FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Präsenzlösung 14: Prozeßalgebra: Rekursion und Abstraktion

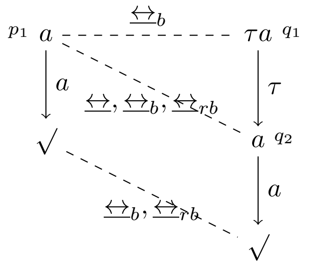
Präsenzteil am 27./28. 1. – Abgabe am 3./4. 2. 2014

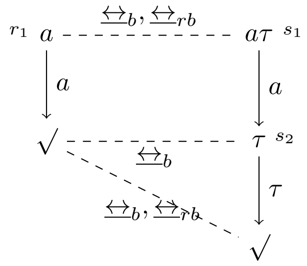
Bitte bereiten Sie die Übungsaufgaben (nicht nur die Präsenzaufgaben) zu dem letzten Übungsgruppentermin am 27./28.1 vor. Sie können dann dort bei Bedarf angesprochen werden. Wer möchte kann diese Übungsaufgaben via Email abgeben.

Präsenzaufgabe 14.1:

1. Zeigen Sie $a \underline{\leftrightarrow}_b \tau a$ und $a \underline{\leftrightarrow}_b a\tau$.

   Lösung: Prozessgraphen und Bisimulationsrelationen:





   - Es gilt $\surd \underline{\leftrightarrow}_b \surd$, da die Bedingungen 3. und 4. aus Def. 9.48 passen, wenn auf der jeweils anderen Seite eine leere τ-Folge (Länge 0) eingesetzt wird. Es gilt $\surd \underline{\leftrightarrow}_{rb} \surd$, weil beide Prozesse terminieren (Def. 9.51, Bedingungen 3. und 4.). $\surd \underline{\leftrightarrow} \surd$ gilt nicht, weil in der klassischen Bisimulationsdefinition $\surd$ kein Prozessterm ist - es würde aber nicht schaden, die Definition entsprechend aufzulockern.
   - Es gilt $p_1 \underline{\leftrightarrow} q_2$, da beide Prozesse mit a terminieren (klassische Bisimulationsbedingungen 3. und 4.). Somit gilt auch $p_1 \underline{\leftrightarrow}_b q_2$ und $p_1 \underline{\leftrightarrow}_{rb} q_2$.
   - Es gilt $p_1 \underline{\leftrightarrow}_b q_1$:
     - Zu $p_1 \xrightarrow{a} \surd$ passt in Def. 9.48, Bedingung 1. die Folge $q_1 \xrightarrow{\tau} q_2 \xrightarrow{a} \surd$ mit $\surd \underline{\leftrightarrow}_b \surd$.
     - Zu $q_1 \xrightarrow{\tau} q_2$ passt in Def. 9.48, Bedingung 2. die Verzweigungsbisimilarität $p_1 \underline{\leftrightarrow}_b q_2$.

     $p_1 \underline{\leftrightarrow} q_1$ gilt nicht, da in p_1 nur die Aktion a möglich ist, in q_1 jedoch nur die Aktion τ – gemäß den Bedingungen 1. und 2. der klassischen Bismulation fehlen also die passenden korrespondierenden Übergänge. $p_1 \underline{\leftrightarrow}_{rb} q_1$ gilt auch nicht, da Bedingung 1. und 2. in Def. 9.51 wie die klassische Bisimilarität gleiche Aktionen auf beiden Seiten fordern.
   - Es gilt $\surd \underline{\leftrightarrow}_b s_2$:
     - Da $\surd$ terminiert ist, passt in Def. 9.48, Bedingung 3. die τ-Folge $s_2 \xrightarrow{\tau} \surd$.
     - Zu $s_2 \xrightarrow{\tau} \surd$ passt in Def. 9.48, Bedingung 2. die Verzweigungsbisimilarität $\surd \underline{\leftrightarrow}_b \surd$.

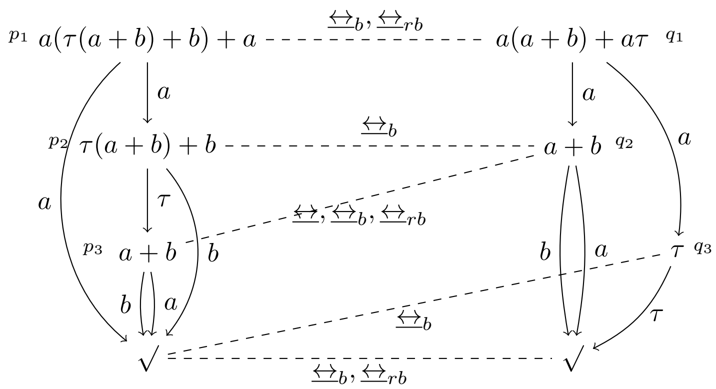
     $\surd \underline{\leftrightarrow} s_2$ gilt nicht, da $\surd$ gar kein Prozessterm ist. $\surd \underline{\leftrightarrow}_{rb} s_2$ gilt nicht, da in $\surd$ die Aktion τ nicht ausführbar ist (verletzt Def. 9.51, Bedingung 2.).
   - Es gilt $r_1 \underline{\leftrightarrow}_{rb} s_1$, da beide Prozesse mit der Aktion a zu verzweigungsbisimilaren Nachfolgern übergehen ($\surd \underline{\leftrightarrow}_b s_2$). Daraus folgt automatisch auch $r_1 \underline{\leftrightarrow}_b s_1$. $r_1 \underline{\leftrightarrow} s_1$ gilt nicht, da die Nachfolger nicht auf klassische Weise bisimilar sind.

2. Begründen Sie, warum $\tau a + \tau b$ und $a + b$ nicht verzweigungsbisimilar sind.

Lösung: Wenn die Terme verzweigungsbisimilar wären, müssten für alle zu Beginn ausführbaren Aktionen der linken Seite die Bedingung 1. aus Def. 9.48 erfüllt werden. Da die Aktion jeweils τ ist müsste $a \underline{\leftrightarrow}_b (a+b)$, $b \underline{\leftrightarrow}_b (a+b)$ gelten. Das kann aber nicht gelten, da auf der linken Seite weniger Aktionen zur Wahl stehen als auf der rechten.

3. Geben Sie eine Verzweigungs-Bisimulations-Relation an, die zeigt dass $a(\tau(a+b)+b)+a$ und $a(a+b)+a\tau$ verzweigungsbisimilar sind.

Lösung:



4. Identifizieren Sie alle „klassisch“ bisimilaren und initial verzweigungsbisimilaren Knoten in den Prozessgraphen aus den Teilaufgaben 1 und 3.

Lösung: s.o.

5. Warum gilt $s \underline{\leftrightarrow} t \Longrightarrow s \underline{\leftrightarrow}_{rb} t$?

Lösung: Wenn gemäß Def. 9.7, Bed. 1. und 2. in beiden Termen die gleichen Aktionen $s \xrightarrow{a} s'$ und $t \xrightarrow{a} t'$ möglich sind und zu einem bisimilarem Folgetermpaar $s' \underline{\leftrightarrow} t'$ führen, so lässt sich dies Paarung direkt für Bed. 1. und 2. in Def. 9.51 verwenden. Für das Folgetermpaar wird nun $s' \underline{\leftrightarrow}_b t'$ gefordert. Da $s' \underline{\leftrightarrow} t'$ vorausgesetzt ist, sind wieder gleiche Aktionen mit bisimilaren Folgezuständen möglich, so dass die Bedingungen aus Def. 9.48 mit τ-Folgen der Länge 0 erfüllt sind.

Wenn gemäß Def. 9.7, Bed. 3. und 4. in beiden Termen die gleichen Aktionen $s \xrightarrow{a} s'$ und $t \xrightarrow{a} t'$ möglich sind und zur Termination führen, so genügt dies auch der schwächeren Bed. 3. und 4. in Def. 9.51. Zudem lässt sich die Argumentation zu Bed. 1. und 2. für das Aktionspaar anwenden, wenn als Nachfolgepaar $\surd \underline{\leftrightarrow}_b \surd$ betrachtet wird.

6. Gilt $s \underline{\leftrightarrow}_b t \Longrightarrow s \underline{\leftrightarrow}_{rb} t$? Gilt $s \underline{\leftrightarrow}_{rb} t \Longrightarrow s \underline{\leftrightarrow}_b t$?

Lösung: Es gilt nur letzteres – als Gegenbeispiel für ersteres eignen sich die Terme aus Teilaufgabe 1.

Präsenzaufgabe 14.2: Rekursion und Äquivalenz im Kalkül.

1. Zeigen Sie im Kalkül: $\langle X|X = aX + b\rangle = \langle Y|Y = aY + b\rangle$

Lösung: Sei $E = \{X = aX + bd\}$ und $E' = \{Y = aY + b\}$. Mit RDP gilt:

$$\langle X|E\rangle = a\langle X|E\rangle + b$$

Also haben wir eine Term y gefunden, der E' löst, denn für $y = \langle X|E\rangle$ gilt:

$$y = t_1(y) \quad \text{bzw.} \quad y = ay + b$$

Mit RSP schließen wir, dass y eine Lösung von Y von E' ist, d.h. dass $y = \langle Y|E'\rangle$. Mit $y = \langle X|E\rangle$ folgt die Behauptung.

2. Zeigen Sie im Kalkül: $\langle X|X = aX\rangle = \langle Y_1|Y_1 = aY_2, Y_2 = aY_1\rangle$

Lösung: Sei $E = \{X = aX\}$ und $E' = \{Y_1 = aY_2, Y_2 = aY_1\}$. Mit RDP folgt:

$$\begin{array}{rcccl} \langle X|E\rangle & = & a\langle X|E\rangle & = & aa\langle X|E\rangle \\ \langle Y_1|E'\rangle & = & a\langle Y_2|E'\rangle & = & aa\langle Y_1|E'\rangle \end{array}$$

Also haben wir zwei Lösungen für Z im Gleichungssystem $E'' = \{Z = aaZ\}$ gefunden, nämlich zum einen $y = \langle X|E\rangle$ und zum anderen $y' = \langle Y_1|E'\rangle$. Mit RSP schließen wir:

$$\begin{array}{rcl} \langle X|E\rangle & = & \langle Z|E''\rangle \\ \langle Y|E'\rangle & = & \langle Z|E''\rangle \end{array}$$

Also $\langle X|E\rangle = \langle Z|E''\rangle = \langle Y|E'\rangle$.

3. (Optional:) Zeigen Sie im Kalkül: $\langle Z|Z = aaZ\rangle = \langle W|W = aaaW\rangle$

Lösung: In der vorigen Teilaufgabe wurde bereits $\langle X|X = aX\rangle = \langle Z|Z = aaX\rangle$ bewiesen. Wir zeigen nun auch $\langle X|X = aX\rangle = \langle W|W = aaaW\rangle$. Daraus folgt dann mittels Transitivität und Symmetrie $\langle Z|Z = aaZ\rangle = \langle W|W = aaaW\rangle$.

Mit mehrfacher Anwendung von RDP ergibt sich:

$$\langle X|X = aX\rangle = a\langle X|X = aX\rangle = aa\langle X|X = aX\rangle = aaa\langle X|X = aX\rangle$$

$y'' = \langle X|X = aX\rangle$ ist also auch eine Lösung für $\langle W|W = aaaW\rangle$, mit RSP ergibt sich:

$$\langle X|X = aX\rangle = \langle W|W = aaaW\rangle$$

Bonusaufgabe 14.3: Seien zwei rekursive Spezifikationen gegeben:

von 6

$$E: \left|\begin{array}{rl} X = & ((a \cdot X) + (c \cdot X')) \\ X' = & b \end{array}\right.$$

$$F: \left|\; Y = \; ((a \cdot Y) + c)\right.$$

Betrachten Sie die beiden Terme

$$\begin{array}{rcl} t_1 & = & \tau_I(\langle X|E\rangle) \quad \text{mit } I := \{b\} \\ t_2 & = & \langle Y|F\rangle \end{array}$$

1. Zeigen Sie $t_1 = t_2$ im Kalkül „ACP_τ mit linearer geschützter Rekursion“ (2 Punkte).
2. Zeichnen Sie die Prozessgraphen der beiden Terme t_1 und t_2.
3. Zeigen Sie $t_1 \underline{\leftrightarrow}_{rb}\, t_2$, indem Sie alle initial verzweigungsbisimilaren Knoten in den Prozessgraphen identifizieren.
4. Leiten Sie den Übergang $\tau_{\{b\}}(\langle X|E\rangle) \xrightarrow{a} \tau_{\{b\}}(\langle X|E\rangle)$ im ACP_τ-Kalkül ab. Nutzen Sie die Transitionsregelbezeichner wie in Blatt 13 definiert, sowie $A_\tau, T^{\surd}_{v\notin\tau}, T_{v\notin\tau}, T^{\surd}_{v\in\tau}, T_{v\in\tau}$ für die Regeln auf S. 212.

von
6

Bonusaufgabe 14.4: Ein Prozessterm t ist *regulär*, wenn die Menge der Prozessterme p, welche über Aktionsfolgen $t \xrightarrow{v_1} \ldots \xrightarrow{v_i} p$ erreichbar sind, endlich ist. (Das bedeutet, dass der Prozessgraph zu t nur endlich viele Knoten enthält – als Transitionssystem betrachtet also einem endlichen Automaten entspricht. Außerdem ergibt sich zwingend, dass alle erreichbaren Prozessterme p ebenfalls regulär sind.)

1. (2 Punkte) Jeder Prozessterm x aus BPA ist regulär. Zeigen Sie, dass auch der Prozessterm $\tau_I(x)$ regulär ist (bei gegebener Menge I).

   Hinweis: Betrachten Sie die Menge der möglichen direkten Übergänge $\{x \xrightarrow{a_1} x'_1,\ x \xrightarrow{a_2} x'_2,\ \ldots,\ x \xrightarrow{a_k} x'_k,\ x \xrightarrow{b_1} \surd,\ \ldots,\ x \xrightarrow{b_l} \surd\}$ zum Prozessterm x und ermitteln Sie daraus anhand der Transitionsregeln für den τ_I-Operator die Menge der Übergänge des Prozessterms $\tau_I(x)$. Vergleichen Sie den resultierenden Prozessgraphen mit dem des ursprünglichen Terms x.

2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Prozessterme t regulär sind, die sich mit den Operatoren $+$, $\cdot$, $\|$ und τ_I sowie mit linearer Rekursion beschreiben lassen (also alle Prozessterme aus ACP_τ mit linearer Rekursion ohne ∂_H und die Operatoren Leftmerge $⫡$ und Communication Merge $|$).

   Hinweise:

   - Argumentieren Sie über den Termaufbau, d.h. betrachten Sie wie in einer strukturellen Induktion die atomaren Terme sowie in einer Fallunterscheidung den jeweiligen Hauptoperator zusammengesetzter Terme (der Ausdruck $\langle X_i|E\rangle$ zählt auch als Hauptoperator). Bilden Sie mit den Transitionsregeln jeweils alle Übergänge, und weisen Sie nach, dass die Zahl der möglichen direkten Übergänge endlich ist und dass alle Nachfolgeterme regulär sind.
   - Die eigentliche Induktion sollte aber über den grad der Terme laufen, d.h. ihre Anzahl an Operatoren. Der grad sei wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\text{grad}(\surd) &:= 0 & \text{grad}(x+y) &:= \text{grad}(x)+\text{grad}(y)+1\\
\text{grad}(a \in A) &:= 0 & \text{grad}(x \cdot y) &:= \text{grad}(x)+\text{grad}(y)+1\\
\text{grad}(\tau) &:= 0 & \text{grad}(x\|y) &:= \text{grad}(x)+\text{grad}(y)+1\\
\text{grad}(\langle X_i|E\rangle) &:= 1 & \text{grad}(\tau_I(x)) &:= \text{grad}(x)+1
\end{aligned}
$$

   - In der Induktionsvoraussetzung reicht es nicht, nur die Teilterme des aktuell betrachteten Terms als regulär anzunehmen (wie bei struktureller Induktion üblich). Stattdessen müssen *alle* Terme mit kleinerem grad als regulär angenommen werden (wie bei vollständiger Induktion üblich). Damit diese Annahme gilt, muss im Induktionsschritt bewiesen werden, dass bei jedem Übergang im Prozessgraphen der grad gleich bleibt oder abnimmt (der Einfachheit halber ist auch grad($\surd$) definiert).
   - In einigen wenigen Fällen hat ein Nachfolgeterm möglicherweise den gleichen grad wie der gerade behandelte Term. Da die Induktionsvoraussetzung nur für Nachfolgeterme mit *kleinerem* grad greift, ist in diesen Fällen eine separate Argumentation nötig, warum der Prozessgraph regulär bleibt.
   - Sie können das Ergebnis aus Teilaufgabe 1 nicht direkt wiederverwenden, da es sich nur auf BPA-Terme x bezieht. Der Argumentationsweg bleibt aber ähnlich.

Bisher erreichbare Punktzahl: 151