Spojité signály a Fourierové rády

Spojité signály

Na to, aby sme vedeli počítať a využívať Fourierové rády, musíme vedieť čo sú spojité signály a aké majú vlastnosti. Najprv si vysvetlíme, kedy je signál (funkcia) spojitá, ako sa matematicky definuje a ako sa delia signály na základe matematických vlastností.

Na to, aby funkcia bola spojitá, musí spĺňať 3 podmienky:

1. Funkcia *x(t)* musí byť definovaný. Napr. *x(t) = 4t + 8*

2. Limita $\lim_{t \to a} x(t)$ musí existovať, t.j. limita sprava sa musí rovnať limite zľava

3. Limita $\lim_{t \to a} x(t) = x(a)$

Laicky povedané, funkcia je spojitá, keď ju celú vieme nakresliť jedným ťahom.

Periodický signál

Je to taký signál, ktorého *D(f)* je *(-∞; ∞)* a opakuje sa časť funkcie, nazývaný perióda *T*. Toto opakovanie sa deje po celom definičnom obore a vyjadruje sa ako:

x(t) = x(t + nT) kde: *x(t)* – je funkcia / signál v čase *t*
n – je n-tá perióda, *n ε Z*
T – je samotná perióda

Tento vzorec nám dokáže opísať každú periódu vo funkcii, stačí nám zmeniť *n* a dostaneme sa do ďalšej periódy. Hovorí ešte o tom, že je jedno, v ktorej perióde sme, funkcia bude taká istá, keďže funkcia je nekonečna v oboch smeroch času.

Funkcie *cos* a *sin* majú periódu *T= 2π, pokiaľ nie je určené inak*.

Harmonický signál

Predtým ako si vysvetlíme Fourierové rády, musíme si definovať harmonické signály (funkcie). Harmonické signály nám pomáhajú rozdeliť komplexný signál na jednoduchšie signály. To isté opačne, spájame jednoduché harmonické signály na vytvorenie viac komplexnejšieho signálu. Tiež nám pomáha zistiť, či daná analyzovaná funkcia obsahuje danú frekvenciu. Vieme to zistiť, keď zapíšeme všetky harmonické signály do frekvenčného spektra.

Harmonický signál je vlastne sínusoida, ktorá má rotačnú frekvenciu *ω* (omega), ktorá je vypočítaná pomocou periódy *T.* Harmonický signál je tiež špeciálny prípad periodického signálu.

Príklad na harmonické signály, ktoré budeme využívať sú sínus [*sin(x)*] a kosínus [*cos(x)*]. Tieto funkcie sú aj príkladom na párnu a nepárnu funkciu, kde sínus je nepárna [lebo *x(t) = -x(-t)*] a kosínus je párna [lebo *x(t) = x(-t)*]. Sú tiež spojité v čase aj v hodnote.

<u>Rotačná frekvencia</u> ω_0 je opísaná vzťahom: $\omega_0 = 2\pi f$ kde frekvencia f sa rovná: $f = \frac{1}{T}$

1)2)po úprave rovnice pre ω_0: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

<u>Reálny tvar HS:</u> $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

dá sa zapísať aj ako: $x(t) = A \cdot \cos(\frac{2\pi t}{T} + \varphi)$

kde: $x(t)$ – je hodnota v čase t
A – je amplitúda funkcie
$\cos(t)$ – je harmonická funkcia
ω_0 – rotačná frekvencia
φ – počiatočná fáza pri $t = 0$

<u>Reálny tvar HS (súčtový):</u> $x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + b \cdot \sin(\omega_0 t)$

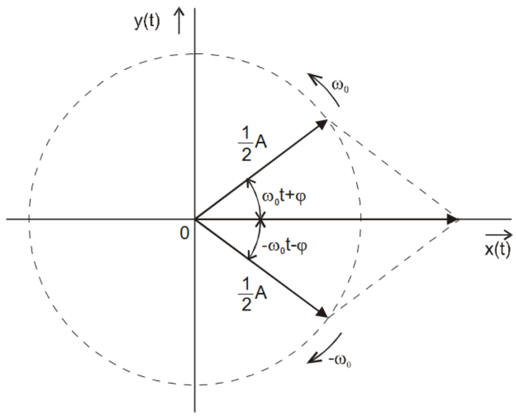
Aký je rozdiel medzi *A* a *a, resp. b*? Keďže pri reálnom tvare máme len jednu harmonickú funkciu *cos(t)*, tak amplitúdu signálu „dávame" do *A*, zatiaľ čo pri reálnom súčtovom tvare, danú amplitúdu rozdeľujeme do menších častí, kde jedno časť zapisujeme spolu s *cos* a druhú so *sin.* Preto aj označenie je inou veľkosťou, avšak *a* sa nemusí rovnať *b*.

Amplitúdu *A* vieme vypočítať ako: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

Koeficienty *a* a *b* vypočítame dvoma spôsobmi. $\tan(\varphi) = -\frac{b}{a}$
alebo
$a = A \cdot \cos(\varphi)$
$b = - A \cdot \sin(\varphi)$

Fáza φ sa tiež nevyskytuje pri reálnom súčtovom tvare, lebo kosínus je len posunutý sínus o $\frac{\pi}{4}$. Takže rozdiel medzi reálnym a reálnym súčtovým tvarom je, že sínus spolu s kosínusom vyjadrujú fázu na rozdiel od reálneho tvaru, kde je len kosínus.

<u>Reálny tvar HS (exponenciálny):</u> $x(t) = \frac{1}{2}[A.\, e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + A.\, e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}]$



Obr. 1 (prof. Ing. Gregor Rozinaj, 2024)

Fourierové rády

Fourierové rády sa dajú brať ako sklenený hranol, ktorý rozdelí svetelný lúč na jednoduchšie farby, t.j. časti viditeľného svetla. A keď z farieb chceme vytvoriť ten istý svetelný lúč, tak nám stačí ich sčítať dokopy. Tento istý proces sa deje pri Fourierových rádoch ale namiesto svetelného lúča a farieb pracujeme s komplexnejšími spojitými signálmi a jednoduchšími harmonickými sínusoidami.

Je dôležité si uvedomiť, že **Fourierové rády vieme použiť len pri spojitých periodických signáloch!**

Na to, aby sme mohli vyjadriť spojitý periodický signál, musí spĺňať Dirichletove podmienky, a to sú:

1. Funkcia x(t) musí byť ohraničená, aj zhora, aj zdola.
2. Musí mať konečný počet maxím a miním.
3. Musí mať konečný počet bodov nespojitosti, v ktorých musí mať definovanú limitu zľava a limitu sprava.

(prof. Ing. Gregor Rozinaj, 2024)

Jednosmerná zložka signálu a_0 je stredná hodnota *x(t)*. Inak povedané, je to konštanta, ktorá posúva signál v hodnote hore alebo dole.

Spektrum je forma zápisu signálu podľa frekvencie, kde funkčné hodnoty sú buď Amplitúda (A) alebo Fázový posun (φ). Fourierové rády, ktoré sú **spojité periodické signály majú diskrétne spektrum!** Príklady na diskrétne spektrá sú *obr. 2* a *obr. 3. Vo frekvenčnej oblasti (spektrum) vieme potom zistiť, aké frekvencie sa nachádzajú v danom signáli.*

Zložkový tvar FR

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \,.\, \cos(n\omega_1 t) + b_n \,.\, \sin(n\omega_1 t)]$

Jednosmernú zložku a_0 vypočítame ako: $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$

Koeficienty a_n a b_n vypočítame ako: $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,.\cos(n\omega t)\,dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,.\sin(n\omega t)\,dt$

kde: n – je n-tá harmonická zložka

T – je jedna perióda signálu

Reálny trigonometrický (goniometrický) tvar FR

$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,.\, \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ kde: A_0 – je jednosmerná zložka, $a_0 = A_0$

V tomto tvare sa snažíme aproximovať signál len pomocou kosínusov. Keďže kosínus je párna harmonická funkcia a signál môže obsahovať aj nepárne zložky, musíme počítať aj s fázou φ_n.

Exponenciálny tvar FR

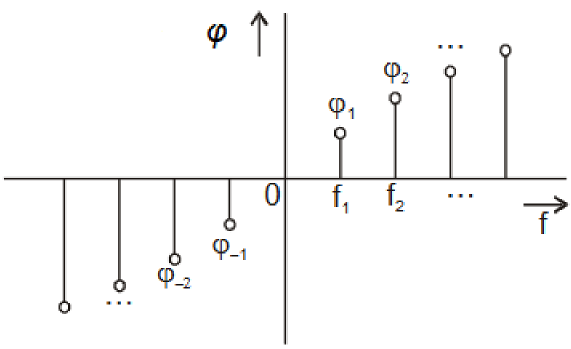
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \,.\, e^{-jn\omega_1 t}$ kde: C_n – je komplexný Fourierov koeficient

$e^{-jn\omega t}$ – je rotácia na komplexnej hladine

Komplexný Fourierov koeficient C_n vieme vypočítať ako: $C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,.\,e^{-jn\omega t}\,dt$

Exponenciálny tvar FR nerieši či je daný signál párny alebo nepárny.

Vieme, že koeficient $|C_n| = |C_{-n}|$, lebo podľa *obr. 1* v kladnom smere je ten istý koeficient ako v zápornom smere, majú tú istú veľkosť, len smer opačný. Tento jav sa dá spozorovať aj vo frekvenčnom zobrazení podľa fázy. Môžeme spozorovať, že na *obr. 2* máme nepárne spektrum.

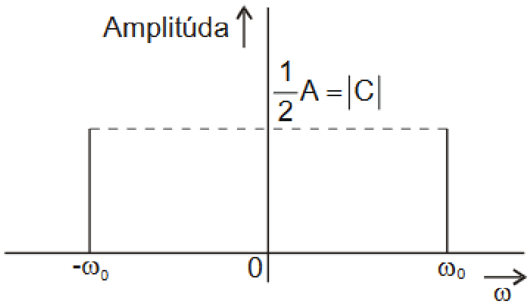


Obr. 2 spektrum podľa fázy (prof. Ing. Gregor Rozinaj, 2024)

Taktiež vieme, že absolútna hodnota komplexného koeficientu je polovica amplitúdy signálu.

$|C_n| = \frac{1}{2}A_n$ alebo $A_n = 2|C_n|$

Tento fakt vidíme aj graficky na *obr. 1*, kde hlavný jednosmerný vektor na osi *x* je náš signál a dvojrozmerné vektory na osi *x* a *y* sú naše komplexné konštanty $|C_n|$ a $|C_{-n}|$. Keď sčítame vektory $|C_n|$, tak dostaneme amplitúdu A_n . Keďže vieme, že tieto konštanty sa rovnajú. Tak $|C_n| + |C_{-n}| = A_n \rightarrow 2\ |C_n| = A_n$. Tento jav sa tiež deje pri frekvenčnom zobrazení podľa amplitúdy (*obr. 3*).



Obr. 3 spektrum podľa amplitúdy (prof. Ing. Gregor Rozinaj, 2024)

Príklad 1.

Majme tieto údaje:

x(t) = 7t

T = 2π *definujme naše omega ->* $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

vypočítajme koeficienty Fourierovho rádu v exponenciálnom tvare.

Exponenciálny tvar

$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} 7t\,.\,e^{-jnt}\,dt$ *po počiatočných úpravách dostávame* $C_n = \frac{7}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,.\,e^{-jnt}\,dt$

$C_n = \frac{7}{2\pi}\left[\frac{te^{-jnt}}{-jn} - \frac{1}{-jn}\int e^{-jnt}dt\right]_{-\pi}^{\pi}$ *použili sme per partes* $\begin{matrix} u = t & v' = e^{-jnt} \\ u' = 1 & v = \frac{e^{-jnt}}{-jn} \end{matrix}$

$C_n = \frac{7}{2\pi}\left[\frac{te^{-jnt}}{-jn}.\frac{j}{j} + \frac{e^{-jnt}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$ *po úprave integrálu, vynásobíme prvý zlomok* $\frac{j}{j}$ *aby sme odstránili z menovateľa* j

$C_n = \frac{7}{2\pi}\left[\frac{jte^{-jnt}}{n} + \frac{e^{-jnt}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$ *sčítame zlomky dokopy*

$C_n = \frac{7}{2\pi}\left[\frac{jnte^{-jnt} + e^{-jnt}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$ *vyjmeme* e^{-jnt} *pred zátvorku*

$C_n = \frac{7}{2\pi}\left[\frac{e^{-jnt}(jnt + 1)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$ *dosadíme hranice, keďže máme určitý integrál*

C_n = $\frac{7}{2\pi}[\frac{e^{-jn\pi}(jn\pi+1)}{n^2}$ - $\frac{e^{jn\pi}(-jn\pi+1)}{n^2}]$ *v druhom zlomku v zátvorke* $(-jn\pi \ +1)$ *vyjmeme -1 pred zátvorku a tak sa nám vytvorí z odčítania sčitovanie*

C_n = $\frac{7}{2\pi}[\frac{e^{-jn\pi}(jn\pi+1)}{n^2}+\frac{e^{jn\pi}(jn\pi-1)}{n^2}]$ *sčítame zlomky v zátvorke*

C_n = $\frac{7}{2\pi}[\frac{e^{-jn\pi}(jn\pi+1)+\ e^{jn\pi}(jn\pi-1)}{n^2}]$ *a teraz roznásobíme zátvorky*

C_n = $\frac{7}{2\pi}[\frac{jn\pi\, e^{-jn\pi}+\ e^{-jn\pi}+jn\pi\, e^{jn\pi}-\ e^{jn\pi}}{n^2}]$ *vieme, že* $e^{-jn\pi}$ *a* $e^{jn\pi}$ *dávajú to isté číslo, vieme ich odčítať, lebo* $e^{jn\pi}$ *je záporný (má mínus pred sebou)*

C_n = $\frac{7}{2\pi}[\frac{jn\pi\, e^{-jn\pi}+jn\pi\, e^{jn\pi}}{n^2}]$ *roznásobíme s konštantou pred zátvorkou*

C_n = $\frac{7jn\pi\, e^{-jn\pi}+7jn\pi\, e^{jn\pi}}{2\pi n^2}$ *vieme vykrátiť π a n*

C_n = $\frac{7j\, e^{-jn\pi}+7j\, e^{jn\pi}}{2n}$ *vyjmeme 7j pred zátvorku*

C_n = $\frac{7j(\,e^{-jn\pi}+e^{jn\pi}\,)}{2n}$ *a takto sme našli komplexný F. koeficient, avšak pre* C_0 *toto neplatí, to musíme zvlášť vypočítať*

C_0 = $\frac{7}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,.\,e^{-j0t}\,dt$ *keďže v exponente n = 0, tak* e^{-j0t}*= 1*

C_0 = $\frac{7}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt$ *integrujeme pomocou pravidla* $\int_{-a}^{a} t^n\,dt$ *->* $[\frac{t^{n+1}}{n+1}]_{-a}^{a}$ = $[\frac{a^{n+1}}{n+1}-\frac{(-a)^{n+1}}{n+1}]$

C_0 = $\frac{7}{2\pi}\ [\frac{t^2}{2}]_{-\pi}^{\pi}$ = $\frac{7}{2\pi}\ [\frac{\pi^2}{2}-\ \frac{(-\pi)^2}{2}]$ = $\frac{7}{2\pi}\ (0)$ = 0 *jednosmerná zložka je 0*

Výsledný zápis je: *x(t)* = $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{7j(\,e^{-jn\pi}+e^{jn\pi}\,)}{2n}\,.\,e^{-jnt}$

Príklad 2.

Majme tieto údaje:

x(t) = -1 -> párna funkcia

T = 4 *definujme naše omega -> ω* = $\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

vypočítajme koeficienty Fourierovho rádu v zložkovom tvare.

a_n = $\frac{2}{4}\int_{-\frac{4}{2}}^{\frac{4}{2}}(-1)\,.\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$ *po počiatočných úpravách dostávame:*

a_n = - $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$ *integrujeme pomocou substitúcie* $u=\frac{n\pi t}{2}$, $\frac{2dt}{n\pi}=du$

a$_n$ = - $\frac{2}{2n\pi}\int_{-2}^{2}\cos(u)\,du$ = - $\frac{2}{2n\pi}$ *[sin(*$\frac{n\pi t}{2}$*)]* $\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}$ *po dosadení a úprave ideme dosadiť hornú a dolnú hranicu*

a$_n$ = - $\frac{2}{2n\pi}$ *[sin(*$\frac{n\pi 2}{2}$*) - sin(*$\frac{-n\pi 2}{2}$*)]* *po úprave* *a*$_n$ = - $\frac{1}{n\pi}$ *[sin(πn) - sin(-πn)]*

a$_n$ = - $\frac{1}{n\pi}$ *[sin(πn) - sin(-πn)]* *vyjmeme mínus pred zátvorku* *a*$_n$ = - $\frac{1}{n\pi}$ *[sin(πn) + sin(πn)]*

a$_n$ = - $\frac{2sin(\pi n)}{n\pi}$ *po úpravách sa dostali koeficient a*$_n$

A teraz druhý koeficient

b$_n$ = $\frac{2}{4}\int_{-\frac{4}{2}}^{\frac{4}{2}}(-1)\,.\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$ *v tomto prípade ani nemusíme počítať tento integrál, lebo platí, že keď násobíme párnu (-1) a nepárnu funkciu (sínus) nám tvorí nepárnu funkciu a keď ju integrujeme symetrickými hranicami, t.j. dolná hranica je len záporná horná hranica, tak sa nám plochy vykrátia a výsledok je 0.*

Na koniec vypočítame jednosmernú zložku.

a$_0$ = $\frac{1}{4}\int_{-\frac{4}{2}}^{\frac{4}{2}}(-1)dt$ *po počiatočných úpravách dostávame:* *a*$_0$ = $-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}1dt$

tento jednoduchý integrál vypočítame ako:

a$_0$ = $-\frac{1}{4}$ *[t*$_{hor}$ – *t*$_{dol}$*]* $\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}$ $po\ dosadení\ hraníc$:

a$_0$ = $-\frac{1}{4}$ *[2 – (-2)]* *sčítame a roznásobíme zátvorku* *a*$_0$ = $-\frac{4}{4}$ *vydelíme a dostaneme výsledok*

a$_0$ = -1

Všetko zapíšme a máme výsledok:

Výsledný zápis je: *x(t) = -1 +* $\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2sin(\pi n)}{n\pi}$ *. cos(*$\frac{\pi nt}{2}$*)]*

Citované diela

prof. Ing. Gregor Rozinaj, P. (2024). Analógové a číslicové spracovanie signálov 1 (AČSS1) - prezentácie z prednášok. Bratislava.