

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра радиофизики

А.Г. Чупыра

## **ТЕОРИЯ АВТОРЕГУЛИРОВАНИЯ**

Курс лекций

Новосибирск  
2013

**Чупыра А.Г.** Теория авторегулирования. Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. – 88 с.

Курс лекций по теме «Теория авторегулирования» соответствует программе одноименного спецкурса для студентов кафедры радиофизики физического факультета НГУ. Работа включает в себя оглавление, 16 разделов и список литературы. Она предназначена для ознакомления студентов с общими сведениями о теории авторегулирования, с методами исследования устойчивости систем с обратной связью, с методами построения кривых переходных процессов, с методами оценки качества регулирования, а также для получения практических навыков в исследовании простейших линейных и нелинейных систем автоматического регулирования.

Особенностью курса является изложение разных подходов авторов различных монографий при рассмотрении тех или иных тем (в частности, предлагается два варианта доказательства критерия устойчивости Найквиста, два способа решения проблемы обхода полюсов на мнимой оси). Идеи такого изложения были предложены доцентом кафедры радиофизики Черепановым В.П. при чтении им курса лекций по «Теории авторегулирования».

Курс лекций предназначен для студентов третьего курса физического факультета НГУ, проходящих специализацию на кафедре радиофизики. Он может быть полезен также студентам физического факультета НГУ, специализирующимся в других областях физики, в учебном процессе которых возникают задачи, связанные с использованием систем авторегулирования и анализом их работы.

Курс лекций подготовлен в рамках реализации  
Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

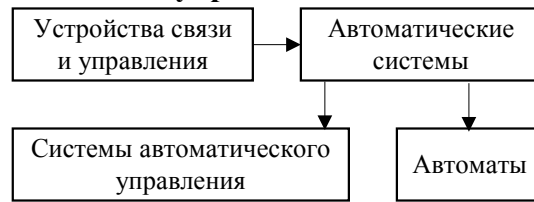
@ Новосибирский государственный  
университет, 2013

## Оглавление

1. Общие сведения об автоматических системах .....	2
2. Линейные управляемые системы .....	4
3. Функция веса и переходная функция стационарной линейной системы .....	11
4. Динамические звенья .....	15
5. Характеристики динамических звеньев .....	20
6. Критерии устойчивости линейной системы .....	28
7. Критерий устойчивости Найквиста (Бесекерский, Попов) .....	35
8. Критерий устойчивости Найквиста (Чемоданов) .....	39
9. Передаточные функции систем автоматического регулирования .....	44
10. Оценка качества регулирования .....	51
11. Повышение точности систем автоматического регулирования .....	61
12. Нелинейные системы автоматического регулирования .....	65
13. Переходные процессы и автоколебания релейной системы .....	70
14. Метод припасовывания .....	76
15. Алгебраический способ определения симметричных колебаний и устойчивости ...	82
16. Частотный критерий устойчивости В.М. Попова .....	86
Список литературы .....	88

## 1. Общие сведения об автоматических системах [1,2]

### Место систем автоматического управления.



Автоматические системы являются разновидностью устройств связи и управления. Автоматические системы предназначены для управления каким-либо объектом без активного вмешательства оператора. Под управлением здесь понимается совокупность воздействий для достижения определённых результатов. Совокупность устройств, обеспечивающих автоматический процесс управления, и называют автоматической системой. Все автоматические системы можно разделить на два класса: автоматы, выполняющие определенного рода однократные или многократные операции, и системы автоматического управления, которые в течение длительного времени нужным образом изменяют или поддерживают неизменными какие-либо физические величины в том или ином управляемом процессе. Далее будут рассматриваться только автоматические системы второго класса.

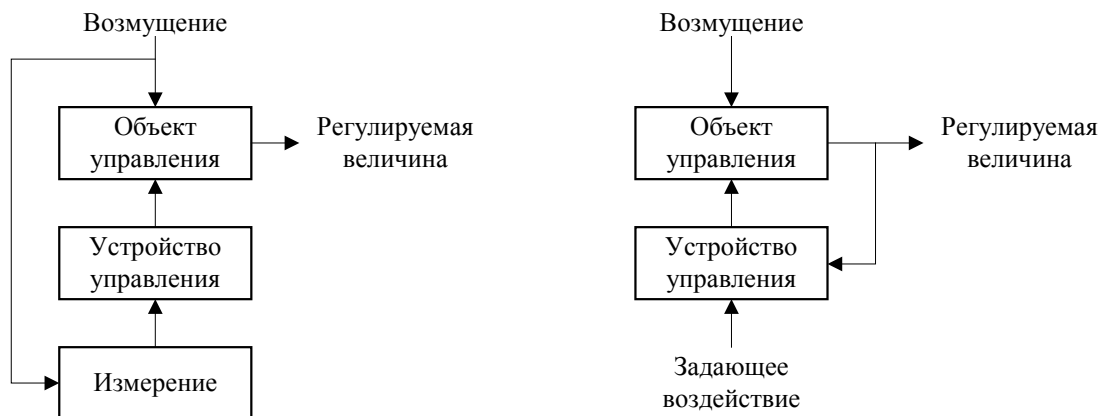
Общая схема автоматической системы:



В автоматической системе выделяют объект управления и устройство управления. Предполагается, что параметры состояния объекта являются однозначными функциями сигналов управления. Состояние объекта характеризуется переменными состояниями, некоторые из которых соответствуют целям управления.

Автоматические системы делят на разомкнутые (без обратной связи) и замкнутые (с обратной связью). Системы с обратной связью отождествляют с системами автоматического управления (регулирования).

Различают три способа управления – по возмущению (слева на рисунке ниже), по отклонению (справа) и комбинированный.



На вход системы управления поступает одно или, в общем случае, несколько задающих (управляющих) воздействий (вектор воздействий).

Различают следающие системы и системы автоматической стабилизации.

Следающие системы воспроизводят задающее воздействие  $z(t)$ , изменяющееся заранее не известным образом, или функционально связанный с ним сигнал. Функциональная схема следящей системы:



Системы автоматической стабилизации стабилизируют параметры объекта управления при заданных постоянных воздействиях (т.е. это частный случай следящих систем).

Кроме того, имеются адаптивные системы и системы с переменной структурой.

**Дискриминатор.** В радиоэлектронных следящих системах задающие воздействия поступают в систему не непосредственно, а в виде каких-либо параметров входного сигнала. Например, задающим воздействием может быть фаза входного высокочастотного сигнала. В этом случае «Дискриминатор» на рисунке – это дискриминатор фазы (фазовый дискриминатор). Объектом управления в данном случае является генератор гармонического сигнала, фаза которого сравнивается с фазой входного сигнала. На выходе дискриминатора имеем напряжение, пропорциональное разности фаз. Назначение системы в данном случае – поддерживать частоту Генератора равной частоте входного сигнала.

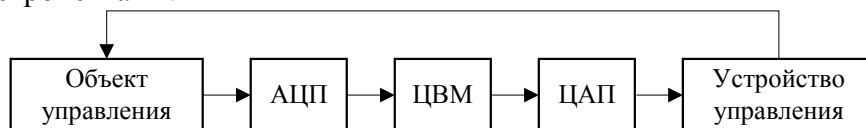
Таким образом, функциональная схема системы управления отражает не прохождение реальных сигналов, но лишь прохождение информации (пусть и в виде каких-то напряжений).

**Классификация систем по характеру внутренних динамических процессов [1].**

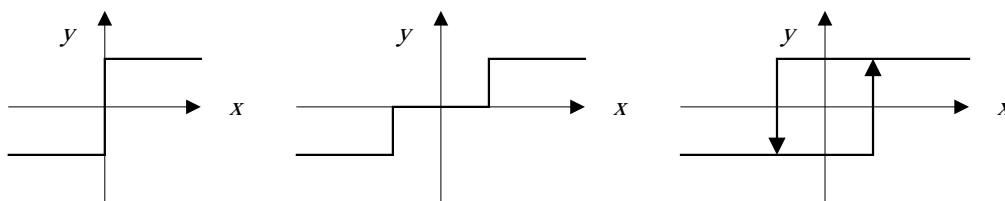
Каждая автоматическая система состоит из ряда звеньев, различным образом соединённых между собой. Каждое отдельно взятое звено имеет вход и выход (в общем случае – несколько входов и выходов).

Система непрерывного действия – это система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины.

Система дискретного действия – это система, в которой хотя бы в одном звене непрерывный входной сигнал преобразуется в последовательность импульсов. Квантование может производиться по уровню или по времени. Сюда же относятся системы с цифровыми вычислительными устройствами:



Система релейного действия – это система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса изменяется скачком.



Линейная система – система, в которой динамика всех звеньев описывается линейными уравнениями. Если это обыкновенные дифференциальные уравнения (с постоянными пара-

метрами), то это обыкновенная линейная система. В противном случае это линейная система с переменными параметрами. Если это обыкновенные дифференциальные уравнения в частных производных, то это линейная система с распределёнными параметрами.

Нелинейная система – хотя бы одно звено имеет нелинейную статическую характеристику, либо имеется любая нелинейная связь переменных и их производных. Сюда же относятся системы релейного действия.

**Программы регулирования[1].** Задача системы автоматического регулирования – поддержание требуемого значения регулируемой величины или изменение её по определённой программе.

Временная и параметрическая программы управления:

$$y = y(t), \quad y = y(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Здесь  $s_1, s_2, \dots, s_n$  – физические величины, характеризующие текущее состояние объекта в процессе управления.

Типичный пример параметрической программы управления является закон наведения в системах телеуправления и самонаведения снарядов.

**Пример.** Пусть тело **А** должно быть сближено с телом **Б** для мягкого контакта. Пусть  $\rho$  – текущее расстояние между ними. Условия сближения:  $\dot{\rho} < 0$ ,  $\dot{\rho} = 0$  при  $\rho = 0$ , ускорение  $|\ddot{\rho}|$  ограничено, время сближения  $T$  ограничено. Датчики измеряют расстояние и скорость. Представим закон наведения в виде  $\dot{\rho} + f(\rho) = 0$ . Пусть некое устройство формирует сигнал  $u = \dot{\rho} + f(\rho)$ , величина которого должна быть сведена к нулю. Найдём целесообразное выражение для  $f(\rho)$ .

Линейный закон наведения:  $\dot{\rho} + k\rho = 0$ . При этом  $T = -\frac{1}{k} \ln \rho \Big|_a^0 \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\dot{\rho} + k\rho^b = 0$ . Тогда  $T = -\frac{1}{k} \frac{\rho^{1-b}}{1-b} \Big|_a^0$ . Следовательно,  $b$  должно быть меньше едини-

цы. Мощность получим из уравнения  $\ddot{\rho} - k^2 b \rho^{2b-1} = 0$  (получено дифференцированием уравнения  $\dot{\rho} + k\rho^b = 0$ ). При  $b < 1/2$  ускорение бесконечно при  $\rho = 0$ . Если же  $1/2 < b < 1$ , то и мощность, и время сближения – конечные величины, причём ускорение  $\ddot{\rho}$  уменьшается с уменьшением  $\rho$ .

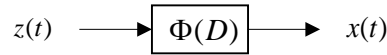
## 2. Линейные управляемые системы [3]

**Одномерная система с одной степенью свободы.** Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы  $T = k_0 \dot{x}^2 / 2$ , потенциальная энергия –  $V = k_2 x^2 / 2$ , добавочная неконсервативная сила –  $Q = -k_1 \dot{x} + z(t)$ . Уравнение движения системы:

$$k_0 \ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 x = z(t).$$

Обозначим оператор дифференцирования по времени  $d/dt = D$ . При этом уравнение движения приобретёт вид  $(k_0 D^2 + k_1 D + k_2) \cdot x(t) = z(t)$ , или  $x(t) = \frac{1}{k_0 D^2 + k_1 D + k_2} \cdot z(t)$ . Это формальная запись. Передаточная функция системы (дробно-рациональная функция от  $D$ ) имеет вид  $\Phi(D) = \frac{1}{k_0 D^2 + k_1 D + k_2}$ , при этом  $x(t) = \Phi(D) \cdot z(t)$ .

Последнее соотношение формально эквивалентно исходному дифференциальному уравнению. Этому соотношению ставится в соответствие структурная схема, приведенная ниже, где  $z(t)$ ,  $x(t)$  – входной и выходной сигналы соответственно:



Характеристическое уравнение есть результат подстановки в однородное уравнение движения  $k_0\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2x = 0$  решения в виде  $x(t) = C \exp(\lambda t)$ . Оно имеет вид:

$$k_0\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0.$$

Корни при условии  $k_1^2 - 4k_0k_2 < 0$  имеют вид  $\lambda_1, \lambda_2 = -\varepsilon \pm i\omega$ .

$$\text{Здесь } \varepsilon = \frac{k_1}{2k_0}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_2}{k_0} - \frac{k_1^2}{4k_0^2}}.$$

Решение уравнения движения является суммой решения однородного уравнения (общее решение) и частного решения неоднородного уравнения (вынужденное решение). Здесь оно имеет следующий вид:

$$x(t) = x(t_0)e^{-\varepsilon(t-t_0)} \cos \omega(t-t_0) + \frac{1}{\omega} [\dot{x}(t_0) + \varepsilon x(t_0)] e^{-\varepsilon(t-t_0)} \sin \omega(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{1}{k_0\omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) z(\tau) d\tau$$

Заметим, что при  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$  (т.е. при нулевых начальных условиях) решение имеет вид:

$$x(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{k_0\omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) z(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t w(t-\tau) z(\tau) d\tau.$$

Здесь  $w(t)$  – так называемая функция веса или импульсная переходная функция системы:

$$w(t) = \frac{1}{k_0\omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t \text{ при } t \geq 0, \quad w(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Заметим, что  $w(t-t_0)$  – закон движения системы при  $z(t) \equiv 0$ ,  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 1/k_0$ . Эта функция будет законом движения системы также и при  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$ ,  $z(t) = \delta(t-t_0)$ . Здесь  $\delta(t)$  – единичная импульсная функция (дельта-функция Дирака). Поэтому-то  $w(t)$  иначе называется импульсной переходной функцией.

Итак, реакция системы на возмущение при нулевых начальных условиях имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t w(t-\tau) z(\tau) d\tau \text{ – интеграл Дюамеля-Карсона.}$$

При замене переменных  $\xi = t - \tau$  это решение приобретёт вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t w(t-\tau) z(\tau) d\tau = - \int_{t-t_0}^0 w(\xi) z(t-\xi) d\xi = \int_0^{t-t_0} w(\xi) z(t-\xi) d\xi.$$

Пусть  $t_0 = -\infty$  (т.е. входной сигнал подан бесконечно давно). Тогда

$$x(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t w(t-\tau) z(\tau) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_0^{t-t_0} w(\xi) z(t-\xi) d\xi.$$

Или, для краткости,  $x(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) z(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w(\xi) z(t-\xi) d\xi$  – установившийся процесс.

**Функция веса и передаточная функция.** Здесь мы рассматриваем стационарные системы, т.е. системы, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Изображение функции  $x(t)$  по Лапласу (одностороннее преобразование Лапласа) имеет вид:

$$L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

Функция комплексного переменного  $\Phi(p)$ , образованная из передаточной функции  $\Phi(D)$  заменой  $D \rightarrow p$ , есть изображение по Лапласу функции веса, в этом смысле они полностью эквивалентны друг другу:

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt.$$

Докажем это в нашем случае, т.е. для  $w(t) = \frac{1}{k_0 \omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{k_0 \omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t e^{-pt} dt &= \frac{1}{k_0 \omega} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-pt} dt = \frac{1}{k_0 2i\omega} \int_0^{\infty} (e^{-(\varepsilon+p-i\omega)t} - e^{-(\varepsilon+p+i\omega)t}) dt = \\ &= \frac{1}{k_0 2i\omega} \left[ \frac{1}{\varepsilon+p-i\omega} - \frac{1}{\varepsilon+p+i\omega} \right] = \frac{1}{2i\omega k_0 (\varepsilon+p-i\omega)(\varepsilon+p+i\omega)} = \frac{1}{k_0 p^2 + k_1 p + k_2} = \Phi(p). \end{aligned}$$

В общем случае доказательство выглядит предельно просто. Преобразованное по Лапласу уравнение движения при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$L[x(t)] = \Phi(p) L[z(t)].$$

Пусть  $z(t) = \delta(t)$ . Тогда  $x(t) = w(t)$  – реакция системы на единичную импульсную функцию при нулевых начальных условиях. Коль скоро  $L[\delta(t)] = 1$ , имеем:

$$L[w(t)] = \Phi(p).$$

**Дельта функция Дирака.** Здесь и ниже имеется в виду односторонняя (асимметричная) импульсная функция  $\delta_+(t)$ , которая «более подходит для употребления в связи с односторонним преобразованием Лапласа, чем симметричная импульсная функция  $\delta(t)$ » [6, с.255]. Именно для неё справедливы соотношения

$$L[\delta_+(t)] = 1, L[\delta'_+(t)] = p, L[\delta''_+(t)] = p^2, \dots$$

Нельзя, однако, забывать, что «эти соотношения не имеют строгого математического смысла» [6, с.255]. Поэтому новые результаты всегда должны проверяться с точки зрения законности математических действий.

Асимметричная импульсная функция связана, соответственно, с асимметричной единичной функцией:

$$\delta_+(t) = \frac{d}{dt} 1_+(t), \quad 1_+(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}.$$

**Частотная характеристика.** Обратное преобразование Лапласа даётся формулой Римана-Меллина:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(p) e^{pt} dp, \quad t \geq 0.$$

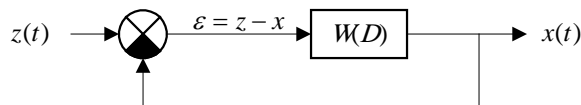
В системе, у которой все полюсы передаточной функции  $\Phi(p)$  (т.е. нули характеристического уравнения) расположены левее мнимой оси, собственные колебания асимптотически затухают. Таким образом, здесь можно положить  $c = 0$ . То же касается прямого преобразования Лапласа:

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt = \Phi(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt, \text{ так как } w(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Функция  $\Phi(i\omega)$  называется частотной характеристикой системы.



**Замкнутая управляемая система.** Назначение следящей системы – удерживать достаточно близким значение сигнала  $x(t)$  на выходе к значению сигнала  $z(t)$  на входе (обеспечивать малость рассогласования  $\varepsilon = z - x$ ).



Пусть так называемый «следящий вал» приводится во вращение двигателем постоянного тока ( $x$  – угол поворота вала). Управляющее двигателем напряжение пропорционально рассогласованию  $\varepsilon = z - x$ , где  $z(t)$  – угол поворота диска, движение которого должен повторять следящий вал. Уравнения движения:

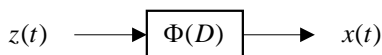
$$\left. \begin{aligned} (k_0 D^2 + k_1 D)x &= k_2 \varepsilon \\ \varepsilon &= z - x \end{aligned} \right\}.$$

Введём обозначение  $W(D) = \frac{k_2}{k_0 D^2 + k_1 D}$ , тогда  $x = W(D)(z - x)$ , или  $[1 + W(D)]x = W(D)z$ .

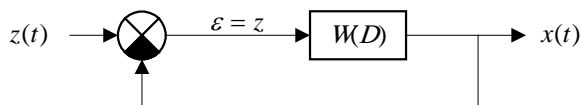
Отсюда уравнение движения замкнутой управляемой системы:

$$x(t) = \Phi(D)z(t), \text{ здесь } \Phi(D) = \frac{W(D)}{1 + W(D)} = \frac{k_2}{k_0 D^2 + k_1 D + k_2} - \text{передаточная функция.}$$

Соответствующее дифференциальное уравнение  $(k_0 D^2 + k_1 D + k_2)x(t) = k_2 z(t)$  и структурная схема



**Разомкнутая управляемая система.**



Уравнение движения:

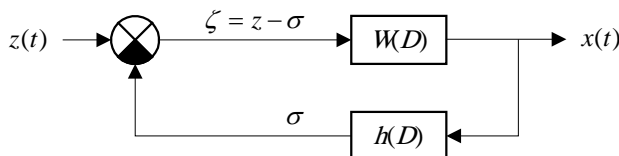
$$(k_0 D^2 + k_1 D)x(t) = k_2 z(t).$$

Теперь  $x(t) = W(D)z(t)$  – уравнение разомкнутой управляемой системы, а  $W(D)$  – передаточная функция разомкнутой управляемой системы.

Связь между передаточными функциями замкнутой и разомкнутой управляемых систем:

$$\Phi(D) = \frac{W(D)}{1 + W(D)}.$$

**Воспроизведение преобразованного сигнала.** Если управляемая система должна воспроизводить не сам входной сигнал, а преобразованный сигнал  $H(D)z(t)$ , то следует поместить в цепь обратной связи устройство с передаточной функцией  $h(D) = 1/H(D)$ .



Здесь сигнал рассогласования  $\zeta = z - h(D)x$ .

Уравнения движения замкнутой управляемой системы:

$$\left. \begin{aligned} (k_0 D^2 + k_1 D)x &= k_2 \zeta \\ \zeta &= z - h(D)x \end{aligned} \right\}.$$

Перепишем эти уравнения так:  $x = W(D)[z - h(D)x]$ , или  $[1 + W(D)h(D)]x = W(D)z(t)$ . Отсюда передаточная функция замкнутой управляемой системы приобретает вид:

$$\Psi(D) = \frac{W(D)}{1 + W(D)h(D)}.$$

Соответствующее уравнение движения:

$$x(t) = \Psi(D)z(t).$$

Уравнения движения разомкнутой управляемой системы:

$$\left. \begin{aligned} x &= W(D)z(t) \\ \sigma &= h(D)x \end{aligned} \right\}.$$

Отсюда  $\sigma = h(D)W(D)z(t)$  и передаточная функция разомкнутой управляемой системы  $S(D) = h(D)W(D)$ .

**Одномерная система с конечным числом степеней свободы.** Если задачей управляемой системы является обеспечение близости закона изменения во времени лишь одной из координат  $q_j(t)$  этой системы к некоторой (произвольной) функции времени  $z = z(t)$ , а к другим координатам  $q_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ) никаких требований не предъявляется, то такая система может быть названа одномерной. Система уравнений движения:

$$\dot{q}_s = \sum_{k=1}^n A_{sk} q_k + m_s(z - q_j), \quad s = 1, \dots, n.$$

Соответствующее векторное уравнение  $\dot{q} = Aq + m(z - q_j)$ , где:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix}.$$

Перепишем векторное уравнение следующим образом:  $(ED - A)q = m(z - q_j)$ . Здесь  $E$  – единичная матрица, а  $D = d/dt$ . Отсюда

$$q = [ED - A]^{-1} m(z - q_j) = \frac{B(D)m(z - q_j)}{f(D)}.$$

Здесь  $B(D)$  – присоединённая матрица для матрицы  $ED - A$ , а  $f(D) = \det(ED - A)$ . Интересующая нас координата  $q_j = \sum_{l=1}^n B_{jl}(D)m_l(z - q_j) / f(D)$ . Соответствующее уравнение движения

$$f(D)q_j = g(D)(z - q_j).$$

Здесь  $g(D) = \sum_{l=1}^n B_{jl}(D)m_l$ . Полиномы  $f(D)$  и  $g(D)$  имеют вид:

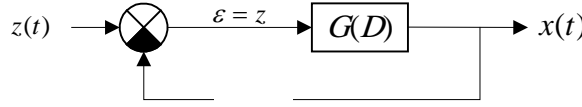
$$\begin{aligned} f(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \\ g(D) &= b_0 D^v + b_1 D^{v-1} + \dots + b_{v-1} D + b_v, \end{aligned}$$

причём  $v < n$ , так  $B_{jl}(D)$  – алгебраическое дополнение элемента исходной матрицы  $ED - A$ . Положим, для удобства,  $q_j = x$ . Тогда уравнение движения можно записать в уже знакомой форме:

$$\left. \begin{aligned} f(D)x &= g(D)\varepsilon \\ \varepsilon &= z - x \end{aligned} \right\}.$$

Наконец, обозначив  $g(D)/f(D) = G(D)$ , имеем  $x = G(D)(z - x)$  или  $x = \frac{G(D)}{1 + G(D)} z = L(D)z$  – уравнение движения замкнутой одномерной системы с конечным числом степеней свободы.

Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению  $[f(D) + g(D)]x(t) = g(D)z(t)$ . Уравнение разомкнутой системы (см. рисунок ниже) получается заменой  $\varepsilon = z - x \rightarrow \varepsilon = z$ :  $f(D)x(t) = g(D)z(t)$  или  $x(t) = G(D)z(t)$ .



**Интегрирование уравнения движения одномерной системы.** Выше при переходе от исходной системы уравнений движения к уравнению  $f(D)q_j = g(D)(z - q_j)$  случилось так, что функция  $z(t)$  оказалась под знаком дифференциального оператора, тогда как в исходную систему уравнений производные от  $z(t)$  не входили. Выходит, что решение полученного уравнения будет зависеть от начального значения самой функции  $z(t)$  и начальных значений производных от  $z(t)$  (до начального значения производной от  $z(t)$ , порядок которой на единицу ниже степени дифференциального оператора  $g(D)$ ). Между тем в решении исходной системы уравнений начальные значения самой функции  $z(t)$  и её производных не участвуют (коль скоро производные от  $z(t)$  не входят в исходную систему явно).

Автор [3] следующим образом поясняет «существо вопроса». Пусть дана система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 + kq_2 &= 0 \\ \dot{q}_2 - kq_1 &= z(t) \end{aligned} \right\}.$$

Исключая отсюда переменную  $q_1$ , получим уравнение второго порядка:

$$\ddot{q}_2 + k^2 q_2 = \dot{z}(t).$$

Применим преобразование Лапласа (сам автор [3] применяет преобразование Карсона-Хевисайда, иначе именуемое как преобразование Лапласа-Карсона [6]). Обозначим  $\eta_2(p) = L[q_2(t)]$ ,  $\varsigma(p) = L[z(t)]$ . Так как

$$\left. \begin{aligned} L[\ddot{q}_2(t)] &= p^2 \eta_2(p) - pq_2(0) - \dot{q}_2(0), \\ L[\dot{z}(t)] &= p\varsigma(p) - z(0) \end{aligned} \right\},$$

то нашему дифференциальному уравнению будет соответствовать следующее уравнение в изображениях:

$$(p^2 + k^2)\eta_2(p) = p\varsigma(p) + pq_2(0) + \dot{q}_2(0) - z(0).$$

Отсюда

$$\eta_2(p) = \frac{p}{p^2 + k^2} \varsigma(p) + q_2(0) \frac{p}{p^2 + k^2} + \frac{1}{k} [\dot{q}_2(0) - z(0)] \frac{k}{p^2 + k^2}.$$

С учётом  $L[\cos kt] = \frac{p}{p^2 + k^2}$ ,  $L[\sin kt] = \frac{k}{p^2 + k^2}$  и

$$L^{-1} \left[ \frac{p}{p^2 + k^2} \times \varsigma(p) \right] = \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau \text{ получим:}$$

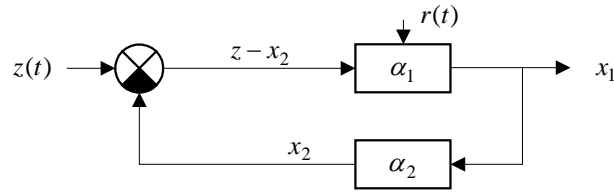
$$q_2(t) = \frac{1}{k} [\dot{q}_2(0) - z(0)] \sin kt + q_2(0) \cos kt + \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau.$$

Но согласно исходной системе  $\dot{q}_2(0) - kq_1(0) = z(0)$ , так что наше решение можно представить в виде:

$$q_2(t) = q_1(0) \sin kt + q_2(0) \cos kt + \int_0^t \cos k(t - \tau) z(\tau) d\tau,$$

где уже нет начального значения  $z(0)$ .

**Многомерная система.** Управляемая система, у которой как входной сигнал, так и сигнал на выходе – векторы, называется многомерной системой. Структурная схема замкнутой системы (здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – просто обозначения звеньев):



Здесь  $x_1$  –  $m_1$ -мерный вектор,  $x_2$  –  $m_2$ -мерный вектор.

Уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D)x_1 &= e_1(D)(z - x_2) + e_r(D)r \\ f_2(D)x_2 &= e_2(D)x_1 \end{aligned} \right\}.$$

Здесь  $f_1(D)$  – матрица типа  $m_1 \times m_1$ , элементами которой являются полиномы от  $D = d/dt$  с постоянными коэффициентами. Аналогично  $f_2(D)$  – матрица типа  $m_2 \times m_2$ ,  $e_1(D)$  – матрица типа  $m_1 \times m_2$ ,  $e_2(D)$  – матрица типа  $m_2 \times m_1$ . Входной сигнал  $z(t)$  –  $m_2$ -мерный вектор,  $r(t)$  –  $m_r$ -мерный вектор возмущений,  $e_r(D)$  – матрица типа  $m_1 \times m_r$ .

Назначение системы – обеспечивать малость рассогласования  $z - x_2$ .

**Характеристический определитель замкнутой системы.** Полагая  $z(t) \equiv 0$ ,  $r(t) \equiv 0$  получим уравнения собственных колебаний системы:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D)x_1 + e_1(D)x_2 &= 0 \\ f_2(D)x_2 - e_2(D)x_1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Соответствующая операционная матрица имеет вид:

$$f(D) = \begin{bmatrix} f_1(D) & e_1(D) \\ -e_2(D) & f_2(D) \end{bmatrix}.$$

Это блочная (коагулированная) матрица. Чтобы найти её определитель, умножим вторую строку матрицы  $f(D)$  слева на матрицу  $-e_1(D)f_2^{-1}(D)$  и сложим полученную строку с первой строкой  $f(D)$ . Здесь  $f_2^{-1}(D)$  – обратная для  $f_2(D)$  матрица. Получим треугольную матрицу  $f^*(D)$  эквивалентную матрице  $f(D)$ :

$$f^*(D) = \begin{bmatrix} f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}(D)e_2(D) & 0 \\ -e_2(D) & f_2(D) \end{bmatrix}.$$

С точностью до постоянного множителя определитель матрицы  $f(D)$  будет равен определителю матрицы  $f^*(D)$ :  $\Delta(D) = \det[f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}e_2(D)]\det f_2(D)$ . Преобразуем выражение в квадратных скобках:  $f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}e_2(D) = f_1(D)[E_{m_1} + W(D)]$ . Здесь  $W(D) = W_1(D)W_2(D)$ ,  $W_i(D) = f_i^{-1}(D)e_i(D)$ ,  $i = 1, 2$ . Матрица  $E_{m_1}$  – единичная, типа  $m_1 \times m_1$ . Заметим, что  $W_1(D)$  – матрица типа  $m_1 \times m_2$ ,  $W_2(D)$  – матрица типа  $m_2 \times m_1$ , а  $W(D)$  – квадратная матрица типа  $m_1 \times m_1$ . Матрицы  $W_i(D)$ ,  $i = 1, 2$ , являются матричными передаточными функциями звеньев  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ . В итоге имеем:

$\Delta(D) = \det[f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}e_2(D)]\det f_2(D) = \det\{f_1(D)[E_{m_1} + W(D)]\}\det f_2(D) = \Delta_1(D)\det[E_{m_1} + W(D)]\Delta_2(D)$ ,  
– характеристический определитель замкнутой управляемой системы. Соответствующее характеристическое уравнение:  $\Delta(p) = 0$ .

**Уравнение автоматического управления.** Вернёмся к уравнениям движения

$$\left. \begin{aligned} f_1(D)x_1 &= e_1(D)(z - x_2) + e_r(D)r \\ f_2(D)x_2 &= e_2(D)x_1 \end{aligned} \right\}$$

и исключим отсюда вектор  $x_2$ . Для этого умножим второе уравнение слева на матрицу  $-e_1(D)f_2^{-1}(D)$  и сложим полученное с первым уравнением. Имеем:

$$[f_1(D) + e_1(D)f_2^{-1}(D)e_2(D)]x_1 = e_1(D)z + e_r(D)r.$$

Или  $f_1(D)[E_{m_1} + W(D)]x_1 = e_1(D)z + e_r(D)r$ . Умножим это уравнение слева на матрицу  $f_1^{-1}(D)$  и получим:

$$[E_{m_1} + W(D)]x_1 = f_1^{-1}e_1(D)z + f_1^{-1}e_r(D)r = W_1(D)z + R(D)r.$$

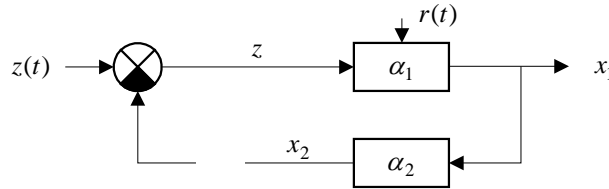
Здесь  $R(D) = f_1^{-1}e_r$  – матрица типа  $m_1 \times m_r$ , передаточная матрица помех.

Наконец,

$$x_1 = [E_{m_1} + W(D)]^{-1}W_1(D)z + [E_{m_1} + W(D)]^{-1}R(D)r$$

– уравнение автоматического управления многомерной системы.

**Разомкнутая управляемая система.**



Уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D)x_1 &= e_1(D)z(t) + e_r(D)r \\ f_2(D)x_2 &= e_2(D)x_1 \end{aligned} \right\}.$$

Полагая  $z(t) \equiv 0$ ,  $r(t) \equiv 0$  получим уравнения собственных колебаний разомкнутой системы:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D)x_1 &= 0 \\ f_2(D)x_2 - e_2(D)x_1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Соответствующая операционная матрица имеет вид:

$$f_0(D) = \begin{bmatrix} f_1(D) & 0 \\ -e_2(D) & f_2(D) \end{bmatrix}.$$

Её определитель  $\Delta_0(D) = \Delta_1(D)\Delta_2(D)$  является характеристическим определителем разомкнутой системы. Уравнение движения разомкнутой на выходе звена  $\alpha_2$  системы  $x_1 = W_1(D)z + R(D)r$  отличается от уравнения движения замкнутой системы отсутствием множителя  $[E_{m_1} + W(D)]^{-1}$ .

### 3. Функция веса и переходная функция стационарной линейной системы [3]

Уравнение движения одномерной замкнутой управляемой системы имеет вид:

$$f(D)x(t) = g(D)z(t).$$

Здесь  $x(t)$  – сигнал на выходе системы,  $z(t)$  – сигнал на входе системы. Полиномы от оператора  $D = d/dt$ :

$$\left. \begin{aligned} f(D) &= a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n \\ g(D) &= b_0D^m + b_1D^{m-1} + \dots + b_{m-1}D + b_m \end{aligned} \right\}, \quad m < n.$$

Обозначим изображения сигналов по Карсону-Хевисайду:  $\zeta(p) \div z(t)$ ,  $\xi(p) \div x(t)$ .  
Изображение для  $D^k x$ :

$$D^k x \div p^k \xi(p) - p^k x(0) - p^{k-1} \dot{x}(0) - \dots - p x^{(k-1)}(0).$$

Сделаем преобразование (здесь  $D_0^\nu x(0) \equiv [d^\nu x / dt^\nu]_{t=0}$ ):

$$\begin{aligned} p^k x(0) + p^{k-1} \dot{x}(0) + \dots + p x^{(k-1)}(0) &= p^k x(0) + p^{k-1} D_0^1 x(0) + p^{k-2} D_0^2 x(0) + \dots + p D_0^{k-1} x(0) = \\ &= p^k \left[ 1 + \frac{D_0^1}{p} + \frac{D_0^2}{p^2} + \dots + \frac{D_0^{k-1}}{p^{k-1}} \right] x(0) = p^k \left[ \frac{p}{p - D_0} - \frac{D_0^k}{p^k} \frac{p}{p - D_0} \right] x(0) = p \frac{p^k - D_0^k}{p - D_0} x(0). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D^k x \div p^k \xi(p) - p \frac{p^k - D_0^k}{p - D_0} x(0).$$

В результате дифференциальные выражения  $f(D)x(t)$  и  $g(D)z(t)$  будут иметь следующие изображения:

$$\left. \begin{aligned} f(D)x(t) \div f(p)\xi(p) - pQ(p) \\ g(D)z(t) \div g(p)\zeta(p) - pP(p) \end{aligned} \right\}, \text{ где } \left. \begin{aligned} Q(p) &= \frac{f(p) - f(D_0)}{p - D_0} x(0) \\ P(p) &= \frac{g(p) - g(D_0)}{p - D_0} z(0) \end{aligned} \right\}.$$

Наконец, имеем уравнение движения в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = p[Q(p) - P(p)] + g(p)\zeta(p).$$

Отсюда

$$\xi(p) = p \frac{Q(p) - P(p)}{f(p)} + \Phi(p)\zeta(p), \text{ где } \Phi(p) = \frac{g(p)}{f(p)} - \text{передаточная функция системы.}$$

Обозначим через  $M(t)$  и  $N(t)$  оригиналы для следующих изображений:

$$p \frac{Q(p) - P(p)}{f(p)} \div M(t), \quad p\Phi(p) \div N(t).$$

Эти оригиналы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{\sigma=1}^s \frac{\exp(\lambda_\sigma t)}{(q_\sigma - 1)!} \left[ \left( t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_\sigma - 1} \frac{Q(p) - P(p)}{f_\sigma(p)} \right]_{p=\lambda_\sigma}, \\ N(t) &= \sum_{\sigma=1}^s \frac{\exp(\lambda_\sigma t)}{(q_\sigma - 1)!} \left[ \left( t + \frac{\partial}{\partial p} \right)^{q_\sigma - 1} \frac{g(p)}{f_\sigma(p)} \right]_{p=\lambda_\sigma}. \end{aligned}$$

Здесь  $s$  – число несовпадающих корней  $\lambda_\sigma$  характеристического уравнения  $f(p) = 0$ ,  $q_\sigma$  – кратность корня  $\lambda_\sigma$ , а  $f_\sigma(p) = f(p) / (p - \lambda_\sigma)^{q_\sigma}$ . Здесь действительные функции  $M(t)$  и  $N(t)$  имеют комплексную форму, но могут быть приведены к явной действительной форме, так как коэффициенты полиномов уравнения движения являются действительными и комплексные корни характеристического уравнения образуют сопряжённые пары.

На основании теоремы об умножении изображений

$$\frac{1}{p} p\Phi(p)\zeta(p) \div \int_0^t N(t-u)z(u)du.$$

В результате решение уравнения движения приобретает вид:

$$x(t) = M(t) + \int_0^t N(t-u)z(u)du.$$

Аналогично случаю одномерной системы с одной степенью свободы назовём  $N(t)$  функцией веса одномерной управляемой системы.

Пусть теперь  $z(t) = \delta(t)$ . Уравнение движения приобретает вид:

$$f(D)x(t) = g(D)\delta(t).$$

Оригиналу  $g(D)\delta(t) = b_0\delta^{(m)}(t) + b_1\delta^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1}\dot{\delta}(t) + b_m\delta(t)$  соответствует изображение

$$g(D)\delta(t) \div b_0p^{m+1} + b_1p^m + \dots + b_{m-1}p^2 + b_mp = pg(p).$$

В результате имеем уравнение движения в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + pg(p), \text{ или } \xi(p) = p\frac{Q(p)}{f(p)} + p\Phi(p).$$

При нулевых начальных условиях  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n-1)}(0) = 0$  имеем  $Q(p) = 0$  и  $\xi(p) = p\Phi(p)$ . Отсюда для оригиналов

$$x(t) = N(t).$$

Таким образом, функция веса  $N(t)$  представляет собой закон движения системы при нулевых начальных условиях под воздействием единичной импульсной функции  $\delta(t)$ .

Найдём переходную функцию системы. Пусть входной сигнал является единичной ступенчатой функцией  $z(t) = 1(t)$ . Уравнение движения приобретает вид:

$$f(D)x(t) = g(D)1(t)$$

Оригиналу  $g(D)1(t) = b_0\delta^{(m-1)}(t) + b_1\delta^{(m-2)}(t) + \dots + b_{m-1}\delta(t) + b_m1(t)$  соответствует изображение

$$g(D)1(t) \div b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_{m-1}p + b_m = g(p).$$

В результате имеем уравнение движения в изображениях:

$$f(p)\xi(p) = pQ(p) + g(p), \text{ или } \xi(p) = p\frac{Q(p)}{f(p)} + \Phi(p).$$

При нулевых начальных условиях  $Q(p) = 0$  и  $\xi(p) = \Phi(p)$ . Отсюда для оригиналов

$$x(t) = A(t), \text{ где } A(t) \div \Phi(p).$$

Таким образом, функция  $A(t)$  – переходная функция системы, представляет собой закон движения системы при нулевых начальных условиях под воздействием единичной ступенчатой функции  $1(t)$ .

Найдём зависимость между функцией веса и переходной функцией. По теореме о начальном значении оригинала  $A(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} [g(p)/f(p)] = 0$  так как степень  $g(p)$  меньше степени  $f(p)$ . Изображение производной от функции  $A(t)$   $\dot{A}(t) \div p[\Phi(p) - A(0)] = p\Phi(p)$  совпадает с изображением функции  $N(t)$ . Следовательно

$$\dot{A}(t) = N(t).$$

**Пример [4, с.501].** Пусть уравнение движения имеет вид:

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = b_0z' + b_1z.$$

Заданы начальные условия:  $x(+0) = x_0$ ,  $x'(+0) = x'_0$ . Кроме того, задано начальное значение воздействия  $z(+0) = z_0$ . Преобразуем уравнение движения по Лапласу:

$$a_0p^2X(p) - a_0px_0 - a_0x'_0 + a_1pX(p) - a_1x_0 + a_2X(p) = b_0pZ(p) - b_0z_0 + b_1Z(p).$$

Отсюда изображение решения:

$$X(p) = \frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2} [(b_0p + b_1)Z(p) - b_0z_0 + (a_0p + a_1)x_0 + a_0x'_0].$$

Левый множитель называется системной функцией. Правый множитель содержит возмущение и начальные условия и называется возбуждающей функцией. Напомним, что в состав возбуждающей функции входят правые начальные значения функций  $x(+0)$ ,  $z(+0)$ . И здесь, по мнению автора [4, Математические основы... под ред. Чемоданова], появляется проблема

с разрывными функциями. Он предлагает следующее: если функция  $z(t)$  разрывна, то следует считать появляющиеся при её дифференцировании дельта-функции и их производные как преобразуемые по Лапласу лишь условно. В самом деле, он полагает, что формально


$$L[\delta(t)] = L\left[\frac{d1(t)}{dt}\right] = pL[1(t)] - 1(+0) = p\frac{1}{p} - 1 = 0,$$

что заведомо неверно. Чтобы поправить дело он предлагает в данном случае считать  $1(+0) = 0$ . Так что если  $z(t) = 1(t)$ , то следует положить  $z_0 = 0$ . Таких проблем, однако, не возникает, если единичная ступенчатая функция определена следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}.$$

При этом дельта-функция и её производные расположатся справа от нуля. То есть система покоится вплоть до  $t = 0$ , а затем её толкают.

Рассмотрим уравнение движения груза на пружинке:



$$m \frac{d^2}{dt^2} x + kx = \Delta P \frac{d}{dt} 1(t)$$

Справа – длящаяся одно мгновение бесконечно большая сила  $F = d\Delta P/dt$ . Ясно, что если до  $t = 0$  система находилась в состоянии покоя, то сразу же после  $t = 0$  груз приобретёт скорость  $x'_{+0} = \Delta P/m$ . Преобразование Лапласа даёт:

$$mp^2 X - mpx_0 - mx'_0 + kX = \Delta P \cdot pL[1(t)] = \Delta P \cdot \left\{ p\frac{1}{p} - 1(0) \right\} = \Delta P.$$

При собственных нулевых начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $x'_0 = 0$ :

$$X = \frac{\Delta P}{mp^2 + k} = \frac{\Delta P}{\sqrt{mk}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad x(t) = \frac{\Delta P}{\sqrt{mk}} \sin \omega t \Big|_{t=0} = 0, \quad x'(t) = \frac{\Delta P}{m} \cos \omega t \Big|_{t=0} = \frac{\Delta P}{m}.$$

Здесь  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

**Непосредственное решение дифференциального уравнения движения [1, Бесекерский и Попов].** Пусть система автоматического регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$f(D)x(t) = g(D)z(t).$$

Решение этого линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$x(t) = x_{\Pi}(t) + x_B(t).$$

Здесь  $x_{\Pi}(t)$  – общее решение однородного уравнения  $f(D)x(t) = 0$  (переходная составляющая) имеет, в случае отсутствия нулевых и кратных корней, вид:

$$x_{\Pi} = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Здесь  $C_1, \dots, C_n$ , – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – корни характеристического уравнения  $a_0 p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$ . При наличии кратных корней

$$x_{\Pi} = \sum_{\sigma=1}^s \left( \sum_{q=0}^{q_{\sigma}-1} c_{q\sigma} t^q \right) e^{\lambda_{\sigma} t}.$$

Здесь  $c_{q\sigma}$  – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями,  $q_{\sigma}$  – кратность корня  $\lambda_{\sigma}$  характеристического уравнения.



Частное, или вынужденное решение  $x_B(t)$  определяется правой частью уравнения движения. Оно соответствует некоторому установившемуся режиму после затухания переходной составляющей  $x_D(t)$ .

Для типового входного воздействия вида единичной ступенчатой функции решение исходного неоднородного уравнения может быть сведено к решению однородного уравнения путём перехода к другой переменной. Заметим, что исходное уравнение для определения реакции системы на единичную функцию

$$(a_0 p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot x(t) = (b_0 p^m + \dots + b_{m-1} p + b_m) \cdot 1(t)$$

замечательно тем, что  $1(t)$  имеет разрыв первого рода при  $t = 0$ , поэтому правая часть содержит производные от разрывной функции. Процедура изгнания производных от разрывной функции  $1(t)$  достаточно сложная. Желающие могут найти её в [4, с.222].

Единственным и достаточным в данном случае результатом указанной процедуры является совокупность начальных условий, которые и учитывают эффект правой части уравнения движения:

$$x_{+0} = x_{-0}, \quad x'_{+0} = x'_{-0}, \quad \dots, \quad x_{+0}^{(n-m-1)} = x_{-0}^{(n-m-1)},$$

$$x_{+0}^{(n-m)} = x_{-0}^{(n-m)} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1(t),$$

$$x_{+0}^{(n-m+1)} = x_{-0}^{(n-m+1)} + \frac{b_1}{a_0} \cdot 1(t) - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}],$$

...

$$x_{+0}^{(n-1)} = x_{-0}^{(n-1)} + \frac{b_{m-1}}{a_0} \cdot 1(t) - \frac{a_{m-1}}{a_0} [x_{+0}^{(n-m)} - x_{-0}^{(n-m)}] - \dots - \frac{a_1}{a_0} [x_{+0}^{(n-2)} - x_{-0}^{(n-2)}].$$

Итак, переходной процесс определяется видом корней характеристического уравнения и начальными условиями с учётом эффекта правой части. Решение, содержащее произвольные постоянные, дифференцируем  $n-1$  раз. Используя начальные условия, получаем систему уравнений, откуда находим эти постоянные.

Рассмотрим уравнение движения груза на пружинке:



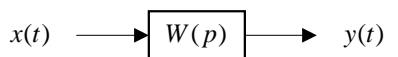
$$m \frac{d^2}{dt^2} x + kx = \Delta P \frac{d}{dt} 1(t)$$

Справа – длящаяся одно мгновение бесконечно большая сила  $F = d\Delta P/dt$ . Ясно, что если до  $t = 0$  система находилась в состоянии покоя, то сразу же после  $t = 0$  груз приобретёт скорость  $x'_{+0} = \Delta P/m$ . В самом деле, согласно выше изложенному формальному подходу, начальные условия:

$$x_{-0} = 0, \quad x'_{-0} = 0, \quad x'_{+0} = x'_{-0} + b_0/a_0 = \Delta P/m.$$

#### 4. Динамические звенья [1, Бесекерский и Попов]

Для расчёта различных систем автоматического управления они разбиваются на динамические звенья. Динамическое звено это устройства любого физического вида, описываемое определённым дифференциальным уравнением. Классификация звеньев производится по виду дифференциального уравнения. Структурная схема динамического звена имеет вид:



Отношение изображений по Лапласу (при нулевых начальных условиях)  $W(p) = Y(p)/X(p)$  – это передаточная функция звена. Здесь  $X(p)$ ,  $Y(p)$  – полиномы от  $p$ .

### Позиционные динамические звенья

Безынерционное звено:

$$y = kx, W(p) = k.$$

Апериодическое звено 1-го порядка:

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx, W(p) = \frac{k}{1+Tp}.$$

Апериодическое звено 2-го порядка:

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (T_1 > 2T_2), W(p) = \frac{k}{1+T_1 p + T_2^2 p^2} = \frac{k}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)},$$

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Колебательное звено (комплексные корни):

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (0 < \zeta < 1), W(p) = \frac{k}{1+2\zeta Tp + T^2 p^2}.$$

Консервативное звено (чисто мнимые корни):

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = kx, W(p) = \frac{k}{1+T^2 p^2}.$$

### Интегрирующие динамические звенья

Идеальное интегрирующее звено:

$$\frac{dy}{dt} = kx \quad (y = k \int x dt), W(p) = \frac{k}{p}.$$

Интегрирующее звено с замедлением:

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kx, W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}.$$

Изодромное звено:

$$\frac{dy}{dt} = k(x + T \frac{dx}{dt}), W(p) = \frac{k}{p} + kT = \frac{k(1+Tp)}{p}.$$

### Дифференцирующие динамические звенья

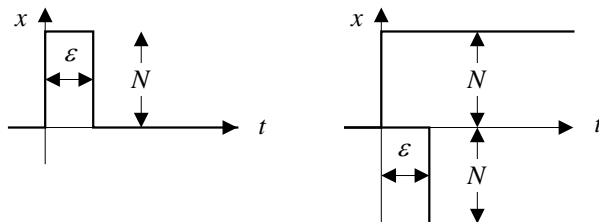
Идеальное дифференцирующее звено:

$$y = k \frac{dx}{dt}, W(p) = kp.$$

Дифференцирующее звено с замедлением:

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{dx}{dt}, W(p) = \frac{kp}{1+Tp}.$$

**Временные характеристики динамических звеньев [1].** Динамические свойства звена определяются по его переходной функции  $h(t)$  и функции веса  $w(t)$ . Напомним, функция веса – реакция системы на дельта-функцию при нулевых начальных условиях. Переходная же функция звена на его выходе является результатом действия единичной ступенчатой функции  $1(t)$  на его входе при нулевых начальных условиях. Функция веса является производной по времени от переходной функции:  $w(t) = h'(t)$ . Докажем это.



На входе звена – импульс с площадью  $N\varepsilon = 1$  (единичный импульс). Иначе он может быть представлен суперпозицией двух единичных ступенчатых функций. На выходе звена имеем

$$y(t) = N[h(t) - h(t - \varepsilon)].$$

Устремим  $N$  к бесконечности, одновременно уменьшая его ширину  $\varepsilon$  так, чтобы площадь импульса оставалась равной единице, т.е.  $N\varepsilon = 1$ . Получим

$$w(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N[h(t) - h(t - \varepsilon)] = N\varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Напомним, что функция веса звена связана с его передаточной функцией преобразованием Лапласа – передаточная функция есть изображение функции веса:

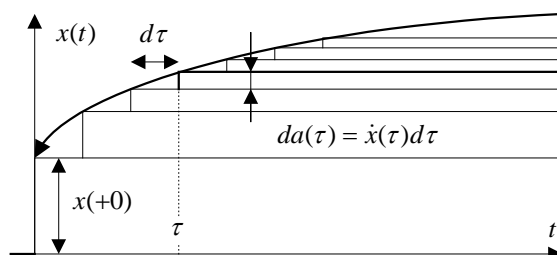
$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-pt} dt = L\{w(t)\}.$$

В свою очередь, переходная функция звена связана с его передаточной функцией преобразованием Карсона-Хевисайда, которое используется рядом авторов:

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt = pL\{h(t)\}.$$

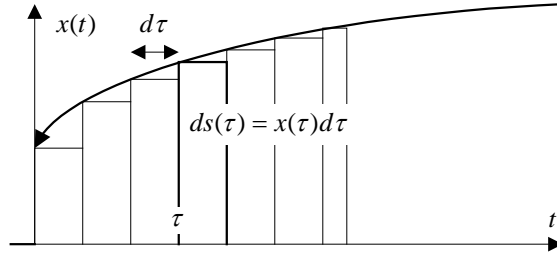
Для входного воздействия произвольного вида, переходной процесс на выходе звена может быть определён по переходной функции:  $y(t) = x(+0)h(t) + \int_0^t \dot{x}(\tau)h(t - \tau)d\tau$  (интеграл Дюамеля-Карсона).

В самом деле. На рисунке ниже входной сигнал  $x(t)$  представлен бесконечным множеством ступенчатых функций  $1(t - \tau)$  с амплитудами  $da(\tau) = \dot{x}(\tau)d\tau$ . Каждая из ступенчатых функций, пройдя через звено, превращается в переходную функцию  $h(t - \tau)$ . На выходе звена они собираются вместе, образуя интеграл Дюамеля-Карсона (см. выше).



Переходной процесс на выходе звена может быть определён также по функции веса:

$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau$ . В самом деле. На рисунке ниже входной сигнал  $x(t)$  представлен бесконечным множеством дельта-функций  $\delta(t-\tau)$  с площадями  $ds(\tau) = x(\tau)d\tau$ . Каждая из дельта-функций, пройдя через звено, превращается в функцию веса  $w(t-\tau)$ . На выходе звена они собираются вместе, образуя интеграл Дюамеля-Карсона (см. выше).

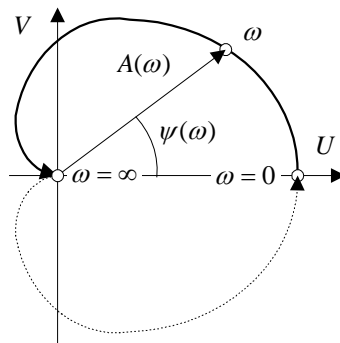


Попробуем перейти от первого представления ко второму следующим образом:

$$y(t) = x(+0)h(t) + \int_0^t \dot{x}(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(+0)h(t) + x(\tau)h(t-\tau) \Big|_{\tau=+0}^{\tau=t} - \int_0^t x(\tau) \frac{d}{d\tau} h(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Здесь для получения правильного результата мы воспользовались соотношением  $h(0) = 0$ , справедливым, строго говоря, для асимметричной единичной функции  $h_+(t)$ . Напомним, что в разделе 2 аргументом в её пользу было одностороннее преобразование Лапласа. С той же целью мы поставили здесь в качестве предела интегрирования  $\tau = +0$ , что вполне соответствует определению несобственного интеграла [6, с.115].

**Амплитудно-фазовая частотная характеристика.** Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФХ) строится на комплексной плоскости. Она представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции  $W(i\omega) = Y(i\omega)/X(i\omega) = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega)$  при изменении частоты от нуля до бесконечности. Здесь  $A(\omega) = |W(i\omega)|$ ,  $\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$ ,  $U(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega)$ ,  $V(\omega) = \operatorname{Im} W(i\omega)$ .



АФХ строится как для положительных, так и для отрицательных частот. Последняя получается заменой в частотной передаточной функции  $+ω$  на  $-ω$  (получается комплексно сопряжённая величина). Т.е. это зеркальное изображение АФХ для положительных частот относительно вещественной оси.

Смысл отрицательных частот. Преобразование Фурье (получаемое из преобразования Лапласа подстановкой  $p \rightarrow i\omega$ ) имеет вид:

$$X(i\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

представляет собой сумму бесконечно малых по величине векторов, вращающихся на комплексной плоскости с разными угловыми скоростями (частотами)  $\omega$ . Так как функция времени является вещественной, то каждому элементарному вектору  $X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$ , вращающемуся против часовой стрелки ( $\omega > 0$ ), должен соответствовать элементарный сопряжённый вектор  $X(-i\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ , вращающийся по часовой стрелке ( $\omega < 0$ ). В этом случае сумма таких векторов будет всегда вещественной. В принципе можно ограничиться рассмотрением только положительных частот (вопрос удобства).

Модуль частотной передаточной функции  $|W(i\omega)| = A(\omega)$  – чётная, а фаза  $\arg W(i\omega) = \psi(\omega)$  – нечётная функция частоты. Также  $\operatorname{Re} W(i\omega)$  – чётная функция частоты, а  $\operatorname{Im} W(i\omega)$  – нечётная.

**АФХ и функция веса [2, Основы... под ред. Пугачёва].** Коль скоро передаточная функция  $W(i\omega) = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega)$ , то функция веса

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(i\omega) e^{i\omega\xi} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(\omega) + iV(\omega)] (\cos \omega\xi + i \sin \omega\xi) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(\omega) \cos \omega\xi - V(\omega) \sin \omega\xi] d\omega + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(\omega) \sin \omega\xi + V(\omega) \cos \omega\xi] d\omega. \end{aligned}$$

Но функция веса – действительная функция. Следовательно,

$$w(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(\omega) \cos \omega\xi - V(\omega) \sin \omega\xi] d\omega.$$

Для физически возможных систем  $w(\xi) = 0$  при  $\xi < 0$ . Замена  $\xi \rightarrow -\xi$  в последнем выражении даёт:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(\omega) \cos \omega\xi + V(\omega) \sin \omega\xi] d\omega.$$

Сложением и вычитанием получим ( $\xi > 0$ ):

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) \cos \omega\xi d\omega, \quad w(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \sin \omega\xi d\omega.$$

Следовательно, физически возможная стационарная линейная система полностью определяется одной действительной (или одной мнимой) частью частотной характеристики.

**Минимально-фазовые звенья [1].** Если корни числителя и знаменателя передаточной функции лежат в левой полуплоскости, то такое звено называется минимально-фазовым. Для минимально-фазовых звеньев имеют место следующие соотношения (без доказательства):

$$U(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(u)}{u - \omega} du, \quad V(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(u)}{u - \omega} du, \quad \psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dL}{d\lambda} \operatorname{Lnch} \left| \frac{\lambda}{2} \right| d\lambda.$$

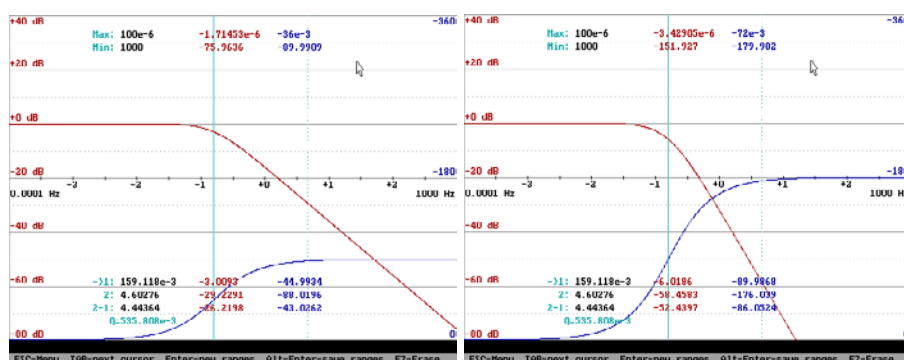
Здесь  $L(u) = \ln A(u)$ ,  $\lambda = \ln(u/\omega)$ . Итак, частотная передаточная функция минимально-фазового звена полностью определяется её вещественной или мнимой частью, или модулем передаточной функции  $A(\omega)$ .

**Логарифмические частотные характеристики [1].** Логарифмические частотные характеристики это действительная и мнимая части логарифма частотной характеристики, откладываемые по оси ординат:

$$\ln W(i\omega) = \ln[A(\omega)e^{i\psi(\omega)}] = \ln A(\omega) + i\psi(\omega).$$

На практике обычно пользуются десятичными логарифмами и строят отдельно логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАХ) –  $L(\omega) = 20\lg|W(i\omega)| = 20\lg A(\omega)$ , и логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФХ)  $\psi(\omega)$ . При этом по оси абсцисс откладывается логарифм частоты.

ЛАХ  $L(\omega)$  выражается в децибелах (дБ). Один Бел соответствует увеличению мощности в 10 раз. Так как  $A(\omega)$  – отношение не мощностей, а напряжений (токов, перемещений и т.п.), то увеличение этого отношения в 10 раз будет соответствовать увеличению отношения мощностей в 100 раз, что соответствует двум Белам или 20 децибелам. Один децибел соответствует отношению  $\sqrt[20]{10} \approx 1.122$ . Ниже изображены ЛАХ и ЛФХ динамических звеньев с передаточными функциями  $W(p) = 1/(1+p)$  (слева) и  $W(p) = 1/(1+p)^2$  (справа).



Каждому «излому» АЧХ соответствует сдвиг фазы. ЛАХ одного апериодического звена имеет излом с асимптотическим спадом характеристики  $-20\text{дБ/дек}$  («минус двадцать децибел на декаду», т.е. уменьшение амплитуды в 10 раз при увеличении частоты в 10 раз). При этом полный (асимптотический) сдвиг фазы равен  $-\pi/2$ . Два таких звена дадут после излома ЛАХ со спадом  $-40\text{дБ/дек}$  и сдвиг фазы  $-\pi$ . То есть ЛАХи и ЛФХи последовательно включенных звеньев суммируются.

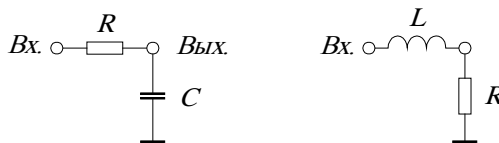
## 5. Характеристики динамических звеньев [1, Бесекерский и Попов]

### Позиционные динамические звенья.

#### Апериодическое звено 1-го порядка.

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad W(p) = \frac{k}{1+Tp}.$$

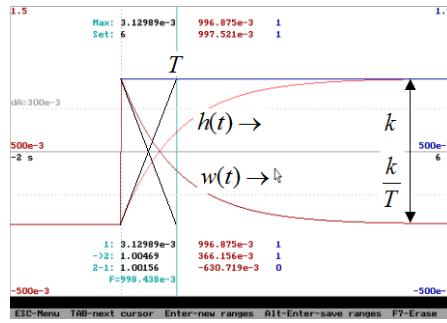
Примеры схемной реализации:



Здесь  $T = RC$  или  $T = L/R$ , а  $k$  стоит для общности (ниже, для определённости  $k = 10$ ).

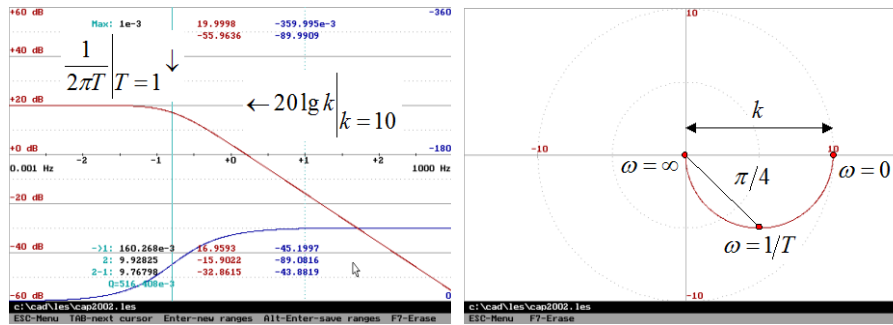
Переходная характеристика и функция веса (напомним,  $w(t) = dh(t)/dt$ ):

$$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t), \quad w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$



Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1+i\omega T}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad \psi(\omega) = -\arctan \omega T.$$



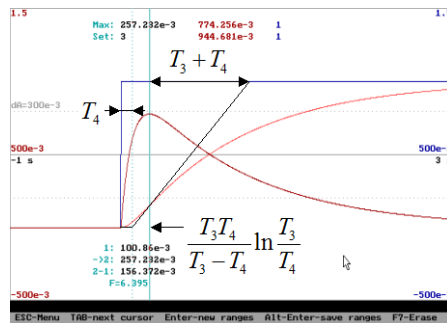
Апериодическое звено 2-го порядка.

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (T_1 > 2T_2), \quad W(p) = \frac{k}{1+T_1 p + T_2^2 p^2} = \frac{k}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)},$$

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}, \quad \text{для определённости } T_3 > T_4.$$

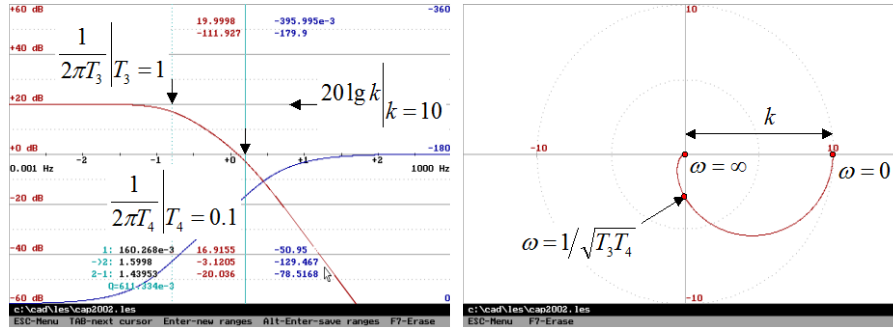
Переходная функция и функция веса:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t), \quad w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left( e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t).$$



Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

$$W(i\omega) = \frac{k}{(1+i\omega T_3)(1+i\omega T_4)}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}}, \quad \psi(\omega) = -\arctan \omega T_3 - \arctan \omega T_4.$$

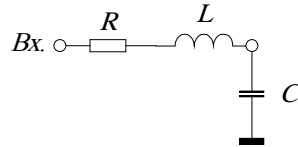


### Колебательное звено.

Описывается тем же дифференциальным уравнением, что и апериодическое звено 2-го порядка, но с параметром затухания, лежащим в пределах  $0 < \zeta < 1$ .

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad W(p) = \frac{k}{1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2} = \frac{k}{1 + 2\zeta \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}}.$$

Здесь  $q = 1/T$  – угловая частота свободных колебаний. Пример схемной реализации:

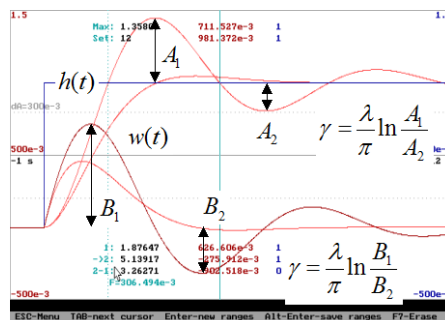


Характеристическое уравнение:  $1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2 = 0$ .

Решение:  $p_{1,2} = -\gamma \pm i\lambda = -\zeta q \pm iq\sqrt{1 - \zeta^2}$ .  $\gamma$  – коэффициент затухания переходного процесса,  $\lambda$  – частота затухающих колебаний.

Переходная характеристика и функция веса:

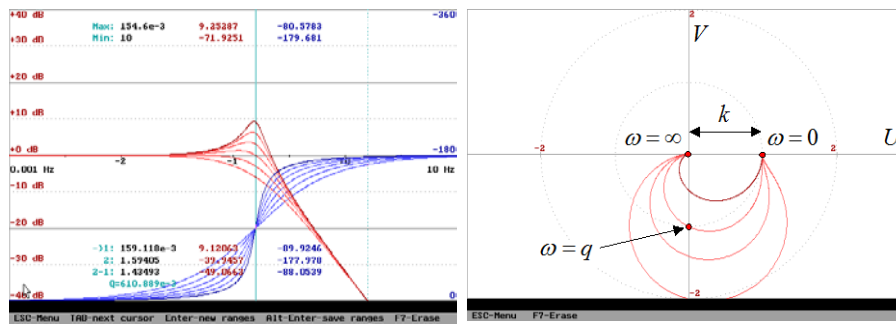
$$h(t) = k \left[ 1 - e^{-\gamma t} \left( \cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \cdot 1(t), \quad w(t) = k \frac{q^2}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t \cdot 1(t).$$



Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1 + i2\zeta \frac{\omega}{q} - \frac{\omega^2}{q^2}}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}, \quad \psi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}.$$





Амплитудная частотная характеристика имеет пик при  $\zeta < 1/\sqrt{2} = 0.707$ .

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}} \Big|_{\zeta = 1/\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega^2 T^2)^2}}$$

– характеристика Баттерворта (предельно плоская в полосе пропускания). Пик с амплитудой

$$A(\omega_M) = \frac{k}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{ соответствует частоте } \omega_M = q\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

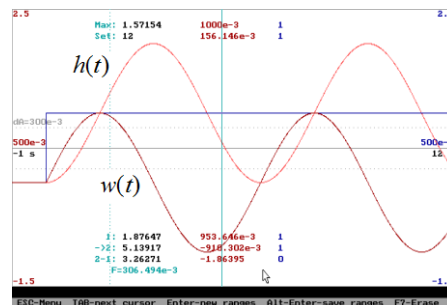
### Консервативное звено.

Является частным случаем колебательного при  $\zeta = 0$ :

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = kx, \quad W(p) = \frac{k}{1 + T^2 p^2}.$$

Переходная функция и функция веса:

$$h(t) = k(1 - \cos qt) \cdot 1(t), \quad w(t) = kq \sin qt \cdot 1(t).$$



Амплитудная и фазовая частотные характеристики ( $q = 1/T$ ):

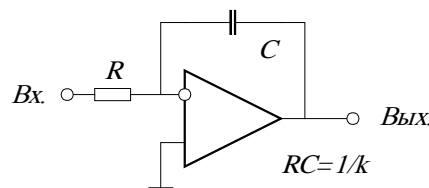
$$A(\omega) = \frac{k}{|1 - \omega^2 T^2|}, \quad \psi(\omega) = \begin{cases} +180^\circ & \omega < -q \\ 0^\circ & \text{при } -q < \omega < q \\ -180^\circ & \omega > q \end{cases}$$

### Интегрирующие звенья.

Идеальное интегрирующее звено.

$$\frac{dy}{dt} = kx \quad (y = k \int x dt), \quad W(p) = \frac{k}{p}.$$

Примером такого звена является операционный усилитель в режиме интегрирования:

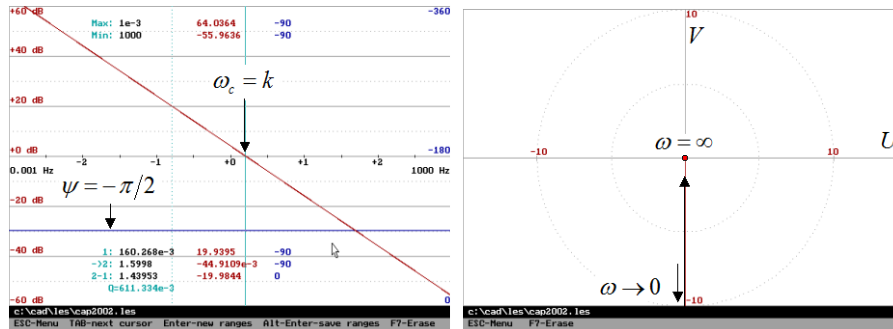


Переходная характеристика и функция веса:

$$h(t) = kt \cdot 1(t), \quad w(t) = k \cdot 1(t).$$

Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

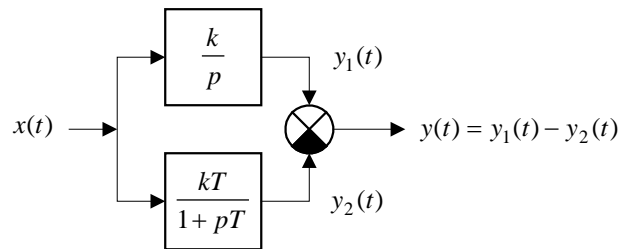
$$W(i\omega) = \frac{k}{i\omega}, \quad \text{частота среза } \omega_c = k, \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \psi(\omega) = -90^\circ.$$



**Интегрирующее звено с замедлением.**

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kx, \quad W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)}.$$

Коль скоро  $W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)} = \frac{k}{p} - \frac{kT}{1+Tp}$ , решение исходного дифференциального уравнения можно представить в виде алгебраической суммы решений для идеального интегрирующего звена и апериодического звена 1-го порядка:

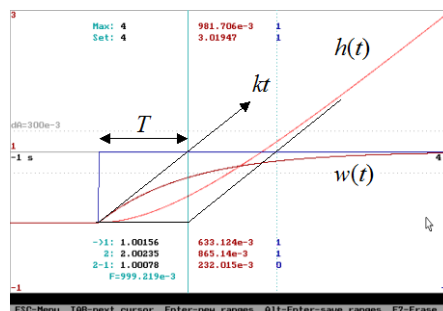


$$\begin{cases} y = y_1 - y_2 \\ \dot{y}_1 = kx \\ T\dot{y}_2 + y_2 = kTx \end{cases}, \quad \frac{dy}{dt} = kx - kx + \frac{1}{T} y_2 = \frac{1}{T} y_2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{T} \left( \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{T} kx - \frac{1}{T} \frac{dy}{dt},$$

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kx.$$

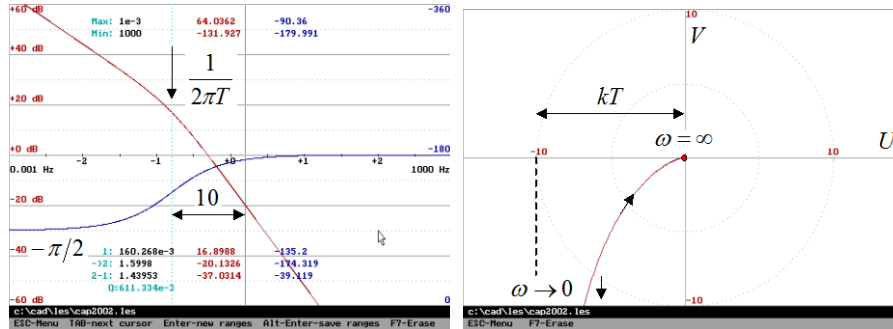
Переходная характеристика и функция веса:

$$h(t) = k \left[ t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \cdot 1(t), \quad w(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t).$$



Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

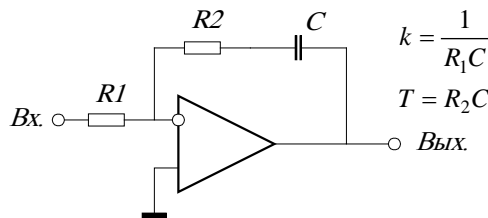
$$W(i\omega) = \frac{k}{i\omega(1+i\omega T)}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad \psi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega T.$$



**Издормное звено.**

$$\frac{dy}{dt} = k(x + T \frac{dx}{dt}), \quad W(p) = \frac{k}{p} + kT = \frac{k(1+Tp)}{p}$$

– параллельное соединение идеально интегрирующего и безынерционного звеньев. Схемная реализация:

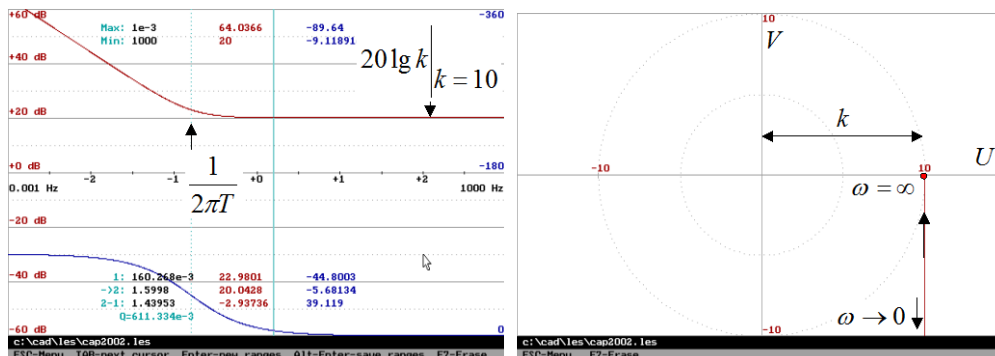


Переходная характеристика и функция веса:

$$h(t) = k(t + T) \cdot 1(t), \quad w(t) = k \cdot 1(t) + kT \cdot \delta(t).$$

Амплитудные частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

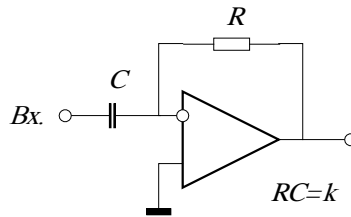
$$W(i\omega) = \frac{k}{i\omega} + kT, \quad A(\omega) = \frac{k\sqrt{1+\omega^2 T^2}}{\omega}, \quad \psi(\omega) = -90^\circ + \arctan \omega T.$$



**Дифференцирующие звенья.**

**Идеальное дифференцирующее звено.**

$$y = k \frac{dx}{dt}, \quad W(p) = kp.$$

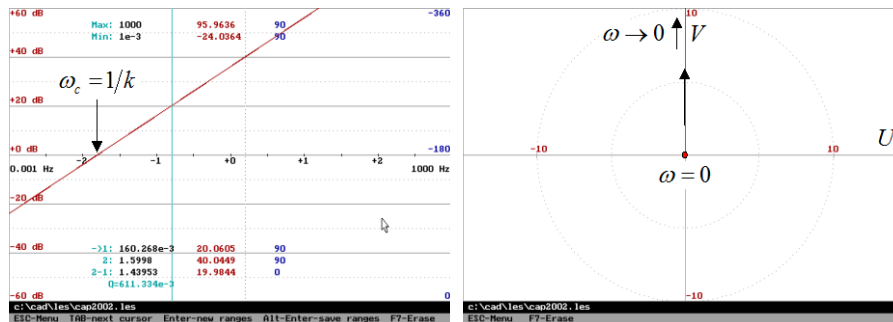


Переходная характеристика и функция веса:

$$h(t) = k\delta(t), \quad w(t) = k\dot{\delta}(t).$$

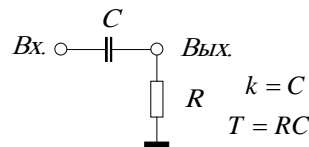
Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

$$W(i\omega) = ki\omega, \quad A(\omega) = k\omega, \quad \psi(\omega) = 90^\circ.$$



**Дифференцирующее звено с замедлением.**

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{dx}{dt}, \quad W(p) = \frac{kp}{1 + Tp}.$$

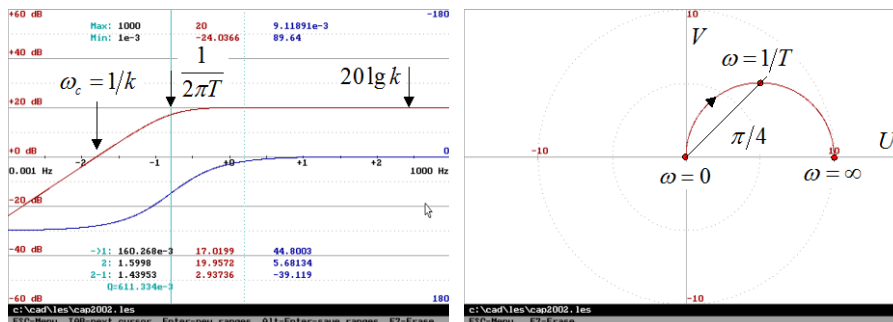


Переходная характеристика и функция веса:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t), \quad w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$

Амплитудная частотная (слева) и фазовая (справа) частотные характеристики:

$$W(i\omega) = \frac{ki\omega}{1 + i\omega T}, \quad A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \psi(\omega) = 90^\circ - \arctan \omega T.$$



**Неустойчивые и неминимально-фазовые звенья [1].** Рассмотренные выше звенья позиционного типа относятся к устойчивым звеньям. Неустойчивыми звеньями являются та-

кие, корни характеристического уравнения которых (корни знаменателя передаточной функции) лежат в правой полуплоскости.

Пример неустойчивого звена:

$$T \frac{dy}{dt} - y = kx, W(p) = \frac{k}{-1 + Tp}.$$

Переходная функция:

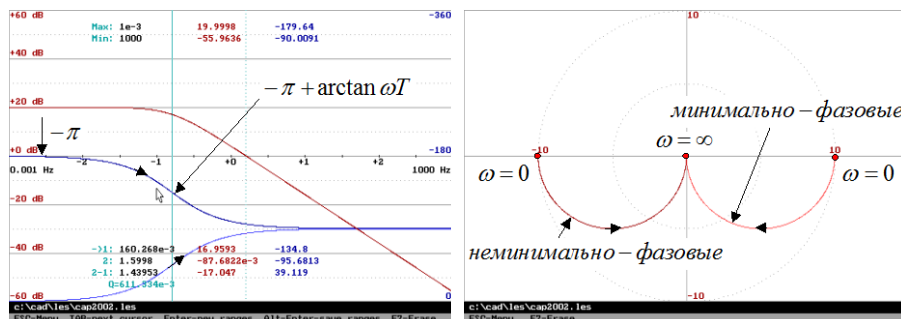
$$h(t) = k\{\exp(t/T) - 1\} \cdot 1(t).$$

Существенной особенностью неустойчивых звеньев является наличие больших по сравнению с устойчивыми звеньями фазовых сдвигов. То есть, неустойчивые звенья это обязательно неминимально-фазовые звенья. Обратное не обязательно.

Амплитудная частотная (слева) и фазовая частотная (справа) характеристики:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \psi(\omega) = -\arctan \frac{\omega T}{-1} = -180^\circ + \arctan \omega T.$$

Напомним, у устойчивого апериодического звена  $\psi(\omega) = -\arctan \omega T$ . При одинаковых амплитудных характеристиках звеньев у неминимально-фазового звена фазовый сдвиг больше (по модулю).

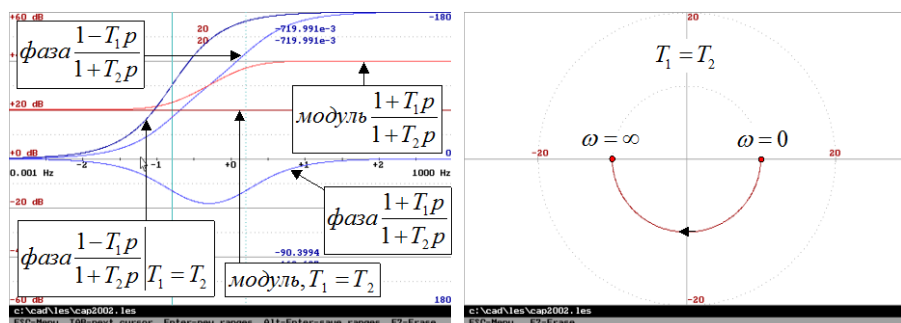


К минимально-фазовым звеньям относятся такие, у которых корни числителя и знаменателя передаточной функции находятся в левой полуплоскости.

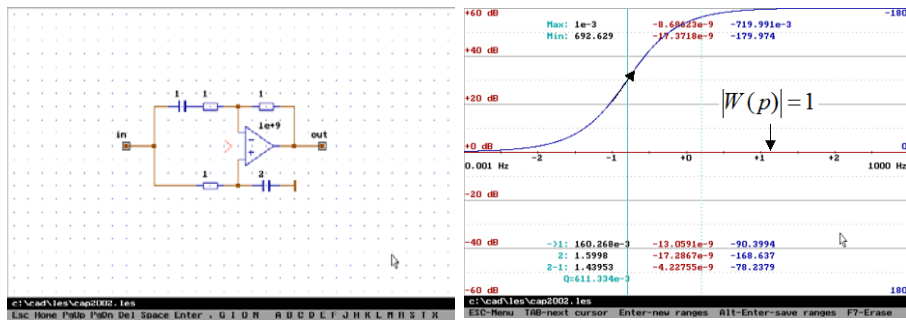
К неминимально-фазовым звеньям относятся (кроме неустойчивых) также устойчивые звенья, имеющие в числителе передаточной функции (в правой части соответствующего дифференциального уравнения) корни с положительной вещественной частью. Например, устойчивое звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p}, \psi(\omega) = -\arctan \omega T_1 - \arctan \omega T_2$$

относится к группе неминимально-фазовых звеньев.



Реализация этого устойчивого неминимально-фазового звена на базе операционного усилителя:



## Другие неустойчивые звенья.

Квазиконсервативное:

$$W(p) = \frac{k}{-1 + T^2 p^2} = \frac{k}{(-1 + Tp)(1 + Tp)}.$$

Квазиколебательное:

$$W(p) = \frac{k}{-1 + 2\zeta Tp + T^2 p^2}.$$

Колебательное звено с отрицательным затуханием:

$$W(p) = \frac{k}{1 - 2\zeta Tp + T^2 p^2}.$$

Квазиколебательное звено с отрицательным затуханием:

$$W(p) = \frac{k}{-1 - 2\zeta Tp + T^2 p^2}.$$

Неустойчивое интегрирующее звено:

$$W(p) = \frac{k}{p(-1 + Tp)}.$$

## 6. Критерии устойчивости линейной системы [1, Бесекерский и Попов]

Устойчивость системы управления – способность возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил. Если с течением времени изображающая точка в фазовом пространстве координат системы стремится к началу координат, то система асимптотически устойчива.

Заметим, что понятие устойчивости можно распространить и на случай движения системы и говорить о невозмущённом движении. Заданное невозмущённое движение будет устойчивым, если после исчезновения возмущения возмущённое движение по истечении некоторого времени войдёт в заданную область:

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дифференциальное уравнение движения системы автоматического регулирования имеет в общем случае вид:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \cdot z(t).$$

Здесь  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $x(t)$  – регулируемая величина,  $z(t)$  – управляющее воздействие или возмущение. Решение этого уравнения есть сумма двух решений: частного решения неоднородного уравнения (с правой частью) – вынужденное решение, и общего решения однородного уравнения (без правой части) – свободное решение (в теории авторегулирования – переходная составляющая):

$$x(t) = x_B(t) + x_{II}(t).$$

Система устойчива, если с течением времени переходная составляющая будет стремиться к нулю. Следовательно, для определения устойчивости, необходимо решить уравнение без правой части:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot x(t) = 0.$$

Решение ищется в виде:

$$x(t) = C e^{\lambda t}.$$

Подстановка даёт характеристическое уравнение (множитель  $C e^{\lambda t}$  сокращается):

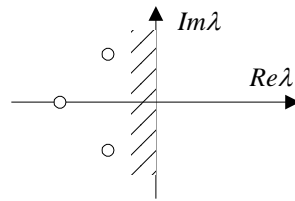
$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Корни этого уравнения (здесь – некрратные корни) определяют переходной процесс:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Постоянные интегрирования определяются также видом правой части уравнения движения, поэтому форма переходного процесса определяется как левой, так и правой частями исходного уравнения. Тем не менее, устойчивость линейной системы определяется только характеристическим уравнением.

Очевидно, что для затухания переходного процесса необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения были отрицательными – лежали слева от мнимой оси плоскости корней (в левой полуплоскости). Вид плоскости корней:



Система будет находиться на границе устойчивости при наличии

1. Нулевого корня,
2. Пары чисто мнимых корней.

В первом случае какой-то корень  $\lambda_k = 0$ . Это значит, что в характеристическом уравнении отсутствует свободный член:  $a_n = 0$ . В этом случае дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) \cdot p x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \cdot z(t),$$

и система будет устойчивой не относительно регулируемой величины  $x(t)$ , а относительно скорости её изменения  $p x(t)$ . Такая система называется нейтрально устойчивой. В случае пары чисто мнимых корней система будет иметь незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой.

Можно судить об устойчивости системы, не решая характеристического уравнения. Так, необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. В самом деле. Если скоро система устойчива, то все корни имеют отрицательные действительные части. Запишем характеристическое уравнение в виде:

$$a_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0.$$

Скобки с чисто действительными корнями будут иметь вид  $(\lambda + |\lambda_i|)$ , а пара скобок с комплексными корнями будет иметь вид:

$$(\lambda + |\operatorname{Re} \lambda_j| - i \operatorname{Im} \lambda_j)(\lambda + |\operatorname{Re} \lambda_j| + i \operatorname{Im} \lambda_j) = ([\lambda + |\operatorname{Re} \lambda_j|]^2 + [\operatorname{Im} \lambda_j]^2).$$

Коль скоро в тех и других скобках нет компонентов со знаком «минус», неоткуда появиться знаку «минус» при раскрытии всех скобок.

**Критерий устойчивости Рауса-Гурвица [1].** Задача об отыскании критерия устойчивости для систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка (степени), была сформулирована Максвеллом в 1868 году и решена Раусом в 1877 году в форме алгоритма – последовательности математических операций. В 1895 году Гурвиц сформулировал критерий в алгебраической форме.

Составляется квадратная матрица [7]:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}.$$

При  $a_0 > 0$  должны быть больше нуля следующие определители:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т.д.}$$

Последний определитель включает в себя всю матрицу. Он выражается через предпоследний определитель  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$ , что сводится к требованию  $a_n > 0$ , так как  $\Delta_{n-1} > 0$ .

Система будет на границе устойчивости при  $\Delta_n = 0$  и  $\Delta_m > 0$  ( $m < n$ ). Это возможно либо при  $a_n = 0$ , либо при  $\Delta_{n-1} = 0$ . При  $a_n = 0$  имеет место апериодическая устойчивость, при  $\Delta_{n-1} = 0$  – колебательная.

**Уравнение первой степени**  $a_0 p + a_1 = 0$ . Критерий Гурвица:  $\begin{cases} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \end{cases}$ .

**Уравнение второй степени**  $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$ .

$$\text{Критерий Гурвица: } \begin{cases} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0 \rightarrow a_2 > 0 \end{cases}.$$

**Уравнение третьей степени**  $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ .



$$\text{Критерий Гурвица: } \left\{ \begin{array}{l} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \cdot a_3 > 0 \rightarrow a_3 > 0 \end{array} \right. .$$

Здесь уже недостаточно положительности коэффициентов характеристического уравнения.

**Уравнение четвёртой степени**  $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$ .

$$\text{Определитель Гурвица: } \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} .$$

Здесь кроме положительности коэффициентов, требуется выполнение условия  $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0$ .

**Уравнение пятой степени**  $a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$ .

$$\text{Определитель Гурвица: } \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} .$$

Здесь кроме положительности коэффициентов, требуется выполнение двух условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0 \end{array} \right. .$$

На практике применение критерия Рауса-Гурвица ограничивается уравнениями четвёртой степени.

**Критерий устойчивости Михайлова [1].**

Характеристический полином (знаменатель передаточной функции):

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n .$$

Характеристический комплекс (замена  $p \rightarrow i\omega$ ):

$$D(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega) = |D(i\omega)| e^{i\psi(\omega)} .$$

Вещественная часть содержит только чётные степени  $\omega$ :  $X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$ , а мнимая – только нечётные:  $Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$ .

Критерий Михайлова (1936):

Характеристический полином не будет иметь корней в правой полуплоскости, если полное приращение фазы  $\psi(\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности будет равно  $n \times \pi/2$ , где  $n$  – степень характеристического полинома  $D(p)$ .

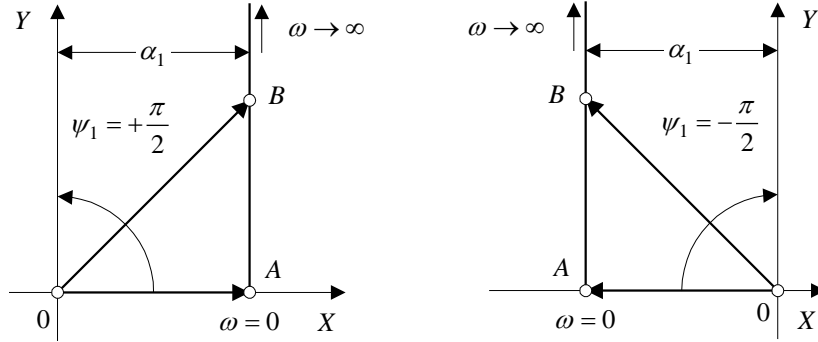
Доказательство.

Характеристический комплекс  $D(i\omega)$  – точка на комплексной плоскости  $(X, Y)$ . При изменении частоты описывается кривая – годограф Михайлова. Определим угол её поворота. Запишем характеристический комплекс (вектор) в виде:

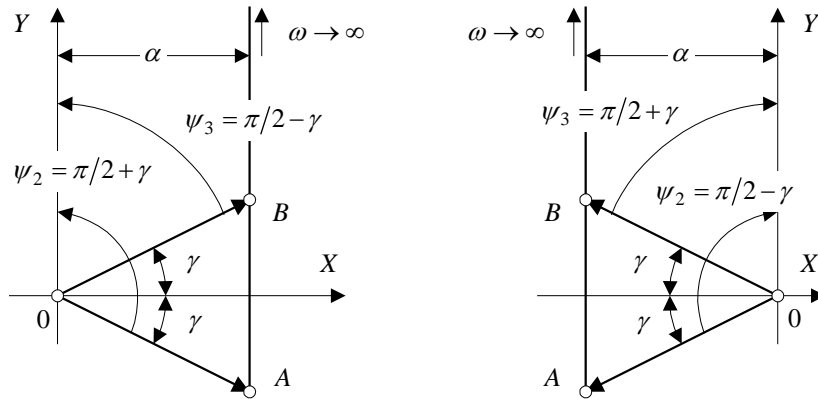
$$D(i\omega) = a_0(i\omega - p_1)(i\omega - p_2)...(i\omega - p_n)$$

– произведение  $n$  комплексных чисел. При перемножении аргументы комплексных чисел складываются, поэтому результирующий угол поворота вектора  $D(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей.

Пусть, например, корень  $p_1$  – вещественный и отрицательный, т.е.  $p_1 = -\alpha_1$ . Вид соответствующего сомножителя:  $(\alpha_1 + i\omega)$ . Годограф представляет собой вертикальную линию, исходящую из точки  $A$  на оси  $X$ , уходящую в бесконечность (см. рисунок ниже слева).



Результирующий угол поворота вектора  $OB$ :  $\psi_1 = +\pi/2$ . При  $p_1 = +\alpha_1$  (справа на рисунке) соответствующий угол поворота  $\psi_1 = -\pi/2$ . Пусть два корня, например, корни  $p_2$  и  $p_3$  – комплексно сопряжённые с отрицательной вещественной частью, т.е.  $p_{2,3} = -\alpha \pm i\beta$ . Вид соответствующих сомножителей:  $(\alpha - i\beta + i\omega)(\alpha + i\beta + i\omega)$ .



Здесь угол  $\gamma = \arctan \beta/\alpha$ . Годографы представляют собой вертикальные линии, исходящие из точек  $A$  и  $B$ , и уходящие в бесконечность. Результирующие углы поворота векторов  $OA$  и  $OB$ , соответственно,  $\psi_2 = +\pi/2 + \gamma$  и  $\psi_3 = +\pi/2 - \gamma$ . Вектор, соответствующий произведению  $(\alpha - i\beta + i\omega)(\alpha + i\beta + i\omega)$ , повернётся на угол  $\psi_2 + \psi_3 = +2 \times \pi/2$ . При  $p_{2,3} = +\alpha \pm i\beta$  (справа на рисунке) соответствующий угол поворота  $\psi_2 + \psi_3 = -2 \times \pi/2$ .

Итак, если характеристическое уравнение будет иметь  $l$  корней с положительной вещественной частью, то, каковы бы ни были эти корни (вещественные или комплексные), сумма углов поворотов будет равна  $-l \times \pi/2$ . Все остальные  $n - l$  корней дадут сумму углов поворотов  $(n - l) \times \pi/2$ . В результате общий угол поворота вектора  $D(i\omega)$  будет равен  $\psi = (n - l) \frac{\pi}{2} - l \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2} - l \pi$ . Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы  $l = 0$ .

Годограф Михайлова всегда имеет форму плавной спирали, конец которой уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического полинома. Неустойчивость системы всегда связана с тем, что нарушается

последовательность прохождения квадрантов годографом Михайлова, и угол поворота оказывается меньше, чем  $n \times \pi/2$ .

Годографы на рисунке ниже слева соответствуют полиномам:

$$(1 + p),$$

$$(1 + p)(1 + p),$$

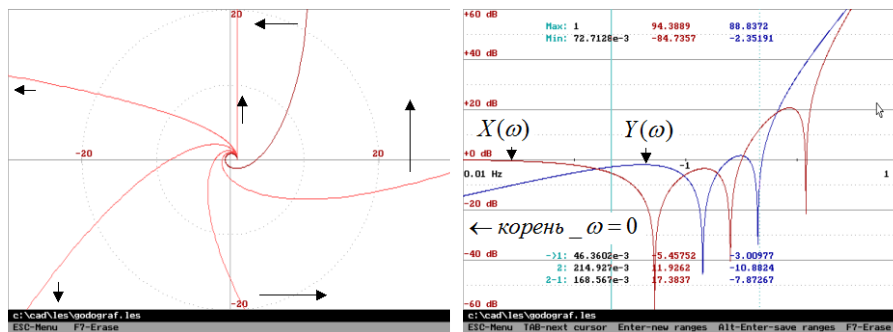
$$(1 + p)(1 + p)(1 + p),$$

$$(1 + p + p^2)(1 + p)(1 + p),$$

$$(1 + p + p^2)(1 + p + p^2)(1 + p),$$

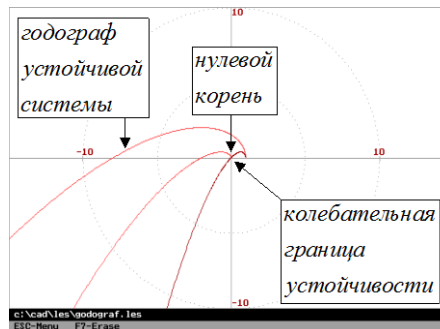
$$(1 + p + p^2)(1 + p + p^2)(1 + p + p^2) = 1 + 3p + 6p^2 + 7p^3 + 6p^4 + 3p^5 + p^6 =$$

$$= (1 - 6\omega^2 + 6\omega^4 - \omega^6) + i(3\omega - 7\omega^3 + 3\omega^5)$$



Критерий Михайлова может быть сформулирован иначе. Для устойчивой системы годограф Михайлова проходит последовательно  $n$  квадрантов. Поэтому корни уравнений  $X(\omega) = 0$  и  $Y(\omega) = 0$  (частоты, при которых годограф пересекает оси  $Y$  и  $X$ ) должны чередоваться (на рисунке выше справа  $X(\omega) = 1 - 6\omega^2 + 6\omega^4 - \omega^6$ ,  $Y(\omega) = 3\omega - 7\omega^3 + 3\omega^5$ ).

Границы устойчивости первого и второго типа (нулевой корень и колебательная граница устойчивости):



Нулевой корень – отсутствует свободный член ( $a_n = 0$ ) и годограф идёт из начала координат. Колебательная граница устойчивости:  $D(i\omega_0) = X(\omega_0) + iY(\omega_0) = 0 \rightarrow X(\omega_0) = 0, \rightarrow Y(\omega_0) = 0$  – точка  $\omega = \omega_0$  попадает в начало координат (при этом  $\omega_0$  – частота незатухающих колебаний).

**Построение области устойчивости (D-разбиение).** Значения тех или иных параметров системы могут влиять на её устойчивость. В этом случае определяют области устойчивости. Ограничимся двумя параметрами.

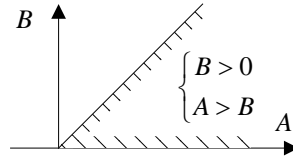
Пусть характеристическое уравнение имеет вид (откуда оно берётся, рассмотрим позже):

$$p^3 + Ap^2 + p + B = 0.$$

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица (удобен для систем не выше четвёртого порядка):

$$\begin{cases} a_1 = A > 0 \\ a_3 = B > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 = A - B > 0 \end{cases}.$$

Формально граница устойчивости первого типа (нулевой корень) определяется равенством  $B=0$ , а граница устойчивости колебательного типа определяется равенством  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = A - B = 0$ :



Для уравнений любого порядка удобен критерий Михайлова. Колебательной границе устойчивости соответствует равенство  $D(i\omega, A, B) = 0$ , которое распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} X(\omega, A, B) = 0 \\ Y(\omega, A, B) = 0 \end{cases}.$$

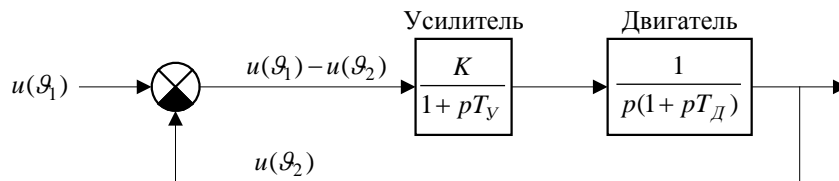
Эта система уравнений параметрически описывает границу области устойчивости (здесь параметром является  $\omega$  – частота гармонических колебаний системы) – при соблюдении дополнительного условия отрицательности вещественных частей всех остальных корней кроме чисто мнимых.

Совокупность всех кривых на плоскости параметров называется D-разбиением. Из всего комплекса этих кривых собственно границы области устойчивости определяются по следующему правилу. Перемещаясь вдоль кривой в сторону увеличения  $\omega$ , надо штриховать её с левой (правой) стороны, если будет положительным (отрицательным) определитель

$$\begin{vmatrix} \partial X / \partial A & \partial X / \partial B \\ \partial Y / \partial A & \partial Y / \partial B \end{vmatrix}.$$

Здесь штриховка будет направлена внутрь области устойчивости, если параметр  $A$  отложен по оси абсцисс вправо, а параметр  $B$  – по оси ординат вверх.

### Пример – дистанционная следящая система.



Здесь  $\theta_1, \theta_2$  – углы поворотов командной и исполнительной осей,  $T_y, T_d$  – постоянная времени усилителя и электромеханическая постоянная времени двигателя (заданная величина). Требуется построить область устойчивости в плоскости двух параметров – общего коэффициента усиления  $K$  и постоянной времени усилителя.

Передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + pT_y)(1 + pT_d)}.$$

Характеристическое уравнение:

$$1 + W(p) = 0, \text{ т.е. } T_y T_d p^3 + (T_y + T_d) p^2 + p + K = 0.$$

Характеристический комплекс:

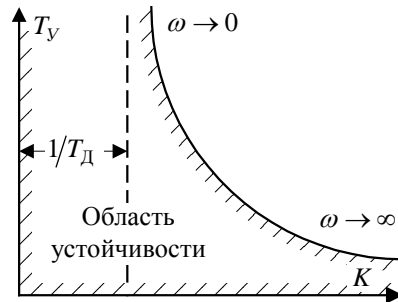
$$D(i\omega) = K + i\omega - \omega^2(T_v + T_d) - i\omega^3T_vT_d.$$

Уравнения, определяющие границу области устойчивости:

$$\begin{cases} X = K - \omega^2(T_v + T_d) = 0 \\ Y = \omega - \omega^3T_vT_d = 0 \end{cases}.$$

Решение:

$$T_v = \frac{1}{T_d\omega^2}, K = \frac{1}{T_d} + T_d\omega^2.$$



Знак определителя:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = 1, \frac{\partial X}{\partial T_v} = -\omega^2, \frac{\partial Y}{\partial K} = 0, \frac{\partial Y}{\partial T_v} = -\omega^3T_d, \begin{vmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & -\omega^3T_d \end{vmatrix} = -\omega^3T_d < 0 \text{ — штриховка справа.}$$

## 7. Критерий устойчивости Найквиста [1, Бесекерский и Попов]

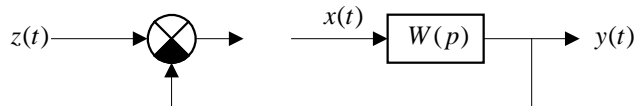
Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m}{c_0p^n + c_1p^{n-1} + \dots + c_n}.$$

Причём в реальных системах степень числителя не может быть больше степени знаменателя:  $m \leq n$ . Частотная передаточная функция получается при подстановке  $p = i\omega$ :

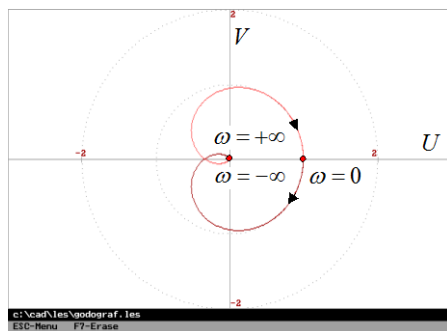
$$W(i\omega) = \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Уточним смысл частотной передаточной функции. Система управления в разомкнутом состоянии:



Если на вход звена  $W(p)$  подать гармонический сигнал ошибки  $x(t) = X_{\max} \sin \omega t$  с амплитудой  $X_{\max}$ , то в установившемся режиме величина  $y(t) = Y_{\max} \sin(\omega t + \psi)$  на выходе будет также изменяться по гармоническому закону с амплитудой  $Y_{\max}$  и фазовым сдвигом  $\psi$ . Модуль частотной передаточной характеристики представляет собой отношение амплитуд выходной и входной величин  $A(\omega) = Y_{\max}/X_{\max}$ , а аргумент — сдвиг фазы  $\psi$ . Если изменять частоту входного сигнала от  $-\infty$  до  $+\infty$  и откладывать на комплексной плоскости точки, соответствующие получающимся комплексным числам, то геометрическое место этих точек образует амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы (АФХ).

В реальных системах всегда  $m < n$ . Поэтому при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ , модуль частотной передаточной функции стремится к нулю и соответствующая точка попадает в начало координат:



Сформулируем необходимые и достаточные требования к АФХ разомкнутой системы, при выполнении которых система будет устойчивой в замкнутом состоянии.

**Статическая система.** Рассмотрим вначале статическую систему, т.е. такую, знаменатель передаточной функции которой  $W(p)$  не имеет в качестве сомножителя оператор  $p$ . Кроме того, рассмотрим пока только устойчивые в разомкнутом состоянии системы, т.е. такие, полюсы  $W(p)$  которых (т.е. нули характеристического полинома  $Q(p)$ ) лежат в левой полуплоскости. Введём вспомогательную функцию (заметим, что это знаменатель передаточной функции замкнутой системы):

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}.$$

Заметим, что полином в числителе  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  является знаменателем передаточной функции замкнутой системы, т.е. характеристическим полиномом замкнутой системы. Соответствующий характеристический комплекс

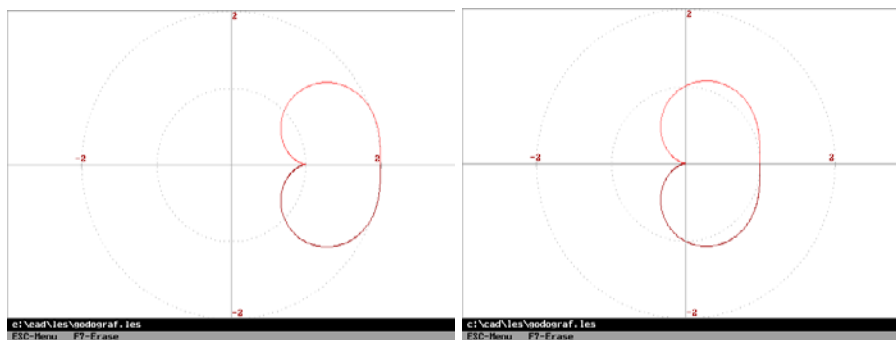
$$W_1(i\omega) = \frac{D(i\omega)}{Q(i\omega)}.$$

Результирующий угол поворота вектора  $W_1(i\omega)$  при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$\psi = \psi_D - \psi_Q = 2n \frac{\pi}{2} - 2n \frac{\pi}{2} = 0,$$

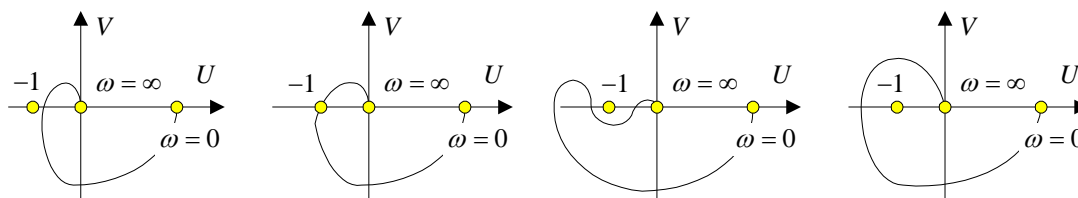
так как устойчивы замкнутая и разомкнутая системы (все корни уравнения  $D(p) = 0$  и уравнения  $Q(p) = 0$  лежат в левой полуплоскости) – таков критерий Михайлова.

Итак, если система с передаточной функцией  $W(p)$  устойчива в замкнутом состоянии, то годограф  $W_1(i\omega) = 1 + W(i\omega)$  (левый рисунок ниже) не охватывает начало координат (необходимость). И наоборот, если годограф  $W_1(i\omega) = 1 + W(i\omega)$  не охватывает начало координат, или, что то же самое, годограф  $W(i\omega) = W_1(i\omega) - 1$  (правый рисунок ниже) не охватывает точку с координатами  $(-1, i0)$ , то система устойчива в замкнутом состоянии (достаточность).

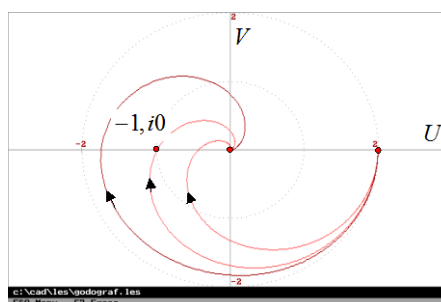


Докажем достаточность. Коль скоро  $\psi = \psi_D - \psi_Q = 0$ , и нули  $Q(p)$  лежат в левой полуплоскости, то  $\psi_D = \psi_Q = 2n(\pi/2)$ . Таким образом, согласно критерию Михайлова, все нули  $D(p)$  лежат в левой полуплоскости, т.е. замкнутая система устойчива.

Различают случай абсолютно устойчивой системы, случай нахождения системы на границе устойчивости (колебательная устойчивость), случай условно устойчивой системы и случай неустойчивой системы (см. рисунки слева направо ниже).



Абсолютно устойчивая система остаётся устойчивой при любом уменьшении коэффициента усиления разомкнутой цепи. Условно устойчивая система будет устойчивой при изменении коэффициента усиления в определённых пределах. Если система находится на границе устойчивости, то это будет устойчивость колебательного типа. В самом деле, коль скоро при некоторой частоте годограф пересекает точку с координатами  $(-1, i0)$ , то  $W(i\omega) = -1 + i0$ , или  $1 + W(i\omega) = 0$ . Т.е. чисто мнимый корень является решением характеристического уравнения.



### Система с астатизмом первого порядка.

$$W(p) = \frac{1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})}.$$

Пусть все нули знаменателя (кроме  $p = 0$ ) лежат в левой полуплоскости. Т.е. в разомкнутом состоянии система является нейтрально устойчивой. При изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  соответствующая изображающая точка движется снизу вверх по мнимой оси. При этом амплитудно-фазовая характеристика имеет разрыв в точке  $\omega = 0$ . Модуль стремится к бесконечности, а фаза испытывает скачок на  $180^\circ$ .

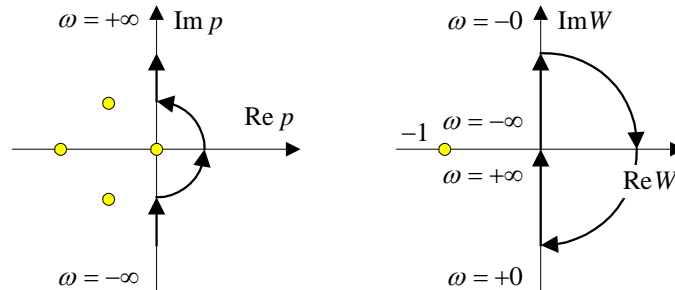
Как полагают авторы [1, с.154], «Для получения определённости в ходе амплитудно-фазовой характеристики необходимо отнести нулевой корень знаменателя передаточной функции  $W(p)$  либо к левой, либо к правой полуплоскости корней. Первое являет-

ся более удобным, так как при этом все корни знаменателя  $W(p)$  будут расположены в левой полуплоскости.»

Сочтя аргумент «удобства» весомым, обойдём нашу точку справа по полуокружности бесконечно малого радиуса. При этом рассмотрим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\rho e^{i\varphi}} = Re^{i(-\varphi)}.$$

Здесь  $R = 1/\rho \rightarrow \infty$ , а аргумент  $(-\varphi)$  меняется в пределах от  $+\pi/2$  до  $-\pi/2$ .

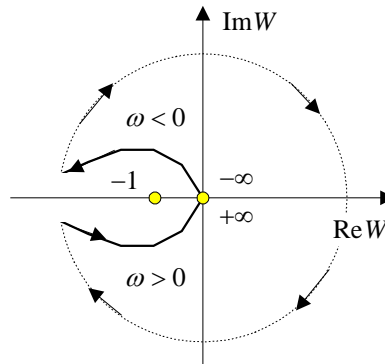


Во время движения по полуокружности бесконечно малого радиуса справа передаточная функция  $W(p)$  может быть представлена в виде вектора бесконечно большой длины, поворачивающегося в правой половине комплексной плоскости по часовой стрелке на угол, равный  $\pi$  (от  $+\pi/2$  до  $-\pi/2$ ), что соответствует полуокружности бесконечно большого радиуса. Характеристика не охватывает точку  $(-1, i0)$ . Следовательно, нулевой корень знаменателя  $W(p)$  сам по себе не приводит к неустойчивости замкнутой системы. Будет ли система условно или колебательно устойчивой, а также неустойчивой, теперь зависит от вида регулярной части передаточной функции, которая здесь равна  $W(p) \cdot p$ .

#### Система с астатизмом второго порядка.

$$W(p) = \frac{1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m}{p^2(1 + C_{n-3}p + \dots + C_0p^{n-2})}.$$

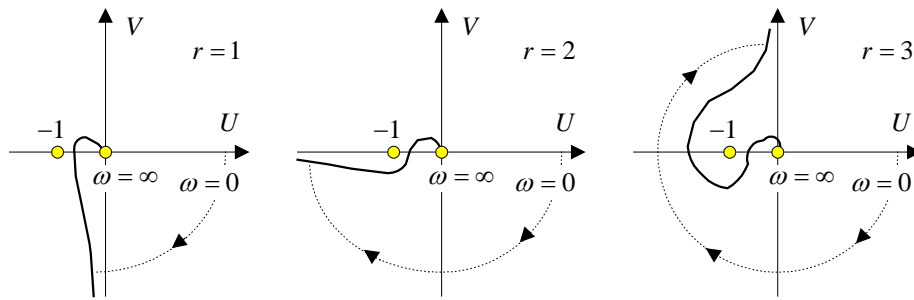
При обходе двойного нулевого корня в начале координат справа передаточная функция разомкнутой системы представляется вектором бесконечно большой длины, поворачивающимся по часовой стрелке от  $-\pi$  до  $-\pi$  на угол  $+2\pi$ :



Из рисунка видно, что характеристика  $W(p) = 1/p^2$  не охватывает точку  $(-1, i0)$ . Следовательно, и двойной нулевой корень знаменателя  $W(p)$  сам по себе не приводит к неустойчивости замкнутой системы.

Для определения устойчивости системы с астатизмом любого порядка достаточно построить ветвь амплитудно-фазовой характеристики только для положительных частот, дополнив её окружностью бесконечно большого радиуса так, как это изображено на рисунке ниже (при обходе начала координат справа!).





Из рисунка, в частности, следует, что абсолютная устойчивость может быть получена при степени астатизма  $r \leq 2$ . При большей степени астатизма может быть получена только условная устойчивость.

**Критерий Найквиста в общем случае.** Пусть знаменатель  $Q(p)$  передаточной функции разомкнутой системы  $W(p)$  с любой степенью астатизма содержит корни, лежащие в правой полуплоскости. Это соответствует системе неустойчивой в разомкнутом состоянии. Возможные причины неустойчивости: наличие неустойчивых звеньев или звеньев неустойчивых вследствие внутренней обратной связи.

В этом случае замкнутая система может быть как устойчивой, так и неустойчивой. При этом несколько меняется **критерий Найквиста**: замкнутая система будет устойчивой, если при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  результирующий угол поворота годографа вектора  $W(i\omega)$  относительно точки  $(-1, i0)$  будет равен  $\psi = +l \cdot 2\pi$ , где  $l$  – число корней полинома  $Q(p)$  лежащих в правой полуплоскости.

Для доказательства введём вспомогательную функцию (заметим, что это знаменатель передаточной функции замкнутой системы)

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}.$$

Таким образом, числитель  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  – характеристический полином замкнутой системы. Соответствующий характеристический комплекс:

$$W_1(i\omega) = \frac{D(i\omega)}{Q(i\omega)}.$$

Если система устойчива в замкнутом состоянии, то результирующий угол поворота вектора  $W_1(i\omega)$  при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

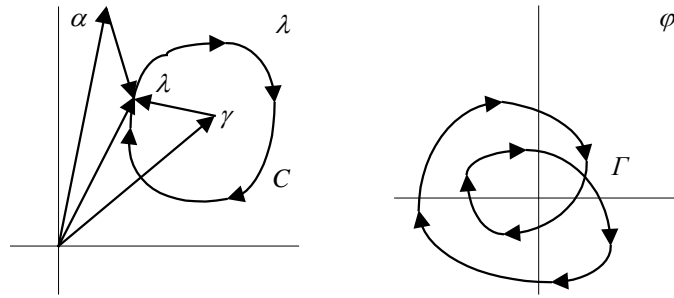
$$\psi = \psi_D - \psi_Q = 2n \frac{\pi}{2} - 2[(n-l) - l] \frac{\pi}{2} = 4l \frac{\pi}{2} = l \cdot 2\pi.$$

Иначе, годограф  $W(i\omega) = W_1(i\omega) - 1$   $l$  раз обойдёт точку  $(-1, i0)$  против часовой стрелки.

Чтобы воспользоваться этим критерием, необходимо знать, сколько корней у знаменателя передаточной функции разомкнутой системы лежат в правой полуплоскости. Для этого надо исследовать соответствующий полином  $Q(p)$ .

## 8. Критерий устойчивости Найквиста [2, Основы... под ред. Чемоданова]

Передаточная функция стационарной линейной системы  $\Phi(\lambda)$  приводит в соответствие каждому значению её комплексного аргумента  $\lambda$  комплексное число  $\varphi = \Phi(\lambda)$ , которое может быть изображено на плоскости  $\varphi$ . В частности, амплитудно-фазовая характеристика системы  $\Phi(i\omega)$  является отображением мнимой оси плоскости переменной  $\lambda$ .



Пусть точка  $\lambda$  описывает кривую  $C$  по ходу часовой стрелки. Для любой точки  $\alpha$ , лежащей вне области, ограниченной кривой  $C$ , изменение аргумента числа  $\lambda - \alpha$  равно нулю. Напротив, для любой точки  $\gamma$ , лежащей внутри этой области, вектор, изображающий число  $\lambda - \gamma$ , поворачивается по часовой стрелке на угол  $2\pi$  (при этом аргумент числа  $\lambda - \gamma$  изменяется на  $-2\pi$ ).

Пусть функция  $\Phi(\lambda)$  не имеет на кривой  $C$  ни нулей, ни полюсов, а внутри области имеет  $h$  нулей и  $l$  полюсов:

$$\varphi = \Phi(\lambda) = \frac{(\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_h)}{(\lambda - \nu_1) \cdots (\lambda - \nu_l)} \Psi(\lambda).$$

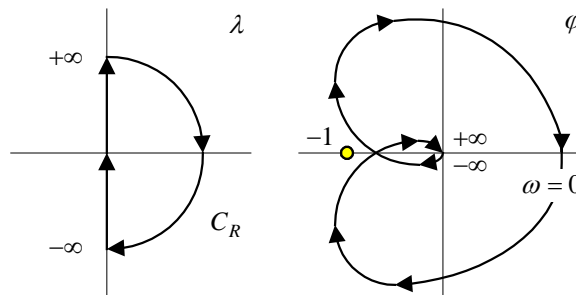
Здесь  $\Psi(\lambda)$  – регулярная часть передаточной функции. При обходе точкой  $\lambda$  кривой  $C$  по часовой стрелке аргумент числителя получает приращение  $-2\pi h$ , а знаменателя  $-2\pi l$ . Таким образом, точка  $\varphi = \Phi(\lambda)$  обходит начало координат по часовой стрелке  $h-l$  раз. При этом аргумент  $\varphi = \Phi(\lambda)$  изменяется на  $-2\pi(h-l)$ .

Передаточная функция замкнутой стационарной линейной системы имеет вид:

$$\Psi(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{1 + \Phi(\lambda)}.$$

Пусть разомкнутая система устойчива, т.е. знаменатель функции  $\Phi(\lambda)$  не имеет нулей в правой полуплоскости и на мнимой оси. Тогда сама функция  $\Phi(\lambda)$  не имеет полюсов в правой полуплоскости и на мнимой оси. Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы знаменатель функции  $\Psi(\lambda)$ , т.е. функция  $1 + \Phi(\lambda)$  не имела нулей в правой полуплоскости и на мнимой оси. Заметим, что началу координат плоскости переменной  $1 + \Phi(\lambda)$  соответствует точка  $-1$  плоскости переменной  $\varphi = \Phi(\lambda)$ .

Возьмём на плоскости переменной  $\lambda$  контур  $C_R$ , состоящий из отрезка мнимой оси  $(-iR, +iR)$  и полуокружности большого радиуса  $R$ , лежащей в правой полуплоскости:



Так как при любом  $R$  функция  $\Phi(\lambda)$ , а следовательно, и функция  $1 + \Phi(\lambda)$  не имеет полюсов на контуре  $C_R$  и в соответствующем полукруге, то при обходе точкой  $\lambda$  этого контура точка  $\Phi(\lambda)$  обходит точку  $-1$  по ходу часовой стрелки столько раз, сколько нулей имеет функция  $1 + \Phi(\lambda)$  в этом полукруге.

Итак, в случае устойчивой разомкнутой системы для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку  $-1$  и не проходила через неё, как это изображено на рисунке выше справа.

Пусть теперь разомкнутая система неустойчива, т.е. знаменатель передаточной функции разомкнутой системы  $\Phi(\lambda)$  имеет  $k$  нулей в правой полуплоскости, а сама функция  $\Phi(\lambda)$ , соответственно, имеет  $k$  полюсов в правой полуплоскости (но пусть пока не имеет полюсов на мнимой оси). В этом случае и функция  $1 + \Phi(\lambda)$  также имеет те же  $k$  полюсов. Итак, для того чтобы у функции  $1 + \Phi(\lambda)$  не оказалось нулей в правой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы кривая  $\Phi(i\omega)$  обходила точку  $-1$  против часовой стрелки  $k$  раз (наличие нулей привело бы к соответствующему уменьшению этого числа).

**Полюсы на мнимой оси.** Как полагают авторы [2, с.202], «Если передаточная функция разомкнутой системы имеет полюсы на мнимой оси, то контур в плоскости  $\lambda$  следует деформировать таким образом, чтобы обойти полюсы, лежащие на мнимой оси, по полуокружностям малого радиуса. Так как разомкнутая система в этом случае неустойчива, то мы условимся обходить эти полюсы слева, т.е. относить их к правой полуплоскости.

Лирическое отступление. Напомним что авторы [1, Бесекерский и Попов] (в отличие от цитированных выше авторов [2]) не квалифицируют полюс типа  $1/p$  как признак неустойчивости разомкнутой системы, находят «более удобным» отнести его к левой полуплоскости и обходят, естественно, справа.

Замечательно, однако, то, что вид критерия устойчивости Найквиста не зависит от способа обхода.

Если, по-вашему, корни на мнимой оси не свидетельствуют о неустойчивости разомкнутой системы, то обходите их справа (против часовой стрелки). При этом соответствующая полуокружность большого радиуса обходит начало координат плоскости  $\varphi = \Phi(\lambda)$  по часовой стрелке справа, и точка  $-1$  не охватывается кривой. Как и должно быть, в случае устойчивой в разомкнутом состоянии системы, чтобы замкнутая система была устойчивой.

Если же, по-вашему, корни на мнимой оси свидетельствуют о неустойчивости разомкнутой системы, то обходите их слева (по часовой стрелке). При этом соответствующая полуокружность большого радиуса обходит начало координат плоскости  $\varphi = \Phi(\lambda)$  против часовой стрелки слева, и точка  $-1$  охватывается годографом столько раз, сколько корней вы отнесли к правой полуплоскости. Как и должно быть, в случае неустойчивой в разомкнутом состоянии системы, чтобы замкнутая система была устойчивой.

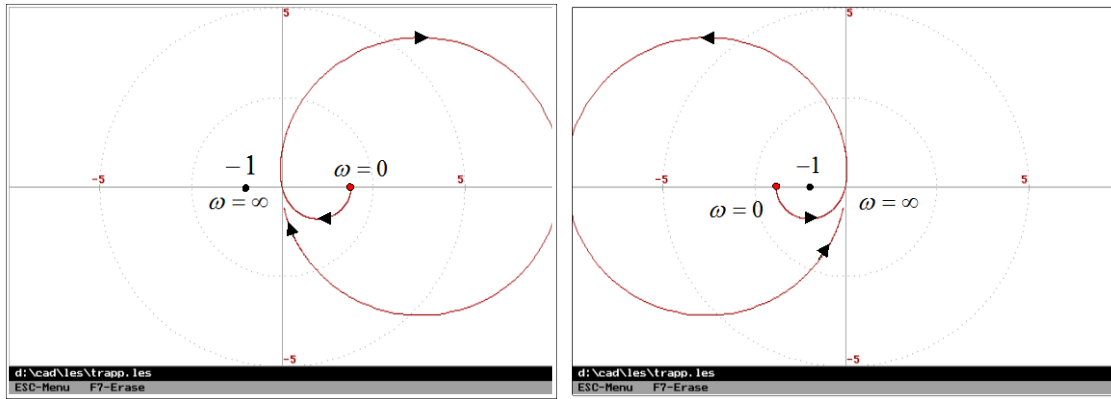
Покажем это на следующем примере (система стабилизации радиального положения пучка протонного синхротрона ТРАПП, ИЯФ). Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет три полюса на мнимой оси:

$$\Phi(\lambda) = \frac{0.19 + 1.73\lambda^2}{\lambda(1 + \lambda^2)}.$$

Отнесём эти полюсы к левой полуплоскости (передаточная функция  $\Phi_1$ ) или правой полуплоскости (передаточная функция  $\Phi_2$ ) не мысленно, а сместив полюсы явным образом:

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{0.19 + 1.73\lambda^2}{(+0.1 + \lambda)(1 + 0.2\lambda + \lambda^2)}, \quad \Phi_2(\lambda) = \frac{0.19 + 1.73\lambda^2}{(-0.1 + \lambda)(1 - 0.2\lambda + \lambda^2)}.$$

Ниже на рисунке изображены соответствующие годографы (слева –  $\Phi_1$ , справа –  $\Phi_2$ ).



Левый годограф – годограф заведомо устойчивой системы, не охватывает точки  $-1$ , что и требуется согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы. Правый годограф – годограф трёхполюсной, заведомо неустойчивой системы обходит точку  $-1$  три раза против часовой стрелки, что и требуется согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы (части годографов, соответствующих отрицательным частотам, не изображены).

Амплитудно-фазовые характеристики систем с действительными параметрами – а только такие и встречаются на практике, симметричны относительно действительной оси. Поэтому обычно рассматривается только половина амплитудно-фазовой характеристики, соответствующая положительным частотам. При этом считаются полуобходы точки  $-1$ . Пересечение отрезка  $(-\infty, -1)$  при увеличении частоты сверху вниз (фаза растёт) считается за  $+1$  пересечение, а снизу вверх – за  $-1$  пересечение. Если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы начинается на отрезке  $(-\infty, -1)$ , то этому будет соответствовать  $+1/2$  или  $-1/2$  пересечение в зависимости от того, вниз или вверх идёт характеристика при возрастании частоты. Подсчёт числа пересечений отрезка  $(-\infty, -1)$  можно произвести по логарифмическим частотным характеристикам (ЛАХ и ЛФХ). Уточним – это те пересечения, которым соответствует фаза  $-\pi$  при модуле амплитудной характеристики больше единицы.

### Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Чтобы воспользоваться критерием Михайлова, надо построить годограф  $D(i\omega)$ . В случае критерия Найквиста достаточно знать передаточную функцию  $W(p)$  разомкнутой системы. При этом нет необходимости строить годограф. Для определения устойчивости по Найквисту достаточно построить ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы. Наиболее простое построение получается тогда, когда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{K}{p^r} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}{\prod_{k=1}^{n-r} (1 + T_k p)}, \text{ тогда ЛАХ: } L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^r} \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2}}{\prod_{k=1}^{n-r} \sqrt{1 + \omega^2 T_k^2}},$$

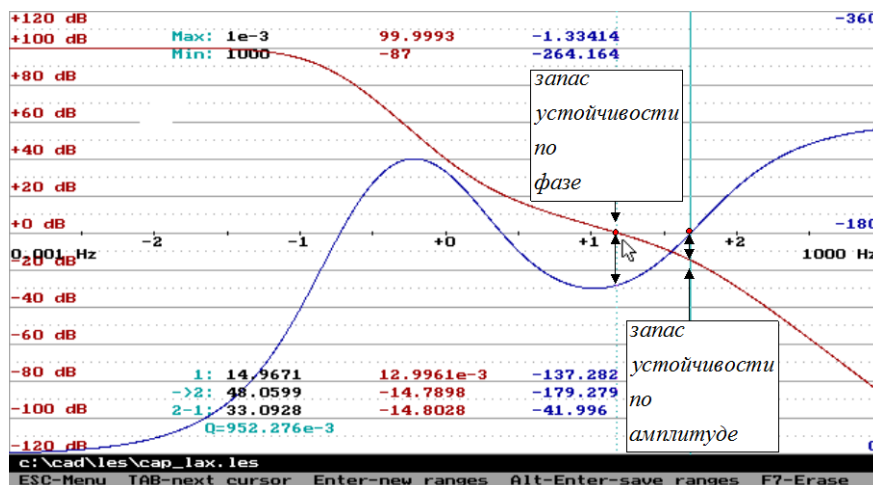
$$\text{и ЛФХ: } \psi(\omega) = -r \cdot 90^\circ + \sum_{i=1}^m \arctan \omega T_i - \sum_{k=1}^{n-r} \arctan \omega T_k.$$

Рисунок ниже соответствует передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = 10^5 \cdot \frac{1}{(1+p)^4} \frac{(1+0.1p)^3}{(1+0.003p)^2}.$$

Здесь  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(i\omega)|$  и  $\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$  построены как функции  $\lg(\omega/2\pi)$ . При изменении частоты от  $0$  до  $+\infty$  кривая  $\psi(\omega)$  дважды пересекает линию  $\psi = -\pi$  в области где  $L(\omega) > 0$ . Так как общее число пересечений равно нулю, замкнутая система будет устойчивой. Глядя на рисунок можно рассуждать несколько иначе: для устойчивости замкнутой си-

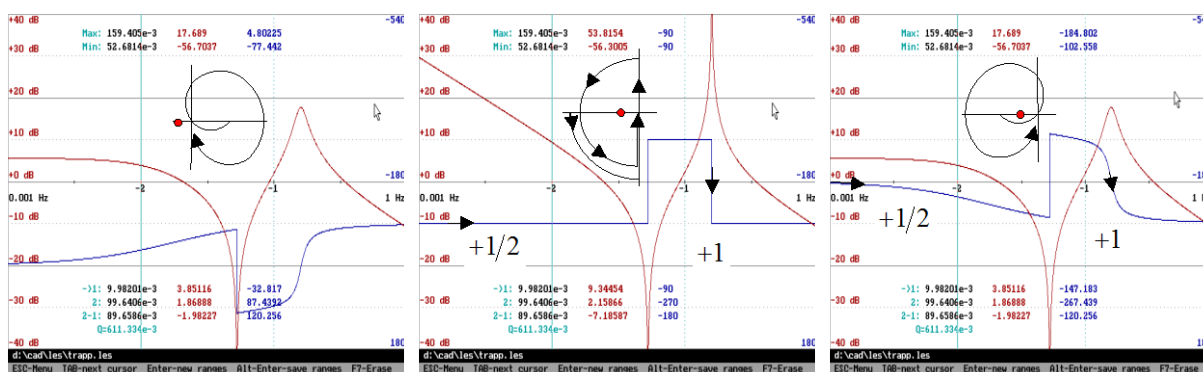
стемы кривая  $\psi(\omega)$  должна в конце концов обойти точку  $L(\omega)=0$  снизу. Разность фаз  $\psi(\omega_1) - (-\pi)$  в момент этого обхода называется запасом устойчивости по фазе, а отличие амплитуды от единицы при  $\psi(\omega_2) = -\pi$  называется запасом устойчивости по амплитуде.



**Пример.** Изображённые ниже логарифмические частотные характеристики соответствуют уже упоминавшейся выше передаточной функции разомкнутой системы

$$\Phi(\lambda) = \frac{0.19 + 1.73\lambda^2}{\lambda(1 + \lambda^2)}.$$

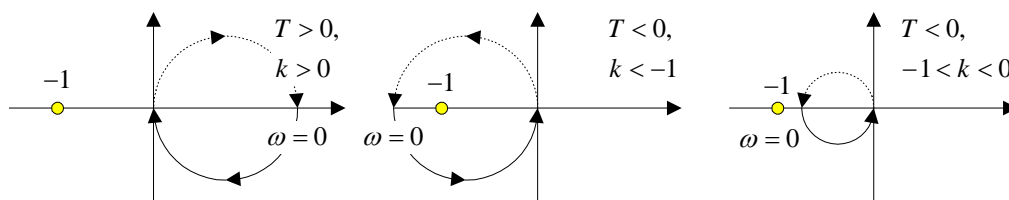
Слева изображены амплитудная и фазовая частотные характеристики для передаточной функции  $\Phi_1(\lambda)$ , справа – для передаточной функции  $\Phi_2(\lambda)$ , в центре – для исходной передаточной функции  $\Phi(\lambda)$  (как это насчитала нам программа *LES*, метод «Integration»). Три полюса функции  $\Phi_1(\lambda)$  сдвинуты влево (устойчивая система). Фазовая характеристика, соответственно, имеет 0 пересечений уровня  $-\pi$ . Три полюса функции  $\Phi_2(\lambda)$  сдвинуты вправо (неустойчивая система). Фазовая характеристика, соответственно, имеет три полупересечения уровня  $-\pi$  в областях, где модуль функции передачи больше единицы. В обоих случаях замкнутая система устойчива. В центре – расчёт в отсутствие подвижек корней. Как видно, это предел для правой картинке.



**Примеры из [2].** Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$\Phi(\lambda) = \frac{k}{1 + T\lambda}.$$

Разомкнутая система устойчива при любых положительных  $k$  и  $T$ . Устойчива и замкнутая система, как это видно из годографа  $\Phi(i\omega)$  слева на рисунке.



При отрицательном  $T$  разомкнутая система неустойчива –  $\Phi(\lambda)$  имеет полюс в правой полуплоскости. Замкнутая система устойчива при  $k < -1$  (годограф в центре), и неустойчива при  $-1 < k < 0$  (годограф справа). Таков критерий Найквиста. В самом деле, передаточная функция замкнутой системы при  $T < 0$  и  $k < -1$

$$\Psi(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{1 + \Phi(\lambda)} = \frac{-|k|}{1 - |T|\lambda - |k|} = \frac{|k|}{|k| - 1 + |T|\lambda}$$

имеет нуль знаменателя в левой полуплоскости параметра  $\lambda$ , т.е. замкнутая система устойчива. При  $T < 0$  и  $-1 < k < 0$  та же функция имеет нуль знаменателя в правой полуплоскости параметра  $\lambda$ , т.е. замкнутая система неустойчива.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид ( $k > 0$ ):

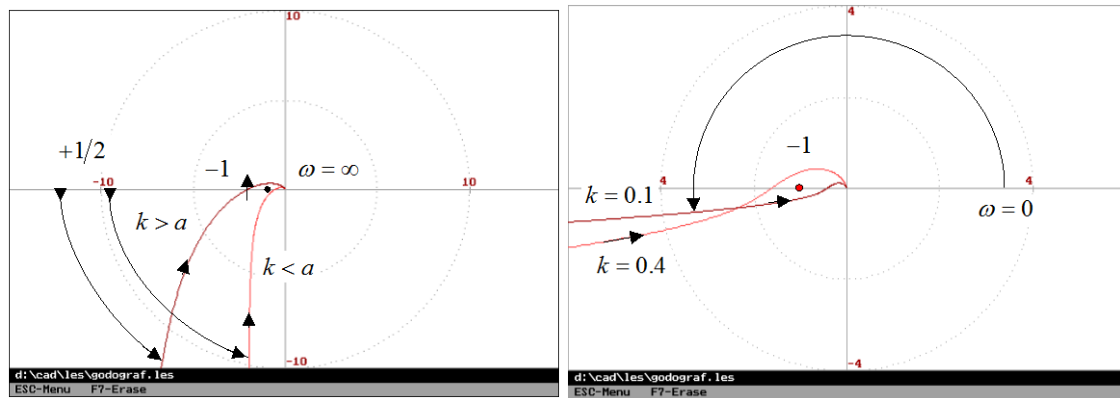
$$\Phi(\lambda) = \frac{k}{\lambda(1 + a\lambda + \lambda^2)}.$$

При  $a > 0$  она имеет один полюс на мнимой оси. Пусть это говорит о неустойчивости системы (так полагает автор [2]). Следовательно, для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы число пересечений амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы отрезка  $(-\infty, -1)$  действительной оси было равно  $+1/2$  (если рассматривать годограф только для положительных частот).

При  $k < a$ , согласно годографу (рисунок ниже слева), амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не пересекает отрезок  $(-\infty, -1)$ . Зато его пересекает идущая против часовой стрелки слева (так как полюс на мнимой оси полагается неустойчивым, и обходится слева) полуокружность большого радиуса. Часть этой полуокружности, соответствующая положительным частотам, начинается на отрезке  $(-\infty, -1)$  и идёт вниз от него. Таким образом, имеем одно полупересечение отрезка  $(-\infty, -1)$ , и замкнутая система будет устойчивой.

При  $k > a$ , амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы пересекает отрезок  $(-\infty, -1)$  снизу вверх, что даёт пересечение  $-1$ . Идущая против часовой стрелки слева полуокружность большого радиуса даёт пересечение  $+1/2$ . В результате имеем пересечение  $-1/2$ , а для устойчивости надо  $+1/2$ .

Опять-таки, полагая описанную систему устойчивой, построим полуокружность большого радиуса справа. Согласно тому же критерию Найквиста, построенный таким образом годограф при  $k > a$  соответствует неустойчивой замкнутой системе, а при  $k < a$  – устойчивой. Таков критерий Найквиста. В самом деле, характеристический полином замкнутой системы (знаменатель передаточной функции) имеет вид:  $\lambda(1 + a\lambda + \lambda^2) + k = \lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + k$ . Критерий устойчивости Рауса-Гурвица  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$  даёт:  $a - k > 0$ .



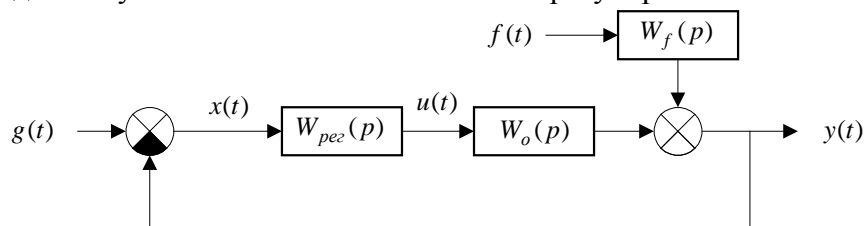
Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид ( $k > 0$ ):

$$\Phi(\lambda) = \frac{k(1 + 2\lambda)}{\lambda^2(1 + \lambda + \lambda^2)}.$$

Она имеет один двойной полюс на мнимой оси. Следовательно, для устойчивости замкнутой системы требуется одно пересечение амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы отрезка  $(-\infty, -1)$  действительной оси в положительном диапазоне частот. На рисунке выше справа изображены годографы для  $k = 0.1$  и  $k = 0.4$ . Годограф с  $k = 0.1$  соответствует устойчивой в замкнутом состоянии системе.

## 9. Передаточные функции систем автоматического регулирования [1, Бесекерский и Попов]

Общий вид замкнутой системы автоматического регулирования:



Здесь сам объект регулирования представлен передаточной функцией  $W_o(p)$ , определяемой видом дифференциального уравнения, описывающего динамику объекта регулирования (заданная функция). На его вход поступает управляющее воздействие

$$u(t) = W_{pez}(p)x(t).$$

Здесь  $x = g - y$  – сигнал ошибки,  $g(t)$  – задающее воздействие,  $y(t)$  – регулируемая величина,  $W_{pez}(p)$  – передаточная функция регулятора (предмет разработки).

Регулируемая величина определяется выражением:

$$y(t) = W_o(p)u(t) + W_f(p)f(t).$$

Здесь  $W_f(p)$  – передаточная функция объекта регулирования по возмущению  $f(t)$ .

С учётом вида управляющего воздействия

$$y(t) = W(p)x(t) + W_f(p)f(t).$$

Здесь  $W(p) = W_{pez}(p)W_o(p)$  – передаточная функция по ошибке, она же – передаточная функция разомкнутой системы.

Уравнение замыкания:

$$x(t) = g(t) - y(t).$$

В результате для регулируемой величины:

$$y(t) = \frac{W(p)}{1+W(p)} g(t) + \frac{W_f(p)}{1+W(p)} f(t).$$

Для ошибки:

$$x(t) = \frac{1}{1+W(p)} g(t) - \frac{W_f(p)}{1+W(p)} f(t).$$

Передаточная функция замкнутой системы и передаточная функция замкнутой системы по ошибке:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}, \quad \Phi_x(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1+W(p)}.$$

Видно, что введение автоматического регулирования уменьшает отклонение регулируемой величины под влиянием возмущений в  $1+W(p)$  раз.

**Законы регулирования.** Закон регулирования – зависимость управляющего воздействия от ошибки  $x(t)$ , задающего воздействия  $g(t)$  и возмущения  $f(t)$ :

$$u(t) = F(x, g, f).$$

В общем случае это нелинейная функция  $x, u, f$ , а так же их производных и интегралов по времени. Обычно же она имеет вид:

$$u(t) = F_1(x) + F_2(g) + F_3(f).$$

Первое слагаемое соответствует регулированию по отклонению (принцип Ползунова-Уатта), второе и третье – регулированию по внешнему воздействию (принцип Понселе). Линейный закон регулирования по отклонению может иметь следующий вид:

$$u(t) = k_1 x + k_2 \int x dt + k_3 \iint x dt^2 + \dots + k_4 \dot{x} + k_5 \ddot{x} + \dots = k_1 x + \frac{k_2}{p} x + \frac{k_3}{p^2} x + \dots + k_4 p x + k_5 p^2 x + \dots$$

**Пропорциональное регулирование.** Пусть регулируемый объект – звено статического типа:  $W_o(p) = k_0$ , или является таковым в установившемся состоянии (т.е. при  $p \rightarrow 0$ ). Управляющее воздействие:

$$u(t) = W_{pez}(p)x(t) = k_1 x(t).$$

Передаточная функция разомкнутой системы:

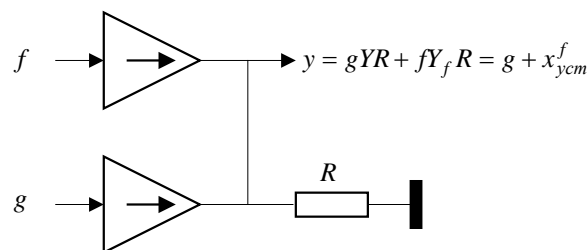
$$W(p) = W_{pez}(p)W_o(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} k_1 k_0 = K$$

Здесь  $K$  – общий коэффициент усиления разомкнутой системы. При постоянном задающем воздействии  $g = g_0$  установившаяся ошибка, называемая в данном случае статической ошибкой, равна

$$x_{ycm} = \frac{1}{1+K} g_0 - \frac{1}{1+K} x_{ycm}^f.$$

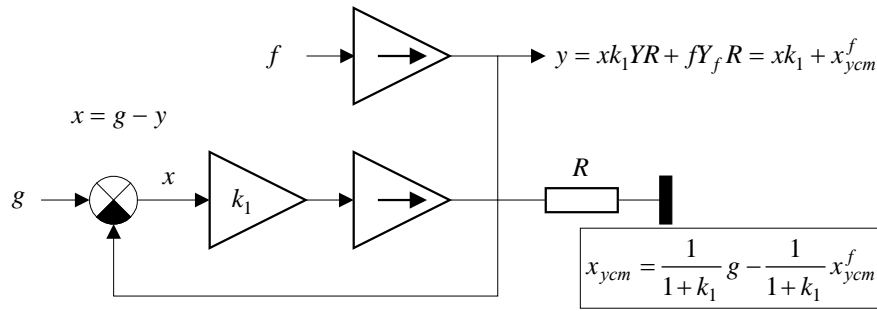
Установившиеся ошибки по регулированию и возмущению уменьшились в  $K+1$  раз. Коль скоро они не равны нулю, регулирование называется статическим.

**Пример.** Управляемые напряжением генераторы тока сигнала и помехи работают на общую нагрузку. В идеале  $y = g$  (при  $YR = 1$ , здесь  $Y$  – крутизна генератора).



Эффект петли обратной связи:





**Интегральное регулирование.** Пусть регулируемый объект – звено статического типа:  $W_o(p) = k_0$ , или является таковым в установившемся состоянии (т.е. при  $p \rightarrow 0$ ). Управляющее воздействие:

$$u(t) = k_2 \int x dt = \frac{k_2}{p} x.$$

Передаточная функция разомкнутой системы:  $W(p) = W_{pez}(p)W_o(p) = \frac{k_2}{p} k_0 \xrightarrow{p \rightarrow 0} \infty$ . Первая составляющая ошибки при  $g = g_0 = const$  обращается в нуль, т.е. система является астатической по отношению к управляющему воздействию. Что касается второй составляющей, то следует найти предел

$$x_{ycm} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_f(p)}{1 + W(p)},$$

который может быть как равным нулю, так и отличным от нуля.

Регулирование может осуществляться и по второму интегралу от ошибки по времени:

$$u(t) = k_3 \iint x dt^2 = \frac{k_3}{p^2} x.$$

В этом случае имеет место астатизм второго порядка. Ошибка, определяемая задающим воздействием, будет равна нулю не только при  $g = const$ , но и при  $\dot{g} = const$ . Повышение порядка астатизма приводит к увеличению установившейся точности системы регулирования, но снижает её быстродействие. Кроме того, усугубляется проблема устойчивости.

**Изодромное регулирование.** Управляющее воздействие:

$$u(t) = k_1 x + k_2 \int x dt = k_1 x + \frac{k_2}{p} x = \frac{k_1 p + k_2}{p} x.$$

Изодромное регулирование сочетает в себе точность интегрального регулирования с быстродействием пропорционального регулирования. В первый момент работает пропорциональное регулирование, с течением времени – интегральное.

**Регулирование по производным.** Управляющее воздействие:

$$u(t) = k_4 \frac{dx}{dt} = k_4 p x.$$

Такое регулирование самостоятельного значения не имеет, так как в установившемся состоянии производная от ошибки равна нулю. Тем не менее, может играть большую роль в динамике – повышается быстродействие. Так, часто используется изодромное регулирование с добавлением первой производной:

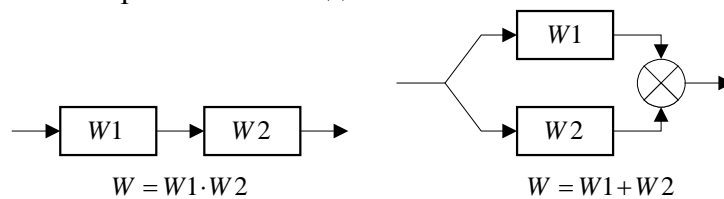
$$u(t) = (k_1 + \frac{k_2}{p} + k_4 p) x.$$

Именно такой способ регулирования применён в системе стабилизации радиального положения пучка на протонном синхротроне ТРАПИ (ИЯФ).

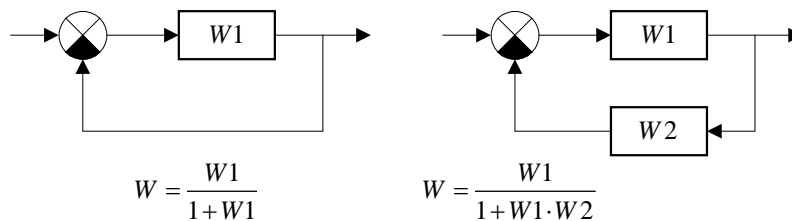
**Соединения стационарных линейных систем [1,2].** Основными типами соединений динамических звеньев в сложных системах являются последовательное соединение, парал-

лельное соединение и обратная связь. Предполагается, что соединяемые звенья обладают направленным действием.

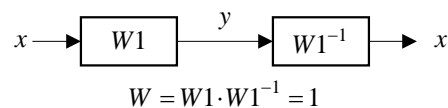
Последовательное и параллельное соединения:



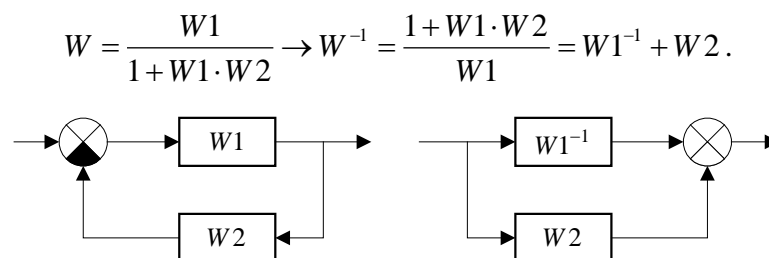
Жёсткая (единичная) и гибкая обратные связи:



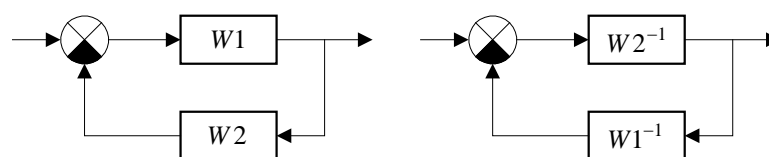
Взаимно обратные системы:



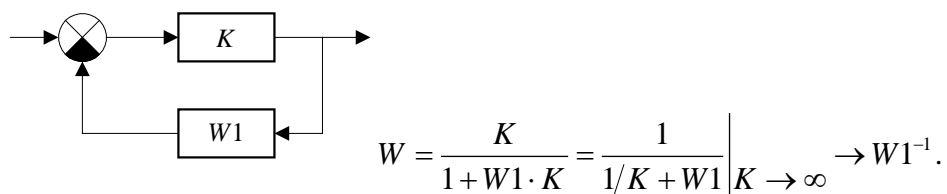
Система обратная по отношению к системе с обратной связью:



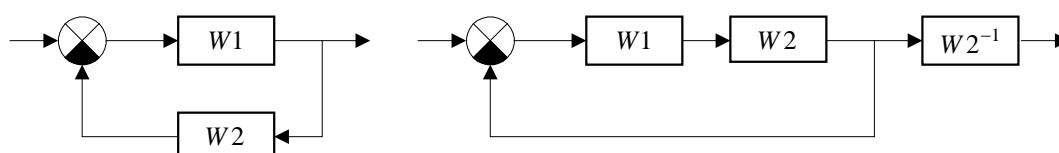
Очевидно, что ветви параллельного соединения можно поменять местами. Следовательно, следующие системы эквивалентны:



Способ реализации обратной системы:



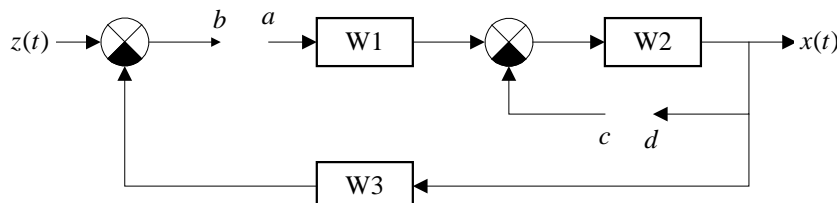
Замена гибкой обратной связи жёсткой (единичной):



Это делается для того, чтобы можно было воспользоваться специальными номограммами, которые позволяют находить логарифмические частотные характеристики системы, замкнутой жёсткой отрицательной обратной связью, по данным логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

При любых соединениях стационарных линейных систем получаются стационарные линейные системы, передаточные функции которых определяются при помощи элементарных алгебраических действий по передаточным функциям соединяемых систем.

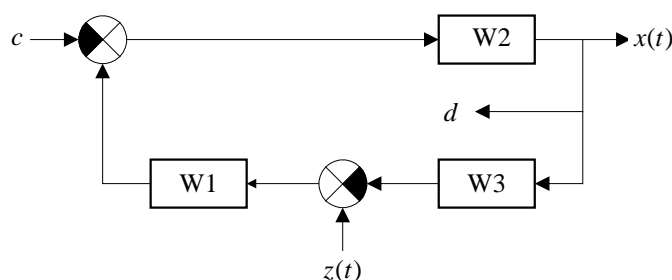
**Многоконтурная система обратной связи.** Размыкание многоконтурной системы обратной связи с целью получения передаточной функции можно делать в произвольном месте:



Для получения главной передаточной функции производится размыкание  $b/a$  на входе первого звена. Главная передаточная функция:

$$W_{ab}(p) = W1 \cdot \frac{W2}{1 + W2} \cdot W3.$$

Размыкание  $c/d$  (схема перерисована для удобства представления):



Передаточная функция:

$$W_{cd}(p) = \frac{W2}{1 + W1 \cdot W2 \cdot W3}.$$

Передаточные функции различны. Тем не менее, характеристические уравнения замкнутой системы одинаковы:

$$0 = 1 + W_{ab}(p) = 1 + W1 \cdot \frac{W2}{1 + W2} \cdot W3 = \frac{1 + W2 + W1 \cdot W2 \cdot W3}{1 + W2},$$

$$0 = 1 + W_{cd}(p) = 1 + \frac{W2}{1 + W1 \cdot W2 \cdot W3} = \frac{1 + W2 + W1 \cdot W2 \cdot W3}{1 + W1 \cdot W2 \cdot W3}.$$

Таким образом, для определения устойчивости, можно пользоваться передаточной функцией системы, полученной размыканием исходной системы в произвольной точке. Однако только главная передаточная функция связана с передаточной функцией замкнутой системы известным соотношением:

$$\Phi(p) = \frac{W_{ab}(p)}{1 + W_{ab}(p)}.$$

Из того обстоятельства, что при исследовании устойчивости замкнутой системы нас интересует только характеристическое уравнение

$$0 = 1 + W(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} \rightarrow Q(p) + R(p) = 0,$$

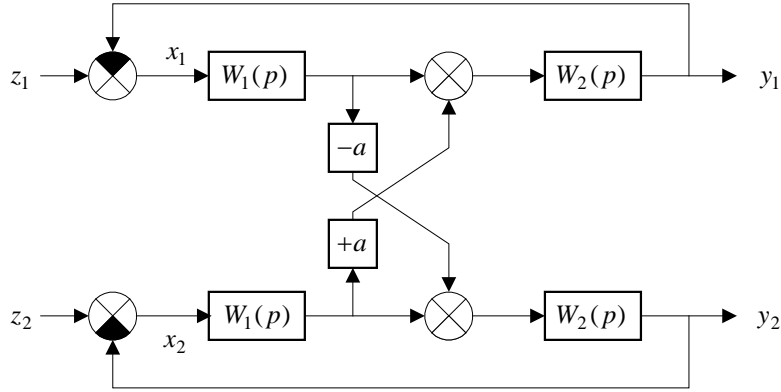
следует, что для расчёта устойчивости может быть использована преобразованная передаточная функция

$$W'(p) = \frac{R(p) \pm S(p)}{Q(p) \mp S(p)},$$

где  $S(p)$  – произвольный полином степени меньшей, чем степень полинома  $Q(p)$ . В самом деле:

$$0 = 1 + W'(p) = 1 + \frac{R(p) \pm S(p)}{Q(p) \mp S(p)} = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p) \mp S(p)} \rightarrow Q(p) + R(p) = 0.$$

**Устойчивость двумерной системы с антисимметричными связями.** Структурная схема двухканальной системы слежения:



Связь выходных (регулируемых) величин с ошибками:

$$\begin{cases} y_1 = W_0(p)x_1 + aW_0(p)x_2 \\ y_2 = -aW_0(p)x_1 + W_0(p)x_2 \end{cases}.$$

Здесь  $W_0(p) = W_1(p)W_2(p)$ . Матричная запись:

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_0 & +aW_0 \\ -aW_0 & W_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = W(p)x.$$

Характеристическое уравнение:

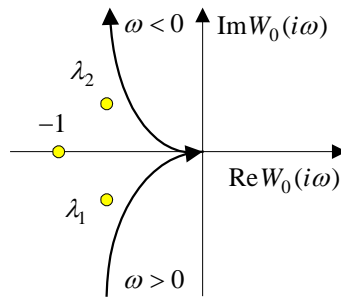
$$|E + W(p)| = \begin{vmatrix} 1 + W_0 & +aW_0 \\ -aW_0 & 1 + W_0 \end{vmatrix} = (1 + W_0)^2 + a^2W_0^2 = (1 + a^2)(W_0 - \lambda_1)(W_0 - \lambda_2) = 0.$$

Здесь  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{1+a^2} \pm i \frac{a}{1+a^2}.$

Исследование устойчивости сводится к рассмотрению двух уравнений:

$$W_0 - \lambda_1 = 0 \text{ и } W_0 - \lambda_2 = 0.$$

Здесь может быть использован критерий Найквиста, но вместо точки комплексной плоскости  $(-1, i0)$ , которая соответствует обычной записи характеристического уравнения  $W_0 + 1 = 0$ , необходимо рассматривать две точки, соответствующие комплексным числам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Закрытая система будет устойчивой, если АФХ устойчивого в разомкнутом состоянии одного изолированного канала не будет охватывать точек  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .



Колебательная граница устойчивости будет иметь место, если выполняется одно из равенств  $W_0(i\omega) = \lambda_1$  или  $W_0(i\omega) = \lambda_2$ . Заметим, что при  $a \rightarrow 0$  обе точки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  стягиваются в точку  $(-1, i0)$ , что соответствует обычной формулировке критерия Найквиста.

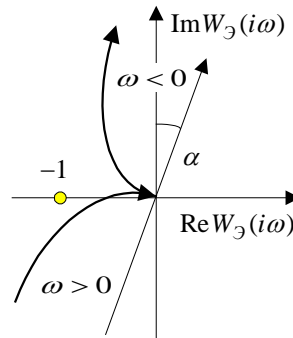
**Другой метод расчёта устойчивости двухмерной системы.** Введём  $z^* = z_1 + iz_2$ ,  $y^* = y_1 + iy_2$ ,  $x^* = x_1 + ix_2$ . Были соотношения:

$$\begin{cases} y_1 = W_0(p)x_1 + aW_0(p)x_2 \\ y_2 = -aW_0(p)x_1 + W_0(p)x_2 \end{cases}.$$

Умножим второе равенство на  $i$  и сложим:

$$y^* = (1 - ia)W_0(p)x^* = W_0(p)\sqrt{1 + a^2}e^{-i\alpha}x^* = W_\Delta(p)x^*.$$

Здесь  $W_\Delta(p)$  – эквивалентная передаточная функция разомкнутой двухмерной системы,  $\alpha = \arctan a$  – угол поворота передаточной функции  $W_0(p)$  по часовой стрелке,  $\sqrt{1 + a^2}$  – коэффициент увеличения модуля  $W_0(p)$ .



Колебательная граница устойчивости:  $W_\Delta(i\omega) = (1 - ia)W_0(i\omega) = -1$ , что сводится к

$$W_0(i\omega) = \frac{-1}{1 - ia} = -\frac{1}{1 + a^2} - i\frac{a}{1 + a^2} = \lambda_1.$$

Это согласуется с первым методом расчёта устойчивости.

## 10. Оценка качества регулирования

В конечном счёте, качество регулирования определяется величиной ошибки. Однако, коль скоро задающее воздействие случайно, используются различные критерии качества: точность (величина ошибки при типовом режиме), запас устойчивости (удалённость от колебательной границы устойчивости) и быстродействие (грубо говоря – время переходного процесса).

**Величина ошибок при различных типовых режимах.** Рассмотрим неподвижное состояние, т.е. состояние при постоянном значении задающего воздействия:  $z(t) = z_0$ . В этом случае установившаяся ошибка называется статической ошибкой. В статических системах  $W(0) = K$  представляет собой общий коэффициент усиления разомкнутой системы. Соответствующая ошибка

$$x_{cm} = \left[ \frac{z_0}{1 + W(p)} \right] p \rightarrow 0 = \frac{z_0}{1 + K}.$$

При астатическом регулировании  $W(0) \rightarrow \infty$ , поэтому статическая ошибка равна нулю.

Рассмотрим движение с постоянной скоростью:  $z(t) = vt$ . Коль скоро изображение  $vt$  имеет вид  $v/p$ , то конечное значение ошибки возможно только при наличии у разомкнутой системы астатизма не менее первого порядка. В случае системы с астатизмом первого порядка

$$W(p) = \frac{K_v(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p(1 + C_{n-2}p + \dots + C_0p^{n-1})} \text{ и } x_{ycm} = \left[ \frac{v/p}{1 + W(p)} \right] p \rightarrow 0 = \frac{v}{K_v}.$$

Рассмотрим движение с постоянным ускорением:  $z(t) = \varepsilon t^2/2$ . Коль скоро изображение  $\varepsilon t^2/2$  имеет вид  $\varepsilon/p^2$ , то конечное значение ошибки возможно только при наличии у разомкнутой системы астатизма не менее второго порядка. В случае системы с астатизмом второго порядка

$$W(p) = \frac{K_\varepsilon(1 + B_{m-1}p + \dots + B_0p^m)}{p^2(1 + C_{n-3}p + \dots + C_0p^{n-2})} \text{ и } x_{ycm} = \left[ \frac{v/p^2}{1 + W(p)} \right] p \rightarrow 0 = \frac{\varepsilon}{K_\varepsilon}.$$

Рассмотрим движение по гармоническому закону:  $z(t) = z_{\max} \sin \omega t$ . Сигнал ошибки в линейной системе в установившемся режиме также будет гармоническим:  $x(t) = x_{\max} \sin(\omega t + \psi)$ . При этом

$$x_{\max} = \frac{z_{\max}}{|1 + W(i\omega)|} \approx \frac{z_{\max}}{|W(i\omega)|} = \frac{z_{\max}}{A(\omega)}.$$

**Установившиеся процессы в замкнутых управляемых системах. Коэффициенты ошибок [3].** Уравнение движения одномерной замкнутой управляемой системы имеет вид:

$$f(D)x(t) = g(D)z(t).$$

Здесь  $x(t)$  – сигнал на выходе системы,  $z(t)$  – сигнал на входе системы.

Полиномы от оператора  $D = d/dt$ :

$$\left. \begin{aligned} f(D) &= a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n \\ g(D) &= b_0D^m + b_1D^{m-1} + \dots + b_{m-1}D + b_m \end{aligned} \right\}, \quad m < n.$$

Передающая функция и установившийся процесс:

$$\Phi(D) = \frac{g(D)}{f(D)}, \quad x(t) = \int_{-\infty}^t N(t-\tau)z(\tau)d\tau = \int_0^\infty N(\xi)z(t-\xi)d\xi.$$

Здесь функция веса определяется преобразованием Карсона-Хевисайда  $p\Phi(p) \div N(t)$ .

Пусть входной сигнал  $z(t)$  – полином от  $t$  степени  $q$ . Разложим  $z(t-\xi)$  в ряд Тэйлора

$$z(t-\xi) = \sum_{r=0}^q (-1)^r \frac{z^{(r)}(t)}{r!} \xi^r.$$

Теперь выражение для установившегося процесса приобретает вид

$$x(t) = \sum_{r=0}^q (-1)^r \frac{z^{(r)}(t)}{r!} \int_0^\infty \xi^r N(\xi)d\xi.$$

Здесь интегралы  $\mu_r = \int_0^\infty \xi^r N(\xi)d\xi$  – моменты функции веса  $N(t)$ .

Коль скоро  $\int_0^\infty N(\xi)e^{-p\xi}d\xi = \Phi(p)$ , путём дифференцирования этого соотношения по  $p$  получим:

$$(-1)^r \int_0^\infty \xi^r N(\xi) e^{-p\xi} d\xi = \Phi^{(r)}(p).$$

В результате имеем:

$$\mu_0 = \int_0^\infty N(\xi) d\xi = \Phi(0), \quad \mu_r = \int_0^\infty \xi^r N(\xi) d\xi = (-1)^r \Phi^{(r)}(0) \quad \text{и} \quad x(t) = \sum_{r=0}^q \frac{\Phi^{(r)}(0)}{r!} z^{(r)}(t).$$

Пусть наша система предназначена для воспроизведения функции  $\sigma(D)z(t)$ , где  $\sigma(D)$  – полином от оператора  $D = d/dt$  с постоянными коэффициентами:

$$\sigma(D)z(t) = \sigma_l z^{(l)}(t) + \sigma_{l-1} z^{(l-1)}(t) + \dots + \sigma_1 z'(t) + \sigma_0 z(t).$$

Тогда ошибка системы

$$\varepsilon(t) = x(t) - \sigma(D)z(t) = \sum_{r=0}^l \left[ \frac{\Phi^{(r)}(0)}{r!} - \sigma_r \right] z^{(r)}(t) + \sum_{r=l+1}^q \frac{\Phi^{(r)}(0)}{r!} z^{(r)}(t).$$

Величины  $c_r = \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(0) - \sigma_r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$  называются коэффициентами ошибок. Если входной сигнал  $z(t)$  является полиномом от  $t$  не выше  $k$ -той степени, то ошибка системы будет

$$\varepsilon(t) = \sum_{r=0}^k c_r z^{(r)}(t).$$

Коэффициент  $c_0 = \Phi(0) - \sigma_0$  называется коэффициентом статической ошибки, или коэффициентом ошибки по положению. Системы, у которых  $c_0 = 0$ , называются астатическими. Коэффициент  $c_1 = \Phi'(0) - \sigma_1$  называется коэффициентом ошибки по скорости, а коэффициент  $c_2 = \Phi''(0) - \sigma_2$  называется коэффициентом ошибки по ускорению. Астатической системой  $k$ -того порядка называется система, у которой

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \dots, \quad c_{k-1} = 0, \quad c_k \neq 0.$$

**Коэффициенты ошибок следящей системы [1].** Следящая система должна воспроизводить входной сигнал  $z(t)$ . Спустя достаточно много времени, т.е. при малых  $p$ , имеем для изображений:

$$X(p) = \Phi_x(p)Z(p) = \frac{1}{1+W(p)}Z(p) = \left[ c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \dots \right] Z(p).$$

Здесь  $\Phi_x(p)$  функция передачи замкнутой системы для ошибки.

Для оригиналов

$$x_{\text{ycm}} = c_0 z(t) + c_1 \frac{dz(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \dots$$

Здесь  $c_0, c_1, c_2, \dots$  – коэффициенты ошибок по положению, по скорости, по ускорению и т.д.:

$$c_0 = \left[ \Phi_x(p) \right]_{p=0}, \quad c_1 = \left[ \frac{d\Phi_x(p)}{dp} \right]_{p=0}, \quad c_2 = \left[ \frac{d^2 \Phi_x(p)}{dp^2} \right]_{p=0}, \dots$$

Так как передаточная функция по ошибке представляет собой дробно-рациональную функцию, то коэффициенты ошибок вычисляются делением числителя на знаменатель.

**Пример [1].** Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{K_v}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Тогда передаточная функция по ошибке:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_v}.$$

Производим деление числителя на знаменатель:

$$\frac{p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3}{K_v + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3} = \frac{1}{K_v} p + \left( \frac{T_1 + T_2}{K_v} - \frac{1}{K_v^2} \right) p^2 + \frac{1}{K_v} \left( T_1 T_2 - 2 \frac{T_1 + T_2}{K_v} + \frac{1}{K_v^2} \right) p^3 + \dots$$

Если задающее воздействие имеет вид  $g(t) = g_0 + vt + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ , то установившаяся ошибка

$$x_{ycm} = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0 + \frac{1}{K_v} (v + \varepsilon t) + \left( \frac{T_1 + T_2}{K_v} - \frac{1}{K_v^2} \right) \varepsilon.$$

**Корневые методы оценки ошибок [1].** Можно сформулировать требования по запасу устойчивости и быстродействию системы, накладывая определённые условия на корни характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} \dots + a_n = 0.$$

Определим среднегеометрический корень следующим образом:

$$\Omega = \sqrt[n]{|p_1 p_2 \dots p_n|} = \sqrt[n]{a_n / a_0}.$$

Замена  $p \rightarrow q\Omega$  даёт:

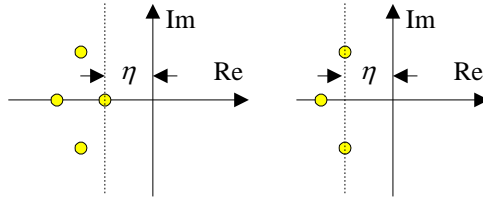
$$q^n + A_1 q^{n-1} + \dots + 1 = 0.$$

Исходное характеристическое уравнение при возвращении к прежней переменной приобретает вид:

$$p^n + A_1 \Omega p^{n-1} + A_2 \Omega^2 p^{n-2} \dots + \Omega^n = 0$$

Увеличение среднегеометрического корня ведёт к соответствующему увеличению скорости протекания переходных процессов. Заметим, что  $\Omega t$  – безразмерное время. Для увеличения  $\Omega$ , очевидно, следует увеличивать  $a_n$  – свободный член характеристического уравнения. В статических системах  $a_n = 1 + K$ , а в астатических  $a_n = K$ , где  $K$  – общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

Понятие степени быстродействия  $\eta$ :



При всех вещественных корнях, или при одной паре мнимых корней имеет место следующее неравенство для переходной функции системы:

$$1 - v(\eta, t) < h(t) < 1 + v(\eta, t), \text{ где } v(\eta, t) = e^{-\eta t} \left[ 1 + \eta t + \frac{(\eta t)^2}{2!} + \frac{(\eta t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\eta t)^{n-1}}{(n-1)!} \right].$$

Здесь слева – миноранта, справа – мажоранта. Миноранта совпадает с переходной функцией, если характеристическое уравнение имеет корень  $p = -\eta$  кратности  $n$ :

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} \dots + a_n = a_0 (p + \eta)^n = 0.$$

Очевидно, этот  $n$ -кратный корень по модулю равен среднегеометрическому корню:  $\eta = \Omega = \sqrt[n]{a_n / a_0}$ . Таким образом, при всех вещественных корнях характеристического уравнения наименьшее время переходного процесса имеет место при равенстве этих корней.

Степень быстродействия можно найти без вычисления значений корней характеристического уравнения. Перейдём к переменной  $z = p + \eta$ . Смещённое уравнение:

$$a_0 (z - \eta)^n + a_1 (z - \eta)^{n-1} + a_2 (z - \eta)^{n-2} \dots + a_n = a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0.$$



В результате один или два корня попадут на ось мнимых, т.е. на границу устойчивости. Теперь можно применить любой критерий устойчивости, и определить  $\eta$ . Так, апериодической границе устойчивости соответствует равенство нулю свободного члена

$$A_n = a_n - a_{n-1}\eta + a_{n-2}\eta^2 - a_{n-3}\eta^3 + \dots,$$

а колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица, прохождение годографа Михайлова через начало координат и прохождение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку  $(-1, i0)$ .

**Оценка запаса устойчивости.** При наличии пары комплексных корней  $-\alpha \pm i\beta$  система склонна к колебаниям. Параметр  $\mu = \beta/\alpha$  называется колебательностью. С другой стороны, комплексные корни дают в выражении для переходного процесса член вида

$$x(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Через один период колебаний  $T = 2\pi/\beta$  амплитуда изменяется в  $\exp(-\alpha \cdot 2\pi/\beta)$  раз. Отсюда связь колебательности с затуханием за период:  $\zeta = 1 - \exp(-2\pi/\mu)$ .

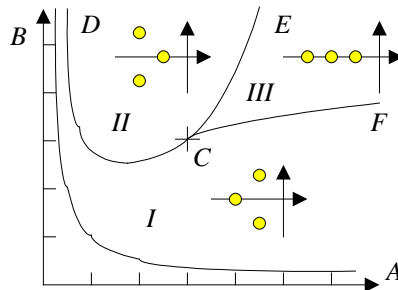
**Диаграмма Вышнеградского [1].** Рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Соответствующее нормированное уравнение ( $q = p/\Omega$ ,  $\Omega = \sqrt[3]{a_0/a_3}$ ) имеет вид:

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0.$$

Параметры  $A = \Omega^2 a_1/a_3$ ,  $B = \Omega a_2/a_3$  называются параметрами Вышнеградского. Условия устойчивости системы третьего порядка были сформулированы Вышнеградским в 1876 году (критерий Гурвица сформулирован в 1895). Эти условия имеют вид:  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $AB > 1$ . Уравнение границы колебательной устойчивости:  $AB = 1$  – равнобокая гипербола. Ниже изображена диаграмма Вышнеградского.



В точке C, где  $A = 3$ ,  $B = 3$  характеристическое уравнение принимает вид  $(q+1)^3 = 0$ . В этой точке для исходного уравнения  $p_1 = p_2 = p_3 = -\Omega$ . Внутри области III дискриминант  $A^2 B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 > 0$  (область трёх вещественных корней). В области I пара комплексных корней лежит ближе к мнимой оси, чем вещественный корень, в области II – наоборот. На границе между этими областями все три корня лежат на одинаковом расстоянии от мнимой оси. Уравнение этой границы можно найти, положив значения корней  $q_1 = -\alpha$ ,  $q_2 = -\alpha \pm i\beta$ :

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = [q - (-\alpha)][q - (-\alpha + i\beta)][q - (-\alpha - i\beta)] = q^3 + 3\alpha q^2 + (3\alpha^2 + \beta^2)q + \alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях даёт:

$$A = 3\alpha, \quad B = 3\alpha^2 + \beta^2, \quad 1 = \alpha(\alpha^2 + \beta^2).$$

Исключая  $\alpha$  и  $\beta$ , получим искомое уравнение границы:  $2A^3 - 9AB + 27 = 0$ ,  $A < 3$ .

**Стабилизация среднего радиуса равновесной орбиты пучка в протонном синхротроне ТРАПП.** Динамика сгруппированного благодаря ускоряющему напряжению пучка

самого по себе (т.е. динамика объекта регулирования) описывается следующим линеаризованным уравнением (так называемые радиально-фазовые или синхротронные колебания):

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \Delta R_s(t) = \Omega^2 \frac{aR_s}{\eta\omega_s} \Delta\omega_{Bq}(t), \quad \Omega = \frac{c}{R_s} \sqrt{\frac{\eta \cos \varphi_s e \hat{V}_{Bq}}{2\pi E_s}}.$$

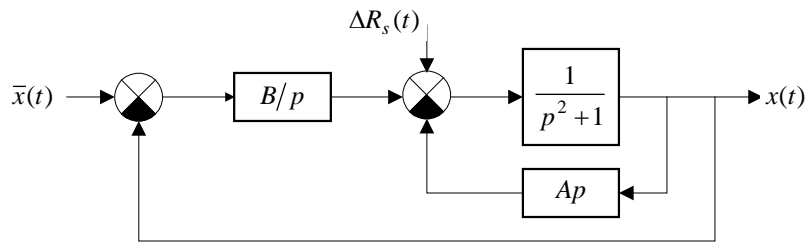
Здесь  $x(t)$  – текущее отклонение среднего радиуса равновесной орбиты (коротко – равновесного радиуса),  $\Omega$  – частота малых синхротронных колебаний,  $R_s$  и  $\Delta R_s$  – равновесный радиус и его возмущение,  $\omega_s$  – равновесная частота обращения пучка,  $\alpha = d \ln R / d \ln p$  – коэффициент расширения орбит (свойство магнитной системы ускорителя),  $p_s$  и  $E_s$  – равновесные импульс и энергия протона,  $\eta = d \ln \omega / d \ln p = 1/\gamma^2 - \alpha$ ,  $\gamma$  – релятивистский фактор,  $c$  – скорость света,  $\varphi_s$  – равновесная фаза пучка относительно гармонического ускоряющего напряжения,  $\hat{V}_{Bq}$  – амплитуда ускоряющего напряжения,  $e$  – элементарный заряд. Здесь все возмущения (среднего магнитного поля, частоты и амплитуды ускоряющего напряжения) приведены к возмущению частоты ускоряющего напряжения  $\Delta\omega_{Bq}(t)$ , или – к соответствующему возмущению равновесного радиуса орбиты  $\Delta R_s(t) = (\alpha R_s / \eta \omega_s) \Delta\omega_{Bq}(t)$ . Далее, для простоты,  $\Omega = 1$ .

Уравнение для отклонения равновесного радиуса  $x(t)$  при наличии обратной связи по  $\dot{x}$  и  $\int x dt$  имеет вид:

$$\ddot{x} + x = \Delta R_s(t) - A\dot{x} - B \int_0^t (x - \bar{x}) dt.$$

Здесь  $\bar{x}(t)$  – задаваемое отклонение равновесного радиуса. Т.е., с помощью этой системы обратной связи (о.с.) мы хотим не только подавить синхротронные колебания пучка с помощью петли по  $\dot{x}(t)$ , но и управлять величиной равновесного радиуса с помощью петли по  $\int x(t) dt$ . На практике петля по  $\dot{x}(t)$  реализуется как петля о.с. по отклонению фазы пучка от равновесной фазы. Во-первых, это возможно в силу того обстоятельства, что  $\dot{x}(t) = \Omega^2 (aR_s / \eta \omega_s) \Delta\varphi(t)$ , во-вторых, технически проще обеспечить достаточно широкую полосу пропускания этого тракта.

Изобразим рассматриваемую систему о.с. в терминах теории автоматического регулирования:



Коэффициент передачи разомкнутой системы  $W(p) = \frac{B}{p} \frac{1}{p^2 + Ap + 1}$ . Характеристическое уравнение:

$$0 = 1 + W(p) \rightarrow p^3 + Ap^2 + p + B = 0.$$

Критерий Рауса-Гурвица даёт:

$$A > 0, B > 0, A - B > 0.$$

На плоскости параметров  $(A, B)$ , в пределах области устойчивости, корни характеристического уравнения имеют вид  $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$ :

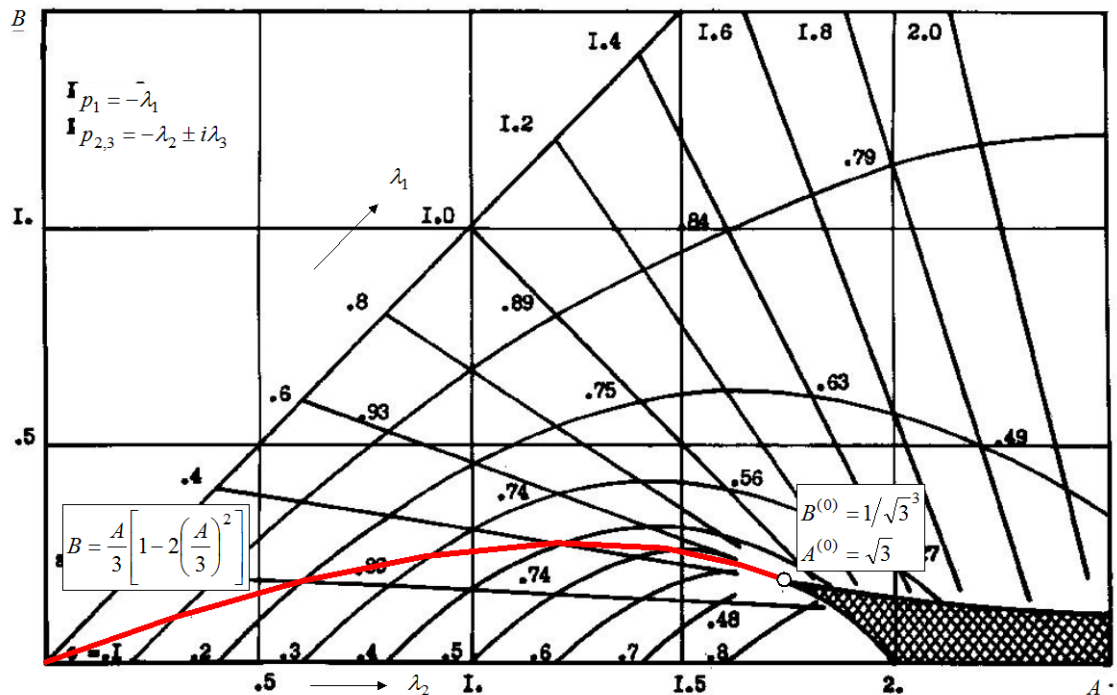
$$\begin{cases} p_1 = -\lambda_1 \\ p_{2,3} = -\lambda_2 \pm i\lambda_3 \end{cases}$$

Структуру области устойчивости удобно описывать параметрическими соотношениями, являющимися результатом приравнивания коэффициентов уравнений

$$p^3 + Ap^2 + p + B = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = 0:$$

$$\begin{cases} A = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_3^2 = 1 - \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \\ B = \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \end{cases}$$

Ниже изображена структура области устойчивости (аналог диаграммы Вышнеградского):



Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то темпы ликвидации отклонения и подавления колебаний равны, и можно говорить об общем темпе стабилизации равновесного радиуса. Равенство  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  даёт:

$$\begin{cases} A = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3\lambda \rightarrow \lambda = A/3 \\ \lambda_3^2 = 1 - \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = 1 - 3\lambda^2 \\ B = \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) = \lambda(1 - 2\lambda^2) \end{cases}$$

Отсюда уравнение соответствующей кривой  $B = \frac{A}{3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{A}{3} \right)^2 \right]$ . На этой кривой  $\lambda = A/3$ ,

т.е.  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и декремент  $\delta = \Omega\lambda$  прямо пропорциональны коэффициенту о.с. по фазе. Замечательным обстоятельством является то, что по мере увеличения  $A$ ,  $B$  вначале увеличивается, а затем должно уменьшаться. В точке, где  $\lambda_3^2 = 1 - \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = 1 - 3\lambda^2 = 0$ ,  $\lambda$  достигает значения  $\lambda_0 = 1/\sqrt{3}$ . Соответствующий декремент  $\delta_0 = \Omega\lambda_0 = \Omega/\sqrt{3}$  является в данном случае максимальным декрементом. Т.е. не существует других корней характери-

стического уравнения, чтобы абсолютные значения действительных частей всех из них были бы больше, чем  $\delta_0$ .

Таким образом, максимальный темп стабилизации равновесного радиуса имеет место при следующих (оптимальных) значениях параметров петель о.с.:

$$A^{(0)} = \sqrt{3} \cong 1.73, \quad B^{(0)} = 1/\sqrt{3} \cong 0.192,$$

когда все три корня характеристического уравнения одинаковы. Соответствующее уравнение движения

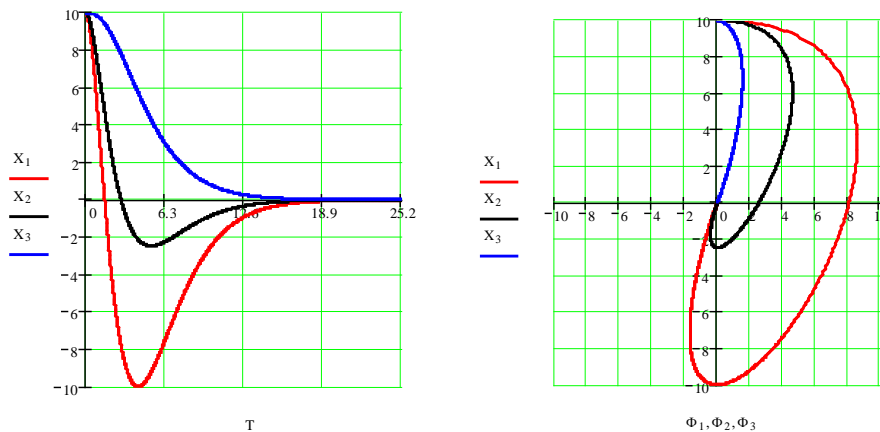
$$\ddot{x} + x = \Delta R_s - \sqrt{3} \cdot \dot{x} - \frac{1}{\sqrt{3}^3} \cdot \int_0^t x dt.$$

При  $A < 1$  и  $B < 1$  декременты для колебаний ( $\delta_A$ ) и отклонения равновесного радиуса ( $\delta_B$ ) имеют следующую величину:

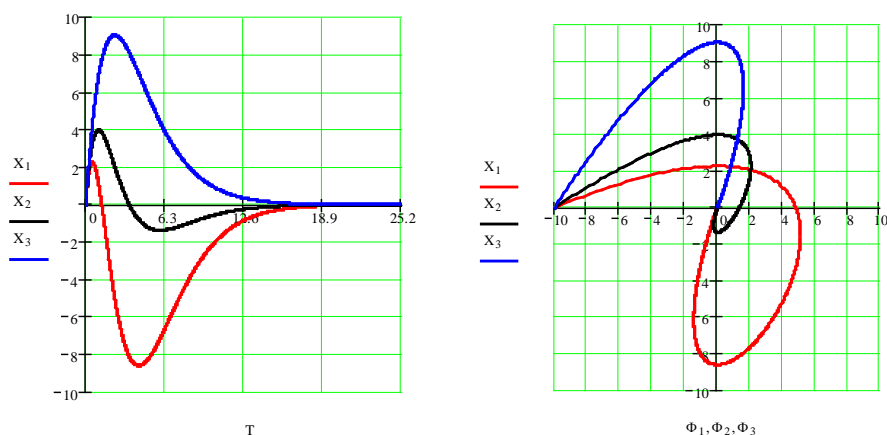
$$\begin{cases} \delta_A = \Omega(A - B)/2 \\ \delta_B = \Omega B \end{cases}.$$

Таким образом, о.с. «по радиусу», как ей и положено, подавляет отклонение равновесного радиуса, но при этом, в отсутствие о.с. по фазе (или, если угодно, по  $\dot{x}$ , что физически то же самое), раскачивает синхротронные колебания.

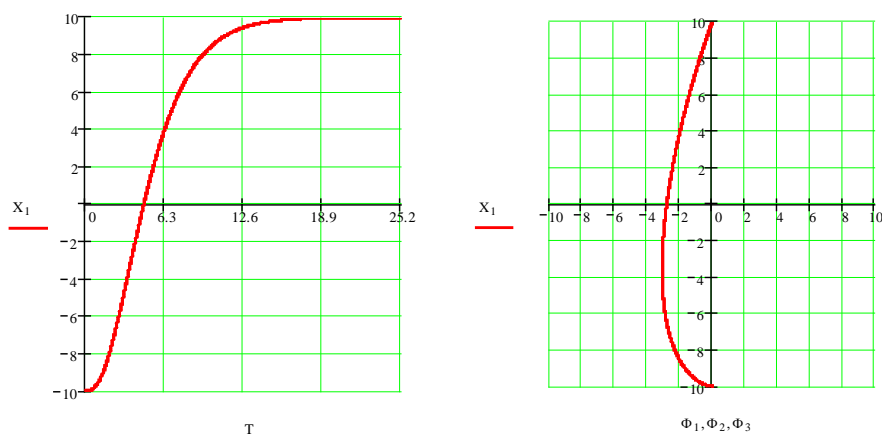
На рисунках ниже – зависимость равновесных радиусов от времени и фазовые траектории при начальном отклонении равновесного радиуса  $x(0) = +10$ , что соответствует отклонению энергии пучка от равновесной (при инжекции), и возмущениях равновесного радиуса  $\Delta R_s = -10, 0, +10$  (траектории  $X_1, X_2, X_3$ ), что соответствует отклонению частоты ускоряющего напряжения от равновесной. Здесь  $\eta < 0$ , так что  $\dot{x}(t) \propto -\Delta\varphi(t)$ . Судя по фазовым траекториям, допустимы не только отклонения энергии пучка от равновесной, эквивалентные смещению пучка в пределах всей апертуры камеры, но и отклонения частоты ускоряющего напряжения, эквивалентные смещению пучка в тех же пределах.



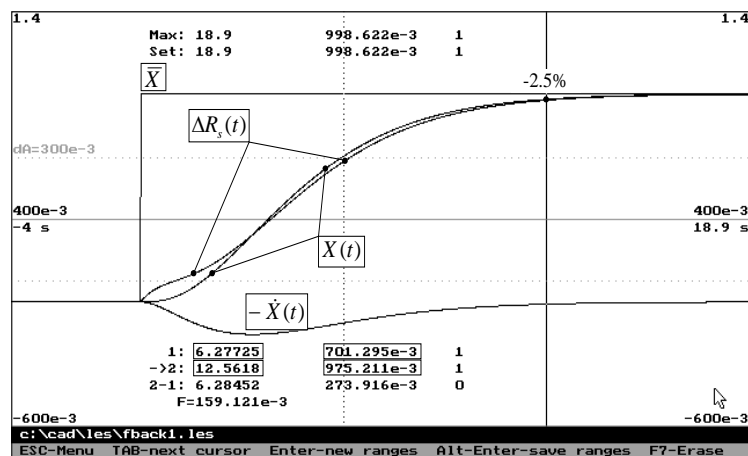
На рисунках ниже – зависимость равновесных радиусов от времени и фазовые траектории при начальном отклонении  $\dot{x}(0) = +10$ , что соответствует отклонению фазы, и возмущениях равновесного радиуса  $\Delta R_s = -10, 0, +10$  (траектории  $X_1, X_2, X_3$ ).



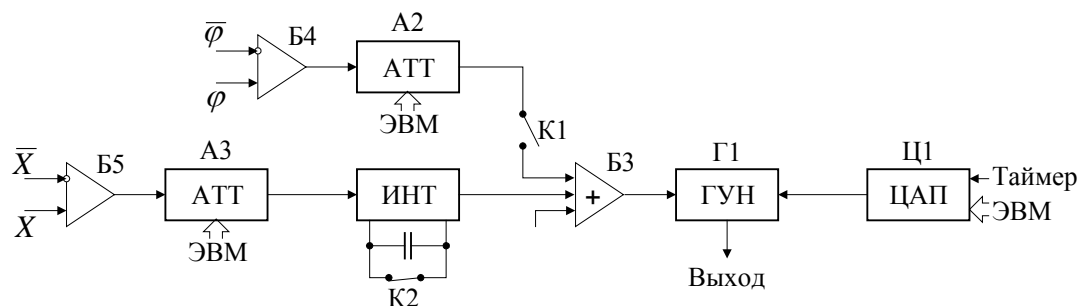
На рисунках ниже – зависимость равновесного радиуса от времени и фазовая траектория при начальных отклонении и возмущении равновесного радиуса  $x(0) = \Delta R_s(0) = -10$  и при управляющем сигнале  $\bar{x}(t) = +10 \cdot 1(t)$ , приводящем к желаемому изменению равновесного радиуса.



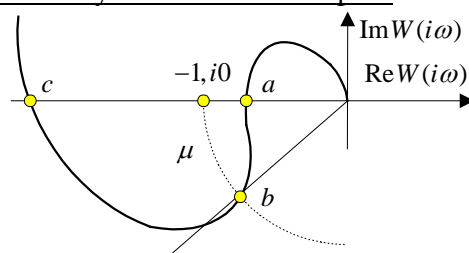
Ниже реакция системы на ступенчатый сигнал управления равновесным радиусом изображена с помощью программы *LES*.



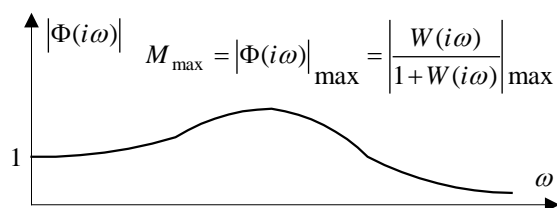
На рисунке ниже – часть блок-схемы системы стабилизации радиального положения пучка протонного синхротрона ТРАПП.



**Частотные критерии качества [1].** Запас устойчивости можно определять по удалению АФХ разомкнутой системы от точки  $(-1, i0)$ . Для этой цели вводятся понятия запаса устойчивости по амплитуде и запаса устойчивости по фазе.



Удобнее, однако, определять запас устойчивости по показателю колебательности  $M_{\max}$ .



Показатель колебательности замкнутой системы можно определить по виду АФХ разомкнутой системы. Рассмотрим уравнение

$$\left| \frac{W(i\omega)}{1 + W(i\omega)} \right| = M.$$

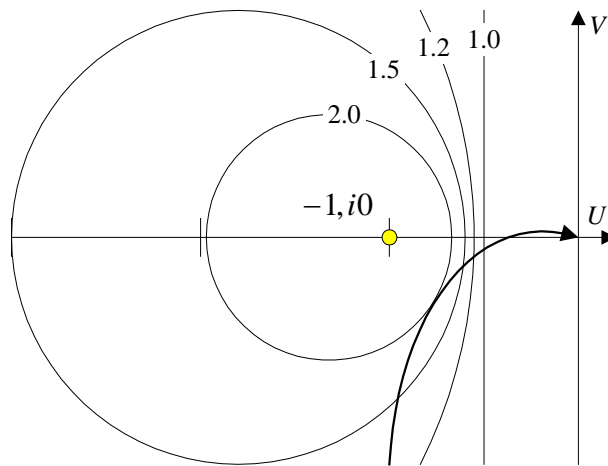
Сделаем подстановки  $U = \operatorname{Re} W$ ,  $V = \operatorname{Im} W$ . Тогда

$$\left| \frac{U + iV}{1 + U + iV} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + U)^2 + V^2}} = M.$$

Возведём в квадрат и преобразуем:

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2, \text{ где } C = \frac{M^2}{M^2 - 1}, R = \frac{M}{M^2 - 1}.$$

Слева – уравнение окружности с радиусом  $R$  и с центром, смещённым влево от начала координат на  $C$ . Задаваясь  $M$  от 0 до  $\infty$ , строят семейство таких окружностей (см. рисунок ниже). При  $M = 1$  окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат, проходящую через точку  $(-0.5, i0)$ . При  $M \rightarrow \infty$  окружность вырождается в точку  $(-1, i0)$ . При  $M = 0$  окружность вырождается в точку  $(0, i0)$ . На рисунке ниже годограф разомкнутой системы касается окружности, соответствующей колебательности  $M = 2$ . Следовательно, такое значение будет иметь колебательность замкнутой системы.



## 11. Повышение точности систем автоматического регулирования [1, Бесекерский и Попов]

Общие методы:

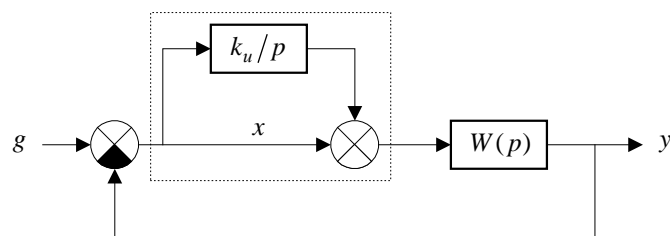
- 1) увеличение коэффициента усиления разомкнутой цепи,
- 2) повышение степени астатизма,
- 3) применение регулирования по производным от ошибки.

При повышении коэффициента усиления система, как правило, приближается к колебательной границе устойчивости. Следует одновременно повышать запас устойчивости, что делается с помощью различных корректирующих звеньев.

**Применение изодромных устройств.** Можно повысить порядок астатизма без заметного ухудшения запаса устойчивости. Передаточная функция изодромного звена:

$$W_u(p) = 1 + \frac{k_u}{p} = \frac{k_u(1 + T_u p)}{p}, \text{ здесь } T_u = 1/k_u.$$

Пример реализации включения изодромного звена:



Выше были рассчитаны коэффициенты ошибок для системы, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Напомним процедуру получения коэффициентов ошибок. Передаточная функция по ошибке:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3}{K_v + p + (T_1 + T_2)p^2 + T_1 T_2 p^3} = \frac{p + ap^2 + bp^3}{K + p + ap^2 + bp^3}.$$

Деление полинома на полином уголком:

$$\left. \begin{array}{l} p + ap^2 + bp^3 \\ p + \frac{1}{K}p^2 + \frac{a}{K}p^3 + \frac{b}{K}p^4 \\ (a - \frac{1}{K})p^2 + (b - \frac{1}{K})p^3 - \frac{b}{K}p^4 \\ (a - \frac{1}{K})p^2 + \frac{1}{K}(a - \frac{1}{K})p^3 + \frac{a}{K}(a - \frac{1}{K})p^4 + \dots \\ (b - 2\frac{a}{K} + \frac{1}{K^2}) + \dots \end{array} \right| \begin{array}{l} K + p + ap^2 + bp^3 \\ \frac{1}{K}p + \frac{1}{K}(a - \frac{1}{K})p^2 + \frac{1}{K}(b - 2\frac{a}{K} + \frac{1}{K^2})p^3 + \dots \end{array}.$$

Теперь, при добавлении изодромного звена,

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} \frac{k_u(1+T_up)}{p} = \frac{K_\varepsilon(1+T_up)}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Здесь  $K_\varepsilon = Kk_u$  – так называемая добротность системы по ускорению. Коэффициенты ошибок получаются путём разложения передаточной функции замкнутой системы по ошибке  $\Phi_x(p) = 1/(1+W(p))$ . В результате:

$$\left. \begin{array}{l} c_0 = c_1 = 0 \\ c_2/2 = 1/K_\varepsilon \\ c_3/6 = (T_1 + T_2 - T_u)/K_\varepsilon \end{array} \right\}.$$

Т.е. обнулили коэффициент ошибки  $c_1$  и имеем перспективу обнуления коэффициента  $c_3$  при  $T_1 + T_2 = T_u$ . Однако не появились ли у нас проблемы с устойчивостью?

Характеристическое уравнение:

$$T_1T_2p^4 + (T_1 + T_2)p^3 + p^2 + K_\varepsilon T_u p + K_\varepsilon = 0.$$

Критерий Рауса-Гурвица:

$$\left. \begin{array}{l} a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \\ (a_1a_2 - a_0a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0 \end{array} \right\}.$$

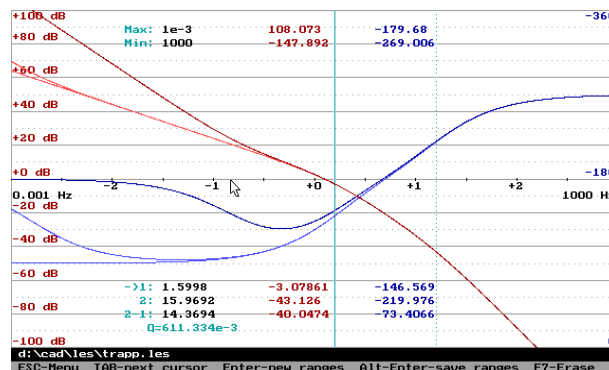
Второе неравенство более суровое:

$$(T_1 + T_2)K_\varepsilon T_u - T_1T_2(K_\varepsilon T_u)^2 - (T_1 + T_2)^2 K_\varepsilon > 0.$$

Иначе:

$$K_\varepsilon T_u = K < \frac{T_1 + T_2 - (T_1 + T_2)^2/T_u}{T_1T_2} \xrightarrow{T_u \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

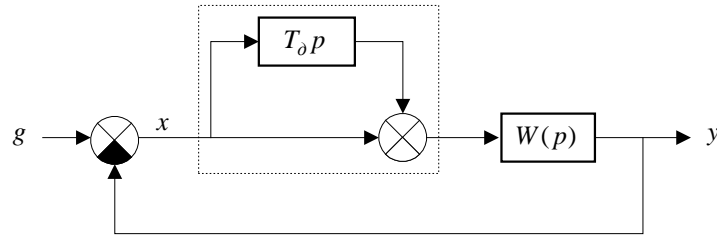
Т.е. при достаточно большом значении постоянной времени изодромного звена условие устойчивости модернизированной системы будет мало отличаться от условия устойчивости исходной системы. Эффект изодромного устройства изображён с помощью логарифмических частотных характеристик ниже.



**Регулирование по производным от ошибки.** Передаточная функция звена с дифференцированием:

$$W_o(p) = 1 + T_o p.$$





Для той же передаточной функции разомкнутой системы, что и в примере выше, с учётом дифференцирующего звена имеем

$$W(p) = \frac{K(1+T_d p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Коэффициенты ошибок получают путём разложения передаточной функции замкнутой системы по ошибке

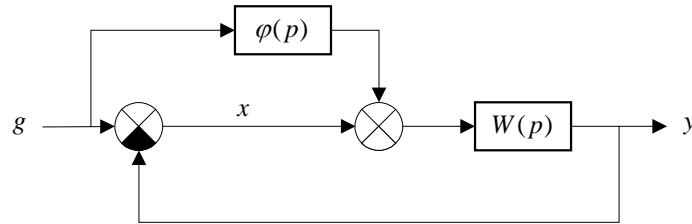
$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p) + K(1+T_d p)}:$$

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1/K \\ c_2 &= \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{1}{K^2} - \frac{T_d}{K} \\ c_3 &= \frac{T_1 T_2}{6} - 2 \frac{T_1+T_2-T_d}{K^2} + \frac{1}{K^3} - \frac{T_d(T_1+T_2-T_d)}{K} \end{aligned} \right\}.$$

Видно, что при соответствующем выборе величины постоянной времени  $T_d$  можно обнулить коэффициенты ошибки  $c_2$  или  $c_3$ . Применяя два дифференцирующих звена, можно обнулить их одновременно. Заметим, что на коэффициент  $c_1$  дифференцирующее звено не влияет.

Наиболее эффективным является одновременное применение изодромных устройств и дифференцирующих звеньев.

**Комбинированное управление [1].** Структурная схема системы с комбинированным управлением:



Здесь наряду с регулированием по ошибке используется регулирование по задающему воздействию. Регулируемая величина определяется выражением:

$$y = \frac{W(p)}{1+W(p)} [1 + \varphi(p)] g = \Phi_y(p) g.$$

Видно, что введение регулирования по задающему воздействию не меняет характеристического уравнения системы, работающей по отклонению. Очевидно, что если  $\varphi(p) = W^{-1}(p)$ , то имеет место так называемое условие полной инвариантности системы регулирования. Т.е. эквивалентная передаточная функция по ошибке

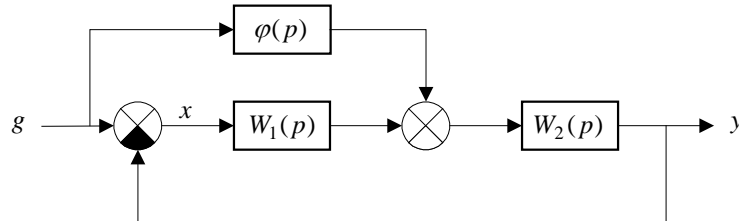
$$\Phi_{xy}(p) = 1 - \Phi_y(p) = \frac{1 - \varphi(p)W(p)}{1+W(p)} = 0.$$

На практике полная инвариантность невозможна. Произведём разложение в ряд:

$$\varphi(p) = \frac{1}{W(p)} = a + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \dots$$

Использованием конечного числа членов полученного ряда достигается частичная инвариантность. Так, введением первой производной от задающего воздействия в систему с астатизмом первого порядка можно получить равной нулю скоростную ошибку, т.е. повысить степень астатизма.

Прежде рассмотрения некоторых примеров, рассмотрим систему, имеющую следующую структуру (сигнал регулирования по задающему воздействию подан в некоторую точку внутри канала регулирования):



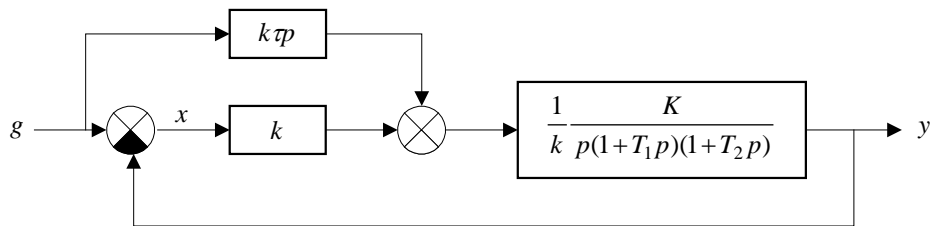
Эквивалентные передаточные функции замкнутой системы и по ошибке:

$$\Phi_{\text{з}} = \frac{W}{1+W} \left[ 1 + \frac{\varphi}{W_1} \right], \quad \Phi_{\text{хз}} = 1 - \Phi_{\text{з}} = \frac{1 - \varphi W_2}{1+W}.$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{з}} = \frac{\Phi_{\text{з}}}{1 - \Phi_{\text{з}}} = \frac{W}{1 - \varphi W_2} \left[ 1 + \frac{\varphi}{W_1} \right].$$

**Пример: следящая система**



Эквивалентная передаточная функция по ошибке:

$$\Phi_{\text{хз}}(p) = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 - \tau K) p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K}.$$

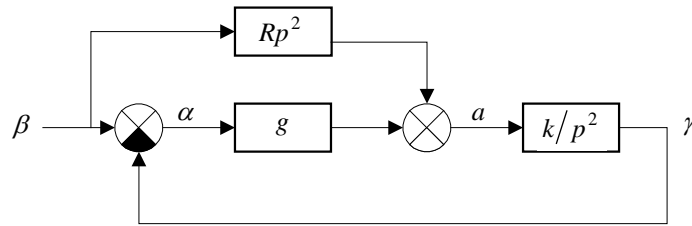
Скоростная ошибка будет равна нулю, если  $\tau K = 1$ . При этом, естественно, эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы будет соответствовать астатизму второго порядка:

$$W_{\text{з}}(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) - \tau K p} = \frac{K_{\text{э}}(1 + \tau p)}{p^2(1 + T_{\text{з}} p)}, \quad \text{здесь } K_{\text{э}} = \frac{K}{T_1 + T_2}, \quad T_{\text{з}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}.$$

**Пример: инерционная вертикаль.** На перемещающейся горизонтально по поверхности земли платформе (танк) установлен измеритель горизонтального ускорения, которое равно

$$a = g\alpha + R p^2 \beta.$$

Здесь  $\alpha$  – наклон платформы (ошибка вертикали),  $R$  – радиус Земли,  $\beta$  – угол, соответствующий пройденному пути  $R\beta$ . Двойной интеграл от этого ускорения поворачивает платформу на угол  $\gamma = a k / p^2$ . Система стабилизации вертикали описывается следующей структурной схемой:



Передаточная функция по ошибке (вертикали):

$$\Phi_{xy} = \frac{1 - \phi W_2}{1 + W} = \frac{1 - Rp^2 \cdot k/p^2}{1 + g \cdot k/p^2} \Big|_{k=1/R} = 0.$$

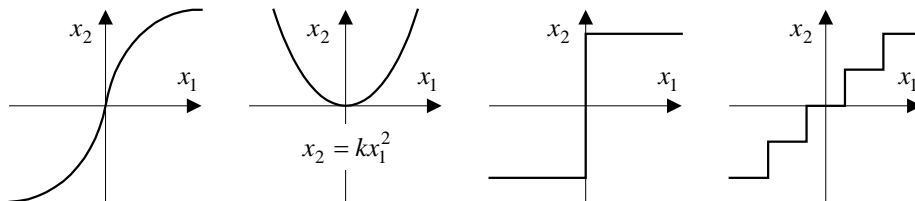
Всё это справедливо, если выполнены нулевые начальные условия – отсутствует свободное начальное движение вертикали. В самом деле, характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2 + \frac{g}{R} = 0, \text{ корни: } P_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{R}} = \pm i \Omega_0.$$

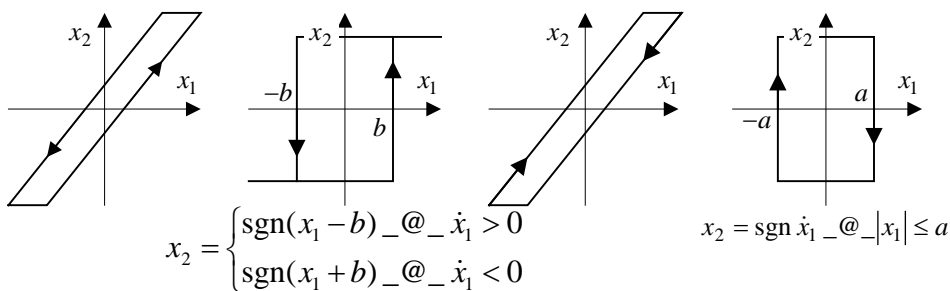
Здесь  $\Omega_0$  – частота незатухающих колебаний вертикали, которой соответствует период  $T_0 \approx 85 \text{ мин}$ , называемый периодом Шулера.

## 12. Нелинейные системы автоматического регулирования [5, Попов, Теория нелинейных систем...]

Статическая нелинейность – это нелинейность статической характеристики звена. Характеристики могут быть непрерывными (две ниже слева) или релейными (две ниже справа):



С другой стороны, они могут быть однозначными (как на рисунках выше), петлевыми гистерезисными (две ниже слева) или опережающими (две ниже справа):



Если динамика звена системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением, то это – динамическая нелинейность. Нелинейным является, например, уравнение движения системы при наличии вязкого или сухого трения:

$$F_T = -(c_1 + c_2 \dot{x}^2) \dot{x} \text{ – вязкое трение,}$$

$$F_T = -c \operatorname{sgn} \dot{x} \text{ при } \dot{x} \neq 0, -c \leq F_T \leq c \text{ при } \dot{x} = 0 \text{ – простейший вид сухого трения.}$$

Звено с изменяющейся постоянной времени имеет вид

$$[T_1(x_1)p + 1]x_2 = kx_1, \quad p = d/dt,$$

или же  $(T_1 p + 1)x_2 = k_1 x_1$  при  $p x_1 > 0$ ,  $(T_2 p + 1)x_2 = k_1 x_1$  при  $p x_1 < 0$ .

Заметим, в линейных системах с переменными параметрами последние зависят от времени, в нелинейных – от координат (или производных). Нелинейности в системах регулиро-

вания могут быть естественными и специально вводимыми для придания системе желаемых свойств.

**Фазовая плоскость.** При составлении уравнений динамики системы все звенья, поддающиеся линеаризации, описываются линейными уравнениями. И только для одного-двух существенно нелинейных звеньев составляются нелинейные уравнения, или используются нелинейные характеристики. Общий вид нелинейного дифференциального уравнения:

$$\dot{x}_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t; g(t); f(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пространство координат состояния системы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется фазовым пространством, в котором решение уравнения движения изображается в виде фазовой траектории системы. Заметим, что  $\Phi_i = \dot{x}_i$  – проекции скорости изображающей точки – текущей точки фазовой траектории. Ниже будут рассматриваться только системы второго порядка, которым соответствуют двумерные пространства состояний – фазовые плоскости. Уравнения движения стационарной системы в отсутствие внешних воздействий:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2).$$

Дифференциальное уравнение фазовой траектории получается путём исключения времени из этой системы уравнений:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)}.$$

Точки равновесного состояния определяются нулевыми значениями скоростей  $dx_1/dt = 0$ ,  $dx_2/dt = 0$ . Следовательно

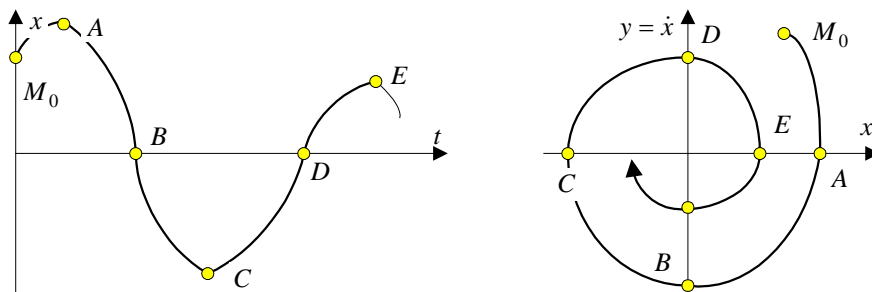
$$\Phi_1(x_1, x_2) = 0, \quad \Phi_2(x_1, x_2) = 0,$$

что создаёт неопределённость правой части уравнения фазовой траектории. Поэтому точки равновесного состояния являются особыми точками на фазовой плоскости.

Пусть уравнения движения системы имеют вид:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Phi(x, y).$$

Т.е. координата  $y$ , откладываемая по оси ординат, представляет собой скорость изменения координаты  $x$ , откладываемой по оси абсцисс. Сопоставим изображение в виде фазовых траекторий на плоскости  $y(x)$  с обычным его представлением в виде кривой  $x(t)$ . В этом случае для изображающей точки справедливо следующее: изображающая точка движется в верхней полуплоскости слева направо, так как там  $y > 0$ , а в нижней – справа налево, так как там  $y < 0$ ; ось  $x$  пересекается фазовыми траекториями под прямым углом, так как там скорость  $y = 0$ , т.е. имеет место максимум или минимум величины  $x$ . В общем случае это правило действительно.



Видно, что затухающий (нарастающий) колебательный процесс соответствует на фазовой плоскости сходящейся (расходящейся) спирали. Периодический процесс изобразится в виде замкнутой кривой. Монотонно затухающий (нарастающий) процесс изобразится на фазовой плоскости в виде кривой, монотонно приближающейся (удаляющейся) к положению равновесия.

**Типы особых точек и фазовые портреты линейных систем.** Уравнения линейной системы второго порядка имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \right\}, \text{ или } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ где } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ при условии } \det \mathbf{A} \neq 0.$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}.$$

Единственная особая точка  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . Характеристическое уравнение:

$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}] = 0.$$

Пусть его корни  $\lambda_1, \lambda_2$  различны. Путём подстановки  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  исходная матрица приводится к диагональному виду. Уравнения движения примут вид:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2]\mathbf{y}, \text{ или } \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2.$$

Решения:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

**Случай вещественных корней.** Пусть  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ . Исключая время, получим уравнение фазовой траектории:

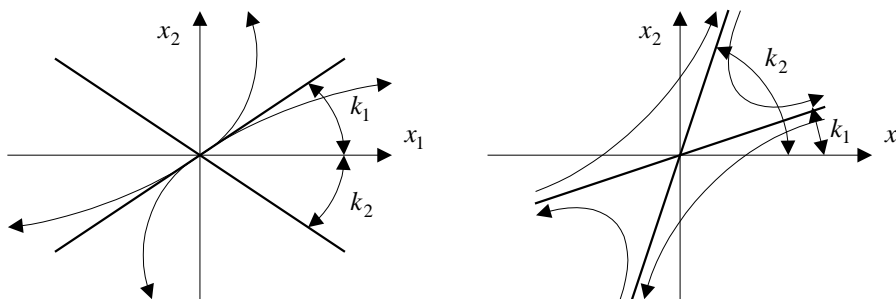
$$y_2 = C y_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Если знаки корней одинаковы, то фазовые траектории – параболы. Направление движения изображающей точки определяется знаками корней. Если корни отрицательны (положительны), то точка (0,0) называется точкой типа «устойчивый (неустойчивый) узел». Если знаки корней различны, то фазовые траектории – гиперболы. В этом случае точка (0,0) – точка типа «седло», всегда неустойчива.

Отобразим полученные фазовые портреты линейной системы на плоскость исходных координат  $(x_1, x_2)$ . Заметим, что оси парабол и асимптоты гипербол сами являются фазовыми траекториями и при линейном преобразовании останутся прямыми. Их отображение на плоскость  $(x_1, x_2)$  примет вид  $x_2 = kx_1$ . Подставляя это соотношение в уравнение движения, имеем:

$$k = \frac{a_{21} + a_{22}k}{a_{11} + a_{12}k}, \text{ или } a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{21} = 0,$$

откуда находим два значения  $k_1$  и  $k_2$  (тангенсы углов наклона асимптот). По какой из фазовых траекторий пойдёт переходный процесс в системе, определяется начальными условиями.

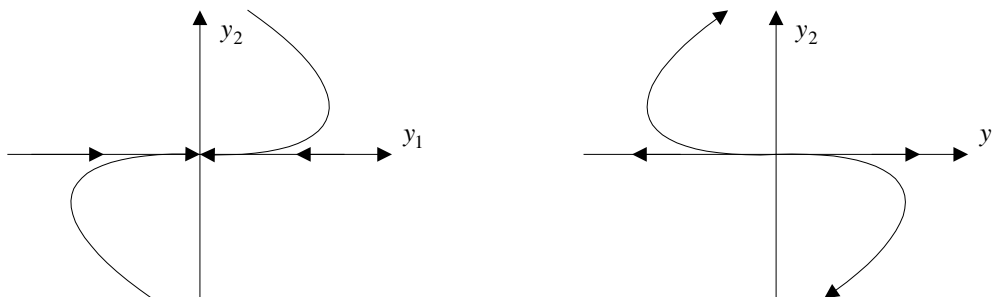


Для уточнения качественной картины фазовых траекторий применяется метод изоклин. Изоклина – линия, соединяющая точки фазовых траекторий с одинаковым наклоном касательной. Для каждой изоклины  $dx_2/dx_1 = c$ . Следовательно, уравнение изоклины имеет вид

$$\frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} = c,$$

это уравнение прямой  $x_2 = k_u x_1$ . Задаваясь тангенсом угла наклона изоклины  $k_u$ , находят значение тангенса угла наклона фазовых траекторий в точках пересечения ими изоклины, что позволяет уточнить картину фазовых траекторий.

**Случай равных вещественных корней.** В этом случае получается вырожденный узел (устойчивый или неустойчивый). Вид фазовых траекторий в координатах  $(y_1, y_2)$ :



**Случай комплексных корней.** Переходный процесс – колебательный. Пусть  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ . Решения:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

Введя новые переменные  $y_1 = z_1 + iz_2$ ,  $y_2 = z_1 - iz_2$ , преобразуем решения к вещественной форме:

$$z_1 = A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma), \quad z_2 = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma).$$

В полярных координатах  $(r, \varphi)$ :

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = A e^{\alpha t}, \quad \tan \varphi = z_2 / z_1 = \tan(\beta t + \gamma), \quad \varphi = \beta t + \gamma + k\pi.$$

Эти выражения описывают логарифмическую спираль. При отрицательной (положительной) вещественной части корней точка  $(0,0)$  называется «точкой типа устойчивый (неустойчивый) фокус».

Необходимо, однако, преобразовать полученные фазовые портреты в исходную систему координат. Для этого воспользуемся методом изоклин. Пусть, например, задана система

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0.$$

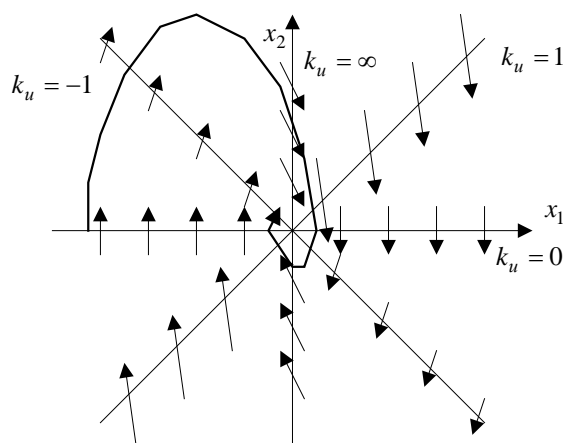
Корни характеристического уравнения  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i2$ . Обозначив  $x = x_1$ ,  $\dot{x} = x_2$ , приведём систему к виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_2 - 5x_1.$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2 - 5 \frac{x_1}{x_2}.$$

Для изоклины  $x_2 = k_u x_1$  находим  $c = -2 - 5/k_u$ . Возьмём изоклины с  $k_u = 0, 1, \infty, -1$ . Тогда  $c = -\infty, -7, -2, 3$ . Соответствующие направления касательных к фазовым траекториям показаны стрелками на рисунке:



При чисто мнимых корнях получаются эллипсы. Особая точка  $(0,0)$  в этом случае называется «точкой типа центр».

**Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем.** Уравнения нелинейной системы второго порядка имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \Phi_2(x, y).$$

Особые точки, отвечающие равновесным состояниям системы, определяются из условий

$$\Phi_1(x, y) = 0, \quad \Phi_2(x, y) = 0.$$

Для выявления типа каждой особой точки эти уравнения линеаризуются при малых отклонениях координат в окрестности особой точки. Затем определяются корни характеристического уравнения линеаризованной системы, по которым устанавливается тип особой точки.

**Пример.** Уравнения нелинейной системы:

$$\frac{dx}{dt} = -x(1+x^2) - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$$

Уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{-x(1+x^2)-2y}.$$

Условия на особые точки:

$$x(1+x^2) + 2y = 0, \quad x + y = 0.$$

Эта система имеет три решения:

$$1) \ x = 0, y = 0, \quad 2) \ x = 1, y = -1, \quad 3) \ x = -1, y = 1.$$

Каждому из решений соответствует равновесное состояние.

В окрестность точки  $(x = 0, y = 0)$  линеаризованные уравнения имеют вид:

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = x + y.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0. \text{ Отсюда } \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Корни чисто мнимые. Следовательно, это точка типа «центр».

В окрестности точки  $(x = 1, y = -1)$  вводим малые отклонения координат:  $\xi = x - 1, \eta = y + 1$ . Подставляя  $x = \xi + 1, y = \eta - 1$  в исходную систему уравнений и отбрасывая нелинейные члены, получаем линеаризованную систему:

$$\dot{\xi} = -4\xi - 2\eta, \quad \dot{\eta} = \xi + \eta.$$

Характеристическое уравнение:

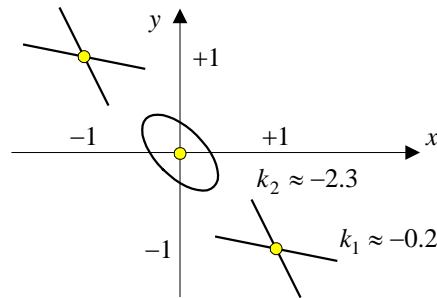
$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0. \text{ Отсюда } \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}.$$

Корни вещественны и имеют разные знаки. Следовательно, это точка типа «седло».

В окрестности точки  $(x = -1, y = 1)$ , подстановкой  $x = \xi - 1, y = \eta + 1$  в исходную систему уравнений, получаем ту же линеаризованную систему, что и в предыдущем случае. Следовательно, это тоже точка типа «седло».

Найдём асимптоты фазовых траекторий в седловых точках. Полагая  $\eta = k\xi$ , из уравнений фазовых траекторий

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{-4\xi - 2\eta} \text{ получим } k = \frac{1+k}{-4-2k}, \text{ или } 2k^2 + 5k + 1 = 0, \text{ откуда } k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$



Для определения направления движения изображающей точки по фазовым траекториям достаточно взять какую-либо одну точку. Например, в точке  $(x = 0, y = 1)$ , согласно исходной системе, имеем  $\dot{x} = -2, \dot{y} = 1$ . В силу непрерывности системы, в том же направлении движутся изображающие точки по соседним фазовым траекториям.

Ни одно из этих трёх равновесных состояний не является устойчивым. Методом изоклин можно уточнить ход фазовых траекторий. Уравнение изоклины

$$\frac{x+y}{-x(1+x^2)-2y} = c \text{ при } c = 1 \text{ имеет вид: } y = -\frac{x}{3}(2+x^2).$$

Эта кривая изоклина, соответствующая углу наклона фазовых траекторий  $45^\circ$ , проходит через все особые точки. При  $c \neq 1$  изоклина по-прежнему пройдёт через начало координат (особая точка), но не пройдёт через две другие особые точки.

**Общие замечания.** При наличии нескольких особых точек на фазовой плоскости появляются области с различными типами фазовых траекторий. Особые кривые, разделяющие области с различными типами фазовых траекторий, называются сепаратрисами.

Существуют особые кривые другого типа – предельные циклы. Это замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам, в окрестности которых имеют место колебательные переходные процессы. Предельные циклы могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

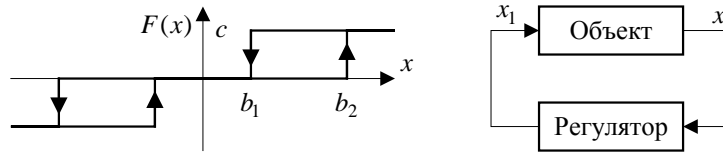
Физический смысл устойчивого предельного цикла – автоколебания системы. Причём амплитуда и частота автоколебаний не зависят от начальных условий, а определяется внутренними свойствами системы. В линейных системах собственные периодические колебания возможны только на границе устойчивости, причём амплитуда их определяется начальными условиями.

Физический смысл неустойчивого предельного цикла – граница областей начальных условий. При начальных условиях, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, получается затухающий переходной процесс, если же они лежат снаружи – расходящийся. Говорят: система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом». Таким образом, типы динамических процессов нелинейных систем могут существенно зависеть от начальных условий.

### 13. Переходные процессы и автоколебания релейной системы



Рассмотрим систему с релейной характеристикой самого общего вида.



Уравнение динамики объекта:  $(Tp + 1)x = -kx_1$ . Уравнение регулятора:  $px_1 = F(x)$ . Общее дифференциальное уравнение динамики системы:

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -kF(x).$$

Представим это уравнение в виде:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{T} - \frac{k}{T} F(x).$$

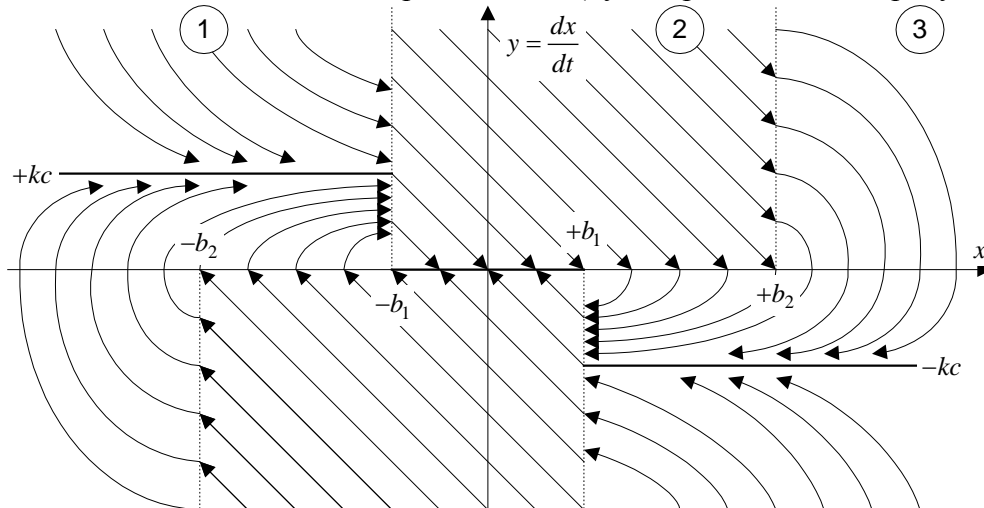
Уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \frac{F(x)}{y}.$$

Нелинейная функция  $F(x)$  описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{если } y = \frac{dx}{dt} > 0, \text{ то } F(x) &= \begin{cases} -c & \text{при } x < -b_1 \\ 0 & \text{при } -b_1 < x < +b_2 \\ +c & \text{при } x > +b_2 \end{cases} \\ \text{если } y = \frac{dx}{dt} < 0, \text{ то } F(x) &= \begin{cases} +c & \text{при } x > +b_1 \\ 0 & \text{при } -b_2 < x < +b_1 \\ -c & \text{при } x < -b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Выделим на фазовой плоскости три области: (1)  $F(x) = -c$ , (2)  $F(x) = 0$ , (3)  $F(x) = +c$ , разделённые так называемыми линиями переключения (пунктирные линии на рисунке).



Такая фазовая плоскость называется многолистной. На каждом листе – свой вид фазовых траекторий. По линиям переключения эти листы сшиваются. В области (1) уравнение фазовых траекторий принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{k}{T} \frac{c}{y}.$$

Проинтегрировав его, получим уравнение фазовых траекторий в области (1):  $x = -kcT \ln|y - kc| - Ty + C_1$ . Фазовые траектории имеют асимптоту  $y = kc$ . Изображающая

точка движется (грубо говоря) по часовой стрелке, так как  $y = dx/dt$  – скорость изменения  $x$ , больше нуля при  $y > 0$  и меньше нуля при  $y < 0$ .

В области (2) уравнение фазовых траекторий принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T}. \text{ Его решение } y = -\frac{1}{T}x + C_2 \text{ – прямолинейные отрезки.}$$

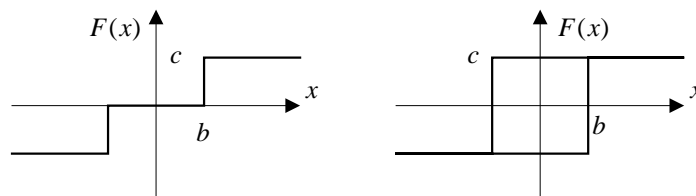
В области (3) уравнение фазовых траекторий принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \frac{c}{y}.$$

Проинтегрировав его, получим уравнение фазовых траекторий в области (3):  $x = +kcT \ln|y + kc| - Ty + C_3$ . Фазовые траектории имеют асимптоту  $y = -kc$ . Изображающая точка движется по часовой стрелке, так как  $y = dx/dt$  – скорость изменения  $x$ , больше нуля при  $y > 0$  и меньше нуля при  $y < 0$ .

В целом фазовые траектории имеют форму спирали, что соответствует затухающему колебательному процессу. Но не до нуля, а до некоторого произвольного значения в интервале  $-b_1 < x < b_1$ . Это зона нечувствительности реле. Вместо особой точки здесь получается особый отрезок равновесных состояний. Ход процесса определяется начальными условиями.

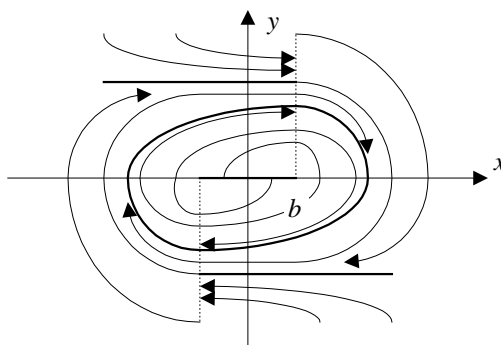
Частные случаи.



В случае релейной характеристики с зоной нечувствительности без петель картина фазовых траекторий аналогична описанной выше, с той разницей, что теперь  $b_1 = b_2 = b$ . В случае чисто петлевой гистерезисной релейной характеристики будет отсутствовать область (2). В этом случае

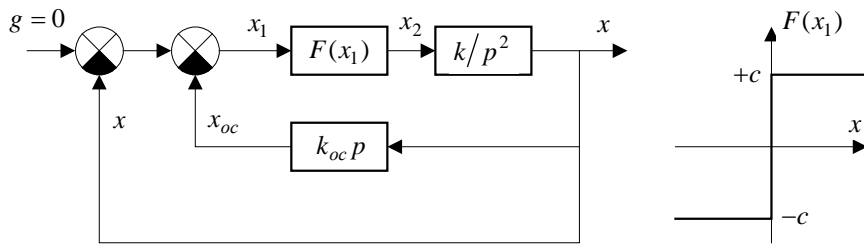
$$\begin{aligned} \text{если } y = \frac{dx}{dt} > 0, \text{ то } F(x) &= \begin{cases} -c & \text{при } x < b \\ +c & \text{при } x > b \end{cases}, \\ \text{если } y = \frac{dx}{dt} < 0, \text{ то } F(x) &= \begin{cases} +c & \text{при } x > -b \\ -c & \text{при } x < -b \end{cases}. \end{aligned}$$

Траектории слева:  $x = -kcT \ln|y - kc| - Ty + C_1$ , справа:  $x = +kcT \ln|y + kc| - Ty + C_3$ .



Виден устойчивый предельный цикл. Внешние траектории сходятся к нему, а внутренние – расходятся к нему. Амплитуда автоколебаний порядка  $b$ . Так работают, например, вибрационные регуляторы напряжения сети постоянного тока.

**Система со скользящим процессом.**



Уравнения динамики системы:

$$p^2 x = kx_2, \quad x_2 = F(x_1) = c \operatorname{sgn} x_1, \quad x_1 = -x - x_{oc} = -(1 + k_{oc} p)x.$$

В терминах дифференциальных уравнений они имеют вид:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -kc \operatorname{sgn}(x + k_{oc} y).$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

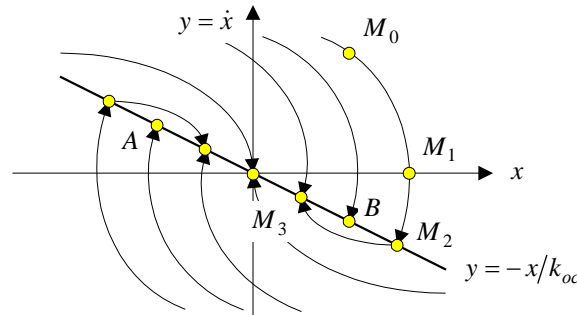
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kc}{y} \operatorname{sgn}(x + k_{oc} y).$$

Равенство нулю аргумента функции  $\operatorname{sgn}(x + k_{oc} y)$  определяет линию переключения  $y = -x/k_{oc}$ . Справа от этой линии уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$y dy = -kc dx, \text{ откуда } y^2 = -2kcx + C_1 \text{ — параболы рогами влево.}$$

Слева от этой линии уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$y dy = +kc dx, \text{ откуда } y^2 = +2kcx + C_1 \text{ — параболы рогами направо.}$$



На отрезке  $AB$  линии переключения  $y = -x/k_{oc}$  фазовые траектории встречаются, но движение не прекращается, так как на этой линии скорость не равна нулю:

$$\frac{dx}{dt} = y = -\frac{x}{k_{oc}}.$$

Решением этого уравнения является экспоненциальное скользящее движение:  $x = x_0 \exp(-t/k_{oc})$ . Здесь значения  $t = 0$  и  $x = x_0$  относятся к моменту попадания изображающей точки на линию так называемого скользящего процесса. Реально такой процесс соответствует переключению реле с большой частотой.

Отметим следующее. Нелинейная система второго порядка на участке скользящего процесса вырождается в линейную систему первого порядка. При этом закон движения не зависит от параметров прямой цепи системы и определяется только коэффициентом обратной связи.

Найдём положение концов отрезка скользящего процесса  $A$  и  $B$ . В этих точках касательные к параболам совпадают с линией переключения, то есть

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{k_{oc}}.$$

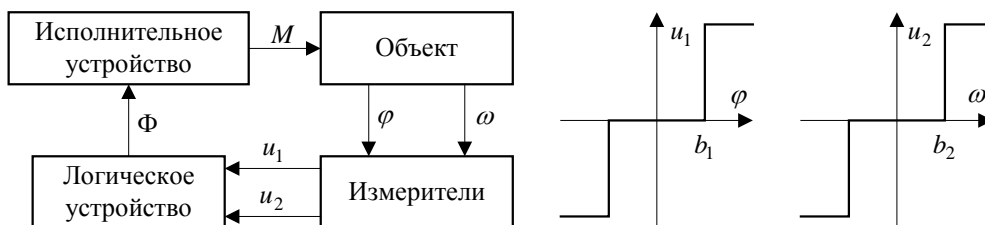
Из уравнения для фазовых траекторий получим:

$$-\frac{kc}{y_A} = -\frac{1}{k_{oc}} \rightarrow y_A = +ck_{oc}, \quad +\frac{kc}{y_B} = -\frac{1}{k_{oc}} \rightarrow y_B = -ck_{oc}.$$

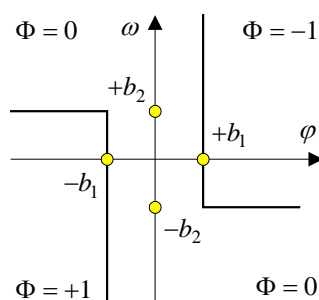
Следовательно, отрезок скользящего процесса тем больше, чем больше коэффициенты усиления прямой цепи и обратной связи.

**Система с логическим управлением. Учёт времени запаздывания.** Космический аппарат первоначально вращается вокруг своей оси. Рассмотрим автоматическую систему его стабилизации при отсутствии внешних возмущений.

Структурная схема системы стабилизации и характеристики измерителей угла и угловой скорости:



Уравнение вращения объекта:  $J \frac{d\omega}{dt} = M\Phi$ . Здесь  $J$  – момент инерции,  $M$  – вращающий момент,  $\Phi(\varphi, \omega)$  – логическая функция, принимающая значения  $-1, 0, +1$  (направление тяги). Простейшая функция  $\Phi(\omega, \varphi)$ :



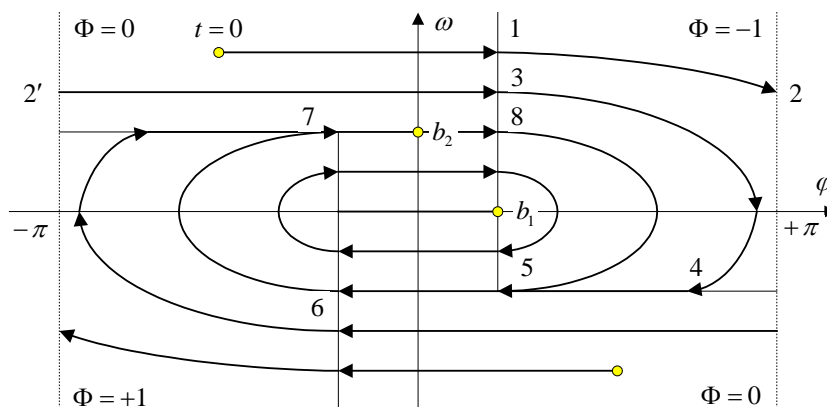
**Работа системы управления без запаздывания сигналов по всей цепи.** Уравнения движения системы:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = c\Phi(\varphi, \omega), \quad \text{где } c = \frac{M}{J} \text{ – угловое ускорение.}$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{c}{\omega} \Phi(\varphi, \omega).$$

Фазовую плоскость ограничим по оси абсцисс значениями  $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ , причём точки  $\varphi = \pm\pi$  совпадают (полный оборот).



В области, где  $\Phi = -1$ , уравнения фазовых траекторий принимают вид  $\omega d\omega = c d\varphi$ , вследствие чего фазовые траектории являются параболами с рогами налево:

$$\omega^2 = -2c\varphi + C_1.$$

В области, где  $\Phi = +1$ , фазовые траектории также являются параболами, но с рогами направо:

$$\omega^2 = +2c\varphi + C_2.$$

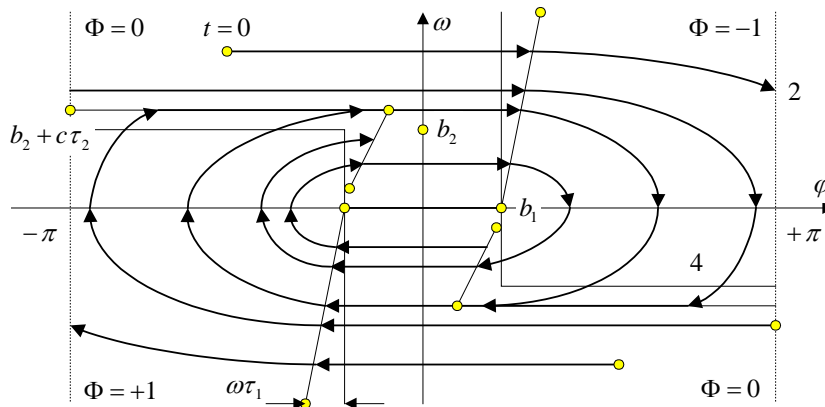
В области, где  $\Phi = 0$ , получаются прямые линии  $\omega = C_3$ . Объект входит в установившийся автоколебательный режим с амплитудой:

$$a = b_1 + \frac{b_2^2}{2c}.$$

Своеобразие предельного цикла – неасимптотическое приближение, за конечное число колебаний (и за конечное время). Кроме того, фазовые траектории внутри предельного цикла тоже замкнутые. Состояние равновесия, возможное только на отрезке ( $\omega = 0$ ,  $-b_1 < \varphi < +b_1$ ), не является устойчивым. Этот отрезок аналогичен точке типа «центр».

**Работа системы управления при наличии запаздывания сигналов.** Пусть  $\tau_1$  – время запаздывания включения сопел, а  $\tau_2$  – время запаздывания выключения ( $\tau_2 > \tau_1$ ). Поскольку к линии включения сопел  $\varphi = \pm b_1$  объект подходит с постоянной скоростью, то угол включения увеличится на величину  $\Delta\varphi = \omega\tau_1$ . То есть эффективные линии включения повернутся по ходу фазовых траекторий вокруг точек ( $\omega = 0$ ,  $\varphi = \pm b_1$ ) и займут наклонное положение. Поскольку к линии выключения сопел  $\omega = \pm b_2$  объект подходит с постоянным ускорением  $\pm c$ , то эффективные линии выключения окажутся смещёнными на величину  $\Delta\omega = \pm c\tau_2$ . Изменится картина фазовых траекторий и внутри предельного цикла. Эффективная линия переключения, согласно уравнению для фазовых траекторий  $\omega^2 = +2c\varphi + C_2$ , выходящих из области  $\Phi = +1$ , пройдёт через точки:

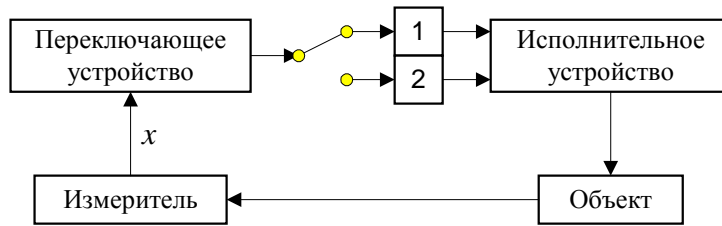
$$\left(-b_1 + \frac{c}{2}\tau_2^2, c\tau_2\right), \left(-b_1 + \frac{c}{2}\tau_2^2 + b_2\tau_2, c\tau_2 + b_2\right).$$



В результате внутри предельного цикла получаются расходящиеся фазовые траектории.

Итак, исследование поведения системы высокого порядка может быть осуществлено путём исследования системы второго порядка, с учётом времени запаздывания.

**Системы с переменной структурой.** Переменная структура системы даёт дополнительные возможности получения различных желаемых процессов автоматического регулирования.



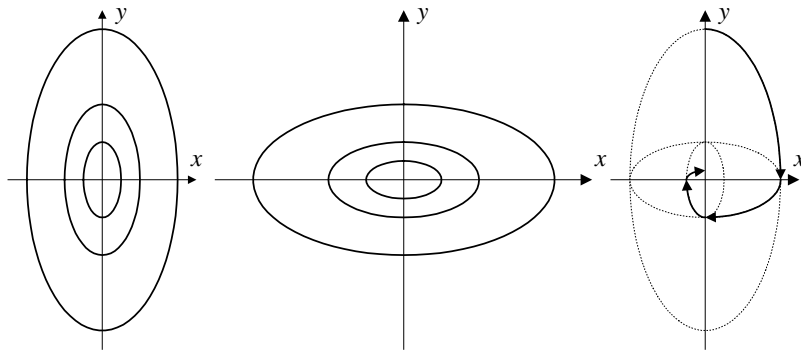
Пусть передаточная функция всех звеньев (кроме звеньев 1 и 2) имеет вид:

$$W(p) = k/p^2.$$

Звенья же 1 и 2 имеют, соответственно, коэффициенты усиления  $k_1$  и  $k_2$ . Уравнения динамики:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 kx = 0 \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + k_2 kx = 0.$$

Каждое из этих уравнений является уравнением неустойчивой системы. На рисунке ниже  $y = dx/dt$ .



Пусть звено 1 включается при  $xu > 0$ , а звено 2 – при  $xu < 0$ . То есть:

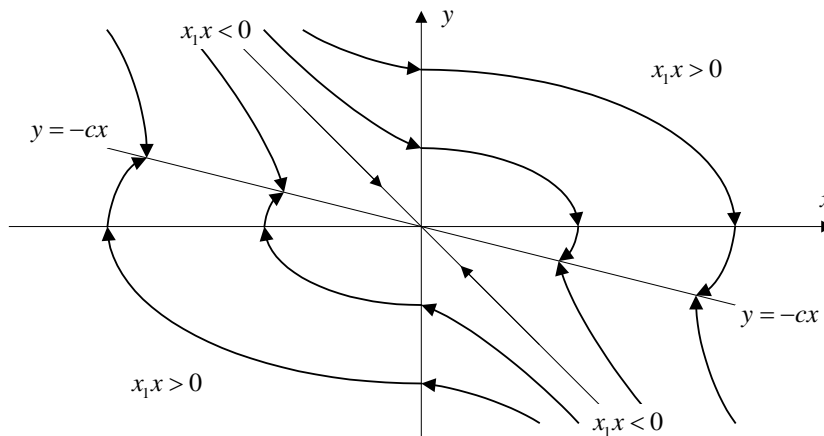
$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 kx = 0 \text{ при } xu > 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k_2 kx = 0 \text{ при } xu < 0.$$

В результате получается затухающий колебательный процесс, т.е. за счёт переменности структуры система становится устойчивой.

**Скользящий апериодический процесс.** Пусть в той же системе звено 1 имеет коэффициент усиления  $k_1$ , а звено 2 – коэффициент усиления  $-k_1$ . Сформируем в переключающем устройстве величину  $x_1 = y + cx$ . Пусть переключения осуществляются так, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 kx = 0 \text{ при } x_1 x > 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k_2 kx = 0 \text{ при } x_1 x < 0.$$

Таким образом, линиями переключения будут ось  $y$  и прямая  $y = -cx$ .



В области, где  $x_1 x > 0$  (справа над линией переключения, слева – под линией), фазовые траектории будут эллипсами. В остальных областях, где  $x_1 x < 0$  – гиперболами. Все фазовые траектории встречаются на линии переключения, что указывает на наличие скользящего процесса. Но здесь линия переключения не ограничена, и при любых начальных условиях система входит в скользящий процесс без колебаний. Этот процесс описывается уравнением:

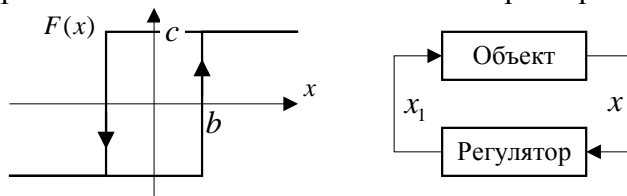
$$\frac{dx}{dt} + cx = 0, \text{ решение: } x = x_0 e^{-ct}.$$

#### 14. Метод припасовывания [1, Бесекерский и Попов]

Часто нелинейные системы представляются как кусочно-линейные, т.е. их динамика описывается линейными дифференциальными уравнениями, разными для разных участков процесса управления.

Метод припасовывания состоит в том, что линейные дифференциальные уравнения решаются в общем виде для каждого участка процесса, на котором они справедливы. Затем произвольные постоянные определяются таким образом, чтобы сшить эти участки. Значения фазовых координат в конце каждого участка служат начальными условиями для следующего участка. Метод припасовывания применим и тогда, когда какой-либо участок описывается нелинейным дифференциальным уравнением, если известно его общее решение.

**Пример.** Структурная схема системы и нелинейная характеристика регулятора:



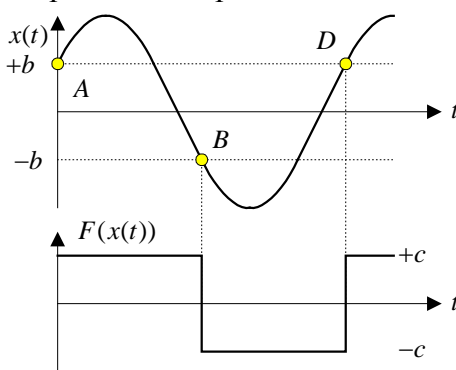
Уравнение движение объекта и уравнение регулятора:

$$(Tp + 1)x = -kx_1, \quad px_1 = F(x).$$

Общее уравнение замкнутой системы:

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -kF(x).$$

Возможный качественный вид переходного процесса:



Процесс разбивается на участки  $AB$ ,  $BD$  и т.д., на которых нелинейная функция регулятора принимает значения  $+c$  или  $-c$ . Уравнение движения на участке  $AB$ , его первый и второй интегралы:

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -kc, \quad \frac{dx}{dt} = C_1 e^{-t/T} - kc, \quad x = -TC_1 e^{-t/T} - kct + C_2.$$

Начальные условия:  $t = 0, x = b, dx/dt = \dot{x}_A$ . Откуда  $C_1 = \dot{x}_A + kc, C_2 = b + TC_1$ . Уравнение движения на участке  $BD$ , его первый и второй интегралы (время на каждом участке отсчитывается от нуля):

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = +kc, \quad \frac{dx}{dt} = C_3 e^{-t/T} + kc, \quad x = -TC_3 e^{-t/T} + kct + C_4.$$

Здесь начальные условия определяются решением на предыдущем участке:  $\dot{x}_B = C_1 e^{-t_B/T} - kc$ . Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  известны, а  $t_B$  определяется из соотношения

$$x_B = -TC_1 e^{-t_B/T} - kct_B + C_2 = -b.$$

Таким образом, начальные условия для участка  $BD$  имеют вид:  $t = 0$ ,  $x = -b$ ,  $dx/dt = \dot{x}_B$ . Отсюда постоянные интегрирования  $C_3 = \dot{x}_B - kc$ ,  $C_4 = -b + TC_3$ . И так далее.

Определим периодическое решение. В этом случае интервал  $AD$  – период колебаний. Так как полупериоды антисимметричны, достаточно рассмотреть один полупериод – интервал  $AB$  длительностью  $T_0$ . Сшиваем начало и конец интервала  $AB$  (теперь  $\dot{x}_A$  – предмет определения):

$$\dot{x}_B = -\dot{x}_A, \quad x_B = -x_A = -b.$$

Из первого условия:

$$C_1 e^{-T_0/T} - kc = -(C_1 - kc), \quad \text{откуда } C_1 = \frac{2kc}{1 + e^{-T_0/T}}.$$

Второе условие даёт:

$$b = -Tc + C_2, \quad -b = -TC_1 e^{-T_0/T} - kcT_0 + C_2.$$

Исключая  $C_1$  и  $C_2$ , получим:

$$\tanh \frac{T_0}{2T} = \frac{T_0}{2T} - \frac{b}{kcT}.$$

Здесь одна неизвестная величина – полупериод  $T_0$ . Трансцендентное уравнение решается графически. После этого можно вычислить амплитуду колебаний.

**Метод гармонической линеаризации.** Исследование систем второго порядка даёт наглядное представление о поведении нелинейных систем. Однако большинство систем автоматического регулирования описываются уравнениями более высокого порядка. Наиболее распространённым методом исследования нелинейных систем выше второго порядка является метод гармонической линеаризации (это приближённый метод).

Пусть имеется нелинейное звено с характеристикой

$$y = F(x).$$

Подадим на вход этого звена гармонический сигнал  $x = a \sin \omega t$ . На выходе получим

$$y = F(a \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t).$$

Допустим, что в замкнутой системе возможны автоколебания. Пусть остальная часть системы является линейной, причём величина амплитудной характеристики на частотах высших гармоник значительно меньше, чем для первой

$$|W_L(in\omega)| \ll |W_L(i\omega)|, \quad n = 2, 3, \dots,$$

т.е. линейная часть системы обладает свойством фильтра. Тогда на входе нелинейного звена сигнал будет почти гармоническим:  $x \approx a \sin \omega t$ . Сигнал на выходе нелинейного звена определяется либо графически, либо посредством разложения его в ряд Фурье. В итоге, в случае симметричных колебаний, задача сводится к определению частоты и амплитуды первой гармоники колебаний.

Пусть первая гармоника сигнала на выходе нелинейного элемента имеет вид:

$$y = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = q(a)a \sin \omega t + q'(a)a \cos \omega t.$$

Здесь введены стандартные обозначения. Кроме того, заметив, что

$$a \sin \omega t = x, \quad \text{получим } a \cos \omega t = \frac{px}{\omega}. \quad \text{Здесь } p = \frac{d}{dt}.$$

В результате



$$y = F(x) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x ,$$

$$\text{где } q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi , \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi , \quad \psi = \omega t .$$

Это представление называется гармонической линейризацией нелинейности, а величины  $q(a)$  и  $q'(a)$  – коэффициентами гармонической линейризации. Для данного конкретного периодического решения  $a = \text{const}$ , т.е. связь между  $x$  и  $y$  формально линейна. Нелинейность заключена в зависимости коэффициентов гармонической линейризации от амплитуды.

Амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена (подстановка  $p = i\omega$ ) зависит только от амплитуды и не зависит от частоты – в противоположность характеристикам линейных звеньев:

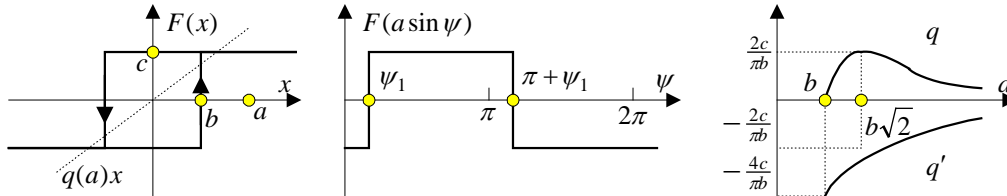
$$W_H(a) = q(a) + iq'(a) .$$

**Кубическая нелинейность.** Пусть

$$F(x) = k_1 x + k_3 x^3 .$$

Так как нелинейность симметричная, то  $q' = 0$ , а  $q = k_1 + \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} k_3 a^3 \sin^3 \psi \sin \psi d\psi = k_1 + \frac{3}{4} k_3 a^2$ .

**Петлевая релейная характеристика.**



Угол переключения определяется соотношением  $\sin \psi_1 = b/a$ . В результате

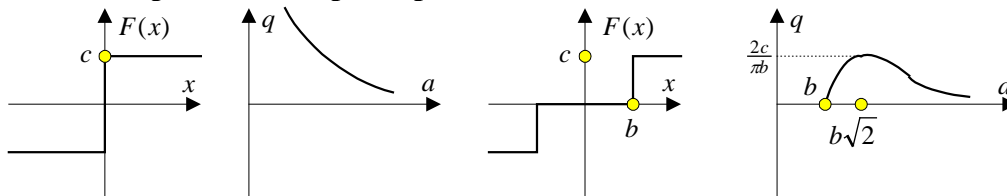
$$q = \frac{2}{\pi a} \left[ \int_0^{\psi_1} (-c) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \sin \psi d\psi \right] = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} ,$$

$$q' = \frac{2}{\pi a} \left[ \int_0^{\psi_1} (-c) \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \cos \psi d\psi \right] = -\frac{4cb}{\pi a^2} .$$

Соответствующие графики изображены на рисунке выше ( $a \geq b$ ). Видно, что гистерезисная петля приводит к запаздыванию ( $q' < 0$ ), которое уменьшается с ростом амплитуды входного сигнала, так как эффект петли падает.

Таким образом, гармоническая линейризация переводит нелинейное координатное запаздывание в запаздывание по фазе, характерное для линейных систем, но с существенным отличием – зависимостью фазового сдвига от амплитуды входного сигнала, чего нет в линейных системах.

**Однозначные релейные характеристики.**



$$\text{Здесь } q' = 0 , \quad q = \frac{4c}{\pi a} , \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} .$$

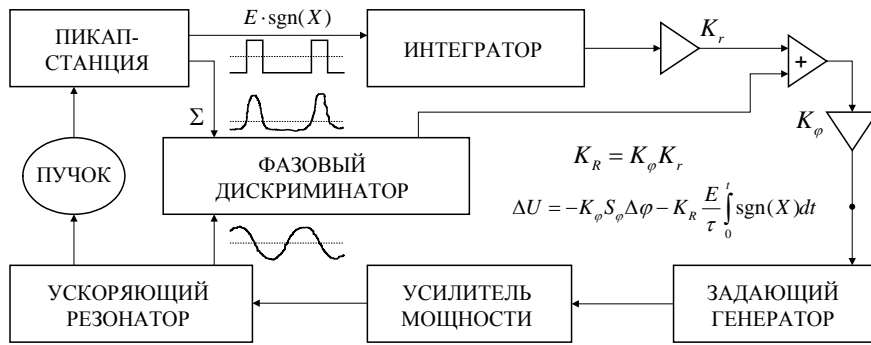
**Стабилизация среднего радиуса равновесной орбиты пучка в ионном синхротроне Б-5.**

Некоторые параметры синхротрона Б-5:

Энергия инжекции/выпуска	МэВ	1.0/200
Диапазон перестройки частоты ВЧ системы	МГц	2.51-30.7
Длительность/частота циклов ускорения	мс/Гц	10/50

Чтобы реализовать тот или иной метод стабилизации среднего радиуса равновесной орбиты пучка (коротко – равновесного радиуса) необходимо располагать сигналами фазы и радиального положения пучка. Между тем, формирование нормированного на ток пучка сигнала радиального положения пучка представляет известную проблему, особенно если время ускорения невелико.

С целью упрощения конфигурации системы о.с. было предложено в качестве сигнала для петли о.с. по «радиальному положению» использовать знак радиального положения пучка (т.е. одно звено системы о.с. является звеном релейного типа). Ниже изображена конфигурация системы о.с. по фазе и «радиальному положению».



Входным сигналом петли о.с. по фазе служит сигнал  $\Delta\varphi$ , пропорциональный разности фаз между высокочастотным напряжением на ускоряющем резонаторе и сигналом, пропорциональным азимутальной плотности заряда сгруппированного пучка (сигнал  $\Sigma = u^+ + u^-$  электростатического датчика положения пучка;  $u^+$ ,  $u^-$  – напряжения на внешнем и внутреннем электродах, соответственно). В качестве входного сигнала петли о.с. по радиальному положению используется знак положения пучка, т.е. сигнал вида  $E \cdot \text{sgn}(X)$ . Последний формируется путём логического перемножения усиленных и ограниченных разностного ( $\Delta = u^+ - u^-$ ) и суммарного ( $\Sigma = u^+ + u^-$ ) сигналов датчика с помощью элемента типа ‘исключающее ИЛИ’:

$$E \cdot \text{sgn}(X) = E \cdot \text{sgn}(\Delta/\Sigma) = E \cdot \text{sgn}(\Delta) \cdot \text{sgn}(\Sigma).$$

Здесь  $X$  – радиальное положение пучка,  $E$  – напряжение ограничения.

На вход коррекции частоты задающего генератора поступает следующий сигнал:

$$\Delta U = -K_\varphi S_\varphi \Delta\varphi - K_R \int_0^t \text{sgn}(X) dt.$$

Здесь  $S_\varphi = du/d\varphi$  – крутизна фазового дискриминатора,  $\tau$  – постоянная времени интегратора,  $K_\varphi$  и  $K_R = K_\varphi K_r$  – регулируемые оператором коэффициенты передачи соответствующих петель о.с. Этот сигнал вызывает изменение частоты задающего генератора  $\Delta\omega_{Bq} = d\omega_{Bq}/du \cdot \Delta U = S_\omega \Delta U$ . Динамика системы ‘ВЧ-пучок’ в терминах радиального положения пучка при наличии сигнала о.с. «по пучку» и возмущении равновесного радиуса  $\Delta\bar{R}_s$ , описывается следующим уравнением:

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = \Omega^2 \Delta\bar{R}_s - \Omega^2 \frac{\alpha R_s}{\eta \omega_s} S_\omega \left( K_\varphi S_\varphi \Delta\varphi + K_\varphi K_r \int_0^t \text{sgn}(X) dt \right) =$$

$$= \Omega^2 \Delta \bar{R}_s - S_\omega K_\varphi S_\varphi \dot{X} - \Omega^2 \frac{\alpha R_s}{\eta \omega_s} S_\omega K_\varphi K_r \frac{E}{\tau} \int_0^t \text{sgn}(X) dt.$$

Известно, что движение системы, описываемой уравнением с нелинейностью релейного типа, стремится к предельному циклу с некоторым радиусом  $r_\infty$ . Предположим, что при приближении системы ‘ВЧ-пучок’ к предельному циклу можно рассчитывать на гармоническую зависимость радиального движения пучка от времени:

$$X(t) = r_\infty \sin(\Omega t).$$

При этом амплитуда первой гармоники, генерируемой сигналом вида  $\int \text{sgn}(X) dt$ , будет равна  $4/\pi$ . Иначе это можно записать следующим образом:

$$\text{первая гармоника } \left( \int \text{sgn}(X) dt \right) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{r_\infty} \int X dt.$$

Пренебрегая наличием высших гармоник, генерируемых сигналом вида  $\int \text{sgn}(X) dt$  (т.е. прибегая к методу гармонической линеаризации), сравним члены уравнения движения системы с обратной связью ‘по знаку’ с соответствующими членами описанного выше ‘канонического’ уравнения:

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = \Omega^2 \Delta \bar{R}_s - G_\varphi \Omega \dot{X} - G_R \Omega^3 \int_0^t X dt.$$

В результате получим соотношения, связывающие параметры рассматриваемой системы о.с. ‘по знаку’ с параметрами ‘канонического’ уравнения движения:

$$\begin{cases} S_\omega K_\varphi S_\varphi = G_\varphi \Omega \\ \frac{\alpha R_s}{\eta \omega_s} S_\omega K_\varphi K_r \frac{E}{\tau} \frac{4}{\pi} \frac{1}{r_\infty} = G_R \Omega \end{cases}$$

Равенство  $G_\varphi = G_R$  в случае ‘канонической’ системы о.с. определяло границу области устойчивости. В данном же случае оно определяет радиус предельного цикла:

$$r_\infty = \frac{4}{\pi} \frac{E}{\tau} \frac{\alpha R_s}{\eta \omega_s} \frac{1}{S_\varphi} K_r.$$

Заметим, что система о.с. организована таким образом, что оператор может независимо устанавливать коэффициент о.с. по фазе и величину радиуса предельного цикла.

В случае ‘канонической’ системы о.с. максимальный темп стабилизации радиального положения пучка имеет место при следующих значениях параметров системы о.с. по фазе и радиальному положению:

$$G_\varphi^{(0)} = \sqrt{3}, \quad G_R^{(0)} = 1/\sqrt{3}^3.$$

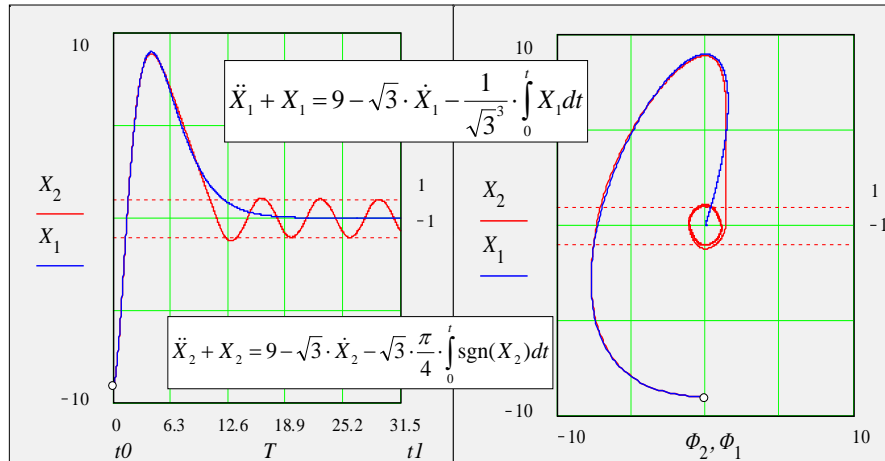
Заметим, что  $G_\varphi^{(0)}/G_R^{(0)} = 9$ . Это означает, что в случае системы о.с. ‘по знаку’ можно рассчитывать на максимальный темп стабилизации при начальном радиальном смещении пучка  $X(0) = 9r_\infty$ . Т.е. система о.с. ‘по знаку’ при старте из  $X(0) = 9r_\infty$  может подавить это смещение почти на порядок, имея, по крайней мере, тот же начальный темп, что и ‘каноническая’ система.

Введём безразмерное положение пучка  $\xi = X/r_\infty$ . В этих терминах уравнение движения приобретает следующий простой вид:

$$\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi = \Omega^2 \Delta \bar{\xi}_s - G_\varphi \Omega \dot{\xi} - G_\varphi \Omega^3 \frac{\pi}{4} \int_0^t \text{sgn}(\xi) dt.$$

Ниже изображена фазовая траектория системы описываемой уравнением движения при  $\Omega = 1$ ,  $\Delta \bar{\xi}_s = 9$  (начальное рассогласование частоты и поля в терминах безразмерного откло-

нения равновесного радиуса),  $\xi(0) = -9$  (неравновесная энергия пучка в момент инжекции в терминах безразмерного положения пучка),  $G_\varphi = \sqrt{3}$ . Общий вид фазовой траектории  $(X_2, \varphi_2)$  и величина радиуса предельного цикла подтверждают правильность сделанного выше предположения и оценки радиуса предельного цикла. Время выхода системы на предельный цикл порядка двух периодов синхротронных колебаний. Здесь же приведена фазовая траектория  $(X_1, \varphi_1)$ , изображающая движение системы, описываемой ‘каноническим’ уравнением.



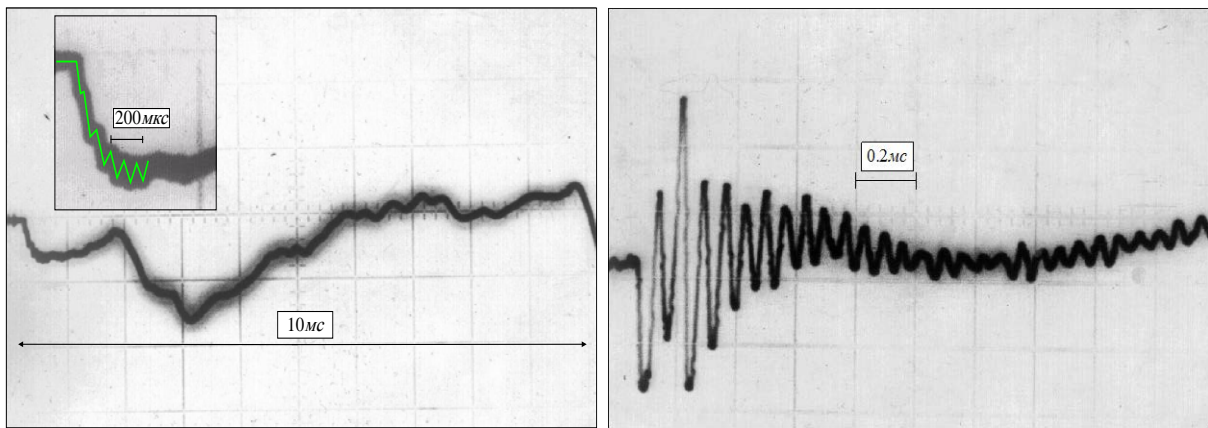
При системе о.с., конфигурация которой описывается ‘каноническим’ уравнением, желательно, чтобы коэффициенты передачи трактов о.с.  $K_\varphi$  и  $K_R$  при известных значениях остальных параметров системы о.с., пучка и синхротрона имели оптимальные значения в течение всего цикла ускорения. В случае же системы о.с. ‘по знаку’, как оказывается, вполне достаточно, чтобы коэффициенты  $K_\varphi$  и  $K_R$  были постоянными и имели оптимальные значения в момент инжекции пучка. При этом по мере роста равновесной частоты обращения пучка  $\omega_s$ , которая в случае синхротрона Б-5 увеличивается более чем на порядок, радиус предельного цикла  $r_\infty$  уменьшается почти в той же степени:

$$r_\infty = \frac{4}{\pi} \frac{E}{\tau} \frac{\alpha R_s}{\eta \omega_s} \frac{1}{S_\varphi} K_r \propto \frac{1}{\omega_s}.$$

Здесь параметр  $\eta = 1/\gamma^2 - \alpha$  слабо зависит от фазы цикла ускорения, а остальные параметры постоянны.

Если величина  $r_\infty$  на момент инжекции определена параметрами системы о.с. на уровне 10% апертуры камеры, то его остаточная величина на момент выпуска пучка будет ничтожно мала – порядка 1% апертуры камеры. В любом случае размеры предельного цикла будут много меньше размеров пучка. Вместе с тем, хотя по мере ускорения пучка коэффициент о.с. по фазе  $G_\varphi \propto 1/\Omega$  падает, соответствующий декремент  $\delta = G_\varphi \Omega = S_\omega K_\varphi S_\varphi$  имеет постоянное значение.

Ниже слева изображён сигнал интеграла от знака положения пучка в интервале времени  $(0 \div 10) \text{ мс}$  и сигнал на выходе фазового дискриминатора в интервале времени  $(0 \div 2) \text{ мс}$ . Видно, что примерно за три периода синхротронных колебаний система о.с. отрабатывает начальное рассогласование магнитного поля и частоты ускоряющего напряжения. Величина сигнала коррекции частоты ускоряющего напряжения указывает оператору на то, какие коррективы следует внести в соответствующие таблицы функционального преобразования. На выходе фазового дискриминатора наблюдается затухание фазовых колебаний и остаточные колебания, обязанные предельному циклу (рисунок ниже справа).



## 15. Алгебраический способ определения симметричных колебаний и устойчивости

Пусть система имеет следующую передаточную функцию линейной части (обладающую свойством фильтра):

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Дифференциальные уравнения линейной части системы и нелинейного звена:

$$Q(p)x = -R(p)y, \quad y = F(x), \quad (p = d/dt).$$

Уравнение замкнутой системы:

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0.$$

Решение ищется в виде (здесь амплитуда и частота – неизвестные величины):

$$x = a \sin \omega t.$$

После гармонической линеаризации

$$F(x) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x$$

уравнение движения приобретает вид:

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} x = 0.$$

Поскольку в искомом решении  $a = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$ , это уравнение можно рассматривать как обыкновенное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Специфика заключается в том, что эти коэффициенты неизвестны.

Характеристическое уравнение:

$$Q(\lambda) + R(\lambda) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \lambda \right] = 0.$$

Периодическое решение соответствует паре чисто мнимых корней, поэтому подставим сюда  $\lambda = i\omega$ :

$$Q(i\omega) + R(i\omega)[q(a) + iq'(a)] = 0.$$

Выделим здесь вещественную и мнимую части:

$$X(a, \omega) + iY(a, \omega) = 0.$$

Имеем два алгебраических уравнения, откуда находим амплитуду и частоту.

Решение упрощается в случае однозначной нелинейности. В этом случае имеем:

$$Q(\lambda) + R(\lambda)q(a) = 0.$$

Пусть

$$Q(i\omega) = X_Q(\omega) + iY_Q(\omega), \quad R(i\omega) = X_R(\omega) + iY_R(\omega).$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} X_Q(\omega) + X_R(\omega)q(a) &= 0, \quad Y_Q(\omega) + Y_R(\omega)q(a) = 0, \text{ или} \\ q(a) &= X_Q(\omega)/X_R(\omega) \\ X_Q(\omega)Y_R(\omega) - Y_Q(\omega)X_R(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Видно, что частота зависит только от вида линейной части системы и не зависит от формы однозначной нелинейности.

**Приближённый метод исследования устойчивости колебаний.** Дадим малые отклонения амплитуды и частоты:  $\Delta a, \Delta \omega$ . Тогда

$$x = (a + \Delta a)e^{-\xi t} \sin(\omega + \Delta \omega)t.$$

Для устойчивости периодического решения необходимо, очевидно, чтобы  $\Delta a$  и  $\xi$  имели одинаковые знаки. Воспользуемся символической записью:

$$x = ae^{i\omega t}, \quad x = (a + \Delta a)e^{i(\omega + \Delta \omega + i\xi)t}.$$

Первое решение определялось уравнением

$$X(a, \omega) + iY(a, \omega) = 0.$$

Второе решение определяется уравнением

$$X(a + \Delta a, \omega + \Delta \omega + i\xi) + iY(a, \omega) = 0.$$

Разложение в ряд Тейлора в точке  $(a, \omega)$  с учётом уравнения для первого решения даёт:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \Delta a + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* (\Delta \omega + i\xi) + i\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \Delta a + i\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* (\Delta \omega + i\xi) = 0$$

В результате исключения  $\Delta \omega$  имеем:

$$\xi = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^*}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} \Delta a.$$

Для одинаковости знаков  $\Delta a$  и  $\xi$  необходимо, чтобы

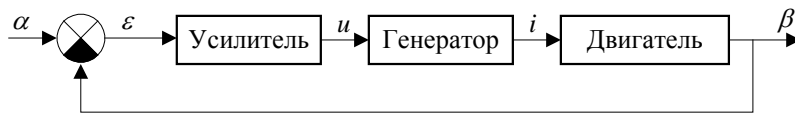
$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* > 0.$$

Кроме этого необходимо, чтобы все остальные корни характеристического уравнения линеаризованной системы имели отрицательные вещественные части, т.е. многочлен

$$\frac{Q(\lambda) + R(\lambda) \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \lambda \right]}{\lambda^2 + \omega^2}$$

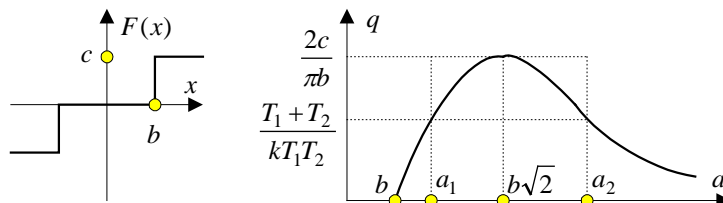
должен удовлетворять критерию Гурвица (или Михайлова).

**Пример: следящая система.**



Вид нелинейности усилителя изображён на рисунке ниже слева. Уравнения движения:

$$\varepsilon = \alpha - \beta, \quad u = F(\varepsilon), \quad (T_1 p + 1)i = k_1 u, \quad (T_2 p + 1)p\beta = k_2 i.$$



Уравнение линейной части при  $\alpha = 0$ :

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p \varepsilon = -k u, \quad k = k_1 k_2.$$

Гармонически линеаризованное уравнение замкнутой системы:

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p + k q(a)] \varepsilon = 0.$$

Здесь коэффициент гармонической линеаризации (см. рисунок выше справа)

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Характеристическое уравнение:

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_2 + T_2) \lambda^2 + \lambda + k q(a) = 0.$$

После подстановки  $\lambda = i\omega$  имеем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(a, \omega) &= k q(a) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0 \\ Y(a, \omega) &= \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad q(a) = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

Уравнение

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

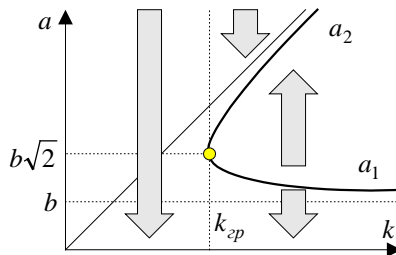
имеет два решения:  $a_1$  и  $a_2$  (см. рисунок выше). Причём в этих точках, соответственно,  $dq/da > 0$  и  $dq/da < 0$ . Для определения устойчивости найдём знак выражения

$$\left( \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \left( \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* = k \left( \frac{dq}{da} \right)^* \times (1 - 3T_1 T_2 \omega^2)^* = k \left( \frac{dq}{da} \right)^* (-2) > 0 \text{ при } dq/da < 0.$$

Таким образом, в точке  $a_1$  решение неустойчиво, а в точке  $a_2$  – устойчиво. На рисунке ниже изображены амплитуды автоколебаний и неустойчивого периодического решения в зависимости от коэффициента усиления линейной части системы. Граничное значение коэффициента усиления

$$k_{cp} = \frac{\pi b}{2c} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

соответствует точке максимума кривой на рисунке выше.



Имеется область устойчивого равновесного состояния ( $0 < k < k_{cp}$ ) и область жёсткого возбуждения автоколебаний ( $k > k_{cp}$ ), где требуется заброс начального состояния за линию  $a_1$ .

**Частотный метод определения симметричных колебаний и устойчивости.** Пусть линейная часть системы обладает свойством фильтра. Ищем периодическое решение нелинейной системы на входе нелинейного элемента приближенно в виде

$$x = a \sin \omega t$$

с неизвестными  $a$  и  $\omega$ . Задана форма нелинейности  $y = F(x)$  и передаточная функция линейной части

$$W_L(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}.$$

Здесь для обозначения комплексной переменной применена буква  $s$  чтобы не путать её с оператором дифференцирования  $p = d/dt$ , который фигурирует в выражении для гармонической линейризации ниже:

$$F(x) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x.$$

Соответствующая передаточная функция нелинейной части имеет вид

$$W_H(a, s) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы имеет вид

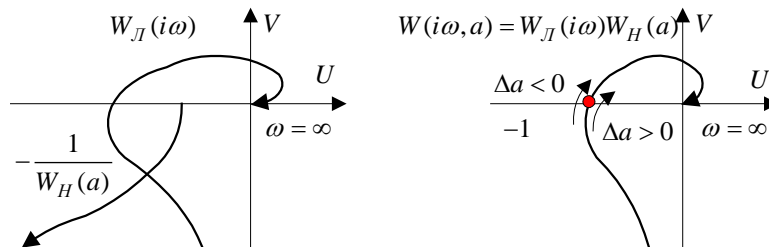
$$W(i\omega) = W_L(i\omega)W_H(a) = \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} [q(a) + iq'(a)].$$

Линеаризованная система имеет периодическое решение при наличии у характеристического уравнения замкнутой системы пары чисто мнимых корней. Следовательно, периодическое решение определяется равенством

$$W_L(i\omega)W_H(a) = -1,$$

которое и определяет искомые амплитуду и частоту.

Это уравнение решается графически следующим образом (см. ниже слева). На комплексной плоскости  $(U, V)$  вычерчивается АФХ линейной части и АФХ выражения  $-1/W_H(a)$ . Точка пересечения этих кривых и определяет величины  $a$  и  $\omega$ , причём значение  $a$  отсчитывается по кривой  $-1/W_H(a)$ , а значение  $\omega$  – по кривой  $W_L(i\omega)$ .



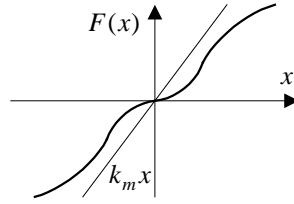
Устойчивость исследуется следующим образом. Периодическое решение имеет место в случае, когда АФХ разомкнутой системы проходит через  $-1$ , как это изображено на рисунке выше справа. Система будет возвращаться к периодическому решению, если при отклонении  $\Delta a > 0$  годограф деформируется таким образом, что критерий Найквиста выполняется, а при отклонении  $a < 0$  – нарушается.

## 16. Частотный критерий устойчивости В.М. Попова

Критерий Попова (ударение на первом «о», так как Попов – болгарин) даёт достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейной системы по виду частотной характеристики линейной части системы.

Пусть в системе имеется одна однозначная нелинейность. Рассмотрим случай расположения нелинейности в секторе  $[0, k_m]$ , т.е.  $0 < F(x) < k_m x$ :





Линейная часть системы описывается уравнением:

$$Q(p)x = R(p)y.$$

Пусть степень полинома  $Q(p)$  больше степени полинома  $R(p)$  и пусть передаточная функция линейной части  $W(p) = R(p)/Q(p)$  имеет полюсы с отрицательными вещественными частями и не более двух нулевых полюсов.

**Теорема Попова (без доказательства).** Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым, если нелинейная характеристика находится в секторе  $[0, k_m]$  и существует такое действительное число  $h$ , что при всех  $\omega \geq 0$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + i\omega h)W(i\omega)] + \frac{1}{k_m} > 0.$$

Возможно графическое представление этого критерия. Для этого введём модифицированную частотную характеристику линейной части:

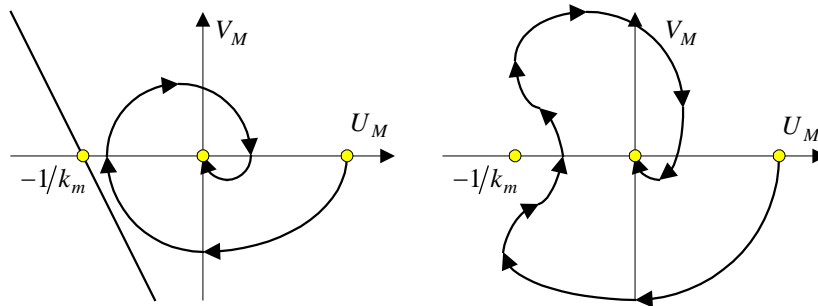
$$W_M(i\omega) = U_M(\omega) + iV_M(\omega), \text{ где } U_M(\omega) = U(\omega), \text{ а } V_M(\omega) = \omega V(\omega).$$

График  $W_M(i\omega)$  аналогичен графику  $W(i\omega)$  и отличается только масштабом по мнимой оси. Выражение из формулировки теоремы Попова теперь можно записать в виде

$$U(\omega) - \omega h V(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0 \text{ или } U_M(\omega) - h V_M(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0.$$

Выражение  $U(\omega) - hV(\omega) + 1/k_m = 0$  представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку  $-1/k_m$  на оси  $U_M$  с наклоном  $1/h$ . Отсюда имеем следующую формулировку критерия Попова:

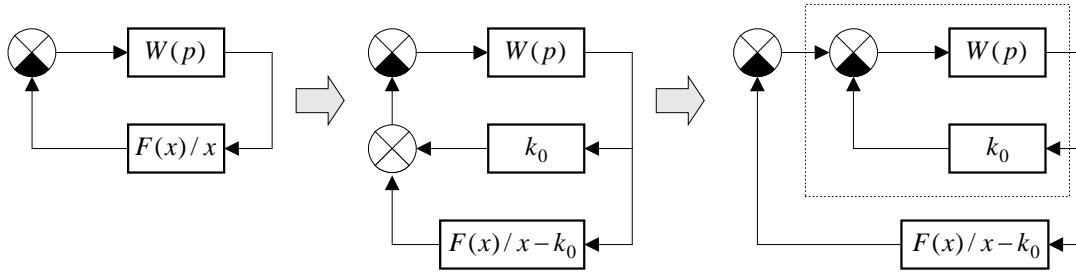
Состояние равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика  $F(x)$  находится в секторе  $[0, k_m]$  и можно провести через точку  $-1/k_m$  прямую так, что она не пересечёт модифицированную частотную характеристику. Слева на рисунке показан случай устойчивой системы, а справа – неустойчивой.



Рассмотрим случай расположения нелинейности в секторе  $[k_0, k_m]$ , т.е.  $k_0 x < F(x) < k_m x$ . Теперь неравенство в теореме Попова приобретает вид:

$$\operatorname{Re} \left[ (1 + i\omega h) \frac{W(i\omega)}{1 + k_0 W(i\omega)} \right] + \frac{1}{k_m - k_0} > 0.$$

Это соотношение можно легко получить из предыдущего путём эквивалентного преобразования структурной схемы системы:



Правая схема эквивалентна левой, но теперь роль элемента  $W(p)$  играет элемент  $\frac{W(p)}{1+k_0W(p)}$ , а роль элемента  $F(x)$  (функция  $F(x)$  лежит в секторе  $[k_0, k_m]$ ) играет элемент  $F(x) - k_0x$  (функция  $F(x) - k_0x$  лежит в секторе  $[0, k_m - k_0]$ ). Т.е. по сравнению с предыдущим случаем в формуле критерия произошла замена  $W(p)$  на  $\frac{W(p)}{1+k_0W(p)}$  и  $k_m$  на  $k_m - k_0$ .

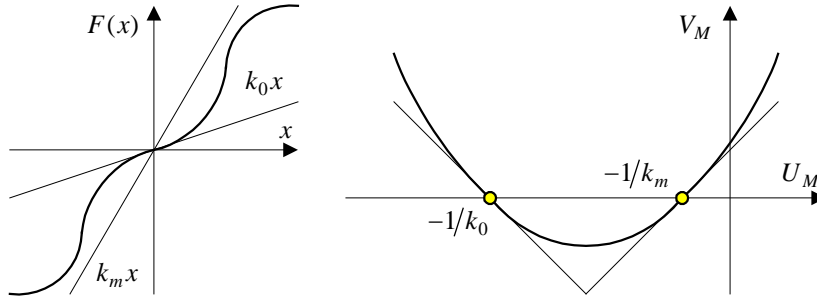
Преобразование последнего неравенства теоремы Попова с учётом  $W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$  даёт:

$$U^2 + \left( \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m} \right) U - \left( \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m} \right) h\omega V + V^2 + \frac{1}{k_0 k_m} > 0.$$

На плоскости координат модифицированной частотной характеристики уравнение

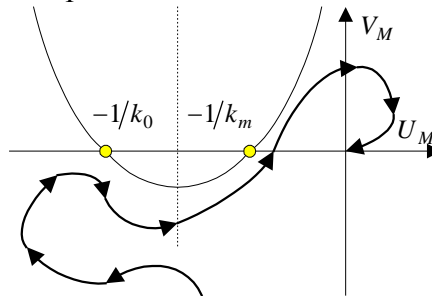
$$U_M^2 + \left( \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m} \right) U_M - \left( \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m} \right) hV_M + V_M^2 + \frac{1}{k_0 k_m} = 0$$

описывает параболу, проходящую через точки  $-1/k_0$  и  $-1/k_m$ , и имеющую в этих точках крутизну наклона касательных  $-1/h$  и  $+1/h$ , соответственно.



Итак, формулировка критерия теперь такова:

Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика находится в секторе  $[k_0, k_m]$  и можно провести через точки  $-1/k_0$  и  $-1/k_m$  такую параболу с вертикальной осью, чтобы модифицированная частотная характеристика линейной части лежала вне этой параболы.



Видно, что этот критерий устойчивости даёт более широкую область устойчивости, чем предыдущий. Видно, что здесь нельзя провести прямую через точку  $-1/k_m$ . Следовательно, данная система, абсолютно устойчивая при нелинейности, расположенной в секторе  $[k_0, k_m]$ ,

не будет с необходимостью обладать абсолютной устойчивостью, если сектор расположения нелинейности расширится до  $[0, k_m]$ .

### Литература

1. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов, Теория систем автоматического регулирования, М.: Наука, 1972.
2. Основы автоматического управления, Под ред. В.С. Пугачёва, М.: Физматгиз, 1963.
3. Я.Н. Ройтенберг, Автоматическое управление, М.: Наука, 1971.
4. Математические основы теории автоматического регулирования, Под ред. Б.К. Ченоданова, М., 1971.
5. Е.П. Попов, Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления, М., 1979.
6. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, М.: Наука, 1973.
7. А.А. Лангин, Расчёт электрических фильтров, Рига, «Зинатне», 1974.