Spektrálna analýza spojitých periodických signálov – Fourierov rad (FR)

1. Úvod do problematiky

Spojité periodické signály sú signály, ktoré sa opakujú v pravidelných intervaloch a ich hodnoty sú definované v každom okamihu času. Tieto signály sú spojité, čo znamená, že sú definované pre všetky časy v rámci ich periódy.

Spektrum vo fyzike a chémii: rozloženie javu (najmä nameranej hodnoty veličiny) podľa niektorej jeho charakteristickej vlastnosti (najmä frekvencie/vlnovej dĺžky).

Spektrálna analýza je analýza ktorá skúma, aké frekvencie sú prítomné v signáli alebo súvisiace veličiny, ako sú energie. V podstate ide o analýzu signálu vo **frekvenčnej oblasti,** ktorá ukazuje, aké **frekvencie** sú prítomné v signáli a akú **amplitúdu** alebo **energiu** má každá frekvencia, na rozdiel od analýzy v **časovej oblasti**, kde sa sleduje priebeh signálu v čase.

Fourierov rad rozkladá signál na súčet sínusových a kosínusových funkcií, pričom každá z nich má určitú frekvenciu, amplitúdu a fázu a prispieva k celkovému tvaru signálu. Tento rozklad umožňuje zobraziť frekvenčné spektrum signálu a analyzovať, ktoré frekvencie sú prítomné a akú majú amplitúdu.

Dôležitosť Fourierovho radu spočíva v jeho schopnosti rozložiť signál na základné frekvencie. To je užitočné nielen pri analýze signálov, ale aj pri ich spracovaní, kompresii alebo odstraňovaní šumu.

2. Fourierove rady

Poznáme tri základne tvary Fourierovho radu, a to dva reálne (trigonometrický a zložkový) a jeden komplexný (exponenciálny) tvar.

Trigonometrický zlúčený tvar:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

- $\boldsymbol{a_0}$ je veľkosť jednosmernej zložky signálu (stredná hodnota f(t))
- $\boldsymbol{A_n}$ (amplitúda n-tej harmonickej zložky) kombinuje kosínusovú a sínusovú zložku do jedného čísla, ktoré ukazuje, akú veľkú váhu má (energiu alebo intenzitu) každá harmonická zložka (napr. 1. harmonická, 2. harmonická atď.).

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

- $\boldsymbol{\varphi_n}$ predstavuje počiatočnú fázu n-tej harmonickej zložky

$$\varphi_n = -arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- $\boldsymbol{\omega_n} = n\boldsymbol{\omega_1}$ je kruhová frekvencia n-tej harmonickej zložky
- $\boldsymbol{\omega_1} = \frac{2\pi}{T}$ je uhlová frekvencia

Zložkový tvar Fourierovho radu:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t))$$

- Koeficient $\boldsymbol{a_0}$ je časová stredná hodnota funkcie f(t), čiže je jednosmernou zložkou signálu f(t)
- $\boldsymbol{a_n}$ a $\boldsymbol{b_n}$ sú koeficienty nezávislé od premennej t pre sínusové a kosínusové zložky
- $\mathbf{n}\boldsymbol{\omega_1}$ je kruhová frekvencia n-tej harmonickej zložky
- $\boldsymbol{\omega_1} = \frac{2\pi}{T}$ je uhlová frekvencia

Výpočet koeficientov:

- Stredná hodnota funkcie (jednosmerná zložka):

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt$$

- Koeficient kosínusovej zložky:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t)\, dt$$

- Koeficient sínusovej zložky:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt$$

Platí:

- Fourierov rad pre párne periodické funkcie obsahuje len kosínusové členy a sínusové sú nulové:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t)$$

- Pre nepárne periodické funkcie naopak obsahuje len sínusové členy a kosínusové sú nulové a nulová je aj jednosmerná zložka:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t)$$

Exponenciálny tvar:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

- Veličinu $\boldsymbol{C_n}$ nazývame komplexným koeficientom a vypočítame ho zo vzťahu:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t}\, dt$$

- $\boldsymbol{\omega_1} = \frac{2\pi}{T}$ je uhlová frekvencia
- $\boldsymbol{e^{-jn\omega_1 t}}$ je komplexná exponenciálna funkcia, kde $e^{j\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$ podľa Eulerovej identity

Exponenciálny tvar Fourierovho radu je užitočný, pretože:

- Umožňuje jednoduchší zápis a výpočet, keď pracujeme s komplexnými funkciami.
- Používa sa v rôznych oblastiach signálovej analýzy, ako sú elektrické obvody, rádiové vlny atď.

3. Príklad výpočtu Fourierových koeficientov

x(t) = 2t, T= 2, $\omega = \pi$

$C_2 = ?$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2te^{-j2\pi t}\,dt = \int_{-1}^{1} te^{-j2\pi t}\,dt$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} te^{-j2\pi t}\,dt = \left\{\begin{matrix} u = t \quad v' = e^{-j2\pi t} \\ u' = 1 \quad v = \int e^{-j2\pi t}dt \left\{\begin{matrix} u = -j2\pi t \\ du = -j2\pi dt \\ \dfrac{du}{-j2\pi} = dt \end{matrix}\right\} = \int e^u \dfrac{du}{-j2\pi} = \dfrac{1}{-j2\pi}\int e^u du = \dfrac{1}{-j2\pi}e^{-j2\pi t} \end{matrix}\right\} =$$

$$= t\frac{1}{-j2\pi}e^{-j2\pi t} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{-j2\pi}e^{-j2\pi t}\,dt = t\frac{e^{-j2\pi t}}{-j2\pi} + \frac{1}{j2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-j2\pi t}dt = \left[t\frac{e^{-j2\pi t}}{-j2\pi} + \frac{1}{j2\pi} * \frac{e^{-j2\pi t}}{-j2\pi}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[-\frac{te^{-tj2\pi}}{j2\pi} - \frac{e^{-tj2\pi}}{4\pi^2 j^2}\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{t}{j2\pi e^{tj2\pi}} + \frac{1}{4\pi^2 e^{tj2\pi}}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{j2\pi e^{1j2\pi}} + \frac{1}{4\pi^2 e^{1j2\pi}} - \left(-\frac{-1}{j2\pi e^{-1j2\pi}} + \frac{1}{4\pi^2 e^{-1j2\pi}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{j2\pi} + \frac{1}{4\pi^2} - \left(+\frac{1}{j2\pi e^{-1j2\pi}} + \frac{1}{4\pi^2 e^{-j2\pi}}\right) = -\frac{1}{j2\pi} + \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{j2\pi} - \frac{1}{4\pi^2} = -\frac{2}{2j\pi} = -\frac{1}{j\pi} * \frac{j}{j} = -\frac{j}{\pi(-1)} = \frac{j}{\pi}$$

4. Časová a frekvenčná oblasť

V **časovej oblasti** zobrazujeme signál v závislosti od času. V tejto oblasti sa signál vyjadruje ako funkcia času, čo znamená, že vidíme, ako sa **amplitúda** signálu mení v priebehu času. Os **x** predstavuje čas a os **y** amplitúdu signálu. V **časovej oblasti** môžeme pozorovať tvar signálu, jeho periodickosť a priebeh.

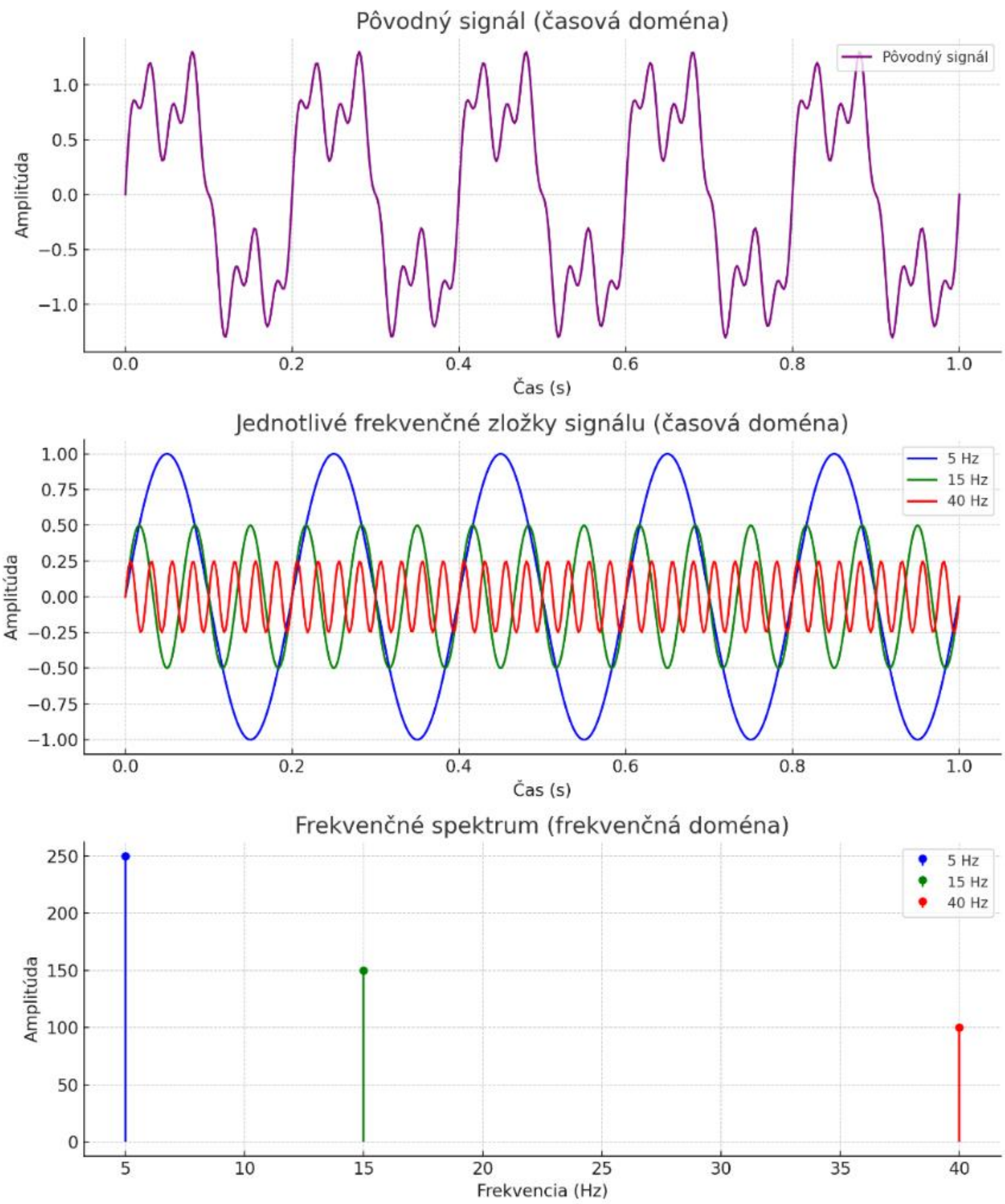
Frekvenčná oblasť je alternatívny spôsob, ako zobraziť signál. Namiesto pozorovania zmien v čase nás zaujíma, **akými frekvenciami je signál tvorený**. Na rozklad signálu z **časovej oblasti** do **frekvenčnej oblasti** sa používa **Fourierova transformácia**, ktorá je rozšírením Fourierovho radu pre **neperiodické spojité** signály.

Vo **frekvenčnej oblasti** je na osi **x** zobrazená **frekvencia** a na osi **y** je zobrazená **amplitúda** alebo **intenzita** príslušnej frekvencie. Vyššie hodnoty na osi y znamenajú, že daná frekvencia má v signáli väčšiu silu alebo príspevok. Každá frekvenčná zložka v signáli je zobrazená ako čiara alebo bod na frekvenčnej osi.

Frekvenčné spektrum ukazuje, ktoré frekvencie dominujú v signáli a poskytuje informácie o tom, z akých harmonických frekvencií sa signál skladá.

V **časovej oblasti** môžeme mať zložité signály, ktorých charakteristika je ťažko interpretovateľná. Prechodom do **frekvenčnej oblasti** pomocou **Fourierovej transformácie** môžeme jednoducho identifikovať, ktoré frekvencie tvoria tento signál.

Frekvenčná oblasť umožňuje lepšiu analýzu a spracovanie signálov, napríklad odstraňovanie šumu, kompresiu signálov (ako MP3 kompresia) alebo rozklad zvuku na tóny.



5. Výhody a obmedzenia Fourierovho radu

- Výhody:
  - Jednoduchá analýza periodických signálov.
  - Možnosť určiť jednotlivé frekvenčné zložky v danom signáli.
- Obmedzenia:
  - Fourierov rad pracuje len s periodickými spojitými signálmi.
  - Pre neperiodické spojité signály je potrebná Fourierova transformácia.

- Nie vždy je možné presne vypočítať všetky koeficienty v praxi, kde sa často používajú aproximácie (napr. obdĺžnikový signál, pílovitý signál, trojuholníkový signál).

6. Praktické aplikácie Fourierovho radu

- **1. Selektívne filtrovanie:**

  Fourierove rady môžeme použiť na navrhovanie filtrov, ktoré odstraňujú špecifické frekvenčné zložky zo signálu, zatiaľ čo ostatné zostávajú zachované.

- **2. Filtrácia šumu:**

  Fourierove rady môžeme použiť na odstránenie nežiaduceho šumu zo signálu (redukcia šumu alebo potlačenie hluku).

- **3. Kompresia signálov**:

  Fourierove rady možno použiť na kompresiu signálov odstránením nadbytočných informácií. Algoritmy kompresie obrazu napríklad často používajú Fourierovu transformáciu na odstránenie vysokofrekvenčných zložiek, ktoré nie sú vnímateľné ľudským zrakom. Tým sa zmenší veľkosť obrázka bez výrazného zníženia jeho kvality.

- **4. Rozpoznávanie reči**:

  Fourierov rad možno použiť na rozpoznávanie reči. Napríklad Fourierov rad možno použiť na spracovanie a rozpoznávanie rečových vzorov.

7. Zdroje

Signály a sústavy 3. vydanie - Oldřich Ondráček

Prednášky AČSS1

https://sk.wikipedia.org/wiki/Fourierov_rad

https://sk.wikipedia.org/wiki/Fourierova_transform%C3%A1cia

https://sk.wikipedia.org/wiki/Spektrum