

# Расчёт многоканальных СМО с отрицательными заявками

Р. С. Хабаров<sup>1</sup>, к. т. н.

E-mail: xabarov.r@yandex.ru

В. А. Лохвицкий<sup>1</sup>, д. т. н.

E-mail: lokhv\_va@mail.ru

<sup>1</sup>Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия

## Аннотация

Предложен численный метод расчёта многоканальных систем массового обслуживания с произвольным распределением времени обслуживания (аппроксимируемым гиперэкспоненциальным  $H_2$  с комплексными параметрами) и двумя дисциплинами обработки отрицательных заявок: **RCS** (удаление заявки на обслуживание) и **катастрофы** (мгновенная очистка системы). Метод расширяет алгоритм Такахаси–Таками модификацией матриц переходов микросостояний и позволяет получать не только стационарные вероятности состояний, но и временные характеристики — начальные моменты времени ожидания и пребывания. Получены результаты для двух вариантов поведения положительных заявок при поступлении отрицательной: при уходе из системы и при направлении на повторное обслуживание.

**Ключевые слова:** теория массового обслуживания, отрицательные заявки, катастрофы, RCS, метод Такахаси–Таками, фазовые аппроксимации,  $H_2$ , преобразование Лапласа–Стилтьеса.

## Calculation of Multi-channel Queueing Systems with Negative Customers

**Abstract.** A numerical method is proposed for calculating multi-channel queueing systems with an arbitrary service time distribution (approximated by hyperexponential  $H_2$  with complex parameters) and two negative customer handling disciplines: **RCS** (Remove Customer in Service) and **disasters** (instantaneous system clearing). The method extends the Takahashi–Takami algorithm by modifying microstate transition matrices and yields both stationary state probabilities and time-based performance measures — initial moments of waiting and sojourn times. Results are obtained for two variants of positive customer behavior upon a negative arrival: removal from the system and re-queuing for service.

**Keywords:** queueing theory, negative customers, disasters, RCS, Takahashi–Takami method, phase approximations,  $H_2$ , Laplace–Stieltjes transform.

## 1. Введение

Метод Такахаси–Таками [1] изначально предложен для общего класса систем  $GI/G/c$ ; в монографии Рыжикова [2] подробно изложены многоканальные фазовые системы и итерационное решение векторно-матричных уравнений баланса с блоками  $A_j, B_j, C_j, D_j$ . Метод применим к достаточно широкому классу систем (в том числе  $M/H_k/n, H_k/M/n$  и др.); в данной работе рассматриваются системы с *пуассоновским входом* интенсивности  $\lambda$  и *распределением времени обслуживания*  $B$ , аппроксимируемым гиперэкспоненциальным  $H_2$  с комплексными параметрами, позволяющими описывать системы с произвольным коэффициентом вариации при  $n$  каналах. Предположения о пуассоновском потоке заявок и произвольном обслуживании являются достаточно общими для многих реальных систем [3; 4].

В последние десятилетия значительный интерес вызывает исследование систем с отрицательными заявками (negative customers), введёнными в работах Геленбе [5; 6]. Отрицательные заявки при поступлении могут удалять положительные заявки согласно различным дисциплинам. В работе рассматриваются две дисциплины обслуживания: **RCS (Remove Customer in Service)** — воздействие на одну заявку в обслуживании (удаление); **катастрофы** — мгновенная очистка системы от всех положительных заявок. Далее через  $\delta$  обозначается интенсивность потока отрицательных событий,  $W$  и  $V$  — времена ожидания в очереди и пребывания в системе (случайные величины),  $w_1$  и  $v_1$  — их первые начальные моменты (математические ожидания).

Исследования СМО с отрицательными заявками обычно связывают с работами Э. Геленбе (G-сети с «сигналами»); ключевой результат — существование стационарных распределений в мультипликативной форме (product-form) при марковских предпосылках и ограничениях на механизмы удаления [5; 6]. G-сети обобщались на случаи зависящих от состояния интенсивностей, пакетных перемещений и многоклассовых заявок, сохраняя мультипликативную форму стационарных распределений при экспоненциальных предпосылках. Обзор подходов к сигналам и стратегиям удаления приведён в [7]. Для одноканальных систем  $M/G/1$  сформировалась аналитическая ветка (дополнительная переменная, интегральные уравнения), позволяющая описывать стационарные распределения и временные характеристики [8]; развивались также факторизация Винера–Хопфа [9] и интерпретации удаления работы [10]. Отдельная линия — *катастрофы*: для  $M/G/1$  получены аналоги формулы Поллачека–Хинчина для стационарного распределения числа заявок в системе и времени пребывания, подчёркивающие роль преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС),  $T^*(s) = \mathbb{E}[e^{-sT}]$ ,  $s \geq 0$ , и корректной трактовки «образования» траектории катастрофой [11]. Модели с катастрофами обобщались на BMAP/SM/1 [12], дисциплину с разделением процессора [13], дискретное время [14], повторные попытки и отказы прибора [15; 16]. Для многоканальных моделей встречаются марковские частные случаи [17]; интерес к системам с отрицательными заявками и катастрофами сохраняется в последние годы (дискретное время, параллельные очереди, гетерогенные приборы), однако расчёт при произвольном обслуживании в многоканальном случае остаётся нетривиальным.

В данной работе предложено расширение метода Такахаси–Таками для многоканальных СМО с отрицательными заявками: вводятся правила формирования матриц переходов для дисциплин RCS и катастроф, а также алгоритмы вычисления первых начальных моментов времени ожидания и пребывания  $w_1$  и  $v_1$ , согласованные с имитационным моделированием. В результате метод позволяет получать стационарные вероятности состояний и временные характеристики в рамках единого алгоритма; обслуживание аппроксимируется  $H_2$  при любом коэффициенте вариации, при необходимости с комплексными параметрами.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается многоканальная система массового обслуживания с пуссоновскими потоками положительных (интенсивность  $\lambda$ ) и отрицательных (интенсивность  $\delta$ ) заявок, временем обслуживания  $B$ , аппроксимируемым гиперэкспоненциальным распределением  $H_2$  с заданным средним и коэффициентом вариации, и числом каналов  $n \geq 1$ . Коэффициент загрузки  $\rho = n^{-1}\lambda\mathbb{E}[B]$  предполагается меньше единицы.

Исследуются две дисциплины обработки отрицательных заявок:

1. **RCS** (Remove Customer in Service) — удаление одной заявки, находящейся в обслуживании;
2. **катастрофы** — мгновенная очистка системы от всех положительных заявок.

Для каждой дисциплины рассматриваются два варианта поведения вытесненных положительных заявок: уход из системы и направление на повторное обслуживание (рестарт).

Пространство состояний усекается по уровню  $i \leq N - 1$  ( $N$  — максимальный уровень); сходимость итераций контролируется по изменению  $x[i]$  или  $t[i]$  с заданным допуском.

## 3. Метод Такахаси–Таками: базовые принципы

### 3.1. Структура микросостояний

Метод основан на представлении системы  $M/H_2/n$  в виде марковского процесса с дискретным пространством состояний. Состояние описывается:

- $i$  — число заявок в системе (уровень, level);
- $j$  — число заявок, находящихся в фазе 2  $H_2$ -аппроксимации (с интенсивностью  $\mu_2$ ; микросостояние, microstate).

Для уровня  $i < n$  число микросостояний равно  $i + 1$ , для  $i \geq n$  постоянно и равно  $n + 1$ .

### 3.2. Матрицы переходов

Процесс описывается четырьмя типами матриц переходов между микросостояниями соседних уровней:  $A$  (поступление),  $B$  (уход вниз),  $C$  (горизонтальные переходы),  $D$  (диагональная матрица интенсивностей выхода).

Пусть  $y_1 + y_2 = 1$ , где  $y_1$  и  $y_2$  — вероятности выбора фаз 1 и 2 в  $H_2$ -аппроксимации, а  $\mu_1, \mu_2$  — интенсивности экспоненциального обслуживания в фазах. На уровне  $i < n$  все заявки находятся в обслуживании, а на уровне  $i \geq n$  в обслуживании ровно  $n$  заявок, остальные ждут в очереди.

#### 3.2.1. Матрица $A$ (поступление положительных заявок)

Для  $i < n$  при приходе новая заявка немедленно занимает свободный канал и выбирает фазу:

$$(i, j) \rightarrow (i + 1, j) \text{ с интенсивностью } \lambda y_1, \quad (i, j) \rightarrow (i + 1, j + 1) \text{ с интенсивностью } \lambda y_2.$$

Для  $i \geq n$  пришедшая заявка становится в очередь, и микросостояние  $j$  (число заявок в фазе 2 среди обслуживаемых) не меняется:

$$(i, j) \rightarrow (i + 1, j) \text{ с интенсивностью } \lambda.$$

### 3.2.2. Матрица $B$ (уход на уровень вниз)

Для  $i \leq n$  уход вниз обусловлен завершением обслуживания одной из  $i$  заявок:

$$(i, j) \rightarrow (i-1, j) \text{ с интенсивностью } (i-j)\mu_1, \quad (i, j) \rightarrow (i-1, j-1) \text{ с интенсивностью } j\mu_2.$$

Для  $i > n$  уход вниз сопровождается тем, что освободившийся канал немедленно занимает заявка из очереди, выбирая фазу  $1/2$  с вероятностями  $y_1/y_2$ . Поэтому для  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} (i, j) &\rightarrow (i-1, j) \text{ с интенсивностью } (n-j)\mu_1y_1 + j\mu_2y_2, \\ (i, j) &\rightarrow (i-1, j+1) \text{ с интенсивностью } (n-j)\mu_1y_2, \quad (j < n), \\ (i, j) &\rightarrow (i-1, j-1) \text{ с интенсивностью } j\mu_2y_1, \quad (j > 0). \end{aligned}$$

### 3.2.3. Матрица $D$ (интенсивности выхода)

Диагональные элементы задаются суммарной интенсивностью выхода из микросостояния. Для  $i < n$ :

$$D(i, j) = \lambda + (i-j)\mu_1 + j\mu_2,$$

а для  $i \geq n$ :

$$D(i, j) = \lambda + (n-j)\mu_1 + j\mu_2.$$

**Примеры для  $n = 3$ , уровень  $i = 2$ :** матрица  $A_1$  (переход  $1 \rightarrow 2$ ) — строка  $A_1 = (\lambda y_1 \quad \lambda y_2 \quad 0)$ ; матрица  $B_2$  (переход  $2 \rightarrow 1$ ) — блок  $3 \times 2$ :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2\mu_1 & 0 \\ \mu_2 & \mu_1 \\ 0 & 2\mu_2 \end{pmatrix};$$

матрица  $D_2$  (диагональ выхода):

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \mu_1 + \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu_2 \end{pmatrix}.$$

## 3.3. Итерационный алгоритм

Алгоритм Такахаси–Таками основан на итерационном вычислении вспомогательных величин для уровней  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  и последующем восстановлении вероятностей уровней  $p[i]$ . В типичной реализации используются:

- вспомогательные матрицы  $G_i = (D_i - C_i)^{-1}$ , а также произведения  $A_{i-1}G_i$  и  $B_{i+1}G_i$ ;
- итерации по уровням для обновления векторов  $t[i]$  и скаляров  $x[i], z[i]$  до сходимости;
- восстановление вероятностей уровней по рекуррентной формуле  $p[i] = p[i-1]x[i-1]$  при нормировке.

**Построение матриц:** для каждого уровня  $i$  по микросостоянию  $j$  заполняются блоки: (1)  $A$  — переходы вверх по правилам для  $i < n$  и  $i \geq n$ ; (2)  $B$  — переходы вниз из завершений обслуживания и выбора фазы при  $i > n$ ; (3)  $C$  — горизонтальные переходы; (4) диагональ  $D$  так, чтобы сумма по строкам в  $A + B + C - D$  равнялась нулю. Размеры блоков определяются числом микросостояний на соседних уровнях.

**Выбор  $N$ , сходимость, сложность:**  $N$  выбирают так, чтобы  $p[N-1]x[N-1] < \varepsilon$ . Итерации прекращают при  $\max_i |x[i]^{\text{new}} - x[i]^{\text{old}}| < \varepsilon$ . Время одного шага итерации —  $O(N(n+1)^3)$ , память —  $O(N(n+1)^2)$ .

### 3.4. Временные характеристики в базовой модели

Для базовой системы без отрицательных заявок моменты ожидания  $w^{(k)}$  могут вычисляться по вероятностям уровней:

$$w^{(k)} = \frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{j=k+1}^{N-n} j(j-1) \cdots (j-k) p[n+j].$$

Моменты пребывания при отсутствии отрицательных заявок получаются стандартной свёрткой моментов ожидания и обслуживания. Для систем с отрицательными воздействиями моменты вычисляются либо по вероятностям уровней (в редуцированных аппроксимациях к  $M/G/n$ ), либо восстанавливаются из ПЛС численным дифференцированием:  $(-1)^k T^{*(k)}(0)$  аппроксимируется конечными разностями по  $s$  в окрестности нуля (шаг  $h \sim 10^{-5}$ – $10^{-4}$ ); устойчиво ограничены первые 2–4 момента.

## 4. Расширение метода для систем с отрицательными заявками

### 4.1. Общая идея

Расширение основано на модификации матриц переходов базового метода без изменения общей структуры итерационного процесса. В зависимости от дисциплины отрицательного воздействия переопределяются правила построения матриц  $B$  и  $D$ , а для катастроф — также структура микросостояний.

### 4.2. Дисциплина RCS (Remove Customer in Service)

При дисциплине RCS отрицательная заявка действует на одну заявку в обслуживании, выбирая занятый канал равновероятно. На уровнях  $i \leq n$  (очереди нет) отрицательные события добавляют к уходам вниз интенсивности

$$(i, j) \rightarrow (i-1, j) \text{ с интенсивностью } \delta \frac{i-j}{i}, \quad (i, j) \rightarrow (i-1, j-1) \text{ с интенсивностью } \delta \frac{j}{i},$$

то есть эквивалентны дополнительной «опасности удаления»  $\delta/i$  для каждой обслуживаемой заявки. Диагональные элементы дополняются интенсивностью отрицательных приходов:

$$D_{\text{RCS}}(i, j) = D_{\text{base}}(i, j) + \delta.$$

На уровнях  $i > n$  отрицательное событие также удаляет одну заявку из обслуживания, после чего канал немедленно занимает заявка из очереди и выбирает фазу. Для практического построения матрицы  $B$  удобно использовать приближение  $\mu'_1 = \mu_1 + \delta/n$ ,  $\mu'_2 = \mu_2 + \delta/n$  (дополнительная опасность удаления  $\delta/n$  для каждого канала) и формулы базового случая для  $i > n$ , подставляя  $\mu'_1, \mu'_2$  вместо  $\mu_1, \mu_2$ .

### 4.3. Дисциплина катастроф

При базовой дисциплине обслуживания катастрофа очищает систему (удаляет все положительные заявки). Для согласования с матричной структурой метода вводится искусственное микросостояние  $D$  («состояние катастрофы») на каждом уровне  $i > 0$ . При поступлении отрицательной заявки система переходит в состояние  $D$ , а затем с большой искусственной интенсивностью  $\gamma \gg \mu_1, \mu_2, \lambda$  — в нулевой уровень, что моделирует мгновенную очистку.

Структура микросостояний модифицируется так:

- уровень 0: одно состояние  $(0, 0)$ ;
- уровни  $1 \leq i < n + 1$ :  $1 + (i + 1)$  микросостояний (первое —  $D$ , затем  $(i, 0), \dots, (i, i)$ );
- уровни  $i \geq n + 1$ :  $1 + (n + 1)$  микросостояний (первое —  $D$ , затем  $(i, 0), \dots, (i, n)$ ).

Поступление положительных заявок ( $A$ ) «пропускает» состояние  $D$ . Для уровня 0:

$$(0, 0) \rightarrow (1, 0) \text{ с интенсивностью } \lambda y_1, \quad (0, 0) \rightarrow (1, 1) \text{ с интенсивностью } \lambda y_2.$$

Для уровня  $i > 0$  положительный приход переводит  $(i, j)$  в соответствующее обычное состояние уровня  $i + 1$ , сохраняя описанную выше структуру (без попадания в  $D$ ).

Переход в катастрофическое состояние происходит из любого обычного микросостояния уровня  $i > 0$  с интенсивностью  $\delta$ . Состояние  $D$  имеет уход в  $(0, 0)$  с интенсивностью  $\gamma$ , поэтому диагональный элемент для этого состояния (суммарная интенсивность выхода) равен  $\gamma$ . Для уровня  $i = 1$  при  $n = 3$  микросостояния суть  $D, (1, 0), (1, 1)$ ; матрица  $B_1$  имеет размер  $3 \times 1$  (переход в уровень 0).

#### 4.4. Примеры матриц переходов

Переходы по завершению обслуживания (интенсивности  $\mu_1, \mu_2$ ) в базе  $M/H_2/n$  стандартны, поэтому ниже для каждой дисциплины приведены только переходы, возникающие из отрицательных воздействий (интенсивность  $\delta$  и производные; для катастроф также  $\gamma$ ).

##### 4.4.1. RCS (удаление из системы)

При построении матриц  $B_i$  к «стандартным» интенсивностям обслуживания добавляются интенсивности отрицательных воздействий. В качестве наглядного примера приведём матрицу  $B_2$  для дисциплины RCS при  $n \geq 2$  (уровень  $i = 2$ , микросостояния  $j = 0, 1, 2$  на уровне 2 и  $j = 0, 1$  на уровне 1). Тогда

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2\mu_1 + \delta & 0 \\ \mu_2 + \delta/2 & \mu_1 + \delta/2 \\ 0 & 2\mu_2 + \delta \end{pmatrix},$$

где, например, элемент  $(2, 1) \rightarrow (1, 1)$  равен  $\mu_1 + \delta/2$ : он складывается из обслуживания фазы 1 и удаления заявки в фазе 1 отрицательным прибытием (равновероятный выбор канала среди двух занятых). Матрица  $C_i$  совпадает с базовой (горизонтальные переходы отсутствуют при удалении из системы).

##### 4.4.2. RCS (повторное обслуживание)

При повторном обслуживании отрицательное воздействие не меняет числа заявок в системе, а лишь прерывает обслуживание одной случайной заявки и возвращает её в очередь с рестартом. Это моделируется горизонтальными переходами в матрице  $C_i$ : при  $i \leq n$  заявок каждое микросостояние  $j$  переходит в другие микросостояния  $j'$  с интенсивностью, определяемой вероятностью выбора нового распределения фаз после рестарта одного из  $i$  каналов. Матрица  $B_i$  совпадает с базовой (без дополнительных уходов вниз по уровню).

Пример матрицы  $C_2$  при уровне  $i = 2$  (микросостояния  $j = 0, 1, 2$  — число заявок в фазе 2): прерывание случайного канала даёт переход  $j \rightarrow j + 1$  с интенсивностью  $\delta \frac{i-j}{i} y_2$  (рестарт в фазе 2) и  $j \rightarrow j - 1$  с интенсивностью  $\delta \frac{j}{i} y_1$  (рестарт в фазе 1). Тогда

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \delta y_2 & 0 \\ \delta y_1/2 & 0 & \delta y_2/2 \\ 0 & \delta y_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{только внедиагональные переходы; диагональ дополняется в } D_i)$$

#### 4.4.3. Катастрофы (очищение системы)

Для катастроф с очищением вводится дополнительное микросостояние  $D$  на каждом уровне  $i > 0$ . Приведём пример матрицы  $B_1$  при  $n \geq 1$  (уровень  $i = 1$ , микросостояния:  $D, (1, 0), (1, 1)$ ; переход в уровень 0):

$$B_1 = (\gamma).$$

Здесь первая строка соответствует состоянию  $D$ , из которого система мгновенно переходит в  $(0, 0)$  с интенсивностью  $\gamma \gg \mu_1, \mu_2, \lambda$ . Обычные состояния  $(1, 0)$  и  $(1, 1)$  уходят в уровень 0 по стандартным интенсивностям  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (не показаны, так как не зависят от катастроф).

Матрица  $C_1$  моделирует горизонтальные переходы из обычных состояний в катастрофическое состояние  $D$ :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы  $(1, 0) \rightarrow D$  и  $(1, 1) \rightarrow D$  равны  $\delta$  (поступление катастрофы мгновенно переводит систему в состояние  $D$ ).

#### 4.4.4. Катастрофы (повторное обслуживание)

При повторном обслуживании катастрофа не очищает систему, а прерывает все обслуживания и возвращает заявки в очередь с рестартом. Состояние  $D$  не вводится; вместо этого используются горизонтальные переходы в матрице  $C_i$  между микросостояниями с интенсивностью  $\delta$ , моделирующие перераспределение фаз всех  $m = \min(i, n)$  занятых каналов после катастрофы. Каждый из  $m$  каналов независимо выбирает фазу 1 или 2 с вероятностями  $y_1$  и  $y_2$ , поэтому из любого микросостояния  $(i, j)$  система переходит в  $(i, k)$  с интенсивностью  $\delta \cdot \binom{m}{k} y_2^k y_1^{m-k}$  (независимо от  $j$ ). Матрицы  $B_i$  совпадают с базовыми.

Пример матрицы  $C_2$  при уровне  $i = 2$  (микросостояния  $j = 0, 1, 2; m = 2$ ):

$$C_2 = \delta \begin{pmatrix} y_1^2 & 2y_1y_2 & y_2^2 \\ y_1^2 & 2y_1y_2 & y_2^2 \\ y_1^2 & 2y_1y_2 & y_2^2 \end{pmatrix}.$$

В общем случае для уровня  $i$  при  $m = \min(i, n)$  матрица  $C_i$  имеет размер  $(m+1) \times (m+1)$ , и все строки совпадают:  $C_i(j, k) = \delta \binom{m}{k} y_2^k y_1^{m-k}$  при  $j, k \in \{0, \dots, m\}$ . Диагональ уровня в блоке  $D_i$  дополняется интенсивностью  $\delta$  (суммарный выход из микросостояния из-за катастрофы).

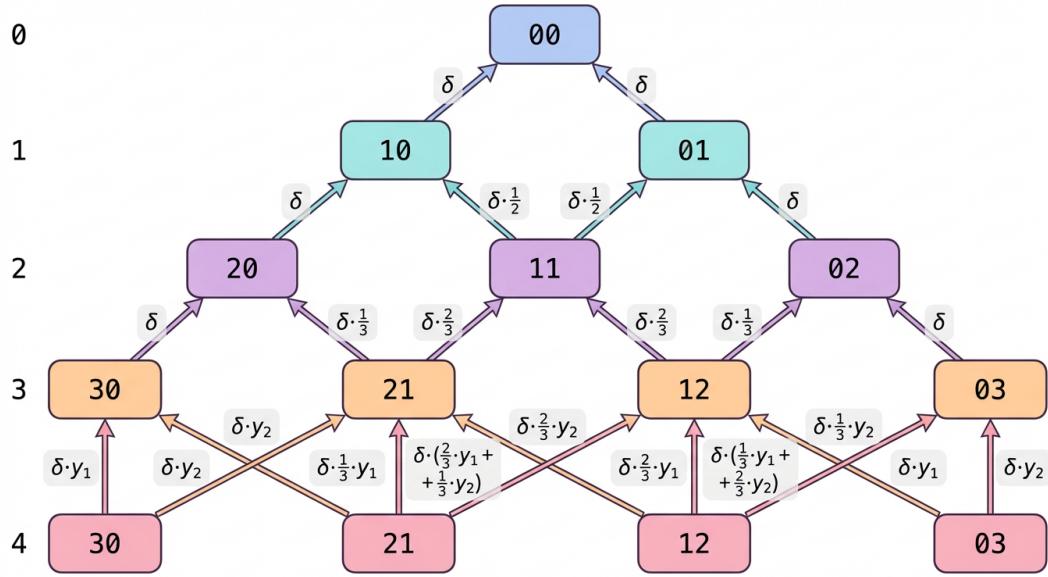


Рис. 1: Переходы, вызванные отрицательными воздействиями, для дисциплины RCS (удаление заявки из обслуживания),  $n = 3$ , уровни  $0, \dots, n$ . Для  $i > n$  в расчётах используется приближение через  $\mu'_1, \mu'_2$  (см. текст).

## 5. Расчёт временных характеристик

### 5.1. Дисциплина RCS

#### 5.1.1. RCS с удалением из системы

Для типичной заявки, находящейся в обслуживании при  $m$  занятых каналах, интенсивность удаления аппроксимируется как  $r(m) = \delta/m$ . При дисциплине «удаление из обслуживания» время в обслуживании:

$$S = \min(B, Y), \quad Y \sim \text{Exp}(r),$$

и ПЛС времени обслуживания  $S^*(s) = \frac{r}{s+r} + \frac{s}{s+r}\beta(s+r)$ , где  $\beta(s) = \mathbb{E}[e^{-sB}]$ . Дальнейшие моменты  $W, V$  вычисляются через ПЛС и численное дифференцирование в нуле.

#### 5.1.2. RCS с повторным обслуживанием

Если отрицательное событие интерпретируется как прерывание обслуживания с возвратом заявки в очередь (рестарт обслуживания и повторная генерация длительности), расчёт сводится к эффективному времени обслуживания  $B_{\text{eff}}$  при пуассоновских рестартах. Пусть  $B$  имеет ПЛС  $\beta(s)$ , рестарты — с интенсивностью  $r$ . Для модели «прерывание–повтор» ПЛС времени завершения обслуживания:

$$B_{\text{eff}}^*(s) = \beta(s+r) \cdot \frac{s+r}{s+r\beta(s+r)}.$$

Для RCS типичная заявка при  $m$  занятых каналах имеет интенсивность рестарта  $r(m) = \delta/m$ ; в расчёте  $r$  оценивается самосогласованно (итерационно), начиная с приближения  $r \approx \delta/n$ . Система аппроксимируется стандартной  $M/G/n$  без отрицательных выходов с распределением  $B_{\text{eff}}$ ; тогда  $V = W + B_{\text{eff}}$ ,  $q = 1$ ,  $V_{\text{served}} \equiv V$ ,  $V_{\text{broken}} \equiv 0$ . Моменты  $W$  и  $V$  вычисляются базовым алгоритмом Такахаси–Таками для  $M/G/n$  с распределением  $B_{\text{eff}}$ .

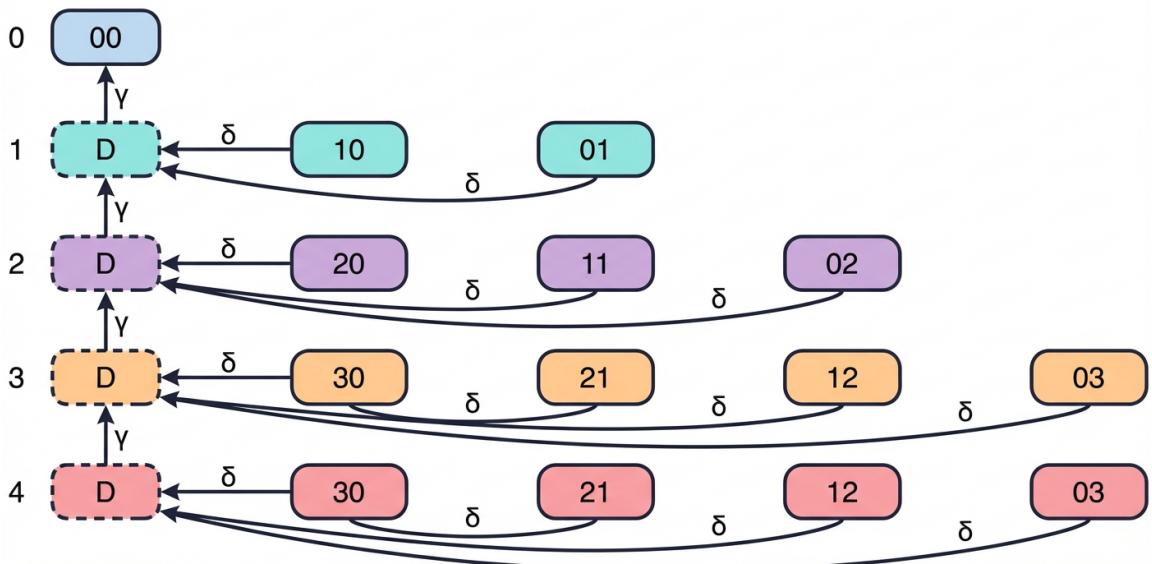


Рис. 2: Переходы, вызванные катастрофическими воздействиями (интенсивности  $\delta$  и  $\gamma$ ),  $n = 3$ , уровни  $0, \dots, n + 1$ .

## 5.2. Дисциплина катастроф

### 5.2.1. Катастрофы с очищением

Пусть  $Y \sim \text{Exp}(\delta)$  — время до ближайшей катастрофы после прихода типичной заявки. Для согласования с имитационным моделированием вводятся гипотетические величины  $W_0$  и  $Z_0 = W_0 + B$ , соответствующие динамике, в которой катастрофы *после прихода данной заявки* отключены (но состояние при приходе берётся из стационарного исходной системы). Тогда

$$W = \min(W_0, Y), \quad V = \min(Z_0, Y),$$

и для любой независимой пары  $T$  и  $Y \sim \text{Exp}(\delta)$  справедливо:

$$\mathbb{E}[e^{-s \min(T, Y)}] = \frac{\delta}{s + \delta} + \frac{s}{s + \delta} T^*(s + \delta).$$

Отсюда:

$$W^*(s) = \frac{\delta}{s + \delta} + \frac{s}{s + \delta} W_0^*(s + \delta), \quad V^*(s) = \frac{\delta}{s + \delta} + \frac{s}{s + \delta} Z_0^*(s + \delta).$$

Вероятность успешного обслуживания:

$$p_{\text{served}} = \mathbb{P}(Z_0 < Y) = \mathbb{E}[e^{-\delta Z_0}] = Z_0^*(\delta),$$

а ПЛС условных распределений:

$$\mathbb{E}[e^{-sV} \mid \text{served}] = \frac{Z_0^*(s + \delta)}{Z_0^*(\delta)}, \quad \mathbb{E}[e^{-sV} \mid \text{broken}] = \frac{\delta}{s + \delta} \cdot \frac{1 - Z_0^*(s + \delta)}{1 - Z_0^*(\delta)}.$$

### 5.2.2. Катастрофы с повторным обслуживанием

При дисциплине «катастрофа прерывает обслуживание всех заявок в каналах и возвращает их в очередь с рестартом» прерванных в смысле удалённых заявок нет:

$q = 1$ ,  $V_{\text{served}} \equiv V$ ,  $V_{\text{broken}} \equiv 0$ . Эффективное время обслуживания  $B_{\text{eff}}$  при пуассоновских рестартах с интенсивностью  $\delta$  (каждая катастрофа прерывает любую заявку в канале):

$$B_{\text{eff}}^*(s) = \beta(s + \delta) \cdot \frac{s + \delta}{s + \delta \beta(s + \delta)}.$$

Система в приближении сводится к стандартной  $M/G/n$  без отрицательных выходов с распределением  $B_{\text{eff}}$ ;  $V = W + B_{\text{eff}}$ , моменты получаются численным дифференцированием ПЛС (с гамма-аппроксимацией  $\beta(s)$  по первым двум моментам  $B$ ).

## 6. Численные результаты и сравнение с имитационным моделированием

### 6.1. Параметры тестов

В качестве базового примера использовались параметры:  $n = 3$ ,  $\lambda_{\text{pos}} = 1,0$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\rho = 0,7$ , коэффициент вариации времени обслуживания  $CV = 1,2$ , размер выборки в имитационном моделировании 1 000 000. Дополнительно, чтобы показать применимость метода при различных коэффициентах вариации времени обслуживания, в таблице 1 приведены численные значения для  $CV = 0,8$  и  $CV = 1,2$ .

### 6.2. Сравнение численного метода и ИМ по $w_1$ и $v_1$

В таблице 1 приведены первые начальные моменты времени ожидания ( $w_1$ ) и пребывания ( $v_1$ ) для четырёх дисциплин обслуживания отрицательных заявок при двух значениях коэффициента вариации времени обслуживания; для каждого значения  $CV$  приведено сравнение с имитационным моделированием (ИМ).

Дисциплина	$w_1$			$v_1$		
	Числ	ИМ	Отн.%	Числ	ИМ	Отн.%
<i>Коэффициент вариации <math>CV = 0,8</math></i>						
RCS (удаление)	0.4205	0.4111	2.29	2.0952	2.0849	0.50
RCS (повторное обслуж.)	1.2067	1.1650	3.58	3.4030	3.4062	-0.10
Катастрофы (очищение)	0.1964	0.1918	2.42	1.4853	1.4829	0.16
Катастрофы (повторное обслуж.)	1.8268	1.8513	-1.32	4.1527	4.1725	-0.47
<i>Коэффициент вариации <math>CV = 1,2</math> (базовое значение)</i>						
RCS (удаление)	0.3881	0.3968	-2.18	1.9127	1.9190	-0.33
RCS (повторное обслуж.)	1.0627	1.0273	3.44	3.0547	3.0674	-0.41
Катастрофы (очищение)	0.1613	0.1660	-2.82	1.3096	1.3160	-0.49
Катастрофы (повторное обслуж.)	0.7583	0.7781	-2.55	2.6441	2.6732	-1.09

Таблица 1: Первые начальные моменты времени ожидания  $w_1$  и пребывания  $v_1$  при фиксированных  $n = 3$ ,  $\lambda_{\text{pos}} = 1,0$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\rho = 0,7$  и различных коэффициентах вариации времени обслуживания. Числ — численный расчёт, ИМ — имитационное моделирование, Отн.% — относительная погрешность.

В таблице 2 приведены среднеквадратичные отклонения  $\sigma_W$  и  $\sigma_V$  для тех же дисциплин обслуживания отрицательных заявок и значений коэффициента вариации.

Заметны две устойчивые закономерности. Во-первых, дисциплины с *удалением* (RCS) и *очищением* (катастрофы) дают наименьшие значения  $w_1$  и  $v_1$ : отрицательные воздействия в этих постановках уменьшают «эффективную загрузку» системы за

Дисциплина	$\sigma_W$			$\sigma_V$		
	Числ	ИМ	Отн.%	Числ	ИМ	Отн.%
<i>Коэффициент вариации <math>CV = 0,8</math></i>						
RCS (удаление)	0.9477	0.9233	2.57	1.789	1.767	1.23
RCS (повторное обслуж.)	1.976	1.984	0.42	2.743	2.782	1.41
Катастрофы (очищение)	0.5639	0.5603	0.65	1.305	1.302	0.19
Катастрофы (повторное обслуж.)	2.448	2.412	1.50	3.185	3.149	1.11
<i>Коэффициент вариации <math>CV = 1,2</math> (базовое значение)</i>						
RCS (удаление)	1.003	1.008	0.50	2.053	2.05	0.14
RCS (повторное обслуж.)	2.033	2.017	0.81	3.074	3.074	0.01
Катастрофы (очищение)	0.5621	0.5743	2.17	1.418	1.422	0.25
Катастрофы (повторное обслуж.)	1.643	1.636	0.40	2.702	2.697	0.18

Таблица 2: Среднеквадратичные отклонения  $\sigma_W$  и  $\sigma_V$  при фиксированных  $n = 3$ ,  $\lambda_{\text{pos}} = 1,0$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\rho = 0,7$  и различных коэффициентах вариации времени обслуживания.

счёт преждевременного завершения обслуживания и/или мгновенного сброса заявок. Во-вторых, при *повторном обслуживании* (рестартах) значения  $w_1$  и  $v_1$  выше при малом  $CV$ , так как рестарт приводит к потере уже выполненной части обслуживания. При этом с ростом  $CV$  значения  $w_1$  и  $v_1$  снижаются во всех четырёх дисциплинах: в модели с пуассоновскими прерываниями характеристики определяются Лапласовым образом  $\beta(\cdot)$  распределения обслуживания (в частности, через  $\beta(\delta/n)$  и/или  $\beta(s + \delta)$ ), и при увеличении вариативности гамма-распределения возрастает вероятность «быстрых» реализаций обслуживания после рестарта, что уменьшает *эффективное* время обслуживания и, следовательно, снижает средние времена ожидания и пребывания.

Согласование численного метода с имитационным моделированием в таблицах 1–2 в целом хорошее. В таблице 1 относительная погрешность для  $v_1$ , как правило, не превышает 1–2%, а для  $w_1$  — нескольких процентов (в приведённых тестах максимум порядка 3,6%). Для среднеквадратичных отклонений (таблица 2) погрешности также остаются на уровне нескольких процентов. Наибольшая чувствительность наблюдается для  $w_1$  и  $\sigma_W$  при больших  $CV$ , что связано с влиянием хвостов распределений и приближениями, используемыми в расчёте (в частности, аппроксимацией интенсивностей рестартов/удалений и моментной аппроксимацией распределений).

### 6.3. Графики параметрических зависимостей

На рисунке 3 приведены зависимости первого начального момента времени пребывания  $v_1$  от числа каналов  $n$  для четырёх дисциплин обслуживания отрицательных заявок. Видно, что увеличение числа каналов приводит к росту  $v_1$  при фиксированной загрузке  $\rho$  (при задании среднего времени обслуживания  $\mathbb{E}[B] = n\rho/\lambda$ ). Влияние коэффициента вариации времени обслуживания показано в таблице 1.

Отдельно отметим нетривиальный эффект для дисциплин с *повторным обслуживанием* (рестартом). Для постановки *вытесняющего повтора с перегенерацией* (preemptive-repeat with resampling) при прерывании заявка возвращается в очередь, а длительность обслуживания при следующем запуске генерируется заново. Для распределений с  $CV > 1$  (существенная вариативность) более частые рестарты «отсекают» редкие очень длительные реализации обслуживания и повышают вероятность завершения по «быстрым» траекториям, в результате чего уменьшается *эффективное* время обслуживания  $B_{\text{eff}}$  и, как следствие, может снижаться  $v_1$  при увеличении  $\delta$ . Для  $CV < 1$  такой

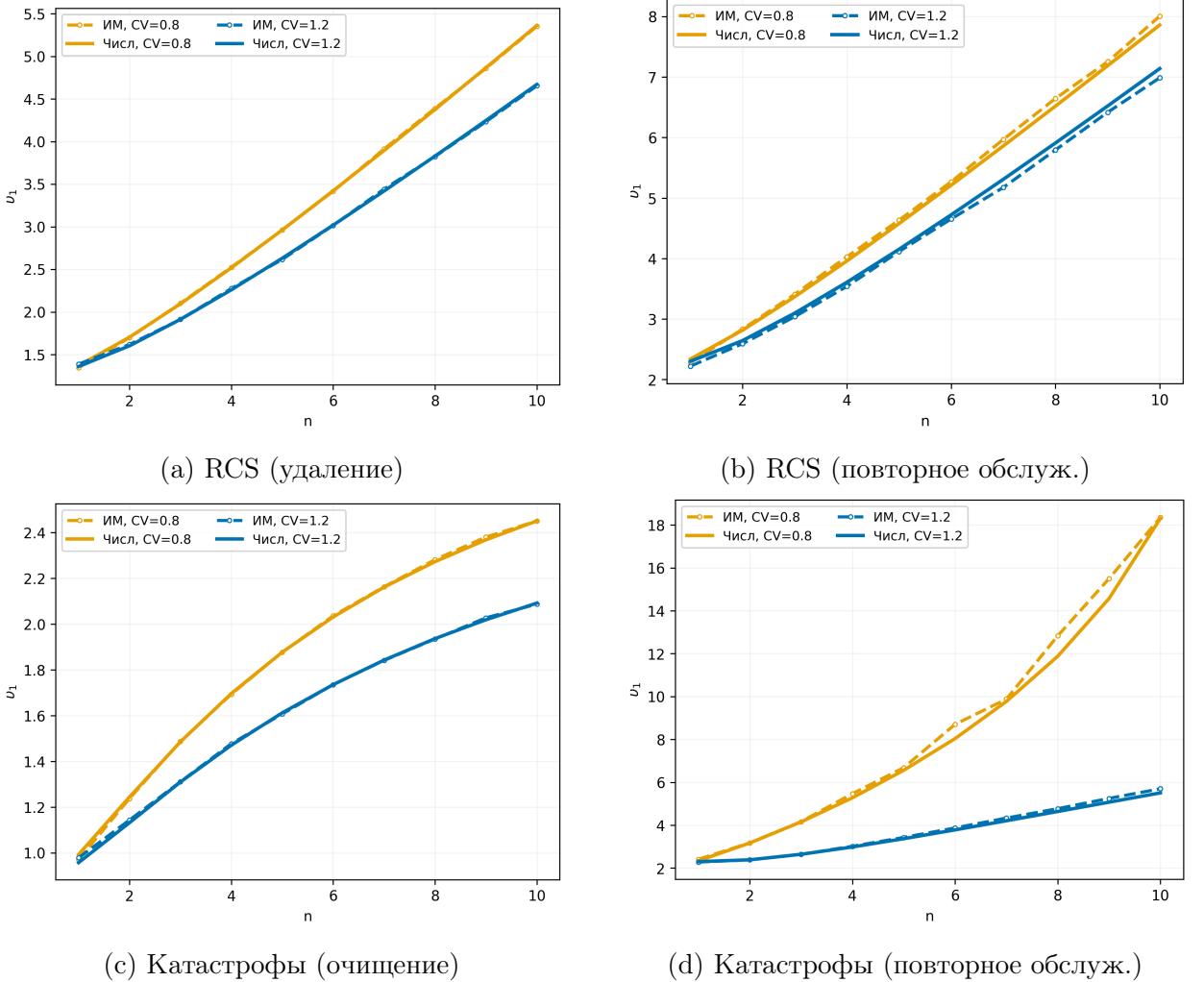


Рис. 3: Зависимость  $v_1$  от числа каналов  $n$  при  $\lambda_{\text{pos}} = 1,0$ ,  $\rho = 0,7$ ,  $CV \in \{0,8; 1,2\}$ . Пунктир — ИМ, сплошная — численный расчёт.

выигрыш отсутствует, и наблюдается ожидаемая зависимость: при увеличении частоты прерываний средние времена растут (рисунок 4).

Вероятность быть обслуженным  $q$  интерпретируется как доля положительных заявок, завершивших обслуживание. Для дисциплин с *удалением* (RCS) и *очищением* (катастрофы)  $q$  убывает с ростом  $\delta$ , что отражает увеличение частоты «потерь» положительных заявок из системы. Для дисциплин с *повторным обслуживанием* графики  $q(\delta)$  не приводим: в рассматриваемой постановке положительные заявки не уничтожаются, а лишь прерываются и возвращаются в очередь, поэтому  $q \equiv 1$  и зависимость от  $\delta$  тривиальна.

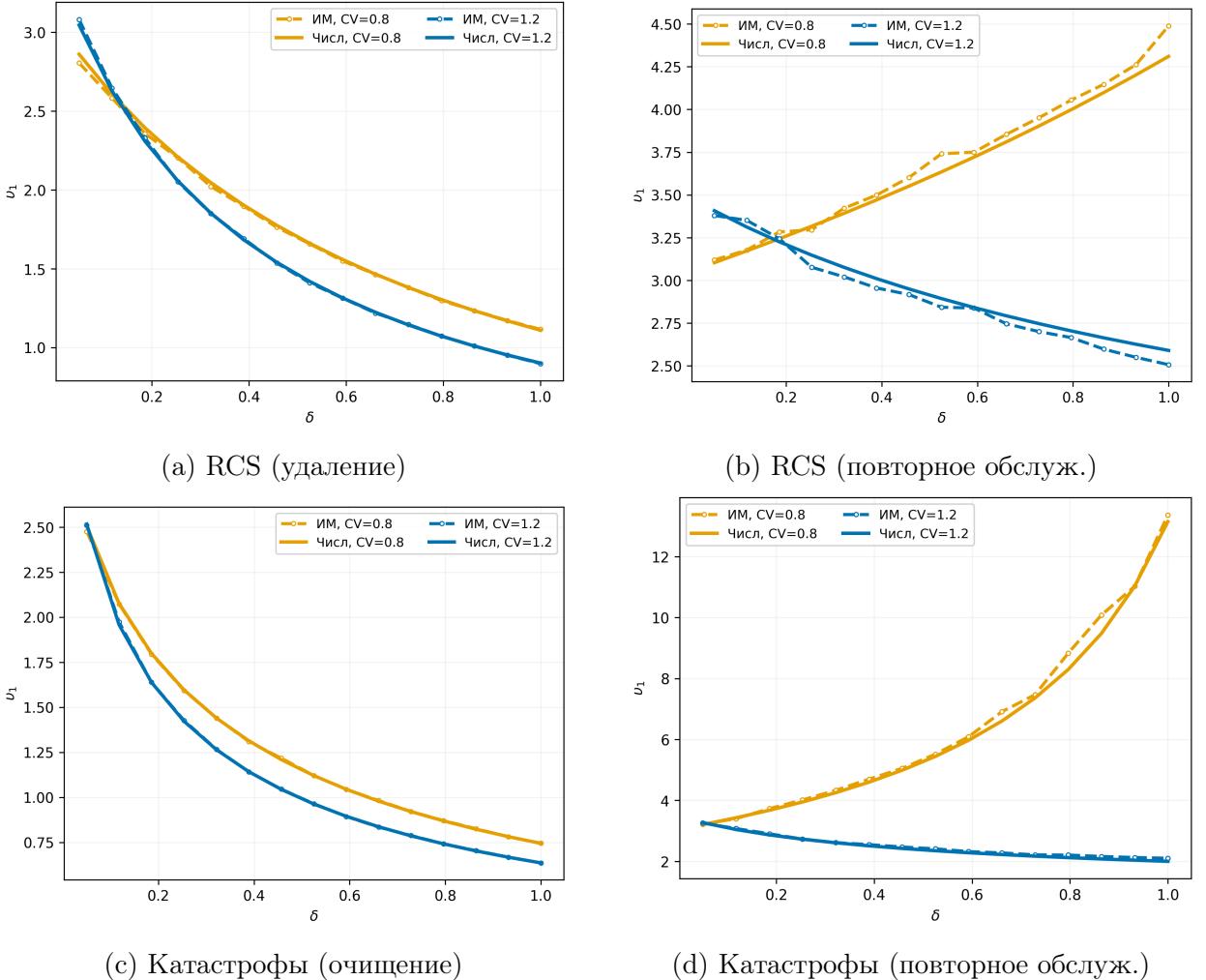


Рис. 4: Зависимость  $v_1$  от интенсивности отрицательных воздействий  $\delta$  при  $n = 3$ ,  $\lambda_{\text{pos}} = 1,0$ ,  $\rho = 0,7$ ,  $CV \in \{0,8; 1,2\}$ . Пунктир — ИМ, сплошная — численный расчёт.

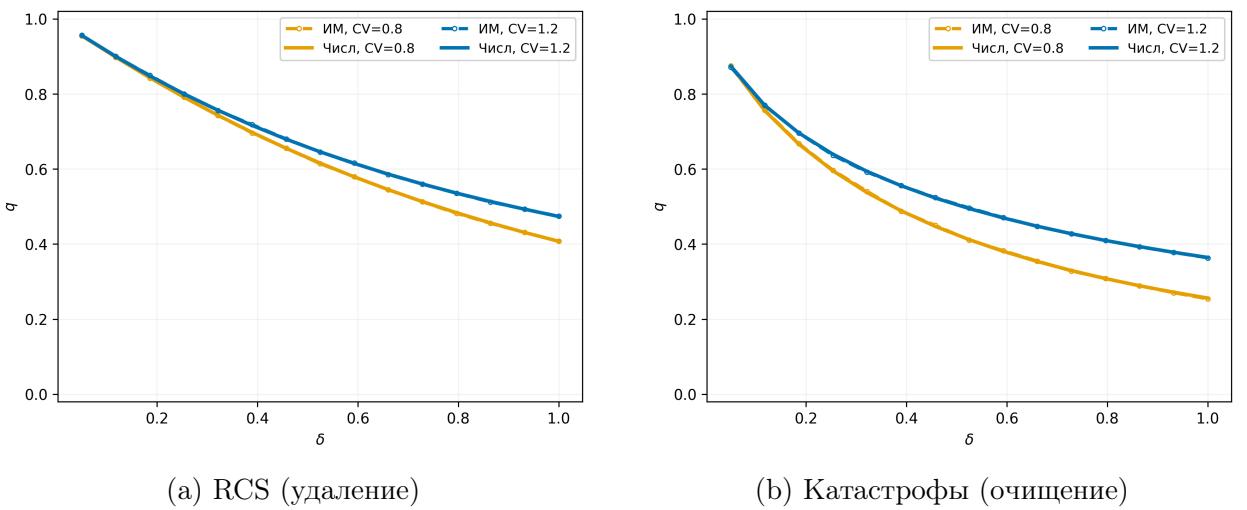


Рис. 5: Зависимость вероятности быть обслуженным  $q$  от  $\delta$  при  $n = 3$ ,  $\lambda_{\text{pos}} = 1,0$ ,  $\rho = 0,7$ ,  $CV \in \{0,8; 1,2\}$ . Пунктир — ИМ, сплошная — численный расчёт. Для дисциплин с повторным обслуживанием  $q \equiv 1$ .

## 7. Заключение

В данной работе предложено расширение метода Такахаси–Таками для расчёта многоканальных систем массового обслуживания с отрицательными заявками. Основные результаты состоят в следующем.

1. Разработаны правила модификации матриц переходов микросостояний для двух дисциплин обработки отрицательных заявок — RCS (удаление заявки из обслуживания) и катастроф (мгновенная очистка системы) — при двух вариантах поведения вытесненных заявок: уходе из системы и направлении на повторное обслуживание.
2. Предложены алгоритмы вычисления временных характеристик (первых начальных моментов времени ожидания и пребывания) через преобразование Лапласа–Стилтьеса и численное дифференцирование. Для дисциплины катастроф корректный расчёт времени пребывания основан на операции минимума с экспоненциальным временем до ближайшей катастрофы.
3. Проведено сравнение результатов численного метода с имитационным моделированием: относительная погрешность по первым моментам времени ожидания и пребывания не превышает нескольких процентов, аналогичный порядок точности наблюдается и для среднеквадратичных отклонений.

Вычислительное время предложенного метода существенно меньше по сравнению с прямым имитационным моделированием, что делает его пригодным для параметрического анализа и оптимизации.

В качестве направлений дальнейших исследований можно отметить обобщение предложенного подхода на системы с неоднородными каналами обслуживания, зависящими от состояния интенсивностями отрицательных воздействий, а также на многоклассовые модели с различными приоритетами. Программная реализация метода доступна в [18].

## Список литературы

1. *Takahashi Y., Takami Y.* A Numerical Method for the Steady-State Probabilities of a GI/G/c Queuing System in a General Class // Journal of the Operations Research Society of Japan. — 1976. — Т. 19, № 2. — С. 147–157.
2. Рыжиков Ю. И. Численные методы теории очередей. — Санкт-Петербург : Лань, 2018.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. — Москва : Машиностроение, 1979.
4. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. — Москва : РУДН, 2004.
5. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. — 1991. — Т. 28, № 3. — С. 656–663.
6. Gelenbe E., Schassberger R. Stability of product form queueing networks with negative customers // Journal of Applied Probability. — 1992. — Т. 29, № 4. — С. 890–901.
7. Artalejo J. R. G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks // European Journal of Operational Research. — 2000. — Т. 126, № 2. — С. 233–249.
8. Harrison P. G., Pitel E. The M/G/1 queue with negative customers // Advances in Applied Probability. — 1996. — Т. 28, № 2. — С. 540–566.

9. *Bayer N., Boxma O. J.* Wiener–Hopf analysis of an M/G/1 queue with negative customers and of a related class of random walks // Queueing Systems. — 1996. — Т. 23, № 1—4. — С. 301—316.
10. *Boucherie R. J., Boxma O. J.* The Workload in the M/G/1 Queue with Work Removal // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 1996. — Т. 10, № 2. — С. 261—277.
11. *Jain G., Sigman K.* A Pollaczek–Khintchine formula for M/G/1 queues with disasters // Journal of Applied Probability. — 1996. — Т. 33, № 4. — С. 1191—1200.
12. *Dudin A., Nishimura S.* A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // Journal of Applied Probability. — 1999. — Т. 36, № 3. — С. 868—881.
13. *Li Q.-L., Lin C.* The M/G/1 processor-sharing queue with disasters // Computers & Mathematics with Applications. — 2006. — Т. 51, № 6/7. — С. 987—998.
14. *Atencia I., Moreno P.* The discrete-time Geo/Geo/1 queue with negative customers and disasters // Computers & Operations Research. — 2004. — Т. 31, № 9. — С. 1537—1550.
15. *Artalejo J. R., Gómez-Corral A.* On a single server queue with negative arrivals and request repeated // Journal of Applied Probability. — 1998. — Т. 35, № 3. — С. 907—918.
16. *Wang J., Liu B., Li J.* Transient analysis of an M/G/1 retrial queue subject to disasters and server failures // European Journal of Operational Research. — 2008. — Т. 189, № 3. — С. 1338—1353.
17. *Dharmaraja S., Kumar R.* Transient solution of a Markovian queueing model with heterogeneous servers and catastrophes // Opsearch. — 2015. — Т. 52, № 4. — С. 810—824.
18. *Хабаров Р. С., Лохвицкий В. А.* Most-Queue: Библиотека методов расчёта СМО с отрицательными заявками. — 2026. — Код расчётов для статьи: [works/negative\\_queues/](https://github.com/xabarov/most-queue). Дата обращения: 14.02.2026. <https://github.com/xabarov/most-queue>.