

# Riemannische Geometrie

Tim Jaschik

May 13, 2025

---

ABSTRACT. – Kurze Beschreibung ...

---

## Contents

1	Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum	3
1.1	Definition	3
1.2	Example	3
1.3	Proposition	3
1.4	Corollar	3
1.5	Remark	3
2	Glatte Mannigfaltigkeiten	3
2.1	Definition	3
2.2	Example	3
2.3	Remark	4
3	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	4
4	Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum	4
5	Glatte Mannigfaltigkeiten	4
6	Glatte Abbildungen und Vektorfelder	4
6.1	Definition	4
6.2	Proposition	5
6.3	Remark	5
7	Riemannische Mannigfaltigkeiten Definitionen und Beispiele	5
7.1	Definition	5
7.2	Example	5
7.3	Proposition	5
7.4	Remark	6
8	Levi-Civita Zusammenhang	6
8.1	Definition	6
8.2	Example	6

8.3	Proposition	6
8.4	Lemma	6
8.5	Theorem	6
8.6	Remark	6
9	Kovariante Ableitung längs einer Kurve	7
9.1	Definition	7
9.2	Proposition	7
10	Paralleltransport	7
10.1	Definition	7
10.2	Example	7
10.3	Proposition	7
10.4	Remark	7
11	Geodätische und Exponentialabbildung	7
12	Geodätische	7
13	Exponentialabbildung	7
14	Satz von Hopf-Rinow	7
15	Riemannische Geometrie	7

## 1 Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum

Test, ein weiterer Test, und noch einer oben drauf

### 1.1 Definition

**Definition RG-1-02-1** ( $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raumes).

### 1.2 Example

**Example RG-1-02-2** ( $n$ -Sphäre).

**Example RG-1-02-3** (Hyperboloid).

**Example RG-1-02-4** ( $n$ -Torus).

**Example RG-1-02-5** ( $SO(n)$ ).

### 1.3 Proposition

**Proposition RG-1-02-6** (Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum).

### 1.4 Corollar

### 1.5 Remark

**Remark RG-1-02-7** (Anmerkungen).

## 2 Glatte Mannigfaltigkeiten

### 2.1 Definition

**Definition RG-1-03-2** (Äquivalente Atlanten).

**Definition RG-1-03-4** (Glatte Mannigfaltigkeit).

**Definition RG-1-03-5** (Orientierte Mannigfaltigkeiten).

**Definition RG-1-03-6** (Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit).

**Definition RG-1-03-14** (TEST).

### 2.2 Example

**Example RG-1-03-7** ( $n$ -Torus als Mfk).

**Example RG-1-03-8** ( $n$ -Sphäre als Mfk).

**Example RG-1-03-9** (Hyperboloid als Mfk).

## 2.3 Remark

**Remark RG-1-03-13** (Quotienten-Räume als Mfk als Motivation für verallg. Mfk-Begriff).

**Remark RG-1-03-3** (Beispiel für nicht äquivalente Atlanten).

**Example RG-1-03-10** (Reelle projektiver Raum als Mfk).

**Example RG-1-03-11** (Komplexe projektive Raum als Mfk).

**Example RG-1-03-12** (Möbiusband als Mfk).

**Definition RG-1-03-1** (Atlas auf topologischen Hausdorff-Räumen).

## 3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 4 Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum

### 5 Glatte Mannigfaltigkeiten

### 6 Glatte Abbildungen und Vektorfelder

#### 6.1 Definition

**Definition RG-1-04-11** (Vektorfeld als glatter Schnitt in Tangentialbündel).

**Definition RG-1-04-13** (Vektorfeld als Abbildung von glatten Funktionen auf Mfk).

**Definition RG-1-04-14** (Lieklammer von Vektorfeldern (ergibt Vektorfelder)).

**Definition RG-1-04-16** (Differential von glatten Abbildungen).

**Definition RG-1-04-2** (Immersion / Submersion von Mfk).

**Definition RG-1-04-3** (Einbettung von Mfk).

**Definition RG-1-04-4** (Diffeomorphismus von Mfk).

**Definition RG-1-04-5** (Tangentialvektor: Äquivalenzklassen von Kurven).

**Definition RG-1-04-6** (Tangentenvektoren: Keime).

**Definition RG-1-04-7** (Tangentenvektoren: Paare von Koordinatensysteme um  $p$  und Vektor).

**Definition RG-1-04-9** (Tangentialbündel).

## 6.2 Proposition

## 6.3 Remark

**Remark RG-1-04-12** (Darstellung von Vektorfeldern durch partielle Ableitungen (Tangentenvektoren)).

**Remark RG-1-04-15** (Liesklammer: Jacobi-Identität Schiefsymmetrisch Nicht linear über  $\mathbb{R}$ ).

**Remark RG-1-04-8** (Konstruktion des Tangentialraums).

**Proposition RG-1-04-10** (Tangentialbündel ist  $2n$ -dimensional Mfk).

**Definition RG-1-04-1** (Glatte Abbildung zwischen Mfk).

## 7 Riemannische Mannigfaltigkeiten Definitionen und Beispiele

### 7.1 Definition

**Definition RG-1-05-18** (Riemannisches Produkt).

**Definition RG-1-05-2** (Länge von Kurven auf Mfk).

**Definition RG-1-05-3** (Riemannische Metrik auf Mfk).

**Definition RG-1-05-6** (Abzählbare Mfk im Unendlichen).

### 7.2 Example

**Example RG-1-05-15** (Rotationsfläche).

**Example RG-1-05-16** (Hyperbolischer Raum).

**Example RG-1-05-17** (Poincaremodell des hyperbolischen Raumes).

**Example RG-1-05-19** ( $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ ).

**Example RG-1-05-20** (Flacher Torus).

**Example RG-1-05-22** (Kleinsche Flasche).

**Example RG-1-05-9** ( $\mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten).

### 7.3 Proposition

**Proposition RG-1-05-21** (Charakterisierung der Isometrien von flachen Tori).

**Proposition RG-1-05-8** (Jede Mfk besitzt eine Riemannische Metrik).

## 7.4 Remark

**Remark RG-1-05-13** (Kompakte Mfk lassen sich in Euklidischen Raum einbetten).

**Remark RG-1-05-14** (Unterscheidung zw. Innerer und äußerer Geometrie: Eigenschaften der Mfk vs der Einbettung).

**Remark RG-1-05-4** (Pseudo-Riemannische Metrik auf Mfk).

**Remark RG-1-05-5** (Lokale Beschreibung von Riemannischer Metrik).

**Remark RG-1-05-7** (Relevanz der Abzählbarkeit im Unendlichen 1) Existenz von Verfeinerungen (lokal endlich) für offene Überdeckungen 2) Zerlegung der Eins).

**Example RG-1-05-12** (Untermannigfaltigkeit mit induzierter Metrik).

**Definition RG-1-05-1** (Finsler-Metrik auf Mfk).

**Definition RG-1-05-10** ((Lokale) Isometrie von RMfk).

**Definition RG-1-05-11** (Isometrische Einbettung von RMfk).

## 8 Levi-Civita Zusammenhang

### 8.1 Definition

**Definition RG-1-07-2** (Zusammenhang auf Mfk).

**Definition RG-1-07-4** (Koszulgleichung für Zusammenhänge).

**Definition RG-1-07-5** (Christoffelsymbole als Korrekturterme in lokalen Koordinaten).

### 8.2 Example

**Example RG-1-07-8** (Christoffelsymbole für  $R^n$  für euklidische Metrik).

**Example RG-1-07-9** (Christoffelsymbole für  $R^2 \setminus \{0\}$  und lokale Darstellung der Metrik zur Polarkoordinaten).

### 8.3 Proposition

### 8.4 Lemma

**Lemma RG-1-07-7** (Formel für Christoffelsymbole aus Koszulgleichung).

### 8.5 Theorem

### 8.6 Remark

**Remark RG-1-07-6** (Levi-Civita Zusammenhang  $D_X Y_p$  hängt nur von  $X_p$  ab).

**Theorem RG-1-07-3** (Fundamentaltheorem der Riemannischen Geometrie).

**Proposition RG-1-07-10** (Induzierter LC-Zusammenhang auf Untermannigfaltigkeiten von RMfk).

## 9 Kovariante Ableitung längs einer Kurve

### 9.1 Definition

### 9.2 Proposition

**Proposition RG-1-08-2** (Kovariante Ableitungs-Operator längs Kurven induziert durch LC-Zusammenhang der RMfk (EE)).

**Proposition RG-1-08-3** (Kovariante Ableitung der Riemannischen Metrik längs Kurven).

**Definition RG-1-08-1** (Vektorfelder längs Kurven).

## 10 Paralleltransport

### 10.1 Definition

**Definition RG-1-09-3** (Parallelverschiebung von Tangentialvektoren bzgl parallelen Vektorfeldern längs Kurven).

### 10.2 Example

**Example RG-1-09-6** (Parallelverschiebung im euklidischen Raum).

**Example RG-1-09-7** (Parallelverschiebung auf  $S_n$ ).

### 10.3 Proposition

**Proposition RG-1-09-5** (Parallelverschiebung ist Isometrie zwischen Tangentialräumen).

### 10.4 Remark

**Remark RG-1-09-4** (Abhängigkeit der Parallelverschiebung von Kurve).

**Proposition RG-1-09-2** (Eind. Existenz von parallelen Vektorfelder für Anfangswert (Punkt,Tangentialvektor)).

**Definition RG-1-09-1** (Parallele Vektorfelder längs Kurven).

## 11 Geodätische und Exponentialabbildung

## 12 Geodätische

## 13 Exponentialabbildung

## 14 Satz von Hopf-Rinow

## 15 Riemannische Geometrie