4 отображением *циклического сдвига*. Формула (7.2.21) (или формулы (7.2.19)) определяет способ последовательного вычисления векторов $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\ldots$, $\alpha(n)$, $\ldots$ по вектору $\alpha(0)$. Вектор $\alpha(0)$ можно определить равенством (7.2.18).

Положение векторов $\alpha(n)$ в параллелепипеде Γ несет в себе полную информацию о способе представления матриц $C(n)$ в виде произведения помесей матриц A. Чтобы убедиться в этом, начнем со следующего замечания.

На интервале $(T^n, T^{n+1}]$ компонента с номером i системы импульсных уравнений (7.2.1) подвергается коррекции либо q_i, либо $q_i + 1$ раз, где $q_i = [H/h_i]$, а $[t]$ — целая часть числа t. Моменты коррекции i-й компоненты — это те из чисел

$$T^{n+1} - \alpha_i(n), \quad T^{n+1} - \{\alpha_i(n) + h_i\}, \quad T^{n+1} - \{\alpha_i(n) + 2h_i\}, \ \ldots, \tag{7.2.22}$$

которые превосходят $T^n = T^{n+1} - H$. Поэтому компонента с номером i системы (7.2.1) подвергается коррекции q_i раз, если

$$H - q_i h_i \le \alpha_i(n) < h_i; \tag{7.2.23}$$

она подвергается коррекции $q_i + 1$ раз, если

$$0 \le \alpha_i(n) < H - q_i h_i. \tag{7.2.24}$$

Соответственно для простых матриц $C(n)$ при выполнении условия (7.2.23) в произведении (7.2.17) будет q_i сомножителей $A_{\{i\}}$, а при выполнении условия (7.2.24) — $q_i + 1$ таких сомножителей.

Положим

$$I_i(q_i) = [H - q_i h_i, h_i), \qquad I_i(q_i + 1) = [0, H - q_i h_i).$$

Тогда параллелепипед Γ является объединением 2^N непересекающихся параллелепипедов

$$\Gamma(r_1, r_2, \ldots, r_N) = I_1(r_1) \times I_2(r_2) \times \cdots \times I_N(r_N) \subseteq \Gamma,$$

отвечающих всем возможным сочетаниям чисел r_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, каждое из которых может принимать либо значение $r_i = q_i$, либо значение $r_i = q_i + 1$. Принадлежность вектора $\alpha(n)$ некоторому параллелепипеду $\Gamma(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ для простой матрицы $C(n)$ означает, что в представлении (7.2.17) имеется $r_1 + r_2 + \cdots + r_N$ сомножителей, причем r_1 из них — это матрицы $A_{\{1\}}$, r_2 — это матрицы $A_{\{2\}}$, и т.д.

В терминах векторов $\alpha(n)$ можно указать и условие простоты матриц $C(n)$. Действительно, пусть вектор $\alpha(n)$ лежит в некотором параллелепипеде $\Gamma(r_1, r_2, \ldots, r_N)$. Тогда в силу (7.2.22) компоненты системы импульсных уравнений (7.2.1) с номерами i и j одновременно подвергаются коррекции в некоторый момент времени из интервала $(T^n, T^{n+1}]$, если и только если

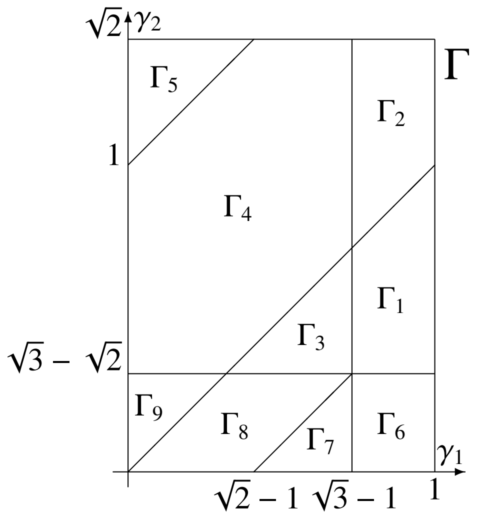

Рис. 7.2. Пример разбиения множества Γ на многогранники Γ_i для двухкомпонентной системы, рассинхронизованной по частоте

$\alpha_i(n)+lh_i = \alpha_j(n)+mh_j$ при некоторых $0 \le l \le r_I - 1$, $0 \le m \le r_j - 1$. Поэтому матрица $C(n)$ простая, если и только если вектор $\alpha(n)$ не принадлежит ни одной гиперповерхности

$$\alpha_i + s_i h_i = \alpha_j + s_j h_j, \tag{7.2.25}$$

где $0 \le s_i \le r_i - 1$, $0 \le s_j \le r_j - 1$, $0 \le i < j \le N$. Выбросим из параллелепипеда $\Gamma(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ точки гиперповерхностей (7.2.25). Оставшееся множество будет объединением некоторого числа выпуклых многогранников $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_L$. Тогда матрица $C(n)$ простая, если и только если вектор $\alpha(n)$ принадлежит одному из многогранников $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_L$.

7.2.9. Пример. Рассмотрим двухкомпонентную систему импульсных уравнений (7.2.1) с моментами коррекции компонент $T_1^n = n$, $T_2^n = \sqrt{2}\,n$. Положим $H = \sqrt{3}$. Тогда Γ — это прямоугольник $0 \le \alpha_1 < 1$, $0 \le \alpha_2 < \sqrt{2}$. Числа q_1 и q_2 равны 1. Интервалы $I_1(r)$ и $I_2(r)$ имеют следующий вид: $I_1(1) = [\sqrt{3}-1, 1)$, $I_1(2) = [0, \sqrt{3}-1)$, $I_2(1) = [\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $I_2(2) = [0, \sqrt{3}-\sqrt{2})$. Всего имеется 9 многогранников Γ_i (рис. 7.2).

Укажем процедуру нахождения многогранника Γ_i, содержащего вектор $\alpha(n)$ простой матрицы $C(n)$. Пусть в представлении (7.2.17) матрицы $C(n)$ имеется $r_1 + r_2 + \cdots + r_N$ сомножителей, из которых r_1 имеют вид $A_{\{1\}}$, r_2 — вид $A_{\{2\}}$ и т.д. Тогда $\Gamma_i \subseteq \Gamma(r_1, r_2, \ldots, r_N)$, где параллелепипед $\Gamma(r_1, r_2, \ldots, r_N)$

выделяется в пространстве $\mathbb{R}^N$ неравенствами

$$\begin{aligned} H - q_i h_i \le \alpha_i < h_i, &\quad \text{если} \quad r_i = q_i, \\ 0 \le \alpha_i < H - q_i h, &\quad \text{если} \quad r_i = q_i + 1, \end{aligned} \tag{7.2.26}$$

а индекс i пробегает значения 1, 2, ..., N. Далее поступим следующим образом. Первой слева матрице $A_{\{1\}}$ в произведении (7.2.17) поставим в соответствие символ α_1, второй слева матрице $A_{\{1\}}$ поставим в соответствие символ $\alpha_1 + h_1$, и т.д. Затем первой слева матрице $A_{\{2\}}$ в произведении (7.2.17) поставим в соответствие символ α_2, второй слева матрице $A_{\{2\}}$ поставим в соответствие символ $\alpha_2 + h_2$, и т.д. Аналогично, при $i = 3, \ldots, N$ поставим в соответствие каждой матрице $A_{\{i\}}$ в произведении (7.2.17) некоторый символ вида $\alpha_i + s_i h_i$, $0 \le s_i \le r_I - 1$. Расположим полученную последовательность символов в том же порядке, как располагаются соответствующие матрицы $A_{\{i\}}$ в произведении (7.2.17). Вставим между двумя соседними символами знак “<”. Система неравенств, которую мы получим в результате описанной процедуры, в совокупности с неравенствами (7.2.26) выделяет некоторый многогранник Γ_i из семейства $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_L\}$. Тогда $\alpha(n) \in \Gamma_i$.

7.2.10. Пример. Рассмотрим двухкомпонентную систему из примера 7.2.9. Одна из матриц $C(n)$ для этой системы имеет вид $C(n) = A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}$. Здесь $r_1 = r_2 = 2$, $q_1 = q_2 = 1$. Значит, многоугольник Γ_i, содержащий вектор $\alpha(n)$, принадлежит прямоугольнику $\Gamma(2, 2)$, выделяемому в $\mathbb{R}^2$ неравенствами $0 \le \alpha_1 < \sqrt{3} - 1$, $0 \le \alpha_2 < \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Система неравенств, порождаемая матрицей $A_{\{2\}}A_{\{1\}}A_{\{2\}}A_{\{1\}}$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} A_{\{2\}} & & A_{\{1\}} & & A_{\{2\}} & & A_{\{1\}} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \alpha_2 & < & \alpha_1 & < & \alpha_2 + \sqrt{2} & < & \alpha_1 + 1 \end{array}$$

Полученные неравенства выделяют множество Γ_7 на рис. 7.2.

Многогранник Γ_i, содержащий вектор $\alpha(n)$, как вытекает из сказанного выше, определяется лишь взаимным расположением сомножителей в представлении (7.2.17) матрицы $C(n)$. Следовательно, для любой матрицы $C(n)$, совпадающей с некоторой матрицей D_i, векторы $\alpha(n)$ принадлежат одному и тому же многограннику семейства $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_L\}$. Не ограничивая общности, нумерацию многогранников семейства $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_L\}$ можно считать так согласованной с нумерацией матриц $\{D_i\}$, что равенство $C(n) = D_i$ влечет включение $\alpha(n) \in \Gamma_i$. Но тогда количество $\eta(n, i)$ матриц вида D_i в наборе $\{C(0), C(1), \ldots, C(n-1)\}$ совпадает с количеством $\tilde{\eta}(n, i)$

принадлежащих множеству Γ_i векторов из набора $\{\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-1)\}$. Следовательно, предел (7.2.8) существует, если и только если существует предел

$$\tilde{p}_i = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\eta}(n,i)}{n}, \tag{7.2.27}$$

называемый в эргодической теории *средним временем пребывания* последовательности $\{\alpha(n)\}$ в множестве Γ_i.

Для любой последовательности векторов $\alpha(n)$, удовлетворяющих уравнению (7.2.21), предел (7.2.27) всегда существует. Значит, всегда существует и предел (7.2.8), причем

$$p_i = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta(n,i)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\eta}(n,i)}{n}, \tag{7.2.28}$$

Более того, если числа h_1, h_2, $\ldots$, h_N, H несоизмеримы в совокупности (т.е. равенство $m_1h_1 + m_2h_2 + \cdots + m_Nh_N + mH = 0$ с целыми $m_1, m_2, \ldots, m_N$, m возможно только при $m_1 = m_2 = \cdots = m_N = m = 0$), то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\eta}(n,i)}{n} = \frac{\operatorname{mes}\Gamma_i}{h_1h_2\cdots h_N}, \tag{7.2.29}$$

где mes — лебегова мера в $\mathbb{R}^N$.

Равенства (7.2.28), (7.2.29) предоставляют достаточно простой способ вычисления частот появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$.

7.2.11. Пусть периоды h_1, h_2, $\ldots$, h_N и число H соизмеримы в совокупности. Идея привлечения эргодических свойств отображения сдвига (7.2.20) для вычисления средних частот появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$ может быть реализована и в этой ситуации. Однако формулы (7.2.28), (7.2.29) уже непригодны для вычисления p_i, а получающиеся формулы в общем случае громоздки и неудобны для использования.

7.2.12. Опишем прием, позволяющий вычислять средние частоты появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$ в случае, когда граничные точки интервалов $(T^n, T^{n+1}]$ совпадают с моментами коррекции одной из компонент системы. Пусть для определенности $T^n = T_N^n = nh_N + \tau_N$ при $-\infty < n < \infty$, тогда $H = h_N$. Периоды h_1, h_2, $\ldots$, h_N коррекции компонент предполагаются несоизмеримыми в совокупности.

Рассмотрим наряду с системой импульсных уравнений (7.2.1) следующую систему:

$$\xi_i(T_i^n + 0) = \tilde{a}_{i1}\xi_1(T_I^n - 0) + \cdots + \tilde{a}_{i,N-1}\xi_{N-1}(T_I^n - 0), \tag{7.2.30}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Система (7.2.30) в отличие от системы (7.2.1) состоит из $N-1$ уравнения. Значения элементов $\tilde{a}_{ij}$ не важны, поскольку в дальнейшем использоваться не будут. Пусть моменты коррекции компонент системы (7.2.30) совпадают с соответствующими моментами коррекции первых $N-1$ компонент системы (7.2.1). В качестве граничных точек интервалов $(\tilde{T}^n, \tilde{T}^{n+1}]$ для системы (7.2.30) выберем моменты коррекции последней компоненты системы (7.2.1): $\tilde{T}^n = T_N^n = nh_N + \tau_N$. Наконец, обозначим через $\tilde{C}(n)$ матрицы линейных операторов сдвига $\Phi(\tilde{T}^{n+1}, \tilde{T}^n; x)$ системы (7.2.30) и определим по матрицам $\{\tilde{C}(n)\}$ матрицы $\tilde{D}_i$.

Между матрицами $\tilde{C}(n)$ и матрицами $C(n)$, построенными по системе (7.2.1), имеется следующая формальная связь: если простая матрица $\tilde{C}(n)$ имеет вид

$$\tilde{C}(n) = \tilde{A}_{\{i_k\}} \cdots \tilde{A}_{\{i_2\}} \tilde{A}_{\{i_1\}}, \tag{7.2.31}$$

то матрица $C(n)$ также простая и

$$C(n) = A_{\{N\}} A_{\{i_k\}} \cdots A_{\{i_2\}} A_{\{i_1\}}. \tag{7.2.32}$$

Верно и обратное утверждение: если $C(n)$ простая матрица, то она имеет вид (7.2.32), а матрица $\tilde{C}(n)$ в этом случае определяется формулой (7.2.31). Следовательно, каждая простая матрица D_i имеет вид

$$D_i = A_{\{N\}} A_{\{i_k\}} \cdots A_{\{i_2\}} A_{\{i_1\}},$$

а средняя частота p_i ее появления в последовательности $\{C(n)\}$ совпадает со средней частотой появления матрицы

$$\tilde{D}_i = \tilde{A}_{\{i_k\}} \cdots \tilde{A}_{\{i_2\}} \tilde{A}_{\{i_1\}}$$

в последовательности $\{\tilde{C}(n)\}$. Сделанное замечание сводит вопрос вычисления частот p_i для системы (7.2.1) к аналогичному вопросу для системы (7.2.30). Но в отличие от системы (7.2.1) периоды $h_1, h_2, \ldots, h_{N-1}$ коррекции компонент системы (7.2.30) и длина $H = h_N$ интервалов $(\tilde{T}^n, \tilde{T}^{n+1}]$ несоизмеримы в совокупности. Это приводит к ситуации, рассмотренной выше.

7.2.13. Пример. Рассмотрим трехкомпонентную систему импульсных уравнений (7.2.1) из примера 7.2.5 с моментами коррекции компонент $T_1^n = n$, $T_2^n = \sqrt{2}\,n$, $T_3^n = \sqrt{3}\,n$. Выберем граничные точки интервалов $(T^n, T^{n+1}]$, полагая $T^n = \sqrt{3}\,n$. Тогда числа $h_1 = 1$, $h_2 = \sqrt{2}$, $h_3 = \sqrt{3}$ и $H = \sqrt{3}$ соизмеримы в совокупности. Для вычисления частот p_i появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$ рассмотрим двухкомпонентную систему (7.2.30) с моментами коррекции компонент $\tilde{T}_1^n = n$, $\tilde{T}_2^n = \sqrt{2}\,n$. Выберем для этой системы граничные точки интервалов $(\tilde{T}^n, \tilde{T}^{n+1}]$ следующими: $\tilde{T}^n = \sqrt{3}\,n$. Числа $h_1 = 1$, $h_2 = \sqrt{2}$ и $H = \sqrt{3}$ несоизмеримы в совокупности. Поэтому для вычисления частот появления матриц $\tilde{D}_i$ в последовательности $\{\tilde{C}(n)\}$ можно воспользоваться видом многоугольников Γ_i из примера 7.2.9 и формулами (7.2.28), (7.2.29). Найдя соответствующие частоты, тем самым найдем и значения частот p_i появления матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$:

$$p_1 = p_2 = \frac{(2-\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 0.10386\ldots,$$

$$p_3 = p_5 = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} = 0.06060\ldots,$$

и т.д.

7.2.14. Идею метода интервалов можно реализовать способами, отличающимися от описанного выше. Например, числовую ось можно разбить на интервалы $[T^n, T^{n+1})$. В этом случае векторы $x(n)$ в уравнении (7.2.6) разумно определить равенствами

$$x(n) = \{\xi_1(T^n - 0), \xi_2(T^n - 0), \ldots, \xi_N(T^n - 0)\}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

а в качестве матриц $C(n)$ взять матрицы линейных операторов, описывающие переход от состояния $\xi(T^n - 0)$ системы импульсных уравнений (7.2.1) к состоянию $\xi(T^{n+1} - 0)$. При подобной реализации метода интервалов матрицы $\{C(n)\}$ и $\{D_i\}$ в общем случае отличаются от соответствующих матриц, полученных способом, описанным в пунктах 7.2.1, 7.2.2.

7.2.15. Малая рассинхронизация по частоте. При анализе динамики рассинхронизованных систем, описываемых уравнениями (7.2.1), фазовая рассинхронизация (а как частный случай — и синхронизованность) часто возникает в результате идеализации ситуации, в которой величины h_1, h_2, $\ldots$, h_N периодов коррекции компонент близки друг к другу. Поэтому, если синхронизованная система импульсных уравнений

$$\xi_i(nh + 0) = a_{i1}\xi_1(nh - 0) + \cdots + a_{iN}\xi_N(nh - 0)$$

или рассинхронизованная по фазе система импульсных уравнений

$$\xi_i(nh + \tau_i + 0) = a_{i1}\xi_1(nh + \tau_i - 0) + \cdots + a_{iN}\xi_N(nh + \tau_i - 0),$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, асимптотически устойчива, то важны условия, при которых рассинхронизованная по фазе и частоте система импульсных уравнений (7.2.1) с близкими к h периодами h_1, h_2, $\ldots$, h_N коррекции компонент останется устойчивой.

Обозначим через $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$, $\ldots$, $\hat{D}_{N!}$ произведения всех возможных перестановок помесей $A_{\{1\}}$, $A_{\{2\}}$, $\ldots$, $A_{\{N\}}$ матрицы $A = (a_{ij})$. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве состояний системы W, описываемой уравнениями (7.2.1).

7.2.16. Теорема. *Если* $\|\hat{D}_1\|\,\|\hat{D}_2\|\cdots\|\hat{D}_{N!}\| < 1$, *то при любых достаточно близких к* $h > 0$ *различных периодах* h_1, h_2, $\ldots$, h_N *коррекции компонент система импульсных уравнений* (7.2.1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство проведем методом интервалов. Разобьем числовую ось на интервалы $(nh, (n+1)h]$, $-\infty < n < \infty$. Выполним описанные в пунктах 7.2.1, 7.2.2 построения матриц $\{C(n)\}$ и $\{D_i\}$; тогда каждая матрица $\hat{D}_j$, $j = 1, 2, \ldots, N!$, принадлежит множеству $\{D_i\}$. Частоты $\hat{p}_j$ появления матриц $\hat{D}_j$ в последовательности $\{C(n)\}$ можно рассматривать как функции периодов коррекции компонент: $\hat{p}_j = \hat{p}_j(h_1, h_2, \ldots, h_N)$. Как показывает несложный, но достаточно громоздкий подсчет

$$\hat{p}_j(h_1, h_2, \ldots, h_N) \to \frac{1}{N!}$$

при h_1, h_2, $\ldots$, $h_N \to h$, $h_p \neq h_q$. Следовательно, частоты p_i появления всех остальных матриц D_i в последовательности $\{C(n)\}$ стремятся к нулю при h_1, h_2, $\ldots$, $h_N \to h$, $h_p \neq h_q$. Отсюда и из теоремы 7.2.3 вытекает утверждение теоремы 7.2.16.

Асимптотическая устойчивость двухкомпонентных систем импульсных уравнений (7.2.1) с близкими, но различными периодами h_1 и h_2 коррекции компонент гарантируется, согласно теореме 7.2.16, условием

$$\|A_{\{1\}}A_{\{2\}}\|\,\|A_{\{2\}}A_{\{1\}}\| < 1.$$

Для асимптотической устойчивости системы (7.2.1) в этом случае достаточно, чтобы собственные значения матрицы

$$A_{\{1\}}A_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

лежали в круге $|\lambda| < 1$.

7.2.17. Как отмечалось в § 7.1, периодичность эквивалентного разностного уравнения рассинхронизованной по фазе системы позволяет упростить анализ устойчивости. Эквивалентное разностное уравнение

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n) \tag{7.2.33}$$

рассинхронизованной по частоте (или — по фазе и частоте) системы импульсных уравнений (7.2.1) также может быть периодическим — когда периоды $h_1, h_2, \ldots, h_N$ коррекции компонент попарно соизмеримы, т.е. $m_1 h_1 = m_2 h_2 = \cdots = m_N h_N$ при некоторых целых ненулевых $m_1, m_2, \ldots, m_N$. В этом случае вопрос об устойчивости системы (7.2.1) (как и в случае рассинхронизованных по фазе систем) сводится к изучению расположения собственных значений матрицы $B = A_{\omega(L-1)} \cdots A_{\omega(1)} A_{\omega(0)}$, где L — период правой части уравнения (7.2.33). Практически использовать это соображение затруднительно, поскольку период L, как правило, оказывается весьма большим. Особо неприятна с этой точки зрения ситуация, когда все периоды $h_1, h_2, \ldots, h_N$ коррекции компонент близки к некоторому числу $h > 0$. При $|h - h_i| \le \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, N$, период L в общем случае имеет порядок $1/\varepsilon^N$.

Подчеркнем, что малая рассинхронизация по частоте может привести как к потере, так и к приобретению системой импульсных уравнений (7.2.1) устойчивости. Так, например, синхронизованная система (7.2.1) с матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3.5 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}$$

асимптотически устойчива, а рассинхронизованная (при близких несоизмеримых h_1, h_2 и $\tau_1 = \tau_2 = 0$) — неустойчива. Синхронизованная система (7.2.1) с матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} -0.5 & -0.6 \\ -0.5 & -0.5 \end{Vmatrix}$$

неустойчива, а рассинхронизованная (с близкими несоизмеримыми h_1, h_2 и $\tau_1 = \tau_2 = 0$) асимптотически устойчива.

§ 7.3. Двухкомпонентные системы

Свойства рассинхронизованных по частоте систем с произвольным числом компонент изучены недостаточно. Авторам неизвестны ответы на следующие принципиальные вопросы. Является ли скорость стремления к нулю решений любой асимптотически устойчивой рассинхронизованной по частоте линейной системы экспоненциальной? Следует ли из асимптотической устойчивости на некотором интервале (s, ∞) рассинхронизованной по частоте системы ее равномерная асимптотическая устойчивость?

Сохраняется ли свойство асимптотической устойчивости рассинхронизованной по частоте системы при малом возмущении правых частей описывающих ее динамику уравнений?

Для линейных двухкомпонентных систем частичные ответы на поставленные вопросы были получены А.Ф. Клепцыным. Позднее удалось понять, что суть сложных и остроумных, но громоздких конструкций А.Ф. Клепцына достаточно проста — так появилась теорема о равномерно полных словарях (см. § 2.5). С ее помощью некоторые утверждения А.Ф. Клепцына были усилены и распространены на случай нелинейных двухкомпонентных систем.

7.3.1. Равномерная устойчивость. Рассмотрим рассинхронизованную по фазе и частоте систему W, состоящую из двух компонент W_1 и W_2. Пусть состояния этих компонент могут быть описаны некоторыми векторами $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Переменные состояния компонент W_1 и W_2 обозначим через $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ соответственно. Тогда вектор-функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ удовлетворяют некоторой системе импульсных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1^n+0) &= \varphi_1[\xi_1(T_1^n-0), \xi_2(T_1^n-0)], \\ \xi_2(T_2^n+0) &= \varphi_2[\xi_1(T_2^n-0), \xi_2(T_2^n-0)]. \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Отображения $\varphi_1(x_1, x_2)$ и $\varphi_2(x_1, x_2)$ определены на некотором подмножестве пространства состояний $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ системы W и принимают значения в пространствах $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно; пусть они удовлетворяют условиям $\varphi_1(0,0) = 0$, $\varphi_2(0,0) = 0$, т.е. система W обладает нулевым состоянием равновесия.

Пусть система W рассинхронизована по фазе и частоте, т.е. моменты коррекции T_1^n и T_2^n ее компонент определяются равенствами

$$T_1^n = nh_1 + \tau_1, \quad T_2^n = nh_2 + \tau_2, \qquad -\infty < n < \infty,$$

причем можно считать выполненными соотношения

$$0 \le \tau_1 < h_1, \quad 0 \le \tau_2 < h_2, \quad h_2 \le h_1.$$

Функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в уравнениях (7.3.1) считаются постоянными на интервалах $(T_1^n, T_1^{n+1}]$ и $(T_2^n, T_2^{n+1}]$ соответственно.

В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость системы W от входящих в ее описание объектов, применяется обозначение $W = W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$, где φ — символ отображения

$$\varphi(x) = \{\varphi_1(x_1, x_2),\ \varphi_2(x_1, x_2)\}, \qquad x = \{x_1, x_2\}. \tag{7.3.2}$$

В предыдущих главах для анализа рассинхронизованных систем использовалось разностное уравнение

$$x(n+1) = \varphi_{\omega(n)}[x(n)], \tag{7.3.3}$$

в правой части которого стоят помеси $\varphi_{\omega(n)}(x)$ отображения (7.3.2), отвечающие специальным образом определенной последовательности подмножеств $\omega(n)$ множества номеров компонент системы. Для двухкомпонентных систем более эффективен переход к другому разностному уравнению, построение которого основывается на идее метода интервалов.

Представим числовую ось в виде объединения непересекающихся интервалов $(T_2^n, T_2^{n+1}]$, $-\infty < n < \infty$. Обозначим через $x(n)$ предел справа решения $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ системы импульсных уравнений (7.3.1) в точке $t = T_2^n$:

$$x(n) = \xi(T_2^n + 0) = \{\xi_1(T_2^n + 0), \xi_2(T_2^n + 0)\}$$

и положим

$$g(n, x) = \Phi(T_2^{n+1}, T_2^n; x),$$

где $\Phi(t, s; x)$ — оператор перехода системы (7.3.1). Тогда последовательность векторов $x(n) \in \mathbb{X}$ удовлетворяет уравнению

$$x(n+1) = g[n, x(n)], \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.3.4}$$

Как показано в § 2.4, вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия системы импульсных уравнений (7.3.1) равносилен вопросу об устойчивости соответствующего положения равновесия разностного уравнения (7.3.4).

При анализе устойчивости уравнения (7.3.4) нужно уметь находить значения функции $g(n, x)$ при различных n и x. Зависимость отображения $g(n, x)$ от аргумента n в общем случае сложна. Тем не менее существует ее описание, достаточно эффективное для анализа устойчивости уравнения (7.3.4).

Сопоставим каждому целому n число $\alpha_n \in [0, 1)$, полагая

$$\alpha_n = \min \frac{T_2^{n+1} - T_1^i}{h_1}, \tag{7.3.5}$$

где минимум берется по всем i, для которых $T_1^i \le T_2^{n+1}$. Отыскание чисел α_n не обязательно проводить по неудобной в вычислительном плане формуле (7.3.5). Достаточно воспользоваться леммой 2.5.4, согласно которой

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \eta \pmod 1, \tag{7.3.6}$$

где $\eta = h_2/h_1$. Поэтому формулу (7.3.5) достаточно использовать для нахождения какого-либо одного значения α_n, например, α_0. А затем с помощью (7.3.6) последовательно найти $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Если же необходимо найти значения α_n при $n < 0$, то достаточно последовательно найти значения α_{-1}, $\alpha_{-2}, \dots$ из равносильного (7.3.6) равенства

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - \eta \pmod 1.$$

Смысл построения последовательности чисел α_n заключается в том, что характер их расположения в интервале $[0, 1)$ однозначно определяет вид отображения $g(n, x)$ при соответствующем значении n. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться леммой 2.5.4, согласно которой

$$g(n,x) = \begin{cases} \{\varphi_1(x_1,x_2), \varphi_2(x_1,x_2)\} & \text{при} \quad \alpha_n = 0, \\ \{\varphi_1(x_1,x_2), \varphi_2[\varphi_1(x_1,x_2), x_2]\} & \text{при} \quad 0 < \alpha_n < \eta, \\ \{x_1, \varphi_2(x_1,x_2)\} & \text{при} \quad \eta \le \alpha_n < 1. \end{cases} \tag{7.3.7}$$

Следовательно, для нахождения $g(n, x)$ при некотором значении n достаточно вычислить соответствующее α_n и воспользоваться равенствами (7.3.7).

Специфический характер зависимости правой части разностного уравнения (7.3.4) от n (см. (7.3.6) и (7.3.7)) позволяет установить ряд свойств рассинхронизованных двухкомпонентных систем. Чтобы не отвлекаться на анализ эффектов, которые могут возникнуть при «вырождении» правой части уравнения (7.3.4), будем считать, что все помеси отображения $\varphi(x)$, т.е. отображения

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \{\varphi_1(x_1,x_2),\ \varphi_2(x_1,x_2)\}, \\ \varphi_{\{1\}}(x) &= \{\varphi_1(x_1,x_2),\ x_2\}, \\ \varphi_{\{2\}}(x) &= \{x_1,\ \varphi_2(x_1,x_2)\}, \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

являются гомеоморфизмами в некоторой окрестности точки $x_1 = x_2 = 0$. В этом случае согласно теореме 2.4.10 асимптотическая устойчивость нулевого решения системы импульсных уравнений (7.3.1) на некотором интервале (s, ∞) влечет равномерную асимптотическую устойчивость этого решения.

7.3.2. Возмущения двухкомпонентных систем. Периоды h_1 и h_2 коррекции компонент, а также фазовые рассогласования τ_1 и τ_2 могут быть известны неточно. Возмущениям могут подвергаться также правые части уравнений (7.3.1) — отображения $\varphi_1(x_1, x_2)$ и $\varphi_2(x_1, x_2)$. Поэтому при анализе устойчивости рассинхронизованных двухкомпонентных систем естественно возникает вопрос о связи устойчивости слабо возмущенной в каком-либо смысле системы $W(\tilde{\varphi}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ с устойчивостью невозмущенной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$. Как показывают примеры из предыдущего параграфа, а также из § 2.7, весьма чувствительны к возмущениям фазовых рассогласований и периодов коррекции компонент синхронизованные системы, т.е. системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$, у которых $h_1 = h_2$, $\tau_1 = \tau_2$. Можно построить примеры линейных рассинхронизованных по частоте систем $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ с соизмеримыми периодами h_1 и h_2, меняющих характер устойчивости при сколь угодно малом возмущении фазовых рассогласований или периодов коррекции компонент. В связи с этим интересны приводимые ниже теоремы 7.3.3–7.3.5, показывающие, что несоизмеримость периодов коррекции компонент делает систему $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ менее чувствительной к возмущениям периодов коррекции компонент и абсолютно нечувствительной к возмущениям фазовых рассогласований.

7.3.3. Теорема. *Пусть нулевое состояние равновесия двухкомпонентной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ с несоизмеримыми периодами h_1 и h_2 коррекции компонент равномерно асимптотически устойчиво. Тогда равномерно асимптотически устойчиво нулевое состояние равновесия и любой двухкомпонентной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ с произвольными фазовыми рассогласованиями $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$.*

7.3.4. Теорема. *Пусть нулевое состояние равновесия двухкомпонентной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ с несоизмеримыми периодами h_1 и h_2 коррекции компонент асимптотически устойчиво на некотором интервале (s, ∞), причем отображения* (7.3.8) *являются гомеоморфизмами в окрестности нуля. Тогда нулевое состояние равновесия двухкомпонентной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ с произвольными фазовыми рассогласованиями $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$ равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательства теорем 7.3.3 и 7.3.4 без изменений повторяют доказательство теоремы 2.4.10. Сложнее вопрос о влиянии на устойчивость системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ возмущений периодов коррекции компонент. Сначала анализ этой ситуации проведем для линейной системы W, описываемой системой импульсных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1^n + 0) &= a_{11}\xi_1(T_1^n - 0) + a_{12}\xi_2(T_1^n - 0), \\ \xi_2(T_2^n + 0) &= a_{21}\xi_1(T_2^n - 0) + a_{22}\xi_2(T_2^n - 0). \end{aligned} \tag{7.3.9}$$

7.3.5. Теорема. *Пусть нулевое состояние равновесия линейной системы* $W(A, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ *с несоизмеримыми периодами* h_1 *и* h_2 *коррекции компонент асимптотически устойчиво на некотором интервале* (s, ∞)*, причем матрицы* a_{11}*,* a_{22} *и* $A = (a_{ij})$ *обратимы. Тогда найдется такое число* $\varepsilon > 0$*, что свойством равномерной асимптотической устойчивости обладает нулевое состояние равновесия любой системы* $W(\varphi, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$*, у которой* $\|\varphi(x) - Ax\| \le \varepsilon\|x\|$*,* $|\tilde{h}_1 - h_1| \le \varepsilon$*,* $|\tilde{h}_2 - h_2| \le \varepsilon$*, а фазовые рассогласования* $\tilde{\tau}_1$ *и* $\tilde{\tau}_2$ *произвольны.*

Согласно теореме 7.3.5 в случае линейных рассинхронизованных систем с несоизмеримыми периодами коррекции компонент асимптотическая устойчивость состояния равновесия не теряется ни при малых возмущениях периодов коррекции компонент, ни при малых нелинейных возмущениях правых частей соответствующих уравнений.

Одним из важных следствий теоремы 7.3.5 является приводимая ниже теорема 7.3.6 об устойчивости двухкомпонентных рассинхронизованных систем по первому приближению. Предположим, что правые части уравнений (7.3.1) имеют вид

$$\varphi_i(x_1, x_2) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + o(\|x\|), \qquad i = 1, 2.$$

Тогда рассинхронизованную систему $W(A, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$, описываемую уравнениями (7.3.9) естественно считать системой первого приближения к системе $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$.

7.3.6. Теорема. *Пусть нулевое состояние равновесия системы первого приближения* $W(A, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ *асимптотически устойчиво на некотором интервале* (s, ∞) *и матрицы* a_{11}*,* a_{22}*,* $A = (a_{ij})$ *обратимы. Тогда нулевое состояние равновесия системы* $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

В случае несоизмеримости периодов h_1 и h_2 коррекции компонент утверждение теоремы 7.3.6 следует из теоремы 7.3.5. Если периоды коррекции компонент соизмеримы, то правая часть $\varphi_{\omega(n)}(x)$ эквивалентного разностного уравнения (7.3.3) периодична по n. В этом случае, как указано в пункте 7.1.2, теорема об устойчивости по первому приближению верна для уравнения (7.3.3). Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 7.3.6 в случае соизмеримых h_1 и h_2.

Совместное возмущение периодов и фазовых рассогласований коррекции компонент, по-видимому, может нарушить асимптотическую устойчивость нелинейных систем.

Скажем, что рассинхронизованная система W, описываемая уравнениями (7.3.1), *ε-диссипативна* в δ-окрестности нуля, если найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon, \delta)$, что для любого решения $\xi(t)$ системы импульсных уравнений (7.3.1), удовлетворяющего при некотором $s \in (-\infty, \infty)$ условию $\|\xi(s+0)\| \le \delta$, при $t \ge s + \sigma$ будут выполняться неравенства $\|\xi(t+0)\| \le \varepsilon$. Свойство ε-диссипативности в δ-окрестности нуля означает, что всякое решение системы (7.3.1), попавшее в некоторый момент времени в δ-окрестность нуля, впоследствии попадет и в ε-окрестность нуля и останется там при последующих значениях времени.

7.3.7. Теорема. *Пусть нулевое состояние равновесия двухкомпонентной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ равномерно асимптотически устойчиво и периоды h_1 и h_2 коррекции ее компонент несоизмеримы. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при каждом малом $\varepsilon > 0$ всякая двухкомпонентная система $W(\varphi, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ с достаточно близкими к h_1, h_2 периодами коррекции компонент $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$ и произвольными фазовыми рассогласованиями $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ будет ε-диссипативна в δ-окрестности нуля.*

7.3.8. Теорема. *Пусть нулевое состояние равновесия двухкомпонентной системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ с несоизмеримыми периодами h_1 и h_2 коррекции компонент асимптотически устойчиво на некотором интервале (s, ∞), причем отображения* (7.3.8) *являются гомеоморфизмами в окрестности нуля. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при каждом малом $\varepsilon > 0$ всякая двухкомпонентная система $W(\varphi, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ с достаточно близкими к h_1, h_2 периодами коррекции компонент $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$ и произвольными фазовыми рассогласованиями $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ будет ε-диссипативна в δ-окрестности нуля.*

7.3.9. Идея доказательства. В основе доказательства всех сформулированных в этом параграфе теорем лежит одна идея — использовать для анализа устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений описываемую теоремой 2.5.8 (о равномерно полных словарях) закономерность чередования различных отображений в правой части уравнения (7.3.4). При доказательствах теорем 7.3.3 и 7.3.4 прямо используется утверждение теоремы о равномерно полных словарях. Для доказательства остальных теорем требуется усиленный вариант теоремы о равномерно полных словарях. Не останавливаясь на деталях, идею доказательства теорем 7.3.5, 7.3.7 и 7.3.8 проиллюстрируем на примере теоремы 7.3.5. Напомним некоторые определения (см. § 2.4).

Пусть имеется отображение (циклический сдвиг) интервала [0,1) на себя, задаваемое равенством $S_\eta(x) = x + \eta \pmod 1$, где η — некоторое вещественное число, которое можно считать принадлежащим интервалу $[0, 1)$.

Каждая точка $\alpha \in [0, 1)$ порождает последовательность $\{\alpha_n\}$, определяемую равенством $\alpha_0 = \alpha$ и рекуррентными соотношениями $\alpha_{n+1} = S_\eta(\alpha_n)$, $n = 0$, $1, \dots$. При каждом значении n число α_n может быть выражено непосредственно через α следующим образом:

$$\alpha_n = S_{n\eta}(\alpha) = \alpha + n\eta \pmod 1, \qquad n = 0, 1, \dots .$$

Сопоставим произвольной точке $\alpha \in [0, 1)$ последовательность

$$\text{text}(\alpha, \eta) = \{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}, \tag{7.3.10}$$

составленную из двух символов A и B по следующему правилу:

$$s_n = \begin{cases} A, & \text{если} \quad \alpha_n = S_{n\eta}(\alpha) \in [0, \eta), \\ B, & \text{если} \quad \alpha_n = S_{n\eta}(\alpha) \in [\eta, 1). \end{cases}$$

Используя лингвистическую терминологию, назовем произвольную бесконечную последовательность символов A и B *текстом*; соответственно последовательность $\text{text}(\alpha, \eta)$ назовем *текстом точки* α (или текстом, отвечающим точке α). При каждом натуральном n текст точки α может быть представлен в виде объединения двух частей — начального отрезка

$$\text{text}_n(\alpha, \eta) = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$$

и «хвоста»

$$\text{text}^n(\alpha, \eta) = \{s_n, s_{n+1}, \dots\}. \tag{7.3.11}$$

Продолжая лингвистическую аналогию, назовем произвольный конечный упорядоченный набор символов A и B *словом*; примером слова является начальный отрезок $\text{text}_n(\alpha, \eta)$ текста точки α.

Структура последовательностей (7.3.10) и (7.3.11) достаточно сложна. Для того чтобы каким-то образом охарактеризовать эту сложность, мы, следуя лингвистической аналогии, исходим из представления о «кодируемости» текстов. Назовем некоторое конечное множество слов $\mathfrak{M}$ *словарем текста* $t = \{s_0, s_1, \dots\}$, если этот текст может быть «закодирован» словами из $\mathfrak{M}$, т.е. если найдутся такие натуральные числа $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$, что каждое слово $\{s_{n_k}, \dots, s_{n_{k+1}-1}\}$ при $k = 0, 1, \dots$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Естественно считать структуру текста t не сложнее структуры слов из словаря данного текста.

Если мы хотим иметь единый словарь для некоторого семейства (библиотеки) текстов, то, как правило, возникает альтернатива - или сделать этот словарь достаточно объемным, или же включить в него небольшое число слов, но допустить при этом возможность «частичного кодирования» некоторых текстов. При анализе текстов вида (7.3.10) выберем второй путь. Множество всех текстов $\mathrm{text}(\alpha, \eta)$, где $\alpha \in [0, 1)$, назовем *библиотекой* $\mathfrak{L}_\eta$ *сдвига* $S_\eta(x)$. Некоторое конечное множество слов $\mathfrak{M}$ назовем *полным словарем* библиотеки $\mathfrak{L}_\eta$, если для каждого $\alpha \in [0, 1)$ найдется такое $N = N(\alpha)$, что $\mathfrak{M}$ является словарем «хвоста» $\mathrm{text}^N(\alpha, \eta)$ текста $\mathrm{text}(\alpha, \eta)$. Если при этом числа $N(\alpha)$ строго меньше наибольшей длины слов словаря $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ назовем *равномерно полным словарем* библиотеки $\mathfrak{L}_\eta$.

Теорема 2.5.8 утверждает, что при иррациональном η библиотека сдвига $\mathfrak{L}_\eta$ обладает бесконечным множеством равномерно полных словарей простой структуры: для каждого $\alpha \in [0, 1)$, $\alpha \neq \eta$, найдутся начальные отрезки $\mathrm{text}_\beta(\alpha, \eta)$ и $\mathrm{text}_\gamma(\alpha, \eta)$ текста $\mathrm{text}(\alpha, \eta)$ сколь угодно больших длин β и γ, образующие равномерно полный словарь библиотеки $\mathfrak{L}_\eta$. Для доказательства теорем 7.3.5, 7.3.7 и 7.3.8 требуется следующий «параметрический» вариант теоремы о равномерно полных словарях.

7.3.10. Теорема. *Пусть число* η *иррационально,* $\alpha \in [0, 1)$*,* $\alpha \neq S_{-n\eta}(0)$ *при* $n = 0, 1, \ldots$ *. Тогда каждому* $N \geq 0$ *отвечают такие* $\varepsilon > 0$ *и натуральные* $\beta, \gamma \geq N$*, при которых слова* $\mathrm{text}_\beta(\alpha, \eta)$*,* $\mathrm{text}_\gamma(\alpha, \eta)$ *образуют равномерно полный словарь любой библиотеки сдвига* $\mathfrak{L}_\zeta$*, где* $\zeta \in (\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$*.*

Доказательство теоремы 7.3.10 незначительными деталями отличается от доказательства теоремы 2.5.8 — использованная при доказательстве теоремы 2.5.8 конструкция построения равномерно полных словарей позволяет проследить за их зависимостью от параметра η, задающего библиотеку $\mathfrak{L}_\eta$.

Интерес к свойствам символических последовательностей $\mathrm{text}(\alpha, \eta)$ объясняется просто: если пренебречь несущественными ситуациями, то при подходящем выборе $\alpha \in [0, 1)$ закономерность чередования символов A и B в последовательности $\mathrm{text}(\alpha, h_2/h_1)$ совпадает с закономерностью чередования в последовательности $\{g(n, \cdot)\}$ (см. формулу (7.3.7)) отображений

$$\{\varphi_1(x_1, x_2),\ \varphi_2[\varphi_1(x_1, x_2), x_2]\} \quad \text{и} \quad \{x_1,\ \varphi_2(x_1, x_2)\}.$$

Отсюда и из теоремы о равномерно полных словарях вытекает возможность представления при каждом $n \geq m$ оператора перехода

$$G(n, m; x) = g(n - 1, g(n - 2, \ldots, g(m, x) \ldots))$$

разностного уравнения (7.3.4) с точностью до сомножителей, пренебрежимых при анализе устойчивости, в виде операторного произведения конечного числа сомножителей двух типов — $G(\beta, 0; x)$ и $G(\gamma, 0; x)$. Точную формулировку соответствующего утверждения см. в лемме 2.5.20.

7.3.11. Обратимся теперь к идее доказательства теоремы 7.3.5. В силу асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия системы $W(A, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$ можно указать настолько большое число $N \geq 0$, что при некотором $q < 1$ и при всех $n \geq N$ будет верно неравенство $\|A(n-1)A(n-2)\cdots A(0)\| \leq q$. Выберем по данному N числа β и γ, определяемые теоремой 7.3.10. Тогда будут справедливы неравенства

$$\|A(\beta-1)A(\beta-2)\cdots A(0)\| \leq q, \qquad \|A(\gamma-1)A(\gamma-2)\cdots A(0)\| \leq q.$$

Следовательно, при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняются и неравенства

$$\|G(\beta, 0; x)\| \leq Q\|x\|, \qquad \|G(\gamma, 0; x)\| \leq Q\|x\|, \tag{7.3.12}$$

где $G(n, m; x)$ — оператор перехода системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$, а Q — некоторое число из промежутка $(q, 1)$.

Из теоремы 7.3.10 и леммы 2.5.20 вытекает возможность представления в виде операторного произведения, в котором все сомножители за исключением, быть может, трех имеют вид $G(\beta, 0; x)$ или $G(\gamma, 0; x)$ как оператора перехода $G(n, m; x)$ системы $W(\varphi, h_1, h_2, \tau_1, \tau_2)$, так и оператора перехода $\tilde{G}(n, m; x)$ системы $W(\varphi, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ с достаточно близкими к h_i и τ_i значениями $\tilde{h}_i$ и $\tilde{\tau}_i$. Отсюда и из оценок (7.3.12) вытекает неравенство

$$\|\tilde{G}(n, m; x)\| \leq cQ^{(n-m)/\max\{\beta, \gamma\}}\|x\|,$$

говорящее о равномерной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия системы $W(\varphi, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$.

7.3.12. Несколько слов о возможности обобщения полученных результатов на случай многокомпонентных систем. Как мы убедились выше, теоремы этого параграфа вытекают из различных вариантов теоремы о равномерно полных словарях. Поэтому представляется разумным для дальнейшего анализа рассинхронизованных по частоте систем перенести теорему о равномерно полных словарях на случай многомерных сдвигов, а затем распространить результаты параграфа на многокомпонентные рассинхронизованные по частоте системы. К сожалению, естественные аналоги теоремы о равномерно полных словарях в многомерном случае неверны. Приведем соответствующее утверждение.

Пусть I_N — единичный куб $[0,1) \times [0,1) \times \cdots \times [0,1) = [0,1)^N$ в пространстве $\mathbb{R}^N$, а $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N\}$ — точка из I_N. Рассмотрим отображение сдвига

$$S_\eta(x) = \{x_1 + \eta_1 \,(\mathrm{mod}1), x_2 + \eta_2 \,(\mathrm{mod}1), \ldots, x_N + \eta_N \,(\mathrm{mod}1)\},$$

где $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, куба I_N на себя. Обозначим через U_i, $i = 1, 2, \ldots, 2^N$, все подмножества куба I_N, имеющие вид $U_i = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_N$, где каждое H_j совпадает либо с интервалом $[0, \eta_j)$, либо с интервалом $[\eta_j, 1)$. Сопоставим каждому множеству U_i некоторый символ A_i, и обозначим через $\mathrm{text}(x, \eta)$ последовательность символов $\mathrm{text}(x, \eta) = \{s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$, определяемую соотношениями: $s_n = A_i$, если $S_{n\eta}(x) \in U_i$. Естественным образом вводятся понятия словаря, библиотеки сдвига $\mathfrak{L}_\eta$ и равномерно полного словаря. Если $N \geq 2$, то можно доказать существование такого множества $\Omega_N \subseteq I_N$ полной лебеговой меры в I_N, что при $\eta \in \Omega_N$, $\alpha \in I_N$ никакое множество слов $\mathrm{text}_n(\alpha, \eta)$ с достаточно большими n не является равномерно полным словарем библиотеки сдвига $\mathfrak{L}_\eta$.

§ 7.4. Алгоритмы Клепцына

Описанный в предыдущем параграфе подход к анализу двухкомпонентных рассинхронизованных по частоте линейных систем дает возможность получить эффективные признаки устойчивости.

7.4.1. Рассмотрим линейную рассинхронизованную систему

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1^n + 0) &= a_{11}\xi_1(T_1^n - 0) + a_{12}\xi_2(T_1^n - 0), \\ \xi_2(T_2^n + 0) &= a_{21}\xi_1(T_2^n - 0) + a_{22}\xi_2(T_2^n - 0). \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

с моментами коррекции компонент

$$T_1^n = nh_1 + \tau_1, \quad T_2^n = nh_2 + \tau_2, \qquad -\infty < n < \infty.$$

Здесь в общем случае $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, — вектор-функции со значениями в некоторых конечномерных пространствах $\mathbb{R}^{n_i}$, а a_{ij} — матрицы соответствующих размерностей. Функции $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, предполагаются кусочно-постоянными с интервалами постоянства $(T_i^n, T_i^{n+1}]$, $-\infty < n < \infty$.

Если не оговорено противное, блочные матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|, \quad P = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & I \end{matrix} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{matrix} I & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

предполагаются обратимыми. В этом случае по теореме 7.3.6 асимптотическая устойчивость системы (7.4.1) (если она имеет место) равномерная. Поэтому при анализе устойчивости интервалы (s, ∞), на которых рассматриваются решения системы (7.4.1), можно выбирать по своему усмотрению. В частности, можно считать, что на интервале (s, ∞) компоненты системы (7.4.1) либо никогда не подвергаются коррекции одновременно, либо подвергаются коррекции одновременно бесконечное число раз.

Первая ситуация заведомо имеет место при несоизмеримых периодах h_1 и h_2 коррекции компонент; она может иметь место и при соизмеримых h_1 и h_2. Вторая ситуация может иметь место только в случае соизмеримых h_1 и h_2.

Анализ устойчивости системы (7.4.1) изложим в алгоритмической форме, предложенной А.Ф. Клепцыным. Приводимый ниже алгоритм А1 относится к первой ситуации, а алгоритм А2 — ко второй.

7.4.2. Алгоритм А1. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (в котором действуют линейные операторы с матрицами A, P и Q) задана некоторая норма $\|\cdot\|$. Через $\rho(B)$ обозначим спектральный радиус матрицы B. В дальнейшем будем говорить, что устойчивость системы (7.4.1) определяется матрицей B, если справедливы утверждения: при $\rho(B) < 1$ система (7.4.1) асимптотически устойчива; при $\rho(B) > 1$ система (7.4.1) неустойчива; при $\rho(B) = 1$ система (7.4.1) нейтрально устойчива, если максимальные по модулю собственные значения матрицы B полупростые, и неустойчива в противном случае.

Алгоритм Клепцына А1 заключается в последовательном построении троек

$$\Phi_i = \{\lambda_i, P_i, Q_i\}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где λ_i — некоторые числа из $[0, 1)$, а P_i и Q_i — блочные квадратные матрицы второго порядка, размерности элементов которых совпадают с размерностями соответствующих элементов матрицы $A = (a_{ij})$. Каждой тройке сопоставляется число

$$\kappa(\lambda_i, P_i, Q_i) = \|P_i\|^{1-\lambda_i}\|Q_i\|^{\lambda_i}.$$

Затем по паре чисел λ_i и $\kappa_i = \kappa(\lambda_i, P_i, Q_i)$ делается заключение о возможности при данном i ответить на вопрос об устойчивости системы (7.4.1). Если такой ответ может быть получен, то построение троек Φ_i прекращается. В противном случае находится тройка Φ_{i+1} и для нее проводится аналогичный анализ. Приведем формальное описание алгоритма.

Начальная тройка $\Phi_0 = \{\lambda_0, P_0, Q_0\}$ задается равенствами

$$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad P_0 = P, \quad Q_0 = Q.$$

Шаг алгоритма A1. Пусть имеется тройка $\Phi_i = \{\lambda_i, P_i, Q_i\}$.

Если $\lambda_i = 0$, то устойчивость системы (7.4.1) определяется матрицей P_i.

Если $0 < \lambda_i < 1$ и $\kappa_i = \kappa(\lambda_i, P_i, Q_i) < 1$, то система (7.4.1) асимптотически устойчива.

Если $0 < \lambda_i < 1$ и $\kappa_i = \kappa(\lambda_i, P_i, Q_i) \geq 1$, то производится построение тройки Φ_{i+1}. Переход от Φ_i к Φ_{i+1} осуществляется различными способами в зависимости от того, какие из неравенств $0 < \lambda_i \leq 1/2$ или $1/2 < \lambda_i < 1$ выполняются.

При $0 < \lambda_i \leq 1/2$ находится наибольшее целое число r_i, не превосходящее $\lambda_i/(1 - \lambda_i)$, а затем элементы тройки Φ_{i+1} задаются равенствами

$$\lambda_{i+1} = \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} - r_i, \quad P_{i+1} = P_i^{r_i} Q_i, \quad Q_{i+1} = P_i^{r_i+1} Q_i. \tag{7.4.2}$$

При $1/2 < \lambda_i < 1$ находится наибольшее целое число r_i, не превосходящее $(1 - \lambda_i)/\lambda_i$, а затем элементы тройки Φ_{i+1} задаются равенствами

$$\lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i} - r_i, \quad P_{i+1} = Q_i^{r_i} P_i, \quad Q_{i+1} = Q_i^{r_i+1} P_i. \tag{7.4.3}$$

После построения тройки Φ_{i+1} шаг алгоритма повторяется.

7.4.3. Сходимость алгоритма A1. Если периоды коррекции компонент системы (7.4.1) соизмеримы, то на некотором шаге $i \leq \log_2(m + n)$ алгоритма A1 будут выполняться либо неравенства $0 < \lambda_i < 1$, $\kappa(\lambda_i, P_i, Q_i) < 1$, либо равенство $\lambda_i = 0$. Следовательно, количество шагов алгоритма A1, приводящих к ответу на вопрос об устойчивости системы (7.4.1) с соизмеримыми периодами коррекции компонент, не больше $\log_2(m + n)$. Оценка числа шагов алгоритма A1 в случае несоизмеримых периодов коррекции компонент системы (7.4.1) неизвестна.

В случае соизмеримых периодов коррекции компонент системы (7.4.1) алгоритм A1 позволяет обнаружить как устойчивость, так и неустойчивость системы. Если же периоды коррекции компонент несоизмеримы, то неустойчивость системы (7.4.1) алгоритмом A1 не обнаруживается.

7.4.4. Пример. Рассмотрим систему (7.4.1) со скалярной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} -0.5 & 1.0 \\ -0.5 & -0.5 \end{Vmatrix}$$

и моментами коррекции компонент $T_1^n = n$, $T_2^n = \sqrt{2}\,n$. Пусть норма вектора $x = \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2$ определяется равенством $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Результаты применения алгоритма A1 сведены в следующую таблицу.

i	λ_i	r_i	P_i	Q_i	$\|P_i\|$	$\|Q_i\|$	κ_i
0	0.41	1	$\begin{matrix} -0.50 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1.00 & 0.00 \\ -0.50 & -0.50 \end{matrix}$	1.50	1.00	1.18
1	0.41	1	$\begin{matrix} -1.00 & -0.50 \\ -0.50 & -0.50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.00 & -0.25 \\ -0.50 & -0.50 \end{matrix}$	1.50	1.00	1.18
2	0.41	1	$\begin{matrix} -0.25 & 0.50 \\ 0.25 & 0.37 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0.37 & -0.69 \\ -0.25 & -0.44 \end{matrix}$	0.75	1.06	0.92

Как видно, величина κ_2 меньше 1, и значит, рассматриваемая система (7.4.1) асимптотически устойчива. Обратим внимание на скорость убывания величин κ_i в рассматриваемом примере. Так, $\kappa_3 = 0.49$, $\kappa_4 = 0.16$, $\kappa_5 = 0.00$.

Процесс построения матриц $\{P_i, Q_i\}$ проиллюстрирован на рис. 7.3, где верхняя строка отвечает последовательности матриц перехода $\{A(n)\}$ системы (7.4.1), состоящей из матриц A, P_i и Q_i.

Примеры показывают, что алгоритм A1 быстро дает ответ на вопрос об устойчивости системы (7.4.1). Но при вычислениях по формулам (7.4.2), (7.4.3) быстро растут и погрешности.

7.4.5. Пример. Пусть моменты коррекции компонент системы (7.4.1) определяются равенствами $T_1^n = n$, $T_2^n = \sqrt{2}n$. Тогда $k_i = \sqrt{2} - 1 = 0.414214$ при всех значениях i. При расчетах же чисел κ_i на ЭВМ типа PDP-11/34 с обычной точностью получаются следующие значения: $\kappa_0 = 0.414214$, $\kappa_1 = 0.414214$, $\kappa_2 = 0.414213$, $\kappa_3 = 0.414217$, $\kappa_4 = 0.414192$, $\kappa_5 = 0.414338$, $\kappa_6 = 0.413488$, $\kappa_7 = 0.418452$, $\kappa_8 = 0.389770$.

Этот пример типичен. В общем случае для абсолютных погрешностей Δ_i измерения величин κ_i справедливы оценки

$$\Delta_i \geq (1 + r_0)^2 \cdots (1 + r_{i-1})^2 \Delta_0.$$

Таким образом, при $\Delta_0 = 10^{-6}$ имеет место неравенство $\Delta_i \geq 2^{2i} \cdot 10^{-6}$, и вычисления по формулам (7.4.2), (7.4.3) с обычной точностью на большинстве 16-разрядных ЭВМ теряют смысл уже на десятом шаге алгоритма A1.

$$A\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}\,\underbrace{\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{P_2}\,\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{Q_2}}_{Q_3}\,\underbrace{\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{P_2}\,\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{Q_2}}_{Q_3}\ldots$$

$$\ldots\underbrace{\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{P_2}\,\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{P_2}\,\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{Q_2}}_{P_3}\,\underbrace{\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{P_2}\,\underbrace{\underbrace{P_0P_0Q_0}_{P_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}\,\underbrace{P_0Q_0}_{Q_1}}_{Q_2}}_{Q_3}\ldots$$

Рис. 7.3. Иллюстрация процедуры построения матриц P_i и Q_i в алгоритме Клепцына A1

7.4.6. Алгоритм A2. Рассмотрим теперь ситуацию, когда периоды h_1 и h_2 коррекции компонент системы (7.4.1) соизмеримы и на каждом интервале (s, ∞) имеется бесконечное число моментов одновременной коррекции компонент. Анализ устойчивости системы (7.4.1) в этой ситуации может быть проведен с помощью алгоритма A2. Этот алгоритм заключается в последовательном построении пятерок

$$\Psi_i = \{\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i\},$$

где λ_i — числа из интервала $[0, 1)$, а P_i, Q_i, R_i и S_i — квадратные блочные матрицы второго порядка, размерности элементов которых совпадают с размерностями соответствующих элементов матрицы $A = (a_{ij})$. Каждой пятерке Ψ_i сопоставляется число

$$\psi(\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i) = \{\max(\|P_i\|, \|R_i\|)\}^{1-\lambda_i}\{\max(\|Q_i\|, \|R_i\|)\}^{\lambda_i},$$

а затем по паре λ_i, $\psi_i = \psi(\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i)$ делается заключение о возможности при данном i ответить на вопрос об устойчивости системы (7.4.1). Если ответ может быть получен, то построение пятерок прекращается. В противном случае конструируется следующая пятерка Ψ_{i+1}, для которой проводится аналогичный анализ.

Алгоритм A2 в отличие от алгоритма A1 дает полный ответ на вопрос об устойчивости системы (7.4.1). При этом имеется априорная оценка количества пятерок, которые потребуется построить. Перейдем к детальному описанию алгоритма.

Начальная пятерка $\Psi_0 = \{\lambda_0, P_0, Q_0, R_0, S_0\}$ задается равенствами

$$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \quad R_0 = A, \quad S_0 = A.$$

Шаг алгоритма А2. Пусть имеется пятерка $\Psi_i = \{\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i\}$.

Если $\lambda_i = 0$, то устойчивость системы (7.4.1) определяется матрицей S_i.

Если $0 < \lambda_i < 1$ и $\psi_i = \psi(\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i) < 1$, то система (7.4.1) асимптотически устойчива.

Если $0 < \lambda_i < 1$ и $\psi_i = \psi(\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i) \geq 1$, то производится построение пятерки Ψ_{i+1}. Переход от Ψ_i к Ψ_{i+1} осуществляется различными способами в зависимости от того, какие из неравенств $0 < \lambda_i \leq 1/2$ или $1/2 < \lambda_i < 1$ имеют место.

При $0 < \lambda_i \leq 1/2$ расчет элементов пятерки Ψ_{i+1} выполняется по формулам

$$r_i = \left[\frac{1-\lambda_i}{\lambda_i}\right], \qquad \lambda_{i+1} = \frac{1-\lambda_i}{\lambda_i} - r_i,$$

$$P_{i+1} = P_i^{r_i} Q_i, \quad Q_{i+1} = P_i^{r_i+1} Q_i, \quad R_{i+1} = P_i^{r_i} R_i P_i^{r_i} Q_i, \quad S_{i+1} = P_i^{r_i} R_i,$$

где $[t]$ означает целую часть числа t.

При $1/2 < \lambda_i < 1$ расчет элементов пятерки Ψ_{i+1} выполняется по формулам

$$r_i = \left[\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\right], \qquad \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} - r_i,$$

$$P_{i+1} = Q_i^{r_i} P_i, \quad Q_{i+1} = Q_i^{r_i+1} P_i, \quad R_{i+1} = Q_i^{r_i} R_i Q_i^{r_i} P_i, \quad S_{i+1} = Q_i^{r_i} R_i.$$

После построения пятерки Ψ_{i+1} шаг алгоритма А2 повторяется.

7.4.7. Сходимость алгоритма А2. Так как периоды h_1 и h_2 коррекции компонент системы (7.4.1) при рассмотрении алгоритма А2 предполагаются соизмеримыми, то найдутся натуральные числа m и n, при которых $mh_1 = nh_2$. Тогда на некотором шаге $i \leq \log_2(m+n)$ алгоритма А2 будут выполняться либо неравенства $0 < \lambda_i < 1$ и $\psi(\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i) < 1$, либо равенство $\lambda_i = 0$. Поэтому алгоритм А2 дает ответ на вопрос об устойчивости системы (7.4.1) не более чем за $\log_2(m+n)$ шагов.

7.4.8. Не вдаваясь в громоздкие технические детали, объясним идею обоснования алгоритмов Клепцына. Системе импульсных уравнений (7.4.1) сопоставляется эквивалентное разностное уравнение

$$x(n+1) = A_{\omega(n)} x(n).$$

Оно асимптотически устойчиво, если и только если нормы матриц $C_n = A_{\omega(n-1)} \cdots A_{\omega(1)} A_{\omega(0)}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. В ситуации, к которой относится алгоритм A1, можно считать, что на интервале $(0, \infty)$ компоненты системы (7.4.1) не подвергаются коррекции одновременно. Тогда в последовательности матриц $A_{\omega(0)}$, $A_{\omega(1)}$, … имеются матрицы лишь двух видов — P или Q. Из теоремы 2.5.8 (о равномерно полных словарях) вытекает существование последовательности пар $\{\beta_i, \gamma_i\}$ неограниченно возрастающих целых чисел, обладающих следующим свойством: каждая матрица C_n может быть представлена в виде некоторого произведения сомножителей вида

$$P_i = A_{\omega(\beta_i-1)} \cdots A_{\omega(1)} A_{\omega(0)}, \qquad Q_i = A_{\omega(\gamma_i-1)} \cdots A_{\omega(1)} A_{\omega(0)},$$

домноженного «спереди» и «сзади» не более чем $\max\{\beta_i, \gamma_i\}$ сомножителями $A_{\omega(j)}$. При этом λ_i есть «средняя частота» появления группы матриц $\{A_{\omega(0)}, A_{\omega(1)}, \ldots, A_{\omega(\gamma_i-1)}\}$ в последовательности $\{A_{\omega(n)}\}$ при $n \geq 0$. Отсюда вытекает оценка

$$\|C_n\| \leq q \left(\|P_i\|^{1-\lambda_i} \|Q_i\|^{\lambda_i} \right)^{n/((1-\lambda_i)\beta_i + \lambda_i\gamma_i)}. \tag{7.4.4}$$

Соотношения, связывающие значения λ_i, P_i и Q_i при различных i, выражаются формулами (7.4.2) или (7.4.3). Если теперь система (7.4.1) асимптотически устойчива, то $\|C_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но так как $P_i = C_{\beta_i}$, $Q_i = C_{\gamma_i}$, а числа β_i и γ_i неограниченно возрастают, то, начиная с некоторого номера i, нормы матриц P_i и Q_i окажутся меньшими 1. Следовательно, при этих значениях i будут выполняться неравенства

$$\kappa(\lambda_i, P_i, Q_i) < 1. \tag{7.4.5}$$

Обратно, если при некотором i выполняется неравенство (7.4.5), то в силу (7.4.4) $\|C_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, и значит, импульсные уравнения (7.4.1) асимптотически устойчивы.

Несколько более тонкие рассуждения требуются в случае, когда $\lambda_i = 0$.

Если компоненты системы (7.4.1) на каждом интервале (s, ∞) бесконечное число раз подвергаются коррекции одновременно, то в последовательности $\{A_{\omega(n)}\}$ помимо матриц P и Q бесконечное число раз встречается матрица A. Это обстоятельство приводит к более сложной конструкции алгоритма A2.

7.4.9. Погрешности определения периодов коррекции компонент. В алгоритмах Клепцына анализ устойчивости линейных двухкомпонентных фазочастотно рассинхронизованных систем существенно зависит от одновременности или неодновременности коррекции компонент. Анализ устойчивости осложняется неточностью информации о величинах периодов коррекции компонент в реальных системах. Поэтому трудно ответить на вопрос: конечно или нет число моментов одновременной коррекции компонент? Это требует модификации алгоритмов Клепцына. Одна из возможных модификаций алгоритма A2 приводит к серии последовательно усиливающихся достаточных (но не необходимых) условий асимптотической устойчивости.

Пусть предполагаемые значения h_1 и h_2 периодов коррекции компонент системы (7.4.1) связаны с «истинными» периодами h_1^* и h_2^* соотношениями

$$\left|\frac{h_1}{h_1^*} - 1\right| \le \delta, \qquad \left|\frac{h_2}{h_2^*} - 1\right| \le \delta.$$

Определим начальную пятерку $\Psi_0 = \{\lambda_0, P_0, Q_0, R_0, S_0\}$ согласно алгоритму A2, полагая

$$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \quad R_0 = A, \quad S_0 = A.$$

Тогда вычисляемая величина λ_0 отличается от истинной величины $\lambda_0^* = h_1^*/(h_1^* + h_2^*)$ не более чем на $\delta_0 = 2\lambda_0\delta/(1-\delta)$, т.е. $|\lambda_0 - \lambda_0^*| \le \delta_0$.

Проведем построение пятерок Ψ_i по алгоритму A2. Пусть для чисел λ_i и $\psi_i = \psi(\lambda_i, P_i, Q_i, R_i, S_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, i_0 - 1$ выполняются неравенства $0 < \lambda_i < 1$ и $\psi_i \ge 1$, а при $i = i_0$ — неравенства $0 < \lambda_i < 1$ и $\psi_i < 1$. Аналогично обоснованию алгоритмов A1 и A2 проводится доказательство следующего утверждения.

7.4.10. Теорема. *Пусть при каждом $i = 0, 1, \ldots, i_0 - 1$ выполняются равенства*

$$\left[\frac{1}{\lambda_i + \delta_i}\right] = \left[\frac{1}{\lambda_i - \delta_i}\right], \qquad \left[\frac{1}{1 - \lambda_i + \delta_i}\right] = \left[\frac{1}{1 - \lambda_i - \delta_i}\right],$$

где

$$\delta_i = (r_0 + 2)^2 \cdots (r_{i-1} + 2)^2 \delta_0$$

(определение r_i см. в описании алгоритма A2, $[t]$ — целая часть числа t). Пусть

$$\psi(\lambda_{i_0} - \delta_{i_0}, P_{i_0}, Q_{i_0}, R_{i_0}, S_{i_0}), \quad \psi(\lambda_{i_0} + \delta_{i_0}, P_{i_0}, Q_{i_0}, R_{i_0}, S_{i_0}) < 1.$$

Тогда система импульсных уравнений (7.4.1) *асимптотически устойчива.*

7.4.11. Теорема 7.4.10 позволяет, например, установить асимптотическую устойчивость системы (7.4.1) из примера 7.4.4 с моментами коррекции компонент $T_1^n = n$, $T_2^n = 1.7n$. Предполагается, что периоды коррекции компонент $h_1 = 1.0$ и $h_2 = 1.7$ известны с относительной погрешностью $\delta = 0.0001$. Для получения ответа нужны лишь два шага модифицированного алгоритма A2.

Замечания и библиографические справки

Анализу устойчивости рассинхронизованных по фазе и частоте систем посвящены работы [Клепцын, 1983, 1984, 1985a,b,c; Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1983, 1984a,b,c; Козякин, 1990b,c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]; см. также замечания и библиографические справки к гл. 2.

Идея метода интервалов впервые была применена для анализа устойчивости рассинхронизованных систем импульсных уравнений в работах [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1984b,c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]. Предложенный в этих работах вариант метода интервалов отличается от изложенного разбиением числовой оси в объединение интервалов $[T^n, T^{n+1})$, а не $(T^n, T^{n+1}]$. Необходимые для обоснования метода интервалов сведения из эргодической теории содержатся, например, в [Корнфельд, Синай, Фомин, 1980; Нитецки, 1975]. Описание геометрической конструкции вычисления средних частот $\{p_i\}$ появления матриц $\{D_i\}$ в последовательности $\{C(n)\}$ следует работе [Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984]. Теорема 7.2.16 взята из работы [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1984b].

Анализ устойчивости двухкомпонентных фазочастотно рассинхронизованных систем был начат в [Клепцын, Козякин, Красносельский, Кузнецов, 1984c; Kleptsyn, Krasnoselskii, Kuznetsov, Kozjakin, 1984], где приведены первые варианты алгоритмов Клепцына. Более подробное изложение алгоритмов Клепцына и их обоснование содержится в работах [Клепцын, 1984, 1985a,b,c].

Проводимый в § 7.3 качественный анализ возмущений двухкомпонентных рассинхронизованных систем основан на работах [Козякин, 1990b,c]. При построении в пункте 7.3.12 множества Ω_n возникают трудности, аналогичные проблеме малых знаменателей (см., например, [Арнольд, 1978]); для их преодоления используется техника Колмогорова-Арнольда-Мозера.

Глава 8

Стохастические рассинхронизованные системы

В главе исследуются условия устойчивости рассинхронизованной системы со случайными моментами коррекции компонент. Функционирование системы трактуется как случайный процесс, а если допустить различные начальные состояния системы — как марковское семейство. Обсуждаются различные способы оценки скорости стремления решений к нулю: метод динамики средних, метод показателей Ляпунова, а также метод инвариантных мер.

§ 8.1. Стохастическая рассинхронизация

В качестве модели случайной последовательности моментов коррекции компонент рассинхронизованной системы выберем простейший поток событий.

8.1.1. Простейший поток событий. Последовательность случайных величин $0 < T^1 < T^2 < \cdots < T^n < \ldots$ образует простейший поток событий с интенсивностью λ, если и только если случайные величины T^1, $T^2 - T^1$, $T^3 - T^2, \ldots, T^{n+1} - T^n, \ldots$ независимы и одинаково распределены с плотностью

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \le 0. \end{cases}$$

Пусть имеются N независимых простейших потоков

$$0 < T_i^1 < T_i^2 < \cdots < T_i^n < \ldots, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

причем интенсивность потока $\{T_i^n\}$ равна λ_i. Будем предполагать, что никакие два события $T_{i_1}^{k_1}$ и $T_{i_2}^{k_2}$ при $i_1 \neq i_2$ или $k_1 \neq k_2$ не совпадают (вероятность такого совпадения равна нулю). Рассмотрим последовательность $0 < T^1 < T^2 < \dots < T^m < \dots$, состоящую из всех событий T_i^n, $i = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots$, упорядоченных по возрастанию. Через $i(n)$ обозначим номер потока, которому принадлежит событие T^n. Тогда будут выполнены следующие два утверждения.

а. Последовательность $\{T^n\}$ образует *простейший поток* событий с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$.

б. Случайные величины $i(n)$ независимы друг от друга и от потока $\{T^n\}$. Каждая из них принимает значение i с вероятностью $p_i = \lambda_i/(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N)$.

Про простейший поток событий T^n говорят, что он получается *«смешиванием»* простейших потоков $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

8.1.2. Стохастические рассинхронизованные системы. Пусть заданы N независимых простейших потоков событий $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, с интенсивностями λ_i. Без ограничения общности можно считать (поскольку вероятность соответствующего события равна 1) выполненными соотношения

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} T_i^n = \infty, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \\ T_{i_1}^{k_1} \neq T_{i_2}^{k_2} \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2 \quad \text{или} \quad k_1 \neq k_2. \end{gathered} \tag{8.1.1}$$

Каждый поток $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, будем рассматривать как последовательность моментов коррекции соответствующей компоненты рассинхронизованной системы W. Настоящая глава посвящена исследованию решений системы импульсных уравнений

$$\xi_i(T_i^n + 0) = a_{i1}\xi_1(T_i^n - 0) + \dots + a_{iN}\xi_N(T_i^n - 0), \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{8.1.2}$$

$$\xi_i(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad T_i^n \le t < T_i^{n+1}. \tag{8.1.3}$$

Здесь $\xi_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ — переменный случайный вектор состояния компоненты W_i системы W в момент времени t; a_{ij} — постоянные матрицы коэффициентов соответствующих размерностей. Вектор состояния

$$\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\} \in \mathbb{R}^d,$$

составленный из векторов состояний компонент, назовем *вектором состояния* системы W. Размерность d системы W определяется равенством

$d = \sum_{i=1}^{N} n_i$. Так как в каждый момент T_i^n подвергается коррекции только одна i-я компонента, то систему уравнений (8.1.2) можно записать в векторном виде:

$$\xi(T_i^n + 0) = A_{\{i\}}\xi(T_i^n - 0),$$

где $A_{\{i\}}$ — это $\{i\}$-помесь матрицы A, определяемая равенством

$$A_{\{i\}} = \left\| \begin{array}{cccccc} I & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{iN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I \end{array} \right\|.$$

8.1.3. Начальная задача. Пусть ξ_0 — случайный d-мерный вектор. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geq s$, со значениями в $\mathbb{R}^d$ (т.е. изменяющийся со временем случайный d-мерный вектор) называется *решением начальной задачи* (8.1.2), (8.1.3) с начальным условием

$$\xi(s) = \xi_0, \tag{8.1.4}$$

если этот процесс удовлетворяет соотношениям (8.1.2)–(8.1.4).

При каждой реализации случайной величины ξ и потоков событий $\{T_i^n\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющих условиям (8.1.1), функция $\xi(t)$ из соотношений (8.1.2)–(8.1.4) определяется однозначно. Поэтому существует и единственно решение начальной задачи (8.1.2)–(8.1.4) определенное на всем вероятностном пространстве, т.е. искомый случайный процесс $\xi(t)$.

8.1.4. Эквивалентное уравнение. Как и для нестохастических рассинхронизованных систем, наряду с импульсными уравнениями будем рассматривать эквивалентные им разностные уравнения. Важную роль при построении таких уравнений играет описанная в пункте 8.1.1 процедура смешивания нескольких независимых простейших потоков.

Пусть задана система (8.1.2), (8.1.3) с потоками моментов коррекции компонент T_i^n (с интенсивностями λ_i). Будем предполагать, что никакие два момента коррекции не совпадают. Пусть, как в пункте 8.1.1, последовательность $0 < T^1 < T^2 < \dots < T^m < \dots$ состоит из моментов коррекции всех компонент системы; обозначим через $i(m)$ номер компоненты, подвергающейся коррекции в момент времени T^m. Пусть $x(m) = \xi(T^m)$ — состояние системы после m коррекций компонент; $x_i(m) = \xi_i(T^m)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, — соответствующее состояние i-ой компоненты. Таким образом, $x(m) = \{x_1(m), x_2(m), \ldots, x_N(m)\}$. Функция $\xi(t)$ однозначно определяется по последовательности $x(m)$.

Из уравнений (8.1.2), (8.1.3) вытекают соотношения

$$x_i(m) = \begin{cases} a_{i\,1}x_1(m-1) + \cdots + a_{i\,N}x_N(m-1) & \text{при} \quad i = i(m), \\ x_i(m-1) & \text{при} \quad i \neq i(m). \end{cases}$$

или, что эквивалентно,

$$x(m) = A_{\{i(m)\}}x(m-1). \tag{8.1.5}$$

Как следует из рассмотрений пункта 8.1.1, $i(m)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (НОРСВ) с законом распределения

$$\mathbb{P}\{i(m) = s\} = p_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N}. \tag{8.1.6}$$

Уравнение (8.1.5) с НОРСВ $i(m)$, подчиняющимися закону (8.1.6), эквивалентно импульсной системе (8.1.2), (8.1.3).

8.1.5. Теорема. *а. Если случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет импульсной системе* (8.1.2), (8.1.3)*, то последовательность $x(m) = \xi(T^m)$ удовлетворяет разностному уравнению* (8.1.5).

б. Если последовательность случайных величин $x(m)$ удовлетворяет разностному уравнению (8.1.5)*, то случайный процесс $\xi(t)$, заданный равенством*

$$\xi(t) = x(m) \quad \text{\textit{при}} \quad T^m \leq t < T^{m+1}$$

удовлетворяет импульсной системе (8.1.2)*,* (8.1.3).

Для разностного уравнения (8.1.5) начальная задача формулируется естественным образом: требуется найти последовательность случайных величин $x(m)$ ($m \geq s$), удовлетворяющих уравнению (8.1.5) и условию $x(s) = x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}^d$ — случайный вектор. Существование и единственность решения начальной задачи для уравнения (8.1.5) и его связь с решением начальной задачи для импульсной системы (8.1.2), (8.1.3) устанавливаются стандартными рассуждениями.

8.1.6. Оператор перехода и оператор сдвига. Решение начальной задачи $x(m) = x$ (где $x \in \mathbb{R}^d$ — неслучайный вектор) для разностного уравнения (8.1.5) определяется при $n \geq m$ равенством $x(n) = F(n, m; x)$, где $F(n, m; x)$ — случайный оператор перехода. Этот оператор линеен по x и может быть представлен в виде

$$F(n, m; x) = F(n, m)x$$

где случайная матрица перехода $F(n, m)$ определяется формулой

$$F(n, m) = A_{\{i(n)\}} A_{\{i(n-1)\}} \cdots A_{\{i(m+1)\}}. \tag{8.1.7}$$

Оператор перехода строился для неслучайного начального условия, однако он позволяет найти решение начальной задачи и со случайным начальным условием $x(m) = \xi$. Такое решение задается формулой

$$x(n) = F(n, m)\xi \tag{8.1.8}$$

В дальнейшем будем пользоваться сокращенной записью $F(n)$ вместо $F(n, 0)$. Случайная (матричная) величина $F(n, m)$ имеет такое же распределение, как и $F(n - m)$.

Обозначим через $\Phi(t, s; x)$, где $s \leq t$, $x \in \mathbb{R}^d$, случайный вектор, равный значению в момент времени t решения начальной задачи $\xi(s) = x$ для импульсной системы (8.1.2), (8.1.3) (сравните с пунктом 1.5.3). Оператор сдвига $\Phi(t, s; x)$ линеен по x и, следовательно, может быть представлен в виде

$$\Phi(t, s; x) = \Phi(t, s)x$$

где матрица сдвига $\Phi(t, s)$ — это некоторая случайная матрица. Матрица сдвига стохастической рассинхронизованной системы связана с матрицей перехода эквивалентного разностного уравнения равенством $\Phi(t, s) = F\,(m(t), m(s))$, где $m(t)$ и $m(s)$ определяются неравенствами

$$T^{m(t)} \leq t < T^{m(t)+1}, \qquad T^{m(s)} \leq s < T^{m(s)+1}.$$

Оператор сдвига, как и оператор перехода, позволяет решать импульсную задачу со случайным начальным условием. Решение импульсной задачи с начальным условием $\xi(s) = \xi$ определяется равенством $\Phi(t, s; \xi) = \Phi(t, s)\xi$.

Как и для оператора перехода, будем писать $\Phi(t)$ вместо $\Phi(t, 0)$. Матрицы $\Phi(t, s)$ и $\Phi(t - s)$ имеют одинаковое распределение.

§ 8.2. Устойчивость стохастических рассинхронизованных систем

Стохастический характер системы вносит специфику в вопрос о ее устойчивости. Ниже обсуждается несколько вариантов понятия устойчивости. Важную роль при установлении взаимосвязи этих понятий играют показатели Ляпунова и теорема Фюрстенберга-Кестена из эргодической теории.

8.2.1. Теорема (Фюрстенберга-Кестена)**.** *Для любого уравнения* (8.1.5) *существует такое неслучайное число η, что матрица перехода $F(m)$ с вероятностью* 1 *удовлетворяет равенству*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|F(m)\| = \eta.$$

В силу теоремы 8.2.1 скорость роста (или убывания) $\|F(m)\|$ экспоненциальна и не зависит от реализации потоков коррекции компонент. Число η, характеризующее эту скорость, называют (ведущим) *показателем Ляпунова* разностного уравнения (8.1.5). Из теоремы Фюрстенберга-Кестена следует существование показателя Ляпунова и для системы импульсных уравнений (8.1.2), (8.1.3).

8.2.2. Теорема. *Пусть η — показатель Ляпунова уравнения* (8.1.5)*. Тогда матрица сдвига $\Phi(t)$ эквивалентной импульсной рассинхронизованной системы* (8.1.2)*,* (8.1.3) *с вероятностью* 1 *удовлетворяет равенству*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|\Phi(t)\| = \eta\lambda.$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$.

Доказательство. Обозначим через $m(t)$ число коррекций компонент импульсной системы за время от 0 до t. Тогда $\Phi(t) = F(m(t))$ и выполнена цепочка равенств.

$$\frac{1}{t}\ln\|\Phi(t)\| = \frac{1}{t}\ln\|F(m(t))\| = \frac{m(t)}{t}\left(\frac{1}{m(t)}\ln\|F(m(t))\|\right) \tag{8.2.1}$$

Изучим асимптотику множителя $m(t)/t$ при $t\to\infty$. Обозначим через κ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, количество коррекций компонент импульсной системы за время от k до $k+1$. Из свойств простейшего потока событий (см.

[Ширяев, 1980]) вытекает, что случайные величины κ_k независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $\mathbb{M}\kappa_k = \lambda$. Отсюда по усиленному закону больших чисел следует выполнение с вероятностью 1 равенства

$$\lim \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{[s]} \kappa_k = \lambda. \tag{8.2.2}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{[t]} \kappa_k \leq m(t) \leq \sum_{k=1}^{[t]+1} \kappa_k,$$

то

$$\frac{[t]}{t} \sum_{k=1}^{[t]} \frac{\kappa_k}{[t]} \leq \frac{[t]+1}{t} \sum_{k=1}^{[t]+1} \frac{\kappa_k}{[t]+1}.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу, получаем в силу (8.2.2), что с вероятностью 1 имеет место равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \lambda. \tag{8.2.3}$$

Следовательно, $m(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, значит

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{m(t)} \ln \|F(m(t))\| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \|F(m)\| = \eta. \tag{8.2.4}$$

Последнее равенство по теореме Фюрстенберга-Кестена выполнено с вероятностью 1. Из (8.2.1), (8.2.3) и (8.2.4) следует утверждение теоремы 8.2.2.

8.2.3. Типы устойчивости стохастических разностных уравнений. Нулевое решение уравнения (8.1.5) назовем *устойчивым (асимптотически устойчивым) почти наверное* (п.н.), если равна 1 вероятность его устойчивости (асимптотической устойчивости) при случайной реализации последовательности $\{i(m)\}$ номеров компонент, подвергающихся коррекции.

Нулевое решение называется *устойчивым в среднем* (*среднем квадратичном*), если любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $r > 0$, для которого при любых $m \geq 0$, $\|x_0\| < r$ (где $x_0 \in \mathbb{R}^d$ — неслучайный вектор) решение $x(m)$ начальной задачи $x(0) = x_0$ отвечает следующему условию: $\mathbb{M}\|x(m)\| < \varepsilon$ для устойчивости в среднем, $\mathbb{M}\|x(m)\|^2 < \varepsilon$ для устойчивости в среднем квадратичном.

Нулевое решение называется *асимптотически устойчивым в среднем* (*среднем квадратичном*), если оно устойчиво в соответствующем смысле и при любом неслучайном начальном условии x_0, достаточно близком к нулю, решение начальной задачи $x(0) = x_0$ удовлетворяет следующему соотношению: $\mathbb{M}\|x(m)\| \to 0$ для асимптотической устойчивости в среднем, $\mathbb{M}\|x(m)\|^2 \to 0$ для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном.

Нулевое решение называется *устойчивым по вероятности*, если при любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется такое $r > 0$, для которого из $\|x_0\| < r$ (x_0 — неслучайный вектор) вытекает справедливость для решения начальной задачи $x(0) = x_0$ неравенств $\mathbb{P}\{\|x(m)\| > \varepsilon\} < \delta$, $m \geq 0$. Нулевое решение называется *асимптотически устойчивым по вероятности* если оно устойчиво по вероятности и любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $r > 0$, что при $\|x_0\| < r$ выполнено соотношение $\mathbb{P}\{\|x(m)\| > \varepsilon\} \to \infty$ при $m \to \infty$.

8.2.4. Теорема. *Нулевое решение уравнения* (8.1.5) *обладает следующими свойствами:*

а) устойчиво п.н., если и только если $\|F(m)\|$ *ограничена при всех* m *с вероятностью* 1*;*

б) асимптотически устойчиво п.н., если и только если $\|F(m)\| \to 0$ *при* $m \to \infty$ *с вероятностью* 1*;*

в) устойчиво в среднем, если и только если $\mathbb{M}\|F(m)\|$ *ограничено при всех* m*;*

г) асимптотически устойчиво в среднем, если и только если $\mathbb{M}\|F(m)\| \to 0$ *при* $m \to \infty$*;*

д) устойчиво в среднем квадратичном, если и только если $\mathbb{M}\|F(m)\|^2$ *ограничено при всех* m*;*

е) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, если и только если $\mathbb{M}\|F(m)\|^2 \to 0$ *при* $m \to \infty$*;*

ж) устойчиво по вероятности, если и только если для любого $\delta > 0$ *найдется такое* z*, что* $\mathbb{P}\{\|F(m)\| > z\} < \delta$ *при всех* m*;*

з) асимптотически устойчиво по вероятности, если и только если устойчиво по вероятности и найдется такое z*, что* $\mathbb{P}\{\|F(m)\| > z\} \to 0$ *при* $m \to \infty$.

При проведении доказательства ограничимся рассмотрением первых двух утверждений.

а. Пусть $\|F(m)\|$ ограничена с вероятностью 1. Тогда для почти любой реализации последовательности $\{i(m)\}$ номеров подвергающихся коррекции компонент можно провести следующие рассуждения. Выберем число

M так, чтобы при всех m выполнялось неравенство $\|F(m)\| < M$. Положим $\varepsilon(\delta) = \delta/M$. Тогда, коль скоро $\|x(0)\| < \varepsilon(\delta)$ и $x(m)$ - решения уравнения (8.1.5), при всех m будут выполнены соотношения $\|x(m)\| = \|F(m)x(0)\| \le \|F(m)\|\,\|x(0)\| < \delta$. Устойчивость п.н. доказана.

Пусть теперь система устойчива п.н. Тогда для почти любой реализации последовательности $\{i(m)\}$ номеров подвергающихся коррекции компонент существует такое $\varepsilon > 0$, при котором для всех траекторий $x(m)$ уравнения (8.1.5) из условия $\|x(0)\| < \varepsilon$ вытекает справедливость при всех m оценки $\|x(m)\| < 1$. Отсюда и из формулы (8.1.8) следует с вероятностью 1 неравенство $\|F(m)\| < 1/\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

б. Пусть с вероятностью 1 выполнено соотношение $\lim_{n\to\infty} \|F(m)\| = 0$. Тогда, во-первых, $\|F(m)\|$ с вероятностью 1 ограничена и в силу утверждения а система устойчива п.н. Во-вторых, для любого решения (с неслучайным начальным состоянием) с вероятностью 1 выполнены соотношения $\|x(m)\| = \|F(m)x(0)\| \le \|F(m)\|\,\|x(0)\| \to 0$. Таким образом, система асимптотически устойчива п.н.

Перейдем к обратному утверждению. Пусть уравнение (8.1.5) асимптотически устойчиво п.н. Тогда с вероятностью 1 одновременно стремятся к нулю нормы решений d начальных задач с начальными условиями $x(0) = e_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$, где $e_j = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$ — это j-й базисный вектор в $\mathbb{R}^d$. Отсюда вытекает, что почти наверное $\|F(m)e_j\| \to 0$ при $j = 1, 2, \ldots, d$. Цепочка соотношений

$$\|F(m)\| = \sup_{\sum \gamma_j^2=1} \left\|F(m)\sum_j \gamma_j e_j\right\| \le \sup_{\sum \gamma_j^2=1} \sum_j |\gamma_j|\,\|F(m)e_j\| \le$$

$$\le d\sum_j \|F(m)e_j\| \to 0$$

завершает доказательство утверждения б. Доказательство остальных утверждений теоремы опирается на те же идеи.

8.2.5. *L*-устойчивость. По теореме Фюрстенберга-Кестена 8.2.1 почти все траектории системы имеют одинаковую скорость экспоненциального роста (или убывания). В связи с этим естественно следующее понятие. Будем говорить, что уравнение (8.1.5) *обладает свойством L-устойчивости*, если его показатель Ляпунова η отрицателен. Этот вид устойчивости будет в дальнейшем интересовать нас больше всего.

Выясним взаимосвязь между различными видами устойчивости.

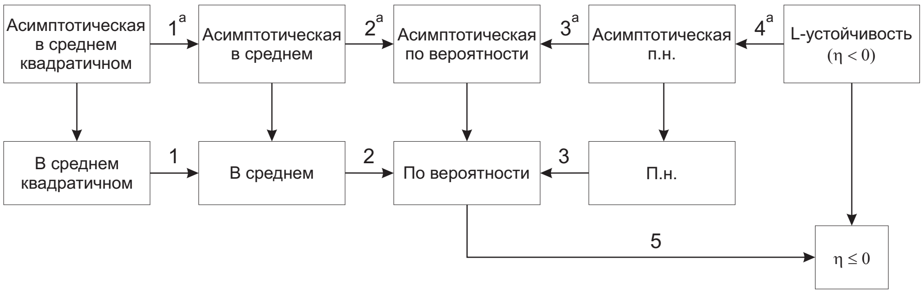

Рис. 8.1. Связи между различными понятиями устойчивости для стохастических рассинхронизованных систем

8.2.6. Теорема. *Имеют место все связи, указанные в схеме на рис.* 8.1.

Доказательство. Справедливость связей, обозначенных вертикальными стрелками, вытекает из соответствующих определений устойчивости.

Стрелки 1 и 1^a следуют из утверждений в-е теоремы 8.2.4 и из неравенства $\mathbb{M}\|F(m)\| \le \sqrt{\mathbb{M}\|F(m)\|^2}$.

Стрелки 2 и 2^a следуют из неравенства Чебышева $\mathbb{P}\{\|F(m)\| > z\} \le \mathbb{M}\|F(m)\|/z$ и из утверждений в,г,ж,з теоремы 8.2.4.

Докажем стрелку 3. Пусть система устойчива п.н. Тогда в силу утверждения а теоремы 8.2.4 имеет место равенство

$$\mathbb{P}\{\exists z\, \forall m\ \|F(m)\| < z\} = 1.$$

В силу свойства непрерывности вероятности левую часть этого равенства можно представить в виде

$$\mathbb{P}\{\exists z\, \forall m\ \|F(m)\| < z\} = \lim_{z\to\infty} \mathbb{P}\{\forall m\ \|F(m)\| < z\}.$$

Отсюда

$$\lim_{z\to\infty} \mathbb{P}\{\forall m\ \|F(m)\| > z\} = 0.$$

Из последнего равенства в силу утверждения ж теоремы 8.2.4 вытекает устойчивость по вероятности.

Перейдем к стрелке 3^a. Пусть система асимптотически устойчива п.н. Тогда она устойчива п.н. и по только что доказанному устойчива по вероятности. В силу утверждения б теоремы 8.2.4 с вероятностью 1 выполнено равенство $\lim_{n\to\infty} \|F(m)\| = 0$. Следовательно, с вероятностью 1 лишь для конечного числа $m = 1, 2, \dots$ верны неравенства $\|F(m)\| > 1$. Поэтому, в силу леммы Бореля-Кантелли (см. [Ширяев, 1980]) справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|F(m)\| > 1\} < \infty.$$

Значит,

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\{\|F(m)\| > 1\} = 0.$$

Отсюда и из утверждения з теоремы 8.2.4 следует асимптотическая устойчивость по вероятности.

Стрелка 4 непосредственно вытекает из утверждения б теоремы 8.2.4.

Осталось доказать стрелку 5. Предположим, что она не выполняется, т.е. $\eta > 0$ и система устойчива по вероятности. Зафиксируем $z > 0$. Так как $\eta > 0$, то с вероятностью 1 выполнено равенство $\lim_{m\to\infty}\|F(m)\| = \infty$. Следовательно, с вероятностью 1 выполнено условие

$$\{\exists N\, \forall m \geq N\ \|F(m)\| > z\}.$$

Поэтому в силу непрерывности вероятности

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\{\forall m \geq N\ \|F(m)\| > z\} = 1.$$

Выберем N так, чтобы вероятность под знаком предела была больше $1/2$. Тогда $\mathbb{P}\{\|F(N)\| > z\} > 1/2$, что в силу произвольности z противоречит устойчивости по вероятности.

Стрелка 5 и теорема 8.2.6 доказаны.

8.2.7. Устойчивость импульсных систем уравнений. Определения, результаты и доказательства пунктов 8.2.3–8.2.6 переносятся на импульсные системы (8.1.2), (8.1.3). Например, система (8.1.2), (8.1.3) называется *устойчивой в среднем*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r > 0$, для которого при любых $t \geq 0$, $\|x_0\| < r$ ($x_0 \in \mathbb{R}^d$ — неслучайный вектор) решение $\xi(t)$ начальной задачи $\xi(0) = x$ удовлетворяет неравенству $\mathbb{M}\|\xi(t)\| < \varepsilon$. Перейдем к вопросу о связи устойчивости импульсной системы и эквивалентного разностного уравнения.

8.2.8. Теорема. *а. Система* (8.1.2)*,* (8.1.3) *устойчива п.н., асимптотически устойчива, L-устойчива, если и только если эквивалентное уравнение* (8.1.5) *устойчиво в том же смысле.*

б. Если уравнение (8.1.5) *устойчиво или асимптотически устойчиво по вероятности, то система* (8.1.2)*,* (8.1.3) *устойчива в том же смысле.*

Доказательство. а. Утверждения, относящиеся к устойчивости п.н. и асимптотической устойчивости п.н. вытекают из теоремы 2.1.2. Утверждение об L-устойчивости следует из теоремы 8.2.2.

б. Пусть $\Phi(t)$ — матрица сдвига системы (8.1.2), (8.1.3), а $F(m)$ — матрица перехода уравнения (8.1.5).

Пусть уравнение (8.1.5) устойчиво в среднем. Тогда по теореме 8.2.4 величина $\mathbb{M}\|F(m)\|$ ограничена при всех m. Из цепочки соотношений

$$\mathbb{M}\|\Phi(t)\| = \sum_m \mathbb{M}\|F(m)\|\mathbb{P}\{m(t) = m\} \leq$$
$$\leq \left(\max_m \mathbb{M}\|F(m)\|\right) \sum_m \mathbb{P}\{m(t) = m\} = \max_m \mathbb{M}\|F(m)\|$$

вытекает ограниченность $\mathbb{M}\|\Phi(t)\|$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, система (8.1.2), (8.1.3) устойчива в среднем.

Пусть уравнение (8.1.5) асимптотически устойчиво в среднем. Тогда по теореме 8.2.4 $\mathbb{M}\|F(m)\| \to 0$ при $m \to \infty$. Выпишем цепочку соотношений

$$\mathbb{M}\|\Phi(t)\| = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{M}\|F(m)\|\mathbb{P}\{m(t) = m\} =$$
$$= \sum_{m=0}^{[\lambda t/2]} \mathbb{M}\|F(m)\|\mathbb{P}\{m(t) = m\} + \sum_{[\lambda t/2]+1}^{\infty} \mathbb{M}\|F(m)\|\mathbb{P}\{m(t) = m\} \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left\{m(t) \leq m\left[\frac{\lambda t}{2}\right]\right\} \max_{m\leq[\lambda t/2]} \mathbb{M}\|F(m)\| + \max_{m>[\lambda t/2]} \mathbb{M}\|F(m)\| \sum_{[\lambda t/2]+1}^{\infty} \mathbb{P}\{m(t) = m\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{m(t) \leq m\left[\frac{\lambda t}{2}\right]\right\} \max_{m\leq[\lambda t/2]} \mathbb{M}\|F(m)\| + \max_{m>[\lambda t/2]} \mathbb{M}\|F(m)\|.$$

Поскольку в правой части последнего равенства

$$\mathbb{P}\left\{m(t) \leq \left[\frac{\lambda t}{2}\right]\right\} \to 0$$

при $t \to \infty$ и $\mathbb{M}\|F(m)\| \to 0$ при $m \to \infty$, $\mathbb{M}\|\Phi(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда следует асимптотическая устойчивость в среднем системы (8.1.2), (8.1.3).

Остальные утверждения части б теоремы доказываются аналогично.

§ 8.3. Метод динамики средних

В параграфе разрабатывается метод вычисления вероятностных моментов произвольного порядка элементов матрицы перехода разностного уравнения (8.1.5) и матрицы сдвига импульсной системы (8.1.2), (8.1.3).

8.3.1. Кронекеровское произведение. *Кронекеровским произведением* $k \times l$-матрицы $B = (b_{ij})$ и $m \times n$-матрицы $C = (c_{ij})$ называется $km \times ln$-матрица

$$B \otimes C = \begin{Vmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \dots & b_{1l}C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1}C & b_{k2}C & \dots & b_{kl}C \end{Vmatrix}.$$

Операция кронекеровского произведения обладает следующими свойствами

$$\begin{gathered} (A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \\ A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C, \\ A \otimes (kB) = (kA) \otimes B = k(A \otimes B), \\ A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C, \\ AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D). \end{gathered} \tag{8.3.1}$$

В этих равенствах, разумеется, размеры матрицы должны быть согласованы таким образом, чтобы формулы имели смысл. s-й *кронекеровской степенью* $k \times l$-матрицы называется $k^s \times l^s$-матрица $B^{\otimes s} = B \otimes B \otimes \dots \otimes B$ (s раз).

В дальнейшем будет использоваться следующее свойство второй кронекеровской степени (кронекеровского квадрата) квадратной матрицы:

$$\|B^{\otimes 2}\| = \|B\|^2 \tag{8.3.2}$$

(до конца главы применяется только матричная норма, порожденная евклидовой векторной нормой).

8.3.2. Моменты случайных матриц. Пусть $B = (b_{ij})$ — случайная матрица. Через $\mathbb{M}B$ обозначим матрицу $(\mathbb{M}B_{ij})$ математических ожиданий элементов матрицы B. Из свойств математического ожидания скалярной случайной величины следуют свойства математического ожидания матричной случайной величины:

а) $\mathbb{M}(rB+sC) = r\mathbb{M}B+s\mathbb{M}C$ для любых A и B и неслучайных скалярных коэффициентов r и s;

б) $\mathbb{M}(BC) = (\mathbb{M}B)(\mathbb{M}C)$ для независимых A и B.

Матрицу $\mathbb{M}B^{\otimes s}$ будем называть *моментом* s-го порядка матрицы B. Матрица составлена из всех (смешанных) моментов s-го порядка случайных величин b_{ij}. Как видно из приводимого ниже примера, один и тот же смешанный момент может стоять в нескольких местах матрицы $\mathbb{M}B^{\otimes s}$.

8.3.3. Пример. Если $B = (b_{ij})$ — случайная 2×2-матрица, то

$$\mathbb{M}B^{\otimes 2} = \begin{Vmatrix} \mathbb{M}b_{11}b_{11} & \mathbb{M}b_{11}b_{12} & \mathbb{M}b_{12}b_{11} & \mathbb{M}b_{12}b_{12} \\ \mathbb{M}b_{11}b_{21} & \mathbb{M}b_{11}b_{22} & \mathbb{M}b_{12}b_{21} & \mathbb{M}b_{12}b_{22} \\ \mathbb{M}b_{21}b_{11} & \mathbb{M}b_{21}b_{12} & \mathbb{M}b_{22}b_{11} & \mathbb{M}b_{22}b_{12} \\ \mathbb{M}b_{21}b_{21} & \mathbb{M}b_{21}b_{22} & \mathbb{M}b_{22}b_{21} & \mathbb{M}b_{22}b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Теперь все готово для получения основной формулы для моментов матрицы перехода $F(m)$ уравнения (8.1.5).

8.3.4. Теорема. *Матрица перехода* $F(m)$ *уравнения* (8.1.5) *удовлетворяет равенству*

$$\mathbb{M}F(m)^{\otimes s} = (N^{(s)})^m, \tag{8.3.3}$$

где $N^{(s)}$ *— матрица, определяемая равенством*

$$N^{(s)} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_{\{i\}}^{\otimes s}. \tag{8.3.4}$$

Доказательство. Положим $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$ и заметим сначала, что

$$\mathbb{M}A_{\{i\}}^{\otimes s} = \sum_{i=1}^{N} p_i A_{\{i\}}^{\otimes s} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\lambda} A_{\{i\}}^{\otimes s} = N^{(s)}. \tag{8.3.5}$$

Так как в силу (8.1.7)

$$\mathbb{M}F(m)^{\otimes s} = \mathbb{M}(A_{\{i(m)\}}A_{\{i(m-1)\}} \cdots A_{\{i(1)\}})^{\otimes s},$$

то из (8.3.1), (8.3.5) и свойств матричного математического ожидания (см. пункт 8.3.2) следует, что

$$\mathbb{M}F(m)^{\otimes s} = \mathbb{M}\left(A_{\{i(m)\}}^{\otimes s} A_{\{i(m-1)\}}^{\otimes s} \cdots A_{\{i(1)\}}^{\otimes s}\right) =$$
$$= \mathbb{M}A_{\{i(m)\}}^{\otimes s} \mathbb{M}A_{\{i(m-1)\}}^{\otimes s} \cdots \mathbb{M}A_{\{i(1)\}}^{\otimes s} = (N^{(s)})^m.$$

Теорема 8.3.4 доказана. □

8.3.5. Теорема. *Матрица сдвига* $\Phi(t)$ *системы* (8.1.2), (8.1.3) *удовлетворяет равенству*

$$\mathbb{M}\Phi(t)^{\otimes s} = \exp\left\{\lambda t(N^{(s)} - I)\right\}, \tag{8.3.6}$$

где $N^{(s)}$ *задается формулой* (8.3.4).

Доказательство. Обозначим через $m(t)$ число коррекций компонент системы (8.1.2), (8.1.3) за время от 0 до t. Тогда утверждение теоремы следует из цепочки равенств

$$\mathbb{M}\Phi(t)^{\otimes s} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}\{m(t) = r\}\, \mathbb{M}\left(\Phi(t)^{\otimes s} \Big| m(t) = r\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t} \mathbb{M}F(m)^{\otimes s} = e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \left(N^{(s)}\right)^r =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\lambda t N^{(s)}\right)^r = \exp\left\{\lambda t(N^{(s)} - I)\right\}.$$

§ 8.4. Оценки показателей Ляпунова

8.4.1. Теорема. *Показатель Ляпунова* η *уравнения* (8.1.5) *удовлетворяет неравенству*

$$\eta \le \sum_{i=1}^{N} p_i \ln \|A_{\{i\}}\|. \tag{8.4.1}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из цепочки соотношений

$$\eta = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \|F(m)\| = \lim_{m\to\infty} \ln \|A_{\{i(m)\}} A_{\{i(m-1)\}} \cdots A_{\{i(1)\}}\| \le$$

$$\le \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \left(\|A_{\{i(m)\}}\|\, \|A_{\{i(m-1)\}}\| \cdots \|A_{\{i(1)\}}\|\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m} \ln \|A_{\{i(r)\}}\| = \mathbb{M} \ln \|A_{\{i(1)\}}\| = \sum_{i=1}^{N} p_i \ln \|A_{\{i\}}\|.$$

Здесь предпоследнее равенство следует из усиленного закона больших чисел для НОРСВ $\ln \|A_{\{i(m)\}}\|$.

8.4.2. Учет геометрии системы. Формулы (8.3.3) дают возможность за счет учета геометрии системы получить более точные верхние оценки показателя Ляпунова уравнения (8.1.5). Первый результат такого рода, использующий моменты первого порядка, относится к системам с неотрицательными коэффициентами.

8.4.3. Теорема. *Если все элементы матрицы A неотрицательны, то показатель Ляпунова η уравнения* (8.1.5) *с матрицей A удовлетворяет неравенству*

$$\eta \le \ln \rho(N^{(1)}). \tag{8.4.2}$$

Доказательство. Оценим сначала норму математического ожидания матрицы перехода $F(m)$ при больших m. Так как

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \|\mathbb{M}F(m)\| = \ln \lim_{m\to\infty} \|(N^{(1)})^m\|^{1/m} = \beta,$$

где $\beta = \ln \rho(N^{(1)})$, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших m имеет место неравенство $\ln \|\mathbb{M}F(m)\| \le m(\beta + \varepsilon/4)$, следовательно $\|\mathbb{M}F(m)\| \le \exp\{m(\beta + \varepsilon/4)\}$.

Поскольку норма матрицы не меньше максимума модулей ее элементов, то для всех элементов $b_{m,ij}$ матрицы $F(m)$ справедлива оценка $\mathbb{M}b_{m,ij} \le \exp\{m(\beta + \varepsilon/4)\}$. Кроме того, для любого положительного z выполнено неравенство Чебышева $\mathbb{P}\left\{b_{m,ij} \ge z\right\} \le \exp\{m(\beta + \varepsilon/4)\}/z$ (неотрицательность случайных величин $b_{m,ij}$ вытекает из неотрицательности элементов матрицы A).

Так как $\|F(m)\| \le d^2 \max_{i,j} b_{m,ij}$, где d — размерность пространства состояний уравнения (8.1.5), то при достаточно больших m выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\|F(m)\| \ge \exp\{m(\beta + \varepsilon)\}\} \le \\
&\quad \le \mathbb{P}\left\{d^2 \max_{i,j} b_{m,ij} \ge \exp\{m(\beta + \varepsilon)\}\right\} \le \mathbb{P}\left\{\max_{i,j} b_{m,ij} \ge \exp\{m(\beta + 3\varepsilon/4)\}\right\} \le \\
&\qquad \le \sum_{i,j} \mathbb{P}\left\{b_{m,ij} \ge \exp\{m(\beta + \varepsilon)\}\right\} \le d^2 \frac{\exp\{m(\beta + \varepsilon/4)\}}{\exp\{m(\beta + 3\varepsilon/4)\}} = \\
&\qquad\qquad = d^2 \exp\{-m\varepsilon/2\} \le \exp\{-m\varepsilon/4\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, ряд из вероятностей

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|F(m)\| \ge \exp\{m(\beta + \varepsilon)\}\}$$

сходится. Поэтому в силу леммы Бореля-Кантелли с вероятностью 1 для достаточно больших m выполнено неравенство $\|F(m)\| < \exp\{m(\beta + \varepsilon)\}$. Значит, показатель Ляпунова η уравнения (8.1.5) не превышает $\beta + \varepsilon$. В силу произвольности ε отсюда вытекает оценка $\eta \leq \beta$. Теорема доказана. □

Перейдем к случаю, когда элементы матрицы A произвольны.

8.4.4. Теорема. *Для произвольного уравнения* (8.1.5) *имеет место оценка*

$$\eta \leq \frac{1}{2} \ln \rho(N^{(2)}). \tag{8.4.3}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.4.3. Сначала оценим норму математического ожидания матрицы $F(m)^{\otimes 2}$ при больших m. Так как

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \|\mathbb{M}F(m)^{\otimes 2}\| = \ln \lim_{m\to\infty} \|(N^{(2)})^m\|^{1/m} = \gamma,$$

где $\gamma = \ln \rho(N^{(2)})$, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших m справедливо неравенство

$$\ln \|\mathbb{M}F(m)^{\otimes 2}\| \leq m(\gamma + \varepsilon/4).$$

Отсюда, $\|\mathbb{M}F(m)^{\otimes 2}\| \leq \exp\{m(\gamma + \varepsilon/4)\}$.

Для любого элемента $b_{m,ij}$ матрицы $F(m)$ математическое ожидание неотрицательной случайной величины $b^2_{m,ij}$ является элементом матрицы $\mathbb{M}F(m)^{\otimes 2}$. Поскольку норма матрицы не меньше максимума модулей ее элементов, то $\mathbb{M}b^2_{m,ij} \leq \|\mathbb{M}F(m)^{\otimes 2}\| \leq \exp\{m(\gamma + \varepsilon/4)\}$. Кроме того, для любого положительного z справедливо неравенство Чебышева

$$\mathbb{P}\left\{b_{m,ij} \geq z\right\} \leq \exp\{m(\gamma + \varepsilon/4)\}/z^2.$$

Из неравенства $\|F(m)\| \leq d^2 \max_{i,j} b_{m,ij}$, где d — размерность пространства состояний уравнения (8.1.5) вытекает при достаточно больших m цепочка неравенств

$$\mathbb{P}\{\|F(m)\| \geq \exp\{m(\beta + \varepsilon)/2\}\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{d^2 \max_{i,j} b_{m,ij} \geq \exp\{m(\beta + \varepsilon/2)\}\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\max_{i,j} b_{m,ij} \geq \exp\{m(\beta + 3\varepsilon/4)/2\}\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{i,j} \mathbb{P}\left\{b_{m,ij} \geq \exp\{m(\beta + 3\varepsilon/4)\}\right\} \leq d^2 \frac{\exp\{m(\beta + \varepsilon/4)\}}{\exp\{m(\beta + 3\varepsilon/4)\}} =$$

$$= d^2 \exp\{-m\varepsilon/2\} \leq \exp\{-m\varepsilon/4\}.$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 8.4.3, выводится искомая оценка $\eta \le \gamma/2$. Теорема 8.4.4 доказана. □

8.4.5. Сравним оценку (8.4.1) показателя Ляпунова, установленную в теореме 8.4.1, с оценкой (8.4.3) и с истинным значением показателя Ляпунова. Последнее можно приближенно вычислить методом Монте-Карло, т.е. непосредственным перемножением матриц $A_{\{i(m)\}}$ в соответствии с (псевдо)случайной последовательностью $i(m)$. Проведем необходимые вычисления для простого примера.

8.4.6. Пример. Рассмотрим двухкомпонентную систему со скалярными компонентами и матрицей коэффициентов

$$A = \left\| \begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \right\|.$$

Пусть вероятности коррекции компонент в уравнении (8.1.5) одинаковы: $p_1 = p_2 = 0.5$. Имеем

$$A_{\{1\}} = \left\| \begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \qquad A_{\{2\}} = \left\| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right\|.$$

Теорема 8.4.1 дает следующую оценку показателя Ляпунова:

$$\eta_{(8.4.1)} = 0.5 \ln \|A_{\{1\}}\| + 0.5 \ln \|A_{\{2\}}\| \approx 1.232.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 8.4.4, вычислим матрицу $N^{(2)}$:

$$N^{(2)} = 0.5A_{\{1\}}^{\otimes 2} + 0.5A_{\{2\}}^{\otimes 2} =$$

$$= 0.5 \left\| \begin{array}{rrrr} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| + 0.5 \left\| \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 12 & 12 & 16 \end{array} \right\| = 0.5 \left\| \begin{array}{rrrr} 5 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 9 & 12 & 12 & 17 \end{array} \right\|.$$

По теореме 8.4.4 верна оценка $\eta \le \eta_{(8.4.4)} = 0.5 \ln \rho(N^{(2)}) \approx 1.054$. Методом Монте-Карло можно показать, что $\eta \approx 0.74$.

8.4.7. Пример. Предыдущий пример относился к типичной ситуации, когда полученная более изощренными методами оценка (8.4.3) (или (8.4.2)) оказывается более точной, чем «грубая» оценка (8.4.1). Так бывает не всегда: если матрица A диагональная или близка к диагональной, оценка (8.4.1) может оказаться более точной. Пусть, например,

$$A = \left\| \begin{array}{rr} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \qquad p_1 = p_2 = 0.5\,.$$

Тогда

$$A_{\{1\}} = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad A_{\{2\}} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad N^{(1)} = \left\| \begin{matrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Теорема 8.4.1 дает такую оценку показателя Ляпунова:

$$\eta \le \eta_{(8.4.1)} = 0.5 \ln \|A_{\{1\}}\| + 0.5 \ln \|A_{\{2\}}\| \approx 0.3466.$$

Можно показать, что $\eta = \eta_{(8.4.1)}$. Теорема 8.4.3 дает худшую оценку:

$$\eta \le \eta_{(8.4.3)} = 0.5 \ln \rho(N^{(1)}) \approx 0.4055.$$

8.4.8. Нижние оценки показателя Ляпунова. Идея получения таких оценок состоит в сведении их к верхним оценкам для другой системы.

Пусть коэффициенты системы таковы, что все матрицы $A_{\{i\}}$ невырождены. Это условие эквивалентно невырожденности всех диагональных элементов a_{ii} матрицы A (см. пункт 8.1.3). Рассмотрим наряду с уравнением (8.1.5) уравнение

$$y(m) = A^{-1}_{\{i(m)\}} y(m-1), \tag{8.4.4}$$

где $\{i(m)\}$ — последовательность НОРСВ с распределением (8.1.6).

Разностное уравнение (8.4.4) не является уравнением вида (8.1.5), но к нему применимы почти все построения и результаты, относящиеся к уравнению (8.1.5). В частности, для (8.4.4) естественным образом определяется матрица перехода $\tilde{F}(m)$, к этому уравнению применима теорема Фюрстенберга-Кестена о существовании неслучайного показателя Ляпунова. Формулировки и доказательства теорем 8.3.4, 8.4.1, 8.4.3 и 8.4.4 полностью переносятся на уравнение (8.4.4) — достаточно взять вместо матриц $A_{\{i\}}$ матрицы $A^{-1}_{\{i\}}$, а вместо матриц $N^{(s)}$ — матрицы

$$\tilde{N}^{(s)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\lambda} \left(A^{-1}_{\{i\}} \right)^{\otimes s}, \tag{8.4.5}$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$.

8.4.9. Лемма. *а. Случайные матрицы* $\tilde{F}(m)$ *и* $F(m)^{-1}$ *имеют одинаковое распределение.*

б. Показатели Ляпунова η *и* $\tilde{\eta}$ *уравнений* (8.1.5) *и* (8.4.4) *связаны неравенством* $\eta + \tilde{\eta} \ge 0$.

Доказательство. Утверждение а вытекает из равенств

$$\tilde{F}(m) = A^{-1}_{\{i(m)\}} \cdots A^{-1}_{\{i(1)\}},$$

$$F^{-1}(m) = (A_{\{i(m)\}} \cdots A_{\{i(1)\}})^{-1} = A^{-1}_{\{i(1)\}} \cdots A^{-1}_{\{i(m)\}},$$

и из одинаковости совместных распределений последовательностей случайных величин

$$\{i(m), i(m-1), \ldots, i(1)\} \quad \text{и} \quad \{i(1), i(2), \ldots, i(m)\}.$$

б. По определению показателя Ляпунова с вероятностью 1 имеют место равенства

$$\eta = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \|F(m)\|, \qquad \tilde{\eta} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \|\tilde{F}(m)\|.$$

Поскольку из сходимости с вероятностью 1 вытекает сходимость по вероятности, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех m, начиная с некоторого $m_0(\varepsilon)$, выполнены неравенства

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{m} \ln \|F(m)\| - \eta\right| < \varepsilon\right\} > \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{m} \ln \|\tilde{F}(m)\| - \tilde{\eta}\right| < \varepsilon\right\} > \frac{2}{3}.$$

Заменив выражения под знаком вероятности на более слабые (отчего вероятность может только увеличиться), получим оценки

$$\mathbb{P}\{\ln \|F(m)\| < \exp\{(\eta + \varepsilon)m\}\} > \frac{2}{3}, \tag{8.4.6}$$

$$\mathbb{P}\{\ln \|\tilde{F}(m)\| < \exp\{(\tilde{\eta} + \varepsilon)m\}\} > \frac{2}{3}. \tag{8.4.7}$$

В силу утверждения а настоящей леммы неравенство (8.4.7) эквивалентно неравенству

$$\mathbb{P}\left\{\|F^{-1}(m)\| < \exp\{(\tilde{\eta} + \varepsilon)m\}\right\} > \frac{2}{3}. \tag{8.4.8}$$

Из (8.4.6) и (8.4.8) следует справедливость с вероятностью не менее $1/3$ одновременно двух оценок

$$\|F(m)\| < \exp\{(\eta + \varepsilon)m\}, \qquad \|F^{-1}(m)\| < \exp\{(\tilde{\eta} + \varepsilon)m\}.$$

Перемножив почленно эти оценки, получим, что с вероятностью не меньше $1/3$ выполнено соотношение

$$\|F(m)\| \, \|F^{-1}(m)\| < \exp\{(\eta + \tilde{\eta} + 2\varepsilon)m\}.$$

Поскольку левая часть последнего неравенства не меньше 1, то имеет место следующая оценка, уже не содержащая случайных величин: $1 < \exp\{(\eta + \tilde{\eta} + 2\varepsilon)m\}$. Следовательно, $\eta + \tilde{\eta} + 2\varepsilon > 0$. В силу произвольности ε отсюда вытекает искомое неравенство $\eta + \tilde{\eta} \geq 0$. Лемма доказана. □

С помощью леммы 8.4.9 из любой верхней оценки показателя Ляпунова $\tilde{\eta}$ уравнения (8.4.4) можно получить нижнюю оценку показателя Ляпунова η уравнения (8.1.5). Сведем в одно утверждение все нижние оценки, вытекающие из установленных в этом параграфе верхних оценок.

8.4.10. Теорема. *Пусть диагональные элементы a_{ii} матрицы A в уравнении* (8.1.5) *невырождены. Тогда имеют место следующие оценки показателя Ляпунова η:*

а) $\eta \geq -\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \ln \|A_{\{i\}}^{-1}\|$;

б) $\eta \geq -\frac{1}{2} \ln \rho(\tilde{N}^{(2)})$;

в) Если при всех i элементы матриц $A_{\{i\}}^{-1}$ неотрицательны, то $\eta \geq -\ln \rho(\tilde{N}^{(1)})$, где $\tilde{N}^{(s)}$ — матрицы (8.4.5).

8.4.11. Пример. Для рассмотренной в примере 8.4.6 системы с матрицей

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \right\|.$$

и вероятностями $p_1 = p_2 = 0.5$ имеем

$$A_{\{1\}}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \qquad A_{\{2\}}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -0.75 & 1 \end{array} \right\|.$$

Из утверждения а теоремы 8.4.10 следует оценка:

$$\eta \geq \eta_1 = -0.5 \ln \|A_{\{1\}}^{-1}\| - 0.5 \ln \|A_{\{2\}}^{-1}\| \approx -0.2914.$$

Вычислим теперь матрицу $\tilde{N}^{(2)}$:

$$\tilde{N}^{(2)} = 0.5(A_{\{1\}}^{-1})^{\otimes 2} + 0.5(A_{\{2\}}^{-1})^{\otimes 2} = \left\| \begin{array}{llll} 0.625 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.375 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ -0.375 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.28125 & -0.375 & -0.375 & 1 \end{array} \right\|.$$

Из утверждения б теоремы 8.4.10 следует оценка $\eta \geq \eta_2 = -\frac{1}{2} \ln \rho(N^{(2)}) \approx 0.0138$.

§ 8.5. Условия устойчивости

В параграфе результаты § 8.3 и § 8.4 применяются к задаче об устойчивости стохастического разностного уравнения (8.1.5). Если элементы скалярной матрицы B неотрицательны, то будем использовать обозначение $B \geq 0$.

8.5.1. Лемма. *Для произвольной случайной $d \times d$-матрицы B имеют место соотношения*

а) если $B \geq 0$, то $\|\mathbb{M}B\| \leq \mathbb{M}\|B\| \leq d^2\|\mathbb{M}B\|$;

б) $\|\mathbb{M}B^{\otimes 2}\| \leq \mathbb{M}\|B\|^2 \leq d^4\|\mathbb{M}B\|$.

Доказательство. а. Неравенство $\|\mathbb{M}B\| \leq \mathbb{M}\|B\|$ следует из неравенства Йенсена (см. [Ширяев, 1980]) и выпуклости нормы матрицы как функции матричных элементов. Неравенство $\mathbb{M}\|B\| \leq d^2\|\mathbb{M}B\|$ вытекает из цепочки соотношений

$$\mathbb{M}\|B\| \leq \mathbb{M}\sum_{i,j=1}^{d}|b_{ij}| = \mathbb{M}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{d}\mathbb{M}b_{ij} \leq d^2 \max_{i,j}\mathbb{M}b_{ij} \leq d^2\|\mathbb{M}B\|.$$

б. По неравенству Йенсена $\|\mathbb{M}B^{\otimes 2}\| \leq \mathbb{M}\|B^{\otimes 2}\|$. Здесь в силу (8.3.2) $\|B^{\otimes 2}\| = \|B\|^2$, откуда следует левое неравенство в утверждении б. В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}\right)^2 \leq d^2\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}^2.$$

Поэтому выполнена цепочка соотношений

$$\mathbb{M}\|B\|^2 \leq \mathbb{M}\left(\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}^2\right) = \mathbb{M}\left(d^2\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}^2\right) \leq d^4 \max_{i,j}\mathbb{M}b_{ij}^2 \leq d^4\|\mathbb{M}B^{\otimes 2}\|,$$

откуда вытекает правое неравенство в утверждении б. Лемма доказана. □

Сформулируем условия устойчивости уравнения (8.1.5).

8.5.2. Теорема. *а. Пусть $A \geq 0$. Тогда уравнение* (8.1.5) *устойчиво в среднем, если и только если либо $\rho(N^{(1)}) < 1$ (при этом устойчивость асимптотическая), либо $\rho(N^{(1)}) = 1$ и все собственные значения матрицы $N^{(1)}$, равные по модулю единице полупросты.*

б. При любых A уравнение (8.1.5) *устойчиво в среднем квадратичном, если и только если либо $\rho(N^{(2)}) < 1$ (при этом устойчивость асимптотическая), либо $\rho(N^{(2)}) = 1$ и все собственные значения матрицы $N^{(2)}$, равные по модулю единице полупросты.*

Доказательство. а. В силу утверждения а леммы 8.5.1 и утверждений в,г теоремы 8.2.4 уравнение (8.1.5) устойчиво (асимптотически устойчиво) в среднем, если и только если норма $\|\mathbb{M}F(m)\|$ ограничена (соответственно стремится к нулю). В силу теоремы 8.3.4 выполнено равенство $\mathbb{M}F(m) = (N^{(1)})^m$. Поэтому утверждение а следует из теоремы 1.2.3. Доказательство утверждения б аналогично.

8.5.3. Теорема. *а. Пусть $A \geq 0$. Тогда импульсная система* (8.1.2), (8.1.3) *устойчива в среднем, если и только если либо все собственные значения матрицы $N^{(1)}$ лежат в полуплоскости* $\{\mathrm{Re}\, z < 1\}$ *(при этом устойчивость асимптотическая), либо часть собственных значений лежит в этой полуплоскости, а остальные лежат на прямой* $\{\mathrm{Re}\, z = 1\}$ *и полупросты.*

б. Для любой матрицы A импульсная система (8.1.2), (8.1.3) *устойчива в среднем квадратичном, если и только если либо все собственные значения матрицы $N^{(2)}$ лежат в полуплоскости* $\{\mathrm{Re}\, z < 1\}$ *(при этом устойчивость асимптотическая), либо часть собственных значений лежит в этой полуплоскости, а остальные лежат на прямой* $\{\mathrm{Re}\, z = 1\}$ *и полупросты.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.5.2; оно опирается на формулу (8.3.6) для $\mathbb{M}\Phi(t)$. Переформулировкой утверждения а является следствие.

Следствие. *Пусть $A \geq 0$. Тогда импульсная система* (8.1.2), (8.1.3) *устойчива в среднем, если и только если либо $\rho(N^{(1)}) < 1$ (при этом устойчивость асимптотическая), либо $\rho(N^{(1)}) = 1$ и все собственные значения матрицы $N^{(1)}$, равные по модулю единице, полупростые.*

8.5.4. Теорема. *а. Пусть $A \geq 0$ и $\rho(N^{(1)}) < 1$. Тогда уравнение* (8.1.5) *L-устойчиво, а также асимптотически устойчиво в среднем, по вероятности и п.н.*

б. Пусть $\rho(N^{(2)}) < 1$. Тогда уравнение (8.1.5) *L-устойчиво и асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, в среднем, по вероятности и п.н.*

в. Пусть $\sum_{i=1}^{N} p_i \ln \|A_{\{i\}}\| < 0$. Тогда уравнение (8.1.5) *L-устойчиво, а также асимптотически устойчиво по вероятности и п.н.*

Доказательство. а. L-устойчивость следует из теоремы 8.4.3, асимптотическая устойчивость в среднем — из утверждения а теоремы 8.5.2, остальные виды устойчивости вытекают из этих двух по теореме 8.2.6.

б. L-устойчивость следует из теоремы 8.4.4, асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном — из утверждения б теоремы 8.5.2. Из теоремы 8.2.6 вытекают остальные виды устойчивости.

в. L-устойчивость следует из теоремы 8.4.1, остальные виды устойчивости — из теоремы 8.2.6.

8.5.5. Замечание. Условие утверждения а теоремы 8.5.4 эквивалентно условию абсолютной r-асимптотической устойчивости системы с неотрицательными коэффициентами (см. теорему 5.2.1). Иными словами, для неотрицательной матрицы A неравенство $\rho(N^{(1)}) < 1$ выполняется, если и только если $\rho(A) < 1$.

Чтобы доказать это утверждение, введем вспомогательную $d \times d$-матрицу

$$Q = \begin{Vmatrix} p_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 I & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_N I \end{Vmatrix}.$$

Здесь размерности диагональных блоков совпадают с размерностями соответствующих компонент системы. Из цепочки равенств

$$N^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} p_i A_{\{i\}} = \sum_{i=1}^{N} p_i (A_{\{i\}} - I) + \sum_{i=1}^{N} p_i I =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} - I & \dots & a_{iN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} + I = Q(A - I) + I$$

вытекают соотношения

$$N^{(1)} - I = Q(A - I), \qquad A - I = Q^{-1}(N^{(1)} - I). \tag{8.5.1}$$

Как следует из теоремы Перрона-Фробениуса, для неотрицательных матриц B условие $\rho(B) \geq 1$ равносильно существованию ненулевого вектора $x \geq 0$, для которого $Bx - x \geq 0$. В силу (8.5.1) условие существования такого вектора x выполняется для $N^{(1)}$ и A одновременно. Отсюда вытекает доказываемое утверждение.

Перейдем к необходимым условиям устойчивости.

8.5.6. Теорема. *Пусть все диагональные элементы a_{ii} матрицы A невырождены. Для того чтобы уравнение* (8.1.5) *обладало хотя бы одним из свойств устойчивости, введенных в* § 8.2, *необходимо выполнение следующих трех условий:*

а) $\sum_{i=1}^{N} p_i \ln \|A_{\{i\}}^{-1}\| \geq 0$*;*

б) $\rho(\tilde{N}^{(2)}) \geq 1$*;*

в) если $A_{\{i\}}^{-1}$ *при всех* i, *то* $\rho(\tilde{N}^{(1)}) \geq 1$,

где $\tilde{N}^{(1)}$, $\tilde{N}^{(2)}$ *— матрицы* (8.4.5).

Доказательство. Если не выполнено хотя бы одно из условий теоремы, то в силу леммы 8.4.9 имеет место оценка $\eta > 0$. Отсюда по теореме 8.2.6 следует отсутствие устойчивости по вероятности, а значит и остальных видов устойчивости. Теорема доказана. □

§ 8.6. Метод инвариантных мер

В параграфе рассматриваются двухкомпонентные системы со скалярными состояниями компонент. Развивается подход к получению оценок показателя Ляпунова, позволяющий получать оценки любой наперед заданной точности.

8.6.1. Правильные системы. Рассмотрим рассинхронизованную систему W, описываемую уравнением (8.1.5) со скалярной 2×2-матрицей $A = (a_{ij})$ и вероятностями срабатывания компонент p и q (где $p + q = 1$). Такую систему назовем *правильной*, если элементы a_{ij} положительны, $a_{11} \neq 1$,

$a_{22} \neq 1$ и имеет место неравенство $a_{12}a_{21} > h(a_{11}, a_{22})$, где

$$h(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad u > 1,\ v > 1, \\ 1 - (1-u)v & \text{при} \quad u < 1,\ 1 < v < \frac{1}{1-u}, \\ 1 - (1-v)u & \text{при} \quad v < 1,\ 1 < u < \frac{1}{1-v}, \\ 0 & \text{при} \quad u < 1,\ v \geq \frac{1}{1-u}, \\ 0 & \text{при} \quad v < 1,\ u \geq \frac{1}{1-v}, \\ (1-u)(1-v) & \text{при} \quad u + v \leq 1, \\ uv & \text{при} \quad u < 1,\ v < 1,\ u + v > 1. \end{cases}$$

В частности, система W правильна, если элементы a_{ij} положительны, $a_{11} \neq 1$, $a_{22} \neq 1$ и $a_{12}a_{21} > 1$. Линии уровня функции h изображены на рис. 8.2. Правильность соответствует «достаточной удаленности» матрицы A от диагональной. Если система W правильная, то и уравнение (8.1.5), описывающее ее динамику, будем называть *правильным*.

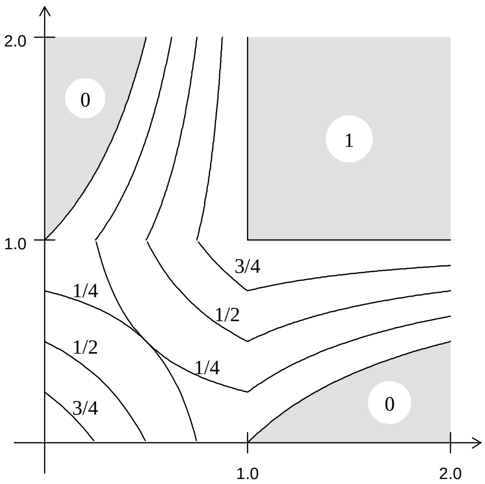

Рис. 8.2. Линии уровня функции h, выделяющей правильные системы

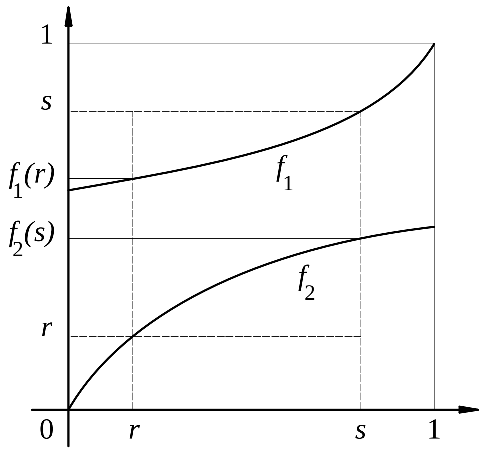

Рис. 8.3. Построение отрезка $\Delta = [r, s] \subset [0, 1]$ для правильного уравнения (8.6.1)

8.6.2. Изучим динамику правильной системы. Уравнение (8.1.5) для такой системы имеет вид:

$$x(m) = A_{\{i(m)\}} x(m-1), \tag{8.6.1}$$

где

$$A_{\{1\}} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad A_{\{2\}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix};$$

$$i(m) = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$$

Ключевая идея метода инвариантных мер состоит в том, чтобы сначала изучить, как меняется направление вектора состояния $x(m)$, а затем, используя полученную информацию, проследить за изменением его длины. В качестве характеристики направления вектора $x(m)$ удобно использовать координату центральной проекции (с центром в начале координат) вектора $x(m)$ на прямую, не проходящую через начало координат.

Множество $\mathbb{R}P$, состоящее из всех действительных чисел и ∞ называется *проективной прямой*. Положим

$$z(m) = \frac{x_1(m)}{x_1(m) + x_2(m)}, \tag{8.6.2}$$

Тогда $z(m) \in \mathbb{R}P$ при $x(m) \neq 0$. Проекция вектора $x(m)$ здесь осуществляется на прямую $x_1(m) + x_2(m) = 1$.

Как показывает следующая лемма, доказательство которой проводится прямым вычислением, закон изменения $z(m)$ можно описать уравнением, не содержащим $x(m)$.

8.6.3. Лемма. *Пусть $x(m)$ — решение уравнения* (8.6.1)*, а $z(m)$ определяется формулой* (8.6.2)*. Тогда*

$$z(m) = f_{i(m)}(z(m-1)), \tag{8.6.3}$$

где

$$f_1(z) = \frac{(a_{11} - a_{12})z + a_{12}}{(a_{11} - a_{12} - 1)z + a_{12} + 1}, \qquad f_2(z) = \frac{z}{(a_{21} - a_{22} + 1)z + a_{22}},$$

(значение дробно-линейной функции $f(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ в точке $z = \infty$ определяется естественным образом: $f(\infty) = \alpha/\gamma$).

8.6.4. Ближайшие восемь пунктов посвятим изучению свойств уравнения (8.6.3). Полученные результаты будут применены в пунктах 8.6.13–8.6.15 к вычислению показателя Ляпунова для уравнения (8.6.1). Будем интересоваться инвариантными множествами и инвариантными мерами уравнения (8.6.3).

8.6.5. Лемма. *Пусть уравнение* (8.6.3) *порождается правильным уравнением* (8.6.1). *Тогда существует отрезок* $\Delta = [r, s] \subseteq [0, 1]$, *обладающий следующими свойствами (рис.* 8.3*):*

а) $f_i(\Delta) \subset \Delta$, $i = 1, 2$;

б) $0 < c_1 < f_i'(z) < c_2 < 1$ *при всех* $z \in \Delta$, *где* c_1 *и* c_2 *зависят только от параметров системы и не зависят от* z;

в) $r = f_2(r) < f_2(s) < f_1(r) < f_1(s) = s$.

Доказательство. В качестве r выберем неподвижную точку функции f_2 лежащую в интервале $(0, 1)$ (если такая существует) или 0 (в противном случае). Аналогично, s — неподвижная точка f_1 в интервале $(0, 1)$ или 1. Доказательство неравенства $r < s$ и остальных утверждений леммы проводится прямыми вычислениями.

Условия правильности были специально подобраны так, чтобы выполнялись утверждения леммы.

8.6.6. Лемма. *Пусть уравнение* (8.6.3) *порождается правильным уравнением* (8.6.1). *Тогда существуют такие числа* $c_3 > 0$ *и* $c_4 \in (0, 1)$, *что любое решение уравнения* (8.6.3) *удовлетворяет неравенству* $\mathbb{P}\{z(m) \notin \Delta\} < c_3 c_4^m$.

Доказательство. Покажем вначале, что из любой точки можно за конечное число «шагов» попасть внутрь отрезка Δ. Точнее, имеет место следующий факт.

Утверждение А. *Для любого* $z \in \mathbb{R}P$ *существуют такие число* m *и конечная (возможно пустая) последовательность* $\{j(1), j(2), \ldots, j(m)\}$, *состоящая из единиц и двоек, что выполнено включение*

$$f_{j(m)} \circ f_{j(m-1)} \circ \cdots \circ f_{j(1)}(z) \in \Delta^\circ$$

где $\Delta^\circ = (r, s)$ — *внутренность отрезка* Δ.

Пусть s_1 — вторая кроме s неподвижная точка функции f_1 (ее существование и единственность вытекают из явного вида функции f_1 и условий правильности уравнения (8.6.1)). Положим $V = f_2^{-1}(\Delta^\circ)$. Множество V открыто и содержит точку s.

Рассмотрим три случая: а) $z \in \Delta^\circ$; б) $z \notin \Delta^\circ$, $z \neq s_1$; в) $z \notin \Delta^\circ$, $z = s_1$. В первом случае $m = 0$ и искомая последовательность пуста. В случае б) справедливо равенство $\lim_{k\to\infty} f_1^k(z) = s$. Выберем такое k, для которого $f_1^k(z) \in V$. Тогда $f_2 \circ f_1^k(z) \in \Delta^\circ$, и требуемая последовательность определяется равенством $\{j(1), j(2), \ldots, j(m-1), j(m)\} = \{1, 1, \ldots, 1, 2\}$, где $m = k+1$. В случае в) $f_2(z) \neq s_1$ и, следовательно, $\lim_{k\to\infty} f_1^k \circ f_2(z) = s$. Выберем такое k, для которого $f_1^k \circ f_2(z) \in V$. Тогда $f_2 \circ f_1^k \circ f_2(z) \in \Delta^\circ$ и требуемая последовательность определяется равенством $\{j(1), j(2), \ldots j(m-1), j(m)\} = \{2, 1, \ldots, 1, 2\}$, где $m = k + 2$. Утверждение A доказано. □

Из утверждения A и из непрерывности функций f_i на всей проективной прямой $\mathbb{R}P$ вытекает следующее.

Утверждение B. *Для любой точки $z \in \mathbb{R}P$ существуют такая ее окрестность U, число $m = m(U)$ и конечная последовательность $\{j(1), j(2), \ldots, j(m)\}$, состоящая из единиц и двоек, что выполнено включение*

$$f_{j(m)} \circ f_{j(m-1)} \circ \cdots \circ f_{j(1)}(U) \subset \Delta^\circ.$$

В силу утверждения B существует покрытие множества $\mathbb{R}P$ окрестностями U, обладающими свойством, описанным в утверждении B. В силу компактности $\mathbb{R}P$ из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $U_1, U_2, \ldots, U_s$. Положим $M = \max_{1\le k\le s} m(U_k)$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение C. *Для любого $z \in \mathbb{R}P$ существует такая конечная последовательность $\{j(1), j(2), \ldots, j(M)\}$ длины M, состоящая из единиц и двоек, что выполнено включение*

$$f_{j(M)} \circ f_{j(M-1)} \circ \cdots \circ f_{j(1)}(z) \in \Delta^\circ$$

Действительно, z принадлежит одному из множеств покрытия U_k. Следовательно, в силу утверждения B, найдется последовательность $\{j(1), j(2), \ldots, j(m(U_k))\}$, состоящая из единиц и двоек, для которой

$$f_{j(m(U_k))} \circ f_{j(m(U_k)-1)} \circ \cdots \circ f_{j(1)}(U) \subset \Delta^\circ.$$

Продолжив справа эту последовательность $m - m(U_k)$ единицами, получим искомую последовательность. Утверждение C доказано. □

Утверждение D. *Существует такое число $\alpha \in (0,1)$, что для любого решения $z(m)$ уравнения* (8.6.3) *при всех m выполнена оценка*

$$\mathbb{P}\{z(m+M) \notin \Delta^\circ\} \le \alpha \mathbb{P}\{z(m) \notin \Delta^\circ\}.$$

Для доказательства утверждения D обозначим через $\mu_m(z)$ распределение случайной величины $z(m)$ и оценим вероятность $\mathbb{P}\{z(m+M) \notin \Delta^\circ\}$ с помощью формулы полной вероятности:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{z(m+M) \notin \Delta^\circ\} &= \int_{\mathbb{R}P} \mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\} d\mu_m(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}P\setminus\Delta^\circ} \mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\} d\mu_m(z) + \\ &+ \int_{\Delta^\circ} \mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\} d\mu_m(z) \le \\ &\le \mu_m(\mathbb{R}P \setminus \Delta^\circ) \max_{z\in\mathbb{R}P\setminus\Delta^\circ} \mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\} + \int_{\Delta^\circ} 0\, d\mu_m(z).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbb{P}\{z(m+M) \notin \Delta^\circ\} \le \mathbb{P}\{z(m) \notin \Delta^\circ\} \max_{z\in\mathbb{R}P\setminus\Delta^\circ} \mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\}. \quad (8.6.4)$$

Чтобы оценить условную вероятность $\mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\}$, построим для z последовательность $\{j(1), j(2), \ldots, j(M)\}$, переводящую z внутрь Δ° (см. утверждение C). Вероятность p_z того, что эта последовательность реализуется на шагах $m+1, m+2, \ldots, m+M$ (т.е. выполнены равенства $i(m+k) = j(k)$ при $k = 1, 2, \ldots, M$) удовлетворяет соотношениям

$$p_z = p_{j(1)} p_{j(2)} \cdots p_{j(M)} \ge (\min(p,q))^M.$$

Следовательно, имеет место следующая оценка вероятности не попасть внутрь Δ° из z за M шагов:

$$\mathbb{P}\left\{z(m+M) \notin \Delta^\circ \middle| z(m) = z\right\} \le 1 - (\min(p,q))^M. \quad (8.6.5)$$

Положим $\alpha = 1 - (\min(p,q))$. Из неравенств (8.6.4) и (8.6.5) вытекает доказываемое утверждение D. □

Завершим доказательство леммы. Пусть m — произвольное натуральное число. Представим его в виде $m = Mu + v$, где $0 \le v < M$. Применив u раз утверждение D, получим оценку

$$\mathbb{P}\{z(m) \notin \Delta^\circ\} \le \alpha^u \mathbb{P}\{z(v) \notin \Delta^\circ\} \le \alpha^u = \alpha^{-v/M}\alpha^{m/M} < \alpha^{-1}(\alpha^{1/M})^m,$$

откуда при $c_3 = \alpha^{-1}$ и $c_4 = \alpha^{1/M}$ вытекает утверждение леммы.

8.6.7. Инвариантная мера. Лемма 8.6.6 утверждает, что состояние правильной системы «быстро» попадает на отрезок и остается в нем в последующем. Справедливо более тонкое свойство: распределение $z(m)$ с экспоненциальной скоростью стремится к инвариантной мере (стационарному распределению) на отрезке Δ. Опишем соответствующую меру. Нам понадобятся некоторые понятия.

Уравнение (8.6.3) порождает на множестве $\mathfrak{M}(\mathbb{R}P)$ всех вероятностных мер на $\mathbb{R}P$ (т.е. таких мер μ, что $\mu(\mathbb{R}P) = 1$) линейный оператор $\mathfrak{S}_0$. Этот оператор задается формулой $\mathfrak{S}_0(\mu) = \mu'$, где

$$\mu'(B) = p\mu(f_1^{-1}(B)) + q\mu(f_2^{-1}(B)) \tag{8.6.6}$$

для всех измеримых $B \subset \mathbb{R}P$. Если μ — распределение состояния $z(m)$, то $\mathfrak{S}_0(\mu)$ — распределение состояния $z(m+1)$.

Введем аналогичный $\mathfrak{S}_0$ оператор $\mathfrak{S}_1$ на множестве $\mathfrak{M}(\Delta)$ всех вероятностных мер на Δ. Он задается той же формулой (8.6.6), которая должна выполняться для всех измеримых $B \subset \Delta$.

Инвариантной мерой на $\mathbb{R}P$ (на Δ) называется мера μ, удовлетворяющая равенству $\mathfrak{S}_0(\mu) = \mu$ (соответственно $\mathfrak{S}_1(\mu) = \mu$). Как показывает лемма 8.6.8, любая инвариантная мера на $\mathbb{R}P$ по сути является инвариантной мерой на Δ.

8.6.8. Лемма. *Мера μ на $\mathbb{R}P$ инвариантна, если и только если она сосредоточена на Δ (т.е. $\mu(\Delta) = 1$) и ее сужение $\mu\big|_\Delta$ на отрезок Δ инвариантно на Δ (т.е. $\mathfrak{S}_1(\mu\big|_\Delta) = \mu\big|_\Delta$).*

Доказательство. Если $\mu(\Delta) = 1$ и $\mathfrak{S}_1(\mu\big|_\Delta) = \mu\big|_\Delta$, то из определений операторов $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ следует, что мера μ инвариантна на $\mathbb{R}P$.

Пусть теперь мера μ инвариантна на $\mathbb{R}P$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, c_3 и c_4 — константы из леммы 8.6.6, а m таково, что $c_3c_4^m < \varepsilon$. Рассмотрим начальную задачу для уравнения (8.6.3) с начальным распределением μ. Тогда случайная величина $z(m)$ имеет распределение $\mathfrak{S}_0^m(\mu) = \mu$. По лемме 8.6.6 выполнено неравенство $\mu(\mathbb{R}P \setminus \Delta) = \mathbb{P}\{z(m) \notin \Delta\} < c_3c_4^m < \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε следует, что $\mu(\mathbb{R}P \setminus \Delta) = 0$. Равенство $\mathfrak{S}_1(\mu\big|_\Delta) = \mu\big|_\Delta$ теперь вытекает из определений операторов $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$. Лемма доказана. □

В силу леммы 8.6.8 задача поиска инвариантной меры на $\mathbb{R}P$ сводится к поиску такой меры на Δ. *Носителем меры ν* называют наименьшее замкнутое множество supp ν, имеющее полную ν-меру.

8.6.9. Теорема. *Для правильной системы существует и единственна инвариантная на* Δ *мера* $\nu \in \mathfrak{M}(\Delta)$. *Эта мера притягивает с равномерной экспоненциальной скоростью, т.е. существуют такие константы* $c_5 > 0$ *и* $c_6 \in (0, 1)$, *при которых для любой меры* μ, *полуинтервала* $[a, b) \subset \Delta$ *и числа* m *выполнено неравенство* $|\mathfrak{S}_1^m(\mu)([a, b)) - \nu([a, b))| < c_5 c_6^m$. *Носитель* $\operatorname{supp} \nu$ *нигде не плотен в* Δ; *мера* ν *не имеет атомов, т.е.* ν*-мера каждого одноточечного множества равна нулю.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{F}(\Delta)$ множество всех неубывающих непрерывных слева функций $G : \Delta \mapsto [0, 1]$, для которых $G(r) = 0$, $G(s) \le 1$. Установим взаимно-однозначное соответствие между множествами $\mathfrak{M}(\Delta)$ и $\mathfrak{F}(\Delta)$, сопоставив каждой мере μ из $\mathfrak{M}(\Delta)$ ее функцию распределения $G(z) = \mu([r, z))$. Оператору $\mathfrak{S}_1$ на $\mathfrak{M}(\Delta)$ при описанном соответствии естественным образом сопоставляется оператор $\mathfrak{S}_2$ на $\mathfrak{F}(\Delta)$, задаваемый формулой

$$\mathfrak{S}_2 G(z) = \begin{cases} qG(f_2^{-1}(z)) & \text{при} \quad r \le z \le f_2(s), \\ q & \text{при} \quad f_2(s) < z \le f_1(r), \\ q + pG(f_1^{-1}) & \text{при} \quad f_1(r) < z < s. \end{cases} \qquad (8.6.7)$$

Задача поиска инвариантной меры эквивалентна задаче поиска неподвижной точки оператора $\mathfrak{S}_2$ на множестве $\mathfrak{F}(\Delta)$. При решении последней задачи воспользуемся идеями теории многозначных функций. Рассмотрим класс $\mathfrak{P}(\Delta)$ функций $\mathscr{G}$, сопоставляющих каждой точке $z \in \Delta$ отрезок $\mathscr{G}(z) \subset [0, 1)$ (который может состоять и из одной точки). Будем писать $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2$ ($\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2 \in \mathfrak{P}(\Delta)$), если при всех $z \in \Delta$ выполнено включение $\mathscr{G}_1(z) \subset \mathscr{G}_2(z)$ (в дальнейшем обозначения подобного типа используются без специальных оговорок). Если $\mathscr{G} \in \mathfrak{P}(\Delta)$, то через $\operatorname{Sel} \mathscr{G}$ обозначим множество всех $G \in \mathfrak{F}(\Delta)$, удовлетворяющих при каждом z соотношению $G(z) \in \mathscr{G}(z)$ (рис. 8.4).

Введем оператор $\mathfrak{S}_3$ на множестве $\mathfrak{P}(\Delta)$, задаваемый формулой, аналогичной (8.6.7):

$$\mathfrak{S}_3 G(z) = \begin{cases} q\mathscr{G}(f_2^{-1}(z)) & \text{при} \quad r \le z \le f_2(s), \\ q & \text{при} \quad f_2(s) < z \le f_1(r), \\ q + p\mathscr{G}(f_1^{-1}) & \text{при} \quad f_1(r) < z < s. \end{cases} \qquad (8.6.8)$$

Между операторами $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$ имеется простая связь

$$\operatorname{Sel} \mathfrak{S}_3 \mathscr{G} = \left\{ \mathfrak{S}_2 G \,\middle|\, G \in \operatorname{Sel} \mathscr{G} \right\}. \qquad (8.6.9)$$

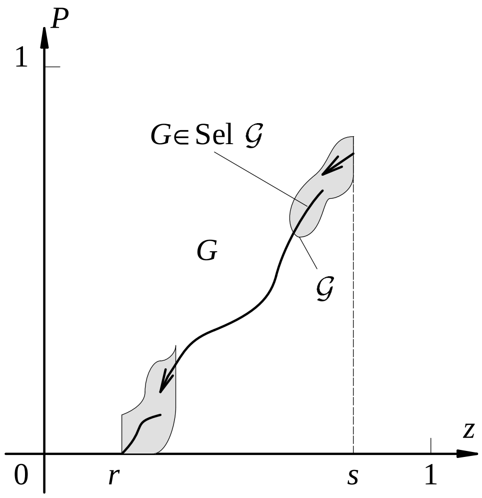

Рис. 8.4. Пример определения класса селекторов Sel $\mathscr{G}$

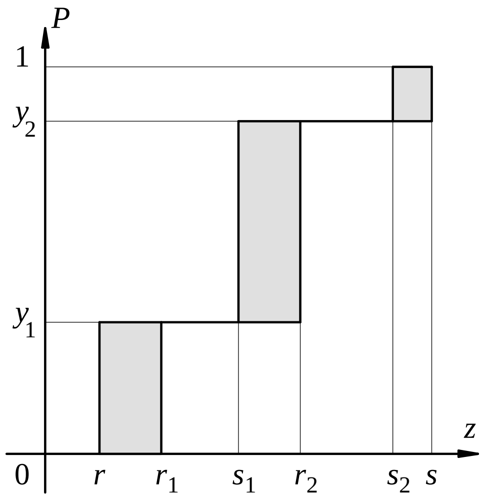

Рис. 8.5. Пример «лестницы»

Важное подмножество множества функций образуют функции специального вида — «лестницы».

8.6.10. «Лестницы». Пусть для функции $\mathscr{G} \in \mathfrak{P}(\Delta)$ существует такая конечная система попарно непересекающихся отрезков — (оснований ступенек) $[r_i, s_i] \subset \Delta$ и чисел (уровней ступенек) $y_i \in (0, 1)$, что выполнены следующие условия:

а) монотонность: если $s_i < r_j$, то $y_i < y_j$;

б) $\mathscr{G}(z) = y_i$ при всех $z \in [r_i, s_i]$;

в) если $z \notin \bigcup_i [r_i, s_i]$, то $\mathscr{G}(z) = [g, G]$, где

$$g = \max\{y_i | s_i < z\}, \qquad G = \min\{y_i | z < r_i\}.$$

(если одно из множеств $\{y_i | s_i < z\}$, $\{y_i | z < r_i\}$ пусто, то считаем, что $\max \emptyset = r$, $\min \emptyset = s$). Функция $\mathscr{G}$ называется *лестницей* со *ступеньками* $([r_i, s_i], y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. *Высотой* $h(\mathscr{G})$ лестницы $\mathscr{G}$ называется максимум длин отрезков $\mathscr{G}(z)$, $z \in \Delta$.

На рис. 8.5 приведен пример лестницы. Другим примером является тривиальная лестница $\mathscr{H}$, определяемая равенством $\mathscr{H}(z) = [0, 1]$ при всех $z \in \Delta$. Тривиальная лестница $\mathscr{H}$ может быть задана пустым множеством ступенек и поэтому действительно является лестницей. Множество всех лестниц обозначим через $\mathfrak{Q}(\Delta)$.

В дальнейшем потребуется следующее простое утверждение о пределах последовательностей лестниц.

8.6.11. Лемма (об измельчающихся лестницах). *Пусть* $\mathscr{G}_1 \supset \mathscr{G}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{G}_k \supset \ldots$ *— такая последовательность лестниц, что* $h(\mathscr{G}_k) \to 0$*. Тогда* $G = \bigcap_k \mathscr{G}_k$ *— однозначная неубывающая непрерывная функция, причем* $G(r) = 0$, $G(s) = 1$.

Продолжение доказательства теоремы 8.6.9. Применение понятия лестницы к задаче об инвариантной мере основывается на инвариантности множества $\mathfrak{Q}(\Delta)$ всех лестниц относительно оператора $\mathfrak{S}_3$. Имеет место равенство

$$\mathrm{Sel}\ \mathscr{H} = \mathfrak{F}(\Delta), \tag{8.6.10}$$

где $\mathscr{H}$ — тривиальная лестница. Применив m раз соотношение (8.6.9), из (8.6.10) получим

$$\mathrm{Sel}\ \mathfrak{S}_3^m \mathscr{H} = \mathfrak{S}_2^m \mathfrak{F}(\Delta) \tag{8.6.11}$$

(графики функций $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$ изображены на рис. 8.6). Таким образом, при любом начальном распределении (т.е. распределении случайной величины $z(0)$), сосредоточенном на Δ, функция распределения случайной величины $z(m)$ лежит в Sel $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$.

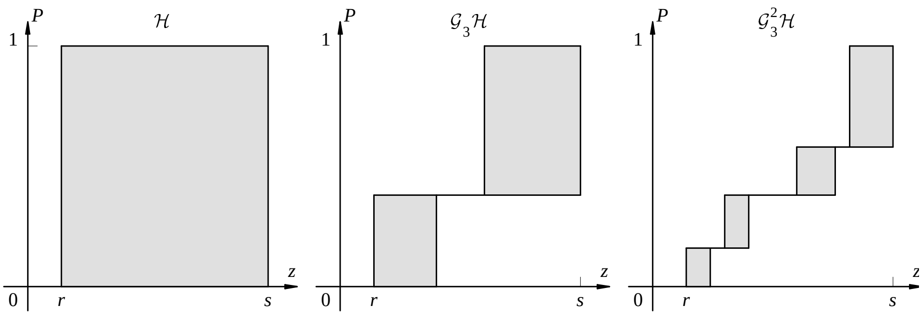

Рис. 8.6. Пример последовательного построения лестниц $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$

Предположим, что оператор $\mathfrak{S}_2$ обладает неподвижной точкой $G_0 \in \mathfrak{F}(\Delta)$. Тогда при всех m выполнены соотношения $G_0 = \mathfrak{S}_2^m G_0 \in \mathfrak{S}_2^m \mathfrak{F}(\Delta) =$ Sel $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$. Следовательно, имеет место включение

$$G_0 \in \mathrm{Sel}\ \mathscr{G}_0 \tag{8.6.12}$$

где $\mathscr{G}_0 = \bigcap_m \mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$.

Заметим, что последовательность лестниц $\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$ удовлетворяет условиям леммы об измельчающихся лестницах. Действительно, применяя к обеим частям очевидного включения $\mathscr{H} \supset \mathfrak{S}_3\mathscr{H}$ оператор $\mathfrak{S}_3^{m-1}$, получаем $\mathfrak{S}_3^{m-1}\mathscr{H} \supset \mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$. Значит, последовательность $\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$ монотонна. Кроме того, $h(\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}) = (\max(p,q))^m \to 0$ при $m \to \infty$. В силу леммы об измельчающихся лестницах функция $\mathscr{G}_0$ однозначна, непрерывна и обращается в точке r в ноль, а в точке s в единицу. Отсюда и из (8.6.12) вытекает единственность и непрерывность G_0.

Итак, если инвариантная функция распределения существует, то она совпадает с (однозначной) функцией $\mathscr{G}_0$. Осталось заметить, что функция $\mathscr{G}_0$ действительно является неподвижной точкой оператора $\mathfrak{S}_2$, что следует из равенств

$$\mathfrak{S}_2\left(\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}\right) = \mathfrak{S}_3\left(\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H} = \mathscr{H}\bigcap\left(\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}\right) = \bigcap_{m=0}^{\infty}\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}.$$

Существование инвариантной меры установлено. Будем обозначать эту меру через ν, а соответствующую функцию распределения — через G_0.

Перейдем к доказательству того факта, что мера ν притягивает с экспоненциальной скоростью. Пусть $\mu \notin \mathfrak{M}(\mathbb{R}P)$. Тогда для соответствующей функции распределения верно включение $G \in \mathfrak{F}(\Delta)$. В силу (8.6.11) выполнены соотношения $\mathfrak{S}_2^m G \in \mathfrak{S}_2^m\mathfrak{F}(\Delta) = \mathrm{Sel}\ \mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$. С другой стороны, в силу (8.6.12) имеет место включение $G_0 \in \bigcap_m \mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$. Отсюда следует оценка

$$\sup_{z\in\Delta}\left|\mathfrak{S}_2^m G(z) - G_0(z)\right| \le h\left(\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}\right) = (\max(p,q))^m. \tag{8.6.13}$$

Сходимость с экспоненциальной скоростью при начальном распределении, сосредоточенном на Δ, доказана.

Пусть теперь $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}P)$. Лемма 8.6.6 гарантирует, что состояние системы «быстро» попадает на отрезок Δ. По только что доказанному любое распределение на Δ под действием оператора $\mathfrak{S}_1^m$ «быстро» стремится к инвариантной мере ν. Выведем отсюда утверждение теоремы об экспоненциальной сходимости $\mathfrak{S}_0^m\mu$ к ν. Зададимся произвольными $a, b \in \Delta$. Имеет место цепочка равенств (через $\mathbb{P}_\mu\{B\}$ обозначается вероятность события B

при распределении случайной величины $z(0)$ равном μ)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_0^m \mu[a,b) = \mathbb{P}_\mu \{z(m) \in [a,b)\} = \\
&= \mathbb{P}_\mu \left\{ z(m) \in [a,b) \middle| z([m/2]) \in \Delta \right\} \mathbb{P}_\mu \{z([m/2]) \in \Delta\} + \\
&+ \mathbb{P}_\mu \left\{ z(m) \notin [a,b) \middle| z([m/2]) \in \Delta \right\} \mathbb{P}_\mu \{z([m/2]) \notin \Delta\} = \\
&= \left(\mathfrak{S}_2^{m-[m/2]} \mu'[a,b) \right) \mathbb{P}_\mu \{z([m/2]) \in \Delta\} + \\
&+ \mathbb{P}_\mu \left\{ z(m) \in [a,b) \middle| z([m/2]) \notin \Delta \right\} \mathbb{P}_\mu \{z([m/2]) \notin \Delta\}, \quad (8.6.14)
\end{aligned}$$

где μ' — условное распределение $z([m/2])$ на Δ при распределении μ случайной величины $z(0)$ и условии $z([m/2]) \in \Delta$. Оценим величины, входящие в правую часть (8.6.14). Как следует из неравенства (8.6.13)

$$|\mathfrak{S}_2^{m-[m/2]} \mu'[a,b) - \nu[a,b)| < 2(\max(p,q))^{m/2}. \quad (8.6.15)$$

По лемме 8.6.6

$$0 \le \mathbb{P}_\mu \{z([m/2]) \notin \Delta\} \le c_3 c_4^{[m/2]};$$

$$1 - c_3 c_4^{[m/2]} \le \mathbb{P}_\mu \{z([m/2]) \in \Delta\} \le 1.$$

Кроме того,

$$0 \le \mathbb{P}_\mu \left\{ z(m) \in [a,b) \middle| z([m/2]) \notin \Delta \right\} \le 1. \quad (8.6.16)$$

Подставив неравенства (8.6.15)–(8.6.16) в формулу (8.6.14), получим требуемую оценку скорости сходимости.

Выше показано, что $G_0 = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$. Отсюда и из того факта, что у лестницы $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$ расстояние между соседними основаниями ступенек не превышает c_2^m, где c_2 — верхняя грань производных функций f_1 и f_2, следует безатомность меры ν. Теорема доказана. □

8.6.12. Замечания. Доказательство теоремы 8.6.9 конструктивно и, по существу, содержит алгоритм вычисления инвариантной функции распределения G_0. Чтобы вычислить эту функцию с точностью до ε, достаточно построить лестницу $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$ с высотой меньше ε. Для этого нужно взять целое число $m \ge \ln \varepsilon / \ln \max(p,q)$ и m раз применить формулу (8.6.8). График G_0 будет лежать внутри графика $\mathfrak{S}_3^m \mathscr{H}$. На рис. 8.7 изображен график инвариантной функции распределения G_0 для уравнения вида (8.6.1), построенный описанным способом.

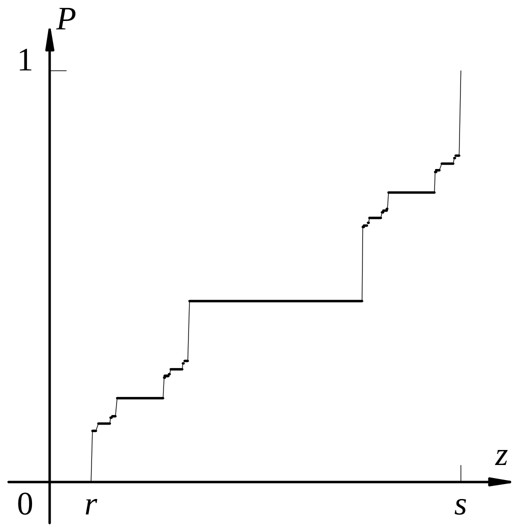

Рис. 8.7. Пример графика инвариантной функции распределения G_0 для уравнения (8.6.1)

Мера ν обладает интересными свойствами: она автомодельна или самоподобна (т.е. может быть получена из своего сужения на сколь угодно малый отрезок с помощью замены координат), ее носитель supp ν — фрактальное множество (т.е. имеет дробную размерность в смысле Хаусдорфа). Точных определений и формулировок приводить не будем, поскольку это увело бы нас в сторону от основной тематики книги.

Вернемся к оценкам показателя Ляпунова и проблеме устойчивости.

8.6.13. Теорема. *Для правильного уравнения* (8.6.1) *с инвариантной мерой* ν *показатель Ляпунова выражается формулой*

$$\eta = \int_0^1 \Big(p \ln\left((a_{11} - a_{12} - 1)z + a_{12} + 1\right) + q \ln\left((a_{21} - a_{22} + 1)z + a_{22}\right)\Big) d\nu(z).$$

Доказательство. Опишем вспомогательную конструкцию. Пусть

$$x(m) = \{x_1(m), x_2(m)\}$$

— вектор из уравнения (8.6.1), $z(m) = x_1(m)/(x_1(m)+x_2(m))$. Положим $y(m) = x_1(m) + x_2(m)$. Тогда $x(m) = y(m)\{z(m), 1 - z(m)\}$.

Вектор $y(m)$ изменяется по следующему правилу:

$$y(m) = g_{i(m)}\,(z(m-1))\,y(m-1),$$

где

$$g_1(z) = (a_{11} - a_{12} - 1)z + a_{12} + 1,$$
$$g_2(z) = (a_{21} - a_{22} + 1)z + a_{22},$$

а последовательность $\{i(m)\}$ случайных величин, принимающих значения 1 (с вероятностью p) и 2 (с вероятностью q), та же, что и в уравнении (8.6.1).

Из (8.6.10) следует, что

$$y(m) = y(0) \prod_{k=1}^{\infty} g_{i(k)}(z(k)). \tag{8.6.17}$$

На этом вспомогательная конструкция завершена.

Пусть $F(m) = (b_{ij}(m))$ — матрица перехода уравнения (8.6.1), а $x(m)$ — решение начальной задачи $x(0) = \{1, 1\}$. Тогда выполнены равенства

$$\begin{aligned} x(m) &= F(m)x(0) = \{b_{11}(m) + b_{12}(m),\ b_{21}(m) + b_{22}(m)\}, \\ y(m) &= b_{11}(m) + b_{12}(m) + b_{21}(m) + b_{22}(m). \end{aligned} \tag{8.6.18}$$

Поскольку $F(m) > 0$, то из (8.6.18) следуют неравенства

$$2^{-1/2} < \frac{y(m)}{\|F(m)\|} < 4.$$

Следовательно, $\lim_{m\to\infty} \ln y(m) = \eta$ с вероятностью 1. Преобразуем левую часть последнего равенства по формуле (8.6.17):

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \ln g_{i(k)}(z(k)) = \eta. \tag{8.6.19}$$

Так как $0 \le z(k) \le 1$ при $k = 1, 2, \ldots$, а функции g_1 и g_2 ограничены, положительны и отделены от нуля на отрезке $[0, 1]$, то выражения под знаком предела равномерно ограничены. По теореме Лебега из (8.6.19) следует равенство

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{M}\left(\sum_{k=1}^{m} \ln g_{i(k)}(z(k))\right) = \eta.$$

Пусть $\mu_m(z)$ — распределение $z(m)$ на отрезке $[0, 1]$, ν — инвариантная мера. Тогда

$$\eta = \lim_{m\to\infty} \mathbb{M}\left(\sum_{k=1}^{m} \ln g_{i(k)}(z(k))\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{M}\left(\ln g_{i(k)}(z(k))\right).$$

Следовательно,

$$\eta = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \Big(p\mathbb{M}\ln g_1\,(z(k)) + q\mathbb{M}\ln g_2\,(z(k))\Big). \qquad (8.6.20)$$

Так как $\ln g_i(z(m))$ — непрерывная ограниченная функция, а меры μ_n слабо сходятся к ν, то

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{M}\ln g_i\,(z(k)) = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \ln g_i\,(z(k))\;d\mu_m(z) = \int_0^1 \ln g_i(z)\,d\nu(z).$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \Big(p\mathbb{M}\ln g_1\,(z(m)) + q\mathbb{M}\ln g_2\,(z(m))\Big) = \int_0^1 \Big(p\mathbb{M}\ln g_1(z) + q\mathbb{M}\ln g_2(z)\Big)\,d\nu(z).$$

Из последнего равенства и формулы (8.6.20) следует утверждение теоремы.

8.6.14. Лемма. *Пусть $\mathscr{G} \in \mathfrak{L}(\Delta)$ — лестница на отрезке Δ со ступеньками $([r_i, s_i], y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, занумерованными в порядке возрастания r_i. Тогда для любой измеримой функции $G(z) \in \mathscr{G}(z)$ и любой непрерывной функции и любой непрерывной функции $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1}^{k+1} \Big(\min_{z\in[s_{i-1},r_i]} f(z)\Big)(y_i - y_{i-1}) \le \int_\Delta f(z)\,dG(z) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{k+1} \Big(\max_{z\in[s_{i-1},r_i]} f(z)\Big)(y_i - y_{i-1}), \qquad (8.6.21)$$

где $s_0 = r$, $r_{k+1} = s$, $y_0 = 0$, $y_{k+1} = 1$.

Доказательство. Разобьем интеграл

$$\int_\Delta f(z)\,dG(z)$$

в сумму интегралов по отрезкам $[s_0, r_1]$, $[r_1, s_1]$, $[s_1, r_2]$ и т.д. Интегралы по отрезкам $[r_i, s_i]$ равны нулю в силу постоянства функции G на этих отрезках. Для интегралов по $[s_{i-1}, r_i]$ верны оценки

$$\min_{z\in[s_{i-1},r_i]} f(z)\;\; (G(r_i) - G(s_{i-1})) \le \int_{s_{i-1}}^{r_i} f(z)\,dG(z) \le \max_{z\in[s_{i-1},r_i]} f(z)\;\; (G(r_i) - G(s_{i-1}))\,. \qquad (8.6.22)$$

Складывая почленно неравенства (8.6.22) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$, получим требуемое неравенство (8.6.21). Лемма доказана. □

Следующее утверждение содержит явный алгоритм вычисления показателя Ляпунова правильного уравнения (8.6.1) с любой наперед заданной точностью.

8.6.15. Теорема. *Пусть выполнены соотношения*

$$g(z) = p\ln\Big((a_{11} - a_{12} - 1)z + a_{12} + 1\Big) + q\ln\Big((a_{21} - a_{22} + 1)z + a_{22}\Big),$$

$$m > \frac{\ln(\varepsilon/v)}{\ln c_2}, \qquad \varepsilon > 0,$$

где

$$v = \max_{z\in\Delta} |g'(z)|, \qquad c_2 = \max_{z\in\Delta;\, i=1,2} |f_1'(z)|.$$

Пусть $([r_i, s_i], y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ *— ступеньки лестницы* $\mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$*, занумерованные в порядке возрастания* r_i*. Тогда справедлива двусторонняя оценка*

$$\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\min_{z\in[s_{i-1}, r_i]} g(z)\Big)(y_i - y_{i-1}) \le \eta \le \sum_{i=1}^{k+1}\Big(\max_{z\in[s_{i-1}, r_i]} g(z)\Big)(y_i - y_{i-1}). \tag{8.6.23}$$

Точность оценки (8.6.23) *не хуже* ε*.*

Доказательство. По теореме 8.6.13 показатель Ляпунова выражается формулой

$$\eta = \int_\Delta g(z)\, dG_0(z), \tag{8.6.24}$$

где G_0 — инвариантная функция распределения. По теореме 8.6.15 из равенства (8.6.24) и включения $G_0 \in \mathfrak{S}_3^m\mathscr{H}$ следует оценка (8.6.23). Оценим точность

$$\beta = \sum_{i=1}^{k+1}\Big(\max_{z\in[s_{i-1}, r_i]} g(z) - \min_{z\in[s_{i-1}, r_i]} g(z)\Big)(y_i - y_{i-1})$$

этой оценки. Она удовлетворяет соотношениям

$$\beta = \sum_{i=1}^{k+1} \max_{z\in\Delta} |g'(z)|\ (r_i - s_{i-1})\ (y_i - y_{i-1}) \le$$

$$\le v \max_i (r_i - s_{i-1}) \sum_{i=1}^{k+1} (y_i - y_{i-1}) \le v c_2^m < \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Теорема 8.6.15 дает возможность вычислить показатель Ляпунова (и проверить L-устойчивость) правильной системы.

8.6.16. Многомерные системы. Укажем один из результатов, относящихся к многомерным системам. Рассмотрим уравнение (8.1.5) произвольной размерности со скалярными компонентами.

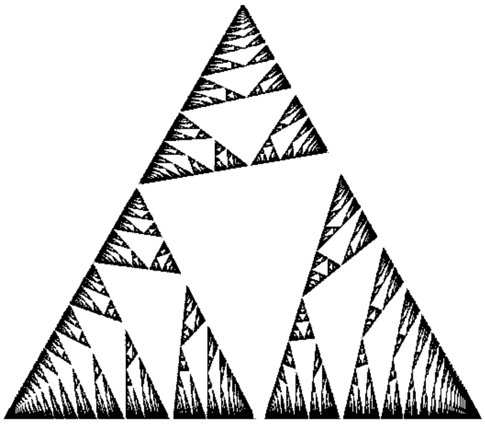

Рис. 8.8. Пример носителя инвариантной меры направлений векторов для двумерной положительной матрицы

Пусть элементы a_{ij} матрицы A удовлетворяют условиям $a_{ij} > 0$ при всех i, j таких, что $a_{ii} \neq 1$; $a_{ij}a_{ji} > 1$ при $i \neq j$.

Обозначим через $z(m)$ центральную проекцию с центром в начале координат вектора состояния системы $x(m)$ на плоскость $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$. Тогда для $z(m)$ существует единственная и притягивающая инвариантная мера на пересечении плоскости $\sum x_i = 1$ с первым ортантом. Эта мера не имеет атомов и сосредоточена на нигде не плотном множестве (на рис. 8.8 изображен носитель такой меры для системы размерности 3). Как и в двумерном случае, эту меру можно вычислять с любой точностью, а показатель Ляпунова уравнения (8.1.5) является интегралом по этой мере от некоторой явной (задаваемой формулой) функции.

Замечания и библиографические справки

Исследование асинхронных систем со случайными моментами коррекции компонент проводилось в работах [Берген, 1961; Мадорский, 1978;

Mariton, 1987].

Рассмотренные в главе вопросы тесно связаны с теорией произведений случайных матриц, которой посвящена обширная литература ([Гольдшейд, Маргулис, 1989; Оселедец, 1968; Furstenberg, Kesten, 1960; Kesten, Spitzer, 1984]). В частности, теорема Фюрстенберга-Кестена доказана в [Furstenberg, Kesten, 1960].

Перечисляя в 8.2.3 различные варианты понятия устойчивости стохастической системы, мы в основном следовали книге [Хасьминский, 1969]; в этой книге также обсуждается вопрос о взаимосвязи между этими вариантами.

Со свойствами кронекеровского произведения можно подробнее познакомиться, например, по монографии [Гантмахер, 1967].

Материал § 8.6 идейно (но не формально) связан с исследованиями итераций детерминированных отображений. Обзор таких исследований и подробную библиографию можно найти в [Динамические системы, 1985]. С другой стороны, можно рассматривать материал этого параграфа как исследование инвариантных мер в цепях Маркова специального вида. Существует обширная литература по инвариантным мерам в цепях Маркова, но, как правило, она относится к цепям, удовлетворяющим условиям типа Деблина или Харриса (см. [Дуб, 1956; Nummelin, 1984]). Изучаемые в § 8.6 цепи таким условиям не удовлетворяют.

Как было упомянуто в пункте 8.6.10, со стохастическими рассинхронизованными системами связаны фрактальные множества (т.е. множества дробной размерности). Таким множествам в последнее время, особенно после выхода знаменитой книги [Mandelbrot, 1983] посвящено много научно-популярных, физических и математических работ. Со строгим определением понятия хаусдорфовой размерности и с ее свойствами можно познакомиться, например, по [Гуревич, Воллмэн, 1948].

Изложение § 8.3, § 8.4 в основном следует работе [Асарин, Красносельский, Кузнецов, 1989].

Оглавление

Литература

Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. (1963). *Абсолютная устойчивость регулируемых систем*. М., 140 с. 147

Ангер С.Г. (1977). *Асинхронные последовательностные системы*. М.: Наука, 400 с. 52

Андрусевич В.А. (1987). Рассинхронизация в сложных системах и индикаторное поведение// *Автоматика и телемеханика*. № 3. С. 3–10. 148

Арнольд В.И. (1970a). О локальных задачах анализа// *Вестн. МГУ*. № 2. С. 52–56. 179

Арнольд В.И. (1970b). Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений// *Успехи мат. наук*. Т. 25, № 2. С. 265–266. 179

Арнольд В.И. (1978). *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 304 с. 108, 329

Артемьев В.М., Ивановский А.В. (1986). *Дискретные системы управления со случайным периодом квантования*. М.: Энергоатомиздат, 96 с. 52

Асарин Е.А., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. (1989). *О динамике рассинхронизованных систем со случайными моментами коррекции компонент*// Автоматика и телемеханика. № 6. С. 6–12. 372

Барбашин Е.А. (1967). *Введение в теорию устойчивости*. М.: Наука, 224 с. 147

Бахвалов Н.С. (1973). *Численные методы. Т. 1*. М.: Наука, 632 с. 53, 108

Белецкий В.Н. (1981). Исследование асинхронных итерационных процессов решения алгебраических уравнений в многопроцессорных структурах// *Проблемы нелинейной электротехники*. Киев: Наук. думка, С. 83–85. 52, 148

Белецкий В.Н. (1982). Об одном методе построения вычислителей для отыскания корней алгебраических уравнений// *Гибридные вычислительные машины и комплексы*. Киев: Наук. думка, Вып. 5. С. 71–76. 52, 148

Белецкий В.Н. (1983). О необходимых и достаточных условиях сходимости асинхронных итерационных вычислительных процессов при решении СЛАУ// *Электрон. моделирование*. № 5. С. 8–15. 52, 148

Белецкий В.Н. (1985). К исследованию асинхронных итерационных методов решения СНАУ// *Гибридные вычислительные машины и комплексы*. Киев: Наук. думка, Вып. 8. С. 24–32. 52

Белецкий В.Н. (1988). *Многопроцессорные и параллельные структуры с организацией асинхронных вычислений*. Киев: Наук. думка, 240 с. 7, 51, 52, 148, 223

Белецкий В.Н., Стасюк А.И., Мазурчук В.С. (1983). Об одном методе организации матричных вычислительных структур// *Электрон. моделирование*. № 2. С. 14–18. 51, 52

Белецкий В.Н., Чемерис А.А. (1985). Организация матричных структур повышенной производительности// *Вычислительная техника и моделирование в народном хозяйстве*. Киев: Наук. думка, С. 43–47 51, 52

Берген А.Р. (1961). О статистическом расчете линейных импульсных систем со случайными интервалами повторения импульсов// *Тр. 1-го Конгресса ИФАК*. М.: Изд-во АН СССР, Т. 2. С. 299–312. 371

Биркгоф Дж. (1941). *Динамические системы*. М.: Гостехиздат, 330 с. 51, 108

Боуэн Р. (1979). *Методы символической динамики/ Под ред. В.М. Алексеева*. М.: Мир, 246 с. 108

Брекер Т., Ландер Л. (1977). *Дифференцируемые ростки и катастрофы*. М.: Мир, 208 с. 179

Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. (1966). *Теория показателей Ляпунова*. М.: Наука, 576 с. 107

Варшавский В.И., Кишиневский М.А., Мараховский В.Б. и др. (1986). *Автоматное управление асинхронными процессами в ЭВМ и дискретных системах*. М.: Наука, 398 с. 52

Васин А.А. (1987). Модели динамики коллективного поведения в экосистемах// *Вестн. МГУ. Вычисл. математика и кибернетика*. № 3. С. 57–62. 52

Воронов А.А. (1981). *Основы теории автоматического управления: Особые линейные и нелинейные системы. 2-е изд. перераб*. М.: Энергоиздат, 304 с. 51, 107, 147

Гантмахер Ф.Р. (1967). *Теория матриц. 3-е изд*. М.:Наука, 576 с. 51, 108, 179, 223, 372

Гелиг А.Х. (1982). *Динамика импульсных систем и нейронных сетей*. Л.: Изд-во ЛГУ, 192 с. 52

Гельфонд А.О. (1967). *Исчисление конечных разностей. 3-е изд. испр*. М.: Наука, 376 с. 51

Глазман И.М., Любич Ю.И. (1969). *Конечномерный линейный анализ*. М.: Наука, 475 с. 179

Гольдшейд И.Я., Маргулис Г.А. (1989). Показатели Ляпунова произведений случайных матриц// *Успехи мат. наук*. Т.44, № 5. С. 13–60. 372

Гончаренко Ю.В., Нестеренко Б.Б. (1981). *Асинхронные принципы в параллельных вычислениях*. Киев, Ч. 1. 48 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 81.56. 52

Гончаренко Ю.В., Нестеренко Б.Б. (1982). *Асинхронные принципы в параллельных вычислениях.* Киев, Ч. 2. 64 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 82.38. 52

Гуревич В., Воллмэн Г. (1948). *Теория размерности*. М.: Изд-во иностр. лит. 372

Давиташвили Т.Д. (1988). О некоторых асинхронных итерационных методах решения нелинейных уравнений для параллельных вычислительных систем// *Тр. Ин-та прикл. математики*. Тбилиси, Изд-во Тбил. ун-та. Т. 25. С. 132–146. 52

Демидович Б.П. (1967). *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 472 с. 107, 179

Джури Э. (1963). *Импульсные системы автоматического регулирования*. М.: Физматгиз, 456 с. 51

Динамические системы: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (1985). М.: Наука, Т. 2. 312 с. 372

Дуб Дж.Л. (1956). *Вероятностные процессы*. М.: Изд-во иностр. лит. 372

Иосида К. (1967). *Функциональный анализ*. М.: Мир, 624 с. 179

Клепцын А.Ф. (1983). Исследование устойчивости рассинхронизованных двухкомпонентных систем// *IX Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов*. М.: Наука, С. 27–28. 108, 329

Клепцын А.Ф. (1984). Об эргодических свойствах общих рассинхронизованных систем// *Динамика неоднородных систем. Материалы семинара ВНИИСИ*. М., С. 148–153. 329

Клепцын А.Ф. (1985a). *Об устойчивости рассинхронизованных сложных систем специального вида*. Ин-т проблем управления АН СССР. М., 46 с. Деп. в ВИНИТИ 20.11.85, № 7997–85В. 108, 329

Клепцын А.Ф. (1985b). *Исследование устойчивости двухкомпонентной рассинхронизованной по частоте системы с неточно заданной частотой*. Ин-т проблем управления АН СССР. М., 6 с. Деп. в ВИНИТИ 20.11.85, № 7998–85В. 108, 329

Клепцын А.Ф. (1985c). Об устойчивости рассинхронизованных сложных систем специального вида// *Автоматика и телемеханика*. № 4. С. 169–172. 108, 329

Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. (1983). О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. I// *Автоматика и телемеханика*. № 7. С. 44–51. 51, 54, 108, 148, 223, 329

Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. (1984a). О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. II// *Автоматика и телемеханика*. № 3. С. 42–47. 51, 54, 108, 148, 223, 329

Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. (1984b). О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. III// *Автоматика и телемеханика*. № 8. С. 63–67. 51, 54, 108, 148, 223, 329

Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. (1984c). Устойчивость рассинхронизованных систем// *ДАН СССР*. Т. 274, № 5. С. 1053–1056. 51, 54, 108, 148, 329

Козякин В.С. (1990a). Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем// *Автоматика и телемеханика*. № 6. С. 41–47. 148, 224

Козякин В.С. (1990b). Об устойчивости фазочастотно рассинхронизованных систем при возмущении моментов переключения компонент// *Автоматика и телемеханика*. № 8. С. 35–42. 108, 329

Козякин В.С. (1990c). Об анализе устойчивости рассинхронизованных систем методами символической динамики// *ДАН СССР*. Т. 311, № 3. С. 549–552. 108, 329

Козякин В.С. (1990d). Об абсолютной устойчивости систем с несинхронно работающими импульсными элементами// *Автоматика и телемеханика*. № 10. С. 56–63. 148, 179, 223

Козякин В.С. (1990e). Абсолютная устойчивость рассинхронизованных систем// *ДАН СССР*. Т. 312, № 5. С. 1066–1070. 148, 179, 223, 224

Козякин В.С. (1991a). Об устойчивости линейных рассинхронизованных систем с несимметричными матрицами// *Автоматика и телемеханика*. № 3. С. 45–53. 284

Козякин В.С. (1991b). О возмущении линейных рассинхронизованных систем// *ДАН СССР*. Т. 316. С. 54–57. 284

Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. (1980). *Эргодическая теория*. М.: Наука, 384 с. 108, 329

Краковяк С. (1988). *Основы организации и функционирования ОС ЭВМ*. М.: Мир, 479 с. 52

Красносельский А.М. (1985). Об устойчивости рассинхронизованных многокомпонентных систем// *Автоматика и телемеханика*. № 11. С. 170–172. 54, 108, 148, 180

Красносельский М.А. (1960). *Оператор сдвига по траекториям операторных уравнений*. М.: Физматгиз, 332 с. 54, 107

Красносельский М.А. (1962). *Положительные решения операторных уравнений*. М.: Физматгиз, 394 с. 223

Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. (1969). *Приближенное решение операторных уравнений*. М.: Наука, 456 с. 53, 108, 179

Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. (1985). *Позитивные линейные системы*. М.: Наука, 256 с. 223

Красносельский М.А., Покровский А.В. (1977). Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости// *ДАН СССР*. Т. 233, № 3. С. 293–296. 148

Красносельский М.А., Покровский А.В. (1978). Об абсолютной устойчивости систем с дискретным временем и сходимости некоторых итерационных процедур// *Автоматика и телемеханика*. № 2. С. 42–52. 148

Красносельский М.А., Покровский А.В. (1981). Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости// *Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением*. М.: Наука, С. 156–169. 148

Красовский Н.Н. (1959). *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. М.: Физматгиз, 211 с. 179

Любич Ю.И. (1967). О скорости сходимости координатной релаксации для квадратичного функционала// *ДАН СССР*. Т. 173, № 1. С. 37–39. 53, 284

Любич Ю.И., Майстровский Г.Д. (1970а). Об устойчивости релаксационных процессов// *ДАН СССР*. Т. 191, № 1. С. 22–24. 53, 284

Любич Ю.И., Майстровский Г.Д. (1970b). Общая теория релаксационных процессов// *Успехи мат. наук*. Т. 25, № 1. С. 57–112. 53, 284

Мадорский Л.С. (1978). Устойчивость импульсных систем со случайным периодом// *Изв. вузов. Приборостроение*. № 1. С. 25–27. 371

Майстровский Г.Д. (1967). Локальная теория релаксации для нелинейных уравнений// *ДАН СССР*. Т. 177, № 1. С. 37–39. 53, 284

Мальгранж Б. (1968). *Идеалы дифференцируемых функций*. М.: Мир, 131 с. 179

Маркус М., Минк Х. (1972). *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*. М.: Наука, 232 с. 108, 179, 223

Мартынюк Д.И. (1972). *Лекции по качественной теории разностных уравнений*. Киев: Наук. думка, 248 с. 51, 107

Марчук В.А., Нестеренко Б.Б. (1983). *Локально-асинхронные методы решения нелинейных краевых задач математической физики*. Киев, 66 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 83.56. 53

Марчук В.А., Нестеренко Б.Б. (1984a). *К вопросу о развитии теории асинхронных итерационных методов решения задач математической физики*. Киев, 40 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 84.4. 53, 148

Марчук В.А., Нестеренко Б.Б. (1984b). *Асинхронные итерационные методы решения нелинейных операторных уравнений с монотонными операторами*. Киев, 46 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 84.5. 53, 148

Марчук В.А., Нестеренко Б.Б. (1986a). *Введение в асинхронные многосеточные методы*. Киев, 48 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 86.30. 53, 148

Марчук В.А., Нестеренко Б.Б. (1986b). *Асинхронные многосеточные методы параллельных вычислений*. Киев, 44 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 86.46. 53, 148

Марчук Г.И., Котов В.Е. (1978a). *Модульная асинхронная развиваемая система. Ч. 1*. Новосибирск, 48 с. Препр. ВЦ. СО АН СССР № 86. 52

Марчук Г.И., Котов В.Е. (1978b). *Модульная асинхронная развиваемая система. Ч. 2*. Новосибирск, 52 с. Препр. ВЦ. СО АН СССР № 87. 52

Мельников Л.И., Шевченко А.Н. (1983). *Методы исследования нелинейных систем управления*. М.: Наука, 224 с. 51

Милнор Дж. (1971). *Особые точки комплексных гиперповерхностей*. М.: Мир, 127 с. 179

Миренков Н.Н. (1968). К решению систем линейных уравнений на ВС// *Вычислит. системы*. Новосибирск, Вып. 30. С. 8–11. 52

Молчанов А.П. (1983). Условия равномерной абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных импульсных систем// *Автоматика и телемеханика*. № 3. С. 40–49. 148

Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. (1986). Функции Ляпунова и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления// *Автоматика и телемеханика*. № 3. С. 63–73. 148

Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. (1987). Критерии устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений// *ДАН СССР*. Т. 297, № 1. С. 37–40. 148

Неймарк Ю.И. (1972). *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 472 с. 51

Неймарк Ю.И. (1978). *Динамические системы и управляемые процессы*. М.: Наука, 336 с. 51

Нестеренко Б.Б., Марчук В.А. (1989). *Основы асинхронных методов параллельных вычислений*. Киев: Наук. думка, 176 с. 7, 52, 223

Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А. (1982). *Принципы организации асинхронных мультипроцессорных систем MIMD-структуры*. Киев, 62 с. Препр. Ин-та математики АН УССР № 82.17. 52

Нитецки З. (1975). *Введение в дифференциальную динамику*. М.: Мир, 304 с. 108, 329

Опойцев В.И. (1976). Обращение принципа сжимающих отображений// *Успехи мат. наук*. Т. 31, № 4. С. 169–198. 179

Опойцев В.И. (1977). *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*. М.: Наука, 248 с. 52

Ортега Дж., Рейнболдт В. (1975). *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. М.: Мир, 558 с. 53, 284

Оселедец В.И. (1968). Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем// *Тр. Моск. мат. о-ва*. Т. 19. С. 179–210. 372

Попов В.М. (1970). *Гиперустойчивость автоматических систем*. М.: Наука, 453 с. 147

Прангишвили И.В. (1981). Архитектурные концепции высокопроизводительных параллельных вычислительных систем 80-х годов// *Вопр. кибернетики*, № 79. С. 3–14. 51

Робертсон А., Робертсон В. (1967). *Топологические векторные пространства*. М.: Мир, 257 с.

Розенблюм Л.Я. (1985). Переход от асинхронных систем к апериодическим как путь борьбы с последствиями нестабильности элементов// *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. № 1. С. 4–9. 51

Рудин У. (1966). Основы математического анализа. М.: Мир, 312 с. 108

Семенов С.Ф., Чемерис А.А. (1988). Организация асинхронных процессов при решении одномерных уравнений// *Электрон. моделирование*. Т. 10. № 2. С. 96–98. 52

Трев Ж. (1965). *Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами*. М.: Мир, 296 с. 179

Фаддеева В.Н., Фаддеев Д.К. (1977). Параллельные вычисления в линейной алгебре// *Кибернетика*. № 6. С. 28–40. 51, 52

Фаддеева В.Н., Фаддеев Д.К. (1981). *Параллельные вычисления в линейной алгебре. Ч. 2*. Л., 48 с. Препр. Ленингр. отд-я Мат. ин-та АН СССР № Р-6–81. 51, 52

Фань Чун-Вуй. (1958). О следящих системах, содержащих два импульсных элемента с неравными периодами повторения// *Автоматика и телемеханика*. Т. 19, № 10. С. 917–930. 51

Филиппов А.Ф. (1967). Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью// *Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика*. № 3. С. 16–26. 148

Филиппов А.Ф. (1985). *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука, 278 с. 148

Хартман Ф. (1970). *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 720 с. 107

Халанай А., Векслер Д. (1971). *Качественная теория импульсных систем*. М.: Мир, 306 с. 51, 107, 147, 284

Хасьминский Р.З. (1969). *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*. М.: Наука. 372

Хейл Дж. (1984). *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. М: Мир., 421 с. 107

Хирш М. (1979). *Дифференциальная топология*. М.: Мир, 280 с. 108

Хорн Р., Джонсон Ч. (1989). *Матричный анализ*. М.: Мир, 655 с. 51, 108, 179, 223

Цыпкин Я.З. (1963). *Теория линейных импульсных систем*. М.: Физматгиз, 968 с. 51, 107

Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. (1973). *Теория нелинейных импульсных систем*. М.: Наука, 432 с. 51

Чирка Е.М. (1985). *Комплексные аналитические множества*. М.: Наука, 272 с. 179

Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. (1986). *Разностные уравнения и их приложения*. Киев: Наук. думка, 280 с. 51

Шевченко А.Н. (1975). Методы расчета и адаптации частоты выдачи решений в управляющей ЦЭВМ// *Автоматика и телемеханика*. № 7. С. 143–152. 52

Ширяев А.Н. (1980). *Вероятность*. М.: Наука, 576 с. 337, 341, 352

Якубович В.А. (1975). Методы теории абсолютной устойчивости// *Методы исследования нелинейных систем автоматического управления/ Под. ред. Р.А. Нелепина*. М.: Наука, С. 74–180. 147

Araki M., Hagiwara T. (1986). Pole assignment by multirate sampled-data output feedback// *Intern. J. Contr*. Vol. 44, No. 10. P. 1661–1673. 52

Araki M., Yemamoto K. (1986). Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 31, No. 2. P. 145–154. 52

Artzrouni M. (1987). On the local stability of nonautonomous difference equations in R^n// *J. Math. Anal. and Appl*. Vol. 122, No. 2. P. 519–537. 52

Asarin E.A., Kozjakin V.S., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A., Pokrovski A.V. (1988). On some new types of mathematical models of complex systems// *Lect. Notes in Contr. Sci*. Vol. 105. P. 10–26. 148

Asarin E.A., Kozjakin V.S., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A., Pokrovski A.V. (1990). On modelling systems with non-synchronously operating impulse elements // *Mathl Comput. Modelling*. Vol.4. P. 70–73. 223

Asarin E.A., Kozjakin V.S., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A. (1990). Stability analysis of desynchronized systems// *Prepr. of the 11th IFAC World congress*. Tallinn, Vol. 2. P. 56–60. 284

Baudet G.M. (1977). Iterative methods for asynchronous multiprocessors// *High speed computer and algorithm organization/ Ed. D.Kuck et al*. New York, P. 309–310 53, 54

Baudet G.M. (1978). Asynchronous iterative methods for multiprocessors// *J. Assoc. Comput. Mach*. Vol. 25, No. 2. P. 226–244. 51, 53, 54, 148, 180

Baudet G.M., Brent R.P., Kung H.T. (1980). Parallel execution of a sequence of tasks on asynchronous multiprocessor// *Austral. Comput. J*. Vol. 12, No. 3. P. 103–112. 52

Baudet G., Stevenson D. (1978). Optimal sorting algorithms for parallel computers// *IEEE Trans. Comput*. Vol. 27, No. 1. P. 84–86. 52

Berg M.C., Amit N., Powell J.D. (1988). Multirate digital control system design// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 33, No. 12. P. 1139–1150. 52

Bertsekas D.P. (1982). Distributed dynamic programming// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 27, No. 3. P. 610–616. 148

Bertsekas D.P. (1983). Distributed asynchronous computation of fixed points// *Math. Programm*. Vol. 27, No. 1. P. 107–120. 148

Bertsekas D.P., El Baz D. (1987). Distributed asynchronous relaxation methods for convex network flow problems// *SIAM J. Contr. and Optim*. Vol. 25, No. 1. P. 74–85. 52

Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. (1988). *Parallel and distributed computation. Numerical methods*. Englewood Cliffs (NJ): Prentice Hall, 715 p. 7, 52, 148, 223, 284

Birdwell J.D., Castanon D.A., Athans M. (1979). On reliable control system design with and without feedback reconfigur1ation// *Proc. of the 17th IEEE conference on decision and control*. San Diego, Calif., USA. P. 709–715. 52

Borkar V., Varaija P. (1982). Asymptotic agreement in distributed estimation// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 27, No. 9. P. 650–656. 52

Boykin W.H., Frazier B.D. (1975). Multirate sampled-data systems analysis via vector operators// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 20, No.6. P. 548–551. 52

Brandt A. (1980). Multi-level adaptive finite-elements methods: 1. Variational problems// *Special topics of applied mathematics Amsterdam*: North-Holland, P. 91–128. 52

Brayton R.K., Tong C.H. (1980a). Stability of dynamical systems: a constructive approach// *IEEE Trans. Circuits and Syst*. Vol. 26, No. 4. P. 224–234. 148, 179

Brayton R.K., Tong C.H. (1980b). Constructive stability and asymptotic stability of dinamical systems// *IEEE Trans. Circuits and Syst*. Vol. 27, No. 11. P. 1121–1130. 148, 179

Campo L., Bar-Shalom Y. (1990). A new controller for descrete-time stochastic systems with Marcovian jump parameters// *Prepr. of the 11th IFAC World Congress*. Tallinn, Vol. 3. P. 1–6. 52

Cassandras C.G., Gong W. (1990). On-line control of descrete event systems: some extensions of perturbation analysis// *Prepr. of the 11th IFAC World Congress*. Vol. 6. P. 259–263. 52

Cassandras C.G., Strickland S.G. (1989). Sample path properties of timed discrete event systems// *Proc. IEEE*. Vol. 77, No. 1. P. 59–71. 52

Charnay M. (1975). *Iterations chaotiques sur un produit d'espaces metriques*. These. Lyon, 73 p. 53

Chazan D., Miranker W. (1969). Chaotic relaxation// *Linear Algebra and Appl*. Vol. 2. P. 199–222. 53, 54, 148, 180, 223

Chizeck H.J., Willsky A.S., Castanon D. (1986). Discrete-time Markovian jump linear quadratic optimal control// *Intern. J. Contr*. Vol. 43, No. 2. P. 213–231. 52

Coldman A.J., Meyers Ph.R. (1969). Simultaneous Contractification// *J. Res. Natur. Bur. Stand. B*. Vol. 73, No. 4. P. 301–305. 179

Cristian F., Aghili H., Strong R. (1986). Clock synchronization in the presence of omission and performance faults, and processor joins// *Proc. of 16th FTCS*. Vienna, P. 218–223. 51

Deminer J. (1982). Expirience with multiprocessor algorithms// *IEEE Trans. Comput*. Vol. 31, No. 4. P. 278–287. 51

Donnelly J.D.P. (1970). Periodic chaotic relaxation// *Linear Algebra and Appl*. Vol. 4, No. 2. P. 117–128. 53

Elkin R. (1968). *Convergence theorems for Gauss-Seidel and other minimization algorithms*. Ph. D. Diss. College Park, 231 p. 53, 148, 284

El Tarazi M.N. (1980). Sur des algorithmes mextes par blocs de type Newton. Relaxation chaotique a retards// *C. R. Acad. Sci*. A. Vol. 283. P. 721–724. 52

El Tarazi M.N. (1982). Some convergence results for asynchronous algorithms// *Numer. Math*. Vol. 39, No. 3. P. 325–340. 52

El Tarazi M.N. (1984). Algorithmes mixtes asynchrones. Etude de convergence monotone// *Numer. Math*. Vol. 44, No.3. P. 363–369. 52

Furstenberg H., Kesten H. (1960). Products of random matrices// *Ann. Math. Stat*. Vol. 31, No. 2. P. 457–469. 372

Glasson D.P. (1982). A new technique for multirate digital control design and sample rate selection// *AIAA J. Guid. Contr*. Vol. 5. P. 379–382 52

Godbaut L.F., Jordan D., Streifer M.F. (1990). A pole placement algorithm for multirate-sampled linear systems// *Prepr. of the 11th IFAC World Congress*. Tallinn, Vol. 2. P. 150–154. 52

Griffits B.E., Loparo K.A. (1985). Optimal control of jump-linear Gaussian systems// *Intern. J. Contr*. Vol. 42, No. 4. P. 791–819. 52

Hadamard J. (1898). Les surfaces a courbures opposees et leur lignes geodesiques// *J. math. pur. appl*. Vol. 4. P. 27–73. 108

Hagiwara T., Araki M. (1988). Design of a stable state feedback controller based on the multirate sampling of the plant output// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 33, No. 9. P. 812–819. 52

Halang W.A. (1990). Simultaneous and predictable real time control achieved by accurately timed computer peripherals// *Prepr. of the 11th IFAC World Congress*. Tallinn, Vol. 7. P. 279–284. 51

Hisashi K, Tetsuo I. (1986). Multirate digital control design of an optimal regulator via singular perturbation theory// *Intern. J. Contr*. Vol. 44, No. 11. P. 1555–1578. 52

Jury E.I. (1967). A note on multirate sampled-data systems// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 12. P. 319–320. 52

Kalman R.E., Bertram J. (1959). A unified approach to the theory of sampling systems// *J. Franklin Inst*. Vol. 267. P. 405–436. 52

Keller R.M. (1972). On the decomposition of ascynchronous systems// *IEEE 13th Annu. symp.: switching and automata theory*. N.Y.: Acad. press, P. 324–341. 52

Keller R.M. (1975). A fundamental theorem of ascynchronous parallel computation// *Segamore comput. conf. on parallel proces.'74/ Ed. T.-Y. Feng. B.*: Springer, P. 102–112. 52

Kesten H., Spitzer F. (1984). Convergence in distribution of products of random matrices// *Ztschr. Wahrscheinlichkeitstheorie verw*. Geb. No. 67. S. 363–386. 372

Kleptsyn A.F., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A., Kozjakin V.S. (1984). Desynchronization of linear systems// *Math. and Comput. Simulat*. Vol. 26. P. 423–431. 54, 108, 148, 223, 329

Kopetz H., Ochsenreiter W. (1987). Clock synchronization in distributed real-time systems// *IEEE Trans. Comput*. Vol. 36, No. 8. P. 933–940. 51

Kranc G.M. (1957a). Compensation of an error sampled system by a multirate controller. 2// *AIEE Trans*. Vol. 76. P. 149–158. 51, 52

Kranc G.M. (1957b). Input-output analysis of multirate feedback systems// *IRE Trans. Automat. Contr*. Vol. 3. P. 21–28. 51, 52

Kung H.T. (1976). Synchronized and asynchronous parallel algorithms for multiprocessors// *Algorithms and complexity: new directions and recent results*. N.Y.: Acad. press, P. 153–200. 51

Lamport L. (1978). Time, clocks and the ordering of events in a distributed system// *Commun. Assoc. Comput. Mach*. Vol. 21, No. 7. P. 558–565. 51

Lamport L., Melliar Smith P.M. (1985). Synchronizing clocks in the presence of faults// *J. Assoc. Comput. Mach*. Vol. 32, No. 1. P. 52–78. 51

Langdon O.G.Jr. (1969). Delay-free asynchronous circuits with constrained line delays// *IEEE Trans. Comput*. Vol. 18, No. 2. P. 1131–1143. 51

Lin T.-S. (1983). *Computer control with interruptions*// M.S. thesis. 143 p. 51, 52

Litkouhi B., Khalil H. (1985). Multirate and composite control of two-time-scale discrete-time systems// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 30, No. 7. P. 645–651. 52

Lubachevsky B., Mitra D. (1986). A chaotic asynchronous algorithm for computing the fixed point of a nonnegative matrix of unit spectral radius// *J. Assoc. Comput. Mach*. Vol. 33, No. 1. P. 130–150. 52, 148, 223

Mandelbrot B.B. (1983). *The fractal geometry of nature*. N.Y.: Freeman. 372

Mariton M. (1987). Jump linear quadratic control with random state discontinuities// *Automatica*. Vol. 23, No. 2. P. 237–240. 372

Marshall J.E. (1979). *Control of time delay systems*. Stevenage (N.Y.): Peregrinus, 542 p. 52

Melsa J., Dannenberg K. (1975). Stabtlity analysis of randomly sampled digital control systems// *Automatica*. Vol. 11. P. 101–104. 52

Meyers Ph.R. (1965). Some extensions of Banach's contraction theorem// *J. Res. Natur. Bur. Stand. B*. Vol. 69B, No. 3. P. 179–184. 179

Miellow J.-C. (1974). Iterations chaotiques a retards// *C. r. Acad. sci. A*. Vol. 278. P. 957–960. 53, 148

Miellow J.-C. (1975a). Iterations chaotiques a retards, etudes de la convergence dans le cas d'espaces partiellement ordonnes// *C. r. Acad. sci. A*. Vol. 280. P. 233–236. 53, 148, 223

Miellow J.-C. (1975b). Iterations chaotiques a retards// *Rev. automat. inform. et rech. operat*. Vol 1, No. 9. P. 55–82. 53, 148

Miellow J.-C., Comte P., Spiteri P. (1976). La notion de H-accretivite, applications// *C. r. Acad. sci. A*. Vol. 283. P. 655–658. 53, 223

Miller R.E. (1977). Theoretical studies of asynchronous and parallel processing// *Proc. of the (1977) conf. on inform. sci. and systems*. Wash. (D.C): Hopkins Univ. press, P. 333–339. 52

Miranker W.L. (1969). Parallel methods for approximating the root of a function// *IBM J. Res. and Develop*. Vol. 13. No.3. P. 297–301. 52

Mitra D. (1987). Asynchronous relaxations for the numerical solution of differential equations by parallel processors// *SIAM J. Sci. Stat. Comput*. Vol. 8, No. 1. P. 43–59. 52

Nishimura T. (1990). Navigation and guidance problems of Japanese space VLBI satellite VSOP// *Prepr. of the 11th IFAC World Congr*. Tallinn, Vol. 1. P. 117–122. 51

Nummelin E. (1984).*General irreducible Markov chains and non-negative operators*. Cambridge: Cambridge Univ. press. 372

Ostrowski A.M. (1954). On the linear iterative procedures for symmetric matrices// *Rend. math. e appl*. Vol. 14, No.1–2. P. 140–163. 53

Rekasius Z.V. (1985). Digital control with computer interruptions// *Proc. of the (1985) Amer. contr. conf.* Vol. 3. P. 1618–1621. 52

Rekasius Z.V. (1986). Stability of digital control with computer interruptions// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 31, No. 4. P. 356–359. 52

Robert F. (1969). Block H-matrices et convergence des methodes iteratives classiques par blocks// *Linear Algebra and Appl*. Vol. 2, No. 2. P. 223–265. 53, 223

Robert F. (1970). Methodes iteratives serie parallele// *C.r. Acad. sci. A*. Vol. 271. P. 847–850. 53, 148, 179

Robert F. (1976). Contraction en norme vectorielle: convergence d'iterations chaotiques pour des equations non lineaires de point fixe a plusieurs variables// *Linear Algebra and Appl*. No. 13. P. 19–35. 53, 148, 223

Robert F. (1977). Convergence locale d'iterations chaotiques lineaires// *C. r. Acad. sci. A*. Vol. 284. P. 679–682. 53

Robert F., Charnay M., Musy F. (1975). Iterations chaotiques serie parallele pour des equations nonlineaires de point fixe// A*plikace Matematicky*. No. 20. P. 1–38. 53

Robinson J.T. (1977). Analysis of asynchronous multiprocessor algorithms with application to sorting// *Intern. conf. on parallel process./ Ed. J. Baer*. New York, P. 128–235. 52

Robinson J.T. (1979). Some analysis techniques for asynchronous multiprocessor algorithms/ *IEEE Trans. Soft. Eng*. Vol. 5, No. 1. P. 24–31. 52

Ronsch W. (1984). Stability aspects in using parallel algorithms// *Parallel Comput*. Vol. 1, No. 1. P. 75–98. 52

Rosberg Z., Varaiya P.P., Walrand J.C. (1982). Optimal control of service in tandem queues// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 27, No. 9. P. 600–610. 52

Rosier L.E., Yen Hsu-Chun. (1985). Boundedness, empty channel detection and synchronization for communicating finite state machines// *Lect. Notes Comput. Sci*. No. 182. P. 287–298. 52

Schechter S. (1968). Relaxation methods for convex problems// *SIAM J. Numer. Anal*. No. 5. P. 601–612. 53, 148, 284

Sen M. (1986). Multirate hybrid adaptive control// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 31, No. 6. P. 582–586. 52

Sklansky J. (1955). *Network compensation of error-sampled feedback systems*// Ph.D diss. N.Y., 217 p. 51

Sklansky J., Ragazzini J.R. (1955). Analysis of errors in sampled-data feedback systems. 2// *AIEE Trans*. Vol. 74. P. 65–71. 51

Stark W.R. (1984). Parametrized models for synchronized distributed processes// *Cybernetica*. Vol. 27, No. 4. P. 257–281. 52

Sworder D.D. (1986). Control of systems subject to sudden change in character// *Proc. IEEE*. Vol. 64. P. 1219–1225. 52

Tokarzewski J. (1987). Stability of periodically switched linear systems and the switching frequency// *Intern. J. Syst. Sci*. Vol. 18, No. 4. P. 697–726. 52

Tsitsiklis J.N. (1984). *Problems in decentralized decision making and computation*// Ph. D. thesis. Cambridge (Mass.), 251 p. 148

Tsitsiklis J.N. (1986). A lemma on the multiarmed bandit problem// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 31, No. 6. P. 576–577. 148

Tsitsiklis J.N. (1987). On the stability of asynchronous iterative processes// *Math. Syst. Theory*. No. 20. P. 137–153. 148, 179

Tsitsiklis J.N., Athans M. (1984). Convergence and asymptotic agreement in distributed decision problems// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 29, No. 6. P. 690–696. 148

Tsitsiklis J.N., Bertsekas D.P. (1986). Distributed asynchronous routing in data communication networks// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 31, No. 3. P. 325–332. 148

Tsitsiklis J.N., Bertsekas D.P., Athans M. (1986). Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms// *IEEE Trans. Automat. Contr*. Vol. 31, No. 8. P. 803–812. 54, 148

Tugnait J.K. (1982). Detection and estimation for abruptly changing systems// *Automatica*. Vol. 18, No. 5. P. 607–615. 52

Wu Jiun-Wen, Brown D.P. (1987). On the stability of shift variant discrete systems// *J. Franklin Inst*. No. 17. P. 87–96. 52

Yaz E. (1990). Moving-horizon control of systems with independent and jump stochastic-parameters// *Prepr. of the 11th IFAC World Congr*. Tallinn, Vol. 3. P. 53–58. 52

Список иллюстраций

Список обозначений

A_ϑ	ϑ-помесь матрицы A, стр. 153
$A_\vartheta^\natural$	столбцовая ϑ-помесь матрицы A, стр. 199
A_ω^∞	проектор на подпространство $\mathbb{L}_\omega$, стр. 245
$A_{\vartheta\times\vartheta}$	диагональная подматрица матрицы A, стр. 167
b_ω	вектор внешних воздействий, стр. 228
$F(m,n;x)$	оператор перехода, стр. 15
$\Phi(t,s;\xi)$	оператор сдвига, стр. 34
$\mathfrak{F}$	класс правых частей, стр. 114
$\mathfrak{F}(\Omega)$	класс правых частей, определяемый ω-помесями из множества Ω, стр. 233
$\mathfrak{F}^\alpha$	индуцированный класс правых частей, стр. 237
$\mathfrak{F}^\infty$	множество минимальных отображений, стр. 141
φ_ω	ω-помесь отображения φ, стр. 59
$\mathfrak{G}_*, \mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_f,$ $\mathfrak{G}_{pf}, \mathfrak{G}_w, \mathfrak{G}_u,$ $\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_k^+, \mathfrak{G}_k$	классы рассинхронизаций, стр. 110
K_+	конус элементов с неотрицательными координатами, стр. 183
$\mathfrak{L}_\eta$	библиотека сдвига, стр. 82, 319

$\mathbb{L}_\omega$	подпространство неподвижных точек A_ω, стр. 245
$\mathfrak{M}_\alpha(\mathfrak{G},\varphi), \mathfrak{M}_\alpha(\mathfrak{G})$,	
$\mathfrak{M}_{-\infty}(\mathfrak{G})$	множества решений семейства систем импульсных уравнений, стр. 111
$\mathfrak{M}(\Delta)$	множество вероятностных мер на Δ, стр. 361
$\mathbb{M}x$	математическое ожидание случайной величины x, стр. 337
$\mu\big\vert_\Delta$	сужение меры μ на множество Δ, стр. 361
$N_x(n)$	число коррекций компонент решения $x(\cdot)$ разностного уравнения, стр. 139
$\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}), \mathfrak{N}_{-\infty}(\mathfrak{F})$	множества решений семейства разностных уравнений, стр. 115
$\nu_\xi(\mathfrak{G},\tau)$	число коррекций компонент решения импульсной системы, стр. 113
$\omega(T^n)$	тип момента коррекции T^n, стр. 29, 39
P_ω	проектор на подпространство $\mathbb{X}_\omega$, стр. 245
$p \pmod q$	значение числа p по модулю q, стр. 78
$\mathbb{P}\{x\}$	вероятность события x, стр. 334
$\mathbb{R}^N$	N-мерное координатное пространство
$\operatorname{rank} A$	ранг матрицы A
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы A, стр. 71
$\mathbb{R}P$	проективная прямая, стр. 357
S_η	отображение циклического сдвига, стр. 78
$\operatorname{supp} \nu$	носитель меры ν, стр. 361
$\sigma(A)$	спектр матрицы A, стр. 17
$\{T^n\}$	моменты коррекции, стр. 14
$\{T_i^n\}$	моменты коррекции i-ой компоненты, стр. 26
$\operatorname{text}(\alpha)$	сдвиговый текст, стр. 82

$\mathrm{text}_n(\alpha)$	начальный отрезок сдвигового текста, стр. 82, 318
$\mathrm{text}^n(\alpha)$	«хвост» сдвигового текста, стр. 318
$\mathrm{text}_n^s(\alpha)$	s-пополнение слова $\mathrm{text}_n(\alpha)$, стр. 82
$\mathrm{Var}\,[x(\cdot)]$	вариация решения $x(\cdot)$, стр. 244
W	рассинхронизованная система, стр. 26
W_i	i-я компонента системы W, стр. 26
W^α	подчиненная система, стр. 236
W_i^α	i-я компонента системы W_i^α, стр. 236
$\mathbb{X}$	пространство состояний системы W, стр. 228
$\mathbb{X}^\alpha$	пространство состояний системы W^α, стр. 236
$\mathbb{X}_\omega$	подпространство пространства $\mathbb{X}$, стр. 228
$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$	элемент пространства $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \cdots \times \mathbb{X}_N$
$\|\cdot\|$	норма вектора
$\|\cdot\|_\varepsilon$	ε-спектральная норма, стр. 150
$\|\cdot\|_{K,v}$	конусная норма, стр. 186
$\lvert\cdot\rvert$	модуль числа, норма вектора в пространстве состояний компоненты, еклидова норма вектора
$\circ$	знак суперпозиции отображений, стр. 88
$\otimes$	знак тензорного произведения и тензорной степени матриц, стр. 343
$\langle u, v\rangle$	конусной отрезок, стр. 186
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	скалярное произведение

Предметный указатель