

Mein Titel

Tim Jaschik

May 22, 2025

ABSTRACT. – Kurze Beschreibung . . .

Contents

Literatur:

- (1) Gallot, Hulin, Lafontaine: Riemannian Geometry Hauptreferenz für die Vorlesung.
- (2) Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis
- (3) Petersen: Riemannian Geometry
- (4) Gromoll, Klingenberg, Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen
- (5) Sachs, Wu: General relativity for mathematicians

KAPITEL 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1. Untermannigfaltigkeiten in Euklidischen Räumen

Definition 1.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heisst n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^N$ gibt so dass

$$U \cap M = f^{-1}(V \cap \mathbb{R}^n).$$

Die Dimension von M ist n , die Kodimension ist $N - n$. Untermannigfaltigkeiten der Dimension 2 heissen Flächen, Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 heissen Hyperflächen.

BEISPIEL

- (1) Die n -Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

- (2)

$$H_c^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 - c = 0\}$$

ist für $c < 0$ der einschalige Hyperboloid; für $c > 0$ der zweischalige Hyperboloid; und für $c = 0$ keine Untermannigfaltigkeit (Singularität im Punkt $(0, \dots, 0)$).

- (3) Der n -Torus

$$\begin{aligned} T^n &= \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = \dots = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\} \end{aligned}$$

ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{2n} .

- (4)

$$SO(n) = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A^t A = Id, \det A = 1\}$$

ist eine $\binom{n}{2}$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit in $M(n, n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Satz 1.2. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) M ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^N .
- (2) Für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ und eine Submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ mit

$$U \cap M = f^{-1}(0)$$

(3) Für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung V von p in \mathbb{R}^N , eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ mit folgenden Eigenschaften: ψ bildet U bijektiv auf $M \cap V$ ab, $\psi^{-1} : M \cap V \rightarrow U$ ist stetig und $d\psi|_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist injektiv für alle $x \in U$.

Bemerkung: in (2) bedeutet Submersion, dass $df|_x : T_x U = \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^{N-n} = \mathbb{R}^{N-n}$ surjektiv ist für alle $x \in U$.

In Beispiel (1) kann man $f(x) = x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$ wählen. Dann ist $df|_x = 2(x_0, \dots, x_n)$. Ist $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, so ist $df|_x$ für alle $x \in U$ surjektiv. In Beispiel (2) wählt man $f(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 - c$, in Beispiel (3) $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1)$. Beispiel (4) ist ÜA.

2. Glatte Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1. Sei M ein topologischer Raum. Wir setzen voraus, dass M Hausdorff ist, d.h. zu $p, q \in M, p \neq q$ existieren disjunkte offene Umgebungen. Weiterhin soll es eine abzählbare Basis der Topologie geben. Ein Atlas auf M ist gegeben durch

(1) Eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M .

(2) Eine Familie von Karten $\phi_i : U_i \rightarrow W_i \subset \mathbb{R}^n$, die Homöomorphismen sind und die Eigenschaft haben, dass $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ Diffeomorphismen sind.

Definition 2.2. Zwei Atlanten $\{(U_i, \phi_i)\}, \{(V_j, \psi_j)\}$ heißen äquivalent, wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist.

Achtung: Es gibt Atlanten, die nicht äquivalent sind, z.B. auf der 7-dimensionalen Sphäre (exotische Sphären).

DEFINITION 2.3. Eine glatte Struktur auf einem Hausdorffschen topologischen Raum ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten. M , zusammen mit einer glatten Struktur, heisst glatte Mannigfaltigkeit.

Bemerkung: Setzt man in der Definition eines Atlanten zusätzlich voraus, dass die Abbildungen $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ orientierungserhaltende Diffeomorphismen sind (d.h. positive Jacobideterminante haben), so spricht man von einer orientierten Mannigfaltigkeit.

Definition 2.4. Eine Teilmenge M einer Mannigfaltigkeit N heisst Untermannigfaltigkeit falls es zu jedem $p \in M$ eine Karte (U, ϕ) von

N gibt mit $p \in U$ und so dass $\phi(U \cap M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist.

BEISPIEL

(1) Torus

$$T^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$$

Definiere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n})$. Dann ist $f(\mathbb{R}^n) = T^n$. Fixiere $x \in \mathbb{R}^n$ und setze $W := (x_1 - \pi, x_1 + \pi) \times \dots \times (x_n - \pi, x_n + \pi), U := f(W), \phi := (f|_W)^{-1}$. Dann ist (U, ϕ) eine Karte um $f(x)$.

Sind $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ zwei solcher Karten, die den Punkten $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ entsprechen, so ist $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ eine Translation auf jeder Zusammenhangskomponente von $\phi_1(U_1 \cap U_2)$, also differenzierbar. Der Torus ist daher eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

(2) Die n -Sphäre. Sei g_1 die stereographische Projektion vom Nordpol aus.

$$g_1 : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_0}$$

Entsprechend sei g_2 die stereographische Projektion vom Südpol aus:

$$g_2 : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_0}$$

Der Koordinatenwechsel $g_2 \circ g_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist durch $y \mapsto \frac{y}{\|y\|^2}$ gegeben, also ein Diffeomorphismus.

(3) Hyperboloid H^n hat einen Atlas mit einer Karte $f(x_0, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

(4) Projektiver Raum \mathbb{RP}^n . Definiere eine Äquivalenzrelation \sim auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x.$$

Der Quotientenraum

$$\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

heisst n -dimensionaler projektiver Raum. Äquivalent kann man $\mathbb{RP}^n = S^n / \{\pm 1\}$ definieren. Wir zeigen, dass \mathbb{RP}^n eine n dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Dazu werden $n + 1$ Karten (U_i, ϕ_i) wie folgt definiert. Setze

$$V_i := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}.$$

und $U_i := p(V_i)$, wobei $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Projektionsabbildung ist. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i : V_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\tilde{\phi}_i(x) = \tilde{\phi}_i(y)$, falls $x \sim y$. Also induziert $\tilde{\phi}_i$ eine Abbildung $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die inverse Abbildung erhält man durch

$$(y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1})$$

Die Koordinatenwechselabbildung ist daher wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \phi_j \circ \phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) &= \phi_j \circ p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1}) \\ &= \tilde{\phi}_j(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1}) \\ &= \left(\frac{y_0}{y_j}, \frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right) \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist \mathbb{RP}^n in der Tat eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

(5) Der n -dimensionale komplex-projektive Raum \mathbb{CP}^n . Definiere eine Äquivalenzrelation \sim auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : y = \lambda x$$

Der Quotientenraum

$$\mathbb{CP}^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

heisst n -dimensionaler komplex-projektiver Raum. Man kann analog zeigen, dass \mathbb{CP}^n eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (oder sogar eine komplexe n -dimensionale Mannigfaltigkeit) ist.

(6) Das Möbiusband. Sei $M := [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim$, wobei $(0, t) \sim (1, -t)$ für alle t . Dann ist M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sie ist nicht orientierbar.

Bemerkung: Die letzten 3 Beispiele zeigen, dass man auf natürliche Weise Mannigfaltigkeiten als Quotienten anderer Mannigfaltigkeiten gewinnen kann. Diese Quotienten sind dann im Allgemeinen nicht (oder zumindest nicht in kanonischer Weise) Untermannigfaltigkeiten in einem \mathbb{R}^N . Das ist einer der Gründe, warum man den Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit benötigt und nicht mit Untermannigfaltigkeiten auskommt.

3. Glatte Abbildungen und Vektorfelder

Definition 3.1. (1) Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten heisst glatt, falls für alle Koordinatensysteme (U, ϕ) von M und (V, ψ) von N die Abbildung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ glatt ist (dort wo sie definiert ist, nämlich auf $\phi(f^{-1}V) \subset \mathbb{R}^n$).

(2) Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ heisst Immersion (bzw. Submersion), wenn die Abbildungen $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ von oben Immersionen (bzw. Submersionen) sind, d.h. injektives (bzw. surjektives) Differential haben.

(3) Eine injektive Immersion heisst Einbettung.

(4) f heisst Diffeomorphismus, falls f eine Bijektion ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind.

Definition 3.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Tangentialvektor in p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $c : I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c \sim \bar{c}$ falls es ein Koordinatensystem (U, ϕ) um p gibt mit

$$(\phi \circ c)'(0) = (\phi \circ \bar{c})'(0)$$

Sei $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion, c eine glatte Kurve mit $c(0) = p$. Dann ist $(f \circ c)'(0)$ wohldefiniert, d.h. nur abhängig von der Äquivalenzklasse $X = [c]$. Wir schreiben $X(f) := (f \circ c)'(0)$. Das führt zu einer äquivalenten Definition von Tangentialvektoren wie folgt.

Sei $\mathcal{F}_p(M)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) , wobei U eine offene Umgebung von p ist und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Zwei solche Paare $(U, f), (\bar{U}, \bar{f})$ sind äquivalent, wenn es eine offene Umgebung $V \subset U \cap \bar{U}$ gibt mit $p \in V$ und $f|_V = \bar{f}|_V$.

Bemerkung: eine solche Äquivalenzklasse nennt man einen Keim in p . Die Menge der Keime ist offensichtlich ein Vektorraum über \mathbb{R} , sogar eine Algebra (d.h. man kann zwei Keime miteinander multiplizieren).

Definition 3.3. Ein Tangentenvektor in $p \in M$ ist eine Funktion $X : \mathcal{F}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ so dass

(1) X ist \mathbb{R} -linear, d.h. $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ für $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{F}_p(M)$.

(2) X erfüllt die Leibnizregel $X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

Es gibt eine dritte nützliche Definition von Tangentialvektoren.

Sei (U, ϕ) ein Koordinatensystem um p . Ist c eine glatte Kurve auf M mit $c(0) = p$, so ist $\phi \circ c$ eine Kurve in \mathbb{R}^n und $v := (\phi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^n$. Ist (V, ψ) ein anderes Koordinatensystem und $w := (\psi \circ c)'(0)$, dann ist

$$w = (\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ c)'(0) = d(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}(v)$$

DEFINITION 3.4. Ein Tangentenvektor in p ist eine Äquivalenzklasse von Tripeln $[(U, \phi, v)]$, wobei (U, ϕ) ein Koordinatensystem um p ist und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei sind zwei Tripel $(U, \phi, v), (V, \psi, w)$ äquivalent, falls $w = d(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}(v)$.

Die Menge der Tangentialvektoren in p wird mit $T_p M$ bezeichnet: der Tangentialraum in p . Mit der dritten Definition sieht man, dass $T_p M$ ein Vektorraum ist.

Definition 3.5. Das Tangentialbündel ist die disjunkte Vereinigung $\bigcup T_p M$. Die natürliche Projektionsabbildung $TM \rightarrow M, v \in T_p M \mapsto p$ wird mit π bezeichnet.

SATZ 3.6. TM ist eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

DEFINITION 3.7. Ein Vektorfeld ist ein glatter Schnitt $X : M \rightarrow TM$, d.h. eine glatte Abbildung mit $\pi \circ X = id_M$. Die Menge der Vektorfelder auf M wird mit $\chi(M)$ oder mit $\Gamma(TM)$ bezeichnet.

Sei (U, ϕ) ein Koordinatensystem um p . Ist e_i der i -te Einheitsvektor in \mathbb{R}^n , so definiert man

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p := [(U, \phi, e_i)] \in T_p M$$

Auf U bekommt man ein Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Jedes Vektorfeld X auf U kann eindeutig geschrieben werden als

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

wobei $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen sind. Ist $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die i -te Koordinate, so ist $X(\pi_i \circ \phi) = a_i$.

Ein Vektorfeld kann äquivalent beschrieben werden als eine Abbildung $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) X ist \mathbb{R} -linear, d.h. $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ für $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(M)$.
- (2) X erfüllt die Leibnizregel $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.

Definition 3.8. Seien X, Y zwei Vektorfelder auf M . Die Lieklammer $[X, Y]$ ist definiert durch

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Die \mathbb{R} -Linearität ist klar. Die Leibnizregel kann wie folgt nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\ &= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f)) \\ &\quad - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) \\ &= f(X(Y(g)) - Y(X(g))) + g(X(Y(f)) - Y(X(f))) \\ &= f[X, Y](g) + g[X, Y](f). \end{aligned}$$

Die Lieklammer erfüllt die Jacobiidentität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

und ist schiefssymmetrisch, d.h.

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

Die Lieklammer ist linear über \mathbb{R} , aber nicht über $C^\infty(M)$: ist z.B. $M = \mathbb{R}^2, V = y \frac{\partial}{\partial y}, W = x \frac{\partial}{\partial y}$ so gilt

$$\begin{aligned} [V, W](f) &= y \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial}{\partial y} f \right) - x \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial y} f \right) \\ &= yx \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f) - x \frac{\partial}{\partial y} (f) - xy \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f) \\ &= -x \frac{\partial}{\partial y} (f) \\ &= -W(f) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Ist $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve, so auch $f \circ c : I \rightarrow N$. Ist $v = c'(0)$ die Äquivalenzklasse von c , dann hängt $[f \circ c] = (f \circ c)'(0)$ nur von v ab und wird mit $df_p(v)$ bezeichnet. Die Abbildung $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist linear. Benutzt man die zweite Definition von Tangentialvektoren, so ist

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f), \quad g \in \mathcal{F}_{f(p)} N$$

In der dritten Definition sieht das so aus:

$$df_p([U, \phi, v]) = \left[V, \psi, d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)} v \right]$$

Die verschiedenen Abbildungen $df_p, p \in M$ definieren eine glatte Abbildung $df : TM \rightarrow TN$, die man als Differential von f bezeichnet.

Es gilt die folgende Kettenregel: Sind $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, so ist

$$d(g \circ f) = dg \circ df$$

Speziell gilt

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p$$

KAPITEL 2

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

1. Definition und Beispiele

Sei $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Wir möchten ihre Länge definieren durch

$$l(c) := \int_I \|c'(s)\| ds$$

Dazu muss man die Norm $\|\cdot\|$ definieren. Ist M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N , so kann man als Norm die induzierte Norm nehmen. Ist M eine abstrakte Mannigfaltigkeit, so benötigt man eine Norm auf jedem Tangentialraum.

Definition 1.1. Eine Finslermetrik auf M ist eine Funktion $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$, so dass

- (1) $F_{TM \setminus \underline{0}}$ ist glatt. Hierbei ist $\underline{0}$ der Nullschnitt von TM , also die Vereinigung aller Nullvektoren in den verschiedenen $T_p M$.
- (2) $F_{T_p M}$ ist eine Norm auf $T_p M$, d.h. homogen, symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung.

Sei $c : I \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve. Wähle $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m$ so dass $c|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]}$ glatt ist. Dann definiert man die Länge von c durch

$$l(c) := \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} F(c'(t)) dt.$$

Finslermetriken wurden durch Riemann in seiner Habilitationsschrift 1854 eingeführt. Er stellte aber fest, dass die Berechnungen wesentlich einfacher sind, wenn die Norm von einem Skalarprodukt herkommt. Das führt zum Begriff der Riemannschen Metrik.

Definition 1.2. Eine Riemannsche Metrik ist eine Abbildung g welche jedem Punkt $p \in M$ ein positiv definites Skalarprodukt $g(p)$ auf $T_p M$ zuordnet. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass g glatt ist, d.h. für glatte Vektorfelder X, Y auf M ist die Abbildung $p \mapsto g(p)(X(p), Y(p))$ glatt.

Bemerkung: ersetzt man positiv definit durch nicht-degeneriert, bekommt man eine sogenannte Pseudo-Riemannsche Metrik. Ist M zusammenhängend, dann ist die Signatur von $g(p)$ unabhängig von p . Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Signatur $(-, +, +, +)$ spielen eine sehr wichtige Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Lokale Beschreibung einer Riemannschen Metrik: Sei $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ ein Koordinatenvektorfeld. Ist $u = \sum_i u_i \partial_i$ und $v = \sum_j v_j \partial_j$, dann ist

$$g(p)(u, v) = \sum_{i,j} u_i v_j g_{i,j}(p)$$

wobei $g_{i,j}(p) = g(p)(\partial_i, \partial_j)$. Man nennt $ds^2 := \sum_{i,j} g_{i,j} dx_i dx_j$ das Bogenlängenelement auf M . Ist $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ eine glatte Kurve, dann ist

$$\begin{aligned}
g(c(t)) (c'(t), c'(t)) &= g(c(t)) \left(\sum_i c'_i(t) \partial_i, \sum_j c'_j(t) \partial_j \right) \\
&= \sum_{i,j} c'_i(t) c'_j(t) g_{i,j}(c(t)) \\
&= \sum_{i,j} g_{i,j}(c(t)) dx_i(c'(t)) dx_j(c(t)) \\
&= ds^2(c'(t))
\end{aligned}$$

Koordinatenwechsel: Seien (U, f) mit $f = (x_1, \dots, x_n)$ und (V, \bar{f}) mit $\bar{f} = (y_1, \dots, y_n)$ zwei Koordinatensysteme um p . Ist g in den Koordinaten x_1, \dots, x_n durch $g_{i,j}$ gegeben, so ist g in den Koordinaten y durch

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{i,j} &= g \left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\
&= g \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}, \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \right) \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} g_{k,l}
\end{aligned}$$

gegeben.

Ist $\Phi := d(\bar{f} \circ f^{-1})$, dann ist

$$(\bar{g})_{ij} = \Phi^{-t}(g)_{kl} \Phi^{-1}$$

Jede glatte Mannigfaltigkeit M ist abzählbar im Unendlichen, d.h. M lässt sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen schreiben. Das folgt aus der Abzählbarkeit der Topologie: da M lokal wie \mathbb{R}^n aussieht, gibt es um jeden Punkt $p \in M$ eine offene, relativ kompakte Umgebung. Diese lässt sich schreiben als Vereinigung von offenen Mengen, die aus der abzählbaren Basis $\{U_i, i \in \mathbb{N}\}$ stammen. Insbesondere ist p in einer solchen offenen Menge U_{i_p} enthalten und U_{i_p} ist relativ kompakt. Dann kann M als $M = \bigcup_{p \in M} \bar{U}_{i_p}$ geschrieben werden. Da es nur abzählbar viele verschiedene U_i gibt, ist das eine abzählbare Überdeckung durch kompakte Mengen.

Die Abzählbarkeit im Unendlichen hat zwei wichtige Konsequenzen.

- (1) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M , dann gibt es eine Verfeinerung $(V_j)_{j \in J}$, die lokal endlich ist, d.h. jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele der V_j trifft.
- (2) Es gibt eine Zerlegung der Eins, d.h. es gibt glatte Abbildungen $\alpha_j : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\text{spt } \alpha_j \subset V_j$ und

$$\sum_{j \in J} \alpha_j(p) = 1 \quad \forall p \in M$$

Satz 1.3. Jede Mannigfaltigkeit (abzählbar im Unendlichen) besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine lokal endliche Überdeckung durch Koordinatensysteme $(U_k, \phi_k)_{k \in K}$. Auf U_k können wir eine Riemannsche Metrik durch $g_k := \sum_{i=1}^n dx_i^2$ definieren. Sei $\sum_k \alpha_k = 1$ eine Zerlegung der 1 mit $\text{spt } \alpha_k \subset U_k$. Dann definieren wir

$$g := \sum_k \alpha_k g_k$$

Ist $p \in M, 0 \neq v \in T_p M$, so gibt es ein l mit $\alpha_l(p) > 0$ und es folgt

$$g(v, v) = \sum \alpha_k(p) g_k(v, v) \geq \alpha_l(p) g_l(v, v) > 0$$

Also ist g positiv definit.

BEISPIEL \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten: $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$. Dann ist $dx = \cos \phi dr - \sin \phi r d\phi, dy = \sin \phi dr + \cos \phi r d\phi$. Es folgt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Definition 1.4. Eine (lokale) Isometrie ist ein (lokaler) Diffeomorphismus $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ so dass $f^*h = g$, d.h.

$$g_p(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) \quad \forall p \in M, u, v \in T_p M$$

Eine isometrische Einbettung ist eine Einbettung mit $f^*h = g$.

Bemerkung: gibt es eine lokale Isometrie zwischen zwei Mannigfaltigkeiten, so sind insbesondere ihre Dimensionen gleich. Das ist bei isometrischen Einbettungen nicht der Fall.

BEISPIEL Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ trägt die induzierte Metrik f^*g_{eucl} , wobei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung ist.

Bemerkung: Eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit kann isometrisch in einen Euklidischen Raum eingebettet werden. Man unterscheidet zwischen den Eigenschaften der Einbettung (äussere Geometrie) und den Eigenschaften der Mannigfaltigkeit (innere Geometrie). In der Riemannschen Geometrie ist man vor allem an den inneren Eigenschaften interessiert, d.h. denjenigen, die nicht von der Einbettung abhängen. Dazu zählen z.B. Geodätische und Krümmung.

Rotationsflächen. Sei $c(t) = (r(t), z(t))$ eine Kurve mit $r(t) > 0$. Sie wird um die z -Achse rotiert:

$$f(t, \theta) := (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t))$$

Das Bild M von f , mit der induzierten Metrik, heisst Rotationsfläche. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= (r'(t) \cos \theta, r'(t) \sin \theta, z'(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= (-r(t) \sin \theta, r(t) \cos \theta, 0) \end{aligned}$$

Daher gilt in den Koordinaten t, θ

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) &= r'(t)^2 + z'(t)^2 \\ g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= 0 \\ g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= r(t)^2 \end{aligned}$$

g ist also durch die Matrix

$$g = \begin{pmatrix} r'^2 + z'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Nimmt man $r(t) = \sin t, z(t) = \cos t$, so ergibt sich

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 t \end{pmatrix}$$

und das ist die Standardmetrik auf S^2 in sphärischen Koordinaten.

Allgemein ist die Abbildung $(t, \theta) \mapsto (t, \theta + \theta_0)$ eine Isometrie des \mathbb{R}^3 , die M festlässt und eine Isometrie von M induziert (geometrisch: eine Drehung der Rotationsfläche).

Hyperbolischer Raum. Sei $\mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Lorentz-Skalarprodukt

$$\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Dann ist der hyperbolische Raum definiert als

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

Die Einschränkung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{H}^n ist eine Riemannsche Metrik, die hyperbolische Metrik genannt wird. Diese Beschreibung des hyperbolischen Raumes heisst Hyperboloidmodell.

Poincarémodell des hyperbolischen Raumes. Sei $D^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$ die offene Kreisscheibe. Setze

$$g := \frac{4g_{eucl}}{(1 - \|y\|^2)^2}$$

Dann ist (D^n, g) isometrisch zu \mathbb{H}^n . Die Isometrie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{H}^n &\rightarrow D^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0} \right). \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} : D^n &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto \left(\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2}, \frac{2y_1}{1 - \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 - \|y\|^2} \right) \end{aligned}$$

Riemannsches Produkt. Seien $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann gilt für $(p, q) \in M \times N$

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \times T_q N$$

Definiere eine Riemannsche Metrik $g \times h$ auf $M \times N$ durch $g \times h|_{(p,q)}((v_1, v_2), (v_1, v_2)) = g_p(v_1, v_1) + h_q(v_2, v_2)$, $v_1 \in T_p M, v_2 \in T_q N$.

Dann ist $(M \times N, g \times h)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. In Koordinaten:

$$g \times h = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

BEISPIEL $(\mathbb{R} \times S^n, g = dr^2 + g_{S^n})$ ist isometrisch zum Zylinder

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

Flache Tori. Sei a_1, \dots, a_n eine Basis von \mathbb{R}^n . Sei

$$\Gamma := \left\{ \sum k_i a_i \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

das von a_1, \dots, a_n erzeugte Gitter. Der Quotientenraum

$$T_\Gamma^n := \mathbb{R}^n / \Gamma, \quad (x \sim y \iff x - y \in \Gamma)$$

wird Torus genannt. Die Abbildung

$$p: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \\ \sum x_i a_i \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$$

ist ein Diffeomorphismus. Da Γ auf \mathbb{R}^n durch Translationen, speziell durch Isometrien operiert, erbt \mathbb{R}^n / Γ eine Riemannsche Metrik g_Γ . Benutzt man lokal die x_1, \dots, x_n als Koordinaten, so gilt

$$g_\Gamma = \sum_{i,j} \langle a_i, a_j \rangle dx_i dx_j$$

SATZ 1.5. T_Γ^n und $T_{\Gamma'}^n$ sind isometrisch genau dann wenn es eine Isometrie des \mathbb{R}^n gibt, die Γ auf Γ' abbildet.

Beweis. Sei $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie mit $\tilde{f}(\Gamma) = \Gamma'$. Dann induziert \tilde{f} eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n / \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma'$, die eine Isometrie zwischen T_Γ^n und $T_{\Gamma'}^n$ ist.

Sei umgekehrt $f: \mathbb{R}^n / \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma'$ eine Isometrie. Wähle $\bar{a}_i \in f(a_i + \Gamma)$ und definiere

$$\tilde{f}\left(\sum x_i a_i\right) := \sum x_i \bar{a}_i.$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n \\
p \downarrow & & \downarrow p' \\
\mathbb{R}^n / \Gamma & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n / \Gamma'
\end{array}$$

Die Abbildung \tilde{f} ist eine Isometrie: für $x \in \mathbb{R}^n, v, w \in T_x \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle dp(v), dp(w) \rangle_{\mathbb{R}^n / \Gamma} \\
&= \langle df \circ dp(v), df \circ dp(w) \rangle_{\mathbb{R}^n / \Gamma'} \\
&= \langle dp' \circ d\tilde{f}(v), dp' \circ d\tilde{f}(w) \rangle_{\mathbb{R}^n / \Gamma'} \\
&= \langle d\tilde{f}(v), d\tilde{f}(w) \rangle_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\tilde{f}(\Gamma) = \Gamma'$.

Kleinsche Flasche. Sei e_1, e_2 die Standardbasis von \mathbb{R}^2 . Sei G die Gruppe von Isometrien des \mathbb{R}^2 , die durch

$$\begin{aligned}
\gamma_1(x, y) &= (x + 1, -y) \\
\gamma_2(x, y) &= (x, y + 1)
\end{aligned}$$

erzeugt wird. Die Riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^2 induziert eine Riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^2 / G . Der Quotientenraum \mathbb{R}^2 / G heisst Kleinsche Flasche und ist ein Beispiel für eine kompakte, nichtorientierbare Mannigfaltigkeit. Wir werden später sehen, dass die Krümmung der Kleinschen Flasche 0 ist.

2. Levi-Civita-Zusammenhang

Ist $f \in C^\infty(M)$ und X ein Vektorfeld, so ist $X(f) \in C^\infty(M)$ die Ableitung von f in Richtung X . Ist Y ein anderes Vektorfeld, so möchte man oft auch Y in Richtung X ableiten, d.h. $\nabla_X Y$ bilden. Eine naive Idee geht wie folgt: wir benutzen Koordinaten und schreiben

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit $a_i \in C^\infty(M)$. Dann würden wir gerne $D_X Y := \sum_i X(a_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ definieren. Problem: das hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab, ist also nicht intrinsisch. Sind y_1, \dots, y_n andere Koordinaten, so ist

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_j \left(\sum_i a_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Rechnet man $D_X Y$ nach der obigen (falschen!) Definition aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D_X Y &= \sum_j X \left(\sum_i a_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_j \sum_i X(a_i) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_j \sum_i a_i X \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_i X(a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \sum_i a_i X \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht zwar $D_X Y$ (in den x -Koordinaten), aber der zweite Term verschwindet im allgemeinen nicht.

Um dieses Problem zu beheben, führt man $D_X Y$ zunächst axiomatisch ein.

Definition 2.1. Ein Zusammenhang auf M ist eine Abbildung

$$D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) D ist \mathbb{R} -linear in X und Y .
- (2) D ist $C^\infty(M)$ -linear in X und eine Ableitung in Y , d.h. für $f \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt

$$D_{fX} Y = f D_X Y, \quad D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y$$

- (3) D ist torsionsfrei, d.h. $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.

Theorem 2.2 (Fundamentaltheorem der Riemannschen Geometrie). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen Zusammenhang D , der mit g verträglich ist in folgendem Sinne:

$$X(g(Y, Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$$

Definition 2.3. Dieser Zusammenhang heisst Levi-Civita-Zusammenhang.

Beweis. (1) (Eindeutigkeit) Angenommen D sei ein solcher Zusammenhang. Wähle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dann ist

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \\ Yg(Z, X) &= g(D_Y Z, X) + g(Z, D_Y X) \\ Zg(X, Y) &= g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y) \end{aligned}$$

Addiert man die ersten beiden Gleichungen, subtrahiert die dritte, und benutzt die Torsionsfreiheit, so ergibt sich

$$2g(D_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)$$

Diese Gleichung heisst Koszulgleichung. Da g nichtdegeneriert ist, folgt die Eindeutigkeit von $D_X Y$.

(2) (Existenz) Durch die Koszulgleichung definieren wir jetzt $D_X Y$ und rechnen die Eigenschaften nach.

(a) \mathbb{R} -Linearität in X und Y ist klar, da die rechte Seite der Koszulgleichung offensichtlich \mathbb{R} -linear ist.

(b) Wir benutzen die Gleichung $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$, die leicht zu beweisen ist. Es folgt

$$\begin{aligned} 2g(D_{fX} Y, Z) &= fXg(Y, Z) + Y(fg(Z, X)) - Z(fg(X, Y)) + g(f[X, Y], Z) \\ &\quad - g(Y(f)X, Z) - g(f[X, Z], Y) + g(Z(f)X, Y) - fg([Y, Z], X) \\ &= f2g(D_X Y, Z) \\ &= 2g(fD_X Y, Z) \end{aligned}$$

(c) $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y$ ist ÜA.

(d) Vertauscht man in der Koszulgleichung die Rollen von X und Y und subtrahiert die beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$2g(D_X Y - D_Y X, Z) = 2g([X, Y], Z),$$

also $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.

(e)

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) + 2g(Y, D_X Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + Xg(Y, Z) + Zg(Y, X) \\ &\quad - Yg(X, Z) + g([X, Z], Y) - g([X, Y], Z) - g([Z, Y], X) \\ &= 2Xg(Y, Z) \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten sieht das wie folgt aus.

Seien

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j \\ X &= \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ Y &= \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Dann ist

$$D_X Y = \sum_i \left(\sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i X_j Y_k \right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

wobei die Γ_{jk}^i durch die Gleichung

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

definiert sind und Christoffelsymbole heissen.

Man sieht an dieser Formel, dass $D_X Y|_p$ nur von $X(p)$ abhängt, aber von den Werten von Y in einer Umgebung von p und nicht nur von $Y(p)$. Das folgt auch aus den Gleichungen $D_{fX} Y = f D_X Y, D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y$.

Schreibt man die Koszulgleichung in lokalen Koordinaten, so ergibt sich

$$2 \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il} = 2g \left(D_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = \partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}$$

Sei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix. Multipliziert man die letzte Gleichung mit g^{ls} und summiert über alle l , so folgt

$$2 \sum_i \Gamma_{jk}^i \underbrace{\sum_l g_{il} g^{ls}}_{\delta_{is}} = \sum_l g^{ls} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk})$$

Insgesamt folgt eine Formel für die Christoffelsymbole, nämlich

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}).$$

BEISPIEL

- (1) Für $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik und Standardkoordinaten ist $\Gamma_{jk}^i = 0$, da g_{ij} konstant ist.
- (2) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Polarkoordinaten ϕ, r :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

also

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \\ &= \frac{1}{2} g^{ii} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}) \end{aligned}$$

Explizit folgt

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{22}^1 = -r$$

alle anderen Christoffelsymbole verschwinden.

Levi-Civita-Zusammenhang einer Untermannigfaltigkeit. Sei (M, g) eine Untermannigfaltigkeit von (\tilde{M}, \tilde{g}) . Ist X ein Vektorfeld auf M , so gibt es eine Umgebung U von M in \tilde{M} und Vektorfeld \tilde{X} auf U , dessen Einschränkung auf M genau X ist.

Satz 2.4. Für die Levi-Civita-Zusammenhänge D von M und \tilde{D} von \tilde{M} gilt

$$D_X Y|_p = \left(\tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)^T \quad \forall p \in M \quad (1)$$

wobei T die Orthogonalprojektion $T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$ ist.

Beweis. Wir wählen ein lokales Koordinatensystem $(x_1, \dots, x_{\tilde{n}})$ von \tilde{M} so dass x_1, \dots, x_n lokale Koordinaten von M sind.

Seien \tilde{X} und \tilde{f} Fortsetzungen von X bzw. f in einer Umgebung von M und $p \in M$. Dann gilt

$$\tilde{X}(\tilde{f})|_M = X(f) \quad (2)$$

Ist nämlich $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $p \in M$ und $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, so ist $\tilde{a}_i(p) = a_i(p)$ für $i = 1, \dots, n$ und $\tilde{a}_i(p) = 0$ für $i > n$. Daher gilt

$$\tilde{X}(\tilde{f})|_p = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{a}_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)|_p$$

Für zwei Fortsetzungen \tilde{X}, \tilde{Y} von Vektorfeldern X, Y auf M gilt

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= XY \left(\tilde{f}|_M \right) - YX \left(\tilde{f}|_M \right) \\ &= X \left(\tilde{Y}(\tilde{f})|_M \right) - Y \left(\tilde{X}(\tilde{f})|_M \right) \\ &= \tilde{X}(\tilde{Y}\tilde{f})|_M - \tilde{Y}(\tilde{X}\tilde{f})|_M \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}]|_M \end{aligned} \quad (3)$$

Nun prüfen wir nach, dass die rechte Seite in (1) alle Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs auf M hat. Für Vektorfelder X, Y auf M , eine Funktion f auf M und $p \in M$ gilt

$$\begin{aligned} D_{fX} Y|_p &= \left(\tilde{D}_{fX} \tilde{Y}|_p \right)^T \\ &= \left(\tilde{D}_{\tilde{f}\tilde{X}} \tilde{Y}|_p \right)^T \\ &= \left(\tilde{f}(p) \tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p \right)^T \\ &= f(p) \left(\tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p \right)^T \\ &= f(p) D_X Y|_p \end{aligned}$$

Aus (2) folgt

$$D_X(fY) = \left(\tilde{D}_{\tilde{X}} \left(\tilde{f}\tilde{Y}_p \right) \right)^T = \left(\tilde{X}(\tilde{f})\tilde{Y} \Big|_p \right)^T + \left(\tilde{f}(p)\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \Big|_p \right)^T = X(f)|_p Y_p + f(p)D_X Y|_p$$

Wegen (3) gilt

$$D_X Y|_p - D_Y X|_p = \left(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \Big|_p - \tilde{D}_{\tilde{Y}}\tilde{X} \Big|_p \right)^T = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^T \Big|_p = [X, Y]|_p^T = [X, Y]|_p$$

und

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z)|_p &= \tilde{X}g(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \Big|_p \\ &= g \left(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z} \right) \Big|_p + g \left(\tilde{Y}, \tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Z} \right) \Big|_p \\ &= g \left(\left(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \right)^T, Z \right) \Big|_p + g \left(Y, \left(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Z} \right)^T \right) \Big|_p \\ &= g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \end{aligned}$$

Die rechte Seite in (1) erfüllt also die Eigenschaften des Levi-CivitaZusammenhangs auf M und stimmt wegen Eindeutigkeit mit ihm überein.

3. Kovariante Ableitung längs einer Kurve

Ein Vektorfeld längs einer Kurve $c : I \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung $X : I \rightarrow TM$ mit $X(t) \in T_{c(t)}M$.

Satz 3.1. Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-CivitaZusammenhang D und $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Dann gibt es einen eindeutigen Operator $\frac{D}{dt}$ auf dem Raum der Vektorfelder längs c mit folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $f \in C^\infty(I)$ und Y ein Vektorfeld längs c , so gilt

$$\frac{D}{dt}(fY)(t) = f(t)\frac{D}{dt}Y(t) + f'(t)Y(t), \quad \forall t \in I$$

(2) Ist $t_0 \in I$ und gibt es eine Umgebung von t_0 in I , so dass Y die Einschränkung eines Vektorfeldes X in einer Umgebung von $c(t_0)$ in M ist, so gilt

$$\frac{D}{dt}Y(t_0) = D_{c'(t_0)}X|_{c(t_0)}$$

Beweis. Wir benutzen Koordinaten und schreiben

$$Y(t) = \sum_i y_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}$$

Falls $\frac{D}{dt}$ existiert, so folgt aus (1)

$$\frac{D}{dt}Y(t) = \sum_i y_i(t) \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} + \sum_i y'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}$$

Ist $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$, so ist $c'(t) = \sum_i c'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_t &= D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{c(t)} \\ &= \sum_k c'_k(t) D \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{c(t)} \\ &= \sum_{k,i} c'_k(t) \Gamma_{kj}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\frac{D}{dt} Y(t) = \sum_i \left[y'_i(t) + \sum_{k,j} c'_k(t) y_j(t) \Gamma_{kj}^i \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \quad (4)$$

Das zeigt die Eindeutigkeit von $\frac{D}{dt}$. Um die Existenz zu zeigen, definieren wir $\frac{D}{dt}$ durch die Gleichung (4) und müssen die Bedingungen (1) und (2) nachprüfen.
(1)

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} fY(t) &= \sum_i \left[(fy_i)'(t) + \sum_{k,j} c'_k(t) (fy_j)(t) \Gamma_{kj}^i \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \\ &= f'(t) \underbrace{\sum_i y_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}}_{Y(t)} + f(t) \sum_i \left[y'_i(t) + \sum_{k,j} c'_k(t) y_j(t) \Gamma_{kj}^i \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \end{aligned}$$

(2) Sei Y Einschränkung des Vektorfeldes $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann ist $y_i(t) = X_i(c(t))$. Nach Definition des Tangentialvektors $c'(t)$ gilt $y'_i(t) = c'(t)(X_i)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
D_{c'(t)}X &= D_{\sum_i c'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_j X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} c'_i(t) \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j} c'_i(t) X_j \Big|_{c(t)} D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_j c'(t) (X_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k} c'_i(t) X_j \Big|_{c(t)} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \sum_i c'(t) (X_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k} c'_k(t) X_j \Big|_{c(t)} \Gamma_{kj}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_i \left[y'_i(t) + \sum_{j,k} c'_k(t) y_j(t) \Gamma_{kj}^i \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \\
&= \frac{D}{dt} Y(t)
\end{aligned}$$

Satz 3.2. Sind X, Y Vektorfelder längs c , so gilt

$$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{D}{dt} X(t), Y(t)\right) + g\left(X(t), \frac{D}{dt} Y(t)\right)$$

Beweis. Nachrechnen in lokalen Koordinaten. Alternativ kann man die Aussage auf die Verträglichkeit von Levi-Civita-Zusammenhang und Metrik zurückführen.

4. Paralleltransport

Sei $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine glatte Kurve.

Definition 4.1. Ein Vektorfeld längs c heisst parallel, wenn

$$\frac{D}{dt} X(t) = 0$$

Satz 4.2. Für jedes $X_0 \in T_{c(0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld X längs c mit $X(0) = X_0$.

Beweis. Es genügt, dies für ein Intervall $[t_0, t_1]$ zu zeigen, so dass $c|_{[t_0, t_1]}$ in einer Karte (U, ϕ) liegt. Ist $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ und $X(t) = \sum_i a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$, so ist X parallel genau dann wenn

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D}{dt} X(t) \\
&= \sum_i \left(a'_i(t) + \sum_{k,j} c'_k(t) a_j(t) \Gamma_{kj}^i \right) \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$a'_i(t) = - \sum_{k,j} c'_k(t) a_j(t) \Gamma_{kj}^i$$

Das ist ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung und besitzt bei vorgegebenem Anfangswert eine eindeutige Lösung, die auf dem gesamten Intervall $[t_0, t_1]$ existiert.

Definition 4.3. Die Abbildung

$$\begin{aligned} T_{c(0)}M &\rightarrow T_{c(1)}M \\ X_0 &\mapsto X_1 \end{aligned}$$

wobei $X_0 = X(0)$, $X_1 = X(1)$, X parallel längs c heisst Parallelverschiebung längs c .

Bemerkung: Die Parallelverschiebung hängt i.A. ab von der Wahl der Kurve c . Die Abhängigkeit von c wird durch den Krümmungstensor beschrieben, der später definiert wird.

Satz 4.4. Die Parallelverschiebung ist eine Isometrie zwischen $T_{c(0)}$ und $T_{c(1)}$.

Beweis. Sind X, Y Vektorfelder längs c , so gilt

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{D}{dt} Y(t) \right\rangle$$

Sind X und Y parallel, so ist also $\langle X(t), Y(t) \rangle$ konstant und die Aussage folgt.

BEISPIEL

(1) $M = \mathbb{R}^n$. Dann sind alle Christoffelsymbole 0, also $\frac{D}{dt} X(t) = X'(t)$. Die Parallelverschiebung ist die gewöhnliche Parallelverschiebung.

(2) $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Benutze sphärische Koordinaten $(\theta, \phi) \mapsto (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$. Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ bilden eine Orthonormalbasis in jedem Tangentialraum. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{\partial_\theta} \partial_\theta &= 0 \\ D_{\partial_\phi} \partial_\phi &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ D_{\partial_\theta} \partial_\phi &= D_{\partial_\phi} \partial_\theta = -\tan \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Sei $c(t) = (\theta_0, t)$ ein Breitenkreis und $X(t) = a(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, t)} + b(t) \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_{(\theta_0, t)}$ ein Vektorfeld längs c .

Dann ist

$$\frac{D}{dt} X(t) = (a'(t) + b(t) \sin \theta_0 \cos \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta_0} + (b'(t) - a(t) \tan \theta_0) \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Das Vektorfeld X ist parallel genau dann, wenn

$$\begin{aligned} a'(t) &= -b(t) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ b'(t) &= a(t) \tan \theta_0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses DGL-Systems ist

$$\begin{aligned}a(t) &= u \cos \theta_0 \cos(\sin \theta_0 \cdot t) - v \cos \theta_0 \sin(\sin \theta_0 \cdot t) \\b(t) &= u \sin(\sin \theta_0 \cdot t) + v \cos(\sin \theta_0 t)\end{aligned}$$

Der Paralleltransport längs c induziert eine Drehung um den Winkel $2\pi \sin \theta_0$ in $T_{(\theta, \phi)} S^2$.

KAPITEL 3

Geodätische und Exponentialabbildung

1. Geodätische

Definition 1.1. Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ heisst Geodätische, wenn das Vektorfeld $c'(t)$ entlang c parallel ist, d.h.

$$\left. \frac{D}{dt} \right|_t c'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Es folgt

$$\frac{d}{dt} \langle c'(t), c'(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} c'(t), c'(t) \right\rangle = 0$$

also ist $\|c'(t)\| = \text{const.}$ Oft parametrisiert man c so, dass $\|c'(t)\| = 1$.

In lokalen Koordinaten $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ ist $c'(t) = \sum_i c'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$ und die Gleichung für parallele Vektorfelder liefert die Geodätengleichung

$$c''_i(t) + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(c(t)) c'_j(t) c'_k(t) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Geodätische sind also Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Erinnerung aus Höherer Analysis: Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Betrachte Kurve $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (5)$$

Dann gilt: für jeden Punkt $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gibt es eine Umgebung $U \times V$ und $\epsilon > 0$, so dass für $(u, v) \in U \times V$ die Gleichung (5) eine eindeutige Lösung $x_{u,v} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt mit Anfangswerten $x_{u,v}(0) = u, x'_{u,v}(0) = v$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}X : U \times V \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\(u, v, t) &\mapsto x_{u,v}(t)\end{aligned}$$

ist glatt.

Für die Geodätengleichung ergibt sich folgendes Korollar. Sei $p \in M$. Dann gibt es offene Umgebung U von p und $\epsilon > 0$, so dass für $q \in U, v \in T_q M$ mit $\|v\| < \epsilon$ es genau eine Geodätische $c_v : (-1, 1) \rightarrow M$ mit $c_v(0) = q, c'_v(0) = v$ gibt. Mit anderen Worten gibt es zu gegebenen Anfangswerten zumindestens lokal eine Lösung. Allerdings müssen Geodätische nicht global existieren. Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, in der nicht alle Geodätischen global existieren.

BEISPIEL

(1) $M = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$. Dann ist $\frac{D}{dt}c' = c''$. c ist Geodätische genau dann, wenn $c''(t) = 0$, d.h. wenn c eine Gerade beschreibt.

(2) Geodätische auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ sind Kurven mit normaler Beschleunigung:

$$\frac{D}{dt}c'(t) = \left(\frac{D^{\mathbb{R}^N}}{dt}c'(t) \right)^T = c''(t)^T = 0 \iff c''(t) \perp T_{c(t)}M \forall t$$

(3) $M = S^n, p \in S^n, v \in T_p S^n = p^\perp, \|v\| = 1$. Die Kurve $c(t) = \cos tp + \sin tv$ ist ein Grosskreis. Dann ist $c'(t) = -\sin tp + \cos tv$ und $c''(t) = -\cos tp - \sin tv$. Also ist $c''(t) \parallel c(t)$, d.h. $c''(t) \perp T_{c(t)}S^n = c(t)^\perp$. Also ist c eine Geodätische. Die Geodätischen auf S^n sind also genau die Grosskreise.

(4) $M = \mathbb{H}^n, p \in \mathbb{H}^n, v \in T_p \mathbb{H}^n = p^\perp, \|v\| = 1$. Sei $c(t) = \cosh tp + \sinh tv$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle c(t), c(t) \rangle &= \cosh^2 t \underbrace{\langle p, p \rangle}_{=-1} + \sinh^2 t \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=1} + 2 \cosh t \sinh t \langle p, v \rangle \\ &= -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1 \end{aligned}$$

also ist $c(t) \in \mathbb{H}^n$.

Es gilt $c''(t) = c(t)$, d.h. c ist Geodätische. c ist Durchschnitt von \mathbb{H}^n mit der Ebene in \mathbb{R}^{n+1} , die durch p und v aufgespannt wird.

(5) $M = T_\Gamma^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$ flacher Torus. Da die Projektionsabbildung $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_\Gamma^n$ eine lokale Isometrie ist, sind die Projektionen von Geraden im \mathbb{R}^n genau die Geodätischen auf T_Γ^n . Ist Γ' ein anderes Gitter, so gibt es eine affine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $A(\Gamma) = \Gamma'$. Die induzierte Abbildung $\bar{A} : T_\Gamma^n \rightarrow T_{\Gamma'}^n$ ist im allgemeinen keine Isometrie, aber sie bildet Geodätische auf Geodätische ab.

(6) Sei $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ das Standardgitter in \mathbb{R}^2 . Sei c eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit Anstieg a . Ist a rational, so ist das Bild von c in T_Γ^2 eine periodische Geodätische. Ist a irrational, so ist das Bild von c dicht in T_Γ^2 .

(7) Sei c eine Geodätische auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Sei N ein Normalenvektorfeld längs c , d.h. $\|N(t)\| =$

$1, \langle N(t), c'(t) \rangle = 0$ für alle t . Leitet man diese Gleichungen nach t ab, so ergibt sich, dass auch N ein paralleles Vektorfeld längs c ist. Damit haben wir eine Basis für den Raum der parallelen Vektorfelder längs c . Ein beliebiges paralleles Vektorfeld mit Norm 1 lässt sich schreiben als $X(t) = \cos \alpha c'(t) + \sin \alpha N(t)$ mit α konstant.

(8) Sei $t \mapsto (r(t), z(t))$ eine Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei

$$f(u, \theta) = (r(u) \cos \theta, r(u) \sin \theta, z(u))$$

die Parametrisierung der durch die Kurve erzeugten Rotationsfläche M in \mathbb{R}^3 . Wir wollen das qualitative Verhalten einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $c(t) = f(u(t), \theta(t))$ beschreiben. Da $c''(t)^T = 0$, ist $c''(t)$ senkrecht auf dem Tangentialraum an M im Punkt $c(t)$. Speziell ist $c''(t)$ senkrecht auf $\frac{\partial}{\partial \theta} = (-r(u(t)) \sin \theta(t), r(u(t)) \cos \theta(t), 0) \in T_{c(t)}M$.

Sei $\gamma(t)$ die Projektion von c auf die xy -Ebene, d.h. $c(t) = (\gamma(t), z(u(t)))$. Dann folgt

$$\gamma''(t) \perp (-r(u(t)) \sin \theta(t), r(u(t)) \cos \theta(t))$$

Da $\gamma(t) = (r(u(t)) \cos \theta(t), r(u(t)) \sin \theta(t))$ und die Vektoren $(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 bilden, bedeutet dies $\gamma''(t) \parallel \gamma(t)$, d.h. γ hat zentrale Beschleunigung.

Mit $\tilde{r}(t) = r(u(t))$ gilt $\gamma(t) = \tilde{r}(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$. Zweimaliges Ableiten liefert

$$\gamma''(t) = (\tilde{r}''(t) - \tilde{r}\theta'(t)^2) \underbrace{(\cos \theta, \sin \theta)}_{\text{parallel zu } \gamma(t)} + (2\tilde{r}'(t)\theta'(t) + \tilde{r}\theta''(t)) \underbrace{(-\sin \theta, \cos \theta)}_{\perp \gamma(t)}$$

Da γ zentrale Beschleunigung hat, muss $2\tilde{r}'(t)\theta'(t) + \tilde{r}\theta''(t) = 0$ sein. Es folgt

$$\frac{d}{dt} (\tilde{r}^2(t)\theta'(t)) = 0$$

d.h. $\tilde{r}^2(t)\theta'(t) = K$ für eine Konstante K .

Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$1 = \langle c'(t), c'(t) \rangle = r'(u(t))^2 u'(t)^2 + r(u(t))^2 \theta'(t)^2 + z'(u(t))^2 u'(t)^2$$

Andererseits ist auch die Kurve $t \mapsto (r(t), z(t))$ nach Bogenlänge parametrisiert, somit gilt $r'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$ für alle t . Somit folgt $u'(t)^2 + \tilde{r}^2(t)\theta'(t)^2 = 1$, d.h. $u'(t)^2 + K^2/\tilde{r}(t)^2 = 1$, speziell $\tilde{r}(t) \geq K$. Die Geodätische c oszilliert zwischen zwei

Parallelen $r(u) = K$. Ist $r'(u) = 0$, so ist die Geodätische asymptotisch zur Geodätischen $r(u) = K$.

2. Exponentialabbildung

Sei $v \in TM$. Wähle maximale Geodätische $c_v : I_v \rightarrow M$ mit $c_v(0) = \pi(v)$, $c'_v(0) = v$. Ist $1 \in I_v$, so definiere $\exp v := c_v(1)$. Ist $\Omega := \{v \in TM : 1 \in I_v\}$ so erhält man eine Abbildung $\exp : \Omega \rightarrow M, v \mapsto c_v(1)$.

Der Name Exponentialabbildung kommt daher, dass im Spezialfall von Matrixgruppen diese Abbildung dasselbe ist wie die Matrixexponentialabbildung.

Lemma 2.1. Sei $0_p = 0 \in T_p M$. Dann ist $\exp(0_p) = p$ und

$$d\exp_p|_{0_p} : \underbrace{T_{0_p} T_p M}_{=T_p M} \rightarrow T_p M$$

die Identität.

Beweis. Der Vektor $v \in T_p M = T_{0_p} T_p M$ wird durch die Kurve $\alpha(t) = tv \in T_p M$ repräsentiert. Es ist

$$\exp_p(\alpha(t)) = \exp_p(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t)$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass $\tilde{c}(s) = c_v(st)$ eine Geodätische ist mit $\tilde{c}(0) = c_v(0) = p$ und $\tilde{c}'(0) = tc'_v(0) = tv$, d.h. $\tilde{c}(s) = c_{tv}(s)$ nach Eindeutigkeit von Geodätischen. Für $s = 1$ ergibt sich $c_v(t) = c_{tv}(1)$.

Differenziert man die Gleichung oben nach t an der Stelle $t = 0$ so ergibt sich

$$d\exp_p|_{0_p}(v) = c'_v(0) = v$$

Satz 2.2. Die Abbildung $\exp : \Omega \rightarrow M$ ist differenzierbar. Für $p \in M$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : \Omega &\rightarrow M \times M \\ v &\mapsto (\pi(v), \exp(v))\end{aligned}$$

ein lokaler Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung W von 0_p in TM auf eine Umgebung von (p, p) in $M \times M$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der differenzierbaren Abhängigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von den Anfangswerten. Für die zweite Aussage reicht es nach dem Satz über die Umkehrfunktion aus zu zeigen, dass $d\Phi|_{(p,0)}$ invertierbar ist.

Dazu wählen wir eine Karte (U, ϕ) um p . Die Koordinaten x_1, \dots, x_n induzieren Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ in TU , dabei entspricht $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ dem Vektor $\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_{(x_1, \dots, x_n)}M$.

Wir berechnen $d\Phi|_{(p,0)}$ in diesen Koordinaten.

Für festes p und kleines t ist $\Phi(p, vt) = (p, c_v(t))$. Differenzieren nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \left(0, \frac{\partial}{\partial u_i}\right)$.

Andererseits gilt $\Phi(p, 0) = (p, p)$, was $d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right)$ impliziert.

Die Matrix $d\Phi|_{(p,0)}$ ist also durch $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ Id & Id \end{pmatrix}$ gegeben und damit invertierbar.

Korollar 2.3. Für $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p in M und $\epsilon > 0$ so dass

- (1) Für $x, y \in U$ gibt es einen eindeutigen Vektor $v \in T_x M$ mit $\|v\| < \epsilon$ und $\exp_x v = y$.
- (2) Diese Geodätische hängt differenzierbar von den Parametern ab .
- (3) Für $q \in U$ ist die Abbildung $\exp_q : B(0_q, \epsilon) \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus zwischen der Menge $B(0_q, \epsilon) = \{v \in T_q M : \|v\| < \epsilon\}$ und ihrem Bild in M .

Beweis. (1) Sei W die Umgebung aus dem vorigen Satz. Da $0_p \in W$ und W offen, gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass $B(0_p, 2\epsilon) \subset W$. Wegen der Stetigkeit der Metrik gibt es eine offene Umgebung V von p , so dass

$$W' := \bigcup_{x \in V} B(0_x, \epsilon) \subset W$$

$\Phi : W' \rightarrow \Phi(W')$ ist ein Diffeomorphismus, der (p, p) in seinem Bild enthält. Also gibt es eine offene Umgebung U von p mit $U \times U \subset \Phi(W')$. Für $(x, y) \in U \times U$ gibt es einen eindeutigen Vektor $v \in W'$ mit $\Phi(v) = (x, y)$, d.h. $\exp_x v = y$.

(2) Die Geodätische zwischen $x \in U$ und $y \in U$ ist durch $t \mapsto \exp_x(t\Phi^{-1}(x, y))$ gegeben und hängt damit differenzierbar von x, y , tab .

(3) Da $\Phi : W' \rightarrow \Phi(W')$ ein Diffeomorphismus ist und $B(0_q, \epsilon) \subset W'$ eine Untermannigfaltigkeit ist, ist auch $\Phi : B(0_q, \epsilon) \rightarrow \Phi(B(0_q, \epsilon))$ ein Diffeomorphismus.

3. Das Theorem von Hopf-Rinow

Zur Erinnerung: ein topologischer Raum heisst zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, die leere Menge und die gesamte Menge sind.

Definition 3.1. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \inf \{ L(c) \mid c \text{ stückweise differenzierbare Kurve zwischen } x, y \}.$$

Satz 3.2. d ist eine Metrik auf M , die die gegebene Topologie von M als Mannigfaltigkeit induziert.

Beweis. Ist $c : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare Kurve, so ist

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

Für $x \in M$ sei

$$E_x := \{y \mid y \text{ mit } x \text{ durch stückw. differenzierbare Kurve verbunden}\}.$$

Dann ist E_x offen, denn z.B. kann jeder Punkt mit allen Punkten einer Karte, die diesen Punkt enthält, verbunden werden. Dann ist $M \setminus E_x = \cup_{y \notin E_x} E_y$ aber ebenfalls offen. Da M zusammenhängend ist und $E_x \neq \emptyset$ folgt $E_x = M$.

Damit ist $d(x, y) < \infty$ für alle x, y .

Die Dreiecksungleichung ist trivial: setze zwei Kurven zwischen x, y und y, z einfach zu einer Kurve zusammen. Die Symmetrie ist ebenfalls klar, ebenso $d(x, x) = 0$.

Wir zeigen $d(x, y) = 0 \implies x = y$. Da M Hausdorffsch ist, gibt es eine Karte (U, ϕ) um x mit $\phi(U) = B(0, 1)$, $\phi(x) = 0$, $y \notin U$. Die Metrik g induziert eine Riemannsche Metrik h auf $B(0, 1)$, nämlich $h := (\phi^{-1})^* g$. Da $B(0, \frac{1}{2})$ präkompakt ist (d.h. kompakten Abschluss hat), gibt es $\lambda, \mu > 0$ mit

$$\lambda \|u\|^2 \leq h(u, u) \leq \mu \|u\|^2, \quad \forall u \in B\left(0, \frac{1}{2}\right), u \in T_q \mathbb{R}^n$$

Ist c eine Kurve von x nach y , so trifft c die Sphäre $\phi^{-1}(S(0, \frac{1}{2}))$ zu einem ersten Zeitpunkt t . Sei $\gamma := \phi \circ c|_{[0, t]}$. Dann ist

$$\begin{aligned} L(c) &\geq \int_0^t g_{c(t)}(c'(t), c'(t))^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^t h_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_0^t \sqrt{\lambda} \|\gamma'(t)\| dt \\ &\geq \sqrt{\lambda} \left\| \int_0^t \gamma'(t) dt \right\| \\ &= \sqrt{\lambda} \|\gamma(t) - \gamma(0)\| \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Die zweite Aussage (nämlich, dass die Topologie, die durch d induziert wird, die gewöhnliche ist) kann auf ähnliche Weise bewiesen werden.

Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p : B = B(0_p, \epsilon) \rightarrow B' \subset M$ ein Diffeomorphismus ist. Wir benutzen Polarkoordinaten $f : (0, \epsilon) \times S^{n-1} \rightarrow B' \setminus \{p\}, (r, v) \mapsto \exp_p(rv)$.

Lemma 3.3 (Gausslemma). Die radialen Geodätischen $r \mapsto \exp_p(rv)$ sind normal zu den Hyperflächen $f(\{r\} \times S^{n-1})$. Speziell ist die Metrik in Polarkoordinaten durch $g = dr^2 + h_{(r,v)}$ gegeben, wobei $h_{(r,v)}$ die durch g auf $f(\{r\} \times S^{n-1})$ induzierte Metrik ist.

Bemerkung: da h nicht nur von v , sondern auch von r abhängt, handelt es sich nicht um ein Riemannsches Produkt, sondern um ein sogenanntes "warped product".

Beweis. Sei $v : (-\epsilon', \epsilon') \rightarrow S_r^{n-1}$ eine glatte Kurve und setze $\alpha(u, t) := \exp_p(uv(t))$. Es muss gezeigt werden, dass

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 0$$

gilt.

Wir rechnen in lokalen Koordinaten. Aus $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} = \sum_s (\Gamma_{ki}^s g_{sj} + \Gamma_{kj}^s g_{is})$$

Wir leiten $\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle$ nach u ab und benutzen die Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \left(g_{ij}(\alpha(u, t)) \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + g_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u^2} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t \partial u} \\ &= \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \left(g_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u^2} + \Gamma_{ki}^s g_{sj} \frac{\partial \alpha_k}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \left(g_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t \partial u} + \Gamma_{kj}^s g_{is} \frac{\partial \alpha_k}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, da $u \mapsto \alpha(u, t)$ eine Geodätische ist.

Die Kurve $u \mapsto \alpha(u, t)$ ist die Geodätische mit Anfangsrichtung $v(t)$. Da Geodätische konstante Geschwindigkeit haben, folgt

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\rangle = \langle v(t), v(t) \rangle = r^2$$

und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{ij}(\alpha(u, t)) \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u} \right) \\ &= (\Gamma_{ki}^s g_{sj} + \Gamma_{kj}^s g_{is}) \frac{\partial \alpha_k}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u} + g_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u \partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u} + g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial u \partial t} \\ &= 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \left(g_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial u \partial t} + \Gamma_{kj}^s g_{is} \frac{\partial \alpha_k}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Also ist auch der zweite Term in $\frac{\partial}{\partial u} \langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle$ gleich 0 und es folgt, dass $\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle$ von u unabhängig ist. Wegen $\alpha(0, t) = p$ gilt $\frac{\partial \alpha(0, t)}{\partial t} = 0$ und somit

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 0$$

für alle (u, t) .

Theorem 3.4. Für $p \in M$ gibt es Umgebung U in M und $\epsilon > 0$ so dass für $x, y \in U$ es eine (bis auf Parametrisierung) eindeutige Kurve c von x nach y mit Länge $L(c) = d(x, y) < \epsilon$ gibt. Diese Kurve ist eine Geodätische und hat minimale Länge.

Beweis. Wir wählen (U, ϵ) wie in Korollar 2.3. Für $x, y \in U$ gibt es $v \in T_x M$ mit $\|v\| < \epsilon$ und $y = \exp_x v$. Die Geodätische $c(t) = \exp_x(tv)$ hat Länge $\|v\| < \epsilon$, also ist $d(x, y) < \epsilon$.

Wir müssen zeigen, dass für jede andere stückweise differenzierbare Kurve γ von x nach y die Ungleichung $L(\gamma) \geq L(c)$ gilt mit Gleichheit nur für $\gamma = c$ (bis auf Umparametrisierung).

Wir schreiben $\gamma(t) = \exp_x(r(t)v(t))$ mit $r \in \mathbb{R}, v \in S^{n-1}$.

- Angenommen, γ verlässt $B' := \exp_x B(0_x, \epsilon)$ zu einem ersten Zeitpunkt s . Dann ist wegen dem Gausslemma

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geq L(\gamma|_{[0, s]}) \\ &= \int_0^s \|\gamma'(t)\| dt \\ &\geq \int_0^s |r'(t)| dt \\ &\geq \int_0^s r'(t) dt \\ &= r(s) - r(0) \\ &= \epsilon > L(c). \end{aligned}$$

- Angenommen, γ bleibt in B' . Dann ist mit einer ähnlichen Rechnung

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 [r'(t)^2 + h_{(r(t), v(t))}(v'(t), v'(t))]^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_0^1 |r'(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 r'(t) dt \\ &= r(1) - r(0) \\ &= L(c) \end{aligned}$$

Gilt in dieser Rechnung Gleichheit, so muss $v'(t) = 0$ und $r'(t) \geq 0$ für alle t sein. Das bedeutet aber, dass γ und c bis auf Umparametrisierung übereinstimmen.

Korollar 3.5. Eine Kurve $c : I \rightarrow M$, die nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist eine Geodätische genau dann, wenn es zu jedem $t \in I$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $c|_{[t-\epsilon, t+\epsilon]}$ minimal ist, d.h.

$$L(c|_{[t_1, t_2]}) = d(c(t_1), c(t_2)) \quad \forall t_1, t_2 \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$$

Beweis. \implies Ist $t \in I$, so setze $p := c(t)$ und wähle U, ϵ wie im Theorem. Für $t_1, t_2 \in I$ mit $c(t_1), c(t_2) \in U$ ist $c|_{[t_1, t_2]}$ die

eindeutige Geodätische mit Länge $< \epsilon$. Nach dem Theorem ist $L(c|_{[t_1, t_2]}) = d(c(t_1), c(t_2))$.

\Leftarrow Wähle $t \in I, U, \epsilon$ wie eben. Ist $c|_{[t_1, t_2]}$ minimal, so ist es sogar Geodätische nach dem Theorem. Also erfüllt c lokal die Geodätengleichung und ist damit eine Geodätische.

Definition 3.6. Die Energie einer stückweise differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ ist

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b \|c'(t)\|^2 dt$$

Die Energie hängt (im Gegensatz zur Länge) von der Parametrisierung ab.

Satz 3.7. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare Kurve.

(1) Ist c minimal, d.h. $L(c) = d(c(a), c(b))$ und ist c proportional zur Bogenlänge parametrisiert, so ist c Geodätische.

(2) Gilt für jede Kurve γ von $c(a)$ nach $c(b)$, dass $E(\gamma) \geq E(c)$, dann ist c eine Geodätische, die nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis. (1) Wir zeigen dass c lokal minimal ist. Anderenfalls gibt es $t_1, t_2 \in [a, b]$ und Kurve γ zwischen $c(t_1)$ und $c(t_2)$, die kürzer ist als $L(c|_{[t_1, t_2]})$, dann ist die Kurve α mit

$$\alpha(t) := \begin{cases} c(t) & t \in [a, b] \setminus [t_1, t_2] \\ \gamma(t) & t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

kürzer als c , Widerspruch. Nach dem Korollar ist c eine Geodätische.

(2) Für eine Kurve $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ von $c(a)$ nach $c(b)$ gilt nach Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 2E(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|^2 dt \\ &\geq \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt \right)^2 \left(\int_{t_1}^{t_2} dt \right)^{-1} \end{aligned}$$

Also ist

$$E(\gamma) \geq \frac{L(\gamma)^2}{2(t_2 - t_1)}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\|\gamma'(t)\| = \text{const}$ (d.h. wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist).

Ist c energieminimierend von $c(a)$ nach $c(b)$, so folgt dass c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Ist $c_0 : [a, b] \rightarrow$

eine andere, ebenfalls proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, so gilt

$$L(c_0) = \sqrt{2E(c_0)(b-a)} \geq \sqrt{2E(c)(b-a)} = L(c)$$

Also ist c minimal und damit eine Geodätische.

Theorem 3.8 (Hadamard). Auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es in jeder nicht-trivialen freien Homotopieklasse \mathcal{C} eine Geodätische mit minimaler Länge.

Beweis. Da M kompakt ist, gibt es $\epsilon > 0$ so dass für jedes $p \in M$ die Exponentialabbildung auf $B(0_p, \epsilon)$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Also ist für $\gamma \in \mathcal{C}$ die Länge $L(\gamma) \geq \epsilon$ (sonst wäre γ kontrahierbar).

Sei $l := \inf\{L(c) \mid c \in \mathcal{C}\} \geq \epsilon$. Wähle Kurven $c_k : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\|c'_k(t)\| = \text{const}$ und $L(c_k) \rightarrow l, L(c_k) \leq 2l$.

Wähle $m > \frac{4l}{\epsilon}, m \in \mathbb{N}$. Dann ist $L\left(c_k|_{[j/m, (j+1)/m]}\right) = L(c_k)/m \leq 2l/m < \epsilon/2$. Ersetzt man dieses Teilstück von c_k durch die minimale Geodätische zwischen $c_k(j/m)$ und $c_k((j+1)/m)$, so verändern wir die freie Homotopieklasse nicht, denn Kurven der Länge $< \epsilon$ sind kontrahierbar nach Wahl von ϵ .

Somit können wir die Kurve c_k ersetzen durch das geodätische Polygon, d.h. durch die Zusammensetzung der eindeutigen minimalen Geodätischen zwischen $c_k(j/m)$ und $c_k((j+1)/m)$. Dieses geodätische Polygon liegt in der gleichen freien Homotopieklasse wie c_k .

Wegen Kompaktheit von M gilt für eine Teilfolge $c_k(j/m) \rightarrow p_j \in M$. Sei c die Zusammensetzung der eindeutigen minimalen Geodätischen zwischen p_j und p_{j+1} . Dann ist c eine minimale Geodätische in \mathcal{C} : nach Konstruktion ist c homotop zu c_k und geodätisch auf jedem Intervall $[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}]$. Für ein kleines $0 < \delta < \epsilon$ können wir $c(\frac{j}{m} - \delta)$ und $c(\frac{j}{m} + \delta)$ durch eine bis auf Parametrisierung eindeutige Geodätische γ verbinden. Da dabei die Länge nicht kleiner werden darf (da $L(c) = l$), muss $c|_{[\frac{j}{m}-\delta, \frac{j}{m}+\delta]}$ eine Geodätische sein.

Theorem 3.9 (Birkhoff, Lusternik-Fet). Sei M kompakt und einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine geschlossene Geodätische positiver Länge.

Beweis. Ohne Beweis.

Korollar 3.10. Auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit gibt es (mindestens) eine geschlossene Geodätische.

Definition 3.11. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heisst geodätisch vollständig, wenn jede Geodätische auf ganz \mathbb{R} definiert ist, d.h. wenn \exp auf ganz TM definiert ist.

Theorem 3.12 (Hopf-Rinow). Wenn für einen Punkt $p \in M$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit die Exponentialabbildung \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert ist, dann kann jeder Punkt auf M mit p durch eine minimale Geodätische verbunden werden.

Korollar 3.13. Ist (M, g) geodätisch vollständig, so lassen sich je zwei Punkte auf M durch eine minimale Geodätische verbinden.

Lemma 3.14. Seien $p, q \in M, p \neq q$. Setze

$$S = S(p, \delta) := \{r \in M \mid d(p, r) = \delta\}$$

Für genügend kleines δ gibt es ein $r \in S$ mit

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q)$$

Beweis. Wähle $\delta < d(p, q)$ so klein, dass $\exp|_{S(0_p, \delta)}$ definiert ist. Da $S = \exp(S(0_p, \delta))$ kompakt ist, gibt es ein $r \in S$ mit $d(r, q) = d(S, q)$. Sei γ eine Kurve von p nach q . Diese trifft S in einem Punkt $\gamma(t)$ und

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= L\left(\gamma|_{[0,t]}\right) + L\left(\gamma|_{[t,1]}\right) \\
&\geq d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) \\
&\geq d(p, r) + d(r, q)
\end{aligned}$$

Also ist $d(p, q) \geq d(p, r) + d(r, q)$. Die umgekehrte Ungleichung ist die Dreiecksungleichung. Insgesamt folgt Gleichheit.

Beweis des Theorems. Seien $p, q \in M$, so dass $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ definiert ist. Wir suchen eine Geodätische von p nach q . Nach dem Lemma gibt es $\delta > 0$ und $r \in M$ mit $d(p, r) = \delta, d(r, q) = d(p, q) - \delta$.

Sei $v \in T_p M$ mit $\|v\| = 1$ und $\exp_p(\delta v) = r$. Setze $c(t) := \exp_p(tv)$.

Sei

$$I := \{t \in \mathbb{R} \mid d(q, c(t)) + t = d(p, q)\}$$

Dann ist $\delta \in I$. Sei $T := \sup\{I \cap [0, d(p, q)]\}$. Da I abgeschlossen ist, ist $T \in I$. Wir wollen zeigen, dass $T = d(p, q)$. Angenommen, $T < d(p, q)$. Wir wenden das Lemma auf den Punkt $c(T)$ an. Es gibt also $\epsilon > 0$ und r' mit $d(c(T), r') = \epsilon$ und

$$d(r', q) = d(c(T), q) - d(c(T), r') = d(p, q) - T - \epsilon$$

Es folgt

$$d(p, r') \geq d(p, q) - d(q, r') = T + \epsilon$$

Ist γ die minimale Geodätische von $c(T)$ nach r' , so folgt $d(p, r') = L\left(c|_{[0,T]}\right) + L(\gamma)$. Also erweitert γ die Geodätische c , d.h. $r' = c(T + \epsilon)$.

Insgesamt folgt

$$d(q, c(T + \epsilon)) + T + \epsilon = d(q, r') + T + \epsilon = d(p, q)$$

d.h. $T + \epsilon \in I$, Widerspruch.

Theorem 3.15. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) (M, g) ist geodätisch vollständig.
- (2) Für jedes p ist \exp_p auf $T_p M$ definiert.
- (3) Es gibt ein $p \in M$, für das \exp_p auf $T_p M$ definiert ist.
- (4) Jede beschränkte und abgeschlossene Menge in (M, d) ist kompakt.
- (5) Der metrische Raum (M, d) ist vollständig (d.h. jede Cauchyfolge konvergiert).

Beweis. Die Implikationen (1) \implies (2) und (2) \implies (3) sind trivial.

(3) \implies (4) Sei $K \subset M$ abgeschlossen und beschränkt. Dann gibt es $R > 0$ so dass $K \subset B(p, R)$. Da \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert ist, gilt nach Theorem 3.12

$$K \subset \exp_p B(0_p, R)$$

Wir setzen $K' := (\exp_p^{-1} K) \cap \overline{B(0_p, R)}$. Dann ist K' abgeschlossen (als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung) in der kompakten Menge $\overline{B(0_p, R)}$, also selbst kompakt. Es folgt dass $K = \exp_p K'$ als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung selbst kompakt ist.

(4) \implies (5) Eine Cauchyfolge ist beschränkt. Nach (4) besitzt sie einen Häufungspunkt. Aus der Cauchybedingung folgt die Eindeutigkeit des Häufungspunktes, also die Konvergenz der Folge.

(5) \implies (1) Sei c eine Geodätische auf M , die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein maximales Definitionsintervall von c . Aus der lokalen Existenz und Eindeutigkeit folgt, dass I offen ist, also $I = (a, b)$.

Wir wollen zeigen, dass $b = \infty$. Ist $b < \infty$, so wählen wir eine Folge t_k in I , die gegen b konvergiert. Dann ist $(c(t_k))$ ebenfalls eine Cauchyfolge, denn $d(c(t_k), c(t_l)) \leq |t_k - t_l|$, da c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Nach Voraussetzung konvergiert sie gegen einen Punkt $p \in M$. Es gibt eine Umgebung U von p und $\epsilon > 0$, so dass jede Geodätische \tilde{c} durch einen Punkt $q \in U$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist. Wähle $\epsilon' > 0$ genügend

klein, so dass $c(t - \epsilon') \in U$ und $\epsilon' < \epsilon$. Dann folgt aus Eindeutigkeit der Geodätischen, dass \tilde{c} die Geodätische c fortsetzt auf ein Intervall $(a, b - \epsilon' + \epsilon)$. Wegen $\epsilon - \epsilon' > 0$ ergibt sich ein Widerspruch. Also ist $b = \infty$ und analog $a = -\infty$.

KAPITEL 4

Krümmung

Die lokale intrinsische Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird durch ihre Krümmung beschrieben. Die wichtigsten Krümmungsbegriffe sind: Riemannscher Krümmungstensor, Schnittkrümmung, Ricciskrümmung, Skalarkrümmung.

Geometrische Deutung:

- Der Riemannsche Krümmungstensor beschreibt den Paralleltransport entlang (infinitesimal) kleiner Schleifen.
- Die Schnittkrümmung beschreibt die Abstandsfunktion zwischen zwei Geodätischen mit gemeinsamen Anfangspunkt.
- Die Ricciskrümmung beschreibt das Volumen eines kleinen geodätischen Sektors.
- Die Skalarkrümmung beschreibt das Volumen kleiner Bälle.

1. Riemannscher Krümmungstensor

Von nun an setzen wir $n := \dim M \geq 2$ voraus (Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 sind geometrisch uninteressant und haben keine Krümmung).

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang D .

Definition 1.1. Die Abbildung

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X, Y]} Z$$

heißt Riemannscher Krümmungstensor.

Lemma 1.2. R ist $C^\infty(M)$ -linear in allen Komponenten. Speziell hängt $(R(X, Y)Z)|_p$ nur von $X|_p, Y|_p, Z|_p$ ab.

Beweis. Seien X, Y, Z Vektorfelder auf M und f eine glatte Funktion.

$$\begin{aligned}
R(fX, Y)Z &= D_Y D_{fX} Z - D_{fX} D_Y Z + D_{[fX, Y]} Z \\
&= D_Y (f D_X Z) - f D_X D_Y Z + D_{f[X, Y] - Y(f)X} Z \\
&= Y(f) D_X Z + f D_Y D_X Z - f D_X D_Y Z + f D_{[X, Y]} Z - Y(f) D_X Z \\
&= f R(X, Y)Z
\end{aligned}$$

Wegen $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ folgt daraus, dass R auch $C^\infty(M)$ linear in Y ist. Die Linearität in Z ist ÜA.

Eine Version des Riemannschen Krümmungstensors ist der Riemannsche $(0, 4)$ -Krümmungstensor

$$\begin{aligned}
R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow C^\infty(M) \\
(X, Y, Z, T) &\mapsto \langle R(X, Y)Z, T \rangle
\end{aligned}$$

Satz 1.3 (Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors).

$$R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z) \quad (1)$$

(2) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$ (erste BianchiIdentität).

(3) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$.

Beweis. (1) Die erste Gleichung ist trivial. Für die zweite rechnen wir

$$\begin{aligned}
XY \langle Z, T \rangle &= X (\langle D_Y Z, T \rangle + \langle Z, D_Y T \rangle) \\
&= \langle D_X D_Y Z, T \rangle + \langle D_Y Z, D_X T \rangle + \langle D_X Z, D_Y T \rangle + \langle Z, D_X D_Y T \rangle
\end{aligned}$$

Vertauscht man X und Y , so ergibt sich

$$YX \langle Z, T \rangle = \langle D_Y D_X Z, T \rangle + \langle D_X Z, D_Y T \rangle + \langle D_Y Z, D_X T \rangle + \langle Z, D_Y D_X T \rangle.$$

Andererseits ist

$$[X, Y] \langle Z, T \rangle = \langle D_{[X, Y]} Z, T \rangle + \langle Z, D_{[X, Y]} T \rangle$$

Nimmt man eine geeignete Linearkombination dieser drei Gleichungen und benutzt $[X, Y] = XY - YX$, so folgt $0 = R(X, Y, Z, T) + R(X, Y, T, Z)$.

(2) Es ist $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ (Torsionsfreiheit des Zusammenhangs). Daher gilt wegen der Jacobiidentität

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X, Y]} Z \\
&\quad + D_Z D_Y X - D_Y D_Z X + D_{[Y, Z]} X \\
&\quad + D_X D_Z Y - D_Z D_X Y + D_{[Z, X]} Y \\
&= D_Y (D_X Z - D_Z X) + D_X (D_Z Y - D_Y Z) + D_Z (D_Y X - D_X Y) \\
&\quad + D_{[X, Y]} Z + D_{[Y, Z]} X + D_{[Z, X]} Y \\
&= D_Y [X, Z] - D_{[X, Z]} Y + D_X [Z, Y] - D_{[Z, Y]} X + D_Z [Y, X] - D_{[Y, X]} Z \\
&= [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] + [Z, [Y, X]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) Folgt aus (1) und (2) (ÜA).

2. Schnitt-, Ricci- und Skalarkrümmung

Die Schnittkrümmung ist der wichtigste Krümmungsbegriff.

Definition 2.1. Für $p \in M$ und $P \subset T_p M$ einen zweidimensionalen Untervektorraum setzen wir

$$K(P) := R(x, y, x, y)$$

wobei $x, y \in P$ eine Orthonormalbasis ist.

Für beliebige Vektoren $x, y \in P$ gilt dann

$$R(x, y, x, y) = K(P) (\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2)$$

wie man leicht nachrechnet, wenn man x, y in einer Orthonormalbasis schreibt.

Satz 2.2. Die Schnittkrümmung K bestimmt R .

Beweis. Seien X, Y, Z, T Vektorfelder auf M . Dann ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{\alpha=\beta=0} & [R(X + \alpha Z, Y + \beta T, X + \alpha Z, Y + \beta T) \\ & - R(X + \alpha T, Y + \beta Z, X + \alpha T, Y + \beta Z)] \\ & = R(Z, T, X, Y) + R(Z, Y, X, T) + R(X, T, Z, Y) + R(X, Y, Z, T) \\ & \quad - R(T, Z, X, Y) - R(T, Y, X, Z) - R(X, Z, T, Y) - R(X, Y, T, Z) \\ & = 4R(X, Y, Z, T) + 2 \underbrace{(R(Z, Y, X, T) + R(X, Z, Y, T))}_{=R(X, Y, Z, T)} \\ & = 6R(X, Y, Z, T). \end{aligned}$$

Da der Term auf der linken Seite nur von der Schnittkrümmung abhängt, ergibt sich ein Ausdruck für $R(X, Y, Z, T)$ in Abhängigkeit von der Schnittkrümmung.

BEISPIEL

- Ist K konstant, d.h. $K(P) = k$ für alle $P \subset T_p M, p \in M$, so gilt

$$R(X, Y, Z, T) = k(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle)$$

- Der Euklidische Raum ist flach, d.h. $R \equiv 0$. Es gilt nämlich $D_X Y = XY$ und daher $R(X, Y)Z = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X, Y]} Z = YXZ - XYZ + [X, Y]Z = 0$.
- Die Sphäre S^{n-1} mit der Standardmetrik hat konstante Schnittkrümmung, denn $SO(n)$ operiert durch Isometrien auf S^{n-1} und ist transitiv auf der Menge der 2-Ebenen in TS^{n-1} . Eine Rechnung ergibt $K \equiv 1$.
- Die Isometriegruppe von \mathbb{H}^n operiert ebenfalls transitiv auf 2-Ebenen, also hat \mathbb{H}^n konstante Schnittkrümmung. Eine Rechnung ergibt $H \equiv -1$.
Versieht man S^2 mit der Standardmetrik, so hat das Riemannsche Produkt $S^2 \times S^2$ nichtnegative Schnittkrümmung. Die Hopfvermutung besagt, dass es auf $S^2 \times S^2$ keine Metrik mit strikt positiver Schnittkrümmung gibt. Diese Vermutung ist offen.

Eines der Hauptprobleme in Geometrie und Topologie ist folgendes Klassifikationsproblem: Klassifiziere alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die eine Metrik mit strikt positiver (oder positiver, negativer, strikt negativer) Schnittkrümmung (oder Riccikrümmung, Skalarkrümmung) zulassen. Die Klassifikation kann bis auf Homöomorphie, Homotopieäquivalenz oder Diffeomorphismus geschehen.

Definition 2.3. Der Riccitenor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist die Spur der Abbildung $v \mapsto R(x, v)$. Explizit gilt: Ist e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_p M$, so ist

$$\text{Ric}_p(x, y) = \sum_{i=1}^n R(x, e_i, y, e_i)$$

Man kann den Riccitenor auffassen als Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ric} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\mapsto \text{Ric}(X, Y). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Ric ein symmetrischer Tensor. M hat Riccikrümmung grösser (bzw. strikt grösser usw.) als λ , falls $\text{Ric} - \lambda g$ eine positiv definite (bzw. strikt positiv definite usw.) Bilinearform ist.

Lemma 2.4. Ist $K \geq \kappa$, so gilt $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$, analog mit $>, \leq, <$.

Beweis. Sei $K \geq \kappa$. Ist $x \in T_p M$, so ist dann

$$R_p(x, e_i, x, e_i) \geq \kappa \left(\langle x, x \rangle \langle e_i, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle^2 \right)$$

Summiert man über alle i so ergibt sich

$$\text{Ric}(x, x) \geq \kappa \left(n \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \right) = \kappa(n-1) \|x\|^2$$

Definition 2.5. Die Skalarkrümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist die Spur des Riccitenors. Explizit ist

$$s(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(e_i, e_i) = \sum_{i,j} K(e_i, e_j)$$

wobei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_p M$ ist. s ist eine glatte Funktion auf M .

Lemma 2.6. Ist $\text{Ric} \geq \kappa$, so ist $s \geq n\kappa$.

Beweis.

$$s(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(e_i, e_i) \geq n\kappa$$

BEISPIEL

- Hat M konstante Schnittkrümmung $K \equiv \kappa$, so ist die Riccikrümmung gleich $(n-1)\kappa$ und die Skalarkrümmung gleich $n(n-1)\kappa$.

- Ist $\dim M = 2$, so gilt $s = 2K$, wobei K die Gaußkrümmung ist. Die Schnittkrümmung ist trivialerweise durch s festgelegt (da es in $T_p M$ nur einen zweidimensionalen Unterraum gibt).
- Ist $\dim M = 3$, so ist R durch Ric bestimmt. Dies gilt nicht mehr für $\dim M \geq 4$.

3. Krümmung von Untermannigfaltigkeiten

Sei $(M, g) \subset (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Für die zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhänge gilt

$$D_X Y = \left(\tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)^T$$

Definition 3.1. Die (vektorwertige) zweite Fundamentalform ist für $u, v \in T_p M$ gegeben durch

$$II(u, v) = \left(\tilde{D}_U V \right)^\perp \Big|_p = \left(\tilde{D}_U V - D_U V \right) \Big|_p$$

wobei U, V Vektorfelder auf \tilde{M} sind, welche in jedem Punkt von M tangential zu M sind und $U|_p = u, V|_p = v$ erfüllen.

Bemerkung: als erste Fundamentalform wird die Metrik g bezeichnet.

Wir zeigen zunächst, dass die Definition korrekt ist, d.h. unabhängig von der Wahl von U, V . Ist $f \in C^\infty(\tilde{M})$, so gilt

$$\left(\tilde{D}_{fU} V \right)^\perp \Big|_p = \left(f \tilde{D}_U V \right)^\perp \Big|_p = f(p) \left(\tilde{D}_U V \right)^\perp \Big|_p$$

und

$$\left(\tilde{D}_U (fV) \right)^\perp \Big|_p = \left(U(f)V + f \tilde{D}_U V \right)^\perp \Big|_p = f(p) \left(\tilde{D}_U V \right)^\perp \Big|_p$$

denn V ist tangential zu M .

Als nächstes behaupten wir, dass II symmetrisch ist:

$$II(u, v) - II(v, u) = \left(\tilde{D}_U V - \tilde{D}_V U \right)^\perp = [U, V]^\perp = 0$$

denn mit U, V ist auch $[U, V]$ tangential zu M .

Definition 3.2. M heißt total geodätisch, wenn jede Geodätische in (M, g) auch eine Geodätische in (\tilde{M}, \tilde{g}) ist. Z.B. ist $S^k \subset S^n$ total geodätisch.

SATZ 3.3. (M, g) ist total geodätisch, wenn die zweite Fundamentalform verschwindet.

Beweis. ÜA

Satz 3.4. Die Riemannschen Krümmungstensoren \tilde{R}, R von \tilde{M}, M sind durch die Gaussgleichung

$$R(x, y, u, v) = \tilde{R}(x, y, u, v) + \langle II(x, u), II(y, v) \rangle - \langle II(x, v), II(y, u) \rangle$$

miteinander verknüpft.

Beweis. Lokal finden wir eine Orthonormalbasis von normalen Vektorfeldern, d.h. Vektorfelder

$\nu_1, \dots, \nu_k, k = \dim \tilde{M} - \dim M$ längs M , welche normal zu M sind und in jedem Punkt eine Orthonormalbasis des Normalenraumes bilden. Seien X, Y, U, V Vektorfelder auf \tilde{M} , die in jedem Punkt von M tangential an M sind und im Punkt $p \in M$ die Werte x, y, u, v annehmen. Dann gilt

$$\tilde{D}_X Y = \left(\tilde{D}_X Y \right)^T + \left(\tilde{D}_X Y \right)^\perp = D_X Y + II(X, Y)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{D}_X \tilde{D}_Y U &= \tilde{D}_X (D_Y U + II(Y, U)) \\ &= \tilde{D}_X (D_Y U + \langle II(Y, U), \nu_i \rangle \nu_i) \\ &= \tilde{D}_X D_Y U + \tilde{D}_X (\langle II(Y, U), \nu_i \rangle \nu_i) \\ &= \tilde{D}_X D_Y U + II(X, Y)U - X(\langle II(Y, U), \nu_i \rangle) \nu_i + \langle II(Y, U), \nu_i \rangle \tilde{D}_X \nu_i \end{aligned}$$

und somit

$$\langle \tilde{D}_X \tilde{D}_Y U, V \rangle = \langle D_X D_Y U, V \rangle + II(X, Y) \langle U, V \rangle + \langle II(Y, U), \nu_i \rangle \langle \tilde{D}_X \nu_i, V \rangle$$

Da ν_i normal, X und V tangential zu M sind, gilt

$$0 = X \langle \nu_i, V \rangle = \langle \tilde{D}_X \nu_i, V \rangle + \langle \nu_i, \tilde{D}_X V \rangle = \langle \tilde{D}_X \nu_i, V \rangle + \langle \nu_i, II(X, V) \rangle$$

Weiterhin ist

$$\langle \tilde{D}_{[X, Y]} U, V \rangle = \langle D_{[X, Y]} U, V \rangle,$$

da V tangential zu M ist. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, U, V) &= \langle \tilde{D}_Y \tilde{D}_X U, V \rangle - \langle \tilde{D}_X \tilde{D}_Y U, V \rangle + \langle \tilde{D}_{[X, Y]} U, V \rangle \\ &= \langle D_Y D_X U, V \rangle + II(X, Y) \langle U, V \rangle - \langle II(X, U), \nu_i \rangle \langle \nu_i, II(Y, V) \rangle \\ &\quad - \langle D_X D_Y U, V \rangle - II(X, Y) \langle U, V \rangle + \langle II(Y, U), \nu_i \rangle \langle \nu_i, II(X, V) \rangle \\ &\quad + \langle D_{[X, Y]} U, V \rangle \\ &= R(X, Y, U, V) - \langle II(X, U), \nu_i \rangle \langle \nu_i, II(Y, V) \rangle + \langle II(Y, U), \nu_i \rangle \langle \nu_i, II(X, V) \rangle \\ &= R(X, Y, U, V) - \langle II(X, U), II(Y, V) \rangle + \langle II(Y, U), II(X, V) \rangle \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung haben wir verwendet, dass die zweite Fundamentalform immer normal zu M ist und die ν_i eine Orthonormalbasis des Normalenraumes bilden.

Von nun an nehmen wir an, dass $k = 1$, also M ist eine Hyperfläche in \tilde{M} . Dann kann man lokal ein Einheitsnormalenfeld ν finden und $II(u, v) = -l(u, v)\nu$ schreiben, wobei l eine reellwertige Bilinearform ist (ebenfalls zweite Fundamentalform genannt). Die Wahl der Vorzeichens wird gleich klar werden.

Definition 3.5. Die Weingartenabbildung (shape operator) ist definiert durch

$$S : T_p M \rightarrow T_p M, S(u) = \tilde{D}_u \nu$$

Bemerkung: da ν nur entlang M definiert ist, handelt es sich bei $\tilde{D}_u \nu$ eigentlich um die kovariante Ableitung, welche im nächsten Abschnitt definiert wird. Analog kann man ν beliebig auf \tilde{M} fortsetzen und den Levi-Civita-Zusammenhang \tilde{D} verwenden.

Man muss nachrechnen, dass die Werte wirklich in $T_p M$ liegen: $\langle \tilde{D}_u \nu, \nu \rangle = \frac{1}{2} u \langle \nu, \nu \rangle = 0$.

Die Beziehung zwischen l und S ergibt sich aus

$$\langle S(u), v \rangle = \langle \tilde{D}_u \nu, v \rangle = - \langle \nu, \tilde{D}_u v \rangle = l(u, v)$$

Definition 3.6.

- Die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ heissen Hauptkrümmungen, ihre Inversen λ_i^{-1} sind die Hauptkrümmungsradien.
- Ist $n = \dim M = 2, \dim \tilde{M} = 3$, so heisst $K = \lambda_1 \lambda_2$ die Gaußkrümmung in p . Sie ist unabhängig von der Wahl von ν , da bei dem Wechsel $\nu \mapsto -\nu$ beide Hauptkrümmungen λ_1, λ_2 ihr Vorzeichen wechseln. Alternative Definition: K ist die Determinante der linearen Abbildung S .
- $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ ist die mittlere Krümmung, sie ist abhängig von der Wahl von ν .

Die Hauptkrümmungen hängen von der Einbettung von M in \tilde{M} ab. Gauss hat festgestellt, dass die Gaußkrümmung einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ nur von der inneren Geometrie von M und nicht von der Einbettung abhängig ist.

Theorem 3.7 (Theorema Egregium). Die Gaußkrümmung einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ hängt nur von der inneren Geometrie ab.

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis x, y von $T_p M$. Aus der Gaußgleichung und der Flachheit von \mathbb{R}^3 ($\tilde{R} = 0$) folgt

$$R(x, y, x, y) = l(x, x)l(y, y) - l(x, y)^2 = \det S$$

Die linke Seite ist die Schnittkrümmung von M , welche unabhängig von der Einbettung ist.

Als Beispiel soll die Krümmung der Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ berechnet werden. Als Einheitsnormalenfeld wählen wir $\nu(p) = p$. Ist $u \in T_p M$ und c eine Kurve in S^n mit $c(0) = p, c'(0) = u \in T_p M$ so gilt $\nu(c(t)) = c(t)$, also

$$S(u) = \tilde{D}_u \nu = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(c(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(t) = c'(0) = u$$

Somit ist $l(u, v) = g(u, v)$ und die Gaußgleichung liefert

$$R(x, y, u, v) = g(x, u)g(y, v) - g(x, v)g(y, u)$$

Somit ist die Schnittkrümmung der Sphäre konstant 1. Die Riccokrümmung ist dann $\text{Ric} = (n-1)g$ und die Skalarkrümmung $s = n(n-1)$.

4. Variationsformeln

Die kovariante Ableitung längs einer Kurve kann auch auf andere parametrisierte Untermannigfaltigkeiten ausgedehnt werden.

Definition 4.1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und N eine Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand). Eine differenzierbare Abbildung $H : N \rightarrow M$ heisst parametrisierte Untermannigfaltigkeit.

Zum Beispiel ist jede Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit.

Definition 4.2. Ein Vektorfeld längs H ist eine Abbildung $Y : N \rightarrow TM$ mit $Y(p) \in T_{H(p)}M$ für alle $p \in N$.

SATZ 4.3. Sei $H : N \rightarrow (M, g)$ eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es eindeutige bilineare Abbildung $(X, Y) \mapsto \bar{D}_X Y$, wobei X ein Vektorfeld auf N ist und Y sowie $\bar{D}_X Y$ Vektorfelder längs H sind, so dass folgende Bedingungen gelten:

- (1) $\bar{D}_{fX} Y = f \bar{D}_X Y$, $\bar{D}_X (fY) = X(f)Y + f \bar{D}_X Y$ für $f \in C^\infty(N)$.
- (2) Ist Y in einer Umgebung von $H(p)$ Einschränkung eines Vektorfeldes \tilde{Y} auf M , dann gilt

$$\bar{D}_X Y|_{H(p)} = \left(D_{dH_p(X_p)} \tilde{Y} \right)|_{H(p)}$$

Beweis. Analog zum Fall $N = [0, 1]$.

Ist X ein Vektorfeld auf N , so induziert X ein Vektorfeld \bar{X} längs H durch $\bar{X}(p) := dH_p \left(X|_p \right)$.

Satz 4.4. Seien X, Y Vektorfelder auf N und U, V Vektorfelder längs H . Dann gilt

- (1) $\bar{D}_X \bar{Y} - \bar{D}_Y \bar{X} = \overline{[X, Y]}$.
- (2) $Xg(U, V) = g(\bar{D}_X U, V) + g(U, \bar{D}_X V)$.
- (3) $\bar{D}_Y \bar{D}_X U - \bar{D}_X \bar{D}_Y U + \bar{D}_{[X, Y]} U = R(\bar{X}, \bar{Y})U$.

Beweis. (1) Die Abbildung $(X, Y) \mapsto \bar{D}_X \bar{Y} - \bar{D}_Y \bar{X} - \overline{[X, Y]}$ ist linear über $C^\infty(N)$:

$$\bar{D}_{fX} \bar{Y} - \bar{D}_Y f\bar{X} - \overline{[fX, Y]} = f \bar{D}_X \bar{Y} - Y(f)\bar{X} - f \bar{D}_Y \bar{X} - \overline{f[X, Y]} + Y(f)\bar{X}.$$

Daher reicht es aus, für X und Y Koordinatenvektorfelder einzusetzen. Seien t_1, \dots, t_k Koordinaten auf N und x_1, \dots, x_n Koordinaten auf M . Sei $X = \frac{\partial}{\partial t_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial t_j}$ und $H = (H_1, \dots, H_n)$. Dann ist

$$dH(X) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad dH(Y) = \sum_{r=1}^n \frac{\partial H_r}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad [X, Y] = 0$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{D}_X \bar{Y} &= \bar{D}_X \sum_{r=1}^n \frac{\partial H_r}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_r} \\ &= \sum_{r=1}^n \left[X \left(\frac{\partial H_r}{\partial t_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{\partial H_r}{\partial t_j} \bar{D}_X \frac{\partial}{\partial x_r} \right] \\ &= \sum_{r=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial t_j \partial t_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{\partial H_r}{\partial t_j} D_{dH(X)} \frac{\partial}{\partial x_r} \right] \\ &= \sum_{r=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial t_j \partial t_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{\partial H_r}{\partial t_j} \sum_{l=1}^n \frac{\partial H_l}{\partial t_i} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_r} \right] \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial t_j \partial t_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum_{r,l=1}^n \frac{\partial H_r}{\partial t_j} \frac{\partial H_l}{\partial t_i} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_r} \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial t_j \partial t_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum_{r,l=1}^n \frac{\partial H_l}{\partial t_j} \frac{\partial H_r}{\partial t_i} D_{\frac{\partial}{\partial x_r}} \frac{\partial}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\bar{D}_Y \bar{X} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial t_i \partial t_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum_{r,l=1}^n \frac{\partial H_r}{\partial t_i} \frac{\partial H_l}{\partial t_j} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_r}$$

Wegen $D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_r} = D_{\frac{\partial}{\partial x_r}} \frac{\partial}{\partial x_l}$ folgt $\bar{D}_X \bar{Y} - \bar{D}_Y \bar{X} = 0 = \overline{[X, Y]}$.

(2) Für die zweite Gleichung stellt man zuerst fest, dass der Ausdruck $Xg(U, V) - g(\bar{D}_X U, Y) - g(U, \bar{D}_X V)$ über $C^\infty(N)$ linear ist. Daher reicht es wieder aus, nur Koordinatenvektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial t_i}, U = \frac{\partial}{\partial x_k}, V = \frac{\partial}{\partial x_l}$ einzusetzen.

Dann ist

$$\begin{aligned} Xg(U, V)|_p &= dH \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right) g \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= g \left(D_{dH(\frac{\partial}{\partial t_i})} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, D_{dH(\frac{\partial}{\partial t_i})} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= g(\bar{D}_X U, V) + g(U, \bar{D}_X V) \end{aligned}$$

(3) Wegen $C^\infty(N)$ -Linearität können wir $X = \frac{\partial}{\partial t_i}, Y = \frac{\partial}{\partial t_j}$ und $U = \frac{\partial}{\partial x_k}$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{D}_Y \bar{D}_X U &= \bar{D}_Y D_{\frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \bar{D}_Y \frac{\partial H_l}{\partial t_i} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 H_l}{\partial t_i \partial t_j} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial H_l}{\partial t_i} \bar{D}_Y D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 H_l}{\partial t_i \partial t_j} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial H_m}{\partial t_j} D_{\frac{\partial}{\partial x_m}} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Wegen Satz von Schwarz ist $[X, Y] = 0$ und es folgt

$$\begin{aligned} \bar{D}_Y \bar{D}_X U - \bar{D}_X \bar{D}_Y U + \bar{D}_{[X, Y]} U &= \frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial H_m}{\partial t_j} D_{\frac{\partial}{\partial x_m}} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &\quad - \frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial H_m}{\partial t_j} D_{\frac{\partial}{\partial x_l}} D_{\frac{\partial}{\partial x_m}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial H_m}{\partial t_j} R \left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= R \left(\frac{\partial H_l}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial H_m}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= R(\bar{X}, \bar{Y})U \end{aligned}$$

Theorem 4.5 (Erste Variationsformel). Sei $H : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (M, g)$ eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit. Sei $c(s) := H(s, 0)$. H heisst Variation von c . Für jedes t ist $c_t(s) := H(s, t)$ eine Kurve in M . Sei $Y(s)$ das durch

$$Y(s) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(s, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0}$$

definierte Vektorfeld längs c . Dann gilt

(1)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(c_t) = g(Y(b), c'(b)) - g(Y(a), c'(a)) - \int_a^b g\left(Y(s), \frac{D}{ds}c'(s)\right) ds$$

(2) Genau dann ist c kritisch bzgl. E , d.h. $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(c_t) = 0$ für jede Variation mit festen Enden, falls c eine Geodätische ist.

(3) Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt für jede Variation

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(c_t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(c_t)$$

(4) c ist kritisch bzgl. L genau dann, wenn eine Uparametrisierung von c eine Geodätische ist.

Beweis. (1) Es ist

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial s} = \frac{d}{ds} H(s, t) = \frac{d}{ds} c_t(s) = c'_t(s)$$

Nach Definition ist

$$E(c_t) = \frac{1}{2} \int_a^b g(c'_t(s), c'_t(s)) ds$$

Es gilt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} g(c'_t(s), c'_t(s)) = g\left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{\partial}\right) \quad (2)$$

$$= g\left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) \quad (\text{Satz 4.4(1)}) \quad (1)$$

$$= \frac{d}{ds} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right) - g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s}\right) \quad (2)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(c_t) &= \int_a^b \frac{d}{ds} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \bar{\partial}\right) ds - \int_a^b g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s}\right) ds \\ &= g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_b, \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_b\right) - g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_a, \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_a\right) \\ &\quad - \int_a^b g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s}\right) ds \\ &= g(Y(b), c'(b)) - g(Y(a), c'(a)) - \int_a^b g\left(Y(s), \frac{D}{ds}c'(s)\right) ds \end{aligned}$$

(2) Ist c Geodätisch, so verschwindet das Integral. Ist H eine Variation, die die Enden festlässt, so ist $Y(a) = Y(b) = 0$ und die beiden Randterme verschwinden ebenfalls.

Für die Umkehrung wählen wir eine Variation H so dass $Y(s) = f(s) \frac{D}{ds} c'(s)$, wobei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $f(a) = f(b) = 0$. Ist c kritisch bzgl. E , so folgt

$$\int_a^b f(s) g\left(\frac{D}{ds} c'(s), \frac{D}{ds} c'(s)\right) ds = 0$$

Das gilt für alle f , also ist $g\left(\frac{D}{ds} c'(s), \frac{D}{ds} c'(s)\right) = 0$, d.h. $\frac{D}{ds} c'(s) = 0$ und c ist Geodätische.

(3) Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(c'_t(s), c'_t(s))^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(c'_t(s), c'_t(s))}{g(c'_t(s), c'_t(s))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(c'_t(s), c'_t(s)) \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(c_t) &= \int_a^b \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(c'_t(s), c'_t(s))^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(c'_t(s), c'_t(s)) ds \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(c_t) \end{aligned}$$

(4) Sei c kritisch bzgl. L . Wähle Parametrisierung c_1 nach Bogenlänge. Dann ist c_1 ebenfalls kritisch bzgl. L . Nach (3) ist c_1 auch kritisch bzgl. E und nach (2) ist c_1 Geodätische.

Sei umgekehrt eine Umparametrisierung c_1 von c eine Geodätische. Dann ist c_1 kritisch bzgl. L , also auch c .

Theorem 4.6 (Zweite Variationsformel). Sei $c : [0, L] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, H eine Variation von c und

$$Y(s, t) := dH|_{(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\bar{\partial}}{\partial t},$$

ein Vektorfeld längs H . Setze

$$Y'(s) := \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y(s, 0)$$

ein Vektorfeld längs c . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} E(c_t) &= g\left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(L, 0), c'(L)\right) - g\left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0, 0), c'(0)\right) \\ &\quad + \int_0^L \left(\|Y'(s)\|^2 - R(Y(s), c'(s), Y(s), c'(s)) \right) ds \end{aligned} \tag{1}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} L(c_t) &= g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(L, 0), c'(L) \right) - g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0, 0), c'(0) \right) \\ &\quad + \int_0^L \left(\|Y'(s)\|^2 - R(Y(s), c'(s), Y(s), c'(s)) - \langle c'(s), Y'(s) \rangle^2 \right) ds \end{aligned}$$

(3) Ist $\tilde{Y} := Y - \langle c', Y \rangle c'$ die normale Komponente von Y , so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} L(c_t) &= g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(L, 0), c'(L) \right) - g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0, 0), c'(0) \right) \\ &\quad + \int_0^L \left(\|\tilde{Y}'(s)\|^2 - R(\tilde{Y}(s), c'(s), \tilde{Y}(s), c'(s)) \right) ds \end{aligned}$$

Beweis. (1) Sei $X := dH \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = \overline{\frac{\partial}{\partial s}}$, das ist Vektorfeld längs H . Dann ist wegen Satz 4.4 (2)

$$\frac{\partial}{\partial t} g(X, X) = 2g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} X, X \right) = 2g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X \right)$$

Mit Satz 4.4 (3) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(X, X) &= 2g \left(\underbrace{\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y}_{\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y - R\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right)Y}, X \right) + 2g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, \underbrace{\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} X}_{\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y} \right) \end{aligned}$$

An der Stelle $t = 0$ ist $X = c'$ und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} g(X, X) &= \underbrace{g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X \right)}_{\frac{\partial}{\partial s} g \left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X \right)} - R(Y, c', Y, c') + \|Y'\|^2 \end{aligned}$$

Integriert man von 0 bis L , so ergibt sich die erste Gleichung.

(2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(c_t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_0^L g(c'_t(s), c'_t(s))^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} g(X, X)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(X, X) ds \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} L(c_t) = \int_0^L \left[-\frac{1}{4} g(X, X)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(X, X) \right)^2 + \frac{1}{2} g(X, X)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} g(X, X) \right] ds$$

Für die Punkte $H(s, 0)$ ist $g(X, X) = 1$, also

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} L(c_t) = \int_0^L \left[\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} g(X, X) - \frac{1}{4} \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g(X, X) \right)^2 \right] ds$$

Der erste Term ist $\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(c_t)$. Für den zweiten Term benutzen wir Satz 4.4:

$$\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} X - \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y = \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} - \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} = \overline{\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right]} = 0$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g(X, X) &= 2g\left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} X, X\right) \\ &= 2g\left(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X\right) \\ &= 2g(Y'(s), c'(s)) \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung.

(3) Wegen $\tilde{Y} = Y - g(c', Y) c'$ folgt

$$\begin{aligned} \tilde{Y}'(s) &= Y'(s) - \underbrace{g(D_{\frac{\partial}{\partial s}} c', Y)}_{=0} c' - g\left(c', D_{\frac{\partial}{\partial s}} Y\right) c' - g(c', Y) \underbrace{D_{\frac{\partial}{\partial s}} c'}_{=0} \\ &= Y'(s) - g(c', Y') c'. \end{aligned}$$

Wegen der Antisymmetrie von R gilt $R(Y, c', Y, c') = R(\tilde{Y}, c', \tilde{Y}, c')$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}'(s)\|^2 &= g(\tilde{Y}', \tilde{Y}') \\ &= g(Y', Y') - 2g(c', Y') g(c', Y') + g(c', Y')^2 \\ &= \|Y'\|^2 - \langle c', Y' \rangle^2 \end{aligned}$$

5. Geometrie und Topologie

Theorem 5.1 (Synge). Sei (M, g) eine kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit mit gerader Dimension n und mit strikt positiver Schnittkrümmung. Dann ist M einfach zusammenhängend.

Beweis. Angenommen M ist nicht einfach zusammenhängend. Nach dem Theorem von Hadamard gibt es eine geschlossene Geodätische $c : [0, L] \rightarrow M$ deren Länge in ihrer freien Homotopieklasse minimal ist. Sei $\Phi : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(L)}M = T_{c(0)}M$ die Parallelverschiebung längs c . Da c Geodätische ist, gilt $\Phi(c'(0)) = c'(0)$. Φ ist eine orientierungserhaltende orthogonale Abbildung von $T_{c(0)}M$, die $c'(0)$ fixiert. Der

Raum $c'(0)^\perp$ ist ein Unterraum der Dimension $n-1$, der ebenfalls fixiert wird. Da jede Abbildung in $SO(n-1)$ einen Fixpunkt besitzt (da $n-1$ ungerade ist), gibt es $y \in c'(0)^\perp, y \neq 0$ mit $\Phi(y) = y$.

Die Parallelverschiebung längs c liefert ein Vektorfeld Y . Wähle eine Variation H von c mit $Y(s) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} H(s, t)$. Dann ist $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(c_t) = 0$, da c Geodätische ist.

Nach der zweiten Variationsformel ist

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} L(c_t) = \int_0^L [\underbrace{\|Y'(s)\|^2}_{=0} - \underbrace{R(Y(s), c'(s), Y(s), c'(s))}_{>0} - \langle c'(s), Y'(s) \rangle^2] ds < 0$$

Für kleine t ist also $L(c_t) < L(c)$, das ist ein Widerspruch.

BEISPIEL

- (1) \mathbb{RP}^2 hat Schnittkrümmung $K \equiv 1$, gerade Dimension, aber ist nicht einfach zusammenhängend. Die Voraussetzung M orientierbar gilt hier nicht. Die Abbildung Φ im Beweis ist dann $\Phi(y) = -y$ und hat keinen Fixpunkt.
- (2) \mathbb{RP}^3 hat Schnittkrümmung $K \equiv 1$, ist orientierbar, aber nicht einfach zusammenhängend. Die Dimension ist nicht gerade.
- (3) Ein flacher Torus $T_\Gamma = \mathbb{R}^2/\Gamma$ hat gerade Dimension, ist orientierbar, hat nichtnegative Schnittkrümmung, aber ist nicht einfach zusammenhängend. Im Beweis kriegt man nur $\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} L(c_t) = 0$. In der Tat kriegt man Scharen paralleler Geodätischer.

Theorem 5.2 (Myers). Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa g$, wobei $\kappa > 0$. Dann ist $\text{diam}(M, g) \leq \text{diam } S^n(\kappa) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Ausserdem ist M kompakt und hat endliche Fundamentalgruppe.

Beweis. Sei $L < \text{diam}(M, g)$. Dann gibt es $p, q \in M$ mit $d(p, q) = L$. Wähle eine minimale Geodätische $c : [0, L] \rightarrow M$ mit $c(0) = p, c(L) = q$, nach Bogenlänge parametrisiert. Das ist wegen Theorem von Hopf-Rinow möglich.

Wähle Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von $T_p M$ mit $e_1 = c'(0)$. Verschiebe e_i parallel entlang c , das liefert parallele Vektorfelder X_1, \dots, X_n entlang c . Wir setzen

$$Y_i(s) := \sin \frac{\pi s}{L} X_i(s)$$

Dann ist $Y_i(0) = 0, Y_i(L) = 0$.

Die Variation mit Variationsvektorfeld $Y_i, i \geq 2$ lässt also die Endpunkte fest. Da c längenminimierend ist und nach Bogenlänge parametrisiert, ist C auch energieminimierend (denn $E(c) = \frac{1}{2}L(c)$), und gilt $\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(c_t) \geq 0$. Aber es ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(c_t) &= \underbrace{g(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y_i(L, 0), c'(L))}_{=0} - \underbrace{g(\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y_i(0, 0), c'(0))}_{=0} \\ &\quad + \int_0^L \left(\|Y_i'(s)\|^2 - R(Y_i(s), c'(s), Y_i(s), c'(s)) \right) ds \end{aligned}$$

Da X_i parallel ist, gilt

$$Y_i'(s) = \frac{D}{ds} Y = \frac{D}{ds} \sin \frac{\pi s}{L} X_i = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi s}{L} X_i$$

Es folgt $\|Y_i'(s)\|^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi s}{L}$. und somit

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^L \left\{ \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi s}{L} - \sin^2 \frac{\pi s}{L} R(X_i, c', X_i, c') \right\} ds \\
&= \int_0^L \sin^2 \frac{\pi s}{L} \left\{ \frac{\pi^2}{L^2} - R(X_i, c', X_i, c') \right\} ds
\end{aligned}$$

Summiert man über alle $i = 2, \dots, n$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^L \sin^2 \frac{\pi s}{L} \left\{ (n-1) \frac{\pi^2}{L^2} - \text{Ric}(c', c') \right\} ds \\
&\leq \int_0^L \sin^2 \frac{\pi s}{L} \left\{ (n-1) \frac{\pi^2}{L^2} - (n-1)\kappa \right\} ds
\end{aligned}$$

Das ist nur möglich, wenn $(n-1) \frac{\pi^2}{L^2} - (n-1)\kappa \geq 0$, d.h. $L \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Da $L < \text{diam}(M, g)$ beliebig war, folgt $\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Nach dem Satz von Hopf-Rinow ist M kompakt (denn M ist abgeschlossen und beschränkt).

Sei \tilde{M} die universelle Überlagerung von M . Dann trägt \tilde{M} eine induzierte Riemannsche Metrik, die lokal isometrisch zu (M, g) ist, also auch $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$ erfüllt. Also ist auch \tilde{M} kompakt und daher $\pi_1(M)$ endlich.

Bemerkung: Es gibt vollständige, nicht kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $\text{Ric} > 0$.

6. Jacobifelder

Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und X ein Vektorfeld längs c , welches in den Endpunkten $c(0)$ und $c(L)$ verschwindet. Definiere

$$I(X, X) := \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(c_t) = \int_0^L \left[\|X'(s)\|^2 - R(X(s), c'(s), X(s), c'(s)) \right] ds.$$

Die zweite Gleichung folgt aus der zweiten Variationsformel. I heisst Indexform.

Lemma 6.1. I ist eine quadratische Form.

Beweis. Wegen den Symmetrien des Krümmungstensors ist

$$I(X, Y) := \int_0^L [\langle X'(s), Y'(s) \rangle - R(X(s), c'(s), Y(s), c'(s))] ds \quad (6)$$

eine symmetrische Bilinearform, woraus die Behauptung folgt.

Mittels partieller Integration folgt

$$I(X, Y) = - \int_0^L \langle X(s), Y''(s) + R(c'(s), Y(s)) c'(s) \rangle ds$$

Definition 6.2. Ein Vektorfeld Y längs c mit

$$Y''(s) + R(c'(s), Y(s)) c'(s) = 0 \quad (7)$$

heisst Jacobifeld längs c .

SATZ 6.3. (1) Für $v, w \in T_{c(0)}M$ gibt es genau ein Jacobifeld Y längs c mit $Y(0) = v, Y'(0) = w$. Der Vektorraum der Jacobifelder längs c hat also Dimension $2n$.

- (2) Ist $Y(0) = 0, Y'(0) = kc'(0)$, so gilt $Y(s) = ksc'(s)$ für alle s .
(3) Sind $Y(0)$ und $Y'(0)$ orthogonal zu $c'(0)$, so ist auch $Y(s)$ orthogonal zu $c'(s)$ für alle s .

Beweis. (1) Sei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_{c(0)}M$, wobei $e_1 = c'(0)$ ist. Mittels Paralleltransport ergeben sich parallele Vektorfelder X_1, \dots, X_n längs c , die in jedem Punkt eine Orthonormalbasis bilden und es ist $X_1(s) = c'(s)$ für alle s .

Ein beliebiges Vektorfeld Y längs c kann als

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n y_i(s) X_i(s)$$

geschrieben werden, dabei sind die y_i Funktionen auf $[0, L]$.

Es gilt

$$Y'(s) = \sum_{i=1}^n y'_i(s) X_i(s) + y_i(s) \underbrace{X'_i(s)}_{=0}$$

und daher

$$Y''(s) = \sum_{i=1}^n y''_i(s) X_i(s)$$

Y ist Jacobifeld genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= Y''(s) + R(c'(s), Y(s)) c'(s) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(y''_i(s) X_i(s) + \sum_{j=1}^n \langle R(c'(s), X_i(s)) c'(s), X_j(s) \rangle y_j(s) X_j(s) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(y''_i(s) + \sum_{j=1}^n R(c'(s), X_j(s), c'(s), X_i(s)) y_j(s) \right) X_i(s) \end{aligned}$$

Für $j = 1$ verschwindet der zweite Term, da $X_1(s) = c'(s)$ ist. Also ist Y ein Jacobifeld genau dann, wenn die Funktionen y_i das System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y''_i + \sum_{j=2}^n R(c', X_j, c', X_i) y_j = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

erfüllen. Die Behauptung folgt aus Existenz und Eindeigkeitstheorem.

- (2) Setze $Y(s) := ksc'(s)$. Dann ist $Y'(s) = kc'(s), Y''(s) = 0$ und die Jacobigleichung (7) ist erfüllt.
(3) In diesem Fall ist $y_1(0) = 0, y'_1(0) = 0$. Aus (8) folgt $y''_1(s) = 0$ und damit $y_1(s) = 0$ für alle s .

Satz 6.4. Sei H eine Variation von c , so dass alle c_t ebenfalls Geodätische sind. Dann ist $Y(s) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{s,0}$ ein Jacobifeld längs c . Umgekehrt entsteht jedes Jacobifeld auf diese Art.

Beweis. (1) Sei H eine Variation mit c_t Geodätisch für alle t .
Dann ist

$$\begin{aligned}
Y''(s) &= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \\
&= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} + \underbrace{\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial s}} \left[\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right]}_{=0} \\
&= \bar{D}_{\frac{\partial}{\partial t}} \underbrace{\bar{D}}_{=0(c_t \text{ Geod. })} \underbrace{\frac{\bar{\partial}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s}}_{=0} - \underbrace{\bar{D}}_{\bar{D}[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} + R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \\
&= -R(c'(s), Y(s)) c'(s).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass Y ein Jacobifeld ist.

(2) Sei Y ein Jacobifeld. Sei γ die Geodätische mit $\gamma(0) = c(0), \gamma'(0) = Y(0)$. Seien X_0, X_1 parallele Vektorfelder längs γ mit $X_0(0) = c'(0), X_1(0) = Y'(0)$. Setze $X(t) := X_0(t) + tX_1(t)$ und definiere eine Variation H durch

$$H(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sX(t))$$

Offensichtlich sind die Kurven $c_t(s) = H(s, t)$ Geodätische und $c_0(s) = c(s)$. Nach dem bereits bewiesenen Teil ist

$$Z(s) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(s, t)$$

ein Jacobifeld.

Es ist

$$Z(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(0, t) = \gamma'(0) = Y(0)$$

und

$$\begin{aligned}
Z'(0) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(s, t) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_{\gamma(t)}(sX(t)) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(t) \\
&= X'(0) \\
&= X'_0(0) + X_1(0) \\
&= Y'(0)
\end{aligned}$$

Die beiden Jacobifelder Y und Z erfüllen also die gleichen Anfangsbedingungen und sind daher gleich.

Korollar 6.5. Seien $p \in M$ und $u, v \in T_p M$. Sei $c(s) := \exp_p(sv)$ (eine Geodätische) und Y das Jacobifeld längs c mit $Y(0) = 0, Y'(0) = u$. Dann ist

$$Y(s) = d_{sv} \exp_p su = (d \exp_p)|_{sv} su$$

Beweis. Die relevanten Abbildungen sind

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p M &\rightarrow M \\ d_{sv} \exp_p : \underbrace{T_{sv} T_p M}_{=T_p M} &\rightarrow T_{\exp_p(sv)} M. \end{aligned}$$

Definiere eine Variation von c durch

$$H(s, t) := \exp_p s(v + tu)$$

Jede Kurve $c_t(s) := H(s, t)$ ist eine Geodätische. Nach dem vorigen Satz ist

$$Z(s) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} H(s, t)$$

ein Jacobifeld längs c .

Da $t \mapsto s(v + tu)$ eine Kurve in $T_p M$ ist, die in sv startet und Anfangsvektor su hat, gilt

$$d_{sv} \exp_p su = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \exp_p s(v + tu) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} H(s, t) = Z(s)$$

Es ist

$$Z(0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \underbrace{H(0, t)}_{=p} = 0$$

und

$$Z'(0) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} H(s, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \underbrace{\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} H(s, t)}_{=v+tu} = u.$$

Die beiden Jacobifelder Y und Z haben also die gleichen Anfangswerte und stimmen daher überein.

KAPITEL 5

Submersionen

1. Überlagerungen und Faserbündel

Definition 1.1. Seien \tilde{M}, M differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ heisst Überlagerung, falls

- (1) π surjektiv ist und
- (2) es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U von p in M gibt, so dass

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{i \in I} U_i$$

wobei die U_i offene, paarweise disjunkte Teilmengen von \tilde{M} sind und $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung: Die Funktion $p \mapsto \#\pi^{-1}(p)$ ist lokal konstant. Ist M zusammenhängend, so ist diese Funktion konstant. Diese Zahl nennt man dann Anzahl der Blätter der Überlagerung. Sie kann endlich oder unendlich sein.

BEISPIEL

- (1) $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$ ist eine Überlagerung mit unendlich vielen Blättern.
- (2) $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n = S^n/\{\pm 1\}, x \mapsto [x]$ ist eine Überlagerung mit zwei Blättern.
- (3) $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma = T_\Gamma^n$ ist Überlagerung mit unendlich vielen Blättern.

Definition 1.2. Sei G eine topologische Gruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit \tilde{M} stetig operiert.

- Die Operation heisst eigentlich, wenn die Abbildung $G \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \times \tilde{M}, (g, p) \mapsto (p, gp)$ eigentlich ist (d.h. Urbilder kompakter Mengen unter dieser Abbildung sind wieder kompakt).
- Die Gruppe G operiert frei auf \tilde{M} , wenn für alle $g \in G, g \neq e$ und alle $p \in \tilde{M}$ folgt $gp \neq p$, d.h. nur das neutrale Element e besitzt Fixpunkte.

SATZ 1.3. Ist G eine lokal kompakte, Hausdorffsche topologische Gruppe (z.B. eine Liegruppe), die auf \tilde{M} operiert, so ist die Operation eigentlich genau dann, wenn es zu jedem Paar $p, q \in \tilde{M}$ offene Umgebungen U_p, U_q gibt derart, dass $\{g \in G : gU_p \cap U_q \neq \emptyset\}$ relativ kompakt in G ist.

Zur Erinnerung: relativ kompakt bedeutet, dass der Abschluss kompakt ist. Für diskrete Gruppen ist eine Teilmenge relativ kompakt genau dann, wenn sie endlich ist. Zum Beweis des Satzes siehe Proposition 3.21 in tom Dieck: Transformation groups.

Satz 1.4. Wenn eine diskrete Gruppe G von Diffeomorphismen frei und eigentlich auf einer Mannigfaltigkeit \tilde{M} operiert, dann besitzt $M := \tilde{M}/G$ eine eindeutige differenzierbare Struktur, so dass die Projektion $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung ist.

Lemma 1.5. Operiert G frei, eigentlich und durch Isometrien auf \tilde{M} , so gibt es eine eindeutige Riemannsche Metrik auf M , so dass π eine lokale Isometrie ist (π wird dann auch als Riemannsche Überlagerung bezeichnet).

Beweis. Seien $v, w \in T_p M$. wähle $\tilde{p} \in \tilde{M}$ mit $\pi(\tilde{p}) = p$. Da π eine Überlagerung ist, gibt es eindeutige Vektoren $\tilde{v}, \tilde{w} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ mit $d\pi(\tilde{v}) = v, d\pi_{\tilde{w}}(\tilde{w}) = w$. Dann setzen wir $\langle v, w \rangle_p := \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p}}$.

Ist $\tilde{p}' \in \tilde{M}$ ein anderer Punkt mit $\pi(\tilde{p}') = p$, so gibt es $g \in G$ mit $g\tilde{p} = \tilde{p}'$. Wegen $\pi \circ g = \pi$ gilt $d\pi \circ dg(\tilde{v}) = v$. Da g eine Isometrie ist, gilt

$$\langle dg(\tilde{v}), dg(\tilde{w}) \rangle_{\tilde{p}'} = \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p}}$$

Damit ist die Metrik auf M wohldefiniert. Die Eindeutigkeit ist klar.

BEISPIEL

- (1) $\mathbb{RP}^n = S^n/\{\pm 1\}$ trägt induzierte Metrik.
- (2) $T_\Gamma^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ trägt induzierte Metrik.
- (3) $\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/S^1$ kann durch dieses Lemma noch keine Metrik zugeordnet werden.

Definition 1.6. Seien E, B, F differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $\pi : E \rightarrow B$ heisst Faserbündel mit Faser F , Totalraum E und Basis B , falls

- (1) π ist differenzierbar und surjektiv;
- (2) es gibt offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von B und Diffeomorphismen $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ (sogenannte Trivialisierungen), so dass $h_i(\pi^{-1}(\{x\})) = \{x\} \times F$.

Das Faserbündel heisst trivial, falls E diffeomorph zu $B \times F$ ist, d.h.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\cong} & B \times F \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\
 B & \xrightarrow{id} & B
 \end{array}$$

Sind $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F, h_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$ Trivialisierungen, dann ist

$$\begin{aligned}
 h_j \circ h_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times F \\
 (x, a) &\mapsto (x, h_{ji}(x)a),
 \end{aligned}$$

wobei $h_{ji}(x) : F \rightarrow F$ ein Diffeomorphismus ist. Falls es eine Untergruppe G der Diffeomorphismengruppe von F gibt so dass für alle i, j und alle $x \in U_i \cap U_j$ gilt $h_{ji}(x) \in G$, so heisst G die Strukturgruppe des Bündels.

BEISPIEL

- Ein Faserbündel mit Faser $F = \mathbb{R}^n$ und Strukturgruppe $G = GL(n, \mathbb{R})$ nennt man Vektorraumbündel. Dann hat jede Faser die Struktur eines n -dimensionalen Vektorraumes und die Abbildungen $h_{ji}(x)$ sind Isomorphismen.
- Der Tangentialraum TM ist ein Vektorraumbündel, ebenso der Kotangentialraum T^*M .
- 1-dimensionale Vektorraumbündel sind (bis auf Diffeomorphismus) das triviale Vektorraumbündel $E = S^1 \times \mathbb{R}$ sowie das Bündel $E = [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim; (0, x) \sim (1, -x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- Ist $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung, so gibt es für $x \in M$ eine Umgebung U in M mit $\pi^{-1}(U) = \cup_i U_i \approx U \times I$. Also ist eine Überlagerung auch ein Faserbündel.

Definition 1.7. Eine Gruppe G versehen mit einer differenzierbaren Struktur, so dass die Abbildungen $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ und $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ differenzierbar sind, heisst Liegruppe.

Liegruppen zählen zu den interessantesten Objekten der Mathematik, mit Anwendungen in Geometrie, Topologie und Physik.

BEISPIEL

- Jede endliche Gruppe ist eine (0-dimensionale) Liegruppe.

- $SO(n)$ ist Liegruppe.
- $S^1 = SO(2)$ ist Liegruppe. S^1 kann auch aufgefasst werden als Menge der komplexen Zahlen mit Norm 1, versehen mit der komplexen Multiplikation.
- S^3 kann aufgefasst werden als Menge der Quaternionen mit Norm 1. Die quaternionische Multiplikation macht S^3 zu einer Liegruppe.
- Es gibt viele klassische Matrixgruppen, z.B. $U(n), SU(n), Sp(n), GL(n), SL(n), GL(n, \mathbb{C})$ usw., sie alle sind Liegruppen.

Theorem 1.8. Sei G eine Liegruppe, die auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M frei und eigentlich operiert. Dann trägt der Quotientenraum M/G die Struktur einer Mannigfaltigkeit, so dass $\pi : M \rightarrow M/G$ eine Submersion ist. Die Abbildung $\pi : M \rightarrow M/G$ ist dann ein Faserbündel mit G sowohl als Faser als auch als Strukturgruppe. Man spricht von einem G -Prinzipalbündel.

Zum Beweis siehe Proposition 5.2. in tom Dieck: Transformation groups.

BEISPIEL Die Operation von S^1 auf S^{2n+1} gegeben durch $(z, p) \mapsto zp$ (wobei $z \in S^1 \subset \mathbb{C}, p \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ aufgefasst wird) ist frei und eigentlich. Der Quotientenraum $\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/S^1$ ist ein S^1 -Prinzipalbündel.

2. Riemannsche Submersionen

Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Submersion. Für $q \in M$ nennt man $\pi^{-1}(q)$ die Faser über q . Ist $p \in \tilde{M}$, so heisst

$$V_p := \ker \left(d\pi_p : T_p \tilde{M} \rightarrow T_{\pi(p)} M \right)$$

der Vertikalraum.

Sei \tilde{M} jetzt zusätzlich mit einer Riemannschen Metrik versehen. Dann heisst $H_p := V_p^\perp$ der Horizontalraum. Dann ist $T_p \tilde{M} = V_p \oplus H_p$ und $d\pi|_p : H_p \rightarrow T_{\pi(p)} M$ ist ein Isomorphismus. Falls M eine Riemannsche Metrik trägt, dann heisst π eine Riemannsche Submersion, falls $d\pi|_p : H_p \rightarrow T_{\pi(p)} M$ eine Isometrie ist für alle $p \in \tilde{M}$.

BEISPIEL

(1) Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann ist die Projektion $\pi : (M \times N, g \oplus h) \rightarrow (M, g)$ eine Riemannsche Submersion. Es ist

$$T_{(p,q)} M \times N = \underbrace{T_p M}_{H_{(p,q)} M \times N} \oplus \underbrace{T_q N}_{V_{(p,q)} M \times N}$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ glatt. Die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}, g = dr^2 + f(r)^2 g_1) &\rightarrow (\mathbb{R}^+, dr^2) \\ (r, v) &\mapsto r \end{aligned}$$

ist eine Riemannsche Submersion. Die Fasern sind $(\{r\} \times S^{n-1}, f(r)^2 g_1)$, sie sind nicht isometrisch zueinander (falls f nicht konstant).

(3) Allgemeiner seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ glatt.

$$M \times_f N := (M \times N, g \oplus f^2 h)$$

heisst verzerrtes Produkt. Die Projektion $M \times_f N \rightarrow M$ ist eine Riemannsche Submersion.

Satz 2.1. Sei (\tilde{M}, \tilde{g}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und G eine Liegruppe von Isometrien, die eigentlich und frei auf \tilde{M} operiert. Dann ist $M := \tilde{M}/G$ eine Mannigfaltigkeit, $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Submersion und es gibt genau eine Riemannsche Metrik auf M , so dass π eine Riemannsche Submersion ist.

Beweis. Nach Theorem 1.8 ist M eine Mannigfaltigkeit und π eine Submersion.

Für $p \in M$ wähle $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Ist π eine Riemannsche Submersion, so muss $d\pi|_{H_{\tilde{p}}} : H_{\tilde{p}} \rightarrow T_p M$ eine Isometrie sein. Das zeigt, dass das Skalarprodukt auf $T_p M$ (falls es existiert) eindeutig festgelegt ist.

Nun zur Existenz. Für $v \in T_p M$ setze

$$g(v, v) := \tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{v})$$

wobei $\tilde{v} := \left(d\pi|_{H_{\tilde{p}}}\right)^{-1} v \in H_{\tilde{p}}$. Ist \tilde{q} ein anderer Lift von p , so gibt es eine Isometrie $\gamma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ mit $\tilde{q} = \gamma\tilde{p}$ und das Differential $d\gamma : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ ist eine Isometrie. Wegen $\pi \circ \gamma = \pi$ ist $V_{\tilde{q}} = d\gamma(V_{\tilde{p}})$ und damit auch $H_{\tilde{q}} = d\gamma(H_{\tilde{p}})$. Also ist $d\gamma(\tilde{v}) \in H_{\tilde{q}}\tilde{M}$ der horizontale Lift von v . Wegen

$$\tilde{g}(d\gamma(\tilde{v}), d\gamma(\tilde{v})) = \tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{v})$$

ist g wohldefiniert.

Theorem 2.2 (Geodätische unter Submersionen). Sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine Riemannsche Submersion.

(1) Ist $\tilde{c} : I \rightarrow \tilde{M}$ eine Geodätische mit $\tilde{c}'(0)$ horizontal (d.h. $\in H_{\tilde{c}(0)}\tilde{M}$), dann ist $\tilde{c}'(t)$ horizontal für alle t und $c(t) := \pi(\tilde{c}(t))$ ist eine Geodätische auf M .

(2) Ist $c : I \rightarrow M$ eine Geodätische auf M und ist $\pi(\tilde{p}) = c(0)$, so gibt es einen eindeutigen lokalen horizontalen Lift $\tilde{\gamma}$ (d.h. $\pi \circ \tilde{\gamma} = c, \tilde{\gamma}'(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$), dieser ist eine Geodätische.

(3) Ist \tilde{M} vollständig, so auch M .

Beweis. Schritt 1

Ist $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, so können wir \tilde{v} schreiben als $\tilde{v} = \tilde{v}^h + \tilde{v}^v$ mit $\tilde{v}^h \in H_{\tilde{p}}\tilde{M}$ und $\tilde{v}^v \in V_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Da $d\pi|_{H_{\tilde{p}}} : H_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_p M$ eine Isometrie ist, gilt

$$\|d\pi(\tilde{v})\|^2 = \|\tilde{v}^h\|^2 \leq \|\tilde{v}^h\|^2 + \|\tilde{v}^v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2$$

Also ist $\|d\pi(\tilde{v})\| \leq \|\tilde{v}\|$. Ist $\tilde{\gamma}$ eine Kurve in \tilde{M} , so folgt mit $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma}$

$$l(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt = \int_I \|d\pi(\tilde{\gamma}'(t))\| dt \leq \int_I \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = l(\tilde{\gamma})$$

Für $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{M}$ gilt also

$$d(\pi(\tilde{p}), \pi(\tilde{q})) \leq d(\tilde{p}, \tilde{q})$$

Schritt 2

Sei $c : I \rightarrow M$ eine Geodätische auf M . Für ein genügend kleines Intervall $I' \subset I$ mit $0 \in I'$ ist $c(I')$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M . Da π Submersion ist, ist $\tilde{N} := \pi^{-1}(c(I'))$ eine Untermannigfaltigkeit von \tilde{M} . Wir definieren ein horizontales Vektorfeld X auf \tilde{N} durch

$$X|_{\tilde{p}} := \left(d\pi|_{H_{\tilde{p}}} \right)^{-1} (c'(t))$$

wobei $t \in I'$ eindeutig durch $c(t) = \pi(\tilde{p})$ festgelegt ist.

Ist $\tilde{p} \in \tilde{M}$ mit $\pi(\tilde{p}) = c(0)$, so sei $\tilde{\gamma}$ die Integralkurve von X durch den Punkt \tilde{p} . Offensichtlich ist $\tilde{\gamma}$ eine horizontale Kurve und $\pi \circ \tilde{\gamma} = c$. Für $t_1, t_2 \in I'$ gilt

$$l\left(\tilde{\gamma}|_{[t_1, t_2]}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \|c'(t)\| dt = l\left(c|_{[t_1, t_2]}\right)$$

Da c lokal minimierend ist, gilt für $|t_1 - t_2|$ genügend klein

$$l\left(\tilde{\gamma}|_{[t_1, t_2]}\right) = l\left(c|_{[t_1, t_2]}\right) = d(c(t_1), c(t_2)) \leq d(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\gamma}(t_2))$$

Also ist $\tilde{\gamma}$ lokal minimierend und damit eine Geodätische. Das zeigt (2).

Schritt 3

Sei \tilde{c} eine Geodätische auf \tilde{M} mit $\tilde{c}'(0)$ horizontal.

Sei $v := d\pi_{\tilde{c}(0)}(\tilde{c}'(0))$ und c die Geodätische auf M mit $c(0) = \pi(\tilde{c}(0))$ und $c'(0) = v$. Sei $\tilde{\gamma}$ der im 2. Schritt konstruierte horizontale Lift von c durch $\tilde{c}(0)$. Da $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{c}'(0)$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{c}(0)$ und $\tilde{\gamma}$ Geodätisch ist $\tilde{\gamma} = \tilde{c}$ auf I' . Die Menge J der t , für die $\tilde{c}'(t)$ horizontal ist und für die $\pi(\tilde{c}(t)) = c(t)$ gilt, enthält also I' . Da der Punkt $0 \in I'$ willkürlich gewählt war, folgt dass J offen ist. Andererseits ist J auch abgeschlossen, da π stetig ist. Also ist $J = I$. Das zeigt (1).

Schritt 4

Sei c eine Geodätische auf M . Dann gibt es nach (2) einen lokal definierten horizontalen Lift $\tilde{\gamma}$ von c . Da $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische ist und

\tilde{M} vollständig ist, ist $\tilde{\gamma}$ auf ganz \mathbb{R} definiert. Nach (1) ist $\pi \circ \tilde{\gamma}$ eine auf ganz \mathbb{R} definierte Geodätische, die mit c auf dem Definitionsbereich von c übereinstimmt. c kann also auf ganz \mathbb{R} definiert werden. Nach dem Theorem von Hopf-Rinow ist M vollständig.

Bemerkung: es ist möglich, dass M vollständig ist, aber nicht \tilde{M} . Ist z.B. $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Inklusionsabbildung, so ist π eine Riemannsche Submersion.

DEFINITION 2.3. Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Riemannsche Submersion. Ein Vektorfeld \tilde{X} auf \tilde{M} heisst horizontal (bzw. vertikal), wenn $\tilde{X}_{\tilde{m}} \in H_{\tilde{m}}$ für alle $\tilde{m} \in \tilde{M}$ (bzw. $\tilde{X}_{\tilde{m}} \in V_{\tilde{m}}$ für alle $\tilde{m} \in \tilde{M}$). Ist Y ein Vektorfeld auf M , so heisst das eindeutige horizontale Vektorfeld \tilde{Y} mit $Y = d\pi(\tilde{Y})$ der horizontale Lift von Y .

Bemerkung: es gibt keinen vertikalen Lift.

Satz 2.4. (1) Ein Vektorfeld U auf \tilde{M} ist vertikal genau dann, wenn $U(f \circ \pi) = 0$ für alle Funktionen f auf M .

(2) Sind \tilde{X}, \tilde{Y} horizontale Lifts von X, Y , dann ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$ vertikal.

(3) Ist U vertikal, so ist $[\tilde{X}, U]$ vertikal.

(4) Für die Levi-Civita-Zusammenhänge gilt

$$\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{D_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v,$$

wobei $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$ die vertikale Komponente von $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ist.

Beweis. (1) Es ist $U(f \circ \pi) = d\pi(U)(f)$, und U vertikal genau dann wenn $d\pi(U) = 0$, woraus die Behauptung folgt.

(2) Für $\tilde{m} \in \tilde{M}$ gilt allgemein

$$\tilde{X}(f \circ \pi) \Big|_{\tilde{m}} = d\pi(\tilde{X})(f) \Big|_{\pi(\tilde{m})} = X(f) \Big|_{\pi(\tilde{m})}$$

Es folgt $(Xf) \circ \pi = \tilde{X}(f \circ \pi)$.

Sei $\tilde{f} := f \circ \pi$. Dann folgt $\tilde{X}\tilde{f} = \widetilde{Xf}$ und somit

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{f} &= \tilde{X} \circ \tilde{Y}\tilde{f} - \tilde{Y} \circ \tilde{X}\tilde{f} \\ &= \tilde{X}(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}(Xf) \\ &= (X(Yf) - Y(Xf)) \circ \pi \\ &= ([X, Y]f) \circ \pi. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\widetilde{[X, Y]f} = ([X, Y]f) \circ \pi$$

Es folgt daher $([\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]})\tilde{f} = 0$ für alle f , was nach (1) impliziert, dass $([\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]})$ vertikal ist.

(3) Ist U vertikal, so ist

$$[\tilde{X}, U]\tilde{f} = \tilde{X}(U\tilde{f}) - U(\tilde{X}\tilde{f}) = -U(\widetilde{Xf}) = 0.$$

Somit ist $[\tilde{X}, U]$ vertikal.

(4) Sei Z ein Vektorfeld auf M mit horizontalem Lift \tilde{Z} . Aus der Koszulgleichung folgt

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \tilde{X}\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{Y}\tilde{g}(\tilde{Z}, \tilde{X}) - \tilde{Z}\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &\quad + \tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) - \tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Z}], \tilde{Y}) - \tilde{g}([\tilde{Y}, \tilde{Z}], \tilde{X}) \end{aligned}$$

Es ist $\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = g(Y, Z) \circ \pi$, also $\tilde{X}\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = (Xg(Y, Z)) \circ \pi$ und analog für die beiden folgenden Terme. Da \tilde{Z} horizontal ist, folgt aus (2) $\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) = \tilde{g}(\widetilde{[X, Y]}, \tilde{Z}) = g([X, Y], Z) \circ \pi$ und analog für die letzten beiden Terme. Insgesamt ergibt sich

$$2\tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) = 2g(D_X Y, Z) \circ \pi = 2\tilde{g}(\widetilde{D_X Y}, \tilde{Z})$$

Da das für alle horizontalen Lifts \tilde{Z} stimmt, ergibt sich $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \widetilde{D_X Y}$ vertikal.

Nun sei U vertikal. Dann ist $\tilde{g}(\tilde{Y}, U) = 0, \tilde{g}(U, \tilde{X}) = 0$, denn \tilde{X}, \tilde{Y} sind horizontal. Da $\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ konstant auf den Fasern von π ist, gilt $U\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$. Nach (3) gilt weiterhin $\tilde{g}([\tilde{X}, U], \tilde{Y}) = 0, \tilde{g}([\tilde{Y}, U], \tilde{X}) = 0$. In der Koszulgleichung bleibt nur ein Term übrig:

$$2\tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, U) = \tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}], U)$$

Einsetzen liefert

$$2\tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \widetilde{D_X Y}, U) = \tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}], U) = 2\tilde{g}\left(\frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, U\right)$$

Da das für jedes vertikale U stimmt, folgt $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \widetilde{D_X Y} - \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$ horizontal. Wir haben aber bereits gesehen, dass dieser Term auch vertikal ist, also ist er gleich 0.

3. Der komplex-projektive Raum

Wir betrachten S^{2n+1} als Teilmenge von $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$. Die Liegruppe S^1 operiert auf S^{2n+1} durch

$$\xi, (z^0, \dots, z^n) \mapsto (\xi z^0, \dots, \xi z^n).$$

Offensichtlich ist diese Operation frei. Sie ist auch eigentlich, da $S^1 \times S^{2n-1}$ kompakt ist. Also trägt der Quotient $\mathbb{CP}^n := S^{2n+1}/S^1$ die Struktur einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Ist $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$ eine komplexe Gerade, dann ist $L \cap S^{2n+1}$ ein Orbit der S^1 -Operation und jedes Orbit entsteht so. Also kann man \mathbb{CP}^n auch auffassen als Menge der komplexen Geraden in \mathbb{C}^{n+1} . Ordnet man jedem Punkt $0 \neq z \in \mathbb{C}^{n+1}$ die von ihm erzeugte Gerade $\mathbb{C}z$ zu, so bekommt man eine Abbildung $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Da z_1, z_2 die gleiche Gerade erzeugen genau dann, wenn sie sich um ein Element aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ unterscheiden, folgt $\mathbb{CP}^n \simeq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Lemma 3.1. Die Projektionsabbildung $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ ist eine Submersion. Horizontal- und Vertikalraum sind gegeben durch

$$\begin{aligned} H_z &= (\mathbb{C}z)^\perp \\ V_z &= \mathbb{R}iz, \quad z \in S^{2n+1} \end{aligned}$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Projektion $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ eine Submersion ist (siehe Satz 1.8). Wir möchten einen direkten Beweis dafür geben.

Sei $z \in S^{2n+1}$. Trivialerweise gilt $T_z \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}z \oplus T_z S^{2n+1}$. Da die komponentenweise Multiplikation mit i eine orthogonale Abbildung von $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ ist, liegt der Vektor iz in $T_z S^{2n+1}$. Wir können daher

$$\mathbb{C}^{n+1} \simeq T_z \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}iz \oplus H_z$$

schreiben, wobei H_z ein n -dimensionaler komplexer Unterraum von \mathbb{C}^{n+1} ist.

Die Gruppe $U(n+1)$ ist die Untergruppe von $SO(2n+2)$ der Elemente, die mit i kommutieren. Wendet man $g \in U(n+1)$ auf die obige Gleichung an, so folgt

$$T_{gz} \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}gz \oplus \mathbb{R}igz \oplus g(H_z)$$

und daraus folgt $H_{gz} = g(H_z)$.

Wir möchten zeigen, dass π eine Submersion ist, d.h. dass $d\pi : T_z S^{2n+1} \rightarrow T_{\pi(z)} \mathbb{CP}^n$ surjektiv ist.

Es ist $T_z S^{2n+1} = \mathbb{R}iz \oplus H_z$. Der erste Summand ist der Tangentialraum an den Orbit $S^1 z$ (leite die Kurve $t \mapsto e^{it}z$ bei $t=0$ ab). Also verschwindet $d\pi$ auf diesem Faktor.

Wir müssen daher zeigen, dass $d\pi : H_z \rightarrow T_{\pi(z)} \mathbb{CP}^n$ ein Isomorphismus ist. Ohne Einschränkung können wir dies für den Punkt $z_0 := (1, 0, \dots, 0)$ zeigen. In einer Umgebung von z_0 haben wir die Karte

$$[z^0 : z^1 : \dots : z^n] \mapsto \left(\frac{z^1}{z^0}, \dots, \frac{z^n}{z^0} \right) \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

Der Tangentialraum $T_{z_0} S^{2n+1}$ ist gegeben durch z_0^\perp , also durch

$$\{(i\eta^0, \xi^1, \dots, \xi^n), \eta^0 \in \mathbb{R}, \xi^j \in \mathbb{C}\}$$

Die Abbildung $d\pi$ ist in Koordinaten gegeben durch

$$(i\eta^0, \xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

Es folgt, dass $d\pi|_{z_0} : H_{z_0} \rightarrow T_{\pi(z_0)} \mathbb{CP}^n$ ein Isomorphismus. Weiterhin folgt

$$V_{z_0} = \ker d\pi = \{(i\eta^0, 0, \dots, 0), \eta^0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}iz_0$$

und

$$H_{z_0} = (\ker d\pi)^\perp = \{(0, \xi^1, \dots, \xi^n), \xi^j \in \mathbb{C}\} = (\mathbb{C}z_0)^\perp$$

Aufgrund des Lemmas und aufgrund von Satz 2.1 gibt es eine eindeutige Riemannsche Metrik, so dass π eine lokale Isometrie ist. Diese Metrik ist die Standardmetrik auf \mathbb{CP}^n und heisst Fubini-Study-Metrik.

Auf \mathbb{CP}^n kann eine fast-komplexe Struktur J eingeführt werden: das ist eine Familie von Abbildungen $J_m : T_m \mathbb{CP}^n \rightarrow T_m \mathbb{CP}^n, m \in \mathbb{CP}^n$ mit $J_m^2 = -Id_m$. Für $v \in T_m \mathbb{CP}^n$ sei \tilde{v} der horizontale Lift (in einem beliebigen Lift \tilde{m} von m). Wegen $\tilde{v} \in H_{\tilde{m}} = (\mathbb{C}\tilde{m})^\perp$ ist auch $i\tilde{v}$ horizontal. Dann setzt man

$$Jv := d\pi(i\tilde{v})$$

Da die Multiplikation mit Elementen aus S^1 und die Multiplikation mit i kommutieren, ist diese Definition unabhängig von der Wahl von \tilde{m} . Ist nämlich $\tilde{m}' = \xi\tilde{m}$ mit $\xi \in S^1$, so ist $\tilde{v}' = d\xi(\tilde{v})$ und es folgt

$$d\pi(i\tilde{v}') = d\pi(id\xi(\tilde{v})) = d\pi(d\xi(i\tilde{v})) = d\pi(i\tilde{v})$$

Theorem 3.2. Sei $m \in \mathbb{CP}^n$ und $E \subset T_m \mathbb{CP}^n$ eine zweidimensionale Ebene mit Orthonormalbasis u, v . Dann gilt für die Schnittkrümmung

$$K(E) = 1 + 3 \cos^2(\theta)$$

wobei θ der Winkel zwischen u und Jv ist. Insbesondere variiert die Schnittkrümmung zwischen $+1$ und $+4$.

Beweis. Wir betrachten die Geodätischen

$$\tilde{c}_t(s) := \cos(s)\tilde{m} + \sin(s)(\cos(t)\tilde{v} + \sin(t)\tilde{u}), \quad \tilde{m} \in S^{2n+1}, \tilde{u}, \tilde{v} \in H_{\tilde{m}}, \tilde{u} \perp \tilde{v}.$$

Wegen $\tilde{c}'_t(0) = (\cos(t)\tilde{v} + \sin(t)\tilde{u}) \in H_{\tilde{m}}$ sind diese Geodätischen horizontal. Nach Theorem 2.2 sind die durch $c_t(s) := \pi(\tilde{c}_t(s))$ definierten Kurven Geodätische auf \mathbb{CP}^n .

Sei \tilde{U} das parallele Vektorfeld längs \tilde{c} mit $\tilde{U}(0) = \tilde{u}$. Da $\tilde{u} \perp \tilde{c}(s)$, d.h. $\tilde{u} \in T_{\tilde{c}(s)}S^{2n+1}$ für alle s , ist $\tilde{U}(s) = \tilde{u}$ (hier wird auf der rechten Seite \tilde{u} als konstantes Vektorfeld in \mathbb{C}^{n+1} betrachtet).

Sei $\tilde{H}(s, t) := \tilde{c}_t(s)$, $H(s, t) := c_t(s)$. Da beide Variationen geodätisch sind, sind die Variationsvektorfelder \tilde{Y} und Y Jacobifelder. Es gilt

$$\tilde{Y}(s) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{H}(s, t) = \sin(s)\tilde{u} = \sin(s)\tilde{U}(s)$$

Es folgt

$$Y(s) = d\pi(\tilde{Y}(s)) = \sin(s) \underbrace{d\pi(\tilde{U}(s))}_{=: U(s)} \quad (9)$$

1. Fall $\tilde{u} \perp i\tilde{v}$. Dann ist $\langle \tilde{U}(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$ und $\langle \tilde{U}(s), i\tilde{c}'(s) \rangle = 0$ für alle s .

Es folgt $\tilde{U}(s) \in H_{\tilde{c}(s)} = (\mathbb{C}\tilde{c}'(s))^\perp$, d.h. $\tilde{U}(s)$ ist horizontal. Da \tilde{c} horizontal ist, ist $\tilde{c}'(s)$ der horizontale Lift von $c'(s)$. Nach Satz 2.4 (4) folgt

$$\underbrace{0 = \tilde{D}_{\tilde{c}'(s)}\tilde{U}}_{\tilde{U} \text{ parallel}} = \widetilde{D_{c'}U} + \frac{1}{2} [\tilde{c}', \tilde{U}]^v.$$

Schaut man horizontale und vertikale Komponente dieser Gleichung an, so folgt $\widetilde{D_{c'}U} = 0$, also $D_{c'}U = 0$. Wir erhalten, dass U parallel ist.

Jetzt leiten wir $Y(s) = \sin(s)U(s)$ nach s ab und finden $Y'(s) = \cos(s)U(s)$ und $Y''(s) = -\sin(s)U(s) = -Y(s)$.

Andererseits ist Y ein Jacobifeld, d.h. $Y'' + R(c', Y)c' = 0$. Es folgt

$$R(c'(s), Y(s))c'(s) = Y(s)$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch $\sin(s)$, so erhält man

$$R(c'(s), U(s))c'(s) = U(s)$$

Lässt man s gegen 0 konvergieren folgt $R(v, u)v = u$.

2. Fall $\tilde{u} = i\tilde{v}$ (d.h. $u = Jv$). Dann ist $\tilde{U}(s) = i\tilde{v}$ für alle s .

Wir haben $\tilde{c}(s) = \cos(s)\tilde{m} + \sin(s)\tilde{v}$, also $i\tilde{c}'(s) = -\sin(s)i\tilde{m} + \cos(s)i\tilde{v}$. Es folgt

$$\tilde{D}_{\tilde{c}'(s)}i\tilde{c}'(s) = -\cos(s)i\tilde{m} - \sin(s)i\tilde{v} = -i\tilde{c}(s)$$

d.h. $\tilde{D}_{c'} i\tilde{c}'$ ist vertikal. Wegen

$$\tilde{D}_{c'} (i\tilde{c}') = \widetilde{D_{c'} (Jc')} + \frac{1}{2} [\tilde{c}', i\tilde{c}']^v$$

folgt $D_{c'} (Jc') = 0$.

Das Vektorfeld \tilde{U} ist nicht mehr horizontal wie im ersten Fall. Die horizontale Komponente im Punkt $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{U}(s) - \langle \tilde{U}(s), i\tilde{c}(s) \rangle i\tilde{c}(s) &= i\tilde{v} - \langle i\tilde{v}, i\tilde{c}(s) \rangle i\tilde{c}(s) \\ &= i\tilde{v} - \sin(s)(\cos(s)i\tilde{m} + \sin(s)i\tilde{v}) \\ &= \cos(s)(\cos(s)i\tilde{v} - \sin(s)i\tilde{m}) \\ &= \cos(s)i\tilde{c}'(s) \end{aligned}$$

Es folgt

$$Y(s) = d\pi(\tilde{Y}(s)) = \sin(s)d\pi(\tilde{U}(s)) = \cos(s)\sin(s)Jc'(s) \quad (10)$$

Zweimaliges Ableiten liefert

$$Y''(s) = (\cos(s)\sin(s))'' Jc'(s) = -4\cos(s)\sin(s)Jc'(s) = -4Y(s)$$

Da Y die Jacobigleichung $Y'' + R(c', Y)c' = 0$ erfüllt, ergibt sich

$$R(c'(s), Y(s))c' = 4Y(s)$$

Dividiert man durch $\cos(s)\sin(s)$ und lässt s gegen 0 gehen, so ergibt sich

$$R(v, u)v = 4u$$

Allgemeiner Fall: Ein beliebiger Vektor u kann geschrieben werden als

$$u = \sin(\theta)u_0 + \cos(\theta)Jv$$

wobei $u_0 \perp Jv$. Der Winkel θ misst, wie komplex die Ebene E ist: $\theta = 0$ entspricht einer komplexen Ebene in $T_m \mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n$, während $\theta = \frac{\pi}{2}$ einer isotropen Ebene $E = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^n$ entspricht. Dieser Winkel wird Kählerwinkel genannt. Aus Linearität von R folgt

$$R(v, u)v = \sin(\theta)u_0 + 4\cos(\theta)Jv$$

Die Schnittkrümmung von E ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} K(E) &= \langle R(v, u)v, u \rangle \\ &= \langle \sin(\theta)u_0 + 4\cos(\theta)Jv, \sin(\theta)u_0 + \cos(\theta)Jv \rangle \\ &= \sin^2(\theta) + 4\cos^2(\theta) \\ &= 1 + 3\cos^2(\theta) \end{aligned}$$

4. Längen kleiner Kreise

Lemma 4.1. Sei Y ein Vektorfeld längs einer Kurve c . Seien Y_i parallele Vektorfelder längs c mit $Y_i(0) = \frac{D^i}{dt^i} Y(0)$. Dann gilt für alle k

$$Y(t) = \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} Y_i(t) + o(t^k)$$

Beweis. Seien E_1, \dots, E_n eine Basis paralleler Vektorfelder längs c . Dann können wir Y schreiben als

$$Y(t) = \sum_j a_j(t) E_j(t)$$

Es folgt $Y_i(t) = \sum_j a_j^{(i)}(0) E_j(t)$.

Nach Taylor gilt $a_j(t) = \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} a_j^{(i)}(0) + o(t^k)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_j a_j(t) E_j(t) \\ &= \sum_j \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} a_j^{(i)}(0) E_j(t) + o(t^k) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} Y_i(t) + o(t^k) \end{aligned}$$

Theorem 4.2 (Längen kleiner Kreise). Sei $m \in M$ und u, v eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Unterraums $P \subset T_m M$. Setze

$$H(r, \theta) := \exp_m r(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$$

Sei C_r der Kreis $\theta \mapsto H(r, \theta)$. Dann gilt für seine Länge

$$L(C_r) = 2\pi r \left(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2) \right)$$

Beweis. Sei Y_θ das Jacobifeld entlang der Geodätischen $t \mapsto H(t, \theta)$, welches durch die geodätische Variation H definiert wird. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial \theta} H(r, \theta) = Y_\theta(r)$ und somit

$$L(C_r) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} H(r, \theta) \right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \|Y_\theta(r)\| d\theta$$

Fixiere ein θ . Sei c die Geodätische $t \mapsto H(t, \theta)$. Dann gilt $Y_\theta(0) = 0$, da die Variation H den Punkt m festlässt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
Y'_\theta(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{d\theta} \right|_\theta H(r, \theta) \\
&= \left. \frac{d}{d\theta} \right|_\theta \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(t, \theta) \\
&= \left. \frac{d}{d\theta} \right|_\theta \cos(\theta)u + \sin(\theta)v \\
&= -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v
\end{aligned}$$

Die Jacobigleichung $Y''_\theta(t) + R(c'(t), Y_\theta(t))c'(t) = 0$ impliziert

$$Y''_\theta(0) = -R(c'(0), Y_\theta(0))c'(0) = 0$$

Wir leiten die Jacobigleichung nach t ab und finden

$$\begin{aligned}
Y'''_\theta(0) &= - \left(\left. \frac{D}{dt} R(c'(t), Y_\theta(t))c'(t) \right|_{t=0} \right) \\
&= -R(c'(0), Y'_\theta(0))c'(0) \\
&= -R(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v, -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v)(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v) \\
&= -R(u, v)(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)
\end{aligned}$$

denn beim Ableiten mittels Leibnitzregel liefert wegen $Y_\theta(0) = 0$ nur die Ableitung des Y_θ -Terms einen Ausdruck ungleich 0.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
g(Y'''_\theta(0), Y'_\theta(0)) &= -R(u, v, \cos(\theta)u + \sin(\theta)v, -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v) \\
&= -R(u, v, u, v) = -K(P)
\end{aligned}$$

Es folgt mit Lemma 4.1

$$\begin{aligned}
\|Y_\theta(r)\| &= \left\| rY'_\theta(0) + \frac{r^3}{6}Y'''_\theta(0) \right\| + o(r^3) \\
&= \left\langle rY'_\theta(0) + \frac{r^3}{6}Y'''_\theta(0) + o(r^3), rY'_\theta(0) + \frac{r^3}{6}Y'''_\theta(0) + o(r^3) \right\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(r^2 \|Y'_\theta(0)\|^2 + \frac{r^4}{3}g(Y'_\theta(0), Y'''_\theta(0)) + o(r^4) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= r \left(1 - \frac{r^2}{3}K(P) + o(r^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= r \left(1 - \frac{r^2}{6}K(P) + o(r^2) \right)
\end{aligned}$$

Integrieren über θ liefert

$$L(C_r) = \int_0^{2\pi} r \left(1 - \frac{r^2}{6}K(P) + o(r^2) \right) d\theta = 2\pi r \left(1 - \frac{K(P)}{6}r^2 + o(r^2) \right).$$

Korollar 4.3. Sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine Riemannsche Submersion, $\tilde{m} \in \tilde{M}, m := \pi(\tilde{m})$. Seien $u, v \in T_m M$ eine Orthonormalbasis mit horizontalen Lifts \tilde{u}, \tilde{v} . Seien $P \subset T_m M, \tilde{P} \subset T_{\tilde{m}} \tilde{M}$ die aufgespannten Ebenen. Dann gilt

$$K(P) \geq K(\tilde{P})$$

Beweis. Die Geodätischen $r \mapsto \exp_{\tilde{m}} r(\cos(\theta)\tilde{u} + \sin(\theta)\tilde{v})$ sind horizontal und projizieren nach Theorem 2.2 auf die Geodätischen $r \mapsto \exp_m r(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$. Es folgt $\pi(\tilde{C}_r) = C_r$ für alle r . Da π Längen verkleinert (siehe Theorem 2.2), gilt $L(C_r) = L(\pi(\tilde{C}_r)) \leq L(\tilde{C}_r)$. Setzt man die eben bewiesenen Asymptotiken ein, so folgt

$$2\pi r \left(1 - \frac{K(P)}{6}r^2 + o(r^2)\right) \leq 2\pi r \left(1 - \frac{K(\tilde{P})}{6}r^2 + o(r^2)\right).$$

Dividiert man durch $2\pi r$ und lässt danach r gegen 0 gehen, so folgt $K(P) \geq K(\tilde{P})$.

5. Konjugierte Punkte

Lemma 5.1. Sei $v \in T_m M, \phi(t) := tv, t \in [0, 1]$ und ψ eine stückweise differenzierbare Kurve in $T_m M$ mit $\psi(0) = 0, \psi(1) = v$. Dann gilt

$$L(\exp_m \circ \psi) \geq L(\exp_m \circ \phi) = \|v\|$$

Beweis. Das folgt aus dem Beweis von Theorem 3.4, 2. Fall.

Definition 5.2. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische, $p = c(a), q = c(b)$. Dann heissen p und q konjugiert längs c , falls es ein nichttriviales Jacobifeld Y längs c gibt mit $Y(a) = 0, Y(b) = 0$.

Lemma 5.3. Sei $c(s) = \exp_p(sv)$ und $q = \exp_p(rv)$. Genau dann sind p und q konjugiert längs c , wenn das Differential

$$d_{rv} \exp_p : T_p M \rightarrow T_q M$$

singulär ist (d.h. nicht bijektiv).

Beweis. Nach Korollar 6.5 gilt

$$Y(r) = d_{rv} \exp_p rY'(0)$$

Ist Y ein nichttriviales Jacobifeld längs c mit $Y(0) = 0, Y(r) = 0$, so ist $Y'(0) \neq 0$ und es folgt $d_{rv} \exp_p$ ist singulär.

Ist umgekehrt $d_{rv} \exp_p$ singulär, so gibt es $u \in T_p M$ mit $d_{rv} \exp_p u = 0$. Für das Jacobifeld Y mit $Y(0) = 0, Y'(0) = \frac{u}{r}$ gilt dann $Y(r) = d_{rv} \exp_p u = 0$. Damit sind p und q konjugiert.

Theorem 5.4. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische mit $c(a) = p, c(b) = q$.

(1) Gibt es auf c keine zu p konjugierten Punkte, dann ist c lokal minimierend in folgendem Sinne: es gibt ein $\epsilon > 0$ so dass für jede Kurve γ mit $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ und $d(\gamma(s), c(s)) < \epsilon$ gilt dass

$$L(\gamma) \geq L(c)$$

Dabei gilt Gleichheit nur, wenn γ eine Umparametrisierung von c ist.

(2) Gibt es ein $s_0 \in (a, b)$ so dass p und $c(s_0)$ konjugiert sind, dann gibt es eine Variation c_t von c mit festen Enden und

$$L(c_t) < L(c)$$

für kleine t .

Beweis. (1) Ohne Einschränkung sei $a = 0, b = 1$. Sei $v = c'(0)$ und $\phi(s) := sv \in T_p M$. Nach Lemma 5.3 ist \exp_p in einer Umgebung von $\phi(s)$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir können die kompakte Menge $\phi([0, 1])$ mit endlich vielen solchen Umgebungen W_1, \dots, W_k überdecken. Sei $U_i := \exp_p W_i$. Es gibt eine Unterteilung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ mit $\phi([s_{i-1}, s_i]) \subset W_i$.

Ist H eine Variation von c , so gilt für genügend kleines ϵ_i

$$H([s_{i-1}, s_i] \times (-\epsilon_i, \epsilon_i)) \subset U_i$$

d.h. $c_t([0, 1]) \subset \cup_i U_i$ für t klein genug.

Die Kurve c_t kann stückweise zu einer Kurve ψ_t in $T_p M$ von 0 nach v geliftet werden. Falls ψ_t bis s_{i-1} definiert ist, so kann man ψ_t auf $[s_{i-1}, s_i]$ durch

$$\psi_t(s) := \left(\exp_p|_{W_i} \right)^{-1} (c_t(s))$$

fortgesetzt werden.

Nach Lemma 5.1 gilt $L(c_t) \geq L(c)$ mit Ungleichheit falls c_t und c verschiedene Bilder haben.

(2) Es gibt ein Jacobifeld Y mit $Y(0) = 0, Y(s_0) = 0, s_0 \in (0, 1)$. Da Y nichttrivial ist, gilt $Y'(s_0) \neq 0$.

Sei Z_1 ein paralleles Vektorfeld längs c mit $Z_1(s_0) = -Y'(s_0)$ und θ eine glatte Funktion mit $\theta(0) = \theta(1) = 0, \theta(s_0) = 1$.

Mit $Z(s) := \theta(s)Z_1(s)$ definieren wir

$$Y_\alpha(s) := \begin{cases} Y(s) + \alpha Z(s) & s \in [0, s_0] \\ \alpha Z(s) & s \in [s_0, 1] \end{cases}$$

Wegen der Bilinearität der Indexform gilt $I(Y_\alpha, Y_\alpha) = I_1 + I_2 + I_3$ mit

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^{s_0} (g(Y', Y') - R(Y, c', Y, c')) ds \\ I_2 &:= 2\alpha \int_0^{s_0} (g(Y', Z') - R(Y, c', Z, c')) ds \\ I_3 &:= \alpha^2 I(Z, Z) \end{aligned}$$

Aus der Jacobigleichung $Y'' + R(c', Y)c' = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{s_0} (g(Y', Y') - R(Y, c', Y, c')) ds \\
&= \int_0^{s_0} (g(Y', Y') + g(Y, Y'')) ds \\
&= \int_0^{s_0} \frac{d}{ds} g(Y, Y') ds \\
&= g(Y, Y')|_0^{s_0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Analog ist

$$I_2 = 2\alpha g(Z, Y')|_0^{s_0} = -2\alpha g(Y'(s_0), Y'(s_0))$$

Es gilt also

$$I(Y_\alpha, Y_\alpha) = -2\alpha g(Y'(s_0), Y'(s_0)) + \alpha^2 I(Z, Z)$$

Für genügend kleine $\alpha > 0$ ist dieser Ausdruck negativ. Für die zugehörige Variation c_t gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(c_t) = 0, \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} L(c_t) = I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$$

Also ist $L(c_t) < L(c)$ für kleine t .

BEISPIEL

- Ist $M = S^n$ mit der Standardmetrik, so gibt es für Geodätische der Länge $< \pi$ keine konjugierten Punkte. Diese sind in der Tat lokal, sogar global minimierend.
- Ist $M = T^n$ der Torus, so gibt es für keine Geodätische konjugierte Punkte: die horizontalen Lifts von Geodätischen unter der Riemannschen Submersion $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ sind einfach Geraden in \mathbb{R}^n und es gibt keine Variation einer Geraden, die zwei Punkte festlässt. Es folgt, dass jede Geodätische in T^n lokal minimal ist (d.h. jede Kurve γ nahe c hat grössere Länge). Diese müssen natürlich nicht global minimierend sein.

6. Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung

Satz 6.1. Sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine lokale Isometrie. Ist (\tilde{M}, \tilde{g}) geodätisch vollständig, so ist π eine Überlagerungsabbildung.

Beweis. Sei $m \in M$ und $\pi^{-1}(m) = \{\tilde{m}_i, i \in I\}$. Sei r klein genug, so dass $\exp_m : B(0_m, r) \rightarrow B(m, r)$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $U_i := B(\tilde{m}_i, r)$, $U := B(m, r)$. Da (\tilde{M}, \tilde{g}) geodätisch vollständig ist, gilt nach dem Satz von Hopf-Rinow

$$\exp_{\tilde{m}_i}(B(0_{\tilde{m}_i}, r)) = B(\tilde{m}_i, r) = U_i$$

Dann gilt $\cup_{i \in I} U_i \subset \pi^{-1}(U)$, denn jeder Punkt \tilde{x} in einem U_i kann mit \tilde{m}_i durch eine Kurve mit Länge kleiner r verbunden werden und die Projektion einer solchen Kurve ist eine Kurve der gleichen Länge zwischen m und $\pi(\tilde{x})$.

Fixiere ein $i \in I$. Sei $\tilde{v} \in T_{\tilde{m}_i} \tilde{M}$ und $v := d\pi(\tilde{v}) \in T_m M$. Seien $\gamma, \tilde{\gamma}$ die Geodätischen mit Anfangsbedingungen $\gamma(0) = m, \gamma'(0) = v$ bzw. $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{m}_i, \tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$. Da π eine lokale Isometrie ist, ist $\pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Geodätische, die in m beginnt und Anfangsvektor $d\pi(\tilde{v}) = v$ hat. Nach Eindeutigkeit von Geodätischen gilt also $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Anders ausgedrückt ist $\pi \circ \exp_{\tilde{m}_i} \tilde{v} = \exp_m \odot d\pi(\tilde{v})$. Da das für alle \tilde{v} stimmt, kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 B(0_{\tilde{m}_i}, r) & \xrightarrow{\exp_{\tilde{m}_i}} & B(\tilde{m}_i, r) = U_i \\
 d\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 B(0_m, r) & \xrightarrow{\exp_m} & B(m, r) = U
 \end{array}$$

Die Abbildung $\exp_m \odot d\pi$ ist ein Diffeomorphismus zwischen $B(0_{\tilde{m}_i}, r)$ und U (da $d\pi$ ein Diffeomorphismus zwischen $B(0_{\tilde{m}_i}, r)$ und $B(0_m, r)$ ist und $\exp_m : B(0_m, r) \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist). Da auch $\exp_{\tilde{m}_i} : B(0_{\tilde{m}_i}, r) \rightarrow U_i$ ein Diffeomorphismus ist (da \tilde{M} geodätisch vollständig ist) folgt, dass

$$\pi : \exp_{\tilde{m}_i}(B(0_{\tilde{m}_i}, r)) \rightarrow U$$

ein Diffeomorphismus ist.

Insgesamt folgt, dass $\pi : U_i \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist.

Jetzt wird noch $\pi^{-1}(U) \subset \cup_i U_i$ gezeigt. Sei $\tilde{q} \in \pi^{-1}(U)$ und $q := \pi(\tilde{q}) \in U$. Sei $\gamma : [0, s] \rightarrow M$ die eindeutige minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von q nach m . Dann ist $s < r$. Sei $v := \gamma'(0) \in T_q M$. Sei $\tilde{v} \in T_{\tilde{q}} \tilde{M}$ der eindeutige Vektor mit $d\pi(\tilde{v}) = v$. Sei $\tilde{\gamma}$ die Geodätische mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{q}$ und $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$. Da (\tilde{M}, \tilde{g}) geodätisch vollständig ist, ist diese Geodätische auf ganz \mathbb{R} definiert.

Andererseits ist $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und somit $\pi(\tilde{\gamma}(s)) = \gamma(s) = m$. Damit ist $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{m}_i$ für ein i und $\tilde{q} \in B(\tilde{m}_i, r) = U_i$.

Zur Erinnerung: eine Mannigfaltigkeit M heisst einfach zusammenhängend, wenn M zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ auf einen Punkt kontrahiert werden kann, d.h. es gibt stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ so dass $H(s, 0) = \gamma(s), H(s, 1) = p_0 \in M$ für alle s und $H(0, t) = H(1, t)$ für alle t .

Lemma 6.2. Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerungsabbildung. Ist \tilde{M} zusammenhängend und M_\sim einfach zusammenhängend, so ist π ein Diffeomorphismus zwischen \tilde{M} und M .

Beweis. Jede Kurve γ in M kann zu einer Kurve $\tilde{\gamma}$ in \tilde{M} geliftet werden. Ist der Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ vorgegeben, so ist der Lift eindeutig bestimmt.

Angenommen, π ist kein Diffeomorphismus. Dann gibt es $p_0 \in M$, so dass $\pi^{-1}(p_0)$ aus mehreren Punkten besteht. Sei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ eine Kurve, die zwei verschiedene Punkte q_0, q_1 aus $\pi^{-1}(p_0)$

verbindet. Setze $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma}$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ der eindeutige Lift von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = q_0$.

Da M einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie H , so dass $H(s, 0) = \gamma(s)$, $H(s, 1) = p_0$ und $H(0, t) = H(1, t) = p_0$ für alle s und t .

Die Kurve $c_t := H(\cdot, t)$ ist eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt p_0 . Wir liften diese zu einer Kurve \tilde{c}_t in \tilde{M} mit $\tilde{c}_t(0) = q_0$. Da H und das Liften von Kurven stetig sind, ist die Abbildung $t \mapsto \tilde{c}_t(1)$ stetig. Aber $\tilde{c}_t(1)$ ist in der diskreten Menge $\pi^{-1}(p_0)$ für alle t . Also muss $\tilde{c}_t(1)$ konstant sein. Jedoch ist $\tilde{c}_0(1) = \tilde{\gamma}(1) = q_1$, während $\tilde{c}_1(1) = q_0$ (der Lift einer konstanten Kurve ist wieder eine konstante Kurve).

Theorem 6.3 (Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung). Sei (M, g) eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung. Dann ist (M, g) isometrisch zu \mathbb{R}^n , falls $K \equiv 0$; zu $(\mathbb{H}^n, \text{can})$, falls $K \equiv -1$ und zu (S^n, can) , falls $K \equiv 1$.

Bemerkung: falls $K \equiv c \neq 0$, so kann man die Krümmung durch Skalieren der Metrik zu ± 1 machen.

Beweis. Sei $m \in M$, $v \in T_m M$ und setze $c(t) := \exp_m(tv)$. Seien $u_1, u_2 \in T_m M$ und sei U_i das parallele Vektorfeld längs c mit $U_i(0) = u_i$, $i = 1, 2$. Sei Y_i das Jacobifeld längs c mit $Y_i(0) = 0$, $Y_i'(0) = u_i$. Nach Korollar 6.5 gilt

$$Y_i(t) = d_{tv} \exp_m(tu_i)$$

Für Y gilt ausserdem die Jacobigleichung $Y'' + R(c', Y)c' = 0$.

(1) Sei $K \equiv 0$, d.h. $R \equiv 0$. Dann ist $Y_i''(t) = 0$, also $Y_i(t) = tU_i(t)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle d_{tv} \exp_m(tu_1), d_{tv} \exp_m(tu_2) \rangle &= \langle Y_1(t), Y_2(t) \rangle \\ &= t^2 \langle U_1(t), U_2(t) \rangle \\ &= \langle tu_1, tu_2 \rangle \end{aligned}$$

Also ist $\exp_m : T_m M \rightarrow M$ eine lokale Isometrie. Nach Satz 6.1 ist $\exp_m : T_m M \rightarrow M$ eine Überlagerungsabbildung.

Aus Lemma 6.2 folgt, dass \exp_m ein Diffeomorphismus, und damit eine Isometrie ist.

(2) Sei $K \equiv -1$. Dann folgt $Y_i'' = Y_i$, d.h. $Y_i(t) = \sinh(t)U_i(t)$. Sei $\tilde{m} \in \mathbb{H}^n$ und sei $f : T_m M \rightarrow T_{\tilde{m}} \mathbb{H}^n$ eine Isometrie (da beides Euklidische Vektorräume gleicher Dimension sind, existiert so eine Isometrie).

Setze $\tilde{u}_i := f(u_i)$, $\tilde{v} := f(v)$, und seien \tilde{U}_i, \tilde{Y}_i die entsprechenden parallelen bzw. Jacobifelder längs der Geodätischen $t \mapsto \exp_{\tilde{m}} t\tilde{v}$. Dann gilt auch $\tilde{Y}_i(t) = \sinh(t)\tilde{U}_i(t)$ (siehe explizite Berechnung der Jacobifelder in Kapitel 6).

Wir wissen, dass $\exp_{\tilde{m}} : T_{\tilde{m}} \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ ein Diffeomorphismus ist. Daher können wir eine glatte Abbildung

$$F := \exp_m \circ f^{-1} \circ \exp_{\tilde{m}}^{-1} : \mathbb{H}^n \rightarrow M$$

definieren. Mit einer Rechnung wie im Fall $K \equiv 0$ ergibt sich, dass F eine lokale Isometrie ist. Der Rest des Beweises ist analog zum Fall $K \equiv 0$.

(3) Sei $K \equiv 1$. Dann ist $Y_i(t) = \sin(t)U_i(t)$. Ist $\tilde{m} \in S^n$, so ist $\exp_{\tilde{m}} : B(0, \pi) \subset T_{\tilde{m}} S^n \rightarrow S^n \setminus \{-\tilde{m}\}$ ein Diffeomorphismus. Also gibt es wie im vorigen Fall eine lokale Isometrie F von

$S^n \setminus \{-\tilde{m}\}$ nach M . Das zugehörige Diagramm ist

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xleftarrow{F} & S^n \setminus \{-\tilde{m}\} \\
 \uparrow \exp_m & & \uparrow \exp_{\tilde{m}} \\
 T_m M & \xrightarrow{f} & T_{\tilde{m}} S^n
 \end{array}$$

Sei $\tilde{m}' \neq \pm \tilde{m}$ und setze $m' := F(\tilde{m}')$. Wir wiederholen die Prozedur mit diesem Punkt. Da $F : S^n \setminus \{-\tilde{m}\} \rightarrow M$ eine lokale Isometrie ist, ist

$$dF|_{\tilde{m}'} : T_{\tilde{m}'} S^n \rightarrow T_{m'} M$$

eine Isometrie. Auch die Inverse

$$(dF|_{\tilde{m}'})^{-1} : T_{m'} M \rightarrow T_{\tilde{m}'} S^n$$

ist dann eine Isometrie.

Dann ist wie eben

$$F_1 = \exp_{m'} \circ dF|_{\tilde{m}'} \circ \exp_{\tilde{m}'}^{-1}$$

eine lokale Isometrie $F_1 : S^n \setminus \{-\tilde{m}'\} \rightarrow M$.

Es ist $F_1(\tilde{m}') = m' = F(\tilde{m}')$ und $dF_1|_{\tilde{m}'} = d\exp_{m'}|_0 \circ dF|_{\tilde{m}'} \circ ((d\exp_{\tilde{m}})|_0)^{-1} = dF|_{\tilde{m}'}$.

Sei $\tilde{c}(t), 0 \leq t < \pi$ eine Geodätische auf S^n mit $\tilde{c}(t) = \tilde{m}'$, die nicht durch $-\tilde{m}$ geht. Da F und F_1 lokale Isometrien sind, sind $c(t) := F(\tilde{c}(t))$ und $c_1(t) := F_1(\tilde{c}(t))$ Geodätische. Es gilt aber $c_1(0) = F(\tilde{c}(0)) = F(\tilde{m}') = F_1(\tilde{m}') = c_1(0)$ und

$$c'(0) = dF|_{\tilde{m}'}(\tilde{c}'(0)) = dF_1|_{\tilde{m}'}(\tilde{c}'(0)) = c_1'(0).$$

Es folgt $c = c_1$ und somit $F = F_1$ auf allen Punkten außerhalb der Geodätischen durch \tilde{m} und $-\tilde{m}'$. Da F und F_1 beide stetig sind, müssen sie dort, wo sie beide definiert sind, übereinstimmen.

Diese beiden Abbildungen können also zu einer lokalen Isometrie zwischen S^n und M verklebt werden. Der Rest des Argumentes ist wieder der gleiche.

Bemerkung: ist (M, g) nicht einfach zusammenhängend, so gibt es eine einfach zusammenhängende Überlagerung $(\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ (die sogenannte universelle Überlagerung), auf welche das Theorem angewendet werden kann. Es kann daher auch wie folgt formuliert werden:

Theorem 6.4. Ist (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung, so ist die universelle Überlagerung \mathbb{R}^n , falls $K \equiv 0$; \mathbb{H}^n , falls $K \equiv -1$ und S^n , falls $K \equiv 1$.

Zum Beispiel hat \mathbb{RP}^n Schnittkrümmung $\equiv 1$, und die universelle Überlagerung ist S^n . Quotienten von S^3 sind die Linsenräume. Interessanter sind allerdings Quotienten des hyperbolischen Raumes, sogenannte hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Diese spielen in vielen Bereichen der Mathematik (unter anderem in der Zahlentheorie) eine grosse Rolle.

KAPITEL 6

Volumen Riemannscher Mannigfaltigkeiten

1. Der Schnittort

Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $m \in M$. Für $v \in T_m M$ sei c_v die eindeutige Geodätische mit $c_v(0) = m, c'_v(0) = v$. Diese ist auf ganz \mathbb{R} definiert, aber nicht unbedingt minimal. Sei

$$U_m := \{v \in T_m M \mid c_v \text{ ist minimal auf } [0, 1 + \epsilon] \text{ für ein } \epsilon > 0\}.$$

Dann ist U_m eine offene Umgebung von $0 \in T_m M$ und wir bezeichnen den Rand mit ∂U_m .

Definition 1.1. Der Schnittort von m ist

$$\text{Cut}(m) := \exp_m(\partial U_m).$$

Bemerkung (ohne Beweis): Für $v \in \partial U_m$ gibt es (nur) zwei Gründe, die auch simultan auftreten können. Der erste Grund ist, dass es eine weitere minimale Geodätische zwischen $c_v(0)$ und $c_v(1)$ gibt. Der zweite Grund ist, dass $c_v(0)$ und $c_v(1)$ konjugiert sind. Dann kann eine Fortsetzung von c_v über den Punkt $c_v(1)$ hinaus nicht minimal sein nach Theorem 5.4.

Satz 1.2. Die Mannigfaltigkeit M lässt sich disjunkt zerlegen in

$$M = \exp_m(U_m) \cup \text{Cut}(m).$$

Beweis. Sei $x \in M$. Dann gibt es eine minimale Geodätische c_v von m nach x . Ohne Einschränkung sei c_v auf $[0, 1]$ parametrisiert. Dann ist $v \in \overline{U_m} = U_m \cup \partial U_m$. Es folgt $M = \exp_m(U_m) \cup \text{Cut}(m)$.

Angenommen die Vereinigung ist nicht disjunkt. Dann gibt es $x \in \exp_m(U_m) \cap \text{Cut}(m)$. Wegen $x \in \exp_m(U_m)$ gibt es eine Geodätische c mit $c(0) = m, c(1) = x$, welche auf $[0, 1 + \epsilon]$ minimal ist. Andererseits impliziert $x \in \text{Cut}(m)$, dass es eine Geodätische γ gibt mit $\gamma(0) = m, \gamma(1) = x$, welche minimal auf $[0, 1]$, aber nicht darüber hinaus ist.

Dann kann aber auch c nicht minimal über 1 hinaus sein: da $c \neq \gamma$ gilt insbesondere $c'(1) \neq \gamma'(0)$. Betrachte die Kurve τ mit $\tau(t) = \gamma(t)$ für $t \in [0, 1]$ und $\tau(t) = c(t)$ für $t \in [1, 1 + \epsilon]$. Dann ist τ minimal, hat aber bei $t = 1$ einen Knick im Widerspruch zu Theorem 3.4.

Beispiel: der Schnittort eines Punktes auf der Sphäre ist der antipodale Punkt. Der Schnittort eines Punktes m des n -dimensionalen reell-projektiven Raumes besteht aus den zu m senkrechten Punkten, diese bilden einen $(n - 1)$ -dimensionalen reell-projektiven Raum.

2. Beispiele für Volumenberechnungen

Definition 2.1. Eine Dichte auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , versehen mit einem Atlas (U_i, ϕ_i) , ist gegeben durch ein Maß μ_i auf $\phi_i(U_i)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) μ_i ist absolut stetig mit strikt positiver Dichtefunktion bezüglich dem Lebesguemaß;
- (2) ist f eine stetige Funktion mit kompaktem Träger in $\phi_i(U_i \cap U_j)$, dann gilt

$$\int_{\phi_i(U_i \cap U_j)} f d\mu_i = \int_{\phi_j(U_i \cap U_j)} (f \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}) |J(\phi_i \circ \phi_j^{-1})| d\mu_j$$

Hier ist J die Jacobideterminante.

Jede Volumenform (d.h. nirgends verschwindende n -Form) definiert eine Dichte auf M .

Ist eine Dichte auf M gegeben, so hat man ein Maß wie folgt. Ist f eine stetige Funktion auf M mit Träger in U_i , so setzt man

$$\int_M f d\delta := \int_{\phi_i(U_i)} f \circ \phi_i^{-1} d\mu_i$$

Der allgemeine Fall wird über eine Zerlegung der Eins auf diesen zurückgeführt. Dann ist alles wohldefiniert.

Sind δ, δ' zwei Dichten auf M , so gibt es eine stetige Funktion f mit $\delta' = f\delta$.

Definition 2.2. Eine Teilmenge $A \subset M$ hat Maß 0 (oder ist eine Nullmenge), wenn $\delta(A) = 0$ für eine (und dann für jede) Dichte δ auf M .

Sei nun (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. In jeder Karte (U_i, ϕ_i) definieren wir

$$\mu_i := \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n$$

Diese Familie erfüllt die Bedingungen einer Dichte auf M . Hierzu benutzt man einen Variablenwechsel auf \mathbb{R}^n , der Faktor $\sqrt{\det(g_{ij})}$ ist genau so gewählt, dass diese Unabhängigkeit gilt.

Definition 2.3. Die so definierte Dichte ist die kanonische Volumendichte auf (M, g) und wird mit v_g bezeichnet.

Das Volumen von (M, g) ist definiert als $\int_M v_g$ und kann endlich oder unendlich sein.

Sei zum Beispiel $g = dr^2 + f^2(r)d\theta^2$ eine Metrik auf \mathbb{R}^2 , ausgedrückt in Polarkoordinaten. Dann ist

$$\text{vol}(\mathbb{R}^2, g) = 2\pi \int_0^\infty f(r) dr$$

Lemma 2.4. Für jedes $m \in M$ ist der Schnittpunkt $\text{Cut}(m)$ eine Nullmenge.

Beweis. Es ist $\text{Cut}(m) = \exp_m(\partial U_m)$. Da ∂U_m eine Nullmenge in $T_m M$ ist und \exp_m stetig ist, folgt die Behauptung.

Allgemeiner können wir das Volumen von einem Punkt aus wie folgt berechnen. Aus dem Theorem von Hopf-Rinow folgt, dass jeder Punkt von M mit einem festen Punkt m durch eine minimale Geodätische verbunden werden kann. Außerhalb des Schnittpunktes ist diese Geodätische sogar eindeutig. Der Schnittpunkt hat Volumen 0, also gilt

$$\text{vol}(M, g) = \int_{U_m} \exp_m^* v_g$$

Das kann wie folgt umgeformt werden. Sei $c(t) = \exp_m(tu)$ eine Geodätische und $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_m M$. Betrachte Jacobifelder Y_i längs c mit $Y_i(0) = 0, Y_i'(0) = e_i$. Aus Korollar 6.5 folgt $(d \exp_m)|_{tu} u = c'(t)$ und $(d \exp_m)_{tu} e_i = \frac{1}{t} Y_i(t)$. Wir setzen

$$J(u, t) := t^{-(n-1)} \sqrt{\det(g(Y_i(t), Y_j(t)))}$$

Dann gilt $\exp_m^* v_g = J(u, t) dx_1 \dots dx_n = J(u, t) t^{n-1} dt du$, wobei du das kanonische Maß auf der Einheitssphäre in $T_m M$ bezeichnet. Ist $\rho(u)$ der Abstand zum Schnittpunkt in Richtung u (eventuell kann er unendlich sein), so folgt

$$\text{vol}(M, g) = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(u)} J(u, t) t^{n-1} dt du \quad (11)$$

Man beachte, dass $\lim_{t \rightarrow 0} J(u, t) = 1$ für alle u . Beispiele:

(1) Für die Sphäre S^n mit der kanonischen Metrik gilt $Y_i(t) = \sin(t) E_i(t)$ mit E_i parallelen Vektorfeldern, $\rho(u) = \pi$ und somit

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^n, \text{can}) &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{n-1} t^{n-1} dt du \\ &= \text{vol}(S^{n-1}, \text{can}) \int_0^\pi \sin^{n-1}(t) dt \end{aligned}$$

Induktiv kann man zeigen, dass

$$\text{vol}(S^{2m}, \text{can}) = \frac{2(4\pi)^m m!}{(2m)!}, \quad \text{vol}(S^{2m+1}, \text{can}) = \frac{2\pi^{m+1}}{m!}$$

(2) Das Volumen des hyperbolischen Raumes ist unendlich. Für $R > 0$ ergibt sich wie für die Sphäre

$$\text{vol}(B_m(R)) = \text{vol}(S^{n-1}, \text{can}) \int_0^R \sinh^{n-1}(r) dr$$

Dieser Ausdruck wächst exponentiell schnell (von der Ordnung $\exp((n-1)R)$).

(3) Für den komplex-projektiven Raum wähle eine orthonormale Basis $\{u, e_2, \dots\}$ von $T_m \mathbb{C}^n$ mit $e_2 = Ju$. Dann sind nach (9) und (10) die Jacobifelder gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= \sin(t) \cos(t) E_2(t) \\ Y_i(t) &= \sin(t) E_i(t), i \geq 3 \end{aligned}$$

Der Abstand vom Schnittpunkt ist $\frac{\pi}{2}$ und es ergibt sich

$$\text{vol}(\mathbb{CP}^n, \text{can}) = \int_{S^{2n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t \cos t dt du = \frac{\pi^n}{n!}$$

3. Volumen und Krümmung

Lemma 3.1. Sei $A(t)$ eine glatte Kurve von $n \times n$ -Matrizen mit $A(0) = \text{Id}$. Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A(t) = \text{tr } A'(0)$$

Beweis. Per Induktion über n . Ist $n = 1$, so ist die Aussage trivial. Für $n > 1$ entwickeln wir $\det A$ nach der ersten Zeile und bekommen

$$\det A(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1i}(t) \det A_i(t)$$

wobei $A_i(t)$ die Matrix ist, die aus $A(t)$ durch Streichen der ersten Zeile und i -ten Spalte entsteht. Es folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det A(t) &= a'_{11}(0) \underbrace{\det A_1(0)}_{=1} + \underbrace{a_{11}(0)}_{=1} \underbrace{(\det A_1(0))'}_{=\text{tr } A'_1(0)} + \\ &\quad \sum_{i=2}^n a'_{1i}(0) \underbrace{\det A_i(0)}_{=0} + \underbrace{a_{1i}(0)}_{=0} (\det A_i(0))' \\ &= a'_{11}(0) + \text{tr } A'_1(0) = \text{tr } A'(0) \end{aligned}$$

Lemma 3.2. Sei ϕ eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\int_{S^{n-1}} \phi(v, v) dv = \frac{1}{n} \text{vol}(S^{n-1}) \text{tr}(\phi)$$

Beweis. Seien v_1, \dots, v_n die Koordinaten von v . Dann ist $\phi(v, v) = \sum_{i,j} v_i v_j \phi(e_i, e_j)$, also

$$\int_{S^{n-1}} \phi(v, v) dv = \sum_{i,j} \phi(e_i, e_j) \int_{S^{n-1}} v_i v_j dv$$

Für $i \neq j$ verschwindet das Integral aus Symmetriegründen. Für $i = j$ ist es (ebenfalls wegen Symmetrie) unabhängig von i . Da $\sum_i v_i^2 = 1$, ist dieses Integral genau $\frac{1}{n} \text{vol}(S^{n-1})$ und die Behauptung des Lemmas folgt.

Theorem 3.3 (Volumen kleiner Bälle). Seien ein Punkt von (M, g) . Dann gilt

$$\text{vol } B_m(r) = r^n \text{vol}(B^n) \left(1 - \frac{s}{6(n+2)} r^2 + o(r^2) \right),$$

wobei s die Skalarkrümmung in m ist, n die Dimension von M und $r \rightarrow 0$.

In erster und zweiter Ordnung ist das Volumen also wie im Euklidischen Fall, und der nächste Term wird durch die Skalarkrümmung festgelegt. Insbesondere ist das Vorzeichen von s dafür ausschlaggebend, ob kleine Bälle in (M, g) kleineres oder größeres Volumen als im Euklidischen Raum haben.

Beweis. Für r kleiner als der Abstand zum Schnittpunkt gilt

$$\text{vol } B_m(r) = \int_{S^{n-1}} \int_0^r J(u, t) t^{n-1} dt du$$

Wähle eine Geodätische c mit $c(0) = m, c'(0) = u$ und Y_i Jacobifelder mit $Y_i(0) = 0, Y_i'(0) = e_i$, wobei wieder $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_m M$ ist. Die Jacobigleichung liefert

$$Y_i''(s) + R(c'(s), Y_i(s)) c'(s) = 0$$

Insbesondere ist $Y_i(0) = 0, Y_i'(0) = e_i, Y_i''(0) = 0$. Wir benötigen einen weiteren Term. Dazu leiten wir die Jacobigleichung nach s ab und setzen $s = 0$. Da $Y_i(0) = 0$ spielt dabei nur der Term eine Rolle, bei dem

$Y_i(s)$ abgeleitet wird (bei den anderen Termen wird entweder R oder $c'(s)$ abgeleitet). Es folgt

$$Y_i'''(0) = -R(c'(0), Y_i'(0)) c'(0) = -R(u, e_i) u = -\sum_j R(u, e_i, u, e_j) e_j$$

Aus Lemma 4.1 ergibt sich

$$Y_i(t) = tE_i(t) - \sum_j \frac{t^3}{6} R(u, e_i, u, e_j) E_j(t) + o(t^3)$$

Es folgt $g(Y_i(t), Y_j(t)) = t^2 \delta_{ij} - \frac{t^4}{3} R(u, e_i, u, e_j) + o(t^4)$. Lemma 3.1 impliziert

$$\det(g(Y_i(t), Y_j(t))) = t^{2(n-1)} \left(1 - \frac{t^2}{3} \text{Ric}(u, u) + o(t^2) \right)$$

und somit

$$J(u, t) = t^{-(n-1)} \sqrt{\det(g(Y_i(t), Y_j(t)))} = 1 - \frac{t^2}{6} \text{Ric}(u, u) + o(t^2)$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \text{vol } B_m(r) &= \int_{S^{n-1}} \int_0^r t^{n-1} \left(1 - \frac{t^2}{6} \text{Ric}(u, u) + o(t^2) \right) dt du \\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\frac{r^n}{n} - \frac{r^{n+2}}{6(n+2)} \text{Ric}(u, u) + o(r^{n+2}) \right) du \\ &= \text{vol}(S^{n-1}) \frac{r^n}{n} - \frac{r^{n+2}}{6(n+2)} \frac{\text{vol}(S^{n-1})}{n} \text{tr Ric} + o(r^{n+2}) \\ &= \frac{r^n \text{vol}(S^{n-1})}{n} \left(1 - \frac{r^2}{6(n+2)} s(m) + o(r^2) \right) \end{aligned}$$

Der Vorfaktor ist genau das Volumen eines Euklidischen Balles mit Radius r .

Mit $V^a(r)$ bezeichnen wir das Volumen eines r -Balles in der vollständigen, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung a .

Theorem 3.4 (Bishop-Gunther). Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $B_m(r)$ ein Ball, der den Schnittpunkt von m nicht trifft.

(1) Ist $\text{Ric} \geq (n-1)a$ für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\text{vol}(B_m(r)) \leq V^a(r)$$

(2) Ist $K \leq b$ für eine Konstante $b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\text{vol}(B_m(r)) \geq V^b(r)$$

Beweis. (1) Zunächst eine Vorbemerkung. Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und $Y_i, i = 2, \dots, n$ Jacobifelder längs c mit $Y_i(0) = 0$, so dass $c'(0), Y_2'(0), \dots, Y_n'(0)$ eine Basis (aber nicht unbedingt Orthonormalbasis) von $T_m M$ bilden.

Seien $\tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n$ Jacobifelder längs c mit $\tilde{Y}_i(0) = 0, \tilde{Y}_i'(0) = e_i$, mit Orthonormalbasis $c'(0), e_2, \dots, e_n$. Dann gibt es eine invertierbare reelle $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix C mit $Y_i = \sum_j C_{ij} \tilde{Y}_j$.

Es folgt $\det g(Y_i'(0), Y_j'(0)) = \det C^2 \det g(\tilde{Y}_i'(0), \tilde{Y}_j'(0)) = \det C^2$ und $\det g(Y_i(t), Y_j(t)) = \det C^2 \det g(\tilde{Y}_i(t), \tilde{Y}_j(t))$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} J(u, t) &= t^{-(n-1)} \sqrt{\det g(\tilde{Y}_i(t), \tilde{Y}_j(t))} \\ &= t^{-(n-1)} \frac{\sqrt{\det g(Y_i(t), Y_j(t))}}{\sqrt{\det g(Y_i'(0), Y_j'(0))}} \end{aligned}$$

(2) Wähle eine Orthonormalbasis $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ von $T_m M$ und setze $c(t) := \exp_m(tu)$. Seien E_i die parallelen Vektorfelder längs c mit $E_i(0) = e_i$, wobei $2 \leq i \leq n$.

Fixiere $0 < r < \rho(u)$, wobei $\rho(u) \in (0, \infty]$ die Länge von c von m bis zum Schnittpunkt ist. Dann gibt es ein eindeutiges Jacobifeld Y_i^r mit

$$Y_i^r(0) = 0, Y_i^r(r) = E_i(r)$$

Die Existenz sieht man wie folgt: da $(d\exp_m)_{tu} : T_m M \rightarrow T_{c(t)} M$ ein Isomorphismus ist, gibt es einen Vektor $v \in T_m M$ mit $(d\exp_m)_{tu}(rv) = E_i(r)$. Dann ist

$$Y_i^r(t) = (d\exp_m)_{tu}(tv)$$

als Variationsfeld einer geodätischen Variation ein Jacobifeld und hat die gewünschten Eigenschaften.

Nach der Vorbemerkung gilt

$$J(u, t) = t^{-(n-1)} \frac{\sqrt{\det g(Y_i(t), Y_j(t))}}{\sqrt{\det g(Y_i'(0), Y_j'(0))}}$$

Wir setzen

$$D(t) := \det g(Y_i(t), Y_j(t))$$

und

$$f(t) := J(u, t)$$

(3) Sei

$$I(X, Y) = \int_0^r [\langle X'(s), Y'(s) \rangle - R(X(s), c'(s), Y(s), c'(s))] ds.$$

Sind X, Y Vektorfelder längs c , welche an den Endpunkten verschwinden, so ist das die Indexform. Im Allgemeinen ist es eine quadratische Form. Wir behaupten, dass

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{i=2}^n I(Y_i^r, Y_i^r) - \frac{n-1}{r} \quad (12)$$

Ableiten der Gleichung $f(t) = t^{-(n-1)} C \sqrt{D(t)}$ liefert

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{D'(t)}{2D(t)} - \frac{n-1}{t}$$

Für den Fall $t = r$ ist die Matrix $g(Y_i^r, Y_j^r)$ die Identitätsmatrix und es folgt mit Lemma 3.1

$$D'(r) = 2 \sum_{i=2}^n g((Y_i^r)'(r), Y_i^r(r))$$

Andererseits gilt für ein Jacobifeld

$$\begin{aligned} I(Y, Y) &= \int_0^r (|Y'(s)|^2 - R(Y(s), c'(s), Y(s), c'(s))) ds = g(Y, Y')|_0^r \\ &= \int_0^r (|Y'(s)|^2 - \langle R(c'(s), Y(s)) c'(s), Y(s) \rangle) ds = g(Y, Y')|_0^r \\ &= \int_0^r (|Y'(s)|^2 + \langle Y''(s), Y(s) \rangle) ds = g(Y, Y')|_0^r \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(4) Sei allgemein $c : [a, b] \rightarrow M$ eine minimale Geodätische, Y ein Jacobifeld längs c und X ein Vektorfeld längs c mit $X(a) = Y(a), X(b) = Y(b)$. Dann ist $I(X - Y, X - Y) \geq 0$, da c minimal ist und $X - Y$ an den Endpunkten verschwindet.

Mit einer analogen Rechnung wie oben gilt

$$I(X, Y) = [g(X, Y')]_a^b$$

Da X und Y in den Endpunkten übereinstimmen, gilt

$$I(Y, Y) = [g(Y', Y)]_a^b = [g(Y', X)]_a^b = I(X, Y)$$

Es folgt $0 \leq I(X - Y, X - Y) = I(X, X) + I(Y, Y) - 2I(X, Y) = I(X, X) - I(Y, Y)$.

(5) Wir setzen

$$s(t) := \begin{cases} \sin \sqrt{a}t & a > 0 \\ t & a = 0 \\ \sinh \sqrt{-a}t & a < 0 \end{cases}$$

und definieren Vektorfelder

$$X_i^r(t) := \frac{s(t)}{s(r)} E_i(t)$$

Die Vorfaktoren sind genau so gewählt, dass auf den Modellmannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung a sich Jacobifelder ergeben (d.h. $X_i^r = Y_i^r$ in diesem Fall). Für unsere Mannigfaltigkeit M sind die X_i^r natürlich nicht notwendigerweise Jacobifelder, aber wir können mit den obigen Rechnungen die Indizes abschätzen.

Da X_i^r und Y_i^r an den Stellen 0 und r übereinstimmen und c minimal ist, folgt nach dem eben Bewiesenen

$$\sum_{i=2}^n I(Y_i^r, Y_i^r) \leq \sum_{i=2}^n I(X_i^r, X_i^r)$$

Mit partieller Integration finden wir

$$\begin{aligned} I(X_i^r, X_i^r) &= \int_0^r [\langle (X_i^r)', (X_i^r)' \rangle - R(X_i^r, c', X_i^r, c')] dt \\ &= \int_0^r [-\langle X_i^r, (X_i^r)'' \rangle - R(X_i^r, c', X_i^r, c')] dt + [\langle X_i^r, (X_i^r)' \rangle]_0^r \\ &= \int_0^r \left[a \left(\frac{s(t)}{s(r)} \right)^2 - \left(\frac{s(t)}{s(r)} \right)^2 R(E_i, c', E_i, c') \right] dt + \frac{s'(r)}{s(r)} \end{aligned}$$

Aufsummieren liefert

$$\sum_{i=2}^n I(X_i^r, X_i^r) = \int_0^r \left(\frac{s(t)}{s(r)} \right)^2 ((n-1)a - \text{Ric}(c', c')) dt + (n-1) \frac{s'(r)}{s(r)}$$

Nach Voraussetzung an die Riccikrümmung ist das Integral negativ.

Aus (12) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{f'(r)}{f(r)} &= \sum_i I(Y_i^r, Y_i^r) - \frac{n-1}{r} \\
&\leq \sum_i I(X_i^r, X_i^r) - \frac{n-1}{r} \\
&\leq (n-1) \frac{s'(r)}{s(r)} - \frac{n-1}{r} \\
&= (n-1) \left(\frac{s'(r)}{s(r)} - \frac{1}{r} \right) \\
&= \begin{cases} (n-1) (\sqrt{a} \cot \sqrt{ar} - \frac{1}{r}) & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ (n-1) (\sqrt{-a} \coth \sqrt{-ar} - \frac{1}{r}) & a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(6) Für die Modellräume gilt überall Gleichheit, also folgt

$$\frac{f'(r)}{f(r)} \leq \frac{f'_a(r)}{f_a(r)}$$

Es ist $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} J(u, t) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} f_a(t)$.

Diese Ungleichung gilt für alle $0 < r < \rho(u)$. Es folgt für alle $0 < s < \rho(u)$

$$\log f(s) = \log f(r)|_0^s = \int_0^s \frac{f'(r)}{f(r)} dr \leq \int_0^s \frac{f'_a(r)}{f_a(r)} dr = \log f_a(r)|_0^s = \log f_a(s), \text{ also } f(s) \leq f_a(s).$$

Aus (11) folgt die erste Behauptung des Theorems.

(7) Für den zweiten Teil sei $K \leq b$. Sei Y eines der Jacobifelder Y_i^r . Dann ist $g(Y(r), Y'(r)) = \int_0^r (g(Y', Y') - R(Y, c', Y, c')) ds \geq \int_0^r (g(Y', Y') - bg(Y, Y)) ds$.

Wir schreiben $Y(t) = \sum_{i=2}^n y_i(t) E_i(t)$. Auf der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M_b mit konstanter Schnittkrümmung b setze $\tilde{Y}(t) = \sum_i y_i(t) \tilde{E}_i(t)$, wobei \tilde{c} eine Geodätische der Länge r und \tilde{E}_i parallele Vektorfelder längs \tilde{c} , die zusammen mit \tilde{c}' in jedem Punkt eine Orthonormalbasis bilden.

Dann gilt

$$I(\tilde{Y}, \tilde{Y}) = \int_0^r g(\tilde{Y}', \tilde{Y}') - bg(\tilde{Y}, \tilde{Y}) dt = \int_0^r (g(Y', Y') - bg(Y, Y)) dt$$

Sei $\tilde{X}_i^r(t) = \frac{s(t)}{s(r)} \tilde{E}_i(t)$. Das ist ein Jacobifeld längs \tilde{c} , welches an den Enden von \tilde{c} die gleichen Werte wie \tilde{Y}_i^r annimmt. Wie oben gilt

$$I(\tilde{Y}_i^r, \tilde{Y}_i^r) \geq I(\tilde{X}_i^r, \tilde{X}_i^r)$$

Aus (12), angewendet auf M und M_b , folgt

$$\begin{aligned}
\frac{f'(r)}{f(r)} &= \sum_{i=2}^n I(Y_i^r, Y_i^r) - \frac{n-1}{r} \\
&= \sum_{i=2}^n I(\tilde{Y}_i^r, \tilde{Y}_i^r) - \frac{n-1}{r} \\
&\geq \sum_{i=2}^n I(\tilde{X}_i^r, \tilde{X}_i^r) - \frac{n-1}{r} \\
&= \frac{f'_b(r)}{f_b(r)}
\end{aligned}$$

Integrieren liefert $f(s) \geq f_b(s)$ und aus (11) folgt $\text{vol } B_m(r) \geq V^b(r)$.

4. Krümmung und Wachstum der Fundamentalgruppe

Eine Gruppe Γ heisst endlich erzeugt, wenn es endlich viele Elemente a_1, \dots, a_k gibt, so das sich jedes Element $g \in \Gamma$ schreiben lässt als Produkt von solchen Generatoren, d.h.

$$g = \prod_i a_{k_i}^{r_i}, r_i \in \mathbb{Z}$$

Die Zahl $l_S(g) = \sum_i |r_i|$ heisst Länge von g . Diese hängt nicht nur von g , sondern von der Wahl der Menge S der Generatoren ab. Mit $\phi_S(s)$ wird die Anzahl der Elemente von Γ mit Länge kleiner gleich s bezeichnet.

DEFINITION 4.1. (1) Eine endlich erzeugte Gruppe hat exponentielles Wachstum, wenn es $a > 0$ gibt mit $\phi_S(s) \geq \exp(as)$ für alle s .

(2) Eine endlich erzeugte Gruppe hat polynomiellles Wachstum vom Grad $\leq n$, wenn es $a > 0$ gibt mit $\phi_S(s) \leq as^n$ für alle s .

(3) Eine endlich erzeugte Gruppe hat polynomiellles Wachstum vom Grad n , falls es polynomiales Wachstum vom Grad $\leq n$ hat, aber nicht vom Grad $\leq (n-1)$.

Ist \tilde{S} ein anderes Erzeugendensystem, so können wir jeden Erzeuger $\tilde{g} \in \tilde{S}$ als Wort in S schreiben. Ist $C := \max_{\tilde{g} \in \tilde{S}} l_S(\tilde{g})$, so folgt $l_S \leq C l_{\tilde{S}}$. Umgekehrt gilt $l_{\tilde{S}} \leq \tilde{C} l_S$ mit $\tilde{C} = \max g \in S l_{\tilde{S}}(g)$. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt, dass die Bedingungen „exponentielles Wachstum“ und „polynomiellles Wachstum vom Grad $\leq n$ “ unabhängig von der Wahl des Erzeugendensystems sind.

Theorem 4.2 (Milnor-Wolf). Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Riccikrümmung. Dann hat jede endlich erzeugte Untergruppe Γ von $\pi_1(M)$ polynomiellles Wachstum vom Grad $\leq n$.

Bemerkung: ist M kompakt, so ist $\pi_1(M)$ bereits endlich erzeugt.

Beweis. Sei (\tilde{M}, \tilde{g}) die universelle Riemannsche Überlagerung und $a \in \tilde{M}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ operiert auf \tilde{M} .

Es gibt $r > 0$, so dass die Bälle $B(\gamma(a), r)$ alle paarweise disjunkt sind. Sei S ein endliches Erzeugendensystem einer Untergruppe Γ von $\pi_1(M)$. Ohne Einschränkung sei mit $\gamma \in S$ auch $\gamma^{-1} \in S$.

Setze

$$L := \max d(a, \gamma_i(a)), \gamma_i \in S$$

Behauptung: Es gilt für alle $\gamma \in \Gamma$ die Ungleichung $d(a, \gamma(a)) \leq l_S(\gamma)L$. Das folgt aus der Definition von L falls $l_S(\gamma) = 1$. Anderenfalls können wir $\gamma = \gamma' \gamma_i$ mit $\gamma_i \in S, l_S(\gamma') = l(\gamma) - 1$ schreiben. Nach Dreiecksungleichung, Induktionsvoraussetzung und der Tatsache, dass $\pi_1(M)$ durch Isometrien auf \tilde{M} operiert, gilt dann

$$\begin{aligned} d(a, \gamma(a)) &\leq d(a, \gamma'(a)) + d(\gamma'(a), \gamma' \gamma_i(a)) \\ &= d(a, \gamma'(a)) + d(a, \gamma_i(a)) \\ &\leq l_S(\gamma') L + L = l_S(\gamma) L \end{aligned}$$

Nimmt man alle solchen γ , so ergeben sich $\phi_S(s)$ paarweise disjunkte Bälle $B(\gamma(a), r)$. Diese gehen durch Elemente der Gruppe isometrisch ineinander über, haben also alle das gleiche Volumen. Für einen Punkt $x \in B(\gamma(a), r)$ ist nach Dreiecksungleichung $d(x, a) \leq d(x, \gamma(a)) + d(\gamma(a), a) \leq r + Ls$. Mit anderen Worten gilt

$$B(\gamma(a), r) \subset B(a, Ls + r)$$

Vergleich der Volumina liefert somit

$$\phi_S(s) \operatorname{vol} B(a, r) \leq \operatorname{vol} B(a, Ls + r)$$

Nach Theorem 3.4 gilt aber $\operatorname{vol} B(a, Ls + r) \leq \operatorname{vol} (B_n^{\text{eukl}}(1)) (Ls + r)^n$. Also ist

$$\phi_S(s) \leq C_M (Ls + r)^n$$

und die Behauptung folgt.