

Homologische Algebra

Tim Jaschik

May 13, 2025

ABSTRACT. – ...

Contents

1	Kategorien und Funktoren in HA	3
1.1	Definition	3
1.2	Example	3
1.3	Study	3
2	Moduln in HA	4
2.1	Definition	4
2.2	Theorem	4
3	Tensorprodukt in HA	4
4	Abelsche Kategorien	4
4.1	Definition	4
4.2	Example	4
4.3	Proposition	4
4.4	Remark	4
4.5	Study	4
5	Homologie Funktor in HA	5
5.1	Definition	5
5.2	Example	5
5.3	Proposition	5
5.4	Theorem	5
5.5	Remark	5
5.6	Study	5
6	Komplexe in HA	6
6.1	Definition	6
6.2	Proposition	6
6.3	Study	6
7	Hilfsslemma für Diagramme der HA	7

7.1	Lemma	7
8	Exaktheit von Sequenzen	7
9	Splitting	7
9.1	Definition	7
9.2	Lemma	7
10	Kategorische Formulierung der Homologietheorie	7
10.1	Definition	7
11	Homologie mit Koeffizienten	7

1 Kategorien und Funktoren in HA

1.1 Definition

1.2 Example

1.3 Study

Study HA-1-01-22 (3 Grundbegriffe: Kat, Funk, naat Trafo).

Study HA-1-01-23 (Von (kleinen) Funktorkategorien zur Kategorie der Komplexe in der Kategorie der Abelschen Gruppen).

Example HA-1-01-2 (Exa Kategorien).

Example HA-1-01-20 (Exa Kleine Funktorenkategorie: Diag / Seq).

Example HA-1-01-5 (Exa Volle Unterkategorie).

Example HA-1-01-7 (Hom-Funktor).

Definition HA-1-01-1 (Kategorie).

Definition HA-1-01-10 (Weg in Kategorie).

Definition HA-1-01-11 (Gelabelter Weg).

Definition HA-1-01-12 (Einfacher Weg).

Definition HA-1-01-13 (Kommutatives Diagramm).

Definition HA-1-01-14 (Kontravariante Funktoren).

Definition HA-1-01-15 (Isomorphie in Kategorie).

Definition HA-1-01-16 (Natürliche Transformation).

Definition HA-1-01-17 (Natürlicher Isomorphismus).

Definition HA-1-01-18 (Komposition von Natürlichen Transformationen).

Definition HA-1-01-19 ((Kleine) Funktorenkategorie).

Definition HA-1-01-21 (Komplex und Ketten-Abbildung).

Definition HA-1-01-3 (Unterkategorie).

Definition HA-1-01-4 (Volle Unterkategorie).

Definition HA-1-01-6 (Funktor).

Definition HA-1-01-8 (Sequenz in Kategorie).

Definition HA-1-01-9 (Diagramm in Kategorie).

2 Moduln in HA

2.1 Definition

2.2 Theorem

Theorem HA-1-02-5 (ISO-Sätze).

Definition HA-1-02-1 (Links/Rechts Moduln).

Definition HA-1-02-2 (Abelsche Gruppe).

Definition HA-1-02-4 (Kern / Im / CoKern für R-Hom).

Definition HA-1-02-6 (Freie R-Moduln).

Definition HA-1-02-7 (Freie Abelsche Gruppe).

3 Tensorprodukt in HA

4 Abelsche Kategorien

4.1 Definition

4.2 Example

4.3 Proposition

4.4 Remark

4.5 Study

Study HA-1-04-20 (Herleitung abelscher Kategorien und additiver Funktoren als allg. Rahmen für Komplexe in abelschen Kategorien).

Remark HA-1-04-15 (Exaktheit in abelschen Kategorien durch Subobjekt in Gadgets).

Proposition HA-1-04-17 (Funktorkategorie zu abelschen Kategorie ist abelsch).

Proposition HA-1-04-8 (Beziehung Monic / Epic und ker / cokern in additiven Kategorien).

Example HA-1-04-12 (Exa abelsche Kategorie: (Volle Unterkategorien von) Abelsche Gruppen).

Example HA-1-04-14 (Exa Exakte Kategorie).

Definition HA-1-04-1 (Additive Kategorie).

Definition HA-1-04-10 (Quotienten-Objekt in additiven Kategorien).

Definition HA-1-04-11 (Abelsche Kategorie).

Definition HA-1-04-13 (Exakte Kategorie).

Definition HA-1-04-16 (Abelsche Unterkategorie).

Definition HA-1-04-18 (Projektive Objekte in abelschen Kategorien).

Definition HA-1-04-19 (Injektive Objekte in abelschen Kategorien).

Definition HA-1-04-2 (Additiver Funktor von additiven Kategorien).

Definition HA-1-04-3 (Direkte Summe in additiven Kategorien).

Definition HA-1-04-4 (Monomorphismen in Kategorien).

Definition HA-1-04-5 (Epimorphismen in Kategorien).

Definition HA-1-04-6 (Monics / Epics in additiven Kategorien).

Definition HA-1-04-7 (Ker / Coker in additiven Kategorien).

Definition HA-1-04-9 (Subgadget von Objekten in additiven Kategorien).

5 Homologie Funktor in HA

5.1 Definition

5.2 Example

5.3 Proposition

5.4 Theorem

5.5 Remark

5.6 Study

Study HA-1-05-26 (Einführung der Homologie-Funktoren).

Study HA-1-05-27 ((Natürlicher) Zusammenhangs-Homomorphismus).

Study HA-1-05-28 (Interpretation des Zusammenhangs-Isomorphismus via Arrow Kategorie).

Study HA-1-05-29 (Was ist die Singuläre Homologie Theorie).

Remark HA-1-05-1 (Exakte Sequenzen sind Komplexe).

Remark HA-1-05-18 (Interpretation des Zusammenhangs-Homomorphismus).

Remark HA-1-05-2 (Kurze Exakte Sequenzen zu Komplexen erweitern).

Remark HA-1-05-7 (Homologie als Abweichung von Exaktheit eines Komplexes).

Theorem HA-1-05-11 (Zu kurzen exakte Sequenz $(K, K\text{Abb})$ in abel. Kategorie der Komplexe existiert ein Zusammenhangs-Homomorphismus).

Theorem HA-1-05-13 (Kurze Exakte Sequenz in Kategorie der Komplexe induziert lange exakte Homologie-Sequenz).

Theorem HA-1-05-15 (Zusammenhangs-Homomorphismus zu kurzen exakten Sequenzen in Kategorie der Komplexe ist natürlich).

Proposition HA-1-05-22 (Homotope Ketten Abbildungen induzieren gleiche Homologie Abbildungen).

Proposition HA-1-05-25 (Kontrahierbare Komplexe sind azyklisch).

Proposition HA-1-05-9 (n-te Homologie ist additiver Funktor).

Example HA-1-05-20 (Exa Grad einer Abbildung zwischen Komplexen).

Example HA-1-05-8 (Fundamentale Exakte Sequenzen für Komplexe: Zyklen Ränder und Homologie).

Definition HA-1-05-17 (Arrow Kategorie).

Definition HA-1-05-19 (Grad einer Abbildung zwischen Komplexen).

Definition HA-1-05-21 (Homotope Ketten Abbildungen (Null-Homotopie)).

Definition HA-1-05-24 (Kontrahierbare Komplexe).

Definition HA-1-05-3 (Sequenzen von Objekte).

Definition HA-1-05-4 (Positive / Negative Komplexe).

Definition HA-1-05-5 (Ketten / Zyklen / Ränder in Komplexen).

Definition HA-1-05-6 (n-te Homologie in Komplexen).

6 Komplexe in HA

6.1 Definition

6.2 Proposition

6.3 Study

Study HA-1-06-13 (Basics der allg. Komplexe in abelschen Kategorien und die Kategorie der Komplexe).

Proposition HA-1-06-12 (Kettenabbildung in Quotienten Komplex durch natürliche Abbildung).

Proposition HA-1-06-5 (Kategorie der Komplexe abelsch, falls Kategorie abelsch).

Definition HA-1-06-1 (Komplex in abelschen Kategorien).

Definition HA-1-06-10 (Kurze Exakte Sequenzen von Komplexen und Ketten Abbildungen).

Definition HA-1-06-11 (Quotienten Komplex).

Definition HA-1-06-2 (Ketten Abbildung zwischen Komplexen in abelschen Kategorien).

Definition HA-1-06-3 (Kategorie der Komplexe in abelschen Kategorien).

Definition HA-1-06-4 (Unterkomplex in abelschen Kategorien).

Definition HA-1-06-7 (Isomorphie in Kategorie der Komplexe).

Definition HA-1-06-8 (Direkte Summe von Komplexen).

Definition HA-1-06-9 (Exaktheit von Sequenze von Komplexen und Ketten Abbildungen).

7 Hilftslemma für Diagramme der HA

7.1 Lemma

Lemma HA-1-07-1 (Basics für Exaktheit von Sequenzen).

Lemma HA-1-07-2 (Kurze Exakte Sequenzen Basics).

Lemma HA-1-07-3 (Links/Rechts Vervollständigung von 03-03 Komm Exa).

Lemma HA-1-07-4 (5-Lemma).

Lemma HA-1-07-5 (030-030 vert ISO: oben exa gdw unten exa).

Lemma HA-1-07-6 (3x3 Lemma).

Lemma HA-1-07-7 (Schlagstock Lemma).

Lemma HA-1-07-8 (Schlangen Lemma).

8 Exaktheit von Sequenzen

9 Splitting

9.1 Definition

9.2 Lemma

Lemma HA-1-10-2 (Splitting Cases).

Definition HA-1-10-1 (Splitting Basics).

10 Kategorische Formulierung der Homologietheorie

10.1 Definition

Definition HA-1-12-1 (Eilenberg-Stennrod Axiom).

11 Homologie mit Koeffizienten