FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Aufgabenblatt 14: Prozeßalgebra: Rekursion und Abstraktion

Präsenzteil am 27./28. 1. – Abgabe am 3./4. 2. 2014

Bitte bereiten Sie die Übungsaufgaben (nicht nur die Präsenzaufgaben) zu dem letzten Übungsgruppentermin am 27./28.1 vor. Sie können dann dort bei Bedarf angesprochen werden. Wer möchte kann diese Übungsaufgaben via Email abgeben.

Präsenzaufgabe 14.1:

1. Zeigen Sie $a \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_b \tau a$ und $a \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_b a\tau$.
2. Begründen Sie, warum $\tau a + \tau b$ und $a + b$ nicht verzweigungsbisimilar sind.
3. Geben Sie eine Verzweigungs-Bisimulations-Relation an, die zeigt dass $a(\tau(a + b) + b) + a$ und $a(a + b) + a\tau$ verzweigungsbisimilar sind.
4. Identifizieren Sie alle „klassisch" bisimilaren und initial verzweigungsbisimilaren Knoten in den Prozessgraphen aus den Teilaufgaben 1 und 3.
5. Warum gilt $s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} t \Longrightarrow s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_{rb} t$?
6. Gilt $s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_b t \Longrightarrow s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_{rb} t$? Gilt $s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_{rb} t \Longrightarrow s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_b t$?

Präsenzaufgabe 14.2: Rekursion und Äquivalenz im Kalkül.

1. Zeigen Sie im Kalkül: $\langle X|X = aX + b\rangle = \langle Y|Y = aY + b\rangle$
2. Zeigen Sie im Kalkül: $\langle X|X = aX\rangle = \langle Y_1|Y_1 = aY_2, Y_2 = aY_1\rangle$
3. (Optional:) Zeigen Sie im Kalkül: $\langle Z|Z = aaZ\rangle = \langle W|W = aaaW\rangle$

von
6

Bonusaufgabe 14.3: Seien zwei rekursive Spezifikationen gegeben:

$$E: \left| \begin{array}{rl} X = & ((a \cdot X) + (c \cdot X')) \\ X' = & b \end{array} \right.$$

$$F: \left| \; Y = \; ((a \cdot Y) + c) \right.$$

Betrachten Sie die beiden Terme

$$\begin{array}{rcl} t_1 & = & \tau_I(\langle X|E\rangle) \quad \text{mit } I := \{b\} \\ t_2 & = & \langle Y|F\rangle \end{array}$$

1. Zeigen Sie $t_1 = t_2$ im Kalkül „ACP_τ mit linearer geschützter Rekursion" (2 Punkte).
2. Zeichnen Sie die Prozessgraphen der beiden Terme t_1 und t_2.
3. Zeigen Sie $t_1 \mathrel{\underline{\leftrightarrow}}_{rb} t_2$, indem Sie alle initial verzweigungsbisimilaren Knoten in den Prozessgraphen identifizieren.
4. Leiten Sie den Übergang $\tau_{\{b\}}(\langle X|E\rangle) \xrightarrow{a} \tau_{\{b\}}(\langle X|E\rangle)$ im ACP_τ-Kalkül ab. Nutzen Sie die Transitionsregelbezeichner wie in Blatt 13 definiert, sowie $A_\tau, T^{\checkmark}_{v\notin\tau}, T_{v\notin\tau}, T^{\checkmark}_{v\in\tau}, T_{v\in\tau}$ für die Regeln auf S. 212.

von
6

Bonusaufgabe 14.4: Ein Prozessterm t ist *regulär*, wenn die Menge der Prozessterme p, welche über Aktionsfolgen $t \xrightarrow{v_1} \ldots \xrightarrow{v_i} p$ erreichbar sind, endlich ist. (Das bedeutet, dass der Prozessgraph zu t nur endlich viele Knoten enthält – als Transitionssystem betrachtet also einem endlichen Automaten entspricht. Außerdem ergibt sich zwingend, dass alle erreichbaren Prozessterme p ebenfalls regulär sind.)

1. (2 Punkte) Jeder Prozessterm x aus BPA ist regulär. Zeigen Sie, dass auch der Prozessterm $\tau_I(x)$ regulär ist (bei gegebener Menge I).

   Hinweis: Betrachten Sie die Menge der möglichen direkten Übergänge $\{x \xrightarrow{a_1} x'_1,\ x \xrightarrow{a_2} x'_2,\ \ldots,\ x \xrightarrow{a_k} x'_k,\ x \xrightarrow{b_1} \surd,\ \ldots,\ x \xrightarrow{b_l} \surd\}$ zum Prozessterm x und ermitteln Sie daraus anhand der Transitionsregeln für den τ_I-Operator die Menge der Übergänge des Prozessterms $\tau_I(x)$. Vergleichen Sie den resultierenden Prozessgraphen mit dem des ursprünglichen Terms x.

2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Prozessterme t regulär sind, die sich mit den Operatoren $+$, $\cdot$, $\|$ und τ_I sowie mit linearer Rekursion beschreiben lassen (also alle Prozessterme aus ACP_τ mit linearer Rekursion ohne ∂_H und die Operatoren Leftmerge $\lfloor\!\lfloor$ und Communication Merge $|$).

   Hinweise:

   - Argumentieren Sie über den Termaufbau, d.h. betrachten Sie wie in einer strukturellen Induktion die atomaren Terme sowie in einer Fallunterscheidung den jeweiligen Hauptoperator zusammengesetzter Terme (der Ausdruck $\langle X_i | E \rangle$ zählt auch als Hauptoperator). Bilden Sie mit den Transitionsregeln jeweils alle Übergänge, und weisen Sie nach, dass die Zahl der möglichen direkten Übergänge endlich ist und dass alle Nachfolgeterme regulär sind.
   - Die eigentliche Induktion sollte aber über den grad der Terme laufen, d.h. ihre Anzahl an Operatoren. Der grad sei wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\text{grad}(\surd) &:= 0 & \text{grad}(x+y) &:= \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1\\
\text{grad}(a \in A) &:= 0 & \text{grad}(x \cdot y) &:= \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1\\
\text{grad}(\tau) &:= 0 & \text{grad}(x \| y) &:= \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1\\
\text{grad}(\langle X_i | E \rangle) &:= 1 & \text{grad}(\tau_I(x)) &:= \text{grad}(x) + 1
\end{aligned}
$$

   - In der Induktionsvoraussetzung reicht es nicht, nur die Teilterme des aktuell betrachteten Terms als regulär anzunehmen (wie bei struktureller Induktion üblich). Stattdessen müssen *alle* Terme mit kleinerem grad als regulär angenommen werden (wie bei vollständiger Induktion üblich). Damit diese Annahme gilt, muss im Induktionsschritt bewiesen werden, dass bei jedem Übergang im Prozessgraphen der grad gleich bleibt oder abnimmt (der Einfachheit halber ist auch grad($\surd$) definiert).
   - In einigen wenigen Fällen hat ein Nachfolgeterm möglicherweise den gleichen grad wie der gerade behandelte Term. Da die Induktionsvoraussetzung nur für Nachfolgeterme mit *kleinerem* grad greift, ist in diesen Fällen eine separate Argumentation nötig, warum der Prozessgraph regulär bleibt.
   - Sie können das Ergebnis aus Teilaufgabe 1 nicht direkt wiederverwenden, da es sich nur auf BPA-Terme x bezieht. Der Argumentationsweg bleibt aber ähnlich.

Bisher erreichbare Punktzahl: 151