

Fourierova transformácia

Úvodná teória:

Fourierova transformácia (FT) premieňa signál z časovej domény (závisí od času) do frekvenčnej domény (závisí od frekvencie). Umožňuje nám analyzovať, aké frekvencie obsahuje signál, čo je kľúčové v rôznych oblastiach spracovania signálov, ako sú zvuk, obraz, elektrotechnické signály a iné.

Využitie Fourierovej transformácie v praxi:

1. **Analýza frekvencií:** Fourierova transformácia pomáha identifikovať prítomné frekvencie a ich intenzity.
2. **Úprava signálov:** Často sa používa na filtrovanie, kompresiu a odstránenie šumu.
3. **Kódovanie a dekódovanie:** Kľúčová pre prenos a spracovanie informácií v rôznych komunikačných systémoch.

Definícia priamej Fourierovej transformácie

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Vysvetlenie pojmov:

- **$F(\omega)$** je transformovaný signál vo frekvenčnej doméne
- **$f(t)$** je pôvodný signál v časovej doméne
- **ω** je uhlová frekvencia ($\omega = 2\pi f$),
- **j** je imaginárna jednotka, používa sa v iných oblastiach tiež označenie „ i “, ale pre naše účely imaginárna jednotka bude vždy zastúpená pomocou „ j “ ($j^2 = -1$).

Spätná Fourierova transformácia

Aby sme získali pôvodný signál $f(t)$ z frekvenčnej domény, používame spätnú Fourierovu transformáciu:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Spektrálna funkcia:

Spektrálna funkcia (alebo spektrum) je znázornením rozdelenia energie alebo amplitúdy signálu vo frekvenčnej doméne. Pomocou Fourierovej transformácie môžeme získať spektrum, ktoré zobrazuje, aké frekvencie sú prítomné v pôvodnom signáli a s akou intenzitou.

Typy spektier:

1. **Amplitúdové spektrum:** Ukazuje, aká je amplitúda (intenzita) každého frekvenčného komponentu v signále.

$$A(\omega) = |F(\omega)|$$

- kde $A(\omega)$ je amplitúdové spektrum a $F(\omega)$ je Fourierova transformácia signálu.
2. **Fázové spektrum:** Zobrazuje fázu každej frekvencie v signále.

$$\phi(\omega) = \arg(F(\omega))$$

- kde $\phi(\omega)$ je fázové spektrum a $\arg(F(\omega))$ je fáza Fourierovej transformácie.

Úvodný príklad:

Vypočítajte priamu Fourierovu transformáciu pre $f(t) = 1$ na intervale $[0,1]$

Definícia Fourierovej transformácie podľa, ktorej budeme počítať:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Kedže $f(t) = 1$ len na intervale $[0,1]$, integrál môžeme zjednodušiť:

$$F(\omega) = \int_0^1 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Teraz môžeme vypočítať integrál:

$$F(\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt$$

Integrál exponenciálnej funkcie môžeme vypočítať pomocou vzorca:

$$\int e^{kt} dt = \frac{1}{k} e^{kt} + C$$

Pre náš integrál je $k = -j\omega$:

$$\int e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}$$

Teraz dosadíme hranice 0 a 1:

$$F(\omega) = \left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^1$$

Dosadíme hornú a dolnú hranicu za „t“, teda podľa toho čo integrujeme. Pričom nám vzniknú dve časti, ktoré od seba odčítame.

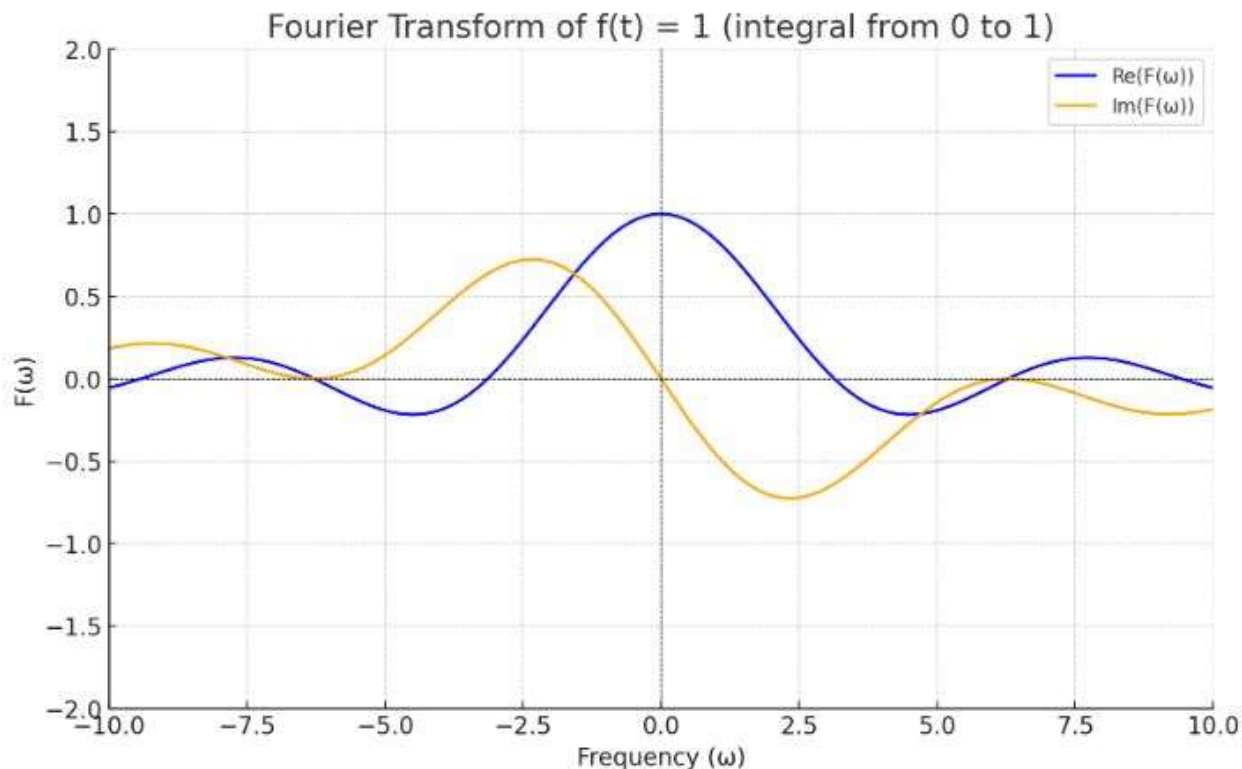
Taktiež treba poznamenať, že $e^0 = 1$, teda tým si vieme pomôcť a zjednodušiť počítanie:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega \cdot 1} - \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega \cdot 0} \\ F(\omega) &= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega} - 1) \end{aligned}$$

Výsledok Fourierovej transformácie upravíme :

$$F(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega}$$

Funkciu si môžeme zobrazíť aj na grafe, ktorý vyzerá nasledovne:



- Modrá krivka predstavuje reálnu časť $F(\omega)$
- Žltá krivka predstavuje imaginárnu časť $F(\omega)$

Vlastnosti Fourierovej transformácie:

1. Linearita

Ak $f(t)$ a $g(t)$ sú časové signály a a a b sú konštanty, potom platí:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$$

2. Časové posunutie

Ak je signál $f(t)$ posunutý v čase o t_0 , potom:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

3. Posunutie vo frekvencii

Ak je signál modifikovaný frekvenčne, potom:

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

4. Časové otočenie

Ak je signál $f(t)$ zrkadlovo obrátený, potom:

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$$

5. Časová derivácia

Ak derivujeme signál $f(t)$, jeho Fourierova transformácia je daná:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega)$$

Existujú aj iné vlastnosti Fourierovej transformácie, ale nám budú zatiaľ stačiť tieto, nakoľko sú aj často využívané. Ukážeme si príklad na časové posunutie a zistíme ako funguje.

Príklad na časové posunutie:

Nech je signál $f(t) = e^{-2t}$ pre $t \geq 0$ (a $f(t) = 0$ pre $t < 0$). Určte Fourierovu transformáciu $F(\omega)$ tohto signálu a potom vypočítajte časový posun tejto Fourierovej transformácie $f(t - t_0)$, kde $t_0 = 1$.

Fourierova transformácia signálu $f(t)$ je definovaná ako (už sme si ukazovali na minulom príklade):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Pre našu funkciu $f(t)$ to bude:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt$$

Skombinujeme exponenty (sčítame exponenty):

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt$$

Výsledok integrálu $\int e^{-at} dt$ je $-\frac{1}{a} e^{-at}$. Preto, ak $a = 2 + j\omega$, máme:

$$F(\omega) = \left[-\frac{1}{2 + j\omega} e^{-(2+j\omega)t} \right]_0^{\infty}$$

Ked' $t \rightarrow \infty$, $e^{-(2+j\omega)t} \rightarrow 0$. Nakoľko „e“ umocnené na veľké mínusové číslo sa približuje veľmi blízko k 0. Takže máme:

$$F(\omega) = 0 - \left(-\frac{1}{2+j\omega} \right) = \frac{1}{2+j\omega}$$

Počítanie časového posunutia:

Vypočítame Fourierovu transformáciu $f(t-1)$:

$$f(t-1) = e^{-2(t-1)} = e^{-2t+2}$$

Podľa vlastnosti Časového posunu platí:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Pre $t_0 = 1$ máme:

$$\mathcal{F}\{f(t-1)\} = e^{-j\omega \cdot 1} F(\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{2+j\omega}$$

Takže Fourierova transformácia signálu $f(t-1)$ je:

$$\mathcal{F}\{f(t-1)\} = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$$

Čo je vlastne ten posun ?

- Časový posun signálu $f(t)$ o 1 sekundu doprava sa prejavuje v jeho Fourierovej transformácii ako faktor $e^{-j\omega}$.
- **Zvýraznený časový posun:** $e^{-j\omega}$ je kľúčovým faktorom, ktorý indikuje fázový posun spôsobený časovým posunom signálu v časovej doméne. Toto je dôležité, pretože ukazuje, že aj keď tvar signálu ostáva rovnaký, jeho fázová informácia v frekvenčnej doméne sa mení.

Príklad na prepočítanie:

Nech je signál $f(t)$ pre $0 \leq t < 2$ (a $f(t) = 0$ pre iné hodnoty „t“). Určte Fourierovu transformáciu $F(\omega)$ tohto signálu a potom vypočítajte Fourierovu transformáciu $f(t - t_0)$, kde $t_0 = 1$.

Výsledok Fourierovej transformácie pôvodného signálu:

$$F(\omega) = \frac{2 - e^{-2j\omega}}{j\omega}$$

Výsledok Fourierovej transformácie posunutého signálu $f(t - 1)$:

$$\mathcal{F}\{f(t - 1)\} = e^{-j\omega} \cdot \frac{2 - e^{-2j\omega}}{j\omega}$$