

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ (Ч2)

В.Н.Тюкин

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Дискретные системы автоматического управления	4
1.1. Общие сведения	4
1.2. Структура и классификация импульсных систем	5
1.3. Математический аппарат исследования дискретных систем	9
1.4. Передаточные функции разомкнутых импульсных систем	22
1.5. Структурные схемы и передаточные функции замкнутых импульсных систем	30
1.6. Частотные характеристики импульсных систем	34
1.7. Устойчивость импульсных систем	41
1.8. Переходные процессы в импульсных системах	46
1.9. Точность и коррекция импульсных систем	49
1.10. Описание дискретных систем в пространстве состояний ...	60
2. Нелинейные системы автоматического управления	68
2.1. Общие понятия и особенности нелинейных систем	68
2.2. Прямой метод Ляпунова	73
2.3. Частотный метод В.М. Попова	78
2.4. Метод гармонической линеаризации нелинейностей	83
2.5. Методы фазового пространства	95
2.6. Коррекция нелинейных систем	109
2.7. Скользящие режимы в релейных системах	118
2.8. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик .	122
Заключение	126

1. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Общие сведения

Дискретные системы - системы, в состав которых, помимо типовых динамических звеньев, входят одно или несколько звеньев, производящих квантование непрерывного сигнала в дискретный. Это или импульсный, или релейный элемент, или цифровое устройство.

К дискретным системам относятся импульсные, релейные и цифровые. В импульсных системах производится квантование сигнала по времени, в релейных - по уровню, в цифровых - по времени и по уровню.

Импульсная система состоит из импульсных элементов (одного или нескольких) и непрерывных частей, содержащих типовые динамические звенья. Импульсные элементы, производящие квантование (прерывание) сигнала по времени, позволяют получать весьма большие коэффициенты усиления по мощности. Кроме того, при импульсном режиме уменьшается расход потребляемой энергии системы. Примерами импульсных систем могут служить системы радио и оптической локации, системы с частотными датчиками и др.

Релейные системы автоматического управления можно отнести, как и импульсные, к системам прерывистого действия, но их существенное отличие от импульсных состоит в том, что релейные системы по своему принципу являются нелинейными системами. В релейных системах моменты времени, в которые происходит замыкание и размыкание системы, заранее неизвестны; они определяются внутренними свойствами самой системы. Этим обуславливаются основные особенности динамики процессов регулирования в релейных системах. Благодаря простоте реализации и приемлемому качеству работы релейные системы получили широкое распространение в бытовой технике, например, системы регулирования температуры в холодильниках или нагрева электрического утюга и др.

К цифровым системам относятся системы автоматического управления и регулирования, в замкнутый контур которых включается цифровое вычислительное устройство, что позволяет реализовать сложные алгоритмы управления. Включение цифрового вычислительного устройства в контур системы управления сопряжено с преобразованием непрерывных величин в дискретные на входе и с обратным преобразованием на выходе. При достаточно высокой тактовой частоте работы вычислительного устройства (по сравнению с инерционностью системы) во многих случаях можно производить расчет цифровой системы в целом как непрерывной, а достаточно большое число разрядов ($8 \div 16$) преобразователей непрерывной величины в дискретную и дискретной в непрерывную позволяет во многих случаях пренебрегать нелинейностью операции квантования сигнала по уровню. В общем случае цифровая система автоматического управления является нелинейной дискретной системой. Примерами цифровых систем служат системы, содержащие в сво-

ем составе компьютеры, разнообразные микропроцессорные системы управления и т.д.

Дискретные системы имеют большое значение в современной технике.

1.2. Структура и классификация импульсных систем

Характерная особенность импульсных систем заключается в том, что по крайней мере одна из координат (переменных) в них подвергается квантованию (прерыванию) по времени [18]. Эти квантованные по времени величины при помощи импульсной модуляции преобразуются в последовательность импульсов, которые воздействуют на непрерывную часть системы. Процесс квантования и импульсной модуляции осуществляется импульсным элементом.

Таким образом, **импульсная система** состоит из импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ), составленной из типовых динамических звеньев (рис. 1.1).

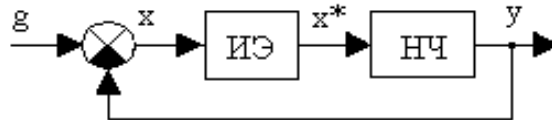


Рис. 1.1. Функциональная схема импульсной системы:
ИЭ - импульсный элемент; НЧ - непрерывная часть

В импульсной системе импульсный элемент преобразует непрерывно изменяющуюся величину в последовательность модулированных импульсов (рис. 1.2).

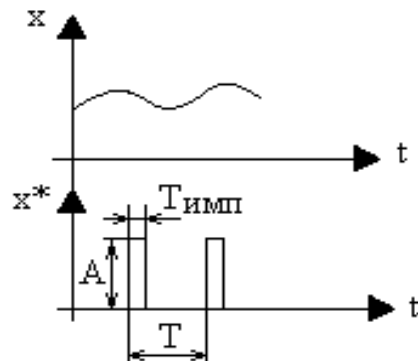


Рис. 1.2. Временные диаграммы изменения сигналов на входе x и выходе x^* импульсного элемента

Процесс импульсной модуляции состоит в изменении по определенному временному закону какого-либо параметра периодически повторяющихся импульсов. Основными параметрами импульсной последовательности (рис. 1.2) являются:

- 1) высота или амплитуда импульса A ;
- 2) длительность или ширина импульса $T_{\text{имп}}$;
- 3) период повторения (дискретности) или период квантования импульсов T .

Расстояние между импульсами определяется их временным положением, т.е. частотой повторения (дискретности) или частотой квантования $\omega_0 = 2\pi/T$. Величина, определяющая закон модуляции, называется модулирующей величиной.

В зависимости от того, какой из параметров последовательности импульсов изменяется по закону изменения модулирующей величины, различают следующие виды импульсной модуляции:

- 1) амплитудно-импульсную модуляцию - АИМ (амплитуда импульса пропорциональна входному сигналу: $A = f(x)$ при $T = \text{const}$, $T_{\text{имп}} = \text{const}$);
- 2) широтно-импульсную модуляцию - ШИМ (длительность импульса пропорциональна входному сигналу: $T_{\text{имп}} = f(x)$ при $A = \text{const}$, $T = \text{const}$);
- 3) временную импульсную модуляцию - ВИМ, включающую в себя:
 - а) фазо-импульсную модуляцию - ФИМ (фаза, т.е. временной сдвиг импульса относительно начала периода дискретности T , пропорциональна входному сигналу: $\varphi = f(x)$ при $A = \text{const}$, $T = \text{const}$, $T_{\text{имп}} = \text{const}$);
 - б) частотно-импульсную модуляцию - ЧИМ (частота дискретности пропорциональна входному сигналу: $\omega_0 = f(x)$ при $A = \text{const}$, $T_{\text{имп}} = \text{const}$).

Кроме того, различают два рода импульсной модуляции.

Если параметры последовательности импульсов изменяются в зависимости от значений модулирующей величины в фиксированные равноотстоящие друг от друга моменты времени, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией первого рода - ИМ I.

Если же параметры последовательности импульсов изменяются в соответствии с текущим значением модулирующей величины, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией второго рода - ИМ II.

Импульсный элемент производит периодическое замыкание системы на время длительности импульса $T_{\text{имп}}$; в оставшуюся часть периода дискретности импульсная система остается разомкнутой.

Основными параметрами импульсного элемента являются коэффициент передачи $k_{\text{и}}$, период повторения T (или частота повторения $\omega_0 = 2\pi/T$), длительность $T_{\text{имп}} = \gamma T$ (или скважность γ , $0 \leq \gamma \leq 1$) и форма выходных импульсов $w(t)$. В зависимости от вида и рода импульсной модуляции импульс-

ные элементы подразделяются на амплитудные, широтные и временные импульсные элементы первого и второго рода.

В зависимости от вида и рода импульсного элемента импульсные системы подразделяются на три типа:

- 1) амплитудные импульсные системы - АИС,
- 2) широтные импульсные системы - ШИС,
- 3) временные импульсные системы - ВИС

первого и второго рода.

В зависимости от того, соблюдается или не соблюдается принцип суперпозиции, т.е. равна или не равна реакция импульсной системы на сумму воздействий сумме реакций на каждое из воздействий порознь, импульсные системы подразделяются на линейные и нелинейные.

В линейных импульсных системах параметры импульсного элемента и непрерывной части системы не зависят от внешних воздействий и величин, характеризующих состояние системы. К линейным импульсным системам относятся АИС с линейной непрерывной частью и линейной характеристикой импульсного элемента, равной коэффициенту передачи

$$k_{\Pi} = \frac{A}{x} = \text{const}, \quad (1.1)$$

где x - значение входной величины в дискретные моменты времени;

A - соответствующая амплитуда импульса.

В нелинейных импульсных системах параметры импульсного элемента или непрерывной части системы зависят от внешнего воздействия или величин, характеризующих состояние системы. К нелинейным импульсным системам относятся ШИС и ВИС, а также АИС с нелинейной характеристикой импульсного элемента или с нелинейной непрерывной частью.

Если в импульсной системе параметры импульсного элемента или непрерывной части изменяются во времени, то такие системы относятся к импульсным системам с переменными параметрами. Последние могут быть как линейными, так и нелинейными.

В дальнейшем будут рассматриваться линейные амплитудные импульсные системы. Для расчета широтных импульсных систем и временных импульсных систем при определенных ограничениях можно использовать методы линейных АИС.

1.3. Математический аппарат исследования дискретных систем

Величины, описывающие поведение автоматических систем, представляют собой функции времени. Математическое исследование дискретных систем существенно упрощается в том случае, когда все величины рассматриваются в дискретные равноотстоящие моменты времени.

Решетчатые функции и разностные уравнения. Решетчатая функция времени $x[nT]$, или в сокращенной записи $x[n]$ - это математическая функция, значения которой определены в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени $t = nT$, где n - целое положительное число 0, 1, 2 ..., а T - период дискретности. То есть решетчатая функция представляет собой числовую последовательность:

$$x[0], x[1T], x[2T], x[3T], \dots, x[kT], \dots$$

Если период дискретности T задан, то решетчатая функция однозначно формируется из исходной непрерывной. Операция замены непрерывной функции решетчатой

$$x[nT] = x[n] = x(t) \Big|_{t=nT} \quad (1.2)$$

показана на рис. 1.3.

Обратная задача - формирование непрерывной функции из решетчатой - не может быть решена однозначно без дополнительных сведений о поведении функции в интервале между точками $t = nT$, так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций.

Возникает вопрос, при каких условиях возможно точное восстановление квантованной функции. Ответ на него дает теорема Котельникова-Шеннона [5]: непрерывный сигнал $x(t)$, частотный спектр которого ограничен полосой $0 < f < f_n$, полностью определяется последовательностью своих дискретных значений, если период повторения T этих значений удовлетворяет условию

$$T < \frac{1}{2f_n} \quad \text{или} \quad T < \frac{\pi}{\omega_n}, \quad (1.3)$$

где $f_n [\text{Гц}]$, $\omega_n [\text{с}^{-1}]$ - частота пропускания.

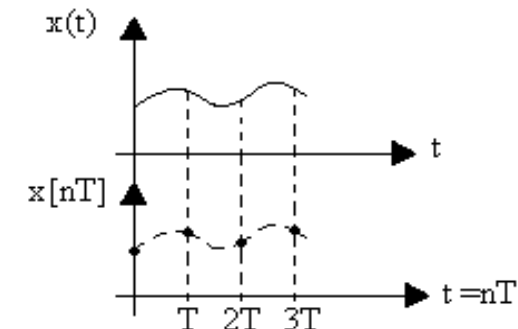


Рис. 1.3. Временные диаграммы изменения непрерывной функции $x(t)$ и решетчатой функции $x[nT]$

Смещенная решетчатая функция времени представляет собой числовую последовательность:

$$x[\sigma T], x[1T+\sigma T], x[2T+\sigma T], x[3T+\sigma T], \dots, x[kT+\sigma T], \dots,$$

образованную в результате выборки значений функции $x(t)$ в точках $t = nT + \sigma T$ оси времени

$$x[nT, \sigma T] = x[n, \sigma] = x(nT + \sigma T) = x(t) \Big|_{t=nT+\sigma T}, \quad (1.4)$$

где σ - постоянное число из интервала $0 \leq \sigma < 1$.

Параметр σ рассматривается в качестве относительного (безразмерного) времени, отсчитываемого от начала очередного (n -го) интервала повторения. Его иногда называют локальным (местным) временем.

Смещенная решетчатая функция $x[n, \sigma]$ для всех возможных значений σ позволяет однозначно восстановить “породившую” ее непрерывную функцию $x(t)$.

Своего рода “дискретными аналогами” производных и интегралов непрерывных функций для решетчатых функций являются *конечные разности и суммы*.

Конечные разности решетчатых функций бывают двух видов: прямые (упреждающие) и обратные (отстающие).

Первая прямая разность

$$\Delta x[n, \sigma] = x[n+1, \sigma] - x[n, \sigma] \quad (1.5)$$

и первая обратная разность

$$\nabla x[n, \sigma] = x[n, \sigma] - x[n-1, \sigma]. \quad (1.6)$$

Разности произвольного порядка k определяются при помощи рекуррентных соотношений:

$$\Delta^k x[n, \sigma] = \Delta \{ \Delta^{k-1} x[n, \sigma] \} = \Delta^{k-1} x[n+1, \sigma] - \Delta^{k-1} x[n, \sigma], \quad (1.7)$$

$$\nabla^k x[n, \sigma] = \nabla \{ \nabla^{k-1} x[n, \sigma] \} = \nabla^{k-1} x[n, \sigma] - \nabla^{k-1} x[n-1, \sigma] \quad (1.8)$$

или формул общего вида

$$\Delta^k x[n, \sigma] = \sum_{v=0}^k (-1)^v c_k^v x[n+k-v, \sigma], \quad (1.9)$$

$$\nabla^k x[n, \sigma] = \sum_{v=0}^k (-1)^v c_k^v x[n-v, \sigma], \quad (1.10)$$

где биномиальные коэффициенты (число сочетаний)

$$c_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!}. \quad (1.11)$$

Прямая и обратная разности связаны соотношением

$$\nabla^k x[n, \sigma] = \Delta^k x[n-k, \sigma]. \quad (1.12)$$

Соотношения (1.9) и (1.10) показывают, что для вычисления разности k -го порядка в некоторой точке $[n, \sigma]$ требуется знать значение функции $x[n, \sigma]$ в $(k+1)$ -й точке. Для прямой разности этими значениями являются текущее $x[n, \sigma]$ и последующие $x[n+1, \sigma]$, $x[n+2, \sigma]$, ..., $x[n+k, \sigma]$ значения; вычисление обратной разности требует знания предыдущих $x[n-1, \sigma]$, $x[n-2, \sigma]$, ..., $x[n-k, \sigma]$ значений последовательности $x[n, \sigma]$.

Обратные разности обладают важной особенностью. Если решетчатая функция определена только для положительных значений аргумента, т.е. $x[n, \sigma] \equiv 0$ при $n < 0$, то, как следует из (1.10), в точке $n = 0$ k -я разность

$$\nabla^k x[0, \sigma] = x[0, \sigma] \quad (1.13)$$

для любого целого положительного k .

Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до t для решетчатой являются неполная сумма

$$x_{\Sigma} [n, \sigma] = \sum_{v=0}^{n-1} x[v, \sigma] \quad (1.14)$$

и полная сумма

$$x_{\bar{\Sigma}} [n, \sigma] = \sum_{v=0}^n x[v, \sigma] \quad (1.15)$$

Отличие (1.15) от (1.14) заключается в том, что значение $x[n, \sigma]$ в момент времени $t = nT + \sigma T$ также участвует в формировании результата.

Разностные уравнения (уравнения в конечных разностях) связывают между собой решетчатые функции и их конечные разности. При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения m -го порядка имеют вид [2]

$$b_0 \Delta^m y[n, \sigma] + b_1 \Delta^{m-1} y[n, \sigma] + \dots + b_{m-1} \Delta y[n, \sigma] + b_m y[n, \sigma] = f[n, \sigma], \quad (1.16)$$

где $f[n, \sigma]$ - заданная, а $y[n, \sigma]$ - искомая решетчатые функции. При $f[n, \sigma] \equiv 0$ уравнение (1.16) становится однородным разностным уравнением, решением которого будет $y[n, \sigma]$.

При использовании (1.9) разностное уравнение (1.16) можно записать в другом виде:

$$a_0 y[n+m, \sigma] + a_1 y[n+m-1, \sigma] + \dots + a_m y[n, \sigma] = f[n, \sigma]. \quad (1.17)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются

$$a_k = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (1.18)$$

где биномиальные коэффициенты (число сочетаний)

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!}. \quad (1.19)$$

При использовании обратных разностей неоднородные линейные разностные уравнения m -го порядка будут

$$b_0 \nabla^m y[n, \sigma] + b_1 \nabla^{m-1} y[n, \sigma] + \dots + b_{m-1} \nabla y[n, \sigma] + b_m y[n, \sigma] = f[n, \sigma]. \quad (1.20)$$

С учетом (1.10) последнее выражение приобретает вид

$$a_0 y[n, \sigma] + a_1 y[n-1, \sigma] + \dots + a_m y[n-m, \sigma] = f[n, \sigma]. \quad (1.21)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (1.22)$$

где биномиальные коэффициенты (число сочетаний)

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!}. \quad (1.23)$$

Разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения $y[n+m, \sigma]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ для уравнения (1.17) и заданных начальных значений $y[0, \sigma], y[1, \sigma], \dots, y[m-1, \sigma]$ или значения $y[n, \sigma]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ для уравнения (1.21) и заданных начальных значений $y[n-m, \sigma], y[n-m+1, \sigma], \dots, y[n-1, \sigma]$.

Решение уравнения (1.21) при $\sigma = 0$ представляет собой рекуррентную формулу:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ f[n] - \sum_{i=1}^m a_i y[n-i] \right\}, \quad \text{для } n=0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

при нулевых начальных условиях $y[n] \equiv 0$ при $n < 0$. Структурная схема решения приведена на рис. 1.4.

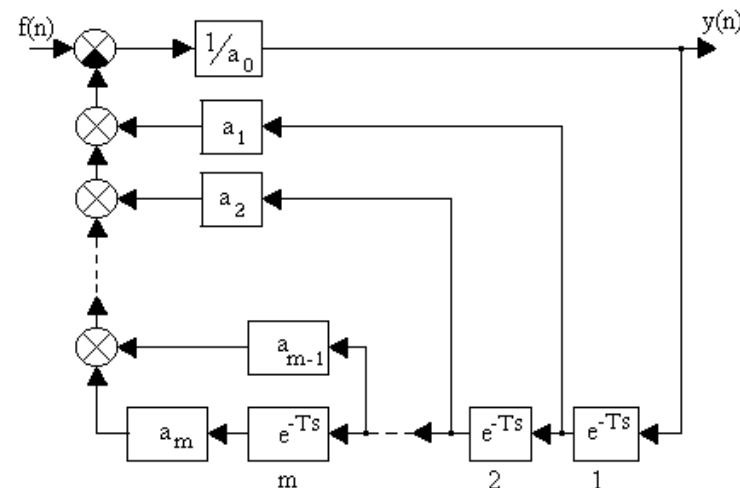


Рис. 1.4. Структурная схема решения разностного уравнения

Общее решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y[n, \sigma] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n, \quad (1.25)$$

где z_i - корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (1.26)$$

C_i - постоянные коэффициенты.

Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используются дискретное преобразование Лапласа, z -преобразование, w -преобразование, а также частотные методы.

Z - преобразование. Подобно тому, как применение преобразования Лапласа к линейным дифференциальным уравнениям дало возможность получить удобную методику анализа непрерывных систем, для дискретных систем также был разработан ряд специальных преобразований. Из них наибольшее распространение получили дискретное преобразование Лапласа, введенное в 1949 г. Я.З.Цыпкиным [18], и z -преобразование, предложенное в конце 40-х годов Штибицем и Шенноном.

Z-преобразованием решетчатой функции $x[nT]$ называется функция комплексного аргумента z , определяемая выражением

$$X(z) = Z\{x[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \times z^{-n} \quad (1.27)$$

при $|z| > R=1/\rho$, где ρ - радиус сходимости ряда.

Функция $x[nT]$ называется оригиналом, а функция $X(z)$ - изображением или *z*-преобразованием функции $x[nT]$.

Преобразование, в котором $z = e^{sT}$, было введено Я.З.Цыпкиным под названием “дискретное преобразование Лапласа”.

Z-преобразование (1.27) дает возможность получить из $X(z)$ значение ординат решетчатой функции $x[nT]$ в моменты квантования. Но в системах управления с непрерывными динамическими частями процесс непрерывен и между моментами $n = 0, 1, 2 \dots$ Для нахождения этих ординат необходимо рассмотреть последовательности для других дискретных моментов с тем же интервалом повторения, но смещенных на значение σT : $t = (n+\sigma)T$ при $0 \leq \sigma \leq 1$. Это можно делать с помощью модифицированного *z*-преобразования.

Модифицированное z-преобразование решетчатой функции $x[nT+\sigma T]$:

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{x[nT, \sigma T]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT, \sigma T] \times z^{-n}. \quad (1.28)$$

Функция $X(z, \sigma)$, определяемая выражением (1.28), называется *z*-преобразованием непрерывной функции времени $x(t)$ и обозначается как

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{x(t)\}; \quad (1.29)$$

z-преобразование функции $x(t)$ можно также представить следующим образом:

$$X(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{X(s)\}, \quad (1.30)$$

где $X(s)$ - преобразование Лапласа от $x(t)$. В этом случае подразумевается, что преобразованию подвергается функция времени и запись (1.30) носит чисто формальный характер.

Т а б л и ц а 1.1

Z - преобразования функций времени

$x(t)$	$X(s)$	$x[nT]$	$X(z)$	$X(z, \sigma)$
$\delta(t)$	1	$\delta[nT]$	1	—
$1(t)$	$1/s$	$1[nT]$	$z/(z-1)$	$z/(z-1)$
t	$1/s^2$	nT	$Tz/(z-1)^2$	$Tz/(z-1)^2 + T\sigma z/(z-1)$

$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$z/(z-d)$ ($d=e^{-\alpha T}$)	...
$t^2/2!$	$1/s^3$	$(nT)^2/2!$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$...
$te^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)^2$	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zdT}{(z-d)^2}$ ($d=e^{-\alpha T}$)	...
$\frac{t^2}{2!}e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)^3$	$\frac{(nT)^2}{2!}e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)dT^2}{2!(z-d)^3}$ ($d=e^{-\alpha T}$)	...

Для нахождения *z*-изображений решетчатых функций по заданному оригиналу и наоборот имеются специальные таблицы [2, 15, 17], фрагмент такой таблицы приведен выше. Необходимо отметить, что все функции времени, имеющие одинаковые значения в дискретные моменты времени, обладают одинаковыми *z*-преобразованиями и поэтому связь между функцией времени и ее *z*-изображением не является взаимно однозначной. Однако, семейство модифицированных *z*-преобразований решетчатой функции для всех σ от 0 до 1 однозначно определяет непрерывную функцию.

Свойства *z*-преобразования изложены в [2], поэтому ограничимся рассмотрением некоторых из них, которые потребуются в дальнейшем.

1. *Свойство линейности.* Если $F_1(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{f_1(t)\}$ и $F_2(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{f_2(t)\}$, то

$$Z_{\sigma}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(z, \sigma) + a_2 F_2(z, \sigma). \quad (1.31)$$

2. *Теорема сдвига (смещения).* Если $Z_{\sigma}\{f(t)\} = F(z, \sigma)$ и τ - произвольное положительное число, тогда

$$Z_{\sigma}\{f(t-\tau)\} = \begin{cases} z^{-(m+1)} F(z, 1+\sigma-\bar{\tau}), & 0 \leq \sigma < \bar{\tau} \\ z^{-m} F(z, \sigma-\bar{\tau}), & \bar{\tau} \leq \sigma < 1 \end{cases} \quad (1.32)$$

где $\tau = mT + \bar{\tau}T$, m - целая, $\bar{\tau}$ - дробная часть числа τ/T ; если $\tau = mT$, тогда

$$Z_{\sigma}\{f(t-mT)\} = z^{-m} F(z, \sigma). \quad (1.33)$$

3. *Изображение обратных разностей*

$$Z\{\nabla^k f[nT]\} = (1 - z^{-1})^k F(z). \quad (1.34)$$

4. Изображение конечных сумм:

$$\text{полных} \quad Z \left\{ \sum_{v=0}^n f[vT] \right\} = \frac{z}{z-1} F(z), \quad (1.35)$$

$$\text{неполных} \quad Z \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} f[vT] \right\} = \frac{1}{z-1} F(z). \quad (1.36)$$

5. *Предельные значения.* Если дискретные значения функции в установившемся режиме существуют, то они могут быть найдены путем следующего предельного перехода:

$$f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[nT] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z), \quad (1.37)$$

начальное значение функции оригинала:

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow 0} f[nT] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z). \quad (1.38)$$

6. *Свертка функций.* Если $F_1(z) = Z\{f_1(t)\}$ и $F_2(z) = Z\{f_2(t)\}$, то

$$Y(z) = F_1(z) \times F_2(z) = Z \left\{ \sum_{k=0}^n f_1[kT] \times f_2[(n-k)T] \right\} \quad (1.39)$$

и

$$y[nT] = \left\{ \sum_{k=0}^n f_1[kT] \times f_2[(n-k)T] \right\} \quad (1.40)$$

7. *Формула обращения.* Дискретные значения функции по ее z-преобразованию определяют следующим контурным интегралом:

$$f[nT] = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{j2\pi T} \oint_{|z|=1} F(z) z^{n-1} dz. \quad (1.41)$$

8. *Изображение разностных уравнений.* Пусть разностное уравнение, связывающее выходную координату $y[nT]$ импульсной системы с ее входным воздействием $f[nT]$, имеет следующий вид:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = b_0 f[n] + b_1 f[n-1] + \dots + b_l f[n-l], \quad (1.42)$$

при $m \geq l$ и $y[n] \equiv 0, f[n] \equiv 0$ для всех $n < 0$.

Подвергнув исходное уравнение z-преобразованию, получим

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_m z^{-m} Y(z) = b_0 F(z) + b_1 z^{-1} F(z) + \dots + b_l z^{-l} F(z),$$

которое можно переписать в виде

$$A(z)Y(z) = B(z)F(z), \quad (1.43)$$

где полиномы

$$A(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \quad \text{и} \quad B(z) = \sum_{i=0}^l b_i z^{-i}. \quad (1.44)$$

Из (1.43) находим изображение выходной координаты

$$Y(z) = W(z)F(z), \quad (1.45)$$

$$\text{где} \quad W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (1.46)$$

По аналогии с определением передаточной функции непрерывных систем выражение $W(z)$ называется дискретной передаточной функцией импульсной системы.

Данная запись отличается от передаточной функции для непрерывных систем тем, что переменная z в полиномах имеет отрицательные степени. Для того, чтобы была полная аналогия с передаточными функциями непрерывных систем, степень переменной z делают положительной путем домножения числителя и знаменателя выражения (1.46) на z^m . Тогда получим формулу, которая полностью аналогична записи для непрерывной функции

$$W(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_l z^{m-l}}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}. \quad (1.47)$$

Задача получения разностного уравнения по дискретной передаточной функции решается в обратной последовательности.

Пример. Написать разностное уравнение, связывающие выходную координату $y[nT]$ и входное воздействие $f[nT]$ импульсной системы, заданной передаточной функцией

$$W(z) = \frac{b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Решение. Домножим числитель и знаменатель $W(z)$ на z^{-2} . В результате получим

$$W(z) = \frac{b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{F(z)}.$$

На основании последнего выражения разностное уравнение будет

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_1 f[n-1] + b_2 f[n-2].$$

Его решение при нулевых начальных условиях $y[n] \equiv 0$, $f[n] \equiv 0$ для всех $n < 0$:

$$y[n] = [1/a_0] \times \{b_1 f[n-1] + b_2 f[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]\}.$$

Полученному решению соответствует структурная схема, приведенная на рис. 1.5.

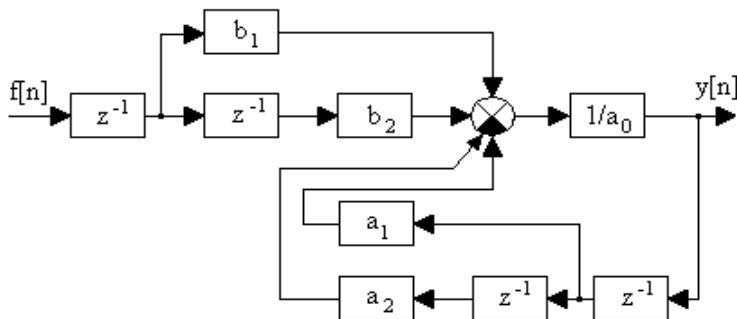


Рис. 1.5. Структурная схема импульсной системы

Комплексный спектр решетчатой функции времени. Комплексный спектр решетчатой функции времени $f[n, \sigma]$ представляет собой комплексную функцию вещественного переменного ω , определяемую следующим выражением:

$$F(e^{j\omega T}, \sigma) = F(z, \sigma) \Big|_{z=e^{j\omega T}} \quad \text{при } -\infty < \omega < \infty. \quad (1.48)$$

Таким образом, для получения комплексного спектра необходимо в изображении решетчатой функции произвести замену $z = e^{j\omega T}$, откуда следует, что функция z является периодической функцией ω с периодом, равным $2\pi/T$. По этой причине комплексный спектр решетчатой функции также является периодической функцией ω того же самого периода:

$$F(e^{j\omega T}, \sigma) = F[e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T})T}, \sigma] \quad (1.49)$$

и, следовательно, может рассматриваться на любом интервале значений ω , длина которого равна $2\pi/T$. В качестве такого интервала принят интервал

$$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}. \quad (1.50)$$

Подобно любой комплексной функции спектр (1.48) может быть представлен в показательной или алгебраической форме записи:

$$F(e^{j\omega T}, \sigma) = A(\omega, \sigma) \times e^{j\psi(\omega, \sigma)} = U(\omega, \sigma) + jV(\omega, \sigma), \quad (1.51)$$

где $A(\omega, \sigma)$, $\psi(\omega, \sigma)$, $U(\omega, \sigma)$, $V(\omega, \sigma)$ называются соответственно амплитудным, фазовым, вещественным и мнимым спектрами решетчатой функции $f[n, \sigma]$. При фиксированном значении ω спектр (1.51) изображается вектором в плоскости (U, jV) ; при изменении ω от $-\pi/T$ до $+\pi/T$, конец вектора $F(e^{j\omega T}, \sigma)$ прочерчивает некоторую кривую, которая является графическим изображением спектра.

1.4. Передаточные функции разомкнутых импульсных систем

Разомкнутая линейная амплитудная импульсная система (АИС) может быть схематически представлена в виде последовательного соединения импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ) (рис. 1.6). Подобные системы называют *импульсными фильтрами*.

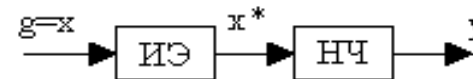


Рис. 1.6. Функциональная схема разомкнутой импульсной системы:
ИЭ - импульсный элемент; НЧ - непрерывная часть

Импульсный элемент преобразует задающее воздействие $g(t)$ в последовательность импульсов x^* , амплитуда которых пропорциональна входному непрерывному сигналу. Импульсная последовательность после прохождения через непрерывную часть вследствие сглаживающих свойств последней превращается в непрерывную величину на выходе $y(t)$.

При исследовании импульсной системы ее структуру приводят к расчетной схеме (рис. 1.7) путем замены импульсного элемента последовательным соединением *простейшего импульсного элемента* (ПИЭ) и непрерывного фильтра, который называется *формирующим элементом* (ФЭ). Простейший импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал в мгновенные им-

пульсы в виде δ -функций, модулированные по площади, а формирующий элемент формирует импульс заданной формы из δ -функций, соответствующей форме выходного импульса реального импульсного элемента. Форма импульса реального импульсного элемента определяет импульсную функцию формирующего элемента $w_{\Phi\Xi}(t)$. Следовательно, передаточная функция формирующего элемента может быть определена как изображение формы импульса по Лапласу, т.е.

$$W_{\Phi\Xi}(s) = L[w_{\Phi\Xi}(t)]. \quad (1.52)$$

Формирующий элемент объединяется с непрерывной частью системы в приведенную непрерывную часть.

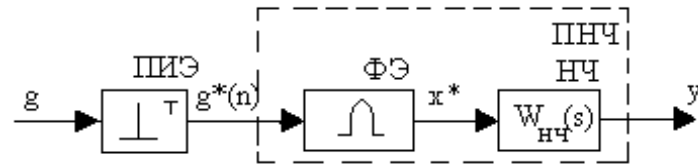


Рис. 1.7. Расчетная функциональная схема разомкнутой импульсной системы: ПИЭ - простейший импульсный элемент; ФЭ - формирующий элемент; НЧ - непрерывная часть; ПНЧ - приведенная непрерывная часть

Таким образом, линейную импульсную систему с амплитудно-импульсной модуляцией приводят к расчетной структуре, состоящей из последовательного соединения простейшего импульсного элемента и приведенной непрерывной части, передаточная функция которой

$$W_{\text{ПНЧ}}(s) = W_{\Phi\Xi}(s) \times W_{\text{НЧ}}(s), \quad (1.53)$$

где $W_{\text{НЧ}}(s)$ - передаточная функция непрерывной части системы.

Для получения математического описания разомкнутой импульсной системы установим связь между ее входной и выходной координатами.

Если внешнее воздействие $g(t)$ приложено ко входу простейшего импульсного элемента, то на его выходе появляется последовательность мгновенных импульсов $g^*[nT]$, модулированных внешним воздействием (рис. 1.8). Выходной сигнал простейшего импульсного элемента

$$g^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g[nT] \delta(t - nT). \quad (1.54)$$

Таким образом, на выходе простейшего импульсного элемента образуются мгновенные импульсы (δ -функции), площадь каждого из которых пропор-

циональна значениям входной величины в дискретные моменты времени. На рис. 1.8 δ -функции условно изображены в виде стрелок, длина которых соответствует дискретным значениям входной величины.

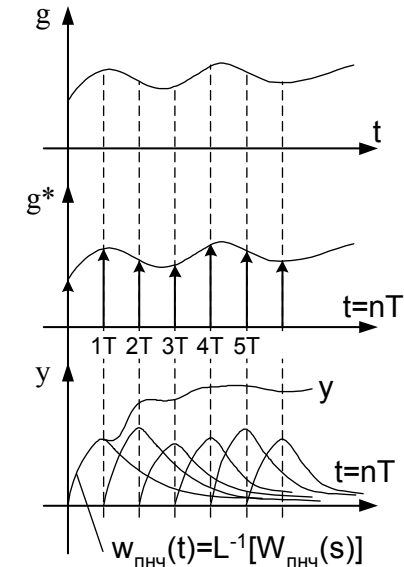


Рис. 1.8. Временные диаграммы изменения сигналов импульсной разомкнутой системы

Последовательность импульсов g^* воздействует на приведенную непрерывную часть системы. Реакция приведенной непрерывной части на мгновенный импульс представляет собой ее импульсную функцию

$$w_{\text{ПНЧ}}(t) = L^{-1}[W_{\text{ПНЧ}}(s)], \quad (1.55)$$

где L^{-1} - знак обратного преобразования Лапласа.

На основании принципа суперпозиции можно определить выходную величину разомкнутой линейной импульсной системы

$$y(t) = \sum_{k=0}^n g[kT] w_{\text{ПНЧ}}(t - kT). \quad (1.56)$$

Очевидно, что непрерывно меняющаяся выходная величина разомкнутой импульсной системы определяется мгновенными значениями входного воздействия в дискретные моменты времени $t = nT$.

Для дискретных моментов времени

$$y[n, \sigma] = \sum_{k=0}^n g[k] w_{\text{ПНЧ}}[n - k, \sigma]. \quad (1.57)$$

Последнее выражение устанавливает связь между входной g и выходной y величинами разомкнутой импульсной системы, которые представлены решетчатыми функциями.

Подвергнув формулу (1.57) z -преобразованию, на основании свертки функций получим уравнение разомкнутой импульсной системы в изображениях:

$$Y(z, \sigma) = W(z, \sigma)G(z), \quad (1.58)$$

где $Y(n, \sigma) = Z_{\sigma}\{y[n, \sigma]\}$; $G(z) = Z\{g[n]\}$; $W(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{w_{\text{пнч}}[n, \sigma]\}$.

Выражение

$$W(z, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\text{пнч}}[n, \sigma] z^{-n} \quad (1.59)$$

называется дискретной передаточной функцией разомкнутой импульсной системы.

Особенностью дискретной передаточной функции, как следует из (1.59), является то, что она зависит от относительного времени σ , т.е. изменяется с течением времени внутри каждого периода дискретности.

Однако большинство задач по исследованию дискретных систем может быть решено при использовании передаточной функции $W(z)$.

При практических расчетах часто представляют z -преобразование непрерывной функции $w_{\text{пнч}}(t)$ в виде выражения

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{W_{\text{пнч}}(s)\}. \quad (1.60)$$

Таким образом, дискретная передаточная функция определяется по импульсной функции приведенной непрерывной части системы. В случае, когда приведенная непрерывная часть состоит из параллельно включенных звеньев и ее передаточная функция

$$W_{\text{пнч}}(s) = \sum_{i=1}^k W_i(s),$$

дискретная передаточная функция может быть определена суммированием передаточных функции, определенных для каждого звена в отдельности:

$$W(z) = \sum_{i=1}^k W_i(z).$$

В отличие от непрерывных систем подобное правило не имеет места для случая последовательно включенных звеньев с общей передаточной функцией

$$W_{\text{пнч}}(s) = \prod_{i=1}^k W_i(s)$$

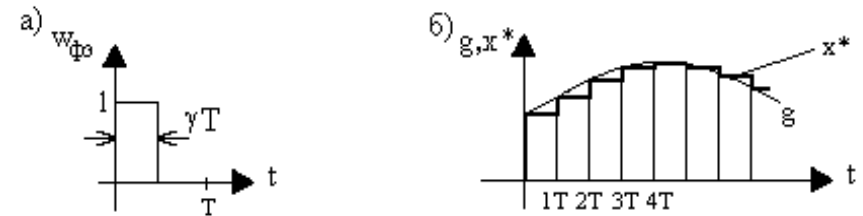
и общим импульсным элементом на входе. В этом случае

$$W(z) \neq \prod_{i=1}^k W_i(z)$$

и передаточная функция $W(z)$ должна определяться по результирующей импульсной функции приведенной непрерывной части системы.

Для нахождения дискретных передаточных функций можно пользоваться таблицами соответствий между функциями времени, их изображениями по Лапласу и их z -изображениями.

В большинстве случаев импульсный элемент формирует прямоугольные или близкие к прямоугольным импульсы длительности $T_{\text{имп}} = \gamma T$, то есть импульсная функция формирующего элемента имеет вид, представленный на рис. 1.9, а [15].



1.9. Выходная величина формирующего элемента

Рис.

Прямоугольный импульс единичной высоты и длительности γT можно представить как

$$w_{\Phi\Delta}(t) = \begin{cases} 1(t), & 0 \leq t \leq \gamma T; \\ 0, & t > \gamma T. \end{cases}$$

В этом случае передаточная функция формирующего элемента

$$W_{\Phi\Delta}(s) = L[w_{\Phi\Delta}(t)] = \int_0^{\gamma T} 1(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\gamma T} = -\frac{1}{s} e^{-\gamma Ts} + \frac{1}{s}.$$

Отсюда

$$W_{\Phi\Delta}(s) = L[w_{\Phi\Delta}(t)] = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}. \quad (1.61)$$

Тогда расчетное соотношение для дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы можно получить из (1.60)

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma} \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma T s}}{s} W_{\text{нч}}(s) \right\} = W_1(z, \sigma) - W_{1\gamma}(z, \sigma), \quad (1.62)$$

где

$$W_1(z, \sigma) = Z_{\sigma} \left\{ \frac{1}{s} W_{\text{нч}}(s) \right\};$$

$$W_{1\gamma}(z, \sigma) = Z_{\sigma} \left\{ \frac{e^{-\gamma T s}}{s} W_{\text{нч}}(s) \right\}.$$

Передаточную функцию $W_{1\gamma}(z, \sigma)$ можно выразить через передаточную функцию $W_1(z, \sigma)$ в соответствии с теоремой сдвига (1.32). В результате получим

$$W_{1\gamma}(z, \sigma) = \begin{cases} z^{-1} W_1(z, 1 + \sigma - \gamma), & 0 \leq \sigma < \gamma; \\ W_1(z, \sigma - \gamma), & \gamma \leq \sigma < 1. \end{cases}$$

При $\sigma = 0$ $W_{1\gamma}(z) = z^{-1} W_1(z, 1 - \gamma)$.

Частные случаи.

1. Если импульсный элемент генерирует короткие по сравнению с периодом дискретности прямоугольные импульсы, т.е. $\gamma \ll 1$, то можно приближенно принять $e^{-\gamma T s} \approx 1 - \gamma T s$. Тогда получим

$$W(z, \sigma) = \gamma T Z_{\sigma} \{ W_{\text{нч}}(s) \}. \quad (1.63)$$

Формула (1.63) справедлива, если пренебречь влиянием конечной длительности импульса. В большинстве случаев для выполнения достаточно, чтобы постоянные времени непрерывной части системы были больше длительности импульса, т.е. $T_i \gg \gamma T$ ($i = 1, 2, 3, \dots$).

2. Если импульсный элемент генерирует прямоугольные импульсы, длительность которых совпадает с периодом дискретности, т.е. $\gamma = 1$ (рис. 1.9,б). Подобным образом работают, например, системы с ЦВМ. Такой формирующий элемент называется экстраполятором нулевого порядка или запоминающим элементом. Дискретная передаточная функция в этом случае будет

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma} \left\{ \frac{1 - e^{-T s}}{s} W_{\text{нч}}(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z_{\sigma} \left\{ \frac{W_{\text{нч}}(s)}{s} \right\}.$$

Таким образом, расчетное соотношение для дискретной передаточной функции разомкнутой цифровой системы упрощается:

$$W(z, \sigma) = \frac{z-1}{z} Z_{\sigma} \left\{ \frac{W_{\text{нч}}(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} W_1(z, \sigma). \quad (1.64)$$

Пример. Определить дискретную передаточную функцию импульсной системы, у которой импульсный элемент формирует прямоугольные импульсы длительности $\gamma = 0,2$ с периодом дискретности $T=1$ с, а непрерывная часть задана передаточной функцией:

$$W_{\text{нч}}(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)} \quad \text{при } k=10 \text{ с}^{-1}, T_1=2 \text{ с}.$$

Р е ш е н и е . Дискретную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы находим по выражению (1.62), представляя дробь $W_{\text{нч}}(s)/s$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{k}{s^2(T_1 s + 1)} = \frac{k}{s^2} - \frac{kT_1}{s} + \frac{kT_1}{s + \frac{1}{T_1}} = k \left[\frac{1}{s^2} - \frac{T_1}{s} + \frac{T_1}{s + \frac{1}{T_1}} \right].$$

С помощью таблицы соответствий найдем модифицированное z-преобразование для каждого из слагаемых в правой части полученного выражения:

$$W_1(z, \sigma) = k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{T\sigma z}{z-1} - \frac{T_1 z}{z-1} + \frac{T_1 z d^{\sigma}}{z-d} \right],$$

где $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$.

Частные случаи.

1. При $\sigma = 0$

$$W(z) = 2 \left[\frac{1}{z-1} - \frac{0.6}{z-0.6} \right] = 2 \left[\frac{z-0.6 - z \cdot 0.6 + 0.6}{(z-1)(z-0.6)} \right] = \frac{0.8z}{(z-1)(z-0.6)}.$$

2. При $\sigma = 0$ и $\gamma = 1$

$$W(z) = 10 \left[\frac{1}{z-1} - \frac{0.8}{z-0.6} \right] = \frac{2(z+1)}{(z-1)(z-0.6)}.$$

3. При $\sigma = 0$ и $\gamma \ll 1$, так как $T_1 \gg \gamma T$

$$W(z) = 2 \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.6} \right] = \frac{0.8z}{(z-1)(z-0.6)}.$$

1.5. Структурные схемы и передаточные функции замкнутых дискретных систем

Замкнутая линейная амплитудная импульсная система (АИС), включающая в себя импульсный элемент (ИЭ), непрерывную часть (НЧ) и датчик рассогласования (ДР), может быть представлена в виде структурной схемы [15], изображенной на рис. 1.10. Она состоит из простейшего импульсного элемента (ПИЭ) с периодом дискретности T , формирующего элемента (ФЭ) с передаточной функцией $W_{\Phi\Xi}(s)$ и непрерывной части (НЧ), разделенной на два участка с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W_2(s)$.

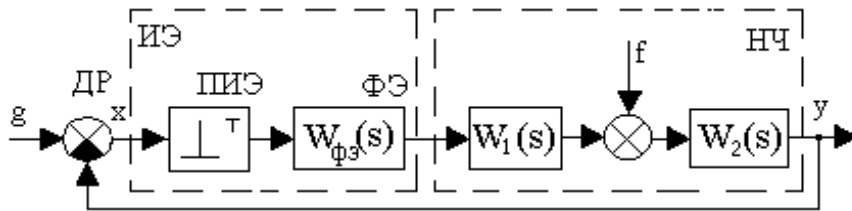


Рис. 1.10. Структурная схема замкнутой импульсной системы

Для получения математического описания замкнутой импульсной системы установим связи между выходной управляемой величиной y и рассогласованием x с одной стороны и задающим g и возмущающим f воздействиями с другой стороны.

Определим сначала дискретную передаточную функцию замкнутой импульсной системы по задающему воздействию, для чего примем $f(t)=0$.

Ко входу простейшего импульсного элемента прикладывается рассогласование, определяемое как

$$x(t) = g(t) - y(t).$$

Так как простейший импульсный элемент замыкается лишь в дискретные моменты времени $t = nT$, то на его выходе образуется сигнал, который можно записать через решетчатые функции в виде

$$x[n] = g[n] - y[n]. \quad (1.65)$$

Подвергнув уравнение (1.65) z -преобразованию, получим уравнение ошибки в изображениях:

$$X(z) = G(z) - Y(z). \quad (1.66)$$

Уравнение разомкнутой импульсной системы

$$Y(z, \sigma) = W(z, \sigma) X(z), \quad (1.67)$$

где

$$W(z, \sigma) = Z_{\sigma}\{W_{\Phi\Xi}(s)W_1(s)W_2(s)\}.$$

При $\sigma = 0$ получим изображение решетчатой функции $y[n]$

$$Y(z) = W(z) X(z). \quad (1.68)$$

Подставив (1.68) в уравнение замыкания (1.66), найдем уравнение замкнутой импульсной системы относительно изображения рассогласования:

$$X(z) = \frac{1}{1 + W(z)} G(z). \quad (1.69)$$

Если далее подставить (1.69) в (1.67), то получим уравнение замкнутой импульсной системы, описывающее процессы в любой момент времени $t = (n+\sigma)T$:

$$Y(z, \sigma) = \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)} G(z) = \Phi(z, \sigma) G(z), \quad (1.70)$$

где

$$\Phi(z, \sigma) = \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)}. \quad (1.71)$$

Функция $\Phi(z, \sigma)$ называется дискретной передаточной функцией замкнутой импульсной системы и равняется отношению модифицированного z -изображения выходной управляемой величины замкнутой импульсной системы к z -изображению входного задающего воздействия при нулевых начальных условиях:

$$\Phi(z, \sigma) = \frac{Y(z, \sigma)}{G(z)}.$$

Дискретная передаточная функция замкнутой импульсной системы, также как и разомкнутой, зависит от относительного времени σ .

При $\sigma = 0$, то есть для моментов времени $t = nT$

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}. \quad (1.72)$$

Уравнение ошибки в изображениях для любого момента времени $t = (n+\sigma)T$, характеризующее воспроизведение системой задающего воздействия, имеет вид

$$X(z, \sigma) = G(z, \sigma) - Y(z, \sigma) = G(z, \sigma) - \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)} G(z). \quad (1.73)$$

Из последнего выражения следует, что для любого σ (любого момента времени) передаточную функцию замкнутой импульсной системы по ошибке относительно задающего воздействия определить невозможно, так как она зависела бы от входного сигнала g .

Однако, дискретная передаточная функция замкнутой импульсной системы по ошибке относительно задающего воздействия существует при $\sigma = 0$, т.е. для моментов времени $t = nT$:

$$\Phi_{xg}(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}. \quad (1.74)$$

Далее найдем изображение выходной управляемой величины от возмущающего воздействия $f(t)$ при $g(t) = 0$, для чего исходную структурную схему системы (рис. 1.10) преобразуем к виду, показанному на рис. 1.11.

На основании приведенной структурной схемы z -преобразование выходной величины системы можно записать в следующем виде

$$Y(z, \sigma) = X_1(z, \sigma) - X_2(z, \sigma) = Z_\sigma \{W_2(s) F(s)\} - W(z, \sigma) Y(z). \quad (1.75)$$

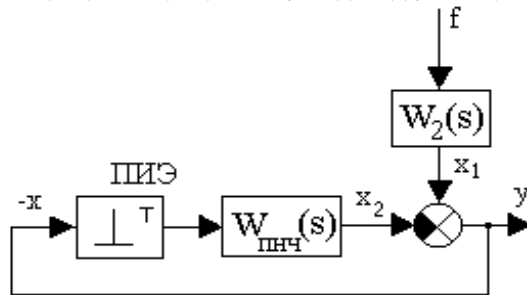


Рис. 1.11. Приведенная структурная схема замкнутой импульсной системы

При $\sigma = 0$, т.е. для дискретных моментов времени $t = nT$, это уравнение можно переписать как

$$Y(z) = \frac{Z \{W_2(s) F(s)\}}{1 + W(z)}.$$

Подставив его в (1.75), получим уравнение для выходной величины системы в z -изображениях для любого момента времени $t = (n + \sigma)T$:

$$Y(z, \sigma) = Z_\sigma \{W_2(s) F(s)\} - \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)} \cdot Z \{W_2(s) F(s)\}. \quad (1.76)$$

Отсюда следует, что ввести понятие дискретной передаточной функции замкнутой импульсной системы по возмущающему воздействию невозможно, так как она зависела бы от последнего. Для дискретных моментов времени $t = nT$, то есть при $\sigma = 0$, можно написать лишь следующее отношение

$$\frac{Y(z)}{Z \{W_2(s) F(s)\}} = 1 - \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{1}{1 + W(z)},$$

которое совпадает с выражением для дискретной передаточной функции замкнутой импульсной системы по ошибке относительно задающего воздействия в дискретные моменты времени $t = nT$.

Таким образом, в отличие от непрерывных систем, для дискретных систем при любых значениях σ имеет место только одна передаточная функция, а для $\sigma = 0$ - две передаточные функции относительно задающего воздействия; передаточные функции по возмущающему воздействию не существуют.

1.6. Частотные характеристики импульсных систем

Частотные характеристики импульсных систем определяются аналогично обыкновенным линейным системам.

Выражения для частотных характеристик импульсных систем получаются из их передаточных функций путем замены оператора z на $e^{j\omega T}$. Так как частота ω входит в показатель степени числа e , то частотные характеристики являются периодическими функциями частоты, период изменения которых равен $\pm\pi/T$. Следовательно, нельзя различить составляющие, частоты которых кратны частоте квантования импульсного элемента $\omega_0 = 2\pi/T$.

Таким образом, частотная передаточная функция разомкнутой импульсной системы имеет вид:

$$W(e^{j\omega T}, \sigma) = W(z, \sigma) \Big|_{z = e^{j\omega T}}. \quad (1.77)$$

Функция $W(e^{j\omega T}, \sigma)$ представляет собой комплексный спектр дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы $W(z, \sigma)$ и полностью характеризует частотные свойства разомкнутой системы, т.е. позволяет

вычислить установившуюся реакцию системы на решетчатое гармоническое воздействие $g[nT] = g_m \sin[\omega nT]$ произвольной частоты ω .

Как и для обыкновенных линейных систем, рассматривают амплитудную, фазовую, вещественную и мнимую частотные характеристики:

$$\begin{aligned} A(\omega, \sigma) &= \text{mod } W(e^{j\omega T}, \sigma); \\ \psi(\omega, \sigma) &= \arg W(e^{j\omega T}, \sigma); \\ U(\omega, \sigma) &= \text{Re } W(e^{j\omega T}, \sigma); \\ V(\omega, \sigma) &= \text{Im } W(e^{j\omega T}, \sigma). \end{aligned}$$

Свойства частотных характеристик импульсных систем [13].

1. Кроме зависимости от частоты ω характеристики зависят от относительного времени σ . Графически это выражается серией кривых для различных значений σ . Обычно достаточно одной характеристики при $\sigma = 0$.

2. В соответствии с периодичностью частотной передаточной функции амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(e^{j\omega T})$ полностью определяется своими значениями в интервале $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$.

3. Так как вещественная частотная характеристика является четной функцией, а мнимая - нечетной, то достаточно рассматривать интервал частот $0 \leq \omega \leq \pi/T$.

4. В крайних точках интервала $0 \leq \omega \leq \pi/T$ амплитудно-фазовая частотная характеристика принимает вещественные значения.

5. При уменьшении периода дискретности T , т.е. при увеличении частоты квантования $\omega_0 = 2\pi/T$, частотные характеристики импульсных систем приближаются к частотным характеристикам непрерывных систем. При этом частотный интервал $0 \leq \omega \leq \pi/T$ растягивается на всю ось ω при $T \rightarrow 0$.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой импульсной системы $W(e^{j\omega T})$ строится по точкам в интервале частот $0 \leq \omega \leq \pi/T$.

Частотные характеристики импульсных систем, как следует из (1.77), описываются трансцендентными выражениями. Их определение связано со сложными расчетами, поэтому на практике применяются частотные характеристики относительно абсолютной псевдо частоты λ . Переход к псевдо частоте основан на переходе от z -преобразования к w -преобразованию с помощью подстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (1.78)$$

с последующей заменой комплексной переменной w на абсолютную псевдо частоту

$$w = j\lambda T/2. \quad (1.79)$$

При этом реальная частота ω и псевдо частота λ связаны соотношением

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (1.80)$$

Удобство псевдо частоты заключается в том, что, как следует из (1.80), на частотах где выполняется условие $\omega T < 2$, она приближенно равна угловой частоте, т.е. $\lambda \approx \omega$. Нетрудно убедиться, что при изменении частоты от $-\pi/T$ до $+\pi/T$ псевдо частота принимает значение $-\infty$ до $+\infty$.

Для перехода от дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы $W(z)$ к частотной характеристике $W(j\lambda)$ следует сделать замену

$$z = \frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}, \quad (1.81)$$

то есть

$$W(j\lambda) = W(z) \Big|_{z = \frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}}. \quad (1.82)$$

Полученное уравнение может быть использовано для построения логарифмических частотных характеристик.

Приближенный способ построения ЛЧХ импульсных систем [2]. Для удобства логарифмические частотные характеристики строятся отдельно для областей низких и высоких частот. Границей, разделяющей частотную область на низкочастотную и высокочастотную, служит частота среза ω_c в предположении, что

$$\omega_c < \frac{2}{T}, \quad (1.83)$$

где T - период дискретности.

Последнее условие необходимо выполнять вследствие требований, предъявляемых к обеспечению запаса устойчивости и точности работы системы, и согласуется с теоремой Котельникова-Шеннона.

Рассмотрим методику построения ЛЧХ на примере АИС, включающей в себя экстраполятор нулевого порядка и непрерывную часть с передаточной функцией:

$$W_{\text{нч}}(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^r \prod_{i=1}^n (1 + T_i s)}. \quad (1.84)$$

При построении вводят следующие предположения.

1. Величина, обратная периоду дискретности T , больше половины частоты среза ω_c , т.е. $\omega_c < 2/T$.

2. Переход оси нуля децибел асимптотической ЛАХ непрерывной части происходит при отрицательном наклоне -20 дБ/дек.

3. Постоянным времени τ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза.

4. Имеется l ($l < n$) постоянных времени T_i ($i = 1, 2, \dots, l$), которым соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза.

При принятых допущениях для области низких частот передаточную функцию непрерывной части можно представить в виде

$$W_{\text{нч}}^{\text{H}}(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^r \prod_{i=1}^l (1 + T_i s)}, \quad (1.85)$$

а для области высоких частот

$$W_{\text{нч}}^{\text{B}}(s) = \frac{\omega_c}{s \prod_{i=l+1}^n (1 + T_i s)}. \quad (1.86)$$

По выражениям (1.85) и (1.86) на основании (1.64) и (1.82) получим частотные характеристики разомкнутой импульсной системы для области низких частот

$$W^{\text{H}}(j\lambda) = (1 - j\lambda T/2) \times \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + j\lambda \tau_j)}{(j\lambda)^r \prod_{i=1}^l (1 + j\lambda T_i)} \quad (1.87)$$

и для области высоких частот

$$W^{\text{B}}(j\lambda) = \frac{\omega_c (1 - j\lambda T/2) \left[1 + j\lambda(T/2 - T_{\Sigma}) \right]}{(j\lambda) \cdot (1 + j\lambda T/2)}, \quad (1.88)$$

$$\text{где } T_{\Sigma} = \sum_{i=l+1}^n T_i.$$

Сравнение выражения (1.87) с (1.85) показывает, что в низкочастотной области частотная передаточная функция импульсной системы может быть получена из передаточной функции непрерывной части подстановкой $s = j\lambda$ и умножением на дополнительный множитель $(1 - j\lambda T/2)$. Псевдочастота λ в

этой области практически совпадает с угловой частотой ω . Влиянием дополнительного множителя при построении частотных характеристик в низкочастотной области можно пренебречь, так как $\omega_c < 2/T$.

Таким образом, в области низких частот частотные характеристики импульсной системы совпадают с частотными характеристиками ее непрерывной части.

Начало логарифмических частотных характеристик в высокочастотной области (1.88) сливается с концом частотных характеристик, построенных в низкочастотной области. На основании (1.87) и (1.88) можно записать выражение результирующей частотной передаточной функции разомкнутой АИС

$$W(j\lambda) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + j\lambda \tau_j)}{(j\lambda)^r \prod_{i=1}^l (1 + j\lambda T_i)} \times \frac{(1 - j\lambda T/2) \left[1 + j\lambda(T/2 - T_{\Sigma}) \right]}{(1 + j\lambda T/2)}, \quad (1.89)$$

$$\text{где } T_{\Sigma} = \sum_{i=l+1}^n T_i.$$

Это выражение представляет собой произведение элементарных типовых сомножителей, поэтому его легко использовать для построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем. Результирующий фазовый сдвиг определяется как

$$\psi(\lambda) = -r \times 90 + \sum_{j=1}^m \arctg \lambda \tau_j + \arctg \lambda(T/2 - T_{\Sigma}) - 2 \arctg \lambda T/2 - \sum_{i=1}^l \arctg \lambda T_i.$$

Пример. Построить логарифмические частотные характеристики АИС с экстраполятором нулевого порядка и периодом дискретности импульсного элемента $T = 4$ с, передаточная функция непрерывной части которой

$$W_{\text{нч}}(s) = \frac{k(1 + 25s)}{s^2(1 + 0.5s)(1 + 0.3s)}.$$

Решение. Выбираем частоту среза $\omega_c < 2/T < 0.5 \text{ с}^{-1}$. В соответствии с заданными постоянными времени определяем сопрягающие частоты:

$$\omega_{\text{сопр1}} = 1/25 = 0.04 \text{ с}^{-1} - \text{низкочастотный диапазон};$$

$$\omega_{\text{сопр2}} = 1/0.5 = 2 \text{ с}^{-1} - \text{высокочастотный диапазон};$$

$$\omega_{\text{сопр3}} = 1/0.3 = 3.33 \text{ с}^{-1} - \text{высокочастотный диапазон}.$$

Следовательно, получаем:

$$W(j\lambda) = \frac{k(1 + j\lambda \cdot 25)}{(j\lambda)^2} \times \frac{(1 - j\lambda \cdot 2)[1 + j\lambda \cdot 1.2]}{(1 + j\lambda \cdot 2)},$$

где $T_\Sigma = T_1 + T_2 = 0.8$;

$$\psi(\lambda) = -2 \times 90 + \operatorname{arctg} 25\lambda + \operatorname{arctg} 1.2\lambda - 2 \operatorname{arctg} 2\lambda,$$

$$\lambda_{\text{сопр1}} = 1/25 = 0.04;$$

$$\lambda_{\text{сопр2}} = 1/2 = 0.5;$$

$$\lambda_{\text{сопр3}} = 1/1.2 = 0.8.$$

Асимптотические ЛАХ и ЛФХ, соответствующие полученным выражениям, представлены на рис. 1.12.

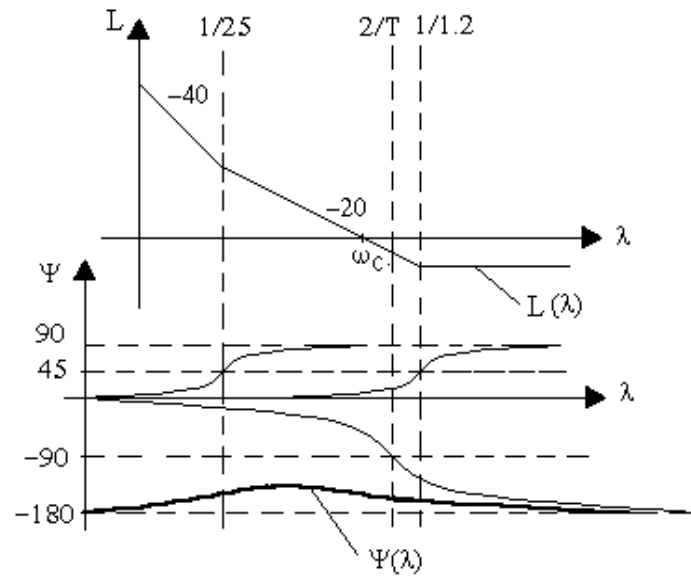


Рис. 1.12. ЛЧХ импульсной системы

1.7. Устойчивость импульсных систем

Как и для непрерывных систем, устойчивость импульсных систем является необходимым условием их работоспособности.

Устойчивость системы характеризуется ее свободным поведением, а свободное поведение определяется переходной составляющей процесса регулирования выходной величины. Линейная импульсная система называется устойчивой, если переходная составляющая процесса регулирования $y_n[n, \sigma]$ затухает с течением времени.

Сформулированное условие устойчивости сводится к выполнению равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n[n, \sigma] = 0 \quad (1.90)$$

для всех σ из интервала $0 \leq \sigma < 1$. Если хотя бы для одного значения σ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n[n, \sigma] = \infty, \quad (1.91)$$

то импульсная система называется неустойчивой. Если, наконец,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n[n, \sigma] = \text{const} \quad (1.92)$$

или не существует, то импульсная система находится на границе устойчивости.

В подавляющем большинстве случаев величина предела $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n[n, \sigma]$ при любом σ определяется его значением при $\sigma = 0$. В тех случаях, когда при $\sigma = 0$ выполняется соотношение (1.90), а при $\sigma \neq 0$ - любое из соотношений (1.91), (1.92) говорят о так называемой высокочастотной неустойчивости АИС.

Таким образом, чтобы оценить устойчивость системы, необходимо найти переходную составляющую процесса регулирования. Переходная составляющая процесса регулирования определяется решением однородного разностного уравнения замкнутой импульсной системы

$$a_0 y[n, \sigma] + a_1 y[n-1, \sigma] + \dots + a_m y[n-m, \sigma] = 0, \quad (1.93)$$

где m - порядок системы.

Решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y_n[n, \sigma] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n, \quad (1.94)$$

где z_i - корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0; \quad (1.95)$$

C_i - постоянные коэффициенты, значения которых зависят от свойств системы, характера внешнего воздействия и относительного времени σ .

Из решения (1.94) следует, что для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома замкнутой системы (полюса передаточной функции замкнутой импульсной системы $\Phi(z, \sigma)$) удовлетворяли условию

$$|z_i| < 1; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.96)$$

Если хотя бы один корень $|z_i| > 1$, система будет неустойчивой. Значением какого-либо корня $|z_i| = 1$ при всех остальных $|z_i| < 1$ определяется граница устойчивости импульсной системы.

Графически область устойчивости импульсной системы на плоскости z корней характеристического уравнения изображается единичным кругом (рис. 1.13).

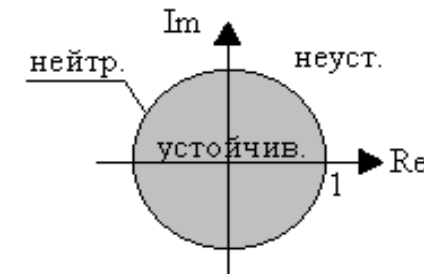


Рис. 1.13. Области устойчивости на плоскости Z

Таким образом, исследование устойчивости сводится к изучению расположения корней характеристического полинома замкнутой импульсной системы относительно единичной окружности.

Критерии устойчивости используются для исследования устойчивости импульсных систем без нахождения корней характеристического уравнения. Для импульсных систем обобщаются все критерии устойчивости, используемые для исследования непрерывных систем.

Аналог критерия Рауса-Гурвица. Условия устойчивости формулируются в виде неравенств, накладывающих ограничения на коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы (табл. 1.2).

Т а б л и ц а 1.2

Условия устойчивости импульсных систем

Степень	
---------	--

характеристического уравнения	Условия устойчивости
$m=1$	$a_0+a_1>0, \quad a_0-a_1>0$
$m=2$	$a_0+a_1+a_2>0, \quad a_0-a_1+a_2>0,$ $a_0-a_2>0$
$m=3$	$a_0+a_1+a_2+a_3>0, \quad a_0-a_1+a_2-a_3>0,$ $a_0(a_0-a_2)-a_3(a_3-a_1)>0,$ $3(a_0+a_3)-a_1-a_3>0$
и т.д.	

Сложность условий устойчивости резко возрастает с ростом степени m характеристического полинома замкнутой системы. Поэтому практически алгебраический критерий используется при $m \leq 3$.

Аналог критерия Михайлова. Для устойчивости линейной импульсной системы m -го порядка необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента функции $D(e^{j\omega T})$ при изменении частоты ω от 0 до π/T равнялось бы значению $m\pi$, то есть

$$\Delta \arg D(e^{j\omega T}) = m\pi, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/T. \quad (1.97)$$

Здесь $D(e^{j\omega T})$ получается путем замены z на $e^{j\omega T}$ в характеристическом полиноме замкнутой импульсной системы

$$D(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m, \quad z = e^{j\omega T}.$$

На рис. 1.14 приведены аналоги кривых Михайлова для устойчивой и неустойчивой импульсной системы при $m=3$.

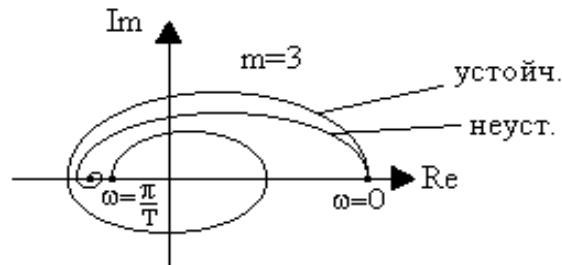


Рис. 1.14. Аналоги годографов Михайлова

Аналог критерия Найквиста. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой импульсной системы требуется, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой импульсной системы $W(e^{j\omega T})$ не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$. Для устойчивости замкнутой системы при неустойчивой разомкнутой цепи требуется, чтобы амплитудно-

фазовая характеристика разомкнутой цепи охватывала точку $(-1, j0)$ на угол π (против часовой стрелки), где p - число полюсов разомкнутой цепи, лежащих вне единичного круга $z = e^{j\omega T}$.

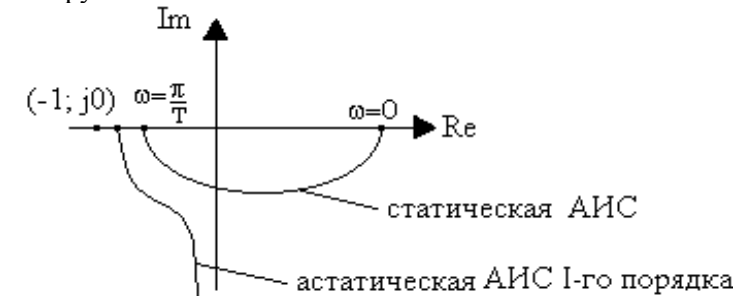


Рис. 1.15. АФЧХ устойчивых импульсных систем

На рис. 1.15 показаны амплитудно-фазовые частотные характеристики устойчивых импульсных систем.

Для пользования критериями устойчивости Гурвица и Михайлова в обычной формулировке отображают внутренность круга единичного радиуса плоскости z на левую полуплоскость комплексной переменной w (рис. 1.16) с помощью конформного преобразования [5]

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (1.98)$$

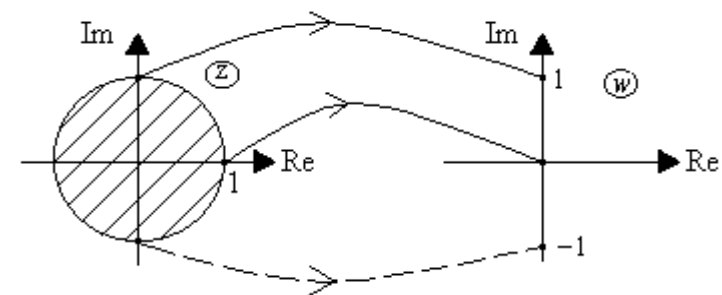


Рис. 1.16. Конформное преобразование

После подстановки z из (1.98) в (1.95) получим преобразованное характеристическое уравнение импульсной системы

$$a_0 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^m + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (1.99)$$

которое приводится к виду

$$\tilde{a}_0 w^m + \tilde{a}_1 w^{m-1} + \dots + \tilde{a}_m = 0. \quad (1.100)$$

Все корни z_i уравнения (1.95), лежащие внутри единичного круга, перейдут в левую полуплоскость w (рис. 1.16). Поэтому при использовании преобразованного характеристического уравнения (1.100) для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни w_i ($i = 1, 2, \dots, m$) имели отрицательные вещественные части. Границей устойчивости служит мнимая ось.

Для исследования устойчивости импульсных систем могут применяться также логарифмические частотные характеристики в той же формулировке, что и для обыкновенных линейных систем.

1.8. Переходные процессы в импульсных системах

Переходный процесс в импульсных системах определяется с помощью обратного z -преобразования, ряда Лорана, решения разностного уравнения, частотных методов, основанных на использовании вещественной или мнимой частотных характеристик замкнутой системы [9, 15, 17, 18].

Для расчета дискрет переходного процесса можно найти обратное z -преобразование изображения выходной величины системы $y[n, \sigma] = Z_\sigma^{-1}\{Y(z, \sigma)\}$. При этом следует воспользоваться формулой обращения (1.41), которая устанавливает, что дискретные значения переходного процесса

$$y[n, \sigma] = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} Y(z, \sigma) z^{n-1} \Big|_{z=z_i}, \quad (1.101)$$

где z_i - полюсы выражения $Y(z, \sigma)$; $i = 1, 2, \dots, k$.

Вычет в простом полюсе определяется по формуле

$$\operatorname{Res} Y(z, \sigma) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) Y(z, \sigma) z^{n-1},$$

а в полюсе кратности r

$$\operatorname{Res} Y(z, \sigma) z^{n-1} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z - z_i)^r Y(z, \sigma) z^{n-1}].$$

Дискретные значения переходного процесса могут быть найдены также путем разложения изображения выходной величины $Y(z, \sigma)$ в ряд Лорана по степеням z^{-1}

$$Y(z, \sigma) = Y_0 + Y_1 z^{-1} + Y_2 z^{-2} + Y_3 z^{-3} + \dots \quad (1.102)$$

Коэффициенты этого ряда определяют значения выходной величины замкнутой импульсной системы в дискретные моменты времени $t = (n + \sigma)T$. Так как изображение $Y(z, \sigma)$ представляет собой отношение двух полиномов, то коэффициенты ряда Y_0, Y_1, Y_2, \dots могут быть получены делением полинома числителя на полином знаменателя. При малых периодах дискретности ряд сходится медленно и объем вычислительной работы значителен.

Пример. Определить переходный процесс при единичном ступенчатом входном воздействии на выходе импульсной системы, передаточная функция которой имеет следующий вид:

$$\Phi(z) = \frac{3.71 z^2 - 1.52 z - 1}{5.74 z^3 - 7.69 z^2 + 4.12 z - 1}.$$

Решение. Z -изображение входного воздействия $G(z) = z/(z-1)$. Следовательно, $Y(z) = \Phi(z)G(z) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{3.71 z^3 - 1.52 z^2 - z}{5.74 z^4 - 13.43 z^3 + 11.81 z^2 - 5.12 z + 1} \times \frac{z^{-4}}{z^{-4}} = \\ &= \frac{3.71 z^{-1} - 1.52 z^{-2} - z^{-3}}{5.74 - 13.43 z^{-1} + 11.81 z^{-2} - 5.12 z^{-3} + z^{-4}} = \\ &= 0.64 z^{-1} + 1.25 z^{-2} + 1.42 z^{-3} + 1.34 z^{-4} + 1.2 z^{-5} + 1.11 z^{-6} + 1.08 z^{-7} + \dots \end{aligned}$$

Полученные коэффициенты сведены в табл. 1.3, на основании которой на рис. 1.17 построена кривая переходного процесса.

Т а б л и ц а 1.3

Переходный процесс

Время $t=nT$	Выходная величина $y[nT]$
0	0
1T	0.64
2T	1.25
3T	1.42
4T	1.34
5T	1.20

6T	1.11
7T	1.08
и т.д.	...

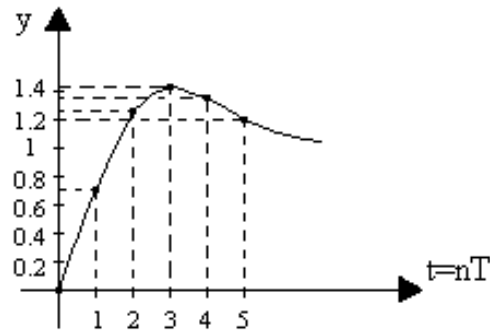


Рис. 1.17. График переходного процесса

Переходный процесс в импульсной системе может быть получен в результате решения разностного уравнения системы относительно дискретных значений входной $g[nT]$ и выходной $y[nT]$ координаты. Разностное уравнение определяется на основании дискретной передаточной функции замкнутой импульсной системы $\Phi(z)$ и имеет следующий вид (1.42)

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = b_0 g[n] + b_1 g[n-1] + \dots + b_l g[n-l], \quad (1.103)$$

при $m \geq l$ и $y[n] \equiv 0$, $f[n] \equiv 0$ для всех $n < 0$.

Решение его представляет собой рекуррентную формулу:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{i=0}^l b_i g[n-i] - \sum_{i=1}^m a_i y[n-i] \right\}; \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.104)$$

для нулевых начальных условий $y[n] \equiv 0$ и $g[n] \equiv 0$ при $n < 0$.

Формула (1.104) используется и для расчета переходных процессов в непрерывных системах после дискретизации их дифференциальных уравнений.

1.9. Точность и коррекция импульсных систем

Точность импульсных систем. Для импульсных систем, как и для непрерывных, введены определения статической ошибки, астатизма, коэффициентов ошибок, ошибки при гармоническом воздействии, а также средней квадратической ошибки [13].

Установившиеся ошибки. Точность работы импульсных систем в установившемся режиме оценивается по величине установившейся ошибки при различных типовых входных воздействиях, наиболее характерных для исследуемой системы.

В замкнутой импульсной системе (рис. 1.10) ошибка x , задающее воздействие g и возмущающее воздействие f связаны, как следует из выражений (1.73) и (1.76), следующей зависимостью относительно z -изображений

$$X(z, \sigma) = X_g(z, \sigma) + X_f(z, \sigma) = \quad (1.105)$$

$$= G(z, \sigma) - \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)} G(z) + Z \sigma \left\{ W_2(s) F(s) \right\} - \frac{W(z, \sigma)}{1 + W(z)} Z \left\{ F(s) W_2(s) \right\}.$$

Выражение (1.105) содержит z -изображения двух составляющих ошибки: $X_g(z, \sigma)$ - от задающего и $X_f(z, \sigma)$ - от возмущающего воздействий.

Установившаяся ошибка импульсной системы определяется по предельному значению решетчатой функции (1.37):

$$x(\infty, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n, \sigma] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z, \sigma) = x_g(\infty, \sigma) + x_f(\infty, \sigma), \quad (1.106)$$

где $x_g(\infty, \sigma)$ - установившаяся ошибка от задающего воздействия;

$x_f(\infty, \sigma)$ - установившаяся ошибка от возмущающего воздействия.

В большинстве случаев ограничиваются рассмотрением ошибки в дискретные моменты времени $t = nT$. Однако, надо иметь в виду, что в импульсных системах могут возникать малые колебания внутри периода дискретности в установившемся режиме.

Выражение для установившейся ошибки (1.106) при $\sigma = 0$ будет

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} \times \frac{G(z)}{1 + W(z)} \right\} + \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} \times \frac{Z \left\{ W_2(s) F(s) \right\}}{1 + W(z)} \right\} = \quad (1.107)$$

$$= x_g(\infty) + x_f(\infty).$$

Установившиеся ошибки замкнутой импульсной системы от задающего воздействия находятся при $f = 0$.

При $g(t) = g_0 \times 1(t)$ установившаяся ошибка определяется как

$$x_g(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_0}{1 + W(z)}$$

и называется статической ошибкой или ошибкой системы по положению.

При $g(t) = g_1 t$ установившаяся ошибка называется ошибкой системы от скорости и определяется как

$$x_g(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_1 T}{(z-1)W(z)}.$$

Если $g(t) = \frac{g_2 t^2}{2!}$, то получаем ошибку системы от ускорения

$$x_g(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_2 T^2}{(z-1)^2 W(z)}.$$

Из последних двух выражений следует, что установившаяся ошибка от задающего воздействия импульсной системы не только прямо пропорциональна величине задающего воздействия, но и периоду дискретности.

Импульсные системы классифицируются в соответствии с числом полюсов дискретной передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$ при $z = 1$. Если дискретная передаточная функция импульсной разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{W_1(z)}{(z-1)^r},$$

а $W_1(z)$ не содержит полюсов при $z = 1$, то при $r = 0$ система называется *статической*, при $r = 1$ - *астатической первого порядка* и т.д. В астатических системах $W(1) \rightarrow \infty$.

Для того чтобы импульсная система имела нулевую установившуюся ошибку от задающего воздействия, необходимо, чтобы степень астатизма r системы превышала степень полинома k входного воздействия, то есть

$$x_g(\infty) = 0, \text{ если } k < r;$$

$$x_g(\infty) = \frac{g_k T^k}{W(1)}, \text{ если } k = r;$$

$$x_g(\infty) = \infty, \text{ если } k > r.$$

Коэффициенты ошибок. Если задающее воздействие $g(t)$ имеет произвольный вид, предельное значение ошибки вычисляется по формуле

$$x[n] = c_0 g[n] + c_1 g'[n] + \frac{c_2}{2!} g''[n] + \dots + \frac{c_k}{k!} g^{(k)}[n], \quad (1.108)$$

где c_0, c_1, c_2, \dots - коэффициенты ошибок по положению, скорости, ускорению и т.д.

Коэффициенты ошибок находят по дискретной передаточной функции замкнутой импульсной системы по ошибке

$$c_i = i! \frac{d^i}{dz^i} \Phi_{xg}(z) \Big|_{z=1}, \text{ для } i = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (1.109)$$

Число коэффициентов находится в соответствии с наибольшей степенью полинома входного воздействия.

В астатических системах несколько первых коэффициентов ошибок равны нулю: $c_0 = c_1 = \dots = c_{r-1} = 0$, где r - степень астатизма.

Ошибки импульсных систем при гармоническом воздействии. Задающее синусоидальное воздействие $g(t) = g_m \sin(\omega t)$ произвольной частоты ω преобразуется на входе в решетчатое гармоническое воздействие $g[nT] = g_m \sin[\omega nT]$.

При этом установившаяся ошибка в линейной замкнутой импульсной системе будет

$$x[nT] = x_m \sin[\omega nT + \psi], \quad (1.110)$$

где $x_m = |\Phi_{xg}(e^{j\omega T})| \times g_m$, $\psi(\omega, \sigma) = \arg \Phi_{xg}(e^{j\omega T})$.

Как установлено в разделе 1.6, в полосе пропускания системы частотные характеристики импульсной системы практически совпадают с частотными характеристиками ее непрерывной части, поэтому для определения ошибки импульсной системы при гармоническом воздействии можно пользоваться методикой для непрерывных систем.

Статистическая точность импульсных систем исследуется аналогично непрерывным системам. При прохождении случайного сигнала через импульсную систему ее выходная координата и ошибка воспроизведения представляют собой тоже случайные процессы.

Качество работы импульсной системы при стационарных случайных воздействиях оценивается средними значениями квадрата выходной переменной

$$\overline{y^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \Phi(e^{j\omega T}) \right|^2 S_g^*(\omega) d\omega \quad (1.111)$$

и квадрата ошибки

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \Phi_{xg}(e^{j\omega T}) \right|^2 S_g^*(\omega) d\omega, \quad (1.112)$$

где $\Phi(e^{j\omega T})$ и $\Phi_{xg}(e^{j\omega T})$ - частотные передаточные функции замкнутой импульсной системы;

$S_g^*(\omega)$ - спектральная плотность решетчатого случайного процесса на входе системы.

Коррекция импульсных систем. Введение в систему корректирующих устройств необходимо, чтобы в результате этого система удовлетворяла заданным требованиям по точности и по качеству процесса управления, в том числе переходных процессов [13].

Исходя из требований составляются желаемые характеристики импульсной системы. Чтобы их реально получить, в систему вводятся корректирующие устройства. Для коррекции импульсных систем имеется большее разнообразие технических средств, чем у непрерывных систем, так как кроме непрерывных корректирующих устройств можно вводить импульсные и цифровые. Кроме того, путем коррекции импульсных систем возможно достижение конечной длительности переходных процессов.

Непрерывная коррекция. В случае непрерывной коррекции изменяют характеристики непрерывной части импульсной системы путем введения либо последовательных или параллельных корректирующих устройств, либо местной отрицательной или положительной обратной связи, в результате чего формируется передаточная функция скорректированной системы.

При расчете непрерывных корректирующих цепей целесообразно перейти от желаемой характеристики импульсной системы к желаемой характеристике ее непрерывной части. После нахождения желаемых характеристик непрерывной части задача синтеза решается так же, как она решалась для обыкновенных линейных систем автоматического управления [5, 15].

Импульсная коррекция осуществляется включением в контур системы импульсного фильтра, который преобразует входной сигнал x в последовательность импульсов u [13]. Импульсы на выходе фильтра образуются путем амплитудно-импульсной модуляции входного воздействия с необходимыми для коррекции системы преобразованиями

$$u[n] = \sum_{i=0}^k w_k[n-i]x[i], \quad (1.113)$$

где $w_k[n]$ - импульсная функция непрерывной части импульсного фильтра.

Отсюда передаточная функция импульсного фильтра определяется как

$$W_k(z) = Z\{w_k[n]\}. \quad (1.114)$$

Далее по передаточной функции (1.114) из таблиц находят импульсные корректирующие цепи [5].

Наиболее просто импульсные корректирующие устройства реализуются с помощью импульсных RC-цепей [15]. Различают три структуры импульсных RC-цепей: последовательную, с обратной связью и с каскадным соединением импульсных цепей первых двух структур.

Цифровые корректирующие фильтры реализуются с помощью цифрового вычислителя [3, 4]. В этом случае входной сигнал фильтра x преобразуется в аналого-цифровом преобразователе, и далее решение разностного уравнения

на цифровом вычислителе и выводится в непрерывную часть импульсной системы через цифро-аналоговый преобразователь.

В настоящее время широкое распространение получили цифровые системы, в которых функцию вычислительного устройства выполняют микропроцессоры и компьютеры.

Синтез цифровых систем сводится к выбору цифрового корректирующего фильтра, последовательное включение которого с непрерывной частью системы, обычно включающей в себя объект управления, регулирующий орган, исполнительный механизм, усилитель мощности и датчик, позволяет получить систему с желаемыми характеристиками. Часто в качестве таких характеристик используют аналоговые эквиваленты [9]: импульсные функции, переходные функции и частотные характеристики, что обосновано, как отмечалось выше, при достаточно высокой тактовой частоте работы цифрового вычислителя и большой разрядности преобразователей.

Рассмотрим синтез цифровой системы, импульсная функция разомкнутой цепи которой должна соответствовать импульсной функции аналогового эквивалента, т.е. $w_k[n] = w_a(t)|_{t=nT}$.

Передаточная функция разомкнутой цепи аналогового эквивалента определяется как изображение по Лапласу, т.е.

$$W_a(s) = L[w_a(t)].$$

На основании выражения (1.64) дискретная передаточная функция цифрового корректирующего устройства может быть получена следующим образом

$$W_k(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} \times \frac{W_a(s)}{W_{nc}(s)} \right\}, \quad (1.115)$$

где $W_{nc}(s)$ - передаточная функция непрерывной части цифровой системы.

Цифровая система, спроектированная таким образом, совпадает по своим свойствам с аналоговым эквивалентом только в смысле равенства дискретных значений импульсных функций, т.е. при задающем воздействии в виде δ -функций. При других входных воздействиях совпадение дискретных значений выходной величины в цифровой системе и аналоговом эквиваленте не гарантируется.

Синтез цифровых систем, который гарантирует совпадение переходных процессов в проектируемой системе и ее аналоговом эквиваленте, производится аналогичным образом, учитывая что

$$W_a(s) = sL[h_a(t)],$$

где $h_a(t)$ - переходная функция аналогового эквивалента.

В цифровых системах, дискретная передаточная функция разомкнутой цепи которых

$$W(z) = \frac{b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}{z^m}, \quad (1.116)$$

переходный процесс заканчивается за конечный промежуток времени, равный mT ; в последующие дискретные моменты времени значения $h[n]$ не изменяются и остаются равными $h[m]$.

Если нули и полюса передаточной функции непрерывной части цифровой системы на плоскости комплексного переменного z расположены внутри круга единичного радиуса, то можно спроектировать систему, в которой длительность переходного процесса равняется одному периоду дискретности T .

При синтезе цифровых систем в частотной области желаемая дискретная передаточная функция проектируемой системы определяется частотными характеристиками аналогового эквивалента. В частности, частотный метод синтеза позволяет найти передаточную функцию разомкнутой цепи аналогового эквивалента $W_a(s)$. Далее, как и в предыдущих случаях, по выражению (1.115) вычисляется дискретная передаточная функция цифрового корректирующего устройства.

После определения передаточных функций корректирующих устройств следующим этапом синтеза цифровой системы является их техническая реализация. Для этого используются следующие методы [9]:

1) метод программирования, применяемый в микропроцессорных системах и системах с компьютерами. Реализация корректирующего устройства сводится к составлению программы по его разностному уравнению;

2) метод, базирующийся на использовании цифровых фильтров, реализуемых на элементах цифровой техники по алгоритму, определяемому разностным уравнением корректирующего устройства.

В зависимости от вида представления передаточной функции цифрового фильтра различают разнообразные формы его структурных схем.

В самом общем случае дискретная передаточная функция корректирующего устройства имеет вид

$$W_k(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{1 + A(z)}, \quad (1.117)$$

где $U(z)$ и $X(z)$ - z -преобразования выходного и входного сигналов фильтра.

Эта передаточная функция соответствует рекурсивному фильтру. Если $A(z) = 0$, то будет нерекурсивный фильтр.

Из передаточной функции (1.117) следует разностное уравнение корректирующего устройства

$$u[n] + \sum_{i=1}^k a_i u[n-i] = \sum_{i=0}^k b_i x[n-i], \quad (1.118)$$

решение которого представляет собой рекуррентную формулу:

$$u[n] = \sum_{i=0}^k b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^k a_i u[n-i]. \quad (1.119)$$

Структурная схема программной реализации решения разностного уравнения (1.119) приведена на рис. 1.18. Она соответствует *прямому программированию* [3]. Для аппаратной реализации прямой схемы цифрового фильтра требуется $2k$ линий задержки.

Более экономными являются *канонические* схемы, для реализации которых требуется количество линий задержки, равное порядку передаточной функции цифрового фильтра.

Для получения первой канонической схемы (рис. 1.19) уравнение (1.119) переписывают следующим образом:

$$u[n] = \sum_{i=0}^k b_i f[n-i];$$

$$f[n] = x[n] - \sum_{i=1}^k a_i f[n-i]$$

где $f[n]$ - промежуточная переменная.

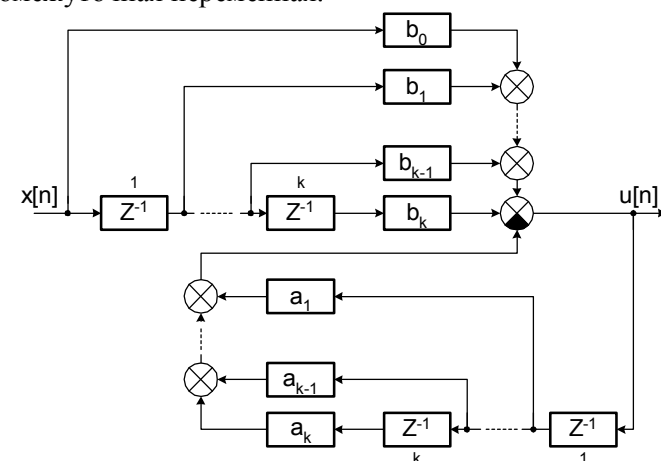


Рис. 1.18. Прямая схема цифрового фильтра

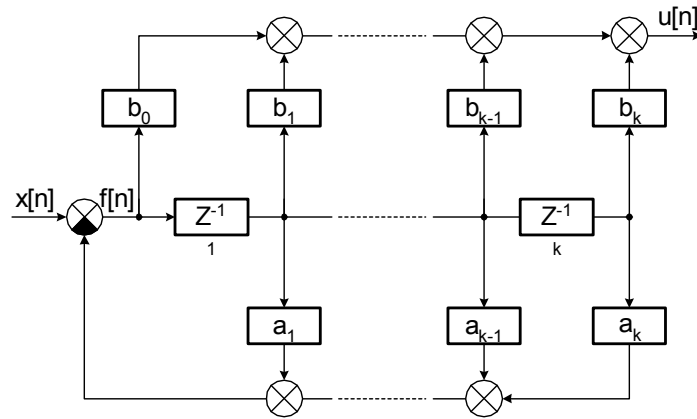


Рис. 1.19. Первая каноническая схема цифрового фильтра

Вторая каноническая схема цифрового фильтра (рис. 1.20) получается аналогичным образом [3].

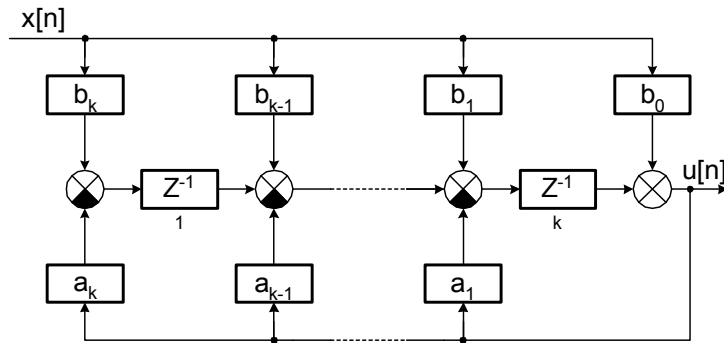


Рис. 1.20. Вторая каноническая схема цифрового фильтра

Помимо рассмотренных канонических структур существуют и другие: последовательная и параллельная [9].

Для определения последовательной канонической схемы цифрового фильтра необходимо найти нули и полюса дискретной передаточной функции фильтра. При этом выражение (1.117) можно записать в виде

$$W_K(z) = k \frac{1 + z_{o1} z^{-1}}{1 + z_1 z^{-1}} \times \frac{\beta_2 + \beta_1 z^{-1} + \beta_0 z^{-2}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_0 z^{-2}} \times \dots \times \frac{1}{1 + z_k z^{-1}}. \quad (1.120)$$

Таким образом, цифровой фильтр состоит из последовательного соединения цифровых фильтров первого порядка, соответствующих вещественным полюсам (рис. 1.21,а), и фильтров второго порядка, соответствующих паре комплексно-сопряженных полюсов (рис. 1.21,б). Представление передаточной функции в виде (1.120) называется *последовательным программированием*, а структура фильтра - *последовательной канонической схемой*.

Представление передаточной функции цифрового фильтра в виде

$$W_K(z) = \sum_{i=1}^k W_{ki}(z) \quad (1.121)$$

называют *параллельным программированием*. Цифровой фильтр в этом случае представляет собой параллельное соединение фильтров первого и второго порядков. Такую структуру называют *параллельной канонической схемой*.

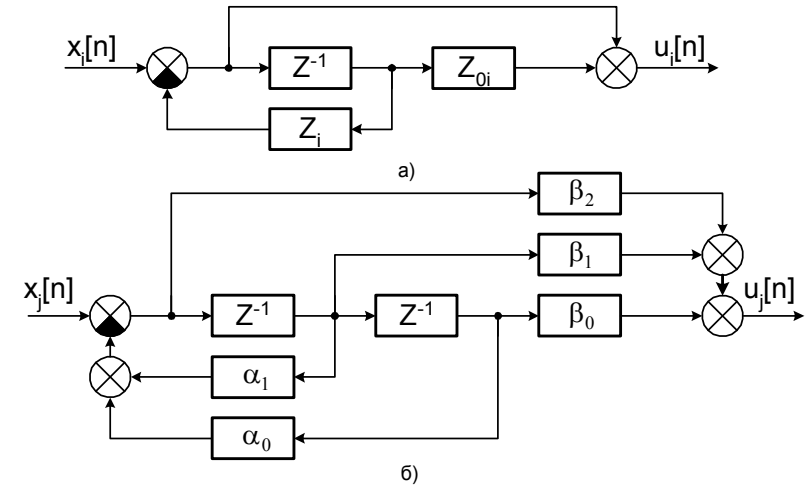


Рис. 1.21. Каноническая схема цифрового фильтра: а - первого порядка; б - второго порядка

Кроме того, на практике широко используются типовые цифровые корректирующие звенья [3, 13].

1.10. Описание дискретных систем в пространстве состояний

Современная теория дискретных систем, так же как и непрерывных, базируется на описании их в пространстве состояний [9].

Рассмотрим дискретную систему m -го порядка с одним входом $u[n]$ и одним выходом $y[n]$, передаточная функция которой в общем виде может быть записана следующим образом

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{1 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}. \quad (1.122)$$

Если порядок числителя передаточной функции окажется меньше порядка знаменателя, т.е. $l < m$, то $b_0 = \dots = b_{m-l-1} = 0$.

Из дискретной передаточной функции (1.122) следует разностное уравнение

$$y[n+m] + \sum_{i=1}^m a_i y[n+m-i] = \sum_{i=0}^m b_i u[n+m-i], \quad (1.123)$$

которому соответствует структурная схема дискретной системы, приведенная на рис. 1.22.

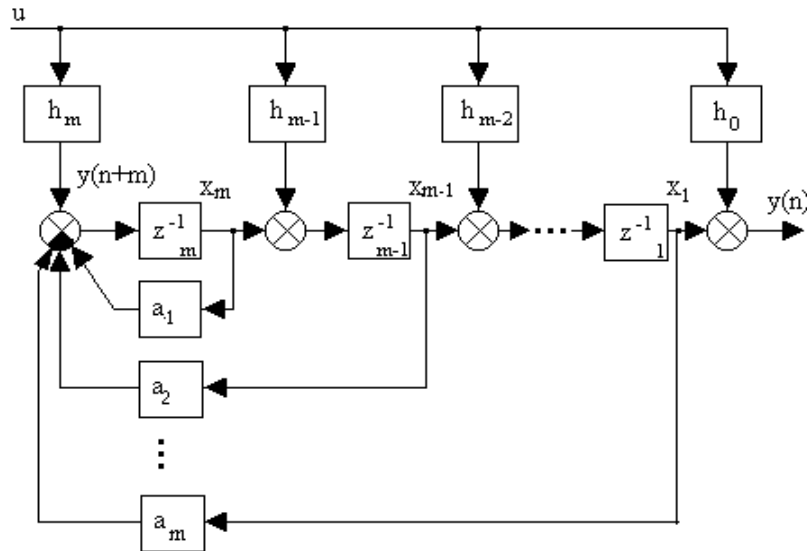


Рис. 1.22. Структурная схема дискретной системы

Обозначив переменные на выходах соответствующих линий задержек через $x_i[n]$ - координаты состояния системы ($i = 1, 2, \dots, m$), составим следующую систему из разностных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n] + h_1 u[n]; \\ x_2[n+1] = x_3[n] + h_2 u[n]; \\ \dots \\ x_{m-1}[n+1] = x_m[n] + h_{m-1} u[n]; \\ x_m[n+1] = -a_m x_1[n] - a_{m-1} x_2[n] - \dots - a_1 x_m[n] + h_m u[n]; \\ y[n] = x_1[n] + h_0 u[n]. \end{cases} \quad (1.124)$$

Неизвестные коэффициенты h_i ($i=0, 1, 2, \dots, m$) определяются из условия эквивалентности системы разностных уравнений (1.124) исходному разностному уравнению (1.123) и вычисляются последовательно по формулам:

$$\begin{aligned} h_0 &= b_0; \\ h_1 &= b_1 - a_1 h_0; \\ h_2 &= b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0; \\ &\dots \end{aligned}$$

В общем виде

$$h_i = b_i - \sum_{j=1}^i a_j h_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (1.125)$$

Уравнения (1.124) можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} X(n+1) = AX(n) + BU(n); \\ Y(n) = CX(n) + DU(n), \end{cases} \quad (1.126)$$

где

$$X(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad \text{- вектор переменных состояния;}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad \text{- матрица системы;}$$

$$B = \begin{bmatrix} h_1(n) \\ h_2(n) \\ \vdots \\ h_m(n) \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad - \text{ матрица управления;}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]_{1 \times m} \quad - \text{ матрица наблюдения;}$$

$D = [h_0]_{1 \times 1}$ - матрица, показывающая влияние входного сигнала на выходную величину системы.

Система уравнений (1.126) является стандартной формой описания дискретной системы в пространстве состояний. Первое уравнение называется векторным разностным уравнением системы, а второе - уравнением выхода.

Стандартной форме соответствует структурная схема системы, изображенная на рис. 1.23.

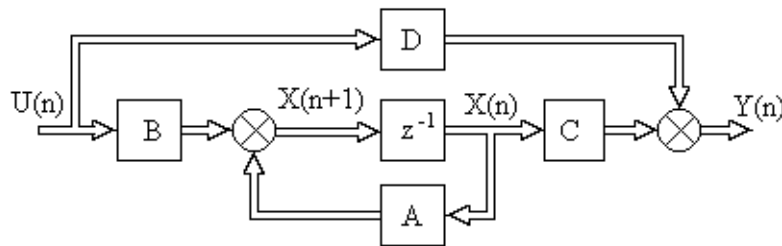


Рис. 1.23. Структурная схема дискретной системы в матричной форме:
 Z^{-1} - блок запаздывания; A, B, C, D - блоки матричных усилителей

Переменные состояния - это дискретные значения сигнала в текущий момент времени и $m-1$ его значений в предыдущие моменты времени.

Аналогично непрерывным системам составляющие вектора переменных состояний $x_i[n]$ рассматривают как оси координат многомерного пространства состояния системы. С течением времени вектор состояния изменяет свое значение и положение, его конец описывает в пространстве состояния некоторую кривую, называемую траекторией движения системы.

Матрица системы A определяет устойчивость и другие показатели качества работы системы, матрица управления B характеризует влияние на переменные состояния входного воздействия, а матрица наблюдения C устанавливает связь выходной величины системы с вектором переменных состояния. Выбор переменных состояния в дискретных системах, как и в непрерывных, является неоднозначной операцией, т.е. векторное разностное уравнение зависит от выбранных переменных состояния. Однако все возможные векторные уравнения эквивалентны, так как описывают один и тот же динами-

ческий процесс связи выходной переменной системы с входным воздействием.

В общем случае дискретная система имеет k входов и r выходов. При этом вид векторных уравнений остается таким же (1.126), в которых матрица системы A имеет тот же вид, что и в системах с одним входом и одним выходом, матрица управления становится прямоугольной размером $m \times k$, а матрица наблюдения имеет размер $r \times m$.

Дискретная матрица переходов устанавливает связь между значениями вектора переменных состояния в различные отсчеты времени и для стационарных систем определяется как [9]

$$\Phi(n) = Z^{-1} \{ [zE - A]^{-1} z \}. \quad (1.127)$$

Матрицу $[zE - A]$ называют *характеристической*, определитель этой матрицы образует характеристическое уравнение системы.

Таким образом, решение векторного разностного уравнения имеет вид

$$X(n+1) = \sum_{i=0}^n \Phi(n-i) B U(i) + \Phi(n+1) X(0). \quad (1.128)$$

Пример. Найти описание в пространстве состояний системы, дискретная передаточная функция разомкнутой цепи которой имеет вид

$$W(z) = \frac{z-1}{z^2 - 1.75z + 1.125}.$$

Решение. Определяем дискретную передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{z-1}{z^2 - 0.75z + 0.125},$$

которой соответствует разностное уравнение

$$y[n+2] - 0.75 y[n+1] + 0.125 y[n] = u[n+1] - u[n].$$

На основании выражений (1.125) и (1.126) получаем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.125 & 0.75 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad D = [0].$$

Уравнения системы в пространстве состояний

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n] + u[n]; \\ x_2[n+1] = -0.125x_1[n] + 0.75x_2[n] - 0.25u[n]; \\ y[n] = x_1[n]. \end{cases}$$

По полученным уравнениям на рис. 1.24,а изображена структурная схема системы, в которой переменные состояния - это выходные величины звеньев задержки.

Найдем полюса ($z_1 = 0.5$; $z_2 = 0.25$) дискретной передаточной функции системы и разложим ее на простейшие дроби

$$\Phi(z) = \frac{z-1}{z^2 - 0.75z + 0.125} = \frac{A}{z-0.25} + \frac{B}{z-0.5} = \frac{3}{z-0.25} - \frac{2}{z-0.5}.$$

Структурная схема системы представлена на рис. 1.24,б.

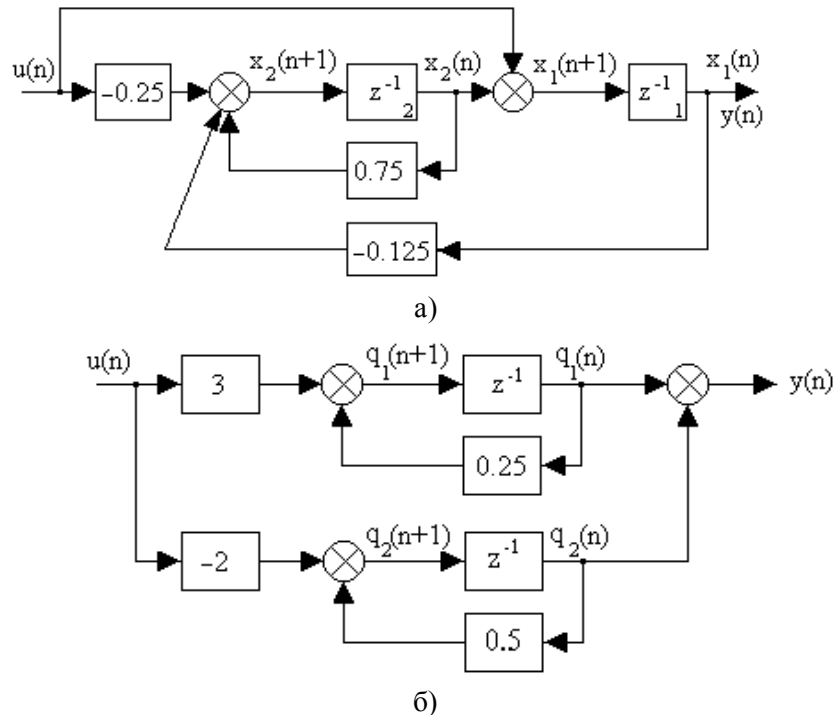


Рис. 1.24. Структурная схема дискретной системы второго порядка:
а - относительно выходов; б - относительно полюсов системы

Выбрав в качестве переменных состояния выходные величины звеньев задержки, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1[n+1] = 0.25q_1[n] + 3u[n]; \\ q_2[n+1] = 0.5q_2[n] - 2u[n]; \\ y[n] = q_1[n] + q_2[n], \end{cases}$$

где

$$A_n = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad B_n = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad C_n = [1 \ 1]; \quad D_n = [0].$$

В отличие от рассмотренного ранее описания переменные в разностных уравнениях развязаны между собой. Такая запись называется нормальной формой описания дискретной системы в пространстве состояний.

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 1

1. Сформулируйте определение дискретных систем. Какова структура и классификация импульсных систем?
2. Расскажите о математическом аппарате исследования импульсных систем.
3. Сформулируйте теорему Котельникова-Шеннона. Поясните ее физический смысл и практическое значение при проектировании дискретных систем.
4. Поясните методы определения передаточных функций импульсных систем. Каковы особенности передаточных функций статических и астатических систем?
5. Каким образом определяются частотные характеристики импульсных систем?
6. Какими способами определяются переходные процессы в дискретных системах?
7. Сформулируйте условия устойчивости импульсных систем.
8. Каким образом оценивается точность работы импульсных систем?
9. Каков порядок синтеза цифровых систем? Перечислите методы определения передаточных функций корректирующих устройств. Укажите виды структурных схем цифровых фильтров.
10. Запишите стандартную форму уравнений в пространстве состояний. Поясните физический смысл уравнений.

[содержание](#) [гlossарий](#)

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

[вопросы](#)

2.1. Общие понятия и особенности нелинейных систем

Строго говоря, линейных систем в природе не существует, так как характеристики реальных устройств нелинейные и некоторые из них не могут быть линеаризованы, например, характеристика логического элемента. Кроме того, есть системы, например, релейные, адаптивные, в которых принципиально необходимо учитывать нелинейности.

Нелинейной системой называется такая система, в состав которой входит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Такое звено называется нелинейным звеном или нелинейным элементом.

Уравнение является нелинейным, если некоторые координаты или их производные по времени входят в уравнение в виде произведений или степеней, отличной от первой, а также если коэффициенты уравнения являются функциями некоторых координат или их производных.

При составлении дифференциальных уравнений нелинейных систем сначала составляют дифференциальные уравнения для каждого устройства системы. При этом характеристики устройств, допускающих линеаризацию, линеаризуются. В результате получают систему дифференциальных уравнений, в которой одно или несколько уравнений нелинейные. Устройства, допускающие линеаризацию, образуют линейную часть системы, а устройства, которые не могут быть линеаризованы, составляют нелинейную часть.

Путем эквивалентного преобразования структурных схем и нелинейных звеньев большое число нелинейных систем можно представить в виде замкнутого контура с последовательным включением нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ), как показано на рис. 2.1.

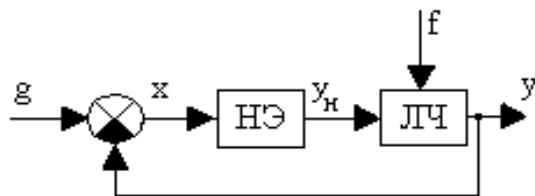


Рис. 2.1. Функциональная схема нелинейной системы:
НЭ - нелинейный элемент; ЛЧ - линейная часть

Классификация нелинейных элементов и систем. Нелинейные звенья классифицируются по различным признакам. Наибольшее распространение получила классификация по статическим и динамическим характеристикам, так как в системах чаще всего нелинейности приходится учитывать в виде характеристик. Эти характеристики могут быть как однозначными, так и двузначными (петлевыми), симметричными и несимметричными относительно начала координат.

Различают следующие основные типы нелинейных звеньев.

Нелинейные звенья с гладкими криволинейными характеристиками. Примеры таких характеристик приведены на рис. 2.2.

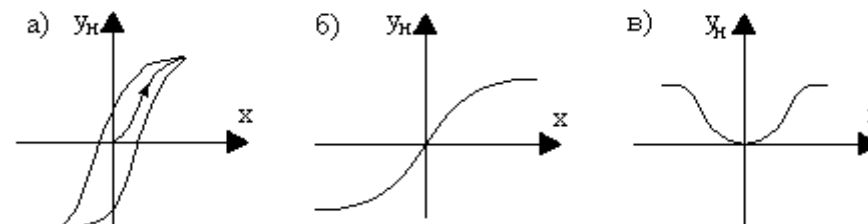


Рис. 2.2. Гладкие криволинейные характеристики:
а - гистерезисная; б, в - усилительные

На рис. 2.2,а изображена двузначная гистерезисная (запаздывающая) характеристика. Характеристика (рис. 2.2,б) отображает насыщение или ограничение и соответствует реальному амплитудному усилителю, а характеристика (рис. 2.2,в) - реальному усилителю мощности. Характеристики (рис. 2.2,а и б) - нечетно-симметричные, а характеристика (рис. 2.2,в) - четно-симметричная.

Нелинейные звенья с кусочно-линейными характеристиками. Некоторые из таких характеристик представлены на рис. 2.3.

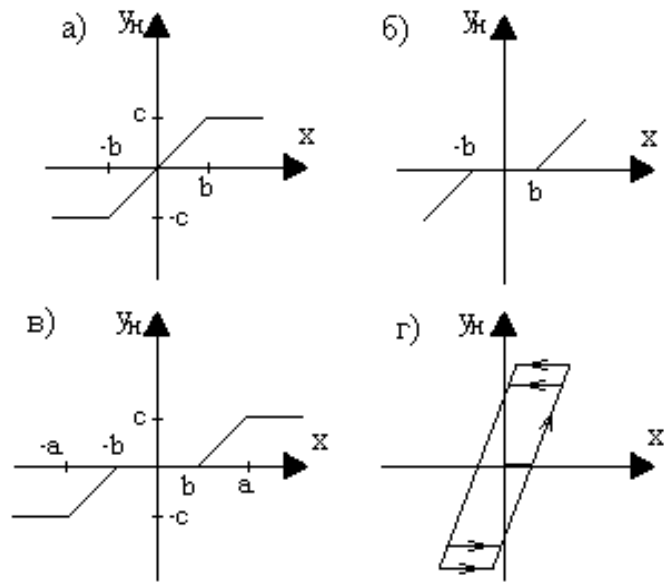


Рис. 2.3. Кусочно-линейные характеристики:
а - с насыщением; б - с зоной нечувствительности;
в - с насыщением и зоной нечувствительности; г - люфт

Характеристика (рис. 2.3,а) отображает насыщение, характеристика (рис. 2.3,б) – зону нечувствительности, а характеристика (рис. 2.3,в) соответствует звену, обладающему одновременно зоной нечувствительности и насыщением. Характеристика (рис. 2.3,г) позволяет учесть люфт или зазор кинематической передачи.

Релейные звенья – это элементы, которые на своем выходе выдают конечное число фиксированных значений. Три наиболее типовые релейные характеристики изображены на рис. 2.4.

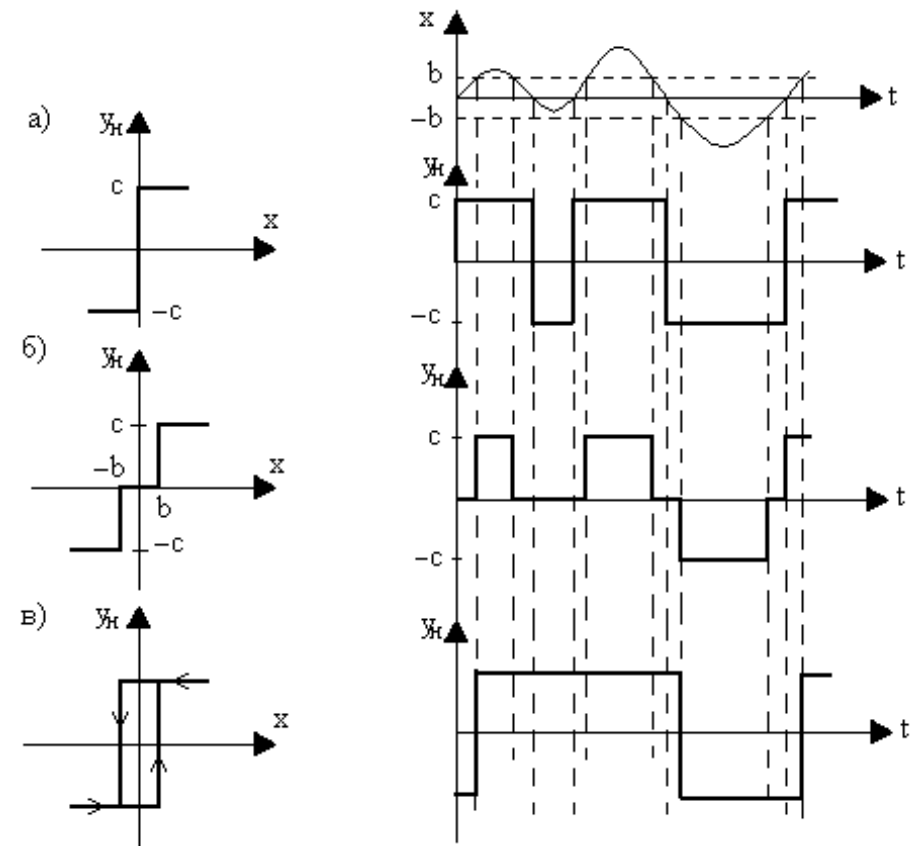


Рис. 2.4. Релейные характеристики:
а - идеальная; б - с зоной нечувствительности; в - гистерезисная

Характеристика (рис. 2.4,а) соответствует идеальному двухпозиционному реле, характеристика (рис. 2.3,б) – трехпозиционному реле с зоной нечувствительности, а характеристика (рис. 2.3,в) – двухпозиционному поляризованному реле.

Кроме того, на рис. 2.4 показано прохождение непрерывного сигнала через соответствующие типы реле. Откуда следует, что коэффициент передачи реле зависит от величины входного воздействия.

Для улучшения динамических свойств систем специально созданы нелинейные звенья с опережающими двузначными статическими характеристиками.

Часто встречаются элементы с несимметричными относительно начала координат статическими характеристиками.

Нелинейные вычислительные звенья, например, множительное, логическое звено и другие.

Различают *статические* и *динамические* нелинейности. Первые представляются в виде нелинейных статических характеристик, а вторые - в виде нелинейных дифференциальных уравнений.

Нелинейные системы обычно классифицируются в соответствии с видом входящих в них нелинейных звеньев.

Особенности нелинейных систем. Поведение нелинейных систем, при наличии существенных нелинейностей, значительно отличается от поведения их линейных моделей [10].

1. Выходная величина нелинейной системы непропорциональна входному воздействию; форма реакции системы зависит от величины входного воздействия.

2. Характер процессов в нелинейной системе зависит от величины начального отклонения, вызванного возмущением. В связи с этим для нелинейных систем существуют понятия об устойчивости “в малом”, “в большом”, “в целом”.

Система устойчива “в малом”, если она устойчива при малых (бесконечно малых) начальных отклонениях. Система устойчива “в большом”, если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях. Система устойчива “в целом”, если она устойчива при любых больших (неограниченных по величине) начальных отклонениях.

3. Для нелинейных систем характерен режим незатухающих периодических колебаний с постоянной амплитудой и частотой (автоколебаний), возникающий в системах при отсутствии периодических внешних воздействий.

4. При затухающих колебаниях переходного процесса в нелинейных системах происходит изменение периода колебаний.

Основные задачи исследования нелинейных систем. Методы исследования. Задачами исследования нелинейных систем являются:

- 1) отыскание возможных состояний равновесия системы и исследование их устойчивости;
- 2) определение автоколебаний и анализ их устойчивости;
- 3) исследование процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях.

Начало исследования нелинейных систем обычно связано с рассмотрением устойчивости и определением автоколебаний.

В настоящее время не создано общей теории анализа нелинейных систем. Разработанные методы позволяют решать лишь отдельные нелинейные задачи.

Все инженерные методы исследования нелинейных систем разделяются на две основные группы.

Точные методы, например, метод А.М.Ляпунова, метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, частотный метод В.М.Попова, основаны на точном решении нелинейного дифференциального уравнения, может быть и упрощенного.

Приближенные методы, такие как метод гармонической линеаризации, метод статистической линеаризации, основаны на линеаризации нелинейного уравнения системы.

Мощным и эффективным методом исследования нелинейных систем является моделирование, инструментарием которого служит компьютер. В настоящее время многие сложные для аналитического решения теоретические и практические вопросы сравнительно легко могут быть решены с помощью вычислительной техники.

2.2. Прямой метод Ляпунова

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости нелинейных систем могут быть получены по методу А.М. Ляпунова.

При использовании прямого метода Ляпунова, именуемого также второй метод Ляпунова, исследуемая система описывается дифференциальными уравнениями в форме уравнений первого порядка, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) от их значений в установившемся процессе при новых постоянных значениях возмущающего $f = f_0$ и задающего $g = g_0$ воздействий. Следовательно, эти уравнения для нелинейной системы n -го порядка будут:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где F_i - нелинейные функции произвольного вида, удовлетворяющие условию

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0 \quad \text{при } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (2.2)$$

так как в установившемся состоянии все отклонения и их производные равны нулю.

Чтобы исследовать устойчивость по Ляпунову, необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию V и вычислить производную по времени от этой функции.

Функция V называется *знакоопределенной* в некоторой области, если она во всех точках этой области в окрестности начала координат сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме начала координат.

Функция V называется *знакопостоянной*, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция V называется *знакопеременной*, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Функция Ляпунова и ее производная по времени. Любая функция

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.3)$$

тождественно обращаясь в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, называется функцией Ляпунова, если в ней в качестве x_1, x_2, \dots, x_n взяты переменные, в которых записаны уравнения (2.1) для этой системы.

Производная от функции Ляпунова (2.3) по времени будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt}. \quad (2.4)$$

Подставив значения $\frac{dx_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) из уравнений системы (2.1), получим

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.5)$$

Следовательно, производная от функции Ляпунова по времени, так же как и сама V , является функцией координат системы

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.6)$$

причем согласно свойству (2.2) эта функция W , так же как и сама V , тождественно обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Поэтому к ней в одинаковой степени можно применять те же понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности в некоторой области вокруг начала координат.

Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем [2]: если при заданных в форме (2.1) уравнениях системы n -го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, чтобы ее производная по времени $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V , то данная система устойчива; при знакоопределенной функции W будет иметь место асимптотическая устойчивость.

Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем [2]: если при заданных в форме (2.1) уравнениях системы n -го порядка производная по времени $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от какой-нибудь функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ окажется знакоопределенной, причем сама функция V в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной W , то данная система неустойчива.

Замечания к теореме Ляпунова об устойчивости.

1. При заданных в форме (2.1) уравнениях системы выбор функции V неоднозначен, поэтому данная теорема Ляпунова обеспечивает получение дос-

точных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т.е. при выполнении условий теоремы система наверняка будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам.

2. Понятие устойчивости по Ляпунову допускает, что при знакоопределенной функции V производная от нее по времени W была не обязательно знакоопределенной или знакопостоянной, а могла быть и тождественно равна нулю. В результате система хотя и не будет асимптотически приближаться к установившемуся состоянию, но все же будет все время в достаточной близости от него.

Нелинейная система (рис. 2.1) с одним нелинейным элементом с однозначной статической характеристикой

$$y_n = F(\sigma)$$

в свободном состоянии может быть представлена в виде замкнутого контура, включающего в себя линейную часть (ЛЧ) и нелинейный элемент (НЭ) (рис. 2.5).

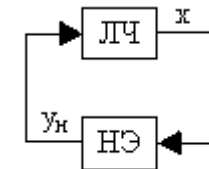


Рис. 2.5. Функциональная схема нелинейной системы в свободном состоянии

При этом уравнения свободного движения системы ($g = 0$) будут

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i y_n & \text{при } i = 1, 2, \dots, n; \\ y_n = F(\sigma), \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{где } \sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k;$$

a_{ij}, b_i, c_k - постоянные коэффициенты.

Тогда задача исследования нелинейной системы (2.7) по Ляпунову сводится к определению функции V и ее производной

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i F(\sigma) \right]. \quad (2.8)$$

А.И.Лурье предложил функцию Ляпунова выбирать в виде суммы функции квадратичной формы $L(x)$ и интеграла от нелинейной функции $F(\sigma)$ рассматриваемой системы

$$V = L(x) + \int_0^\sigma F(\sigma) d\sigma, \quad (2.9)$$

где $L(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$.

Нелинейная система называется *абсолютно устойчивой*, если она устойчива при любых начальных отклонениях и любой форме нелинейной характеристики, удовлетворяющей условиям:

$$0 \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k; \quad F(0) = 0, \quad (2.10)$$

где k - заданное число.

Пример. Исследовать устойчивость системы, заданной уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2); \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(x_2 + \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2), \end{aligned}$$

где α, β, a, b - положительные постоянные числа.

Решение. Выбираем положительно-определенную функцию Ляпунова

$$V = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2.$$

Находим производную от функции Ляпунова по времени

$$\begin{aligned} W &= \frac{dV}{dt} = 2\alpha x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2\beta x_2 \frac{dx_2}{dt} = \\ &= -2\alpha x_1 (x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) - 2\beta x_2 (x_2 + \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) = \\ &= -2(1 - ax_1^2 - bx_2^2)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2). \end{aligned}$$

Тогда $W < 0$ при $(1 - ax_1^2 - bx_2^2) > 0$ или $ax_1^2 + bx_2^2 < 1$.

Это достаточное условие устойчивости исследуемой нелинейной системы. Границей устойчивости системы на плоскости ее координат (рис. 2.6) является эллипс

$$ax_1^2 + bx_2^2 = 1.$$



Рис. 2.6. Область устойчивости нелинейной системы

2.3. Частотный метод В.М. Попова

Частотный метод В.М. Попова решает задачу об *абсолютной* устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью, заданной предельным значением коэффициента передачи k нелинейного элемента.

Если в системе управления (рис. 2.5) имеется лишь одна однозначная нелинейность

$$y_n = F(x), \quad (2.11)$$

то, объединив вместе все остальные звенья системы в линейную часть, можно получить ее передаточную функцию $W_{лч}(s)$.

Нелинейность $y_n = F(x)$ имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла $\arctg k$ (рис. 2.7), т.е. при любом x

$$0 \leq F(x) \leq kx. \quad (2.12)$$

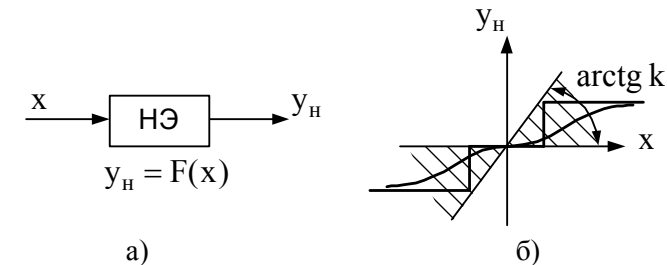


Рис. 2.7. Нелинейность системы:
а) нелинейный элемент; б) статические характеристики

Теорема В.М. Попова [2]: для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число q , при котором для всех частот $\omega \geq 0$

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W_{\text{лч}}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \quad (2.13)$$

где k - предельное значение коэффициента передачи нелинейного элемента;

$W_{\text{лч}}(j\omega)$ - амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

Все полюсы передаточной функции линейной части системы должны быть с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых. При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

$$\operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0,$$

а при двух нулевых полюсах

$$\operatorname{Re} W_{\text{лч}}(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0, \text{ а } \operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega) < 0 \text{ при малых } \omega.$$

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением *видоизмененной частотной характеристики* линейной части системы $W^*(j\omega)$, которая определяется следующим образом:

$$\begin{cases} U^*(j\omega) = \operatorname{Re} W^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\text{лч}}(j\omega), \\ V^*(j\omega) = \operatorname{Im} W^*(j\omega) = \omega T_0 \operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega), \end{cases} \quad (2.14)$$

где $T_0 = 1 \text{ с}$ - нормирующий множитель.

Преобразовав левую часть неравенства (2.13)

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W_{\text{лч}}(j\omega)] + \frac{1}{k} = \operatorname{Re} W_{\text{лч}}(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega) + \frac{1}{k}$$

и используя соотношения (2.14), получим вместо (2.13) для теоремы В.М. Попова условие

$$U^*(\omega) - \frac{q}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad (2.15)$$

при всех $\omega \geq 0$.

Очевидно, что равенство

$$U^*(\omega) - \frac{q}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} = 0 \quad (2.16)$$

представляет собой уравнение прямой на плоскости $W^*(j\omega)$. Эта прямая, называемая *прямой Попова*, проходит через точку с координатами $[-1/k, j0]$ и имеет угловой коэффициент наклона к оси абсцисс $1/q$.

Отсюда вытекает *графическая интерпретация теоремы В.М. Попова [2]:* для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на комплексной плоскости $W^*(j\omega)$, проходящую через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$, чтобы вся кривая $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой.

Условия выполнения теоремы. показаны на рис. 2.8.

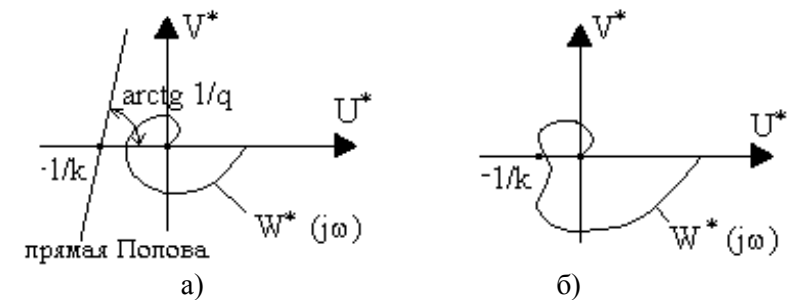


Рис. 2.8. Графическая интерпретация теоремы В.М. Попова:
а - абсолютно устойчивая система; б - система не имеет абсолютной устойчивости

На рис. 2.8,а приведен случай абсолютной устойчивости нелинейной системы при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (2.12), а рис. 2.8,б соответствует случаю невыполнения теоремы, т.е. нелинейная система не имеет абсолютной устойчивости.

Таким образом, для определения абсолютной устойчивости нелинейной системы по методу В.М. Попова необходимо построить видоизмененную частотную характеристику линейной части системы $W^*(j\omega)$, определить предельное значение коэффициента передачи k нелинейного элемента из условия

$$0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq k \text{ и через точку } (-\frac{1}{k}) \text{ на вещественной оси комплексной плоскости}$$

провести некоторую прямую так, чтобы характеристика $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой. Если такую прямую провести нельзя, то это значит, что абсолютная устойчивость для данной системы невозможна. Величина q , связанная с угловым коэффициентом, при этом определяется из условия (2.15) так, чтобы при известных параметрах системы неравенство соблюдалось.

лось для всех частот. Очертание нелинейности может быть неизвестным. Необходимо знать лишь, в пределах какого угла $\arctg k$ (рис. 2.7,б) она расположена. Для конкретно заданных форм нелинейности область устойчивости будет несколько шире, но данным методом это не определяется.

Дополнение: неравенство (2.13) является так же достаточным условием абсолютной устойчивости нелинейной системы и при $k \rightarrow \infty$.

Пример. Определить предельное значение коэффициента передачи k нелинейного элемента из условия обеспечения абсолютной устойчивости нелинейной системы, передаточная функция линейной части которой

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{10}{s(s+1)}.$$

Решение. По передаточной функции линейной части системы находим ее частотную передаточную функцию

$$W_{\text{лч}}(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = -\frac{10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega(\omega^2+1)},$$

откуда получаем видоизмененную частотную характеристику

$$W^*(j\omega) = -\frac{10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega^2+1}$$

и строим ее на комплексной плоскости, изменяя частоту ω от 0 до ∞ (рис. 2.9).

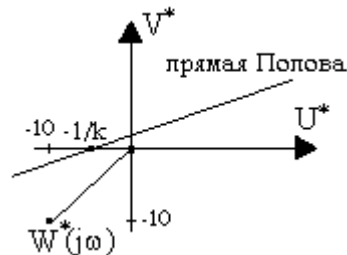


Рис. 2.9. Видоизмененная частотная характеристика

Как видно из последнего выражения, видоизмененная частотная характеристика $W^*(j\omega)$ представляет собой отрезок прямой линии между точками с координатами $[-10, -j10]$ и $[0, -j0]$.

Следовательно, прямая Попова может быть проведена для любого положительного значения коэффициента передачи k нелинейного элемента так, что вся характеристика $W^*(j\omega)$ будет лежать справа от этой прямой.

Таким образом, исследуемая нелинейная система абсолютно устойчива при $k > 0$.

2.4. Метод гармонической линеаризации

Идея метода гармонической линеаризации принадлежит Н.М. Крылову и Н.Н. Боголюбову и базируется на замене нелинейного элемента системы линейным звеном, параметры которого определяются при гармоническом входном воздействии из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена. Данный метод может быть использован в том случае, когда линейная часть системы является низкочастотным фильтром, т.е. отфильтровывает все возникающие на выходе нелинейного элемента гармонические составляющие, кроме первой гармоники.

Коэффициенты гармонической линеаризации и эквивалентные комплексные коэффициенты передачи нелинейных элементов. В нелинейной системе (рис. 2.1) параметры линейной части и нелинейного элемента выбирают таким образом, чтобы существовали симметричные периодические колебания с частотой ω .

В основе метода гармонической линеаризации нелинейностей (рис. 2.10), описываемых уравнением

$$y_n = F(x), \quad (2.17)$$

лежит предположение, что на вход нелинейного элемента подается гармоническое воздействие с частотой ω и амплитудой a , т.е.

$$x = a \sin \psi, \quad \text{где } \psi = \omega t, \quad (2.18)$$

а из всего спектра выходного сигнала выделяется только первая гармоника

$$y_{n1} = a_{n1} \sin(\psi + \psi_{n1}), \quad (2.19)$$

где a_{n1} - амплитуда ψ_{n1} - фазовый сдвиг;

при этом высшие гармоники отбрасываются и устанавливается связь между первой гармоникой выходного сигнала и входным гармоническим воздействием нелинейного элемента.

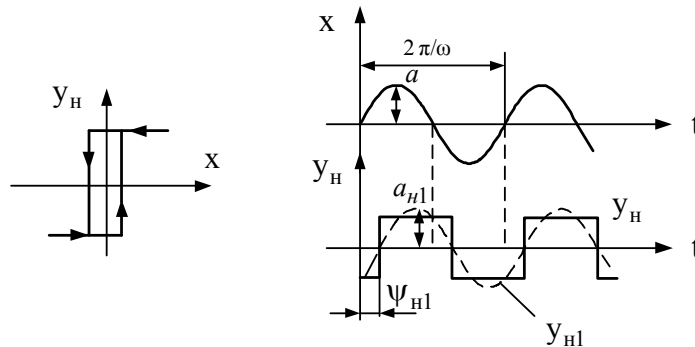


Рис. 2.10. Характеристики нелинейного элемента

В случае нечувствительности нелинейной системы к высшим гармоникам нелинейный элемент может быть в первом приближении заменен некоторым элементом с эквивалентным коэффициентом передачи, который определяет первую гармонику периодических колебаний на выходе в зависимости от частоты и амплитуды синусоидальных колебаний на входе.

Для нелинейных элементов с характеристикой (2.17) в результате разложения периодической функции $F(x)$ в ряд Фурье при синусоидальных колебаниях на входе (2.18) получим выражение для первой гармоники сигнала на выходе

$$y_{H1} = b_{1F} \sin \psi + a_{1F} \cos \psi, \quad (2.20)$$

где b_{1F} , a_{1F} - коэффициенты разложения в ряд Фурье, определяющие амплитуды соответственно синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники, которые определяются по формулам:

$$b_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad a_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.$$

Так как

$$p x = a \omega \cos \psi, \quad \text{где } p = d/dt,$$

то связь между первой гармоникой периодических колебаний на выходе нелинейного элемента и синусоидальными колебаниями на его входе можно записать в виде

$$y_{H1} = \left[q + q' \frac{p}{\omega} \right] x, \quad (2.21)$$

где $q = b_{1F}/a$, $q' = a_{1F}/a$.

Последнее уравнение называется *уравнением гармонической линеаризации*, а коэффициенты q и q' - *коэффициентами гармонической линеаризации*.

Таким образом, нелинейный элемент при воздействии гармонического сигнала с точностью до высших гармоник описывается уравнением (2.21), которое является линейным. Это уравнение нелинейного элемента отличается от уравнения линейного звена тем, что его коэффициенты q и q' изменяются при изменении амплитуды a и частоты ω колебаний на входе. Именно в этом заключается принципиальное отличие гармонической линеаризации от обычной, коэффициенты которой не зависят от входного сигнала, а определяются только видом характеристики нелинейного элемента.

Для различных видов нелинейных характеристик коэффициенты гармонической линеаризации сведены в таблицу [7, 17]. В общем случае коэффициенты гармонической линеаризации $q(a, \omega)$ и $q'(a, \omega)$ зависят от амплитуды a и частоты ω колебаний на входе нелинейного элемента. Однако, для статических нелинейностей эти коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ являются функцией только амплитуды a входного гармонического сигнала, а для статических однозначных нелинейностей коэффициент $q'(a) = 0$.

Подвергнув уравнение (2.21) преобразованию по Лапласу при нулевых начальных условиях с последующей заменой оператора s на $j\omega$ ($s = j\omega$), получим *эквивалентный комплексный коэффициент передачи* нелинейного элемента

$$W_3(j\omega, a) = q + jq' = A_3(\omega, a) e^{j\psi_3(\omega, a)}, \quad (2.22)$$

где модуль и аргумент эквивалентного комплексного коэффициента передачи связаны с коэффициентами гармонической линеаризации выражениями

$$A_3(\omega, a) = \text{mod } W_3(j\omega, a) = \sqrt{[q(a, \omega)]^2 + [q'(a, \omega)]^2};$$

$$\psi_3(\omega, a) = \arg W_3(j\omega, A) = \arctg[q'(a, \omega)/q(a, \omega)].$$

Эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента позволяет определить амплитуду и фазовый сдвиг первой гармоники (2.19) на выходе нелинейного элемента при гармоническом воздействии (2.18) на его входе, т.е.

$$a_{H1} = a \times A_3(\omega, a); \quad \psi_{H1} = \psi_3(\omega, a).$$

Исследование симметричных периодических режимов в нелинейных системах. При исследовании нелинейных систем на основе метода гармонической линеаризации в первую очередь решают вопрос о существовании и устойчивости периодических режимов. Если периодический режим устойчив, то в системе существуют автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой a_0 .

Рассмотрим нелинейную систему (рис. 2.5), включающую в себя линейную часть с передаточной функцией

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.23)$$

и нелинейный элемент с эквивалентным комплексным коэффициентом передачи

$$W_{\Sigma}(j\omega, a) = q(\omega, a) + jq'(\omega, a) = A_{\Sigma}(\omega, a) e^{j\psi_{\Sigma}(\omega, a)}. \quad (2.24)$$

Принимая во внимание выражение (2.21), можно записать уравнение нелинейной системы

$$\{A(p) + B(p) \times [q(\omega, a) + q'(\omega, a) \frac{p}{\omega}]\} x = 0. \quad (2.25)$$

Если в замкнутой нелинейной системе возникают автоколебания

$$x = a_0 \sin \omega_0 t$$

с постоянной амплитудой и частотой, то коэффициенты гармонической линеаризации оказываются постоянными, а вся система стационарной. Для оценки возможности возникновения автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации необходимо найти условия границы устойчивости, как это делалось при анализе устойчивости линейных систем. Периодическое решение существует, если при $a = a_0$ и $\omega = \omega_0$ характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$A(p) + B(p) \times [q(\omega, a) + q'(\omega, a) \frac{p}{\omega}] = 0 \quad (2.26)$$

имеет пару мнимых корней $\lambda_i = j\omega_0$ и $\lambda_{i+1} = -j\omega_0$. Устойчивость решения необходимо оценить дополнительно.

В зависимости от методов решения характеристического уравнения различают методы исследования нелинейных систем.

Аналитический метод. Для оценки возможности возникновения в нелинейной системе автоколебаний в гармонически линеаризованный характеристический полином системы вместо p подставляют $j\omega$

$$D(j\omega, a) = A(j\omega) + B(j\omega) \times [q(\omega, a) + jq'(\omega, a)]. \quad (2.27)$$

В результате получают уравнение $D(j\omega, a) = 0$, коэффициенты которого зависят от амплитуды и частоты предполагаемого автоколебательного режима. Выделив вещественную и мнимую части

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} D(j\omega, a) &= X(\omega, a); \\ \operatorname{Im} D(j\omega, a) &= Y(\omega, a), \end{aligned}$$

получим уравнение

$$X(\omega, a) + jY(\omega, a) = 0. \quad (2.28)$$

Если при действительных значениях a_0 и ω_0 выражение (2.28) удовлетворяется, то в системе возможен автоколебательный режим, параметры которого рассчитываются по следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} X(\omega_0, a_0) = 0; \\ Y(\omega_0, a_0) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Из выражений (2.29) можно найти зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы, например, от коэффициента передачи k линейной части системы. Для этого необходимо в уравнениях (2.29) коэффициент передачи k считать переменной величиной, т.е. эти уравнения записать в виде:

$$\begin{cases} X(\omega_0, a_0, k) = 0; \\ Y(\omega_0, a_0, k) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

По графикам $a_0 = f(k)$, $\omega_0 = f(k)$ можно выбрать коэффициент передачи k , при котором амплитуда и частота возможных автоколебаний имеет допустимые значения или вообще отсутствует.

Частотный метод. В соответствии с критерием устойчивости Найквиста незатухающие колебания в линейной системе возникают в том случае, когда амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами $[-1, j0]$. Данное условие является также условием существования автоколебаний в гармонически линеаризованной нелинейной системе, т.е.

$$W_n(j\omega, a) = -1. \quad (2.31)$$

Так как линейная и нелинейная части системы соединены последовательно, то частотная характеристика разомкнутой нелинейной системы имеет вид

$$W_n(j\omega, a) = W_{\text{лч}}(j\omega) \times W_{\Sigma}(j\omega, a). \quad (2.32)$$

Тогда в случае статической характеристики нелинейного элемента условие (2.31) принимает вид

$$W_{\text{лч}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\Sigma}(a)}. \quad (2.33)$$

Решение уравнения (2.33) относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы $W_{\text{лч}}(j\omega)$ и годографа обратной характеристики нелинейной части $W_3^{-1}(a)$, взятой с обратным знаком (рис. 2.11). Если эти годографы не пересекаются, то режим автоколебаний в исследуемой системе не существует.

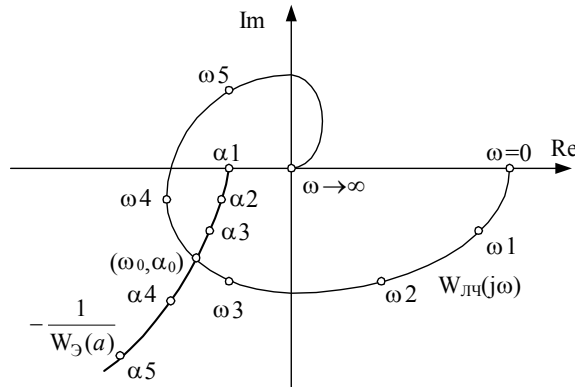


Рис. 2.11. Годографы линейной и нелинейной частей системы

Для устойчивости автоколебательного режима с частотой ω_0 и амплитудой a_0 требуется, чтобы точка на годографе нелинейной части $-W_3^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде $a_0 + \Delta a$ по сравнению со значением в точке пересечения годографов, не охватывалась годографом частотной характеристики линейной части системы и охватывалась точка, соответствующая уменьшенной амплитуде $a_0 - \Delta a$.

На рис. 2.11 дан пример расположения годографов для случая, когда в нелинейной системе существуют устойчивые автоколебания, так как $a_3 < a_0 < a_4$.

Исследование по логарифмическим частотным характеристикам.

При исследовании нелинейных систем по логарифмическим частотным характеристикам условие (2.31) переписывают отдельно для модуля и аргумента эквивалентного комплексного коэффициента передачи разомкнутой нелинейной системы

$$\begin{aligned} \text{mod } W_{\text{лч}}(j\omega)W_3(j\omega, a) &= 1; \\ \arg W_{\text{лч}}(j\omega)W_3(j\omega, a) &= -(2k+1)\pi, \text{ при } k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

с последующим переходом к логарифмическим амплитудной и фазовой характеристикам

$$L_{\text{лч}}(\omega) + L_3(\omega, a) = 0; \quad (2.34)$$

$$\psi_{\text{лч}}(\omega) + \psi_3(\omega, a) = -(2k+1)\pi, \text{ при } k=0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Условия (2.34) и (2.35) позволяют определить амплитуду a_0 и частоту ω_0 периодического решения уравнения (2.25) по логарифмическим характеристикам линейной части системы $L_{\text{лч}}(\omega)$, $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ и нелинейного элемента $L_3(\omega, a)$, $\psi_3(\omega, a)$.

Автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой a_0 будут существовать в нелинейной системе, если периодическое решение уравнения (2.25) устойчиво. Приближенный метод исследования устойчивости периодического решения заключается в том, что исследуется поведение системы при частоте $\omega = \omega_0$ и значениях амплитуды $a = a_0 + \Delta a$ и $a = a_0 - \Delta a$, где $\Delta a > 0$ - малое приращение амплитуды. При исследовании устойчивости периодического решения при $a_0 + \Delta a$ и $a_0 - \Delta a$ по логарифмическим характеристикам пользуются критерием устойчивости Найквиста.

В нелинейных системах с однозначными статическими характеристиками нелинейного элемента коэффициент гармонической линеаризации $q'(a)$ равен нулю, а следовательно, равен нулю и фазовый сдвиг $\psi_3(a)$, вносимый элементом. В этом случае периодическое решение уравнения системы

$$[A(p) + B(p) \times q(a)]x = 0 \quad (2.36)$$

существует, если выполняются условия:

$$L_{\text{лч}}(\omega) = -L_3(a); \quad (2.37)$$

$$\psi_{\text{лч}}(\omega) = -(2k+1)\pi, \text{ при } k=0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) позволяет определить частоту $\omega = \omega_0$ периодического решения, а уравнение (2.37) – его амплитуду $a = a_0$.

При сравнительно простой линейной части решения этих уравнений могут быть получены аналитически. Однако в большинстве случаев их целесообразно решать графически (рис. 2.12).

При исследовании устойчивости периодического решения уравнения (2.36), т.е. при определении существования автоколебаний в нелинейной системе с однозначной нелинейной статической характеристикой пользуются *критерием Найквиста* [15]: периодическое решение с частотой $\omega = \omega_0$ и амплитудой $a = a_0$ устойчиво, если при изменении частоты от нуля до бесконечности и положительном приращении амплитуды $\Delta a > 0$ разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов фазовой характеристики линейной части системы $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ через линию $-\pi$

равна нулю в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_0, a_0 + \Delta a)$, и не равна нулю в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_0, a_0 - \Delta a)$.

На рис. 2.12 показан пример определения периодических решений в нелинейной системе с ограничением. В такой системе имеются три периодических решения с частотами ω_{01} , ω_{02} и ω_{03} , определяемыми в точках пересечения фазовой характеристики $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ с линией -180° . Амплитуды периодического решения a_{01} , a_{02} и a_{03} определяются из условия (2.37) по логарифмическим амплитудным характеристикам нелинейного элемента $-L_3(\omega_{01}, a)$, $-L_3(\omega_{02}, a)$ и $-L_3(\omega_{03}, a)$.

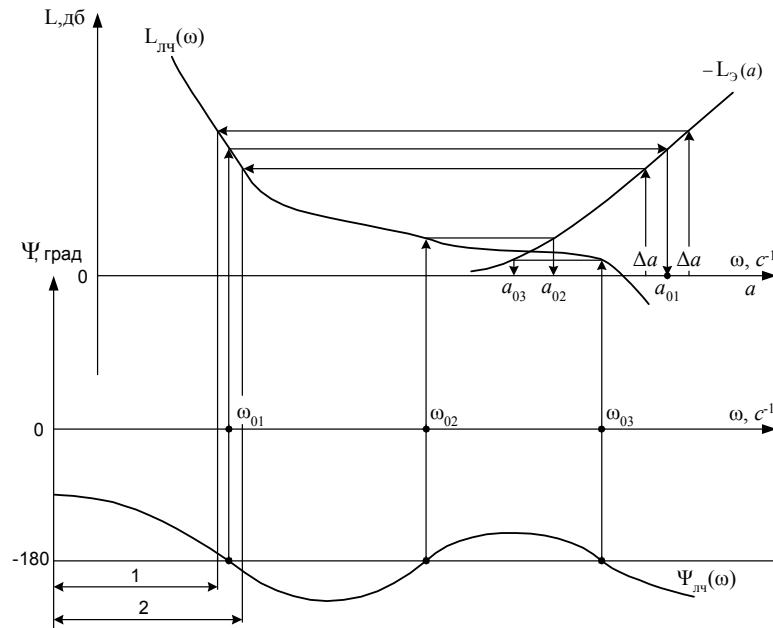


Рис. 2.12. Логарифмические амплитудные и фазовая характеристики

Из трех решений, определенных на рис. 2.12, устойчивы два. Решение с частотой $\omega = \omega_{01}$ и амплитудой $a = a_{01}$ устойчиво, так как в диапазоне частот 1, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_{01}, a_{01} + \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ не пересекает линию -180° , а в диапазоне частот 2, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_{01}, a_{01} - \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ один раз пересекает линию -180° . Решение с частотой $\omega = \omega_{02}$ и амплитудой $a = a_{02}$ неустойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_{02}, a_{02} + \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ один раз пересекает линию -180° . Высокочастотное периодическое решение с частотой $\omega = \omega_{03}$ и амплитудой $a = a_{03}$ устойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_{03}, a_{03} + \Delta a)$, имеется один положительный и один отрицательный

переход фазовой характеристики $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ через линию -180° , а в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_{03}, a_{03} - \Delta a)$, имеются два положительных и один отрицательный переход фазовой характеристики $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ через линию -180° .

В рассмотренной системе при малых по величине возмущениях установятся высокочастотные автоколебания с частотой ω_{03} и амплитудой a_{03} , а при больших по величине возмущениях – низкочастотные автоколебания с частотой ω_{01} и амплитудой a_{01} .

Пример. Исследовать автоколебательные режимы в нелинейной системе, линейная часть которой имеет следующую передаточную функцию

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k=200 \text{ с}^{-1}$; $T_1=1.5 \text{ с}$; $T_2=0.015 \text{ с}$,

а в качестве нелинейного элемента используется реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4,б) при $c=10 \text{ В}$, $b=2 \text{ В}$.

Решение. По таблице [7] для реле с зоной нечувствительности находим коэффициенты гармонической линеаризации:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{при } a \geq b, \quad q'(a) = 0.$$

При построении характеристик нелинейного элемента целесообразно использовать относительное по сравнению с зоной нечувствительности значение амплитуды входного гармонического воздействия $\mu = a/b$. Перепишем выражение коэффициента гармонической линеаризации в виде

$$q(a) = \frac{4cb^2}{\pi b a^2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}.$$

Откуда

$$q(\mu) = \frac{k_n}{\mu^2} \sqrt{\mu^2 - 1},$$

где $k_n = \frac{4c}{\pi b} = 6.4$ - коэффициент передачи реле;

$\mu = \frac{a}{b}$ - относительная амплитуда.

Коэффициент передачи реле k_n отнесем к линейной части системы и получим нормированные коэффициенты гармонической линеаризации

$$q(\mu) = \frac{1}{\mu^2} \sqrt{\mu^2 - 1}, \quad q'(\mu) = 0$$

и нормированную логарифмическую амплитудную характеристику релейного элемента с обратным знаком

$$-L_3(\mu) = 20 \lg \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

Если $\mu \rightarrow 1$, то $-L_3(\mu) \rightarrow \infty$; а при $\mu \gg 1$ $-L_3(\mu) = 20 \lg \mu$. Таким образом, асимптотами нормированной логарифмической амплитудной характеристики с обратным знаком являются вертикальная прямая и прямая с наклоном $+20$ дБ/дек, которые проходят через точку с координатами $L = 0$, $\mu = 1$ (рис. 2.13).

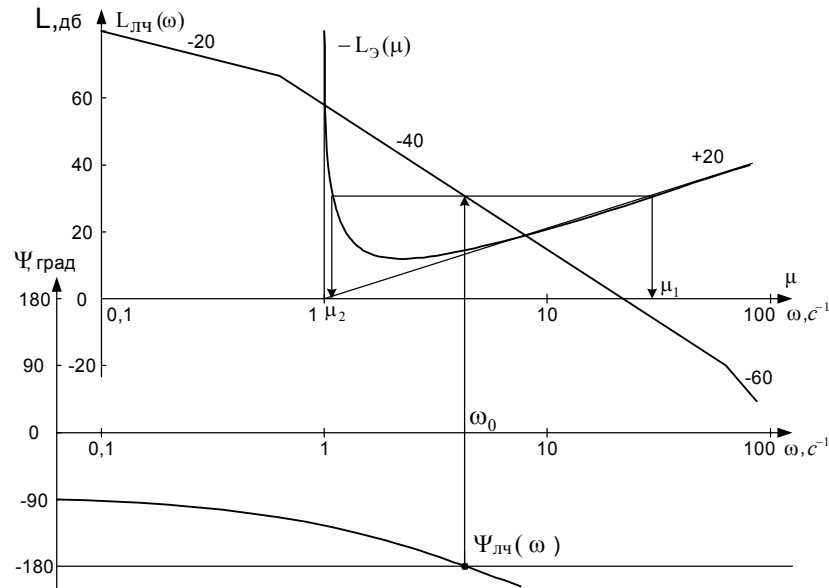


Рис. 2.13. Определение периодического решения в релейной системе с зоной нечувствительности

Для решения вопроса о существовании автоколебаний в соответствии с нормированной логарифмической амплитудной характеристикой с обратным знаком нелинейного элемента и передаточной функцией линейной части системы

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k_n k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

на рис. 2.13 построены логарифмические характеристики $L_{\text{лч}}(\omega)$, $-L_3(\mu)$ и $\Psi_{\text{лч}}(\omega)$.

Частота периодического решения $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ определяется в точке пересечения фазовой характеристики $\Psi_{\text{лч}}(\omega)$ и линии -180° . Амплитуды периодических решений $\mu_1 = 29$ и $\mu_2 = 1.08$ находятся по характеристикам $L_{\text{лч}}(\omega)$ и $-L_3(\mu)$. Периодическое решение с малой амплитудой μ_2 неустойчиво, а периодическое решение с большой амплитудой μ_1 устойчиво.

Таким образом, в исследуемой релейной системе существует автоколебательный режим с частотой $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $a_0 = b \times \mu_1 = 58 \text{ В}$.

Для решения вопроса о существовании автоколебаний в соответствии с нормированной логарифмической амплитудной характеристикой с обратным знаком нелинейного элемента и передаточной функцией линейной части системы

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k_n k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

на рис. 2.13 построены логарифмические характеристики $L_{\text{лч}}(\omega)$, $-L_3(\mu)$ и $\psi_{\text{лч}}(\omega)$.

Частота периодического решения $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ определяется в точке пересечения фазовой характеристики $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ и линии -180° . Амплитуды периодических решений $\mu_1 = 29$ и $\mu_2 = 1.08$ находятся по характеристикам $L_{\text{лч}}(\omega)$ и $-L_3(\mu)$. Периодическое решение с малой амплитудой μ_2 неустойчиво, а периодическое решение с большой амплитудой μ_1 устойчиво.

Таким образом, в исследуемой релейной системе существует автоколебательный режим с частотой $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $a_0 = b \times \mu_1 = 58 \text{ В}$.

2.5. Методы фазового пространства

Методы фазового пространства относятся к наиболее ранним точным аналитическим методам теории нелинейных систем. К ним относится метод фазовой плоскости и метод точечных отображений или преобразований [1].

Фазовым пространством называется пространство, по осям координат которого отложены переменные, характеризующие состояние динамической системы. Если движение системы описывается дифференциальным уравнением n -го порядка, то состояние этой системы в любой момент времени можно характеризовать некоторой точкой n -мерного фазового пространства, по осям которого отложены одна из координат системы и $(n-1)$ ее производных. Точка, характеризующая состояние системы, называется *изображающей точкой*.

При движении системы изображающая точка описывает в фазовом пространстве некоторую кривую, называемую *фазовой траекторией*. Каждому определенному переходному процессу в фазовом пространстве соответствует определенная фазовая траектория. Начальное положение изображающей точки определяется начальными условиями. В установившемся равновесном состоянии системы все производные рассматриваемой переменной равны нулю; соответствующие этому точки фазового пространства находятся в покое и называются *особыми точками*. Совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных отклонений называется *фазовым портретом* системы.

Имея фазовый портрет системы, определяют по нему особые точки и траектории, исследуют устойчивость системы и оценивают качество процесса управления.

Метод фазовой плоскости используется для исследования систем второго порядка и заключается в построении фазовых портретов на плоскости. Для этого из уравнений состояния исключается время и определяются уравнения фазовых кривых. Задача становится достаточно простой, если рассматривается система с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента. В этом случае в разных областях фазовой плоскости система описывается линейными уравнениями, в соответствии с которыми строятся фазовые траектории, которые в дальнейшем “сшиваются” по линиям переключения, определяемым видом нелинейной характеристики.

При исследовании нелинейных систем высокого порядка их аппроксимируют системами второго порядка с эквивалентным запаздыванием.

Для изображения процессов на фазовой плоскости нелинейное уравнение, описывающее систему, заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases} \quad (2.39)$$

где x, y - координата системы и ее первая производная;

$f(x, y)$ - нелинейная функция.

Разделив первое из уравнений (2.39) на второе, получим дифференциальное уравнение, из которого исключено время t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \quad (2.40)$$

Решение данного уравнения

$$y = F(x) \quad (2.41)$$

определяет уравнение фазовой траектории, которая графически изображается на фазовой плоскости (x, y) . Каждой совокупности начальных условий (x_0, y_0) соответствует свое решение и своя фазовая траектория. Семейство фазовых траекторий характеризует все возможные виды переходных процессов в данной системе управления при любых начальных условиях и образует ее фазовый портрет.

Основные свойства фазовых траекторий вытекают из выражения (2.40):

1) если $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области и имеет не-

прерывные частные производные по своим аргументам, то через всякую точку фазовой плоскости, за исключением особых точек, проходит единственная фазовая траектория. Это означает, что фазовые траектории не пересекаются между собой;

2) так как при $y > 0$ производная $dx/dt > 0$ и x только возрастает, то в верхней фазовой полуплоскости при возрастании времени t изображающая точка движется слева направо. Соответственно в нижней полуплоскости движение происходит справа налево. Направление движения на траекториях показывают стрелками;

3) в точках, где $y = 0$, $f(x, y) \neq 0$ (неособых точках на оси абсцисс), фазовые траектории пересекают ось под прямым углом.

В тех случаях, когда решение уравнения (2.40) аналитическими методами затруднительно или невыполнимо, фазовые траектории можно построить приближительным графическим методом изоклин [2, 5, 10].

Изоклины представляют собой геометрическое место всех точек фазовой плоскости, для которых наклон фазовой траектории равен постоянному значению c_i , то есть $dy/dx = c_i$. Тогда вместо (2.40) можно написать уравнение

$$\frac{f(x, y)}{y} = c_i,$$

из которого получается уравнение изоклины

$$y = \varphi(x, c_i).$$

Задавая различные значения c_i наклона касательных к фазовым траекториям, пересекающим эти изоклины, строят семейство изоклин, которые используются для построения фазовых траекторий (рис. 2.14). Фазовая траектория в точке пересечения с изоклиной имеет угол наклона $\arctg c_i$. В качестве примера на рис. 2.14 на изоклинах отмечены наклоны касательных к пересекающим их траекториям направляющими стрелками и построена фазовая траектория, исходящая из точки А.

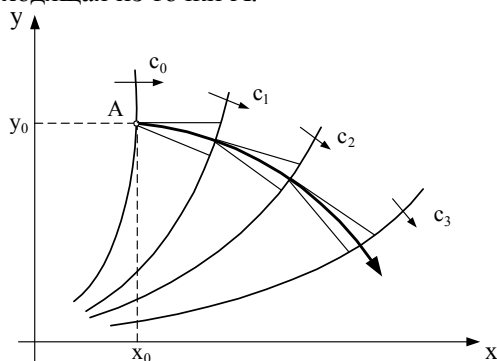


Рис. 2.14. Построение фазовой траектории методом изоклин

Рассмотрим фазовые траектории линейной системы второго порядка, переходный процесс в которой описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0.$$

Введя обозначение для скорости изменения регулируемой величины $y = dx/dt$, получим эквивалентные уравнения первого порядка

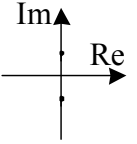
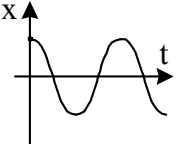
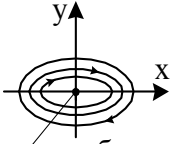
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -a_1 y - a_2 x, \end{cases}$$

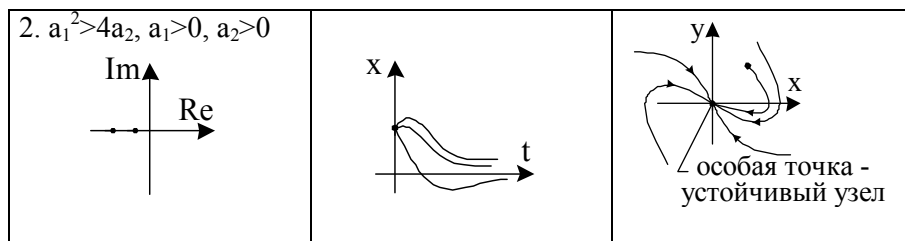
откуда, исключив время t , находим дифференциальное уравнение для определения фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{y}.$$

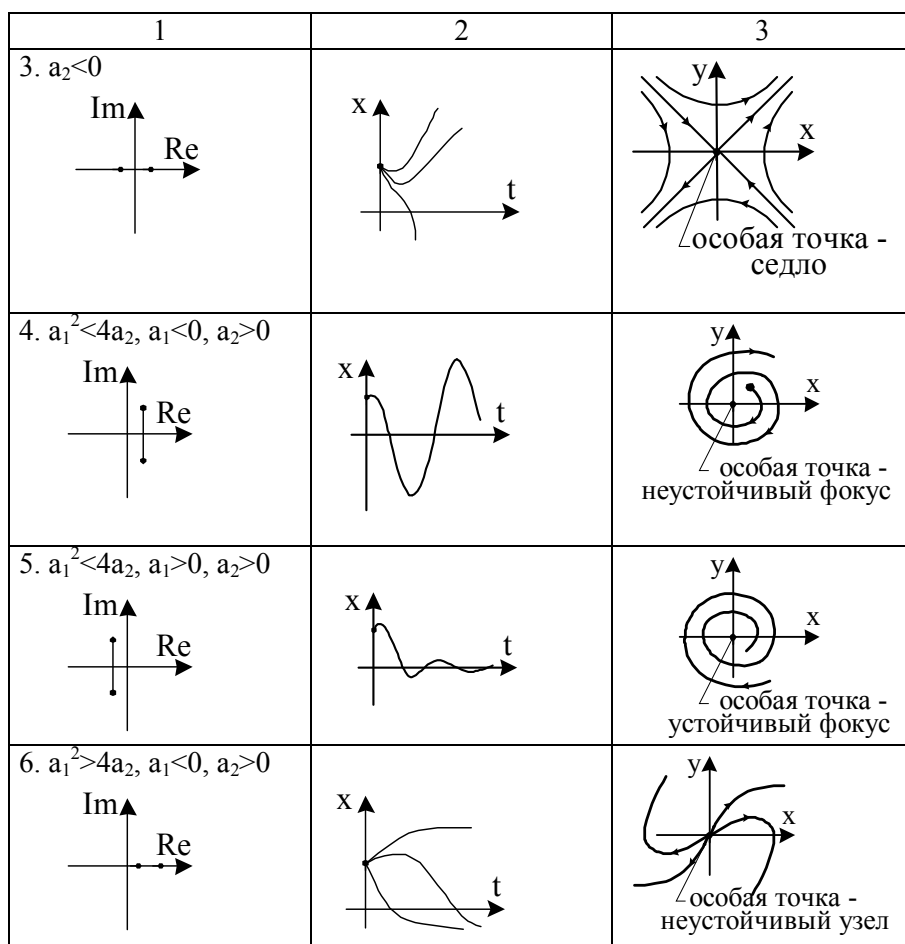
Решение $y = F(x)$ этого уравнения определяет уравнения фазовых траекторий на фазовой плоскости (x, y) . Возможные виды фазовых портретов системы, соответствующие корням характеристического уравнения $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$, приведены в таблице.

Т а б л и ц а
Виды фазовых портретов для линейных систем второго порядка

Корни характеристического уравнения	Переходный процесс	Фазовая траектория
1	2	3
1. $a_1 = 0, a_2 > 0$ 		 особая точка - центр



Продолжение табл.



Вид и расположение фазовых траекторий, а также направление движения по ним изображающей точки дают возможность судить о характере движения системы и его устойчивости при различных начальных отклонениях. Особые точки и их характер определяют состояние равновесия исходной системы.

Реальные автоматические системы можно считать линейными в предположении малости отклонений переменных от их установившихся значений. За пределами указанной области картина фазовых траекторий может стать качественно иной. В частности, если по линейной теории система неустойчивая и процесс расходится, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходящимся неограниченно. Картина фазовых траекторий для такой системы изображена на рис. 2.15,а. Здесь вблизи начала координат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе, но далее они приближаются асимптотически к замкнутому контуру ограниченных размеров. К нему же приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Такого рода замкнутый контур представляет собой особый вид линий на фазовой плоскости и называется устойчивым предельным циклом. Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям системы. Размеры предельного цикла представляют амплитуды колебаний самой величины x и скорости ее изменения y . Для определения периода автоколебаний необходимо решить уравнение системы во времени.

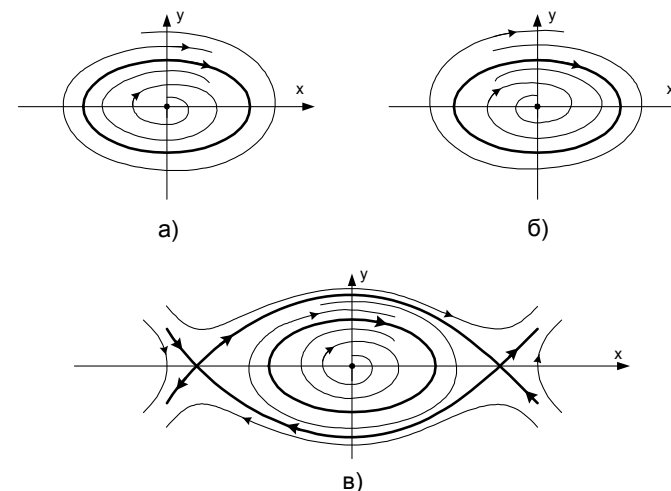


Рис. 2.15. Фазовые траектории нелинейных систем:
 а - устойчивый предельный цикл; б - неустойчивый предельный цикл;
 в - фазовый портрет системы с сепаратрисами

Замкнутые фазовые траектории на фазовой плоскости называются *предельными циклами*, которые могут быть как устойчивыми (рис. 2.15,а), так и неустойчивыми (рис. 2.15,б). К этим предельным циклам стремятся изображающие точки при различных начальных отклонениях по различным фазовым траекториям.

В различных частях фазовой плоскости фазовые траектории нелинейной системы могут быть различными (рис. 2.15,в). Линии, разделяющие фазовую плоскость на участки с различными фазовыми траекториями, называются

сепаратрисами. Поведение системы в каждой области фазовой плоскости описывается своим дифференциальным уравнением.

Кроме того, для фазового портрета нелинейных систем с разрывными характеристиками характерно наличие *линий переключения*, которые также разделяют фазовую плоскость на ряд областей с различными фазовыми траекториями. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на предыдущем участке. Линии переключения характеризуются узловыми точками разрывных характеристик нелинейных элементов.

Замечание: координатами (x , y) фазовой плоскости могут служить не обязательно отклонение (ошибка) управляемой величины системы и ее скорость. Для этой цели могут быть взяты любые две переменные, однозначно характеризующие состояние системы второго порядка в произвольный момент времени.

Пример. Изобразим на фазовой плоскости переходный процесс и автоколебания в автоматической системе (рис. 2.1), линейная часть которой задана передаточной функцией

$$W_{лч}(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)},$$

где k - коэффициент передачи;

T - постоянная времени,

а нелинейный элемент - статической характеристикой $y_n = F(x)$.

Решение. В качестве координат фазовой плоскости выбираем отклонение управляемой величины x и скорость ее изменения $y = dx/dt$. Запишем для ошибки x дифференциальное уравнение системы, описывающее ее свободное движение

$$T \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + kF(x) = 0, \quad (2.42)$$

которое заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y - \frac{k}{T}F(x); \\ \frac{dx}{dt} = y. \end{cases} \quad (2.43)$$

Разделив первое из уравнений (2.43) на второе, получаем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \times \frac{F(x)}{y}, \quad (2.44)$$

решение которого определяется характеристикой нелинейного элемента.

Рассмотрим фазовые портреты системы для некоторых типов нелинейных

элементов.

1. Идеальное двухпозиционное реле (рис. 2.4,а) со статической характеристикой $F(x) = c \operatorname{sign}(x)$.

Дифференциальное уравнение (2.44) фазовых траекторий в этом случае примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \times \frac{c \operatorname{sign}(x)}{y}. \quad (2.45)$$

Переключение идеального реле происходит при $x = 0$. Следовательно, линия переключения на фазовой плоскости (рис. 2.16,а) совпадает с осью ординат.

Справа от линии переключения при $x > 0$ дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kc}{Ty}. \quad (2.46)$$

Его интегрирование дает уравнение фазовой траектории [2]

$$x = kcT \ln |y + kc| - Ty + c^0, \quad (2.47)$$

где c^0 - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями. Каждому конкретному c^0 соответствует определенная кривая на фазовой плоскости справа от линии переключения. Эти кривые имеют асимптоту $y = -kc$.

Слева от линии переключения при $x < 0$ дифференциальное уравнение (2.45) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{kc}{Ty}, \quad (2.48)$$

что дает решение [2]

$$x = -kcT \ln |y - kc| - Ty + c^0, \quad (2.49)$$

согласно которому наносится семейство фазовых траекторий с асимптотой $y = kc$ в левой фазовой полуплоскости.

На рис. 2.16,а изображены фазовые траектории системы для начальных условий $(x_0, 0)$.

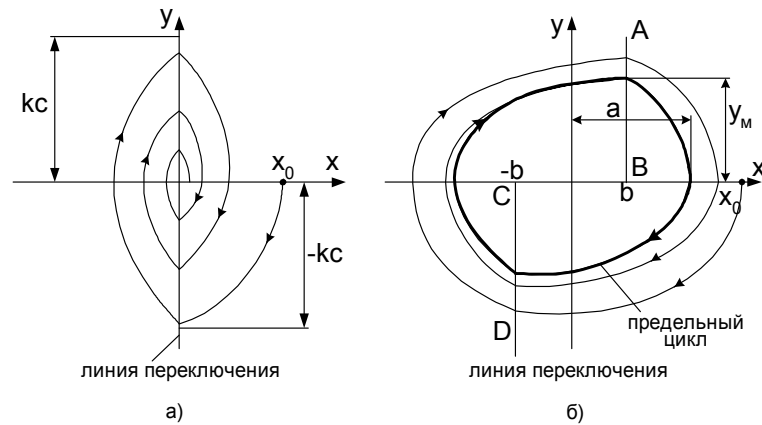


Рис. 2.16. Фазовые траектории релейных систем:
а - с идеальным реле; б - с реле с гистерезисом

2. Двухпозиционное реле с гистерезисом (рис. 2.4,в) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x > +b, \\ -c & \text{при } x < +b, \end{cases} \quad \text{когда } \frac{dx}{dt} > 0;$$

$$F(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x > -b, \\ -c & \text{при } x < -b, \end{cases} \quad \text{когда } \frac{dx}{dt} < 0.$$

Переключение реле с гистерезисом происходит при $x = +b$, если $y > 0$ (линия АВ на рис. 2.16,б); если же $y < 0$, то при $x = -b$ (линия CD). Соответственно, линия переключения ABCD на фазовой плоскости (рис. 2.16,б) имеет разрыв.

Справа от линии переключения ABCD справедливо дифференциальное уравнение фазовых траекторий (2.46), а слева – (2.48). Следовательно, фазовые траектории рассматриваемой системы (рис. 2.16,б) строятся аналогично предыдущему случаю.

В данной системе будут наблюдаться устойчивые автоколебания, к которым сходится переходный процесс с обеих сторон, т.е. при любых начальных условиях. Амплитуда автоколебаний изображена на рис. 2.16,б отрезком a ; отрезок y_m изображает амплитуду скорости. Период автоколебаний определяется решением уравнений во времени.

3. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4,б) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -b \leq x \leq +b, \\ +c & \text{при } x > +b, \\ -c & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

Переключение трехпозиционного реле с зоной нечувствительности происходит при $x = -b$ (линия АВ фазовой плоскости на рис. 2.17,а) и при $x = +b$ (линия CD). Соответственно, линии переключения АВ и CD разделяют фазовую плоскость на три области (рис. 2.17,а).

Справа от линии переключения CD справедливо дифференциальное уравнение фазовых траекторий (2.46), а слева от линии переключения АВ – (2.48). Следовательно, для рассматриваемой системы фазовые траектории в этих областях фазовой плоскости (рис. 2.17,а) строятся аналогично предыдущим случаям.

В средней области при $-b \leq x \leq +b$, соответствующей зоне нечувствительности реле, дифференциальное уравнение (2.44) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T}, \quad (2.50)$$

откуда

$$y = -\frac{1}{T}x + c^0, \quad (2.51)$$

согласно которому семейство фазовых траекторий образуется отрезками прямых линий с отрицательным угловым коэффициентом $-1/T$.

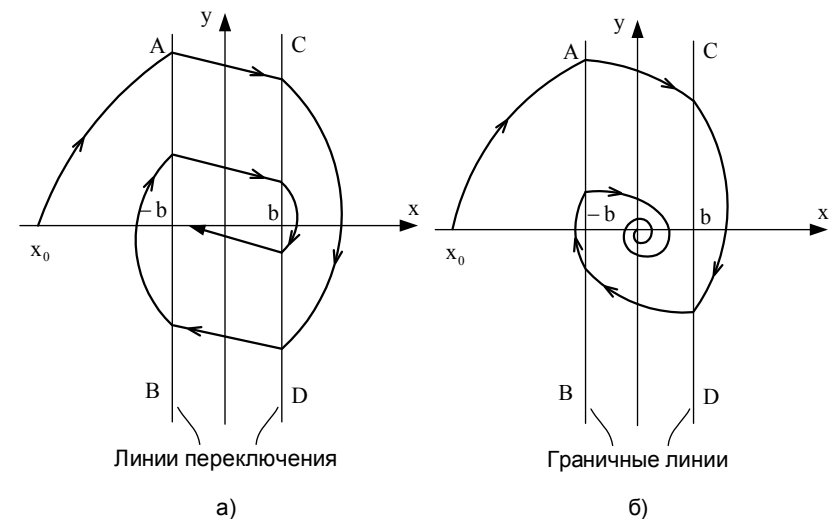


Рис. 2.17. Фазовые траектории нелинейных систем:

а - с трехпозиционным реле; б - с усилителем с насыщением

На рис. 2.17,а изображены фазовые траектории системы для начальных условий $(x_0, 0)$. Система приходит в положение равновесия при значениях ошибки, определяемой зоной нечувствительности реле.

4. Усилитель с насыщением (рис. 2.3,а) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} k_y x & \text{при } -b \leq x \leq +b, \\ +c & \text{при } x > +b, \\ -c & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

Для построения фазовых траекторий нелинейной системы с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента фазовую плоскость разделяем на области линиями АВ и CD (рис. 2.17,б).

Как следует из сравнения статических характеристик нелинейных элементов, фазовые траектории в правой и левой областях фазовой плоскости рассматриваемой системы строятся аналогично предыдущему случаю.

В средней области при $-b \leq x \leq +b$, соответствующей линейному участку характеристики, система становится линейной и дифференциальное уравнение (2.44) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kk}{T} \times \frac{x}{y}. \quad (2.52)$$

На рис. 2.17,б приведена фазовая траектория системы для начальных условий $(x_0, 0)$ в случае ее устойчивости в линейной области.

Метод точечных преобразований (метод Пуанкаре-Андронova) позволяет установить существование автоколебаний в нелинейной системе второго порядка без построения фазовых траекторий [10]. Сущность метода заключается в том, что для исследования динамики системы необходимо выяснить, как в зависимости от начальных условий перемещаются точки пересечения фазовой траектории с некоторой полупрямой, например, отрезком 0X фазовой плоскости (рис. 2.18).

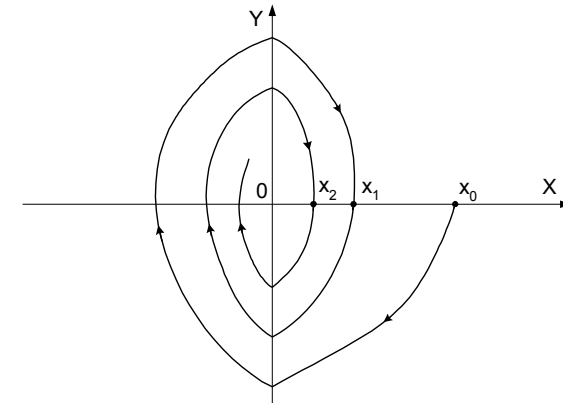


Рис. 2.18. Фазовая плоскость

Возьмем начальное положение изображающей точки $(x_0, 0)$ где-нибудь на полуоси 0X. После обхода вокруг начала координат изображающая точка пересекает полуось 0X в точках x_1, x_2 и т.д. Последовательность точек пересечения фазовой траектории с выбранной полупрямой представляет точечное преобразование полупрямой самой в себя. Задавая различные начальные положения x_{0i} изображающей точки на полуоси 0X, согласно уравнениям системы определяют соответствующие им точки x_i на той же полуоси после обхода начала координат. Полученная таким образом зависимость

$$x_i = f(x_{0i}) \quad (2.53)$$

называется *функцией соответствия* и используется для исследования периодических режимов в нелинейных системах.

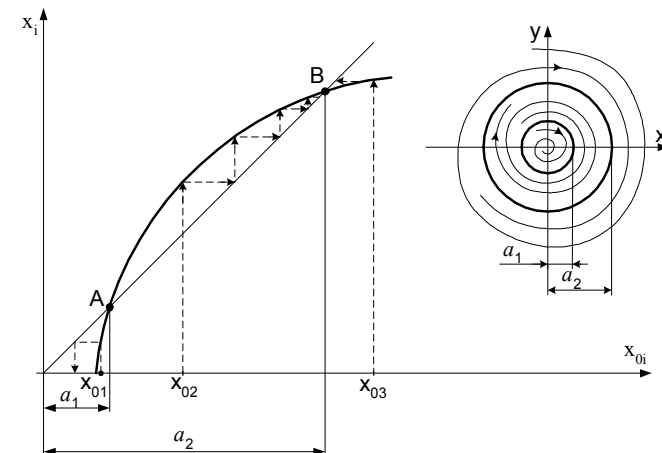


Рис. 2.19. Функция соответствия

Для исследования возможных автоколебаний в координатах функции соответствия (рис. 2.19) проводится прямая из начала координат под углом 45° к координатным осям, для которой $x_i = x_{0i}$, что соответствует отображению каждой точки полуоси OX самой в себя, т.е. после обхода вокруг начала координат точка возвращается в исходное положение. Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки А и В) определяют существование предельного цикла. Если указанная кривая и прямая не пересекаются, то автоколебания невозможны, а если касаются, то имеет место один предельный цикл.

Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 2.19.

Рис. 2.19 соответствует двум предельным циклам, из которых меньший (точка А) неустойчив, а больший (точка В) устойчив. Следовательно, при начальных условиях (x_0, y_0) , расположенных внутри меньшего предельного цикла, система устойчива, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу.

ложение. Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки А и В) определяют существование предельного цикла. Если указанная кривая и прямая не пересекаются, то автоколебания невозможны, а если касаются, то имеет место один предельный цикл.

Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 2.19.

Рис. 2.19 соответствует двум предельным циклам, из которых меньший (точка А) неустойчив, а больший (точка В) устойчив. Следовательно, при начальных условиях (x_0, y_0) , расположенных внутри меньшего предельного цикла, система устойчива, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу.

2.6. Коррекция нелинейных систем

При коррекции нелинейных автоматических систем обычно решаются две основные задачи [10]:

- обеспечение устойчивости системы;
- получение автоколебаний с заданной амплитудой и частотой.

Коррекция осуществляется с помощью включения линейных или нелинейных корректирующих устройств, а также компенсацией влияния нелинейностей.

Корректирующие устройства. В качестве линейных корректирующих устройств используются главным образом неединичные главные обратные связи (рис. 2.20,а) и местные обратные связи, охватывающие нелинейные элементы (рис. 2.20,б).

Нелинейные корректирующие устройства включаются либо последовательно либо в обратные связи.

При расчете корректирующих устройств структурную схему нелинейной системы необходимо привести к эквивалентной одноконтурной схеме с нелинейным элементом и эквивалентной линейной частью с передаточной функцией для схемы, приведенной на рис. 2.20,а,

$$W_{элч}(s) = W_{лч}(s) \times W_{ос}(s)$$

и для схемы, приведенной на рис. 2.20,б,

$$W_{элч}(s) = W_{лч}(s) + W_{мос}(s).$$

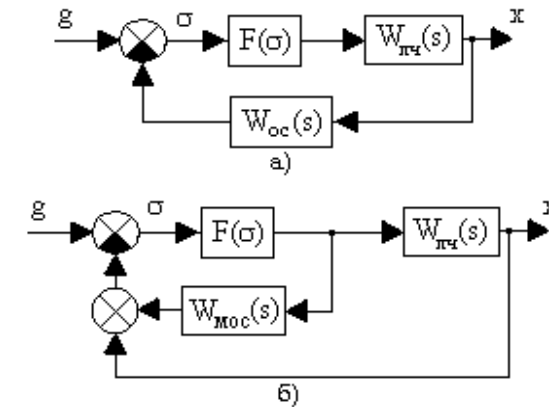


Рис. 2.20. Структурная схема нелинейной системы: а - с неединичной главной обратной связью; б - с местной обратной связью

Влияние линейного корректирующего устройства на фазовый портрет системы. Рассмотрим систему, представленную на рис. 2.20,а, линейная часть которой задана передаточной функцией

$$W_{лч}(s) = \frac{k}{s(Ts+1)},$$

где k - коэффициент передачи;

T - постоянная времени,

а нелинейный элемент - статической характеристикой $F(\sigma)$; у которой в качестве линейного корректирующего устройства включено в главную обратную связь форсирующее звено с передаточной функцией

$$W_{ос}(s) = (T_{ос} s + 1),$$

где $T_{ос}$ - постоянная времени.

Передаточная функция эквивалентной линейной части системы будет

$$W_{элч}(s) = \frac{k(T_{ос}s+1)}{s(Ts+1)}. \quad (2.54)$$

На основании структурной схемы (рис. 2.20,а) и выражения (2.54) свободное движение нелинейной системы ($g = 0$) можно описать дифференциальным уравнением относительно отклонения σ

$$(Tp^2 + p)\sigma + k(T_{ос}p + 1)F(\sigma) = 0, \quad \text{где } p = d/dt. \quad (2.55)$$

Учитывая, что

$$\sigma = -(T_{ос}p + 1)x, \quad (2.56)$$

получим дифференциальное уравнение относительно управляемой величины x системы

$$T \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} - kF(\sigma) = 0. \quad (2.57)$$

Для построения фазового портрета в качестве координат фазовой плоскости выбираем управляемую величину x и скорость ее изменения $y = dx/dt$ и уравнение (2.57) заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y + \frac{k}{T}F(\sigma); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases} \quad (2.58)$$

откуда дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{k}{T} \times \frac{F(\sigma)}{y}. \quad (2.59)$$

Если нелинейным элементом является усилитель с насыщением (рис. 2.3,а), то для линейного участка характеристики $|\sigma| \leq b$

$$F(\sigma) = k_y \sigma = -k_y(T_{oc} p + 1)x$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + k k_y T_{oc}}{T} - \frac{k k_y}{T} \times \frac{x}{y}. \quad (2.60)$$

Поскольку для участков насыщения $F(\sigma) = \pm c$, то вместо (2.59) аналогично (2.46) и (2.48) получим уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kc}{Ty} \quad \text{при } \sigma < -b \text{ и } (T_{oc}p + 1)x > +b; \quad (2.61)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{kc}{Ty} \quad \text{при } \sigma > +b \text{ и } (T_{oc}p + 1)x < -b. \quad (2.62)$$

Так как линейная область на фазовой плоскости определяется неравенством $|\sigma| \leq b$ и зависимостью (2.56), то уравнения граничных линий можно записать в виде:

$$\begin{cases} T_{oc} y + x = b \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{T_{oc}}(x - b); \\ T_{oc} y + x = -b \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{T_{oc}}(x + b). \end{cases} \quad (2.63)$$

Следовательно, граничные линии проходят через точки на оси абсцисс $|x| = \pm b$ и являются наклонными прямыми, угол наклона которых зависит от величины постоянной времени звена обратной связи

$$\alpha = \arctg\left(\frac{1}{T_{oc}}\right). \quad (2.64)$$

На рис. 2.21,а изображены фазовые траектории и граничные линии для системы при начальных условиях $(x_0, 0)$.

Таким образом, при неединичной обратной связи фазовый портрет в зонах насыщения, определяемый уравнениями (2.61) и (2.62), будет таким же, как и при единичной обратной связи. В области линейной части характеристики фазовый портрет системы определяется уравнением (2.60), в котором имеется дополнительный член, обусловленный постоянной времени звена обратной связи T_{oc} . Кроме того, наличие производной в главной обратной связи поворачивает граничные линии, разделяющие фазовую плоскость на области, против часовой стрелки навстречу движению изображающей точки. Угол поворота этих линий тем больше, чем больше постоянная времени T_{oc} ; в случае единичной обратной связи ($T_{oc} = 0$) угол поворота равняется нулю, при этом угол наклона $\alpha = 90^\circ$.

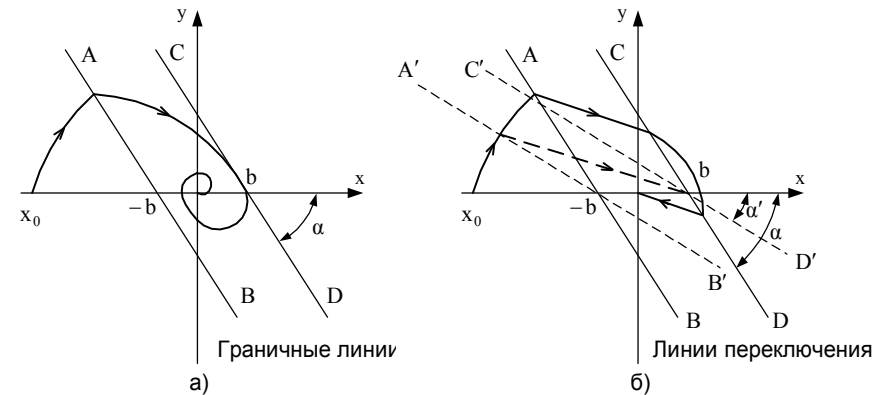


Рис. 2.21. Фазовые траектории нелинейных систем:
а - с усилителем с насыщением; б - с трехпозиционным реле

Если нелинейный элемент обладает релейной характеристикой, то фазовые траектории в зонах насыщения и нечувствительности определяются такими же уравнениями, как и в случае единичной обратной связи. Однако наличие члена $T_{oc}s$ в передаточной функции звена обратной связи обуславливает поворот линий переключения реле влево соответственно уравнениям (2.63); при этом угол наклона α определяется по формуле (2.64). На рис. 2.21,б показана фазовая траектория и линии переключения для нелинейной системы с трехпозиционным реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4,б) при начальных условиях $(x_0, 0)$. Поворот линий переключения реле навстречу движению изображающей точки фазовой траектории обеспечивает работу системы с упреждением. Путем подбора постоянной времени T_{oc} можно обеспечить перевод релейной системы в новое состояние за одно включение реле, как показано на рис. 2.4,б, при угле наклона линий переключения, равном α' .

В том случае, когда система имеет неединичную жесткую главную обратную связь вида

$$W_{oc}(s) = 1 + k_{oc}, \quad (2.65)$$

имеет место

$$\sigma = -(1 + k_{oc})x. \quad (2.66)$$

Граничные линии и линии переключения для такой главной обратной связи определяются уравнениями:

$$\begin{cases} k_{oc} x + \dot{x} = b \quad \text{или} \quad x = \frac{b}{1 + k_{oc}}; \\ k_{oc} x + \dot{x} = -b \quad \text{или} \quad x = -\frac{b}{1 + k_{oc}}. \end{cases} \quad (2.67)$$

Отсюда следует, что неединичная жесткая главная обратная связь вызывает перемещение граничных линий и линий переключения без изменения угла их наклона, что позволяет изменять соотношения между областями с различными фазовыми траекториями на фазовой плоскости, например, изменять область нечувствительности системы при неизменности зоны нечувствительности реле или усилителя.

Компенсация влияния нелинейности. При компенсации нелинейностей нелинейную систему можно рассматривать как линейную относительно определенных входных воздействий.

Компенсирющие нелинейности. Линеаризация заданной нелинейности $F(\sigma)$ заключается во включении последовательно или параллельно компенсирующего нелинейного элемента с обратной нелинейной характеристикой $F^{-1}(\sigma)$. При этом получаем эквивалентный линейный элемент. На рис. 2.22 при-

веден пример линеаризации усилителя с зоной нечувствительности путем включения параллельно с ним усилителя с насыщением.

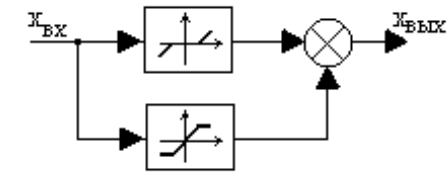


Рис. 2.22. Пример включения компенсирующей нелинейности

Если нелинейность $F(\sigma)$ присутствует в объекте управления ОУ, то линеаризация системы может быть осуществлена путем параллельного включения объекту управления компенсирующей нелинейности $F^{-1}(\sigma)$ и модели его линейной части $W_{м.лч.оу}(s)$ (рис. 2.23).

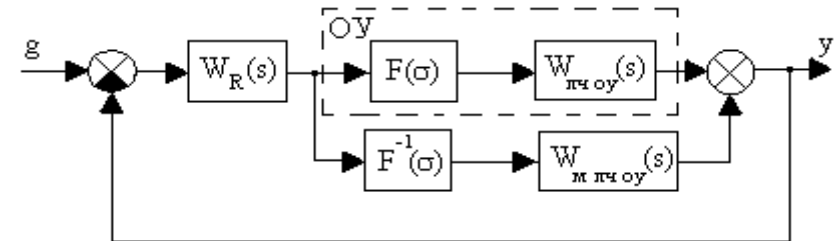


Рис. 2.23. Структурная схема нелинейной системы

Вибрационная компенсация нелинейностей заключается в том, что нелинейный элемент приобретает свойства пропорциональности, если на его вход вместе с полезным медленно изменяющимся сигналом $g(t)$ подается высокочастотная периодическая составляющая $u(t)$ (рис. 2.24).

Если на входе нелинейного элемента (рис. 2.24,а,б) с характеристикой $F(x)$ действует полезный медленно изменяющийся сигнал $g(t)$ совместно с несмещенным периодическим сигналом $u(t)$, частота ω которого достаточно велика, чтобы можно было приближенно считать функцию $g(t)$ постоянной в пределах периода $T = 2\pi/\omega$ (рис. 2.24,б), т.е.

$$x(t) = g(t) + u(t), \quad (2.68)$$

то выходной сигнал можно представить в виде суммы средней, медленно изменяющейся составляющей $F_1(g)$ и колебательной функции $F_2(u)$, близкой к периодической с частотой ω

$$y_n = F(x) = F[g(t) + u(t)] = F_1(g) + F_2(u). \quad (2.69)$$

Среднюю составляющую приближенно можно представить как среднее значение выходного сигнала нелинейного элемента за период

$$F_1[g(t)] \approx \frac{\omega}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} F[g(t) + u(t)] dt. \quad (2.70)$$

В случае $g = \text{const}$ формула (2.70) точная и определяет постоянный член ряда Фурье, составленного относительно выходного сигнала нелинейного элемента, а колебательная функция $F_2(u)$ есть сумма гармонических составляющих этого ряда.

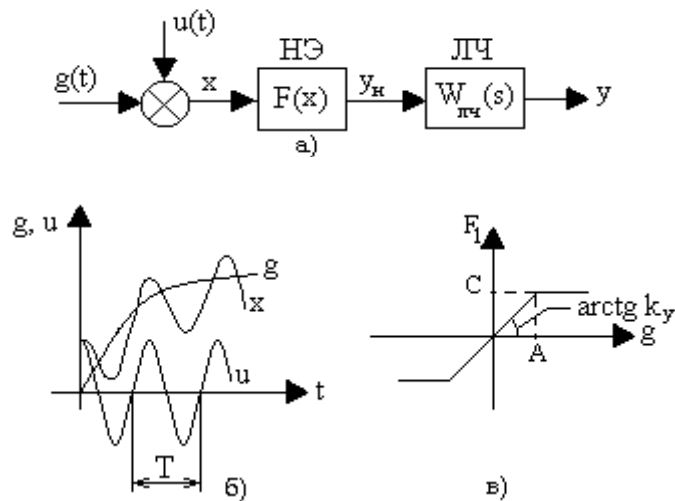


Рис. 2.24. Вибрационная компенсация нелинейности:

а - структурная схема разомкнутой системы; б - временные диаграммы изменения сигналов; в - статическая характеристика

Формула (2.70) тем точнее, чем больше частота ω и чем меньше $g(t)$ изменяется в пределах периода T . На рис. 2.24,в представлена характеристика $F_1(g)$ для идеального двухпозиционного реле при компенсирующей периодической функции $u(t)$ треугольного вида частоты ω и амплитуды A . Статическая характеристика является линейной для полезного сигнала $g(t)$, изменяющегося в пределах $\pm A$. Коэффициент передачи линейной части определяется как

$$k_y = \frac{C}{A}. \quad (2.71)$$

Таким образом, чем больше амплитуда компенсирующих колебаний A , тем шире зона линейности нелинейного элемента. Однако при этом уменьшается коэффициент передачи линеаризованного элемента.

Статическая характеристика $F_1(g)$ может быть получена экспериментальным путем, что позволяет определить значения k_y и A .

Выходной сигнал нелинейного элемента u_n (2.69) поступает на вход линейной части системы. При достаточно большой частоте ω периодического сигнала $u(t)$ линейная часть из-за инерционности не пропускает компенсирующие колебания, поэтому составляющей $F_2(u)$ можно пренебречь. Следовательно, для разомкнутой системы (рис. 2.24,а) можно определить передаточную функцию

$$W(s) = k_y W_{лч}(s). \quad (2.72)$$

Это значит, что при задающем воздействии $g(t) < A$ (рис. 2.24,в) для частоты ω компенсирующих колебаний $u(t)$, превышающих частоту среза линейной части системы, нелинейная система может рассматриваться как линейная.

Для формирования высокочастотного сигнала $u(t)$ используется или специальный генератор или собственные колебания системы.

2.7. Скользящие режимы в релейных системах

Скользящим режимом называется режим работы релейной системы, характеризующийся колебательным движением изображающей точки вдоль линии переключения. Чем сильнее воздействие производной в цепи обратной связи, тем больше поворачиваются линии переключения реле против часовой стрелки. При этом интенсивность затухания переходного процесса возрастает. В том случае, когда в точке переключения угол наклона линии переключения становится равным наклону или меньше угла наклона касательной к фазовой траектории, по которой движется изображающая точка после переключения реле, возникают условия существования скользящего режима [10].

Рассмотрим возникновение скользящего режима в нелинейной системе, изображенной на рис. 2.20,а, с идеальным реле при отсутствии внешнего воздействия и при заданных начальных условиях $x_0 \neq 0$ и $y_0 = 0$.

Пусть начальное состояние системы задано точкой $(x_0, 0)$ (рис. 2.25), от которой изображающая точка перемещается по фазовой траектории типа 1 до встречи с линией переключения АВ в точке С. В этой точке происходит переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по фазовой

траектории типа 2 до точки D. В точке D происходит переключение реле в другую сторону, после чего изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 1. Но как только увеличится результирующий сигнал обратной связи, произойдет переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 2 и так далее, т.е. изображающая точка, подойдя к этому отрезку линии переключения - отрезку скольжения, не сможет уйти с него.

Таким образом, изображающая точка, достигнув точки D, непрерывно переходит с траектории типа 1 на траекторию типа 2 и обратно, как бы скользит вдоль линии переключения и асимптотически приближаясь к точке равновесия 0.

Как видно из рис. 2.25, скольльзящий режим возможен на тех участках, где фазовая траектория типа 2 проходит ниже линии переключения АВ (после точки D). При начальном положении изображающей точки $(x_{02}, 0)$ после ее прихода по траектории типа 1 в точку на линии переключения D сразу начинается скольльзящий режим. При начальном положении изображающей точки $(x_{03}, 0)$ скольльзящий режим имеет место после переключения реле, когда изображающая точка скользит по линии переключения АВ в четвертом квадранте. В последнем случае переходный процесс имеет перерегулирование.

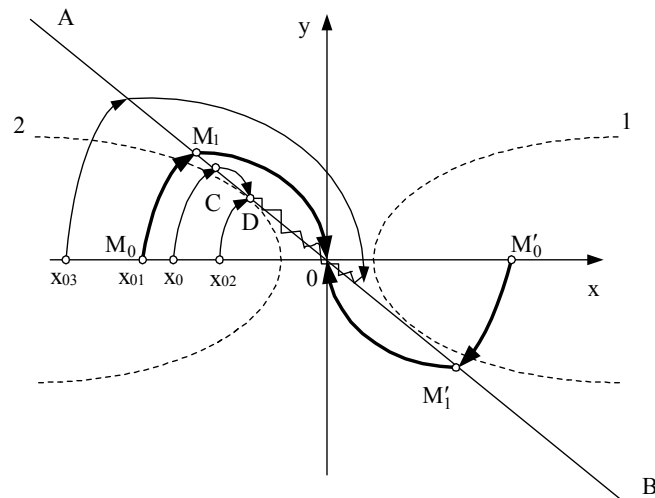


Рис. 2.25. Фазовые траектории релейной системы

В рассматриваемом примере предполагается, что переключение реле происходит мгновенно, в результате частота переключений бесконечно велика, а амплитуда колебаний бесконечно мала. Такой скольльзящий режим называется *предельным*. Если учесть неоднозначность характеристики или зону нечувствительности, то переключение реле при скольльзящем режиме происходит с конечной частотой, а амплитуда колебаний отличается от нуля.

В предельном скольльзящем режиме релейный элемент можно заменить эквивалентным линейным безынерционным звеном с коэффициентом передачи, стремящимся к бесконечности ($k_p \rightarrow \infty$). Тогда эквивалентная передаточная функция системы, соответствующая структурной схеме, приведенной на рис. 2.20,а, будет

$$\Phi_{\text{экв}}(s) = \lim_{k_p \rightarrow \infty} \frac{k_p W_{\text{лч}}(s)}{1 + k_p W_{\text{лч}}(s) W_{\text{ос}}(s)} = \frac{1}{W_{\text{ос}}(s)} = \frac{1}{T_{\text{ос}} s + 1}. \quad (2.73)$$

Следовательно, для предельного скольльзящего режима релейную систему можно представить эквивалентной структурной схемой в виде интегрирующего звена, охваченного обратной связью, или просто в виде апериодического звена первого порядка.

При начальном положении системы x_{01} (точка M_0 на рис. 2.25) после переключения реле в точке M_1 изображающая точка по фазовой траектории типа 2 приходит в начало координат, характеризующее состояние покоя. При этом переходный процесс будет иметь минимальное время, а режим работы системы будет *оптимальным по быстродействию*. При заданной постоянной времени корректирующей цепи обратной связи $T_{\text{ос}}$ такой режим будет существовать только для определенной группы начальных значений, когда изображающая точка в начальный момент времени оказывается на траектории $M_0 M_1 0 M'_1 M'_0$, проходящей через начало координат; во всех других случаях будет иметь место скольльзящий режим либо сразу после переключения реле, либо после нескольких переключений.

Для того чтобы процесс при любых начальных условиях был оптимальным по быстродействию, линией переключения должна быть сама фазовая траектория, проходящая через начало координат. Такая кривая линия переключения свидетельствует о нелинейном характере воздействия корректирующей обратной связи. Линия переключения не относится к фазовым траекториям. Но можно сделать так, что она будет совпадать с одной из фазовых траекторий. Тогда процесс в системе будет состоять из двух частей: подход к линии переключения по одной из траекторий, выбор которой зависит от начальных условий, и движение по линии переключения к положению равновесия.

Наглядное представление о совокупности оптимальных процессов при различных начальных условиях дает фазовый портрет, приведенный на рис. 2.26.

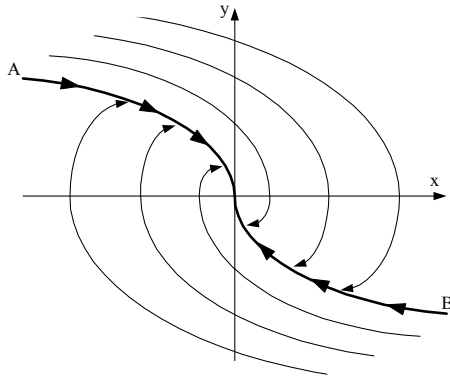


Рис. 2.26. Фазовый портрет оптимальной по быстродействию системы:
AB - линия переключения

При построении оптимальных по быстродействию систем основной задачей является формирование функции управления, характеризующей переключение релейного элемента. На рис. 2.27 приведена структурная схема системы с нелинейной обратной связью.

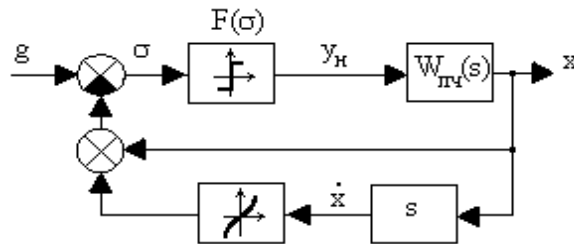


Рис. 2.27. Структурная схема оптимальной по быстродействию системы

В общем случае оптимальная по быстродействию система может содержать вычислительное устройство, формирующее функцию нелинейной обратной связи, логические элементы и иметь переменную структуру.

2.8. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик

Анализ и синтез нелинейных систем, работающих под воздействием случайных сигналов, значительно усложняется по сравнению с линеаризованной системой, так как, во-первых, закон распределения случайного процесса изменяется за счет изменения коэффициента усиления нелинейного элемента в зависимости от величины входного сигнала, во-вторых, если вместе с полез-

ным сигналом на вход системы поступает случайная помеха, то при прохождении через нелинейный элемент соотношение между ними изменяется.

Для нелинейных элементов нет простой связи между средними значениями, корреляционными функциями и спектральными плотностями случайных сигналов на его выходе и входе. Однако такую зависимость можно формально получить, если заменить нелинейное преобразование случайного сигнала некоторым эквивалентным линеаризованным преобразованием.

Оценить статистические характеристики нелинейных систем позволяет метод статистической линеаризации [2, 9, 10], основанный на замене нелинейной характеристики статистически равноценной линейной. Критериями статистической равноценности служат два принципа:

принцип равенства средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линеаризованного элемента;

принцип минимума средней квадратической ошибки, обусловленной заменой нелинейного элемента приближенным линеаризованным элементом.

Заменяем нелинейную характеристику элемента

$$y_n = F(x) \quad (2.74)$$

линейной зависимостью

$$y = k \times x, \quad (2.75)$$

которая имеет такие же математическое ожидание и дисперсию на выходе. С этой целью запишем (2.75) в виде

$$y = k_0 m_x + k_{11} x^0, \quad (2.76)$$

где x^0 - центрированная случайная функция.

Выберем коэффициенты k_0 и k_{11} так, чтобы

$$m_y = k_0 m_x = m_{y_n}; \quad \sigma_y^2 = k_{11}^2 \sigma_x^2 = \sigma_{y_n}^2, \quad (2.77)$$

где $m_x, m_{y_n}, m_y, \sigma_x^2, \sigma_{y_n}^2, \sigma_y^2$ - математические ожидания и дисперсии сигналов.

Из выражения (2.77) следует, что для статистической равноценности, исходя из равенства средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линеаризованного звена, требуется

$$k_0 = \frac{m_{y_n}}{m_x}; \quad (2.78)$$

$$k_{11} = \pm \frac{\sigma_{y_n}}{\sigma_x}, \quad (2.79)$$

причем знак k_{11} должен совпадать со знаком производной нелинейной характеристики $F(x)$.

Величины k_0 и k_{11} называются *коэффициентами статистической линейаризации*. Для их вычисления требуется знать математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе нелинейного элемента:

$$m_{y_n} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \omega(x) dx; \quad (2.80)$$

$$\sigma_{y_n}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \omega(x) dx, \quad (2.81)$$

где $\omega(x)$ - плотность вероятности распределения случайного сигнала на входе нелинейного элемента.

Далее найдем коэффициенты статистической линейаризации на основании второго принципа, обеспечивающего наилучшее приближение корреляционной функции сигнала на выходе нелинейного элемента к корреляционной функции сигнала на выходе линейного звена. Среднее значение квадрата ошибки, обусловленное заменой нелинейного элемента приближенным линейаризованным звеном, исходя из (2.74) и (2.76) определяется выражением

$$\overline{(y - y_n)^2} = k_0^2 m_x^2 + k_{12}^2 \sigma_x^2 - 2 k_0 m_x m_{y_n} - 2 k_{12} \overline{(x^0 y_n)} + y_n^2 \quad (2.82)$$

и должно быть минимальным. Приравняв нулю производные от последнего выражения по k_0 и k_{12} , запишем уравнения

$$2 k_0 m_x^2 - 2 m_x m_{y_n} = 0; \quad (2.83)$$

$$2 k_{12} \sigma_x^2 - 2 \overline{(x^0 y_n)} = 0. \quad (2.84)$$

Следовательно, в этом случае коэффициенты статистической линейаризации вычисляются по формулам

$$k_0 = \frac{m_{y_n}}{m_x}; \quad (2.85)$$

$$k_{12} = \frac{\overline{(x^0 y_n)}}{\sigma_x^2} = \frac{R_{xy_n}(0)}{R_x(0)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x) \omega(x) dx. \quad (2.86)$$

Таким образом, статистическая линейаризация из условия минимума средней квадратической ошибки дает то же значение коэффициента k_0 , которое

было найдено при первом способе линейаризации; коэффициент линейаризации относительно случайной составляющей k_{12} другой. Рекомендуется брать их среднее арифметическое значение:

$$k_1 = \frac{k_{11} + k_{12}}{2}. \quad (2.87)$$

Коэффициенты статистической линейаризации зависят не только от характеристик нелинейного элемента, но и от математического ожидания и дисперсии сигнала на его входе. Кроме того, для их вычисления требуется знать закон распределения случайного процесса. При прохождении случайного сигнала через замкнутую систему инерционные звенья линейной части системы приближают закон распределения к нормальному, поэтому для типовых нелинейных характеристик коэффициенты k_0 и k_1 могут быть заранее вычислены.

В заключение следует отметить, что метод статистической линейаризации применим к системам, в которых невозможны автоколебания. Для исследования нелинейных систем с автоколебаниями используется метод совместной статистической и гармонической линейаризации.

Таблицы коэффициентов статистической и совместной статистической и гармонической линейаризации для различных нелинейностей приведены в литературе.

ГЛОССАРИЙ

[АИМ](#)

[Анализ и синтез нелинейных систем](#)

[ВИМ](#)

[Виды импульсной модуляции](#)

[Дискретные системы](#)

[Дискретная передаточная функция импульсной системы.](#)

[Импульсная модуляция](#)

[Импульсная система](#)

[Метод гармонической линейаризации](#)

[Нелинейная система](#)

[Прямой метод Ляпунова](#)

[Переходный процесс в импульсных системах](#)

[Релейные системы](#)

[Синтез цифровых систем](#)

[Стандартная форма описания дискретной системы](#)

[Скользкий режим](#)

[теорема Котельникова-Шеннона](#)

Точность импульсных систем.

ФИМ

Цифровые системы

Частотные характеристики

Частотный метод В.М. Попова

ЧИМ

ШИМ