Fourierove rady

Každú funkciu, ktorá spĺňa **Dirichletove podmienky** vieme vyjadriť pomocou Fourierovho radu.
Dirichletove podmienky sú:

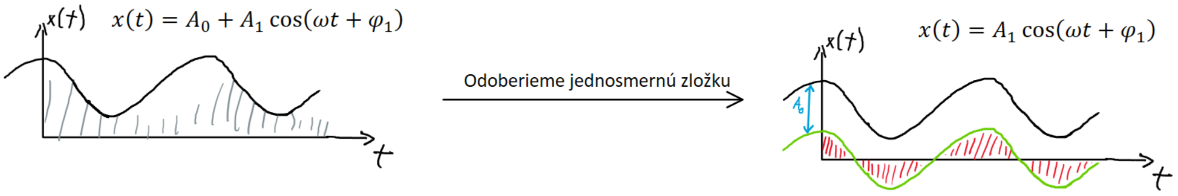
- **funkcia x(t) musí byť ohraničená** (aj keď sa FR používajú na periodické funkcie, pri vyjadrovaní pomocou FR sa zameriavame na jednu periódu, teda funkcia je ohraničená)
- **funkcia x(t) musí byť po častiach monotónna** - na každom intervale kde je funkcia spojitá je klesajúca alebo rastúca
- **funkcia musí byť po častiach spojitá** - funkcia môže môže mať konečný počet bodov v nespojitosti, pričom tieto nespojitosti sú skokové

Fourierove rady teda používame pri **spojitých periodických** signáloch.

Poznáme 3 tvary Fourierovych radov:

1. **Zložkový tvar**: $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$
2. **Goniometrický tvar**: $x(t) = A_0 + \sum_{nc^1}^{\infty} \cos \omega_n t + \varphi_n$
3. **Exponenciálny tvar**: $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)$

- **a_0** - jednosmerná zložka
  - Konštanta
  - Predstavuje strednú hodnotu signálu
  - V princípe platí, že pomocou nej posúvame signál na osi y, a obsah plochy nakreslenej medzi signálom bez harmonickej zložky a osou x zhora a obsah plochy nakreslenej medzi signálom bez harmonickej zložky a osou x zdola sa rovnal:



- **a_n a b_n** - vyjadrujú amplitúdy harmonických zložiek signálu
  - **a_n** - kosínusová zložka
    - Vyjadruje amplitúdu kosínusu n-tej harmonickej zložky
  - **b_n** - sínusová zložka
    - Vyjadruje amplitúdu sínusu n-tej harmonickej zložky
  - Ich zložením sa získava amplitúda výslednej harmonickej zložky v bode n - A_n
  - Platí:
    - $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
    - $a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos(n\omega_1 t)\, dt$
    - $b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt$

A0 je rovná a0, pretože:

- $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $b_0 = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)\sin(0\omega_1 t)\,dt = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)\sin(0)\,dt =$
  $\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)0\,dt = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} 0\,dt = \frac{2}{T_1}[0]_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} = 0$

Dosadením dostaneme:

$$A_0 = \sqrt{a_0^2 + 0^2} = \sqrt{{a_0}^2 + 0} = \sqrt{{a_0}^2} = a_0$$

- $n\omega_1$ - kruhová frekvencia n-tej harmonickej zložky
  - Platí:
    $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
- c_n sú komplexné koeficienty a obsahujú info o amplitúde a fáze
  - c_0 - zodpovedá jednosmernej zložke signálu
  - c_n - zodpovedá amplitúde a fáze n-tej harmonickej zložky
    - amplitúda: daná absolútnou hodnotou c_n, teda amplitúda $A_n = 2*|c_n|$
    - fáza: daná argumentom komplexného čísla cn, teda uhlom, ktorý zviera komplexná hodnota

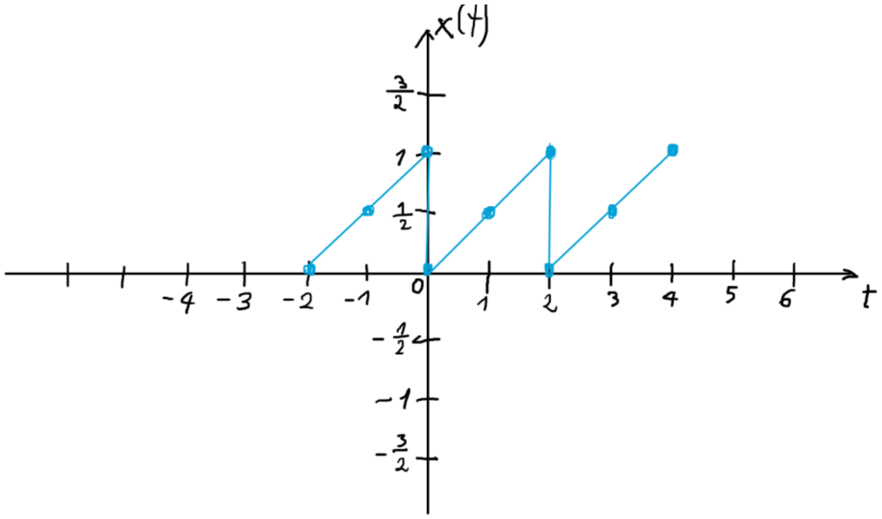
    s reálnou osou v komplexnej rovine:
    fáza = $\arg(c_n)$
    Zo všeobecného zápisu komplexného čísla:
      - ak $c_n = a + b*i$, potom $\arg(c_n) = \tan^{-1}(b/a)$
  - c_n vypočítame vzťahom:

$$c_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)e^{-j\omega tn}\,dt \quad \text{pre } n=0,\pm1,\pm2,\ldots,K$$

- φn - počiatočná fáza n-tej harmonickej zložky
  - v princípe nám hovorí o koľko je posunutá n-tá harmonická zložka vzhľadom na začiatok sledovaného signálu (spodnú hranicu)

Ukážkový príklad:
Vypočítajte Fourierov rad pre funkciu x(t) = $\frac{1}{2}$t a T=2. Pre približnú aproximáciu radu stačí počítať s koeficientami pre 0 ≤ n ≤ 2.

Funkciu si načrtneme:



Pozn.: na obrázku je len náčrt funkcie v okolí bodu nula, v skutočnosti je náš signál periodický, a preto pokračuje do nekonečna

Z obrázku je zrejmé, že funkcia spĺňa Dirichletove podmienky, a preto ideme funkciu vyjadriť pomocou Fourierovho radu.
Funkciu x(t) = $\frac{1}{2}$t s periódou T = 2 chceme vyjadriť pomocou exponenciálneho tvaru Fouriercho radu:

$$c_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)e^{-j\omega t n}\,dt \quad \text{pre n=0,±1,±2,…,K}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{2}{2}}^{\frac{2}{2}} \frac{1}{2}t\,e^{-j\omega t 0}\,dt$$

Ešte vieme dosadiť uhlovú frekvenciu, ω, ktorú dostaneme zo vzťahu:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{2}{2}}^{\frac{2}{2}} \frac{1}{2}t\,e^{-j\pi t 0}\,dt$$

Vieme, že ľubovoľné číslo x umocnené na 0 je rovné 1, a preto dosadíme:

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}t * 1\,dt$$

Konštantu $\frac{1}{2}$ vyberieme pred integrál a integrujeme použitím vzťahu:

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \text{ pre } a \neq -1$$

Kde a = 1:

$$c_0 = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

$$c_0 = 0$$

Počítame c_1:

$$C_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{2}{2}}^{\frac{2}{2}} \frac{1}{2} t \cdot e^{-j\omega t \cdot 1} \, dt$$

Dosadíme za ω číslo π

$$c_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} t \cdot e^{-j\pi t} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t \cdot e^{-j\pi t} \, dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} t \cdot e^{-j\pi t} \, dt$$

Pomocou metódy per partes získame:

$$c_1 = \left[-\frac{t \cdot e^{-j\pi t}}{4\pi j}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{4\pi j} \int_{-1}^{1} e^{-j\pi t} \, dt$$

Pozn.: Všeobecný zápis metódy per partes:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

V našom príklade sme použili:

$$u = t, \quad u' = 1, \quad v' = e^{-j\pi t}, \quad v = -\frac{e^{-j\pi t}}{j\pi}$$

Vypočítame si hranatú zátvorku:

$$\left[-\frac{t \cdot e^{-j\pi t}}{4\pi j}\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{e^{-j\pi}}{4\pi j}\right) - \left(-\frac{e^{j\pi}}{4\pi j}\right) = \frac{-e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{4\pi j}$$

$$c_1 = \frac{-e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{4\pi j} + \frac{1}{4\pi j}\int_{-1}^{1} e^{-j\pi t}\ dt$$

$$c_1 = \frac{-e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{4\pi j} + \frac{1}{4\pi j}\left[\frac{-e^{-j\pi t}}{j\pi}\right]_{-1}^{1}$$

$$c_1 = \frac{-e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{4\pi j} + \frac{1}{4\pi j}\left(\frac{-e^{-j\pi}}{j\pi} + \frac{e^{j\pi}}{j\pi}\right)$$

$$c_1 = \frac{-e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{4\pi i} + \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{j\pi} \cdot \frac{1}{4\pi j} = \frac{-e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{4\pi j} + \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{4j^2\pi^2}$$

Vyjadríme si $e^{j\pi}$ a $e^{-j\pi}$ ako:

$$e^{-j\pi} = -1 \quad \text{a} \quad e^{j\pi} = -1$$

Dosadíme a upravíme:

$$c_1 = -\frac{(-1) + (-1)}{4\pi j} + \frac{-1 - (-1)}{4j^2\pi^2}$$

$$c_1 = -\frac{-2}{4\pi j} + 0$$

$$c_1 = \frac{2}{4\pi j} = \frac{1}{2\pi j}$$

Počítame c_2:

$$c_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} t\ e^{-j2\pi t}\ dt$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} t\ e^{-j2\pi t}\ dt$$

Upravíme pomocou metódy per partes, kde:

$$u = t, \quad u' = 1, \quad v' = e^{-j2\pi t}, \quad v = \frac{je^{-j2\pi t}}{2\pi}$$

$$c_2 = \left[\frac{t \cdot j \cdot e^{-j2\pi t}}{8\pi}\right]_{-1}^{1} - \frac{j}{8\pi}\int_{-1}^{1} e^{-2\pi jt}\ dt$$

Upravíme hranatú zátvorku:

$$\left[\frac{t \cdot j \cdot e^{-j2\pi t}}{8\pi}\right]_{-1}^{1} = \frac{j \cdot e^{-j2\pi}}{8\pi} - \left(\frac{j \cdot e^{j2\pi}}{8\pi}\right) = \frac{j}{4\pi}$$

$$c_2 = \frac{j}{4\pi} - \frac{j}{8\pi}\int_{-1}^{1} e^{-2\pi jt}\ dt$$

$$c_2 = \frac{j}{4\pi} - \frac{j}{8\pi}\left[-\frac{e^{-2j\pi t}}{2j\pi}\right]_{-1}^{1}$$

$$c_2 = \frac{j}{4\pi} - \frac{j}{8\pi}\left(\frac{-e^{-2j\pi}}{2j\pi} - \left(\frac{-e^{2j\pi}}{2j\pi}\right)\right) = -\frac{e^{-2j\pi} - e^{2j\pi}}{8\pi j} - \left(\frac{e^{2j\pi} - e^{-2j\pi}}{16\pi^2 j^2}\right)$$

Dosadíme:

$$e^{j2\pi} = 1 \qquad e^{-j2\pi} = 1$$

$$c_2 = \frac{j}{4\pi} - \frac{1-1}{16j\pi^2}$$

$$c_2 = \frac{j}{4\pi} - 0 = \frac{j}{4\pi}$$

$$c_2 = \frac{j}{4\pi}$$

Dostali sme koeficienty:

$$c_0 = 0;\ c_1 = \frac{1}{2\pi j};\ c_2 = \frac{j}{4\pi}$$

Dosadíme do vzorca:

$$x(t) \approx 0 + \frac{1}{2\pi j} + \frac{j}{4\pi}$$

Pripomienka: Za x(t) v zápise píšeme znamienko približne, pretože presný zápis Fourierovho radu je pomocou všetkých koeficientov a nami vypočítaná hodnota nie je presná.