

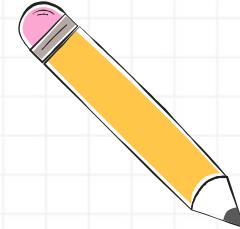
Kelompok 8:

- | | |
|--------------------------|------------|
| 1. Nurdin | (19102249) |
| 2. Fahri Rizmawan | (19102138) |
| 3. Maldini Pawa Gonzalez | (19102280) |
| 4. Hersa Dwi Ikhsanti | (19102101) |
| 5. Adelia Sannomiya | (19102064) |

CONTOH SOAL:

BASIS DAN DIMENSI

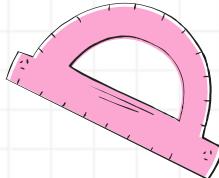
BASIS DAN DIMENSI

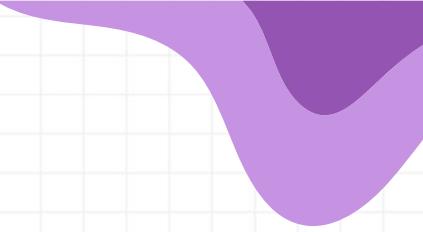


Definisi :

Basis : suatu ukuran tertentu yang menyatakan komponen dari sebuah vector.

Dimensi biasanya dihubungkan dengan ruang, misalnya garis adalah ruang dengan dimensi 1, bidang adalah ruang dengan dimensi 2 dan seterusnya.





1

$$U = (1, 2, 3) \quad V = (3, 2, 3) \quad W = (-1, 2, 3)$$

Apakah s bebas linier jika $s = (u, v, w)$ di \mathbb{R}^3

Jawab :

$$\cdot K_1 U + K_2 V + K_3 W = 0$$

$$K_1 (1, 2, 1) + K_2 (3, 2, 3) + K_3 (-1, 2, -5) = 0$$

$$K_1 + 3K_2 - K_3 = 0$$

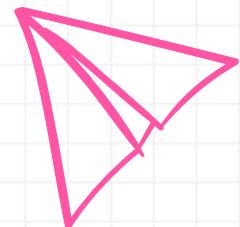
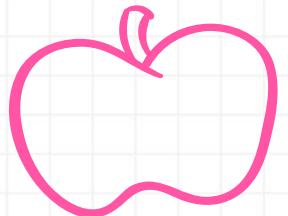
$$2K_1 + 2K_2 + 2K_3 = 0$$

$$K_1 + 3K_2 - 5K_3 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

Determinan

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -5 \end{matrix}$$



jika $\det = 0$ bebas linier / tidak bebas linier

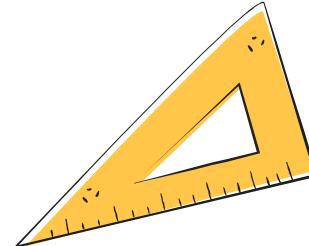
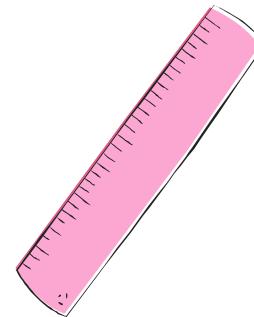
jika $\det \neq 0$ bebas linier

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right.$$

$$= -10 + 6 - 6 + 2 + 6 + 30$$

$$= -32$$

$$D = -32$$



Contoh 2:

Misalkan $s = \{u_1, u_2, u_3\}$ dimana $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ apakah s merupakan basis untuk \mathbb{R}^3 ?

Jawab:

$$K_1 \cdot u_1 + K_2 \cdot u_2 + K_3 \cdot u_3 = 0$$

Maka hasilnya :

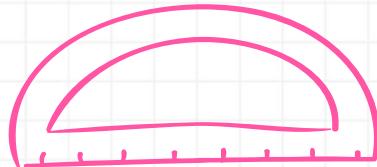
$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

Lalu kita kalikan, dan akan menghasilkan system persamaan linier

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$$

$$4k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0$$

$$3k_1 + 2k_2 + 6k_3 = 0$$



Lanjutan:

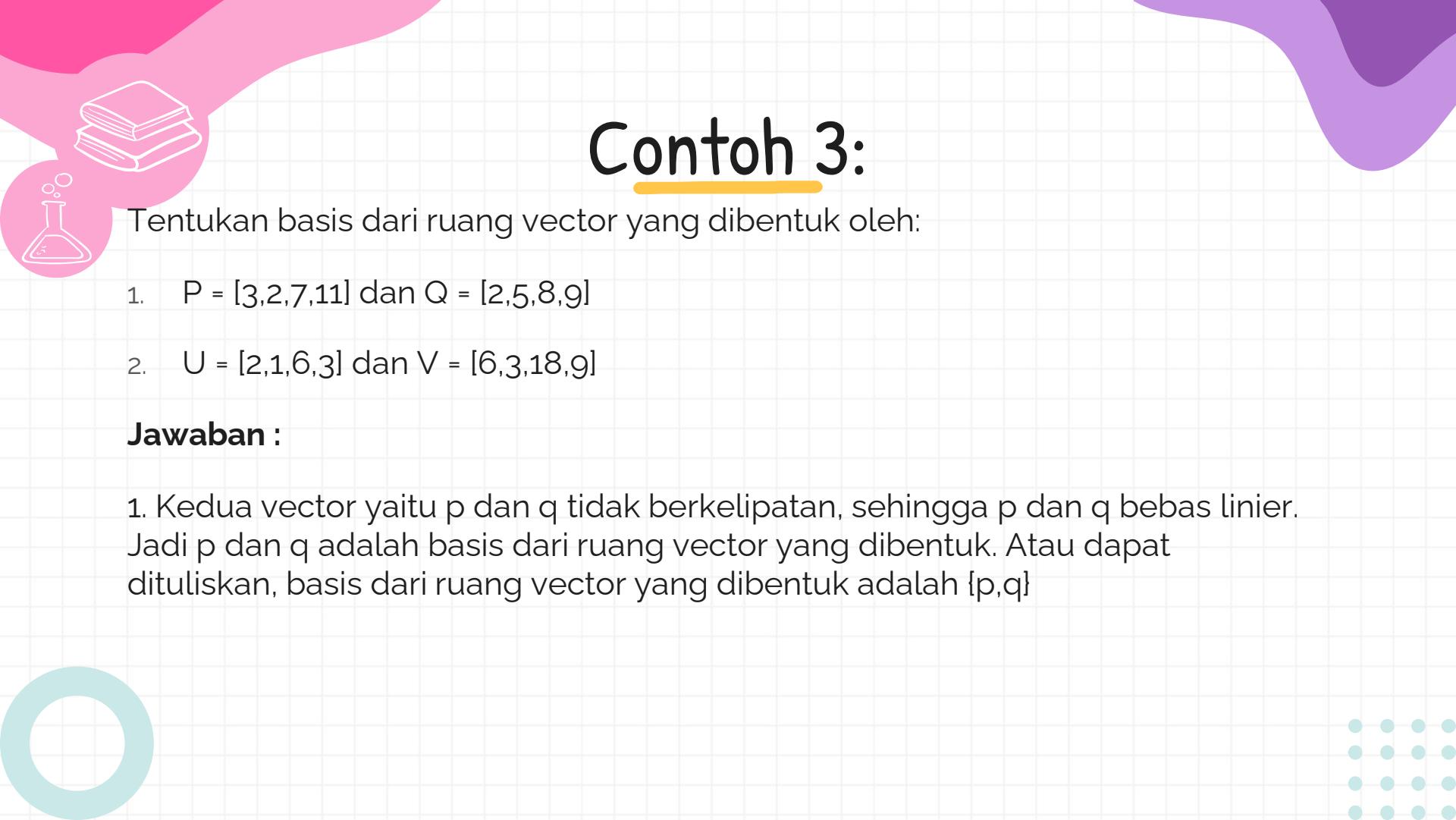
Setelah itu mencari determinan

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Lalu kalikan dari atas kebawah dan bawah keatas

$$= 24+6+24-18-8-24 = 4$$

Karena determinan tidak sama dengan 0 maka s merupakan basis untuk \mathbb{R}^3



Contoh 3:

Tentukan basis dari ruang vector yang dibentuk oleh:

1. $P = [3,2,7,11]$ dan $Q = [2,5,8,9]$
2. $U = [2,1,6,3]$ dan $V = [6,3,18,9]$

Jawaban :

1. Kedua vector yaitu p dan q tidak berkelipatan, sehingga p dan q bebas linier. Jadi p dan q adalah basis dari ruang vector yang dibentuk. Atau dapat dituliskan, basis dari ruang vector yang dibentuk adalah $\{p,q\}$



Lanjutan:

2. Kedua vector berkelipatan ($v=3u$), sehingga keduanya merupakan vector yang saling bergantung linier. Vektor u maupun $v \neq 0$, jadi keduanya merupakan sistem pembentuk yang bebas linier. Jadi basis dari ruang vector tersebut adalah $\{u\}$ atau $\{v\}$



Contoh 4:

Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari SPL homogen

$$x + y + z + w = 0$$

$$-x + 2y - w = 0$$

Pembahasan :

Menentukan basis dan dimensi ruang solusi dari SPL homogen

$$x + y + z + w = 0$$

$$-x + 2y - w = 0$$

Kita dapat menyatakan sistem ini dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lanjutan:

Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yang dapat direduksi menjadi eselon baris tereduksi sebagai berikut :

$$b_1 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} - b_2 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks yang terakhir kita memiliki $w = -x - \frac{2}{3}z$ dan $y = -\frac{1}{3}z$.

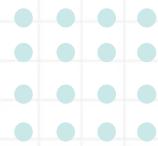
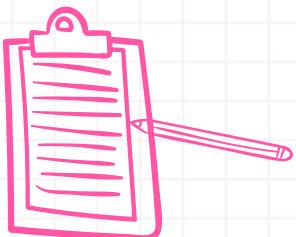
Karena nilai x dapat ditetapkan dengan sembarang nilai s dan nilai z dapat ditetapkan dengan sembarang nilai t , maka terdapat tak terhingga banyaknya pemecahan yang membentuk ruang solusi SPL yaitu :

$$\left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - \frac{2}{3}t \\ s \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}t \right\}$$

Lanjutan:

yang menunjukkan bahwa vektor vektor $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ merentang ruang solusi tersebut.

Karena v_1 dan v_2 tidak saling berkelipatan satu sama lain maka kedua vektor ini saling bebas bebas linear. Jadi $\{v_1, v_2\}$ adalah basis bagi ruang solusi SPL yang dimaksud yang berdimensi 2.



Contoh 5:

Kombinasi Linear

$$X = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix}, U = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}, V = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix}$$



Apakah U dan V merupakan kombinasi Linear X ?

$$X = K_1 U + K_2 V$$

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lalu kalikan K_1 dengan yang didalam kurung lalu, begitu juga dengan K_2

$$\begin{array}{rcl} 2 K_1 + & K_2 & = 4 \\ 4 K_1 - & K_2 & = 2 \end{array}$$

Lanjutan:

$$3K_2 = 6$$

$$K_2 = \frac{6}{3}$$

$$K_2 = 2$$

Lalu substitusikan hasil dari $K_2 = 2$ ke $2K_1 + K_2 = 4$

Jadi hasilnya :

$$2K_1 + 2 = 4$$

$$2K_1 = 2$$

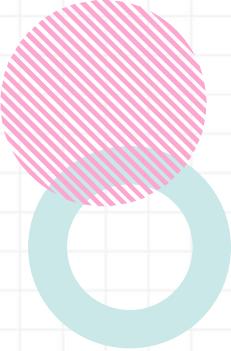
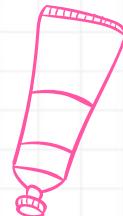
$$K_1 = 1$$

Setelah itu,

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4-2 \\ 0+6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jadi untuk U dan V merupakan sebuah kombinasi Linear dari X



Terima Kasih



Apakah ada pertanyaan?

