Kelompok 4 :

-Andriawan Firmansyah - 19102065
-Ulinda Pangayom - 19102182
-Juliar Ma'Arif - 19102219
-Adi Wijaya - 19102099
-Imam Ghozali - 19102146

Presentasi :
>Kombinasi Linear
>Bebas Linear

Definisi kombinasi linear

sebuah vektor $\bar{u}$

dinamakan **kombinasi linear** dari vektor - vektor : $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$ .... $\bar{v}_n$

jika vektor - vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk : $\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \; ... \; + k_n\bar{v}_n$

dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar Riil.

contoh

Misal u = (2, 4, 0), dan v = (1, -1, 3)

adalah vektor-vektor di R3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor diatas

a. a =(4, 2, 6)
b. b =(1, 5, 6)
c. c =(0, 0, 0)

Jawab :

a. Tuliskan $k_1\overline{u} + k_2\overline{v} = \overline{a}$

akan diperiksa apakah k_1, k_2,

sehingga kesamaan tersebut dipenuhi.

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini dapat ditulis menjadi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jawab :

dengan OBE, diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian,

$\overline{a}$ merupakan kombinasi linear dari ve $\overline{u}$ or $\overline{v}$ n

atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

Jawab :

b. Tulis : $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Jawab :

dengan OBE dapat kita peroleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & ½ & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & ½ & ½ \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah tidak konsisten (tidak mempunyai solusi).
Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi
➔ $\mathbf{b}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari **u** dan **v**

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$,

maka dapat ditulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear

dari vektor apapun.

Definisi membangun/ merentang

Himpunan vektor

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$$

dikatakan **membangun** suatu ruang vektor *V* jika setiap vektor pada *V* selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor – vektor di *S*.

Contoh :

Tentukan apakah

$\bar{v}_1$ = (1, 1, 2),

$\bar{v}_2$ = (1, 0, 1), dan

$\bar{v}_3$ = (2, 1, 3)

Membangun v?

Jawab :

Ambil sembarang vektor di R^2

misalkan :

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Tulis :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Syarat agar dapat dikatakan kombinasi linear
SPL tersebut harus mempunyai solusi (konsisten)

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & u1 \\ 0 & -1 & -1 & u2-u1 \\ 0 & 0 & 0 & u3-u1-u2 \end{bmatrix}$$

Agar SPL itu konsisten **haruslah** $u_3 - u_2 - u_1 = 0$
Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang (unsur – unsurnya bebas, tak bersyarat).

Dengan demikian vektor – vektor tersebut **tidak membangun** R^3 .

Definisi bebas linear

Misalkan $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$

adalah himpunan vektor diruang vektor *V*

S dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*)

jika $k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_1 + \ldots + k_n\bar{u}_n = \bar{0}$

$k_1 = 0$, $k_2 = 0$,...., $k_n = 0$

Jika solusinya tidak tunggal, maka S kita namakan himpunan tak bebas linear (*linearly dependent*).

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (-1,\ 3,\ 2)$ dan $\bar{a} = (1,\ 1,\ -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab :

Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

Atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$k_1 = 0$, dan $k_2 = 0$.

Ini berarti ū dan ā adalah saling bebas linear.

Contoh :

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

Jawab :

Tulis

$$\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$$

Atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 mrp solusi tak hingga banyak

Jadi

$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

Basis

Jika *V* adalah sembarang ruang vektor

dan $S = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots , \bar{u}_n \}$ merupakan

himpunan berhingga dari vektor – vektor di *V*,

maka ***S*** **dinamakan basis bagi *V***

Jika kedua syarat berikut dipenuhi :

- S membangun V
- S bebas linear

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran 2 x 2

Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{pmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks koefisiennya (MK) = 48

- *det*(MK) $\neq$ 0 ➔ SPL memiliki solusi
  untuk sebarang nilai a,b,c,d,

  Jadi, M membangun M2 x 2

- Ketika *a = 0*, *b = 0*, *c = 0*, *d = 0*,

  det(MK) $\neq$ 0 ➔SPL homogen punya solusi tunggal. Jadi, M bebas linear.

Karena M bebas linear dan membangun $M_{2 \times 2}$
maka M merupakan basis bagi $M_{2 \times 2}$.

Karena

Basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal.

Contoh :

Untuk ruang vektor dari $M_{2 \times 2}$, himpunan matriks :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

juga merupakan basisnya.