FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 10 : P/T-Netze: T-Invarianten, Fallen & Siphons, Kantenkonstante Netze

Präsenzteil am 16./17. 12. – Abgabe am 06./07. 01. 2014

Präsenzaufgabe 10.1: Sei N ein P/T-Netz mit den Gewichtungen:

$$\widetilde{W}(p,t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{W}(t,p) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathbf{j} = (7,1,2)^{tr}$ eine T-Invariante ist!

   Lösung: Es ist:

   $$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Wir rechnen nach:

   $$\Delta \cdot \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot 7 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Zeigen Sie, dass es eine in der Markierung $\mathbf{m}_0 = (7,4)^{tr}$ aktivierte Schaltfolge w gibt, deren Parikh-Bild $\Psi(w)$ identisch mit $\mathbf{j}^{tr}$ ist!

   Lösung: Die Schaltfolge $w = bca^7c$ erfüllt $\Psi(w) = (7,1,2) = j^{tr}$ und ist aktiviert:

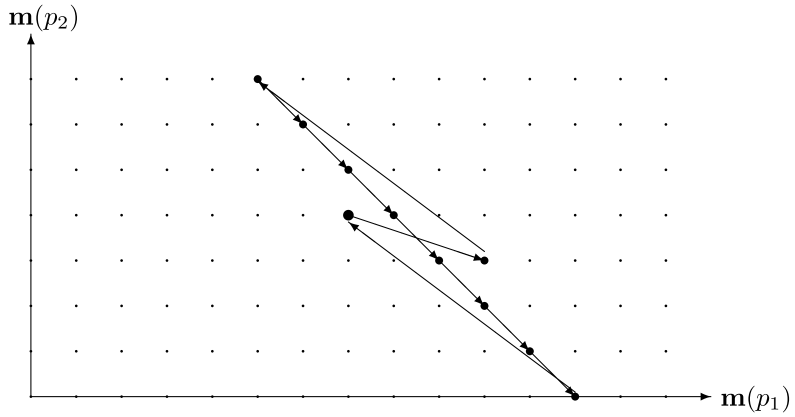
   $$(7,4)^{tr} \xrightarrow{b} (10,3)^{tr} \xrightarrow{c} (5,7)^{tr} \xrightarrow{5a} (10,2)^{tr} \xrightarrow{2a} (12,0)^{tr} \xrightarrow{c} (7,4)^{tr}$$

3. Berechne die Nachfolgemarkierung, die durch Schalten von w aus $\mathbf{m}_0$ entsteht!

   Lösung: Da $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta \cdot \Psi(w)$ gilt, folgt $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$, denn $\Psi(w)$ ist eine T-Invariante und damit ist $\Delta \cdot \Psi(w) = \mathbf{0}$.

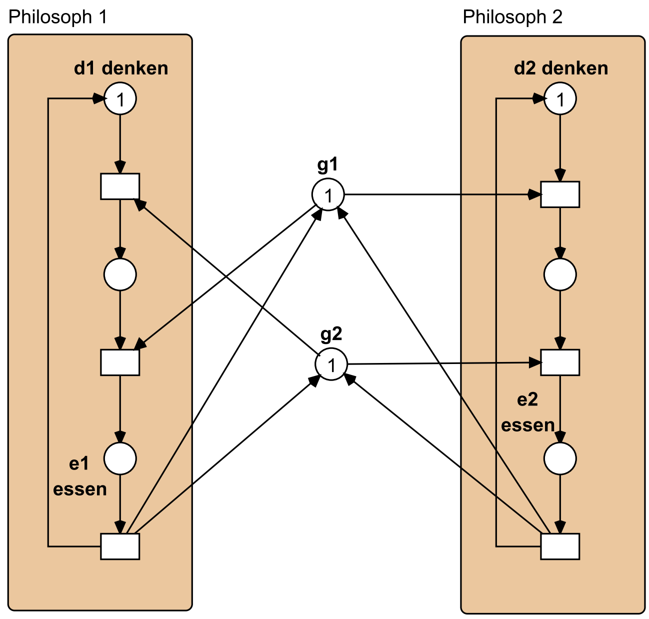
4. Da wir zwei Stellen haben, sind Markierungen Punkte im $\mathbb{N}^2$, die man auf Karopapier visualisieren kann. Zeichnen Sie für Ihre Lösung $w = t_1 \cdots t_n$ die Schaltfolge $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{t_1} \mathbf{m}_1 \cdots \xrightarrow{t_n} \mathbf{m}_n$ (d.h. Markierungen und Übergänge)!

   Lösung:

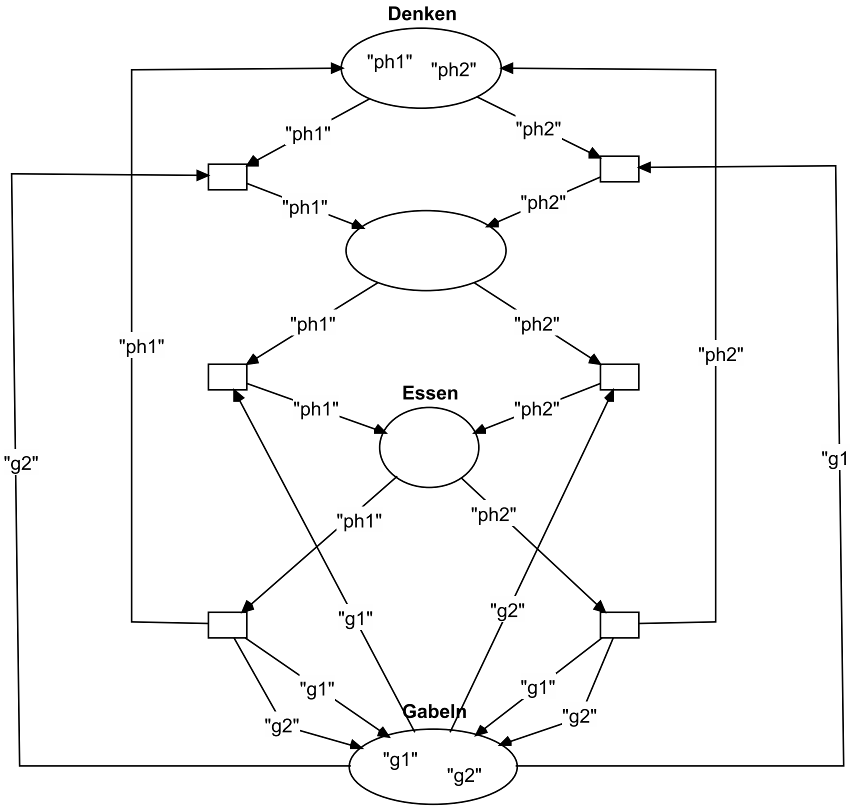


Präsenzaufgabe 10.2: Im Skript auf Seite 156 zeigt Abbildung 8.2 ein simples Beispiel, wie anhand einer Platzfaltung ein Petrinetz zu einem kantenkonstanten Netz erweitert werden kann. Netz $N_{10.2}$ zeigt eine Abwandlung des 5-Philosophen-Problems, welches auf zwei Philosophen beschränkt wurde. Bilden Sie aus Netz $N_{10.2}$ ein kantenkonstantes Netz.

Netz $N_{10.2}$:

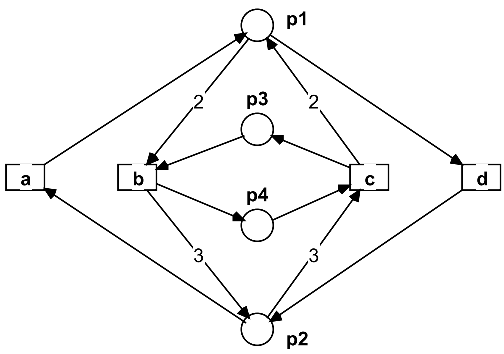


Lösung: Ein mögliches Ergebnis:



Übungsaufgabe 10.3: Gegeben ist das Netz $N_{10.3}$:

von
3



1. Bestimmen Sie die Menge aller T-Invarianten von $N_{10.3}$.

Lösung:

$$
\begin{array}{rl}
 & \Delta_{N_{10.3}} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{lllllll} j_1 & -2j_2 & +2j_3 & -j_4 & = & 0 & \mid +2j_2;\ +j_4 \\ -j_1 & +3j_2 & -3j_3 & +j_4 & = & 0 & \mid +j_1;\ +3j_3 \\ -j_2 & +j_3 & & & = & 0 & \mid +j_2 \\ j_2 & -j_3 & & & = & 0 & \mid +j_3 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{rcll} j_1 + 2j_3 & = & 2j_2 + j_4 & \mid j_3 = j_2;\ -2j_2 \\ 3j_2 + j_4 & = & j_1 + 3j_3 & \mid j_2 = j_3;\ -3j_3 \\ j_3 & = & j_2 & \\ j_2 & = & j_3 & \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{lcl} j_1 & = & j_4 \\ j_4 & = & j_1 \\ j_3 & = & j_2 \\ j_2 & = & j_3 \end{array} \right.
\end{array}
$$

Als Lösungsmenge des Gleichungssystems ergibt sich:

$$
\left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \\ l \\ k \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}
$$

2. Einer der Invariantenvektoren lautet $\mathbf{j}_1 = (1, 2, 2, 1)^{tr}$. Geben Sie eine Schaltfolge w mit passendem Parikh-Bild an und wählen Sie eine Anfangsmarkierung $\mathbf{m}$, so dass $\mathbf{m} \xrightarrow{w}$ gilt. Notieren Sie die Schaltfolge mit allen erreichten Zwischenmarkierungen $\mathbf{m} \xrightarrow{t_{k_1}} \mathbf{m}' \xrightarrow{t_{k_2}} \ldots \xrightarrow{t_{k_n}} \mathbf{m}^{(n)}$.

Lösung: Eine mögliche Lösung:

$$
w = dabcbc, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Übungsaufgabe 10.4: Sei $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ ein reversibles P/T-Netz mit einer nicht-leeren Falle $A \subseteq P, A \neq \emptyset$ ohne isolierte Plätze: $\forall p \in A : {}^\bullet p \neq \emptyset \vee p^\bullet \neq \emptyset$.

von
6

1. Zeigen Sie Lemma 7.44 (allgemein, ohne Bezug zu obiger Eigenschaft): Wenn eine Falle A in $\mathbf{m}_0$ markiert ist, dann bleibt sie dies auch in allen von $\mathbf{m}_0$ aus erreichbaren Markierungen.

Lösung: Induktion über Schaltfolgenlänge über die Behauptung $\sum_{p \in A} \mathbf{m}(p) > 0$:

I.A.: $|w| = 0, w = \varepsilon$: Gemäß Voraussetzung ist A in $\mathbf{m}_0$ markiert, d.h. $\sum_{p \in A} \mathbf{m}_0(p) > 0$:

I.V.: Für alle Schaltfolgen w mit $|w| \leq n$ gilt: $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{m} \implies \sum_{p \in A} \mathbf{m}(p) > 0$.

I.S.: Sei v eine Schaltfolge mit Länge $|v| = n + 1$. $v = w \cdot t$ ist zerlegbar in w mit $|w| = n$ und $t \in T$, so dass $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}'$ gilt. Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{p \in A} \mathbf{m}(p) > 0$. Da A eine Falle ist, muss t, wenn es Marken aus A entnimmt, auch Marken in A erzeugen. Also gilt auch in $\mathbf{m}'$: $\sum_{p \in A} \mathbf{m}'(p) > 0$.

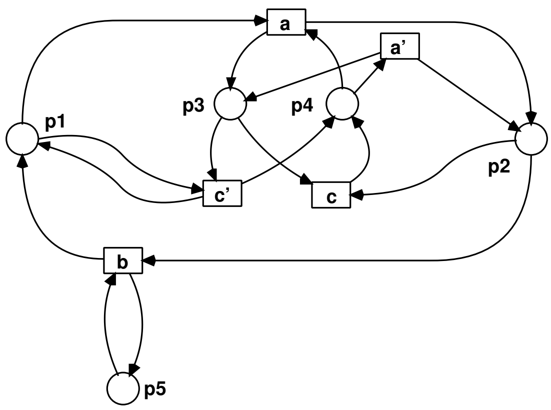
2. Zeigen Sie (unter Annahme obiger Eigenschaft): Wenn alle Transitionen in der Anfangsmarkierung potentiell aktivierbar sind, ist die Falle A in der Anfangsmarkierung markiert.

Lösung: Da kein Platz in A isoliert ist, gibt es zu jedem Platz p mindestens eine Transition t im Vor- oder im Nachbereich. Da t potentiell aktivierbar ist, gibt es eine Schaltfolge $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{\sigma_t} \mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}'$.

Falls $t \in p^\bullet$, dann muss gemäß Aktiviertheitsbedingung $\mathbf{m}(p) \geq \widetilde{W}(p,t) \geq 1$ gelten, also ist p in $\mathbf{m}$ markiert. Falls $t \in {}^\bullet p$, dann muss gemäß Schaltregel $\mathbf{m}'(p) = \mathbf{m}(p) - \widetilde{W}(p,t) + \widetilde{W}(t,p) \geq 1$ gelten, also ist p in $\mathbf{m}'$ markiert. Somit ist die Falle A in $\mathbf{m}$ bzw. $\mathbf{m}'$ markiert.

Da N reversibel ist, gibt es Schaltfolgen $\mathbf{m} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m}_0$ bzw. $\mathbf{m}' \xrightarrow{\sigma'} \mathbf{m}_0$. Gemäß Lemma 7.44 ist die Falle in jeder von $\mathbf{m}$ bzw. $\mathbf{m}'$ aus erreichbaren Markierung immer noch markiert, also auch in $\mathbf{m}_0$.

3. Gegeben das Netz $N_{10.4}$ (ohne Kantengewichte):



Geben Sie für Netz $N_{10.4}$ alle Fallen an.

Hinweis: Es gibt eine zweistellige Zahl an Fallen.

Lösung: Die leere Menge ist gemäß Definition immer eine Falle. $A_1 = \{p_5\}$ ist offensichtlich eine Falle für sich. Außerdem ist die Menge $A_2 = \{p_3, p_4\}$ eine Falle, da alle vier benachbarten Transitionen jeweils eine Ein- und Ausgangskante zu den beiden Plätzen haben.

Falls p_2 Bestandteil einer Falle sein soll, dann muss wegen b mindestens ein Platz aus p_5 oder p_1 ebenfalls in der Falle enthalten sein. Ebenso muss wegen c p_4 enthalten sein, hieraus ergeben sich aber keine weiteren Zwänge, da sowohl a als auch a' p_2 im Nachbereich haben. Es ergeben sich die Fallen $A_3 = \{p_2, p_4, p_5\}$ und $A_4 = \{p_1, p_2, p_4\}$.

Falls p_1 Bestandteil einer Falle sein soll, dann muss wegen a mindestens ein Platz aus p_2 oder p_3 in der Falle enthalten sein. Beide erfordern wegen c, dass auch p_4 in der Falle enthalten sein muss. Die Transitionen a, a', b und c' liefern keine weiteren Zwänge, da sie jeweils einen bereits in der Falle enthaltenen Platz im Nachbereich haben. Es ergeben sich die Fallen $A_4 = \{p_1, p_2, p_4\}$ und $A_5 = \{p_1, p_3, p_4\}$ (erstere wurde bereits über p_2 gefunden).

Darüber hinaus bilden alle Vereinigungen dieser Fallen wieder eine Falle:

$p \in A$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
$\emptyset$					
A_1					$*$
A_2			$*$	$*$	
A_3		$*$		$*$	$*$
A_4	$*$	$*$		$*$	
A_5	$*$		$*$	$*$	

$$A \in \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{p_5\}, \{p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \\ \{p_1, p_3, p_4\}, \{p_2, p_4, p_5\}, \\ \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \\ \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \{p_1, p_3, p_4, p_5\}, \\ \{p_2, p_3, p_4, p_5\}, P \end{array} \right\}$$

4. Geben Sie für $N_{10.4}$ eine Anfangsmarkierung $\mathbf{m}_0$ mit höchstens drei Marken an, in der alle Transitionen potentiell aktivierbar sind. Geben Sie zu jeder Transition t eine Schaltfolge σ_t an, mit der die Transition aktiviert werden kann: $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{\sigma_t\, t}$.

   Lösung: Mögliche Anfangsmarkierungen müssen in jeder Falle eine Marke aufweisen. p_5 muss offensichtlich markiert sein. Zudem muss in $\{p_3, p_4\}$ eine Marke liegen.

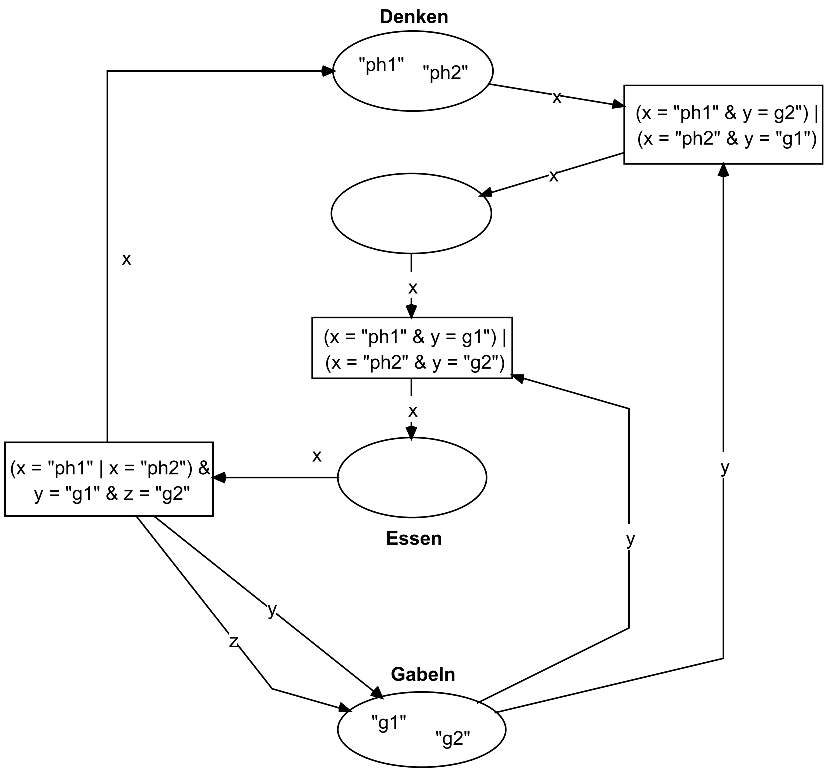
   Mögliche Anfangsmarkierungen sind: $\mathbf{m}_a = (1, 0, 0, 1, 1)^{tr}$ und $\mathbf{m}_b = (0, 1, 1, 0, 1)^{tr}$.

   Schaltfolgen, die die Transitionen umfassen, ergeben sich z.B. aus: $(1, 0, 0, 1, 1)^{tr} \xrightarrow{a} (0, 1, 1, 0, 1)^{tr} \xrightarrow{c} (0, 0, 0, 1, 1)^{tr} \xrightarrow{a'} (0, 1, 1, 0, 1)^{tr} \xrightarrow{b} (1, 0, 1, 0, 1)^{tr} \xrightarrow{c'} (1, 0, 0, 1, 1)^{tr} \xrightarrow{a} \ldots$.

Übungsaufgabe 10.5: In Präsenzaufgabe 10.2 wurde das Netz $N_{10.2}$ in ein kantenkonstantes Netz umgewandelt. Bilden Sie ein gefärbtes Netz aus diesem kantenkonstanten Netz, indem Sie eine Transitionsfaltung durchführen.

von 3

Lösung: Ein mögliches Ergebnis:



Hinweis: In der Abbildung stehen „&“ und „|“ für **logisches und** *und* **logisches oder**.

Bisher erreichbare Punktzahl: 115