



Está demostrado que el cálculo mental es un ejercicio imprescindible para aumentar la inteligencia, mantener el cerebro en forma y prevenir el envejecimiento prematuro de las neuronas, permitiéndonos tener una mente más activa, lógica, potente y ágil.

En este libro, el autor, poseedor de varios récords mundiales de cálculo le enseña a entrenar su mente de un modo fácil, efectivo y ameno.



**ALBERTO COTO** (Lada de Langreo, Asturias, 1970) es la persona más rápida del mundo haciendo cálculos mentales, como así lo certifican sus múltiples Records Guinness y sus seis títulos de Campeón del Mundo.

Su capacidad es calificada por prestigiosos psicólogos como un logro en el límite de lo humano. Durante los últimos años ha impartido cientos de conferencias y demostraciones mostrando que las matemáticas y el cálculo son un atractivo estimulante mental y que sus técnicas y métodos ayudan a potenciar las capacidades mentales.

Es frecuentemente solicitado por los medios de distintos países con constantes apariciones televisivas y en radio.

Su web es: [www.albertocoto.com](http://www.albertocoto.com)

ISBN: 978-84-414-2127-1

3 4 0 0 3  
9 788441 421271

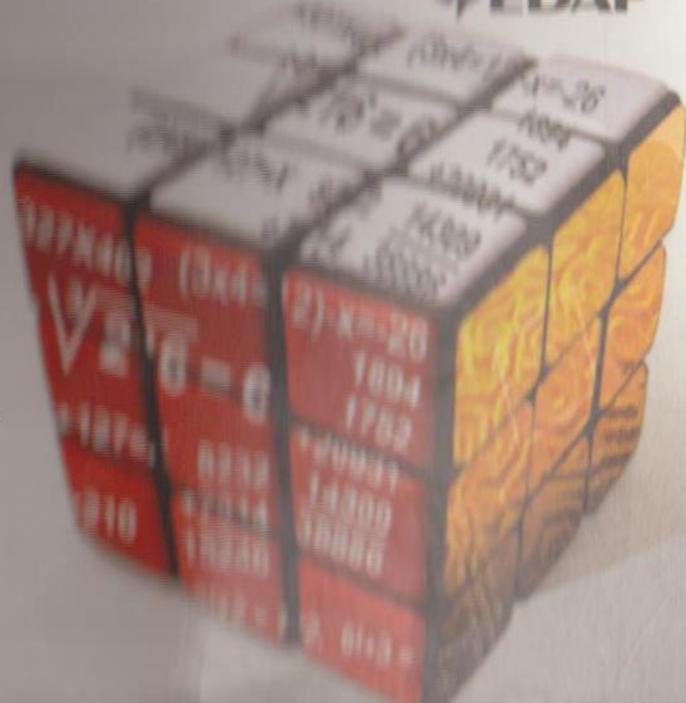


ALBERTO COTO

# Entrenamiento mental

Cómo el cálculo y los números aumentan el potencial de la mente

EDAF



ENTRENAMIENTO  
MENTAL

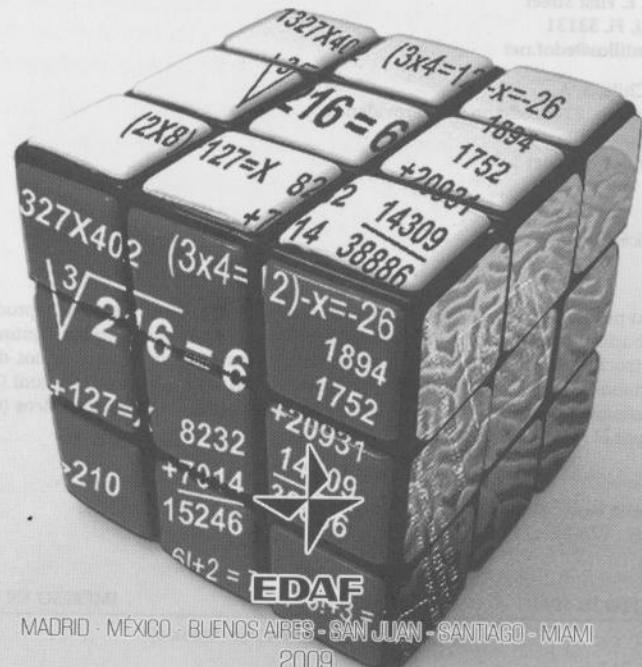


ALBERTO COTO

CAMPEÓN MUNDIAL DE CÁLCULO MENTAL

# Entrenamiento mental

Cómo el cálculo y los números  
aumentan el potencial de la mente



MADRID - MÉXICO - BUENOS AIRES - SAN JUAN - SANTIAGO - MIAMI  
2009

Diseño de la cubierta: David Llorente

Editorial RBA, S. A.  
Jorge Juan, 20. 28009 Madrid  
<http://www.rba.es>  
[rbaeditores@rba.es](mailto:rbaeditores@rba.es)

Redactor: Carlos-Jesús Antonio Tomás, S. A. de C. V.  
Centro Cultural Milán de Aguirre, 2-Cel. Paseo de la Castellana,  
Navegante, C. 2. 28046. Edificio Mirador 11.1  
[www.rbaeditores.com](http://www.rbaeditores.com)

Editor: José Luis Gómez  
Calle 222 - pabogrande y torreli corbato 220-A  
Introducción sobre el grupo conocimiento se han  
realizado en la red:

Editorial RBA, S. A.  
Avda. A. I. Pitkäranta, 1804 - Casilla Correo 106022-1413  
San Sebastián, Puerto Real  
[www.rbaeditores.com](http://www.rbaeditores.com)

Editor: Andújar  
207-1 E First Street  
Mexico, D.F. 11100  
[www.andujar.com](http://www.andujar.com)

Editor: Claudio A.  
Copernicus, 22. Málaga 28008, Spain  
Telf. 34 902 220000  
[www.rbaeditores.com](http://www.rbaeditores.com)

Editorial: RBA, S. A.

Reservados todos los derechos. No está permitida la impresión parcial o total, ni la utilización de partes de la publicación para otra obra, mediante formas de reproducción fotográfica, microfilmación, procesos o cualquier otra forma de explotación que no sea la impresión de una edición autorizada, sin contar con la autorización de los titulares de los correspondientes derechos. Los titulares de los derechos reservados no renuncian a la protección legal establecida en la legislación de derechos de autor, contra la reproducción, transformación, distribución y explotación económica de su obra, en tanto ésta permanezca sujeta a las leyes y a las normas del Tribunal Penal. El Centro Tapices de Creaciones Independientes (CTCI) vea por la cesión de licencias directas.

Derechos Reservados 2006  
ISBN 84-9737-012-6

REDACCIONES

Autor: S. A. - Dirección General

## Índice

Introducción	76
El mundo es matemático	77
Los números en la sociedad	78
El tabaco en números	79
Las matemáticas en el deporte	80
La matemática y la música	81
Los números en los juegos de azar	85
Los juegos de cartas y la ruleta	85
Los juegos de azar en España	87
— La probabilidad y la estadística	88
— Lotería Nacional	89
— La ONCE	89
— Quiniela de fútbol	40
— Lotería Primitiva	40
Las probabilidades dan mucho juego	41
Los medios de comunicación	41
En los informativos	41
Más turismo en agosto	42

Rebajas en el AVE .....	43
El precio del cordero .....	44
Consumo de helados .....	44
Alergia al polen .....	44
La sección de economía no se libra .....	45
Este sí que es curioso .....	46
1.8. LA PSICOLOGÍA DE LOS NÚMEROS .....	46
1.9. EL GENIO NUMÉRICO .....	47
1.10. CÓDIGOS DEL DÍA A DÍA .....	49
1.10.1. La letra del NIF .....	50
1.10.2. El ISBN de los libros .....	50
1.10.3. El código de la cuenta corriente .....	51
1.10.4. Los códigos de barras .....	53
1.11. DOS NÚMEROS CON MALA SUERTE: 13 Y 666 .....	54
1.11.1. El número 13 .....	54
1.11.2. El 666 .....	55
Cuadrado Mágico Satánico .....	56
CAPÍTULO 2. ALGO MÁS QUE NÚMEROS .....	59
2.1. LOS NÚMEROS DE FIBONACCI Y LA PROPORCIÓN ÁUREA .....	59
2.1.1. Los números de Fibonacci .....	60
¿Quién fue Fibonacci? .....	60
El problema de los conejos .....	61
En árboles y plantas: La filotaxis .....	62
¿Por qué sucede esto? .....	63
Las abejas y los números de Fibonacci .....	65
Fibonacci en la música .....	65
En los mercados financieros .....	66
2.1.2. El número áureo «Φ» .....	67
Proporción áurea .....	67
El rectángulo de oro .....	69
La espiral de oro .....	70
El número de oro en la naturaleza .....	71
El número de oro en el arte: Partenón, Pirámide de Kéops, La divina proporción .....	72

801     En el cuerpo humano: El Hombre de Vitruvio .....	74
131     El número áureo en el pentáculo .....	75
Rectángulo áureo en la actualidad .....	75
2.2. LOS GRANDES NÚMEROS .....	76
Introducción .....	76
Miles de millones .....	77
El invento del ajedrez .....	78
El googol (o gúgol) .....	81
Algunos datos curiosos .....	83
La descendencia de las hormigas .....	84
Georg Cantor y el infinito .....	85
2.3. LOS NÚMEROS PRIMOS .....	85
2.3.1. Los indomesticables números primos .....	85
Concepto .....	85
Un poco de historia .....	86
Cómo se protege la cigarra con números primos .....	89
2.3.2. ¿Qué es la criptografía? .....	91
Conceptos .....	91
Breve historia de la criptografía .....	92
La Segunda Guerra Mundial .....	93
Los primos en criptografía .....	96
El futuro: Criptografía cuántica .....	97
Anécdota criptográfica .....	98
2.3.3. Familiares de los números primos y otros con buena relación .....	100
Números primos gemelos .....	100
Números primos de Mersenne .....	101
Los números amigos .....	102
Número perfecto .....	102
Números narcisistas .....	103
2.4. HISTORIAS DEL NÚMERO PI ( $\pi$ ) .....	104
¿Qué es PI? .....	104
Valores del PI obtenidos antes de 1600 .....	106
Fechas relevantes .....	106
Estadística sobre los decimales de PI .....	107

<i>Memorizar decimales de PI</i>	108
<b>CAPÍTULO 3. TÉCNICAS Y TRUCOS PARA CALCULAR MEJOR ...</b>	
3.1. INTRODUCCIÓN	111
<i>La importancia del cálculo mental</i>	111
<i>No hay caminos reales</i>	112
<i>El camino para convertirse en un buen calculador</i>	113
3.2. SUMAR	114
<i>Mecanismo para sumar mejor</i>	114
<i>Un buen entrenamiento: las series de Fibonacci</i>	117
<i>Ejercicios</i>	117
3.3. RESTAR	118
<i>Restas de dos dígitos</i>	119
<i>Restas de tres dígitos</i>	120
<i>Ejercicios</i>	121
3.4. MULTIPLICAR	121
<i>Método de izquierda a derecha</i>	122
<i>Ejercicios</i>	122
<i>Multiplicaciones con tres cifras</i>	123
<i>Ejercicios</i>	124
<i>La anécdota de Gauss</i>	124
<i>Método cruzado de multiplicación</i>	126
3.5. DIVIDIR	128
<i>Técnica para dividir</i>	128
<i>Ejercicios</i>	129
<i>Practicando con el euro</i>	129
3.6. POTENCIAS (NÚMEROS AL CUADRADO)	134
<i>Elevar números al cuadrado</i>	134
<i>Cuadrados que terminan en 1</i>	136
<i>Cuadrados que terminan en 5</i>	137
<i>Ejercicios</i>	137
3.7. RAÍZ CUADRADA	137
<i>Raíces con resultado de dos dígitos</i>	138

<i>Ejercicios</i>	139
<i>Cómo extraer decimales</i>	139
<i>Ejercicios</i>	141
3.8. RAÍZ CÚBICA	142
<i>El truco</i>	142
<i>Ejercicios</i>	143
3.9. CALCULAR DÍAS DE LA SEMANA	144
<i>Técnica para calcular el día de la semana de cualquier fecha</i>	144
<i>Días de la semana de un año concreto</i>	146
<i>Ejercicios</i>	147
3.10. LA DICTADURA DEL PORCENTAJE	148
<i>Regla de tres</i>	148
<i>Truquillo que te aconsejo</i>	149
<i>Nos vamos de compras</i>	150
<i>Ejercicios</i>	152
<i>Gazapos de porcentajes</i>	152
3.11. NÚMEROS CON MAGIA	153
<i>El mágico número 1.443</i>	154
<i>La magia del 142.857.143</i>	154
<i>El truco con el 3.367</i>	155
<i>La magia del 1.089</i>	155
<i>Tu número favorito</i>	156
<i>Truco del complemento a 9</i>	156
<i>Truco para adivinar la edad</i>	157
3.12. GIMNASIA MENTAL	158
<i>La importancia de ejercitarse la mente</i>	158
<i>Gimnasia con cuadrados mágicos</i>	159
<b>CAPÍTULO 4. LOS GRANDES CALCULISTAS</b>	
4.1. DATOS RELEVANTES	163
4.1.1. Los inicios	164
4.1.2. Factor genético	164

4.1.3. Inteligencia general .....	164
4.1.4. Hemisferios cerebrales .....	165
4.1.5. Hombres y mujeres .....	165
4.1.6. Cálculo y memoria .....	165
4.1.7. Relación con el lenguaje .....	166
4.1.8. Proceso inconsciente .....	166
4.1.9. Calculadores visuales y auditivos .....	167
<b>4.2. CASOS DE PRODIGOS DEL CÁLCULO .....</b>	<b>169</b>
<i>Wallis</i> .....	169
<i>Euler</i> .....	169
<i>Ampère</i> .....	170
<i>Gauss</i> .....	171
<i>Colburn</i> .....	172
<i>Bidder</i> .....	173
<i>Safford</i> .....	174
<i>Ramanujan</i> .....	175
<i>Aitken</i> .....	176
<i>Von Neumann</i> .....	177
4.2.1. Casos de Idiot Savants .....	177
<i>Rainman</i> .....	177
<i>Mi cita con Casimiro</i> .....	178
<i>Buxton</i> .....	179
<i>El caso de los gemelos</i> .....	180
4.2.2. Otros calculistas profesionales .....	183
<i>Inaudi</i> .....	183
<i>Diamondi</i> .....	184
<i>Filkenstein</i> .....	185
<i>Klein</i> .....	185
<i>Devi</i> .....	186
4.3. ¿POR QUÉ HAY POCOS CALCULADORES PRODIGO? .....	187
4.4. LOS CALCULISTAS ULTRARRÁPIDOS EN LA ACTUALIDAD: CAMPEONATO DEL MUNDO DE CÁLCULO MENTAL .....	188
<i>Resultados</i> .....	189
CERTIFICADOS DE SUS MEJORES MARCAS .....	193

## Agradecimientos



UISE escribir este libro por la necesidad que he constatado de que las matemáticas se vean como algo que forma parte de nuestra vida. Con el objetivo de que mis lectores tomen conciencia de que los números están en todo, gobiernan el mundo y, con unos métodos adecuados, se puede llegar a ser un buen calculador.

Por ello, quiero agradecer a todas esas personas que me han animado a escribirlo, a que expusiese mis métodos de cálculo, y a que tratase de aportar mi granito de arena en la divulgación de la madre de las ciencias.

Agradecimiento especial a mi amiga Chari, por haber leído el borrador con mucha atención, aportando sus siempre interesantes consejos.

A mi hermano Toni, por el capítulo sobre la música y las matemáticas que, como buen maestro en la materia, hace comprender esa extraordinaria relación de una forma sencilla.

Y a ti, querido lector, con el deseo de que a partir de este momento veas el mundo que nos rodea con ojos matemáticos.

4.1.3. Inteligencia emocional	164
4.1.4. Hemisferios cerebrales	165
4.1.5. Hombres y mujeres	165
4.1.6. Cálculo y memoria	165
4.1.7. Relación con el entorno	166
4.1.8. Proceso de enseñanza	166
4.1.9. Calculadoras visuales y traditivas	167
<b>4.2. Casos de estudios del cálculo</b>	<b>169</b>
Wolfs	169
Aprendiendo a calcular con el ordenador	170
El caso de los gemelos	170
¿Por qué las calculadoras programadas no pasan de 1000? (parte I)	173
Los cuestionarios mentales en la actualidad: Cuarto milenio de cálculo mental	185
Comunicando en sus procesos mentales	187

## Testimonio-Introducción



HACE apenas unos meses yo era una de tantas personas que hasta para devolver un sencillo cambio a un cliente tecleaba en la calculadora:  $2 \text{ €} - 1,85 \text{ €} = 0,15 \text{ €}$ . Pues sí, hasta este punto llegaba mi incultura numérica o, mejor dicho, mi falta de confianza, pues estoy segura de que si me parase a pensar un momento me vendría a la cabeza que son solo  $0,15 \text{ €}$ . Pero ¿nos paramos a pensar? No señor, enseguida hacemos uso de la calculadora sin miramiento alguno.

Todo esto forma parte del pasado, pues decidí preparar unas oposiciones y, para ello, dejé el trabajo y me volqué en cuerpo y alma en mis estudios. Todo marchaba bien hasta que tropecé con las matemáticas, y es que tenía que superar un gran escollo en esta oposición: un test psicotécnico con un gran número de preguntas de cálculo que me bloqueaban e impedían que saliese de mí cualquier mínimo resultado, por sencillo que fuese. ¡¡Madre mía!! Estuve perdida durante meses, buscando por todas partes, contraté a un profesor particular que intentó enseñarme como buenamente pudo, me inscribí en una academia de prestigio que preparaba oposiciones; estudié y estudié la materia por mi cuenta, pero nada, ¡¡las mates no me entraban!! Tantos años de calculadora me estaban pasando factura. ¡¡Cuántos meses de angustia por no saber!! Pero, aun así, no me rendí y seguí insistiendo en el tema.

Un buen día, mi amigo Josema me comentó que en España teníamos al Campeón del Mundo de Cálculo Mental y que de vez en cuando daba conferencias en diferentes foros, que me

pusiese en contacto con él a través de su página web y que quizá viniese por mi tierra. Ni corta ni perezosa, decidí contactarlo y hace unos meses conocí a Alberto Coto en Tenerife. Y, aunque al principio no daba crédito, descubrí a un chico joven y accesible, con una visión del cálculo y de las matemáticas tan positiva, que desde el primer instante que lo escuché hablar de ellas me cautivó. Descubrí con Alberto que todas las clases que había recibido no iban en la onda adecuada, y por eso me había costado tanto entenderlas, ¡¡claro que me resultaban pesadas!! ¿Cómo no me van a resultar tediosas fórmulas y más fórmulas sin entender antes los conceptos? Alberto me explicó para qué sirven y cómo valorar sus resultados a través de la lógica, que de nada me serviría entrar a saco en la materia sin antes ver su lado bonito, su lado práctico, y sin antes estar motivada. Me explicó, con suma sencillez, que las matemáticas están en todas partes: en la música, en el arte, en la naturaleza, o... en el supermercado; me habló de la sucesión de Fibonacci y ya no he vuelto a ver un girasol de la misma manera; de cómo los números primos protegen los más altos secretos de Estado; o cómo un cálculo es decisivo en una partida de cartas.

Todo esto es solo una pequeña muestra de algunas historias que me ha ido contando y con las cuales he ido ampliando información, ya que ha despertado en mí una curiosidad inmensa, y es que lo que yo pensaba que eran matemáticas... sí, lo son, pero matemáticas es muchísimo más. Y creo que cualquiera que desee aprenderlas debe empezar por saber para qué sirven, y cómo son, antes de meterse con todas las fórmulas tan frías y serias.

Bueno, en mi caso ha funcionado, y ahora que estoy con otra visión de las mates y sé para qué se utilizan, las estoy viendo desde otro ángulo y me están gustando. Antes no tenía ni idea de qué es lo que estaba haciendo, e incluso algo dentro de mí las rechazaba, pues pensaba: ¿pero para qué necesito yo aprenderme esto?, y ¿para qué sirve esto? Bueno, ahora que sí veo su lado práctico, ya son otra historia.

Alberto continuó su gira y yo seguí con mis estudios para mi oposición, pero me siguió ayudando en la distancia. Gracias a sus consejos pude ir resolviendo los psicotécnicos de este año sin ningún tipo de problemas. Ahora, con pequeños ejercicios que me propuso y sus técnicas y truquillos, soy muchísimo más rápida con cualquier operación que me propongan. Caramba... pero si incluso me divierte jugar con los números en cualquier atasco con el coche en el que estoy a diario. ¡¡Algo impensable en mí hace tan solo unos meses!!

Y todo esto, ¿en qué repercute, además de en un buen calcular? Pues antes pasaba mucho apuro en cualquier reunión de amigos y, si había que realizar alguna operación y no tenía la calculadora cerca..., siempre recurría a la socorrida frase «es que yo soy de letras», pero en el fondo yo me sofocaba y lo pasaba muy mal, pues a nadie le gusta que le descubran su punto débil, ¿verdad?

Ahora me siento segura de mí misma. Me siento feliz porque he superado un obstáculo. Ya puedo leer las cartas del banco y entenderlas sin tener que ir corriendo a por la calculadora, ya puedo ir a la compra y no dejar que me engañen con esas «superofertas», que luego no lo son tanto, puedo mirar el cambio que me dan al realizar cualquier compra y ver si está bien o no sobre la marcha... En fin, puedo hacer tantas y tantas cosas.

Ha merecido la pena y, encima, ha sido divertido, y gracias a los consejos de todo un campeón.

CHARI APARICI

## Prólogo

### Los matemáticos



soy corredor de maratón y, como tal, los entrenamientos son continuos y largos, no hay otra forma de hacerlo para salvar los 42 kilómetros y 195 metros con cierta garantía. Cuando estoy en mi tierra, suelo entrenar con un grupo de amigos y conocidos y, curiosamente, hoy pude ver a dos de ellos corriendo mientras yo iba vestido de calle. Al saludarlos no me reconocieron. El motivo es muy sencillo: solo me habían visto vestido de atleta, con camiseta de tirantes y en pantalón corto.

Quiero contar esta anécdota porque estoy seguro de que muchos de mis lectores solo conocéis las matemáticas con la «pantalla viciada» de una pizarra, un profesor escribiendo fórmulas en ella, y la sensación de estar ante algo tedioso y difícilmente comprensible por su aparente lejanía de la realidad.

Me haría inmensamente feliz que tú, querido lector, después de leer estas páginas, pases a tener otra opinión, hayas dado una oportunidad a los números y a las matemáticas y consideres que puedes ser una persona perfectamente válida para dominar todo lo que numéricamente se nos aparece a lo largo de la vida, que no es poco.

Ante este ambicioso objetivo, he estructurado el libro en cuatro grandes bloques:

En el primero se muestran diversas situaciones o temas en los que los números intervienen, sin que a veces nos demos cuenta. De esta forma veremos que nos acompañan en nuestro día a día.

Un segundo capítulo trata de cuatro maravillosos números y de cómo las matemáticas están en la naturaleza, en el arte y en nuestro paisaje diario.

Los números de Fibonacci, con su proporción áurea y todas las situaciones en que podemos verlos.

Los números primos, trascendentales en nuestra sociedad por ser quienes protegen los más altos secretos.

Los majestuosos grandes números, con toda su fuerza y la dificultad para imaginarlos.

Y, cómo no, para el número que más ha perseguido el ser humano, el número PI.

Una vez vistas estas maravillas numéricas, pasamos al capítulo más esperado: las mejores técnicas para ejercitarte tu mente y desarrollar una gran habilidad de cálculo. Técnicas que yo utilicé en mis demostraciones y que, con un poquito de práctica, a buen seguro que te llevarán a dominar el mundo de los números y quizás convertirte en una «calculadora humana».

El cuarto, y último capítulo, lo he querido dedicar a la historia de los grandes calculistas habidos. Una habilidad tan peculiar que la han poseído desde genios matemáticos, hasta casos de personas con un cierto grado de autismo.

En este capítulo se detallan las vidas de los más famosos y brillantes matemáticos de todos los tiempos, sus logros y descubrimientos, así como sus contribuciones a la ciencia y la cultura. Se incluyen biografías de figuras como Euclides, Pitágoras, Archimedes, Eratóstenes, Apolonio de Perge, Diophantus, Fibonacci, Cardano, Tartaglia, Viète, Fermat, Descartes, Pascal, Fermat, Leibniz, Euler, Gauss, Riemann, Cantor, Hilbert, Gödel, entre otros. Se exploran sus teorías y descubrimientos más importantes, así como sus contribuciones a la álgebra, la geometría, la trigonometría, la probabilidad y la estadística. Se analizan sus métodos y técnicas de trabajo, así como sus contribuciones a la educación y la cultura.

Este libro es una guía completa para descubrir la belleza y la importancia de la matemática en la historia y en la cultura. Es un viaje fascinante a través de los siglos, explorando las ideas y las contribuciones de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Un libro que te hará amar la matemática y descubrir su impacto en el mundo que nos rodea.

## CAPÍTULO 1

### Las matemáticas en la sociedad



#### 1.1. EL MUNDO ES MATEMÁTICO

**L**A MATEMÁTICA es la reina de las ciencias, y el mundo está organizado de forma misteriosa por el poder del número. Bertrand Russell lo expuso de forma maravillosa en su autobiografía:

Yo he buscado el conocimiento con la misma pasión. He deseado comprender el corazón del hombre. He deseado saber por qué brillan las estrellas y he intentado entender el poder pitagórico por el que los números dominan el flujo.

La matemática está, de una u otra forma, en todo. Ni siquiera el pensamiento más simple puede ser formulado sin que conlleve el concepto fundamental de número (una casa, dos personas...).

Del concepto de número surge otro de indiscutible importancia: la noción de medida. Para medir hay que comparar y, cuando no se compara, se crean medidas estándar.

La aritmética es la rama de la matemática que estudia los números, sus propiedades y transformaciones. Conocidos los números es posible aplicarlos a la evaluación de dimensiones que varían o que son desconocidas, pero que se pueden representar por medio de relaciones y fórmulas. Tenemos así el álgebra.

Estos valores que medimos en la realidad están representados por cuerpos materiales o símbolos, dotados de tres atributos:

forma, tamaño y posición. El estudio de estos atributos se llama geometría.

La aritmética, el álgebra y la geometría se apoyan entre ellas, y son la base de todas las ciencias y las artes. La pintura, escultura, arquitectura, la música, la filosofía... no tendrían avance si no fuese por esa herramienta indispensable denominada matemáticas.

De igual forma, el comercio no se desarrollaría, ni habríamos conocido el resto de las ciencias.

Esta intensa presencia de la matemática en nuestra cultura no es algo que vaya a menos, sino todo lo contrario. A juzgar por las tendencias que se manifiestan cada vez con más fuerza, parece claro que el predominio de la madre de las ciencias va a ser un distintivo bien patente de la civilización futura.

Las matemáticas se han convertido en herramienta conceptual para casi todas las ciencias, incluidas las del comportamiento, son un instrumento capaz de facilitar la comprensión de los fenómenos propios de cada disciplina científica y se han instalado en nuestra vida cotidiana: protección a las tarjetas de crédito contra los abusos; envío de datos de las sondas espaciales; diseño de alas de avión; experimentos de laboratorio planteados en la pantalla del ordenador; estadísticas; proyecto genoma; mercados financieros; meteorología; simulación de la realidad y todas las innumerables, crecientes y asombrosas funciones del ordenador y la informática.

Sin embargo, pese a esta importancia, políticos y *vacas sagradas* de nuestra cultura no suelen tener ningún empacho, sino más bien un extraño y estúpido orgullo, en confesar su ignorancia absoluta en temas relacionados con las matemáticas, contagiando de esta forma al resto de la sociedad.

Muchas veces me he encontrado en la situación de estar con gente con un alto nivel cultural y, sin embargo, ante un sencillo cálculo, lanzar un *soy de letras*. Impensable sería que yo escribiese burro con «v» y se pasase por alto; sin embargo, el argumentar ante un sencillo cálculo que se es de letras no parece estar mal visto.

En nuestro país, fuertemente escorado hacia las humanidades desde hace siglos, parece que cultura viene a coincidir, más o menos, con música, escultura, cine y otras manifestaciones artísticas.

No digo que sea negativo considerar cultura a estas áreas, que evidentemente lo son, pero sí que se debería tratar a las ciencias, y más en concreto a la madre de todas ellas, como lo que se merecen, buscando su divulgación entre el pueblo.

A lo largo de este capítulo me propongo exponer situaciones en las que sería más que interesante ver con ojos matemáticos situaciones en las que los números intervienen y que muchas veces dejamos de lado, o en las que no percibimos esa incidencia. No es difícil adoptar una postura matemática, solo es perderle el miedo, interpretar de qué forma están los números en nuestra vida y, sobre todo, romper ese bloqueo psicológico que, de entrada, provocan.

## 1.2. EL TIMO BURSÁTIL

Hay mucho *hábil* con los números. Por eso es importante tener una buena cultura numérica, de esta forma nos protegemos ante muchos fraudes, como el famoso timo bursátil que a continuación voy a contar y que está basado en hechos reales:

Un determinado estafador se hizo pasar por asesor financiero, enviando 64.000 cartas a potenciales inversores. Las cartas hablan de los importantes contactos que esta persona tiene, contando con información privilegiada, y de los sistemas punteros e informatizados en análisis financiero a los que tiene acceso.

En 32.000 de las cartas predice que las acciones subirán. En las otras 32.000 predice que las acciones bajarán. Evidentemente, habrá acertado en la predicción de 32.000 (en las otras 32.000 habrá fallado y las desestimarás).

De las 32.000 acertadas hace una segunda predicción igual a la primera. En 16.000 hablará de una subida, y en las otras 16.000 de una bajada.

Acertará en 16.000, fallará en 16.000.

16.000 predicciones correctas y vuelta a lo mismo. En 8.000 predice subida, y en otras 8.000 bajada. Tras esta tercera predicción habrá acertado en 8.000, y tres veces consecutivas.

Pues bien, siguiendo con el envío de cartas, tendríamos en una cuarta predicción 4.000 correctas. En una quinta, 2.000 correctas. En una sexta, 1.000.

Y ahora imaginemos que después de seis predicciones correctas a un total de 1.000 personas, nuestro asesor nos dice que si queremos una séptima predicción hemos de abonar 500 euros.

Ahora vamos a hacer cuentas:

Aunque solo el 80% de estas mil personas acepten, el asesor-estafador estaría ingresando un total de 400.000 euros (800 personas × 500 euros cada uno).

Después de todo este proceso habría enviado un total de unas 127.000 cartas que, a un total de 50 céntimos cada una, suman 63.500 euros de gastos.

$$127.000 \times 0,50 \text{ €} = 63.500 \text{ €}$$

Como obtuvo unos ingresos de 400.000 euros, y gastos por 63.500 euros:

$$400.000 - 63.500 = 336.500 \text{ €}$$

Por tanto, nuestro hábil estafador bursátil habría obtenido unos beneficios de 336.500 euros (56 millones de pesetas).

### 1.3. EL TABACO EN NÚMEROS

En mis conferencias casi siempre hago referencia a lo que supone en términos numéricos la adicción al tabaco. De esta forma se da una connotación matemática a algo tan habitual en nuestra sociedad como es el fumar.

Imaginemos a un fumador de un paquete diario, 20 cigarrillos. Un paquete no es tanto para un buen fumador, como bien

sabemos. Y, sobre todo, y por eso se magnifica la cantidad, un fumador consume tabaco todos los días.

En términos numéricos, en un mes de 30 días hablaríamos de 600 cigarrillos fumados (20 al día). En un año serían 7.300 cigarrillos ( $20 \times 365$ ). En diez años estamos hablando de 73.000 cigarrillos fumados. Y en veinte años, un fumador de un paquete diario se habrá fumado 146.000 cigarrillos.

Ahora, hagamos el sano ejercicio de imaginar 146.000 cigarrillos uno encima de otro... ¿Sorprende imaginarse tal cantidad de cigarrillos, verdad?

Si cada cigarrillo mide aproximadamente 9 centímetros, si colocamos los 146.000 cigarrillos uno tras otro, recorreríamos un trayecto de 1.314.000 centímetros, que es lo mismo que 13.140 metros, o 13 kilómetros y 140 metros...

Es decir, quien fume un paquete al día, si empieza a fumar a los quince años, cuando tenga treinta y cinco se habrá fumado toda esa cantidad. Cuando tenga cincuenta y cinco se habrá fumado el doble (292.000 cigarrillos).

**Contenido del cigarrillo:** Hay numerosos estudios hechos sobre los efectos del tabaco en la vida y en la salud de las personas. El fumar implica autoexponerse a unas 4.000 sustancias tóxicas, que son las que contiene el humo del cigarrillo. Entre estas podemos citar a las más conocidas (cancerígenas todas ellas): la nicotina, el alquitrán y el monóxido de carbono.

**La nicotina:** Es una droga adictiva, la sustancia responsable de la aparición de signos y síntomas tras la reducción o suspensión, y la que genera la dependencia del tabaco.

Esta sustancia puede ser entre seis y ocho veces más adictiva que el alcohol, pudiendo generar una dependencia más fuerte que la heroína.

La nicotina tarda entre siete y diez segundos en llegar al cerebro tras su inhalación.

**El alquitrán:** En la calada de un cigarrillo se respiran partículas de alquitrán, las cuales van recubriendo los pulmones.

Pues bien, trasladándolo a términos numéricos, si cada cigarrillo tiene unos 15 miligramos de alquitrán, en veinte años habríamos ingerido, con un paquete de tabaco al día, nada menos que 2,190 kilos de alquitrán. Lo que puede ser una taza de alquitrán al año... Con estos números ahora se comprende mejor el que los pulmones de un fumador tengan una tonalidad «oscura».

#### Datos económicos

El Banco Mundial ha estimado que el consumo del tabaco supone más de 200 billones de euros de gastos directos e indirectos. Por su parte, los fumadores se gastan unos 100.000 millones de euros en todo el mundo. Ahora, vamos a comprobarlo en economías domésticas, que proporcionalmente genera un impacto en las mismas muy interesante de analizar. Ahí van los datos:

Si cada paquete cuesta 2,50 euros, nos habríamos gastado (fumando un paquete al día) 75 euros en un mes de treinta días; 912,50 euros en un año; 9.125 euros en diez años; 18.250 euros en veinte años.

Ahora, si seguimos calculando, es el equivalente a... todos los años unas vacaciones de quince días a un lugar paradisíaco, en hotel de lujo y con yacusi incorporado, por ejemplo...

Evidentemente, más importante que el gasto económico es el tema de salud y de años de vida (y de calidad de vida) que aquita esta adicción. Me he encontrado muchas veces con el anumérico comentario de «tal o cual persona fumó hasta los noventa años»... Y es evidente que hay casos de estos, todos los conocemos. Pero se trata de hablar de matemáticas, de probabilidades, de datos estadísticos fiables; nunca las excepciones han de ser tomadas como datos fiables desde un punto de vista matemático, por ese mismo motivo: son excepciones.

Los datos sobre lo que esta adicción produce son la realidad, verificables, son números a tener en cuenta, ya que cada día

mueren 14.000 personas por enfermedades relacionadas con el tabaco o, lo que es lo mismo, una persona cada seis segundos. Es decir, el tabaquismo mata más personas en el mundo que cualquier otra enfermedad.

#### 1.4. LAS MATEMÁTICAS EN EL DEPORTE

Me gustan los deportes en general, soy practicante, y partidario, sin duda alguna, de lo expresado por Juvenal: *Mens sana in corpore sano*. Pues bien, ¿nos imaginamos las competiciones deportivas sin números? ¿Acaso en la Fórmula 1 o en las carreras de motos no es fundamental hacer cálculos para determinar si en un determinado momento nos puede venir bien sacar un puñado de puntos y decidir que el riesgo por ganar no merece la pena? ¿O el líder de una carrera ciclista, haciendo cálculos constantemente para regular su ventaja ante eventuales escapadas? Todo ello es puro cálculo y suele salir victorioso, aparte del mejor, el que más cálculos hace y más frío es al valorarlos, midiendo en todo momento el riesgo.

Nos imaginamos una competición de fútbol sin números, no habría clasificaciones. Nos la imaginamos sin goles, también son números... Incluso dentro del terreno de juego se puede calcular el ángulo con el que hay que pegarle a la pelota para que salga de determinada forma.

En pocas facetas se ven tantos ejemplos de imprecisiones, por no decir otra cosa, que en temas deportivos y, sobre todo, en temas futbolísticos.

Escribo esta parte durante el Campeonato Mundial de Fútbol de Alemania 2006, en concreto en vísperas de un partido de octavos de final entre España y Francia. Hace un par de horas tenía la radio puesta y oí a un famoso jugador del Real Madrid y de nuestra Selección hacer el siguiente comentario (aparte de los tópicos evidentes que se dicen en todas las entrevistas futboleras...):

Mañana contra Francia no servirá jugar al 100%, tenemos que jugar al 200%...

De acuerdo, ya sé que es una frase hecha, pero ¿quiere alguien explicarme qué significa jugar al 200%?

Desde luego, yo firmaría, sin lugar a la menor duda, que juegan al 100%.

Por cierto, antes también escuché que la media de edad de la selección francesa era de 29,5 años, mientras que la española era de 24,5 años (cinco años más joven que la selección gala). También que la altura media de los jugadores franceses era de 182 centímetros, la española se acercaba a los 179 centímetros.

Si entramos en las clasificaciones de los equipos, ahí sí que está lleno de números y de continuos aportes matemáticos, algo muy bonito de analizar y ante lo que sería más que útil que los equipos contratasen a un buen equipo de matemáticos y estadísticos (igual que se hace con médicos fisioterapeutas o psicólogos). A buen seguro que les resultaría de gran utilidad.

EQUIPOS	Casa			Fuera			Goles			
	Puntos	J.	G.	E.	P.	G.	E.	P.	F.	C.
★ 1 Barcelona	10	4	1	1	0	2	0	0	10	3
★ 2 Real Madrid	10	4	1	1	0	2	0	0	7	1
★ 3 Valencia	10	4	2	0	0	1	1	0	6	2
★ 4 Sevilla	9	4	2	0	0	1	0	1	11	5
★ 5 At. Madrid	9	4	1	0	1	2	0	0	7	3
★ 6 Deportivo	7	4	2	0	0	0	1	1	5	4
7 Recreativo	7	4	0	1	1	2	0	0	5	4
8 Getafe	7	4	1	1	0	1	0	1	3	2
9 Zaragoza	6	4	2	0	0	0	0	2	8	6
10 Osasuna	6	4	1	0	1	1	0	1	4	5
11 Levante	6	4	1	0	1	1	0	1	4	8
12 Mallorca	5	4	1	1	0	0	1	1	2	3
13 Villarreal	4	4	1	0	1	0	1	1	3	4
14 Gimnàstic	4	4	0	1	1	1	0	1	4	6
15 Betis	3	4	1	0	1	0	0	2	6	6
16 Celta	3	4	0	0	2	1	0	1	5	8
17 Espanyol	3	4	1	0	1	0	0	2	2	6
▼ 18 Athletic Club	2	4	0	1	1	0	1	1	2	8
▼ 19 Real Sociedad	1	4	0	0	2	0	1	1	4	9
▼ 20 Racing	1	4	0	0	2	0	1	1	2	7

## 1.5. LA MATEMÁTICA Y LA MÚSICA

Leibniz establece una tentadora analogía entre los números y la música:

El placer que nos proporciona la música viene de contar, pero de contar inconscientemente. La música no es más que aritmética inconsciente...

¿Nos imaginamos un mundo sin música? Cuesta trabajo imaginarlo, ¿verdad?

Pues la materia prima para que exista la música son los números. Si te resulta difícil verlo, lee las siguientes páginas.

### 1.5.1. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MÚSICA

La música, desde su aspecto físico-armónico, se fundamenta sobre principios rigurosamente matemáticos. Así de rotundo podemos comenzar nuestro análisis dedicado a la relación entre la música y las matemáticas.

Ya en la antigüedad se constata la llamada «leyenda de la fragua», que relata cómo el maestro Pitágoras escuchó el golpeo de cuatro martillos de herrero sobre un yunque mientras trabajaban el acero. Sorprendido de la perfecta consonancia de los sonidos, hizo pesar los citados martillos, comprobando que el peso de los mismos se hallaba en proporciones numéricas. A partir de esta experiencia, la Escuela Pitagórica continuó sus experimentos en pos de las relaciones aritméticas que regían los sonidos, con campanas, tubos sonoros y cuerdas vibrantes. La importancia de los experimentos pitagóricos radica en la constatación de que la armonía —la belleza— es un concepto que se fundamenta en la proporcionalidad, o lo que es lo mismo, en estructuras mensurables.

En música, el concepto de armonía se basa en leyes sobre las cuales se construyen las tonalidades y los acordes. En lenguaje coloquial, entendemos la armonía cuando resulta «agradable» lo que estamos escuchando.

Un acorde lo constituyen al menos tres sonidos ejecutados simultáneamente que producen ese efecto en nosotros. En el caso de los llamados acordes perfectos mayores, se forman con la 1.<sup>a</sup>, la 3.<sup>a</sup> y la 5.<sup>a</sup> nota de su respectiva escala. Siguiendo con el ejemplo de la tonalidad de do mayor DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO, el acorde está formado por las notas DO-MI-SOL (1.<sup>a</sup>, 3.<sup>a</sup> y 5.<sup>a</sup>). Esta combinación, que se puede trasladar a todas las tonalidades, las cuales tomarán el nombre de su primera nota, resulta en su base matemática en relación numérica en cuanto al número de vibraciones, de ahí que nuestro oído lo perciba como agradable; de lo contrario, si ese número de vibraciones no estuviera en proporción, percibiríamos una especie de «choque» en nuestra percepción auditiva.

Cuando pulsamos una cuerda, por ejemplo de una guitarra, se produce un sonido fundamental, pero curiosamente va acompañado de otros sonidos que lo refuerzan. Estos sonidos, que acompañan siempre al fundamental, son sobre todo el 3.<sup>o</sup> y el 5.<sup>o</sup> ( *aunque hay más, se pueden considerar como nítidos estos dos*), que son los que antes mencionaba como base de los acordes.

Imaginemos pulsar una cuerda partiendo de una de las notas DO, por ejemplo la que tiene 128 vibraciones por segundo; si fuéramos dividiendo la cuerda sucesivamente en una, dos, tres, cuatro, cinco, seis partes..., obtendríamos la siguiente relación:

Número de vibraciones	128	256	384	512	640	768
	DO	DO	SOL	DO	MI	SOL
Longitud de la cuerda	entera	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6

En este cuadro se constata que son las notas del acorde las que aparecen bajo una de esas relaciones proporcionales que están subyacentes en ese «mundo mágico» que es la música.

Uno de los más grandes directores de orquesta que ha habido, Leopold Stokowski (1882-1977), escribió en su libro *Música para todos nosotros*:

Cuando alguno de nosotros escucha música, toda nuestra conciencia se llena hasta derramarse, con el sentimiento causado por la belleza de los sonidos y la expresión emotiva de la música, pero al mismo tiempo, y aunque no siempre seamos conscientes de ello, hay escondido en el mundo de la música otro mundo. Un mundo inefablemente complejo de ondas, de sonido y de relaciones matemáticas que controlan estas ondas. Puede no ser nunca posible para nosotros oír conscientemente complejidades matemáticas como esas, pero quizás alguna vez podremos encontrar una manera de hacerlas visibles.

Existen en música dos conceptos, uno la afinación, que es la diferencia de nuestras sensaciones causada por sonidos altos o bajos y que es algo subjetivo, y otro la frecuencia, que expresa el número de vibraciones que se producen en un segundo y que es un concepto objetivo.

Resulta que las notas musicales que forman una escala completa están relacionadas por proporciones matemáticas según el número de vibraciones que producen en un determinado intervalo de tiempo.

En música, una escala completa toma el nombre de su primera y su última nota. Así, como ejemplo, si tomamos la llamada escala del tono de DO MAYOR, estaría constituida por los siguientes sonidos, que además llevan asociada una numeración romana:

DO - RE - MI - FA - SOL - LA - SI - DO  
I - II - III - IV - V - VI - VII - VIII

Resulta que entre todas las notas consecutivas existe una distancia sonora que llamamos de un tono, menos entre los intervalos III y IV, es decir, entre MI-FA, y entre el VII y VIII, es decir, de SI a DO, cuyas distancias son de medio tono, también

llamado semitono. Pues bien, de esto deducimos que entre todas las notas consecutivas, menos en estos dos últimos casos, al existir un tono de distancia es lo mismo que decir que hay dos medios tonos o semitonos. Si reflexionamos un instante, nos daremos cuenta de que una escala completa tiene una extensión de cinco tonos y dos semitonos o, dicho de otro modo, de doce semitonos. Valga como ejemplo el siguiente esquema:

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Entre cada rectángulo consecutivo del anterior esquema hay medio tono, y con los doce semitonos tenemos una escala completa que también se llama en música una extensión de octava.

Es como si, por ejemplo, dividiésemos un metro en doce segmentos iguales o un kilogramo de cualquier sustancia lo repartiésemos en doce partes iguales. Estos dos ejemplos son fáciles de entender para nosotros porque son magnitudes que se «pueden ver». En el caso de las alturas sonoras es más complicado, porque aunque el oído distingue estas variaciones en la altura del sonido, es más difícil, por no decir imposible, que el mismo oído sepa el número de vibraciones de cada sonido. Pero resulta que las doce distancias que hay para completar la escala son similares, medidas en número de vibraciones (*Sistema temperado*\*).

### 1.5.2. CURIOSIDAD

El compositor Ernst Toch podía retener fácilmente tras su simple audición una serie muy larga de números; pero lo hacía

\* Este es un sistema acordado para corregir pequeñas desviaciones que se producen que se llaman «comas», cuyo análisis excede de los fines de este libro.

«convirtiendo» la serie de números en una melodía (una melodía compuesta por él mismo, y que «correspondía» a los números).

## 1.6. LOS NÚMEROS EN LOS JUEGOS DE AZAR

### 1.6.1. LOS JUEGOS DE CARTAS Y LA RULETA

No recuerdo con exactitud la edad a la que empecé a calcular, pero fue alrededor de los cinco-seis años, y lo que sí recuerdo es que aprendí jugando a las cartas. Y es que este tipo de juegos están repletos de cálculos. La correcta toma de decisiones en cada jugada se basa en las probabilidades y en el buen manejo de los números.

Considero muy importantes los juegos de mesa para desarrollar las habilidades de cálculo e, incluso, para desarrollar otras habilidades como pueden ser la concentración o la memoria.

Yo, ante las jugadas de cartas —tute, mus, brisca, escoba, etc.—, siempre juego calculando. Procuro llevar la cuenta de las cartas que han salido y de los puntos que llevo acumulados y, ante cada jugada, tomo la mejor decisión en función de los puntos que me puede reportar o de si me interesa un grado mayor o menor en el riesgo a tomar.

Jugando de igual a igual, si somos buenos calculadores y controlamos las cartas que van saliendo, tenemos muchísima ventaja y mayor probabilidad de resultar vencedores. Esto es así porque te pueden venir cartas malas y perder, pero jugando con criterio a medio o largo plazo te van a venir cartas de todo tipo.

En los juegos de casino la complicación es mucho mayor, vamos a ver cómo se podría atacar la ruleta.

Si tuviese que escoger un método para tratar de ganar dinero en la ruleta, lo haría basándome en una suposición: «No hay ruleta perfecta, físicamente hablando». Si no hay ruleta perfecta,

esto implica que las ruletas son imperfectas. Y si las ruletas son imperfectas, la bola caerá más en unos casilleros que en otros.

¿Cómo determinar en cuáles?

Respuesta sencilla: Estudiando cada ruleta. Esto es, armarse de paciencia, trabajar preferiblemente en equipo para ser lo más discretos posible y tomar nota de la caída de la bola en las ruletas (esto está permitido, sin problema).

Cuantas más tiradas tomemos, pues mejor. A partir de aquí, hacemos un estudio matemático, estadístico. Si la bola cae más en unos casilleros que en otros, podremos concluir que en esa ruleta hay mayor facilidad para caer en esos lugares, con lo que nuestras apuestas se dirigirán a esos sitios concretos.

Eso sí, tenemos que contar con que en la ruleta Europea el Casino tiene un 2,7% de beneficio, con lo cual sería lógico que apostásemos cuando la imperfección superase ese 2,7% (en la ruleta americana el beneficio del casino es del 5,26%, con lo que tendríamos que encontrar ruletas quizás demasiado «imperfectas»).

Otra cuestión a tener en cuenta es que estamos hablando de una tendencia que se dará a largo plazo, con lo cual nuestro éxito, matemáticamente hablando, tendrá lugar también a largo plazo. Esto significa que habría que contar con un capital previo (estamos hablando de tendencias a largo plazo, a corto plazo podríamos perder).

El principio fundamental sobre el que se ha de basar el trabajo en la ruleta es fácil de entender: los 37 casilleros que se reparten alrededor de la circunferencia de una ruleta no son físicamente iguales y, por lo tanto, la bola tiene más facilidad para entrar en unos que en otros, dependiendo de las características físicas de cada casilla.

Otro posible factor que otorgue imperfecciones al juego de la ruleta es que el crupier, cansado de hacer siempre lo mismo, tuviese una tirada un tanto automatizada y lanzara la bola y el plato de la ruleta a una velocidad parecida. Es lógico suponer, entonces, que la bola caería aproximadamente a la misma distancia del sitio en el que salió.



Hay casos de jugadores que trabajaron la ruleta de esta forma y a largo plazo consiguieron ganar mucho dinero. Siempre con disciplina y paciencia y, por supuesto, aplicando siempre un criterio matemático a la hora de jugar.

### 1.6.2. LOS JUEGOS DE AZAR EN ESPAÑA

Según el INE (Instituto Nacional de Estadística), cada español se gasta al año unos 230 euros de media en juegos de azar. En este apartado vamos a hablar de matemáticas en los juegos de azar, en la que toman el nombre de estadística; vamos a ver en qué juegos hay más probabilidades (o menos) de que nos toque.

Antes, analicemos brevemente en qué consiste esto de la estadística y las probabilidades.

La **probabilidad** y la **estadística** se encargan del estudio del azar desde el punto de vista de las matemáticas: la primera porque propone modelos para los fenómenos aleatorios, es decir, los que se pueden predecir con certeza, y estudia sus consecuencias lógicas, mientras que la segunda ofrece métodos y técnicas que permiten entender los datos a partir de modelos. De esta manera, el cálculo de las probabilidades es una teoría ma-

temática y la estadística es una ciencia aplicada donde hay que dar un contenido concreto a la noción de probabilidad.

**La teoría de probabilidad** se utiliza en campos tan diversos como la demografía, la medicina, las comunicaciones, la informática, la economía o las finanzas. A diferencia de otras ramas clásicas de la matemática, su certificación como teoría matemática no se produce hasta los años treinta del siglo XX, gracias al físico y matemático Andrei N. Kolmogorov. Hasta entonces, la teoría de probabilidad se movió entre aquellos que pretendían comprender los juegos de azar, lo que llevó, por ejemplo, a que la clase alta europea durante el siglo XVII se planteara numerosas cuestiones teóricas.

La probabilidad y el azar siempre han estado en la mente del ser humano. Por ejemplo, sumerios y asirios ya utilizaban un hueso (astrágalo) que tallaban para que pudiera caer en cuatro posiciones distintas, por lo que son considerados como los precursores de los dados. En el caso de la civilización egipcia, algunas pinturas encontradas en las tumbas de los faraones muestran tanto astrágalos como tableros para el registro de los resultados. Por su parte, los juegos con dados se practicaron ininterrumpidamente desde los tiempos del Imperio romano hasta el Renacimiento, aunque no se conocen apenas las reglas con las que jugaban. Uno de estos juegos, denominado «azar», palabra que en inglés y francés significa riesgo o peligro, fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada. Las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe «ál-azar», que significa «dado». Posteriormente, en el «Purgatorio» de Dante el término aparece ya como «azar».

La estadística tiene su origen mil o dos mil años antes de Cristo, en Egipto, China y Mesopotamia, donde ya se hacían censos para la administración de los imperios. Como ejemplo curioso, los egipcios tuvieron un instrumento llamado «nilómetro», que servía para fijar los impuestos a partir del caudal del Nilo: cuanta más agua se media, más fértiles eran las orillas del río y, por lo tanto, más impuestos podían pagar los lugareños.

## Lotería Nacional

Tendríamos dos tipos de sorteo: el que se celebra semanalmente, en el que se emiten seis series de 100.000 números (00.000-99.999), de los cuales 35.450 se llevan algún tipo de premio.

Y el popular sorteo de Navidad, en el que se ponen en juego 180 series de 85.000 billetes, de los cuales 13.334 se llevan premio por serie. Así, por ejemplo, si jugamos un billete de lotería en el sorteo de Navidad, la probabilidad de que nos toque el premio mayor es de 1 entre 85.000, ya que todas las series están premiadas.

## La ONCE

En el sorteo de la ONCE los boletos constan de cinco cifras, que representan un total de 100.000 números, y en los sorteos especiales se entrega además un premio especial si coincide también con la serie (150 series). Por ello, acertar el «cuponazo» significa una probabilidad de **1 entre 15 millones** (150 series × 100.000 números).

## Quiniela de fútbol

En la quiniela tenemos una posibilidad entre casi cinco millones, siempre y cuando hagamos una apuesta sencilla. El cálculo se hace de la siguiente forma: tenemos tres posibles resultados: 1, X, 2, y tenemos un total de 14 partidos. El resultado se obtiene elevando 3 a la 14 (4.782.969). Y como solo tenemos una apuesta, pues esa será nuestra probabilidad de acierto.

En el caso de la quiniela de fútbol, hablamos de probabilidades sin tener en cuenta que algunos resultados son más pro-



bables que otros, debido a las diferencias entre los equipos de fútbol en juego.

También podríamos hacer múltiples combinaciones de juego tratando de buscar el mayor beneficio, pero sería complicar demasiado el asunto.

### Lotería Primitiva

En el caso de la Lotería Primitiva, haciendo una apuesta sencilla de seis números, la probabilidad de acertar seis es de una entre casi 14 millones. Esto se calcula de la siguiente forma:

Tenemos 49 números, de los que seis resultan ganadores. En el primer número extraído nos resultan favorables seis casos, cualquiera de los nuestros, de entre los posibles cuarenta y nueve; por lo tanto, hay que dividir 6 entre 49. En la segunda extracción, al haber salido ya un número, quedan cinco favorables y cuarenta y ocho posibles, es decir, 5 entre 48, y así, en progresión hasta llegar a la sexta, donde llegaríamos a dividir el último número entre los 44 que nos quedarían posibles. Al hacer estos cálculos, resulta que la probabilidad de ganar el premio mayor con esta apuesta simple es de 1 entre 13.983.816.

#### 1.6.3. LAS PROBABILIDADES DAN MUCHO JUEGO

Te planteo la siguiente pregunta: ¿Cuántas personas, como mínimo, ha de haber en un grupo para que la probabilidad de que dos de ellas comparten cumpleaños supere el 50%?

La respuesta es: solo 23 personas.

Puede parecernos sorprendente, pero la realidad es que entre 23 personas se pueden formar 253 parejas posibles.

Es decir, imaginemos un partido de fútbol. Dentro del rectángulo de juego tenemos 22 jugadores más el árbitro. Pues

bien, es más probable que dos de los participantes en el partido cumplan años el mismo día a que no se dé esta circunstancia.

Cuantas más personas superen las 23, mayor es la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día.

Podemos concluir con que, si te gustan las apuestas, puedes, en grupos iguales o mayores a 23 personas, apostar a que dos de ellas comparten cumpleaños. Matemáticamente tendrás mayor probabilidad de acierto que lanzando una moneda al aire y de cantándote por cara o cruz.

### 1.7. LOS MEDIOS DE COMUNICACIÓN

Nuestros medios de comunicación, con contadas excepciones, apenas son capaces de reseñar con mediano sentido de rigor informativo, a no ser copiando de otros medios extranjeros, los hechos más sustanciales que van surgiendo en el mundo de la ciencia en general y de las matemáticas en particular. Todo lo que tenga números parece que se atraganta sin el más mínimo sonrojo.

#### En los informativos

En cierta ocasión, hace un par de años, estaba de gira impartiendo unas charlas por las maravillosas Islas Canarias. Como en otras muchas ocasiones acudieron los medios informativos, que hicieron sus reportajes y grabaciones. Cuando estaba en el hotel, pude ver en las noticias de la Televisión Canaria acerca de mi presencia en las Islas; la información, de entrada, era la siguiente:

Estos días se encuentra en las Islas el popular Alberto Coto, Récord Guinness y Campeón del Mundo en Velocidad de Cálculo Mental. Entre sus logros está el haber sumado 100 números del 0 al 9 en un increíble crono de 19 minutos y 23 segundos.

Cuando oí la noticia me quedé estupefacto; la presentadora es evidente que leyó lo que alguien le había escrito, pero resulta curioso que alguien pueda tener un Guinness en velocidad de cálculo por haber sumado 100 números sencillos en más de 19 minutos! (evidentemente, la realidad son 100 números en 19 segundos y 23 centésimas de segundo...).

Este gazapo apareció en el diario *El Mundo* en fechas recientes:

#### Más turismo en agosto

#### Crece un 10,9%

Un total de 7.853 millones de turistas llegaron a España en agosto, lo que supone un 10,9% más que en el mismo periodo del año pasado.

No deja de ser simpático, ¿verdad? Está claro que es un error, creemos que así es, de imprenta. Lo interesante del tema sería que el lector inmediatamente se dé cuenta de lo que implicaría ese dato, que en muchos casos estoy seguro que pasó desapercibido.

7.853 millones de turistas superarían la población mundial, con lo cual se me antoja un poquito difícil que esta cifra pueda ser correcta. Salvo que durante el pasado mes de agosto nos hayan visitado de otros planetas.

#### Rebajas en el AVE

En diciembre de 2005 se dio la noticia de la rebaja de las tarifas del AVE entre Madrid y Zaragoza. De esta forma dieron la noticia dos de los más importantes periódicos de nuestro país:

Como término medio, las tarifas de los trenes AVE que circulan por la línea Madrid-Zaragoza-Lérida tendrán una re-

ducción de un 7% en euros por kilómetro y un 16% en todo el conjunto del recorrido.

Caramba, ¿cómo se come esto?

A ver cómo plantea la noticia el periódico número 2, quizá nos saque de la duda...

El secretario de Estado de Infraestructuras, Víctor Morlán, anunció hoy que viajar en el AVE Madrid-Zaragoza-Lleida costará de media a partir de mañana un 16% menos, con lo que se pretende establecer unas tarifas similares a las de la línea que une Madrid-Córdoba-Sevilla.

Morlán, en una conferencia de prensa en la sede de la Delegación del Gobierno en Aragón junto al presidente de Renfe, José Salgueiro, explicó que esta reducción de precios supone que los usuarios del tren entre Madrid-Zaragoza-Lleida pagarán un 7% menos por kilómetro del trayecto.

¿Qué fácil nos lo han puesto, verdad? Por favor, a mí que no me cobren por kilómetro (7% de rebaja), que me cobren por trayecto completo (16% de rebaja).

#### El precio del cordero

Este titular apareció en el diario *Las Provincias*:

El precio del cordero se multiplica por 15.

El precio del cordero se multiplica hasta 15 veces desde que el ganadero lo vende y hasta que llega al consumidor, pasando de 4,27 euros/kilo a 19,33 euros/kilo que paga el consumidor final.

Qué barbaridad..., ahora me entero de que  $4,27 \times 15 = 19,33$  euros...

## Consumo de helados

Cada español consumió el año pasado ocho litros de helado, dos más que en 2002...

Un crecimiento extraordinario del 33% en un año (de 6 a 8). Pero seguramente falso, si esta otra cifra, que aparece en el texto, es cierta (vaya usted a saber):

Las grandes marcas distribuyeron el año pasado 326 millones de litros, casi un 10% más que en 2002.

326 (millones) entre 40 (millones de españoles) son algo más de ocho litros por cada español. Pero entonces, ¿los dos litros de crecimiento a los que se aludía anteriormente?

Sería recomendable que los niños que han suspendido las matemáticas y están con sus cuadernos de verano no lean los suplementos de los periódicos...

## Alergia al polen

Observa el siguiente titular, quizá habría que cambiar lo de alergia al polen por «alergia a los números».

La alergia al polen podría aumentar a la mitad de la población en 20 años.

Alrededor de seis millones de personas sufren alergia al polen en España y se prevé que la cifra aumente...

Y a continuación:

Se calcula, por tanto, que un 22% de la población española sufre alergia a los pólenes...

Algo falla, o que en el periódico no sepan la gente que vive en España, o sencillamente que no saben lo que es un porcentaje.

## La sección de economía no se libra

En páginas de prensa económica también aparecen lindos como la siguiente:

Las mujeres ganan de media un 71,1% menos que los hombres.

No contentos con el titular, la noticia continúa de la siguiente forma:

El salario medio bruto por trabajador se situó en 19.808,06 euros en 2002, correspondiendo 22.174,08 euros a los empleados varones y 15.775,07 euros a las mujeres, lo que sitúa el salario promedio anual femenino un 71,1% por debajo del masculino.

Evidente es que lo que quieren decir y no dicen es que el salario medio de las mujeres es el 71,1% del de los hombres, no «un 71,1% menos». Ahí es nada la diferencia.

## Este sí que es curioso

... En las 2.117 bodas del cuarto trimestre del pasado año, contrajeron matrimonio 2.042 varones y 2.092 mujeres.

Sin comentarios...

## 1.8. LA PSICOLOGÍA DE LOS NÚMEROS

Como bien sabemos, la forma de interpretar o de plantear datos numéricos puede cambiar desde un punto de vista psicológico el efecto que cause en las personas. Todos hemos visto tras unas elecciones cómo parece que el conjunto de los partidos han ganado las mismas. Unos interpretan los datos en fun-

ción de si han subido o no en número de votos; si así no fuese, lo interpretarían según el porcentaje de votos, o si tampoco fuese así, buscarían resquicios basándose en unas determinadas previsiones que hubiesen resultado más desastrosas en función de determinados hechos acaecidos, etc.

Observa a continuación, con el siguiente ejemplo, cómo influye el factor psicológico según se plantea el problema.

Nos imaginamos que estamos ante un desastre natural y somos los jefes del servicio de salvamento. En peligro hay 900 personas. Se nos abren dos posibles vías de escape:

La primera vía nos dice que, si la tomamos, salvaríamos a 300 personas. Mientras que, si tomamos la segunda vía, hay una probabilidad de un tercio de que las 900 se salven y una probabilidad de dos tercios de que no lo consiga ninguna de las personas afectadas. ¿Qué camino tomarías?

Con encuestas realizadas, la mayoría de la gente eligió la primera vía, pues de este modo es seguro que se salven 300 vidas, mientras que con la segunda opción hay dos tercios de probabilidad de que no se salve ninguna.

Hasta aquí todo correcto, pero ahora vamos a plantear el problema de otra forma.

Imagina que ante la primera vía de escape te dicen que es seguro que conlleve 600 muertos. Mientras que si eliges la segunda vía hay una probabilidad de un tercio de que ninguno muera (y una probabilidad de dos tercios de que caigan todos). ¿Qué ruta elegirías en esta ocasión?

La mayoría de la gente optó por la segunda ruta, justificando su elección en que la primera de ellas nos lleva a 600 muertes seguras, mientras que por la segunda vía hay un tercio de probabilidades de que todos se salven.

Las dos preguntas son idénticas desde un punto de vista matemático. El motivo por el que las respuestas hayan sido completamente distintas depende del modo en que han sido planteadas: en términos de vidas perdidas o de vidas salvadas.

Como este ejemplo que acabamos de citar se dan infinidad de ellos en los medios de comunicación, con otro formato y otro mensaje. Todo depende de qué pretenda la persona que lanza el mensaje, y de lo que le interese respecto a la opinión del gran público. Interesante es saberlo valorar desde un punto de vista matemático.

## 1.9. EL GENIO NUMÉRICO

Hace unos años leí una historia muy bonita de un matemático árabe, la cual paso a contar de la forma en que la recuerdo:

Vagaban por el desierto un hombre mayor, conocido como el matemático, y su compañero de viaje a lomos de un solo camello, habían sufrido la pérdida del segundo camello y de esta penosa forma consiguieron llegar a un albergue donde poder descansar.

A la mañana siguiente fueron testigos de la discusión acalorada de tres hombres.

El matemático preguntó entonces al mayor de ellos por el motivo de la misma, y este pasó a contarle:

Somos tres hermanos y recibimos como herencia 35 camellos, voluntad expresa de nuestro padre. A mí, por ser el mayor, me corresponden la mitad de los camellos; a mi hermano, el segundo en edad, le corresponde una tercera parte de los 35 camellos, y al pequeño de los tres le corresponde la novena parte de los camellos.

No sabemos cómo hacer la partición, ya que la mitad de los 35 serían 17,5 camellos, y no es posible partir un camello por la mitad. Al mediano le correspondería un tercio, y eso son 11,66 camellos, algo que tampoco es posible. Mientras que al pequeño de los tres le corresponde la novena parte, y 35/9 es casi 3,9 camellos...

Hemos ensayado varias particiones pero ninguno está de acuerdo, ninguna nos resulta satisfactoria.

Yo soy calculador, me comprometo a mediar en la disputa y vosotros diréis si aceptáis la partición que os propongo, intervino el matemático.

Adelante, dijeron los tres hermanos, nada tenemos que perder.

Bien, permitidme, pues, que el camello que nos ha traído a este lugar forme parte del grupo de camellos, de esta forma tendríais 36 camellos y uno más para que podáis repartir.

Los tres hombres miraron asombrados por tal majadería, pero no dijeron nada.

Tenemos 36 camellos y vamos a proceder al justo reparto de los mismos...

Se dirigió entonces al mayor de los tres hombres y le dijo:

Tendrías que recibir la mitad de 35 camellos, que son 17,5. Pues bien, recibirás la mitad de 36, que son 18 camellos, y de esta forma sales ganando.

Se dirigió al segundo de los hermanos y le dijo:

Te corresponde un tercio de 35 camellos, que es menos de 12 camellos. Propongo que recibas un tercio de 36 camellos, que son 12, y también saldrás ganando.

Por último, le dijo al menor de los hermanos:

La voluntad de tu padre es que recibas la novena parte de los 35 camellos, o sea, menos de 4 camellos. Pues bien, recibirás la novena parte de 36 y tendrás así 4 camellos.

Miró entonces a los tres hombres para comprobar que estaban de acuerdo. Los tres asintieron complacidos, ¿cómo no iban a estar de acuerdo si los tres ganaban con el reparto?...

Pues bien, concluyó el matemático, el mayor de los tres recibirá 18 camellos, el mediano 12 y el pequeño 4. Y  $18 + 12 + 4$  son 34 camellos. De los 36 camellos sobran por lo tanto dos. Uno lo hemos puesto mi amigo y yo, el otro, si me permitís, es de justicia que me corresponda por haber resuelto vuestro problema y haberlos dejado satisfechos con el reparto.

Los tres hermanos, satisfechos plenamente, asintieron elogiando y agradeciendo al matemático su brillante intervención.

De esta forma, el matemático y su amigo continuaron ruta por el desierto, cada uno en su camello.

## 1.10. CÓDIGOS DEL DÍA A DÍA

Nuestra cuenta corriente, la letra del NIF, los códigos de barras o el ISBN de los libros, son cuatro ejemplos que forman parte de nuestro día a día, de nuestro paisaje habitual. Vamos a ver cómo se construyen, pues no están hechos de forma aleatoria, sino que lo están con un procedimiento cuyo objetivo está en poder detectar posibles errores al ser introducidos en un ordenador.

### 1.10.1. LA LETRA DEL NIF

Como bien sabemos, nuestro NIF (número de identificación fiscal) está formado por nuestro número de DNI (7 u 8 dígitos) y una letra de control.

Esta letra se calcula a través de una fórmula matemática y de una tabla creada con equivalencias. De esta forma, podemos calcular la letra que corresponde a una serie de números y, por otra parte, a partir de una serie de números, puede comprobarse si es correcta la letra que lleva asociada.

### -072 Forma de calcular la letra:

Se divide el DNI entre 23 y obtenemos un cociente y un resto. Pues bien, lo que nos interesa sería el resto.

A continuación, la letra se sabe utilizando esta tabla:

Letra	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E
Resto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Si el resto da 0, la letra será la T; si da 1, la R; si da 17, la V, etc.

### 1.10.2. EL ISBN DE LOS LIBROS

El ISBN (International Standard Book Number), que aparece en todos los libros, está formado por diferentes bloques que identifican el país, la editorial y libro (en total 9 cifras), y un último dígito (o la letra X) que sirve como dígito de control.

Este dígito de control se calcula de una manera muy sencilla que pasamos a explicar mediante un ejemplo:

Supongamos que las nueve primeras cifras de la izquierda del ISBN de un libro son 84-607-7738. Para calcular el último dígito del ISBN se realizan las siguientes operaciones:

$$(8 \times 1) + (4 \times 2) + (6 \times 3) + (0 \times 4) + (7 \times 5) + (7 \times 6) + (7 \times 7) + (3 \times 8) + (8 \times 9) = 8 + 8 + 18 + 0 + 35 + 42 + 49 + 24 + 72 = 256$$

Es decir, cada una de las cifras del número, leídas de izquierda a derecha, se han ido multiplicando por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y luego se han sumado estos resultados.

El último paso es dividir el resultado entre 11 y quedarnos con el resto. 256 entre 11 es 23 de cociente y 3 de resto (si el resto diese 10, pondríamos una X).

Luego, el ISBN de este libro sería 84-607-7738-3.

Actualmente, cualquier programa profesional de ordenador que trabaje con ISBN tiene rutinas que calculan el dígito de control y comprueban si este coincide con el introducido por el usuario. Si no coincide, el ISBN dado es erróneo; si coincide, puede que lo sea o puede que no. Esto es así porque a un número le corresponde un único dígito de control, pero un mismo dígito de control corresponde a muchos números.

### 1.10.3. CÓDIGO DE LA CUENTA CORRIENTE

Nuestra cuenta corriente tiene un código de 20 dígitos. Empezando por la izquierda, los cuatro primeros dígitos identifican a la entidad, los cuatro siguientes a la sucursal, luego vienen dos dígitos de control, y los diez últimos dígitos corresponden al número de la cuenta corriente.

El primero de los dígitos de control es el de la entidad/sucursal. El segundo es el dígito de control del número de la cuenta corriente. Un ejemplo enseñará a calcularlos.

Supongamos que el número de una cuenta corriente es el 0123456789; para calcular su dígito de control se realiza la operación:

$$0 \times 10 + 1 \times 9 + 2 \times 7 + 3 \times 3 + 4 \times 6 + 5 \times 1 + 6 \times 2 + 7 \times 4 + 8 \times 8 + 9 \times 5 = 210$$

Es decir, cada uno de los dígitos del número de la cuenta, leídos de izquierda a derecha se han ido multiplicando por 10, 9, 7, 3, 6, 1, 2, 4, 8, 5 y luego se han sumado estos resultados.

Ahora dividimos 210 entre 11 y el resto, que en este caso es 1, es el dígito de control. Si el resto hubiera sido 10, se toma como dígito de control 1.

Sean ahora 0123 el código de una hipotética entidad y 4567 el código de una de sus sucursales. Para calcular el dígito de control de entidad/sucursal se realiza la operación:

$$0 \times 7 + 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 8 + 7 \times 5 = 129$$

Calculamos el resto de 129 entre 11, que es 8, y ya tenemos el dígito de control de entidad/sucursal. Como antes, si el resto es 10, el dígito de control será 1.

Lo mismo que decimos para el ISBN sirve para el Código Cuenta Corriente. Por ejemplo, el programa de ayuda para la declaración del IRPF tiene incorporadas rutinas de cálculo de los dígitos de control, detecta la introducción de un código cuenta corriente erróneo y aparece una ventana de aviso.

#### 1.10.4. LOS CÓDIGOS DE BARRAS

Los códigos de barras están presentes a todas horas en nuestras vidas y, sin embargo, con frecuencia no sabemos exactamente lo que representan. Gracias a los códigos de barras se pueden identificar toda clase de productos y servicios en todo el mundo.

Constan de varios números, siendo el último el dígito de control, fundamental es que sea correcto.

Pues bien, este dígito verificador se obtiene mediante un cálculo efectuado para asegurar la exactitud del código de un producto.

El cálculo que se realiza sería el siguiente:

**Primero:** Numerar todos los dígitos del código de derecha a izquierda.

**Segundo:** Sumar todas las posiciones impares del código y multiplicarlas por tres.

**Tercero:** Sumar todas las posiciones pares del código.

**Cuarto:** Sumar el resultado final del segundo y tercer paso.

**Quinto:** El resultado se resta a la decena inmediata superior, de donde resulta el dígito verificador. Este puede ser un número entre 0 y 9.

Ejemplo práctico para un código EAN-13:



9 788496 107601

Paso	Código	Cálculos
	7 4 0 1 2 3 4 5 0 0 0 1	
1	12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	
2	$4 + 1 + 3 + 5 + 0 + 1$	$= 14 \times 3 = 42$
3	$7 + 0 + 2 + 4 + 0 + 0$	$= 13$
4		$42 + 13 = 55$
5		$60 - 55 = 5$
	7 4 0 1 2 3 4 5 0 0 0 1 5	Resultado

El algoritmo a utilizar para cada uno de los sistemas de codificación es el mismo:

- Para Código UPC: 11 dígitos (el dígito 12 es el dígito de control).
- Para Código EAN-8: 7 dígitos (el dígito 8 es el dígito de control).

## 1.11. DOS NÚMEROS CON MALA SUERTE: 13 - 666

### 1.11.1. EL NÚMERO 13

Como bien sabemos, el número 13 está considerado en las sociedades occidentales como el número de la mala suerte.

La superstición en torno a este número no es algo fruto de los tiempos modernos, debemos remontarnos muchos siglos atrás para comprender estos miedos. De hecho, se debe a que en la Última Cena se sentaron los doce apóstoles más Jesucristo, y este murió. Por eso la tradición primitiva cristiana considera que nunca se han de sentar trece personas en una comida o cena, pues existiría el riesgo de que alguna muera antes de terminar el año.

Si continuamos con las tradiciones religiosas, vemos que el capítulo decimotercero del Apocalipsis está dedicado al Anticristo.

De todas formas, no es solo de la religión cristiana, los hindúes ya veían el 13 como un número maldito, el Código de Hammurabi, por ejemplo, lo omite.

Mientras que para nosotros el martes y 13 es el día de la mala suerte, para los anglosajones se mantiene el número 13 pero es el viernes. Sin embargo, para los japoneses el viernes, y si encima es 13, es el día propicio para tener todo tipo de suertes. Como vemos, todo depende de las interpretaciones. Por cierto, cuando alguien tiene miedo al número 13 se dice que padece *triscadecafobia*.

### A modo de curiosidad

Lo cierto es que hay casos que son para pensar que sí que hay algo raro en este número, como lo que le pasó al músico alemán **Richard Wagner**: nació en un año acabado en 13; la suma de las letras de su nombre y apellido son 13; los números de su año de nacimiento, 1813, suman también 13; compuso 13 óperas y falleció un día 13.

Simplemente son fobias que en mayor o menor medida podemos tener cualquier persona, pero no nos dejemos llevar por ellas. La ciencia no casa con las casualidades. ¿Nos habrían fijado en este detalle si en lugar de con el 13 el baile de cifras hubiese sido, por ejemplo, con el 24?

No olvidemos nunca que la mayor de las casualidades sería que no las hubiera. Se dan tantos sucesos y hay tantas personas como interpretaciones posibles. Siempre habrá alguien decidido a sacarlas a la luz y a hacernos creer que tienen algún significado.

### 1.11.2. EL 666

¡Aquí hay sabiduría! El que tiene entendimiento, cuente el número de la Bestia; pues es número de un hombre. Y su número es 666.

Apocalipsis 13, 18

La Biblia, en el Libro de las Revelaciones o Apocalipsis de San Juan, es quien identifica al 666 como al número de la Bestia, siendo el sello o la marca del Anticristo.

En las doctrinas religiosas será la marca que impondrá el Anticristo en la mano derecha o la frente de cada ser humano, al final de los tiempos de la tierra. Se cree que el hecho de que esa marca sea el 666 implica denotar la trinidad satánica (satanás, el Anticristo y el falso profeta).

Hay más números con cierto significado en las Sagradas Escrituras, por ejemplo:

10 = Lo completo.

7 = Lo perfecto.

3 = Da énfasis.

6 = Imperfección (pues no alcanza el 7, y el que menciona 3 veces indica énfasis en lo imperfecto...).

### Cuadrado Mágico Satánico

Los cuadrados mágicos son una forma antiquísima de acertijo numérico, consistente en formar un cuadrado de números cuyas filas, columnas y diagonales sumen lo mismo. Dice la leyenda que el primer cuadrado mágico nació en el siglo xxiii a. de C., y fue encontrado por el emperador chino de la época en el caparazón de una tortuga que pasaba por el río Amarillo. Con este peculiar origen no es de extrañar que siempre hayan tenido un significado cabalístico y mágico, considerando que preservaban de todo tipo de enfermedades.

Durante la Edad Media se utilizaron como amuletos para buenos o malos encantamientos, asociándolos con la religión, la astrología y la alquimia. También se grababan como amuletos en láminas de plata con la creencia de que mantendrían alejada la peste negra.

Pues bien, si se utilizaban en toda clase de supersticiones, observa este cuadrado mágico de orden 6 (6 filas por 6 columnas). Todas sus filas, columnas y diagonales suman 666, es decir, el número del diablo, por eso es conocido como *Cuadrado Mágico Satánico*.

186	180	108	114	72	6
30	156	102	138	48	192
204	54	126	90	168	24
18	60	132	96	162	198
12	174	120	84	66	210
216	42	78	144	150	36

Ricemos el rizo de la fantasía y de la magia, porque el siguiente cuadrado mágico no solo es satánico, sino que además todos los números que lo integran son números primos.

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Aunque para las sociedades occidentales el 666 es el número del Anticristo, para los chinos, por el contrario, es de buen augurio, ya que el 6 es sinónimo de suerte.

La cultura oriental, muy supersticiosa en cuestión de números, considera que el 4 es el número de la mala suerte, el 6 es sinónimo de buena fortuna, el 8 de riqueza y el 9 de longevidad y eternidad.

Los chinos sí tendrán una celebración el 8 de agosto de 2008 (8-8-8), ya que fue la fecha elegida para inaugurar los Juegos Olímpicos de Pekín.

## CAPÍTULO 2

### Algo más que números



**E**n este capítulo voy a hablar de lo que son cuatro maravillas numéricas y de sus implicaciones.

Trataré los números de Fibonacci y «su» proporción áurea, que de una u otra forma está presente en nuestras vidas, aunque muchas veces no nos demos cuenta.

También de los irreductibles números primos que, entre otras cosas, protegen los más altos secretos.

Si hay un número con gancho, este es el número Pi, con sus infinitos decimales y todas sus pequeñas historias.

Y haré referencia a los grandes números. El concepto de infinito tiene su hechizo, y también quiero representar de alguna forma lo que son esos números que, por su magnitud, cuesta trabajo siquiera imaginarlos.

#### 2.1. NÚMEROS DE FIBONACCI Y LA PROPORCIÓN ÁUREA

En mis conferencias siempre suelo hacer referencia a los números de Fibonacci y a la proporción áurea basada en ellos. Desde que el exitoso libro de Dan Brown, *El Código Da Vinci*, apareció en escena con enorme fuerza, y que en la trama que el libro sigue aparezcan estos números como referencia clave, se han hecho mucho más populares, y aprecio cómo la gente sabe de qué hablo cuando los menciono. Pues bien, estos mágicos números estaban mucho antes de la aparición del best seller

y de su posterior incursión en el cine. Vamos a continuación a hablar de ellos.

### 2.1.1. LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

#### ¿Quién fue Fibonacci?

Leonardo de Pisa, alias Fibonacci (hijo de Bonacci), fue el más sobresaliente de los matemáticos durante la Edad Media. Nació en Pisa en 1170 (época en que se estaba construyendo la famosa Torre Campanario, o Torre Inclinada de Pisa).

Tuvo la oportunidad de viajar por todo el norte de África, su padre era comerciante, y de conocer nuevos sistemas de cálculo.

En 1202 publicó *Liber abbaci*, en el que explicaba cómo sumar, restar, multiplicar o dividir con números arábigos (del 0 al 9), así como otros problemas sobre álgebra y geometría.

Este libro consta de 15 capítulos y fue de trascendental importancia en la formación de mercaderes y comerciantes aptos en matemáticas, lo que contribuyó al desarrollo del capitalismo.

Introdujo en Europa, por tanto, uno de los mayores descubrimientos matemáticos de su tiempo, el sistema de numeración indo-árabe, el sistema decimal que hoy todos conocemos y utilizamos.

Después de 1228 poco se sabe de Fibonacci, salvo sus condecoraciones, que le fueron concedidas por el emperador. Fibonacci murió en 1250 en su ciudad natal, Pisa.



Fibonacci

#### El problema de los conejos

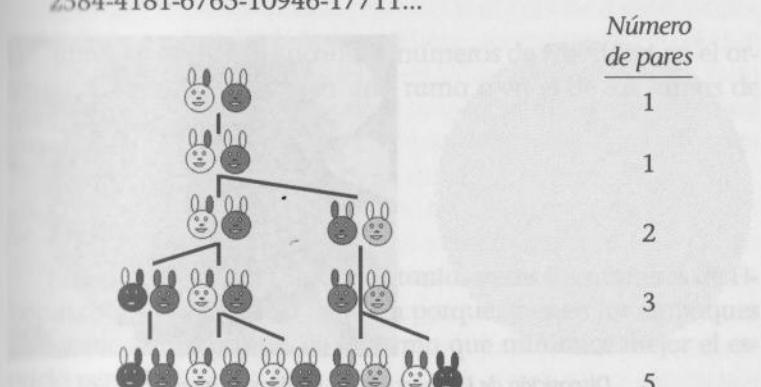
En su *Liber abbaci* plantea un problema cuya resolución da lugar a la secuencia de números de Fibonacci:

¿Cuántos pares de conejos situados en un área cercada se pueden reproducir en un año, a partir de un par de conejos, si cada par da lugar al nacimiento de uno nuevo por cada mes, comenzando con el segundo mes?

Mediante una sencilla gráfica podemos observar el crecimiento en el número de pares de conejos. Así, en el primero y segundo meses tendríamos solo un par de conejos. Al finalizar este segundo mes, la hembra haría su primer parto y, por tanto, para el tercer mes ya tendríamos dos pares de conejos. El cuarto mes los padres tendrían otro parto, pero aún no los hijos, con lo que tendríamos tres pares. Para el quinto mes se produciría el primer parto de los hijos y otro más de los padres, con lo que ya tendríamos cinco pares de conejos correteando por el campo.

Si continuamos con esta lógica y seguimos el proceso, podemos calcular el número de conejos que tendríamos durante los siguientes meses, y que cumplirían la siguiente sucesión:

1-1-2-3-5-8-13-21-34-55-89-144-233-377-610-987-1597-  
2584-4181-6765-10946-17711...



Esta sucesión es conocida con el nombre de *números de Fibonacci* y tiene la peculiaridad de que cada nuevo término es la suma de los dos anteriores.

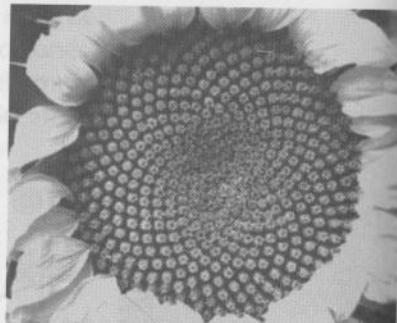
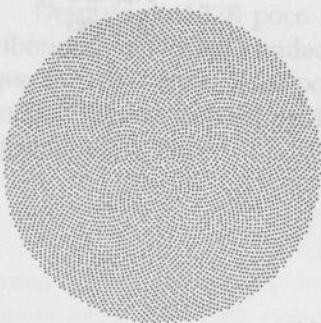
Fibonacci no investigó sobre ella, simplemente presentaba el «trivial» problema de los conejos en su libro.

Fue en el siglo XIX cuando el matemático francés Edouard Lucas lo rescató. A partir de ese momento, la sucesión de Fibonacci ha intrigado a los matemáticos debido a su tendencia a manifestarse en los lugares más curiosos, tanto de la naturaleza como de la creación humana.

### En árboles y plantas. La filotaxis

Los números de Fibonacci se presentan en la naturaleza en diversas situaciones que rozan lo mágico pero que se deben, por supuesto, a una serie de razones lógicas.

**Las semillas de girasol:** Si contamos las semillas que se forman en los espirales del girasol hacia la derecha y hacia la izquierda, podemos observar que hay 34 curvas en un sentido y 21 en el otro, siendo ambos dos números consecutivos en la sucesión de Fibonacci.



Disposición de Fibonacci de las semillas de girasol.

Otra observación que se puede realizar es con los frutos de algunas plantas.

Por ejemplo: si observamos una piña y la miramos por el lado donde estaba sujetada al árbol, podemos ver dos conjuntos de espiras: unas que giran en sentido de las agujas del reloj y otras en sentido contrario. Pues bien, si las contamos, podemos contemplar cómo el número de espiras en una y otra dirección son dos números consecutivos de Fibonacci; en unas especies 5 y 8, y en otras 8 y 13.

Los pétalos de muchas flores también siguen la sucesión de Fibonacci:

- Las margaritas tienen, por lo general, 34, 55 u 89 pétalos, los tres son números de Fibonacci.
- La azucena tiene tres pétalos y, con frecuencia, dos batirias de tres pétalos.
- La rosa salvaje tiene cinco pétalos, otro número de Fibonacci.
- Ocho pétalos (sexto número de Fibonacci) tiene la espuela de caballero.
- Con 13 pétalos cuentan la caléndula y la hierba lombriaguera.
- La achicoria tiene 21 pétalos.
- Etcétera.

También podemos encontrar números de Fibonacci en el ordenamiento de las hojas en una rama o en el de las ramas de un árbol.

### Por qué sucede esto?

El hecho de que encontremos tantas veces los números de Fibonacci en la naturaleza tiene un porqué, y es en los empaques para ordenar los objetos de la forma que minimice mejor el espacio perdido.

De la misma forma que los objetos cuadrados quedan mejor empacados en estructuras cuadradas o los redondos en estructuras hexagonales, la forma más eficiente de ordenar las hojas en un tallo o las semillas de una flor, cuando ambas siguen creciendo, es siguiendo la secuencia de números de Fibonacci.

Este patrón corresponde a un ángulo de rotación a partir del punto central, mediante el cual los nuevos elementos (hojas, pétalos) se van organizando a medida que crecen.

Las hojas a lo largo de un tallo de una planta o las ramas a lo largo de un tronco tienden a crecer en posiciones que optimizan su exposición al sol, lluvia o aire. A medida que el tallo crece, se producen hojas espaciadas de una forma bastante regular, y sin estar unas encima de otras.

Por el contrario, el pasaje de una hoja a la siguiente está caracterizada por un desplazamiento de tipo «atornillado» alrededor del tallo. Estructuras similares pueden encontrarse en las piñas o en las semillas de los girasoles, como ya hemos mencionado.

Este fenómeno se llama «filotaxis», palabra acuñada por el naturalista suizo Charles Bonnet. Por ejemplo, el tilo tiene hojas opuestas (que corresponden a media vuelta alrededor del tallo), y tiene por lo tanto un factor filotáctico igual a 1/2. En otras plantas, como el avellano, zarzamora y haya, el paso de una hoja a otra necesita un tercio de vuelta (factor filotáctico igual a 1/3). En el manzano, roble y árbol de damascos (albaricoque), tienen hojas cada 2/3 de vuelta y el peral y el sauce llorón las tienen cada 3/8 de vuelta. Es fácil darse cuenta de que todas estas fracciones están formadas por números de Fibonacci.

El hecho de que las hojas de las plantas siguen ciertos patrones fue observado en la Antigüedad por Teofrasto (372-287 a. de C.) en *Investigación sobre las plantas*. Escribe *aquellas plantas que tienen hojas chatas, las tienen siguiendo un patrón regular*. Plinio el Viejo (23-79 d. de C.) realizó una observación similar en su gran obra *Historia Natural*, cuando habla sobre «intervalos regulares» entre hojas «posicionadas circularmente alrededor

del tallo». El estudio de la filotaxis no fue más allá de estas observaciones cualitativas, hasta que en el siglo xv Leonardo da Vinci (1452-1519) agregó un elemento cuantitativo a la descripción de la distribución de las hojas al notar que estas estaban distribuidas en patrones espiralados, en ciclos de a 5 (que corresponde a un ángulo de 2/3 de vuelta). La primera persona en descubrir (intuitivamente) la relación entre la filotaxis y los números de Fibonacci fue Johannes Kepler.

### Las abejas y los números de Fibonacci

Las abejas también tienen relación con las series de Fibonacci: si se observan las celdas hexagonales de una colmena y se coloca a una abeja en una cualquiera de ellas, y se le permite alimentar a la larva, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, veremos que hay solo una ruta posible para la siguiente celdilla, dos hacia la segunda, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, etc.

Y, ya que estamos hablando de abejas, diremos que los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente una distribución de Fibonacci. En efecto, los machos no tienen padre, por lo que él (1) tiene una madre (1, 1), dos abuelos —los padres de la reina— (1, 1, 2), tres bisabuelos —porque el padre de la reina no tuvo padre— (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5) y ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8).

### Fibonacci en la música

En la música también hay presentes números de Fibonacci, siendo el instrumento que mejor los refleja el piano. La subdivisión de un teclado se hace en octavas, compuestas cada una de

ellas por ocho teclas blancas y cinco negras; las teclas negras se distribuyen a lo largo del teclado alternando en grupos de dos y tres. Un teclado completo se compone de once octavas, aunque puede tener una tecla más, es decir, 89. El acorde y arpegio por excelencia que permiten identificar cualquier tonalidad son los formados por las notas primeras, tercera, quinta y octava de la escala de dicha tonalidad.

El compositor húngaro Bela Bartok y el francés Olivier Messiaen utilizaron esta serie de Fibonacci para determinar la duración de las notas en algunas de sus obras.

## En los mercados financieros

Sorprendente y curioso es que también tengan su aplicación en los mercados financieros, en bolsa; vamos a verlo de pasada, no quiero aburrir con un tema tan técnico, de qué manera lo hacen.

Los números de Fibonacci se utilizan sobre todo en el análisis técnico. Los Fibonacci «Retracements» nos indican áreas de soporte hasta las cuales puede corregir la tendencia actual.

Habrá tres áreas de corrección importantes, siguiendo estos números, a una tendencia en evolución. El área de «máximo corrección» de 61,8%, el área de «mínima corrección» de 38,2% y el área de «corrección media» del 50%.

También se utilizan las Fibonacci «Projections» para ver posibles áreas de proyección de donde podría llegar el precio del activo que estemos estudiando.

¿Cómo utilizaríamos estas áreas?

Estas áreas pueden ser áreas de posibles soportes o resistencias en las que podemos fijarnos para marcar nuestros puntos de entrada o de salida o para hacer *trading* entre ellas.

¿Cómo se trazan?

Si tenemos un software que nos permita utilizar el análisis Fibonacci —como, por ejemplo, Bloomberg—, tenemos que bus-

car un punto mínimo —tendencia alcista— o un punto máximo —tendencia bajista—, y trazar las líneas uniendo este punto con el punto máximo —tendencia alcista— o con el mínimo —tendencia bajista— del periodo que estamos analizando.

De esa manera, veremos cuánto ha evolucionado positiva —tendencia alcista— o negativamente —tendencia bajista— el valor, tendremos un rango, y de ahí sabremos cuáles son las posibles áreas de soporte hasta donde puede corregir el valor.

Para simplificar, tenemos que buscar el máximo y el mínimo del periodo que nos interesa —corto, medio o largo plazo—, definiendo así el rango entre ambos, para poder aplicar los porcentajes de 38,2, 50 y 61,8%, y ver nuestros posibles puntos de entrada o de salida.

## 1.2. El NÚMERO ÁUREO «Φ»

Los números de Fibonacci tienen varias propiedades. Sin duda la más curiosa, e importante, es que el cociente de dos números consecutivos es lo que llamamos el número áureo, cuya proporción se ve mucho en la naturaleza, en muchas obras de arte, en las partes del cuerpo humano, en construcciones modernas como el DNI o las tarjetas de crédito, etc.

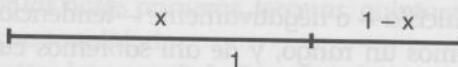
### Proporción áurea

El número de oro fue descubierto por los antiguos griegos (unque culturas anteriores ya lo utilizaban en sus construccio-nes). Su definición es la siguiente:

La sección áurea se obtiene dividiendo un segmento en tres partes, de tal forma que el segmento menor es al segmento mayor como este es a la totalidad. De esta forma se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad. Esta

forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

Es decir, vamos a tomar un segmento de longitud uno y hagamos en el mismo la división indicada anteriormente:



Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación, que tendremos que resolver:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow 1-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(-1 + \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})} = \frac{-3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{9 - 5} =$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots \Leftrightarrow \text{el número de oro}$$

Es decir, la relación entre las dos partes en que dividimos el segmento es el número de oro, cuyo símbolo es  $\Phi$ .

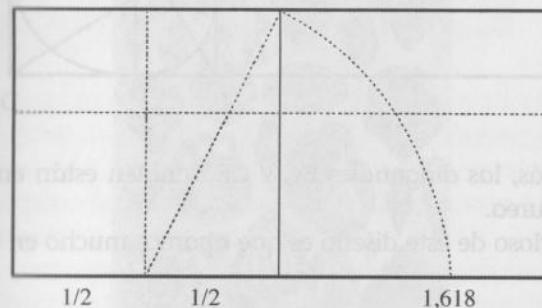
## Relación entre los números de Fibonacci y estas soluciones

Pues bien, la relación entre los números de Fibonacci y este resultado (proporción de oro) es la siguiente: si dividimos dos números consecutivos de Fibonacci, obtenemos... ¡¡el número de oro!!

Otro dato curioso es que  $\Phi$ , el número de oro, es el único cuyo inverso es él mismo menos uno (se puede comprobar fácilmente con las dos soluciones de arriba):  $X - 1 = 1/X$ , que es la misma ecuación que la de la definición (con un valor de 0,618).

## El rectángulo de oro

Si construimos un rectángulo cuyos dos lados estén en la proporción áurea, obtenemos el siguiente:

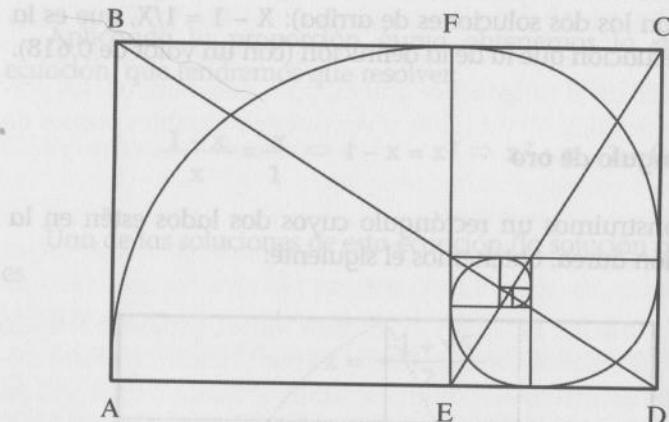


Pues bien, resulta que ese rectángulo, con esas proporciones, aparece en diversas obras de arte y construcciones a lo largo de la Historia y en varios objetos de uso cotidiano.

Por ejemplo, la relación entre los lados de una tarjeta de crédito o del DNI es el número de oro.

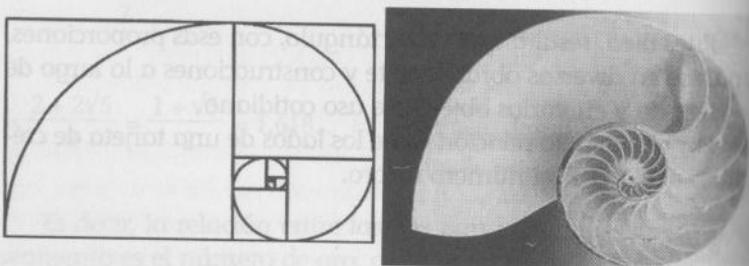
## La espiral de oro

Ahora es posible construir una espiral de oro con un rectángulo áureo. Podemos entonces con un compás proyectar un lado y trazar una línea perpendicular. Así tenemos un cuadrado y otro rectángulo áureo. Repetimos esto unas cuantas veces y finalmente unimos los lados con el compás.



Además, las diagonales BC y CE también están en la proporción áurea.

Lo curioso de este diseño es que aparece mucho en la naturaleza:

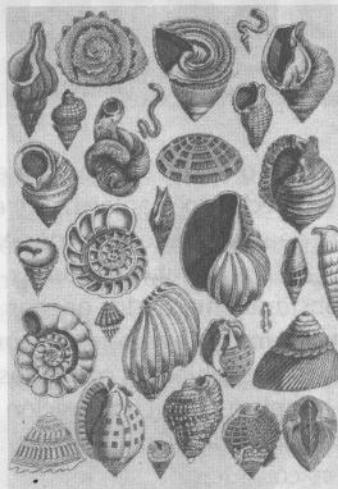


Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. El gran matemático J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

## Y todo esto, ¿por qué?

La respuesta de que haya número de oro por todas partes es muy sencilla: simplemente porque es una relación muy estética y agradable al ojo.

## El número de oro en la naturaleza



En la naturaleza aparece la proporción áurea también en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros, y la formación de caracolas.

## El número de oro en el arte

Figura esta proporción dorada en muchísimas obras de arte. Vamos a ver alguna de las obras maestras más importantes.

### En el Partenón



La proporción áurea o número de oro ya era conocida desde la Antigüedad, apareciendo regularmente en geometría. De hecho, se conoce ya de su existencia en los pentágonos regulares y pentagramas de las tabletas sumerias de alrededor del 3200 a. de C. No obstante, fueron los griegos los primeros que lo trabajaron de una forma, digámoslo así, consciente.

Los antiguos griegos establecían con él las proporciones de los templos. Fidias lo aplicó en la composición de sus esculturas (de hecho, el que sea llamado número FI es en honor a Fidias).

El propio Platón consideró la sección áurea como la más importante de las relaciones matemáticas, considerándola incluso la llave a la física del cosmos.

## En la Pirámide de Kéops



Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En la Gran Pirámide de Kéops el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es  $2\Phi$ . Que en la Pirámide de Kéops haya proporción áurea por conocimiento del tema o simplemente por casualidad ya es otro cantar.

### La divina proporción

La sección áurea tuvo especial relevancia en el Renacimiento, sobre todo en las artes plásticas y en la arquitectura. Se consideraba la proporción perfecta entre los lados de un rectángulo, la proporción más estética posible, lográndose con ella el equilibrio y la belleza.

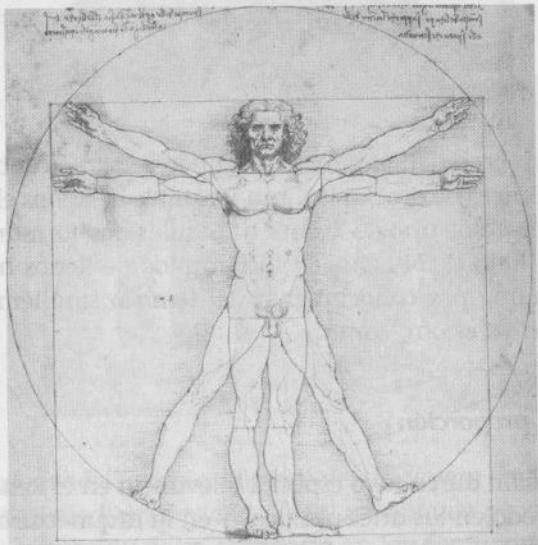
Leonardo da Vinci, por ejemplo, lo utilizó para definir todas las proporciones fundamentales en su pintura *La Última Cena*,



desde las dimensiones de la mesa hasta la disposición de Cristo y los discípulos sentados, así como las proporciones de las paredes y ventanas al fondo.

## En el cuerpo humano: El Hombre de Vitruvio

Leonardo da Vinci creó su *Hombre de Vitruvio* o *La Divina Proporción* para unas ilustraciones publicadas por el matemático Luca Pacioli en 1509.



En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo, se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90 grados con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

## El número áureo en el pentáculo

El pentáculo es un símbolo pagano, más tarde acogido por la Iglesia católica para representar a la Virgen María, y también por Leonardo da Vinci para asentar en él al *Hombre de Vitruvio*.

Gráficamente, el número áureo es la relación entre el lado del pentágono regular y la recta que une dos vértices no consecutivos de este. Si se toma como unidad un lado del pentágono interior, cualquier línea que marca los brazos de la estrella mide  $\Phi$ . También la longitud total de cualquiera de las cinco líneas que atraviesan la estrella mide  $\Phi^4$ , mientras que la suma del lado interior y cualquiera de sus brazos es  $\Phi^2$ .

Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo, se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande.

Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor, o sea  $\Phi$ .

## Rectángulo áureo en la actualidad

Los tarjetas de crédito o nuestro DNI tienen número áureo; si dividimos el lado mayor del rectángulo entre su lado menor, tenemos un resultado de 1,61803398, que es nuestro amigo perfecto.

Los paquetes de tabaco también están diseñados de forma perfecta que llevan esta divina proporción en su forma rectangular. Los folios Din A4 también siguen esta proporción.



Evidentemente, todo esto está muy estudiado, pues nuestra capacidad perceptiva se acomoda más fácilmente a estas dimensiones.

Quizá, y ojalá, a partir de este momento, querido lector, hagas el ejercicio de observación y compruebes por ti mismo que el número áureo impregna nuestra visión. Si algo nos llama la atención por su belleza, tal vez sea porque el número de oro está en la fuente de diseño.

Concluyamos diciendo que las peculiaridades de las series de Fibonacci y de sus propiedades son, en apariencia, infinitas. Son tan atractivas que es fácil caer encandilados bajo su hechizo.

## 2.2. LOS GRANDES NÚMEROS

### Introducción

En este apartado vamos a hablar de los grandes números, de los números exponentiales. A modo de curiosidad veremos los nombres que reciben alguno de ellos y lo inalcanzables que pueden llegar a ser para la mente humana.

Los grandes números son majestuosos, poseen un atractivo muy peculiar. Residen en las fronteras de la imaginación, siendo difíciles de manejar y de definir.

El interés por los grandes números se remonta a milenarios atrás. Los inventores de nuestro sistema de numeración decimal, los hindúes, los consideraron, aludiendo a muchos de ellos, por ejemplo a un número de 153 cifras se alude un mito sobre Buda.

También los egipcios, los griegos o los romanos reflexionaron sobre ellos. De todas formas, un número grande es lo que la propia cultura quiera determinar como tal. Los romanos no tenían símbolos para denotar cantidades mayores que 100.000. Y los griegos solían terminar de contar en la *mirada*, palabra que significa 10.000.

En la Grecia clásica estaba difundida la idea de que ningún número podría ser más grande que el del número de granos de arena necesarios para llenar todo el universo.

Los estudiosos de los siglos XVIII y XIX consideraron números grandes a los de importancia científica. Por ejemplo, el químico italiano Amedeo Avogadro ideó el llamado *número de Avogadro*, o mol, cuyo valor es  $6,02 \times 10^{23}$ , y que representa el número de átomos contenidos en 12 gramos de carbono puro.

En la actualidad, las máquinas modernas poseen la memoria y velocidad suficiente para ideárselas con números enormes, pudiendo ahora caracterizar cifras sobre las cuales los matemáticos de antaño apenas podían soñar.

### Miles de millones

Hablar de Carl Sagan es hacerlo de uno de los más grandes divulgadores científicos de los últimos años. Creador de la famosa y extraordinaria serie televisiva *Cosmos*, que enganchó a la ciencia a toda una generación de estudiantes, en su último libro recordaba una anécdota que le ocurrió a un conferenciente que, en un planetario, explica a sus oyentes que al cabo de 5.000 millones de años el Sol se hinchará hasta convertirse en una estrella gigante roja, engullendo planetas como Mercurio y Venus, y, finalmente, quizás también a la Tierra. Tras la charla, un oyente inquieto lo aborda:

—Perdóneme, doctor. ¿Dijo usted que el Sol abrasará la Tierra dentro de 5.000 millones de años?

—Sí, más o menos.

—Gracias a Dios. Por un momento creí que había dicho cinco millones.

Por interesante que pueda resultar para el destino de la Tierra, poco importa para nuestra vida personal el que vaya a durar cinco o 5.000 millones.

La distinción entre números, sin embargo, es mucho más vital en cuestiones tales como los presupuestos públicos, la población mundial o las bajas en una guerra nuclear. Estos sí que son números mucho más manejables y fáciles de interpretar.

Este último libro de Carl Sagan, que nos ha recordado la peculiar anécdota, lleva por título *Miles de millones* y su autor enumera el billón que se cierne sobre nosotros. El astrónomo y escritor desaparecido recordaba que los gastos militares mundiales ascendían ya a casi un billón de dólares al año; la deuda total de los países en vías de desarrollo se acercaba en aquel momento a los dos billones de dólares, y el presupuesto anual de los Estados Unidos rondaba también los dos billones de dólares.

Sagan expone todo esto como preámbulo a una llamada de atención sobre la «notación exponencial» y el desconcierto entre millones, billones y trillones, causa de numerosos errores en los medios de comunicación, pero no solo en ellos.

Un millón es un millar de millares, o un uno seguido de seis ceros (1.000.000); un billón es un millón de millones, o un uno seguido de doce ceros (1.000.000.000.000), y un trillón, un millón de billones, o un uno seguido de dieciocho ceros.

### El invento del ajedrez

Como ejemplo de astucia, interpretación numérica y la dimensión de algunos números, expongo a continuación la forma en cómo fue inventado uno de los mayores tesoros que la humanidad ha creado. Se trata de algo más que un juego: el ajedrez.

Cuenta la leyenda que el ajedrez se inventó en la India, y no podía ser de otra forma, fue creado el juego por un brillante calculador y matemático originario de este gran país.

Pues bien, se hallaba abatido un famoso monarca tras la pérdida en una batalla de su hijo mayor. Constantemente le daba vueltas a esta tragedia situando las diferentes posiciones

de los elementos de su ejército y no encontraba consuelo para su pérdida.

Le llegó entonces un súbdito con un juego desconocido, al que llamaba ajedrez, con el objetivo de intentar paliar sus penas.

Al rey le resultó curioso y pidió al súbdito que le explicase su funcionamiento. Al explicarle el significado de cada pieza y el funcionamiento del juego, hizo ver de inmediato al monarca que en determinadas circunstancias hay que sacrificar alguna pieza en la búsqueda del bien colectivo y del triunfo final.

Esto produjo un gran consuelo al monarca, que vio reflejada entonces la necesidad de la pérdida de su hijo.

Le dijo entonces el monarca que le pidiera lo que quisiera por haber conseguido curar sus penas con aquel maravilloso juego que le acababa de entregar.

—Me conformo con 2 granos de trigo por la primera casilla del tablero, 4 por la segunda, 8 por la tercera, 16 por la cuarta, y así doblando la cantidad hasta la casilla 64 del tablero de ajedrez. Pues bien, me conformo con recibir los granos de trigo correspondientes a la última casilla.

El soberano casi se indignó de una petición que, a su parecer, no había de hacer honor a los maravillosos efectos que aquel juego le había procurado.

—¿No quieres nada más? —preguntó.

—Con eso me bastará —le respondió el matemático.

El monarca dio la orden a su ministro de que, inmediatamente, quedaran satisfechos los deseos del sabio.

Pero cuál no sería el asombro de este, después de hacer el cálculo, viendo que era imposible dar cumplimiento a la orden!

Para darle al inventor la cantidad que pedía, no había trigo bastante en los reales graneros, ni en los de toda la India, ni en todos los de Asia.





## La descendencia de las hormigas

Cuando una especie animal encuentra dificultades para reproducirse, la naturaleza pone remedio y permite que sea inmenso el número de huevos o crías que van a permitir el correcto desarrollo de la especie.

Vamos a calcular de qué manera crecería la descendencia de las hormigas si no es porque las dificultades que se encuentran en el medio implican la muerte de muchísimas de ellas y, por supuesto, a que solo son las reinas las que pueden tener descendencia.

Supongamos que cada hormiga pudiese poner huevos y fuesen 100 huevos en cada puesta, y que en el curso de un verano se alcancen seis generaciones de hormigas. En la primera generación saldrán 100 hormigas, de ellas 50 hembras; de estas 50 hembras, en la segunda generación salen 5.000 hormigas, de las cuales 2.500 serán hembras..., y siguiendo el proceso, en la sexta generación aparecerían 1.562.500.000.000 hormigas.

Pues bien, si pusiésemos este número de hormigas en fila, cubrirían unas 20 veces la distancia entre la Tierra y la Luna. Está claro que las cosas no suceden así, son relativamente pocos huevos los que prosperan y dan lugar a individuos adultos, y pocas las hormigas elegidas para ponerlos... ¡Menos mal!



Algunas hormigas

## Georg Cantor y el infinito

Cantor fue uno de los grandes matemáticos de los siglos XIX y XX; junto a Dedekind fue el creador de la Teoría de Conjuntos, base de las matemáticas modernas. También fue el primero en formalizar la noción de infinito, bajo la forma de números transfinitos. Asimismo, afirmó que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño.

Empezó a interpretar el *infinito absoluto* (reunión de todos los infinitos, y por lo tanto el último de ellos); este infinito no es concebible por la mente humana. Cantor escribió numerosos artículos religiosos sobre el tema...

Su mente luchó contra varias paradojas relacionadas con estos temas, flirtar con el infinito lo llevó a ser internado en repetidas ocasiones en hospitales psiquiátricos por sufrir constantes depresiones y recaídas.

Hoy en día, la comunidad matemática reconoce plenamente su trabajo y admite que significa un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico.

### 3. LOS NÚMEROS PRIMOS

#### 3.1. LOS INDOMESTICABLES NÚMEROS PRIMOS

##### Concepto

Un número primo es todo aquel número entero que solo es divisible por sí mismo y por la unidad, como, por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11... Es una definición simple y sencilla que se aprende en los primeros años de la enseñanza. Lo contrario a número primo se denomina número compuesto (4, 6, 8, 9, 10...).

## Un poco de historia

Desde la antigua Grecia, los números primos fueron objeto de interés y estudio, y no lo han dejado de ser en ningún momento hasta la actualidad.

Estas pequeñas joyas de las matemáticas son indomesticables, totalmente impredecibles y no existe ninguna ley de formación de números primos. Por poner un ejemplo, entre los números 1 y 1.000 hay 168 números primos, pero entre las mil unidades que van desde 10.100 hasta 11.100 solo hay dos.

Los teóricos de los números consideran a los números primos los más importantes de todos, porque son los átomos de la matemática. Los números primos son los bloques de la construcción numérica, porque todos los otros números pueden ser creados multiplicando combinaciones de números primos.

## Los pitagóricos

Los pitagóricos, en su idea de que *los números gobiernan el mundo*, consideraban que estos números tenían propiedades místicas y mágicas. Por su carácter indivisible, presentaban todas las características para ser adorados por los discípulos de Pitágoras.

## Reducción al absurdo de Euclides

En el libro *Los Elementos* (300 a. de C.), uno de los tratados más importantes de la historia de las matemáticas, ya aparecen estudios sobre los números primos. El propio Euclides, en su libro, enuncia un teorema importante sobre números primos:

### Hay infinitos números primos

La prueba que Euclides hace se trata de la primera prueba conocida mediante el método de reducción al absurdo, y este

método consiste en suponer cierto lo contrario de lo que se quiere probar para llegar a una contradicción descubriendo falsa la suposición hecha.

## Eratóstenes de Cirene

A lo largo de la historia ha habido múltiples intentos por tratar de buscar una forma precisa y definitiva de encontrar números primos, pero la tarea ha sido árdua y sin resultados definitivos. El intento más conocido, y uno de los primeros, es un procedimiento creado por el genio matemático griego Eratóstenes de Cirene. Su método, que recibe el nombre de la *criba de Eratóstenes*, consiste en eliminar los números que no sean primos y que, por tanto, sean múltiplos de algún número.

Tomamos el número 2, divisible solo entre sí mismo y la unidad, con lo cual es primo (el único par que lo es). A continuación vamos eliminando de la consideración de primos a los múltiplos de 2, o sea, todos los pares. Luego tomamos el 3 y eliminamos a sus múltiplos. Repetimos el proceso con el 5, el 7 y los números que no han sido tachados hasta ese momento, porque todos ellos van siendo primos.

Pues bien, una vez hecho este proceso, tenemos en negrita (dentro de los 100 primeros números) los que nos quedan como primos. El resto son números compuestos.

A este sencillo pero eficaz método se lo denomina *criba de Eratóstenes*, aunque nos podemos imaginar lo tedioso que sería cuando hablamos de hacerlo con miles, o incluso millones, de números.

,	2	3	-4	5	-6	7	-8	-9	-10
11	-12	13	-14	-15	-16	17	-18	19	-20
-21	-22	23	-24	-25	-26	-27	-28	29	-30
31	-32	-33	-34	-35	-36	37	-38	-39	-40
41	-42	43	-44	-45	-46	47	-48	-49	-50
-51	-52	53	-54	-55	-56	-57	-58	59	-60
61	-62	-63	-64	-65	-66	67	-68	-69	-70
71	-72	73	-74	-75	-76	-77	-78	79	-80
-81	-82	83	-84	-85	-86	-87	-88	89	-90
-91	-92	-93	-94	-95	-96	97	-98	-99	-100

A continuación figura el listado con los números primos inferiores al 1.000, y no hay ningún método matemático por el que continuar obteniéndolos.

### Los primeros 100 números primos son:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71  
 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149  
 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227  
 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307  
 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389  
 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467  
 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571  
 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653  
 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751  
 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853  
 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947  
 953 967 971 977 983 991 997

Hay 168 números primos menores a 1.000:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71  
 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149  
 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227  
 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307  
 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389  
 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467  
 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571  
 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653  
 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751  
 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853  
 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947  
 953 967 971 977 983 991 997

### Cómo se protege la cigarra con números primos

Que la naturaleza es sabia no cabe la menor duda. Que también es matemática, tampoco cabe duda alguna, y es algo que quiero dejar patente en este libro, a través de numerosos ejemplos.

El siguiente caso nos lo cuenta Simon Singh en su obra *El enigma de Fermat*:

Las cigarras periódicas, muy especialmente la *Magicicada septendecim*, tienen el ciclo vital más largo de todos los insectos. Su único ciclo vital empieza bajo tierra, donde las ninfas absorben pacientemente el zumo de las raíces de los árboles. Entonces, después de 17 años de esperar, las cigarras adultas emergen de la tierra en gran número e invaden temporalmente nuestro paisaje. Unas semanas después se aparean, ponen los huevos y mueren. La cuestión que inquietaba a los zoólogos era: ¿Por qué el ciclo vital de la cigarra es tan largo? ¿Qué quiere decir que el ciclo vital sea un número primo de años? Otra especie, la *Magicicada tredecim*, aparece cada 13 años, lo

que indica que los ciclos vitales que son un número primo de años dan algún tipo de ventaja para la conservación de la vida.

Según una teoría, la cigarra tiene un parásito que también recorre un ciclo vital, y que la cigarra está intentando evitar. Si el parásito tiene un ciclo vital, pongamos, de dos años, entonces la cigarra quiere evitar un ciclo vital que sea divisible por 2, si no el parásito y la cigarra coincidirán regularmente. De esta manera parecida, si el parásito tiene un ciclo vital de tres años, entonces la cigarra querrá evitar un ciclo vital divisible por 3, si no el parásito y la cigarra volverán a coincidir. Al fin, si se quiere evitar encontrarse con su parásito, la mejor estrategia de la cigarra es darse un ciclo de vida largo, que dure un número primo de años. Como nada dividirá el 17, la *Magicicada septendecim* raramente se encontrará con su parásito. Si el parásito tiene un ciclo de dos años, solo se encontrarán cada 34 años, y si tiene un ciclo vital más largo, de 16 años, por ejemplo, solo se encontrarán cada 272 (16 × 17) años.

El parásito, en su lucha por sobrevivir, solo tiene dos ciclos vitales que incrementan la frecuencia de las coincidencias: el del ciclo anual y el mismo ciclo de 17 años que la cigarra. Ahora bien, es poco probable que el parásito pueda sobrevivir y reaparecer 17 años seguidos, porque durante las 16 primeras apariciones no habrá cigarras a las cuales parasitar. De otro modo, si quieren conseguir el ciclo de 17 años, las generaciones de parásitos tendrán que evolucionar primero durante un ciclo vital de 16 años. Esto significaría que, en algún estadio evolutivo de su vida, el parásito y la cigarra no coincidirán durante ¡272 años! En cualquier caso, el largo ciclo vital de las cigarras, y el número primo de años, los protege.

¡Esto podría explicar por qué el supuesto parásito no ha sido encontrado nunca! En la lucha por coincidir con la cigarra, el parásito probablemente ha continuado alargando su ciclo vital, hasta conseguir traspasar la barrera de los 16 años. Entonces dejará de coincidir durante 272 años; mientras tanto, su falta de coincidencia con las cigarras lo habrá llevado a la

extinción. El resultado es una cigarra con un ciclo vital de 17 años; ciclo que ya no le hace ninguna falta porque su parásito ya no existe.

### 3.3.2. ¿QUÉ ES LA CRIPTOGRAFÍA?

Actualmente, los números primos y la criptografía tienen una relación muy estrecha, por esa razón voy a dar unas pinceladas a este apasionante tema.

#### Conceptos

Desde el antiguo Egipto a la era digital, el hombre siempre ha tenido la necesidad de guardar secretos. Arma de militares, espías o diplomáticos, el hombre ha hecho gala a lo largo de la historia de su ingenio para garantizar el secreto de sus comunicaciones.

Siempre que dos personas se tenían que comunicar han necesitado de técnicas para que una tercera persona que interceptase el mensaje no consiguiese saber de qué se estaba hablando.

A la codificación de estos mensajes para hacerlos secretos se le denomina criptografía (del griego *kryptos*, escondido, y *graphein*, escribir).

La criptografía fue considerada un arte hasta que Shannon publicó en 1949 la *Teoría de las comunicaciones secretas*. Desde este momento empezó a considerarse una ciencia aplicada, debido a la relación con otras ciencias y ramas de las matemáticas, como la estadística, la informática, la teoría de números o la complejidad computacional.

Ahora bien, esta ciencia existe por el hecho de que hay gente que trata siempre de descifrar esos mensajes secretos, de lo contrario no tendría sentido. A la ciencia de descifrar los códigos

secretos se le denomina Criptoanálisis. Al conjunto de ambas, cifrado y descifrado, se le denomina Criptología.

## CRPTOLOGÍA = CRPTOGRAFÍA + CRPTOANÁLISIS

### Breve historia de la criptografía

Los números primos son, hoy en día, de vital importancia en el mundo de la criptografía, pero antes de meternos en el estudio de por qué lo son, vamos a dar un breve repaso histórico.

Los espartanos utilizaron, en el 400 a. de C., la *scitala*, que puede considerarse el primer sistema de criptografía por transposición, es decir, que se caracteriza por enmascarar el significado real de un texto alterando el orden de los signos que lo conforman. Los militares de la ciudad griega escribían sus mensajes sobre una tela que envolvía una vara. El mensaje solo podía leerse cuando se enrollaba sobre un bastón del mismo grosor, que poseía el destinatario lícito.

El método de la *scitala* era extremadamente sencillo, como también lo era el que instituyó Julio César, basado en la sustitución de cada letra por la que ocupa tres puestos más allá en el alfabeto. Sencillos, pero eficaces en su época.

En los escritos medievales sorprenden términos como Xilef o Thfpfkblctxx. Para esconder sus nombres, los copistas empleaban el alfabeto zodiacal, formaban anagramas alterando el orden de las letras (es el caso de Xilef, anagrama de Félix) o recurrian a un método denominado fuga de vocales, en el que estas se sustituían por puntos o por consonantes arbitrarias (Thfpfkblctxx por Theoflactus).

La criptografía resurgió en la Europa de la Edad Media, impulsada por las intrigas del papado y las ciudades-estado italianas. Fue un servidor del papa Clemente VII, Gabriele de Lainde, quien escribió el primer manual sobre la materia en el viejo continente.

En 1466 León Battista Alberti, músico, pintor, escritor y arquitecto, concibió el sistema polialfabético, que emplea varios abecedarios, saltando de uno a otro cada tres o cuatro palabras. El emisor y el destinatario han de ponerse de acuerdo para fijar la posición relativa de dos círculos concéntricos, que determinará la correspondencia de los signos.

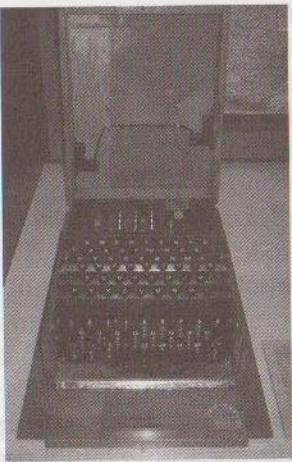
Un siglo después, Giovan Battista Belaso de Brescia instituyó una nueva técnica. La clave, formada por una palabra o una frase, debe transcribirse letra a letra sobre el texto original. Cada letra del texto se cambia por la correspondiente en el alfabeto que comienza en la letra clave.

Pero los métodos clásicos distan mucho de ser infalibles. En algunos casos, basta hacer un simple cálculo para desentrañar los mensajes ocultos. Si se confronta la frecuencia habitual de las letras en el lenguaje común con la de los signos del criptograma, puede resultar relativamente sencillo descifrarlo. Factores como la longitud del texto, el uso de más de una clave o la extensión de esta juegan un papel muy importante, así como la intuición, un arma esencial para todo criptoanalista.

### La Segunda Guerra Mundial

La criptografía siempre ha tenido una gran importancia en el campo militar. Durante la Primera Guerra Mundial se utilizaron técnicas sin grandes resultados. Al final de la guerra se impulsó el uso de las tecnologías electromecánicas. El ejemplo más claro de ello es la utilización de la máquina *Enigma*, utilizada por los alemanes durante la Segunda Guerra Mundial para cifrar y descifrar mensajes.

La máquina *Enigma* era buena, pero no suficientemente buena, ya que llegó a ser descifrado su funcionamiento. Cuando la Armada alemana la empezó a utilizar en los años 20 nadie pudo descifrarla; cuando el Ejército la utilizó, ligeramente modificada, tampoco se pudo descifrar.



Vista general de una máquina Enigma, dispuesta para cifrar o descifrar mensajes que se introduzcan a través de su teclado.

El principio del fin de su inviolabilidad se inició en 1929, cuando los polacos interceptaron una máquina *Enigma* enviada de Berlín a Varsovia y no protegida, por error, como equipo diplomático. No era una versión militar, pero puso sobre la pista de que los alemanes podrían utilizar esta máquina en el futuro.

Ya se sabe que la necesidad agudiza el ingenio, y los polacos se encontraban al inicio de los años 30 entre los rusos, con gran ansia de consolidar su incipiente Revolución, y los alemanes, donde los nazis habían conseguido el poder y amenazaban de forma latente a sus vecinos.

El joven matemático polaco Marian Rejewski hizo una de las mayores aportaciones en la historia del criptoanálisis usando técnicas fundamentales de matemáticas y estadística en el desciframiento de *Enigma* y encontrando una manera de combinarlas.

La invasión alemana se cernía sobre los polacos, que, conscientes de su incapacidad para extender sus técnicas con los recursos disponibles, decidieron enviar todas las réplicas de *Enigma* y los resultados obtenidos a Francia y Gran Bretaña. Tanto

franceses como británicos daban por sentado que durante la guerra que se avecinaba, las comunicaciones alemanas no iban a poder ser alteradas, pero este primer paso dado por los polacos cambiaría el rumbo de la guerra.

En Bletchley Park, al norte de Londres, tenían los servicios secretos británicos montada su «Escuela gubernamental de códigos y cifrados». Allí trabajaban desde grandes matemáticos hasta los mejores jugadores de ajedrez, expertos en lenguas o fanáticos de los crucigramas. Cualquier persona con un talento especial podría ser reclutada. Entre ellos estaba el joven matemático Alan Turing, pieza clave en el desciframiento de *Enigma* y uno de los padres de las modernas computadoras.

En el verano de 1940 descifradores británicos ya consiguieron sus primeros éxitos descifrando mensajes secretos enviados por la Luftwaffe (la aviación alemana).

Pero la Marina nazi tenía versiones de la *Enigma* un tanto más complejas y con mayor dificultad para su descifrado. Sin embargo, el 9 de mayo de 1941 fue capturado el submarino alemán U-110, equipado con una máquina *Enigma*, un libro de códigos, un manual de operaciones y otras informaciones que permitieron que el tráfico submarino de mensajes codificados se mantuviera roto hasta finales de junio, cosa que los miembros de la Armada prosiguieron haciendo poco después.

Nos podemos imaginar lo que en el transcurso de una guerra supone saber lo que va a hacer tu enemigo con suficiente intelación.

No obstante, el hecho de que el cifrado de *Enigma* hubiese sido descubierto durante la guerra permaneció en secreto hasta finales de los sesenta. Las importantes contribuciones de muchas grandes personas no fueron hechas públicas, y no pudieron compartir su parte de gloria, pese a que su participación fue probablemente una de las razones principales por las que los aliados ganaron la guerra tan rápidamente como lo hicieron. Finalmente, la historia salió a la luz, pero con más de veinte años de retraso, por el siguiente motivo:

Tras el fin de la guerra, los británicos y estadounidenses vendieron las máquinas *Enigma* sobrantes a muchos países en todo el mundo, que se mantuvieron en la creencia de la seguridad de esta. Su información no era tan segura como ellos pensaban, lo que, por supuesto, fue la razón para que británicos y norteamericanos pusieran a su disposición las máquinas.

### Los primos en criptografía

Si hemos hablado de criptografía en este capítulo de números primos es porque tienen una extraordinaria importancia. La teoría de los números primos ha encontrado en nuestros días un buen campo de aplicación en criptografía. El proceso de cifrado requiere el uso de una clave secreta; lo más corriente es que para descifrar el mensaje, al receptor solo le hace falta aplicar la clave al revés. Con este procedimiento, la clave de cifrado y descifrado es el elemento más débil de la cadena de seguridad. En primer lugar, el emisor y el receptor han de ponerse de acuerdo sobre los detalles de la clave, y la transmisión de esta información es un proceso arriesgado. Si un tercero, un enemigo, puede interceptar la clave mientras se está intercambiando, podrá traducir todo aquello que se comunique desde entonces. En segundo lugar, se han de cambiar las claves de vez en cuando para preservar la seguridad de las transmisiones, y cada vez que esto ocurre hay un nuevo riesgo de que la clave sea interceptada.

El problema de la clave gira en torno al hecho de que aplicarla en un sentido cifrará el mensaje, y aplicarla en el sentido contrario lo descifrará; es decir, que descifrar un mensaje es casi tan fácil como cifrarlo. A pesar de ello, la experiencia nos dice que hay muchas situaciones cotidianas en que descifrar es mucho más difícil que cifrar.

Durante la década de los setenta, Whitfield Diffie y Martin Hellman se propusieron encontrar un proceso matemático que fuese fácil de llevar a término en una dirección, pero muy difícil

de realizar en la dirección opuesta. Un proceso como este forma la clave perfecta para los mensajes cifrados. Por ejemplo, yo podría tener la clave dividida en dos partes y publicar la parte correspondiente al cifrado. Cualquiera podría enviarme mensajes cifrados, pero solo yo conocería la parte descifradora de la clave.

En 1977 Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, un equipo de matemáticos y científicos informáticos del Massachusetts Institute of Technology, se dieron cuenta que los números primos eran la base ideal para un proceso de cifrado fácil y descifrado difícil.

Cuando quisiera tener mi propia clave, tendría que tomar dos números primos muy grandes, de hasta 80 dígitos cada uno, y los multiplicaría para encontrar un número no primo más grande. Para cifrar el mensaje solo haría falta conocer el número grande no primo; para descifrarlo haría falta conocer los dos números primos originarios que fueron multiplicados, conocidos como factores primos. Ahora puedo publicar el número grande no primo (parte cifrador de la clave) y guardarme los dos factores primos (parte descifrador). Lo que cuenta es que aunque todo el mundo pueda conocer el número grande no primo, la dificultad de obtener los números primos sería inmensa.

Ponemos el ejemplo del 589 (que yo podría hacer público como la parte cifrador de la clave); a un ordenador personal le haría falta menos de un segundo para encontrar que los dos números primos son el 31 y el 19 ( $31 \times 19 = 589$ ). Pero nos referimos a un número de más de 100 cifras, lo cual significaría varios años de trabajo para los ordenadores más potentes del mundo; por tanto, para hacer perder el rastro a los espías sería suficiente con cambiar la clave una vez al año.

### El futuro: Criptografía cuántica

Daré unas breves pinceladas en este apartado, pues hablar de temas cuánticos no resulta nada fácil y roza lo que llamaríamos ciencia-ficción.

Y es que un tipo de criptografía se cierne sobre nosotros: la criptografía cuántica, que garantiza absoluta confidencialidad de la información, transmitida por fibras ópticas, almacenando información en el elemento constituyente de la luz, el fotón.

Nace en los años ochenta con la propuesta de Charles Bennett y Gilles Brassard de utilizar la física cuántica para transmitir mensajes confidenciales. La transmisión se logra utilizando fotones individuales (cuantos de luz) enviados entre el emisor y el receptor mediante una fibra óptica. Un interceptor que intente leer el mensaje enviado solo podría destruir la información transmitida, sin poderla reproducir, perturbándola de tal forma que los interlocutores de la comunicación se darían cuenta de lo que se intenta hacer.

Los primeros productos comerciales de criptografía cuántica salieron al mercado en 2002. Desde entonces, los avances no dejan de producirse y la adopción de esta tecnología, si bien lenta al principio, tiende a acelerarse.

La cuestión que se plantea es la siguiente: si se pone en marcha este tipo de tecnología, la búsqueda de la privacidad habría llegado a su fin. Se garantizarían las comunicaciones seguras para gobiernos, militares, empresas y particulares. La única cuestión en el tintero sería si los gobiernos nos permitirían a los ciudadanos usarla. ¿Cómo regularán los Estados la criptografía cuántica?, porque de la misma forma que la protección de información sería segura para los «buenos», también lo podría ser para las actividades criminales. El futuro nos dirá.

### Anécdota criptográfica

La historia de la criptografía está llena de anécdotas y personajes pintorescos. David Kahn nos cuenta, en *The Codebreakers*, la historia de Thomas Jefferson Beale, un aventurero que en 1821 emprendió un arriesgado viaje. Antes de partir dejó a Robert Morris, su huésped, dos documentos cifrados para que

los abriese si él desaparecía. Morris se decidió a hacerlo al cabo de veinte años. Con la ayuda de unos amigos descifró el segundo texto: era una sucesión de números comprendidos entre el 1 y el 1.322, que correspondía a la Declaración de Independencia de los EE. UU. Sustituyendo cada número por las iniciales de las palabras de la Declaración, se obtenía la descripción de un tesoro de una tonelada y media de oro, dos y media de plata y gran cantidad de joyas. El lugar en el que se encontraba enterrado estaba indicado con precisión en el primer texto. Es una secuencia de 520 números comprendidos entre el 1 y el 2.906, pero nadie ha descubierto la razón de en qué documento están numeradas las palabras, lo que permitiría descifrar el mensaje. Durante un siglo y medio se ha intentado relacionarlo con la Constitución estadounidense y con la Biblia, entre otros textos, y se han realizado costosos análisis por ordenador, sin resultados.

Lo más probable es que sea una broma pesada, pero, por si acaso, aquí están los 520 números:

71, 194, 38, 1701, 89, 76, 11, 83, 1629, 48, 94, 63, 132, 16, 111, 95, 84, 341, 975, 14, 40, 64, 27, 81, 139, 213, 63, 90, 1120, 8, 15, 3, 126, 2018, 40, 74, 758, 458, 604, 230, 436, 664, 582, 150, 251, 284, 308, 231, 124, 211, 4866, 225, 401, 370, 11, 101, 305, 139, 189, 17, 33, 88, 208, 193, 145, 1, 94, 73, 416, 918, 263, 28, 500, 538, 356, 117, 136, 219, 27, 176, 130, 10, 460, 25, 485, 18, 436, 65, 84, 200, 283, 118, 320, 138, 36, 416, 280, 15, 71, 224, 961, 44, 16, 401, 39, 88, 61, 304, 12, 21, 24, 283, 134, 92, 63, 246, 486, 682, 7, 219, 184, 360, 780, 18, 64, 463, 474, 131, 160, 79, 73, 440, 95, 18, 64, 581, 34, 69, 128, 367, 460, 17, 81, 12, 103, 820, 62, 116, 97, 10, 862, 70, 60, 1317, 471, 540, 208, 121, 890, 346, 36, 150, 59, 568, 614, 13, 120, 63, 219, 812, 2160, 1780, 99, 35, 18, 21, 136, 872, 15, 28, 170, 88, 4, 30, 44, 112, 18, 147, 436, 195, 320, 37, 122, 113, 6, 140, 8, 120, 305, 42, 58, 461, 44, 106, 301, 13, 408, 680, 93, 86, 116, 530, 82, 568, 9, 102, 38, 416, 89, 71, 216, 728, 965, 818, 2, 38,

121, 195, 14, 326, 148, 234, 18, 55, 131, 234, 361, 824, 5, 81, 623, 48, 961, 19, 26, 33, 10, 1101, 365, 92, 88, 181, 275, 346, 201, 206, 86, 36, 219, 320, 829, 840, 68, 326, 19, 48, 122, 85, 216, 284, 919, 861, 326, 985, 233, 64, 68, 232, 431, 960, 50, 29, 81, 216, 321, 603, 14, 612, 81, 360, 36, 51, 62, 194, 78, 60, 200, 314, 676, 112, 4, 28, 18, 61, 136, 247, 819, 921, 1060, 464, 895, 10, 6, 66, 119, 38, 41, 49, 602, 423, 962, 302, 294, 875, 78, 14, 23, 111, 109, 62, 31, 501, 823, 216, 280, 34, 24, 250, 1000, 162, 286, 19, 21, 17, 340, 19, 242, 31, 86, 234, 140, 607, 115, 33, 191, 67, 104, 86, 52, 88, 16, 80, 121, 67, 95, 122, 216, 548, 96, 11, 201, 77, 364, 218, 65, 667, 890, 236, 154, 211, 10, 98, 34, 119, 56, 216, 119, 71, 218, 1164, 1496, 1817, 51, 39, 210, 36, 3, 19, 540, 232, 22, 141, 617, 84, 290, 80, 46, 207, 411, 150, 29, 38, 46, 172, 85, 194, 36, 261, 543, 897, 624, 18, 212, 416, 127, 931, 19, 4, 63, 96, 12, 101, 418, 16, 140, 230, 460, 538, 19, 27, 88, 612, 1431, 90, 716, 275, 74, 83, 11, 426, 89, 72, 84, 1300, 1706, 814, 221, 132, 40, 102, 34, 858, 975, 1101, 84, 16, 79, 23, 16, 81, 122, 324, 403, 912, 227, 936, 447, 55, 86, 34, 43, 212, 107, 96, 314, 264, 1065, 323, 328, 601, 203, 124, 95, 216, 814, 2906, 654, 820, 2, 301, 112, 176, 213, 71, 87, 96, 202, 35, 10, 2, 41, 17, 84, 221, 736, 820, 214, 11, 60, 760.

### 2.3.3. FAMILIARES DE LOS NÚMEROS PRIMOS Y OTROS CON BUENA RELACIÓN

#### Números primos gemelos

Parientes de los números primos tenemos otros tipos, como, por ejemplo, los números primos gemelos, que son aquellos números primos que están separados por una distancia de dos.

Los primeros números primos gemelos son:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883).

El único número primo par es el 2, por lo que todos los primos gemelos son impares, como es evidente. Deben su nombre al matemático Paul Stäckel.

La conjetura de los primos gemelos nos dice que deben de ser infinitos, aunque no hay una demostración matemática que lo certifique.

Los primos gemelos más grandes conocidos son:

$$16.869.987.339.975 \times 2^{171.960} - 1 \text{ y } 16.869.987.339.975 \times 2^{171.960} + 1.$$

Esta parejita fue descubierta por los húngaros Zoltán Járai, Gábor Farkas, Timea Csajbok, Janos Kasza y Antal Járai. Cada número tiene la friolera de 51.779 dígitos.

El matemático Kurt Gödel estudió cómo los números, sobre todo los primos, pueden servir de indicadores de ideas, personas, lugares, de cualquier cosa; y esta indicación godeliana cimentaría la vía de una «aritmética» o «numeralización» del mundo.

#### Números primos de Mersenne

Los primos de Mersenne tienen la forma  $2^p - 1$ , donde  $p$  es un número primo.

Tan solo se conocen 42 primos de Mersenne, el primo de Mersenne más alto de todos,  $2^{25964951} - 1$ , tiene ocho millones de dígitos.

El hallazgo de primos de Mersenne requiere una enorme capacidad de computación, que puede lograrse a través de sistemas distribuidos. De hecho, los ocho últimos primos de Mersenne,

descubiertos desde 1997 a la actualidad, han sido localizados por GIMPS (The Great Internet Mersenne Prime Search).

Como ya hemos visto, estos números primos tan grandes son muy importantes para encriptar mensajes secretos, por lo que no representan pequeña cosa.

Aunque no tengan relación directa con los números primos, voy a hablar de otros números con relaciones especiales.

### Los números amigos

Se denomina de esta forma a dos números enteros positivos tales que la suma de los divisores del uno sea igual al otro, y viceversa (al 1 se le considera divisor propio, pero no al mismo número).

Los números amigos ya eran conocidos por los pitagóricos, a los que les atribuían propiedades místicas.

Un ejemplo es el par (220, 284), donde los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284. Mientras que los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220.

Otros pares de números amigos son: (6.232, 6.368), (17.296, 18.416) y (9.363.584, 9.437.056).

Los números amigos fueron ampliamente estudiados durante muchos años, entre otros por dos genios: el racionalista René Descartes y el matemático suizo Leonhard Euler.

### Número perfecto

Con este término se denomina a aquel número que es amigo de sí mismo. Es decir, aquel número entero que es igual a la suma de sus divisores (sin contarse a sí mismo).

Por ejemplo, el número 6 es perfecto porque sus divisores propios son 1, 2 y 3; y  $6 = 1 + 2 + 3$ . Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8.128.

El matemático griego Euclides descubrió una fórmula para calcular estos primeros cuatro números.

El quinto número perfecto consta de 8 dígitos: 33.550.336; el siguiente consta de 10 dígitos: 8.589.869.056.

No se conoce la existencia de números perfectos impares, y no se puede demostrar su existencia de forma matemática. Sin embargo, existen algunos resultados parciales. Si existe un número perfecto impar, debe ser mayor que  $10^{300}$ , debe tener al menos ocho factores primos distintos (y al menos 11 si no es divisible por 3). Uno de esos factores debe ser mayor que  $10^7$ , dos de ellos deben ser mayores que 10.000 y tres factores deben ser mayores que 100.

### Números narcisistas

Un número es narcisista cuando es igual a la suma de las potencias de sus dígitos. Por ejemplo, el 153 es un número narcisista porque:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

El 370 también lo es porque:

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

Los primeros números narcisistas son los siguientes:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 153 370 371 407 1634 8208 9474 54748  
92727 93084 548834 1741725 4210818 9800817 9926315  
24678050 24678051 88593477 146511208 4679307774  
32164049650 32164049651 40028394225 42678290603  
44708635679 49388550606 82693916578 94204591914

Al hablar del narcisista 153 no puedo resistirme a citar al maestro matemático Martin Gardner, y a su obra sobre numerología, *Los mágicos números del Doctor Matrix*.

Nos cuenta Gardner:

No es casual que, según se relata en el versículo 11 del último capítulo del Evangelio de San Juan, la red arrojada por Simón Pedro al mar de Tiberíades contuviera 153 peces. Es un número que posee importantes propiedades místicas. [...] Si mal no recuerdo —dijo—, San Agustín hace un complejo análisis numerológico para demostrar por qué había 153 peces. Sí, San Agustín parte del 10, el número de los mandamientos y símbolo del antiguo designio divino según la ley mosaica. Le suma 7, el número de los dones del espíritu y símbolo del nuevo designio. El 17 simboliza, pues, la unión de lo antiguo con lo nuevo. Luego suma los números del 1 al 17 y obtiene 153. [...] También es interesante observar que  $153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$  [...] El binario que corresponde a 153 es el palíndromo 10011001.

#### 2.4. HISTORIAS DEL NÚMERO PI ( $\pi$ )

No sería de recibo hablar de números y no hacer referencia al más famoso de ellos, el número PI. En las próximas páginas veremos su concepto, así como la lucha del hombre por tratar de obtener su valor, algo inalcanzable por ser infinito en sus decimales.

Vamos, pues, a conocer un poquito mejor este extraordinario número.

##### ¿Qué es PI?

Si tomamos una circunferencia, medimos su perímetro y lo dividimos entre su diámetro, obtenemos el número PI. Esto es así siempre, independientemente del tamaño de la circunferencia.

En 1706, el inglés William Jones fue el primero en utilizar el símbolo griego  $\pi$  (equivalente a nuestra «p») para denominar



el valor de esta división. El matemático suizo Leonhard Euler, en su obra *Introducción al cálculo infinitesimal*, publicada en 1748, le dio el espaldarazo definitivo.

PI no es un número exacto, es un número irracional. Aunque en el colegio hemos aprendido el valor de Pi como 3,1416, la realidad es que su número de cifras es infinito. Este valor se toma por aproximación. Desde tiempos antiguos se ha intentado calcular el valor de Pi, ya que es de vital importancia en campos tan distintos como la astronomía o la construcción; los intentos fueron muchos, vamos a citar varios de ellos.

En la Grecia antigua se empezó a consolidar Pi como uno de los más insignes enigmas a resolver.

Un coetáneo de Sócrates, Antifón, inscribió en el círculo un cuadrado, luego un octógono e ideó multiplicar la cantidad de lados hasta el momento en que el polígono obtenido ajustara así con el anillo (darle tantos lados al polígono que se pareciese lo más posible a un círculo).

Euclides también investiga este procedimiento de doblar el número de lados del polígono.

Otro genio, Arquímedes de Siracusa, reúne y amplía estos resultados. Prueba que el área de un círculo es la mitad del producto de su radio por la circunferencia y que la relación del perímetro al diámetro está comprendida entre 3,14084 y 3,14285.

## Valores de PI obtenidos antes de 1600

Matemático o lugar	Año	Valor
La Biblia (Reyes-I-7-23)	?	3
Papiro de Ahmes (Egipto)	1650 a. de C.	3,16
Tablilla de Susa (Babilonia)	1600 a. de C.	3,125
Bandhayana (India)	500 a. de C.	3,09
Arquímedes de Siracusa	(287-212 a. de C.)	entre 223/71 y 220/70
Liu Hui (China)	260	3,1416
Tsu Chung Chih	480	entre 3,1415926 y 3,1415927
Al-Kashi (Persia)	1429	3,1415926535897932
Franciscus Vieta (Francia)	(1540-1603)	3,1415926536

## Fechas relevantes

Fechas relevantes relacionadas con la historia de Pi son las siguientes:

- **Johan Heinrich Lambert** (1728-1777), matemático alemán, probó que Pi es irracional.
- **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) demostró que Pi es un número trascendental. Esto significa, entre otras cosas, que el problema de la cuadratura del círculo no tiene solución. Muchos intentos para determinar Pi con exactitud están relacionados con el clásico problema de la cuadratura del círculo: *Construir, utilizando únicamente regla y compás, un cuadrado de área igual a un círculo dado.*

- El matemático alemán Ludolph van Ceulen (1540-1610) pidió que, como epitafio, inscribiesen en su lápida las 35 cifras del número Pi que había calculado. Los alemanes llaman a Pi el «número ludofiano».
- **William Shanks**, matemático inglés, dedicó veinte años de su vida a la obtención de 707 decimales de Pi. En 1945 se descubrió que había cometido un error en el decimal 528 y a partir de este todos los demás eran incorrectos.
- En 1949 uno de los primeros ordenadores, el ENIAC, trabajando durante 70 horas, determinó Pi con 2.037 decimales.
- En 1959, ordenadores en Francia e Inglaterra calcularon más de 10.000 cifras de Pi.
- En 1961, **Daniell Shanks** (sin relación con William Shanks) y **Wrench** obtuvieron en 8 horas 23 minutos 100.265 cifras en un IBM 7090.
- En 1983, **Yoshiaki Tamura y Yasumasa Kanada**, en menos de 30 horas, en un HITAC M-280 H, obtuvieron 16.777.206 ( $2^{24}$ ) cifras.
- En julio de 1997 **Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi** obtuvieron 51.539.600.000 cifras, utilizando un HITACHI SR2201 con 1.024 procesadores. Estos japoneses alcanzaron los 206.158.430.000 en el año 1999.
- El propio Kanada llegó en 2002 a los 1.241.100.000.000 decimales de PI.

## Estadística sobre los decimales de PI

En la siguiente tabla, y a modo de curiosidad, figuran los datos estadísticos sobre la aparición de cada dígito en un número determinado de decimales de PI.

También como curiosidad, vemos en qué momento de PI se repiten los 10 dígitos seguidos:

Cantidad/dígito	100.000	1.000.000	6.000.000.000	50.000.000.000	200.000.000.000
0	9.999	99.959	599.963.005	5.000.012.647	20.000.030.841
1	10.137	99.758	600.033.260	4.999.986.263	19.999.914.711
2	9.908	100.026	599.999.169	5.000.020.237	20.000.136.978
3	10.025	100.229	600.000.243	4.999.914.405	20.000.069.393
4	9.971	100.230	599.957.439	5.000.023.598	19.999.921.691
5	10.026	100.359	600.017.176	4.999.991.499	19.999.917.053
6	10.029	99.548	600.016.588	4.999.928.368	19.999.881.515
7	10.025	99.800	600.009.044	5.000.014.860	19.999.967.594
8	9.978	99.985	599.987.038	5.000.117.637	20.000.291.044
9	9.902	100.106	600.017.038	4.999.990.486	19.999.869.180

La secuencia 0123456789 aparece por primera vez a partir de la cifra 17.387.594.880.

La 9876543210 aparece por primera vez a partir de la cifra 21.981.157.633.

### Memorizar decimales de PI

Es tal el fervor que crea el número PI que desde hace años se celebran campeonatos y récords del mundo para ver quién consigue memorizar mayor número de dígitos de PI.

En la actualidad, el Récord del Mundo lo tiene el japonés Hiroyuki Goto, que logró recitar de memoria la friolera de 42.195 decimales (la distancia en metros del Maratón). Hiroyuki estuvo recitando decimales de PI durante 26 horas (a casi un dígito cada dos segundos).

Un cuadrado de área igual a un círculo dado.

Número de dígitos memorizados	Persona	Año
930	Nigel Hodges (Gran Bretaña)	1973
1.111	Fred Graham (Canadá)	1973
1.210	Timothy Pearson (Gran Bretaña)	1973
1.505	Edward C. Berberich (USA)	1974
3.025	Michael John Poultney (Gran Bretaña)	1974
4.096	Simon Plouffe (Canadá)	1975
5.050	Michael John Poultney (Gran Bretaña)	1977
6.350	David Sanker (USA)	1978
10.000	David Sanker (USA)	1978
10.625	David Fiore (USA)	1979
11.944	Hans Eberstark (Austria)	1979
15.151	Hideaki Tomoyori (Japón)	1979
15.186	Creighton Carvello (Gran Bretaña)	1979
20.000	Hideaki Tomoyori (Japón)	1979
20.013	Creighton Carvello (Gran Bretaña)	1980
31.811	Rajan Mahadevan (India)	1985
40.000	Hideaki Tomoyori (Japón)	1987
42.195	Hiroyuki Goto (Japón)	1995

Año	100.000	200.000	300.000	400.000	500.000
1973	1000	1000	1000	1000	1000
1974	1000	1000	1000	1000	1000
1975	1000	1000	1000	1000	1000
1976	1000	1000	1000	1000	1000
1977	1000	1000	1000	1000	1000
1978	1000	1000	1000	1000	1000
1979	1000	1000	1000	1000	1000
1980	1000	1000	1000	1000	1000
1981	1000	1000	1000	1000	1000
1982	1000	1000	1000	1000	1000
1983	1000	1000	1000	1000	1000
1984	1000	1000	1000	1000	1000
1985	1000	1000	1000	1000	1000
1986	1000	1000	1000	1000	1000
1987	1000	1000	1000	1000	1000
1988	1000	1000	1000	1000	1000
1989	1000	1000	1000	1000	1000
1990	1000	1000	1000	1000	1000
1991	1000	1000	1000	1000	1000
1992	1000	1000	1000	1000	1000
1993	1000	1000	1000	1000	1000
1994	1000	1000	1000	1000	1000
1995	1000	1000	1000	1000	1000
1996	1000	1000	1000	1000	1000
1997	1000	1000	1000	1000	1000
1998	1000	1000	1000	1000	1000
1999	1000	1000	1000	1000	1000
2000	1000	1000	1000	1000	1000
2001	1000	1000	1000	1000	1000

En los actualizados, el Record del Mundo lo tiene el tunecino Suleyman al-Harbi que logró recorrer 36 metros de Maratón en 2:12:49 (de distancia en metros del Maratón). Hunyadi Áron recorrió 36 metros de Pk. durante 26 horas (o casi un día) sin dormir.

## CAPÍTULO 3

### Técnicas y trucos para calcular mejor

En las siguientes páginas se presentan algunas técnicas para multiplicar más rápidamente, o para dividir por una cifra comprendida entre 10 y 99. Se ha añadido una sección dedicada a los errores comunes al realizar cálculos mentales.

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

##### La importancia del cálculo mental

EN nuestra sociedad todo se reduce a representaciones numéricas, a estadísticas. Con esta evidente premisa es fácil deducir que una formación numérico-lógica aportará una visión correcta para la vida práctica que no da ninguna otra disciplina.

Desarrollar nuestra capacidad de cálculo no solo es de importancia para el aprendizaje de las matemáticas, sino, y sobre todo, para desarrollar aspectos tales como la memoria, la concentración, la atención, la agilidad mental, etc.

Un correcto desarrollo de la capacidad de cálculo da a la persona la posibilidad de valorar de forma adecuada todo este mundo repleto de números, estadísticas, porcentajes, proporciones, descuentos y operaciones, para interpretar en definitiva todo ese lenguaje engañoso que se esconde tras las cifras.

Pienso que la rapidez y exactitud en la realización de cálculos mentales más o menos complejos, producto del buen entrenamiento, no son la conclusión más importante de su aprendizaje. La seguridad psicológica y el desarrollo de ciertas formas de imaginación matemática son resultados más importantes que los anteriores.

Estudios psicológicos hechos con alumnos demuestran la familiarización que una persona con cierta habilidad para el cálculo tiene con los números, algo por otra parte evidente, recurriendo a combinaciones y relaciones entre ellos cada vez más complejas. No olvidemos que en países donde se trabaja mucho el cálculo desde temprana edad, como pueden ser Japón o China, los alumnos están a la cabeza mundial en cuanto a formación matemática se refiere.

Un buen manejo del cálculo nos permite un correcto desarrollo de la capacidad lógico-deductiva. Debería cuidarse en la enseñanza del buen dominio de las distintas operaciones y la razón expresada numéricamente, ya que nunca una materia va a ser tan importante para la vida de cada persona.

### No hay caminos reales

Para mejorar nuestra capacidad de cálculo se requiere práctica. Nadie nace aprendido, y practicar cualquier faceta implica mejoría. En las sociedades modernas estamos muy habituados, demasiado para mi gusto, a utilizar la máquina para todo. Esta utilización abusiva lleva a no desarrollar las capacidades mentales, y en el caso del cálculo mental es algo obvio, ya que mucha gente utiliza para todo la calculadora, perdiendo así la posibilidad de desarrollar estas habilidades.

El gran matemático Euclides fue uno de esos personajes que han pasado a la Historia por su contribución sin igual. Fue autor de la obra sobre geometría *Los Elementos*, a la cual debe su immortalidad, y la cual rivaliza, por su difusión, con los libros más famosos de la literatura universal.

Se cuenta que el rey egipcio Ptolomeo I (306-283 a. de C.) empezó a leerlo, pero se cansó enseguida porque le costaba mucho trabajo seguir los largos y minuciosos razonamientos. Mandó llamar a Euclides y le preguntó si existía alguna vía más corta y menos trabajosa. Euclides respondió que no, que en matemáticas no hay caminos reales.

Cierto es que tampoco hay caminos reales para el cálculo, pero sí que hay técnicas que nos pueden ayudar, y con motivación y práctica conseguiremos mejorar nuestro nivel. Además, no es necesario dedicarle demasiado tiempo, es más, se puede ejercitar mientras estamos en la cola de la panadería, del médico, o al retirar un producto en el supermercado. Cualquier situación es buena y sin coste alguno en tiempo.

En las siguientes páginas expondré las mejores técnicas y los mejores entrenamientos, aplicados por mí mismo, para dominar el arte de calcular y llegar a ser una «calculadora humana».

### El camino para convertirse en un buen calculador

En este capítulo veremos las cuatro operaciones fundamentales: sumar, restar, multiplicar y dividir. También las potencias, raíces cuadradas, cúbicas, la técnica del calendario para cualquier fecha y para un año concreto. Porcentajes, que tanto pululan en nuestra sociedad. También ejercicios de gimnasia mental, como algún truco numérico, o la resolución de cuadrados mágicos.

Daré una serie de consejos y pautas para mejorar la habilidad operando, así como ejercicios prácticos que facilitarán, mediante un adecuado entrenamiento, un mayor dominio de los números y del cálculo mental. Y, como repetiré en más de una ocasión, no olvidemos nunca una máxima: «No solo es importante dar el resultado preciso, también lo es hacer estimaciones y aproximaciones».

Antes de entrar en las distintas operaciones, quiero resaltar la importancia de jugar con números. Yo aprendí a calcular jugando a las cartas a edad muy temprana, de esta forma veía el número en un contexto de juego, de juguete. Sería muy aconsejable que los niños jugasen a todo ese tipo de cosas que llevan implícito el concepto de número, de contar. Desgraciadamente, en la sociedad moderna se tiende al uso abusivo de la calcula-

dura y de los juegos electrónicos, que poco o nada estimulan la capacidad de cálculo y de ejercicio mental.

### 3.2. SUMAR

La suma es la operación aritmética básica y, por lo tanto, la más importante de todas para el cálculo puro, ya que en ella no se revelan como en otras operaciones las propiedades de los números.

A la hora de dar un primer consejo para mejorar la velocidad y precisión en las sumas, diría que lo más importante es la repetición. Repetir ejercicios constantemente nos ayudará a familiarizarnos con la adición y poco a poco se ganará velocidad y soltura. No dudar en ningún momento de la vida diaria en practicar. Situaciones hay muchas: juguetear con las matrículas de los coches sumando dígito a dígito, tratar de sumar los productos en un supermercado o practicar con un mazo de cartas.

Adquirir cierta destreza sumando es clave para poder realizar otro tipo de cálculos con soltura. Por ello, es la operación más importante y que más debemos tratar de mejorar.

#### Mecanismo para sumar mejor

Siempre he considerado que era más sencillo sumar de **izquierda a derecha** y no en la forma que nos han enseñado (de derecha a izquierda). Recuerdo cómo en el colegio siempre terminaba de hacer las sumas mientras mis compañeros seguían haciendo los cálculos.

Poder llegar a hacer sumas mentales a una considerable velocidad no es producto de la magia; practicando adecuadamente puedes llegar a mejorar mucho tu actual capacidad, todo es cuestión de proponérselo. Y ya sabemos que las numerosas si-

tuciones en que nos enfrentamos a los números bien merecen un esfuerzo.

Las ventajas de hacer las sumas de izquierda a derecha son fundamentalmente dos: por un lado, no tenemos que llevar en cuenta el resultado de las unidades. Y por otra parte, aunque no diésemos el resultado correcto, siempre será mucho más fácil dar una aproximación si lo hacemos de izquierda a derecha. Y aprovecho para incidir en la importancia que tiene hacer estimaciones o aproximaciones (aunque no calculemos el resultado exacto).

Vamos a dar una breve explicación sobre cómo podemos sumar dos dígitos más dos dígitos, haciéndolo por este método.

Imaginemos que queremos sumar  $47 + 32$ .

La mejor estrategia será sumar  $47 + 30 = 77$ , y a ello  $+ 2$  ( $77 + 2 = 79$ ). Es decir, aproximamos siempre uno de los sumandos a número exacto para que resulte más fácil y, por supuesto, hacemos la suma de izquierda a derecha.

Para sumarlo sigue siempre el mismo proceso mental, nunca lo varías, de esta forma irás logrando velocidad sin dudar en la forma de hacerlo. No en vano, una de las «obligaciones» para ser calculista ultrarrápido, al menos en mi caso, es hacer las operaciones siempre de la misma forma.

$$64 + 48$$

$$64 + 40 + 8$$

$$104 + 8$$

$$112.$$

Insisto en que la clave de mejorar en la velocidad sumando es ponerlo en práctica, pero no solo en los ejemplos de este libro, sino en cualquier situación que se nos plantea.

Trata de sumar estos números según nuestro método:

- $53 + 24$

- $62 + 35$

- 46 + 44
- 47 + 22
- 33 + 16
- 85 + 33
- 46 + 42
- 53 + 17
- 72 + 45
- 89 + 63

La estrategia para sumar números de tres dígitos es la misma que la que hemos utilizado para sumar números de dos dígitos. La cuestión es ir dando pasos en la suma e ir reduciendo su magnitud.

Por ejemplo, vamos a sumar 628 + 437.

Lo que debemos hacer es tener en cuenta que 437 es igual a 400 + 30 + 7 e ir sumando estas partes por orden:

$$628 + 400 = 1.028$$

$$1.028 + 30 = 1.058$$

$$1.058 + 7 = 1.065$$

Si tenemos que sumar 437 + 156; 156 = 100 + 50 + 6.

$$437 + 100 = 537$$

$$537 + 50 = 587$$

$$587 + 6 = 593$$

Practica ahora con estas sumas:

- 428 + 362
- 735 + 226
- 253 + 174
- 683 + 522
- 543 + 381
- 246 + 238

- 987 + 435
- 654 + 321
- 564 + 353
- 843 + 625

Todos los problemas de sumas pueden ser resueltos por este método, la clave está en practicarlo muchas veces e, insisto, en hacerlo siempre de la misma forma, tomar un hábito de cálculo sin necesidad de pensar en cómo hacerlo. Buscar en definitiva, que sea mecánico.

16 - 81 - 80 - 22 - 24 - 38 - 82 - 18 - 21 - 01 - 8 - 5 - 1

### Un buen entrenamiento: las series de Fibonacci

Uno de mis juegos favoritos desde que era un niño era el de las series numéricas de Fibonacci (cuyo concepto ya conocemos), algo que por aquel entonces desconocía que existiera con ese nombre. Este ejercicio se puede realizar mentalmente y en cualquier momento. Por ejemplo, mientras vamos en el autobús. La serie consiste en tomar dos números y hacer que el siguiente sea la suma de los dos anteriores.

### Ejercicios

Aunque no sean números de Fibonacci propiamente dichos, haz que las siguientes secuencias numéricas sigan su lógica:

- 8 - 14 - 22 - 36 - 58... (8 + 14 = 22; 14 + 22 = 36; 22 + 36 = 58...)
- 7 - 15...
- 9 - 17...
- 16 - 25...
- 11 - 14...

Si al principio te notas atascado, es normal. Si te lo propones, no tardarás en ganar velocidad.

Otra forma muy efectiva de practicar las sumas es ir de abajo hacia arriba sumando. Yo mismo hacía mucho este «juego» y realmente se puede practicar mientras esperamos en el banco, en el médico o en la cola del cine. De esta forma mantenemos la mente entretenida, eliminando el estrés de la espera, y a la vez hacemos gimnasia mental, ¿qué más se puede pedir?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots ?$$

Ya sumados sería:

$$1 - 3 - 6 - 10 - 15 - 21 - 28 - 36 - 45 - 55 - 66 - 78 - 91\dots$$

Podemos hacerlo hasta el número que queramos y, practicándolo, cada vez llegaremos a un número más alto.

Otro ejercicio que desde pequeño hago, y que también es muy útil para ganar velocidad, es el de doblar números mentalmente. Me explico: pensamos en un número, por ejemplo el 7, y lo vamos doblando mentalmente hasta donde podamos o nos apetezca.

$$7 - 14 - 28 - 56 - 112 - 224 - 448 - 896 - 1792, \text{ etc.}$$

Prueba a doblar mentalmente los siguientes:

4

13

41

Este tipo de ejercicios mentales, que se pueden realizar de forma sencilla en cualquier tiempo muerto, nos llevarán a tener una gran agilidad de cálculo.

### 3.3. RESTAR

Restar sería quitar a una cantidad otra. Es decir, lo opuesto a sumar.

Dado que restar no deja de ser «sumar al revés», potenciando la habilidad sumando se va a mejorar a la vez la velocidad restando. De todas formas, a continuación expongo las técnicas que yo aplico en la resta (aunque muchas veces, cuando resto, no sé si estoy restando o haciendo la suma al revés, el proceso es muy mecánico).

Para la mayoría de las personas, restar es más difícil que sumar, ya que la tendencia natural es a sumar, pero si continuamos ejercitando de izquierda a derecha y continuamos simplificando los cálculos, podemos llegar a convertirlo en similar.

#### Restas de dos dígitos

$$73 - 24$$

Lo primero que haremos será reducir la suma. Esto es:

$$73 - (20 + 4)$$

$$73 - 20 = 53$$

$$53 - 4 = 49$$

Si nos encontramos ante la resta  $77 - 39$ , podríamos usar dos tipos de estrategias y elegir la que nos resulte más fácil:

$$77 - (30 + 9) \text{ ó } (40 - 1)$$

$$a) 77 - 30 = 47$$

$$47 - 9 = 38$$

b) Puedes hacerlo por la otra vía:

$$77 - 40 = 37$$

$$37 + 1 = 38$$

Cuando lleves unos días de entrenamiento, empezarás a notar que cada vez lo haces con más soltura y rapidez.

Prueba con estos ejercicios:

- 73 - 26
- 85 - 43
- 94 - 38
- 66 - 54
- 39 - 16
- 87 - 44
- 69 - 33
- 95 - 47
- 86 - 29
- 51 - 22

### Restas de tres dígitos

Las restas con tres dígitos son similares, lo único que hay que mantener es la técnica simplificada.

Si restamos 936 - 424 (400 + 20 + 4)

$$936 - 400 = 536$$

$$536 - 20 = 516$$

$$516 - 4 = 512$$

Si la cantidad que se sustrae se approxima a la centena, podemos optar por la siguiente vía:

$$687 - 398 (400 - 2)$$

$$687 - 400 = 287$$

$$287 + 2 = 289$$

Prueba con estos:

- 756 - 492 =
- 838 - 424 =

- 376 - 254 =
- 668 - 393 =
- 157 - 74 =
- 980 - 259 =
- 467 - 235 =
- 777 - 298 =
- 843 - 294 =
- 558 - 327 =

### Ejercicios

Un ejercicio muy interesante que potencia la resta y, de paso, refuerza la suma, es el de buscar el complementario a 100 de cualquier número de dos cifras.

Por ejemplo: el complementario a 100 de 73 es el 27, porque  $100 - 73 = 27$ ; el de 41 es 59, porque  $100 - 41 = 59$ .

Busca el complementario de los siguientes, practicándolo acabarás mecanizando el proceso:

83

47

66

39

82

44

93

23

55

46

### 3.4. MULTIPLICAR

Una vez trabajados los apartados anteriores, de suma y resta, habrás adquirido el hábito de hacer los cálculos de izquierda a derecha.

a derecha y, de esta forma, te resultará más fácil la técnica de multiplicar.

### Método de izquierda a derecha

Imagina que tenemos que multiplicar  $83 \times 7$ . Mi propuesto es hacerlo de la siguiente forma:

$$83 \times 7 = 80 \times 7 + 3 \times 7$$

$$80 \times 7 = 560$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$560 + 21 = 581$$

(Para multiplicar  $80 \times 7$  hacemos  $7 \times 8$  y añadimos un 0).

Siempre hay que descomponer la multiplicación en operaciones más sencillas.

$$42 \times 8 = 40 \times 8 + 2 \times 8$$

$$320 + 16 = 336$$

### Ejercicios

Prueba tú con estas multiplicaciones:

$$64 \times 3 =$$

$$85 \times 6 =$$

$$38 \times 4 =$$

$$52 \times 6 =$$

$$27 \times 8 =$$

$$64 \times 3 =$$

$$83 \times 7 =$$

$$41 \times 9 =$$

$$63 \times 6 =$$

$$37 \times 5 =$$

A medida que vayas ejercitándote lo verás más fácil.

### Multiplicaciones con tres cifras

Una vez que consigas hacer mentalmente con cierta soltura las multiplicaciones de dos dígitos, hacerlas de tres dígitos no te resultará mucho más complicado. Vamos a ver algún ejercicio:

$$420 \times 7$$

Descomponemos el 420 en  $400 + 20$  y nos quedaría

$$(400 + 20) \times 7 = 400 \times 7 + 20 \times 7$$

$$400 \times 7 = 2.800$$

$$20 \times 7 = 140$$

$$2.800 + 140 = 2.940$$

Si el número de tres cifras no termina en cero, hacemos una descomposición más, por ejemplo:

$$346 \times 7$$

$$(300 + 40 + 6) \times 7$$

$$300 \times 7 = 2.100$$

$$40 \times 7 = 280$$

$$6 \times 7 = 42$$

y ahora sumamos:  $2.100 + 280 = 2.380$

$$2.380 + 42 = 2.422$$

Vamos con este:  $234 \times 9 =$

$$(200 + 30 + 4) \times 9$$

$$200 \times 9 = 1.800$$

$$30 \times 9 = 270$$

$$4 \times 9 = 36$$

$$1.800 + 270 + 36 = 2.106$$

En este tipo de ejercicios corremos el riesgo de olvidarnos de la primera operación parcial; por ello, es importante que susurremos varias veces el primer cálculo, de esta forma nos quedará grabado.

Método de izquierda a derecha

Sumar los dígitos de los resultados entre sí

## Ejercicios

$$612 \times 6 =$$

$$248 \times 7 =$$

$$373 \times 8 =$$

$$421 \times 5 =$$

$$636 \times 8 =$$

$$134 \times 7 =$$

$$643 \times 4 =$$

$$834 \times 6 =$$

$$211 \times 9 =$$

$$745 \times 3 =$$

## La anécdota de Gauss

Un ejemplo de lo que es la multiplicación lo ilustra una anécdota que le sucedió al genial matemático alemán Karl F. Gauss:

Tenía Gauss unos diez años y estaba en clase con sus compañeros cuando al profesor se le ocurrió una «brillante» idea para poder escribir una carta a su amada. Por ello, les puso el siguiente ejercicio para que lo realizaran:

Sumar todos los números del 1 al 100!

Tarea suficiente parecía esta para que el maestro tuviera tiempo de realizar «su labor». Sin embargo, no contaba con que en esa clase había uno de los más grandes genios que die-

ron las matemáticas, dotado ya de unas cualidades extraordinarias a edad temprana.

Gauss pensó cómo podría sumar los 100 primeros números sin necesidad de realizar la ardua tarea de sumarlos uno a uno, cosa que ya estaban haciendo sus compañeros.

Al cabo de unos pocos segundos Gauss llevó la respuesta a su maestro que, según se cuenta, quedó anonadado por tan rápida respuesta, pero más aún cuando vio que el resultado era correcto.

¿Cómo lo hizo Gauss?

«Simplemente» pensó que:

$$100 + 1 = 101$$

$$99 + 2 = 101$$

$$98 + 3 = 101$$

$$97 + 4 = 101$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$51 + 50 = 101$$

Es decir, todo suma 101 y estamos utilizando todos los números del 1 al 100.

Como todo suma 101 y se repite un total de 50 veces, tan solo hay que multiplicar  $101 \times 50$  para obtener la suma de los números del 1 al 100.

$$Y 101 \times 50 = 5.050.$$

De esta forma, Gauss resolvió el problema y dejó boquiabierto a su profesor. Gauss había utilizado el «cerebro».

Multiplicar es sumar repetidas veces. De hecho, con los ejercicios de multiplicación que os propongo estaremos practicando también la suma.

## Método cruzado de multiplicación

En julio de 2002 tuve la fortuna de homologar por primera vez mi Récord Guinness en velocidad multiplicando. Este nuevo récord fue realizado en la localidad alemana de Flensburg durante una competición con otros calculistas mentales. Para ello, conseguí multiplicar dos números de ocho dígitos cada uno en 56,50 segundos. Este récord volví a batirlo en otras tres oportunidades, siendo mi actual Récord Mundial de 38 segundos.

A continuación voy a explicar la técnica que llevo a cabo para desarrollar esta multiplicación, basada en sucesivas multiplicaciones y sumas cruzadas. Veámoslo con un ejemplo:

Vamos a multiplicar  $54 \times 73$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 73 \\ \hline 3.942 \end{array}$$

Lo que hago es lo siguiente:

- 1)  $3 \times 4 = 12$ , coloco un 2 y llevamos 1.
- 2)  $1 + 3 \times 5 = 1 + 15 = 16$ ;  $16 + 7 \times 4 = 16 + 28 = 44$ , coloco un 4 y llevamos 4.
- 3)  $4 + 7 \times 5 = 4 + 35 = 39$ , y coloco un 39.

Ya hemos terminado; si lo practicas con papel y lápiz, comprobarás que no es tan difícil.

Si lo hacemos con tres dígitos por tres dígitos, la cosa se complica un poquito. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 258 \times 847 \\ 258 \\ \times 847 \\ \hline 218.526 \end{array}$$

Pasos a seguir:

- 1) Multiplico  $7 \times 8$ , coloco un 6 llevamos 5.
- 2)  $5 + 4 \times 8 = 5 + 32 = 37$ ;  $37 + 7 \times 5 = 37 + 35 = 72$ , coloco un 2 y llevamos 7.
- 3)  $7 + 8 \times 8 = 7 + 64 = 71$ ;  $71 + 4 \times 5 = 71 + 20 = 91$ ;  $91 + 7 \times 2 = 91 + 14 = 105$ , coloco un 5 y llevamos 10.
- 4)  $10 + 8 \times 5 = 10 + 40 = 50$ ;  $50 + 4 \times 2 = 50 + 8 = 58$ , coloco un 8 y llevamos 5.
- 5)  $5 + 8 \times 2 = 5 + 16 = 21$ , coloco el 21, y ya terminamos la operación.

Como se puede ver, voy cruzando las multiplicaciones, corriendo un lugar a cada paso que se va dando.

Para poder desarrollar este método multiplicativo se necesita mucha rapidez y agilidad sumando, ya que combina las multiplicaciones con sumas sucesivas. Sin embargo, este método cuenta con la ventaja de que solo se requiere una memorización a «corto plazo» (en mi caso particular muy útil porque me baso en la velocidad sumando, utilizando la memoria en menor medida).

También es cierto que se requiere otra cualidad, que es básica: una gran concentración.

Un gran calculista de mediados de siglo, el holandés Win Klein, conseguía acortar el número de pasos de este método, gracias a que se sabía de memoria la tabla de multiplicar del 1 al 100 (algo que conocían la mayor parte de calculistas).

Propongo que se ejerzte esta técnica empezando con multiplicaciones de dos dígitos. Prueba con las siguientes:

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 58 \\ \hline 72 \\ \times 14 \\ \hline \end{array}$$

En julio de 2002 convivió en nuestro país la moneda euro con la peseta. Los cambios eran 150 pesetas por euro.

### 3.5. DIVIDIR

Con mucha frecuencia nos encontramos en la vida diaria con divisiones. ¿Quién no ha ido a cenar con amigos y al final del banquete ha tenido que dividir la cuenta entre el número de personas para ver a cuánto toca cada una?

No es la división una operación fácil de resolver con exactitud de forma mental. Dado que es la operación inversa a la multiplicación, si mejoramos en esta también obtendremos mayor soltura para dividir.

#### Técnica para dividir

Voy a explicar la técnica que mejores resultados me ha dado a la hora de efectuar divisiones.

Imagina que tenemos que dividir 465 entre 8 ( $465 : 8$ ).

Lo primero que debemos hacer es una valoración del posible resultado.

Dado que  $8 \times 10$  es 80; y  $8 \times 100$  es 800, la respuesta va a ser un número de dos cifras (un número entre 10 y 100).

Ahora recurrimos a nuestra memorizada tabla de multiplicar de un dígito por un dígito, y vemos que  $8 \times 5$  es 40 (400 es menor que 465), y que  $8 \times 6$  es 48 (480 es mayor que 465). Como el resultado tiene dos cifras o dígitos, va a ser un número entre 50 y 60.

Ya tenemos hecha la aproximación, ya tenemos algo muy importante, no lo olvidemos.

Ahora restamos  $465 - 400 = 65$ , y lo dividimos entre 8;  $65 : 8 = 8$  (con un resto de 1).

Por lo tanto, nuestra respuesta será 58 y 1/8.

### Ejercicios

Practica con las siguientes divisiones:

$$638 : 7 =$$

$$428 : 6 =$$

$$335 : 9 =$$

$$756 : 5 =$$

$$418 : 8 =$$

Una excelente oportunidad para ejercitarse con la división es la de pasar euros a pesetas según el método que en las próximas páginas voy a exponer y que espero pueda ayudarte en nuestra convivencia con la nueva moneda.

#### Practicando con el euro

Transcurridos ya cuatro años desde la aparición del euro, no dejan de salir informes de que a los españoles nos está costando mucho olvidarnos de la añorada peseta. Incluso en encuestas hechas a pie de calle más del 50% de los españoles consideran que jamás podrán olvidarse de ella y que siempre la tomarán como referencia.

La verdad es que no es nada fácil, hemos convivido toda nuestra vida con una moneda con un valor determinado y que de la noche a la mañana se reduzca su valor numérico en más de 166 veces hace saltar por los aires todo el mecanismo mental asociado a algo tan habitual como es la moneda de cambio.

En mi cabeza hago muchos cálculos mentales relacionados con la economía y, aunque me esfuerzo constantemente por olvidarme del cambio de euros a pesetas, reconozco que a veces necesito tomar como referencia la antigua moneda.

De todas formas, creo que el hecho de poder hacer los cálculos es una ayuda muy importante no solo para orientarnos,

sino también para acercarnos mucho más al concepto de euro y superar más rápidamente el valor de la peseta.

A continuación voy a mostrar cómo personalmente transformo euros a pesetas, un método con el que se puede alcanzar cierta mecánica y dominio de las situaciones. Una técnica que, dada la cantidad de veces en las que podremos ponerlo en práctica, nos puede servir, además de para hacer menos traumático el cambio de moneda, también para ejercitarse en el cálculo mental. No desaprovechamos, pues, la oportunidad.

Para ello, por supuesto, es necesario perder el miedo a calcular y practicarlo de forma tranquila y relajada. Nunca hay que partir de la idea de que «nunca voy a poder calcularlo», porque es el primer paso, y decisivo, para el fracaso.

### Cómo paso mentalmente de euros a pesetas

Sabemos que la conversión de euro a peseta se hizo de tal forma que  $1\text{ €} = 166,386$  pesetas.

Para hacerlo mentalmente, vamos a olvidarnos de ese valor concreto y vamos a limitarnos al aproximado de  $6\text{ €} = 1.000$  pesetas.

Al fin y al cabo, el concepto de peseta ya no existe, solo en nuestras mentes, y por lo tanto la exactitud no es relevante.

Como  $6\text{ €}$  son mil pesetas, dominar la tabla del 6 es fundamental.

$$6 \times 1 = 6$$

$$6 \times 2 = 12$$

$$6 \times 3 = 18$$

$$6 \times 4 = 24$$

$$6 \times 5 = 30$$

$$6 \times 6 = 36$$

$$6 \times 7 = 42$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$6 \times 9 = 54$$

$$6 \times 10 = 60$$

$$6 \times 11 = 66$$

$$6 \times 12 = 72$$

$$6 \times 13 = 78$$

$$6 \times 14 = 84$$

$$6 \times 15 = 90$$

$$6 \times 16 = 96$$

### PASEMOS DE EUROS A PESETAS, QUE VA A SER LO MÁS IMPORTANTE

Por debajo de un euro, es decir, céntimos de euro (dividimos entre 6 y multiplicamos por 10).

Ejemplos:

12 céntimos de euro, ¿cuántas pesetas son?

Muy sencillo, dividimos 12 entre 6;  $12 : 6 = 2$ , y le añadimos un cero = 20 pesetas.

12 céntimos de euro son 20 pesetas.

Y 27 céntimos de euro?

$27 : 6 = 4,5$ . En este caso no añadimos cero, sino que movemos un lugar la coma = 45 pesetas.

Si nos agobia la idea de los decimales y lo queremos hacer más sencillo, llevamos el 27 al múltiplo de 6 más cercano, en este caso el 30 (o el 24 por abajo);  $30 : 6 = 5$ , y añadimos el cero 50, por tanto 27 céntimos de euro está muy cerca de 50 pesetas.

Y 73 céntimos de euro?

Llevamos al múltiplo de 6 más cercano, o sea, 72, dividimos entre 6 = 12 y añadimos el cero = 120 pesetas.

*¿48 céntimos?*

$48 : 6 = 8$ ; y añadiendo un cero = 80 pesetas.

*¿Y si nos encontramos con más de un euro?*

El sistema es el mismo con alguna lógica modificación.

Familiaricémonos con las equivalencias hasta 6 euros:

$1 \text{ €} = 166 \text{ ptas.}$

$2 \text{ €} = 333 \text{ ptas.}$

$3 \text{ €} = 500 \text{ ptas.}$

$4 \text{ €} = 666 \text{ ptas.}$

$5 \text{ €} = 833 \text{ ptas.}$

$6 \text{ €} = 1.000 \text{ ptas.}$

Sabemos que la conversión entre euros y pesetas es:

**Ejemplos**

*¿25 euros cuántas pesetas son?*

Dividimos entre 6 y la cantidad será en miles, por último añadimos el resto.

$25 : 6 = 4.000 + 1 \text{ €}$ , que nos queda de resto.

O sea, 4.166 pesetas.

*¿Y 52 euros?*

$52 : 6 = 8.000 + 4 \text{ €}$ , que son 666 pesetas.

Por tanto, 8.666 pesetas.

*¿Y 39 euros?*

$39 : 6 = 6.000 + 3 \text{ €} = 6.500 \text{ pesetas.}$

*¿Y con cientos de euros?*

Pasemos ahora a manejar cantidades superiores a los 100 euros. Es muy sencillo, tan solo tendremos que dividir las dos primeras cifras entre 6 y añadir un cuarto cero.

*¿Cuántas pesetas son 480 euros?*

Si no queremos dividir el 480, hagámoslo con las dos primeras cifras;  $48 : 6 = 8$  (48 euros serían 8.000 pesetas), pero ahora añadimos un cero más, o sea, 80.000 pesetas.

*¿Y 310 euros?*

Llevamos el 31 al múltiplo más cercano de 6, esto es, a 30.

$Y 30 : 6 = 5$ , por lo que 300 serán 50.000 pesetas, y 310 serán 50.000 pesetas + 10 euros.

O sea, que 30 euros son 5.000 pesetas.

Una vez que tengamos soltura, al ver 310 veremos rápidamente que está por encima de 50.000 pesetas.

*¿Hablemos de miles de euros?*

Sabiendo que 6.000 euros son 1.000.000 de pesetas, enseñada nos daremos cuenta de que cuando los euros aparezcan en miles la cosa se pone «millonaria».

*¿Cuánto son 18.000 euros?*

Muy sencillo, dividimos  $18 : 6 = 3$ , añadimos los 3 ceros que nos quedan de 18.000; 3.000, y los otros 3 ceros de siempre; o sea, 18.000 euros son aproximadamente 3.000.000 de pesetas.

Trata de resolver con nuestro razonamiento si las siguientes:

¿Y cuánto 55.000 euros?

$55 : 6 = 9$ , esto es, 9 millones de pesetas (y aún sobran 1.000 euros).

Si consigues manejar con soltura estos cálculos (te aconsejo que practiques hasta dominarlo), te será mucho más fácil orientarte hasta que «cambies el chip» y tu mente acepte el euro sin mirar a la peseta.

Pero, insisto, es fundamental perder el miedo y tratar a los números como amigos, procurando evitar el bloqueo psicológico que con tanta frecuencia producen.

### 3.6. POTENCIAS (NÚMEROS AL CUADRADO)

#### Elevar números al cuadrado

Dentro de las potencias resulta muy interesante la técnica para elevar los números al cuadrado. Y elevar un número al cuadrado es multiplicarlo por sí mismo (ej.  $2^2 = 2 \times 2 = 4$ ).

La técnica que paso a explicar es un buen ejercicio de cálculo, pues hay que realizar varios pasos, siendo además muy agradecido, cuando lo hagas varias veces te va a sorprender la agilidad que empiezas a adquirir.

Estas cosas se entienden mejor con un buen ejemplo, así que vamos al grano:

Vamos a elevar el número 96 al cuadrado.

$$96^2$$

Es mucho más fácil elevar 100 al cuadrado que 96, por lo tanto, procederemos de la siguiente forma:

1. 96 es 4 menos que 100, entonces vamos a restar 4 al número que queremos elevar al cuadrado ( $96 - 4 = 92$ ).
2. Multiplicamos  $92 \times 100 = 9.200$ , y ya tenemos la primera parte de la respuesta.

3. La diferencia entre 100 y 96 ya vimos que es 4. Pues ahora elevamos 4 al cuadrado, y  $4 \times 4 = 16$ .
4. Y hacemos la suma de estos dos últimos pasos:  $9.200 + 16 = 9.216$ .

Por lo tanto,  $96^2 = 9.216$ .

#### Ejemplo 2

Vamos a elevar al cuadrado el 32.

Aproximamos a la decena más cercana (30) y calculamos la diferencia:  $32 - 30 = 2$ .

$$32 + 2 = 34.$$

$$34 \times 30 = 1.020.$$

$$2^2 = 4.$$

$$\text{Y, por último, } 1.020 + 4 = 1.024.$$

$$32^2 = 1.024.$$

#### Ejemplo 3

Ahora uno un poco más complicado:  $66^2$ .

$$70 - 66 = 4.$$

$$66 - 4 = 62.$$

$$62 \times 70 = 4.340.$$

$$4^2 = 16.$$

$$4.340 + 16 = 4.356.$$

Por lo tanto,  $66^2 = 4.356$ .

#### Ejercicios

Trata de resolver con nuestro método los siguientes cuadrados:

$$83^2 =$$

$$47^2 =$$

$$92^2 =$$

$$38^2 =$$

$$64^2 =$$

Con la práctica te darás cuenta que habrá cuadrados que llegues a saber de memoria, lo que te hará ir con mayor agilidad. No vendría mal tener memorizado que  $11^2 = 121$ , o que  $12^2 = 144$ ... te acabaría dando mayores posibilidades y rapidez.

Otros cuadrados pueden ser resueltos con truquitos más sencillos. Observa los que terminan en 1, y los que lo hacen en 5:

### Cuadrados que terminan en 1

$$51^2$$

Lo puedes hacer así:

$$50^2 = 2.500$$

$$50 \times 2 + 1 = 101$$

$$2.500 + 101 = 2.601$$

$$81^2$$

$$80^2 = 6.400$$

$$80 \times 2 + 1 = 161$$

$$6.400 + 161 = 6.561$$

¿Fácil, verdad? Pues de esta forma estamos haciendo cuadrados a la vez que practicando sumas y multiplicaciones.

Ejercítate con estas:

$$61^2 =$$

$$21^2 =$$

$$71^2 =$$

$$31^2 =$$

### Cuadrados que terminan en 5

Para los cuadrados que terminan en 5 hay un truco bien distinto; observa la técnica que podemos utilizar.

Vamos a elevar 45 al cuadrado ( $45^2$ ).

Todos terminan en 25.

Y ahora multiplicamos la decena (4) por la decena más 1 ( $4 + 1 = 5$ ). Y  $4 \times 5 = 20$ .

Respuesta: 2.025.

Otro ejemplo:

$$75^2$$

Terminación siempre 25; y  $7 \times 8 = 56$ .

Por lo tanto,  $75^2 = 5.625$ .

### Ejercicios

Haz tú estas:

$$35^2 =$$

$$95^2 =$$

$$65^2 =$$

$$25^2 =$$

Te atreves con:

$$105^2 =$$

### 3.7. RAÍZ CUADRADA

En la época de estudiante a todos nos ha asustado el concepto de raíz cuadrada, y más aún el calcularlo. De hecho, poca gente conozco que recuerde como se desarrolla el algoritmo de raíz cuadrada con lápiz y papel.

A continuación, voy a contar como yo lo hago mentalmente si se trata de raíces exactas con un resultado hasta el 100.

### Raíces con resultado de dos dígitos

Lo primero que tenemos que hacer es memorizar la siguiente tabla, con los cuadrados del 0 al 9:

$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

$$9^2 = 81$$

La técnica es la siguiente:

Nos pregunta, por ejemplo, la raíz cuadrada de 5.329.

La decena de la respuesta la obtenemos fijándonos en las dos primeras cifras: 53.

Vamos a la tabla y 53 está entre  $7^2 = 49$ , y  $8^2 = 64$ .

La decena será el menor del intervalo: 7.

La unidad la obtendremos fijándonos en la terminación: 5.329 termina en 9.

Volvemos a la tabla y vemos que en 9 terminan el  $3^2$  y el  $7^2$ . ¿Cómo saber si es uno u otro?

Hacemos el cuadrado de 75 y nos da 5.625 (recordar que termina en 25 y multiplicamos  $7 \times 8$ ).

5.625 es mayor que 5.329, por lo tanto, la unidad va a ser un 3, y nuestra respuesta será 73.

### Ejemplo 2

Raíz cuadrada de 7.056.

Decena será 8 (entre  $8^2$  y  $9^2$ ).

La unidad será 4 ó 6 ( $85^2 = 7.225$ ).

Por ser 7.056 menor que 7.225, la respuesta será 84.

### Ejercicios

Haz tú las siguientes raíces cuadradas:

$$1.369$$

$$5.184$$

$$676$$

$$2.025$$

$$4.624$$

### Cómo extraer decimales

Vamos a calcular raíces cuadradas para números del 1 al 1.000. Para hacer satisfactoriamente esta operación debemos conocer perfectamente los cuadrados del 1 al 31. Voy a apuntarlos en la página siguiente.

Este método nos dará un resultado aproximado, cuanto más alto sea el número más cercano será nuestro resultado al real, también dependerá de nuestra agilidad en el cálculo y de nuestra pericia.

Como siempre se dice, vale más un ejemplo que mil palabras.

11	121	21	441	31	961
12	144	22	484		
13	169	23	529		
14	196	24	576		
15	225	25	625		
16	256	26	676		
17	289	27	729		
18	324	28	784		
19	361	29	841		
20	400	30	900		

### Ejemplo 1

Queremos calcular la raíz cuadrada de 240.

Paso	Cálculo	Explicación
1	Raíz entera (240) = 15	Al conocer perfectamente los cuadrados del 1 al 31 no nos costará identificar el entero.
2	$240 - 15^2 = 15$	A 240 le restamos $15^2$ .
3	$(15 / 15) / 2 = 0,5$	El resultado anterior lo dividimos por el entero del paso 1 y el resultado lo dividimos entre 2.
4	$15 + 0,5 = 15,5$	El resultado anterior más el entero nos da el resultado definitivo.

### Ejemplo 2

Raíz cuadrada de 452.

Paso	Cálculo	Explicación
1	Raíz entera (452) = 21	Esta vez el entero es 21.
2	$452 - 21^2 = 452 - 441$ $= 11$	A 452 le restamos $21^2$ .
3	$(11 / 21) / 2 = 0,52 / 2$ $= 0,26$	El resultado anterior lo dividimos por el entero del paso 1 y el resultado lo dividimos entre 2.
4	$21 + 0,26 = 21,26$	El resultado anterior más el entero nos da el resultado definitivo.

Como antes he dicho, puede haber un pequeño desfase entre los resultados obtenidos y los reales, aunque a medida que los números crecen el margen de error disminuye.

### Ejercicios

Prueba con las siguientes raíces cuadradas.

683

489

277

868

554

### 3.8. RAÍZ CÚBICA

Para las raíces cúbicas, yo utilizo un algoritmo que paso a exponer a continuación y que nos va a desmitificar un poco la complejidad de esta operación.

#### El truco

Para poder hacer raíces cúbicas hay que tener memorizada la tabla con los números del 0 al 9 elevados al cubo:

$$0 = 0$$

$$1 = 1$$

$$2 = 8$$

$$3 = 27$$

$$4 = 64$$

$$5 = 125$$

$$6 = 216$$

$$7 = 343$$

$$8 = 512$$

$$9 = 729$$

Conocida esta tabla, sería muy sencillo realizar las raíces exactas con resultado de dos dígitos.

Se pide a alguien que eleve un número de dos cifras al cubo. Una vez elevado al cubo le pedimos que nos diga el resultado, y nosotros haremos la raíz cúbica (el inverso a elevar al cubo). Es decir, le calculamos el número de dos cifras.

**Ejemplo.** Nos dicen 10.648.

Solo nos fijamos en la terminación (8), gracias a la cual obtenemos la unidad de la respuesta; y en la cantidad anterior al punto de mil (10), gracias a lo que obtenemos la decena.

Vamos a la tabla de los cubos:

¿Quién termina en 8?

El que termina en 8 es el 2, que será la unidad \_2.

¿En qué intervalo está 10?

Entre 8 y 27, o sea, entre 2 y 3 (tomamos siempre el anterior, en este caso el 2, que será la decena).

Respuesta: 22.

**Ejemplo número 2.** Raíz cúbica de 91.125.

El 5 es el que termina en 5; \_5.

Y 91 está entre 4 y 5.

Respuesta: 45.

**Ejemplo número 3.** Raíz cúbica de 571.787.

El 3 es el que termina en 7; \_3.

Y 571 está entre el 8 y el 9.

Respuesta: 83.

De esta misma forma y modificando tan solo la tabla memorizada, podemos calcular raíces quintas de números de 10 cifras, séptimas de números de 14 cifras, o raíces 57 de números de 114 cifras.

Y es que una de las propiedades de las potencias de índice impar es que cada uno de sus 10 dígitos tiene siempre una terminación distinta.

#### Ejercicios

Una vez conocida la técnica, intenta resolver las raíces cúbicas de los siguientes números:

De 2200 a 2299 sumando 456.533

Fechas entre 1800 y 1899 175.616

De 1800 hasta 1899 21.952

De 1700 al 1799 804.357

De 1600 a 1699 sumando 274.625

### 3.9. CALCULAR DÍAS DE LA SEMANA

Una de las pruebas que más hago y gustan es la de calcular el día de la semana que fue o será cualquier fecha que se pregunte (es posible que alguno de mis lectores me haya visto en televisión o escuchado por la radio haciendo esta prueba). Pues bien, voy a explicar el truco, más bien lo definiría como técnica, que utilizo para llevarlo a cabo.

#### Técnica para calcular el día de la semana de cualquier fecha

Para ello, tengo memorizado un código numérico de 12 dígitos de tal forma que cada dígito equivale a uno de los 12 meses del año.

Enero = 0.

Febrero = 3.

Marzo = 3.

Abril = 6.

Mayo = 1.

Junio = 4.

Julio = 6.

Agosto = 2.

Septiembre = 5.

Octubre = 0.

Noviembre = 3.

Diciembre = 5.

Si nos preguntan qué día de la semana fue el 24 de agosto de 1967, procederemos de la siguiente forma:

1.<sup>o</sup> 24 - el día.

2.<sup>o</sup> 2 - equivalencia a agosto, en nuestra tabla.

3.<sup>o</sup> 67 - dos últimas cifras del año.

4.<sup>o</sup> 16 - (parte entera de dividir 67 entre 4, obtenemos así el número de bisiestos).

Sumamos estos 4 pasos 24 + 2 + 67 + 16 y nos da 109.

Lo dividimos entre 7 y obtenemos un cociente igual a 15 y un resto de 4, que es el dato que nos interesa.

Ahora aplicamos la siguiente equivalencia:

Domingo = 0.

Lunes = 1.

Martes = 2.

Miércoles = 3.

Jueves = 4.

Viernes = 5.

Sábado = 6.

Como nuestro resultado era un 4, esto implica que el 24 de agosto de 1967 fue un jueves.

Para los meses de enero y febrero de años bisiestos (aquejlos cuyas dos últimas cifras son múltiplo de 4) tendremos que restar uno al resultado final.

La fórmula es válida para todo el «Calendario Gregoriano», desde 1582, haciendo pequeños ajustes:

Tal cual está escrita, sería para fechas desde el 1 de enero de 1900, hasta el 31 de diciembre de 1999.

Fechas desde el 1 de enero de 2000 hasta el 31 de diciembre de 2099 hacemos lo mismo, pero al final sumamos 6 (o restamos 1) al resultado.

De 2100 a 2199 los mismos pasos, pero sumando 4 al final.

De 2200 a 2299 sumamos 2 como último paso.

Fechas anteriores:

Desde 1800 hasta 1899 sumamos 2.

De 1700 a 1799 sumamos 4.

De 1600 a 1699 sumamos 6.

Te recomiendo que practiques con tu propia fecha de nacimiento o la de tus familiares y amigos, o incluso mirando un calendario para comprobarlo. Si se hace varias veces, pronto se comprenderá el mecanismo y veremos que no es tan difícil como quizás de entrada parece (tema aparte es el tiempo que se tarde en resolverlo).

En definitiva, practicar con números, manejarlos sin miedo, es uno de los objetivos de este libro.

### Días de la semana de un año concreto

Dominando lo que a continuación te cuento, siempre llevarás un calendario en tu mente y, de esta forma, podrás en cualquier situación calcular el día de la semana de cualquier fecha del año en el que estás en pocos segundos.

Al partir de un año concreto, se reducen los pasos a seguir respecto a la fórmula anterior.

Vamos a suponer que queremos saber una fecha de 2007, lo primero es tener memorizado el código para este año, que es un 0, vamos a ver por qué.

$$7 : 4 = 1$$

$7 : 7 = 1$ , y el resto es igual a 0 (en este paso nos interesa el resto).

Sumamos los dos pasos:  $1 + 0 = 1$ , y recordemos que para los años de 2000 a 2099 se suma 6.

$$Y 1 + 6 = 7.$$

Dividimos 7 entre los días de la semana, 7, y nos quedamos con el resto.

$$7 : 7 = 1, \text{ y el resto es igual a } 0.$$

Conclusión, para 2007 el código que tenemos, y que ya podemos memorizar, es un 0.

Ahora hacemos los mismos pasos que hicimos en cualquier fecha pero sin tocar los que conciernen al año.

Un ejemplo:

Día de la semana del 14 de agosto (de 2007).  
14 (el día).

2 (código del mes de agosto según la tabla que ya conocemos para los meses).

$$\text{Lo sumamos } 14 + 2 = 16.$$

Ahora dividimos entre 7 y nos quedamos con el resto  $16 : 7 = 2$ , y el resto es 2.

Y un 2 es un martes, según nuestra equivalencia.

Práctico, te aseguro que es mucho más sencillo de lo que al principio te pueda parecer.

Vamos con el 18 de noviembre...

$$18 + 3 = 21; 21 : 7 = 3, \text{ y resto } 0.$$

Un 0 es un domingo.

9 de febrero...

$$9 + 3 = 12; 12 : 7 = 1, \text{ y de resto nos da } 5.$$

Un 5 es un viernes.

### Ejercicios

Prueba tú con estos para 2007.

14 de octubre.

30 de septiembre.

8 de diciembre.

27 de febrero.

12 de enero.

6 de junio.

20 de mayo.

31 de agosto.

14 de abril.

El día de tu cumpleaños.

Si queremos saber fechas de otro año distinto, solo tenemos que reducir los pasos haciendo previamente las operaciones para el año y memorizando el código correspondiente.

Este ejercicio es muy interesante para agilizar con las operaciones de cálculo y, por qué no decirlo, para marcarse un buen tanto ante los amigos.

### 3.10. LA DICTADURA DEL PORCENTAJE

Vivas en el intrincado mundo de los negocios o trabajos con más o menos habilidad en cualquier otra actividad humana, siempre estarás sometido a una dictadura silenciosa e inevitable: la del tanto por ciento.

La palabra porcentaje proviene del latín *per centum* (por ciento). Cuando queremos decir el 20 por 100 de las personas (20%), queremos decir 20 de cada 100 personas.

#### Regla de tres

La forma matemáticamente correcta de calcular porcentajes es haciendo una regla de tres. Si nos dicen que de una clase de 43 estudiantes 12 son rubios, ¿qué porcentaje son rubios?

Procederemos de la siguiente forma:

Si de 43 ..... 12 rubios.  
De cada 100 ..... ? rubios.

Recuerda que en una regla de tres multiplicamos en cruz:

$$\begin{aligned}12 \times 100 &= 43 ? \\1.200 &= 43 ? \\1.200 : 43 &= ? \\? &= 27,9\end{aligned}$$

Por lo tanto, serán rubios el 27,9%.

Hace unos meses pude apreciar cómo una buena amiga que preparaba oposiciones para la Administración (común es hacer ejercicios de cálculo en concursos y oposiciones) hacía cálculo de porcentajes con la regla de tres que acabamos de ver. Así se lo habían explicado en la academia, lo cual me parece demasiado «rígido». Por ello, te cuento cómo resuelvo yo este tipo de problemas.

Ejemplo 3

#### Truquillo que te aconsejo

Aquí recomiendo que utilicemos la lógica y una sencilla multiplicación, de esta forma evitaremos hacer por completo la regla de tres. Vamos a comparar:

Ejemplo: Si en un grupo de 60 personas nos dicen que el 20% llevan gafas, ¿cuál es el número de personas que las llevan?

#### Regla de tres:

20 personas llevan gafas .....	De cada 100
? personas llevan gafas .....	De 60

$$20 \times 60 = 100 ?$$

$$1.200 = 100 ?$$

$$1.200 : 100 = ?$$

$$? = 12 \text{ personas llevan gafas.}$$

#### Lo que yo propongo

El 20% de 60 lo calculamos multiplicando  $2 \times 6 = 12$  personas llevan gafas.

Se requiere una sencilla multiplicación y aplicar la lógica. Va un ejemplo de lo que quiero decir con esto:

Si fuese el 15% de 60, multiplicaría  $15 \times 6 = 90$ , y como 90 no pueden ser, aplico la lógica, quito el cero, y serían 9.

Si fuese el 15% de 600, hago lo mismo:  $15 \times 6 = 90$ , que, con aplicación de la lógica, vemos que es 90.

Si nos piden el 15% de 6, mantengo la misma multiplicación:  $15 \times 6 = 90$ . Es evidente que el 15% de 6, aquí no puede ser 90, tampoco 9, por lo tanto será: 0,9.

¿Y el 15% de 6.000?

Pues será... 900.

Etcétera.

### Nos vamos de compras

Calcular porcentajes es muy importante a la hora de ir de compras y ver descuentos; de esta forma podremos saber lo que nos rebajan, y también lo que pagaremos tras el descuento.

A continuación voy a dar unos sencillos trucos para evitarnos la regla de tres y calcularlo rápidamente. Se requiere multiplicar bien, restar y aplicar la lógica.

#### Ejemplo 1

Vamos de compras y un determinado producto nos cuesta 80 euros, pero tiene un descuento del 10%. ¿Cuánto nos cuesta el producto?

Constantemente veo a las dependientas, por supuesto con calculadora, hallar el 10% de 80 (8) y restarlo de 80 ( $80 - 8 = 72$ ).

El consejo que yo doy ante este tipo de cálculo es que se busque el complementario del descuento (10%).

Es decir, si nos descuentan el 10%, estaremos pagando el 90%, por lo que podemos multiplicar los 80 euros por el 90%. Aquí hay que usar la lógica,  $8 \times 9 = 72$  euros.

#### Ejemplo 2

Si estamos ante un descuento del 40% de algo que cuesta 60, vamos a calcular el 40% de 60.

$4 \times 6 = 24$ , que es lo que nos descuentan.

Nosotros pagaremos el 60% del producto, o sea,  $6 \times 6 = 36$  euros.

#### Ejemplo 3

Si algo nos cuesta 120 euros y nos descuentan el 8%.

Multiplicamos  $8 \times 12 = 96$ , y utilizamos la lógica, ya que el 8% de 120 nunca puede ser 96, será 9,6 (9,60 euros). Siempre jugamos con la coma en función de criterio lógico.

Para calcular lo que nos cuesta el producto una vez hecho el descuento, tan solo tendremos que restar,  $120 - 9,60 = 110,40$ .

En este caso no hallamos el complementario del 8%, que es 92%, por la sencilla razón de que multiplicar un número por 92 se complica un poquito.

#### Ejemplo 4

Seguimos comprando, ahora vemos un producto rebajado un 30%, el precio es de 70 euros.

$3 \times 7 = 21$  euros de rebaja.

Si vemos un producto que cuesta 78,23 euros y nos descuentan el 20%, yo recomendaría que se despreciaran los céntimos a la hora de hacer el cálculo, de esta forma daremos una aproximación muy válida y nos evitamos complicar el cálculo.

78  $\times$  2 es 156, pero como no puede ser, pues sería 15,60 el descuento del producto.

## Ejercicios

Practica con estos: Si tenemos los siguientes descuentos, ¿cuánto nos descuentan en cada uno de ellos, y cuánto pagamos al final?

$$10\% \text{ de } 40 =$$

$$20\% \text{ de } 35 =$$

$$60\% \text{ de } 80 =$$

$$30\% \text{ de } 42 =$$

$$20\% \text{ de } 740 =$$

## Gazapos de porcentajes

En materia de porcentajes se pueden ver constantemente errores, a veces intencionados y otras porque simplemente no se domina bien el concepto.

### La Universidad de Salamanca

Vamos a analizar el siguiente dato, aparecido en la prensa de Salamanca:

*Las universidades de Salamanca —la pública y la Pontificia— han perdido entre las dos un 11,34 % del alumnado en el curso académico 2005-2006 con respecto al año anterior. La Universidad de Salamanca reúne a 26.582 alumnos frente a los 27.886 del periodo anterior (-4,68 %), mientras que la Pontificia de Salamanca concentra 6.516 alumnos, un 6,66 % menos que en 2004-2005 cuando matriculó a 7.158 alumnos.*

Evidentemente, no se pueden ir sumando porcentajes de esta forma, porque acabaríamos rebasando el 100%, lo bueno del tema es que hay solo dos Universidades en la bella ciudad

castellana, porque si hubiese 40 a buen seguro que hubiesen superado el 100% o, lo que es lo mismo, se hubiesen quedado con menos alumnos que cero.

## Otro porcentaje atragantado

Lo de los porcentajes en titulares de prensa resulta ser una cosa patológica. Observa el siguiente titular de prensa:

*Construir una vivienda de 30 m<sup>2</sup> cuesta un 37% más que una de 90.*

El problema se incrementa cuando en el primer párrafo se mantienen en sus trece:

*El coste de construir un piso de 30 m<sup>2</sup> es un 36,6% mayor que el de uno tres veces superior (90 metros cuadrados), según un estudio realizado por el Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos de Madrid a partir de precios de mercado.*

Siguiendo esta misma proporción, quizás uno de 300 m<sup>2</sup> nos salga a 4 euros...

Evidentemente, lo que quieren decir es que el coste por metro cuadrado es un 37% más caro en una de 30 metros cuadrados que en una de 90.

Viendo estos gazapos surge aquella vieja idea de que, en determinadas cuestiones o ante determinadas personas, lo importante es lo que quieren decir, no lo que dicen.

## 3.11. NÚMEROS CON MAGIA

A continuación paso a exponer una serie de números que tienen una magia especial y con los cuales se pueden hacer tru-

cos. De esta forma siempre podemos impresionar a familiares y amigos.

### El mágico número 1.443

El número 1.443 se puede multiplicar rápidamente por otro de dos dígitos (ab) dividiendo ababab entre 7.

Vamos a comprobarlo con un ejemplo.

Escribimos 1.443 y pedimos un número de dos dígitos. Nos dicen, por ejemplo, el 67.

Pensamos en 676.767 y lo dividimos mentalmente entre 7, escribiendo el resultado de izquierda a derecha.

El resultado es 96.681.

Por lo tanto,  $1443 \times 67 = 96.681$ .

Y si multiplicamos 10.101 por cualquier número de dos dígitos, ab, el resultado será siempre ababab.

Prueba tú con este:

$$1.443 \times 83.$$

### La magia del 142.857.143

Escribimos en un papel el número 142.857.143.

A continuación pedimos otro número de 9 dígitos al azar (nos dicen, por ejemplo, 468.357.247).

Ahora decimos que vamos a multiplicar mentalmente los dos números de nueve cifras.

$$142.857.143 \times 468.357.247 =$$

Procederemos de la siguiente forma:

Dividiremos el segundo número repetido entre 7.

$$468.357.247.468.357.247 : 7$$

Lo hacemos mentalmente para no levantar sospechas, y escribiendo el resultado de izquierda a derecha.

66908178209765321

¿Dónde está el truco?

142.857.143 es igual a 1.000.000.001 : 7

Si se multiplica 1.000.000.001 por cualquier número de 9 dígitos, abc.def.ghi, el producto será, obviamente, abc.def.ghi. abc.def.ghi.

### El truco con el 3.367

Se puede multiplicar cualquier número de dos cifras (ab) por 3.367 sin más que dividir ababab entre 3.

Ejemplo:

Escribimos 3.367 y pedimos un número de dos cifras.

Nos dicen el 54, y ahora hacemos lo siguiente:

$$545454 : 3 = 181.818$$

Si fuese  $3.367 \times 37$

$$373737 : 3 = 124.579$$

La razón de que esto sea así es porque  $3.367 = 10.101 : 3$ .

### La magia del 1.089

Para este truco hay que hacer los siguientes pasos:

1. Pide a alguien que escriba un número de tres dígitos, de tal forma que el dígito de la centena sea mayor que el de la unidad.
2. A continuación dile que reste al número inicial el mismo número pero escrito al revés.
3. Al resultado que le de que le sume el mismo número, pero escrito al revés.

Y ahora tú le dices que su resultado es... 1.089.

Y tu respuesta será siempre correcta.

Vamos a ver estos dos ejemplos a la vez:

$$\begin{array}{r} 746 \\ - 647 \\ \hline 099 \\ + 990 \\ \hline 1.089 \end{array} \quad \begin{array}{r} 832 \\ - 238 \\ \hline 594 \\ + 495 \\ \hline 1.089 \end{array}$$

### Tu número favorito

Piensa en tu número favorito, ha de ser del 1 al 9, y anótalo en la calculadora.

Ahora multiplícalo por 12.345.679.

Al resultado multiplícalo por 9.

Da al igual y... Sorpresa.

### Truco del complemento a 9

Otro truco de «mago» es el del complemento a 9, y consiste en lo siguiente:

Pedimos un número de tres dígitos al azar. Nos dicen, por ejemplo, el 643.

Lo escribimos dos veces en un folio.

643

643

A continuación pedimos otro número de tres dígitos (nos dicen, por ejemplo, el 562) y lo colocamos debajo del primer 643. Debajo del segundo 643 colocamos el complemento a 9 de 562.

Es decir, restamos de 999 el número 562. Y  $999 - 562 = 437$ , que es el complemento a 9 de 562.

643  
562

643  
437

Y ahora decimos que vamos a efectuar mentalmente las dos multiplicaciones y sumar ambos resultados.

Resolución:

$643 \times 643 = 642.357$ . Su complemento a 9 es 357 (porque  $999 - 642 = 357$ ), de tal forma que la suma de los dos productos es 642.357.

¿Cuál es el truco?

La suma de los dos productos es igual al producto de  $642 \times 999$ , que a su vez equivale al de  $643 \times 1.000$  menos 643.

### Truco para adivinar la edad

Este truco nos permitirá adivinar la edad de una persona (y de su madre) de forma muy original. Para ello le pedimos que haga las siguientes operaciones (si utiliza calculadora, dar al = tras cada paso):

1. Multiplicar su edad por 2.
2. Sumar 5.
3. Multiplicar  $\times 50$ .
4. Sumar la edad de su madre.
5. Restar 365.

A continuación pedimos que nos diga el resultado y, haciendo lo siguiente, obtendremos la edad de esa persona y la edad de su madre:

1. Sumamos 115 al número que nos han dado.

2. Las dos primeras cifras serán la edad de esa persona y las dos últimas la edad de su madre.

Vamos a verlo con un ejemplo: imaginemos que esa persona tiene 25 años y su madre tiene 57.

1.  $25 \times 2 = 50$
2.  $50 + 5 = 55$
3.  $55 \times 50 = 2.750$
4.  $2.750 + 57 = 2.807$
5.  $2.807 - 365 = 2.442$

El resultado que nos darán será 2.442, solo tendremos que sumarle 115.

$$2.442 + 115 = 2.557$$

De tal forma que nuestro amigo tiene 25 años y su madre 57.

### 3.12. GIMNASIA MENTAL

#### La importancia de ejercitarse la mente

Estudios realizados demuestran que ejercitarse el cálculo previene de enfermedades mentales, de igual forma que el ejercicio físico previene de enfermedades físicas. Como ya he comentado, en cualquier momento del día se pueden hacer estos ejercicios, pocas cosas resultan tan fáciles de practicar y sin gasto de tiempo: en la cola del banco, jugando a las cartas, en el supermercado, con las matrículas de los coches... podemos hacer pequeños cálculos, siendo uno de los mejores y más útiles ejercicios de gimnasia para nuestra mente que puede haber.

En apartados anteriores ya podemos hacer ejercicios de cálculo y gimnasia mental con cada una de las operaciones.

De todas formas, vaya este apartado para ejercitarse con algo antiquísimo, como son los cuadrados mágicos (los populares sudokus tienen cierto parecido pero sin sumar).

#### Gimnasia con cuadrados mágicos

Al hablar del 666 vimos el concepto de cuadrado mágico. Se colocan números distintos en los casilleros de tal forma que sumando las filas, columnas o en diagonal, dan el mismo resultado. Te propongo a continuación que intentes resolver los siguientes:

1. Construye un cuadrado mágico de  $3 \times 3$  cuya suma de filas y columnas sea 24. Es decir, tienes que colocar en cada casillero los números que quieras, sin repetir, y que sumando cada fila, cada columna, o en diagonal, sume 24.


2. Construye otro de  $3 \times 3$  cuya suma sea 18.


3. Construye un cuadrado mágico de  $4 \times 4$  cuya suma sea igual a 34.


4. Completa el siguiente cuadrado para que sea mágico.

11		7		3
	12		8	
17		13		9
	18		14	

5. Rellena el siguiente de  $5 \times 5$ :

1	20		23	
24		2		10
17		25	14	
15	4		7	21

6. Construye un cuadrado con los primeros nueve números pares.


7. Construye otro cuadrado mágico con los 9 primeros números impares.

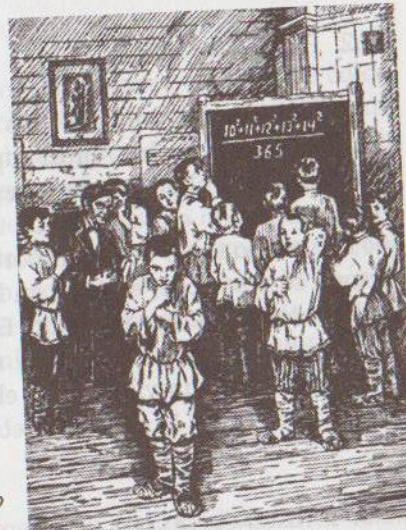

## Los grandes calculistas



### 4.1. Habilidades matemáticas

Pocas son las mujeres que poseen habilidades matemáticas excepcionales. Sin embargo, existen algunas excepciones. Una de ellas es Sophie Germain, una matemática francesa del siglo XIX que realizó contribuciones significativas en la teoría de los números primos y la ecuación cuadrática.

*Nikolaev Bodanov-Belsky en el cuadro «Mental calculation».*



### 4.1. DATOS RELEVANTES

**A** lo largo de la Historia se han dado algunos casos de personas con habilidades realmente excepcionales para desarrollar cualquiera de las actividades humanas.

En este capítulo vamos a tener la oportunidad de hablar de una de las habilidades más curiosas que se puedan dar en el ser humano: la habilidad para hacer todo tipo de cálculos complejos a velocidades de vértigo con la única ayuda de la mente.

#### 4.1.1. LOS INICIOS

Esta es una habilidad que se manifiesta en la mayoría de los casos en edades muy tempranas, que pueden oscilar entre los cuatro y ocho años. Curiosamente, ha habido un buen número de calculistas que perdieron la facultad con el paso del tiempo, aunque otros la conservaron hasta edades muy avanzadas.

#### 4.1.2. FACTOR GENÉTICO

El hecho de que varios de los grandes calculistas hayan tenido familiares con una gran capacidad de cálculo parece indicar que la facultad pueda tener un componente hereditario, quizás como todo en la vida. De todas formas, quisiera añadir que tal vez sea tanto o más importante el ambiente en el que la persona se desarrolle, es decir, en los estímulos que el niño reciba desde la más temprana edad. En mi caso concreto se estimuló la habilidad con los juegos de mesa, sobre todo de cartas, y también de esa maravilla que es el ajedrez. Estos estímulos pueden iniciarse desde la etapa de bebé.

#### 4.1.3. INTELIGENCIA GENERAL

En cuanto a su relación con la inteligencia general, curiosamente se ha dado algún ejemplo de calculadores prodigiosos con un cierto retraso mental, considerados poco menos que máquinas de calcular (este es el caso de los llamados *idiot-savants*, de los que tenemos ejemplos en páginas posteriores).

Por otra parte, ha habido muchos casos de hombres brillantes, incluso genios, dotados de una asombrosa capacidad para manejar los números.

#### 4.1.4. HEMISFERIOS CEREBRALES

En la mayor parte de los casos es el hemisferio izquierdo el que regula la capacidad aritmética, aunque parece que no siempre es así. No obstante, estudios realizados demuestran que un 86% de personas con lesiones en el hemisferio izquierdo perdieron la habilidad para el cálculo.

#### 4.1.5. HOMBRES Y MUJERES

Pocas son las mujeres reconocidas como prodigios del cálculo. El desequilibrio entre hombres y mujeres probablemente derive de las distintas oportunidades para demostrar su talento. En la actualidad tienden a igualarse las oportunidades entre hombres y mujeres, pero no siempre fue así.

Cabe aquí citar el ejemplo de una de las grandes mujeres matemáticas, Sophie Germain, dotada de un gran talento, pero que tenía que asistir a las clases de matemáticas vestida de hombre, ya que las mujeres no tenían acceso a este derecho.

#### 4.1.6. CÁLCULO Y MEMORIA

Aunque el cálculo y la memoria son habilidades distintas, no es menos cierto que con frecuencia se asocia al prodigo del cálculo con una gran memoria, particularmente para números. De hecho, la memoria que demuestran con los números es distinta para otras cosas.

Personalmente soy calculista puro, con una muy potente memoria a corto plazo, pero sin haber trabajado técnicas específicas de memorización (mnemotecnia). Sin embargo, la mayor parte de colegas calculistas tienen una base mnemotécnica muy fuerte, llegando a dominar muchos de ellos la tabla de multiplicar hasta el 100 o, incluso, se sospecha que alguno de ellos

pueda incluso haberla memorizado, al menos parcialmente, hasta el 1.000.

#### 4.1.7. RELACIÓN CON EL LENGUAJE

Las proezas de los calculadores prodigo producen admiración y sorpresa, habiendo una parte de misterio en nuestra aptitud para realizar cálculos mentales complicados. De hecho, esta capacidad tiene mucho que ver con una facultad misteriosa que poseen todas las personas normales: la palabra.

Como afirma Steven B. Smith en su obra *The Great Mental Calculators*, una actitud tan extraordinaria para el cálculo mental se funda en la misma facultad que está en la base del lenguaje. Una de las razones que explican la facilidad fenomenal con la que los calculadores prodigo manipulan los números es la utilización de la misma aptitud inconsciente que permite la palabra.

A todos los que calculan laboriosamente con papel y bolígrafo, esta relación entre cálculo y lenguaje les podría parecer artificial, pues la aptitud de hablar les parece tan natural como la respiración. Sin embargo, esto tan solo es válido en su propia lengua.

Quien pretenda hablar japonés necesitará muchas lecciones para ello. La formación de un excelente calculador mental puede ocurrir que no sea tan larga, pero no es algo que se logre de la noche a la mañana.

#### 4.1.8. PROCESO INCONSCIENTE

Pese a que para la gente normal el cálculo aritmético es un proceso consciente (se tendrían memorizados métodos para las distintas operaciones), dada la extraordinaria rapidez para calcular de los prodigios del cálculo, se ha sugerido que una parte del proceso debe ser inconsciente.

Personalmente me atrevería a afirmarlo, ya que cuando sumo una columna de dígitos, por ejemplo, consigo hacerlo a una media sostenida de seis dígitos por segundo y soy incapaz de explicar cómo lo hago. Simplemente los veo y los sumo tan rápido como la vista los recoge, siendo para mí igual verlos que sumarlos, tardo lo mismo. La verdad es que no sé cómo lo hago, simplemente lo hago, y no encuentro ninguna dificultad para ello.

El hecho de que los calculadores ultrarrápidos podamos efectuar operaciones de forma inconsciente presenta una clara ventaja, ya que las manipulaciones inconscientes son más rápidas que las conscientes. Por esta misma razón tenemos problemas para describir cómo procedemos realmente. El gran matemático y calculista Alexander Aitken comentó lo siguiente sobre el papel del inconsciente en sus cálculos:

He notado a veces que mi mente tenía que anticiparse a mis iniciativas voluntarias; había obtenido la respuesta antes incluso de haber decidido hacer el cálculo. Lo verificaba y en cada ocasión quedaba sorprendido de ver que el resultado era correcto. Supongo (pero no estoy seguro de que la terminología sea la adecuada) que había intervenido un proceso inconsciente. Me parece que el inconsciente puede estar activo a varios niveles y creo que cada uno de estos niveles está caracterizado por una velocidad propia, distinta de la de nuestro estado de vigilia ordinario en el que los procesos mentales son más bien lentos.

#### 4.1.9. CALCULADORES VISUALES Y AUDITIVOS

Los prestigiosos psicólogos Alfred Binet y Jean-Martin Charcot estudiaron el funcionamiento mental de dos calculadores prodigios: Jacques Inaudi y Pericles Diamandi. Sus resultados están consignados en el libro de Binet sobre los grandes calculadores y jugadores de ajedrez.

Antes de los estudios del psicólogo francés se admitía que los prodigios del cálculo veían los números mientras calculaban.

Esto no era muy plausible, pues algunos de ellos no sabían manejar los números por escrito. La conclusión de Binet fue que hay al menos dos tipos de calculadores: los visuales, como el caso de Diamandi (veía los números mientras calculaba), y los auditivos, como Inaudi (los oía).

El descubrimiento fue tan sorprendente, que Binet y Charcot interrogaron con insistencia a Inaudi. Este fue categórico:

Oigo los números y es mi oído el que los retiene; los oigo resonar en mi oído tal como los he pronunciado con mi propio timbre de voz y esta audición interior persiste en mí durante buena parte del día.

Interrogado otra vez, Inaudi dio la precisión siguiente:

La vista no me sirve de nada; diría incluso que me es mucho más difícil acordarme de los números cuando se me comunican por escrito que cuando se me comunican oralmente. Me siento bastante incómodo en el primer caso. Tampoco me gusta escribir los números; el escribirlos no me serviría para recordarlos. Prefiero oírlos.

Finalmente, algo exasperado, declaró:

Se me pregunta si veo los números: ¿cómo podría verlos, cuando hace apenas cuatro años que los conozco y ya calculaba mentalmente muchísimo antes?

1. Los calculadores auditivos son precoz. Con frecuencia aprenden a calcular mentalmente antes que a leer y a escribir (muchos de ellos son pastores que durante la infancia solo habían aprendido a contar). Los visuales, aunque precoz, aprendemos antes a leer y escribir.

2. Los calculadores auditivos calculan de izquierda a derecha, método que descubren por sí mismos. Los calculadores visuales llevamos a cabo, con frecuencia, multiplicaciones cruzadas.
3. Los calculadores auditivos tienen un comportamiento nervioso, desarrollan tics y murmuran al calcular. Suelen ser hiperactivos. En comparación, los calculadores visuales somos plácidos.

## 4.2. CASOS DE PRODIGIOS DEL CÁLCULO

Dentro de los prodigios del cálculo tenemos ejemplos muy variados: desde grandes genios matemáticos hasta pastores de ovejas que tenían un talento increíble para contar y calcularlo todo, y hasta casos de *idiot-savants* (idiotas-sabios).

Paso a continuación a exponer los casos más notables de prodigios del cálculo.

El eminent matemático **John Wallis** estaba dotado de una extraordinaria memoria y capacidad de cálculo. Entre sus logros más destacados podemos citar la creación de un algoritmo para calcular decimales del número PI.

Cuenta Wallis que en una noche de insomnio llegó a calcular la raíz cuadrada de un número de 40 cifras, recordándolo y escribiéndolo al día siguiente. Se sabe que el resultado era erróneo en solo dos dígitos.

Wallis también dio sentido a los números imaginarios y fue, además, el creador del símbolo con el que representamos al infinito.

Uno de los más grandes matemáticos que la humanidad ha dado, **Leonhard Euler**, también era extraordinariamente hábil con los números.

Su legado no ha sido superado en la larga historia de las matemáticas. En cantidad y calidad sus logros son apabullantes. Sus trabajos, reunidos en sus *Opera Omnia*, ocupan unos 70



Leonhard Euler.

volúmenes, testamento de este genio suizo que cambió la faz de las matemáticas.

Euler fue tutelado por otro grande, Johan Bernoulli, que pronto vio sus cualidades.

En 1727 fue nombrado miembro de la Academia Rusa de San Petersburgo, la cual buscaba rivalizar con las grandes academias de París y Berlín.

Euler ha sido descrito por sus contemporáneos como un hombre amable y generoso que disfrutaba con los sencillos placeres de cultivar hortalizas y contar relatos a su prole de trece hijos, algo que resulta reconfortante, ya que no necesariamente a un genio de este calibre le tiene que acompañar una personalidad neurótica.

Su aportación fue tan inmensa que se cuenta que catalogar y recopilar sus obras se prolongó cuarenta y siete años después de su muerte. En prácticamente todas las ramas de las matemáticas hay grandes teoremas atribuidos a Euler.

Pues bien, otra faceta de la que al propio Euler le gustaba hablar era la de calculista. Sus investigaciones en teoría de números se vieron apoyadas por el hecho de que dominaba mentalmente no solo los primeros 100 números primos, sino también sus cuadrados, cubos, cuartas, quintas y sextas potencias. Era capaz de hacer mentalmente difíciles cálculos, algunos de los cuales requerían retener en la cabeza hasta 50 cifras. Arago cuenta de él que calculaba sin esfuerzo aparente: *Igual que una persona respira o un águila se mantiene en el aire*.

Hablar de André Marie Ampère, nuestro siguiente caso de fenómeno del cálculo, es hacerlo de uno de esos prodigios que muy de vez en cuando da la humanidad.

Aprendió a calcular a la edad de cuatro años, y es que la aritmética es una de las cualidades que primero empiezan a manifestarse en este tipo de genios. Con apenas doce años ya había alcanzado a dominar la matemática más avanzada.

Ampère es comúnmente conocido por su ley sobre el magnetismo y por ser el fundador de la rama de la física que conocemos como electrodinámica, y el primero en usar el vocablo corriente para identificar a la electricidad, legándonos además los medios para medirla: el amperio y el ammeter.

Pese a ello, también fueron importantes sus contribuciones en campos tan diversos como las matemáticas, la biología, la poesía o la psicología.

Su vida personal estuvo llena de tragedias. Su padre, un adinerado funcionario de la ciudad, fue guillotinado durante la Revolución Francesa, y la muerte de su esposa en 1803 le causó una profunda depresión. Ampère murió de neumonía a la edad de sesenta y un años. El juicio de su vida es claro a partir del epitafio que eligió para su lápida: *Tandem félix* (Al fin feliz).

Y de genio a genio, porque Karl Fredrich Gauss está considerado como uno de los grandes matemáticos de la Historia (algunos autores lo sitúan junto a Arquímedes y Newton en la cúspide).

Sus contribuciones a la matemática, física, óptica o astronomía fueron de una importancia extraordinaria. Nunca publicó un trabajo hasta asegurarse de que estaba perfectamente elaborado, por lo que no hay manera de saber cómo obtenía sus resultados. Al efecto, él mismo decía:

... Cuando se finaliza un edificio no deben quedar visibles los andamios.

Esta característica suya hizo que tras su muerte se encontrasen importantes resultados que no había dado a conocer, con lo que su fama siguió creciendo.

Con veinticuatro años escribió su más relevante obra, *Disquisitiones Arithmeticae*, donde, entre otras, inventó la aritmética modular, para estudiar problemas aritméticos relacionados con la divisibilidad (hoy en día es básica en Criptografía).

Gauss fue un niño prodigo, mostrando sus impresionantes habilidades aritméticas a la increíble edad de tres años, habilidad que le acompañó durante toda su vida.

A esta tempranísima edad aprendió a leer y a hacer cálculos mentales con tanta habilidad que corrigió los cálculos de una nómina que estaba revisando su padre.

También es muy conocida la anécdota ya contada de cómo fue capaz de sumar los números del 1 al 100 en pocos segundos.

Nuestro siguiente personaje, **Zerah Colburn**, fue uno de los más famosos calculistas habidos. Nacido en Vermont, EE. UU., tenía seis dedos en cada mano y en cada pie (me pregunto si sería determinante a la hora de que el joven Zerah se interesase por el cálculo).

Cuando tenía solo cinco años se descubrió su habilidad para calcular y se inició su carrera profesional como calculista, dando desde entonces numerosas exhibiciones por Norteamérica y Europa.

Muchos filósofos lo calificaron como *el más extraño fenómeno en la Historia de la humanidad que quizás haya existido*.

Su fama alcanzó tan altos niveles que personajes como Faraday, Morse o Laplace hablaron de él. Washington Irving y otros admiradores intervinieron para favorecer su educación, primero en París y luego en Londres, y el propio Napoleón expresó su deseo de conocerlo personalmente.

El gran matemático inglés William Rowan Hamilton confesó haberse iniciado en las matemáticas tras ver una exhibición del joven Zerah en Dublín: *Me aficioné entonces a realizar largas operaciones aritméticas mentalmente. Extraía raíces cuadradas y cúbicas y meditaba todo lo relacionado con las propiedades de los números*.

Zerah aprendió la tabla de multiplicar hasta el 100 antes de que pudiese leer o escribir.

Cuando se le pidió multiplicar 21.734 por 543 dijo en poco tiempo: 11.801.562. Al preguntarle cómo lo había hecho, explicó que 543 es igual a 181 veces 3, y como era más fácil multi-

pliar por 181 que por 543, había multiplicado primero 21.734 por 3 y luego el resultado por 181.

Sus poderes para el cálculo decrecieron con la edad. Volvió a América cuando tenía 20 años, ejerciendo luego otros diez como misionero metodista.

En 1833 publicó su pintoresca autobiografía titulada *A Memoir of Zerah Colburn: written by himself... with his peculiar methods of calculation*.

En el momento de su muerte, a los treinta y cinco años, enseñaba lenguas extranjeras en la Universidad de Norwich, en Vermont.

El caso de **George Parker Bidder** es el de otro niño prodigo, que empezó a calcular a la edad de seis años.

Nació en Inglaterra en 1806. A la edad de nueve años fue presentado ante la Reina, donde respondió a numerosos problemas de cálculo causando gran asombro.

Parece ser que aprendió a contar y calcular jugueteando con piedrecillas y botones.

Su padre encontró una forma de vida tan agradable con las demostraciones del joven George que descuidó por completo la educación de su hijo.

Importantes profesores de la Universidad quedaron prendados no solo con su habilidad para el cálculo, sino con su inteligencia general, de tal forma que persuadieron a su padre para que recibiera educación, algo que hizo gratuitamente en los mejores colegios.

Su paso por la Universidad de Edimburgo fue brillante, graduándose y convirtiéndose en uno de los mejores ingenieros de su época.

Los poderes de cálculo de Bidder no decrecieron con la edad. Poco antes de



George Parker Bidder.

su muerte, acaecida en 1878, alguien citó delante de él que hay 36.918 ondas de luz roja por pulgada. Suponiendo que la velocidad de la luz es de 190.000 millas por segundo, ¿cuántas ondas de luz roja, se preguntaba, llegarán al ojo en un segundo? *No hace falta que lo calcules*, dijo Bidder. *El número de vibraciones es 444.433.651.200.000.*

Varios familiares de Bidder se distinguieron por una memoria prodigiosa, y su hijo tuvo, en menor grado, una capacidad como la suya.



Truman Henry Safford.

Uno de sus profesores, Benjamin Pierce, dijo de él que *sus capacidades de cálculo están acompañadas de un gran poder de abstracción y de concentración raramente observable excepto en las mentes más privilegiadas.*

Cuando tenía nueve años se le sometió a un test, respondiendo a cuestiones tales como el número de segundos que hay en 27 años; decir los dos números que suman 8 y cuyos cubos suman 152 (5 y 3); o las raíces cúbicas de 3.723.875 y 5.177.7171 de forma instantánea.

A los dieciocho se graduó en Harvard y fue profesor de Astronomía y director del Observatorio de Dearborn. Fue el descubridor de algunas nebulosas, además de calcular las órbitas de algunos planetas y cometas.

Fue un calculador auditivo, que realizaba movimientos nerviosos mientras calculaba.

**Truman Henri Safford** nació en Vermont, EE. UU. Fue un niño precoz, empezando a mostrar interés por la aritmética a los tres años, pero sus padres no descubrieron su talento innato hasta los seis. A partir de entonces, el joven prodigo adquirió importantes conocimientos de aritmética, álgebra y geometría.

Reconozco que tengo una especial debilidad por nuestro siguiente protagonista: **Srinivasa Ramanujan**.

Fue Ramanujan uno de los más curiosos genios que ha dado la humanidad. Nacido en el seno de una familia pobre de la India en 1887, estaba dotado de una capacidad intuitiva para las matemáticas muy unusual.

Sin tener los tradicionales estudios matemáticos, consiguió logros importantísimos gracias a su capacidad de abstracción y a su portentoso dominio de los números y sus propiedades. Su presentación en Occidente fue a través de una carta que envió al prestigioso matemático inglés G. H. Hardy con varios de sus teoremas y fórmulas matemáticas.

Cuando Hardy lo leyó hizo el siguiente comentario:

Nunca había visto antes nada ni siquiera parecido. Una ojeada es suficiente para comprender que solamente podían ser escritas por un matemático de la más alta categoría. Tenían que ser ciertas, porque si no lo fueran, nadie habría tenido suficiente imaginación para inventarlas.

Tenía una memoria extraordinaria, pudiendo recordar las características de los diferentes números de una manera casi misteriosa. Como él mismo decía, *cada entero positivo es uno de mis amigos personales.*

Antes de su fallecimiento, de tuberculosis a los treinta y tres años, Hardy fue a visitarlo y de entonces nos cuenta la siguiente anécdota:

Una vez fui a verlo cuando yacía enfermo en Putney. Para romper el hielo le conté que había viajado en un taxi cuyo número me resultaba un tanto insípido, el 1.729. Rápidamen-



Srinivasa Ramanujan.

te me respondió: «No, amigo, no, es un número muy interesante. Es el número más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos formas diferentes.  $12^3 + 1$  al cubo; y  $10^3 + 9^3$  al cubo».

Trabajaba por intuición a partir de ejemplo numéricos, pero añadió a su memoria, a su paciencia y a su capacidad de cálculo, un poder de generalización, un sentido de la forma y una capacidad de modificación rápida de sus hipótesis realmente sorprendente, que lo sitúan, en su campo, en el lugar más destacado.

Como su mentor Hardy vuelve a decirnos:

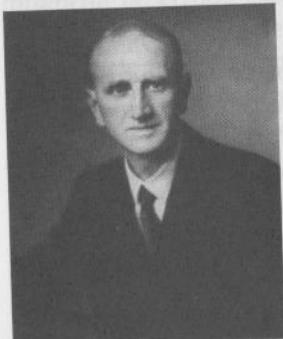
Probablemente, Ramanujan habría sido mejor matemático si lo hubieran descubierto y educado un poco en su juventud. Habría descubierto más cosas nuevas y, sin duda, de mayor importancia. Por otra parte, habría sido menos parecido a Ramanujan y más semejante a un profesor europeo, y así la perdida hubiera sido tal vez mayor que la ganancia.

**Alexander Craig Aitken** fue un eminente matemático neozelandés cuyas contribuciones al álgebra, análisis numérico y a la estadística fueron notables.

A los trece años ingresó en una escuela para superdotados. Su gran afición, como la de otros muchos calculadores, era la música, llegando a ser un virtuoso violinista y compositor.

La mayor parte de su vida la pasó en Edimburgo, donde logró un grandísimo prestigio como profesor en la Universidad.

Aitken tenía una memoria prodigiosa y estaba dotado de unas condiciones enormes para el cálculo y para la creación matemática. Era capaz de reconocer números primos sin apenas esfuerzo.



A. C. Aitken

Se sabe que conocía de memoria la tabla de multiplicar al menos hasta el 100 y los cuadrados de números de cuatro dígitos con poco esfuerzo. En sus conferencias siempre se esperaba con sumo interés que hiciese demostraciones de cálculo y memoria.

**John Von Neumann** fue uno de los padres de la computadora moderna. También desarrolló la rama de las Matemáticas conocida como *Teoría de Juegos*.

Pues bien, este genial matemático húngaro (que adquirió la nacionalidad estadounidense) estaba dotado de una gran capacidad para el cálculo.

Se cuenta la anécdota de que durante la Segunda Guerra Mundial estaban reunidos en Los Álamos, Nuevo México (donde se gestó la creación de la bomba atómica), cuatro genios de la física y las matemáticas: John Von Neumann, Enrico Fermi, Edward Teller y Richard Feynman. Continuamente se lanzaban ideas y siempre que había que efectuar un cálculo matemático (nos cuenta Robert Jungk citando a otro físico) Fermi, Feynmann y Von Neumann se ponían en acción. Fermi empleaba una regla de cálculo, Feynmann una calculadora de mesa y von Neumann su cabeza. *La Cabeza terminaba normalmente la primera, y es notable lo próximas que estaban siempre las tres soluciones.*

#### 4.2.1. CASOS DE IDIOT-SAVANTS

##### Rainman

Al hablar de casos específicos de autismo con capacidades asombrosas, inmediatamente se me viene a la mente la película *Rainman*, protagonizada por Dustin Hoffman, que hace un soberbio papel por el que recibió el Oscar de Hollywood.

*Rainman*, basada en un caso real, nos sitúa en la vida de un personaje (Raymond Babbit en la película) con un peculiar

tipo de autismo, a los que se conoce como «idiot savants» (idiotas sabios).

Los «savant» poseen unas extraordinarias habilidades mentales para aquello que les pueda llamar la atención.

Esto es así porque están muy en su mundo, lo que implica una concentración extrema sobre algo que les llame la atención y les motive. De esta forma, pueden llegar a adquirir una memoria (más que cálculo en sí) o una capacidad de contar increíbles.

Por ejemplo, Rainman contó el número de palillos que se habían caído al suelo de un simple vistazo.

También memorizó una guía de teléfonos, para luego recitarle a una camarera su número de teléfono con tan solo verle el nombre.

Otra de las habilidades que mostró Rainman en la película fue su capacidad para jugar a las cartas, a través de una muy peculiar e inexplicable técnica de conteo.

### Mi cita con Casimiro

En diciembre de 2005 tuve la oportunidad de conocer a un *idiot-savant* en la localidad cántabra de Torrelavega.

Un periodista que me había entrevistado me habló de un señor mayor con un grado de autismo y una peculiar habilidad para hacer cálculos de fechas (algo relativamente frecuente en estos casos). Tras conseguir el número de teléfono de su familia, no dejé pasar la oportunidad de visitarlo.

Con gran amabilidad, fui recibido y pude hablar así con Casimiro, un señor de unos sesenta años, prácticamente ciego y con un peculiar autismo.

Después de hablar con su familia y sondearlo también a él con algunas preguntas, pasé a comprobar cómo realizaba la prueba del calendario.

Le pregunté una batería de unas 20 fechas, en todas dijo correctamente el día de la semana en que había caído, pero también dijo algo más...

Ante mi asombro, cuando le pregunté la primera fecha, 14 de agosto de 1977, su respuesta, en apenas siete u ocho segundos, fue la siguiente:

Fue un domingo y... en Torrelavega aquel día cayó una tormenta muy grande...

Cierto es que fue un domingo. Desconozco si cayó una tormenta o no, pero, según su familia, Casimiro no sabe mentir. Es más, ante todas las fechas dijo algo que aquel día había ocurrido y que había quedado de forma misteriosa grabado en su mente.

Cuando le pregunté por el 8 de agosto de 1933, Casimiro no supo responder. Esto me hizo comprender que tiene grabado el día de la semana de las fechas que ha vivido y puede recordar, añadiéndole más datos, pero que realmente no calcula, ni utiliza ningún algoritmo específico, al menos como nosotros lo definiríamos.

Casimiro no sabe calcular, ni siquiera sabe leer y escribir, su principal afición es oír la radio (no sé hasta qué punto la escuchará, o simplemente la escucha a su manera).

Desgraciadamente, los autistas inteligentes o *savants*, así como los más comunes autistas no *savants*, poseen características del desorden que les hace prácticamente imposible llevar una vida plena independiente.

### Jedediah Buxton

Fue un granjero inglés nacido en 1702 en Elmton. Aprendió a calcular a la edad de doce años y era un fanático de la memoria. Su fama como calculista lo llevó a Londres, donde alguien lo acompañó a ver una representación de *Ricardo III*, de Shakespeare. Al final, cuando le preguntaron si le había gustado, él respondió que el actor principal había dicho 14.445 palabras y dado 5.202 pasos. Para Buxton era una manía contarlos y medirlo absolutamente todo.

Esta capacidad para memorizar lo llevaba a hacer grandes multiplicaciones mentales, recordando las partes de la multiplicación durante largos períodos de tiempo.

### El caso de los gemelos

Nos cuenta Oliver Sacks, en su libro *El hombre que confundió a su mujer con un sombrero*, el caso de los gemelos John y Michael.

Estos hermanos fueron muy famosos en los años 60 en EE. UU., siendo llevados a programas de televisión y apareciendo en numerosas revistas. El plato fuerte de sus habilidades era el decir el día de la semana de cualquier fecha que se les preguntara. Los gemelos dicen: *Díganos una fecha de los últimos o de los próximos 40.000 años*, y casi al instante responden el día de la semana que fue. *Otra fecha*, gritan, y se repite la operación. Se puede apreciar que mueven los ojos y los fijan de un modo peculiar cuando hacen esto, como si estuviesen desplegando, o escudriñando, un paisaje interior, un calendario mental.

La memoria que tienen para los números es excepcional, y posiblemente ilimitada. Pero cuando uno pasa a examinar su capacidad de cálculo, resulta que lo hacen asombrosamente mal (no son capaces de hacer bien una resta o una suma simples).

Se los denomina «calculadores del calendario», y, sin embargo, son incapaces de calcular y carecen de las nociones más básicas de la aritmética. Pese a ello, se ha llegado a la conclusión de que realizan esta prueba con el algoritmo que se utiliza para los cálculos calendáricos (forman en su mente algoritmos inconscientemente).

En otro momento, continúa Oliver Sacks, se cayó de su mesa una caja de cerillas y su contenido se esparció por el suelo: «111», gritaron ambos simultáneamente; y luego, en un murmullo, John dijo «37». Michael repitió esto, John lo dijo por tercera vez y se paró. Conté las cerillas (me llevó un rato) y había 111.

—¿Cómo pueden contar las cerillas tan de prisa? —pregunté.

—Nosotros no contamos —dijeron—. Nosotros vimos las 111.

—Y por qué murmuraron ustedes «37» y lo repitieron tres veces? —pregunté a los gemelos.

—37, 37, 37 —dijeron al unísono.

Su realidad es que, simplemente, habían visto el número de cerillas en un relampagueo.

Nos cuenta Oliver Sacks un tercer episodio en su estudio de los gemelos:

Estaban los hermanos sentados en un rincón, sonrientes, una sonrisa confidencial y misteriosa, una sonrisa que yo no les había visto nunca, gozando de la extraña paz y el extraño placer del que parecían disfrutar. Me acerqué silenciosamente para no molestarlos. Parecían encerrados en un singular diálogo puramente numérico. John decía un número de seis cifras. Michael escuchaba el número, asentía, sonreía y parecía saborearlo. Luego él decía a su vez otro número de seis cifras, y entonces John era el que escuchaba y lo consideraba muy detenidamente. Al principio parecían dos entendidos en vinos que estuviesen saboreando caldos diversos, compartiendo sabores exóticos, valoraciones exóticas. Me senté allí en silencio, sin que me viesen, hipnotizado, desconcertado.

Había tal seriedad y concentración en los gemelos, por lo general excitados y distraídos, que me limité a anotar los números con los que estaban jugando y que les procuraban un gozo que saboreaban en comunión.

Llegué a mi casa, prosigue Sacks, y busqué tablas de potencias, factores, logaritmos y números primos, recuerdos y reliquias de un periodo extraño y aislado de mi propia infancia en que yo también fui una especie de rumiador de números, un «vidente» numérico, y sentí una pasión extraña por los números. Yo ya tenía una hipótesis, y con esas tablas pude

confirmarla. Todos los números, los números de seis cifras que los gemelos habían estado intercambiándose eran primos (números que solo pueden dividirse por sí mismos y por la unidad). ¿Habían tenido los gemelos acceso a algún libro como el mío y se habían memorizado los números primos, o estaban, de algún modo inconcebible «viendo», por sí solos, números primos, de forma parecida a como habían visto las 111 cerillas? Desde luego, no podían calcularlos, ya que eran absolutamente incapaces de calcular.

Volví al pabellón al día siguiente, llevaba conmigo el valioso libro de números primos. Los gemelos estaban encerrados en su comunión numérica, como el día anterior, sin decir nada, me uní a ellos. Al principio mostraron recelo, pero al ver que no decía nada, reanudaron su «juego» de primos de seis cifras.

Al cabo de unos minutos decidí incorporarme al juego, aventuré un número, un primo de ocho cifras (evidentemente, lo había memorizado previamente). Se giraron los dos hacia mí, luego se quedaron silenciosos e inmóviles, con una expresión de absoluta concentración. Hubo una larga pausa (de casi un minuto) y luego súbita y simultáneamente sonrieron los dos.

Habían visto de pronto, tras un proceso interno incomprendible, que mi número de ocho cifras era un número primo, y esto les produjo claramente una gran alegría, una alegría doble; primero porque yo había introducido un elemento nuevo de juego, un primo de ocho cifras, de un orden con el que no se habían encontrado hasta entonces; y, en segundo lugar, porque era evidente que yo me había dado cuenta de lo que estaban haciendo, me había gustado, me había causado admiración, y me había unido al juego.

Se apartaron un poco, para dejarme sitio, un jugador nuevo, un tercero en su mundo. Después, John se pasó un rato pensando y formuló un número de nueve cifras; Michael replicó con otro número de nueve cifras. Yo, por mi parte, y tras echar un vistazo subrepticio al libro, añadí mi propia aportación un tanto deshonesta, y pronuncié un número de 10 cifras.

Volvieron a quedarse callados un buen rato, inmóviles, atónitos; y luego John, tras una profunda meditación, formuló un número de 12 cifras. Yo no tenía ningún medio de comprobarlo y no pude responder, pues mi libro de primos no recogía más números de 10 cifras. Pero Michael sí, aunque debió tardar cinco minutos..., y al cabo de una hora los gemelos estaban intercambiando números primos de hasta 20 cifras, o eso supongo que eran, ya que no tenía ningún medio de comprobarlo.

Los gemelos no habían memorizado ninguno de estos números y, sin embargo, conseguían «calcular» sin saber calcular. Tienen una sensibilidad asombrosa para los números, no son calculadores propiamente dichos porque desconocen el propio arte de calcular, quizás ni les interesa saberlo. Su enfoque de los números es «íconico», conjuran extrañas escenas de números, habitan entre ellas; vagan libremente por grandes paisajes de números; crean, dramáticamente, todo un mundo constituido por números. Tienen una imaginación singularísima, y de esta forma pueden imaginar números. Ven los números como un enorme paisaje natural. Ven los números como sus amigos, sus aliados, dentro de su mundo autístico. Ni siquiera se les puede llamar calculadores porque no calculan, viven en un mundo armónico y esa armonía la dan los números. No les interesa ni el brillo de las estrellas ni el corazón del hombre. Y, sin embargo, los números son para ellos, concluye Oliver Sacks, no «solo» números, sino significaciones, significadores cuyo significado es el mundo.

#### 4.2.2. OTROS CALCULISTAS PROFESIONALES

**Giacomo Inaudi** fue el nombre de uno de los calculistas más famosos y de los que más conocemos, ya que fue estudiado por uno de los mejores psicólogos de la época, Alfred Binet.

Nació en 1867 en el seno de una familia pobre del Piamonte, Italia. Empezó a calcular a una edad típica: los seis años.

Durante los siguientes años Inaudi sostuvo económicamente a su familia, dando numerosas exhibiciones en cafés y teatros.

A los doce años su cráneo fue examinado por Broca en París, encontrando este que su cabeza era muy grande e irregular en comparación con su cuerpo, y que presentaba deformaciones.

Cuando tenía veinticuatro años fue examinado por Alfred Binet, el cual descubrió que tenía una gran inteligencia pero una educación muy limitada.

Era un hombre olvidadizo, incapaz de recordar las ciudades donde había estado. Curiosamente, tenía una impresionante memoria para los números, de tal forma que trabajaba sin mirarlos.

Era un calculador de tipo auditivo, como ya hemos dicho anteriormente.

Al igual que otros calculistas de este tipo, realizaba movimientos con las manos mientras calculaba, a modo de tics nerviosos.

Alcanzó fama mundial, dando demostraciones por Europa y América. Falleció en 1950 a los ochenta y tres años de edad y, hasta su muerte, siguió calculando.

Otro calculista estudiado por psicólogos y contemporáneo de Inaudi fue Pericles Diamandi, nacido en 1868 en la isla griega de Pylaros.

A los dieciséis años abandonó la escuela para unirse a los negocios familiares, fue entonces cuando descubrió su talento para el cálculo y para la memorización, que usaba frecuentemente en los negocios. Sabía hablar cinco idiomas.

Cuando tenía veinte años se presentó por su cuenta ante la Academia Francesa de las Ciencias para demostrar su habilidad. El caso fue estudiado por Binet y Charcot.

Diamandi tenía catorce hermanos, dos de los cuales estaban dotados de cierta capacidad para el cálculo. Siempre decía que su habilidad la había heredado de su madre, que poseía una gran capacidad de memorización.

Binet estudió conjuntamente a Diamandi y a Inaudi, pudiendo observar las grandes diferencias que había entre uno y otro en los procesos psicológicos. De hecho, Diamandi era un calculador de tipo visual, dotado de gran capacidad para visualizar todo tipo de cosas y mantener esas imágenes.

Pese a que siempre quiso enfrentarse a Inaudi para ver quién era más rápido, Binet nunca accedió a ello. De hecho, sabía que Inaudi era bastante más veloz.

**Salo Finkelstein** nació en Lodz, Polonia, en 1896. Desarrolló su carrera como calculista en Norteamérica, tras darse cuenta de su gran habilidad cuando tenía veintitrés años, hasta entonces trabajaba como dependiente de comercio.

Aparte de sus demostraciones, también colaboró en el recuento de votos en las elecciones.

Además de esto, los Bancos de Nueva York solicitaban sus servicios una vez por semana para llevar a cabo el repaso de las cuentas.

Finkelstein tenía una buena habilidad en la adición, siendo capaz de sumar 50 dígitos en 13 segundos y 100 dígitos en 28 segundos.

**Win Klein** fue uno de los más admirados calculistas. Nació en Amsterdam (Holanda), en 1912, y su interés por el cálculo comenzó a los ocho años.

Apodado la «Computadora Humana» o «Willie Raíz», tuvo como gran afición, aparte de los números, la música clásica y el jazz.

Era un calculador de tipo auditivo y, curiosamente, su hermano Leo, que también estaba dotado de gran capacidad de cálculo, era de tipo visual.

Para multiplicar utilizaba el método cruzado, y el hecho de saber de memoria la tabla de multiplicar hasta el 100 le permitía operar con dos números a la vez.

Pero su mayor poderío estaba en el cálculo de raíces, de hecho tuvo en su poder varios Récords Guinness (creó algoritmos para hacer estos cálculos y aplicaba reglas mnemotécnicas).

En Japón, en 1981, logró extraer la raíz 13 de un número de 100 dígitos en 88 segundos.

En 1978 batió otro récord por extraer la raíz 73 de un número de 500 dígitos en 163 segundos.

En cuanto a la raíz 73 de un número de 500 dígitos, si el resultado tenía siete dígitos, llegó a decir que era un juego para él; con ocho dígitos uno de ellos no es seguro; con nueve son dos los conocidos, y con 10 dígitos dar el resultado le resultaba infernal.

La india Shakuntala Devi, nacida en 1939, tiene un talento innato para el cálculo que comenzó a manifestarse cuando apenas contaba tres años. A los seis años de edad inició su carrera profesional como calculista asombrando a todos con su facilidad para ejecutar complicadas operaciones mentales.

En los años 50 comenzó a realizar demostraciones por toda Europa y EE. UU., demostrando sus capacidades en programas televisivos y en los más diversos foros.

Shakuntala vive actualmente en Bangalore, India, dedicándose al mundo de la astrología y la adivinación, temas sobre los que ha escrito varios libros.

Con este repaso histórico de los grandes calculistas, he querido hacerles un pequeño homenaje, además de acercar un poquito lo que es esta habilidad y lo que en otros tiempos supuso una profesión para los acróbatas del cálculo. Hoy en día, con el uso de las calculadoras y ordenadores, ya no existen como tal los calculistas profesionales y quien pudiera tener una gran habilidad de cálculo es bastante improbable que la desarrolle.

#### 4.3. ¿POR QUÉ HAY POCOS CALCULADORES PRODIGIO?

Aunque haya coincidencia entre las facultades que regulan el lenguaje y el cálculo mental, sorprende que haya tan pocos calculistas prodigo.

La respuesta a esta cuestión viene dada por el entorno. Ciertamente es que se acompaña una capacidad innata, pero no menos cierto que el factor ambiental juega un papel decisivo para desarrollar esta capacidad. Los niños aprenden a hablar porque en su entorno todo el mundo habla. El que muy pocos practiquen el cálculo mental se debe a que es un ejercicio muy poco corriente entre los adultos que los rodean. Solo los niños que tienen un carácter o un modo de vida algo especial prosiguen una habilidad no alentada colectivamente.

En mi caso concreto, quiero recalcar el hecho de que mis juguetes tenían mucho número, o así los veía yo. De hecho, mi primer entrenamiento con números fueron los juegos de cartas.

Todos los calculadores prodigo coincidimos en que los números son verdaderos amigos y aliados. El propio Klein dijo al profesor Smith durante una entrevista:

Los distintos números son para mí como amigos más o menos queridos. El 3.844 no significa lo mismo para usted que para mí. Para usted es solo un 3, un 8, un 4 y un 4. Pero yo le digo: ¡hola 62 al cuadrado!

En una sociedad que se preocupara del cálculo mental tanto como de otra materia, no cabe la menor duda de que la gente calcularía mucho mejor (quizá no interese...). Hoy día, sin embargo, el mismo arte de calcular pierde terreno ante las calculadoras de bolsillo. Ya en 1954 Alexander Aitken definía así ante la Sociedad de Ingenieros los nefastos efectos de las máquinas de calcular para el cálculo mental:

Es posible que, lo mismo que los tasmanos o los moriori, los calculadores mentales estemos condenados a la extinción.

Podría ser que yo estuviera aquí en calidad de especimen curioso y que me miraseis con un interés puramente etnológico... En el año 2000, tal vez algunos de vosotros dirán: «Pues sí, yo conocí a uno de ellos».

#### 4.4. LOS CALCULISTAS ULTRARRÁPIDOS EN LA ACTUALIDAD: CAMPEONATO DEL MUNDO DE CÁLCULO

En la localidad alemana de Annaberg-Buchholz (lugar natal del eminente calculista Adam Ries) se celebró el 30 de octubre de 2004 el primer Campeonato del Mundo de Cálculo Mental. En el mismo participamos 17 calculistas de diez países distintos, obteniéndose los siguientes resultados.



#### Resultados

**Suma de 10 bloques de 100 dígitos cada uno**  
(Tiempo máximo de 10 minutos)

Participante	Resultados correctos
Alberto Coto (Spain)	10 en 5:50 minutos <b>Récord del Mundo.</b>
Jan van Konigsfeld (Netherlands)	9
Robert Fountain (Great Britain)	9
Mohammed Seghir Saïd (Algerien)	9
Divesh Ramanlal Shah (India)	9
Ben Pridmore (Great Britain)	6
Arun Mangal (India)	5
Ali Bayat Movahhed (Irán)	4
Ulrich Scholter (Germany)	3
Stefan Lehmann (Germany)	2
John Scott Flansbourg (USA)	1

**Multiplicación de dos números de ocho dígitos 10 veces**  
 (Tiempo máximo de 15 minutos)

Participante	Resultados correctos
Alberto Coto (Spain)	8
Mohammed Seghir Saïd (Algeria)	7
Rüdiger Gamm (Germany)	6
Jan van Koningsveld (Netherlands)	4
Ben Pridmore (Great Britain)	3
Stefan Lehmann (Germany)	2
Robert Fountain (Great Britain)	1

**Cálculo del calendario**

(Fechas de 1600 a 2100 d. de C. durante un minuto.)

Participante	Resultados correctos
Matthias Kesselschläger (Germany)	33 Récord del Mundo
Rüdiger Gamm (Germany)	22
Silke Betten (Germany)	20
Jan van Koningsveld (Netherlands)	19
Robert Fountain (Great Britain)	19
Mohammed Seghir Saïd (Algeria)	9
Alberto Coto (Spain)	9
Ben Pridmore (Great Britain)	8
Rajeev Kumar (India)	7
Arun Mangal (India)	5
John Scott Flansbourg (USA)	4

**Raíces cuadradas de seis dígitos**

(extrayendo un total de ocho cifras)

(10 raíces en un máximo de 15 minutos)

Participante	Dígitos correctos por cada raíz
Jan van Koningsveld (Netherlands)	8 8 8 6 8 8 7 3 4 8
Issam Khneisser (Libanon)	8 8 8 8 7 6 5 5 4 7
Robert Fountain (Great Britain)	8 5 7 7 5 7 3 7 4 8
Ali Bayaty Movahhed (Irán)	5 5 6 5 5 6 4 5 7 3
Divesh Ramanlal Shah (India)	3 4 3 3 4 3 4 3 3 3
Ben Pridmore (Great Britain)	2 1 3 4 3 0 3 4 3 1
Valentin Barraud (Frankreich)	4 1 3 4 2 1 3 3 2 1
Stefan Lehmann (Germany)	3 1 1 2 2 2 2 2 2 2
Ulrich Scholter (Germany)	2 1 0 2 2 0 1 1 1 0

Dentro de las pruebas que figuran en los campeonatos del mundo haría la siguiente clasificación:

**Cálculo puro: Sumar.**

Sumar a toda velocidad es leer y sumar, no hay atajo posible.

**Cálculo «casi» puro: Multiplicar.**

Digo lo de «casi» puro porque algunos de mis colegas se saben de memoria la tabla de multiplicar hasta el 100, tomando así atajos en lo que a calcular se refiere (no es lo mismo multiplicar  $43 \times 38$  que saberlo ya de memoria).

*Híbrido:* Prueba del calendario.

En mi caso concreto lo calculo, hago las mismas operaciones que explicaba en el capítulo anterior, con la memorización del código para cada mes.

En el caso de otros «calendaristas», la memoria juega un papel decisivo, como en Kesselschlager, el ganador en el calendario que, calculando más lento que yo, hizo esta prueba mucho más rápido. Y es que tiene memorizados códigos para los años y reduce a la cuarta parte los cálculos mentales a realizar.

*Mnemotécnica:* Las raíces cuadradas.

En esta prueba la memoria es fundamental, también se hacen cálculos mentales pero en menor medida. Los grandes calculistas de raíces tienen una base mnemotécnica muy importante.

Quiero finalizar este capítulo resumiendo las claves que se requieren para llegar a ser un buen calculista: En primer lugar, ver los números como algo atractivo. En segundo lugar, creer siempre en uno mismo y en nuestras posibilidades. En tercer lugar, desarrollar unas buenas técnicas de concentración y de cálculo. Y, por último, entrenamiento, hacer cálculos mentales en cualquier situación que se nos plantee.

Espero haber conseguido despertar en ti la curiosidad por los números y la realidad de su presencia en nuestras vidas, creando así una actitud numérica y siempre crítica, contrastando los datos que se nos aparecen constantemente como algo que te resultará muy positivo.

Sería para mí un enorme placer que el siguiente de los calculistas mentales fuese tú, querido lector, y, con ello, contradijéramos las palabras de Alexander Craig Aitken en cuanto a la tendencia a extinguirse de los prodigios del cálculo.

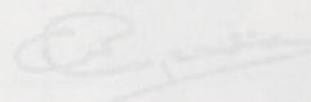
John Scott Henshaw (USA)

CERTIFICADOS  
DE SUS MEJORES MARCAS

WORLD RECORDS  
CERTIFICATE

THE FASTEST TIME FOR AN INDIVIDUAL  
TO ADD TOGETHER 100 SINGLE DIGITS IS  
A WORLD RECORD 19.28 SECONDS BY  
ALBERTO COTO GARCIA (SPAIN),  
AT THE VALLE REAL COMMERCIAL  
CENTRE, SANTANDER, SPAIN  
ON 29 JUNE 1999

Holder of the Record  
GUINNESS WORLD RECORDS



Buenas fiestas del calendario.

En mi caso controlo lo calculo: hago los mismos operaciones que explicadas en el capítulo anterior, con la memoria del orden para cada uno.

En el caso de otros «calculistas», la memoria juega un papel decisivo como en Keesel haga; el ganador en el concurso no me dice que, siendo más tonto que yo, hizo esta prueba mucha mejor. Y es que tiene memorizadas ciertas palabras o símbolos o la misma parte los cálculos mentales a realizar.

### CERTIFICADOS

En este apartado lo memoria es fundamental, también se habla sobre los mejores marcas en cálculo mental y cuáles tienen una base matemática muy importante.

Quiero finalizar este capítulo resumiendo los claves que se requieren para llegar a ser un buen calculista: En primer lugar ver los números como algo atractivo. En segundo lugar, creer siempre en uno mismo y en nuestras posibilidades. En tercer lugar, desarrollar unas buenas técnicas de concentración y de cálculo. Y, por último, entrenamiento, hacer cálculos mentales en cualquier situación que se nos plante.

Espero haber conseguido despertar en ti la curiosidad por los números y la realidad de su presencia en nuestras vidas, creando así una actitud lúdica y siempre crítica, confrontando los datos que se nos presenten constantemente como algo que te resultará muy positivo.

Serás para mí un enorme placer que el siguiente de los cálculos mentales fuesses tú, querido lector, y, con ello, confíate juntos las polémicas de Alexander Craig Aitken en cuenta a lo tendiendo a eximirse de los prodigios del cálculo.



# GUINNESS WORLD RECORDS

## CERTIFICATE

THE FASTEST TIME FOR AN INDIVIDUAL  
TO ADD TOGETHER 100 SINGLE DIGITS IS  
A WORLD RECORD 19.23 SECONDS BY  
ALBERTO COTO GARCIA (SPAIN),  
AT THE VALLE REAL COMMERCIAL  
CENTRE, SANTANDER, SPAIN  
ON 29 JUNE 1999

Keeper of the Records  
GUINNESS WORLD RECORDS

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Alberto Coto García".

# GUINNESS BUCH DER REKORDE

## URKUNDE

Das GUINNESS BUCH DER REKORDE bestätigt nach sorgfältiger Prüfung die Rekordleistung:

*Alberto Coto*

Wir bestätigen die Teilnahme an einem Rekordversuch im Rahmen des Tummelum Festivals in Flensburg vom 05.-07. Juli 2002. Die Rekordleistung wird nach erfolgter Anmeldung bei GUINNESS WORLD RECORDS in England für einen Eintrag im Orginal Buch der Rekorde geprüft.

*Rainer Gebhardt*

REDAKTION  
GUINNESS BUCH DER REKORDE



Berg- und Adam-Ries-Stadt  
**Annaberg-Buchholz ...**

„... mit uns können Sie rechnen“



## Weltmeisterschaft im Kopfrechnen

*Alberto Coto*

1. Platz Disziplin Multiplikation

*Rainer Gebhardt*

Dr. Rainer Gebhardt  
Adam-Ries-Bund

30. 10. 2004  
/ /

*Barbara Klapisch*

Barbara Klapisch  
Oberbürgermeisterin



Freie Presse

FRITZ & MACZIOL : INFOMAX

Sparkasse  
Erzgebirge



## Mental Calculation World Cup 2006

**Alberto Coto García**

**Winner**

**Category Multiplication**

**Mathematikum Giessen  
Germany**

Giessen, 4 November 2006

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher  
Director of Mathematikum

Ralf Laue  
Jury

**mathematikum**

Si desea contactar con el autor, puede hacerlo a través de:

[www.albertocoto.com](http://www.albertocoto.com)



Está demostrado que el cálculo mental es un ejercicio imprescindible para aumentar la inteligencia, mantener el cerebro en forma y prevenir el envejecimiento prematuro de las neuronas, permitiéndonos tener una mente más activa, lógica, potente y ágil.

En este libro, el autor, poseedor de varios récords mundiales de cálculo le enseña a entrenar su mente de un modo fácil, efectivo y ameno.



**ALBERTO COTO** (Lada de Langreo, Asturias, 1970) es la persona más rápida del mundo haciendo cálculos mentales, como así lo certifican sus múltiples Records Guinness y sus seis títulos de Campeón del Mundo.

Su capacidad es calificada por prestigiosos psicólogos como un logro en el límite de lo humano. Durante los últimos años ha impartido cientos de conferencias y demostraciones mostrando que las matemáticas y el cálculo son un atractivo estimulante mental y que sus técnicas y métodos ayudan a potenciar las capacidades mentales.

Es frecuentemente solicitado por los medios de distintos países con constantes apariciones televisivas y en radio.

Su web es: [www.albertocoto.com](http://www.albertocoto.com)

ISBN: 978-84-414-2127-1

3 4 0 0 3  
9 788441 421271



ALBERTO COTO

# Entrenamiento mental

Cómo el cálculo y los números aumentan el potencial de la mente

EDAF

