Лекция 12. РЕЗОНАНС.
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1. Резонанс и его значение в радиоэлектронике.
2. Комплексные передаточные функции.
3. Логарифмические частотные характеристики.
4. Заключение.

1. Резонанс и его значение в радиоэлектронике

Резонанс – такой режим цепи синусоидального тока, содержащей индуктивные и емкостные элементы, при котором реактивное сопротивление и проводимость равны нулю. При резонансе приложенное напряжение и входной ток совпадают по фазе. Цепи, в которых возникает явление резонанса, называют *резонансными цепями* или *колебательными контурами*.

Резонанс напряжений наблюдается в цепях с последовательным соединением ветвей, содержащих L и C элементы. В цепях с параллельным соединением ветвей, содержащих L и C элементы, может наблюдаться *резонанс токов.*

В электротехнических установках резонанс часто оказывается опасным и нежелательным явлением, так как может привести к авариям вследствие перегрева элементов электрической цепи или пробоя изоляции при перенапряжениях. В то же время резонансные явления находят широкое применение в радиоэлектронике. Резонансные контуры входят в состав многих радиотехнических устройств. Например, электронные фильтры являются сложными резонансными системами.

***Резонанс напряжений*.** Простейшей цепью, в которой наблюдается резонанс напряжений, является последовательный колебательный контур (рис. 12.1).

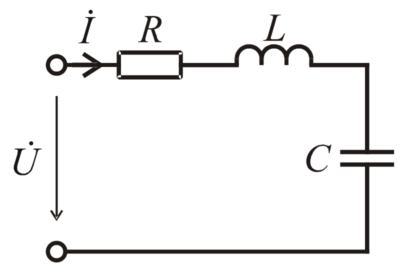
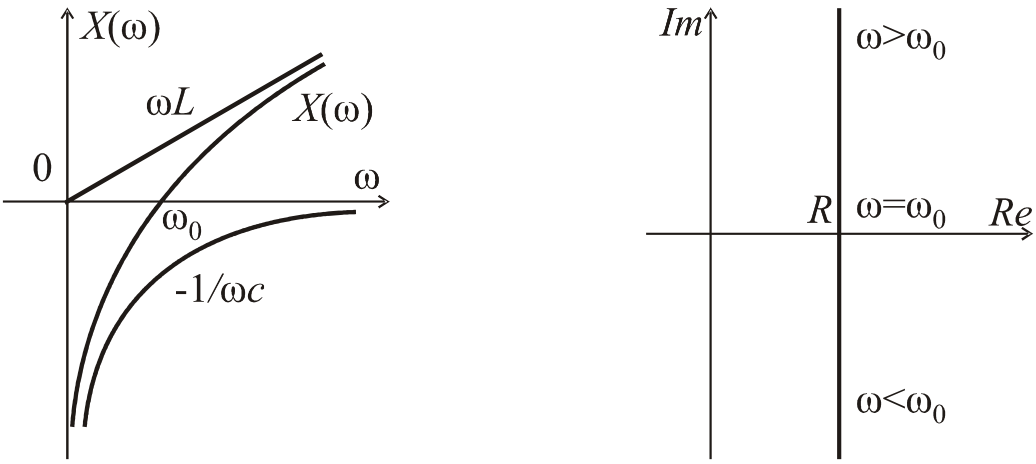


Рис. 12.1

Комплексное сопротивление такой цепи

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Реактивное сопротивление $X = \omega L - 1/\omega C$ изменяется от – ∞ до ∞ при изменении частоты ω от 0 до ∞. На рис. 12.2, *а* показаны графики зависимости сопротивлений $x_L = \omega L$, $x_C = 1/\omega C$ и $X(\omega)$ от частоты.



а *б*

Рис. 12.2

Каждому значению частоты ω соответствует определенное значение комплексного сопротивления $\underline{Z}$. На комплексной плоскости его можно изобразить с помощью вектора. При изменении от 0 до ∞ конец вектора $\underline{Z}$ перемещается из точки с координатами $\{R, -\infty\}$ в точку $\{R, \infty\}$ Годограф вектора $\underline{Z}$ показан на рис. 12.2, *б*. Резонанс напряжений наступает, когда реактивное сопротивление обращается в нуль, т. е.

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Это происходит при резонансной частоте ω_0, когда

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Отсюда следует, что резонансная частота последовательного колебательного контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Резонанс напряжений характеризуется следующими факторами. Поскольку при резонансе напряжений реактивное сопротивление $X = 0$, полное сопротивление цепи принимает минимальное значение

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \min.$$

Вследствие этого ток в цепи достигает максимального значения. При резонансе ток и напряжение совпадают по фазе, поэтому коэффициент мощности $\cos\varphi = 1$.

Сопротивления индуктивного и емкостного элементов в схеме на рис. 12.1 при резонансе равны:

$$x_L = x_C = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Эту величину называют *характеристическим сопротивлением* контура и обозначают ρ:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Напряжение индуктивного элемента при резонансе

$$U_L = j\omega_0 LI.$$

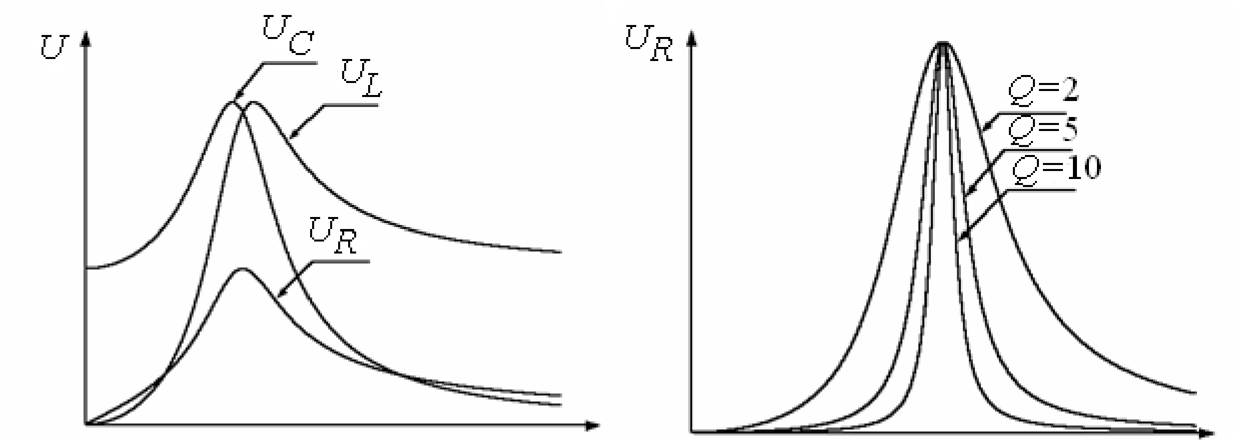
Учитывая, что при резонансе входное напряжение равно напряжению резистивного элемента, получим

$$U_L = \frac{\rho}{R} U_{\text{вх}} = QU_{\text{вх}}.$$

Величину $Q = \frac{\rho}{R}$ называют *добротностью* колебательного контура. Она характеризует резонансные свойства контура. Легко показать, что добротность равна отношению напряжения на индуктивном и, следовательно, на емкостном элементах в режиме резонанса к напряжению, приложенному к контуру. Действительно, при резонансе $U_L = U_C = \rho I$, а входное напряжение $U_{\text{вх}} = RI$. Следовательно,

$$Q = \frac{\rho I}{RI} = \frac{U_L}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_C}{U_{\text{вх}}}.$$

Добротность последовательного колебательного контура тем выше, чем меньше активное сопротивление *R*. В радиотехнике используют колебательные контуры, добротность которых превышает 100. Если такой колебательный контур настроен в резонанс, напряжение индуктивного и емкостного элементов во много раз превышает входное. Это свойство колебательных контуров широко используется в радиоэлектронике для выделения (селекции) сигналов определенной частоты.



а *б*

Рис. 12.3

Будем считать, что амплитуда питающего напряжения неизменна, а угловая частота ω изменяется от 0 до ∞. Рассмотрим, как изменяются при этом ток и напряжения элементов последовательного контура. На постоянном токе, при $\omega = 0$, емкостное сопротивление бесконечно велико. Ток и напряжение индуктивного элемента равны нулю, а напряжение емкостного элемента равно входному. При бесконечно большой частоте индуктивный элемент представляет разрыв, поэтому ток также равен нулю. Напряжение индуктивного элемента равно входному, а емкостный элемент эквивалентен короткому замыканию. Максимального значения ток достигает на резонансной частоте, когда сопротивление последовательного контура минимально:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Зависимости U_L, U_C, I от частоты ω для случая, когда добротность последовательного колебательного контура Q = 2, показаны на рис. 12.3, *а*. Такие зависимости называют *частотными* или *резонансными характеристиками*.

На рис. 12.3, *б* построены частотные характеристики напряжения $U_R(\omega)$ в последовательном колебательном контуре для различных значений добротности. Они показывают, что резонансные явления в контуре проявляются тем сильнее, чем выше добротность.

Резонанс токов. Простейшей цепью, в которой может наблюдаться резонанс токов, является параллельный колебательный контур (рис. 12.4).

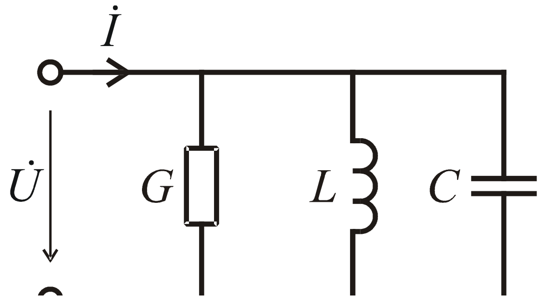


Рис. 12.4

Комплексная проводимость контура

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Реактивная проводимость контура

$$B = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении частоты от 0 до ∞. Частотные характеристики проводимостей $b_C = \omega C$, $b_L = 1/\omega L$ и реактивной проводимости B аналогичны частотным характеристикам сопротивлений x_L, x_C и X последовательного колебательного контура (рис. 12.2, *а*).

Резонанс токов наступает, когда реактивная проводимость обращается в нуль:

$$B = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = 0.$$

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

На резонансной частоте полная проводимость контура минимальна:

$$Y(\omega_0) = G.$$

Соответственно полное сопротивление параллельного колебательного контура

$$Z(\omega_0) = \frac{1}{Y(\omega_0)}$$

на частоте резонанса максимально. Следовательно, при резонансе токов ток неразветвленной части цепи имеет наименьшее значение и равен току резистивного элемента: $I_{\text{рез}} = U/R$.

При резонансе токи емкостного и индуктивного элементов по модулю равны:

$$I_C = \omega_0 CU = QI .$$

При резонансе они в Q раз больше, чем ток неразветвленной части цепи. Величину $Q = R/\rho$ называют добротностью параллельного колебательного контура. Как и в случае последовательного колебательного контура, характеристическое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Добротность параллельного колебательного контура тем больше, чем больше сопротивление резистора R, включенного параллельно индуктивному и емкостному элементам.

2. Комплексные передаточные функции (комплексные частотные характеристики)

Сопротивления индуктивных и емкостных элементов являются функциями частоты приложенного напряжения. Поэтому изменение частоты гармонических колебаний входного воздействия приводит к изменению амплитуды и начальной фазы реакции. Частотную зависимость отношений амплитуд реакции и входного воздействия называют *амплитудно-частотной характеристикой*, а зависимость разности начальных фаз реакции и входного воздействия от частоты – *фазочастотной характеристикой*.

Электронные цепи, которые служат для передачи сигналов, имеют обычно две пары внешних зажимов, т. е. являются четырехполюсниками (рис. 12.5).

Передающие свойства четырехполюсника характеризуют передаточными функциями. *Комплексной передаточной функцией* называют отношение комплексной амплитуды реакции к комплексной амплитуде входного воздействия. Поскольку входным воздействием и реакцией могут быть ток или напряжение, различают четыре вида передаточных функций.

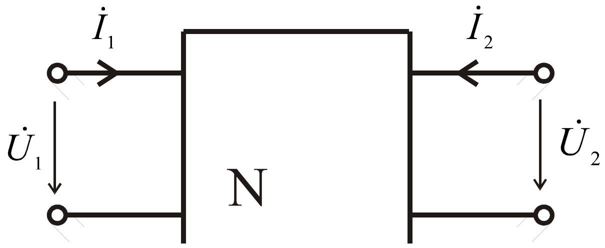


Рис. 12.5

Функция передачи напряжений равна отношению напряжений на выходе и на входе цепи:

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1}.$$

Здесь $\dot U_1$, $\dot U_2$ – комплексы напряжений соответственно на входе и выходе цепи.

Функция передачи тока равна отношению выходного и входного токов

$$H_I(j\omega) = \frac{\dot I_2}{\dot I_1}.$$

Передаточным сопротивлением называют отношение выходного напряжения $\dot U_2$ к входному току $\dot I_1$:

$$Z_{21}(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot I_1}.$$

Передаточная проводимость – это отношение выходного тока $\dot I_2$ к напряжению на входе $\dot U_1$:

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{\dot I_2}{\dot U_1}.$$

Следует подчеркнуть несколько особенностей передаточных функций. Во-первых, для однозначного определения передаточной функции необходимо указать направления токов и напряжений. Во-вторых, следует помнить, что первый индекс соответствует выходу, а второй – входу. В-третьих, передаточное сопротивление $Z_{21}(j\omega)$ не является величиной, обратной проводимости $Y_{21}(j\omega)$.

Передаточные функции принимают комплексные значения при любых значениях частоты $j\omega$. Их можно представить в алгебраической форме через вещественные и мнимые части либо в показательной форме через модуль и аргумент.

Представим комплексную передаточную функцию в показательной форме записи:

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}.$$

Модуль комплексной передаточной функции определяет амплитудно-частотную характеристику, а аргумент – фазочастотную характеристику.

Запишем комплексную амплитуду входного воздействия в показательной форме

$$\dot{U}_{m1}=U_{m1}e^{j\varphi_1}.$$

Комплексная амплитуда реакции

$$\dot{U}_{m2}=H(j\omega)\dot{U}_{m1}=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}U_{m1}e^{j\psi_1}.$$

Амплитуда реакции равна произведению амплитуды входного воздействия на модуль комплексной передаточной функции:

$$U_{m2}=|H(j\omega)|U_{m1}.$$

Начальная фаза реакции равна сумме начальной фазы входного воздействия и значения фазочастотной характеристики на частоте ω: $\psi_2=\psi_1+\varphi(\omega)$.

Поскольку $H(j\omega)$ – комплексная величина, ее можно изобразить вектором на комплексной плоскости. Длина вектора равна значению АЧХ на частоте ω, а угол, который образует вектор с вещественной положительной полуосью – значению ФЧХ. С изменением частоты конец вектора опишет кривую, которую называют годографом комплексной передаточной функции или *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ). Годограф $H(j\omega)$ строят при изменении частоты ω от 0 до $\omega\to\infty$.

Функции цепи можно найти как отношение определителей и алгебраических дополнений матриц коэффициентов системы узловых или контурных уравнений. В качестве примера рассмотрим четырехполюсную цепь, на входе которой действует источник тока (рис. 12.6).

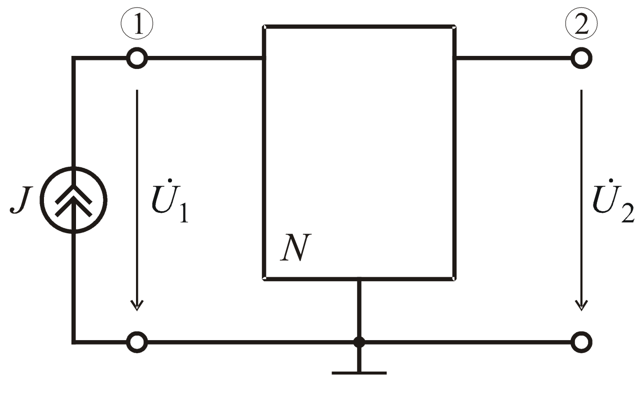


Рис. 12.6

Входным является узел 1, а выходным – узел 2. Напряжения входного и выходного узлов:

$$\dot{U}_1 = \frac{D_{11}}{D}; \quad \dot{U}_2 = \frac{(-1)^{1+2} D_{12}}{D}.$$

Здесь D – главный определитель системы узловых уравнений, D_{ij} – минор, полученный вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца. Комплексная передаточная функция

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{(-1)^{1+2} D_{12}}{D_{11}}.$$

В общем случае, если входным является узел номером *i*, а выходным – узел *j*, передаточная функция определяется формулой

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_j}{\dot{U}_i} = \frac{(-1)^{i+j} D_{ij}}{D_{ii}}. \qquad (12.1)$$

Элементы матрицы контурных или узловых уравнений являются рациональными функциями частоты $j\omega$. Поскольку суммы, произведения и разности рациональных функций также рациональные функции, комплексные функции линейных цепей являются дробно-рациональными функциями, т. е. отношением полиномов от $j\omega$. Все коэффициенты в числителе и знаменателе функции цепи – вещественные числа. Порядок функции цепи равен суммарному числу реактивных элементов.

Пример. Определить комплексную передаточную функцию интегрирующей *RC*-цепи, показанной на рис. 12.7.

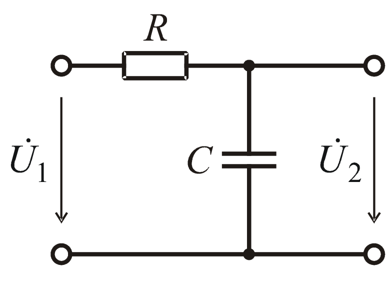


Рис. 12.7

Комплексная передаточная функция представляет отношение комплексов напряжения на входе и выходе цепи:

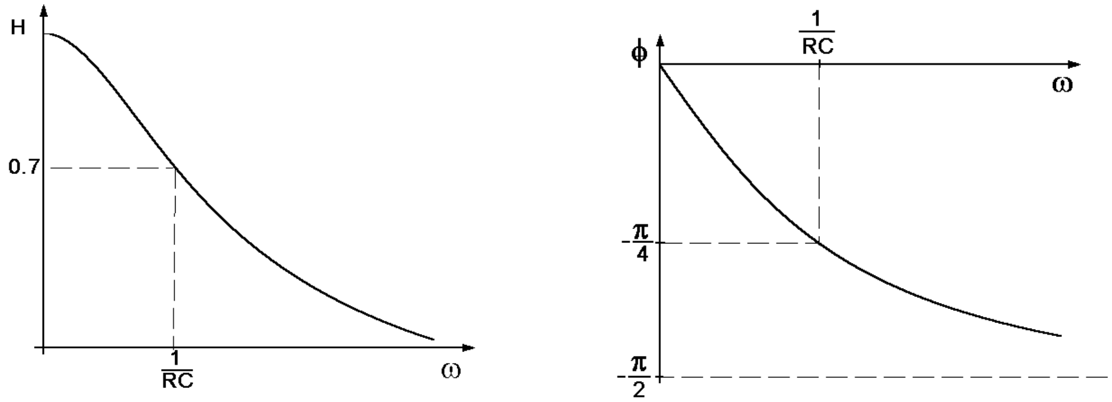
$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{j\omega CR + 1}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega CR$.

Графики АЧХ и ФЧХ анализируемой цепи показаны на рис. 12.8, *а*, *б*.



а *б*

Рис. 12.8

Амплитудно-частотная характеристика *RC*-цепи монотонно убывает с ростом частоты и стремится к нулю при $\omega \to \infty$. Фазочастотная характеристика также монотонно убывает, изменяясь от 0 при $\omega = 0$ до $-\frac{\pi}{2}$ при $\omega \to \infty$.

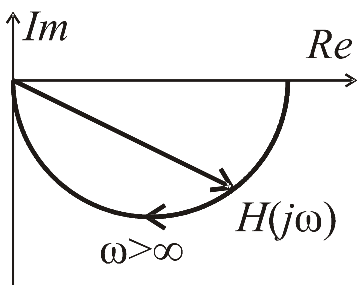


Рис. 12.9

На рис. 12.9 показан график амлитудно-фазовой характеристики цепи. Годограф $H(j\omega)$ представляет кривую, начинающуюся в точке с координатами (1, 0) и заканчивающуюся в точке (0, 0).

3. Логарифмические частотные характеристики

В технике связи, теории автоматического регулирования широко используются устройства, у которых значения амплитудно-частотных характеристик изменяются в очень широких пределах. Примером являются резонансные контуры, используемые в радиотехнике, электрические фильтры, усилители и т. д. В таких случаях удобнее оперировать логарифмическими частотными характеристиками (ЛАХ), которые пропорциональны логарифму от соответствующей безразмерной АЧХ. Обычно используют аббревиатуры ЛАХ или ЛАЧХ. ЛАХ принято оценивать в *децибелах* (дБ): $A(\omega)=20\lg H(\omega)$, где $\lg$ – логарифм при основании 10. Переход к логарифмической шкале позволяет существенно «сжать» пределы изменения амплитудно-частотных характеристик. Усилению сигнала в два раза соответствует приращение $A(\omega)$ на 6 дБ; усилению в 10 раз соответствует значение $A(\omega)$, равное 20 дБ.

Величину $A(\omega)$ называют *логарифмическим усилением* или усилением в децибелах. Усилению сигнала соответствуют положительные значения $A(\omega)$, ослаблению – отрицательные значения логарифмического усиления.

При исследовании ЛАЧХ в широком диапазоне частот изменение частоты также целесообразно оценивать в логарифмических единицах. Отношение частот двух гармонических колебаний называют *интервалом*, а интервал, соответствующий удвоению частоты, – *октавой*. Например, изменению частоты в четыре раза соответствует интервал в две октавы, а восьмикратному увеличению частоты – в три октавы. Число октав N_2 может быть приближенно найдено из формулы

$$N_2 \approx 3.32\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Интервал, соответствующий изменению частоты в десять раз, называют *декадой*. Число декад определяется формулой

$$N_{10} \approx \lg\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Изменению частоты в 10 раз соответствует одна декада, в 100 раз – две декады и т. д.

Использование логарифмического масштаба позволяет рассмотреть изменение частотных характеристик в широком диапазоне на небольшом графике. Кроме того, умножение передаточных функций отдельных звеньев сложной цепи заменяется суммированием ЛАХ.

4. Заключение

1. Резонанс – режим цепи синусоидального тока, содержащей индуктивные и емкостные элементы, при котором реактивное сопротивление и прово-

димость равны нулю. При резонансе приложенное напряжение и входной ток совпадают по фазе.

2. Резонанс напряжений наблюдается в цепях с последовательным соединением ветвей, содержащих *L* и *C* элементы. Простейшей цепью, в которой наблюдается резонанс напряжений, является последовательный колебательный контур.
3. Резонанс токов наблюдается в цепях с параллельным соединением ветвей, содержащих *L* и *C* элементы. Простейшей цепью, в которой может возникать резонанс токов, является параллельный колебательный контур.
4. Комплексной передаточной функцией электрической цепи называют отношение комплексной амплитуды реакции к комплексной амплитуде входного воздействия.