

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра «Системы управления»

681.5(07)  
П124

О.О. Павловская

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## **Часть 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

*Учебное пособие*

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2011

УДК 681.51.01(075.8) + 681.511.4(075.8)

П124

*Одобрено  
учебно-методической комиссией  
приборостроительного факультета*

*Рецензенты:  
В.С. Жабреев, И.Г. Витовтов*

**Павловская, О.О.**

П124      Теория автоматического управления. Ч. 2: Нелинейные системы: учебное пособие / О.О. Павловская. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 90 с.

Учебное пособие содержит основные разделы теории нелинейных систем, а также теоретические основы анализа систем управления с помощью программных пакетов Mathcad и Vissim.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 220100.62 «Системный анализ и управление», по специальностям 160403 «Системы управления летательными аппаратами», 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления». Пособие адаптировано для самостоятельной работы студентов.

УДК 681.51.01(075.8) + 681.511.4(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2011

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Настоящее учебное пособие по нелинейным автоматическим системам соответствует второй части курса теории автоматического управления, читаемого автором. Вопросы анализа систем управления при случайных воздействиях и оптимизации систем рассматриваются в таких последующих частях курса, как теория стохастических систем и теория оптимальных систем.

Основная задача данного учебного пособия заключается в том, чтобы изложить нелинейную теорию с наибольшей наглядностью. При этом вначале на примерах нелинейных систем второго порядка в простейшем виде на фазовой плоскости рассматриваются наиболее характерные особенности переходных и установившихся процессов, которые не наблюдаются в линейных системах и порождены именно наличием нелинейности характеристик. Затем излагаются методы исследования и расчета нелинейных систем автоматического управления, динамика которых описывается уже дифференциальными уравнениями выше второго порядка, что характерно для большинства реальных систем.

## **ВВЕДЕНИЕ**

В теории линейных систем управления рассматривались системы, которые с той или иной степенью точности описывались линейными дифференциальными уравнениями. Причем для непрерывных стационарных систем это были уравнения с постоянными коэффициентами.

Однако существуют такие системы, процессы в которых принципиально не могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. При описании таких систем необходимо пользоваться нелинейными дифференциальными уравнениями.

Переход от линейных моделей к нелинейным, т.е. их усложнение – мера вынужденная. Во-первых, нелинейные математические модели появляются вследствие учета естественных (сопутствующих) эффектов, присущих объекту или элементам системы управления и обусловленных нелинейным характером законов природы, которым подчиняются исследуемые явления. Например, трение, люфт, гистерезис, зона нечувствительности, насыщение. Во-вторых, нелинейности могут вводиться в систему и специально с целью компенсации нежелательных эффектов от естественных нелинейностей или для придания системе управления желаемых свойств, которые принципиально недостижимы линейными средствами. Так, именно нелинейные алгоритмы управления могут обеспечить максимальное быстроедействие процессов при наличии естественных ограничений на уровни управляющих воздействии; нелинейности обязательно вводятся при создании генераторов колебаний и т.д. В ряде систем управления техническими объектами нелинейные, в частности, релейные регулирующие устройства оказываются наиболее простыми, дешевыми и надежными.

# 1. НЕЛИНЕЙНОСТИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. Примеры нелинейных систем управления

Рассмотрим *пример учета нелинейных явлений*, присущих реальным элементам систем управления.

*Пример 1.* Система стабилизации курса корабля.

Стабилизация курса корабля обеспечивается системой управления рулями. Упрощенно эта система показана на рис. 1.1.

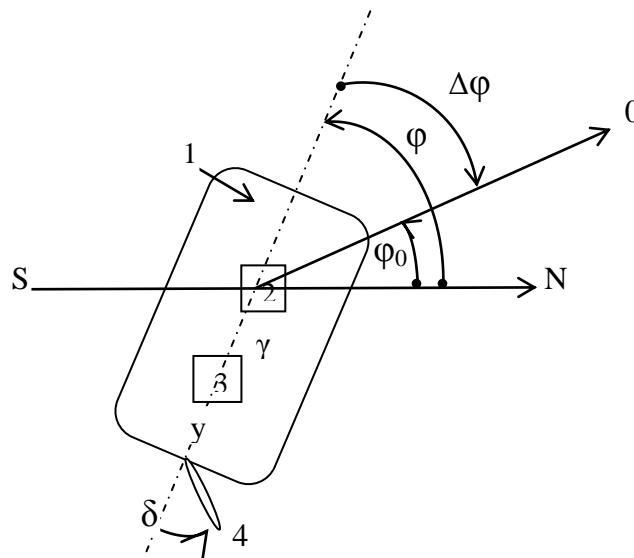


Рис. 1.1

На рис. 1.1 объект управления 1 – корпус корабля, ось которого составляет угол  $\varphi$  с направлением N-S, заданный курс корабля задается углом  $\varphi_0$ , отклонение от курса  $\Delta\varphi$  воздействует с помощью усилителя гирокомпаса 2 на рулевую машину 3 через соответствующую передачу, поворачивающую руль 4 на угол  $\delta$ .

Рассмотрим подробнее работу привода пневматической рулевой машины (рис. 1.2).

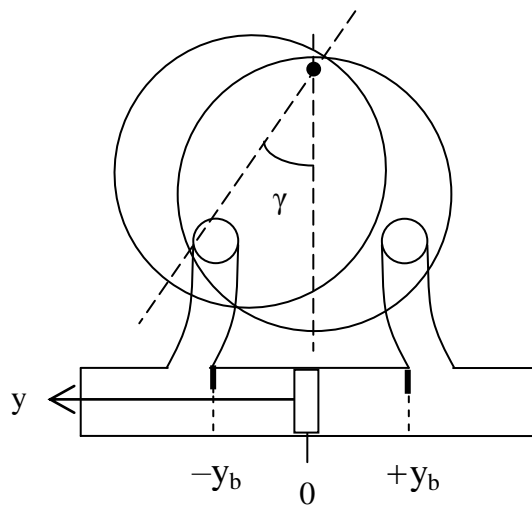


Рис. 1.2

Заслонка, управляющая подачей воздуха в рабочий цилиндр двигателя, поворачивается на угол  $\gamma$ , создавая этим перепад давления воздуха в рабочем цилиндре, вследствие чего совершается перемещение поршня  $y$ . Перемещение поршня ограничено упорами и может происходить при  $-y_b \leq y \leq y_b$ . В связи с этим зависимость скорости перемещения поршня  $\dot{y}$  от положения управляющей заслонки  $\gamma$  имеет вид, представленный на рис. 1.3.

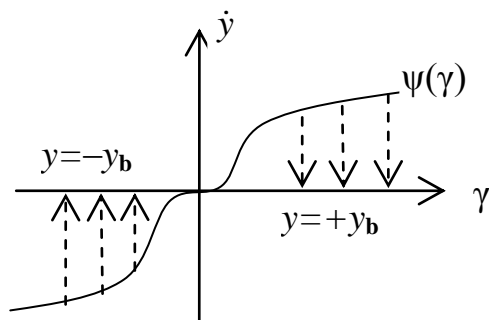


Рис. 1.3

В соответствии с рис. 1.3 при любом значении  $y$ , лежащем в пределах  $(-y_b; y_b)$ , эта зависимость имеет вид симметричной кривой с областями нечувствительности и насыщения. Однако как только рабочий поршень достигает упора, поршень останавливается и дальнейшее изменение  $\gamma$ , соответствующее прижатию поршня к упору, приводит к  $\dot{y} = 0$  при любом значении  $\gamma$ . Таким образом, скорость движения поршня является следующей функцией двух переменных:

$$\dot{y} = \begin{cases} \psi(\gamma), & \begin{cases} -y_b \leq y \leq y_b, \gamma > 0, \\ -y_b \leq y \leq y_b, \gamma < 0, \end{cases} \\ 0, & \begin{cases} y = y_b, \gamma > 0, \\ y = -y_b, \gamma < 0. \end{cases} \end{cases}$$

В канале передачи сигнала от рулевой машины к перу руля также могут быть зазоры, создающие нелинейную зависимость  $\delta(y)$ .

Таким образом, даже при упрощенном рассмотрении система стабилизации курса корабля содержит две нелинейности, а структурная схема системы имеет вид, представленный на рис. 1.4.

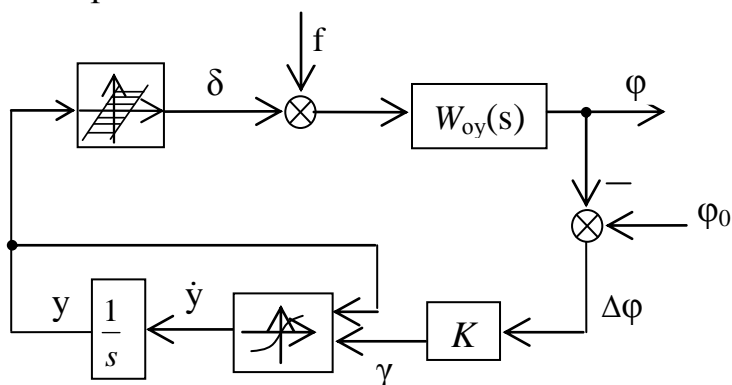


Рис. 1.4

Пример 2. Система регулирования температуры в автоклаве (рис. 1.5).

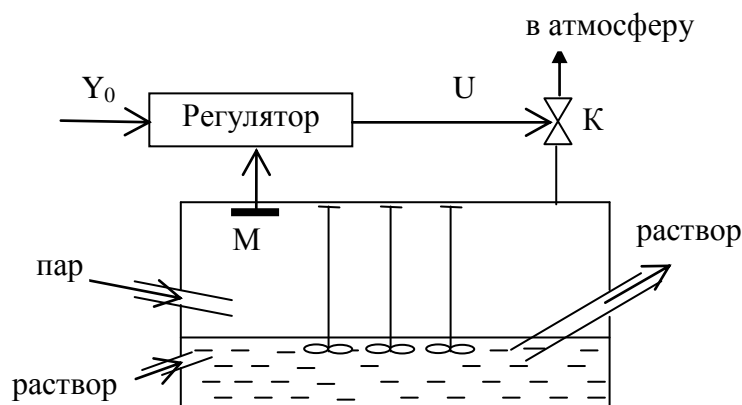


Рис. 1.5

В соответствии с рис. 1.5 снизу в автоклав под давлением подается раствор, а сверху – пар. Благодаря высокому давлению и перемешиванию мешалками быстро и эффективно протекают необходимые химические реакции с участием кислорода воздуха. Фактическое значение давления в автоклаве измеряется датчиком давления (манометром М). Требуемый уровень давления в автоклаве, задаваемый величиной  $Y_0$ , обеспечивается путем стравливания в атмосферу избыточного воздуха через клапан К, положение заслонки которого задается управляющим сигналом  $U$  с выхода регулятора.

Упрощенная структурная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 1.6.

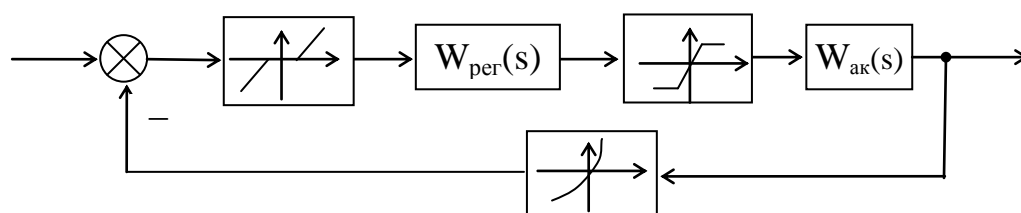


Рис. 1.6

На рис. 1.6 после элемента сравнения введен элемент с зоной нечувствительности, в пределах которой рассогласование может изменяться без замыкания обратной связи (для того, чтобы система не реагировала на незначительные с точки зрения технологии отклонения давления от его требуемого значения); клапан представлен нелинейным элементом типа «насыщение», а манометр – нелинейным звеном в обратной связи.

Рассмотренные примеры показывают, что в действительности все системы управления описываются нелинейными уравнениями, линеаризация которых может привести к очень грубым приближениям и получению уравнений, не соответствующих процессам, наблюдаемым в реальных системах.

### *Пример системы со специально введенной нелинейностью.*

Во многих системах управления вместо линейного усилителя, воздействующего на исполнительный механизм, применяются релейные усилители различных типов (двух- и трехпозиционные).

Рассмотрим систему стабилизации углового положения спутника (рис. 1.7).

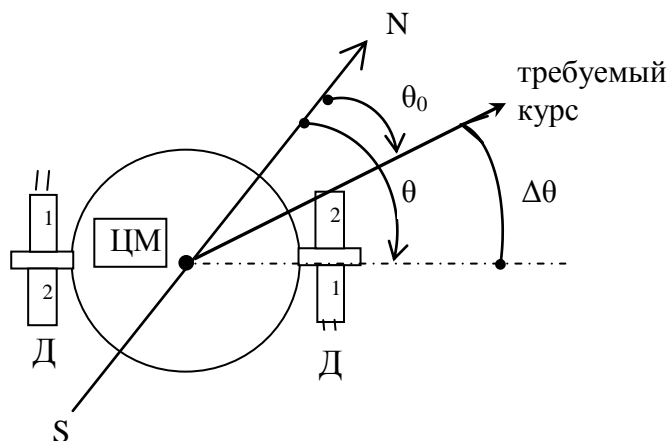


Рис. 1.7

Для обеспечения требуемого углового положения, определяемого углом  $\theta_0$ , путем поворота спутника на угол  $\Delta\theta$  необходимо включить 1-ю пару реактивных двигателей Д. В соответствии с этим в прямой цепи упрощенной структурной схемы системы стабилизации углового положения спутника (рис. 1.8) присутствует релейный элемент с зоной нечувствительности (величина зоны нечувствительности определяется величиной допустимого отклонения углового положения спутника от требуемого значения).

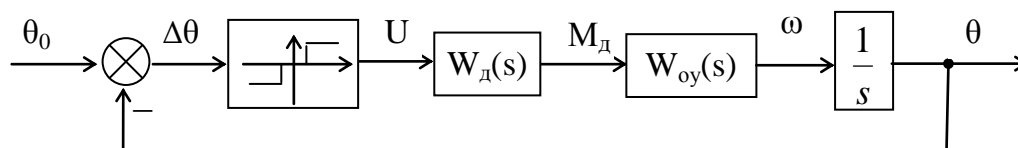


Рис. 1.8

## **1.2. Классификация нелинейностей**

Система управления называется нелинейной в том случае, если хотя бы одно звено системы описывается нелинейным уравнением (алгебраическим или дифференциальным).

Строго говоря, все реальные системы управления являются в большей или меньшей степени нелинейными. Однако во всех случаях, когда с инженерной точки зрения допустимо рассматривать линеаризованную систему, при анализе обращаются к теории линейных систем управления, как более простой и разработанной. И только тогда, когда нелинейность играет существенную роль в поведении системы, прибегают к теории нелинейных систем управления. Последняя становится все более важной для практики по мере повышения требований к качеству процессов управления и к точности расчета систем автоматического управления и регулирования.

Рассмотрим классификацию нелинейностей по различным признакам.

### 1. Различают *статические* и *динамические* нелинейности.

*Статические нелинейности* описываются нелинейными алгебраическими уравнениями. Статическим нелинейностям всегда можно поставить в соответствие статическую характеристику – график зависимости выходной величины звена от входной величины. Пример такой нелинейности (ее статической характеристики и аналитического описания) представлен на рис. 1.9.

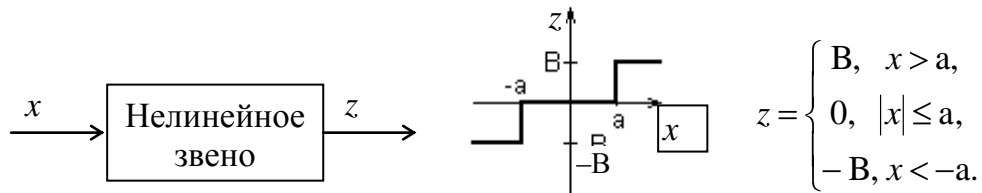


Рис. 1.9

*Динамические нелинейности* описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. К ним относится, например, звено с изменяющейся постоянной времени

$$(T(x_1)s + 1)x_2 = kx_1$$

или же

$$(T_1s + 1)x_2 = kx_1 \text{ при } sx_1 > 0,$$

$$(T_2s + 1)x_2 = kx_1 \text{ при } sx_1 < 0.$$

Здесь надо отметить отличие данной нелинейности от линейного звена с переменным параметром, описываемого уравнением вида

$$(T(t)s + 1)x_2 = kx_1.$$

В звене с переменным параметром фигурирует зависимость параметра от времени, в то время как нелинейность характеризует зависимость параметра звена от координаты (или ее производных). Точно так же, например, гистерезис представляет собой нелинейное (координатное) запаздывание, в отличие от временного или инерционного в линейном звене.

Примерами динамических нелинейностей могут служить также любые нелинейные разностные и интегральные уравнения.

### 2. По симметрии различают нелинейности *четно-* и *нечетно-симметричные* нелинейные характеристики.

Если функция  $z(x)$  удовлетворяет условию  $z(-x) = z(x)$ , то характеристику, соответствующую этой функции, называют симметричной относительно оси ординат или *четно-симметричной*.

Если функция  $z(x)$  удовлетворяет условию  $z(-x) = -z(x)$ , то характеристику, соответствующую этой функции, называют симметричной относительно начала координат или *нечетно-симметричной*.

Характеристики, не удовлетворяющие ни одному из вышеприведенных условий, называют *несимметричными*. В ряде случаев несимметричная характеристика путем перемещения начала координат может быть приведена к симметричному виду (рис. 1.10).



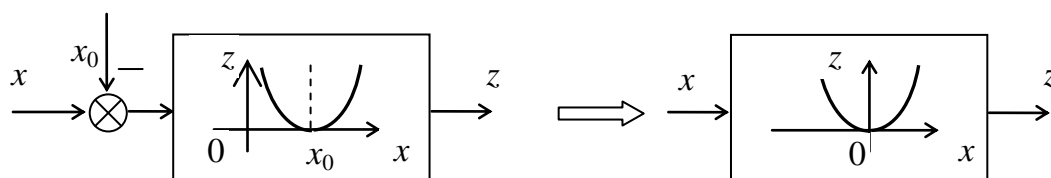


Рис. 1.10

3. Различают нелинейные характеристики *гладкие и ломаные*.

У гладкой характеристики  $z(x)$  производная  $dz/dx$  существует в любой точке. Если же  $dz/dx$  имеет разрыв, то характеристика ломаная. Большая группа ломаных характеристик – кусочно-линейные характеристики. Часто на практике с целью облегчения анализа гладкие характеристики заменяют приближенно кусочно-линейными (рис. 1.11).

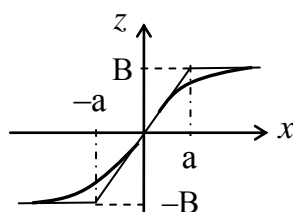


Рис. 1.11

4. Различают *однозначные и многозначные* нелинейные характеристики.

Если каждому значению входной величины звена  $x$  соответствует одно определенное значение выходной величины звена  $z$ , то характеристика  $z(x)$  – однозначная. В противном случае характеристика многозначная.

Неоднозначные характеристики обычно называют гистерезисными, где неоднозначность связана с зависимостью выходной величины звена  $z$  не только от мгновенного значения входной величины  $x$ , но и от предшествующего процесса (рис. 1.12).

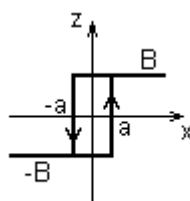


Рис. 1.12

5. Различают *непрерывные и разрывные* нелинейные характеристики. Так, если  $z(x)$  не имеет разрывов, то она непрерывна, в противном случае она разрывная.

### 1.3. Типовые нелинейные звенья

Типовыми будем называть простейшие нелинейные звенья с кусочно-линейными статическими характеристиками. Типовые нелинейные звенья сведены в табл. 1.1. При этом приведенные в табл. 1.1 звенья не исчерпывают всего разнообразия нелинейных звеньев систем управления.

Таблица 1.1

Название звена	Тип характеристики	Статическая характеристика
Зона нечувствительности	однозначная	
Ограничение		
Двухпозиционное реле		
Трехпозиционное реле		
Трехпозиционное реле с гистерезисом	двузначная	
Двухпозиционное реле с гистерезисом		
Люфт	многозначная	
Упор		

## 1.4. Особое звено нелинейных систем

Рассмотрим множительное звено. В зависимости от схемы включения это звено может быть как линейным, так и нелинейным. Так, если на входы множительного звена подаются независимые сигналы, то множительное звено – линейное (рис. 1.13 а), если же входные сигналы множительного звена зависимы, то множительное звено – нелинейное (рис. 1.13 б).



Рис. 1.13

С помощью множительного звена и простейших звеньев с кусочно-линейными характеристиками можно реализовать разными способами, например, звено, обладающее параболической характеристикой  $z = x/x = x^2 \text{sign}(x)$  (рис. 1.14).

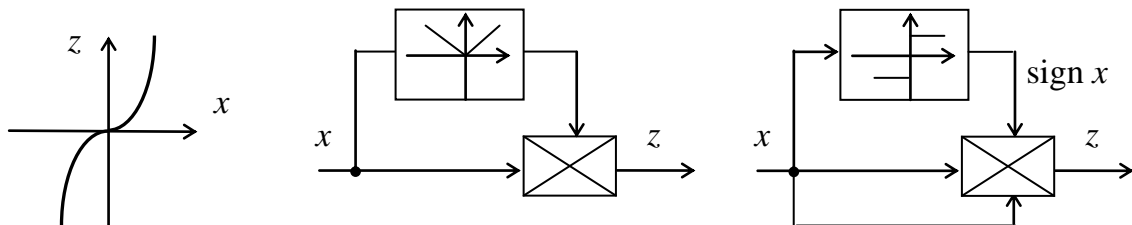


Рис. 1.14

## 2. СТАТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Общий подход к получению математической модели нелинейной системы заключается в следующем:

1. Производится линеаризация уравнений всех звеньев, для которых это допустимо, кроме одного, двух существенно нелинейных звеньев.
2. Составляются уравнения нелинейных звеньев.

В результате получается система линейных уравнений, к которым добавляются одно-два (иногда более) нелинейных уравнений. В соответствии с этим обобщенная структурная схема любой нелинейной системы в случае одного нелинейного звена примет вид, представленный на рис. 2.1.

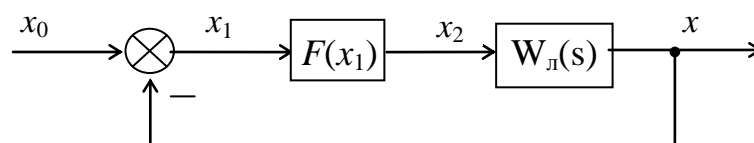


Рис. 2.1

В статическом режиме сигналы с течением времени не изменяются, линейные звенья вырождаются в усилительные, которые могут быть объединены с нелинейными звеньями, поэтому всё многообразие соединений звеньев системы в статическом режиме сводится к разным видам соединения нелинейных звеньев.

## 2.1. Соединения нелинейных звеньев

Последовательное соединение двух элементов показано на рис. 2.2.

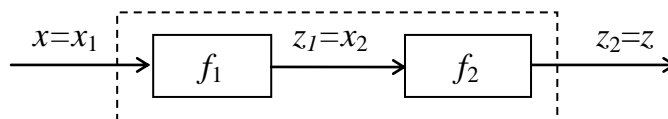


Рис. 2.2

Алгоритм графического решения задачи нахождения  $z(x)$  покажем на примере. Пусть известны статические характеристики отдельных элементов (рис. 2.3).

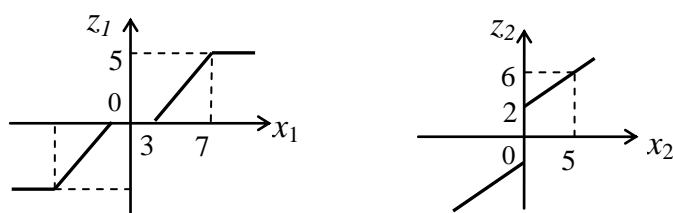


Рис. 2.3

Графическое решение примера показано на рис. 2.4. Здесь оси координат обозначают так, чтобы в первом квадранте изобразить характеристику первого из последовательно соединенных звеньев, во втором – характеристику второго звена, в третьем всегда изображается биссектриса угла, а в четвертом – искомая характеристика  $z(x)$ , получаемая в результате графического вычисления  $z$  при различных значениях  $x$ .

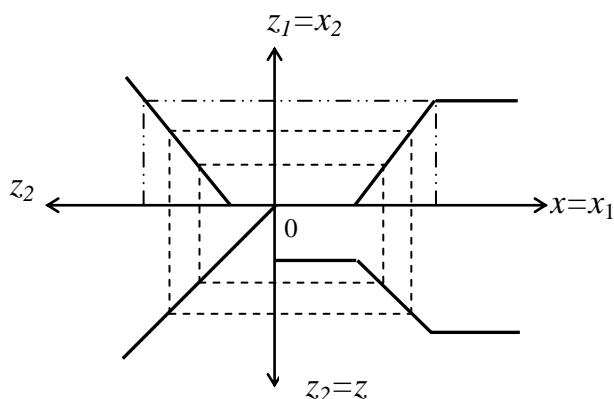


Рис. 2.4

Из рис. 2.4 видно, что характеристика  $z(x)$  имеет вид, представленный на рис. 2.5.

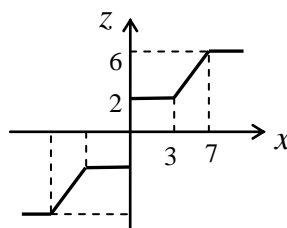


Рис. 2.5

Вид и параметры эквивалентной статической характеристики последовательно соединенных звеньев зависят от параметров этих звеньев и последовательности их соединения, так как для нелинейных систем не выполняется принцип коммутативности. В справедливости этого утверждения легко убедиться, изменив в выше рассмотренном примере последовательность соединения звеньев, в результате чего изменится вид и параметры эквивалентной статической характеристики (рис. 2.6).

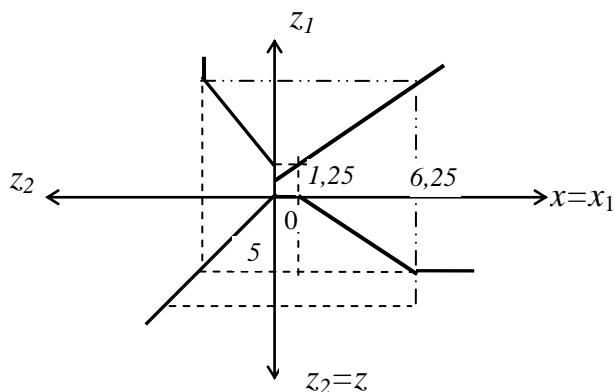


Рис. 2.6

Исключение представляют собой нелинейные звенья с характеристиками  $f$  и  $f^{-1}$ , последовательное соединение которых дает усилительный линейный элемент с коэффициентом усиления, равный единице. Такие звенья называются *взаимно-обратными*.

Параллельное соединение двух нелинейных звеньев показано на рис. 2.7.

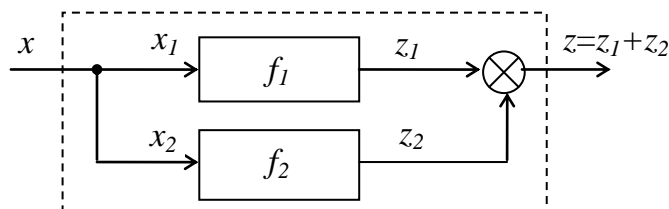


Рис. 2.7

Эквивалентная характеристика параллельного соединения может быть получена графически, если, задаваясь абсциссой, складывать ординаты.

*Пример.* Пусть известны статические характеристики звеньев соединенных параллельно (рис. 2.8).

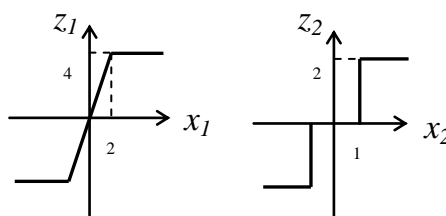


Рис. 2.8

Результирующая характеристика и алгоритм ее получения показаны на рис. 2.9.

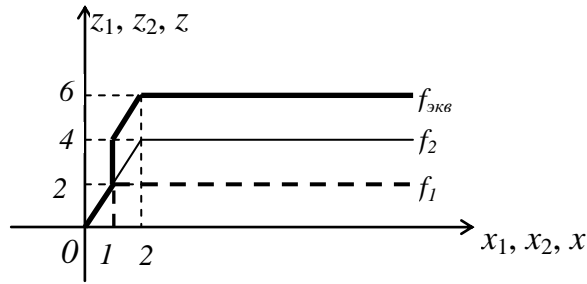


Рис. 2.9

Возможен случай, когда параллельное соединение нелинейных элементов дает линейное усилительное звено с коэффициентом передачи, равным единице. Такие звенья называются *взаимно-дополнительными*.

Соединение двух звеньев по схеме с обратной связью показано на рис. 2.10.

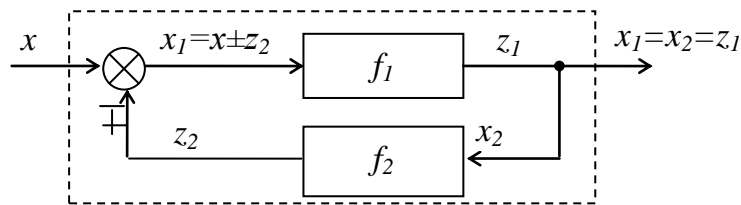


Рис. 2.10

Из рис. 2.10 видно, что  $x = x_1 \pm z_2$  («+» для отрицательной обратной связи, «-» для положительной обратной связи). Следовательно, для нахождения эквивалентной статической характеристики соединения необходимо на одной плоскости изобразить характеристику прямой цепи и характеристику, обратную характеристике звена обратной связи, а затем графически сложить с учетом знака обратной связи их абсциссы, задаваясь ординатами.

Пусть статические характеристики звена прямой цепи и цепи обратной связи имеют вид, показанный на рис. 2.11.

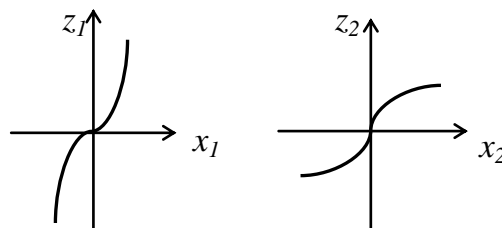


Рис. 2.11

Построение эквивалентной характеристики при разных знаках обратной связи показано на рис. 2.12.

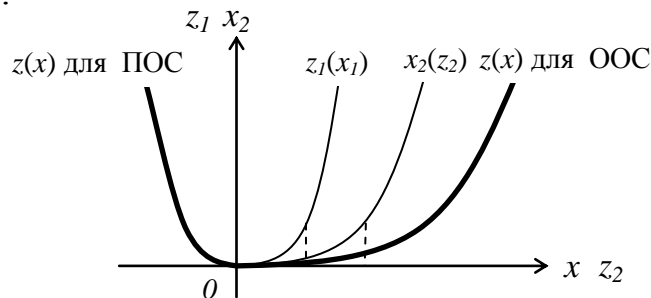


Рис. 2.12

## 2.2. Правила преобразования структурных схем

Наличие в системе нелинейных звеньев ограничивает возможности структурных преобразований. Так, известны следующие правила преобразования линейных структурных схем:

1. Перенос сумматора через узел разветвления.
2. Перенос звена через узел разветвления.
3. Перенос звена через звено.
4. Перенос звена через сумматор.
5. Эквивалентность встречных параллельных соединений.

Невозможность применения всех правил преобразования линейных структурных схем к нелинейным системам связана с несправедливостью для нелинейных систем двух принципов:

1. Принципа коммутативности (можно менять местами звенья, соединенные последовательно).
2. Принципа наложения (суперпозиции) (при сложных входных воздействиях процесс в системе может быть представлен как сумма процессов от каждого из входных воздействий в отдельности).

Несправедливость принципа коммутативности исключает возможность применения для нелинейных систем 3-го правила преобразования структурных схем, а несправедливость принципа наложения – 4-го правила.

Остальные правила не противоречат этим двум принципам, поэтому могут быть применены для преобразования нелинейных структурных схем, причем 1-е правило одинаково для линейных и нелинейных систем, поэтому далее изложим только содержание 2-го и 5-го правил.

*Второе правило:*

- при переносе звена через узел разветвления по направлению распространения сигнала в ветвях, отходящих от узла, ставят звенья с характеристиками переносимого звена (рис. 2.13).

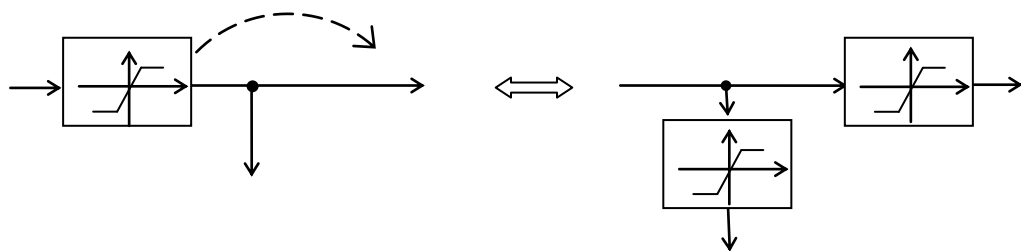


Рис. 2.13

- при переносе звена через узел разветвления против направления распространения сигнала в ветвях, отходящих от узла, ставят звенья с характеристиками, взаимно-обратными переносимому звену (рис. 2.14).

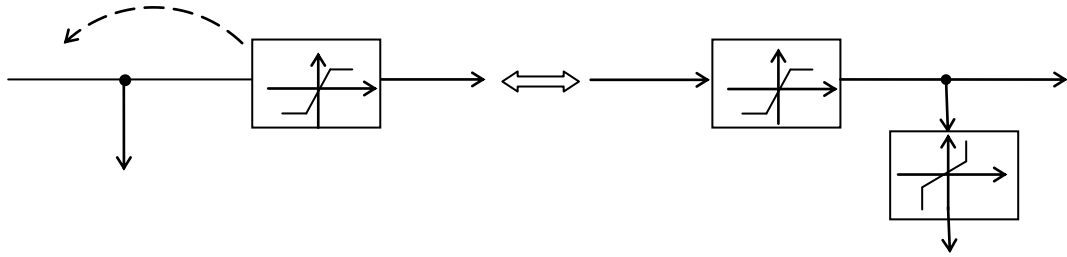


Рис. 2.14

*Пятое правило:* можно менять местами звенья прямой и обратной цепи с заменой операторов звеньев на обратные (рис. 2.15).

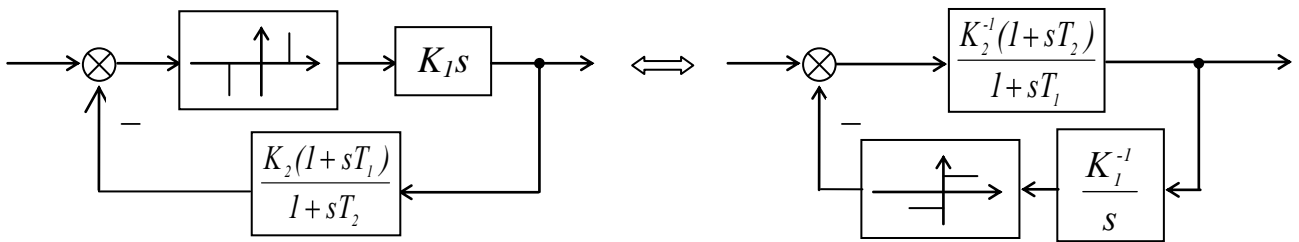


Рис. 2.15

### 3. ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### 3.1. Метод фазового пространства

В общем случае нелинейные дифференциальные уравнения системы  $n$ -го порядка имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, \dots, x_n, t, g(t), f(t)), i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где  $x_i$  – координаты состояния,  $t$  – время,  $g(t)$  и  $f(t)$  – соответственно задающее и возмущающее входные воздействия.

При рассмотрении переходных процессов, вызванных какими-либо начальными отклонениями координат состояния системы  $x_i$  (при отсутствии внешних воздействий), уравнение (3.1) стационарной нелинейной системы примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Для исследования нелинейных систем широко применяется метод фазового пространства, суть которого состоит в следующем. Вводится понятие *фазового пространства* –  $n$ -мерного пространства координат состояния системы (рис. 3.1).

Начальное состояние системы  $x(t_0)$  изображается точкой  $M_0$  с координатами  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ , а решение уравнений (3.2) – кривой, которая называется *фазовой траекторией*. Точка  $M$  на фазовой траектории, соответствующая состоянию системы в произвольный момент времени  $t$ , называется *изображающей точкой*.



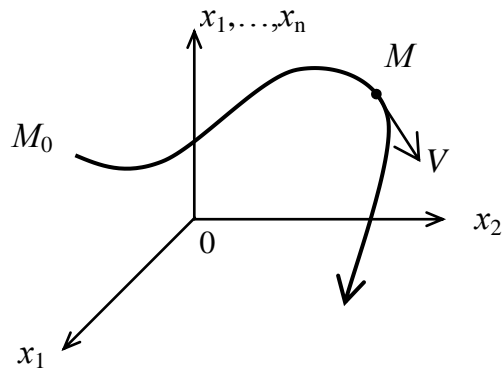


Рис. 3.1

Значения правых частей уравнений (3.2) вида  $\Phi_i(x_1, \dots, x_n)$  определяют в каждый момент времени проекции вектора скорости  $V$  изображающей точки на оси координат.

В инженерной практике метод фазового пространства широко используется для исследования нелинейных систем второго порядка. Для таких систем уравнения (3.2) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.3)$$

при этом фазовое пространство вырождается в *фазовую плоскость*, что способствует наглядному представлению о процессах, протекающих в системе.

*Дифференциальные уравнения фазовых траекторий*, решение которых позволит построить фазовую траекторию, можно получить из (3.3) путём исключения параметра  $t$  (например, делением второго уравнения системы (3.3) на первое)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)}. \quad (3.4)$$

*Точки равновесного (устойчивого) состояния системы* можно определить из (3.3), решая систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

В точках равновесного состояния системы возникает неопределенность правой части уравнения (3.4).

Сопоставим изображение переходного процесса системы на плоскости  $y(x)$  с обычным его изображением в виде кривой  $x(t)$ . Для удобства рассмотрим частный случай уравнений (3.3) в виде уравнений (3.6)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \Phi(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.6)$$

Для системы (3.6) правило суждения о направлении движения изображающей точки по фазовой траектории звучит так: в верхней полуплоскости изображающая точка движется по фазовым траекториям слева направо, так как там  $\dot{x}_1 \geq 0$  в нижней полуплоскости изображающая точка движется по фазовым траекториям справа налево, так как там  $\dot{x}_1 < 0$  (рис. 3.2).

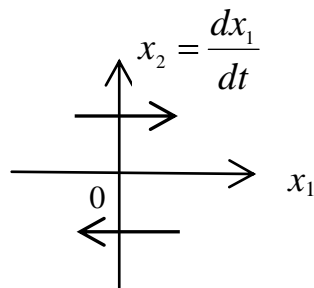


Рис. 3.2

Заметим, что это правило недействительно в общем случае уравнений (3.3).

Рассмотрим различные виды переходных процессов, соответствующих уравнениям вида (3.6), и изобразим их на фазовой плоскости (колебательные переходные процессы на рис. 3.3, монотонные переходные процессы на рис. 3.4).

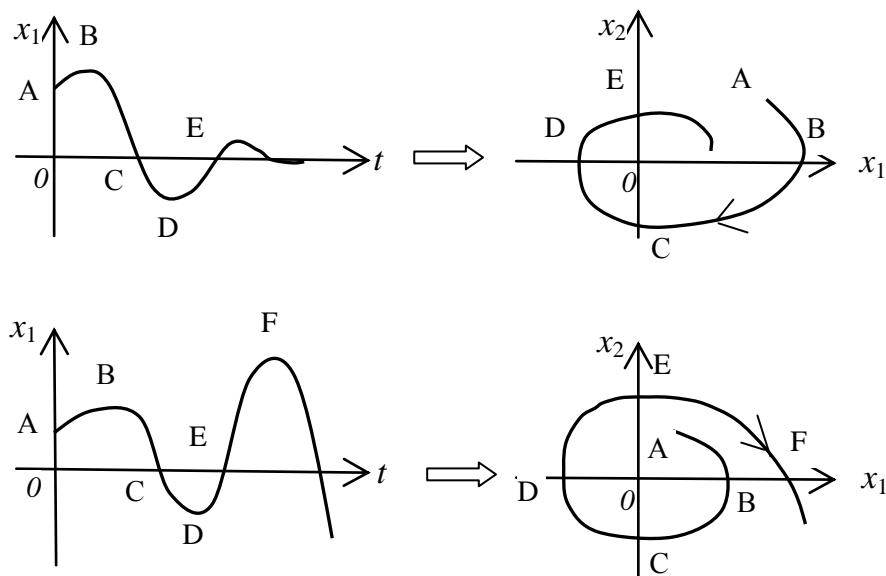


Рис.3.3

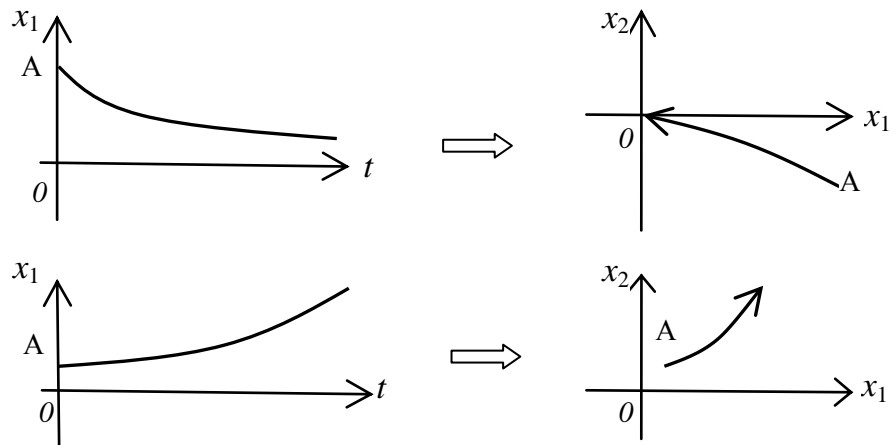


Рис. 3.4

Необходимость построения *фазового портрета системы* (совокупности фазовых траекторий для разных начальных условий) связано с зависимостью устойчивости нелинейной системы не только от структуры и параметров системы (как для линейных систем), но и от величины начального отклонения системы от положения равновесия.

*Характеристика метода:* метод фазовых траекторий наглядно с методической точки зрения показывает основные существенные особенности поведения нелинейных систем, хотя снижение порядка уравнения динамики всей замкнутой системы до второго является довольно сильной идеализацией реальных автоматических систем.

### 3.2. Особые точки и фазовые портреты линейных систем (поведение нелинейной системы при малых отклонениях от положения равновесия)

Пусть свободное движение системы 2-го порядка описывается уравнением

$$a_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0. \quad (3.7)$$

Для исследования нелинейной системы методом фазовой плоскости перейдем от уравнения (3.7) к системе из двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{a_1 y}{a_0} - \frac{a_2 x}{a_0}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) в векторно-матричной форме имеют вид

$$\dot{z} = Az, \quad (3.9)$$

где  $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}$ .

Определим точки равновесного состояния системы, описываемой уравнениями (3.8), решая систему

$$\begin{cases} 0 = y, \\ 0 = -\frac{a_1 y}{a_0} - \frac{a_2 x}{a_0}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что имеется единственная точка равновесного состояния  $(0;0)$ .

Определим характер фазовых траекторий системы в окрестности особой точки по характеристическому уравнению системы, которое можно получить двумя способами:

1. По уравнению (3.7) заменой  $d/dt = s$  получим

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0. \quad (3.11)$$

2. По уравнению  $\det|A - \lambda E| = 0$ , используя выражения (3.9), получим

$$\det \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} -s & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} - s \end{bmatrix} = 0,$$

которое после соответствующих преобразований получит вид (3.11).

Рассмотрим фазовые портреты системы, соответствующие разным корням уравнения (3.11).

Если  $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ ,  $\alpha < 0$ , то  $(0;0)$  – особая точка типа «устойчивый фокус», а фазовый портрет системы в окрестности особой точки имеет вид, представленный на рис. 3.5.

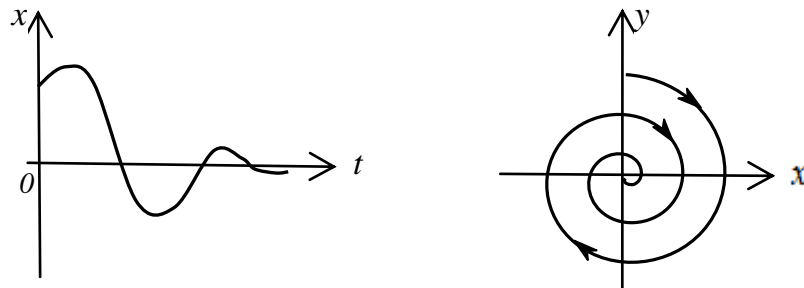


Рис. 3.5

Если  $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ ,  $\alpha > 0$ , то  $(0;0)$  – особая точка типа «неустойчивый фокус», а фазовый портрет системы в окрестности особой точки имеет вид, представленный на рис. 3.6.

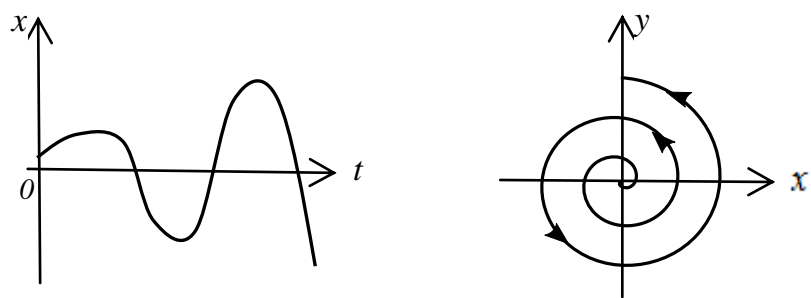


Рис. 3.6

Если  $s_{1,2} = \pm j\omega$ , то  $(0;0)$  – особая точка типа «цикл», а фазовый портрет системы в окрестности особой точки имеет вид, представленный на рис. 3.7.

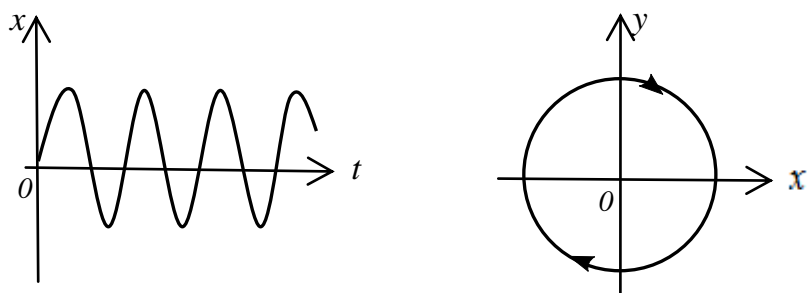


Рис. 3.7

Если  $s_{1,2} = \alpha < 0$ , то  $(0;0)$  – особая точка типа «устойчивый узел», а фазовый портрет системы в окрестности особой точки имеет вид, представленный на рис. 3.8.

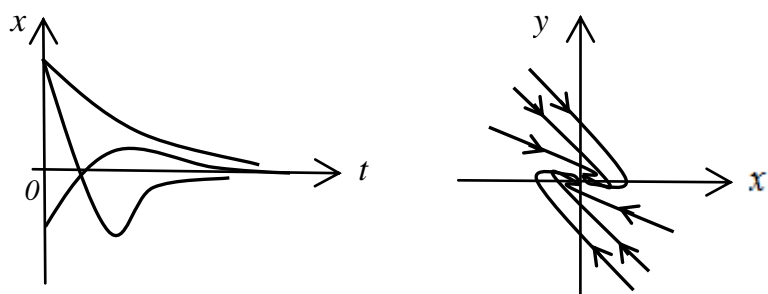


Рис. 3.8

Если  $s_{1,2} = \alpha > 0$ , то  $(0;0)$  – особая точка типа «неустойчивый узел», а фазовый портрет системы в окрестности особой точки имеет вид, представленный на рис. 3.9.

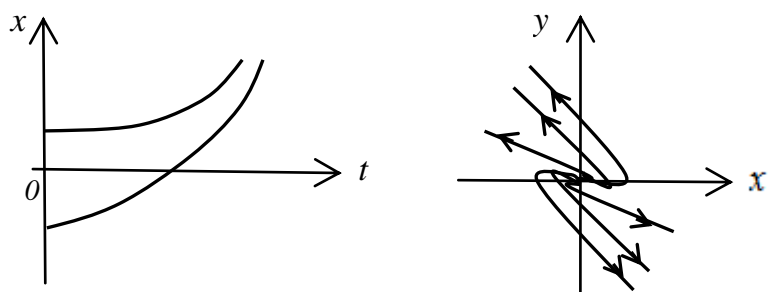


Рис. 3.9

Если  $s_{1,2} = \pm\alpha$ , то  $(0;0)$  – особая точка типа «седло», а фазовый портрет системы в окрестности особой точки имеет вид, представленный на рис. 3.10.

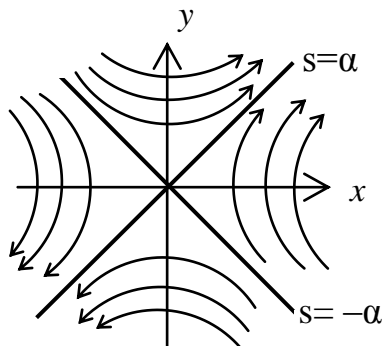


Рис. 3.10

*Пример.* Исследовать линеаризованную систему методом фазовой плоскости, если

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

Найдем точки равновесного состояния системы из системы

$$\begin{cases} 0 = 4x - 3y, \\ 0 = 2x - 3y, \end{cases}$$

имеющей единственное решение ( $x = 0, y = 0$ ), значит единственная точка равновесного состояния системы  $(0;0)$ .

Определим тип особой точки, записав характеристическое уравнение

$$\det|A - sE| = \det \begin{vmatrix} 4-s & -3 \\ 2 & -3-s \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$s^2 - s - 6 = 0,$$

следовательно

$$s_1 = -2; \quad s_2 = 3.$$

Поскольку корни характеристического уравнения вещественные разных знаков, то  $(0;0)$  особая точка типа «седло».

Найдем наклоны асимптот седловой точки. Для этого запишем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{4x - 3y}.$$

Далее задаваясь уравнением асимптоты седловой точки

$$\xi = k\eta$$

и подставив уравнение асимптоты в дифференциальное уравнение фазовых траекторий, получим

$$k = \frac{2x - 3kx}{4x - 3kx} = \frac{2 - 3k}{4 - 3k},$$

$$k = \frac{2 - 3k}{4 - 3k},$$

откуда  $3k^2 - 7k + 2 = 0$ , а корни уравнения, определяющие наклоны асимптот  $k_1 = 2; k_2 = \frac{1}{3}$ . Фазовый портрет системы представлен на рис. 3.11.

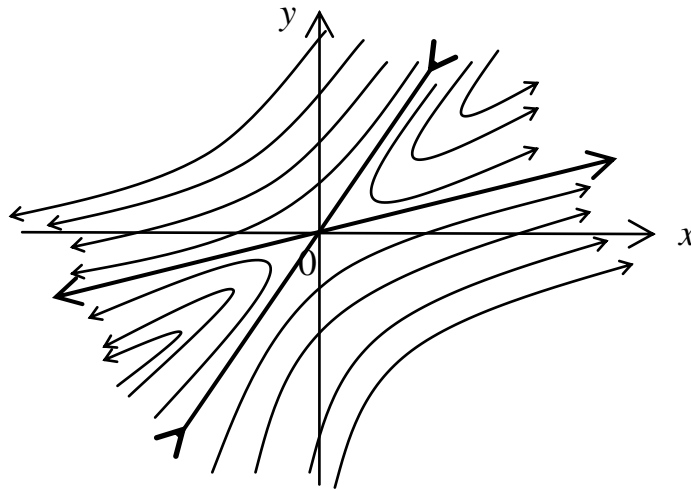


Рис. 3.11

### 3.3. Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем (поведение нелинейной системы при больших отклонениях от положения равновесия)

Пусть нелинейная система 2-го порядка описывается системой уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi_1(x, y), \\ \dot{y} = \Phi_2(x, y) \end{cases}.$$

Последовательность действий по исследованию системы следующая:

1. Определить точки равновесного состояния системы из уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. Определить тип каждой особой точки. Для этого нужно линеаризовать исходные уравнения в предположении о малости отклонения системы от рассматриваемой особой точки. Записать характеристическое уравнение линеаризованной системы, определить его корни.

*Пример.* Пусть исследуемая система описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1 + x^2) - 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Определим точки равновесного состояния системы как решение системы

$$\begin{cases} -x(1 + x^2) - 2y = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что у системы три точки равновесного состояния:

- 1)  $x = 0; y = 0$ ; 2)  $x = 1; y = -1$ ; 3)  $x = -1; y = 1$ .

Определим тип каждой особой точки.

1. При  $x = 0; y = 0$  линеаризованные уравнения системы будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$$

тогда характеристическое уравнение линеаризованной системы примет вид

$$\det|A - \lambda E| = \det \begin{vmatrix} -1-s & -2 \\ 1 & 1-s \end{vmatrix} = 0, \\ s^2 + 1 = 0; \\ s_{1,2} = \pm j.$$

Так как корни характеристического уравнения чисто мнимые, то  $(0;0)$  – особая точка типа «цикл».

2. При  $x=1; y=-1$  для линеаризации исходных уравнений обеспечим бесконечно малые отклонения системы ( $\xi$  и  $\eta$ ) от точки равновесного состояния

$$x = 1 + \xi; y = -1 + \eta,$$

тогда исходные уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{d(1+\xi)}{dt} = -(1+\xi)(1+(1+\xi)^2) - 2(-1+\eta), \\ \frac{d(-1+\eta)}{dt} = (1+\xi) + (-1+\eta), \end{cases}$$

а уравнения, линеаризованные в окрестности данной особой точки (после приведения подобных и пренебрежения степенями  $\xi$  и  $\eta$ , большими единицы), примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -4\xi - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi + \eta. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\det|A - sE| = \det \begin{vmatrix} -4-s & -2 \\ 1 & 1-s \end{vmatrix} = 0,$$

из которого следует, что  $s_1 = -3,56; s_2 = 0,56$ .

Так как корни характеристического уравнения системы разных знаков, то  $(1;-1)$  – особая точка типа «седло».

3. При  $x = -1; y = 1$  для линеаризации исходных уравнений обеспечим бесконечно малые отклонения системы ( $\xi$  и  $\eta$ ) от точки равновесного состояния

$$x = -1 + \xi; y = 1 + \eta,$$

тогда исходные уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{d(-1+\xi)}{dt} = -(-1+\xi)(1+(-1+\xi)^2) - 2(1+\eta), \\ \frac{d(1+\eta)}{dt} = -1+\xi + 1+\eta, \end{cases}$$

а уравнения, линеаризованные в окрестности данной особой точки (после приведения подобных и пренебрежения степенями  $\xi$  и  $\eta$ , большими единицы), примут вид



$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -4\xi - 2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi + \eta, \end{cases}$$

то есть такой же вид, как для точки  $(1; -1)$ , а значит точка  $(-1; 1)$  – тоже особая точка типа «седло».

Чтобы качественно изобразить фазовый портрет системы найдем наклоны асимптот ( $k_1$  и  $k_2$ ) седловых точек. Для этого запишем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{-4\xi - 2\eta}$$

и, подставив в него уравнение асимптоты вида  $\eta = k\xi$ , получим уравнение

$$k = \frac{\xi + k\xi}{-4\xi - 2k\xi} = \frac{1 + k}{-4 - 2k},$$

решив которое найдем корни уравнения:  $k_1 = -2,28; k_2 = -0,22$ .

Фазовый портрет системы представлен на рис. 3.12.

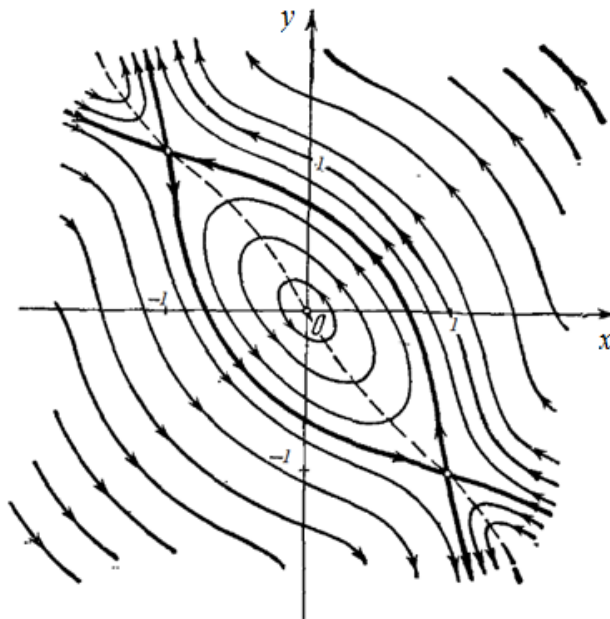


Рис. 3.12

Из рис. 3.12 видно, что исследуемая система не имеет устойчивых положений равновесия.

### 3.4. Особые линии на фазовой плоскости

Особенностью нелинейной системы является возможность наличия в ней нескольких точек равновесного состояния. В соответствии с этим на фазовой плоскости получаются области с различными типами фазовых траекторий. Эти области разделяются кривыми, называемыми *сепаратрисами*.

Таким образом, в зависимости от начальных условий система может попасть в любое состояние: устойчивое или неустойчивое. Поэтому различают несколько понятий устойчивости нелинейной системы; системы «устойчивые в малом» (устойчивые при малых отклонениях от положения равновесия); системы «устойчивые в большом» (устойчивые при больших отклонениях от положения равновесия) и системы «устойчивые в целом».

Кроме сепаратрис, к особым кривым относят предельный цикл (ПЦ) – это замкнутая кривая, соответствующая периодическим процессам, в окрестности которой происходят колебательные переходные процессы.

Если фазовые траектории внутри и снаружи предельного цикла с течением времени удаляют изображающую точку от него, то предельный цикл – *неустойчивый* (рис. 3.13 а). Если же с течением времени изображающая точка изнутри и снаружи стремится к предельному циклу, то предельный цикл *устойчивый* (рис. 3.13 б).

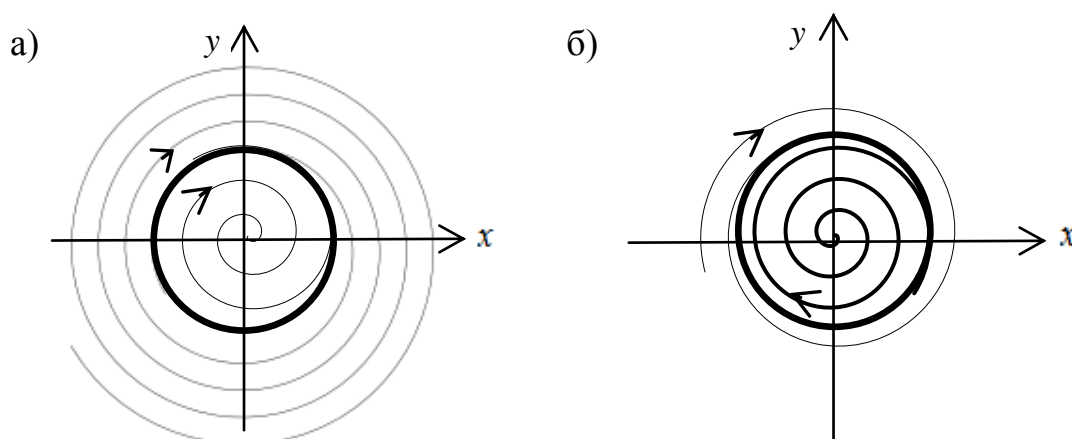


Рис. 3.13

*Физический смысл устойчивого ПЦ* – автоколебания (незатухающие колебания управляемой величины при отсутствии внешних гармонических воздействий). Параметры автоколебаний (амплитуда и частота) не зависят от начальных условий, а определяются лишь внутренними свойствами системы.

*Физический смысл неустойчивого ПЦ* – граница областей начальных условий. Возможно наличие нескольких предельных циклов в системе (рис. 3.14).

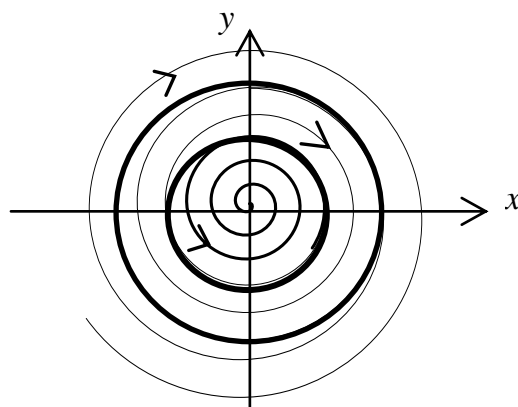


Рис. 3.14

Интересно отметить, что на рис. 3.13 б имеет место «мягкое» возбуждение автоколебаний, а на рис. 3.14 – «жесткое» возбуждение автоколебаний, так как в последнем случае для возбуждения автоколебаний необходимо «забросить» начальные условия за пределы внутреннего неустойчивого ПЦ.

### 3.5. Методы построения фазовых портретов нелинейных систем

#### 3.5.1. Метод припасовывания

Большинство нелинейных элементов описывается кусочно-линейными статическими характеристиками. Это позволяет перейти от описания нелинейной системы с помощью нелинейных дифференциальных уравнений к описанию нелинейной системы с помощью линейных дифференциальных уравнений, справедливых для каждого отдельного участка статической характеристики нелинейного элемента.

Последовательность действий для построения фазовой траектории:

1. По заданным начальным условиям определяется постоянная интегрирования в общем решении дифференциального уравнения фазовых траекторий, справедливого для того участка фазовой плоскости, которому принадлежат начальные условия.

2. По общему решению, полученному в п.1 определяются значения фазовых координат в конце рассмотренного участка.

3. Значения фазовых координат в конце рассмотренного в п.2 участка становятся начальными условиями соседнего участка.

4. По данным п. 3 определяется постоянная интегрирования в общем решении дифференциального уравнения фазовых траекторий, справедливого для соседнего участка.

5. Определяются значения фазовых координат в конце участка, рассмотренного в п.4, они становятся начальными условиями для следующего участка и т.д.

*Пример.* При известных начальных условиях построить фазовую траекторию системы, заданной структурной схемой (рис. 3.15).

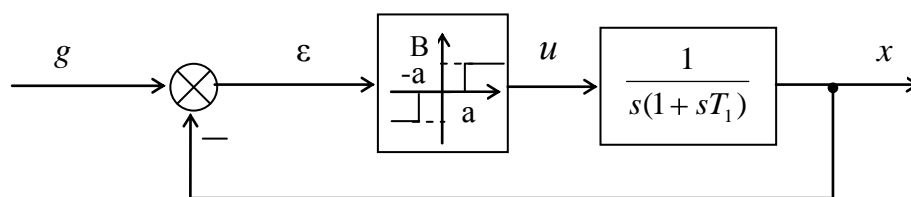


Рис. 3.15

Запишем в операторной форме уравнение линейного элемента  $T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = u$ , тогда уравнение прямой цепи системы примет вид

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = u(\varepsilon), \quad u(\varepsilon) = \begin{cases} B, & \varepsilon > a \\ 0, & |\varepsilon| \leq a \\ -B, & \varepsilon < -a \end{cases}. \quad (3.12)$$

Если к (3.12) добавить уравнение элемента сравнения  $\varepsilon = -x$ , то получим математическое описание замкнутой нелинейной системы.

Перейдем заменой переменной  $\dot{x} = y$  от дифференциального уравнения 2-го порядка к системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{1}{T}(u(-x) - y), \end{cases} \quad u(-x) = m = \begin{cases} B, x < -a, \\ 0, |x| \leq a, \\ -B, x > a. \end{cases} \quad (3.13)$$

Далее запишем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m - y}{Ty}. \quad (3.14)$$

Решим (3.14):

$$\begin{aligned} \int dx &= \int \frac{Ty}{m - y} dy, \\ x &= \int \frac{Ty}{m - y} dy = -T \int \frac{(m - y) - m}{m - y} dy = -T(y - m \ln|m - y|) + C. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Пусть  $a=0,5$ ;  $B=2$ ;  $T=1$ , тогда согласно (3.13) фазовая плоскость разбивается на три области (рис. 3.16).

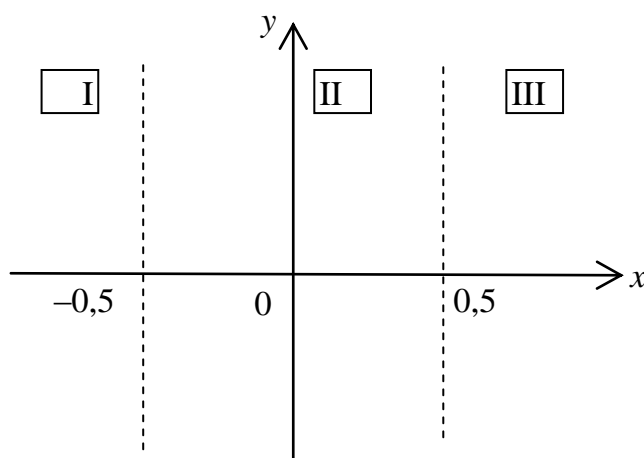


Рис. 3.16

Эти области разделены прямыми (на рис. 3.16 они показаны штриховыми линиями), которые называются линиями переключения. Такую фазовую плоскость называют многолистной. В каждой области действует согласно (3.15) свое уравнение фазовых траекторий, а именно

$$\text{I: } x = -y + 2 \ln|2 - y| + C_1. \quad (3.16)$$

$$\text{II: } x = -y + C_2. \quad (3.17)$$

$$\text{III: } x = -y - 2 \ln|-2 - y| + C_3. \quad (3.18)$$

По линиям переключения эти листы «сшиваются».

Поясним алгоритм построения на фазовой плоскости фазовой траектории, соответствующей начальному условию  $x=0,9; y=0$ . По заданному начальному условию (в данном случае принадлежащему области III) определяют значение  $C_3$  в уравнении (3.18); по полностью определенному (3.18) в области III строят фазовую траекторию и определяют значение фазовых координат на границе областей III и II. Эти координаты становятся начальными условиями для области II, по которым определяют значение  $C_2$  в (3.17), а затем строят фазовую траекторию в области II, определяя значения фазовых координат на границе областей II и I, которые становятся начальными условиями для области I и т.д. Результат построений представлен на рис. 3.17.

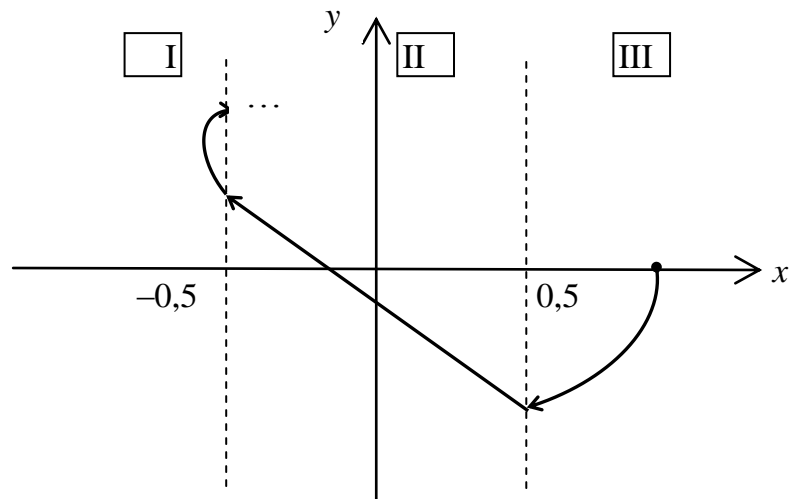


Рис. 3.17

### 3.5.2. Метод изоклин

Суть метода заключается в построении семейства изоклин. *Изоклина* – кривая на фазовой плоскости, такая, что все фазовые траектории пересекают её под одним и тем же углом  $\varphi$  (рис. 3.18).

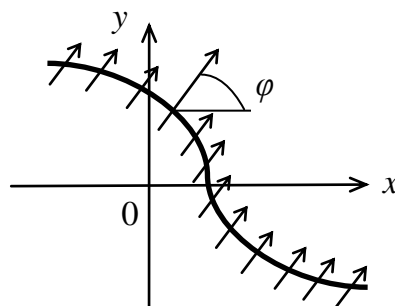


Рис. 3.18

Для построения изоклин по исходной системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \Phi_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \Phi_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.19)$$

путем деления второго уравнения системы (3.19) на первое записывают дифференциальное уравнение фазовых траекторий (ДУ ФТ)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)}. \quad (3.20)$$

Далее получают уравнение изоклины, приравнивая правую часть (3.20) к переменной  $N$

$$\frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)} = N = \operatorname{tg} \varphi.$$

Чтобы получить семейство изоклин, присваивают величине  $N$  значения из диапазона  $(-\infty; \infty)$  с таким расчетом, чтобы изоклины равномерно заполнили всю фазовую плоскость. Вычисление угла  $\varphi$  может быть выполнено графически с помощью шаблона, показанного на рис. 3.19.

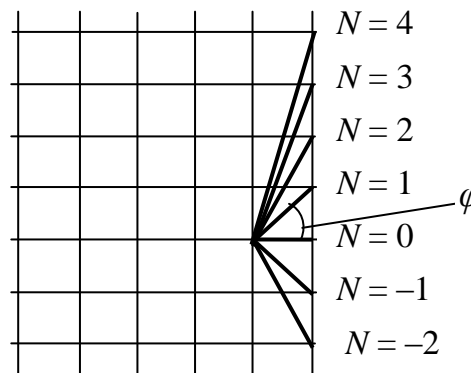


Рис. 3.19

Так, изоклины горизонтальных касательных получаются при  $N=0$ , а изоклины вертикальных касательных – при  $N=\pm\infty$ .

*Пример.* Исследовать методом изоклин линеаризованную систему, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 5x_1. \end{cases}$$

Запишем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-2x_2 - 5x_1}{x_2},$$

тогда уравнение изоклин примет вид  $\frac{-2x_2 - 5x_1}{x_2} = N$ , иначе  $x_2 = \frac{-5x_1}{N+2}$ .

Дальнейшие рассуждения сведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$N$	0	3	13	-3	-7	-12
Уравнение изоклины	$x_2 = -2,5x_1$	$x_2 = -x_1$	$x_2 = -(1/3)x_1$	$x_2 = 5x_1$	$x_2 = x_1$	$x_2 = 0,5x_1$

По данным таблицы построено семейство изоклин и фазовая траектория для произвольно выбранного начального условия (рис. 3.20).

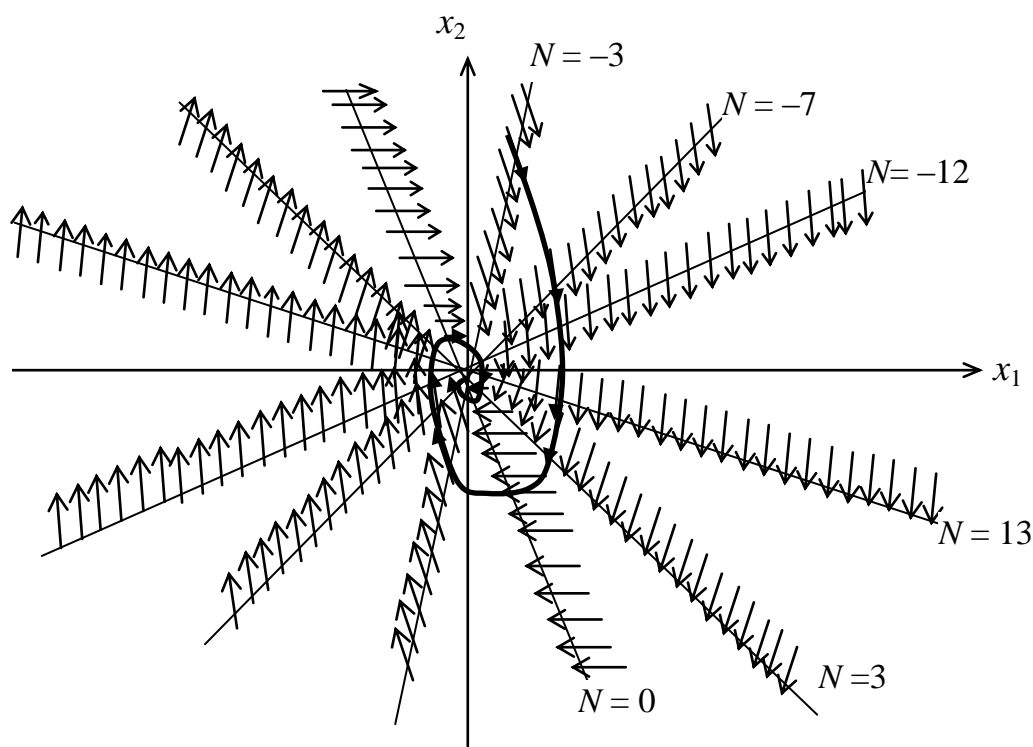


Рис. 3.20

Задача построения фазового портрета системы может быть также решена в MathCad (Приложение А).

### 3.6. Система со скользящим процессом

Проиллюстрируем понятие скользящего процесса на простом примере. Пусть дана система автоматического регулирования (рис. 3.21).

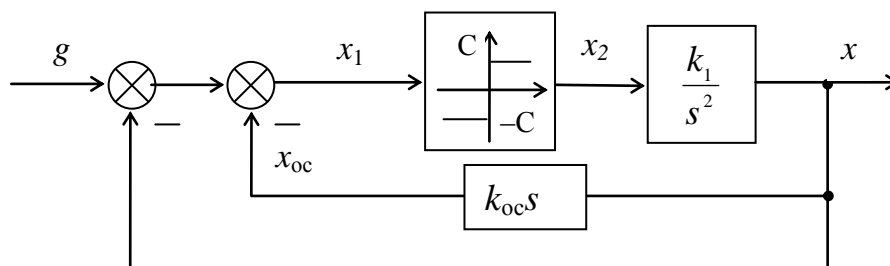


Рис. 3.21

Уравнения динамики этой системы имеют вид

$$\begin{cases} s^2 x = k_1 x_2, \\ x_2 = C \cdot \text{sign} x_1, \\ x_1 = -x - x_{oc} = -x - k_{oc} s x. \end{cases} \quad (3.21)$$

Уравнения (3.21) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -k_1 C \cdot \text{sign}(x + k_{oc} y) \end{cases} \quad (3.22)$$

Согласно (3.22) линия переключения на фазовой плоскости  $(x, y)$  описывается уравнением

$$y = -\frac{1}{k_{oc}} x.$$

Справа от этой линии (рис. 3.22)  $x + k_{oc} y > 0$ , поэтому уравнение фазовых траекторий, соответствующее (3.22) примет вид

$$y dy = -k_1 C dx,$$

откуда получим

$$y^2 = -2k_1 C x + C_1. \quad (3.23)$$

Согласно (3.23) фазовые траектории – параболы (см. рис. 3.22), ветви которых направлены в отрицательную сторону оси  $x$ . Положение вершин парабол определяется величиной  $C_1$ , т.е. начальными условиями  $x(t_0), y(t_0)$ .

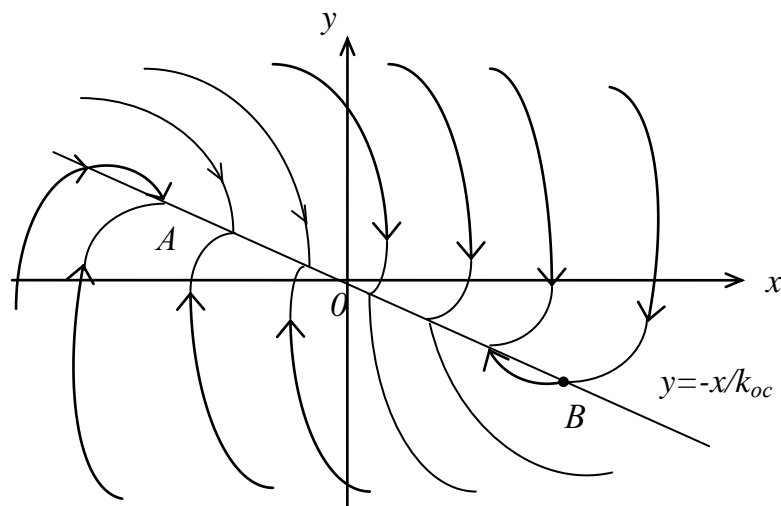


Рис. 3.22

Если  $x + k_{oc} y < 0$ , то уравнение фазовых траекторий, соответствующее (3.22) примет вид

$$y dy = k_1 C dx,$$

откуда следует, что

$$y^2 = 2k_1 C x + C_2. \quad (3.24)$$

Параболы, соответствующие (3.24), также изображены на рис. 3.22 слева от линии переключения.

Видно, что на отрезке  $AB$  линии переключения фазовые траектории встречаются, упираясь в этот отрезок. Это можно расшифровать следующим образом. Пусть процесс идет по фазовой траектории 1 (рис. 3.23).



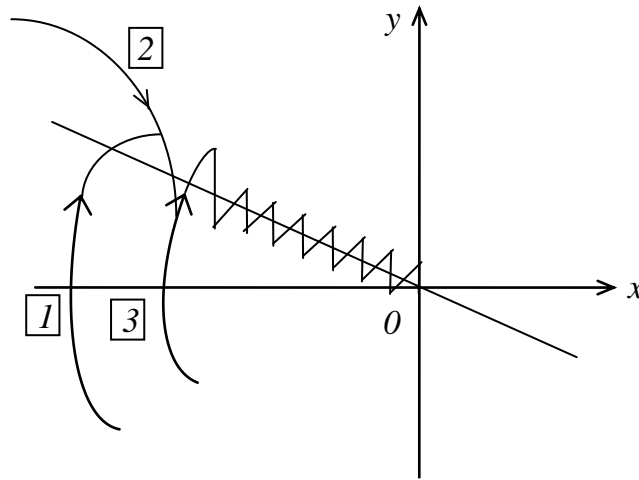


Рис. 3.23

Как только фазовая траектория пересечет линию переключения, вступит в свои права фазовая траектория 2, которая вернет процесс к линии переключения, но тут встретится фазовая траектория 3 и т.д. В результате изображающая точка путем вибраций около линии переключения переместится к началу координат.

Такой ход процесса соответствует переключениям релейного элемента (рис. 3.21) с большой частотой. Теоретически частота переключения бесконечна, а амплитуда вибраций, изображенных на рис. 3.23, стремится к нулю. Следовательно, теоретически изображающая точка скользит по линии переключения к началу координат (к равновесному состоянию). Поэтому процесс такого рода называется *скользящим процессом*.

### 3.7. Система с переменной структурой

Переменная структура системы дает дополнительные возможности получения различных желаемых процессов автоматического управления и регулирования. Допустим, в системе предусмотрены две структуры, различающиеся звеньями 1 и 2 (рис. 3.24).

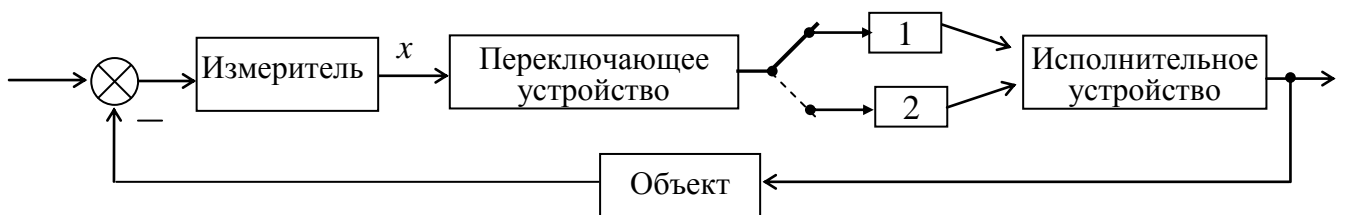


Рис. 3.24

Логическое переключающее устройство (см. рис. 3.24) в зависимости от величины и знака величины  $x$  (или пары входных величин) подключает либо звено 1, либо звено 2.

Рассмотрим переходный процесс в системе при отсутствии внешнего воздействия, когда измерительное, исполнительное устройство вместе с объектом описываются передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{k}{s^2},$$

а звенья 1 и 2 характеризуются коэффициентами усиления  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. Тогда уравнение динамики замкнутой системы при подключении звена 1 имеет вид

$$\ddot{x} + k_1 kx = 0, \quad (3.25)$$

а при включении звена 2 имеем

$$\ddot{x} + k_2 kx = 0. \quad (3.26)$$

Каждое из этих уравнений является уравнением неустойчивой системы. Фазовые портреты систем, соответствующих уравнениям (3.25) и (3.26) показаны на рис. 3.25, а и б соответственно.

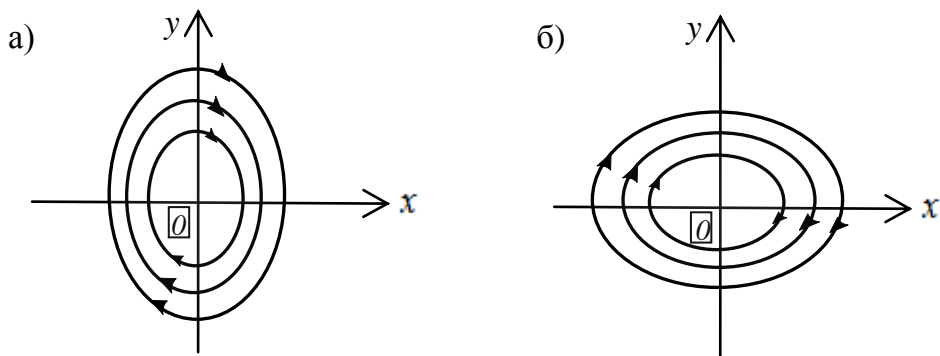


Рис. 3.25

Обозначим  $\dot{x} = y$  и введем следующий закон переключений: звено 1 включается при  $xy > 0$ , тогда работает уравнение (3.25); звено 2 включается при  $xy < 0$ , тогда работает уравнение (3.26). В этом случае в I квадранте фазовой плоскости  $(x, y)$  берется дуга эллипса из рис. 3.25, а; в IV квадранте – из рис. 3.25, б; в III квадранте – снова из рис. 3.25, а и т.д. (рис. 3.26).

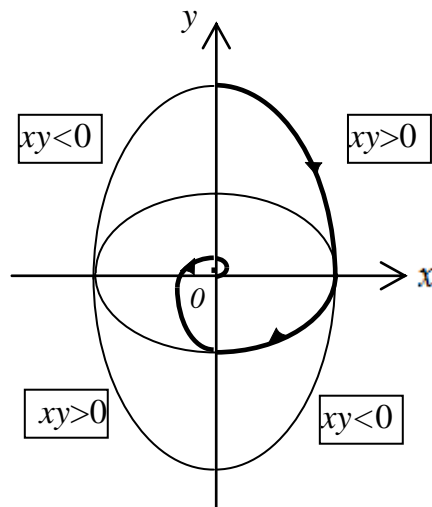


Рис. 3.26

Из рис. 3.26 видно, что в результате получается затухающий колебательный переходный процесс, т.е. за счет переменности структуры система становится устойчивой.

Однако колебательный переходный процесс не всегда приемлем. Для организации в системе с переменной структурой скользящего апериодического процесса нужно, чтобы звено 1 имело коэффициент передачи  $k_1$ , а звено 2 – коэффициент передачи  $k_1$  (усиление с изменением знака сигнала), при этом в переключающем устройстве должна формироваться величина

$$x_1 = y + cx,$$

при этом звено 1 должно включаться при  $x_1 x > 0$ ; звено 2 – при  $x_1 x < 0$ . Тогда все фазовые траектории будут встречаться на линии переключения  $y = -cx$ . Это и означает наличие скользящего процесса (аналогично п. 3.5). Но в отличие от случая, описанного в п. 3.5, здесь линия скользящего процесса не будет ограничена. Поэтому при любых начальных условиях система будет входить в режим скользящего процесса без предварительных колебаний.

#### 4. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Это метод исследования нелинейных систем выше второго порядка. Сущность метода заключается в замене нелинейного элемента на эквивалентный линейный, который одинаково с нелинейным элементом преобразует гармонический сигнал и характеризуется эквивалентным комплексным коэффициентом усиления (ЭККУ). Такая замена позволяет исследовать нелинейную систему частотными методами. В частности, с помощью частотного метода можно исследовать нелинейную систему на возможность возникновения в ней автоколебаний.

Основы метода разработаны академиками Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. Применительно к ТАУ метод развит Л.С. Гольдфарбом и Е.П. Поповым.

##### 4.1. ЭККУ: общие сведения

Пусть нелинейная система представлена структурной схемой (рис. 4.1)

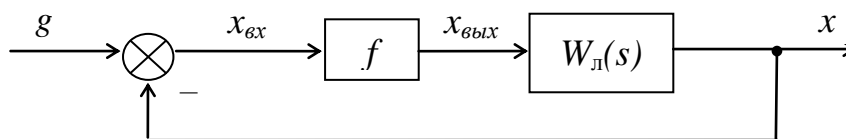


Рис. 4.1

Пусть при  $g=0$  в системе возникает периодический режим изменения  $x$ , тогда  $x_{вх} = A \sin \omega t$ . Периодический сигнал на выходе нелинейного элемента всегда не-синусоидальный, вид этого сигнала зависит от характера нелинейности (рис. 4.2).

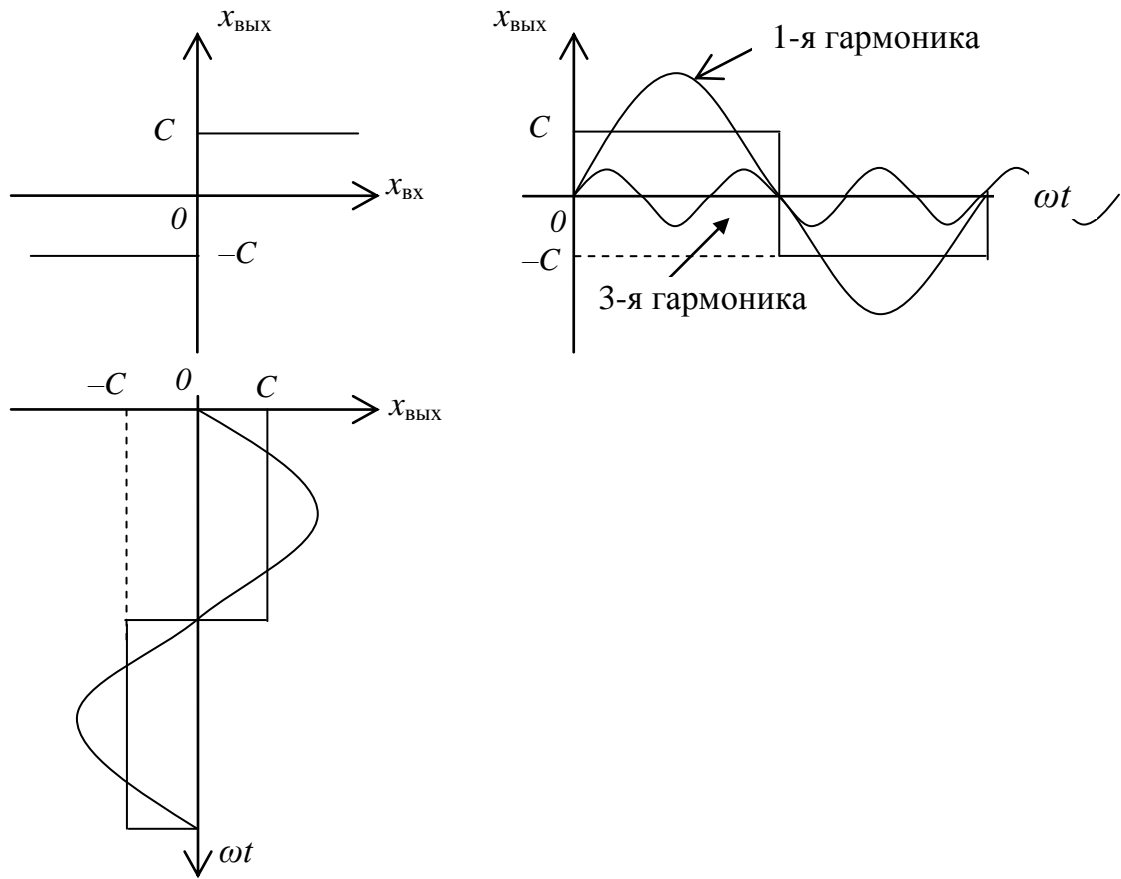


Рис. 4.2

Разложим  $x_{\text{ВЫХ}}$  в ряд Фурье

$$x_{\text{ВЫХ}} = \sum_{k=1}^n (q'(A) \sin k\omega t + b'(A) \cos k\omega t) = \sum_{k=1}^n (q'(A) \frac{x_{\text{ВХ}}}{A} + jb'(A) \frac{x_{\text{ВХ}}}{\omega}),$$

где  $q'$  и  $b'$  – коэффициенты ряда Фурье;  $k$  – номер гармоники.

Проходя через линейный элемент, высшие гармоники разложения  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  в ряд Фурье будут значительно уменьшаться по амплитуде, если для линейного элемента выполняется гипотеза фильтра. Количественно гипотеза фильтра выражается следующим образом

$$\frac{x_{\text{ВЫХ}k}}{x_{\text{ВЫХ}1}} = \frac{x_{\text{ВХ}k} \cdot |W_{\text{Л}}(jk\omega)|}{x_{\text{ВХ}1} \cdot |W_{\text{Л}}(j\omega)|} \ll 1.$$

Поэтому

$$x_{\text{ВЫХ}} \approx x_{\text{ВЫХ}1} = q'(A) \sin \omega t + b'(A) \cos \omega t,$$

где  $q'$  и  $b'$  – коэффициенты первой гармоники ряда Фурье, определяемые следующим образом:

$$q'(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t,$$

$$b'(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

Перейдём к комплексным изображениям входного и выходного сигналов нелинейного элемента

$$x_{\text{вх}} = A e^{j\omega t}, \quad (4.1)$$

$$x_{\text{вых1}} = q'(A) e^{j\omega t} + j b'(A) e^{j\omega t}. \quad (4.2)$$

ЭККУ – отношение комплексных изображений первой гармоники выходного сигнала нелинейного элемента и входного колебания, тогда с учетом (4.1) и (4.2) получим

$$K_{\text{эн}}(A) = \frac{x_{\text{вых1}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{q'(A)}{A} + j \frac{b'(A)}{A} = q(A) + j b(A), \quad (4.3)$$

где  $q(A)$  и  $b(A)$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

Запишем (4.3) в показательной форме

$$K_{\text{эн}}(A) = N(A) e^{j\varphi(A)}, \quad (4.4)$$

где  $N(A) = \sqrt{q^2(A) + b^2(A)}$  – модуль ЭККУ,  $\varphi(A) = \arctg\left(\frac{b(A)}{q(A)}\right)$  – аргумент ЭККУ.

Заметим, что  $N(A) = \frac{A_1(A)}{A}$ , где  $A_1(A)$  – амплитуда выходного сигнала,  $A$  – амплитуда входного сигнала.

Зависимость  $N$  от  $A$  объясняется следующим: чем больше амплитуда входного сигнала  $A$ , тем больше длительность выходного импульса, следовательно, тем больше амплитуда первой гармоники  $A_1$  разложения выходного сигнала в ряд Фурье, тем больше модуль  $N$ .

Зависимость  $\varphi$  от  $A$  объясняется следующим: чем больше амплитуда входного сигнала  $A$ , тем левее по оси  $\omega t$  располагаются середины выходных импульсов относительно фиксированных точек  $(\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots)$ , тем меньше  $\varphi$ .

ЭККУ геометрически изображается на комплексной плоскости вектором, модуль которого  $N(A)$ , а аргумент  $\varphi(A)$ . С изменением  $A$  от 0 до  $\infty$  конец вектора  $K_{\text{эн}}(A)$  описывает на комплексной плоскости некоторую кривую, называемую эквивалентной АФХ нелинейного элемента.

Итак, суть гармонической линеаризации состоит в замене нелинейного элемента на эквивалентный линейный, описываемый уравнением

$$x_{\text{вых}}(t) = K_{\text{эн}}(A) \cdot x_{\text{вх}}(t).$$

Условие эквивалентности – совпадение выходных сигналов нелинейного элемента и эквивалентного линейного при одинаковых гармонических входных сигналах. При этом из (4.3) и (4.4) видно, что ЭККУ аналог частотной передаточной функции.

## 4.2. Методика определения ЭККУ нелинейного элемента

### 4.2.1. ЭККУ элемента с однозначной статической характеристикой

Вид статической характеристики нелинейного элемента, характер входного и выходного сигналов этого элемента представлены на рис. 4.3.

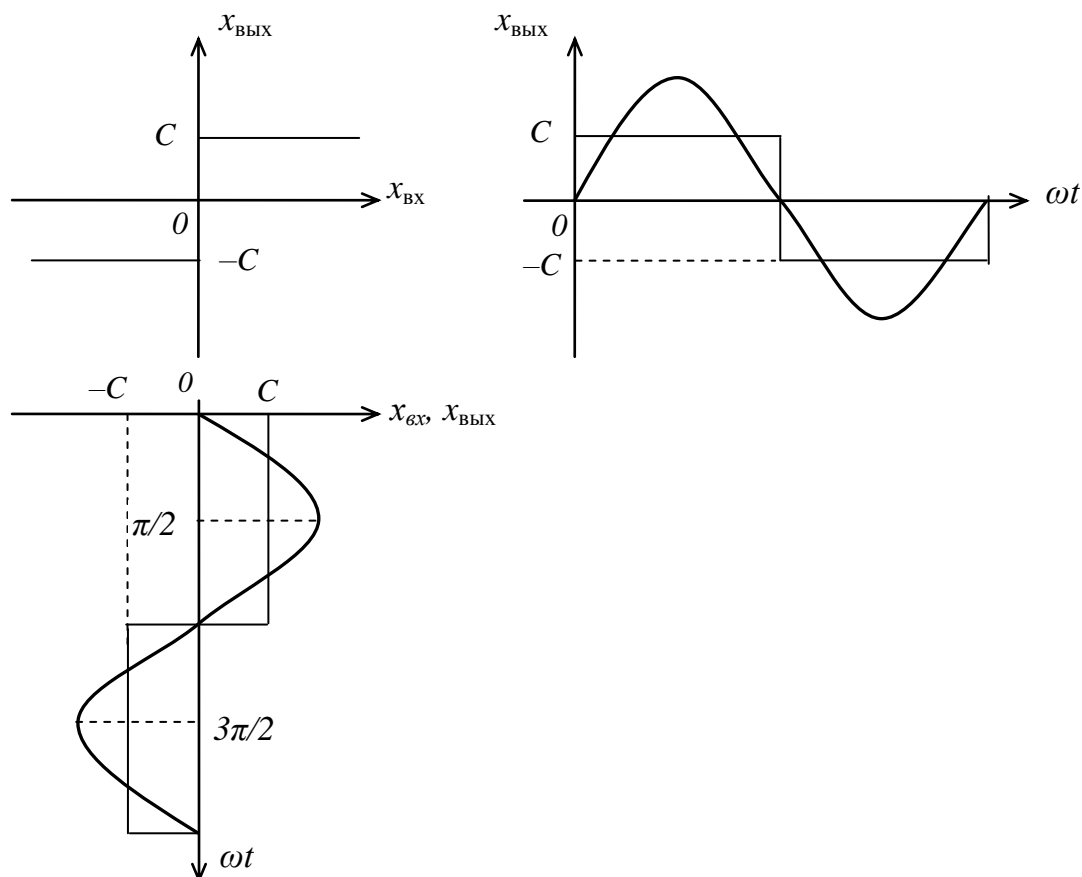


Рис. 4.3

В общем случае  $K_{\text{н}}(A) = q(A) + jb(A)$ , причем для однозначных нелинейностей  $b(A) = 0$ , так как первая гармоника выходного колебания нелинейного элемента совпадает по фазе со входным сигналом. Далее, опираясь на рис. 4.3 и учитывая тот факт, что выходные импульсы симметричны относительно фиксированных точек  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , проведем следующие рассуждения:

$$\begin{aligned}
K_{\text{эн}}(A) = q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t = \\
&= \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} C \sin \omega t d\omega t = \frac{4C}{\pi A} (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4C}{\pi A} (0 - 1) = -\frac{4C}{\pi A}.
\end{aligned}$$

Часто характеристики нелинейного элемента нормируют, т.е. приводят к виду

$$K_{\text{эн}}(A/a) = k_0 q_{\text{н}}(A/a),$$

где  $k_0$  – нормирующий множитель, зависящий от параметров данной нелинейности;  $q_{\text{н}}(A/a)$  – нормированный ЭККУ, график которого для всех нелинейностей данного типа один и тот же.

#### 4.2.2. ЭККУ неоднозначных нелинейностей

Вид статической характеристики нелинейного элемента, характер входного и выходного сигналов этого элемента представлены на рис. 4.4.

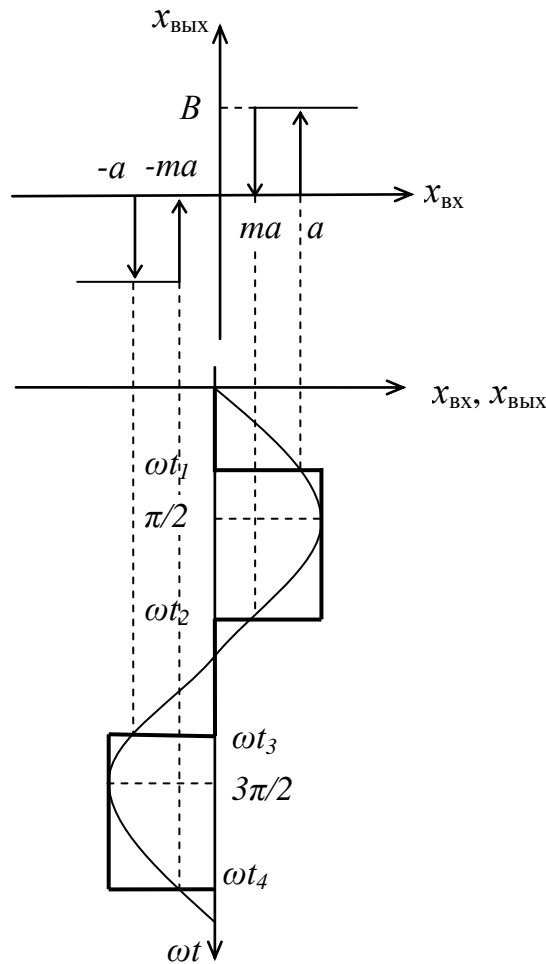


Рис. 4.4

В общем случае  $K_{\text{эн}}(A) = q(A) + jb(A)$ . Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации с учетом того, что на интервале  $(0 \dots 2\pi)$  два импульса одинаковой длительности.

$$\begin{aligned}
q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B \sin \omega t d\omega t = \frac{2B}{\pi A} (-\cos \omega t) \Big|_{\omega t_1}^{\omega t_2} = \\
&= \frac{2B}{\pi A} (+\cos \omega t_2 + \cos \omega t_1) = |A \sin \omega t_1 = a; A \sin \omega t_2 = ma| = \\
&\frac{2B}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{ma}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
b(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t = \frac{2B}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \cos \omega t d\omega t = \frac{2B}{\pi A} (\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1) = \\
&= \frac{2B}{\pi A^2} (ma - a) = \frac{-2B(a - ma)}{\pi A^2}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из последней формулы видно, что для гистерезисных характеристик вычисление коэффициента  $b(A)$  гармонической линеаризации может быть приведено по формуле

$$b(A) = \frac{-S}{\pi A^2} \tag{4.7}$$

где  $S$  – площадь петель гистерезиса.

Если  $m = -1$ , то получим статическую характеристику типа «трехпозиционное реле без гистерезиса» (рис. 4.5).

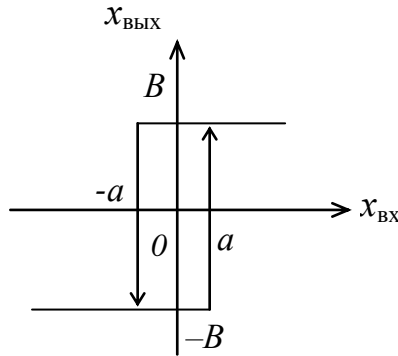


Рис. 4.5

При  $m = -1$  из (4.6) и (4.7) получим

$$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2}; \quad b(A) = -\frac{4Ba}{\pi A^2}.$$

ЭККУ типовых нелинейных элементов приведены в Приложении Б.

Метод гармонической линеаризации является универсальным методом исследования нелинейных систем. Его универсальность состоит в том, что он применим к любым нелинейностям. Однако данный метод не позволяет количественно оценить погрешность, которая получается в результате замены выходного сигнала нелинейного элемента на первую гармонику его разложения в ряд Фурье.



Погрешность метода можно оценить лишь качественно: чем больше порядок линейной части системы, тем более строго выполняется гипотеза фильтра, тем более корректным является рассмотрение лишь первой гармоники выходного сигнала.

С использованием метода гармонической линеаризации можно исследовать нелинейную систему на возможность возникновения в ней симметричных автоколебаний.

### 4.3. Анализ симметричных автоколебаний

В системе (рис. 4.6) имеют место симметричные автоколебания (периодические колебания управляемой величины с нулевой средней составляющей) (рис. 4.7) при отсутствии задающего сигнала и при нечётно-симметричной статической характеристике нелинейного элемента.

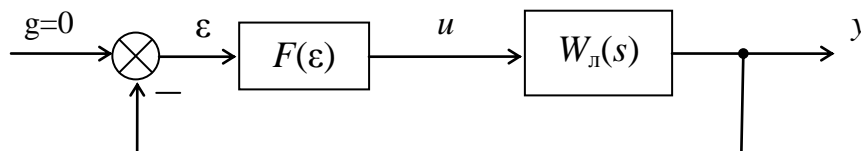


Рис. 4.6

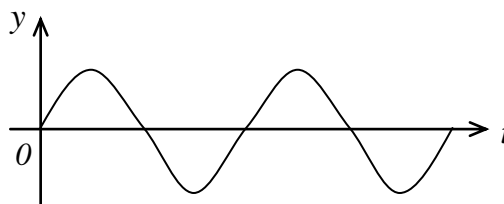


Рис. 4.7

#### 4.3.1. Алгебраический метод

В общем случае

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{y}{u},$$

тогда уравнение линейного элемента в операторной форме примет вид

$$M(s)y = L(s)U(\varepsilon). \quad (4.8)$$

Добавив к (4.8) уравнение элемента сравнения

$$\varepsilon = -y$$

получим уравнение замкнутой системы

$$M(s)y = L(s)U(-y),$$

решение которого будем искать в виде

$$y = A \sin \omega t. \quad (4.9)$$

Проведем гармоническую линеаризацию нелинейного элемента, заменив его на эквивалентный линейный элемент, описываемый уравнением

$$U(-y) = K_{\text{н}}(A) \cdot (-y) = (q(A) + jb(A)) \cdot (-y). \quad (4.10)$$

Запишем (4.10) в операторной форме

$$U(-y) = (q(A) + \frac{s}{\omega} b(A)) \cdot (-y). \quad (4.11)$$

Объединив (4.8) и (4.10), получим уравнение гармонически линеаризованной замкнутой системы

$$\begin{aligned} M(s)y &= L(s)(q(A) + \frac{s}{\omega} b(A))(-y) \\ \text{или} \quad \left( M(s) + L(s)(q(A) + \frac{s}{\omega} b(A)) \right) y &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Так как в искомом решении (4.9) величины  $A$  и  $\omega$  постоянны, то уравнение (4.12) – линейное дифференциальное уравнение с постоянными параметрами.

Из (4.12) получим характеристическое уравнение системы

$$M(\lambda) + L(\lambda)(q(A) + \frac{\lambda}{\omega} b(A)) = 0. \quad (4.13)$$

Решение (4.9) соответствует паре чисто мнимых корней уравнения (4.13), поэтому для нахождения параметров  $A$  и  $\omega$  решения (4.9) сделаем подстановку  $\lambda = j\omega$ , тогда получим

$$M(j\omega) + L(j\omega)(q(A) + jb(A)) = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} M(j\omega) = M_{\text{Re}}(\omega) + jM_{\text{Im}}(\omega), \\ L(j\omega) = L_{\text{Re}}(\omega) + jL_{\text{Im}}(\omega). \end{cases} \quad (4.15)$$

Уравнение (4.14) с учетом (4.15) примет вид

$$\begin{cases} X(\omega, A) = M_{\text{Re}}(\omega) + L_{\text{Re}}(\omega)q(A) - L_{\text{Im}}(\omega)b(A) = 0, \\ Y(\omega, A) = M_{\text{Im}}(\omega) + L_{\text{Im}}(\omega)q(A) + L_{\text{Re}}(\omega)b(A) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Если решение (4.16) относительно параметров  $A$  и  $\omega$  существует, то в системе возможно возникновение периодического процесса (4.9).

Далее следует определить устойчивость найденного периодического решения. Решение будет устойчиво, если верно неравенство

$$\left( \frac{\partial X}{\partial A} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Y}{\partial A} \right)^* > 0, \quad (4.17)$$

где  $*$  означает, что в найденные выражения частных производных следует подставить параметры периодического процесса  $A$  и  $\omega$ .

В дополнение к (4.17) нужно потребовать, чтобы в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы (4.13) все остальные корни (кроме пары чисто мнимых) имели отрицательные вещественные части, т.е. чтобы многочлен

$$\frac{M(\lambda) + L(\lambda)(q(A) + \frac{\lambda}{\omega}b(A))}{\lambda^2 + \omega^2}$$

удовлетворял условию Гурвица (или Михайлова). В случае систем третьего и четвертого порядка для этого достаточно потребовать лишь положительности коэффициентов (4.13).

*Пример.*

Пусть нелинейная система описывается структурной схемой (рис. 4.8).

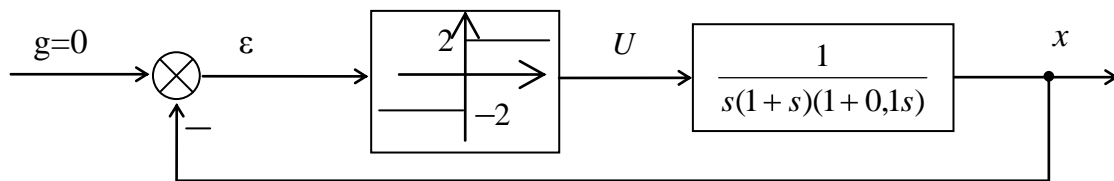


Рис. 4.8

Сначала запишем уравнение линейного элемента системы

$$s(1+s)(1+0,1s)x = U,$$

уравнение прямой цепи системы

$$s(1+s)(1+0,1s)x = U(\varepsilon),$$

и, наконец, уравнение замкнутой системы

$$s(1+s)(1+0,1s)x = U(-x).$$

Далее получим уравнение гармонически линеаризованной замкнутой системы

$$(0,1s^3 + 1,1s^2 + s)\big|_{s=j\omega} x = K_{\text{эл}}(A)(-x),$$

$$(-1,1\omega^2 + j\omega(1 - 0,1\omega^2))x = \frac{-8}{\pi A}x,$$

$$(-1,1\omega^2 + j\omega(1 - 0,1\omega^2) + \frac{8}{\pi A})x = 0,$$

тогда характеристическое уравнение системы имеет вид

$$-1,1\omega^2 + j\omega(1 - 0,1\omega^2) + \frac{8}{\pi A} = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} X = -1,1\omega^2 + \frac{8}{\pi A} = 0; \\ Y = \omega(1 - 0,1\omega^2) = 0. \end{cases}$$

Решение системы уравнений  $\omega = \sqrt{10} \approx 3,16$  (рад/с);  $A \approx 0,23$ , откуда следует, что возможно возникновение в системе периодического процесса

$$X = 0,23 \sin 3,16t.$$

Определим устойчивость найденного периодического процесса, подставив в выражение

$$\left( \frac{\partial X}{\partial A} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Y}{\partial A} \right)^* > 0$$

известные выражения, получим

$$\left( \left( \frac{-8}{\pi A} \right) \llcorner -0,3\omega^2 \right)^* > 0$$

$$\left( \frac{-8}{\pi 0,23} \right) \llcorner -0,3 \cdot 3,16^2 \rceil > 0,$$

так как неравенство верное, то найденное периодическое решение устойчиво.

Итак, в системе возможно возникновение симметричных автоколебаний вида  $X = 0,23 \sin 3,16t$ .

#### 4.3.2. Частотный метод

Аналізу пожежит гармонічески лінеаризована система (рис. 4.9).

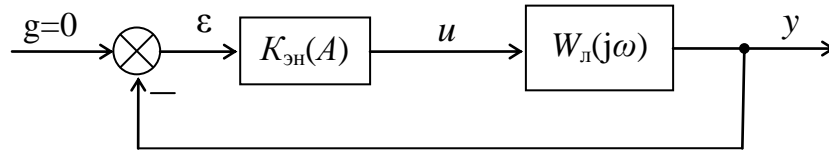


Рис. 4.9

В замкнутой системе имеют место незатухающие колебания управляемой величины (автоколебания), если система находится на границе устойчивости. В этом случае АФЧХ гармонически линейризованной системы должна проходить через точку  $(-1; 0)$ , т.е.

$$W_p(j\omega, A) = -1. \quad (4.18)$$

Выражение (4.18) применительно к рис. 4.9 принимает вид

$$K_{\text{эп}}(A) \cdot W_{\text{л}}(j\omega) = -1. \quad (4.19)$$

Для графического решения уравнения (4.19), его нужно записать в виде

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{K_{\text{эп}}(A)}. \quad (4.20)$$

Согласно (4.20) нужно на одной плоскости построить АФЧХ линейного элемента и годограф инверсного ЭККУ с обратным знаком. Точки пересечения этих годографов соответствуют периодическим решениям (4.20) (рис. 4.10).

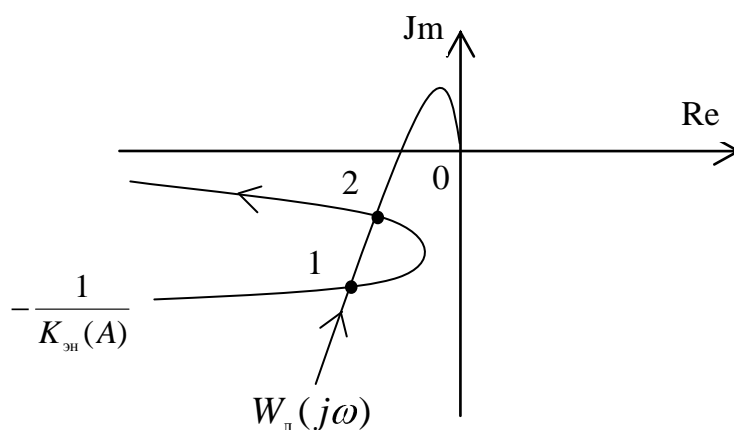


Рис. 4.10

Однако не все точки пересечения годографов (точки 1 и 2 на рис. 4.10) соответствуют автоколебаниям. Лишь устойчивому периодическому решению соответствуют автоколебания.

Для определения устойчивости периодического решения комплексная плоскость разбивается годографом  $W_л(j\omega)$  на заштрихованную и незаштрихованную области, а именно при движении изображающей точки по  $W_л(j\omega)$  в направлении увеличения  $\omega$  штрихуется область, находящаяся слева от этой кривой (рис. 4.11).

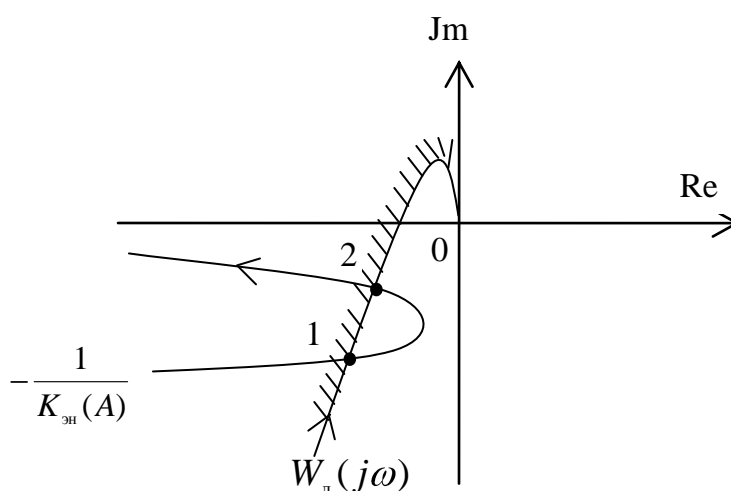


Рис. 4.11

*Правило суждения об устойчивости периодического решения:* периодическое решение устойчиво (соответствует устойчивому предельному циклу, физический смысл которого – автоколебания), если двигаясь по обратной характеристике нелинейного элемента в сторону увеличения  $A$ , изображающая точка переходит из незаштрихованной области в заштрихованную.

Из рис. 4.11 видно, что в системе возникают симметричные автоколебания, причем параметр  $A$  определяется с помощью координат точки 2 по кривой  $-1/K_эн(A)$ , а параметр  $\omega$  – по кривой  $W_л(j\omega)$ .

*Пример.*

Пусть нелинейная система описывается структурной схемой (рис. 4.6). Построим АФЧХ линейного элемента по передаточной функции

$$W_{\pi}(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+0,1s)},$$

проведя следующие рассуждения:

$$W_{\pi}(j\omega) = \frac{1}{-0,1j\omega^3 - 1,1j\omega^2 + j\omega},$$

$$X(\omega) = \frac{-1,1}{(-1,1\omega)^2 + (1-0,1\omega^2)^2}, \quad Y(\omega) = \frac{-(1-0,1\omega^2)}{\omega(-1,1\omega)^2 + \omega(1-0,1\omega^2)^2}.$$

Результаты анализа вышеприведенных выражений сведены в табл. 4.1.

Табл. 4.1

$\omega$	X	Y
0	-1,1	$-\infty$
—	0	—
$\sqrt{10}$	-0,91	0
$\infty$	0	0

АФЧХ линейного элемента, построенная по данным табл. 4.1, а также годограф нелинейного элемента представлены на рис. 4.12.

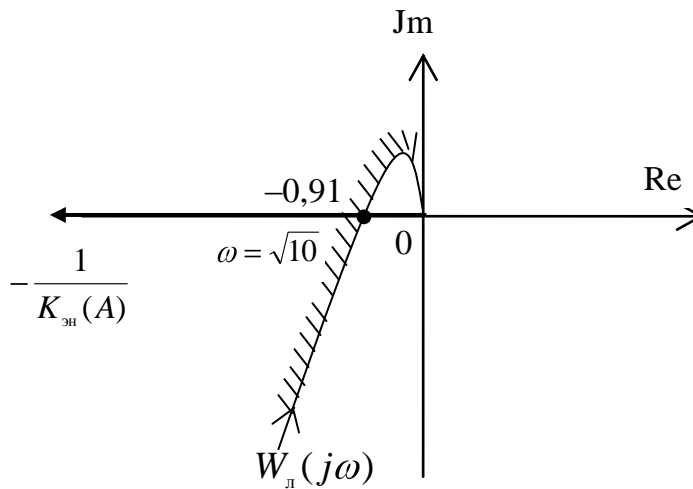


Рис. 4.12

Из рис. 4.12 видно, что в системе возможно возникновение симметричных автоколебаний, т.е. устойчивого периодического процесса типа

$$y = A \sin \omega t.$$

Причем частота автоколебаний определяется по годографу линейного элемента, так  $\omega = \sqrt{10}$  (рад/с). Чтобы определить параметр  $A$  автоколебаний проведем следующие рассуждения:

$$K_{\text{эп}}(A) = q(A) = \frac{4B}{\pi A} = \frac{8}{\pi A},$$

$$-\frac{1}{K_{\text{эп}}(A)} = -\frac{\pi A}{8} = -0,91,$$

$$A = \frac{0,91 \cdot 8}{\pi} = 2,32.$$

Итак, в системе возникают симметричные автоколебания вида

$$y = 2,32 \sin 3,16t.$$

#### 4.3.3. Метод баланса амплитуд и фаз

Это метод графического решения уравнения (4.20) на плоскости ЛЧХ. Здесь (4.20) представляют в форме

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{q(A) + jb(A)},$$

после чего проводят следующие рассуждения:

$$\begin{cases} |W_{\text{л}}(j\omega)| = \left| -\frac{1}{q(A) + jb(A)} \right|, \\ \varphi_{\text{л}}(j\omega) = \arg\left( -\frac{1}{q(A) + jb(A)} \right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} |W_{\text{л}}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{q^2(A) + b^2(A)}}, \\ \varphi_{\text{л}}(j\omega) = -\pi - \arctg \frac{b(A)}{q(A)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |L_{\text{л}}(j\omega)| = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{q^2(A) + b^2(A)}} = -20 \lg \sqrt{q^2(A) + b^2(A)}, \\ \varphi_{\text{л}}(j\omega) = -\pi - \arctg \frac{b(A)}{q(A)}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Для однозначных нелинейностей (4.21) примут вид

$$\begin{cases} |L_{\text{л}}(j\omega)| = -20 \lg(q(A)), \\ \varphi_{\text{л}}(j\omega) = -\pi. \end{cases} \quad (4.22)$$

Графическое решение показано на рис. 4.13.

Из рис. 4.13 видно, что возможно возникновение в системе симметричных автоколебаний с параметрами  $\omega_a, A_a$ .

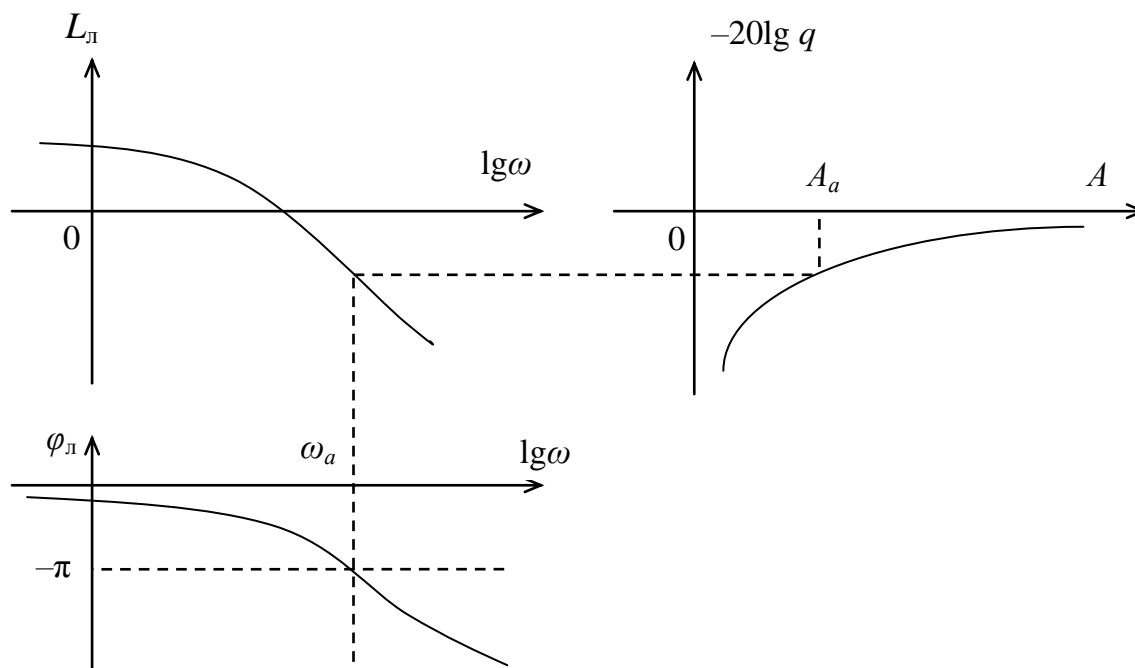


Рис. 4.13

#### 4.3.4. Условие отсутствия симметричных автоколебаний

Условием отсутствия симметричных автоколебаний в нелинейной системе следует считать принадлежность годографа  $-1/K_{\text{эн}}(A)$  при  $0 < A < \infty$  заштрихованной области. При этом во всех точках границы области должна быть применима гипотеза фильтра.

Так как выполнение гипотезы фильтра при всех частотах обеспечивается только при наличии в модели линейной части системы по крайней мере одного интегрирующего звена, то только для астатических систем можно говорить об отсутствии моногармонических симметричных автоколебаний.

Это правило отсутствия автоколебаний – аналог критерия Найквиста, в котором критическая точка  $(-1; 0)$  трансформировалась в критическую кривую  $-1/K_{\text{эн}}(A)$ .

#### 4.4. Анализ несимметричных автоколебаний

Несимметричные автоколебания – незатухающие колебания управляемой величины с ненулевой средней составляющей (рис. 4.14).

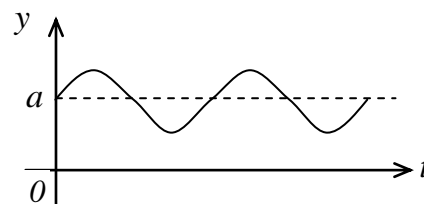
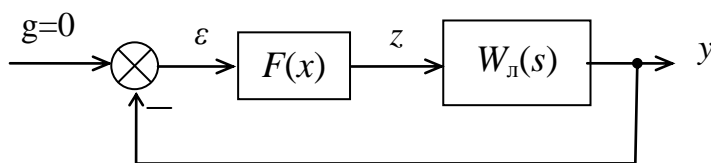


Рис. 4.14



*Причины возникновения несимметричных автоколебаний в системе:*

- 1) симметричная характеристика нелинейного элемента при наличии постоянного или медленно меняющегося входного воздействия (рис. 4.15);
- 2) несимметричная характеристика нелинейного элемента, как при наличии, так и при отсутствии входного воздействия (рис. 4.16).

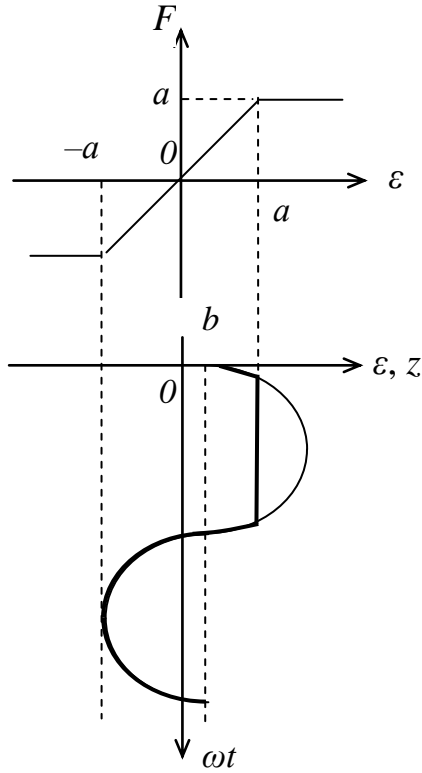


Рис. 4.15

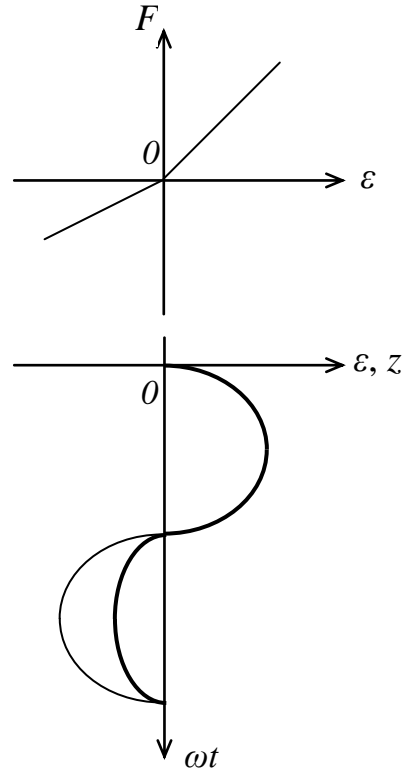


Рис. 4.16

Из рис. 4.15 и рис. 4.16 видно, что у выходного сигнала нелинейного элемента наблюдается асимметрия по амплитуде и/или асимметрия по времени, что приводит к появлению постоянной составляющей при разложении этого сигнала в ряд Фурье.

Если  $x = x_0 + x_m \sin \omega t$  и выполняется гипотеза фильтра, то можно ограничиться рассмотрением лишь первой гармоники разложения сигнала  $z$  в ряд Фурье

$$z \approx z_1 = z_0 + z_q \sin \omega t + z_b \cos \omega t,$$

где  $z_q$  и  $z_b$  — коэффициенты первой гармоники, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_0 + \varepsilon_m \sin \omega t) d\omega t, \\ z_q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_0 + \varepsilon_m \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t, \\ z_b &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_0 + \varepsilon_m \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t. \end{aligned}$$

Для нелинейного элемента вводят два коэффициента передачи:

- 1)  $K_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m) = \frac{z_0}{\varepsilon_0}$  – для постоянной составляющей;
- 2)  $W_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m) = \frac{z_q + jz_b}{\varepsilon_m}$  – для гармонической составляющей.

Это соответствует расщеплению нелинейного элемента на два звена, через одно из них проходит постоянная составляющая сигнала, а через другое – переменная составляющая сигнала (рис. 4.17).

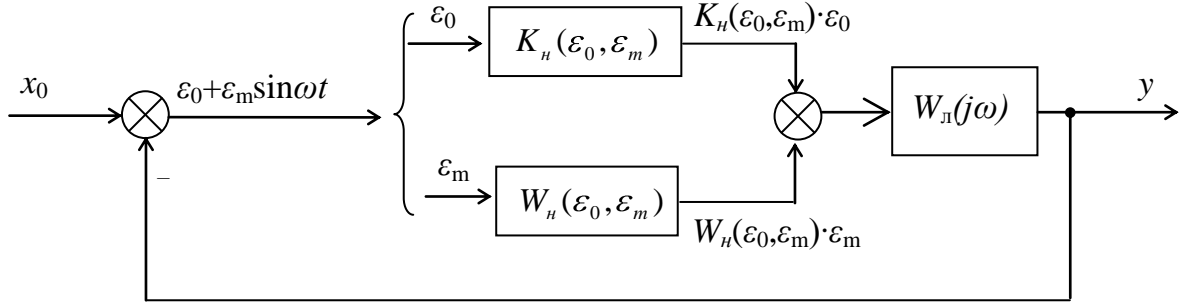


Рис. 4.17

По рис. 4.17 запишем уравнения замыкания

$$\begin{cases} x_0 - K_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m) \varepsilon_0 W_l(0) = \varepsilon_0, \\ 0 - W_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m) \varepsilon_m W_l(j\omega) = \varepsilon_m. \end{cases} \quad (4.23)$$

Для графического решения (4.23) удобно записать их в виде

$$\begin{cases} K_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m) = \frac{x_0 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 W_l(0)}, \\ W_l(j\omega) = -1/W_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m). \end{cases} \quad (4.24)$$

Согласно первому уравнению системы (4.24) на одной плоскости строятся серия графиков функции  $K_n(\varepsilon_0, \varepsilon_m)$  при нескольких фиксированных значениях переменной  $\varepsilon_m$  и прямая, соответствующая правой части этого уравнения (рис. 4.18).

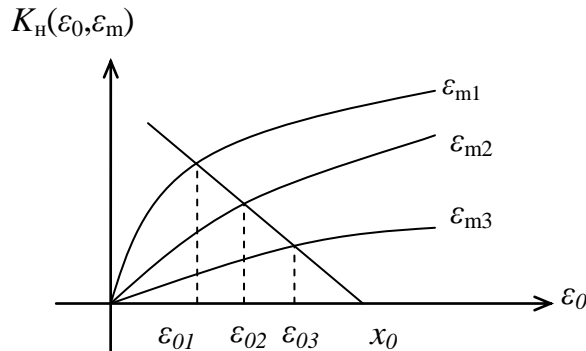


Рис. 4.18

Точки пересечения этих характеристик дают зависимость  $\varepsilon_{0i} = f(\varepsilon_{mi})$ .

В соответствии со вторым уравнением системы (4.24) на одной плоскости изобразим семейство графиков  $-\frac{1}{W_H(\varepsilon_0, \varepsilon_m)}$ , полученных при  $\varepsilon_{0i}$  и годограф линейного элемента  $W_\pi(j\omega)$  (рис. 4.19).

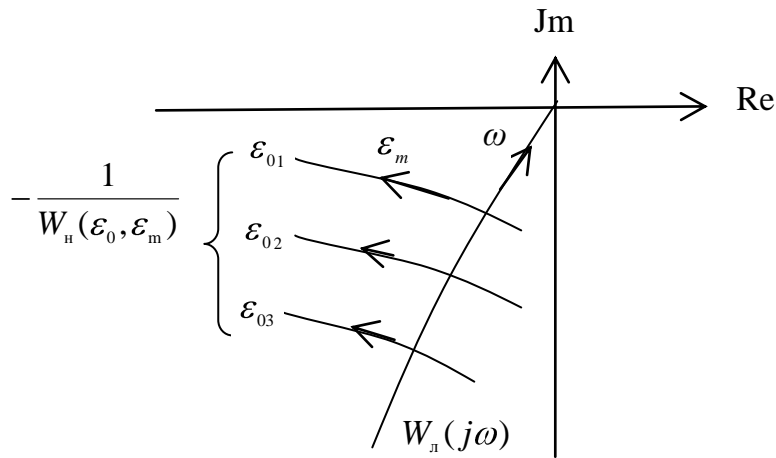


Рис. 4.19

Точки пересечения годографов (рис. 4.19) дают зависимость  $\varepsilon_{mi} = f(\varepsilon_{0i})$ .

Совместное изображение полученных зависимостей представлено на рис. 4.20.

Если графики пересекаются, то в системе возможно возникновение незатухающих колебаний управляемой величины с постоянной составляющей  $\varepsilon_0^*$  и гармонической составляющей  $\varepsilon_m^*$ .

Далее проводится анализ устойчивости найденного периодического решения (как для симметричных автоколебаний), если решение устойчиво, то в системе имеют место несимметричные автоколебания.

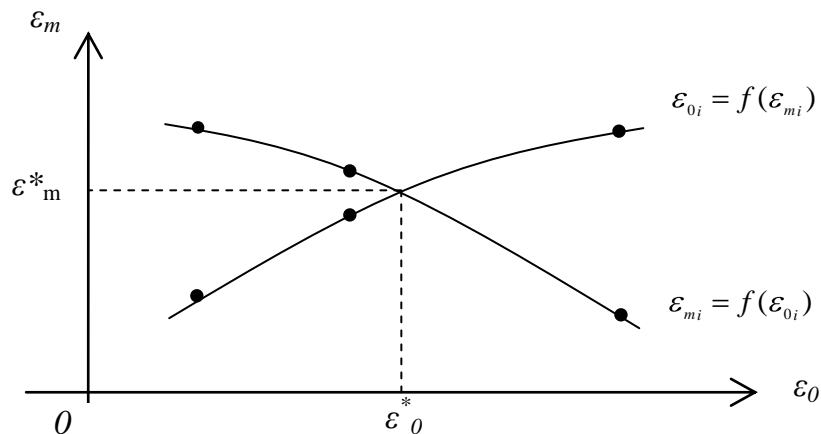


Рис. 4.20

#### 4.5. Применение метода гармонической линеаризации при наличии нескольких нелинейностей

Структурная схема системы с двумя нелинейными звеньями, разделенными линейными частями, представлена на рис. 4.21. Здесь обе линейные части обладают хорошими фильтрующими свойствами.

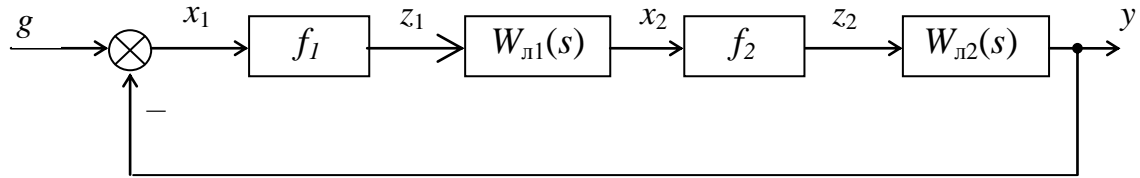


Рис. 4.21

Структурная схема гармонически линеаризованной системы представлена на рис. 4.22.

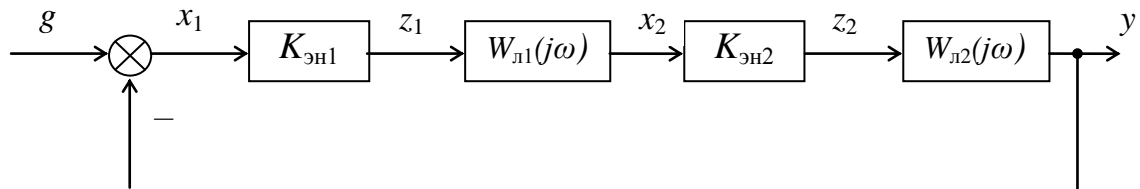


Рис. 4.22

В замкнутой системе имеют место автоколебания, если АФЧХ гармонически линеаризованной системы проходит через точку  $(-1; 0)$ , т.е.

$$W_p(j\omega, A) = K_{\text{эн}}(x_{1\text{м}}) \cdot W_{\text{л1}}(j\omega) \cdot K_{\text{эн}}(x_{2\text{м}}) \cdot W_{\text{л2}}(j\omega) = -1. \quad (4.25)$$

Для графического решения (4.25) удобно записать выражение в виде

$$W_{\text{л2}}(j\omega) = -\frac{1}{K_{\text{эн}}(x_{1\text{м}}) \cdot W_{\text{л1}}(j\omega) \cdot K_{\text{эн}}(x_{2\text{м}})}$$

или

$$W_{\text{л2}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н}}(x_{1\text{м}}, \omega)}, \quad (4.26)$$

где  $W_{\text{н}}(x_{1\text{м}}, \omega)$  – единый комплексный инверсный коэффициент усиления.

Согласно (4.26) на комплексной плоскости строится годограф  $W_{\text{л2}}(j\omega)$  и семейство годографов  $-1/W_{\text{н}}(x_{1\text{м}}, \omega)$  (рис. 4.23).

Автоколебаниям соответствует та точка пересечения годографов, в которой  $W_{\text{л2}}(j\omega)$  и  $-1/W_{\text{н}}(x_{1\text{м}}, \omega)$  имеют одинаковое значение частоты.

Если  $W_{\text{л1}}(j\omega)=1$  или  $W_{\text{л2}}(j\omega)=1$ , то следует сначала привести два нелинейных звена к одному эквивалентному, затем провести гармоническую линеаризацию, а дальнейшие рассуждения сводятся к вышесказанным.

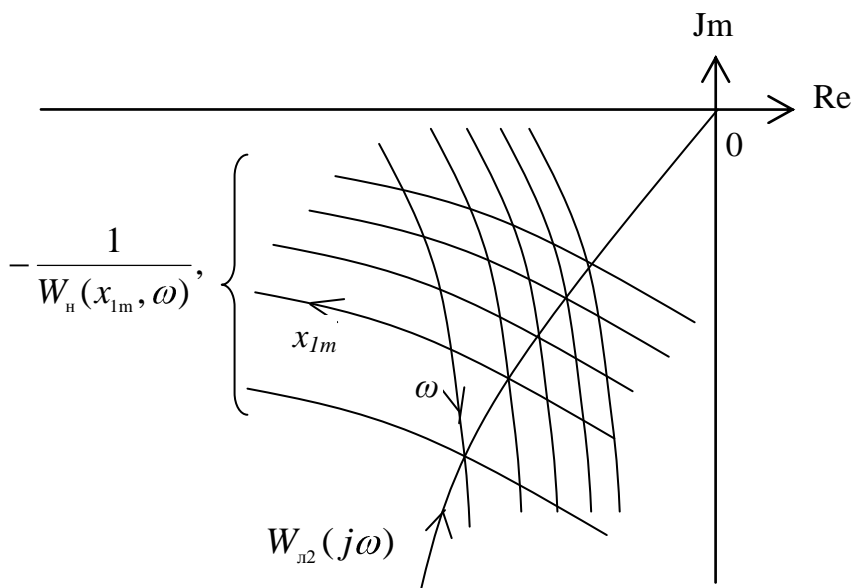


Рис. 4.23

## 5. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 5.1. Особенности устойчивости нелинейных систем

Понятие устойчивости нелинейных систем сложнее, чем для линейных.

Так, в линейных системах имеется единственное состояние равновесия, в нелинейных точек равновесного состояния может быть несколько.

В нелинейных системах, как и в линейных, возможно возникновение незатухающих колебаний управляемой величины. В линейных системах это признак неработоспособности, в нелинейных системах такие колебания могут быть устойчивыми (автоколебания).

Устойчивость нелинейных систем зависит не только от структуры и параметров системы, но и от величины начального отклонения системы от положения равновесия. Поэтому различают системы «устойчивые в малом» (устойчивые при малых отклонениях от положения равновесия); системы «устойчивые в большом» (устойчивые при больших отклонениях от положения равновесия) и системы «устойчивые в целом».

Для нелинейных систем справедливо понятие не только асимптотической устойчивости (устойчивости в точке), но и устойчивости в некоторой заданной области. Наличие такой области обусловлено зоной нечувствительности нелинейного элемента.

Асимптотическая устойчивость нелинейной системы в целом для нелинейностей, принадлежащих к определённому классу, называется *абсолютной устойчивостью положения равновесия* системы. К данному классу относят те нелинейности, статические характеристики которых имеют любые очертания, но не выходящие за пределы заданного угла  $\arctg k$  (рис. 5.1).

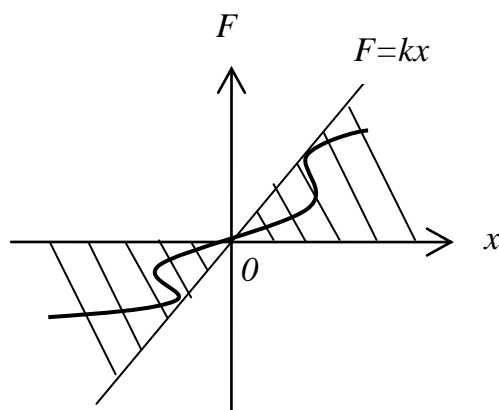


Рис. 5.1

Этот класс нелинейностей охватывает характеристики подавляющего большинства исполнительных элементов САУ.

## 5.2. Прямой метод Ляпунова

А.М. Ляпуновым предложен метод, позволяющий получить достаточные условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы в начале координат, получивший название прямого метода Ляпунова.

Пусть движение автономной нелинейной системы описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n} \quad (5.1)$$

А.М. Ляпунов ввел в рассмотрение функцию  $V(x_1, \dots, x_n)$ , которая обладает следующими свойствами:

- 1) в начале координат  $V = 0$ ;
- 2)  $V$  непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области, содержащей начало координат;
- 3)  $V$  – знакоопределённая функция, т.е. всюду внутри этой области, кроме начала координат, она принимает значение одного и того же знака.

Знакопостоянная функция, в отличие от знакоопределённой, принимает нулевые значения не только в начале координат, но и еще в нескольких точках области, сохраняя в остальных точках постоянство знака.

*Пример.*

для  $n=2$ ,  $V = x_1^2 + x_2^2$  – знакоопределённая положительная функция;

для  $n=3$ ,  $V = x_1^2 + x_2^2$  – знакопостоянная положительная функция.

*Ляпуновым доказана справедливость следующего утверждения:*

Если дифференциальные уравнения (1) таковы, что можно найти знакоопределённую функцию  $V$ , производная которой  $dV/dt$  в силу этих уравнений была бы

знакопостоянной функцией знака противоположного  $V$ , то положение равновесия системы в начале координат устойчиво.

Если же  $dV/dt$  – знакоопределённая функция знака противоположного  $V$ , то положение равновесия системы в начале координат асимптотически устойчиво.

Если знакоопределенная функция  $dV/dt$  в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком функции  $V$ , то система неустойчива.

*Доказательство справедливости теоремы Ляпунова*

Для простоты возьмем систему 3-го порядка, описываемую уравнениями вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = \Phi_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (5.2)$$

Возьмем знакоопределенную (положительную) функцию Ляпунова в виде

$$V(x_1, x_2, x_3) = a^2 x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2,$$

где  $a, b, c$  – произвольно заданные вещественные числа.

Будем придавать величине  $V(x_1, x_2, x_3)$  постоянные значения

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 &= C_1, \\ a^2 x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 &= C_2, \\ a^2 x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 &= C_3, \end{aligned} \quad (5.3)$$

причем  $0 < C_1 < C_2 < C_3$ .

Первое выражение в (3) соответствует одной точке  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  (началу координат фазового пространства), а остальные выражения (3) – поверхностям эллипсоидов в фазовом пространстве, причем каждый последующий эллипсоид содержит внутри себя целиком предыдущий (рис. 5.2).

Найдем  $dV/dt$ , используя (5.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{dV}{dx_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = 2a^2 x_1 \Phi_1(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ 2b^2 x_2 \Phi_2(x_1, x_2, x_3) + 2c^2 x_3 \Phi_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (5.4)$$

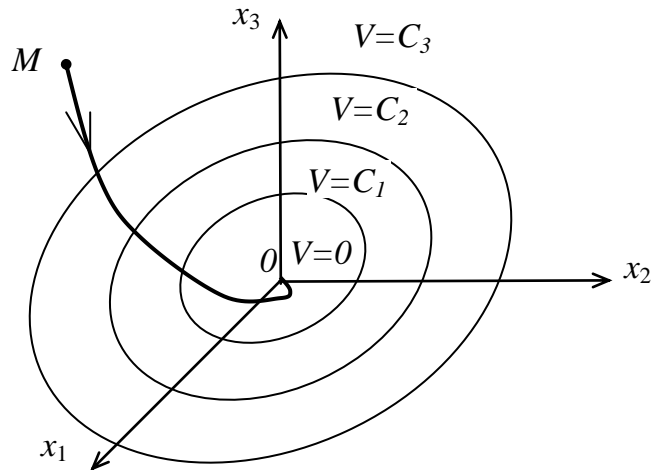


Рис. 5.2

Если согласно (5.4)  $\dot{V} < 0$  и окажется знакоопределенной во всех точках исследуемого фазового пространства кроме одного только начала координат, где  $\dot{V} = 0$ , то при любых начальных условиях изображающая точка  $M$  будет двигаться в сторону уменьшения значения  $V$ , т.е. будет пересекать эллипсоиды извне внутрь. Это означает затухание переходного процесса с течением времени, т.е. означает устойчивость системы.

Аналогичные рассуждения можно провести для системы  $n$ -го порядка.

Если же  $\dot{V}$  будет знакопостоянной (отрицательной) функцией, то траектория изображающей точки  $M$  не везде будет пересекать поверхности  $V=C$ , а может касаться их в тех точках, где  $\dot{V} = 0$  (помимо начала координат). Но так как во всех остальных точках фазового пространства  $\dot{V}$  имеет один и тот же знак  $\dot{V} < 0$ , то точка  $M$  может идти только извне внутрь поверхности  $V=C$ . Остается только проверить, не «застрянет» ли точка  $M$  там, где  $\dot{V} = 0$ .

*Замечания к теореме Ляпунова:*

1) большие трудности вызывает подбор функции  $V$ , тем более что Ляпуновым не даны рекомендации по формированию функции  $V$ , здесь приходится полагаться на интуицию, что ограничивает применение этого метода;

2) для одной и той же системы можно подобрать несколько разных  $V$  функций. Различные варианты  $V$  функций дадут различные условия устойчивости одной и той же системы. Причём одни из условий будут шире, другие уже. Поэтому данная теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми.

*Пример.*

Дана структурная схема системы (рис. 5.3).

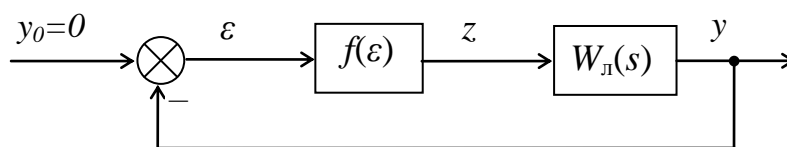


Рис. 5.3



Необходимо исследовать устойчивость равновесия системы, если  $W_{\pi}(s) = \frac{k}{1+sT}$ .

*Решение.* Запишем уравнение линейного элемента

$$T\ddot{y} + y = kz(\varepsilon), \quad (5.5)$$

и уравнение элемента сравнения

$$\varepsilon = -y. \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) получим уравнение замкнутой системы вида

$$-T\dot{\varepsilon} - \varepsilon = kz(\varepsilon), \quad (5.7)$$

откуда

$$\dot{\varepsilon} = \frac{-kz(\varepsilon) - \varepsilon}{T} \quad (5.8)$$

Возьмем знакоопределенную (положительную) функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \int_0^{\varepsilon} z(\xi) d\xi, \quad (5.9)$$

Тогда с учетом выражений (5.8) и (5.9) можно определить знак функции  $dV/dt$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = -(\varepsilon + z(\varepsilon)) \cdot \left( \frac{kz(\varepsilon) + \varepsilon}{T} \right) = -\frac{1}{T} (k\varepsilon \cdot z(\varepsilon) + \varepsilon^2 + \\ &+ k \cdot z^2(\varepsilon) + \varepsilon \cdot z(\varepsilon)) = -\frac{1}{T} (\varepsilon^2 + kz^2(\varepsilon) + \varepsilon \cdot z(\varepsilon)(k+1)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из (5.10) следует, что  $dV/dt$  будет знакоопределенной отрицательной функцией, если  $k > -1$  и  $\varepsilon \cdot z(\varepsilon) > 0$ .

Таким образом, достаточным условием асимптотической устойчивости системы в целом системы первого порядка является положительность коэффициента усиления линейного элемента. При этом статическая характеристика нелинейного элемента должна быть однозначной (может иметь разрывы) и может иметь произвольный вид, но не должна выходить за пределы первой и третьей четверти (рис. 5.4).

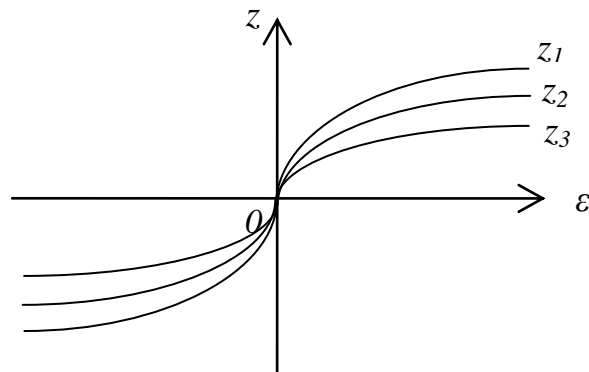


Рис. 5.4

### 5.3. Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия

Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия системы в начале координат может быть выполнено при помощи прямого метода Ляпунова. Однако более просто эта задача решается с помощью связанного с ним частотного метода, предложенного румынским учёным В.М. Поповым.

Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из линейной части с передаточной функцией  $W_{\text{л}}(s)$  и одного нелинейного элемента с однозначной характеристикой  $z = f(\varepsilon)$  (рис. 5.3).

$$\text{Пусть } W_{\text{л}}(s) = \frac{D(s)}{F(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n},$$

где многочлен  $F(s)$  имеет все корни в левой полуплоскости или, кроме них, не более двух корней в начале координат.

Пусть нелинейность  $z = f(\varepsilon)$  имеет любые очертания, не выходящие за пределы заданного угла  $\arctg k$  (рис. 5.5).

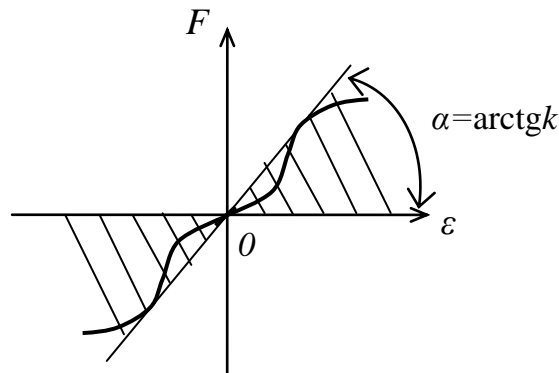


Рис. 5.5

**Формулировка критерия:** если замкнутая система состоит из устойчивого линейного элемента и одного безынерционного нелинейного элемента, статическая характеристика которого расположена в секторе  $0 \leq \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k$ , то для абсолютной устойчивости положения равновесия системы в начале координат достаточно выполнения условия

$$\operatorname{Re} \left[ 1 + j\omega W_{\text{л}}(j\omega) \right] + \frac{1}{k} = \delta > 0.$$

Дадим удобную для практического использования геометрическую интерпретацию критерия.

Для этого введем в рассмотрение преобразованную (модифицированную) АФЧХ линейной части системы, такую, что если

$$W_{\text{л}}(j\omega) = P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega),$$

то

$$W_{\text{м}}(j\omega) = P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega).$$

Так как  $W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $W_{\text{лп}}(j\omega)$  имеют одинаковые вещественные части, то соответствующие им годографы пересекают вещественную ось в одних и тех же точках и еще одна общая точка годографов получается при  $\omega=1$ .

Годограф  $W_{\text{лп}}(j\omega)$  имеет вид, похожий на вид годографа  $W_{\text{л}}(j\omega)$  (рис. 5.6), если при отсутствии в  $W_{\text{л}}(s)$  нулевых нулей и полюсов справедливо неравенство

$$n - m > 1.$$

Если же  $n - m = 1$ , то конец годографа  $W_{\text{лп}}(j\omega)$  будет на мнимой оси ниже начала координат (рис. 5.7).

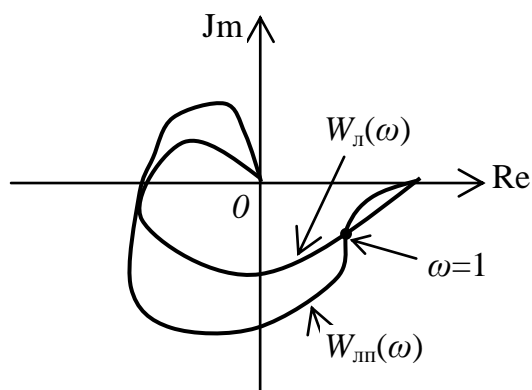


Рис. 5.6

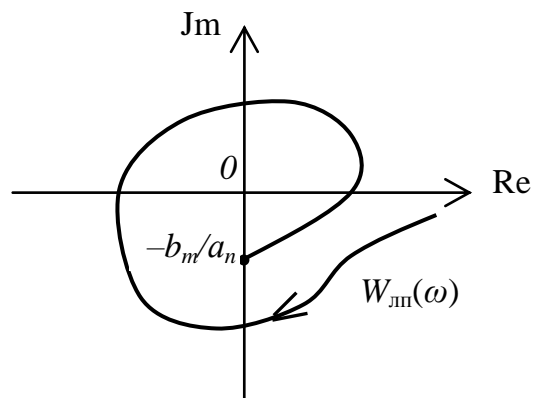


Рис. 5.7

Тогда *геометрическая интерпретация критерия* следующая: если на плоскости преобразованной амплитудно-фазовой частотной характеристики линейной части системы через точку  $(-1/k; 0)$  можно провести прямую (прямую Попова) с любым наклоном так, чтобы годограф преобразованной АФЧХ оказался справа от этой прямой, то положение равновесия системы в начале координат абсолютно устойчиво (рис. 5.8). В противном случае система неустойчива (рис. 5.9).

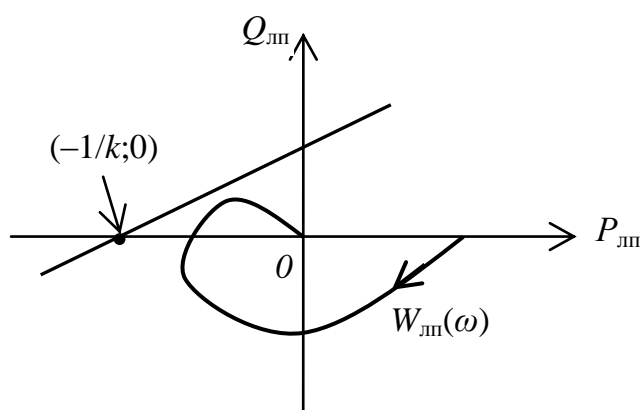


Рис. 5.8

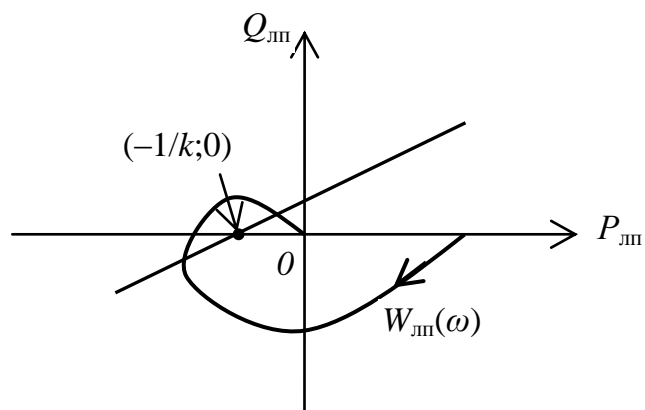


Рис. 5.9

Если годограф  $W_{\text{лп}}(j\omega)$  выпуклый, то критерий Попова совпадает с критерием Найквиста при замене нелинейного элемента уравнением  $z = kx$ .

Годограф  $W_{\text{лп}}(j\omega)$  выпуклый для систем, у которых линейная часть состоит из любого числа последовательно соединенных инерционных и колебательных звеньев, причем  $\xi \geq \sqrt{2}/2$ .

В связи с машинным проектированием нелинейных систем возникла и другая геометрическая интерпретация критерия Попова

$$\alpha_{\max} - \alpha_{\min} \leq \pi,$$

где значения  $\alpha_{\max}$  и  $\alpha_{\min}$  определяются так, как показано на рис. 5.10.

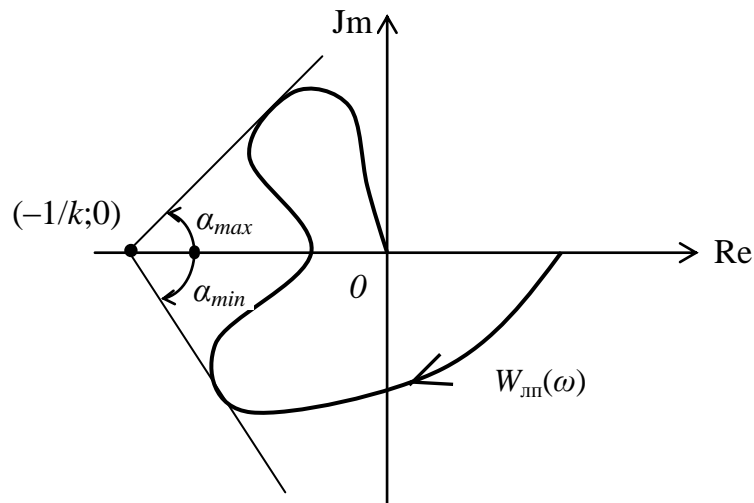


Рис. 5.10

*Пример.*

Исследовать устойчивость положения равновесия системы (рис. 5.11) в начале координат по критерию Попова.

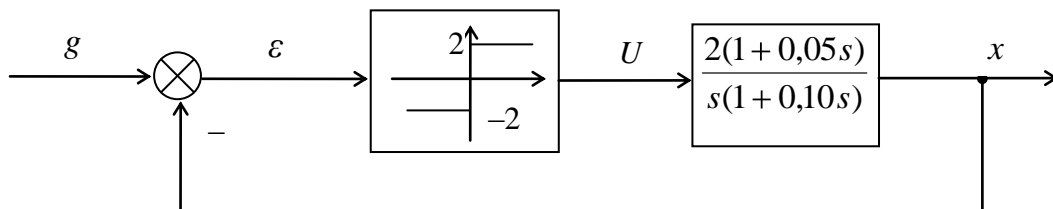


Рис. 5.11

По  $W_{\text{лп}}(s) = \frac{2(1 + 0,05s)}{s(1 + 0,10s)}$  получим следующие расчетные выражения для построения преобразованной АФЧХ:

$$P_{\text{лп}}(\omega) = \frac{-2 \cdot 0,05}{(-0,1\omega)^2 + 1},$$

$$Q_{\text{лп}}(\omega) = \frac{-2 \cdot (1 + 0,005\omega^2)}{(-0,1)^2 \omega^2 + 1}.$$

По данным выражениям получим координаты характерных точек годографа (табл. 5.1).

Табл. 5.1

$\omega$	$P_{\text{лп}}$	$Q_{\text{лп}}$
0	-0,1	-2,0
—	0	—
—	—	0
$\infty$	0	-1,0

Годограф линейной преобразованной части системы, построенный по данным табл. 5.1, представлен на рис. 5.12.

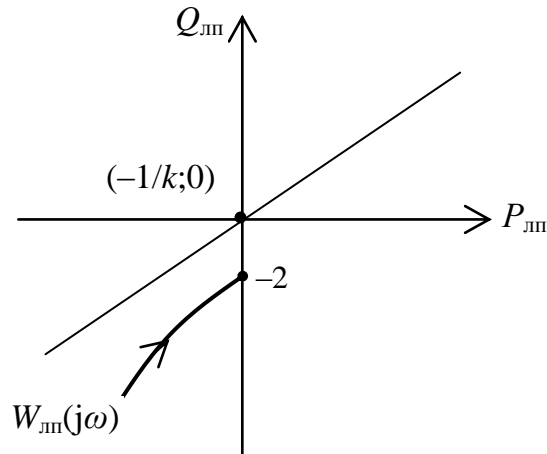


Рис. 5.12

Здесь же через точку (0;0) проведена прямая Попова (с произвольным наклоном), так как судя по статической характеристике нелинейного элемента (рис. 5.11)  $k=\infty$ , следовательно  $-1/k=0$ .

Из рис. 5.12 видно, что положение равновесия системы в начале координат абсолютно устойчиво.

Если линейный элемент неустойчив, то напрямую нельзя применить критерий Попова. Однако можно сделать линейный элемент устойчивым путём охвата его жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи  $r$  так, как показано на рис. 5.13.

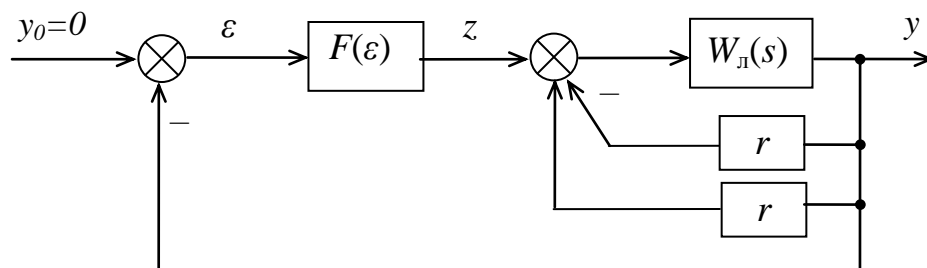


Рис. 5.13

Далее данная структурная схема может быть приведена к виду, показанному на рис. 5.14.

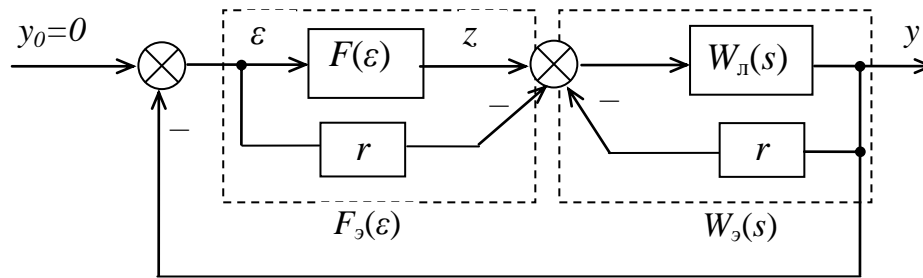


Рис. 5.14

Значение  $r$  выбирается из условия обеспечения устойчивости блока  $W_з(s)$

$$W_з(s) = \frac{W_л(s)}{1 + rW_л(s)}.$$

При этом  $F_з(\varepsilon) = F(\varepsilon) - r\varepsilon$ , откуда следует, что если в соответствии с требованием критерия Попова эквивалентная нелинейность должна удовлетворять условию

$$0 \leq \frac{F_з(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k,$$

то исходная нелинейность должна удовлетворять условию

$$r \leq \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k + r.$$

*Пример.*

Исследовать устойчивость системы (рис. 5.15) по критерию Попова.

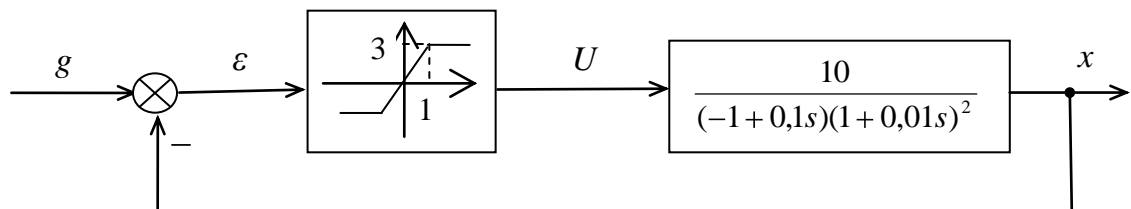


Рис. 5.15

Напрямую применять критерий Попова здесь нельзя, так как в передаточной функции линейного элемента есть один правый полюс. Обеспечим устойчивость линейного элемента путём охвата его жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи  $r$  (рис. 5.16).

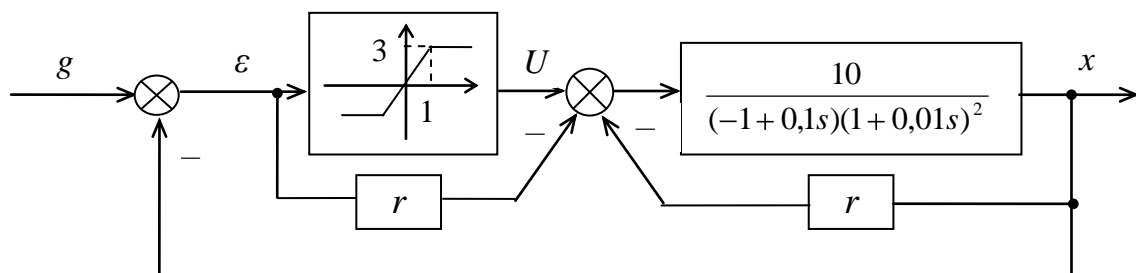


Рис. 5.16

Выберем величину  $r$  следующим образом:

$$W_s(s) = \frac{\frac{10}{(-1 + 0,1s)(1 + 0,01s)^2}}{1 + \frac{10r}{(-1 + 0,1s)(1 + 0,01s)^2}} = \frac{10}{(-1 + 0,1s)(1 + 0,01s)^2 + 10r},$$

откуда характеристическое уравнение имеет вид

$$(-1 + 0,1s)(1 + 0,01s)^2 + 10r = 0$$

или

$$10^{-5}s^3 + 0,0019s^2 + 0,08s + 10r - 1 = 0,$$

откуда согласно необходимому условию устойчивости  $r > 0,1$ , а согласно достаточному условию устойчивости Гурвица  $0,0019 \cdot 0,08 > 10^{-5} \cdot (10r - 1)$ , откуда  $r < 1,62$ .

Итак, величину  $r$  следует выбирать исходя из условия

$$0 < r < 1,62.$$

Пусть  $r = 0,05$ , тогда исходная нелинейность должна удовлетворять условию

$$0,05 \leq \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \infty,$$

что невозможно, поэтому использовать критерий Попова для решения данной задачи нельзя.

## 6. КАЧЕСТВО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 6.1. Анализ качества нелинейных систем

Качество нелинейных систем оценивается теми же показателями, что и в случае линейных систем. Так, качество нелинейной системы в переходном режиме оценивается такими показателями качества, как перерегулирование  $\sigma$  и время регулирования  $t_p$ . Качество нелинейной системы в установившемся режиме оценивают величиной установившейся (статической) ошибки системы. Причем характер зависимости статической ошибки системы от величины коэффициента передачи, порядка астатизма, наличия инвариантных связей такой же, как и для линейных систем.

Однако наличие нелинейностей вызывает *дополнительные ошибки*.

Так, если элемент сравнения имеет зону чувствительности, то при ошибках, меньших зоны нечувствительности, система разомкнута и не обрабатывает задающее воздействие. Это приводит к возникновению статической ошибки, равной по величине зоне нечувствительности элемента.

Если перед элементом с зоной нечувствительности поставить усилительный элемент с коэффициентом передачи  $k$ , то статическая ошибка уменьшается в  $k$  раз.

Кроме того, следует помнить, что *показатели качества нелинейной системы зависят от величины входного воздействия*.

*Последовательность анализа качества нелинейной системы:*

1. Линеаризация исходной нелинейной системы. Такое действие оправдано либо при незначительном влиянии имеющихся нелинейностей на свойства системы (малая зона нечувствительности, узкая ширина петли гистерезиса и прочее).

В данном случае при определении переходной характеристики системы ступенчатое входное воздействие должно быть ограничено по значению, чтобы элементы системы не входили в область насыщения.

2. Исследование влияния на свойства нелинейной системы неучтенных выше нелинейностей, осуществляемое путем имитационного моделирования нелинейной системы с помощью программных пакетов, таких как Vissim (Приложение В), MathLab.

## 6.2. Синтез нелинейных систем

Требуемое качество нелинейной системы может быть обеспечено посредством введения в систему как линейных, так и нелинейных корректирующих устройств.

### 6.2.1. Линейные корректирующие устройства

Рассмотрим систему с одной нечетно-симметричной однозначной нелинейностью  $f(x)$  (рис. 6.1).

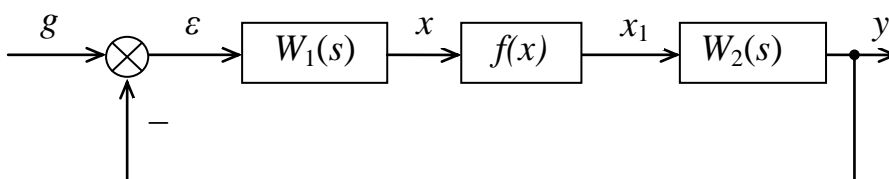


Рис. 6.1

Пусть линейное корректирующее устройство вводится в одну из линейных частей, т.е. в блок  $W_1(s)$  или  $W_2(s)$ , не охватывая нелинейного звена  $f(x)$ .

Проведем гармоническую линеаризацию системы, тогда характеристика нелинейного элемента примет вид

$$x_1 = q(A)x = kq_0(A)x, \quad (6.1)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $q_0(A)$  – нормированный коэффициент гармонической линеаризации.

Далее  $k$  будем относить к передаточной функции линейной части системы, тогда передаточная функция приведенной линейной части системы примет вид

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_{\text{л}}(s) = kW_1(s)W_2(s). \quad (6.2)$$

Тогда синтез линейного корректирующего устройства можно проводить следующим образом:

1. По (6.2) строится ЛАЧХ исходной приведенной линейной части системы.



2. В соответствии с требованиями к качеству формируется желаемая ЛАЧХ линейной части системы, определяется  $W_{\text{жс}}(s)$ .
3. Методами теории линейных систем определяется линейное корректирующее устройство.
4. По  $W_{\text{жс}}(s)$  строится ЛФЧХ скорректированной системы.
5. С использованием  $q_0(A)$  для заданной нелинейности строится «запретная» зона, соответствующая желаемому показателю колебательности  $M$ .

Внутри этой зоны не должна заходить ЛФЧХ скорректированной линейной части системы. Та кривая  $M=\text{const}$ , которой коснется полученная ЛФЧХ, определит значение показателя колебательности скорректированной системы. Если необходимо уменьшить  $M$ , то нужно несколько изменить параметры полученного выше корректирующего устройства, следя за тем, чтобы не произошло существенного искажения показателей качества системы, положенных в основу расчета.

Кратко изложим методику построения «запретной» зоны по показателю колебательности для заданной нелинейности. При этом ограничимся рассмотрением однозначных нелинейностей с ограниченными значениями коэффициента гармонической линеаризации, например

$$0 \leq q(A) \leq q_m \quad \text{или} \quad q_n \leq q(A) \leq q_m. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) не выполняется, например, для нелинейностей, статические характеристики которых изображены на рис. 6.2.

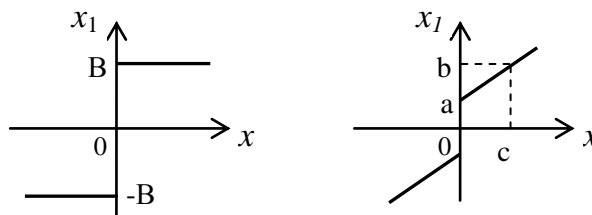


Рис. 6.2

Передаточная функция разомкнутой гармонически линеаризованной системы имеет вид

$$W(s, A) = q_0(A)W_{\text{пл}}(s),$$

тогда передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\Phi(s, A) = \frac{W(s, A)}{1 + W(s, A)} = \frac{q_0(A)W_{\text{пл}}(s)}{1 + q_0(A)W_{\text{пл}}(s)}. \quad (6.4)$$

Если частотную передаточную функцию  $W_{\text{пл}}(j\omega)$  представить в виде

$$W_{\text{пл}}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

то с учетом (6.4) получим следующее выражение для построения «запретной» зоны (рис. 6.3) по показателю колебательности для заданной нелинейности

$$M = |\Phi(j\omega, A)| = \frac{q_0(A)\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}}{\sqrt{(1 + q_0(A)U(\omega))^2 + (q_0(A)V(\omega))^2}}. \quad (6.5)$$

Взяв в (6.5) разные постоянные значения  $M$  получим серию кривых  $M=\text{const}$  (см. рис. 6.3).

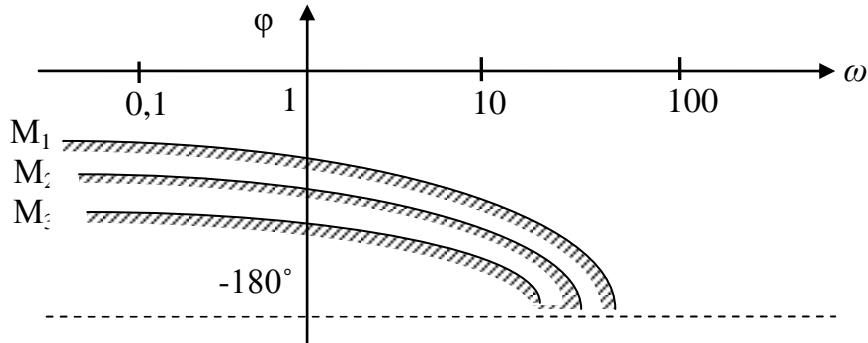


Рис. 6.3

### 6.2.2. Нелинейные корректирующие устройства

Задача нелинейной коррекции заключается, во-первых, в достижении желаемых свойств процесса управления. Здесь открывается возможность преодолевать известное из линейной теории противоречие между требованиями точности и устойчивости системы. Во-вторых, введением нелинейного корректирующего устройства можно ослабить вредное влияние имеющихся в системе нелинейностей (люфт, гистерезис, зона нечувствительности).

Нелинейная коррекция обладает более широкими возможностями, чем линейная, так как она, во-первых, дает большее разнообразие форм частотных характеристик и, во-вторых, она позволяет менять форму частотных характеристик в зависимости от величины амплитуды сигнала. Последнее свойство придает системе как бы свойство самонастройки по величине ошибки, возникающей в процессе управления.

Простейшим примером последовательного корректирующего устройства является нелинейное устройство с опережающими петлевыми характеристиками. Еще один пример представлен на рис. 6.4.

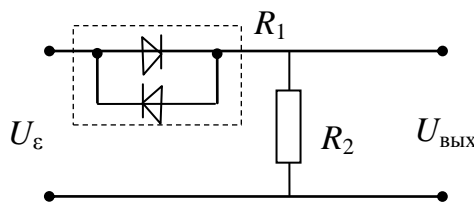


Рис. 6.4

При больших значениях  $U_e$  сопротивление  $R_1$  мало, поэтому коэффициент передачи цепи  $k$ , определяемый выражением

$$k = \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

близок к единице, а по мере уменьшения  $U_\varepsilon$  сопротивление  $R_1$  увеличивается, а  $k$  уменьшается (рис. 6.5).

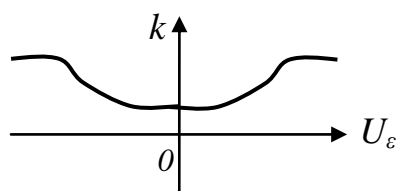


Рис. 6.5

### 6.2.3. Псевдолинейные корректирующие устройства

В этих устройствах отсутствует жесткая связь между амплитудной и фазовой характеристиками устройства.

Схема двухканального псевдолинейного корректирующего устройства представлена на рис. 6.6.

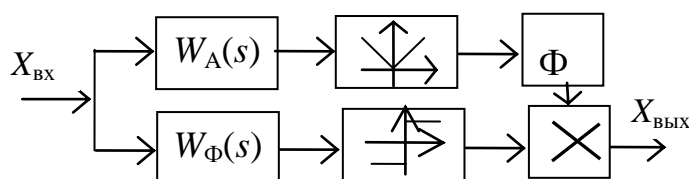


Рис. 6.6

Верхний амплитудный канал (см. рис. 6.6) состоит из линейного элемента с передаточной функцией  $W_A(s)$ , модульного элемента и фильтра. Модульный элемент дает на выходе величину, пропорциональную амплитуде входного колебания и исключает прохождение информации о фазе входного сигнала. Амплитудная характеристика линейного элемента определяет амплитудную характеристику всего устройства.

Верхний фазовый канал состоит из линейного элемента с передаточной функцией  $W_\Phi(s)$  и блока знака. Выходная величина этого блока, представляющего собой релейное устройство с характеристикой, близкой к идеальной, принимает два фиксированных значения  $\pm 1$  независимо от амплитуды входного сигнала, благодаря чему исключается прохождение через фазовый канал информации об амплитуде входного сигнала. Фазовая характеристика линейного элемента определяет фазовую характеристику всего устройства.

Выходная величина корректирующего устройства получается в результате перемножения выходных величин амплитудного и фазового каналов.

Благодаря грамотному выбору моделей линейных элементов амплитудного и фазового каналов можно обеспечить опережение сигнала по фазе при одновременном ослаблении высокочастотного сигнала.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2006. – 752 с.
2. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2006. – 832 с.
3. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления: нелинейные и оптимальные системы: учеб. пособие для вузов / И.В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2006. – 271 с.
4. Попов, Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: учеб. пособие / Е.П. Попов. – 2-е изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
5. Теория автоматического управления: учебник для вузов / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев др.; под ред В.Б. Яковлева. – 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2005. – 567 с.

## ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ИЗОКЛИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MathCad

Методика построения фазового портрета нелинейных систем 2-го порядка с использованием прикладного пакета MathCad ниже показана на примерах.

### Пример 1.

Необходимо исследовать систему, описываемую уравнением вида

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0, \quad (1)$$

методом фазовой плоскости.

*Решение.*

Для исследования системы методом фазовой плоскости перейдем от уравнения (1) к системе из двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -5x - 2y. \end{cases} \quad (2)$$

На первом этапе исследования системы определим характер фазовых траекторий системы в окрестности особых точек по типу корней характеристического уравнения системы.

Так, особые точки системы (точки, где  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ ) найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ -5x - 2y = 0, \end{cases}$$

откуда получим, что имеется единственная точка равновесного состояния (0;0), а для определения корней характеристического уравнения системы (2) составим параметрическую матрицу  $A$ . Для этого щелкнем по символу матрицы в панели «Матрица», определим в окне размерности число строк и число столбцов, а затем введём в помеченных позициях элементы матрицы (рис. П1).

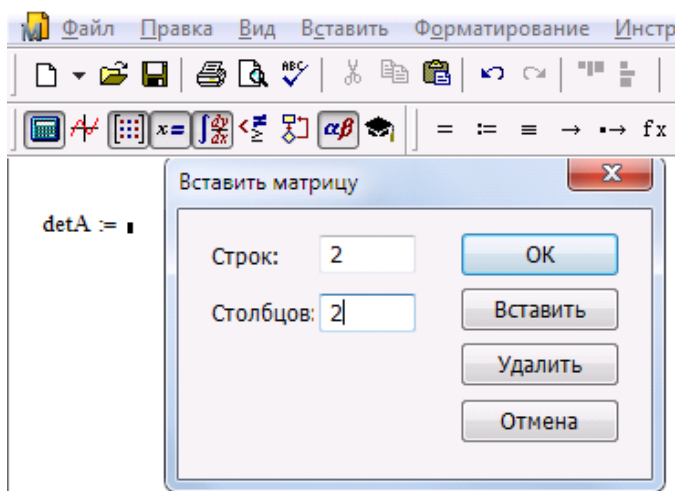


Рис. П1

Для определения номера первой компоненты вектора, равного единице (а не 0, как положено по умолчанию), воспользуемся функцией  $\text{ORIGIN}:=1$ .

Для определения корней характеристического уравнения системы (2) воспользуемся встроенной функцией *eigenvals* (рис. П2).

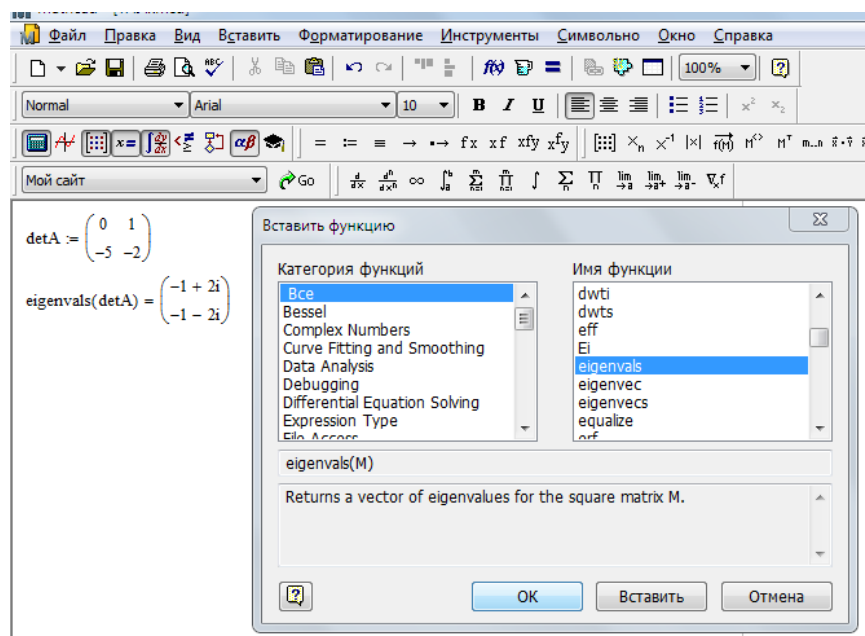


Рис. П2

Полученные таким образом корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью. Таким корням соответствует особая точка (0;0) типа «устойчивый фокус».

На втором этапе исследования системы изобразим на фазовой плоскости векторное поле изоклин. Для этого введем в рассмотрение вспомогательные функции  $F1(X,Y)$  и  $F2(X,Y)$ , соответствующие правым частям уравнений (2)

$$F1(X,Y) := Y;$$

$$F2(X,Y) := -5 \cdot X - 2Y.$$

Далее задавшись размером квадратной сетки  $[-a,b][a,b]$  (например,  $a=-1$ ,  $b=1$ ) (рис. П3); задав узлы, в которых должны проводиться вычисления

$$i := 1..10 \quad (n=10),$$

$$j := 1..10 \quad (m=10);$$

установив связь  $X$  и  $Y$  с узлами сетки, определяемую выражениями

$$X_i := -1 + i \cdot \frac{2}{10}; \quad Y_j := -1 + j \cdot \frac{2}{10}$$

а также определив матрицы ординат, по которым будет строиться график выражениями

$$MF1_{i,j} := F1 \left( X_i, Y_j \right); \quad MF2_{i,j} := F2 \left( X_i, Y_j \right)$$

(так, как показано на рис. ПЗ), вызовем график поверхности с панели инструментов (рис. П4).

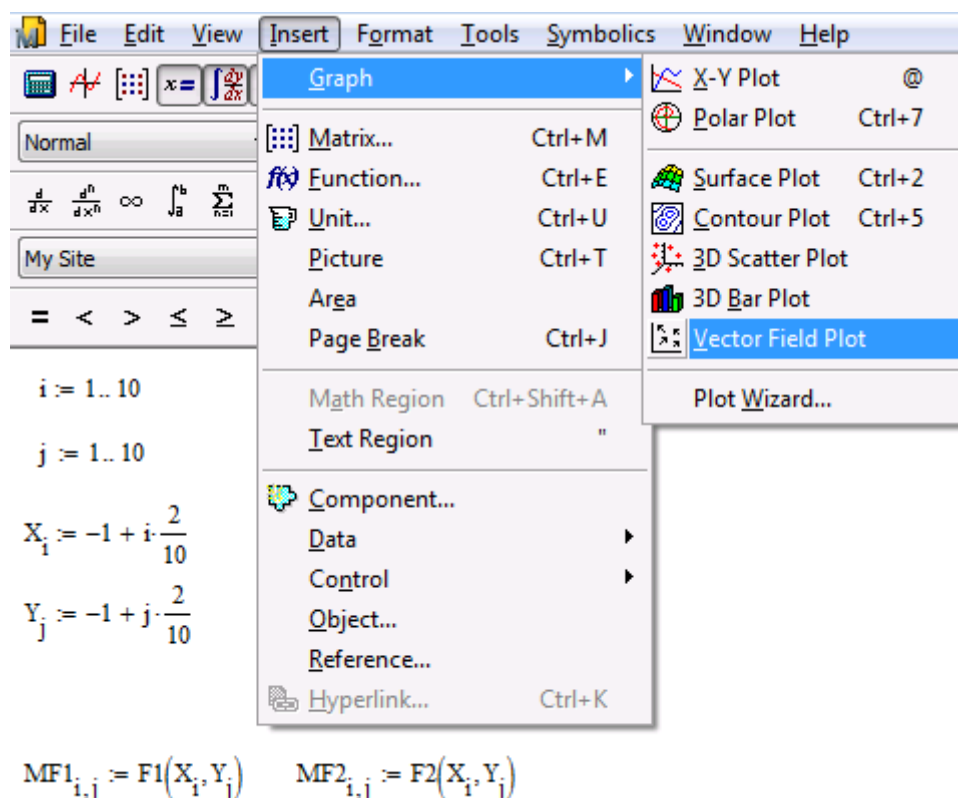


Рис. ПЗ

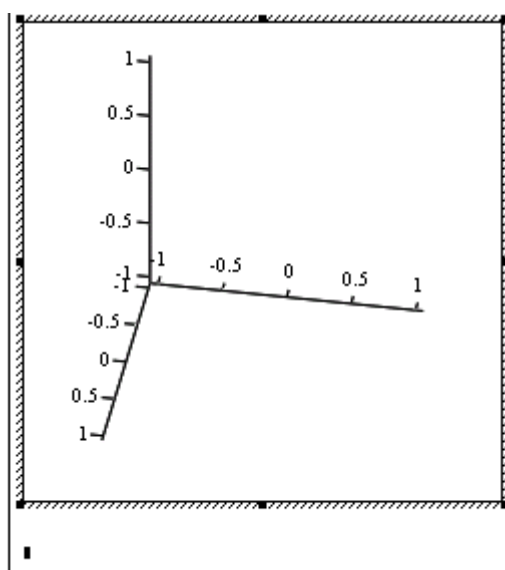


Рис. П4

Далее, после выхода из графика и щелчка курсором получим векторное поле изоклин (рис. П5), по которому, задаваясь различными начальными условиями можно представить фазовый портрет системы.

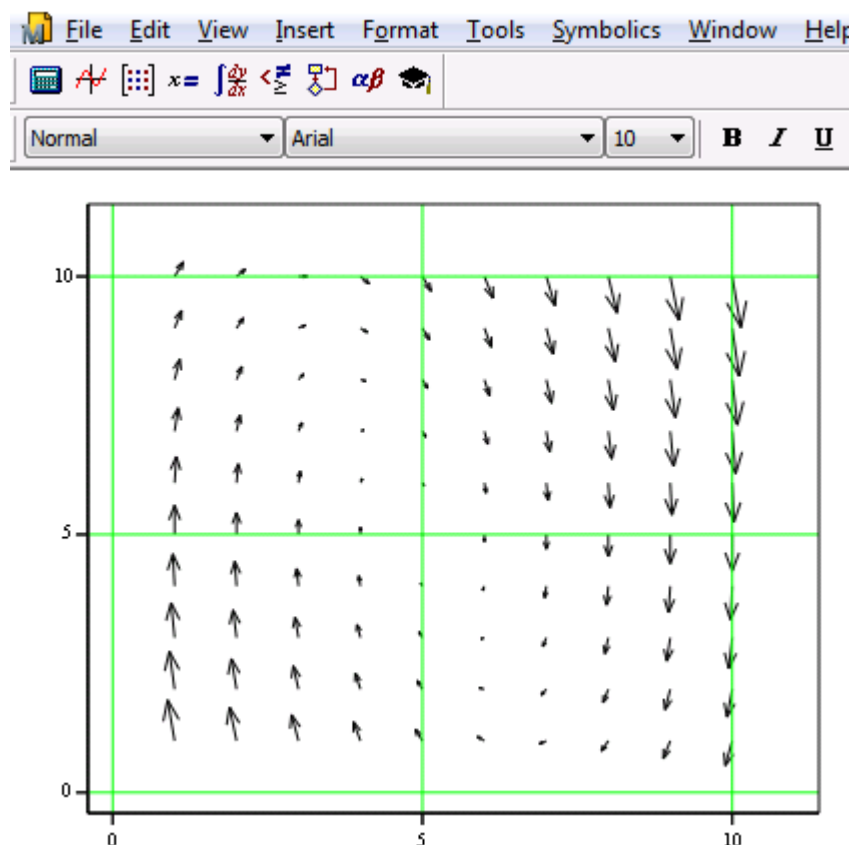


Рис. П5

Судя по характеру векторного поля изоклин  $(0;0)$  – особая точка типа «устойчивый фокус», что соответствует результатам первого этапа исследований.

Для построения фазового портрета системы необходимо решить задачу Коши с различными начальными условиями. Для решения задачи методом Рунге-Кутта нужно воспользуемся встроенной функцией *rkfixed*.

Для этого сначала определим правые части системы  $D(t,Y)$ , щелкнув на символе матрицы в панели «Матрица», определив в окне размерности число строк и число столбцов (рис. П6). Значения элементов матрицы выбираем в соответствии с системой уравнений (2), используя замену переменных  $y=Y_2$ ,  $x=Y_1$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_2 \\ -5 \cdot Y_1 - 2 Y_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим приближенное решение (2), выполнив методом Рунге-Кутта 4-го порядка 100 одинаковых шагов и обозначив приближенное решение  $Y_1$  (рис. П7)

$$Y_1 := \text{rkfixed}(Y_1, 0, 10, 100, D).$$

В первом столбце матрицы  $Y_1$  хранятся значения параметра  $t$  в узлах сетки, во втором столбце – соответствующие значения решения, в третьем – значения производной решения.



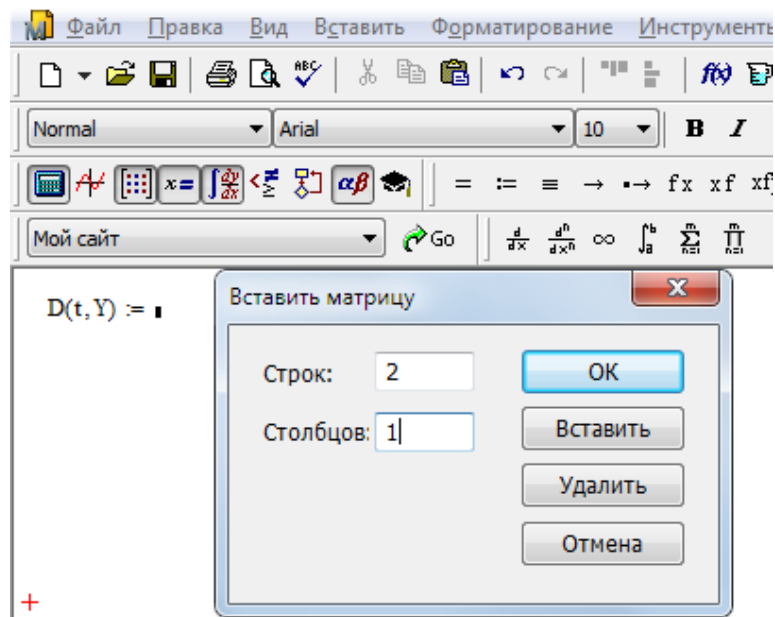


Рис. П6

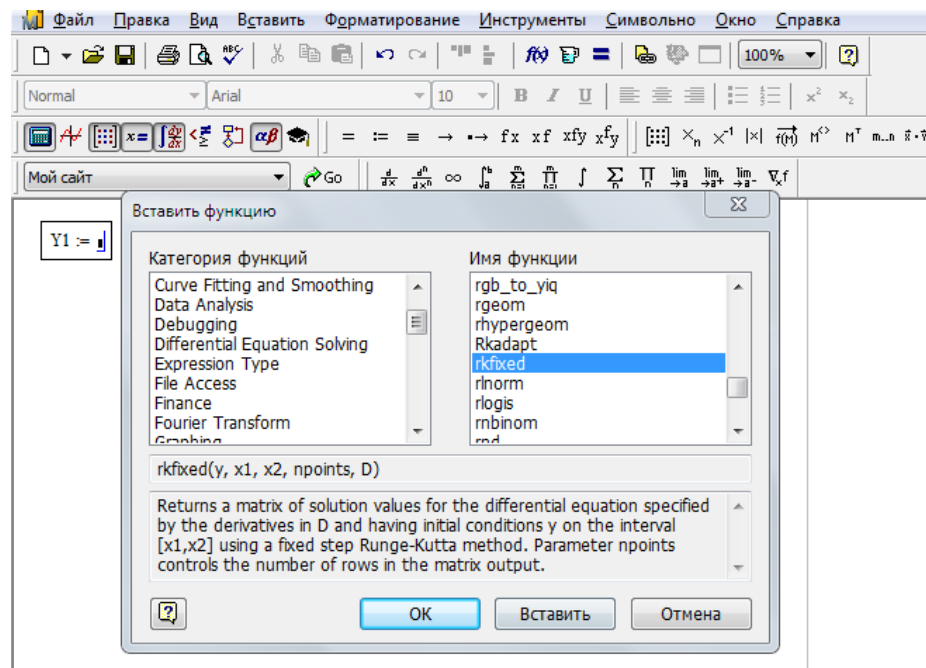


Рис. П7

Далее зададимся несколькими начальными условиями

$$\begin{aligned}
 Y2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & Y2 &:= \text{rkfixed}(Y2, 0, 10, 100, D) & Y3 &:= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & Y3 &:= \text{rkfixed}(Y3, 0, 10, 100, D) \\
 Y4 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & Y4 &:= \text{rkfixed}(Y4, 0, 10, 100, D) & Y5 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & Y5 &:= \text{rkfixed}(Y5, 0, 10, 100, D) \\
 Y6 &:= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & Y6 &:= \text{rkfixed}(Y6, 0, 10, 100, D) & Y7 &:= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & Y7 &:= \text{rkfixed}(Y7, 0, 10, 100, D)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y8 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & Y8 &:= \text{rkfixed}(Y8, 0, 10, 100, D) & Y9 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & Y9 &:= \text{rkfixed}(Y9, 0, 10, 100, D) \\
Y10 &:= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} & Y10 &:= \text{rkfixed}(Y10, 0, 10, 100, D) & Y11 &:= \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0 \end{pmatrix} & Y11 &:= \text{rkfixed}(Y11, 0, 10, 100, D) \\
Y12 &:= \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} & Y12 &:= \text{rkfixed}(Y12, 0, 10, 100, D) & Y13 &:= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} & Y13 &:= \text{rkfixed}(Y13, 0, 10, 100, D)
\end{aligned}$$

Чтобы построить фазовые траектории, соответствующие заданным начальным условиям, щёлкнем в панели «График» по пиктограмме двумерного декартова графика (*X-Y Plot*) и введём в помеченной позиции возле оси абсцисс имя 2-го столбца, а возле оси ординат – имя 3-го столбца матрицы, содержащей приближенное решение. Для того чтобы ввести номер столбца, щелкнем по символу столбца в панели *Matrix* и введём номер столбца в помеченной позиции в угловых скобках (рис. П8).

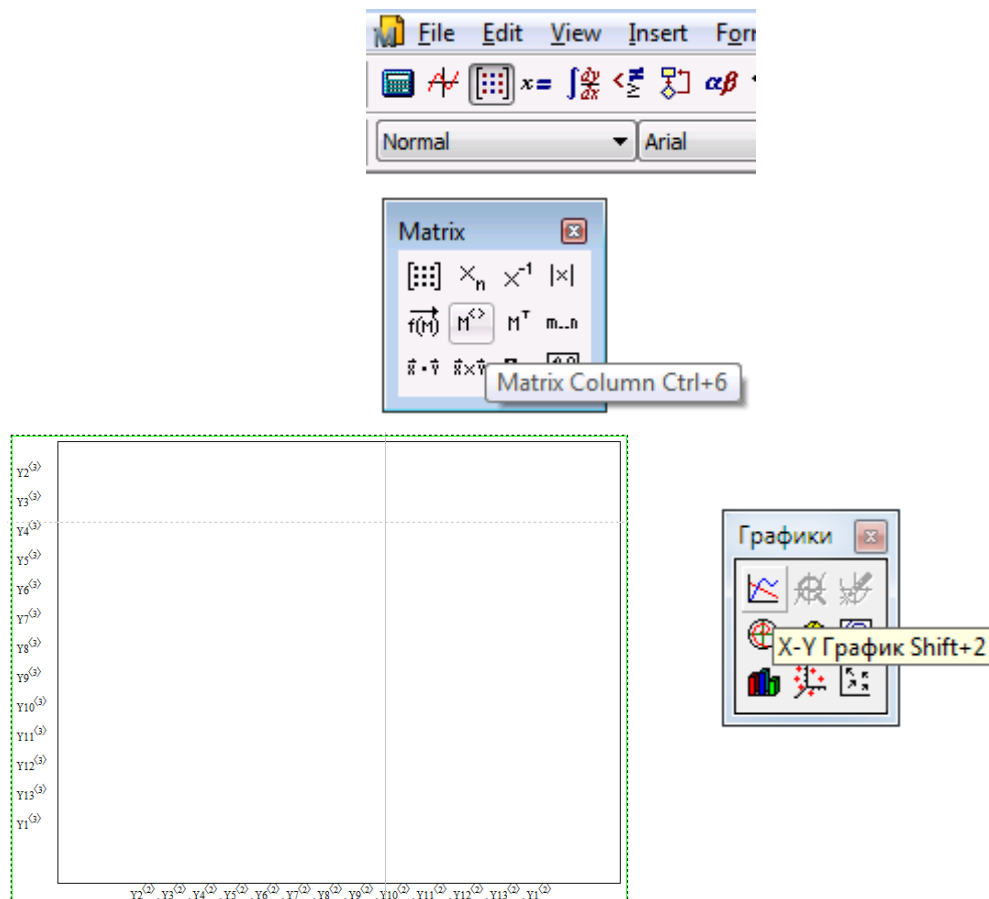


Рис. П8

Фазовый портрет системы представлен на рис. П9.

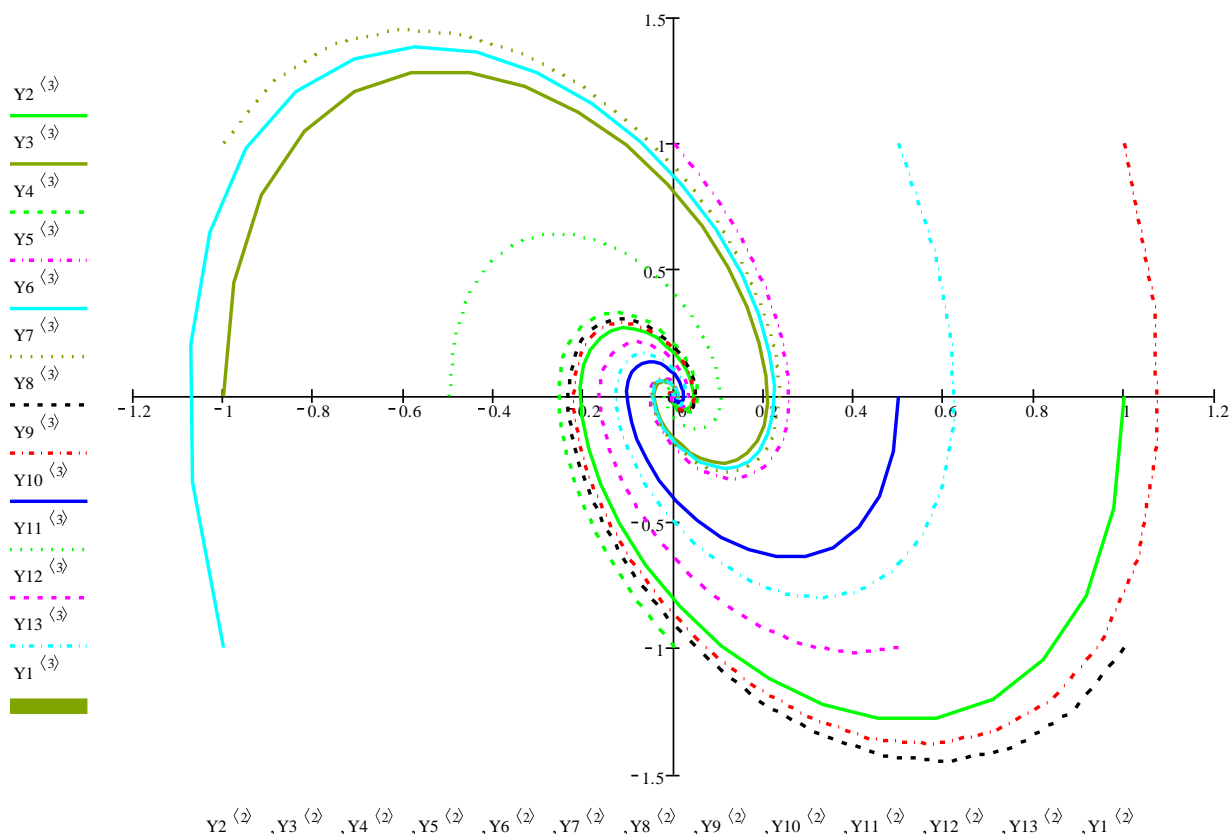


Рис. П9

## Пример 2.

Необходимо исследовать систему, описываемую уравнением вида

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \quad (3)$$

методом фазовой плоскости.

*Решение.*

На первом этапе исследования системы определим характер фазовых траекторий системы в окрестности особых точек по типу корней характеристического уравнения системы.

Так, особые точки системы (точки, где  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ ) найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

откуда получим, что имеется единственная точка равновесного состояния (0;0), а для определения корней характеристического уравнения системы (3) составим параметрическую матрицу  $A$ . Для этого щелкнем по символу матрицы в панели «Матрица», определим в окне размерности число строк и число столбцов, а затем введём в помеченных позициях элементы матрицы (см. рис. П1).

Для определения номера первой компоненты вектора, равного единице (а не нулю, как положено по умолчанию) воспользуемся функцией  $\text{ORIGIN}:=1$ .

Для определения корней характеристического уравнения системы (3) воспользуемся встроенной функцией *eigenvals* (рис. П10).

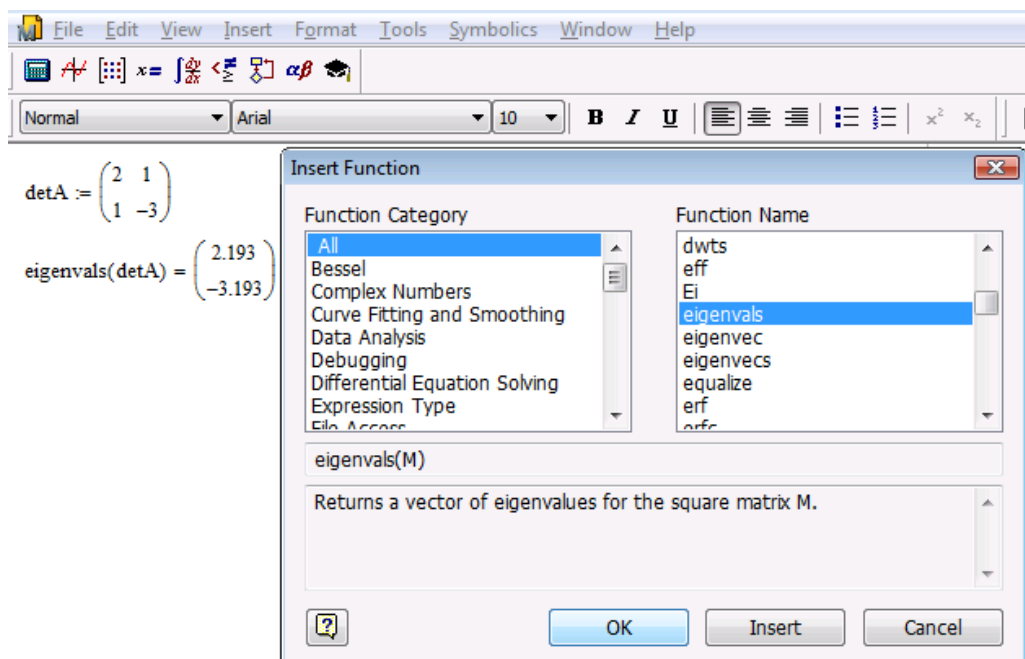


Рис. П10

Полученные таким образом корни характеристического уравнения являются вещественными разных знаков. Таким корням соответствует особая точка (0;0) типа «седло».

На втором этапе исследования системы изобразим на фазовой плоскости векторное поле изоклин. Для этого введем в рассмотрение вспомогательные функции  $F1(X,Y)$  и  $F2(X,Y)$ , соответствующие правым частям уравнений (3)

$$F1(X,Y) := 2 \cdot X + Y;$$

$$F2(X,Y) := X - 3 \cdot Y.$$

Далее задавшись размером квадратной сетки  $[-a,b][-a,b]$  (например,  $a=-1$ ,  $b=1$ ) (см. рис. П3); задав узлы, в которых должны проводиться вычисления

$$i := 1..10 \quad (n=10),$$

$$j := 1..10 \quad (m=10);$$

установив связь  $X$  и  $Y$  с узлами сетки, определяемую выражениями

$$X_i := -1 + i \cdot \frac{2}{10}; \quad Y_j := -1 + j \cdot \frac{2}{10},$$

а также определив матрицы ординат, по которым будет строиться график выражениями

$$MF1_{i,j} := F1 \left| X_i, Y_j \right|; \quad MF2_{i,j} := F2 \left| X_i, Y_j \right|$$

(так, как показано на рис. П3), вызовем график поверхности с панели инструментов (см. рис. П4).

Далее, после выхода из графика и щелчка курсором получим векторное поле изоклин (рис. П11), по которому, задаваясь различными начальными условиями можно представить фазовый портрет системы.

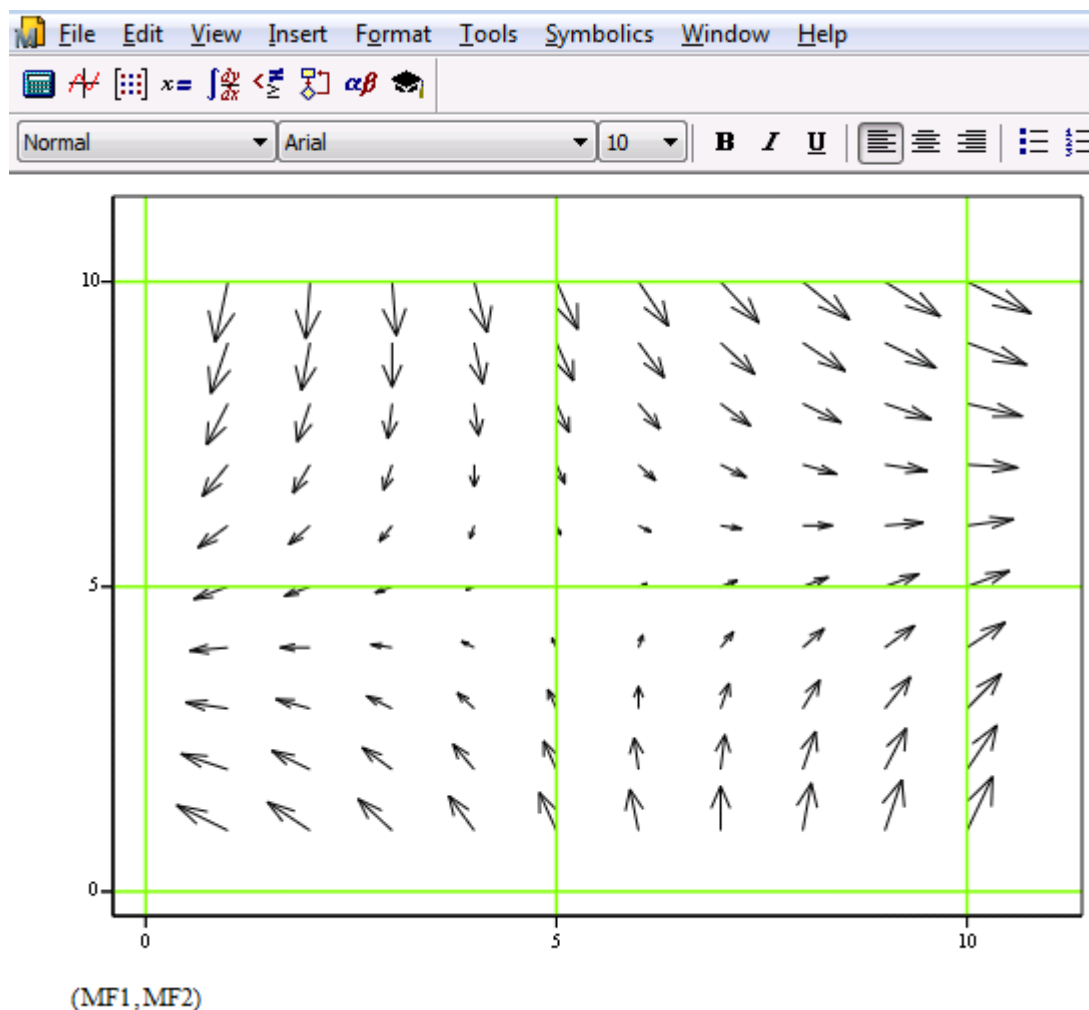


Рис. П11

Судя по характеру векторного поля изоклин  $(0;0)$  – особая точка типа «седло», что соответствует результатам первого этапа исследований.

Для построения фазового портрета системы необходимо решить задачу Коши с различными начальными условиями. Для решения задачи методом Рунге-Кутты нужно воспользуемся встроенной функцией *rkfixed*.

Для этого сначала определим правые части системы  $D(t,Y)$ , щелкнув на символе матрицы в панели «Матрица», определив в окне размерности число строк и число столбцов (см. рис. П6). Значения элементов матрицы выбираем в соответствии с системой уравнений (2), используя замену переменных  $y=Y_2$ ,  $x=Y_1$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} 2 \cdot Y_1 + Y_2 \\ Y_1 - 3 \cdot Y_2 \end{pmatrix} .$$

Вычислим приближенное решение (2), выполнив методом Рунге-Кутты 4-го порядка 100 одинаковых шагов и обозначив приближенное решение Y1 (см. рис. П7)

$$Y1 := \text{rkfixed}(Y1, 0, 10, 100, D).$$

В первом столбце матрицы Y1 хранятся значения параметра  $t$  в узлах сетки, во втором столбце – соответствующие значения решения, в третьем – значения производной решения.

Далее зададимся несколькими начальными условиями

$$\begin{array}{llll} Y2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & Y2 := \text{rkfixed}(Y2, 0, 1, 100, D) & Y3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -0.6 \end{pmatrix} & Y3 := \text{rkfixed}(Y3, 0, 1, 100, D) \\ Y4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & Y4 := \text{rkfixed}(Y4, 0, 1, 100, D) & Y5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & Y5 := \text{rkfixed}(Y5, 0, 1, 100, D) \\ Y6 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & Y6 := \text{rkfixed}(Y6, 0, 1, 100, D) & Y7 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & Y7 := \text{rkfixed}(Y7, 0, 1, 100, D) \\ Y8 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & Y8 := \text{rkfixed}(Y8, 0, 1, 100, D) & Y9 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & Y9 := \text{rkfixed}(Y9, 0, 1, 100, D) \\ Y10 := \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2 \end{pmatrix} & Y10 := \text{rkfixed}(Y10, 0, 1, 100, D) & Y11 := \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0 \end{pmatrix} & Y11 := \text{rkfixed}(Y11, 0, 1, 100, D) \\ Y12 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} & Y12 := \text{rkfixed}(Y12, 0, 1, 100, D) & Y13 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} & Y13 := \text{rkfixed}(Y13, 0, 1, 100, D) . \end{array}$$

Чтобы построить фазовые траектории, соответствующие заданным начальным условиям, щёлкнем в панели «График» по пиктограмме двумерного декартова графика ( $X-Y$  Plot) и введём в помеченной позиции возле оси абсцисс имя 2-го столбца, а возле оси ординат – имя 3-го столбца матрицы, содержащей приближенное решение. Для того чтобы ввести номер столбца, щелкнем по символу столбца в панели *Matrix* и введем номер столбца в помеченной позиции в угловых скобках (см. рис. П8).

Фазовый портрет системы представлен на рис. П12.

### Пример 3.

Необходимо исследовать систему, описываемую уравнением вида

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad (4)$$

методом фазовой плоскости.

*Решение.*

Для исследования системы методом фазовой плоскости перейдем от уравнения (4) к системе из двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases} \quad (5)$$

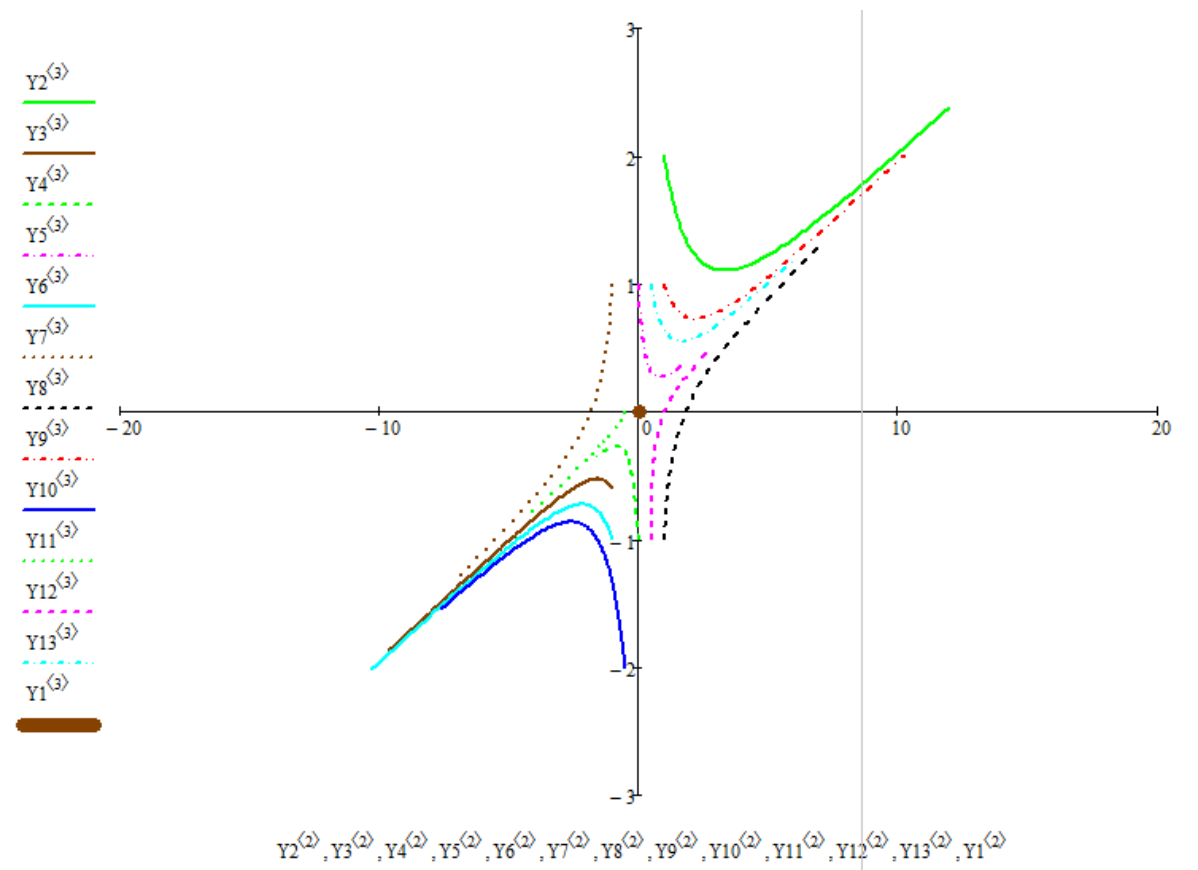


Рис. П12

На первом этапе исследования системы определим характер фазовых траекторий системы в окрестности особых точек по типу корней характеристического уравнения системы.

Так, особые точки системы (точки, где  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ ) найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\sin x = 0, \end{cases}$$

откуда получим, что имеется единственная точка равновесного состояния (0;0), а для определения типа особой точки (0;0) проведем линеаризацию (5) по методу малых отклонений в окрестности особой точки. В результате получим

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (6)$$

Далее для определения типа особой точки (0;0) по корням характеристического уравнения системы составим параметрическую матрицу  $A$ . Для этого щелкнем по символу матрицы в панели «Матрица», определим в окне размерности число строк и число столбцов, а затем введём в помеченных позициях элементы матрицы (см. рис. П1). Для определения номера первой компоненты вектора, равного единице (а не нулю, как положено по умолчанию), воспользуемся функцией  $\text{ORIGIN}:=1$ .

Для определения корней характеристического уравнения системы (5) воспользуемся встроенной функцией *eigenvals* (рис. П13).

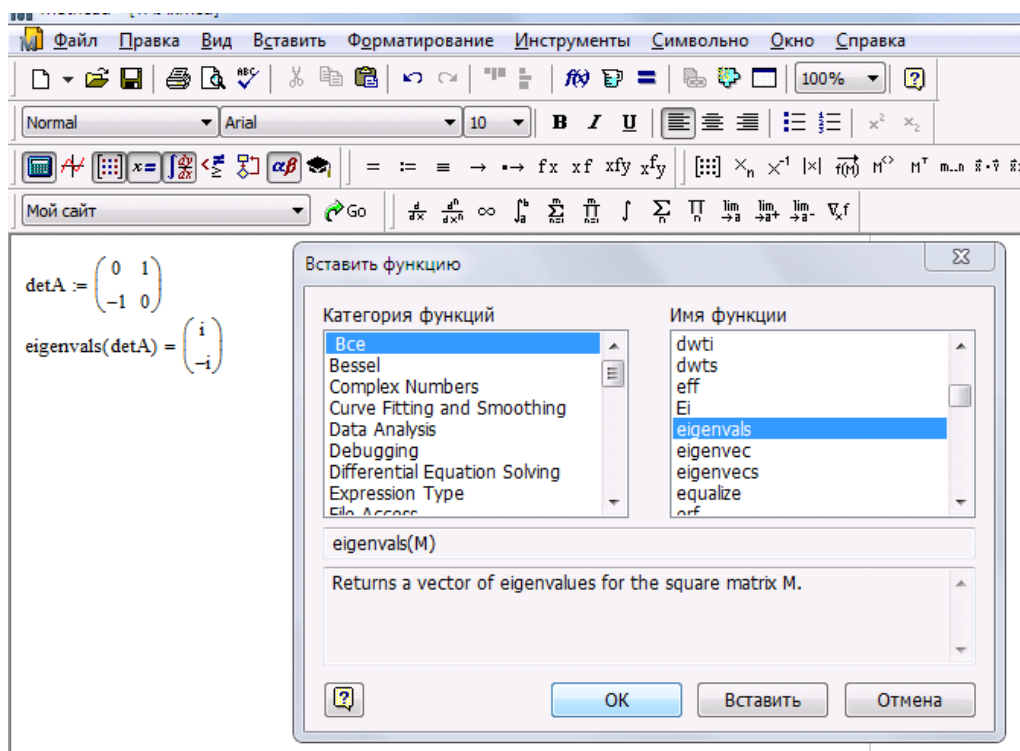


Рис. П13

Полученные таким образом корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными с нулевой вещественной частью. Таким корням соответствует особая точка (0;0) типа «цикл».

На втором этапе исследования системы изобразим на фазовой плоскости векторное поле изоклин. Для этого введем в рассмотрение вспомогательные функции  $F1(X,Y)$  и  $F2(X,Y)$ , соответствующие правым частям уравнений (2)

$$F1(X,Y) := Y;$$

$$F2(X,Y) := -\sin X.$$

Далее задавшись размером квадратной сетки  $[-a,b][-a,b]$  (например,  $a=-1$ ,  $b=1$ ) (см. рис. П3); задав узлы, в которых должны проводиться вычисления

$$i := 1..10 \quad (n=10),$$

$$j := 1..10 \quad (m=10);$$

установив связь  $X$  и  $Y$  с узлами сетки, определяемую выражениями

$$X_i := -1 + i \cdot \frac{2}{10}; \quad Y_j := -1 + j \cdot \frac{2}{10},$$

а также определив матрицы ординат, по которым будет строиться график выражениями

$$MF1_{i,j} := F1(X_i, Y_j); \quad MF2_{i,j} := F2(X_i, Y_j)$$

(так, как показано на рис. П3), вызовем график поверхности с панели инструментов (см. рис. П4).



Далее, после выхода из графика и щелчка курсором получим векторное поле изоклин (рис. П14), по которому, задаваясь различными начальными условиями можно представить фазовый портрет системы.

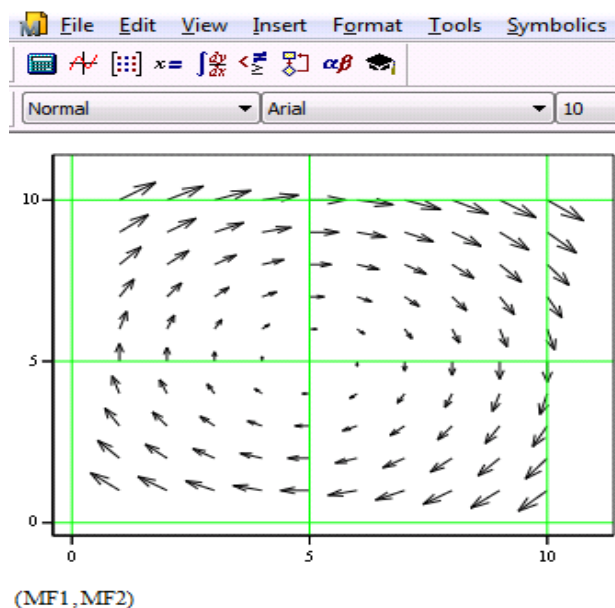


Рис. П14

Задав другие значения для определения узлов сетки ( $i=1\dots 20$ ,  $j=1\dots 20$ , на прямоугольнике  $[-10,10][-3,3]$ ), в которых будет считаться наша функция, получим более полный фазовый портрет (рис. П15).

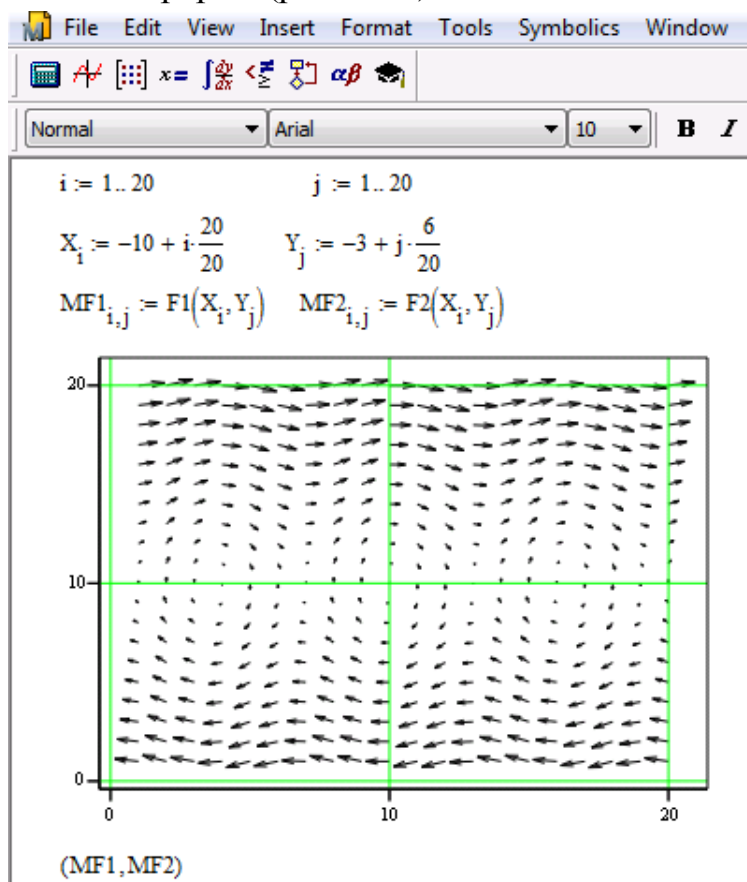


Рис. П15

Судя по характеру векторного поля изоклин имеется бесконечное множество особых точек типа «цикл», что соответствует результатам первого этапа исследований.

Для построения фазового портрета системы необходимо решить задачу Коши с различными начальными условиями. Для решения задачи методом Рунге-Кутты нужно воспользуемся встроенной функцией *rkfixed*.

Для этого сначала определим правые части системы  $D(t, Y)$ , щелкнув на символе матрицы в панели «Матрица», определив в окне размерности число строк и число столбцов (см. рис. П6). Значения элементов матрицы выбираем в соответствии с системой уравнений (2), используя замену переменных  $y=Y2$ ,  $x=Y1$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y2 \\ -\sin Y1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим приближенное решение (2), выполнив методом Рунге-Кутты 4-го порядка 100 одинаковых шагов и обозначив приближенное решение  $Y1$  (рис. 7)

$$Y1 := \text{rkfixed}(Y1, 0, 10, 100, D).$$

В первом столбце матрицы  $Y1$  хранятся значения параметра  $t$  в узлах сетки, во втором столбце – соответствующие значения решения, в третьем – значения производной решения.

Далее зададимся несколькими начальными условиями

$$\begin{aligned} Y2 &:= \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi \\ 0 \end{pmatrix} & Y2 &:= \text{rkfixed}(Y2, 0, 10, 100, D) & Y3 &:= \begin{pmatrix} -2 \cdot \pi \\ 0 \end{pmatrix} & Y3 &:= \text{rkfixed}(Y3, 0, 10, 100, D) \\ Y4 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & Y4 &:= \text{rkfixed}(Y4, 0, 10, 100, D) & Y5 &:= \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi + 1 \\ 0 \end{pmatrix} & Y5 &:= \text{rkfixed}(Y5, 0, 10, 100, D) \\ Y6 &:= \begin{pmatrix} -2 \cdot \pi - 1 \\ 0 \end{pmatrix} & Y6 &:= \text{rkfixed}(Y6, 0, 10, 100, D) & Y7 &:= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & Y7 &:= \text{rkfixed}(Y7, 0, 30, 100, D) \\ Y8 &:= \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi + 3 \\ 0 \end{pmatrix} & Y8 &:= \text{rkfixed}(Y8, 0, 30, 100, D) & Y9 &:= \begin{pmatrix} -2 \cdot \pi - 3 \\ 0 \end{pmatrix} & Y9 &:= \text{rkfixed}(Y9, 0, 30, 100, D) \\ Y10 &:= \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi \\ -2.2 \end{pmatrix} & Y10 &:= \text{rkfixed}(Y10, 0, 10, 100, D) & Y11 &:= \begin{pmatrix} -2 \cdot \pi \\ 2.2 \end{pmatrix} & Y11 &:= \text{rkfixed}(Y11, 0, 10, 100, D) \\ Y12 &:= \begin{pmatrix} -2 \cdot \pi \\ 2.4 \end{pmatrix} & Y12 &:= \text{rkfixed}(Y12, 0, 10, 100, D) & Y13 &:= \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi \\ -2.4 \end{pmatrix} & Y13 &:= \text{rkfixed}(Y13, 0, 10, 100, D). \end{aligned}$$

Для того чтобы построить фазовую кривую, соответствующую определенному начальному условию, щёлкнем в панели «График» по пиктограмме двумерного декартова графика (*X-Y Plot*) и введём в помеченной позиции возле оси абсцисс имя 2-го столбца, а возле оси ординат – имя 3-го столбца матрицы, содержащей приближенное решение. Для того чтобы ввести номер столбца, щелкнем по символу столбца в панели *Matrix* и введем номер столбца в помеченной позиции в угловых скобках (см. рис. П8).

Фазовый портрет системы представлен на рис. П16.

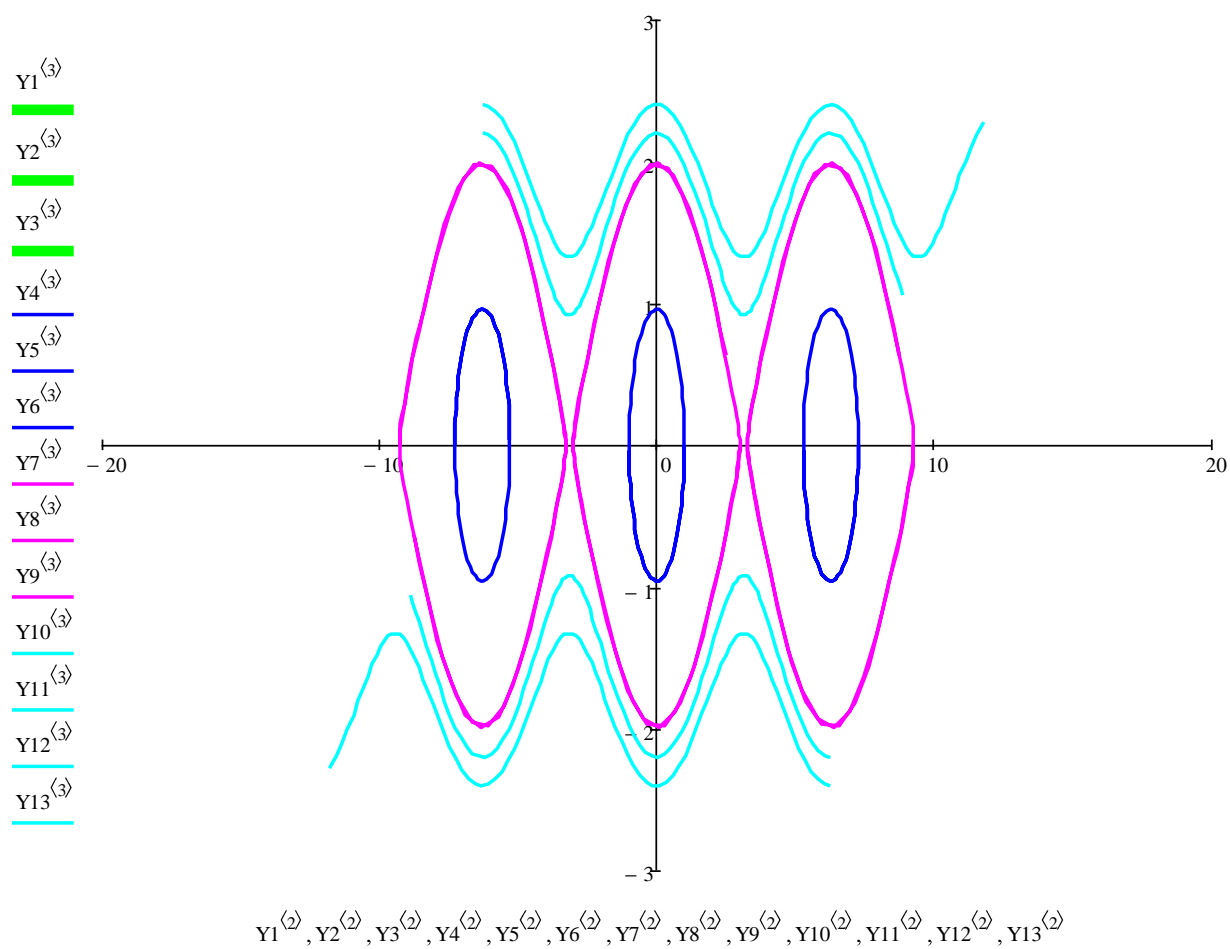
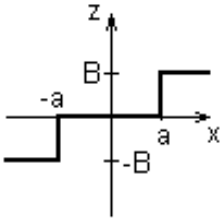
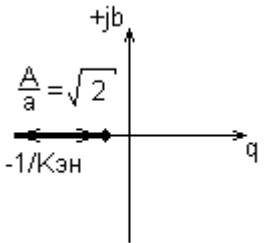
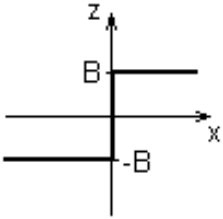
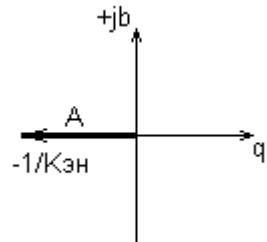
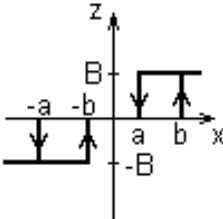
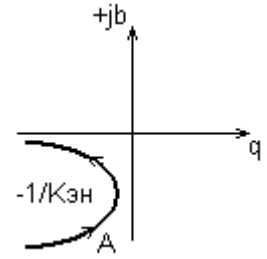
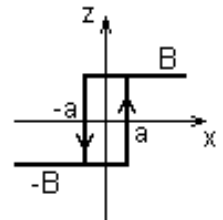
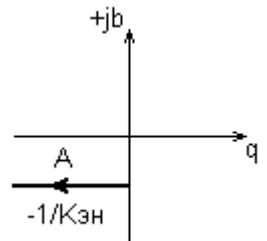
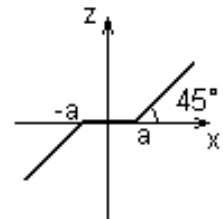
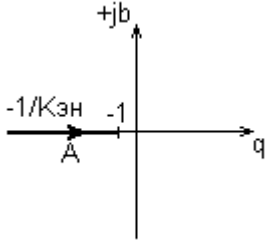
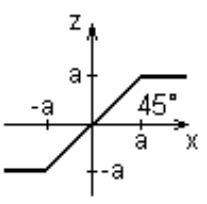
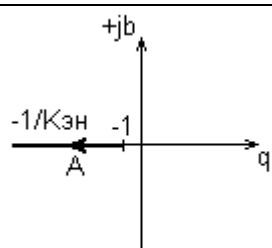
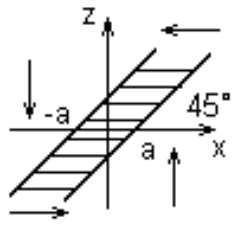
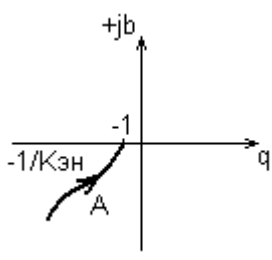


Рис. П16

ЭККУ ТИПОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Таблица П1

	Статическая характеристика	$K_{нэ} = q(A) + jb(A)$	Годограф $-\frac{1}{K_{нэ}(A)}$
Трёхпозиционное реле		$q = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$ $b = 0$	
Двухпозиционное реле		$q = \frac{4B}{\pi A}$ $b = 0$	
Трёхпозиционное реле с гистерезисом		$q = \frac{2B}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right)$ $b = -\frac{2B}{\pi A} \left( \frac{a}{A} - \frac{b}{A} \right)$	
Двухпозиционное реле с гистерезисом		$q = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$ $b = -\frac{4Ba}{\pi A^2}$	
Зона нечувствительности		$q = 1 - \frac{2 \cdot \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + 2 \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}{\pi}$ $b = 0$	

	Статическая характеристика	$K_{\text{нб}} = q(A) + jb(A)$	Годограф $-\frac{1}{K_{\text{эн}}(A)}$
Звено насыщения		$q = \frac{2 \cdot \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + 2 \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}{\pi}$ $b = 0$	
Звено «люфт»		$q = \frac{1}{2} + \frac{2a}{\pi A} \left(1 - \frac{2a}{A}\right) \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{2a}{A}\right)^2} +$ $+ \frac{1}{\pi} \arcsin\left(1 - \frac{2a}{A}\right);$ $b = -\frac{4a\left(1 - \frac{a}{A}\right)}{\pi A}$	

## АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ VISSIM

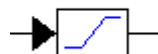
Здесь для моделирования нелинейного элемента системы могут быть использованы следующие типовые нелинейные блоки: блок «зона нечувствительности» (рис. П17), блок «насыщение» (рис. П18), «реле» (рис. П19) и пр.



б) вид на диаграмме

в) параметры блока

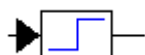
Рис. П17



б) вид на диаграмме

в) параметры блока

Рис. П18



б) вид на диаграмме

в) параметры блока

Рис. П19

На базе этих типовых можно создать множество других нелинейностей, например, на базе типовой нелинейности (рис. П20) можно создать подобную нелинейность с увеличенным в 10 раз коэффициентом наклона линейного участка (рис. П21).

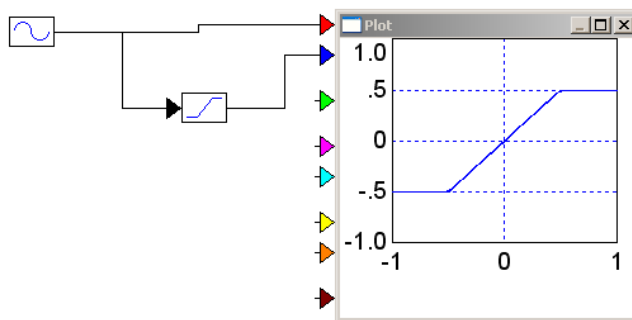


Рис. П20

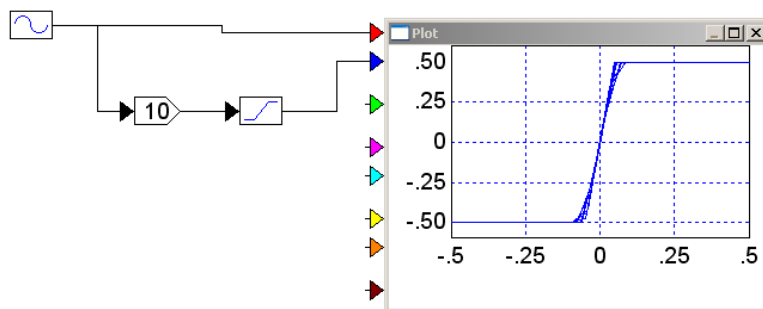


Рис. П21

Покажем возможности пакета Vissim на примере решения задачи анализа качества системы управления (рис. П22) с нелинейностью типа «ограничение» (рис. П23) в усилителе мощности.

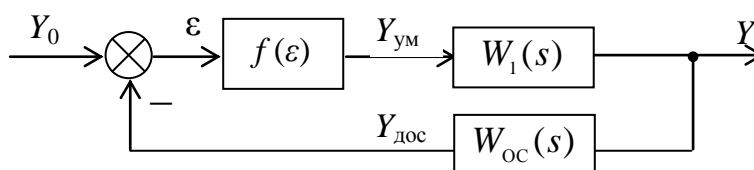


Рис. П22

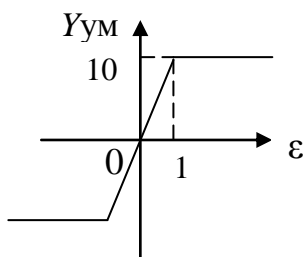


Рис. П23

Схема моделирования и реакция нелинейной системы на гармоническое входное воздействие  $Y_0=15\sin 5t$  представлены на рис. П24.

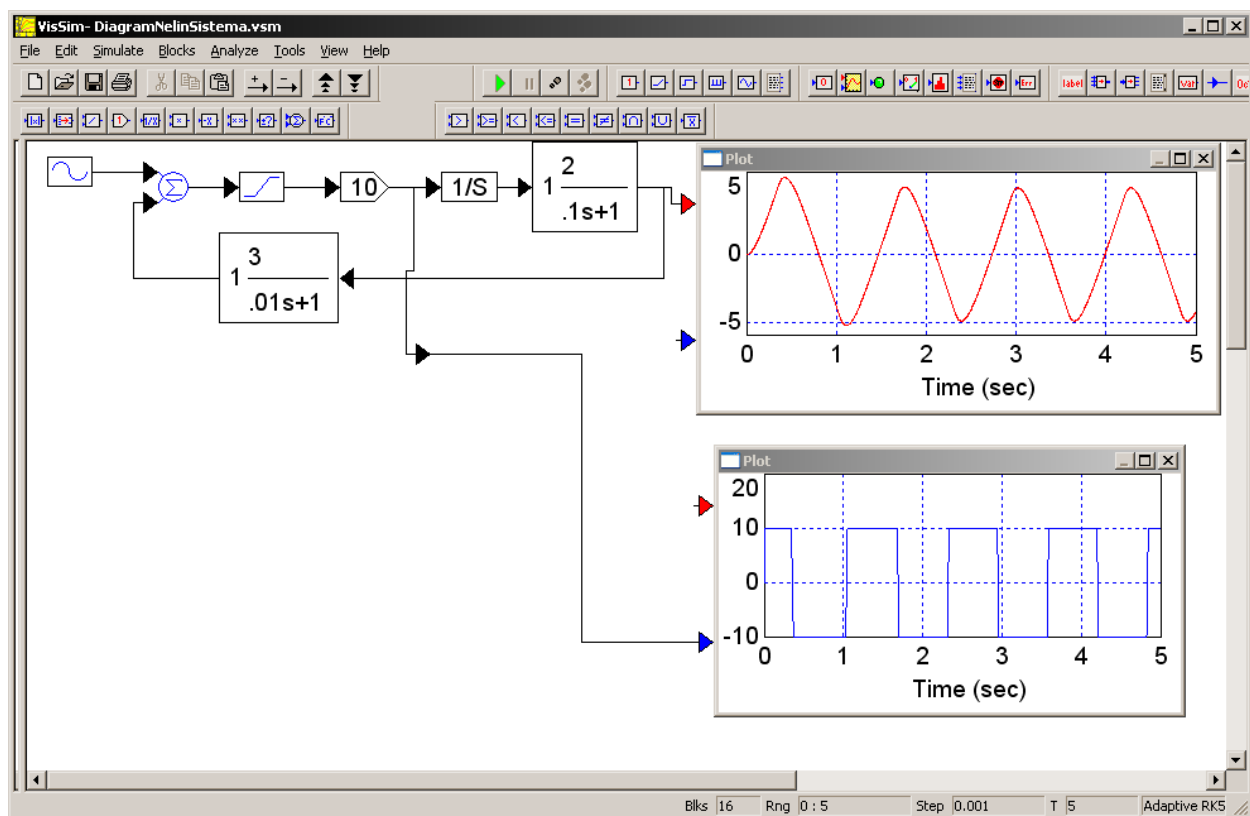


Рис. П24

Из рис. П24 видно, что наблюдается значительное искажение формы выходного сигнала усилителя мощности, вследствие чего гармонический сигнал обрабатывается системой с большими искажениями (их можно определить в числовом выражении по графику выходного сигнала объекта управления).



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	3
1. Нелинейности в системах управления	
1.1. Примеры нелинейных систем управления.....	4
1.2. Классификация нелинейностей.....	7
1.3. Типовые нелинейные звенья.....	9
1.4. Особое звено нелинейных систем.....	10
2. Статика нелинейных систем.....	11
2.1. Соединения нелинейных звеньев.....	12
2.2. Правила преобразования структурных схем.....	15
3. Динамика нелинейных систем	
3.1. Метод фазового пространства.....	16
3.2. Особые точки и фазовые портреты линейных систем (поведение нелинейной системы при малых отклонениях от положения равновесия)....	19
3.3. Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем (поведение нелинейной системы при больших отклонениях от положения равновесия).....	23
3.4. Особые линии на фазовой плоскости .....	25
3.5. Методы построения фазовых портретов нелинейных систем	
3.5.1. Метод припасовывания.....	27
3.5.2 Метод изоклин.....	29
3.6. Система со скользящим процессом.....	31
3.7. Система с переменной структурой.....	33
4. Метод гармонической линеаризации.....	35
4.1. ЭККУ: общие сведения.....	35
4.2. Методика определения ЭККУ нелинейного элемента	
4.2.1. ЭККУ элемента с однозначной статической характеристикой.....	38
4.2.2. ЭККУ неоднозначных нелинейностей.....	39
4.3. Анализ симметричных автоколебаний.....	41
4.3.1. Алгебраический метод .....	41
4.3.2. Частотный метод.....	44
4.3.3. Метод баланса амплитуд и фаз.....	47
4.3.4. Условие отсутствия симметричных автоколебаний.....	48
4.4. Анализ несимметричных автоколебаний.....	48
4.5. Применение метода гармонической линеаризации при наличии нескольких нелинейностей.....	52

5. Устойчивость нелинейных систем	
5.1. Особенности устойчивости нелинейных систем.....	53
5.2. Прямой метод Ляпунова.....	54
5.3. Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия	58
6. Качество нелинейных систем	
6.1. Анализ нелинейных систем.....	63
6.2. Синтез нелинейных систем.....	64
6.2.1. Линейные корректирующие устройства.....	64
6.2.2. Нелинейные корректирующие устройства.....	66
6.2.3. Псевдолинейные корректирующие устройства.....	67
Библиографический список.....	68
Приложения	
Приложение А. Построение фазового портрета нелинейной системы методом изоклин с использованием MathCad.....	69
Приложение Б. ЭККУ типовых нелинейных элементов.....	84
Приложение В. Анализ нелинейных систем с использованием Vissim.....	86