AČSS1

Spektrálna analýza spojitých a periodických signálov – Fourierov rad

Obsah

1. Úvod do spektrálnej analýzy

Spektrálna analýza je metóda, ktorá rozkladá signály na jednotlivé frekvenčné zložky. Spojité a periodické signály môžeme považovať za súčet sínusových a kosínusových funkcií rôznych frekvencií, čo umožňuje odhaliť ich frekvenčnú štruktúru.

Spektrum signálu

Spektrum predstavuje frekvenčné zložky signálu, kde každá z nich má svoju frekvenciu, amplitúdu a fázu. Tento rozklad umožňuje lepšie porozumenie signálu a zjednodušuje jeho analýzu a spracovanie. Príkladom je hudobný tón, ktorý obsahuje základný tón a jeho harmonické frekvencie.

Spektrum obsahuje informácie o:

- **Frekvencii zložiek** – udáva, ako často sa vlny opakujú.
- **Amplitúde zložiek** – udáva, akú "veľkosť" majú jednotlivé frekvenčné zložky.
- **Fáze zložiek** – určuje posunutie jednotlivých vĺn v čase.

Význam spektrálnej analýzy

Spektrálna analýza je nevyhnutná v oblasti telekomunikácií, spracovania zvukov, obrazu a medicínskych signálov. Umožňuje identifikovať, ktoré frekvencie sú v signáli prítomné, čo pomáha pri filtrovaní, kompresii alebo analýze dát.

Fourierov rad

Fourierov rad je základným nástrojom na spektrálnu analýzu periodických signálov. Pomocou neho vieme rozložiť signál na súčet sínusových a kosínusových funkcií, čo nám umožňuje analyzovať jeho frekvenčné zložky.

2. Fourierov rad – základné princípy

Fourierov rad je matematická metóda, ktorá nám umožňuje rozložiť periodické signály na súčet jednoduchých harmonických (sínusových a kosínusových) zložiek. Tento rozklad je kľúčový pre analýzu signálov, pretože umožňuje skúmať ich frekvenčné spektrum a zistiť, ktoré frekvencie sa v signáli vyskytujú a s akými amplitúdami.

Základná myšlienka Fourierovho radu

Ak máme periodický signál ***x(t)*** s periódou ***T***, vieme ho rozložiť na nekonečnú sumu sínusových a kosínusových funkcií. Fourier predpokladal, že akýkoľvek periodický signál sa dá popísať ako kombinácia jednoduchých harmonických pohybov (sínusov a kosínusov), ktoré majú frekvencie, ktoré sú celočíselné násobky základnej frekvencie signálu.

Základná rovnica Fourierovho radu má tvar:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\,\omega_0\, t) + b_n \sin(n\,\omega_0\, t) \right)$$

- ***x(t)*** je periodický signál
- a_0 je stredná hodnota signálu
- a_n a b_n sú Fourierove koeficienty, ktoré určujú amplitúdu jednotlivých harmonických zložiek
- $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$ je základná uhlová frekvencia, ktorá je spojená s periódou signálu ***T***.

Táto rovnica predstavuje nekonečný súčet harmonických (sínusových a kosínusových) zložiek, ktoré majú frekvencie rovné násobkom základnej frekvencie ω_0. Každá z týchto harmonických zložiek má určitú amplitúdu (určenú koeficientmi a_n a b_n) a frekvenciu $n\omega_0$.

3. Matematická formulácia Fourierovho radu

Fourierove koeficienty

Fourierove koeficienty a_n a b_n určujú príspevok každej harmonickej zložky k celkovému signálu. Tieto koeficienty sa vypočítajú pomocou integrálov z funkcie ***x(t)*** v rámci jednej periódy ***T***.

Vzťahy na výpočet koeficientov sú:

- Stredná hodnota a_0:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\; dt$$

- Koeficienty a_n pre kosínusové zložky:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0 t)\; dt$$

- Koeficienty b_n pre sínusové zložky:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)\ dt$$

Tieto integrály sa používajú na extrakciu príslušných amplitúd pre každú harmonickú zložku signálu. Stredná hodnota signálu $\boldsymbol{a_0}$ je konštantná zložka, ktorá nezávisí na čase, zatiaľ čo $\boldsymbol{a_n}$ a $\boldsymbol{b_n}$ určujú amplitúdy frekvenčných zložiek.

Exponenciálna forma Fourierovho radu

Okrem sínusovo-kosínusovej formy Fourierovho radu existuje aj alternatívna, kompaktná exponenciálna forma. V tejto forme sa Fourierov rad vyjadruje pomocou komplexných exponenciálnych funkcií:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$\boldsymbol{c_n}$ sú komplexné Fourierove koeficienty, ktoré môžeme vypočítať ako:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\ dt$$

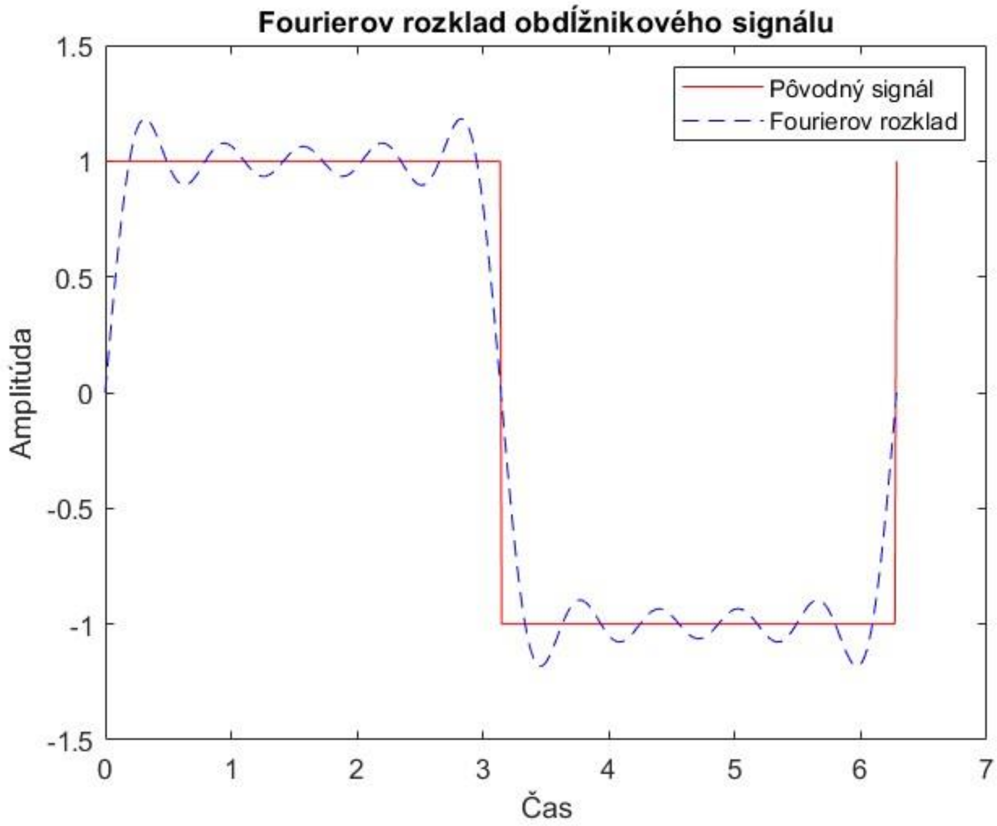
Táto exponenciálna forma je výhodná pri riešení zložitejších problémov a pri práci s komplexnými signálmi, pretože zlúči sínusové a kosínusové zložky do jedného výrazu.

4. Periodické signály a ich Fourierov rozklad

Periodické signály sú signály, ktoré sa pravidelne opakujú s periódou $\boldsymbol{T}$. Takéto signály môžeme analyzovať pomocou Fourierovho radu, ktorý ich rozloží na súčet harmonických zložiek (sínusov a kosínusov) s frekvenciami, ktoré sú celočíselnými násobkami základnej frekvencie $\boldsymbol{f_0 = \frac{1}{T}}$.

Každá harmonická zložka prispieva k výslednému tvaru signálu rôznou amplitúdou a fázou. Čím viac harmonických frekvencií zahrnieme do rozkladu, tým presnejšie vieme rekonštruovať pôvodný signál.

Fourierov rozklad nám teda umožňuje analyzovať periodické signály nielen z časového hľadiska, ale aj z frekvenčnej perspektívy, čo je kľúčové pre pochopenie ich vlastností v rôznych aplikáciách, ako sú telekomunikácie, elektronika a spracovanie zvukov.



Obrázok 1 Fourierov rozklad obdĺžnikového signálu

5. Príklady Fourierovho radu

Príklad 1: Fourierov rad pre sínusový signál

Sínusový signál je základnou harmonickou funkciou, preto jeho Fourierov rad obsahuje len jednu frekvenčnú zložku.

Definícia signálu

Zoberme jednoduchý sínusový signál:

$$x(t) = Asin(\omega_0 t)$$

A je amplitúda a $\boldsymbol{\omega_0}$ je uhlová frekvencia.

Fourierov rozklad

Pre sínusovú funkciu je Fourierov rozklad veľmi jednoduchý, pretože tento signál sám o sebe je harmonická zložka:

$$x(t) = 0 + 0 \cdot \cos(\omega_0 t) + A \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Príklad 2: Fourierov rad pre obdĺžnikový signál

Obdĺžnikový signál je príklad periodického signálu, ktorý obsahuje viac harmonických zložiek.

Definícia signálu

Obdĺžnikový signál s periódou ***T*** a hodnotami ***1*** a ***−1*** na polovici periódy je definovaný ako:

$$x(t) = 1, \quad 0 \leq t < \frac{T}{2}; \quad x(t) = -1, \quad \frac{T}{2} \leq t < T$$

Alebo

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

a signál sa opakuje pre všetky ďalšie periódy.

Fourierov rozklad

Pre tento signál má Fourierov rozklad tvar:

$$x(t) = \frac{\pi}{4}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{3}{1}\sin(3\omega_0 t) + \frac{5}{1}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right)$$

Tento rozklad ukazuje, že obdĺžnikový signál obsahuje len nepárne harmonické zložky s klesajúcou amplitúdou.

Fourierove koeficienty

$\boldsymbol{a_0} = 0$,

$\boldsymbol{a_n} = 0$ pre všetky $\boldsymbol{n}$,

$\boldsymbol{b_n} = \frac{4}{n\pi}$ pre nepárne $\boldsymbol{n}$.

Výpočet príkladu

Predpokladáme obdĺžnikový signál definovaný ako:

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

Pre $\boldsymbol{T = 2}$ a $\boldsymbol{A = 1}$ môžeme zapísať:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Fourierove koeficienty

Fourierove koeficienty sú dané vzorcami:

1. Základný koeficient $\boldsymbol{a_0}$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ dt$$

2. Koeficienty $\boldsymbol{a_n}$ pre kosínusové zložky:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0 t)\ dt$$

3. Koeficienty $\boldsymbol{b_n}$ pre sínusové zložky:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)\ dt$$

Výpočet $\boldsymbol{a_0}$**:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\ dt + \int_1^2 (-1)\ dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\ dt + \int_1^2 -1\ dt\right) = \frac{1}{2}([t]_0^1 + [-t]_1^2)$$
$$= \frac{1}{2}\Big((1-0) + \big(-(2-1)\big)\Big) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Výpočet $\boldsymbol{a_n}$:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\cos(n\pi t)\ dt + \int_1^2 (-1)\cos(n\pi t)\ dt\right)$$
$$= \int_0^1 \cos(n\pi t)\ dt - \int_1^2 \cos(n\pi t)\ dt$$

1. Prvý integrál:

$$\int_0^1 \cos(n\pi t)\ dt = \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n\pi}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = \frac{1}{n\pi}(0-0) = 0$$

2. Druhý integrál

$$\int_1^2 \cos(n\pi t)\ dt = \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{n\pi}(\sin(2n\pi) - \sin(n\pi)) = \frac{1}{n\pi}(0-0) = 0$$

Takže:

$$\boldsymbol{a_n} = 0 - 0 = 0$$

Výpočet $\boldsymbol{b_n}$:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\sin(n\pi t)\ dt + \int_1^2 (-1)\sin(n\pi t)\ dt\right)$$
$$= \int_0^1 \sin(n\pi t)\ dt - \int_1^2 \sin(n\pi t)\ dt$$

1. Prvý integrál:

$$\int_0^1 \sin(n\pi t)\ dt = \left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - \cos(0)) = -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

2. Druhý integrál:

$$\int_1^2 \sin(n\pi t)\ dt = \left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_1^2$$
$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) = -\frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Teraz dosadíme do výrazu pre $\boldsymbol{b_n}$:

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1) + \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$
$$= -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n) = -\frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Konečný výsledok pre $\boldsymbol{b_n}$:

1. Pre nepárne $\boldsymbol{n}$ (napríklad $\boldsymbol{n}$ = 1,3,5,...):
   - $1 - (-1)^n = 1 - (-1) = 2$
   - teda:

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \cdot 2 = \frac{4}{n\pi}$$

2. Pre párne $\boldsymbol{n}$ (napríklad $\boldsymbol{n}$ = 0,2,4,...):
   - $1 - (-1)^n = 1 - 1 = 0$
   - teda:

$$b_n\ =\ 0$$

Zhrnutie:

- $\boldsymbol{a_0} = 0$
- $\boldsymbol{a_n} = 0$ pre všetky $\boldsymbol{n}$
- $\boldsymbol{b_n} = \frac{4}{n\pi}$ pre nepárne $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{b_n} = 0$ pre nepárne $\boldsymbol{n}$

6. Fyzikálna interpretácia a praktické aplikácie

Fourierov rad predstavuje silný nástroj na analýzu periodických signálov v rôznych fyzikálnych a technických kontextoch. V podstate umožňuje rozložiť zložitý signál na súčet jednoduchších sinusových a kosínusových funkcií, ktoré sú základnými stavebnými kameňmi periodických signálov. Týmto spôsobom môžeme analyzovať a manipulovať s rôznymi typmi signálov, ako sú akustické vlny, elektromagnetické signály, a iné.

Praktické aplikácie

- **Telekomunikácie:** Fourierova analýza sa používa na moduláciu a demoduláciu signálov v bezdrôtovej komunikácii. Umožňuje efektívne prenášať informácie cez rôzne frekvencie a minimalizovať rušenie.
- **Zpracovanie signálov:** V audio a video spracovaní sa Fourierova analýza používa na filtrovanie a kompresiu signálov. Pomocou Fourierových koeficientov je možné odstrániť šum a zlepšiť kvalitu zvuku alebo obrazu.
- **Svetelná analýza:** Fourierova analýza sa používa v optike na analýzu svetelných vĺn a ich zloženia. Rôzne farby svetla sa dajú interpretovať ako harmonické zložky.
- **Spektrálna analýza:** V oblasti fyziky a inžinierstva sa Fourierova analýza používa na analýzu spektier signálov, čo je dôležité napríklad v oblasti vibrácií, akustiky alebo elektroakustiky.
- **Lekárske aplikácie:** V medicíne sa Fourierova analýza aplikuje pri analýze signálov z biomedicínskeho merania, ako sú EKG alebo EEG, na diagnostiku rôznych zdravotných problémov.

Záver

Fourierov rad ponúka široké spektrum aplikácií v mnohých oblastiach vedy a techniky. Jeho schopnosť rozkladať komplexné signály na jednoduchosť sinusových funkcií poskytuje mocný nástroj na analýzu a spracovanie dát. Pochopenie Fourierových radov a ich aplikácií môže otvoriť dvere k inováciám a novým technológiám.