

# KELOMPOK X EMPAT

ALJABAR  
&  
MATRIX

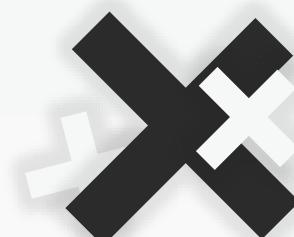
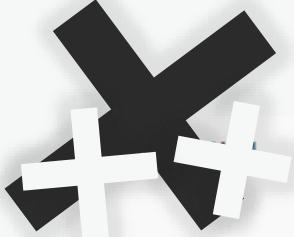
“KOMBINASI LINEAR”  
“BEBAS LINEAR”



- [ M A T E R I P E R T A M A ] -

## Kombinasi Linear

Salah satu materi yang penting dalam ruang vektor adalah kombinasi linear. Disebut penting, karena kombinasi linear digunakan dalam mendefinisikan istilah lain, seperti himpunan bebas linear dan bergantung linear serta himpunan yang membangun ruang vektor. Oleh karena itu, kita akan mengulas mengenai materi dan contoh soal kombinasi linear.



Misalkan  $V$  adalah ruang vektor dan  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in V$ . Sebuah vektor  $\vec{w}$  dalam  $V$  disebut kombinasi linear dari  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ , jika  $\vec{w}$  dapat ditulis dalam bentuk:

$$\vec{w} = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_r \vec{v}_r$$

dimana  $k_1, k_2, \dots, k_r$  merupakan skalar. Skalar-skalar ini disebut koefisien dari kombinasi linear.

## DEFINISI :

Misalkan  $V$  adalah ruang vektor dan  $v_1, v_2$  adalah dua vektor dalam  $V$ . Pada  $V$  berlaku operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Artinya, kita dapat mengalikan  $v_1$  dan  $v_2$  dengan skalar, sebutlah  $k$  dan  $m$ , sehingga terbentuk vektor  $kv_1$  dan  $mv_2$ . Dengan menjumlahkan kedua vektor, diperoleh  $kv_1+mv_2$ . Nah, vektor ini disebut sebagai kombinasi linear dari  $v_1$  dan  $v_2$ . Sebagai contoh, salah satu kombinasi linear dari  $(1,2)$  dan  $(0, 3)$  adalah  $2 \cdot (1, 2) - 1 \cdot (0, 3) = (2, 1)$ . Kombinasi linear lainnya adalah  $0 \cdot (1,2) + 2 \cdot (0,3) = (0,6)$ .

Berdasarkan definisi, vektor  $w$  disebut kombinasi linear dari  $v_1, v_2, \dots, v_r$  jika kita dapat menemukan skalar-skalar  $k_1, k_2, \dots, k_r$  yang memenuhi persamaan  $vektor w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$ . Dari persamaan di atas, akan diperoleh sebuah sistem persamaan linear. Keberadaan solusi dari sistem ini menentukan apakah  $w$  adalah kombinasi linear dari  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . Karena itu, pastikan teman-teman mengingat prosedur untuk menentukan solusi sistem persamaan linear.

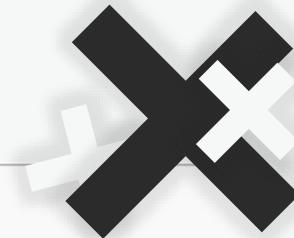


- [ MATERI KEDUA ] -

## Bebas Linear

Bebas linear, atau dalam beberapa literatur disebut bebas linier, merupakan syarat yang harus dipenuhi oleh suatu himpunan untuk menjadi basis ruang vektor. Selain bebas linear, syarat lainnya adalah membangun ruang vektor. Oleh karena itu, penting bagi kita untuk belajar mengenai himpunan bebas linear.





## DEFINISI

Misalkan  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$  adalah himpunan yang terdiri dari dua atau lebih vektor pada ruang vektor  $V$ . Himpunan  $S$  dikatakan bebas linear, jika tidak ada vektor pada  $S$  yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Himpunan yang tidak bebas linear dikatakan bergantung linear.

## DEFINISI :

Untuk himpunan  $S$  yang hanya terdiri dari satu vektor, himpunan  $S$  bebas linear jika dan hanya jika vektor tersebut tak nol.

Definisi di atas cukup efisien untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan bergantung linear. Cukup dengan menemukan satu vektor yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya, maka himpunan tersebut sudah pasti bergantung linear. Sebagai contoh, misalkan

$S=\{(1,2),(2,3),(-2,1),(4,3),(3,5)\}$ . Karena  $(3,5)$  dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari  $(1,2)$  dan  $(2,3)$ , maka himpunan tersebut bergantung linear.

Namun, bagaimana dengan  
 $S=\{(1,2),(2,3),(-2,1),(4,3)\}$ ? Sebagai bocoran, himpunan ini juga bergantung linear. Namun, kita tidak dapat melihat secara langsung vektor mana yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya.

# TEOREMA UNTUK HIMPUNAN BEBAS LINEAR

## TEOREMA 1

### TEOREMA 1

Misalkan  $S$  adalah himpunan yang beranggotakan dua vektor. Himpunan  $S$  bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor yang merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya.



Bukti. Misalkan  $S=\{v_1, v_2\}$ . Teorema ini berbentuk biimplikasi, sehingga perlu dibuktikan dari dua arah.

Dari Kiri. Diketahui  $S$  bebas linear. Berdasarkan definisi, tidak ada vektor dalam  $S$  yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor lainnya. Artinya, tidak ada skalar  $k$  dan  $m$  yang memenuhi  $v_1=kv_2$  dan  $v_2=mv_1$ . Dengan demikian,  $v_1$  bukan kelipatan skalar dari  $v_2$  dan begitupun sebaliknya. Terbukti.

Dari Kanan. Diketahui bahwa tidak ada vektor dalam  $S$  yang merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya. Artinya tidak ada skalar  $k$  dan  $m$  yang memenuhi  $v_1=kv_2$  dan  $v_2=mv_1$ . Dengan kata lain,  $v_1$  bukan kombinasi linear dari  $v_2$  dan begitupun sebaliknya. Berdasarkan definisi,  $S$  adalah himpunan bebas linear. Terbukti.

## TEOREMA 2

### TEOREMA 2

Himpunan berhingga yang memuat  $\vec{0}$  adalah bergantung linear.

Bukti. Misalkan  $S$  adalah himpunan berhingga yang terdiri dari  $r+1$  elemen, dengan  $S=\{v_1, v_2, \dots, v_r, \vec{0}\}$ . Perhatikan bahwa  $\vec{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_r$ . Artinya,  $\vec{0}$  dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Berdasarkan definisi,  $S$  bergantung linear. Terbukti.

# TEOREMA UNTUK HIMPUNAN BEBAS LINEAR

## TEOREMA 3

### TEOREMA 3

Misalkan  $S$  adalah himpunan tak kosong dalam ruang vektor  $V$ , dengan  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ .

Himpunan  $S$  bebas linear jika dan hanya jika persamaan vektor

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_r \vec{v}_r = \vec{0}$$

hanya mempunyai solusi trivial, yaitu  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .

*Bukti.* Teorema di atas berbentuk biimplikasi, sehingga kita perlu membuktikannya dalam dua arah.

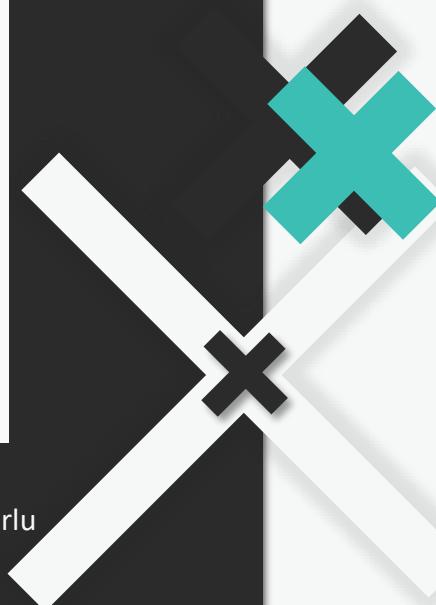
*Dari Kiri.* Kita bagi menjadi dua kasus, berdasarkan banyak anggota dari  $S$ . Untuk kasus pertama, kita misalkan  $S$  hanya beranggotakan satu vektor, sebutlah  $v$ . Karena  $S$  bebas linear, maka haruslah  $v \neq 0$ . Perhatikan bahwa persamaan vektor  $kv = 0$  hanya dipenuhi oleh skalar  $k = 0$ . Terbukti.

Untuk kasus kedua, kita misalkan  $S$  beranggotakan lebih dari satu vektor, dengan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ,  $r \geq 2$ . Kita akan menggunakan bukti dengan kontradiksi.

Andaikan persamaan vector:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = \vec{0}$$

mempunyai solusi non trivial. Artinya, di antara  $k_1, k_2, \dots, k_r$  terdapat skalar tak nol. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $k_1 \neq 0$ .



Karena  $k_1 \neq 0$ , maka persamaan (1) dapat ditulis sebagai

$$\vec{v}_1 + \frac{k_2}{k_1} \vec{v}_2 + \dots + \frac{k_r}{k_1} \vec{v}_r = \vec{0}$$

Yang berakibat,

$$\vec{v}_1 = \left( -\frac{k_2}{k_1} \right) \vec{v}_2 + \dots + \left( -\frac{k_r}{k_1} \right) \vec{v}_r$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa  $v_1$  dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Berdasarkan definisi, himpunan  $S$  bergantung linear. Kontradiksi. Jadi, persamaan (1) hanya mempunyai solusi trivial.

*Dari Kanan.* Kita bagi menjadi dua kasus, berdasarkan banyak anggota dari  $S$ . Untuk kasus pertama, kita misalkan  $S$  hanya beranggotakan satu vektor, sebutlah  $v$ . Diketahui persamaan  $kv=0$  hanya dipenuhi oleh  $k = 0$ , sehingga haruslah  $v \neq 0$ . Akibatnya, himpunan  $S$  bebas linear. Terbukti.

# TEOREMA UNTUK HIMPUNAN BEBAS LINEAR

## TEOREMA 3

Untuk kasus kedua, kita misalkan  $S$  beranggotakan lebih dari satu vektor, dengan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ,  $r \geq 2$ . Kita akan menggunakan bukti dengan kontradiksi.

Andaikan  $S$  bergantung linear. Berdasarkan definisi, terdapat anggota  $S$  yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $v_1 \in S$  adalah vektor yang demikian, sehingga

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_r v_r, \text{ untuk suatu skalar } c_2, c_3, \dots, c_r$$

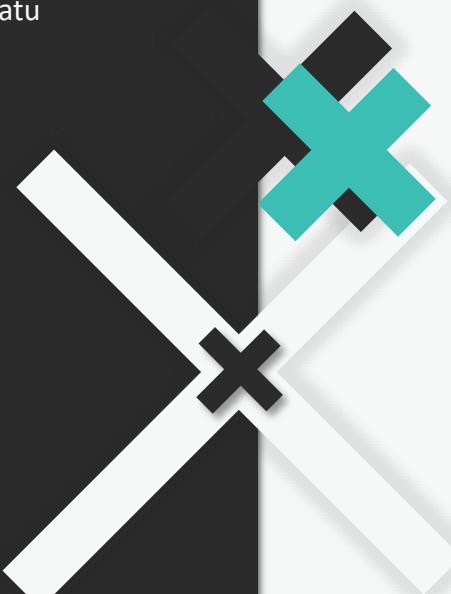
Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$1v_1 + (-c_2) v_2 + \dots + (-c_r) v_r = 0$$

Akibatnya, persamaan vector

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

dipenuhi oleh  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -c_2$ , ...,  $k_r = -c_r$ . Dengan kata lain, terdapat solusi non trivial. Kontradiksi. Jadi,  $S$  adalah himpunan bebas linear. Terbukti.





THANKS FOR YOUR  
ATTENTION!

ANY QUESTIONS??

SELESAI

- [ P E N U T U P ] -

# NAMA-NAMA ANGGOTA KELOMPOK



**Andriawan Firmansyah**  
**(19102065)**



**Ulinda Pangayom**  
**(19102182)**



**Juliar Ma'arif**  
**(19102219)**



**Adi Wijaya**  
**(19102099)**



**Imam Ghozali**  
**(19102146)**