Mein Titel

Tim Jaschik

May 22, 2025

Abstract. – Kurze Beschreibung ...

Contents

1 Liegruppen

1.1 Definition

Eine Liegruppe ($G, \cdot$) ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Gruppenstruktur, sodass die Abbildung

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh^{-1}$$

differenzierbar ist.

1.2 Beispiele

a) Ist G eine endliche Gruppe, so ist G eine 0-dimensionale Liegruppe.
b) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sind abelsche Liegruppen. Ebenso ist S^1 eine abelsche Liegruppe.
c) $GL(n,k)$ ist für $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ eine Liegruppe.
d) Die bekannten Matrizengruppen, z.B. $O(n), SL(n,\mathbb{R}), U(n), SO(n)$ sind Liegruppen, wie man leicht mit dem Satz vom regulären Wert beweist (Übungsaufgabe!).
e) Sind G und H Liegruppen, so ist $G \times H$ eine Liegruppe. Insbesondere ist $T^2 = S^1 \times S^1$ eine Liegruppe.
f) Die affine Gruppe

$$\mathrm{Aff}_n(k) = (GL(n,k) \times k^n, ((A,v),(B,w)) \mapsto (AB, Aw + b))$$

ist eine Liegruppe. Aff $_1(k)$ ist die einzige zusammenhängende zweidimensionale nicht abelsche Liegruppe.

1.3 Definition

Sei G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so heißt H eine Unterliegruppe, falls H eine Untermannigfaltigkeit ist.

1.4 Beispiele

a) $O(n) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ ist eine Unterliegruppe.
b) $M_\alpha := \left\{ \left(e^{it}, e^{it\alpha}\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq T^2$ ist eine Untergruppe für $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist M_α eine Unterliegruppe, für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nicht. (Übungsaufgabe!)
c) $N_n(k) = \{(a_{ij}) \in GL(n,k) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j, a_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n\}$ ist eine Untergruppe.

1.5 Satz

Ist $H \subseteq G$ eine Unterliegruppe, so ist $H \subseteq G$ abgeschlossen.

Beweis: Angenommen, es existiert ein $g \in \bar{H}\backslash H$. Sei (U, F) eine Untermannigfaltigkeitskarte von H um 1. Dann ist $gU^{-1} = \left\{x \in G \mid x^{-1}g \in U\right\} \subseteq G$ eine offene Umgebung von g, also $gU^{-1} \cap H \neq \emptyset$. Sei $h \in gU^{-1} \cap H$, dann ist $h^{-1}g \notin H$, da $g \notin H$. Wegen $g^{-1}h \in U^{-1}$ ist also $h^{-1}g \in U\backslash H$. Also existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von $h^{-1}g \in V$ mit $V \cap H = \emptyset$, also ist hV eine offene Umgebung von g mit $hV \cap H = (h(V \cap H)) = \emptyset$. Widerspruch!

1.6 Satz

Jede abgeschlossen Untergruppe einer Liegruppe ist eine Unterliegruppe.
Der Beweis wird später gegeben.

1.7 Definiton

Ein Homomorphismus (bzw. ein Isomorphismus) $f : G \to H$ zwischen Liegruppen heißt ein Liegruppenhomomorphismus (bzw. -isomorphismus), falls er zusätzlich differenzierbar ist.

1.8 Beispiele

Die Abbildungen
a) $S^1 \to SO(2), e^{it} \to \binom{\cos t - \sin t}{\sin t \cos t}$
b) $S^1 \to T^2, t \mapsto \left(e^{it}, e^{it\alpha}\right), \alpha \in \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{R} \to S^1, t \to e^{it}$
d) $\det : Gl(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\star$
e) $\text{konj} : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$
sind Liegruppenhomomorphismen.
Die Abbildungen
f) $\mathbb{R} \to N_1(\mathbb{R}), x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
g) $\mathbb{R} \to \mathcal{L}_+^\uparrow(1), x \mapsto \begin{pmatrix} \cos hx & \sin hx \\ \sin hx & \cos hx \end{pmatrix}$
h) $\text{Aff}(k) \to \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| A \in GL(n,k), b \in \mathbb{R}^n \right\} (X, v) \mapsto \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind Liegruppenisomorphismen.

1.9 Definition

Sei G eine Liegruppe, M eine Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Abbildung $\phi : G \times M \to M$ heißt eine $G-$ (Links)Aktion, falls gilt
(1) $\phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$.
(2) $\phi(1, x) = x$ für alle $x \in M$.

Statt $\phi(g, x)$ schreibt man meist gx. Analog sind Rechtsaktionen definiert. Man schreibt statt $\phi(g, \cdot) = L_g$ für Linksaktionen bzw. $\phi(\cdot, g) = R_g$ für Rechtsaktionen. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer G-Aktion heißt G-Mannigfaltigkeit.

1.10 Bemerkung

Offenbar ist jede Liegruppe selbst eine G-Mannigfaltigkeit.

1.11 Beispiele

a) Sei $G = SO(n)$ und $M = S^m$ mit $n \leq m + 1$.

$$\phi : G \times M \to M, (A, v) \mapsto \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} v$$

ist eine G-Aktion.
b) Sei $G = \text{Aff}(k) \times k^n, M = k^n$.

$$\phi : G \times k^n \to k^n, ((A, v), x) \mapsto Ax + v$$

ist eine G-Aktion, denn

$$\begin{aligned} &\phi((A, v) \cdot (B, w), x) = ABx + Aw + v \text{ und} \\ &\phi((A, v), \phi((B, w), x)) = \phi((A, v), Bx + w) = ABx + Aw + v \end{aligned}$$

1.12 Übungsaufgaben

a) Jede offene Untergruppe einer Liegruppe ist auch abgeschlossen.
b) Ist G zusammenhängend, $V \subseteq G$ offen mit $1 \in V$, so gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} V^i = G$.
c) Sei G Liegruppe, $G_0 \subseteq G$ die Zusammenhangskomponente der 1. Dann ist G_0 ein Normalteiler.
d) Zeigen Sie: $SO(n), SU(n)$ und $SO^{\uparrow}(1, n-1)$ sind zusammenhängende Liegruppen. Was folgt daraus für $O(n)$ und $O(1, n-1)$?
e) Zeigen Sie: $S^1 \times SU(n) \to U(n)$ ist eine n-fache Überlagerung.
f) Zeigen Sie:

$$GL(n, \mathbb{R}) \cong O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$
$$GL(n, \mathbb{C}) \cong U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

2 Invariante Vektorfelder und Differenzialformen

2.1 Definition

Sei M eine G-Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld $v \in \Gamma TM =: \mathcal{V}(M)$ heißt linksinvariant, falls gilt

$$dL_g|_x (v(x)) = v(gx)$$

für alle $g \in G, x \in M$. Den Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_G(M)$.

2.2 Erinnerung

Durch $[\cdot,\cdot] : \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}M$ ist eine bilineare, schiefsymmetrische Abbildung gegeben durch $[v,w]f = v(wf) - w(f)$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Ist $f : M \to \widetilde{M}$ eine differenzierbare Abbildung und sind $v, w \in \mathcal{V}(M)$ und $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathcal{V}(\widetilde{M})$ mit

$$df_x(v(x)) = \tilde{v}(f(x))$$

und

$$df_x(w(x)) = \tilde{w}(f(x))$$

für alle $x \in M$ (kurz: $f_\star v = \tilde{v}$ und $f_\star w = \tilde{w}$), so gilt: $f_\star([v,w]) = [\tilde{v}, \tilde{w}]$. Eine weitere Möglichkeit, die [,] zu definieren, ist wie folgt gegeben:

2.3 Definition und Satz

Sind X, Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit und sei $\phi^{(X)}$ der maximale lokale Fluss zu X,

$$\begin{aligned} &\phi_t^{(X)} := \phi^{(X)}(t,\cdot) \\ &\left(\phi_t^{(X)}\right)_* (Y)(p) = \left. d\phi_t^{(X)}\right|_{\phi_t^{-1}(p)} (Y) \end{aligned}$$

dann ist die Lieableitung von Y nach X durch

$$\begin{aligned} (L_X Y)(p) &= -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\phi_t^{(X)}\right)_* (Y)(p) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\left(Y - (\phi_t)_* Y\right)(p)\right) \end{aligned}$$

definiert. Es gilt $L_X Y = [X, Y]$.

Beweis:

Vorbemerkung:
a) Für $f \in C^\infty(M), g : M \to M$ eine differenzierbare Abbildung, $x \in M, y = g(x)$ gilt

$$\begin{aligned} (g_*)(Y)(p)(f) &= df_p \left(dg|_x (Y)\right. \\ &= d(f \circ g)_x(Y) = Y(f \circ g)(x) \end{aligned}$$

Also ist für $\phi = \phi^{(X)}$

$$(\phi_t)_* (Y)(p)(f) = Y (f \circ \phi_t) (\phi_{-t}(p))$$

b) Für $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0$ ist

$$h(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} h(ts) ds = t \int_0^1 h'(ts) ds =: t\tilde{h}(t)$$

mit $\tilde{h}(0) = h'(0)$. Also ist für $f \in C^\infty(M)$

$$(f \circ \phi_t - f) (q) = t\tilde{f}(q, t)$$

für $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(q, 0) = df|_q (x) = x(f)(q)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} (\phi_t)_* (Y)(p)(f) &= Y (f \circ \phi_t) (\phi_{-t}(p)) \\ &= Y \Big(f (\phi_{-t}(p)) + t\tilde{f} (\phi_{-t}(p), t) \Big) \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi_t)_* (Y)(p)(f) &= -XY(f) + Y(\tilde{f}(p, 0)) \\ &= (-XY(f) + YX(f))(p) \end{aligned}$$

2.4 Definition

Eine Lie-Algebra ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathfrak{a}$, versehen mit einer Abbildung

$$[,] : (v_1, v_2) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \mapsto [v_1, v_2] \in \mathfrak{a},$$

welche die folgenden Eigenschaften hat:
a) Für alle $v_1, v_2 \in \mathfrak{a}$ ist $[v_1, v_2] = -[v_2, v_1]$.
b) Für alle $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{a}$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ist $[\lambda_1, v_1 + \lambda_2 v_2, v_3] = \lambda_1 [v_1, v_3] + \lambda_2 [v_2, v_3]$.
c) Jacobi-Identität: Für alle $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{a}$ ist $[[v_1, v_2], v_3] + [[v_2, v_3], v_1] + [[v_3, v_1], v_2] = 0$.

2.5 Beispiele

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist zusammen mit $[v_1, v_2] := v_1 \times v_2$, wobei $v_1 \times v_2$ das Vektorprodukt von v_1 und v_2 bezeichnet, eine Lie-Algebra.
b) Der Vektorraum der $n \times n$-Matrize $M(n, \mathbb{K})$ mit $[A, B] := AB - BA$ ist eine Lie-Algebra.
c) $(\mathcal{V}(M), [\cdot, \cdot])$ ist eine Liealgebra.
d) Der Vektorraum der strikten oberen Dreiecksmatrizen

$$N(n, k) = \{(a_{ij}) \in M(n \times n, k) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\}$$

$N(3, k)$ heißt Heisenberg-Algebra.
e) Die Oszillatoralgebra ist definiert als der Vektorraum $N(3, k) \times \mathbb{R}$ mit der Lieklammer definiert durch die Lieklammer auf $N(3, k)$ und

$$[X,T] = -Y \quad [Y,T] = X \quad [Z,T] = 0.$$

Für

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das erzeugende T von $\mathbb{R}$.

2.6 Satz

Sei M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann ist $(\mathcal{V}_G(M), [\cdot,\cdot])$ eine Lie-Algebra, d.h. $[\cdot,\cdot] : \mathcal{V}_G(M) \times \mathcal{V}_G(M) \to \mathcal{V}_G(M)$ ist bilinear und schiefsymmetrisch und erfüllt die Jacobi-Identität $[u[v,w]]+$ zykl. Perm. $=$ 0.

Beweis: Seien $v, w \in \mathcal{V}_G(M)$. Zu zeigen ist nur, dass gilt: $[v,w] \in \mathcal{V}_G(M)$. Da L_g ein Diffeomorphismus ist, folgt dies aus

$$dL_g|_{g'} [v,w](g') = [dL_g v, dL_g w](gg') = [v,w](gg').$$

2.7 Definition

Sei M eine G-Mannigfaltigkeit. Eine Differenzialform $\omega \in \Omega M$ heißt G-invariant, falls $L_g^* \omega = \omega$ gilt für alle $g \in G$. Den Raum der linksinvarianten Formen bezeichnen wir mit $\Omega_G(M)$.

2.8 Bemerkungen

a) Ist $\omega \in \Omega_G^k M, v \in \mathcal{V}_G(M)$, so ist $i_v \omega \in \Omega_G^{k-1}(M)$.
b) Ist $\omega \in \Omega_G M$, so ist $d\omega \in \Omega_G M$, denn $L_g^* d\omega = dL_g^* \omega = d\omega$.
c) Sind $\omega, \eta \in \Omega_G M$, so ist auch $\omega \wedge \eta \in \Omega_G M$.

3 Lie-Algebren

Da jede Lie-Gruppe G eine G-Mannigfaltigkeit ist, können wir jetzt auf G auch links-(und rechts-)invariante Vektorfelder und Differenzialformen betrachten.

3.1 Satz

Die Abbildung

$$T_1G \to \mathcal{V}_G(G), \xi \mapsto \big(g \mapsto dL_g|_1(\xi)\big) =: \xi^G$$

ist ein Isomorphismu von Vektorräumen.
Beweis: Offenbar ist die Abbildung linear und ein Inverses ist durch $\mathcal{V}_G(G) \to T_1G, v \mapsto v(1)$ gegeben. Zu zeigen ist nur, dass ξ^G tatsächlich ein linksinvariantes Vektorfeld definiert:

$$dL_{g'}|_g\, \xi^G(g) = dL_{g'}|_g \circ dL_g\Big|_1(\xi) = dL_{g'g}|_1(\xi) = \xi^G(g'g)$$

3.2 Beispiele

a) Da $GL(n,\mathbb{R}) \subseteq M(n\times n,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge ist, ist

$$T_1GL(n,\mathbb{R}) = M(n\times n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} =: g\ell(n,\mathbb{R})$$

Ist $X \in M(n\times n,\mathbb{R})$, so wird $X \in T_1G$ durch e^{tX} repräsentiert, also ist

$$dL_g(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ge^{tX} = gX,$$

also ist $X^G(g) = gX$.
b) Ist $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ eine Unterliegruppe, so ist $T_1G \subseteq M(n\times n,\mathbb{R})$ ein Untervektorraum und wie in a) ist kanonisch $X^G(g) = gX$.
c) Mit dem Satz vom regulären Wert zeigt man leicht

$$\begin{aligned}
&T_1O(n) = T_1SO(n) =: \mathrm{so}(n) = \big\{X \in g\ell(n,\mathbb{R}) \mid X^T = -X\big\}\\
&T_1SL(n,\mathbb{R}) = \mathrm{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in g\ell(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\,X = 0\}\\
&T_1U(n) = u(n) = \big\{X \in g\ell\,\big(n,\mathbb{C} \mid \bar{X}^T = -X\big\}\\
&T_1SU(n) = \mathrm{su}(n) = \{X \in u(n) \mid \mathrm{tr}\,X = 0\}
\end{aligned}$$

3.3 Korollar

Jede Liegruppe ist parallelisierbar, d.h. $TG = G \times T_1G$. Der Vektorraumbündelisomorphismus ist durch

$$G \times T_1G \to TG,\, (g,\xi) \mapsto dL_g|_1(\xi)$$

gegeben. Damit ist jede Liegruppe orientierbar.

3.4 Satz und Definition

Auf $T_1G = \mathfrak{g}$ ist durch

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (\xi, \eta) \mapsto \left[\xi^G, \eta^G\right](1) =: [\xi, \eta]$$

eine Lieklammer wohldefiniert. ($\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]$) heißt die Liealgebra zu G.

3.5 Beispiel

Sind $X, Y \in g\ell(n, \mathbb{R})$, so ist

$$\begin{aligned} X^G\left(Y^G\right)(1) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y^G\left(e^{tX}\right) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(e^{tX} Y\right) = X \cdot Y \end{aligned}$$

also

$$[X, Y] = \left[X^G, Y^G\right](1) = X \cdot Y - Y \cdot X.$$

3.6 Definition

Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum, so heißt $\mathfrak{h}$ eine UnterLiealgebra, falls für $\xi, \eta \in \mathfrak{h}$ auch $[\xi, \eta] \in \mathfrak{h}$ gilt.

3.7 Bemerkungen

a) Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unter-Liealgebra.
b) Sind G_1 und G_2 Liegruppen, so ist die Liealgebra von $G_1 \times G_2$ der Vektorraum $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ mit der Lieklammer

$$\left[(u_1, v_1), (u_2, v_2)\right] = \left([u_1, u_2], [v_1, v_2]\right)$$

(Übungsaufgabe!)

3.8 Satz

Ist $f : G \to H$ ein Liegruppenhomomorhphismus, dann ist $f_* := \left.df\right|_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, also $f_*([X, Y]) = [f_*X, f_*Y]$.

Beweis: Es ist $\left.df\right|_g \left(X^G(g)\right) = f_*(X)\Big)^H (f(g))$, denn

$$\left.df\right|_g \left(X^G(g)\right) = \left.df\right|_g \left.dL_g\right|_1 (X) \overset{(*)}{=} dL_{f(g)} \circ \left.df\right|_1 (X) = (f_*X)^H (f(g))$$

dabei gilt (*), da $f(ga) = f(g)f(a)$. Also ist

$$[f_*(X), f_*(Y)] = \left.\left[df\left(X^G\right), df\left(Y^G\right)\right]\right|_1 = \left.df\right|_1 \left[X^G, Y^G\right] = f_*[X, Y]$$

3.9 Definition

Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, so heißen die durch $[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k$ definierten Zahlen die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich $(v_1, \dots, v_n)$.

3.10 Bemerkung

Es gilt:

$$\begin{aligned} &c_{ij}^k = -c_{ji}^k \\ &c_{ij}^k c_{km}^\ell + c_{jm}^k c_{ki}^\ell + c_{mi}^k c_{kj}^\ell = 0 \end{aligned}$$

3.11 Bemerkung

Wie für Vektorfelder ist auch für Differenzialformen

$$\mathfrak{g}^* \cong \Omega_G^1(G), \Lambda^k \mathfrak{g}^* \equiv \mathrm{Alt}^k(\mathfrak{g}) \cong \Omega_G^k(G),$$

also induziert $d : \Omega_G^k(G) \to \Omega_G^{k+1}(G)$ eine Abbildung

$$d : \Lambda^k \mathfrak{g} \to \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^*$$

3.12 Maurer-Cartansche Strukturformel

Ist $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von $\mathfrak{g}, (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ die duale Basis von $\mathfrak{g}^*$, dann gilt

$$d\sigma_i = -\sum_{j<k} c_{jk}^i \sigma_j \wedge \sigma_k$$

wobei $\mathfrak{g}^* \cong \Omega_G^1(G)$ und c_{ij}^k die Strukturkonstanten bzgl. $(v_1, \dots, v_n)$ sind.

Beweis: Für $\omega \in \Omega^1 M$ gilt

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

Schreiben wir im Folgenden v_i statt v_i^G und fassen auch $\sigma_i \in \Omega^G(G)$ auf, so folgt:

$$d\sigma_i\left(v_j, v_k\right) = v_j \sigma_i\left(v_k\right) - v_k \sigma_i\left(v_j\right) - \sigma_i\left(\left[v_j, v_k\right]\right) = -\sigma_i\left(\sum_{\ell=1}^n c_{jk}^\ell v_\ell\right) = -c_{jk}^i$$

3.13 Beispiele

a) Sei

$$G = SL(2, \mathbb{R}), -\mathfrak{g} = s\ell(2, \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & c \\ b & -a \end{array} \right) \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine Basis für $\mathfrak{g}$ ist (H, E, F) mit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H$$

also sind die nicht verschwindenden Strukturkonstanten:

$$\begin{aligned} c_{12}^2 &= -c_{21}^2 = c_{31}^3 = -c_{13}^3 = 2 \\ c_{23}^1 &= -c_{32}^1 = 1 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} d\sigma_E &= -2\sigma_H \wedge \sigma_E \\ d\sigma_F &= 2\sigma_H \wedge \sigma_F \end{aligned}$$

b) Sei $G + SO(3), \mathfrak{g} = so(3)$. Eine Basis für $\mathfrak{g}$ ist (E_{12}, E_{31}, E_{23}) mit

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$[E_{12}, E_{31}] = E_{23}, [E_{31}, E_{23}] = E_{12}, [E_{23}, E_{12}] = E_{31}$$

also sind die nicht verschwindenden Strukturkonstanten:

$$c_{12}^3 = -c_{21}^3 = c_{31}^2 = -c_{13}^2 = c_{23}^1 = -c_{32}^1 = 1$$

c) Sei

$$G = SU(2), \mathfrak{g} = su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b + ic \\ -b + ic & -ia \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine Basis für $\mathfrak{g}$ ist (I, J, K) mit

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J$, also

$$[I, J] = 2K, [J, K] = 2I, [K, I] = 2J,$$

also sind die nicht verschwindenden Strukturkonstanten:

$$c_{12}^3 = -c_{21}^3 = c_{31}^2 = -c_{13}^2 = c_{23}^1 = -c_{32}^1 = 1$$

3.14 Bemerkungen

a) Bezeichnet (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$, so ist durch

$$\mathbb{R}^3 \to so(3), e_i \mapsto E_{jk}$$

wobei (i, j, k) eine zyklische Permutation von ($1, 2, 3$) ist, ein Liealgebrenisomorphismus gegeben.
b) $su(2) \to so(3), I \mapsto E_{12}/2, J \mapsto E_{31}/2, K \mapsto E_{23}/2$ ist ein Liealgebrenisomorphismus.

3.15 Definition

a) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. eine Lieunteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt ein Ideal, falls für alle $X \in \mathfrak{h}$ und $Y \in \mathfrak{g}$ gilt: $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.
b) Sind $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ Lieunteralgebren, dann bezeichnet $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$ die kleinste Lieunteralgebra von $\mathfrak{g}$, in der alle Kommutatoren $[X, X']$ mmit $X \in \mathfrak{h}, X' \in \mathfrak{h}'$ enthalten sind.
c) Das Ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ heißt der Kommutator von $\mathfrak{g}$.

3.16 Bemerkung

Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, dann ist $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$ ebenfalls ein Ideal (Übungsaufgabe!).

3.17 Definition

Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so heißt die Familie
(1) $D_k(\mathfrak{g})$ mit $D_1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], D_k(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, D_{k-1}(\mathfrak{g})]$ die untere Zentralreihe.
(2) $D^k(\mathfrak{g})$ mit $D^1(\mathfrak{g}) = D_1(\mathfrak{g}), D^k(\mathfrak{g}) = \left[D^{k-1}(\mathfrak{g}), D^{k-1}(\mathfrak{g})\right]$ die obere Zentralreihe.

3.18 Bemerkung

Offenbar ist $D^k(\mathfrak{g}) \subseteq D_k(\mathfrak{g})$ und die Algebren $D^k(\mathfrak{g})$ und $D_k(\mathfrak{g})$ sind Ideale.

3.19 Definition

(1) $\mathfrak{g}$ heißt nilpotent, falls es ein $k \geq 1$ gibt mit $D_k(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
(2) $\mathfrak{g}$ heißt auflösbar, falls $D^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ für ein k.
(3) $\mathfrak{g}$ heißt einfach, falls $\mathfrak{g}$ keine nichttrivialen Ideale hat und $\dim \mathfrak{g} > 1$ gilt.
(4) $\mathfrak{g}$ heißt halbeinfach, falls $\mathfrak{g}$ keine nichttrivialen auflösbaren Ideale hat.

3.20 Bemerkung

Jede nilpotente Liealgebra ist auflösbar und jede einfache Liealgebra ist halbeinfach.
Abelsche Liealgebren sind die einzigen Liealgebren, die gleichzeitig einfach und nilpotent sind. Einfache Liealgebren sind klsssifiziert, und halbeinfache Liealgebren sind direkte Summen von einfach Liealgebren.

3.21 Beispiele

a) Strikte obere Dreiecksmatrizen sind nilpotent, obere Dreiecksmatrizen sind auflösbar. Die Heisenberg-Algebra ist also nilpotent.
b) Die Oszillator-Algebra ist auflösbar.
c) $s\ell(2, \mathbb{R})$ ist einfach, wie man leicht nachrechnet: Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal, $\mathfrak{h} \neq 0$ und $0 \neq A =: xH + yE = zF \in \mathfrak{h}$. Dann ist auch $[A, E], [A, F], [A, H] \in \mathfrak{h}$ und folglich findet man zwei weitere linear unabhängige Vektoren in $\mathfrak{h}$. Also ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.
d) Ebenso sind $so(3)$ und $su(3)$ einfach.

3.22 Definition

Ist M eine G-Mannigfaltigkeit, $\phi : G \times M \to M$ eine G-Aktion, so heißt

$$\mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M), X \mapsto \big(p \mapsto dR_p|_1(X)\big) =: X^M$$

mit $R_p = \phi(\cdot, p)$, also $R_p(g) = gp$ die zugehörige infinitesimale Aktion.

3.23 Beispiel

$$G = S^1, \phi : S^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$$
$$\mathfrak{g} = i\mathbb{R} \to (\mathrm{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})), iv \mapsto \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{itv} z \right) = ivz$$

Im Allgemeinen ist X^M kein linksinvariantes Vektorfeld, da $dL_g|_p \circ dR_p\Big|_1 \neq dR_{gp}|_1$ gilt.

3.24 Übungsaufgabe

Zeigen Sie: Ist G zusammenhängend, so ist die universelle Überlagerung $\widetilde{G}$ von G eine Liegruppe mit derselben Liealgebra wie G.

4 Die Exponentialabbildung

4.1 Erinnerung und Notation

Ist M eine Mannigfaltigkeit $v \in \mathcal{V}(M)$, so schreiben wir für die maximale Integralkurve von v zum Startpunkt p

$$\alpha_p^{(v)} : (a_p, b_p) \to M$$

Der maximale lokale Fluss zu v ist definiert durch

$$\phi^{(v)} : \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\} \to M, \phi^{(v)}(t,p) = \alpha_p^{(v)}(t)$$

Ist $(a_p, b_p) = \mathbb{R}$ für alle $p \in M$, so heißt $\phi := \phi^{(v)} : \mathbb{R} \times M \to M$ globaler Fluss. Es gilt
a) $\phi(0,x) = x$.
b) $\phi(s, \phi(t,x)) = \phi(s+t, x)$, falls beide Seiten definiert sind, denn $\alpha_{\alpha_x(t)}(s) = \alpha_x(t+s)$, da für $s = 0$ beide Seiten $\alpha_x(t)$ ergeben und beide Seiten Lösungen von $\dot{x} = v(x)$ sind:

$$\begin{aligned} &\alpha'_{\alpha_x(t)}(s) = v\left(\alpha_{\alpha_x(t)}(s)\right) \\ &\frac{d}{ds}\alpha_x(t+s) = \alpha'_x(t+s) = v\left(\alpha_x(t+s)\right) \end{aligned}$$

4.2 Beispiel

Ist $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ und $X \in \mathfrak{g}$, so ist $v(g) := X^G(g) = gX$, also $\alpha_g(t) = ge^{tX}$, denn es gilt $\alpha_g(0) = g$, und $\dot{\alpha}_g(t) = ge^{tX}X = v\left(\alpha_g(t)\right)$ für $t \in \mathbb{R}$, also

$$\phi^{\left(X^G\right)} : \mathbb{R} \times G \to G, \quad (t,g) \mapsto ge^{tX}$$

4.3 Satz und Notation

Sei G eine Liegruppe, $\mathfrak{g}$ ihre Liealgebra und $X \in \mathfrak{g}, \phi := \phi^{\left(X^G\right)}$ der zugehörige maximale lokale Fluss. Dann gilt:
a) ϕ ist global.
b) $\phi(\cdot, 1) : \mathbb{R} \to G$ ist ein Homomorphismus, d.h. $\phi(s+t, 1) = \phi(s,1) \cdot \phi(t,1)$.
c) $\phi(\cdot, g) = g\phi(\cdot, 1)$.
d) $\phi^{\left((sX)^G\right)}(t,1) = \phi^{\left(X^G\right)}(st, 1)$.

Beweis: Sei $\alpha := \alpha^{(X)} := \alpha_1^{\left(X^G\right)} : I \to G$ die maximale Integralkurve, $I = (a,b)$.

Behauptung 1: Ist $s, t \in I$ und $s + t \in I$, so gilt $\alpha(s+t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$.
Beweis von Behauptung 1: Sei $g := \alpha(s)$. Sei

$$\begin{aligned} &\eta : I \to G, \eta(t) = g \cdot \alpha(t) \\ &\tilde{\eta} : I - s \to G, \tilde{\eta}(t) = \alpha(t+s) \end{aligned}$$

Dann ist $\eta(0) = g = \tilde{\eta}(0)$.
Weiter ist

$$\begin{aligned}\dot\eta(t) &= dL_g\big|_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t)) = dL_g\big|_{\alpha(t)}\left(X^G(\alpha(t))\right) = dL_g\big|_{\alpha(t)} dL_{\alpha(t)}(X)\\ &= dL_{g\cdot\alpha(t)}(X) = X^G(\eta(t))\\ \dot{\tilde\eta}(t) &= \dot\alpha(t+s) = X^G(\alpha(t+s)) = X^G(\tilde\eta(t))\end{aligned}$$

also ist

$$\alpha(s)\alpha(t) = \eta(t) = \tilde\eta(t) = \alpha(s+t)$$

Behauptung 2: $I = \mathbb{R}$.
Beweis von Behauptung 2: OBdA $b \le |a|$. Angenommen, $b < \infty$. Sei

$$\eta : \left(a + \frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right) \to G, \eta(s) = \alpha\left(\frac{b}{2}\right)\alpha\left(s - \frac{b}{2}\right).$$

Dann gilt nach Behauptung 1:

$$\eta(0) = \alpha\left(\frac{b}{2}\right)\alpha\left(-\frac{b}{2}\right) = 1$$

und für $s \in \left(a + \frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$

$$\dot\eta(s) = dL_g\left(\dot\alpha\left(s - \frac{b}{2}\right)\right) = X^G\left(g\alpha\left(s - \frac{b}{2}\right)\right) = X^G(\eta(s)), \text{ mit } g = \alpha\left(\frac{b}{2}\right)$$

also ist η Integralkurve mit $\eta(0) = 1$, also $\frac{3b}{2} \le b$. Widerspruch zu $b > 0$.
Behauptung 3: $\alpha^{(sX)}(t) = \alpha^{(X)}(st)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Beweis von Behauptung 3:

Es gilt: $\alpha^{(X)}(s0) = 1$,

$$\dot\alpha^{(X)}(st) = s\frac{d}{dt}\Big|_{st}\alpha^{(X)}$$

also ist $\alpha^{(X)}(st) = \alpha^{(sX)}(t)$.

4.4 Definition

Die Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G, X \mapsto \phi^{X^G}(1,1) = \alpha^X(1)$ heißt Exponentialabbildung auf G.

4.5 Lemma

Für die Exponentialabbildung auf G gilt:
(i) $\exp(tX) = \alpha^{(tX)}(1) = \alpha^{(X)}(t)$.
(ii) $d\exp|_0 = \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.
(iii) $g\exp(tX) = \alpha_g^{(X)}(t) = \phi^X(t, g)$.

Beweis: (i) folgt aus 4.3, d) und (iii) folgt aus 4.3, c). Sei $X \in \mathfrak{g}$. Dann ist

$$d\exp|_0(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha^{(X)}(t) = X$$

4.6 Beispiele

a) Sei $G = \mathbb{R}^n$, also $T_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Sei $X \in \mathbb{R}^n$, also $X^{\mathbb{R}^n}(a) = X$. Dann ist $\alpha_0^X(t) = tX$, also $\exp(v) = v$.
b) Sei $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, also $T_1G = \mathbb{R}$. Sei $X \in \mathbb{R}$, also $X^{\mathbb{R}^*}(a) = aX$. Dann ist $\alpha_1^X(t) = e^{Xt}$, also $\exp(X) = e^X$.
c) Sei $G = S^1$, also $T_1S^1 = i\mathbb{R}$. Sei $X = iv \in i\mathbb{R}$, also $X^{S^1}(z) = zX$. Dann ist $\alpha^X(t) = e^{tX}$, also $\exp(X) = e^X = e^{iv}$.
d) Sei $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ eine abgeschlossene Untergruppe, also $\mathfrak{g} \subseteq T_1GL(n,\mathbb{R}) = g\ell(n,\mathbb{R})$. Sei $X \in g\ell(n,\mathbb{R})$.
Dann ist $\alpha(X)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}$, also $\exp(X) = e^X$.

4.7 Satz

Sei $f \cdot G_1 \to G_2$ ein Liegruppenhomomorphismus. Dann gilt:

$$\exp^{(G_2)} \circ df_1 = f \circ \exp^{(G_1)}$$

wobei $\exp^{(G_j)}$ die Exponentenabbildung auf G_j bezeichnet.
Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}_1$ und $\gamma : \mathbb{R} \to G_2, \gamma(t) = f\left(\exp^{(G_1)}(tX)\right)$. Dann ist $\gamma(0) = 1$ und

$$\begin{aligned}
\dot\gamma(t) &= df|_{\exp^{(G_1)}(tX)}\left(\dot\alpha^{(X)}(t)\right) \\
&= df|_{\exp^{(G_1)}(tX)}\left(X^{G_1}\left(\exp^{(G_1)}(tX)\right)\right) \\
&= df|_{\exp^{(G_1)}(tX)}\left(\left.dL_{\exp^{(G_1)}(tX)}\right|_1(X)\right) \\
&\overset{(*)}{=} dL_{\;f\left(\exp^{(G_1)}(tX)\right)\big|_1 \circ df\big|_1(X)} \\
&= (\,df|_1(X))^{(G_2)}\left(f\left(\exp^{G_1}(tX)\right)\right. \\
&= df(X)^{(G_2)}(\gamma(t))
\end{aligned}$$

$\overset{(*)}{=}$ gilt, da f ein Homomorphismus ist, also $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ gilt. Damit ist γ Lösungskurve zu $(df(X))^{G_2}$, also gilt

$$f\left(\exp^{(G_1)}(tX)\right) = \gamma(t) = \exp^{G_2}\left(t df|_1(X)\right)$$

4.8 Beispiel

Sei $f = \det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, also $d(\det)_1 = \text{Spur}$. Dann folgt aus 4.7 für $A \in g\ell(n,\mathbb{R})$

$$e^{\text{Spur}\,A} = \det\left(e^A\right)$$

4.9 Lemma

Die Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ist ein lokaler Diffeomorphismus bei 0 und es gilt:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(-X) = (\exp(X))^{-1}$
3. $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$

Beweis: Die Differenzierbarkeit der Exponentialabbildung folgt daraus, dass die Lösungen von Differenzialgleichungen differenzierbar vom Anfangspunkt abhängen.

1. ist klar und 2) folgt aus 3) und 3) folgt aus 4.3, da

$$\begin{aligned}\exp((s+t)X) &= \alpha^{((s+t)X)}(1) = \alpha^{(X)}(s+t)\\ &= \alpha^{(X)}(s)\alpha^{(X)}(t) = \exp(sX)\exp(tX)\end{aligned}$$

4.10 Bemerkung

Die Exponentialabbildung ist i.a. weder injektiv (vgl. 4.5)noch surjektiv, auch nicht für zusammenhängende Liegruppen, wie folgendes Beispiel zeigt:
Sei $G = SL(2,\mathbb{R}), \mathfrak{g} = s\ell(2,\mathbb{R})$. Für die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $s\ell(2,\mathbb{R})$ gilt $\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2 \in \mathbb{R}$ oder $\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2 \in i\mathbb{R}$. Also ist für $X \in \mathfrak{g}$

$$e^{tX} = C \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda} & z \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix} C^{-1}$$

für ein $C \in GL(n,\mathbb{C}), z \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\lambda \in i\mathbb{R}$. Also ist

$$\operatorname{tr} e^{tX} = e^{\lambda} + e^{-\lambda} = \begin{cases} 2\cosh\lambda & \text{für } \lambda \in \mathbb{R} \\ 2\cos|\lambda| & \text{für } \lambda \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

also $\operatorname{tr} e^{tX} \geq -2$, also ist

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Bild}(\exp)$$

für $a < 0, a \neq -1$.
$SL(2,\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, denn jedes $A \in SL(2,\mathbb{R})$ hat eine eindeutige Darstellung $A = B \cdot C$ mit $B \in SO(2)$ und $C = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $x > 0$. Also ist $SL(2,\mathbb{R}) \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$.

4.11 Definition

Sei $g \in G$. Dann heißt $W \subseteq G$ Normalumgebung von g, falls es offene Umgebungen $\Omega \subseteq G$ von 1 und $\tilde{\Omega} \subseteq \mathfrak{g}$ von 0 gibt, sodass $\exp : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus ist, $g^{-1}W \subseteq \Omega$ und $\exp^{-1}\left(g^{-1}W\right)$ konvex ist. ($W, \exp^{-1} \circ L_g^{-1}$) heißen Normalkoordinaten um g.

4.12 Satz

Sind $f_j : G_1 \to G_2, j = 1, 2$ Homomorphismen von Liegruppen mit $df_1|_1 = df_2|_1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, so ist $f_1 = f_2$, falls G_1 zusammenhängend ist.

Beweis: Ist $\exp^{(G_j)} : V_j \to U_j$ ein lokaler Diffeomorphismus, so folgt aus $df_1|_1 = df_2|_1$ und aus 4.7 nach Verkleinern von U_1, dass $f_1 |U_1 = f_2| U_1$ und damit folgt die Behauptung aus Übungsaufgabe 1.12 a).

4.13 Satz

Sei $\phi : \mathbb{R} \to G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, dann existiert ein $v \in \mathfrak{g}$ mit $\phi(t) = \exp(tv)$. Insbesondere ist ϕ differenzierbar.

Beweis: Sei $\widetilde{\Omega} = \exp(\Omega)$ eine Normalumgebung der 1, $W = \frac{\Omega}{2}, \widetilde{W} = \exp(W)$.
Vorbemerkung: Sind $g_1, g_2 \in \widetilde{W}$ mit $g_1^2 = g_2^2$, so ist $g_1 = g_2$.
Beweis: Seien $g_1, g_2 \in \widetilde{W}, v_i \in W$ mit $\exp(v_i) = \omega_i$. Ist $g_1^2 = g_2^2$, so ist

$$\begin{aligned} g_1^2 &= \exp(v_1)\exp(v_1) = \exp 2v_1 \\ g_2^2 &= \exp 2v_2 \end{aligned}$$

also $v_1 = v_2$, also $g_1 = g_2$.
Da ϕ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\phi([0, \delta]) \subseteq \widetilde{W} \tag{4.1}$$

Sei $\phi(\delta) = \exp(v_0)$. Dann ist $\psi : \mathbb{R} \to G, \psi(t) = \exp\left(\frac{t}{\delta}v_0\right)$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus mit

$$\psi(\delta) = \exp(v_0) = \phi(\delta) \tag{4.2}$$

Die Menge $K := \{t \in \mathbb{R} \mid \phi(t) = \psi(t)\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$, also gilt $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Z}\vartheta$ für ein $\vartheta > 0$.
Angenommen, $K = \mathbb{Z}\vartheta, \vartheta > 0$. Dann ist wegen (4.2) $\vartheta \leq \delta$, also $\phi(t\vartheta) \in \widetilde{W}$ für $t \in [0, 1]$ wegen (4.1). Da W konvex ist, ist $\frac{\vartheta}{2\delta}v_0 \in W$, also $\psi\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \exp\left(\frac{\vartheta}{2\delta}v_0\right) \in \widetilde{W}$. Also

$$\left(\phi\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)^2 = \phi(\vartheta) = \psi(\vartheta) = \left(\psi\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)^2$$

also $\phi\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \psi\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ nach der Vorbemerkung, also $\frac{\vartheta}{2} \in K$. Widerspruch!

4.14 Korollar

Jede zusammenhängende eindimensionale Liegruppe ist zu S^1 oder $\mathbb{R}$ isomorph.

Beweis: Übungsaufgabe

4.15 Satz

Sei G eine Liegruppe, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ die Exponentialabbildung. Dann gilt

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + 0\left(t^2\right)\right)$$

Dabei heißt $f \in 0\left(t^2\right) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{t^2}$ ist beschränkt für $t \to 0$.

Beweis: Sei Ω Normalumgebung von $1, U \subseteq \Omega$, sodass $U^2 \subseteq \Omega$. Seien (y,z) die von den Normalkoordinaten induzierten Koordinaten auf $U \times U$, sei f die Beschreibung der Gruppenmultiplikationen in Normalkoordinaten, also

$$f(y,z) = \exp^{-1}(\exp(y) \cdot \exp(z))$$

Dann ist

$$f(0,z) = z \quad f(y,0) = y$$

Dann ist die Taylorentwicklung von f wegen $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = y$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = z$ also

$$f(y,z) = y + z + O\left(\|(y,z)\|^2\right)$$

wobei R aus Gliedern zweiter Ordnung besteht. Also ist

$$\exp(tY)\exp(tZ) = \exp(tY + tZ + R)$$

mit $R \in 0\left(t^2\right)$.

4.16 Bemerkung

Genauer gilt die Campell-Hausdorff-Formel

$$\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(X \star Y)$$

mit

$$X \star Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{2}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \dots$$

4.17 Korollar

Die Exponentialabbildung einer zusammenhängenden nilpotenten Liegruppe ist surjektiv. Ist G abelsch, so ist $G \cong T^k \times \mathbb{R}^m$.

5 Die adjungierte Darstellung

5.1 Definition

a) Ein Vektorraum V zusammen mit einem Liegruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$ heißt eine Darstellung von G.
b) Ein Vektorraum V zusammen mit $(\ \rho, V\ )$ einem Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \text{End }(V)$ heißt eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$.
c) Eine injektive Darstellung heißt treu.
d) Zwei Darstellungen $(\ \rho, V\ )$ und $(\ \pi, W\ )$ heißen äquivalent, falls es einen Isomorphismus $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $\pi(g) \circ f = f \circ \rho(g)$ für alle $g \in G$ gibt.

5.2 Korollar

a) Ist $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung einer Liegruppe, so ist $d\rho|_1 : \mathfrak{g} \to \text{End }(\ V\ )$ eine Darstellung der Liealgebra.
b) Sind ρ_1 und ρ_2 äquivalente Darstellungen, so auch $d\rho_1|_1$ und $d\rho_2|_1$.
c) Ist G zusammenhängend und $d\rho_1|_1$ und $d\rho_2|_2$ äquivalent, so auch ρ_1 und ρ_2.

5.3 Beispiele

a) Die triviale Darstellung: $\rho : G \to GL(V), g \mapsto 11$.
b) Die kanonische Darstellung: $GL(n, \mathbb{R}) \to GL(\mathbb{R}^n)$.

Ist $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, so ist die kanonische Darstellung durch die Inklusion gegeben.
Ist $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$, so ist die kanonische (reelle) Darstellung durch $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, also $GL(n, \mathbb{C}) \subseteq GL(2n, \mathbb{R})$ gegeben.
c) Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so ist $\rho : \mathfrak{g} \to \text{End }\mathfrak{g}, X \mapsto 0$ die triviale Darstellung.
d) Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, so ist $\rho : \mathfrak{g} \to \text{End }\mathfrak{g}, X \mapsto (Y \mapsto [X, Y])$ eine Darstellung. Dies rechnet man leicht mit Hilfe der Jacobi-Identität nach.
e) Sind ρ_1 und ρ_2 Darstellungen, so auch $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$, bzw. $\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathfrak{g} \to \text{End }(V_1 \oplus V_2)$.
f) $SO(n) \to GL(P_k(n))$, wobei $P_k(n)$ den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad k in n bezeichnet, ist durch $A \mapsto \left(p \mapsto p \circ A^{-1}\right)$ gegeben.
g) $\rho : s\ell(2, \mathbb{R}) \to g\ell(n+1, \mathbb{R})$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} n & & & \\ & n-2 & & \\ & & \ddots & -n+2 \\ & & & -n \end{pmatrix}$$

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ n & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Darstellung, denn es gilt $[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$, aber obwohl $E^2 = 0$ ist, gilt: $(\rho(E))^2 \neq 0$. Auch diese Darstellung ist durch eine Darstellung auf Polynomen induziert. Der Raum der Homogenen Polynome vom Grad 2 hat die Basis $\left(x^2, 2xy, y^2\right)$, also

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man

$$\begin{aligned}
&\rho(H)v_\varepsilon = (n-2k)v_\varepsilon \\
&\rho(E)v_\varepsilon = (n-k+1)v_{\varepsilon-1}, k > 0 \\
&\rho(E)v_0 = 0 \\
&\rho(F)v_< = (k+1)v_{<+1}, k < n \\
&\rho(F)v_n = 0
\end{aligned}$$

wobei $v_\varepsilon = \binom{n}{\varepsilon} x^{n-\varepsilon} y^k$. Diese Darstellungen sind irreduzibel. Angenommen, W ist ein invarianter Unterraum

$$v = \sum_{k=0}^{m} c_1 v_2 \in W \text{ mit } c_m \neq 0$$

Dann ist $\rho(E)^{m-1} v = c v_0$ für ein $c \neq 0$ und $\rho(F)^j \rho(E)^{m-1} v = j! c v_j$ für jedes j, also gilt

$$\rho\left(s\ell(2,\mathbb{R})W = S^n \mathbb{R}^2\right.$$

also $W = S^n\mathbb{R}^2$. Es ist $\rho(H)x = x$ und $\rho(H)y = -y$, also

$$\begin{aligned}
\rho(H)x^2 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\rho\left(e^{tH}\right)x\right)^2 = 2x^2 \\
\rho(H)xy &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\rho\left(e^{tH}\right)x\right)\left(\rho\left(e^{tH}\right)y\right) = xy - xy = 0 \\
\rho(H)y^2 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\rho\left(e^{tH}\right)y\right)^2 = -y^2
\end{aligned}$$

5.4 Bemerkung

In der Physik wird als Basis von $s\ell(2,\mathbb{R})$ meist Der Drehimpuls

$$J_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verwendet und setzt

$$|j,m\rangle := (-1)^{j+m}\sqrt{(j-m)!(j+m)!}v_{j+m}$$

als Basis von $S^{2j}V$, also $je^{\mathbb{Z}\setminus 2}m \in \{-j,\dots j\}$. Dann ist also

$$\begin{aligned}
J_3|j,m\rangle &= m|j,m\rangle \\
J_\pm|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|j,m\pm 1\rangle
\end{aligned}$$

5.5 Definition und Notiz

Sei G eine Liegruppe, konj $(g)g' = gg'g^{-1}$. Dann heißt

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g}),\, g \mapsto d\,\mathrm{konj}(g)|_1$$

die adjungierte Darstellung. Das Zentrum von G liegt im Kern:
$Z_G := \{z \in G \mid zg = gz\} \subseteq \ker \mathrm{Ad}$. Ist G zusammenhängend, so gilt $Z_G = \ker Ad$.

Beweis:

1. Ad ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(gh) =&\ dL_{gh}|_{(gh)^{-1}} \circ dR_{h^{-1}g^{-1}}\Big|_1 \\
=&\ dL_g|_{g^{-1}} \circ dL_h\Big|_{(gh)^{-1}} \circ dR_{g^{-1}}\Big|_{h^{-1}} \circ dR_{h^{-1}}\Big|_1 \\
=&\ dL_g|_g \circ dR_{g^{-1}}\Big|_1 \circ dL_h\Big|_{h^{-1}} \circ dR_{h^{-1}}\Big|_1 = \mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{Ad}(h)
\end{aligned}$$

2. Ist $z \in Z_G$, so ist $\mathrm{konj}(z) = \mathrm{id}$, also $d(\mathrm{konj}(z))_1 = 1$.

3. Sei $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{id}$ und G zusammenhängend. Da konj (g) ein Liegruppenhomomorphismus ist, ist $\psi : \mathbb{R} \to G, t \mapsto \mathrm{konj}(g)\exp(tX)$ für jedes $X \in \mathfrak{g}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, also gilt $\psi(t) = \exp(tY)$ für ein $Y \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{Ad}(g)(X) = Y$. Da $g \in \ker \mathrm{Ad}$ ist also $Y = X$, also $\mathrm{konj}(g)\exp(tX) = \exp(tX)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$, also $\mathrm{konj}(g)|_{\tilde{\Omega}} = \mathrm{id}|_{\tilde{\Omega}}$, wobei $\tilde{\Omega}$ eine Normalumgebung der 1 ist. Damit ist $\mathrm{konj}(g) = \mathrm{id}_G$ für alle $g \in \ker\mathrm{Ad}$, da $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^n$, also ist $\ker \mathrm{Ad} \subseteq Z_G$.

5.6 Beispiel

Für abgeschlossene Untergruppen $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$$

denn

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ge^{tX}g^{-1} = gXg^{-1}$$

5.7 Definition

Die Darstellung $\mathrm{ad} = d\mathrm{Ad}|_1 : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ heißt die adjungierte Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$.

5.8 Satz

$$\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$$

Beweis:
Nach Definition ist ad $(X)(Y) = d(\mathrm{Ad})|_1\,(X)(Y) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX)(Y)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y) &= d(\mathrm{konj}(\exp tX))|_1\,(Y) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX)\\ &= dR_{\exp(-tX)} \circ dL_{\exp(tX)}(Y) = dR_{\exp(-tX)}\left(Y^{(G)}\right)\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} dR_{\exp(-tX)}\left(Y^G(\exp(tX)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d\phi_{-t}^{(X)}\left(Y^G\right)$$
$$\text{denn } \phi^{(X)}(t,g) = g\exp(tX) = R_{\exp(tX)}(g)$$

5.9 Bemerkung

Für $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ zeigt man leicht direkt:

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)Y\exp(-tX) = XY - YX$$

5.10 Korollar

a) Ist G abelsch, so ist $[X,Y] = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ (d.h. $\mathfrak{g}$ ist abelsch).
b) Ist $\mathfrak{g}$ abelsch und G zusammenhängend, so ist auch G abelsch.

Beweis:

a) Ist klar.
b) Sei $\mathrm{ad} = 0$, so ist $\mathrm{Ad}(\exp tX) = \exp(t\mathrm{ad}(X) = \mathrm{id}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$. Also ist für alle g in einer Normalumgebung $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{id}$, also ist G abelsch.

5.11 Beispiel

Die Darstellung $\mathrm{ad} : so(3) \to GL(so(3)) = GL(3,\mathbb{R})$ ist äquivalent zur Standarddarstellung. (Beweis: Übungsaufgabe!)
Damit ist $\mathrm{Ad} : SO(3) \to GL(3,\mathbb{R})$ äquivalent zur Standarddarstellung, aber $\mathrm{Ad} : O(3) \to GL(3,\mathbb{R})$ nicht, denn $\mathrm{Ad}(A) = \mathrm{Ad}(-A)$ für $A \in O(3)$, also ist $\mathrm{Ad} : O(3) \to GL(3),\mathbb{R})$ nicht treu.

5.12 Übungsaufgabe

Zeigen Sie: $\exp(tX)$ sind die Geodätischen des kanonischen Zusammenhangs auf $TG = G \times \mathfrak{g}$.

6 Einige klassische Gruppen

6.A Die Gruppe SO(3)

In 3.14 wurde schon der Lie-Algebrenisomorphismus

$$\kappa : \mathrm{so}(3) \to \mathbb{R}^3$$

eingeführt mit $\kappa(\mathrm{ad}(X)Y) = \kappa(X) \times \kappa(Y)$. Es gilt

$$\|(\kappa X)\| = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{Spur}\left(X\bar{X}^T\right)}$$

Für $g \in SO(3)$ und $X \in so(3)$ gilt

$$\kappa(\operatorname{Ad}(g)X) = g \cdot \kappa(X)$$

(Übungsaufgabe!) Für $X \in \mathfrak{g}$ ist $\exp(X)$ die Drehung um die Achse $\kappa(X)$, denn aus $\operatorname{Ad}(\exp X)X = X$ folgt

$$\exp(X)\kappa(X) = \kappa(\operatorname{Ad}(\exp X)X) = \kappa(X)$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\exp\left(tE_{23}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

gilt, also ist $\exp(X)$ eine Drehung um den Winkel

$$\|\kappa(X)\| = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{Spur}\left(X\bar{X}^T\right)}$$

Ist also $A : \mathbb{R} \to SO(3), A(t) = e^{tX}$, so ist $\dot{A}(0) = X$, wobei $\kappa(X) =: \omega$ die Geschwindigkeit und Drehachse beschreibt und für $p \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t)p = Xp = \omega \times p$$

denn $\kappa^{-1}(v)p = v \times p$. (Übungsaufgabe!)
Die Abbildung

$$f : D^3_\pi \to SO(3), v \mapsto \exp\left(\kappa^{-1}(v)\right)$$

ist folglich surjektiv und

$$f(v) = f(w) \Leftrightarrow v = \pm w \text{ und } |v| = |w| = \pi.$$

Also ist $SO(3) = D^3_\pi/\sim = \mathbb{R}P^3$, wobei $v \sim w \Leftrightarrow v, w, e \in \partial D^3_\pi$ und $w = -v$.

6.B Die Gruppe SU(3) und Quaternionen

Die adjungierte Darstellung ist eine Abbildung

$$\mathrm{Ad} : SU(n) \to GL(su(n)) = GL\left(n^2 - 1\right)$$

Auf $su(n)$ ist ein Skalarprodukt durch $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Spur}\left(\bar{A}^T B\right)$ gegeben, das $\mathrm{Ad}(g)$ invariant ist, daher ist Ad ein Homomorphismus:

$$\mathrm{Ad} : SU(n) \to SO\left(n^2 - 1\right)$$

Für $n = 2$ kann $\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ leicht bezüglich der Basis (I, J, K) aus 3.13 von $su(2)$ berechnet werden, z.B. ist
$\mathrm{Ad} : ((\exp tI))J = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 0 & e^{2it} \\ -e^{-2it} & 0 \end{pmatrix} = \cos(2t)J + \sin(2t)K.$
Also

$$\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 0 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{Ad}(\exp X)$ eine Drehung mit Achse X um den Winkel $2\|X\|$.
$\mathrm{Ad} : S^3 \cong SU(2) \to SO(3)$ ist eine zweifache Überlagerung und heißt auch die Eulerparametrisierung von $SO(3)$ (vgl. Th. Bröcker, Lineare Algebra 2, S. 291). Dass die Überlagerung zweifach ist, sieht man, wenn man benutzt, dass $\exp : su(2) \to SU(2)$ surjektiv ist oder, indem man $su(2)$ als Teilmenge der Quaternionen auffasst.

6.1 Definition

Der Vektorraum

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

heißt der Vektorraum der Quaternionen.
Durch ($\nVdash_{2\times 2}, I, J, K$) ist eine reelle Basis von $\mathbb{H}$ gegeben, durch

$$\langle X, Y\rangle := \frac{1}{4}\operatorname{Spur}\left(\bar{X}^T Y^T + \bar{Y}^T X\right)$$

ist auf $\mathbb{H}$ ein euklidisches Skalarprodukt wohldefiniert und ($\nVdash_{2\times 2}, I, J, K$) ist eine Orthonormalbasis. Es gilt

$$SU(2) = S^3 = \{A \in \mathbb{H} \mid \|A\| = 1\}.$$

$\mathbb{H}$ ist auch ein komplexer Vektorraum mit Basis $(\nVdash, J)$. Der komplexe Vektorraum $\mathbb{H}$ hat das unitäre Skalarprodukt

$$(a \nVdash + bJ, c \nVdash + dJ) = a\bar{c} + b\bar{d}$$

und ($\nVdash, J$) ist dann eine Orthonormalbasis. Es gilt $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man bezeichnet $\operatorname{Im}\mathbb{H} = \mathcal{L},\mathcal{H}\{I, J, K\} = su(2)$ als Imaginäranteil von $\mathbb{H}$. Es gilt für $A \in \mathbb{H}$

$$A^2 = \mathbb{R}_- \cdot \nVdash \Leftrightarrow A \in \operatorname{Im}\mathbb{H}.$$

Identifiziert man $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{Im}\mathbb{H} = \left\{aI + bJ + cK \mid a, b, c \in \mathbb{R}^3\right\}$, so gilt $(A \times B) = \operatorname{Im}(A \cdot B)$. Durch

$$\begin{aligned} \varphi : SU(2) \times SU(2) &\to SO(\mathbb{H}) \cong SO(4) \\ (A, B) &\mapsto \left(X \mapsto AXB^{-1}\right) \end{aligned}$$

ist ein Liegruppenhomomorphismus wohldefiniert. Die adjungierte Darstellung von $SU(2)$ ist durch

$$\begin{aligned} \alpha : SU(2) &\to SO(\operatorname{Im}\mathbb{H}) \cong SO(3) \\ A &\mapsto \left(X \mapsto AXA^{-1}\right) \end{aligned}$$

gegeben.

6.2 Satz

Die Abbildungen α und φ sind surjektiv mit Kern$\{\pm 1\}$.

Beweis: Die Surjektivität folgt, da die Erzeugenden von $SO(3)$ und $SO(4)$im Bild liegen, wie man direkt nachrechnet (für φ vgl. Bröcker, Lineare Algebra, Kapitel 8). Die Wohldefiniertheit folgt aus der Stetigkeit der Determinante und da $SU(2)$ zusammenhängend ist.
Sei $A \in \operatorname{Ker}(\alpha)$, also $AXA^{-1} = X$ für alle $X \in su(2)$. Dann ist $AX = XA$ für alle $X \in \mathbb{H}$, also $A \in Z(\mathbb{H}) \cap SU(2) = \mathbb{R} \cap SU(2) = \pm \nVdash$.
Ist $(A, B) \in \operatorname{Ker}\varphi$, so ist $AX = XB$ für alle $X \in \mathbb{H}$. Für $X = \nVdash$ also insbesondere $A = B$ und damit $A \in \operatorname{Ker}\alpha$. Also ist $\operatorname{Ker}\varphi = \{(\nVdash, \nVdash), (-\nVdash, -\nVdash)\}$.

6.3 Korollar

$SO(4) \cong S^3 \times \mathbb{R}P^3$.
Beweis: Es ist $SO(4) \cong \left(S^3 \times S^3\right) / \pm 1$. Da

$$\begin{array}{ccccccc} S^3 \times S^3 & \to & S^3 \times S^3, & (z, w) & \mapsto & (-z, -w) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 \times S^3 & \to & S^3 \times S^3 & (z, zw) & \mapsto & (-z, zw) \end{array}$$

kommutiert, ist

$$\left(S^3 \times S^3\right) / \pm 1 \cong \left(S^3 / \pm 1\right) \times S^3 = \mathbb{R}P^3 \times S^3$$

Die Homomorphismen α und φ ergeben auch einen Homomorphismus $j : SO(3) \to SO(4)$ durch

$$\begin{tikzcd}
SU(2) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\alpha"'] & SU(2) \times SU(2) \arrow[d, "\varphi"] \\
SO(3) \arrow[r, "j"] & SO(4)
\end{tikzcd}$$

Dabei ist Δ die Diagonalabbildung, $\Delta(A) = (A, A)$. Man zeigt leicht, dass j injektiv ist. $H :=$ Bild$(j) \cong SO(3) \subseteq SO(4)$ ist eine Untergruppe. Ebenso ist $\varphi(SU(2) \times 1) =: G \cong SU(2) \subseteq SO(4)$ eine Untergruppe und sogar ein Normalteiler und $G \cap H = \{1\}$, denn $\varphi(A, 1) = \varphi(B, B) \Leftrightarrow \varphi\left(A^{-1}B, B\right) =$ id $\Leftrightarrow A = 1$ und $B = \pm 1$.
Es ist $SO(4)/G \cong SO(3)$, da $\varphi(A, B) = \varphi\left(A, B^{-1}\right)\varphi(B, B)$ gilt, also $SO(4) = G \cdot H$. Damit ist auch eine zweifache Überlagerung

$$\begin{aligned} SO(4) &\to SO(3) \times SO(3) \\ A &\to (\alpha \times \alpha)\varphi^{-1}(A) \end{aligned}$$

wohldefiniert. Dies ist die Darstellung von $SO(4)$ auf $\Lambda^2_+\mathbb{R}^4 \oplus \Lambda^2_-\mathbb{R}^4 = \Lambda^2\mathbb{R}^4$.

6.C Die symplektische Gruppe

Die Quaternionen bilden einen Schiefkörper. $GL(n, \mathbb{H}) := \operatorname{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ bezeichne die $\mathbb{H}$-linearen invertierbaren Abbildungen $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$. Als komplexer Vektor ist $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \cdot J = \mathbb{C}^{2n}$. Also ist

$$\operatorname{End}_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^n = \left\{A \in GL_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^{2n} \mid A \circ J = J \circ A\right\}\right.$$

und

$$GL(n, \mathbb{H}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & -\bar{B} \\ B & A \end{array} \right) \middle| \, A, B \in \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^n\right) \right\}$$

6.4 Definition und Notiz

Die symplektische Gruppe ist

$$\begin{aligned} Sp(n, \mathbb{H}) &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & -\bar{B} \\ B & A \end{array} \right) \in U(2n) \middle| \, A, B \in \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^n\right) \right\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{H}) \mid \|A(X)\| = \|X\|\} \end{aligned}$$

wobei $\|X\| = \sum_\nu \operatorname{Spur}\left(\bar{X}_\nu^T \cdot X_\nu\right)$.

6.5 Bemerkung

a) $Sp(n) = \left\{ S \in U(2n) \mid S^T J S = J \right\}$ für $J = \begin{pmatrix} 0 & -\nVdash \\ \nVdash & 0 \end{pmatrix}$.
b) Die Liealgebra der symplektischen Gruppe ist

$$Sp(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{C}) \middle| \bar{A}^T = -A, B^T = B \right\}$$

und folglich $\dim \mathrm{Sp}(n) = 2n^2 + n$.

6.D Die pseudo-orthogonalen Gruppen

Bekanntlich ist $SO^{\uparrow}(1, n-1) \cong \mathbb{R}^{n-1} \times SO(n-1)$. Die Liealgebra ist

$$\begin{aligned} so(1, n-1) &= \left\{ A \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^n) \middle| \bar{A}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\nVdash \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\nVdash \end{pmatrix} A \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ b & c \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}^{n-1}, c \in so(n-1) \right\} \end{aligned}$$

6.6 Lemma

Durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{1,3} &\to (\mathbb{H}(2, \mathbb{C}),\ \det\ ) \\ \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} t + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & t - x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine Isometrie gegeben.
Beweis: Nachrechnen!

6.7 Satz

Durch

$$\begin{aligned} \varphi : SL(2, \mathbb{C}) &\to SO^{\uparrow}(1, 3) \\ A &\mapsto \left(X \mapsto \left(AX\bar{A}^T\right)\right. \end{aligned}$$

ist eine zweifache Überlagerung der Lorentzgruppe gegeben.
Beweis: Man rechnet leicht nach, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es ist $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\pm \nVdash\}$, denn ist $AX\bar{A}^T = X$ für alle $X \in \mathbb{H}(2)$, also auch für $X = \nVdash$, so ist $\bar{A}^T = A^{-1}$, also $AX = XA$ für alle $X \in \mathbb{H}(2)$, also $AX = XA$ für alle $X \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, also ist $A = \lambda \nVdash$, also $A = \pm \nVdash$.
Die Abbildung φ ist differenzierbar und $d\varphi|_1$ ist ein Isomorophismus, also ist φ ein lokaler Diffeomorphismus bei 1 , da φ ein Homomorphismus ist. Da $SO^{\uparrow}(1, 3)$ zusammenhängend ist, ist φ auch surjektiv.

6.8 Bemerkung

a) Die Einschränkung von φ auf $SU(2)$ ist genau die adjungierte Darstellung und

$$\varphi\begin{pmatrix} \pm e^s & 0 \\ 0 & \pm e^{-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\ 2s & \sinh\ 2s & 0 & 0 \\ \sinh\ 2s & \cosh\ 2s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Durch die Einschränkung auf reelle Einträge erhält man eine zweifache Überlagerung $SL(2,\mathbb{R}) \to SO^{\uparrow}(1,2)$.

6.E Spingruppen

Weitere Gruppen, die eine wichtige Rolle in der Physik spielen, sind zweifache Überlagerungen der orthogonalen Gruppe. Wir haben bereits gesehen, dass die universelle Überlagerung einer Liegruppe wieder eine Liegruppe ist mit derselben Liealgebra. Für die orthogonalen Gruppen gilt:

$$\begin{aligned} \pi_1(SO(2)) &= \mathbb{Z} \\ \pi_1(SO(n)) &= \mathbb{Z}_2 \text{ für } n \geq 3 \\ \pi_1\left(SO^{\uparrow}(k, n-k)\right) &= \pi_1(SO(k)) \times \pi_1(SO(n-k)) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass für $SO(n), n \geq 3$ und $SO^{\uparrow}(1,r)$ mit $r \geq 3$ die zusammenhängende zweifache Überlagerung die universelle Überlagerung ist. Üblicherweise wird die Spingruppe als Teilmenge der Cliffordalgebra definiert, (ähnlich zu $su(2) \subseteq \mathbb{H}$). Wir wollen Spingruppen nicht so ausführlich behandeln, deshalb definieren wir sie hier nur in Spezialfällen.

6.9 Definition

Im Fall $n \geq 3$ ist $\mathrm{Spin}(n)$ bzw. $\mathrm{Spin}^{\uparrow}(1,n)$ die universelle Überlagerung von $SO(n)$ bzw. $SO^{\uparrow}(1,n)$.

6.10 Korollar

$$\begin{aligned} \mathrm{Spin}(3) &= SU(2) \\ \mathrm{Spin}(4) &= SU(2) \times SU(2) \\ \mathrm{Spin}^{\uparrow}(1,3) &= SL(2,\mathbb{C}) \end{aligned}$$

6.11 Bemerkung

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Spin}(5) &= Sp(2) \\ \mathrm{Spin}(6) &= SU(4) \\ \mathrm{Spin}^{\uparrow}(1,2) &= SL(2,\mathbb{R}) \\ \mathrm{Spin}^{\uparrow}(1,5) &= SL(2,\mathbb{H}) \\ \mathrm{Spin}^{\uparrow}(2,2) &= SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Die anderen Spingruppen sind nicht durch bekannte Gruppen beschreibbar. Jedenfalls gilt, dass $\mathrm{Spin}^{\uparrow}(k, n-k)$ bzw. $\mathrm{Spin}(n)$ eine komplexe irreduzible Darstellung der Dimension $2^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$ hat. Genaueres findet sich z.B. in Blaine Lawson, Marie-Louise Michelsohn, Spin Geometry, Princeton 1989, Kap.1.

7 Die Killing-Form

Wir werden bald sehen, dass es oft wichtig ist, auf einer Liealgebra Adinvariante Skalarprodukte zu finden, d.h. Skalarprodukte, für die gilt

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle$$

für alle $g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}$.

7.1 Notiz

a) Ist B eine Ad-invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$, so ist B auch ad-invariant, d.h. es gilt

$$\langle [X, A], B\rangle + \langle A, [X, B]\rangle = 0$$

für alle $A, B, X \in \mathfrak{g}$.
b) Ist $I \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal und B eine invariante symmetrische Bilinearform, so ist auch $I^{\perp}$ ein Ideal, denn für $A \in I, X \in \mathfrak{g}$ und $B \in I^{\perp}$ folgt

$$\langle [X, B], A\rangle = \langle B, [X, A]\rangle = 0$$

Jede invariante symmetrische Bilinearform auf einer einfachen nicht abelschen Liealgebra ist nichtentartet.

7.2 Korollar

Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, B eine ad-invariante symmetrische Bilinearform, I ein Ideal, $I \cap I^{\perp} = \{0\}$, so ist $\mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp}$.

7.3 Korollar

Auf jeder (endlichdimensionalen) Liealgebra gibt es eine kanonische symmetrische invariante Bilinearform.

7.4 Lemma und Definition

Ist $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ ein Liealgebren-Homomorphismus, so ist durch

$$\kappa_{\rho}(X, Y) = \mathrm{tr}(\rho(X) \circ \rho(Y))$$

eine symmetrische invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ definiert. Ist $\rho = d\tau|_1$ für eine Darstellung $\tau : G \to GL(V)$, so ist κ_{ρ} auch ad-invariant. $\kappa_{\mathrm{ad}} =: \kappa$ heißt die Killingform.

Beweis: Offenbar ist κ_{ρ} bilinear und symmetrisch, denn die Invarianz folgt durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&\kappa_\rho([X,Y],Z)+\kappa_\rho(Y,[X,Z])\\
&=\operatorname{tr}(\rho(X)\circ\rho(Y)\circ\rho(Z)-\rho(Y)\rho(X)\rho(Z))\\
&+\operatorname{tr}(\rho(Y)\circ\rho(X)\circ\rho(Z)-\rho(Y)\circ\rho(Z)\circ\rho(X))=0
\end{aligned}$$

Für $\rho = d\tau|_1$ gilt

$$\begin{aligned}
\kappa_\rho(Ad(g)(X),Ad(g)(Y)) &= \operatorname{tr}\left(\tau(g)d\tau|_1(X)\tau\left(g^{-1}\right)\circ\tau(g)\circ d\tau\big|_1(Y)\tau\left(g^{-1}\right)\right)\\
&=\operatorname{tr}\left(\tau(g)\circ\rho(X)\circ\rho(Y)\circ\tau(g)^{-1}\right)=\kappa_\rho(X,Y)
\end{aligned}$$

7.5 Beispiel

a) Sei $\mathfrak{g} = so(3)$. Dann ist

$$\kappa = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

bezüglich (E_{ij}).
b) Sei $\mathfrak{g} = u(n)$. Dann ist $\kappa(X,Y) = 2n\operatorname{tr}(XY) - 2\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$.
c) Sei $\mathfrak{g} = su(n)$. Dann ist $\kappa(X,Y) = 2n\operatorname{tr}(XY)$.
c) Sei $\mathfrak{g} = so(n)$. Dann ist $\kappa(X,Y) = (n-2)\operatorname{tr}(XY)$.

7.6 Korollar

Die Killingform auf einer einfachen, nichtabelschen Liealgebra ist nicht entartet.

7.7 Satz

Eine Liealgebra ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Killingform nicht entartet ist.

Beweis: Tits, Liesche Gruppen und Algebren.

7.8 Lemma

Ist $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 =: \mathfrak{g}$ eine Summe einer halbeinfachen Liealgebra mit einer beliebigen Liealgebra, B eine invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{g}_1 \perp \mathfrak{g}_2$ bezüglich B.

Beweis: Für einfache nichtabelsche Liealgebren $\mathfrak{g}_1$ gilt $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]$ und für $X,Y\in\mathfrak{g}_1, Z\in\mathfrak{g}_2$ ist

$$B([X,Y,],Z) = -B(X,[Y,Z]) = 0$$

7.9 Korollar

Ist $\mathfrak{g}_0$ eine abelsche Liealgebra und $\mathfrak{g}_1\dots\mathfrak{g}_p$ nichtabelsche einfache Liealgebren, so sind die invarianten Bilinearformen auf $\mathfrak{g}_0\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_p$ durch

$$B\left((X_0\dots X_p),(Y_0\dots Y_p)\right) = \sum_{i=0}^{p} B_i\left(X_i,Y_i\right)$$

gegeben, wobei B_i eine invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}_i$ ist.

7.10 Satz

Die einzigen symmetrischen invarianten Bilinearformen auf einer einfachen nichtabelschen Liegruppe sind skalare Vielfache der Killingform.

Beweis: Sei B eine weitere Bilinearform und $f_B \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ der bezüglich der Killingform κ gegebene symmetrische Endomorphismus

$$\kappa\left(f_B(X), Y\right) := B(X, Y)$$

Die Eigenräume von f_B sind Ideale, denn ist $f_B(X) = \lambda X$, so ist für jedes $Z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
\kappa\left(f_B([X,Y]) - \lambda[X,Y], Z\right) &= B([X,Y],Z) - \lambda\kappa([X,Y],Z) \\
&= B(X,[Y,Z]) - \lambda\kappa(X,[Y,Z]) \\
&= \kappa\left(f_B(X) - \lambda X, [Y,Z]\right) = 0
\end{aligned}$$

also ist $f_B = \lambda \operatorname{Id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

7.11 Bemerkung

Ist V ein komplexer Vektorraum und $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$, so ist

$$tr_{\mathbb{R}} f = 2 \operatorname{Re} tr_{\mathbb{C}} f$$

7.12 Notiz

Für $A, B \in \operatorname{su}(n)$ ist $\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(A \circ B)$ reell, also $\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(A \circ B) = 2\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(A \circ B)$, denn für $X \in su(n)$ gilt $X = X_1 + iX_2$ mit $X_i \in GL(n, \mathbb{R})$ und $X_1^T = -X_1, X_2^T = X_2$. Für X symmetrisch und Y schiefsymmetrisch ist aber

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(X \circ Y) &= \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}\left(Y^t \circ X^t\right) \\
&= \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(-Y \circ X) \\
&= -\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(X \circ Y) = 0
\end{aligned}$$

also ist für $A = A_1 + iA_2, B = B_1 + iB_2$

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(A \circ B) = \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}\left(A_1 \circ B_1 - A_2 \circ B_2\right)$$

7.13 Lemma

Für $A, B \in su(n)$ ist $\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(\operatorname{ad}(A) \circ \operatorname{ad} B) = n \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(A \circ B) = 2n \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(A \circ B)$.
Beweis: Übung.
Weitergehende Aussage kann man treffen, wenn man eine andere Eigenschaft von Liealgebren betrachtet.

7.14 Definition

Eine Liealgebra heißt kompakt, wenn sie Liealgebra einer einfach zusammenhängenden kompakten Liegruppe ist.

7.15 Beispiele

a) $so(2) = T_1 S^1 = T_0\mathbb{R}$ ist keine kompakte Liealgebra.
b) $su(n)$ ist für jedes n eine kompakte Liealgebra.

7.16 Satz

1. Eine Liealgebra ist genau dann kompakt, wenn ihre Killingform negativ definit ist.
2. Die Liealgebra einer kompakten Liegruppe ist stets die Summe einer kompakten Liealgebra mit einer abelschen Liealgebra, genauer ist $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

7.17 Korollar

Jede zusammenhängende kompakte Liegruppe ist isomorph zu einem Quotienten

$$(T^a \times G_1 \times \cdots \times G_n)/N,$$

wobei $T^a = S^1 \times \cdots \times S^1$ ein Torus und G_i kompakte Untergruppen mit einfacher Liealgebra sind und N eine diskrete Untergruppe von $T^a \times G_1 \times \cdots \times G_n$ ist.

Die Beweise dieser Sätze sind wieder im Buch von Tits, Liesche Gruppen und Algebren, zu finden.

Die einfach zusammenhängenden Liegruppen mit einfachen kompakten Liealgebren sind:

Typ	Name	Dimension
$A_r, r \geq 1$	$SU(r+1)$	$r(r+2)$
$B_r, r \geq 2$	$\mathrm{Spin}(2r+1)$	$r(2r+1)$
$C_r, r \geq 3$	$\mathrm{Sp}(r)$	$r(2r+1)$
$D_r, r \geq 4$	$\mathrm{Spin}(2r)$	$r(2r-1)$
G_2	G_2	14
F_r	F_r	52
E_6	E_6	78
E_7	E_7	133
E_8	E_8	248

Der Index r gibt die höchste mögliche Dimension eines Torus an, der eingebettet werden kann.

8 Homogene Räume

8.1 Definition

a) Eine G-Aktion auf einer Mannigfaltigkeit $\phi : G \times M \to M$ heißt
(i) effektiv: $\Leftrightarrow (L_g = id_M \Rightarrow g = 1)$
(ii) einfach: $\Leftrightarrow (L_g x = x$ für ein $x \in M \Rightarrow g = 1)$
(iii) transitiv: $\Leftrightarrow (\forall x, y \in M \exists g \in G : gx = y)$
iv) eigentlich, wenn die Abbildung $G \times M \to M \times M, (g, x) \mapsto (gx, x)$ eigentlich ist (vgl. Lee 9.12).
b) (M, ϕ) heißt homogener Raum, falls G transitiv auf M operiert.
c) Für $p \in M$ heisst

$$Gp := \{\phi(g, p) \mid g \in G\}$$

die Bahn von p und

$$G_p := \{g \in G \mid gp = p\}$$

die Isotropiegruppe (oder Standgruppe) von p.

8.2 Notiz

a) Seien $p, q \in Gx$ für ein $x \in M$. Dann ist G_p konjugiert zu G_q, genauer: Ist $q = gp$, so ist $G_q = gG_pg^{-1}$.
b) Für jedes $x \in M$ ist G_x eine abgeschlossene Untergruppe.

Wir benutzen die folgende

8.3 Proposition

a) Ist $\phi : G \times M \to M$ eine eigentliche freie G-Aktion, dann ist M/G eine topologische Mannigfaltigkeit (insbesondere Hausdorffsch!), vgl. Lee 9.15, 9.16.
b) Ist $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann ist die kanonische H-Aktion auf G eigentlich.

8.4 Satz

a) Jede abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe ist eine Unterliegruppe.
b) Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Auf G/H existiert eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur, sodass $\pi : G \to G/H$
eine lokal triviale Faserung mit typischer Faser H und Strukturgruppe H ist und

$$G \times G/H \to G/H, (g, [g']) \mapsto [gg']$$

eine differenzierbare Abbildung ist.
Beweis: a) Es genügt zu zeigen, dass lokal um 1 eine Untermannigfaltigkeitskarte existiert. Wir werden zeigen, dass sie durch exp gegeben ist.
Sei W eine Normalumgebung der 1 in $G, V = \exp^{-1}(W), \log := (\exp|_V)^{-1}$. Sei $A = \log(H \cap W)$. Wir nennen $X \in \mathfrak{g}$ tangential an H (in 1), wenn eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in A$ und $\lim a_k = 0$ existiert und eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \in \mathbb{R}$ und $X = \lim_{k\to\infty} t_k a_k$.

$$TA := \{X \in \mathfrak{g} \mid X \text{ tangential an } H\}$$

Es gilt offenbar:
(i) $0 \in TA$.
(ii) Ist $X \in TA$, so ist $\mathbb{R}X \subseteq TA$.
(iii) X ist invariant unter Verkleinern von W.

Es genügt, folgende Behauptungen zu zeigen:

1. $\exp(TA) \subseteq H$, also $\exp(V \cap TA) \subseteq W \cap H$.
2. TA ist ein Untervektorraum.
3. Nach Verkleinern von W gilt: $\exp(V \cap TA) \supseteq W \cap H$.

Ist 1)-3) gezeigt, so folgt, dass $\log \mid W$ eine Untermannigfaltigkeitskarte für $W \cap H$ ist.
Zu 1):
Sei $X \in TA$, also $X = \lim t_k a_k$. Da $a_k \in A$, ist $\exp(a_k) \in H$, also $\exp(\mathbb{Z}a_k) \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\lim a_k = 0$, ist $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}a_k} \ni X$, also ist auch $\exp(X) \in H$, da H abgeschlossen ist.

Zu 2):

Seien $X, Y \in TA$. Dann ist $\exp(tX) \subseteq H$ und $\exp(tY) \subseteq H$ (nach (ii)und 1)), also ist $\exp(tX) \cdot \exp(tY) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei

$$\alpha : \mathbb{R} \to H \subseteq G, \alpha(t) = \exp(tX)\exp(tY)$$

Dann ist $\dot{\alpha}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\log(\alpha(t))}{t} \in TA$, da $d\exp|_0 = \mathrm{id}$, also $\dot{\alpha}(0) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \log \alpha(t)$. Andererseits ist

$$\dot{\alpha}(0) = (\exp(tX))\dot{}(0) + (\exp(tY))\dot{}(0) = X + Y,$$

also $X + Y \in TA$.

Zu 3):
Angenommen nicht. Dann gäbe es eine Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $W \cap H$ mit $\lim_{k\to\infty} h_k = 1$ und $h_k \notin \exp(V \cap TA)$ für alle k. Sei $\mathfrak{g}_1$ ein zu TA komplementärer Unterraum in $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1 \oplus TA = \mathfrak{g}$. Sei oBdA V so klein, dass

$$\widetilde{\exp} : (TA \oplus \mathfrak{g}_1) \cap V \to W, (v, w) \mapsto \exp(v)\exp(w)$$

ein Diffeomorphismus ist (möglich, da $d\widetilde{\exp}|_0 = \mathrm{id}$).
Sei $\widetilde{\exp}^{-1}(h_k) =: x_k + y_k$ mit $x_k \in TA, y_k \in \mathfrak{g}_1$. Dann ist $y_k \neq 0$ für alle k. Da $\exp(x_k)\exp(y_k) = h_k \in H$, ist $\exp(y_k) \in H$, also $y_k \in A$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathfrak{g}$, sodass $\bar{U}_1(0) \subseteq W$. OBdA existiert $\lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{\|y_k\|} =: y \in \mathfrak{g}_1 \cap TA = 0$. Widerspruch!
b) Mit der Quotiententopologie ist G/H in kanonischer Weise ein Hausdorffraum, $G \to G/H$ stetig und offen (Lee: 9.14-9.16).

Existiert eine differenzierbare Struktur wie gefordert, so ist sie eindeutig, denn dann hat π lokal ein Rechtsinverses σ.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, shift left, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
(G/H, \mathcal{D}_1) \arrow[ur, shift left, "\sigma"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & (G/H, \mathcal{D}_2)
\end{tikzcd}$$

Sind also $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ differenzierbare Strukturen wie gefordert, $\sigma_j : U \to G/H$ differenzierbare Schnitte bezüglich $\mathcal{D}_j$, so sind $\mathrm{id} \mid U = \pi \circ \sigma_1$ und $\mathrm{id} \mid U = \pi \circ \sigma_2$ beide differenzierbar.

Existenz: Sei $W \subseteq G$ eine Normalumgebung der 1 in G und $V = \exp^{-1}(W) \subseteq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{m}$ ein Komplement zu $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Sei $W_\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap V$ und $s : W_\mathfrak{m} \to G, s(v) = \exp(v)$, also $s(0) = 1$, $ds|_0(\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

Behauptung 1: Nach Verkleinern von $W_\mathfrak{m}$ ist $\phi : W_\mathfrak{m} \times H \to G, (v, h) \mapsto s(v)h$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von G, also eine Umgebung von H.

Beweis von Behauptung 1: $d\phi_{(0,1)}$ ist ein Isomorphismus, also ist für $W_{\mathfrak{m}}$ klein genug $d\phi_{(x,1)}$ ein Isomorphismus für alle $x \in W_{\mathfrak{m}}$, also ist $d\phi_{(x,h)} = dR_h \circ d\phi_{(x,1)}$ ein Isomorphismus für alle $(x,h) \in W_{\mathfrak{m}} \times H$. Zu zeigen bleibt, dass $W_{\mathfrak{m}}$ so verkleinert werden kann, dass ϕ injektiv ist.
Angenommen nicht. Seien $(a_i), (b_i)$ Folgen in $W_{\mathfrak{m}}$ mit $\lim a_i = \lim b_i = 0$ und h_i, k_i Folgen in H mit $s(a_i) h_i = s(b_i) k_i$, also $s(a_i) = s(b_i) k_i h_i^{-1}$ und folglich wegen $\lim s(a_i) = \lim s(b_i) = 1$ auch $\lim k_i h_i^{-1} = 1$. Lokal bei $(0,1)$ ist ϕ ein Diffeomorphismus, also folgt $a_i = b_i$ und $k_i = h_i$.
Also ist

$$\psi : W_{\mathfrak{m}} \to U := \pi(\phi(W_{\mathfrak{m}} \times H)) \subseteq G/H, v \mapsto [s(v)]$$

eine stetige offene Bijektion, also ist (U, ψ^{-1}) eine topologische Karte um [1]. G operiert stetig auf G/H, also ist $\mathfrak{A} = \{gU \mid \psi^{-1} \circ L_{g-1}\}$ ein topologischer Atlas für G/H.

Behauptung 2: Dies ist eine differenzierbare Struktur, d.h. die Kartenwechsel sind Diffeomorphismen.

Beweis von Behauptung 2: Sei $\varphi_g : W_{\mathfrak{m}} \to gU \subseteq G/H, v \mapsto [gs(v)]$.
Sei

$$w_{g'g} = \varphi_{g'}^{-1} \circ \varphi_g : \varphi_g^{-1}(gU \cap g'U) \to \varphi_{g'}^{-1}(gU \cap g'U)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}[][g's(w_{g'g}(v))] = [gs(v)] &\Leftrightarrow \exists h \in H : g's(w_{g'g}(v))\, h = gs(v) \\ &\Leftrightarrow s(w_{g'g}(v))\, h = g'^{-1} gs(v)\end{aligned}$$

Da die linke Seite in $\pi^{-1}(U) = \phi(W_{\mathfrak{m}} \times H)$ ist, ist also:

$$w_{g'g}(v) = pr_1 \phi^{-1}\left(g'^{-1} gs(v)\right)$$

also ist $w_{g'g}$ differenzierbar.
Existenz lokaler Rechtsinverser: Die Abbildung $L_g \circ s \circ \varphi_g^{-1} : gU \to G, [gs(v)] \mapsto gs(v)$ ist ein lokales Rechtsinverses zu $G \to G/H$, also ist $G \to G/H$ ein H Prinzipalbündel.
Die Abbildung $G \times G/H \to G/H$ ist differenzierbar, denn $G \to G/H$ besitzt lokale Rechtsinverse σ, also folgt dies aus der Differenzierbarkeit der G-Aktion auf G

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ dx\sigma \uparrow\downarrow & & \downarrow \\ G \times G/\left.H\right|_U & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

8.5 Lemma

Sei $\phi : G \times M \to M$ eine G-Aktion.
a) Für jedes $p \in M$ ist die Bahnabbildung $\alpha_p : G/G_p \to M, [g] \mapsto gp$ eine injektive äquivariante Immersion mit Bild Gp.
b) Ist Gp kompakt oder M ein homogener Raum, so ist Gp eine Untermannigfaltigkeit von M und $\alpha_p : G/G_p \to Gp$ ein Diffeomorphismus.

Beweis: a) Es genügt zu zeigen, dass $\left.df\right|_{[1]}$ für $f = \alpha_p$ injektiv ist. Sei $v \in T_1(G/G_x)$ mit $\left.df\right|_1(v) = 0$. Sei $w \in G$ mit $d\pi(w) = v$. Dann ist $\left.df\right|_1 \circ d\pi(w) = 0$, also $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tw)x = 0$, also

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t_0 w) \exp(tw - t_0 w)\, x = dL_{\exp(t_0 w)} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \exp(tw)x$$

also ist $\frac{d}{dt}\exp(tw)x \equiv 0$, also ist $\exp(tw)x = x$ für alle t, also $\exp(tw) \in G_x$, also $w \in \mathfrak{g}_x := T_1 G_x$, also $v = 0$.
b) Die Abbildung hat konstanten Rang, also folgt die Behauptung aus dem Rangsatz (z.B. Lee, 7.15)

8.6 Beispiele

a) $S^n \cong SO(n+1)/SO(n)$, denn $SO(n+1)$ wirkt transitiv auf S^n und

$$G_{e_1} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & A & \end{array} \right) \middle| \, A \in SO(n) \right\} = \{1\} \times SO(n) \cong SO(n)$$

Ebenso ist $S^n = O(n+1)/O(n)$ und $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$.
b) $\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$ mit

$$S(A \times B) = \{X \in A \times B \mid \det X = 1\}$$

denn $\mathbb{R}P^n = S^n / \pm 1$, also operiert $SO(n+1)$ transitiv auf $\mathbb{R}P^n$ und

$$G_{[e_1]} = \{1\} \times SO(n) \cup \{-1\} \times (O(n) \backslash SO(n))$$

Ebenso ist $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.
c) Sei $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

$$\begin{gathered} SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+ \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{gathered}$$

ist wohldefiniert, denn $cz + d \neq 0$, da $\operatorname{Im} z \neq 0$ und

$$\operatorname{Im}(Az) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$$

und $A(Bz) = (AB)z$. Ist $z =: x + iy$, so ist

$$z = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i$$

Also ist die Wirkung transitiv. Die Standgruppe von i ist $SO(2)$, denn

$$\begin{aligned} &\frac{ai+b}{ci+d} = i \\ \Leftrightarrow &ai+b = di-c \\ \Leftrightarrow &a = d \wedge b = -c, \end{aligned}$$

also

$$G_i = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right) \middle| \; a^2+b^2=1 \right\} = SO(2)$$

also ist $\mathbb{C}_+ = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$.
d)

$$\begin{aligned} H^n &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1, x_0 > 0 \right\} \\ &= \mathcal{L}^{\uparrow}(1,n)/SO(n). \end{aligned}$$

e) Da Darstellungen der Spingruppen durch $\pi : \operatorname{Spin} \to SO$ gegeben sind, gilt auch

$$S^n = \operatorname{Spin}(n+1)/\operatorname{Spin}(n),$$

also

$$S^2 = SU(2)/SO(2) = S^3/S^1 \qquad \text{Hopf-Faserung}$$

und

$$H^n = \operatorname{Spin}^{\uparrow}(1,n)/\operatorname{Spin}(n)$$

also

$$\begin{aligned} H^3 &= SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \\ H^2 &= SL(2,\mathbb{R})/S^1 \end{aligned}$$

f) Auf dem Raum $\operatorname{Sym}^2_+(\mathbb{R}^n)$ der positiv definiten symmetrischen reellen $n \times n$ Matrizen ist eine transitive $GL(n,\mathbb{R})$-Aktion durch $(A,X) \mapsto AX\bar{A}^t$ gegeben. Damit ist

$$\operatorname{Sym}^2_+(\mathbb{R}^n) = GL(n,\mathbb{R})/O(n)$$

g) $\mathcal{L}$ bezeichne die Menge der Gitter, d.h. der Untergruppen in $\mathbb{R}^2$, die durch eine Basis (v_1, v_2) in $\mathbb{R}^2$ erzeugt werden. Dann ist

$$\mathcal{L} = GL(2,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{Z})$$

$\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ sei die Menge der unimodularen Gitter, also der Gitter mit $\operatorname{vol}(\operatorname{Spat}(v_1,v_2)) = 1$. Dann ist $\mathcal{L}_1 = SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$. $\mathcal{L}_1$ ist homöomorph zum Komplement des Kleeblattknotens in $\mathbb{R}^3$ (vgl. Milnor, KTheorie).
h) Der Raum J_n der komplexen Strukturen auf $\mathbb{R}^{2n}$, die ein Skalarprodukt erhalten,

$$J_n = \left\{ A \in O(2n) \mid A^2 = -id \right\}$$

ist ein homogener Raum

$$J_n = O(2n)/U(n)$$

i) $\mathcal{H}_n = \mathrm{Sp}(2n)/U(n)$ ist der Raum der komplexen Strukturen, die eine alternierende Biliniarform erhalten. $\mathcal{H}_n$ heiße Siegelsche Halbebene.
j) Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist die Gruppe der Isometrien $f : (M, g) \to (M, g)$ eine Liegruppe.
Es gilt: $\mathrm{Isom}(M, g) \subseteq O\left(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}M\right)$ für ein $x_0 \in M$, falls M vollständig und zusammenhängend ist. Denn ist $x_0 \in M$, so ist $f \in \mathrm{Isom}(M, g)$ vollständig bestimmt durch $f(x_0)$ und $df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}M$, da Isometrien Geodätische auf Geodätischen abbilden. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt symmetrisch, falls für jedes $x \in M$ eine Isometrie f_x existiert mit $df_x|_x = -1$. Symmetrische Mannigfaltigkeiten sind vollständig.
Jede symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit ist homogen, denn sind $x, y \in M$, dann gibt es eine Geodätische mit $\gamma(-1) = x, \gamma(1) = y, \gamma(0) =: z$, also $f_z(x) = y$.
Symmetrische Räume können durch Krümmungseigenschaften beschrieben werden und sind vollständig klassifiziert (vgl. Helgason, symmetric spaces).

8.7 Bemerkung

Wir wollen nun das Tangentialbündel von G/H beschreiben. Ist $\mathfrak{m}$ ein zu $\mathfrak{h}$ komplementärer Unterraum in $\mathfrak{g}$, so ist offenbar die Einschränkung von

$$d\pi|_1 : \mathfrak{g} \to T_{[1]}(G/H)$$

auf $\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus, denn Ker $d\pi|_1 = \mathfrak{h}$. Ist eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ gewählt, so fassen wir $T_{[1]}G/H = \mathfrak{m}$ auf.

8.8 Beispiel

$Gr_k(\mathbb{R}) = O(n)/(O(k) \times O(n-k))$. Wegen

$$o(n) = (o(k) \times o(n-k)) \oplus \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{array} \right) \middle| \, A \in (M(k \times (n-k)) \right\}$$

ist also

$$T_{[1]}\left(Gr_k\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cong M(k \times (n-k))$$

Besonders einfach ist das Tangentialbündel zu beschreiben, wenn der homogene Raum reduktiv ist.

8.9 Definition

Ein homogener Raum $M = G/H$ heißt reduktiv, falls es einen Untervektorraum $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ gibt mit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \text{ und } \mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$$

8.10 Bemerkung

a) Ist G/H reduktiv, so gilt auch $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ und ist H zusammenhängend und $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$, so ist G reduktiv (vgl. 5.8).
b) Existiert auf $\mathfrak{g}$ eine positiv definite invariante symmetrische Bilinearform B und ist H zusammenhängend, so ist M reduktiv, denn $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ ist eine ad-invariante Zerlegung, da

$$B(X, [Y, Z]) = -B([X, Y], Z) = 0$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$ und $Z \in \mathfrak{h}^{\perp}$ und folglich ist auch $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}$.

8.11 Definition

Ist $L_g : G/H \to G/H$ die Linksmultiplikation, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : H &\to \mathrm{End}\left(T_{[1]}G/H\right) \\ h &\mapsto dL_h|_1 \end{aligned}$$

die Isotropiedarstellung ρ von H.

8.12 Satz

Ist M ein reduktiver homogener Raum, und identifiziert man $T_{[1]}(G/H) \cong \mathfrak{m}$, so gilt $\rho = \mathrm{Ad}|_H : H \to \mathrm{End}(\mathfrak{m})$.

Beweis: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ mit $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Für $X \in \mathfrak{m}, h \in H$ gilt

$$\begin{aligned} d\pi|_1 (\mathrm{Ad}(h)X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [\exp(t\,\mathrm{Ad}(h)X)] \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [\mathrm{konj}(h)\exp(tX)] \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [L_h(\exp(tX))] \\ &= \rho(h)\left(d\pi|_1(X)\right) \end{aligned}$$

8.13 Beispiel

$S^n \cong SO(n+1)/SO(n)$ ist ein reduktiver homogener Raum. Es ist

$$H := G_{e_1} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \end{pmatrix} \right| A \in SO(n) \right\}$$

und

$$\alpha_{e_i} : SO(n+1)/SO(n) \to S^n, [A] \mapsto Ae_1$$

Also ist $\mathfrak{g} = so(n+1)$ und $\mathfrak{h} = 0 \oplus so(n)$. Ein Komplement von $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist offenbar durch

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & -b^T \\ b & 0 \end{array} \right) \middle| \, b \in \mathbb{R}^n \right\} \cong \mathbb{R}^n$$

gegeben. Sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{m}, b \mapsto \left(\begin{array}{cc} 0 & -b^T \\ b & 0 \end{array} \right)$$

der kanonische Isomorphismus. Dann ist für $b \in \mathbb{R}^n, h \in SO(n)$ und $\tilde{h} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & h \end{array} \right)$ wie man leicht nachrechnet

$$\mathrm{Ad}(\tilde{h})(f(b)) = f(hb) \in \mathfrak{m}$$

Außerdem ist

$$\kappa\left(f\left(b_1\right), f\left(b_2\right)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(f\left(b_1\right) f\left(b_2\right)\right) = -\left\langle b_1, b_2 \right\rangle$$

8.14 Bemerkung

Nicht jeder homogene Raum ist reduktiv. Sei

$$G = GL(2, \mathbb{R}), H = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & b \end{array} \right) \middle| \, a \in \mathbb{R}, b > 0 \right\}$$

Dann ist

$$\mathfrak{g} = g\ell(2, \mathbb{R}) \text{ und } \mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{array} \right) \middle| \, x_i \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

Ist $\mathfrak{m} \subset g\ell(2, \mathbb{R})$ ein zu $\mathfrak{h}$ komplementärer Unterraum, so existiert in $\mathfrak{m}$ jedenfalls eine Matrix $\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in g\ell(2, \mathbb{R})$ mit $c \neq 0$. Es ist

$$\left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{cc} -c & a-d \\ 0 & c \end{array} \right)$$

und

$$\left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} -c & a-d \\ 0 & c \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{cc} 0 & -2c \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{h}.$$

Ist also $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ und $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$.

8.15 Übungsaufgaben

1. Sei G eine Liegruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie, dass die Menge der G-äquivarianten Abbildungen $G/H \to G/H$ eine Liegruppe ist und differenzierbar auf G/H operiert.
2. Es bezeichne $C := \left\{x \in \mathbb{R}^{1,n+1} \mid \langle x, c\rangle_{1,n+1} = 0\right\}$ den Lichtkegel im $(n+2)$ - dimensionalen Minkowski-Raum und $PC := \{\mathbb{R}x \mid x \in C\backslash\{0\}\}$ seine Projektivierung.
a) Zeigen Sie, dass PC diffeomorph zur Sphäre S^n ist.
b) Zeigen Sie, dass die pseudo-orthogonale Gruppe $O(1, n+1)$ transitiv auf PC wirkt. Bestimmen Sie den Stabilisator des Punktes $\mathbb{R}(1, 0, \ldots, 0, 1) \in PC$.

9 G-Vektorraumbündel

9.1 Definition

a) Ein Vektorraumbündel $E \to M$ heißt ein G-Vektorraumbündel, falls M und EG-Mannigfaltigkeiten sind, sodass die G-Aktionen verträglich sind, d.h.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "g'"] & M \end{tikzcd}$$

kommutiert und für jedes $p \in M$ ist die Einschränkung der G-Aktion auf E_f eine lineare Abbildung

$$L_g : E_p \to E_{gp}.$$

b) Ist $s \in \Gamma E$ ein Schnitt in einem G-Vektorraumbündel, so definiert man für $g \in G$

$$(g_* s) \in \Gamma E$$

durch

$$(gs)(x) = gs\left(g^{-1}x\right)$$

Ein Schnitt heißt äquivariant, falls $g_* s = s$ gilt.

9.2 Beispiel

Sei M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann ist TM ein G-Vektorraumbündel, denn für jedes $g \in G$ und $x \in M$ ist

$$dL_g\big|_x : T_xM \to T_{g_x}M$$

eine lineare Abbildung. Auch T^*M ist ein G-Vektorraumbündel, denn

$$\begin{aligned} G \times T^*M &\to T^*M \\ (g,\alpha) &\mapsto L^*_{g^{-1}}\alpha = \alpha \circ dL_{g^{-1}}\big|_{gx} \end{aligned}$$

ist eine G-Aktion auf T^*M, die fasernweise linear ist. Ebenso sind $\mathrm{Sym}^2 T^*M$, $\mathrm{Alt}^k TMG$-Vektorraumbündel. Die äquivarianten Schnitte sind dann genau die G-invarianten Vektorfelder, Differenzialformen oder Metriken.

9.3 Definition

Sind $E_1 \to G/H$ und $E_2 \to G/HG$-Vektorraumbündel, so heißt ein Vektorraumbündelisomorphismus f ein G-Vektorraumbündelisomorphismus, falls $f(ge) = g \cdot f(e)$ gilt für alle $g \in G, e \in E_1$.

9.4 Satz und Definition

Ist $\rho : H \to \mathrm{End}(V)$ eine Darstellung, so existiert auf

$$G \times {}_\rho V := G \times V/\sim \mathrm{mit}(g,v) \sim \left(gh, h^{-1}v\right) := \left(gh, \rho\left(h^{-1}\right)v\right)$$

eine kanonische differenzierbare Struktur, sodass $G \times {}_\rho V \to G/H$ eine surjektive Submersion ist. Dann ist $G \times {}_\rho V$ ein G-Vektorraumbündel mit der G-Aktion

$$\begin{aligned} G \times (G \times {}_\rho V) &\to G \times {}_\rho V \\ (g_1, [g_2, v]) &\mapsto [g_1 g_2, v] \end{aligned}$$

Beweis: Sei $[g,v] \in G \times \rho V$. Sei (U,φ) eine H-Bündelkarte für $G \to G/H$, also U eine Umgebung von $[g]$ in G/H und $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times H$ eine H äquivariante Abbildung, sodass

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times H \\ \pi \searrow & & \swarrow pr \end{array}$$

kommutiert.
Sei $\varphi(g) =: (\pi(g), \tilde\varphi(g))$. Dann ist $\tilde\varphi(gh) = \tilde\varphi(g)h$.
Sei $W := \{[g,v] \in G \times_\rho V \mid [g] \in U, v \in V\} \subseteq G \times_H V$.

$$\psi_\varphi : W \to U \times V, \quad [g,v] \mapsto (\pi(g), \rho(\tilde\varphi(g))v).$$

Dann ist ψ_φ wohldefiniert, denn

$$\begin{aligned} \psi_\varphi\left(\left[gh, \rho\left(h^{-1}\right)v\right]\right) &= \left(\pi(gh), \rho(\tilde\varphi(gh))\rho\left(h^{-1}\right)v\right) \\ &= \left(\pi(g), \rho(\tilde\varphi(g))\rho(h)\rho\left(h^{-1}\right)v\right) \\ &= (\pi(g), \rho(\tilde\varphi(g))v) \\ &= \psi([g,v]) \end{aligned}$$

Die Abbildung ψ_φ ist injektiv und surjektiv, denn

$$\psi_\varphi\left(\left[g, \rho(\tilde{\varphi}(g))^{-1} v\right]\right)=([g], v)$$

also ist ψ ein Homöomorphismus. Die differenzierbare Struktur auf $G \times{}_\rho V$ wird durch die Forderung, dass ψ_φ differenzierbar ist, defniert. Dies ist wohldefiniert, denn sind $(U, \varphi_1), (U, \varphi_2)$ verschiedene H-Bündelkarten, so ist $\psi_{\varphi_1} \circ \psi_{\varphi_2}^{-1}$ ein Diffeomorphismus.

Der folgende Satz zeigt, dass im Wesentlichen jedes G-Vektorraumbündel von dieser Form ist.

9.5 Satz

Ist $E \to G/H$ ein G-Vektorraumbündel $V = E_{[1]}, \rho : H \to \operatorname{End}\left(E_{[1]}\right)$ die durch die Einschränkung der G-Aktion auf H gegebene Darstellung, so ist

$$f : G \times_\rho E_{[1]} \to E, [g, e] \mapsto ge$$

ein G-Vektorraumbündelisomorphismus.
Beweis: Übungsaufgabe!

9.6 Korollar

Ist $M = G/H$ ein homogener Raum und ρ die Isotropiedarstellung, so ist $TM = G \times{}_\rho T_{[1]}M$. Ist M reduktiv, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, so ist $TM = G \times{}_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{m}$. Der Isomorphismus ist durch

$$G \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{m} \to TM, [g, X] \mapsto \left.dL_g\right|_1(X)$$

wohldefiniert.

9.7 Beispiel

$TS^n = SO(n+1) \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n$. Der Isomorphismus $SO(n+1) \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n \to TS^n$ ist durch $[A, v] \mapsto A\binom{0}{v}$ gegeben, denn

$$\mathbb{R}^n \cong T_{e_1} S^n = \{0\} \times \mathbb{R}^n$$

für $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

9.8 Bemerkungen

a) Die Schnitte in einem G-Vektorraumbündel $G \times{}_\rho V$ entsprechen gerade den H-äquivarianten Abbildungen $G \to V$, denn ist $s \in \Gamma\left(G \times{}_\rho V\right)$, so definiere $\tilde{s} : G \to V$ durch

$$s(x) =: [g, \tilde{s}(g)]$$

Dann ist $\tilde{s}(gh) = \rho\left(h^{-1}\right)\tilde{s}(g)$. Und ist $\sigma \in C^\infty(G, V)$ mit $\sigma(gh) = \rho\left(h^{-1}\right)\sigma(g)$, so ist $\hat{\sigma} \in \Gamma\left(G \times_\rho V\right)$ durch $\hat{\sigma}([g]) = [g, \sigma(g)]$ wohldefiniert.
Ein Schnitt s ist genau dann äquivariant, wenn er als Abbildung $\tilde{s} : G \to V$ konstant ist, also wenn $\tilde{s} : G \to V H$-äquivariant und konstant ist, also wenn $\tilde{s}(g) = \tilde{s}(1) \in V^H := \{v \in V \mid Hv = v\}$ gilt für alle $g \in G$.
b) Jedes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ definiert auf G eine linksinvariante Metrik. Jede k-Form $0 \neq \omega \in \operatorname{Alt}^k \mathfrak{g}$ definiert auf G eine nichtverschwindende linksinvariante k-Form.

c) Ist $G/H = M$ ein reduktiver homogener Raum, also $TM = G\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{m}$, so ist durch jedes Ad-invariante Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathfrak{m}$ eine G-invariante Riemannsche Metrik auf M gegeben, nämlich durch

$$\langle [g,X],[g,Y]\rangle := \langle X,Y\rangle$$

Ebenso definiert jede Ad-invariante k-Form eine linksinvariante k-Form auf M.
Um also alle linksinvarianten Metriken zu bestimmen, ist es sehr wichtig, alle Ad-invarianten Skalarprodukte auf $\mathfrak{m}$ zu bestimmen.

9.9 Satz

Sei G eine kompakte Liegruppe, $E \to M$ ein G-Vektorraumbündel, $s \in \Gamma E$, $\omega \in \Omega^n_G(G)$ mit $\int_G \omega_G = 1$. Dann ist durch

$$\bar{s}(x) = \int_G (g_* s)(x)\omega_G$$

ein G-äquivarianter Schnitt gegeben.
Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\bar{s}(ax) &= \int_G (g_* s)(ax)\omega_G = \int_G gs\left(\left(a^{-1}g\right)^{-1}x\right)\omega_G \\ &= a\int_G \left(a^{-1}g\right)_* s(x)\omega_G = a\bar{s}(x)\end{aligned}$$

denn, da ω_G linksinvariant ist, ist

$$\int_G f\circ L_a \cdot \omega_G = \int_G L_a^*\left(f\omega_G\right) = \int_G f\omega_G$$

9.10 Korollar

a) Ist $M = \{p\}, E = V, H$ eine kompakte Liegruppe und $\tau : H \to GL(V)$ eine Darstellung, so existiert auf V ein τ-invariantes Skalarprodukt.
b) Ist G kompakt, so existiert auf jedem G-Vektorraumbündel eine G invariante Bündelmetrik.

9.11 Definition

Eine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ heißt irreduzibel, falls kein echter Unterraum $W \subseteq V$ existiert, für den $\rho(G)W \subseteq W$ gilt.

9.12 Korollar

Ist ρ eine endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Liegruppe, so ist ρ die direkte Summe von irreduziblen orthogonalen Darstellungen.

Beweis: Ist $\rho : G \to O(V)$ nicht irreduzibel, dann besitzt V einen ρ-invarianten Unterraum W und $W^\perp$ ist wiederum ρ-invariant.

9.13 Bemerkung

Das Korollar gilt nicht für nichtkompakte Liegruppen. Betrachte die zweidimensionale Darstellung von $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(a, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} v_1 + av_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ also } \rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $W \subseteq \mathbb{R}^2 \rho$-invariant $\Leftrightarrow W = \mathbb{R}e_1$.
$\mathbb{R}e_1$ hat kein invariantes Komplement.

10 Biinvariante Metriken auf Liegruppen

10.1 Definitionen

(1) Eine semi-Riemannsche Metrik auf einer G-Mannigfaltigkeit heißt linksinvariant, falls für alle $g \in G$ die Linksmultiplikation L_g eine Isometrie ist.
(2) Eine linksinvariante Metrik auf einer Liegruppe G heißt biinvariant, falls auch die Rechtstranslationen R_g Isometrien sind.
(3) Eine Metrik auf einer Mannigfaltigkeit heißt homogen, falls die Isometriegruppe transitiv auf M wirkt.