Interactive Visual Computing (IVC)

bzw.

Computergrafik und Bildsynthese (CGB)

(Wintersemester 2011/12)

Werner Hansmann

Geometrisches Modellieren

Geometrisches Modellieren

- Zweck des geometrischen Modellierens
- Repräsentation geometrischer Modelle
- Formen geometrischer Modelle
- Beschreibung der Geometrie
- Beschreibung der Topologie
- zur grafischen Darstellung modellierter Gegenstände

Zweck des geometrischen Modellierens

Das geometrische Modellieren ist ein Grundlagengebiet für diverse Natur- und Ingenieurwissenschaften; im Bereich des **CAD** (Computer Aided Design) dient es

- dem Entwurf und
- der (möglichst exakten) Beschreibung der Form von Gegenständen zum Zwecke der
  - **Analyse** für
    - Bauingenieure,
    - Maschinenbauingenieure,
    - Schiffbauingenieure,
    - Chemiker und Biologen,
    - Mediziner,
    - etc.

Zweck des geometrischen Modellierens (Forts.)

Typische **Analysen** sind über sog. FE-Diskretisierung (Finite Elemente) möglich:

- Massenberechnung,
- Schwerpunktberechnung (Schiffe, etc.),
- Festigkeitsberechnung, Tragfähigkeitsberechnung,
- aerodynamische und hydrodynamische Berechnungen,
- Funktionsanalysen (Kollisionstests, etc.)

Darüber hinaus ermöglichen geometrische Modelle z.B. die

- Konstruktion synthetischer Moleküle,
- Vorbereitung chirurgischer Eingriffe,
- etc.

Zweck des geometrischen Modellierens (Forts.)

- Entwurf und
- (möglichst exakte) Beschreibung der Form von Gegenständen zum Zwecke der **Fertigung** (**CIM**: Computer Integrated Manufacturing), d.h. der Erstellung von Steuerungsdaten für das
  - Blechschneiden (z.B. Schiffsbleche, Karosseriebleche),
  - Fräsen von
    - Bauteilen,
    - Getriebeteilen,
    - Werkzeugen (z.B. Blechpressen, Gußformen),
    - etc.

  in der Bildhauerei, der Bauindustrie, der Maschinenbauindustrie, der Schiffbau-, Flugzeugbau-, Automobilbauindustrie, der Chemie- und Pharmaindustrie, etc.

Zweck des geometrischen Modellierens (Forts.)

- Entwurf und
- (möglichst exakte) Beschreibung der Form von Gegenständen zum Zwecke der
  - **Visualisation** (d.h. grafischen Wiedergabe zu Kontrollzwecken) für
    * Bildhauer,
    * Architekten,
    * Bau- bzw. Maschinenbauingenieure,
    * Kfz-Designer,
    * Chemiker und Biologen,
    * Mediziner,
    * etc.

    (d.h. typisches **Anwendungsgebiet für die Computergrafik**)

Repräsentation geometrischer Modelle

Es gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Methoden, geometrische Modelle zu repräsentieren:

- Volumenbasierte Repräsentation
- Begrenzungsbasierte Repräsentation

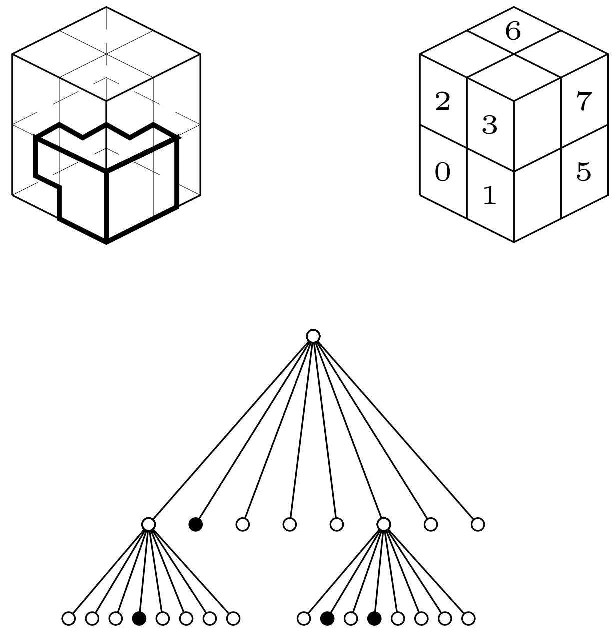
Sie haben sich aus den Ansprüchen und Erfahrungen unterschiedlicher Anwendungsgebiete heraus entwickelt und besitzen i.d.R. in Bezug auf das jeweilige Anwendungsgebiet ein hohes Maß an Intuition.

Repräsentation geometrischer Modelle (Forts.)

Volumenbasierte Repräsentationsformen

- **Octree**

  Prinzip:
  sukzessive Unterteilung der Objekthülle (Hüllquader) in "Achtelquader" (bzw. Zusammenfassung von Voxelclustern)

  Anwendungsgebiet:
  volumenorientierte Objektrekonstruktion (z.B. Tomographie)

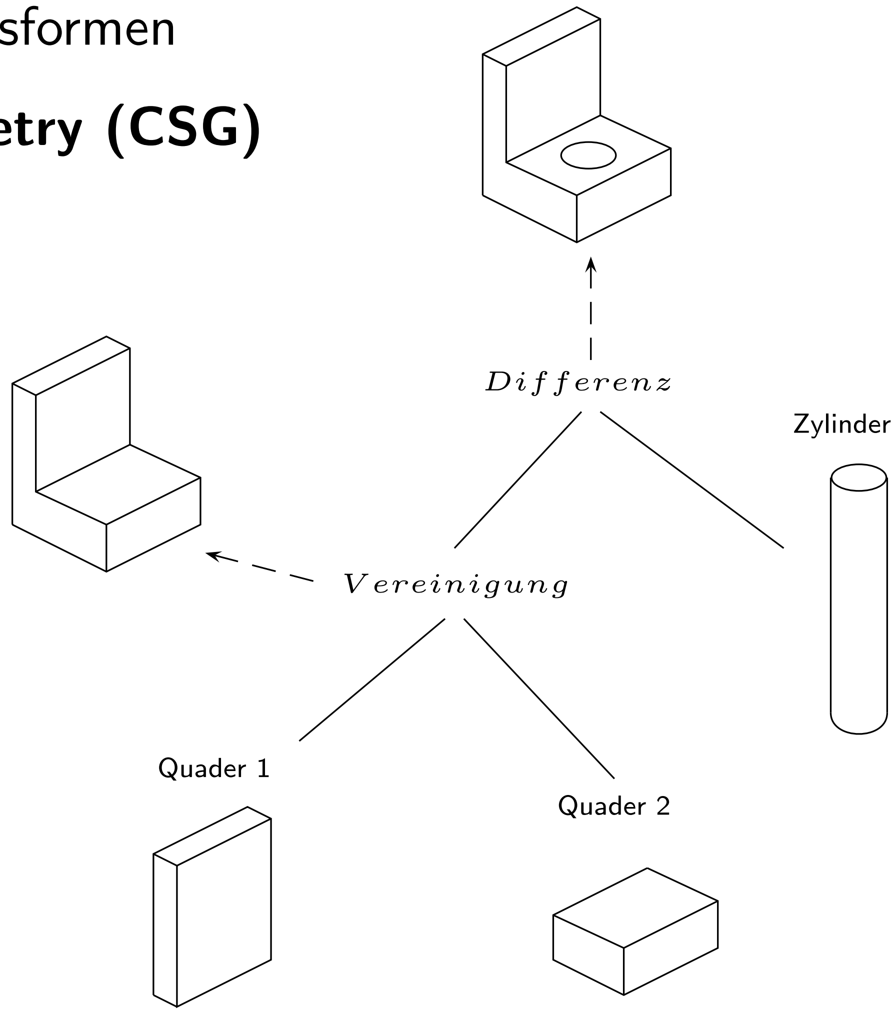
Repräsentation geometrischer Modelle (Forts.)

Volumenbasierte Repräsentationsformen

- **Constructive Solid Geometry (CSG)**

  Prinzip:
  Verknüpfung "primitiver" Objekte (Quader, Zylinder, Kegel, Kugel, etc.) durch Mengenoperationen

  Anwendungsgebiet:
  Maschinenbau (orientiert an traditionellen Fertigungsmethoden, wie Bohren, Fräsen, Stanzen)



Beispiele zur Constructive Solid Geometry (CSG)

Nachfolgend einige Beispiele zu den Mengenoperationen

- Vereinigung (union)
- Vereinigung (merge)
- Durchschnitt (intersection)
- Differenz (difference)

sowie zu Kombinationen daraus

dazu exemplarische Realisierungen in POV-Ray

Beispiele zur Constructive Solid Geometry (CSG)

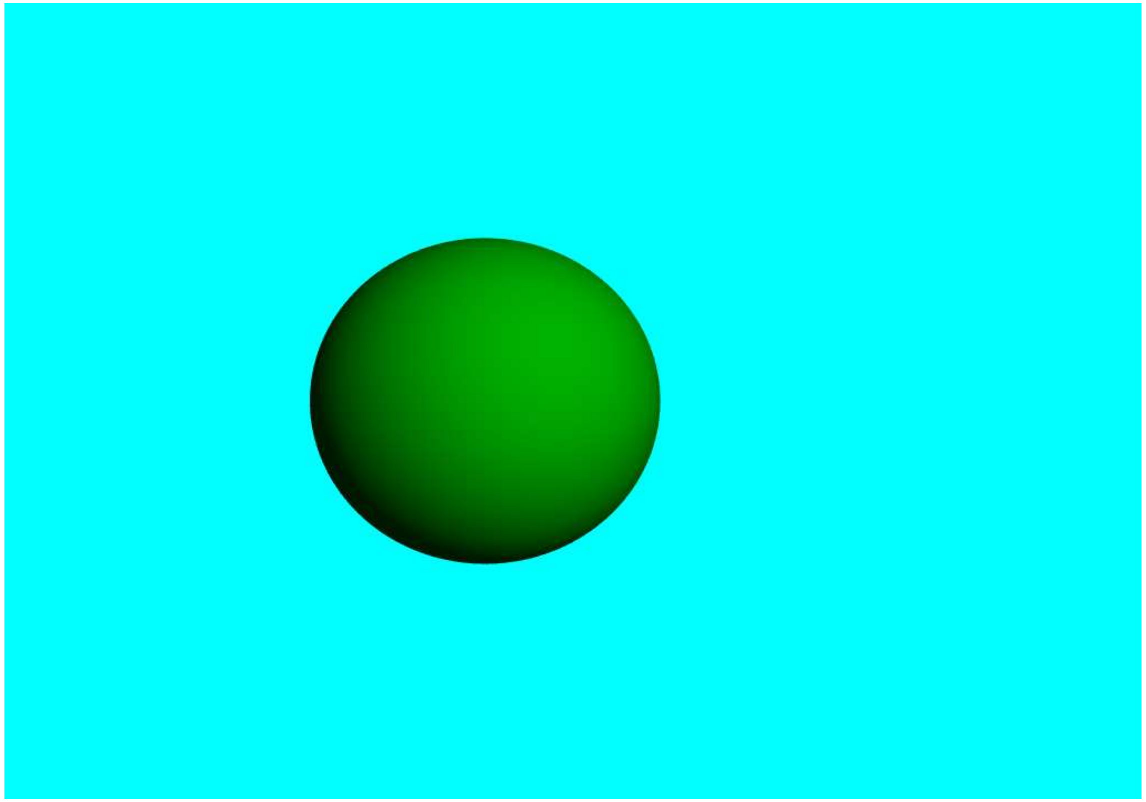
1. eine individuelle Kugel (links angeordnet)
2. eine individuelle Kugel (rechts angeordnet)
3. zwei individuelle Kugeln, ineinander „gesteckt“, individuell animiert
4. zwei individuelle durchsichtige Kugeln, ineinander „gesteckt“, individuell animiert
5. zwei durchsichtige Kugeln, Vereinigung (union), gemeinsam animiert
6. zwei durchsichtige Kugeln, Vereinigung (merge), gemeinsam animiert
7. zwei Kugeln, Durchschnitt (intersection), gemeinsam animiert
8. zwei Kugeln, Differenz (difference), gemeinsam animiert
9. L-Profil mit Bohrung (unterschiedliche Generierungsvarianten)

eine individuelle Kugel (links angeordnet)

```
#include “colors.inc“
background { Cyan }
camera {
location <0, 1, -10>
look_at <0, 0, 0>
angle 36
}
light_source { <500, 500, -1000> White }

sphere { 0, 1
pigment { Green }
translate -.5*x
}
```

eine individuelle Kugel (links angeordnet)

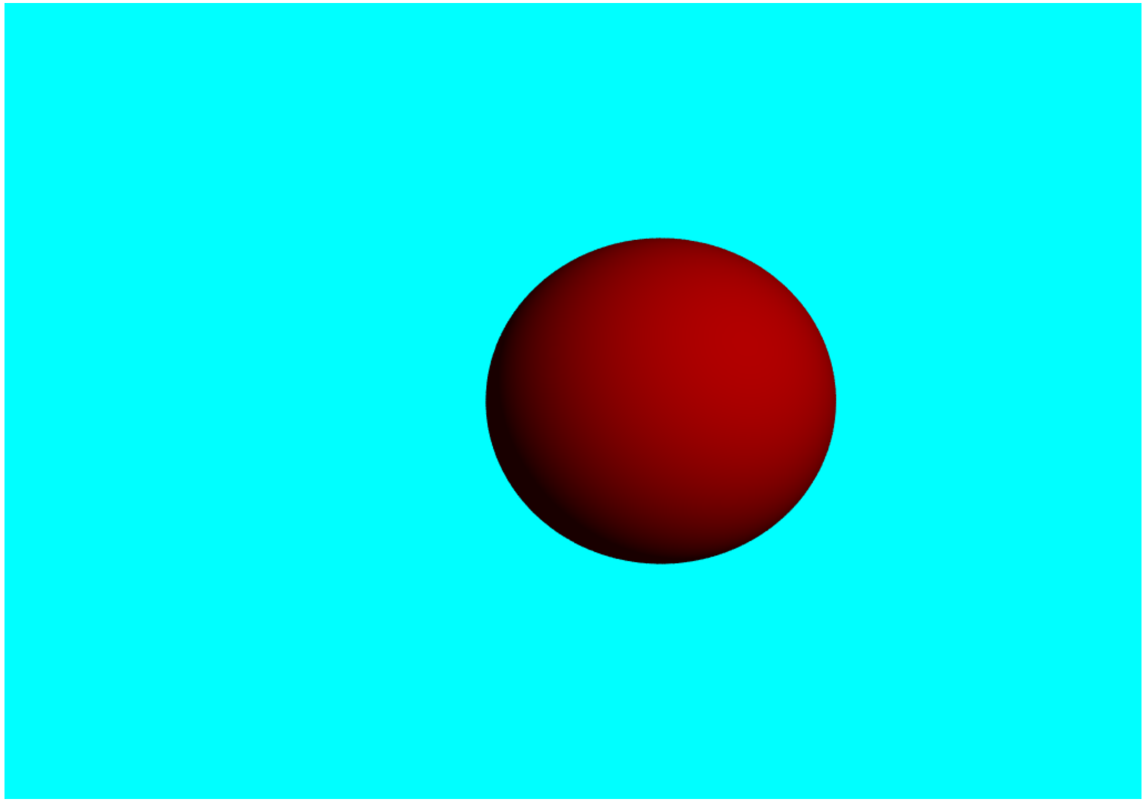


eine individuelle Kugel (rechts angeordnet)

```
#include “colors.inc“
background { Cyan }
camera {
location <0, 1, -10>
look_at <0, 0, 0>
angle 36
}
light_source { <500, 500, -1000> White }

sphere { 0, 1
pigment { Red }
translate +.5*x
}
```

eine individuelle Kugel (rechts angeordnet)

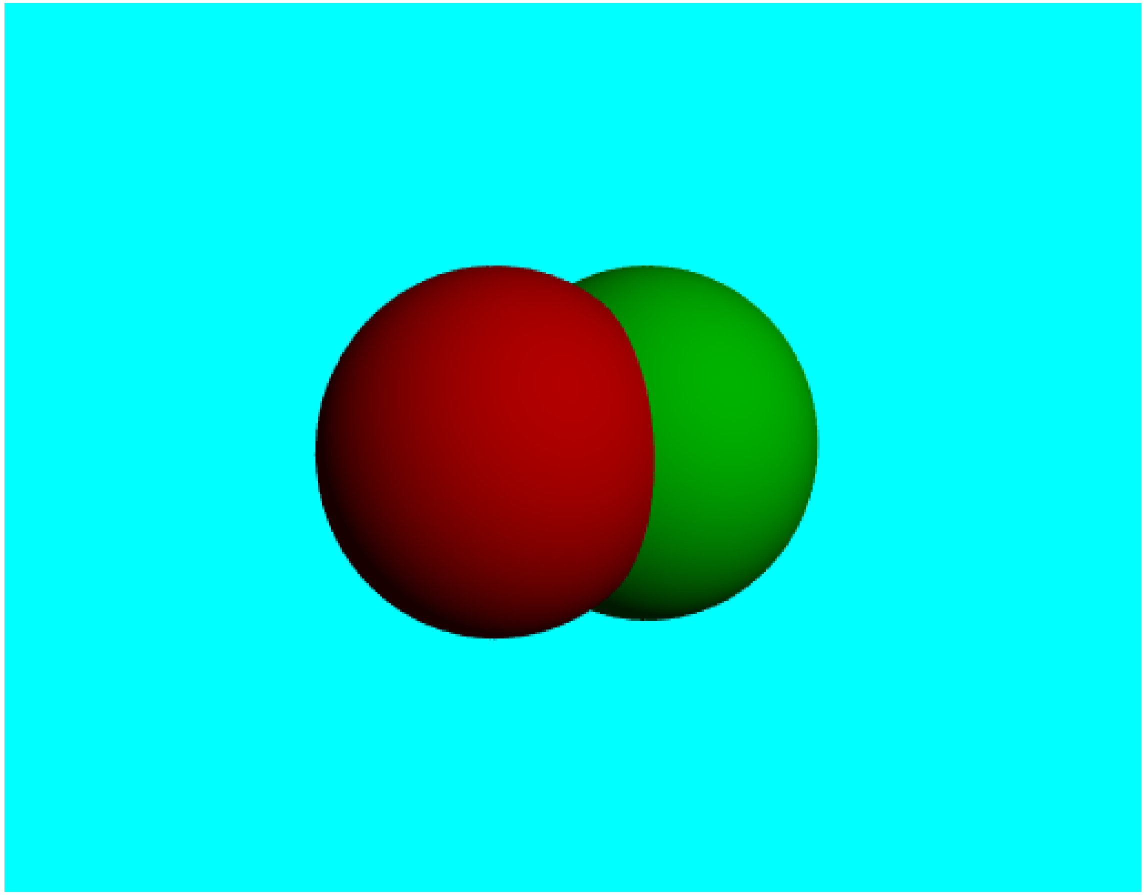


zwei individuelle Kugeln, ineinander „gesteckt“

individuell animiert

```
...
sphere { 0, 1
pigment { Green }
translate -.5*x
rotate y*360*clock
}
sphere { 0, 1
pigment { Red }
translate +.5*x
rotate y*360*clock
}
```

zwei individuelle Kugeln, ineinander „gesteckt“

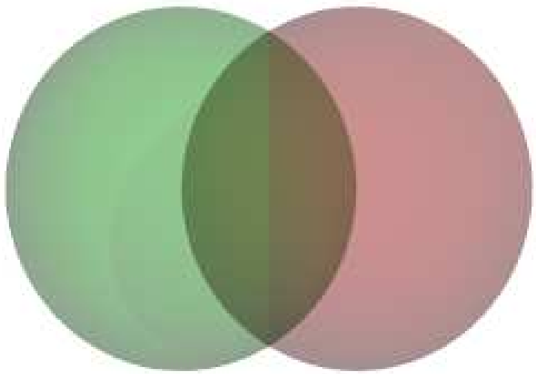


zwei individuelle durchsichtige Kugeln, ineinander „gesteckt“

individuell animiert

```
...
sphere { 0, 1
pigment { Green transmit 0.75 }
translate -.5*x
rotate y*360*clock
}
sphere { 0, 1
pigment { Red transmit 0.75 }
translate +.5*x
rotate y*360*clock
}
```

zwei individuelle durchsichtige Kugeln, ineinander „gesteckt“

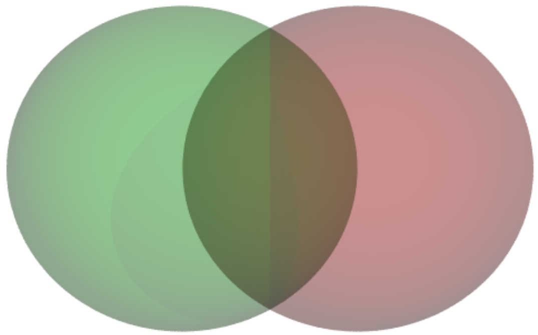


zwei durchsichtige Kugeln, Vereinigung (union)

gemeinsam animiert

```
...
union {
sphere { 0, 1
pigment { Green transmit 0.75 }
translate -.5*x
}
sphere { 0, 1
pigment { Red transmit 0.75 }
translate +.5*x
}
rotate y*360*clock
}
```

zwei durchsichtige Kugeln, Vereinigung (union)

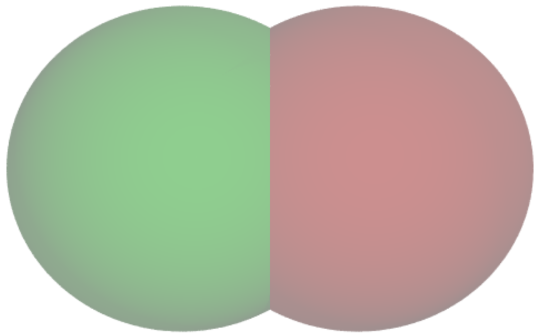


zwei durchsichtige Kugeln, Vereinigung (merge)

gemeinsam animiert

```
...
merge {
sphere { 0, 1
pigment { Green transmit 0.75 }
translate -.5*x
}
sphere { 0, 1
pigment { Red transmit 0.75 }
translate +.5*x
}
rotate y*360*clock
}
```

zwei durchsichtige Kugeln, Vereinigung (merge)

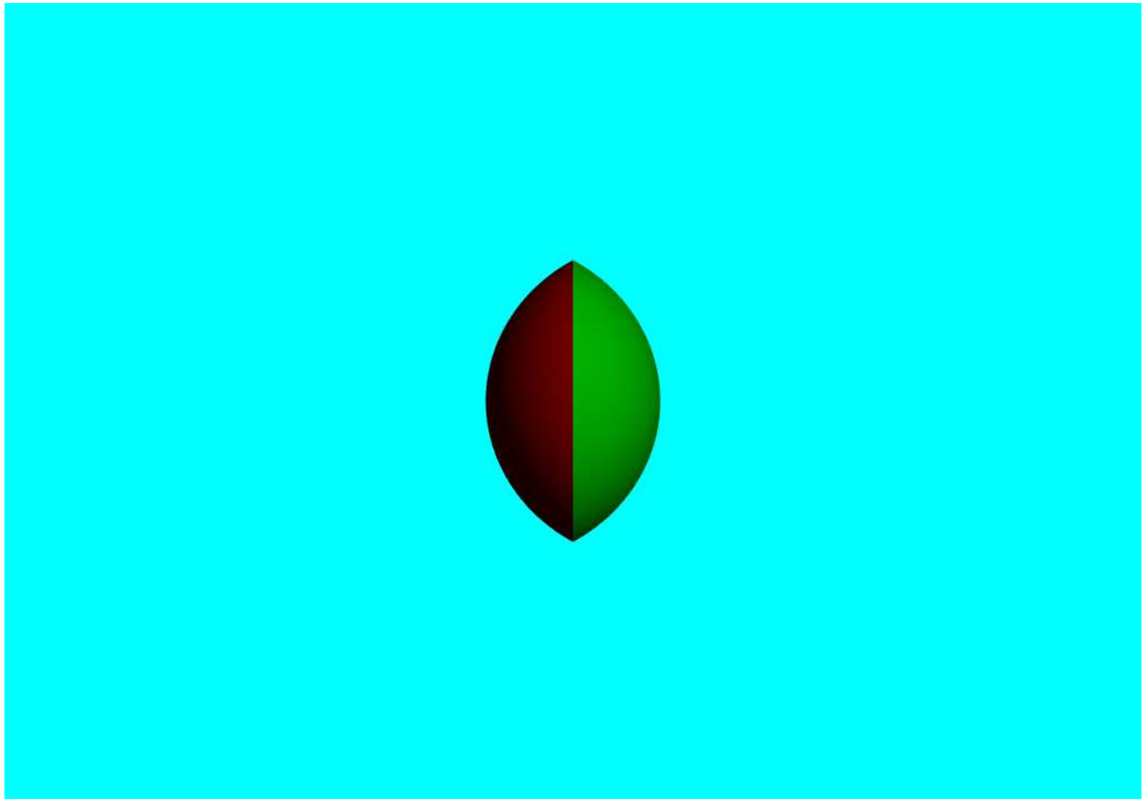


zwei Kugeln, Durchschnitt (intersection)

gemeinsam animiert – – – beachten Sie die Oberflächenfarben

```
...
intersection {
sphere { 0, 1
pigment { Green }
translate -.5*x
}
sphere { 0, 1
pigment { Red }
translate +.5*x
}
rotate y*360*clock
}
```

zwei Kugeln, Durchschnitt (intersection)

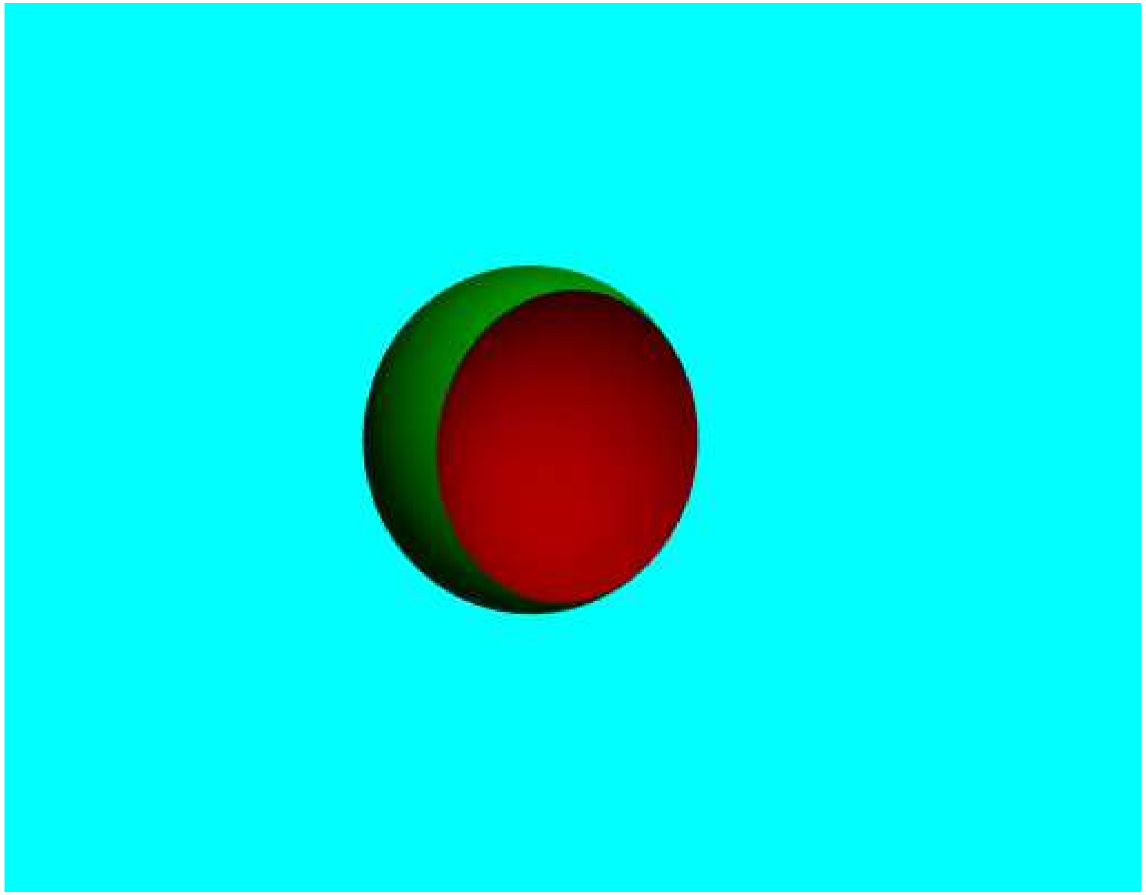


zwei Kugeln, Differenz (difference)

gemeinsam animiert – – – beachten Sie die Oberflächenfarben

```
...
difference {
sphere { 0, 1
pigment { Green }
translate -.5*x
}
sphere { 0, 1
pigment { Red }
translate +.5*x
}
rotate y*360*clock
}
```

zwei Kugeln, Differenz (difference)

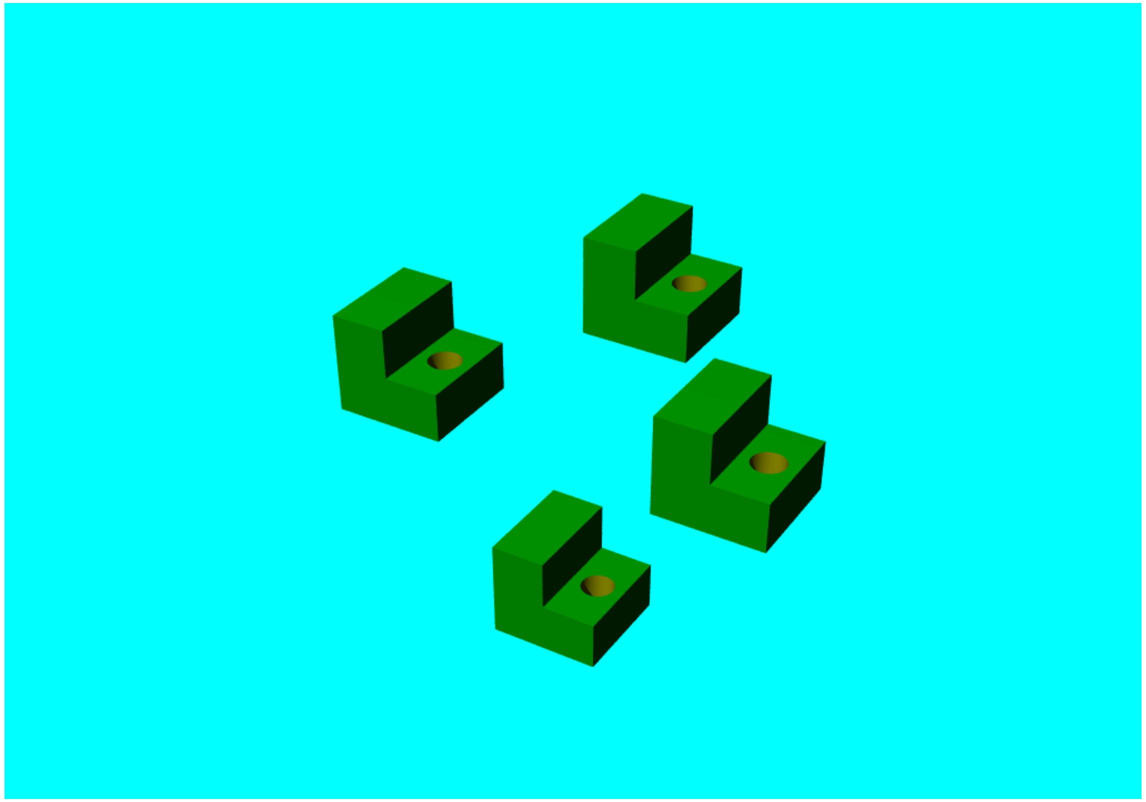


L-Profil mit Bohrung

unterschiedliche Generierungsvarianten, wie sehen die jeweiligen CSG-Bäume aus? Formulieren Sie weitere Varianten.

```
...
// Generierungsvariante 1
difference {
union {
box { -.5, <.5 0 .5>
pigment { Green } }
box { -.5*z, <-.5, .5, .5>
pigment { Green } }
}
cylinder { <.25, .5, 0> <.25, -.5, 0> .15 open
pigment { Yellow } }
translate -1.5*x }
```

L-Profil mit Bohrung



L-Profil mit Bohrung

```
// Generierungsvariante 2
...
difference {
difference {
box { -.5, .5
pigment { Green } }
cylinder { <.25, .5, 0> <.25, -.5, 0> .15 open
pigment { Yellow } }
}
box { -.6, .6
translate <.6, .6, 0>
pigment { Green } }
translate 1.5*x }
```

L-Profil mit Bohrung

```
// Generierungsvariante 3
...
union {
difference {
box { -.5, <.5 0 .5>
pigment { Green } }
cylinder { <.25, .5, 0> <.25, -.5, 0> .15 open
pigment { Yellow } }
}
box { -.5*z, <-.5, .5, .5>
pigment { Green } }
translate <0, -.5 -1.5> }
```

L-Profil mit Bohrung

```
// Generierungsvariante 4
...
difference {
box { -.5, .5
pigment { Green } }
union {
cylinder { <.25, .5, 0> <.25, -.5, 0> .15 open
pigment { Yellow } }
box { -.6, .6
translate <.6, .6, 0>
pigment { Green } }
}
translate <0, .5 1.5> }
```

Repräsentation geometrischer Modelle (Forts.)

Begrenzungsbasierte Repräsentationsformen (B-Rep.)

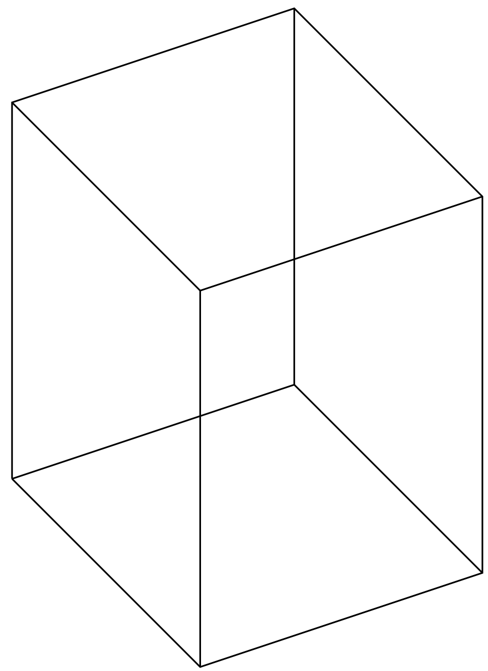
Komplexeste und flexibelste Methode der Repräsentation
Objekte werden durch die sie begrenzenden Elemente repräsentiert, z.B. Körper durch ihre Oberfläche
besonders geeignet für "Freiformgestaltung", z.B.:

- Schmiedeformen,
- Gußformen,
- Skulpturen,
- Karosserien

Formen begrenzungsbasierter geometrischer Modelle

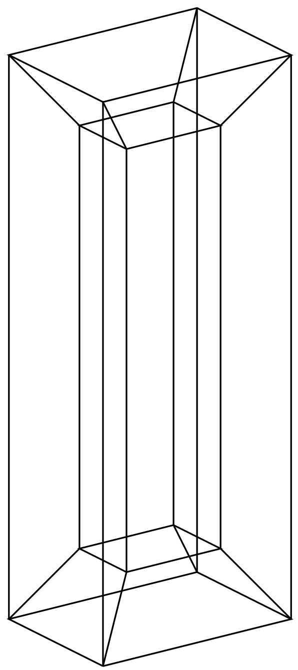
Kantenmodelle (vor 1960)

Objektrepräsentation
über Kanten (Raumkurven)
und Eckpunkte
(= Schnittpunkte der Kanten)



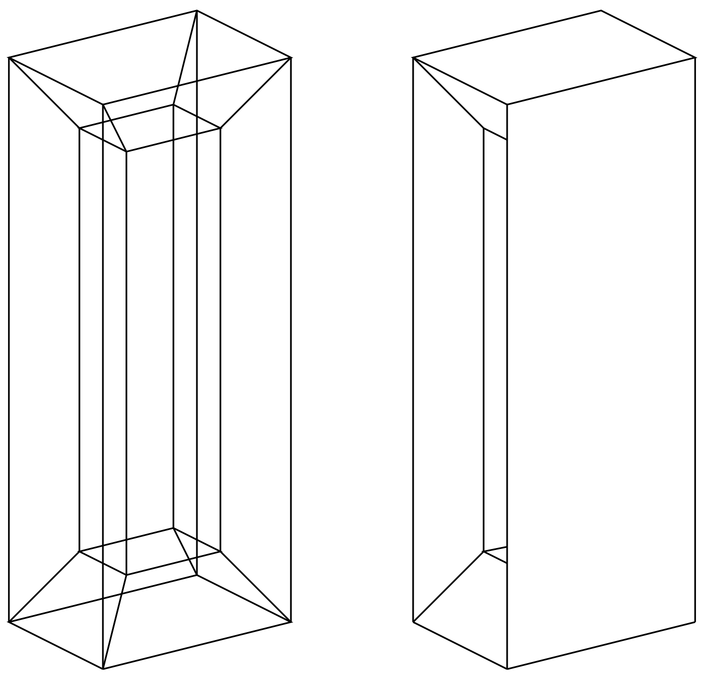
begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

Problem: Mehrdeutigkeiten beim Kantenmodell (Beispiel 1)



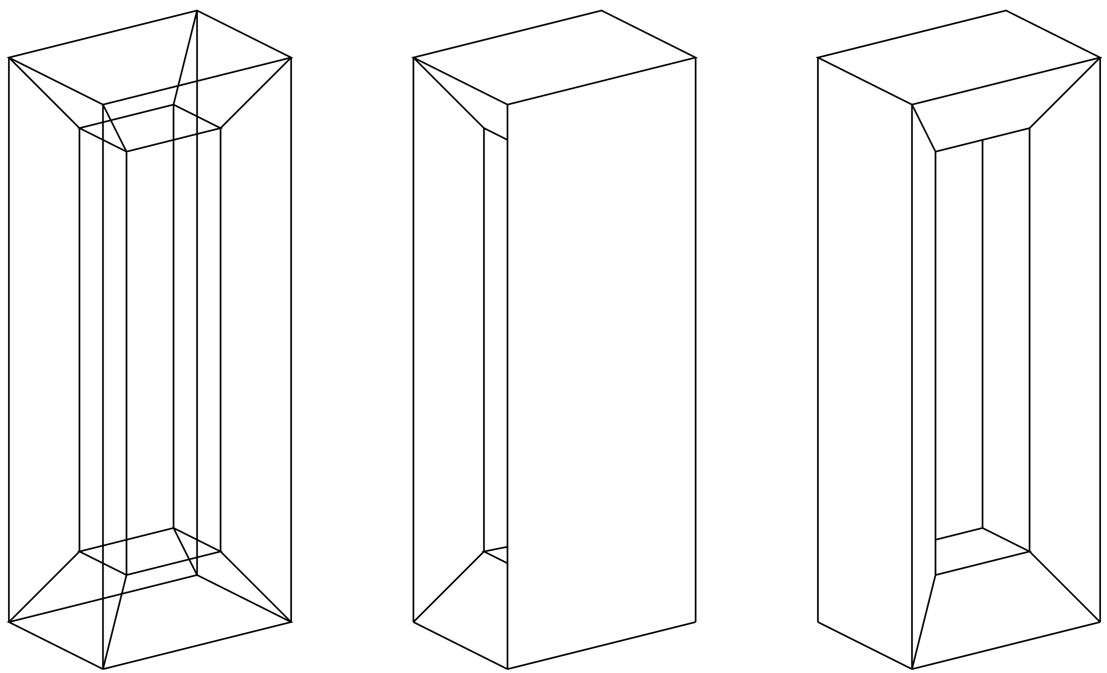
begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

Problem: Mehrdeutigkeiten beim Kantenmodell (Beispiel 1)



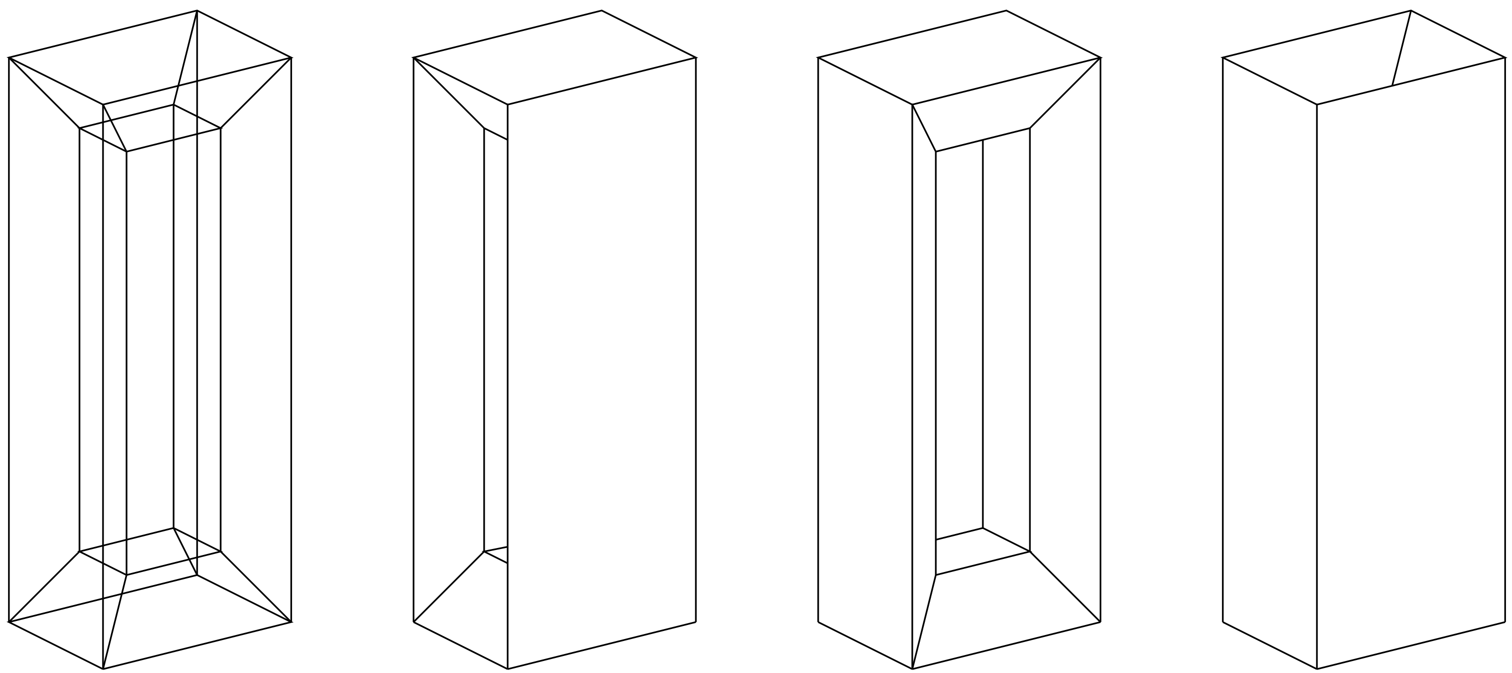
begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

Problem: Mehrdeutigkeiten beim Kantenmodell (Beispiel 1)



begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

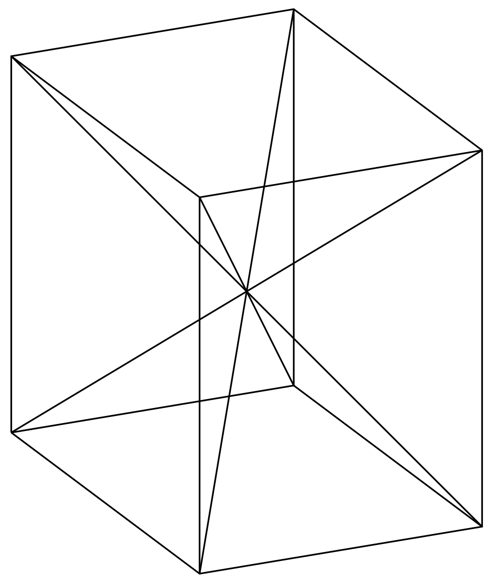
Problem: Mehrdeutigkeiten beim Kantenmodell (Beispiel 1)



begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

Problem: Mehrdeutigkeiten beim Kantenmodell (Beispiel 2)

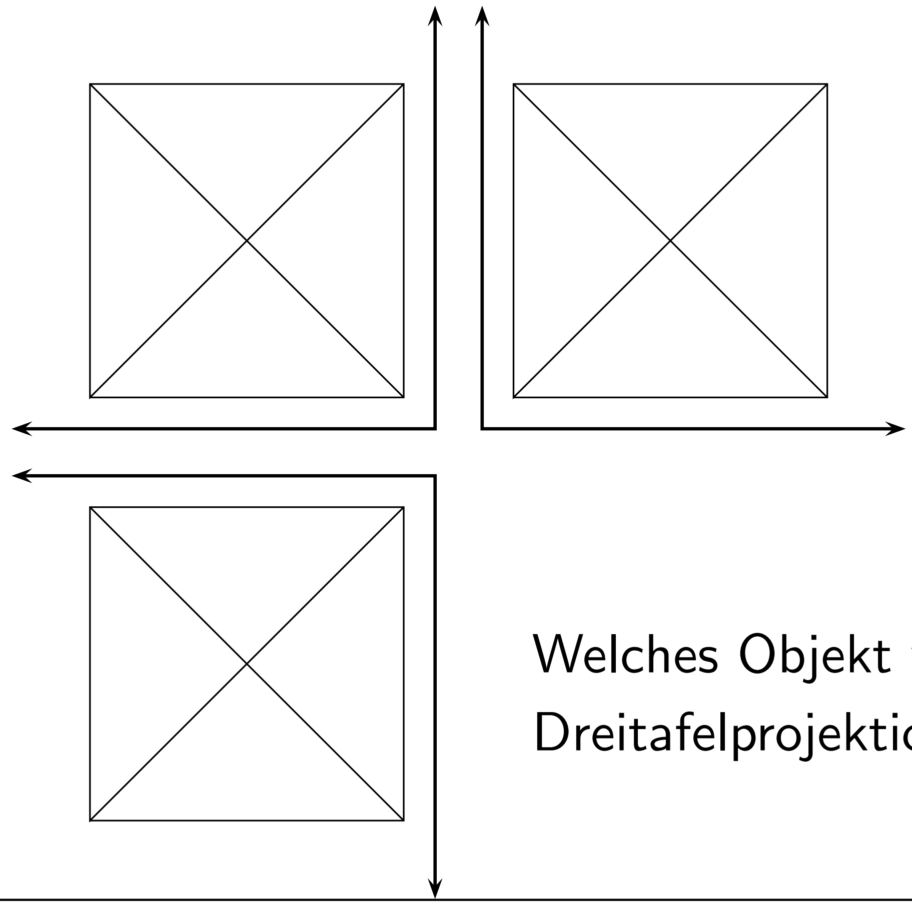
Was stellt dieses Kantenmodell dar?



Gibt die nachfolgende Dreitafelprojektion diesen Gegenstand wieder?

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

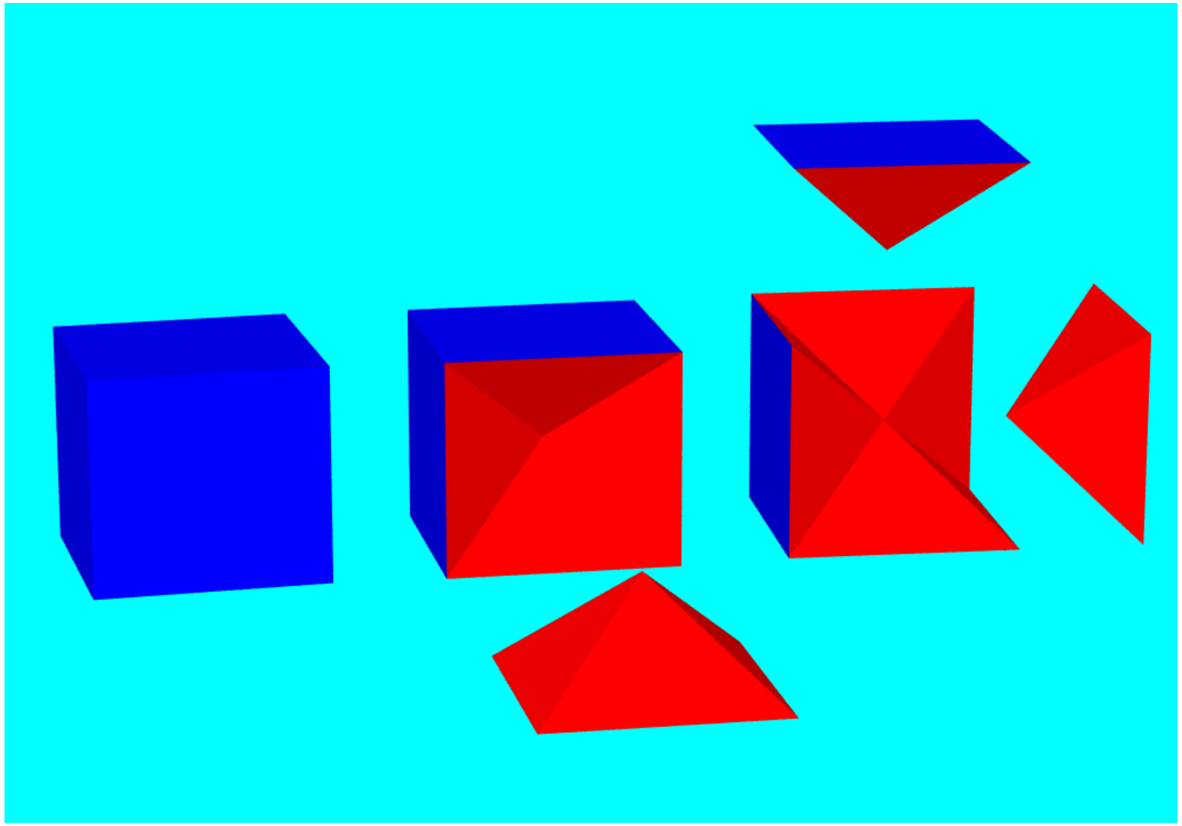
Problem: Unentscheidbarkeit bei der Dreitafelprojektion



Welches Objekt wird durch diese Dreitafelprojektion abgebildet?

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

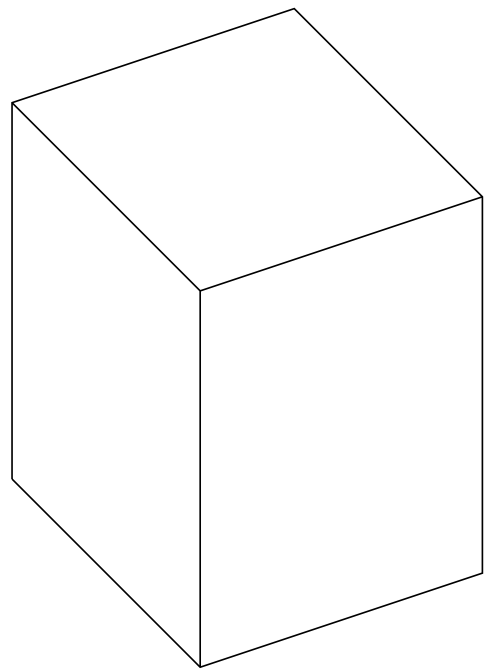
Problem: Unentscheidbarkeit bei der Dreitafelprojektion



begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

Oberflächenmodelle (frühe 1960er)

Objektrepräsentation
zusätzlich über
geometrische Beschreibung
der Oberflächenform
zwischen Kantenpolygonen

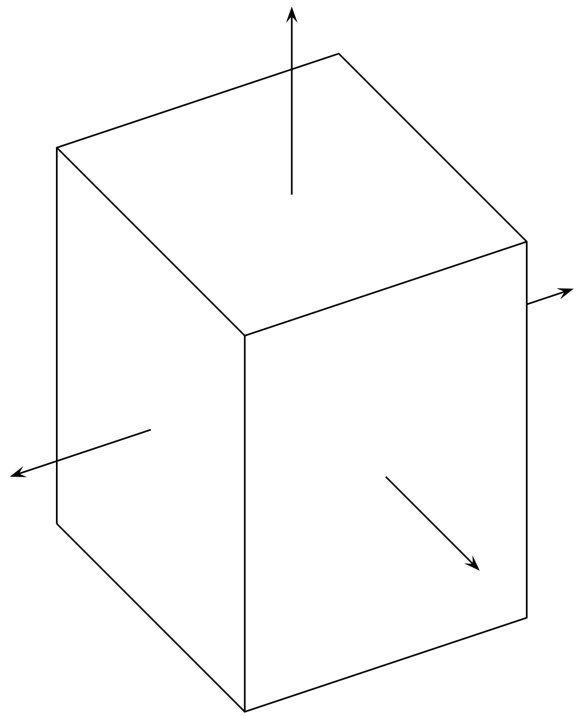


ermöglicht:
- grafische (flächige) Darstellung
- NC-Fertigung (Numerical Control)
des Gegenstandes

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

(zweidimensional mannigfaltige) **Körpermodelle** (frühe 1970er)

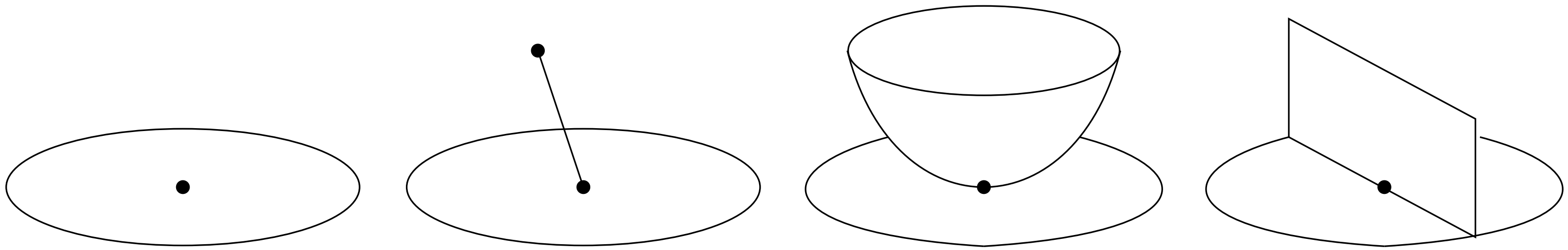
Objektrepräsentation enthält zusätzlich Information über Geschlossenheit und Zusammenhängigkeit der Volumina von Körpern d.h. “innen” und “außen” können unterschieden werden. Dadurch können z.B. Massen- und Schwerpunktberechnungen unmittelbar durchgeführt werden.



Letzte Einschränkung:
die Oberflächen müssen überall topologisch “eben” sein.

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

zweidimensional mannigfaltige **Körpermodelle** (Forts.)



topologisch zweidimensional

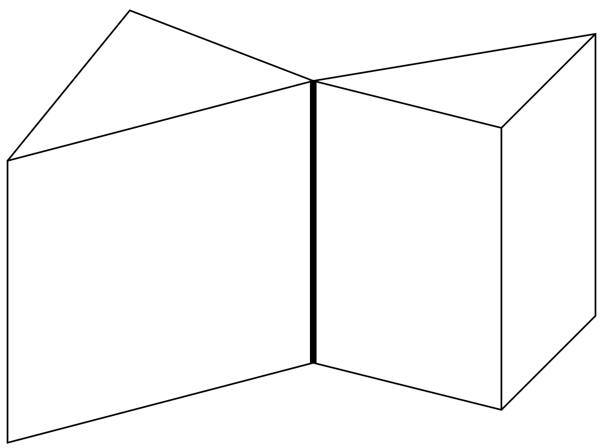
topologisch **nicht** zweidimensional

Topologisch zweidimensional bedeutet, daß die unmittelbare Umgebung jedes Punktes der Oberfläche sich eindeutig in eine Ebene abbilden läßt

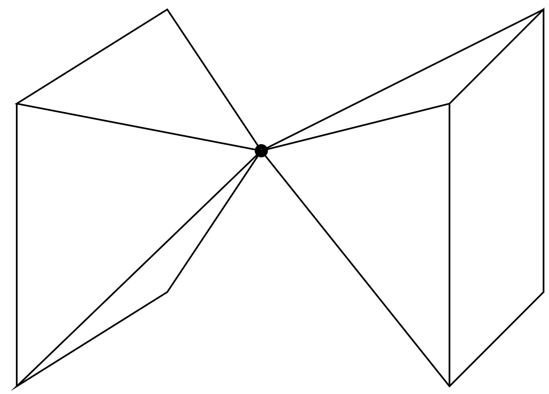
begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

Nicht-zweidimensional mannigfaltige („nicht-mannigfaltige“) Situationen liegen vor, wenn die unmittelbare Umgebung eines Oberflächenpunktes nicht eindeutig in eine Ebene abgebildet werden kann.

Beispiele:



a) mehr als zwei Flächen teilen sich eine Kante



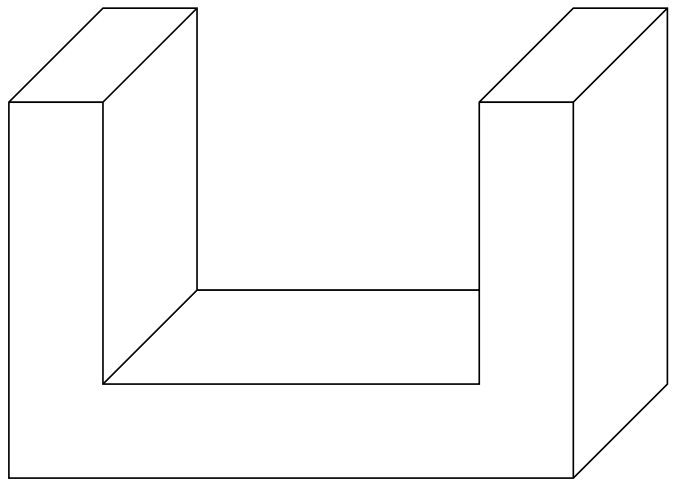
b) ein Punkt ist Eckpunkt mehrerer (Teil-)Körper

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

nicht-zweidim. mannigfaltige **Körpermodelle** (seit Ende der 1980er)

vereinigen in geschlossener
Repräsentation

- Kantenmodelle,
- Flächenmodelle,
- Körpermodelle



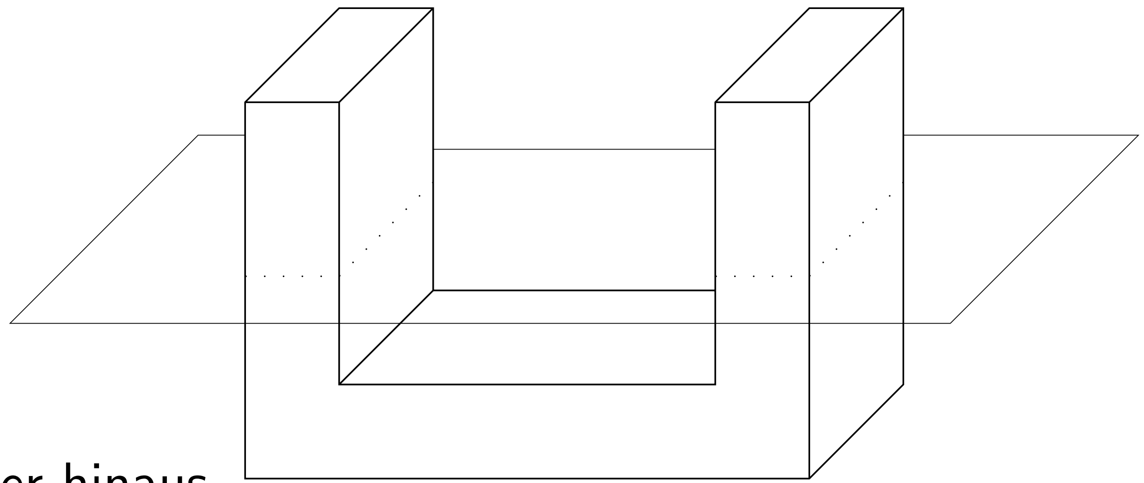
und gestatten darüber hinaus
die Behandlung topologisch nicht-zweidimensionaler Geometrien

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

nicht-zweidim. mannigfaltige **Körpermodelle** (seit Ende der 1980er)

vereinigen in geschlossener
Repräsentation

- Kantenmodelle,
- Flächenmodelle,
- Körpermodelle



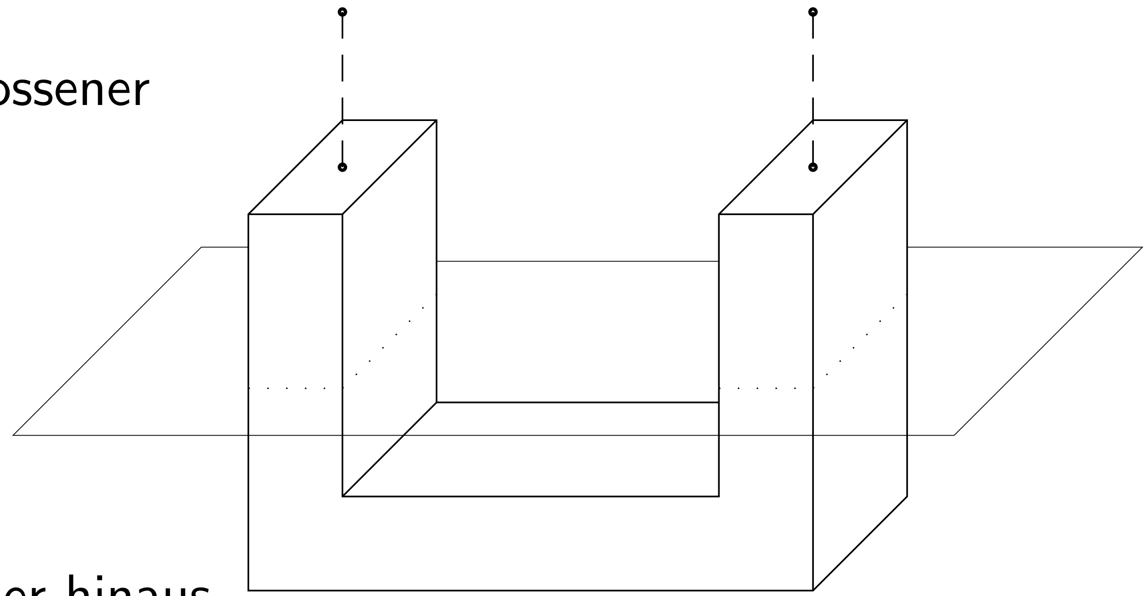
und gestatten darüber hinaus
die Behandlung topologisch nicht-zweidimensionaler Geometrien

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

nicht-zweidim. mannigfaltige **Körpermodelle** (seit Ende der 1980er)

vereinigen in geschlossener
Repräsentation

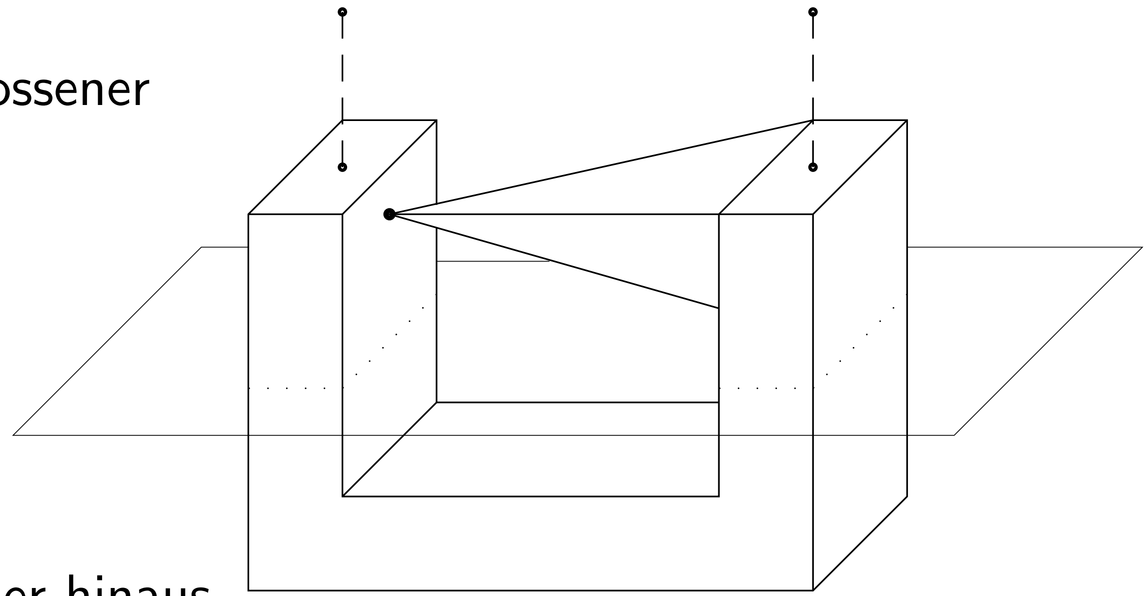
- Kantenmodelle,
- Flächenmodelle,
- Körpermodelle



und gestatten darüber hinaus
die Behandlung topologisch nicht-zweidimensionaler Geometrien

begrenzungsbasierte geometrische Modelle (Forts.)

nicht-zweidim. mannigfaltige **Körpermodelle** (seit Ende der 1980er)



vereinigen in geschlossener Repräsentation

- Kantenmodelle,
- Flächenmodelle,
- Körpermodelle

und gestatten darüber hinaus die Behandlung topologisch nicht-zweidimensionaler Geometrien

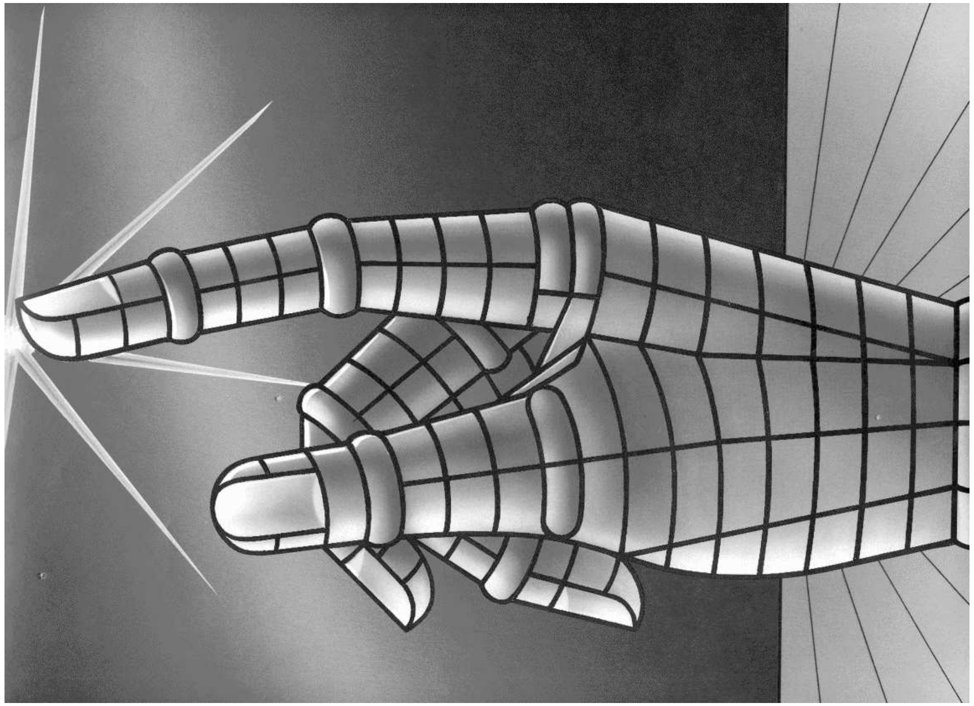
Beschreibung der Geometrie

Prinzip: Oberflächen komplex gestalteter Objekte sind zusammengesetzt aus Teilflächen

geschlossene Beschreibung „am Stück“ im allgemeinen nicht möglich bzw. sinnvoll (z.B. **Karosserie**, Körperoberfläche eines Menschen)

Beschreibung der Geometrie

Prinzip: Oberflächen komplex gestalteter Objekte sind zusammengesetzt aus Teilflächen



geschlossene Beschreibung „am Stück“ im allgemeinen nicht möglich bzw. sinnvoll (z.B. Karosserie, **Körperoberfläche eines Menschen**)

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Entwurf von Schiffsformen über charakteristische Linien

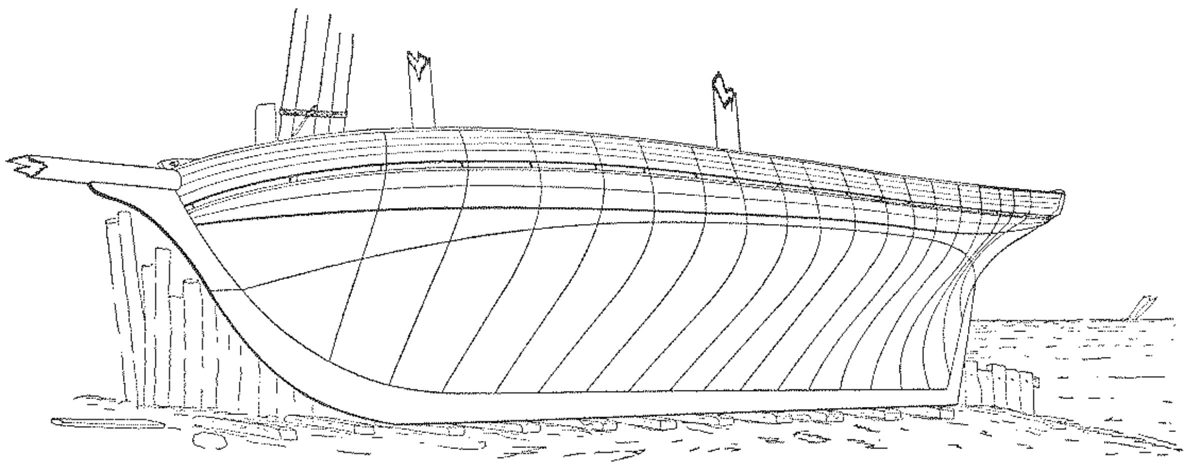


FIG. 23 — BALTIMORE CLIPPER SCHOONER. A PERSPECTIVE PROJECTION

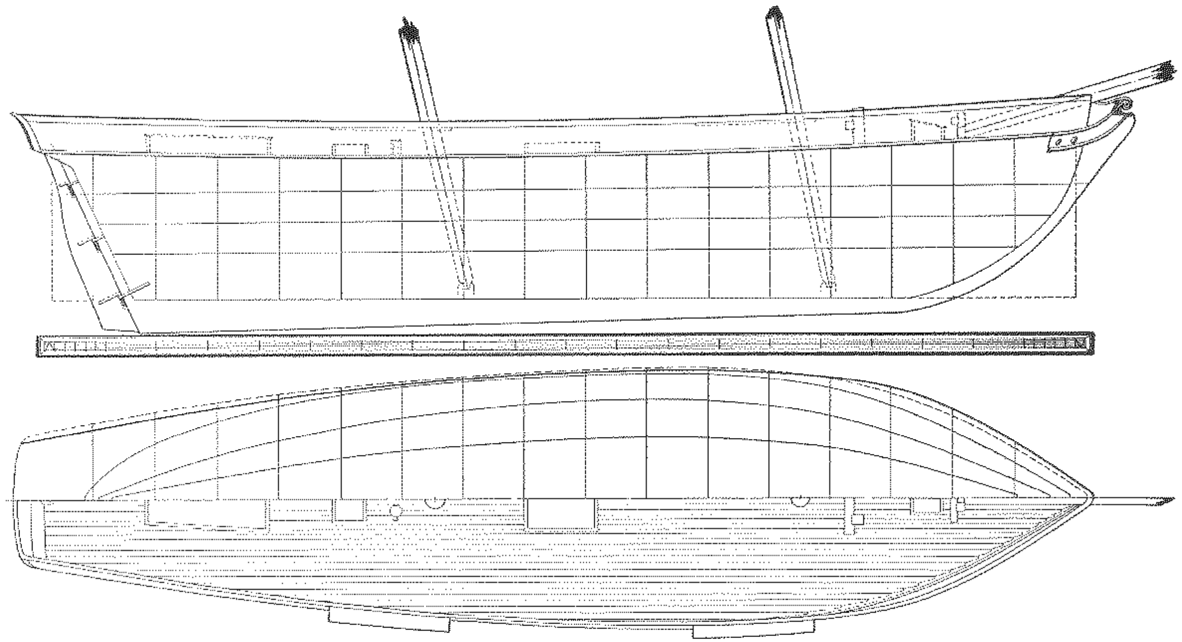
Spantlinien in vertikalen Ebenen senkrecht zur Längsachse,
Wasserlinien in horizontalen Ebenen

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Spanten eines Fischerbootes am Strand von Usedom

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Seitenansicht: Positionen von Spantlinien und Wasserlinien



SLAVE BRIG "DILIGENTE," AS TAKEN OFF AT BERMUDA, NOV. 12, 1839

Draufsicht: Positionen der Spantlinien und Formen der Wasserlinien

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

.

Blick in Längsrichtung:
(links vom Heck her,
rechts vom Bug her)
Formen der Spantlinien
Positionen der Wasserlinien

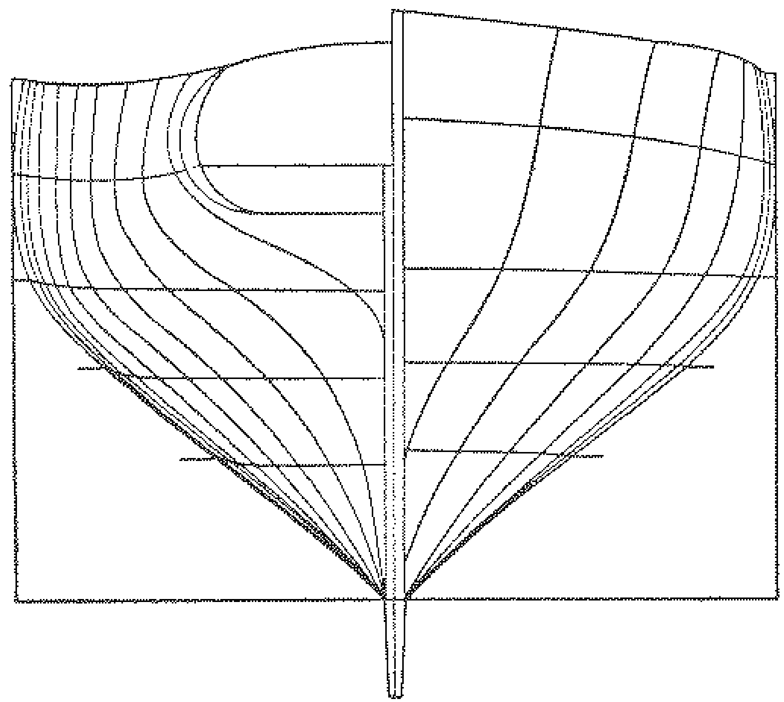


Fig. 27—Lines of slave brig "Diligente"

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Die Teilflächen sind begrenzt durch ihre Ränder (sog. *Kanten*: i.d.R Raumkurven), die

- sich durch Schnitt zwischen den jeweils benachbarten Teilflächen ergeben, oder
- die Grenzen des Definitionsbereiches für eine Teilfläche repräsentieren (Freiformflächen), oder
- als Liniengitter vorgegeben sind, das durch die Oberfläche interpoliert werden soll (Coons'sche Flächen)

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Kurven sind repräsentierbar durch

- Folgen von Punkten
- mathematische Formeln

Im interaktiven Entwurfsprozeß können Punktfolgen intuitiv vorgegeben werden.
Aber: Kurven, die durch Punktfolgen festgelegt sind, können nur mit großem Aufwand manipuliert werden.

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Vorteile der Repräsentation durch Formeln:

- im allgemeinen weniger Speicherbedarf
- exakte Repräsentationen beliebiger
  - Kurvenpunkte
  - Tangenten
  - Krümmungen
  - etc.

  können gegeben werden
- ein kontinuierlicher Graph der Kurven kann im allgemeinen einfach erzeugt und dargestellt werden
- Kurven können durch Koeffizientenmanipulation verändert werden

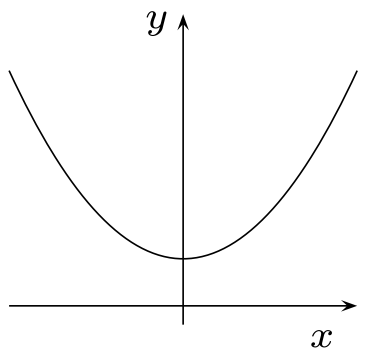
Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Mathematische Notationsformen:

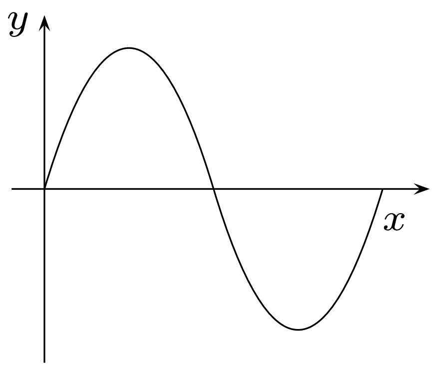
explizite Form: $y = f(x)$

Beispiele:

$y = ax^2 + b$



$y = sin(x)$



Beurteilung:

Vorteil: es existiert eine eindeutige Zuordnung zwischen abhängiger und unabhängiger Variabler

$\Longrightarrow$ unmittelbar in grafische Darstellung umsetzbar

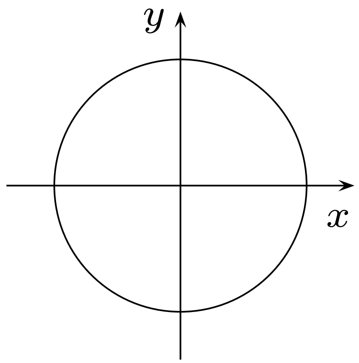
Nachteil: „rückläufige“ Kurven, Schleifen nicht direkt repräsentierbar

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

implizite Form: $f(x, y) = konst.$

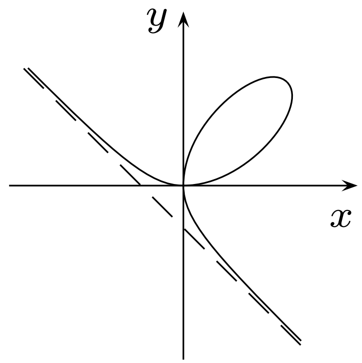
Beispiele:

$x^2 + y^2 = r^2$



$x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Blatt des Descartes



Beurteilung:

Vorteil:	vielseitige Kurvenformen mathematisch beschreibbar
Nachteil:	kaum für grafische Darstellung algorithmisierbar

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

parametrische Form: $x = f(t),\ y = g(t)$ (t: gemeins. Parameter)

Beispiele:

Parabel:	Kreis:	Blatt des Descartes:	
$x = t$	$x = rt$	$x = 3t/(1+t^3)$	mögliche
$y = t^2$	$y = r\sqrt{1-t^2}$	$y = 3t^2/(1+t^3)$	Parametri-
	$(-1 \leq t \leq +1)$		sierungen

Beurteilung:

Vorteil: Kurven beliebiger Gestalt mathematisch beschreibbar <u>und</u> leicht grafisch darstellbar

Problem: nicht immer einfach, eine parametrische Notation für eine Kurve zu finden

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

allgemeine vektorwertige parametrische Notation für Kurven (im dreidimensionalen euklidischen Raum):

$$K(t) := K(x(t), y(t), z(t))$$

darin sind:

x, y, z:	voneinander unabhängige Funktionen von
t:	gemeinsamer Parameter (unabhängige Variable)

Vorstellung: eine Kurve in vektorwertiger parametrischer Notation beschreibt die Bewegung eines Punktes durch den Raum in Abhängigkeit von der Zeit (oder alternativ in Abhängigkeit vom Weginkrement)

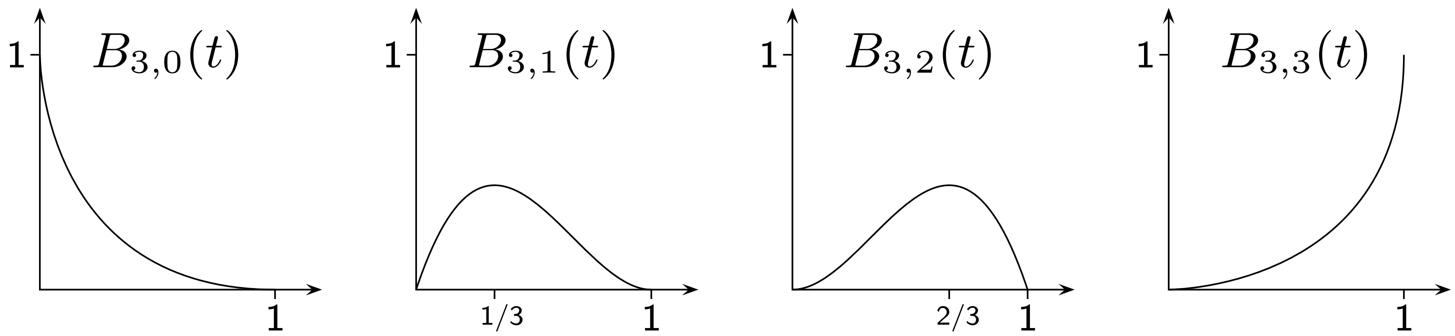
Beschreibung der Geometrie (Forts.)

- Liniengitter, die durch Oberflächen interpoliert werden sollen, können als Raumkurven in vektorwertiger parametrischer Notation beschrieben werden; z.B. als
  - **Bézierkurven** $$K(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_{n,i}(t)$$
  - **B-Splinekurven** $$K(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot N_{i,k}(t)$$

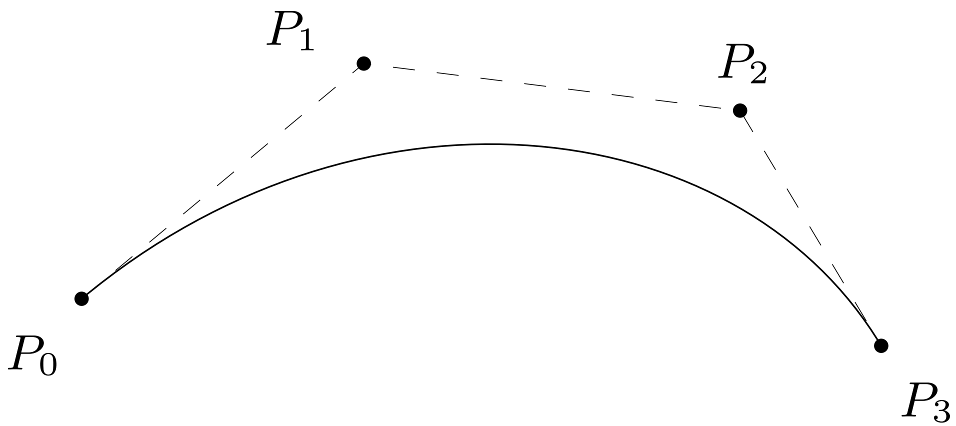
  darin ist t der Kurvenparameter; die P_i sind Folgen von Punkten, die durch die jeweilige Kurve approximiert werden, und $B_{n,i}(t)$ bzw. $N_{i,k}(t)$ geeignete Wichtungsfunktionen (Bernsteinpolynome bzw. B-Splinebasisfunktionen, vgl. Freiformflächen, s.u.)

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Beispiel: die Bernsteinpolynome dritten Grades



wichten P_0 P_1 P_2 P_3



zur Generierung einer vier Stützpunkte approximierenden **Bézierkurve**

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

NURBS-Kurven sind neben der Freiformmodellierung geeignet auch z.B. Kegelschnitte (Kreise, Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln) exakt zu repräsentieren (besondere Eigenschaft rationaler Polynome).

Darstellungsform:

$$K(t) \quad = \quad \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(t)}$$

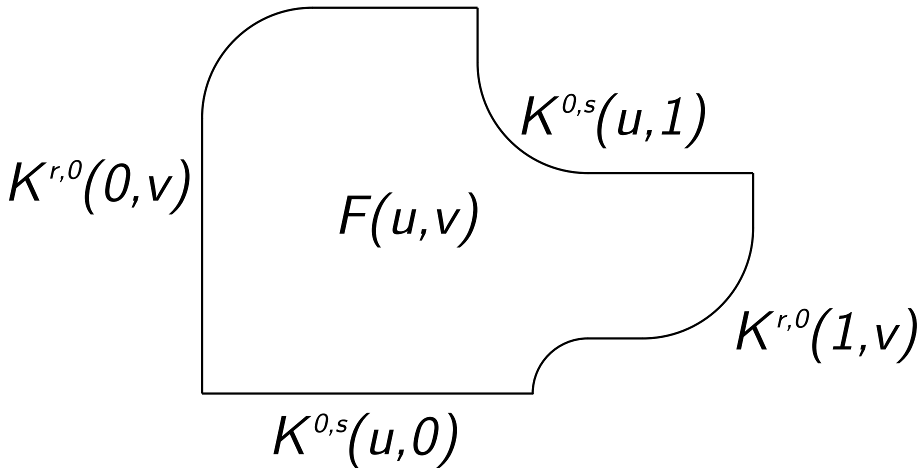
Die w_i sind zusätzliche konstante Gewichte, die noch stärkeren Einfluß auf den Kurvenverlauf ermöglichen

- ein großes w_i zieht die Kurve dichter an den Punkt P_i heran
- ist $w_i = 1$ für alle i, erhält man die nicht-rationale B-Splinekurve

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Vorgehensweise bei der geometrischen Definition von Teilflächen:

- Vorgabe der Ränder (Randbedingungen) und Interpolation der Fläche dazwischen (Verfahren von Coons):



$K^{r,s}$: - Funktion, die den jeweiligen Rand lokal beschreibt sowie
- Funktionen, die differentialgeometrische Eigenschaften der Fläche quer zum jeweiligen Rand beschreiben

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

- die allgemeine **Coons'sche Fläche** kann in vektorwertiger parametrischer Notation formuliert werden als:

$$F(u,v) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{r=0}^{m} K^{r,0}(i,v)\cdot\beta_{r,i}(u) + \sum_{j=0}^{1}\sum_{s=0}^{n} K^{0,s}(u,j)\cdot\beta_{s,j}(v) - \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} K^{r,s}(i,j)\cdot\beta_{r,i}(u)\cdot\beta_{s,j}(v)$$

  für die Flächenparameter u und v gilt $0 \le u \le 1$ und $0 \le v \le 1$
  m und n geben den Grad der Ableitbarkeit am jeweiligen Rand an;
  $\beta_{r,i}(u)$ und $\beta_{s,j}(v)$ sind geeignet gewählte Verbindungsfunktionen (*blending functions*)

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

- die Verbindungsfunktionen müssen folgende Eigenschaften haben:
  - für $i = 0$ bzw. $i = 1$ gilt

    $\beta_{r,i}(u) = \delta_{i,u}$

    wobei

    $\delta_{i,u} = 1$ wenn $u = i$

    $\delta_{i,u} = 0$ wenn $u \neq i$
  - für alle $0 \leq u \leq 1$ gilt

    $\sum_{i=0}^{1} \beta_{r,i}(u) = 1$
  - für die $a-$te Ableitung von $\beta_{r,i}(u)$ gilt

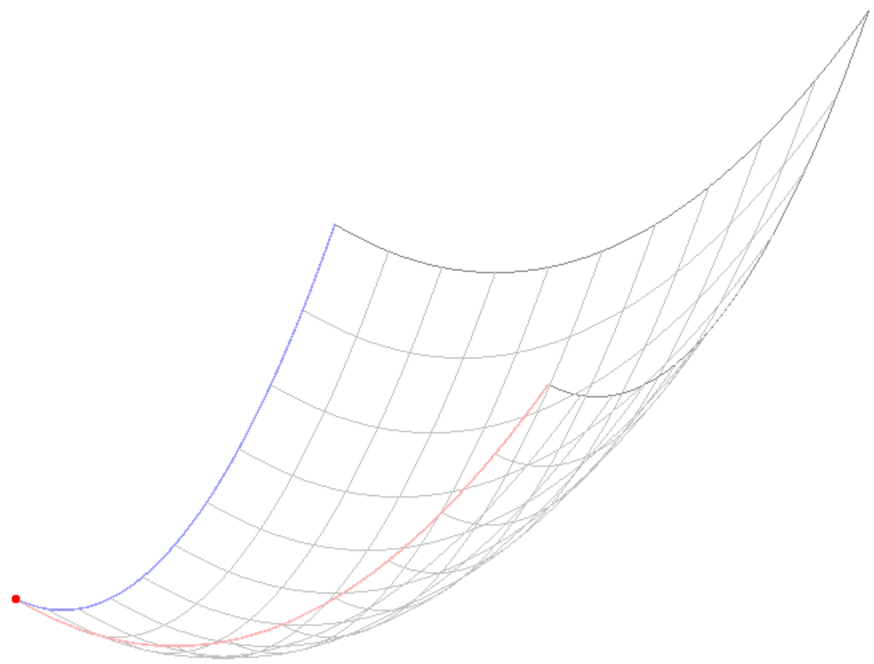
    $\beta_{r,i}^{a}(u_k) = \delta_{a,r} \cdot \delta_{i,k}$

    mit $u_0 = 0$ und $u_1 = 1$

  dasselbe gilt analog für $\beta_{s,j}(v)$

Anmerkung zur grafischen Darstellung:

In der einfachsten Form können Oberflächen komplex gestalteter Objekte durch ihre Iso-Parameterlinien repräsentiert werden.

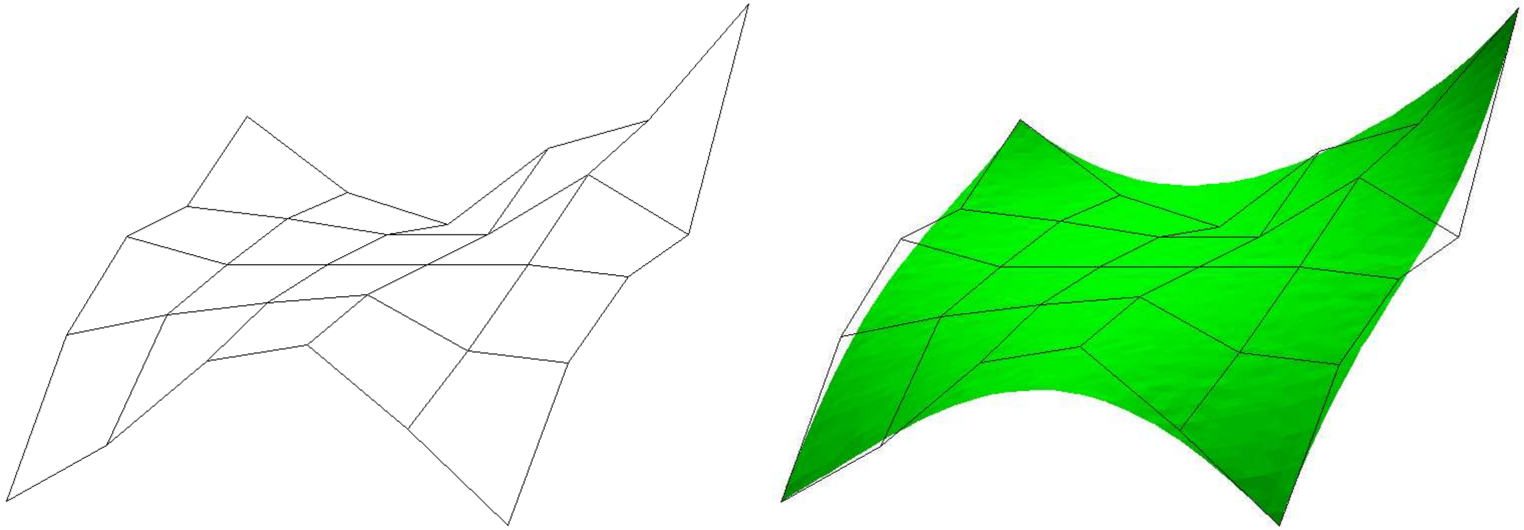


Die viereckigen Maschen des Netzes der Iso-Parameterlinien können über ihre Diagonalen in ebene Dreiecke unterteilt werden, die mit einfachen Shadern (Flat, Gouraud, Phong) flächig dargestellt werden können.

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

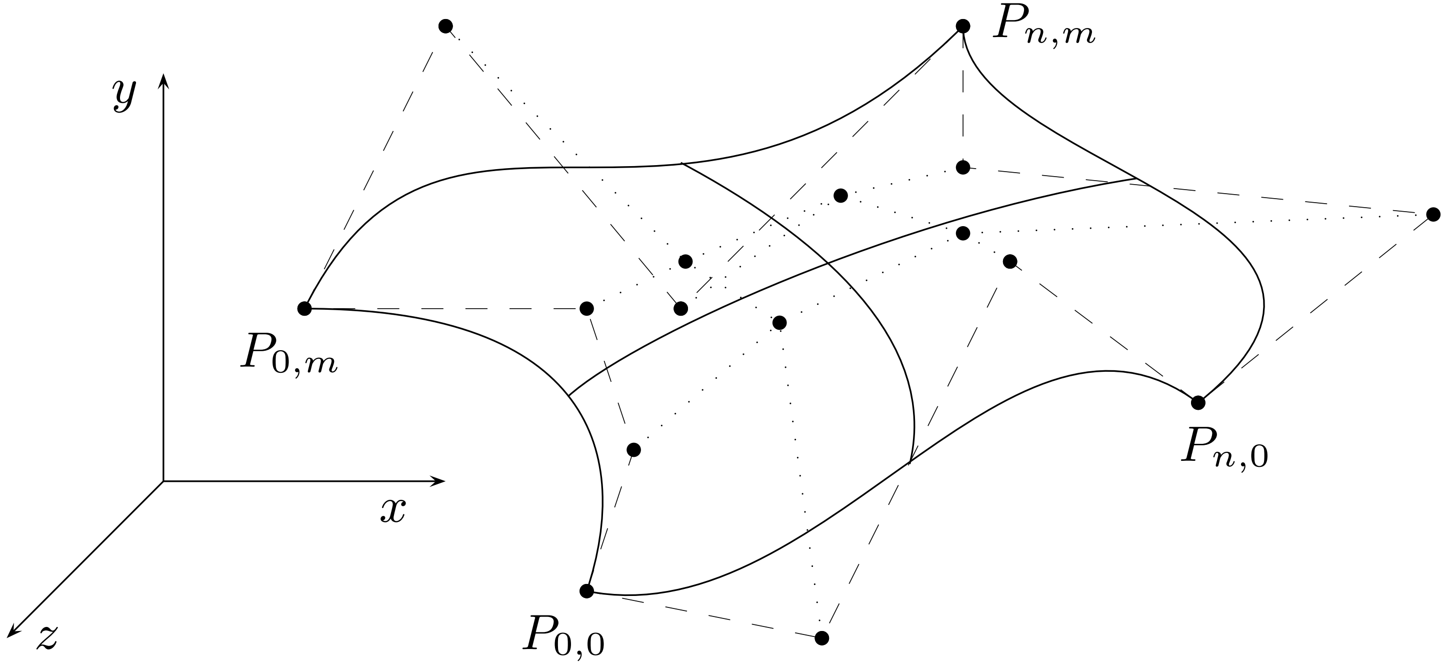
Vorgehensweise bei der geometrischen Definition von Teilflächen:

- Freiformgestaltung der Fläche durch Stütznetzvorgabe (Bézier- bzw. B-Spline-Approximation):



Einhaltung erforderlicher (lokaler, tangentialer oder Krümmungs-) Kontinuität über Flächenränder hinweg zu den Nachbarflächen wird durch die Verfahren gewährleistet

Beschreibung der Geometrie (Forts.)



- Analog zum Stützpolygon (Folge von $(n+1)$ Punkten: $P_0 \cdots P_n$) zur Definition von approximierenden Kurven wird ein Stütznetz von $(n+1) \times (m+1)$ Punkten $P_{0,0} \cdots P_{n,m}$ zur Definition von approximierenden Flächen vorgegeben.

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

- die **Freiformfläche** kann in vektorwertiger parametrischer Notation formuliert werden als:

$$F(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} \cdot W_i(u) \cdot W_j(v)$$

$P_{i,j}$ sind die Knotenpunkte des zu approximierenden Stütznetzes; W_i und W_j sind geeignete Wichtungsfunktionen, die ggf. von n bzw. m abhängen können (Verwendung finden z.B. die Bernsteinpolynome $B_{n,i}(u)$ und $B_{m,j}(v)$ für Bézierflächen bzw. die B-Splinebasisfunktionen $N_{i,k_u}(u)$ und $N_{j,k_v}(v)$ für B-Splineflächen)

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

- Definition der Bernsteinpolynome:

$$B_{n,i}(u) = \binom{n}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i} \quad \text{für} \quad 0 \le u \le 1$$

- rekursive Definition der B-Splinebasisfunktionen:

$$N_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u)$$

für $u_0 \le u \le u_{max}$ und $u_i \in (u_0, u_1, .., u_{max})$, $u_i \le u_{i+1}$

mit $\frac{0}{0} \overset{!}{=} 0$ und der Endbedingung für $k = 1$:

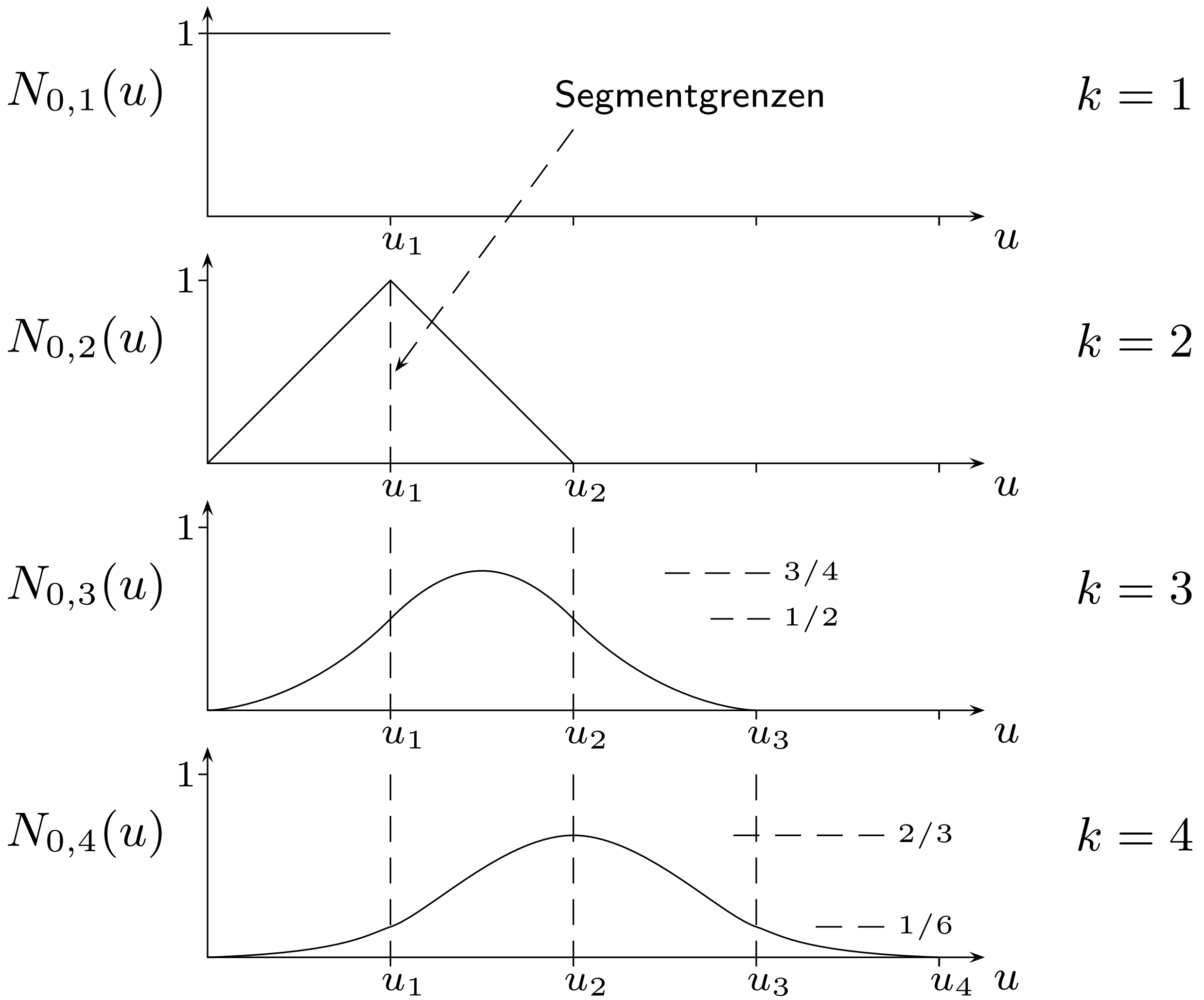
$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad u_i \le u \le u_{i+1} \\ 1 & \text{für} \quad u = u_{max} \;\text{ und }\; i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Etwas **B-Spline-Terminologie**:

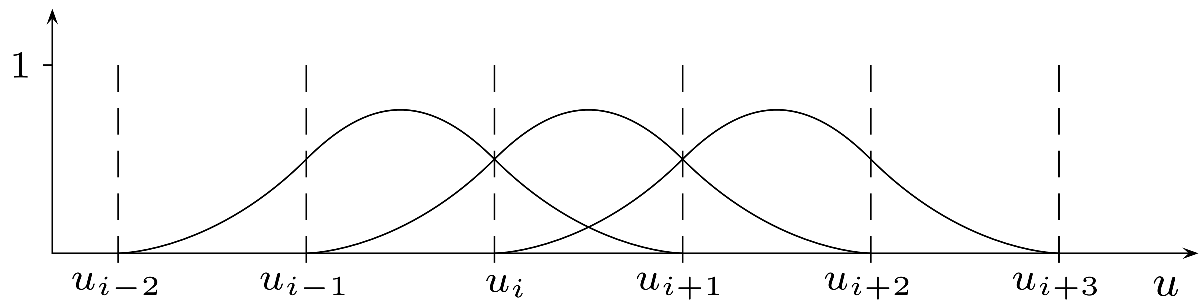
- die Unterbereichsgrenzen u_i des Definitionsintervalls $u_0 \leq u \leq u_{max}$ heißen parametrische Knoten; es gilt $u_i \leq u_{i+1}$
- die geordnete Menge aller parametrischen Knoten nennt man Knotenvektor, notiert als $\{u_0, u_1, \cdots, u_{max}\}$
- gilt für alle u_i die Beziehung $u_{i-1} < u_i < u_{i+1}$, so nennt man die resultierenden B-Spline-Basisfunktionen periodisch
- gilt für irgendein u_i daß $u_i = u_{i+1}$ (Mehrfachknoten), so nennt man sie nichtperiodisch

Beispiele für B-Spline-Basisfunktionen



Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Beispiel: B-Spline-Basisfunktionen dritter Ordnung $N_{i,3}(u)$ zur Wichtung dreier aufeinander folgender Stützpunkte P_{i-2}, P_{i-1}, P_i



Beschreibung der Geometrie (Forts.)

- NURBS-Flächen:

$$F(u,v) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} \cdot R_{i,j}(u,v)$$

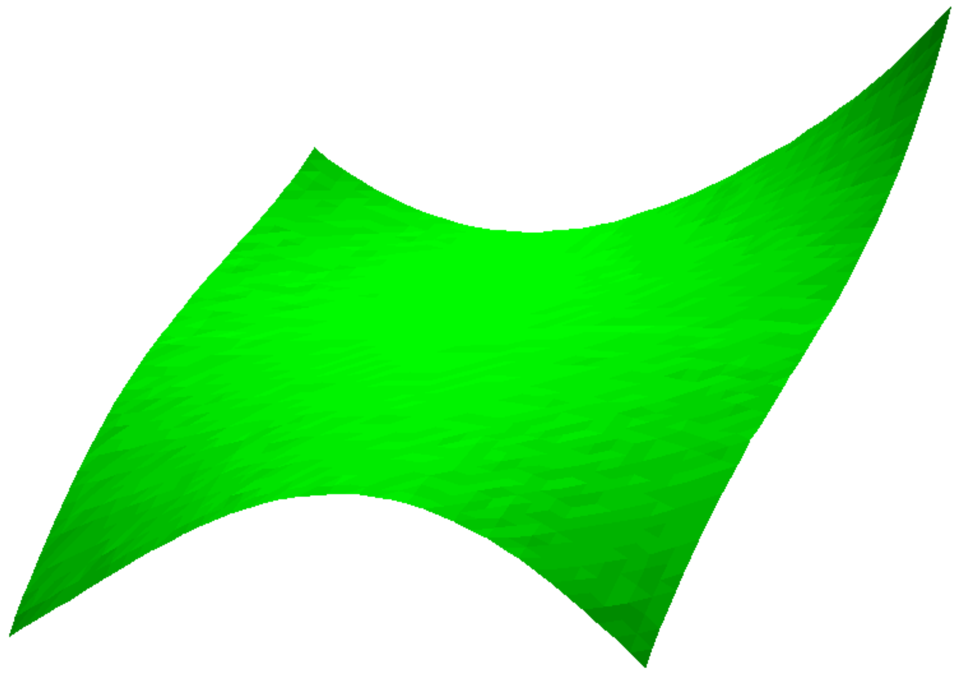
mit den Wichtungsfunktionen

$$R_{i,j}(u,v) \quad = \quad \frac{w_{i,j} \cdot N_{i,k_u}(u) \cdot N_{j,k_v}(v)}{\sum_{g=0}^{n} \sum_{h=0}^{m} w_{g,h} \cdot N_{g,k_u}(u) \cdot N_{h,k_v}(v)}$$

Randbedingungen, Eigenschaften, etc. dieser Flächen sind denen der entsprechenden Kurven vergleichbar.

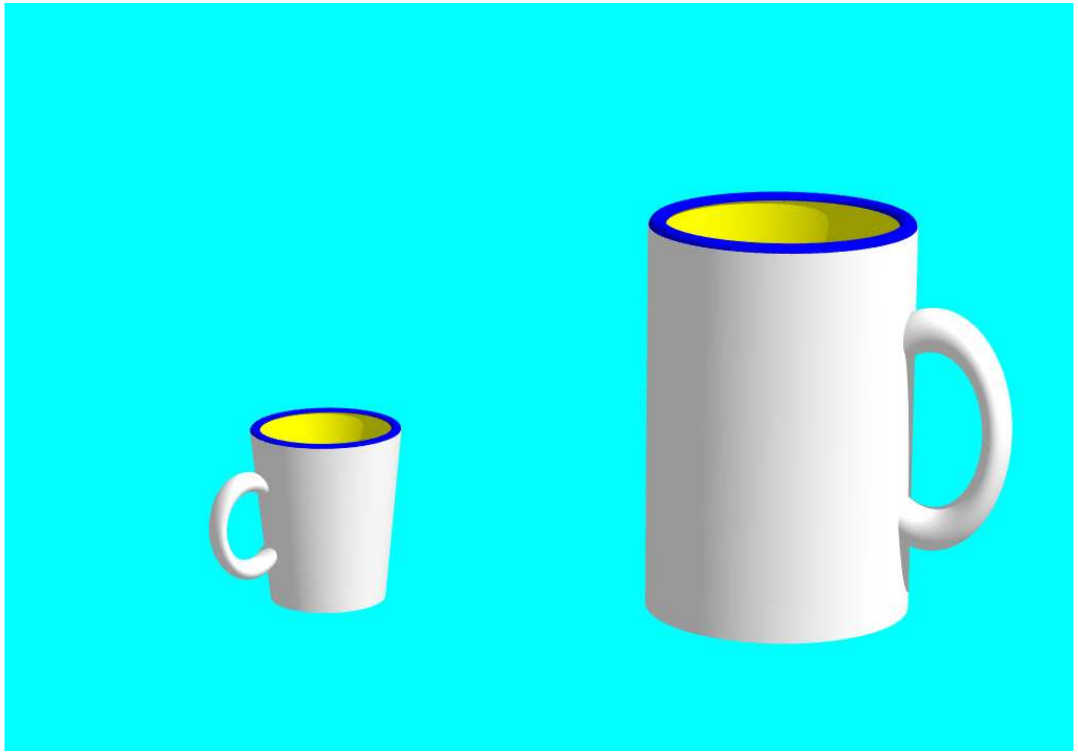
Beschreibung der Geometrie (Forts.)

Darstellung der Approximationsfläche über ihre Iso-Parameterlinien.



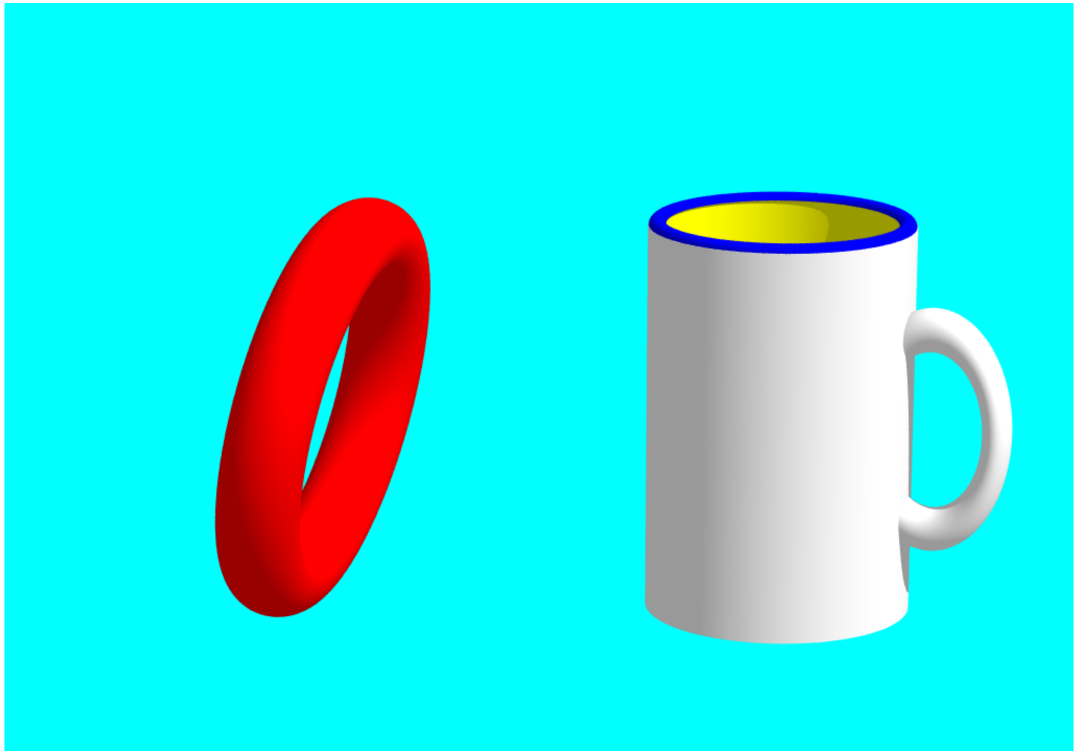
Die viereckigen Maschen des Netzes der Iso-Parameterlinien wurden über ihre Diagonalen in ebene Dreiecke unterteilt, die mit einfachem Flat-Shading flächig ausgefüllt wurden.

Beschreibung der Topologie



Topologisch äquivalente Objekte

Beschreibung der Topologie (Forts.)



Topologisch äquivalente Objekte

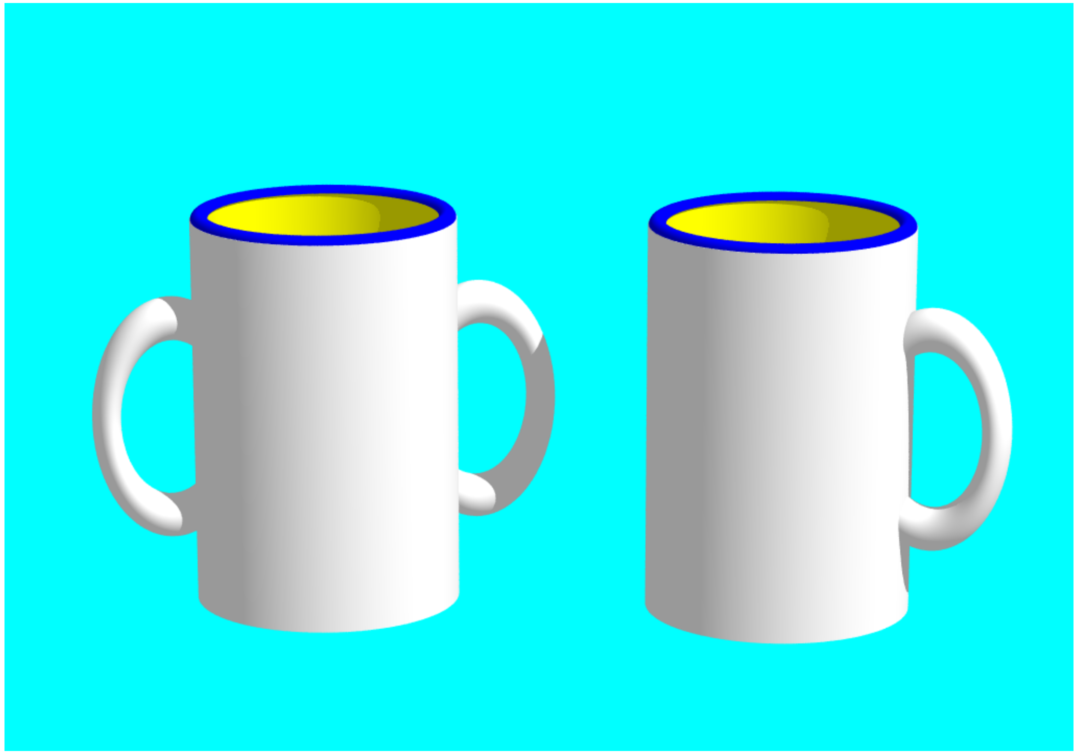
Beschreibung der Topologie (Forts.)

Die vollständige geometrische Beschreibung repräsentiert im wesentlichen die gesamte Information über die geometrische Form (Gestalt) eines Gegenstandes.

jedoch: “unorganisiert”
(d.h. als ungeordnete Menge von geometrischen Elementen)

Die topologische Beschreibung “organisiert” auf abstrakter Ebene die geometrische Information durch Darstellung von “Nachbarschaftsbeziehungen”.
Sie gibt eine Menge von Eigenschaften wieder, die invariant sind gegenüber geometrischen Transformationen (ein Torus und eine Tasse sind topologisch äquivalent).

Beschreibung der Topologie (Forts.)



Topologisch nicht-äquivalente Objekte

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Die in der topologischen Beschreibung repräsentierten Nachbarschaftsbeziehungen geben Auskunft über Sachverhalte wie:

- welche Flächenelemente bilden zusammen eine geschlossene Oberfläche eines Gegenstandes
- welche Flächenelemente grenzen an ein bestimmtes Flächenelement der Oberfläche an
- von welchen Kanten wird ein Flächenelement begrenzt
- welche geometrischen Elemente (Flächen, Kanten) haben welche Eckpunkte gemeinsam
- etc.

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Die topologischen Beziehungen können in Form von Wertepaaren in einer Matrix notiert werden.
Das erste Symbol bezeichnet das jeweilige Bezugselement, das zweite die ihm benachbarte Gruppe
(P = Eckpunkt, K = Kante, F = Fläche):

$$\begin{bmatrix} PP & PK & PF \\ KP & KK & KF \\ FP & FK & FF \end{bmatrix}$$

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Eine **topologisch ausreichende** Beschreibung
ist in der Lage Nachbarschaftsbeziehungen vollständig und eindeutig wiederzugeben.

theoretisch ausreichend
ist das absolute Minimum an Information, das benötigt wird, um die vollständige Nachbarschaftstopologie eindeutig zu repräsentieren

praktisch ausreichend
ist das Minimum an Information, das bei einer praktischen Realisierung, z.B. in einem geometrischen Modelliersystem, benötigt wird
(eine gewisse Redundanz ist erforderlich, um häufig benötigte Nachbarschaftsinformationen in angemessen kurzer Zeit – z.B. im Rahmen von Interaktionen – zu erhalten)

Beschreibung der Topologie (Forts.)

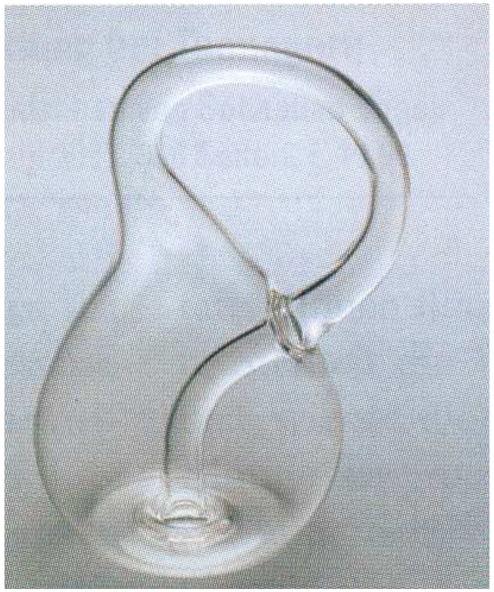
Definition: „Feste“ Körper (solid objects / solids = realisierbare Gegenstände) sind Objekte mit zusammenhängenden (geschlossenen) orientierbaren Oberflächen, d.h.

- Oberflächen dürfen sich nur an den Grenzen benachbarter Flächen schneiden (keine Selbstdurchdringung zugelassen)
- Flächen dürfen einfach oder mehrfach zusammenhängend sein; aber sie müssen in eine Ebene abbildbar (= zweidimensional mannigfaltig) sein; d.h. einzelne Flächenelemente dürfen keine „Griffe“ enthalten
- Kanten schneiden sich nur an gemeinsamen Endpunkten

(d.h.: die **Klein'sche Flasche** entspricht **nicht** dieser Definition!)

Beschreibung der Topologie (Forts.)

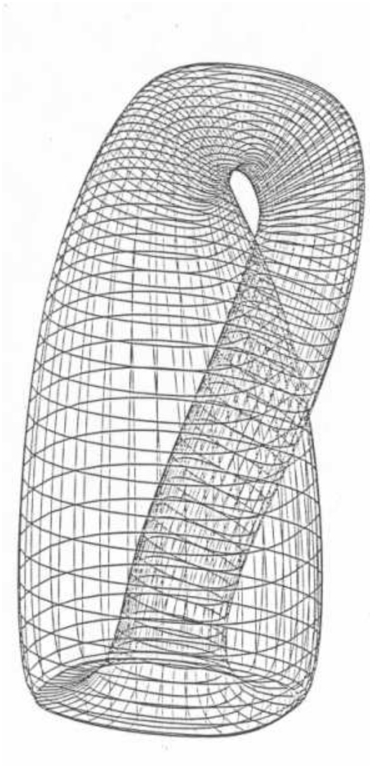
„Anfertigung“ einer Klein’schen Flasche: den Hals einer (ausgeleerten) langhalsigen Flasche der Wandstärke Null zieht man noch länger, biegt ihn seitwärts um und steckt ihn durch die Seitenwand der Flasche,



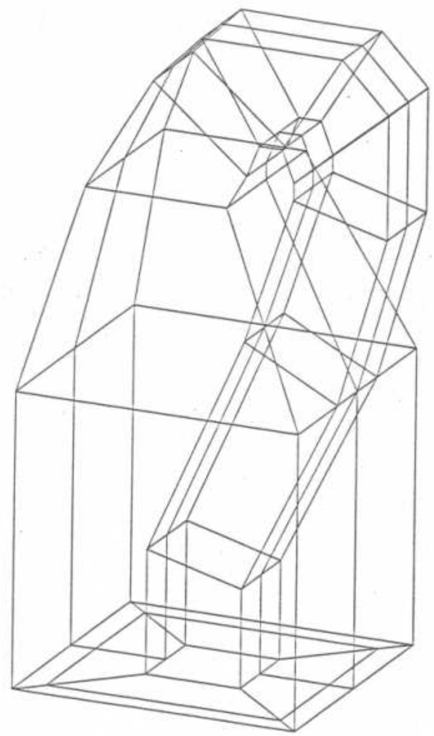
bis er ihren Boden berührt; die Öffnung des Flaschenhalses verbindet man mit dem Rand eines runden Loches, das man in den Flaschenboden gebohrt hat – fertig.

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Klein'sche Flasche als B-Splinefläche



Isoparameterlinien



Stützpolygon

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Umfassende Liste der topologischen Elemente:

Modell (*model*)	= „Aufbewahrungsort“ aller toplogischen Elemente, die in einem geometrischen Modell enthalten sind (es ist selbst kein topologisches Element im engeren Sinne) es besteht aus mindestens einer
Region (*region*)	= Raumvolumen (mindestens eins im Modell, das unendliche Ausdehnung hat, da es das gesamte Universum umfaßt; das Modell eines einzigen „festen“ Körpers benötigt mindestens zwei Regionen, eine für sein Inneres und eine für die gesamte Umgebung) ggf. mit einer Begrenzung, der *Schale*

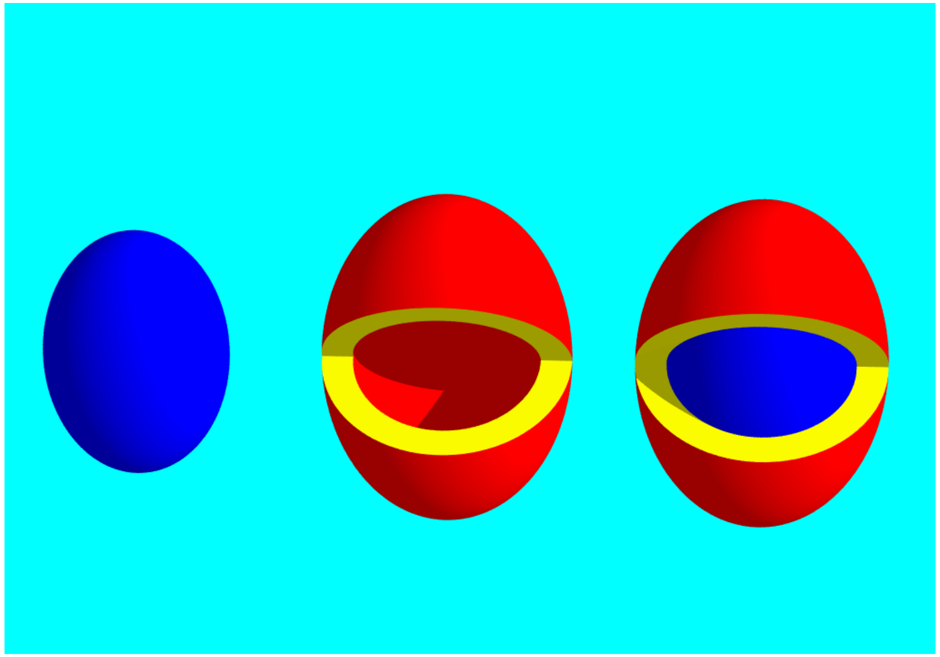
Beschreibung der Topologie (Forts.)

Modell bestehend aus einer einsamen Kugel

ein Modell, zwei Regionen, zwei Schalen

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Das Schalenkonzept: jede Oberfläche einer Region ist eine Schale



Region mit 1 Schale	Region mit 2 Schalen (aufgeschnitten)	2 Regionen mit insgesamt 3 Schalen

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Modell bestehend aus einer einsamen Kugel, die ein Objekt enthält

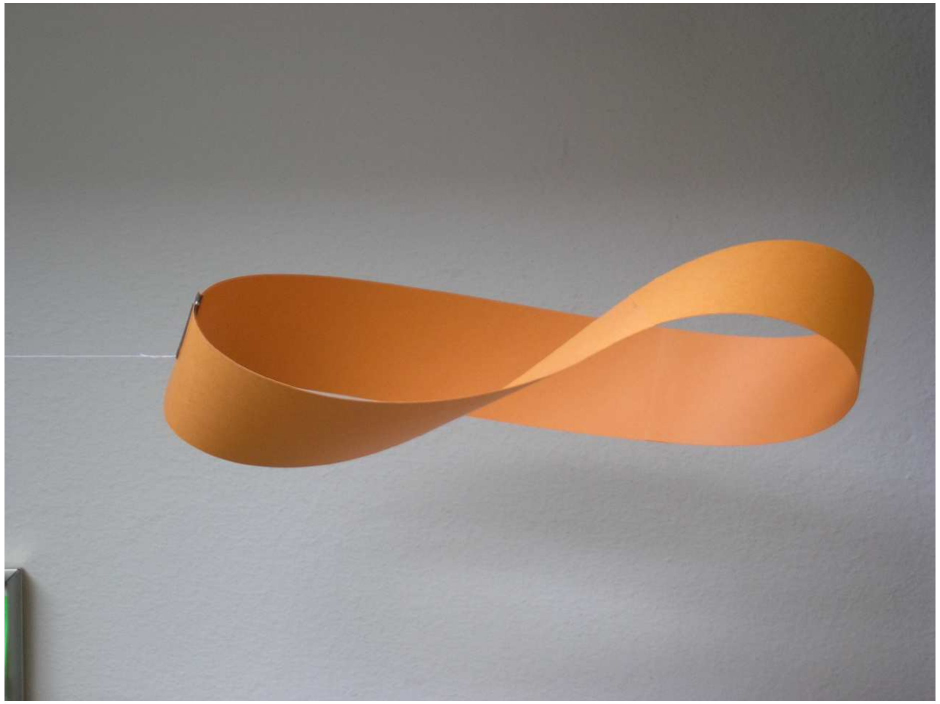
ein Modell, drei Regionen, vier Schalen

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Schale *(shell)*	= orientierte Begrenzung jeder Region (die Kleinsche Flasche kann also nicht als Schale dienen); eine einzelne Region kann mehr als eine Schale haben (z.B. Körper mit eingeschlossenen Aussparungen, „Emmentaler Käse“)
Fläche *(face)*	= begrenzter Teil einer Schale – hat eine Orientierung (also kein Möbius-Band) – enthält <u>nicht</u> ihre Begrenzung, die
Umrandung *(loop)*	= orientierte zusammenhängende Begrenzung einer einzelnen Fläche

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Möbius-Band: nicht-orientierbare Fläche



Frage: Wieviele Umrandungen hat ein Möbius-Band?

Beschreibung der Topologie (Forts.)

	(normalerweise besteht eine Umrandung aus einer alternierenden Folge von Kanten und Punkten – Sonderfall: Umrandung, die nur aus einem Punkt besteht)
	eine Fläche kann eine Umrandung oder mehrere haben
Kante (edge)	= begrenzendes Kurvensegment, das als Teil einer Umrandung dienen kann und selbst durch einen Punkt an jedem Ende begrenzt ist (ggf. derselbe)
Punkt (vertex)	= ein einzelner Punkt im Raum

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Beziehung zwischen den topologischen Elementen:

Region(en) $\longleftarrow$ *Schale(n)*

Fläche(n) $\longleftarrow$ *Umrandung(en)*

Kante(n) $\longleftarrow$ *Punkt(e)*

d.h.

Grundelem. $\xleftarrow{\text{begrenzt durch}}$ *begrenzend. Elem.*

zusammengesetzt aus

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Euler-Poincaré-Formel

Für einfach zusammenhängende „feste“ Körper gilt

$$P - K + F = 2$$

haben diese Körper durchgehenden Aussparungen (z.B. Torus), gilt

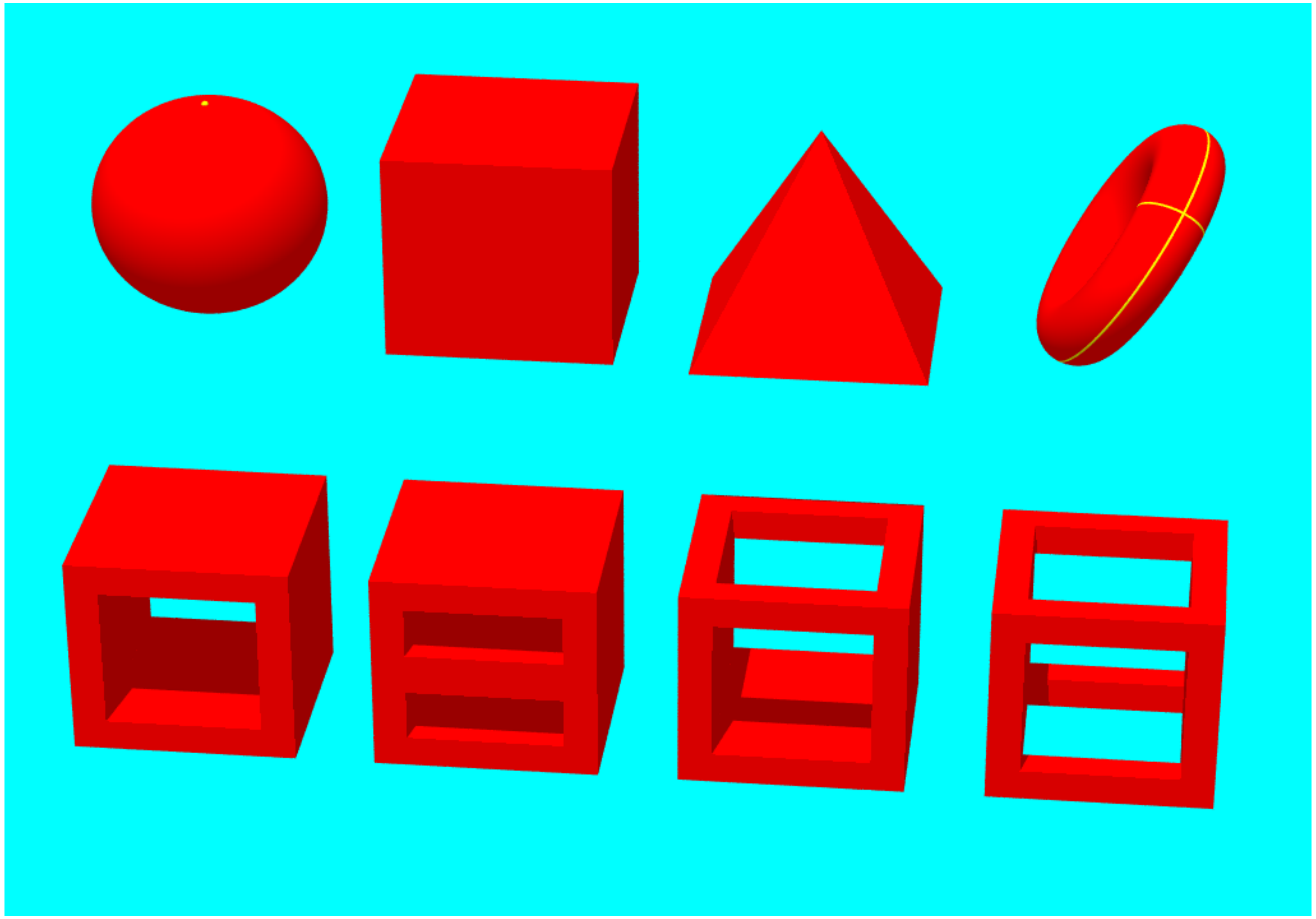
$$P - K + F = 2 \cdot (1 - G)$$

und unter Berücksichtigung des erweiterten Konzeptes ist dann

$$P - K + F - (U - F) = 2 \cdot (S - G)$$

darin bezeichnen P, K, U, F, S bzw. G: Anzahl der *Punkte, Kanten, Umrandungen, Flächen, Schalen* bzw. der durchgehenden Aussparungen (das *Genus* ist morphologisches Klassifizierungsmerkmal)

Beschreibung der Topologie (Forts.)

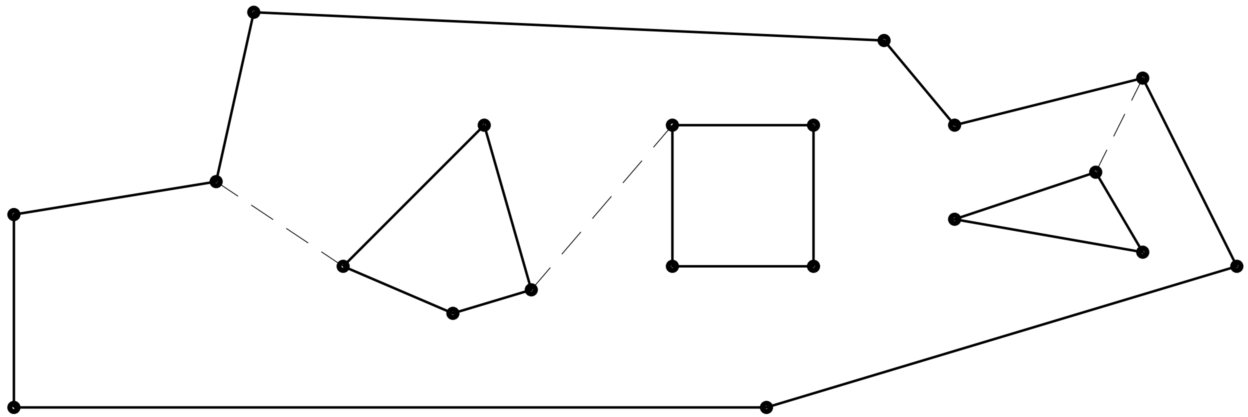


Beispiele zur Euler-Poincaré-Formel (s. folgende Tabellen)

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Behandlung mehrfach zusammenhängender Flächen

Einfachster Ansatz: Einführung von Hilfskanten zu den Öffnungen in den Flächen, um die Flächen einfach zusammenhängend zu machen.



Nachteil: die Anzahl der Kanten im Modell wird u.U. drastisch erhöht, Hilfskanten werden leicht übersehen (Fehleranfälligkeit).

Alternative: jede Öffnung in den Flächen wird durch eine eigene Umrandung repräsentiert. Dadurch werden die Hilfskanten überflüssig, die Notation ist konsistenter.

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Zur Auswertung der Euler-Poincaré-Formel:

Objekt	P	K	F	G	Anmerkungen
Kugel	1	0	1	0	Punkt = Flächenrand
Quader	8	12	6	0	
Pyramide	5	8	5	0	
Torus	1	2	1	1	
Quader mit 1 Aussp.	16	26	10	1	Einf. von Hilfskanten
Quader mit 2 Aussp.	24	40	14	2	zur Erzeugung einfach
Quader mit 2 Aussp.	24	39	13	2	zusammenhängender
Quader mit 3 Aussp.	32	52	16	3	Flächen (bei Aussp.)

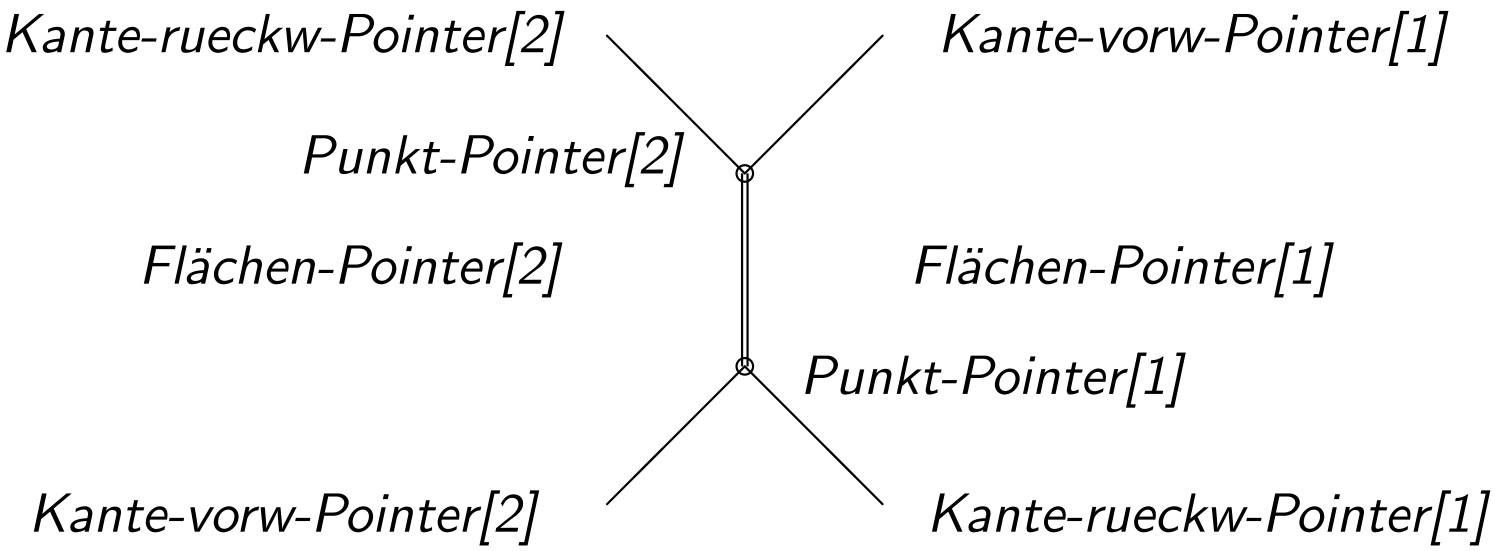
Beschreibung der Topologie (Forts.)

Zur Auswertung der Euler-Poincaré-Formel (erweitertes Konzept):

Objekt	P	K	U	F	S	G	Anmerkungen
Kugel	1	0	1	1	1	0	Punkt = Rand
Quader	8	12	6	6	1	0	
Pyramide	5	8	5	5	1	0	
Torus	1	2	1	1	1	1	
Quader mit 1 Aussp.	16	24	12	10	1	1	Umrandungen
Quader mit 2 Aussp.	24	36	18	14	1	2	machen
Quader mit 2 Aussp.	24	36	16	13	1	2	Hilfskanten
Quader mit 3 Aussp.	32	48	20	16	1	3	überflüssig

Beschreibung der Topologie (Forts.)

Die topologische Beschreibung kann entsprechend in eine geeignete Datenstruktur umgesetzt werden, z.B. die kantenbasierte Datenstruktur "Winged Edge Structure":



(geeignet zur Repräsentation zweidim. mannigfaltiger Körpermodelle)

Zur grafischen Darstellung modellierter Gegenstände

Vor- und Nachteile bei den unterschiedlichen Repräsentationsformen:

- **Octree** und Voxelcluster:
  es existiert keine Information über die darzustellende geschlossene Oberfläche des Gegenstandes (muß zur grafischen Darstellung aufwendig approximiert werden)
- **CSG**:
  "verwendete Teile" der Grundkörper müssen erst ermittelt werden, ehe ihre Oberfläche dargestellt werden kann
- **B-Rep**:
  geometrische Beschreibung enthält genau die Flächenelemente, die dargestellt werden sollen;
  topologische Beschreibung gibt Ordnung vor, die für effiziente grafische Darstellung genutzt werden kann