МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Кафедра алгебры и дискретной математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

по предмету: «Теория автоматов и формальных языков»

Выполнил:
Студент 3 курса, 9 группы — Стребежев Игорь

Проверил:
к.т.н., ст. преп. кафедры АДМ — Е.В. Алымова

Ростов-на-Дону
2015

Задание 1

Вариант 18. Язык над алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$, состоящий из всех слов, в которых после третьей слева единицы стоит четное число групп вида 01.

(i) Построить ПЛ-грамматику G, порождающую L.

$$\begin{aligned}
&S \to 0S \mid 1A,\\
&A \to 0A \mid 1B,\\
&B \to 0B \mid 1C \mid 1,\\
&C \to 0101C \mid 0101;
\end{aligned} \tag{1}$$

(ii) Доказать вложения $L \subseteq L(G)$, $L(G) \subseteq L$.

$\underline{L \subseteq L(G)}$: Рассмотрим дерево выводов грамматики.

$S \implies 0S \implies 00S \implies 000S \implies \ldots$ — нули разрешены в начале слов в L.

$S \implies 1A \implies 10A \implies 100A \implies \ldots$ — генерация первой единицы и последовательности нулей.

Первые три правила грамматики одинаковы и образуют три пары из последовательности (возможно пустой) нулей и единицы. Что также удовлетворяет описанию языка L.

$11B \implies 111$ — в таком случае количество групп вида 01 будет равно нулю (чётно), принадлежит языку.

$11B \implies 111C \implies 111\ 0101$ — генерация пары групп.

$11B \implies 111C \implies 111\ 0101C \implies 111\ 0101\ 0101$ — всегда чётное количество групп.

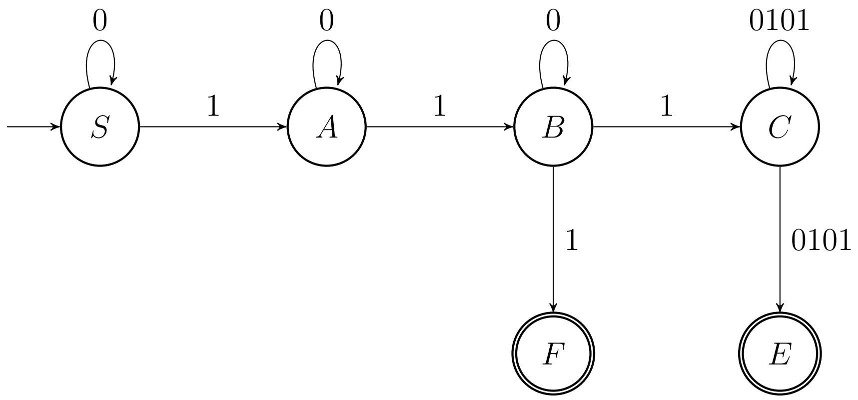
Таким образом все слова, порождаемые грамматикой G принадлежат языку L, то есть $L \subseteq L(G)$.

$\underline{L(G) \subseteq L}$: Язык L имеет структуру $(0^*1)(0^*1)(0^*1)(1010)^*$, каждая цепочка этого языка описывает все терминальные выводы из правил грамматики, как показано в предыдущем пункте, что и доказывает вложение.

(iii) Путём решения системы линейных уравнений с регулярными коэффициентами построить регулярное выражение, описывающее L.

$$\begin{aligned}
&S = 0S + 1A,\\
&A = 0A + 1B,\\
&B = 0B + 1C + 1,\\
&C = 0101C + 0101;\\
\\
&C = (0101)^*0101 = 0101^+,\\
&B = 0B + 1(0101^+ + \varepsilon) = 0^*1(0101^+ + \varepsilon),\\
&A = 0A + 1(0^*1(0101^+ + \varepsilon)) = 0^*1(0^*1(0101^+ + \varepsilon)),\\
&S = 0S + 1(0^*1(0^*1(0101^+ + \varepsilon))) = 0^*1(0^*1(0^*1(0101^+ + \varepsilon)));\\
\\
&0^*1(0^*1(0^*1(0101^+ + \varepsilon))) = (0^*1)(0^*1)(0^*1)(0101)^*.
\end{aligned} \tag{2}$$

(iv) Построить НКА или e-НКА M^{ND}, распознающий язык L, предъявить его граф.



(v) Построить ДКА M^D путём детерминизации M^{ND}, предъявить его граф.

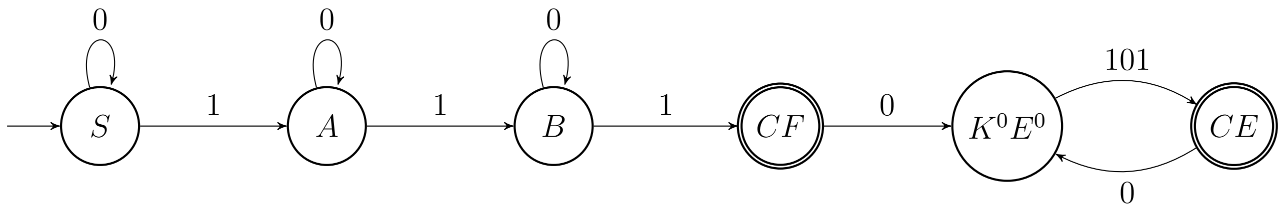
Построим таблицу переходов M^{ND}.

δ' |	S	A	B	C	K^0	K^{01}	K^{010}	E^0	E^{01}	E^{010}	E	F
0 |	S	A	B	$\{K^0, E^0\}$	—	K^{010}	—	—	E^{010}	—	—	—
1 |	A	B	$\{C, F\}$	—	K^{01}	—	C	E^{01}	—	E	—	—

Расширим таблицу при приведении автомата в M^D.

δ' |	S	A	B	$\{C, F\}$	$\{K^0, E^0\}$	$\{K^{01}, E^{01}\}$	$\{K^{010}, E^{010}\}$	$\{C, E\}$
0 |	S	A	B	$\{K^0, E^0\}$	—	$\{K^{010}, E^{010}\}$	—	$\{K^0, E^0\}$
1 |	A	B	$\{C, F\}$	—	$\{K^{01}, E^{01}\}$	—	$\{C, E\}$	—

Отобразим этот автомат на диаграмме.

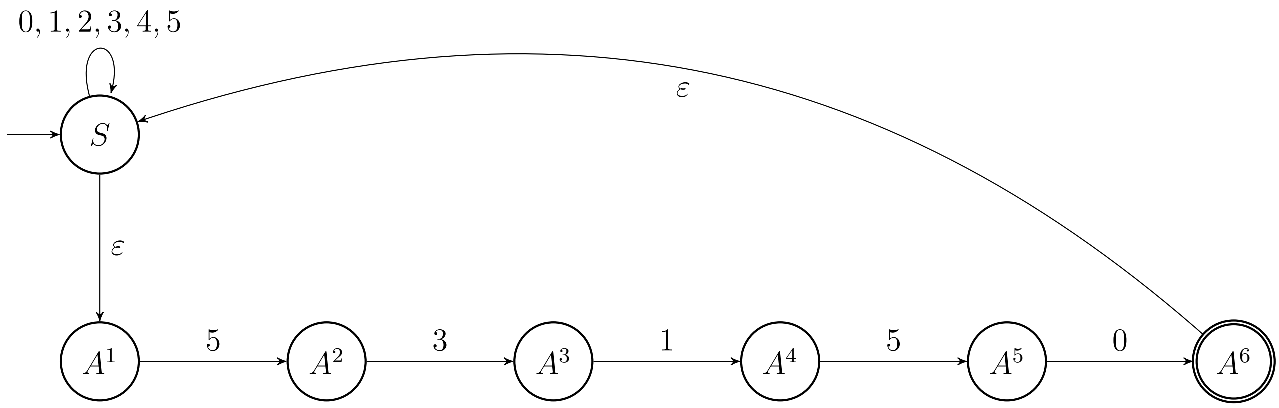


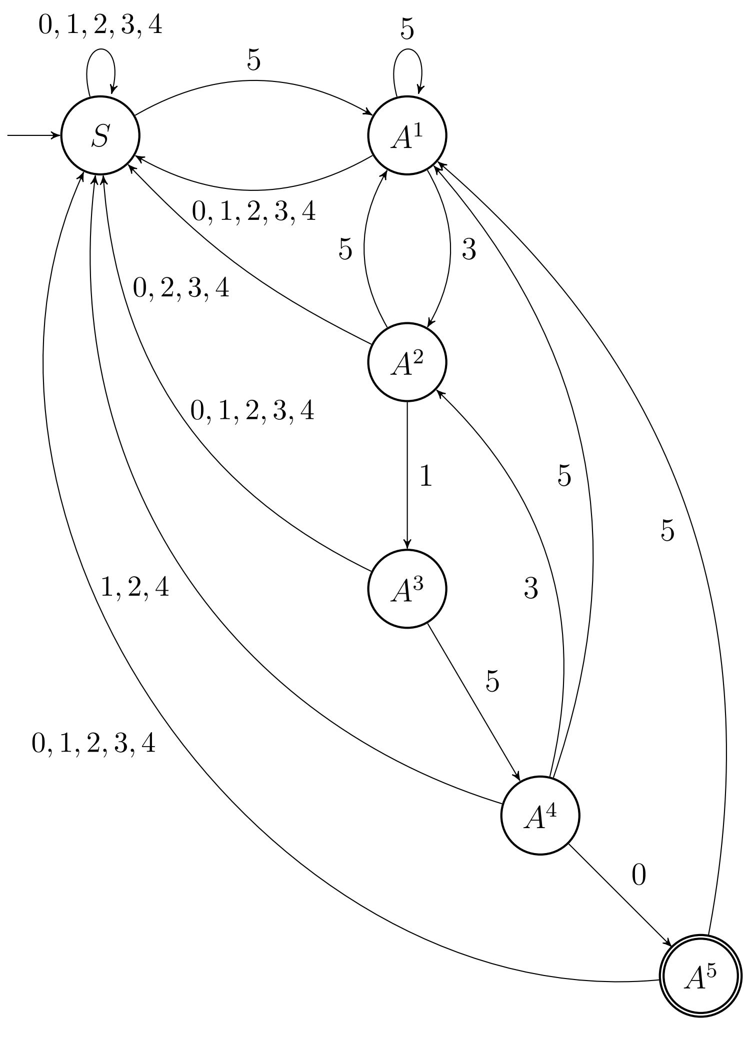
Задание 2

Вариант 29. $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{53150, 53555, 5510, 0001\}$.

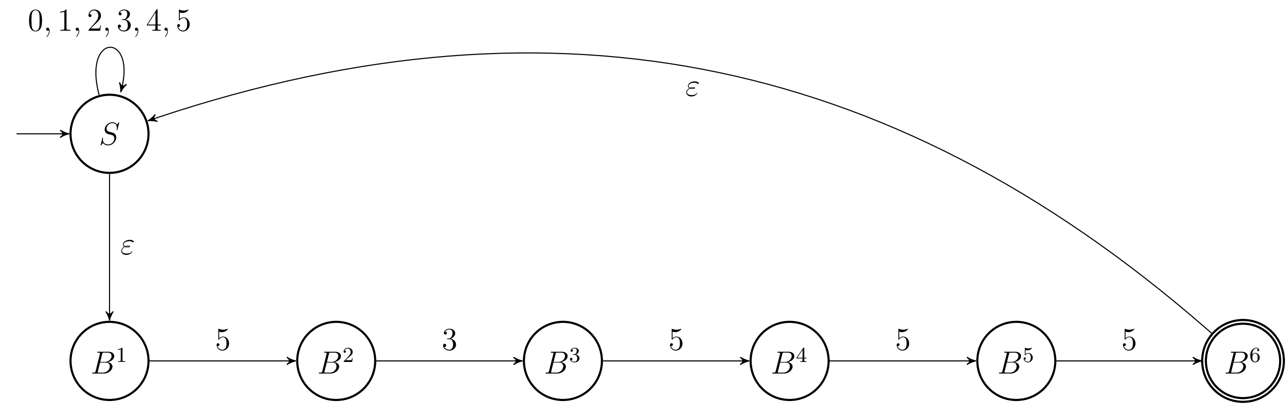
1. Для каждого слова $w_i \in A$ построить НКА M_i^{ND}, распознающий наличие в произвольной строке $s \in \Sigma^*$ подстроки w_i.
2. Для каждого НКА M_i^{ND} построить соответствующий ДКА M_i^D.

Слово 53150.

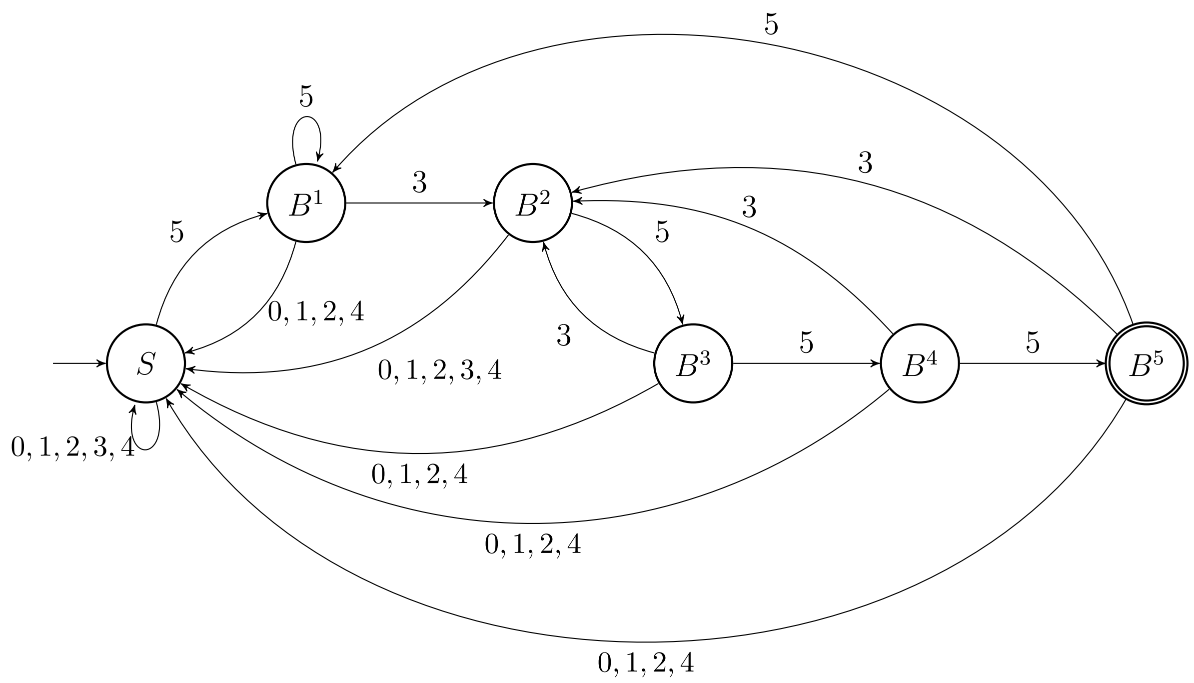




Слово 53555.

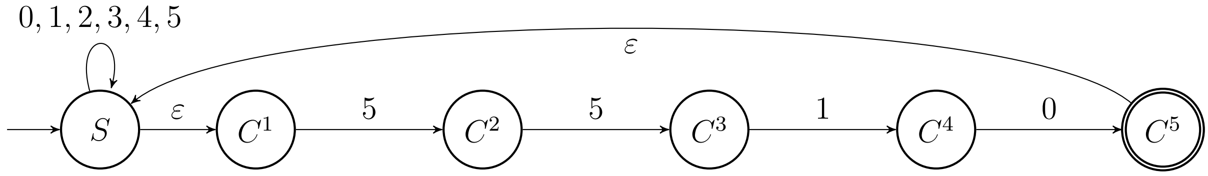


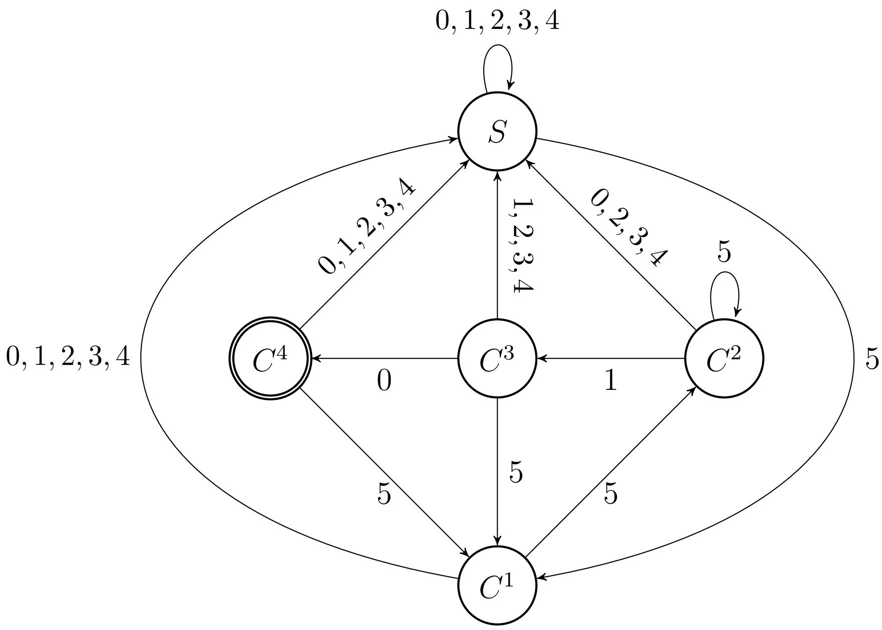
$0, 1, 2, 3, 4, 5$
S
ε
ε
B^1
5
B^2
3
B^3
5
B^4
5
B^5
5
B^6



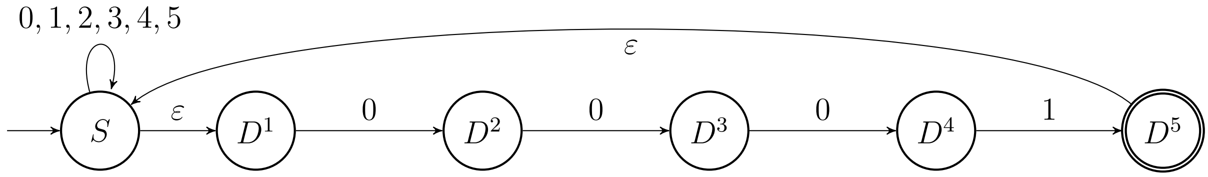
5
5
B^1
3
B^2
3
3
5
5
$0, 1, 2, 4$
3
S
$0, 1, 2, 3, 4$
B^3
5
B^4
5
B^5
$0, 1, 2, 3, 4$
$0, 1, 2, 4$
$0, 1, 2, 4$
$0, 1, 2, 4$

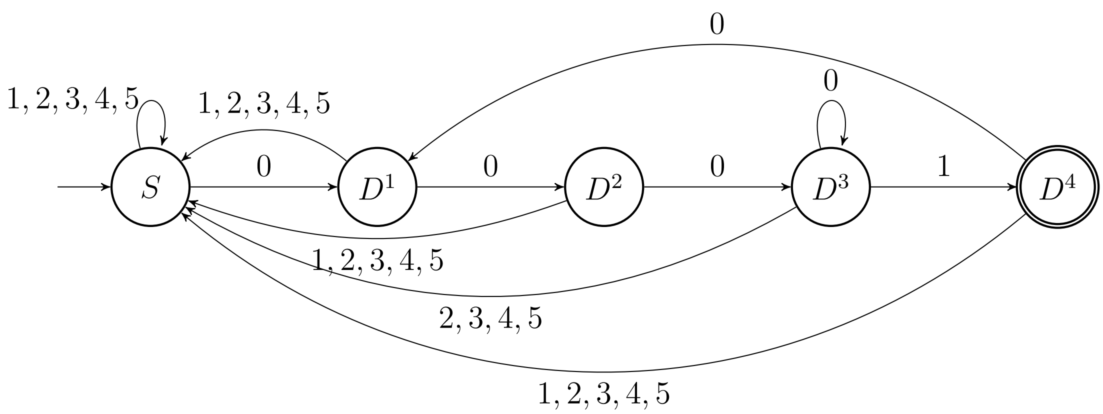
Слово 5510.





Слово 0001.





Задание 3

$L_1 = b^*bba^*(ab+b)^*$, $L_2 = a^*ba^*ab$.

(i) Вычислить регулярное выражение, определяющее язык $L_1 \cap L_2$.

Рассмотрим множество слов из L_2 таких, что их первая буква равна a, $M = \{w \mid w \in L_2, w^0 = a\}$. Очевидно, что $L_1 \cap M = \varnothing$, так как слова из L_1 начинаются с буквы b. Уберём это множество из рассмотрения, пусть $L_2' = ba^*ab$, где $L_2' \cup M = L_2$.

В множестве L_2' все слова начинаются со строки "ba", а в множестве L_1 — "bb". Из этого следует, что L_1 и L_2' не пересекаются, а значит $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

(ii) Вычислить регулярное выражение, определяющее язык $L_1 \triangle L_2$.

Согласно определению симметрической разности имеем:
$L_1 \triangle L_2 = (L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2) = L_1 \cup L_2 = b^*bba^*(ab+b)^* + a^*ba^*ab$.

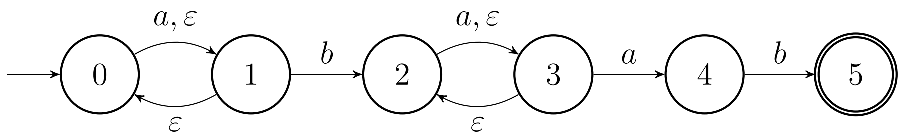
(iii) Определить: совпадают ли языки L_1 и L_2, является ли L_1 дополнением L_2.

Так как $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, то $L_1 \neq L_2$.

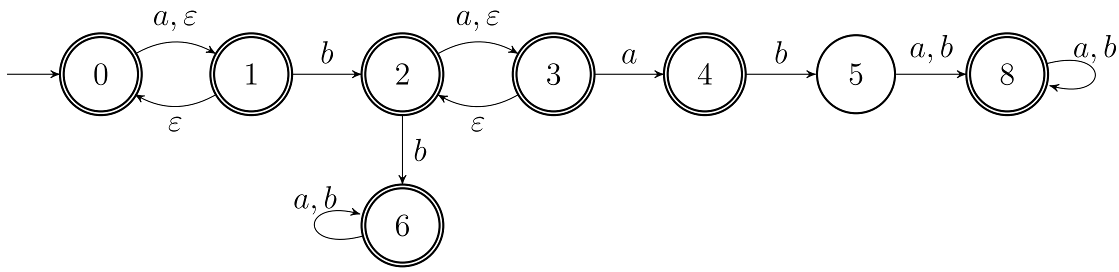
Предположим, L_1 является дополнением L_2. Рассмотрим слово $w =$ "ba". Видно, что $w \notin L_1,\ w \notin L_2 \Rightarrow$ наше предположение неверно.

(iv) Построить e-НКА, распознающий один из языков L_1^R или L_2^R.

Построим L_2:

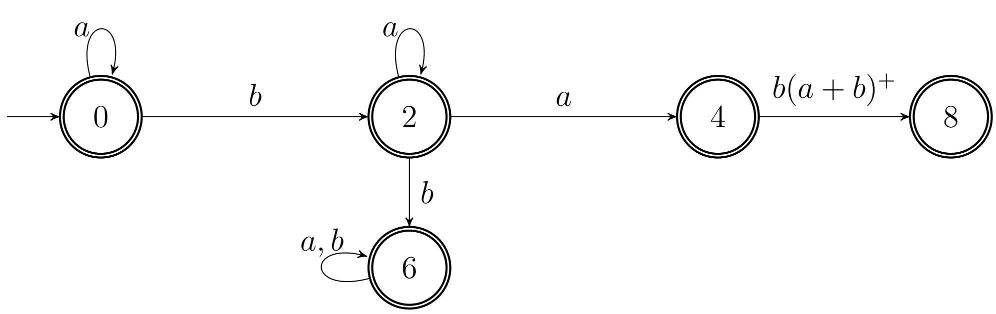


Построим L_2^R:



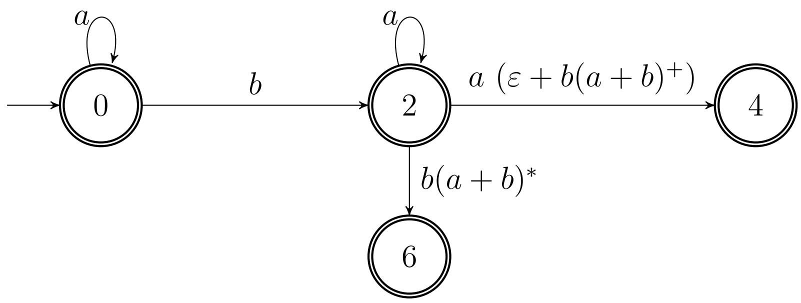
(v) Вычислить регулярное выражение по построенному e-НКА.

Упростим построенный в предыдущем пункте автомат, используя метод исключения.

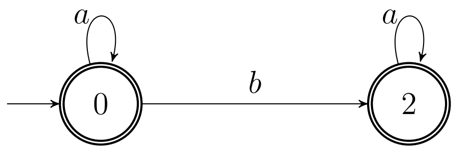


Опишем заключающее состояние в вершине 8: $R = a^*ba^*ab(a+b)^+$.

Уберём вершину 8, опишем состояние в вершине 4: $R = a^*ba^*a\ (\varepsilon + b(a+b)^+)$.



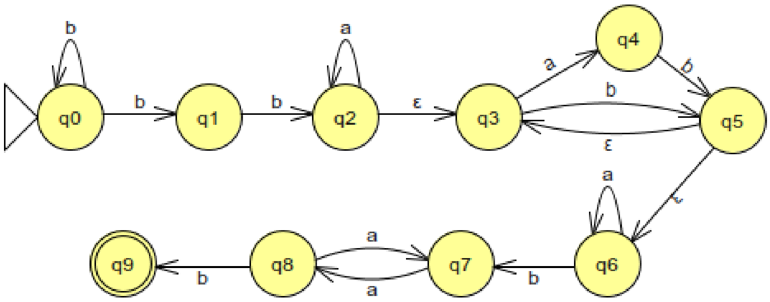
Уберём вершины 4, 6, опишем состояние в вершине 2:
$R = a^*ba^*\ (\varepsilon\ +\ b(a+b)^* +\ a(\varepsilon + b(a+b)^+))$.



Данный автомат можно описать выражением $\varepsilon + a^* + a^*b + a^*ba^* = a^*(b+\varepsilon)a^*$.

Ответ: $R = a^*(b+\varepsilon)a^*\ (\varepsilon\ +\ b(a+b)^*\ +\ a(\varepsilon + b(a+b)^+))$.

(vi) Построить ε-НКА, распознающий $L_1 L_2$.
$q0 = S$, остальные состояния пронумерованы от 1 до 9 ($q1 - q9$).



(vii) Детерминизировать один из построенных ε-НКА. Верхние индексы для удобства.

δ'	S^0	$S1^1$	$S12356^2$	23456^3	$S123567^4$	3567^5	234568^6	468^7
a	—	—	23456^3	23456^3	234568^6	468^7	234567^8	67^{10}
b	$S1^1$	$S12356^2$	$S123567^4$	3567^5	$S123567^4$	3567^5	35679^9	35679^9

δ'	234567^8	35679^9	67^{10}	68^{11}	7^{12}	79^{13}	8^{14}	9^{15}
a	234568^6	468^7	68^{11}	67^{10}	8^{14}	8^{14}	—	—
b	3567^5	3567^5	7^{12}	79^{13}	—	—	9^{15}	—

Задание 1

(vi) Доказать, что $L(M^{ND}) = L(M^D) = L$.

Так как мы получили M^D путём детерминизации M^{ND}, то по теореме о редукции языки этих автоматов эквивалентны. Построение M^{ND} производилось по регулярной грамматике, и по теореме Клини следует, что $L(G) = L(M^{ND})$. Равенство же $L(G) = L$ было доказано во втором пункте первого задания. Таким образом тождество доказано.

(vii) Мимимизировать полученный конечный автомат, распознающий язык L, или доказать его минимальность.

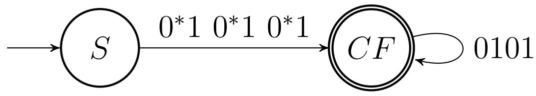
Рассмотрим M^D. Конечные состояния CF и CE являются эквивалентными, поэтому их можно совместить. Все остальные состояния различимы.

Отобразим этот автомат на диаграмме. (101 — два состояния с тремя дугами.)

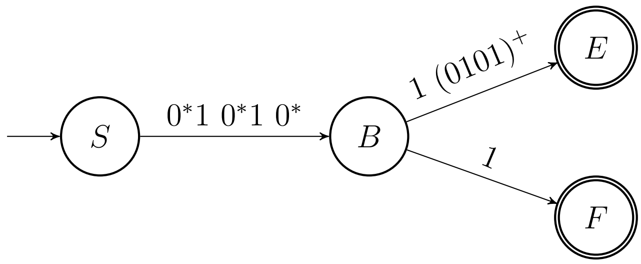
$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & S \arrow[loop above, "0"] \arrow[r, "1"] & A \arrow[loop above, "0"] \arrow[r, "1"] & B \arrow[loop above, "0"] \arrow[r, "1"] & CF \arrow[r, bend left, "0"] & KE \arrow[l, bend left, "101"]
\end{tikzcd}$$

(viii) Методом последовательного исключения состояний выписать регулярные выражения для $L(M^{ND})$, $L(M^{D})$.

M^D: Петли с нулём заменим на 0^*, а цикл $CF{-}KE$ на $(1010)^*$, $L(M^D) = 0^*1\,0^*1\,0^*1\,(0101)^*$;

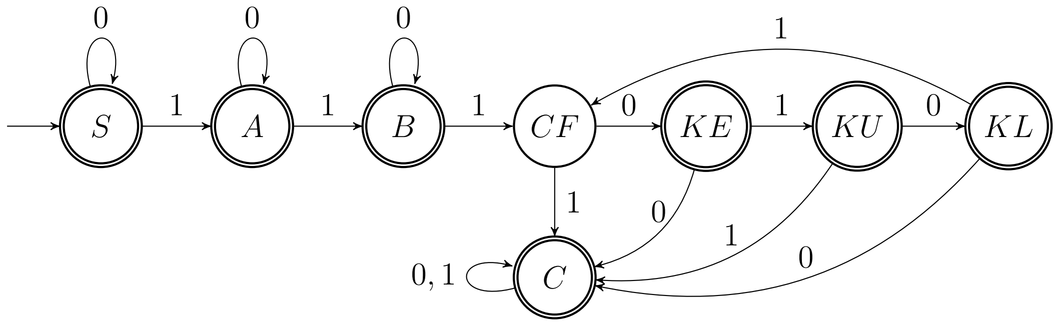


M^{ND}: Стянем вершину C, после чего разобьём SB на два пути: SE, SF.
$L(M^{ND}) = (0^*1\ 0^*1\ 0^*1) + (0^*1\ 0^*1\ 0^*1\ (0101)^+) = 0^*1\ 0^*1\ 0^*1\ (0101)^*$.



(ix) Построить ДКА, распознающий дополнение $!L$ к языку L, записать $!L$ в виде регулярного выражения.

Доопределим автомат до полного, преобразуем его в дополнение.



Построим грамматику, порождающую этот автомат.

$$
\begin{aligned}
&S \to \varepsilon \mid 0S \mid 1A,\\
&A \to \varepsilon \mid 0A \mid 1B,\\
&B \to \varepsilon \mid 0B \mid 1CF,\\
&CF \to 0KE \mid 1C,\\
&KE \to \varepsilon \mid 1KU \mid 0C,\\
&KU \to \varepsilon \mid 0KL \mid 1C,\\
&KL \to \varepsilon \mid 1CF \mid 0C,\\
&C \to \varepsilon \mid 1C \mid 0C;
\end{aligned} \tag{3}
$$

Решим систему уравнений:

$KE = 101CF + 1 + 10 + (0 + 11 + 100)(0 + 1)^* + \varepsilon$,

$CF = 0101CF + 0 + 01 + 010 + (1 + 00 + 011 + 0100)(0 + 1)^* + \varepsilon$,

$CF = (0101)^*(0 + 01 + 010 + (1 + 00 + 011 + 0100)(0 + 1)^* + \varepsilon)$,

$S = 0^*(\varepsilon + 10^*(\varepsilon + 10^*(\varepsilon + 1CF))) = 0^* + 0^*10^* + 0^*10^*1\,CF$

Ответ: $0^* + 0^*10^* + 0^*10^*1\,(0101)^*(0 + 01 + 010 + (1 + 00 + 011 + 0100)(0 + 1)^* + \varepsilon)$.