Kelompok 1

S1IF-07-O

1. HIKMATUS SHOLEHAH (19102024)
2. RISANG ABDURRAHMAN G (19102178)
3. PUTRI AGUSTYANINGSIH (19102208)
4. GALUH KUSUMA WARDHANI (19102234)
5. BASTIAN ARMANANTA P. P (19102262)

PEMBAHASAN

01 NOTASI DAN OPERASI VEKTOR

02 PERKALIAN TITIK DAN PROYEKSI ORTOGONAL

01

NOTASI DAN OPERASI VEKTOR

Vektor adalah besaran yang mempunyai arah

- **Notasi vektor**

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$$

Notasi Panjang Vektor

Notasi Panjang Vektor $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Adalah $\|\bar{c}\| = \sqrt{c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2} + c_3^{\ 2}}$

OPERASI VEKTOR MELIPUTI

1

Penjumlahan antar vektor (pada ruang yang sama)

2

Perkalian vektor

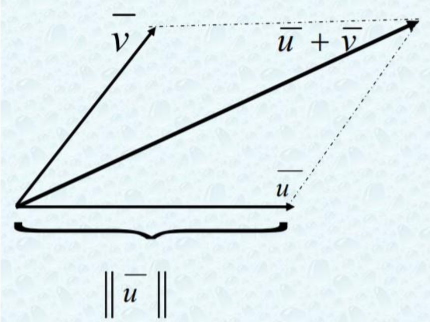
(a) dengan skalar

(b) dengan vektor lain

- Hasil kali titik (Dot Product)
- Hasil kali silang (Cross Product)

PENJUMLAHAN dan PENGURANGAN VEKTOR

Misalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor-vektor yang berada di ruang yang sama, maka vektor $\bar{u}+\bar{v}$ Didefinisikan :



$$|u+v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|\cos\theta}$$

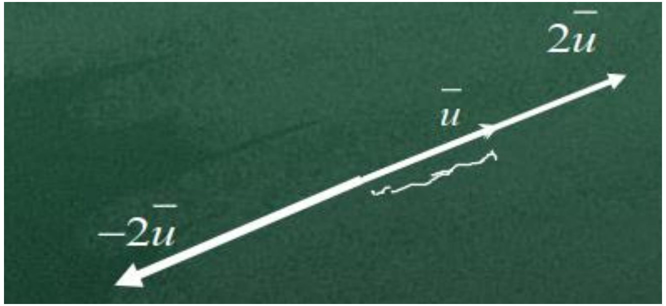
$$|u-v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta}$$

PERKALIAN VEKTOR DENGAN SKALAR

Perkalian vektor ū dengan skalar k, (k ū) didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang vektor ū dengan arah

Jika k > 0 ⟶ searah dengan ū

Jika k < 0 ⟶ berlawanan arah dengan ū



Sehingga, dapat dijelaskan sebagai berikut:

Misalkan $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Adalah vektor-vector di ruang yang sama, maka:

1. $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

2. $\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

3. $k\ \bar{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$

Contoh soal

Diketahui dua buah vektor A = 8 satuan dan B = 4 satuan saling mengapit sudut 60°. Hitunglah besar resultan kedua vektor.

Penyelesaian soal / pembahasan

Untuk menghitung resultan vektor kita gunakan rumus dibawah ini:

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 . A . B. \cos \theta}$

$R = \sqrt{8^2 + 4^2 + 2 . 8 . 4. \cos 60°}$

$R = \sqrt{64 + 16 + 32} = \sqrt{80}$

$R = \sqrt{16 \times 5}$

$R = 4\sqrt{5}$

Jadi resultan kedua vektor A dan B adalah $4 \sqrt{5}$ m/s.

Contoh soal

$\vec{v} = (1, -3, 2)$,

$\vec{w} = (4, 2, 1)$

(1) $\vec{v} + \vec{w} = (1+4, -3+2, 2+1)$

$= (5, -1, 3)$

(2) $3\vec{v} = 3(1, -3, 2)$

$= (3, -9, 6)$

(3) $\vec{v} - \vec{w} = (1-4, -3-2, 2-1)$

$= (-3, -5, 1)$

(4) $3\vec{v} + \vec{w} = (3, -9, 6) + (4, 2, 1)$

$= (7, -7, 7)$

(5) $3\vec{v} - \vec{w} = (3, -9, 6) - (4, 2, 1)$

$= (-1, -11, 5)$

02

PERKALIAN TITIK DAN PROYEKSI ORTOGONAL

Perkalian Antara Dua Vektor

Hasil kali titik (dot product)

Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor pada ruang yang sama yang menghasilkan skalar

Hasil kali silang (Cross product)

Hasil kali silang merupakan operasi antara dua buah vektor pada ruang R 3 yang menghasilkan vektor

Dot Product

Jika u dan v adalah vektor-vektor dalam ruang dimensi 2 maupun 3 dan terdapat sudut antara vektor u dan v maka,

$$\boldsymbol{u.v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \varnothing \quad \text{jika } \boldsymbol{u} \neq 0 \text{ dan } \boldsymbol{v} \neq 0$$

$$\boldsymbol{u.v} = 0 \quad \text{jika } \boldsymbol{u} = 0 \text{ atau } \boldsymbol{v} = 0$$

- bila $a = [a_1, a_2, a_3]$ dan $b = [b_1, b_2, b_3]$, maka :

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Dimana

|u| : Panjang

|v| : Panjang

∅ : sudut keduanya

Sifat-Sifat Hasil Kali Titik

1. $\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{b} \bullet \bar{a}$
2. $\bar{a} \bullet (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \bullet \bar{b}) + (\bar{a} \bullet \bar{c})$
3. $k(\bar{a} \bullet \bar{b}) = k\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{a} \bullet k\bar{b}$, dimana $k \in R$

Contoh soal

Dua buah vektor 3D, yaitu ***u* = *12i* + *3j* – *k*** dan ***v* = *-3i* + *2j* + *ck***.
Tentukan besar c agar kedua vektor tersebut tegak lurus.

Ingat ketika kedua vektor tegak lurus maka sudut yang dibentuk adalah 90 derajat dan nilai dari cos 90 = 0, maka

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos 90 = 0$$

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0$$

$$12(-3) + (3)(2) + (-1)c = 0$$

$$-36 + 6 - c = 0$$

$$c = -30$$

Proyeksi Ortogonal

Vektor - vektor ortogonal

vektor vektor yang saling tegak lurus. Dua buah vektor tak nol disebut ortogonal jika dan hanya jika hasi kali titiknya nol.

Jika vektor-vektor $\bar{u}$ dan $\bar{e}$ taknol dan α adalah sudut diantaranya, maka :

1. Sudut α lancip jika dan hanya jika $\bar{u} \cdot \bar{e} > 0$
2. Sudut α tumpul jika dan hanya jika $\bar{u} \cdot \bar{e} < 0$
3. Sudut $\alpha = \frac{\pi}{2}$ siku-siku jika dan hanya jika $\bar{u} \cdot \bar{e} = 0$

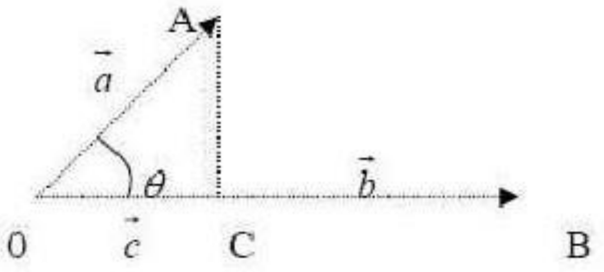
Contoh

Jika ū = (1, -2, 3), ē = (-3, 4, 2) dan ā = (3, 6, 3),

Tentukan jenis sudut yang dibentuk antara vektor ū, ē dan ā

1. ū . ē = (1.-3) + (-2.4) + (3.2) = -3 - 8 + 6 = -5 (tumpul)
2. ē . ā = (-3.3) + (4.6) + (2.3) = -9 + 24 + 6 = 21 (lancip)
3. ū . ā = (1.3) + (-2.6) + (3.3) = 3 - 12 + 9 = 0 (siku-siku)

1. Proyeksi skalar ortogonal



$$|\overline{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$ → Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Proyeksi skalar juga disebut panjang proyeksi

Contoh soal

Diketahui $\mathbf{a}$ = [8, 4] dan $\mathbf{b}$ = [4, -3]. Tentukan panjang proyeksi vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ dan panjang proyeksi vektor $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$

Penyelesaian,

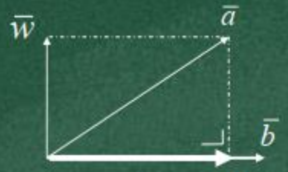
Panjang proyeksi vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|8(4)+4(-3)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|20|}{5} = 4$$

Panjang proyeksi vektor $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$ adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|8(4)+4(-3)|}{\sqrt{8^2+4^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{80}} = \sqrt{5}$$

2. Proyeksi vektor ortogonal



$\bar{c} = proj_{\bar{b}}\bar{a}$

terlihat bahwa

$\bar{c} = k\,\bar{b}$

$$k = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}$$

Karena $\bar{a} = \bar{w} + \bar{c}$ $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \bar{a} \bullet \bar{b} &= (\bar{w} + \bar{c}) \bullet \bar{b} \\ &= \bar{w} \bullet \bar{b} + \bar{c} \bullet \bar{b} \\ &= k\bar{b} \bullet \bar{b} \\ &= k\|\bar{b}\|^2 \end{aligned}$$

Jadi,

rumus proyeksi diperoleh :

$$proj_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}\,\bar{b}$$

Contoh soal

Tentukan proyeksi ortogonal

vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

terhadap vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$proj_{\bar{v}}\bar{u} = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{\|v\|^2}\bar{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2 + 3^2 + (-4)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2 + (-12) + (-12)}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-26}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

SEKIAN,

TERIMAKASIH ☺