Kelompok 8:

1. Nurdin	(19102249)
2. Fahri Rizmawan	(19102138)
3. Maldini Pawa Gonzalez	(19102280)
4. Hersa Dwi Ikhsanti	(19102101)
5. Adelia Sannomiya	(19102064)

CONTOH SOAL: BASIS DAN DIMENSI

BASIS DAN DIMENSI

Definisi :

Basis : suatu ukuran tertentu yang menyatakan komponen dari sebuah vector.

Dimensi biasanya dihubungkan dengan ruang, misalnya garis adalah ruang dengan dimensi 1, bidang adalah ruang dengan dimensi 2 dan seterusnya.

Contoh 1:

1

$U = (1, 2, 3)$ $V = (3, 2, 3)$ $W = (-1, 2, 3)$
Apakah s bebas linier jika $s = (u, v, w)$ di R^3

Jawab :

. $K_1 U_1 + K_2 V + K_3 W = 0$

$K_1 (1, 2, 1) + K_2 (3, 2, 3) + K_3 (-1, 2, -5) = 0$

$K_1 + 3K_2 - K_3 = 0$
$2K_1 + 2K_2 + 2K_3 = 0$
$K_1 + 3K_2 - 5K_3 = 0$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{matrix} \quad \text{Determinan}$$

jika det = 0 bebas linier / tidak bebas linier

jika det $\neq$ 0 bebas linier

$$
\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}
$$

$= -10 + 6 - 6 + 2 + 6 + 30$

$= -32$

$D = -32$

Contoh 2:

Misalkan s = {u_1, u_2, u_3} dimana $u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $u_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ apakah s merupakan basis untuk R^3?

Jawab:
$K_1.u_1 + K_2.u_2 + K_3.u_3 = 0$
Maka hasilnya :

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

Lalu kita kalikan, dan akan menghasilkan system persamaan linier

$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$
$4k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0$
$3k_1 + 2k_2 + 6k_3 = 0$

Lanjutan:

Setelah itu mencari determinan

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

Lalu kalikan dari atas kebawah dan bawah keatas

= 24+6+24-18-8-24 = 4

Karena determinan tidak sama dengan 0 maka s merupakan basis untuk R^3

Contoh 3:

Tentukan basis dari ruang vector yang dibentuk oleh:

1. P = [3,2,7,11] dan Q = [2,5,8,9]
2. U = [2,1,6,3] dan V = [6,3,18,9]

Jawaban :

1. Kedua vector yaitu p dan q tidak berkelipatan, sehingga p dan q bebas linier. Jadi p dan q adalah basis dari ruang vector yang dibentuk. Atau dapat dituliskan, basis dari ruang vector yang dibentuk adalah {p,q}

Lanjutan:

2. Kedua vector berkelipatan ($v=3u$), sehingga keduanya merupakan vector yang saling bergantung linier. Vektor u maupun $v \neq 0$, jadi keduanya merupakan system pembentuk yang bebas linier. Jadi basis dari ruang vector tersebut adalah {u} atau {v}

Contoh 4:

Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari SPL homogen

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ -x + 2y - w &= 0 \end{aligned}$$

Pembahasan :

Menentukan basis dan dimensi ruang solusi dari SPL homogen

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ -x + 2y - w &= 0 \end{aligned}$$

Kita dapat menyatakan sistem ini dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lanjutan:

Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yang dapat direduksi menjadi eselon baris tereduksi sebagai berikut :

$$b_1 + b_2 \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{3} b_2 \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \text{-} b_2 + b_1 \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks yang terakhir kita memiliki $w = -x - \frac{2}{3}\ z$ dan $y = -\frac{1}{3}\ z$.

Karena nilai x dapat ditetapkan dengan sembarang nilai s dan nilai z dapat ditetapkan dengan sembarang nilai t, maka terdapat tak terhingga banyaknya pemecahan yang membentuk ruang solusi SPL yaitu :

$$\left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \ -\frac{2}{3}t \\ s \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lanjutan:

yang menunjukkan bahwa vektor vektor $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ merentang ruang solusi tersebut.

Karena v_1 dan v_2 tidak saling berkelipatan satu sama lain maka kedua vektor ini saling bebas bebas linear. Jadi $\{v_1, v_2\}$ adalah basis bagi ruang solusi SPL yang dimaksud yang berdimensi 2.

Contoh 5:

Kombinasi Linear

$$X = \begin{vmatrix}4\\2\\6\end{vmatrix},\ U = \begin{vmatrix}2\\4\\0\end{vmatrix},\ V = \begin{vmatrix}1\\-1\\3\end{vmatrix}$$

Apakah U dan V merupakan kombinasi Linear X ?

$X = K_1\,U + K_2\,V$

$$\begin{vmatrix}4\\2\\6\end{vmatrix} = K_1 \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Lalu kalikan K_1 dengan yang didalam kurung lalu, begitu juga dengan K_2

$2\,K_1 + K_2 = 4$

$4\,K_1 - K_2 = 2$

Lanjutan:

$3K_2 = 6$

$K_2 = \frac{6}{3}$

$K_2 = 2$

Lalu substitusikan hasil dari $K_2 = 2$ ke $2K_1 + K_2 = 4$

Jadi hasilnya :

$2K_1 + 2 = 4$

$2K_1 = 2$

$K_1 = 1$

Setelah itu,

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4-2 \\ 0+6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jadi untuk U dan V merupakan sebuah kombinasi Linear dari X

Terima Kasih

Apakah ada pertanyaan?