FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

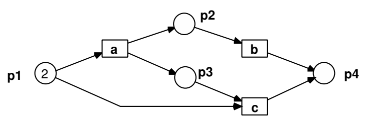
Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 8 : Prozesse, Kausalnetze, Invarianzen

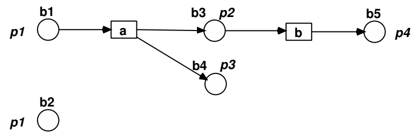
Präsenzteil am 02./03. 12. – Abgabe am 09./10. 12. 2013

Präsenzaufgabe 8.1: Gegeben ein Petrinetz sowie ein dazu passender Prozess:

$N_{8.1} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$:



$R = (B, E, <)$:



1. Geben Sie die Abbildung ϕ an, die dem Prozess R zugrunde liegt.

   Lösung:

$$\phi_P(b_1) = \phi_P(b_2) = p_1,\ \phi_P(b_3) = p_2,\ \phi_P(b_4) = p_3,\ \phi_P(b_5) = p_4$$
$$\phi_T(a) = a,\ \phi_T(b) = b$$

2. Bestimmen Sie die Mengen $^\circ R$ und R°.

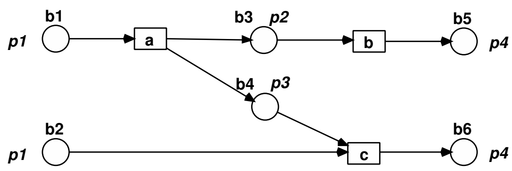
   Nachtrag zum Skript: Die Mengen sind wie folgt definiert:

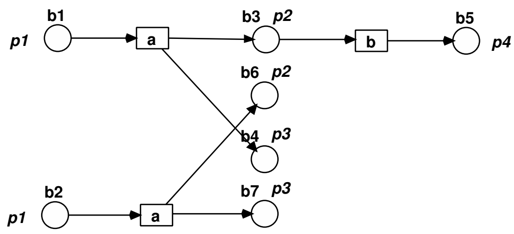
$$^\circ R := \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$$
$$R^\circ := \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$$

   Lösung: $^\circ R = \{b_1, b_2\},\ R^\circ = \{b_2, b_4, b_5\}$

3. Geben Sie eine Fortsetzung R' des Prozesses R gemäß Def. 6.31 an. Gibt es mehrere mögliche Fortsetzungen?

   Lösung: Es gibt zwei mögliche Fortsetzungen:





Präsenzaufgabe 8.2: Der Model Checking Algorithmus hat gewisse Ähnlichkeiten mit den Algorithmen für Markierungs- und Lebendigkeitsinvarianz.

Sei f eine aussagenlogische Formel, wie sie für Markierungs- und Lebendigkeitsinvarianz als Markierungsprädikat verwendet wird. Kann man eine Markierungsinvarianz durch die CTL-Formel $\mathbf{AG}f$ ausdrücken? Überprüfe dies durch einen Vergleich der Algorithmenabläufe.

Lösung: Ein grundlegender Unterschied besteht darin, dass wir beim CTL Model Checking annehmen, dass keine Verklemmungen auftreten. Betrachten wir also im folgenden nur Netze, die verklemmungsfrei sind.

Der CTL-Model-Checking-Algorithmus erfordert es zunächst, die Formel umzuwandeln:

$$\begin{aligned} & \mathbf{AG}f \\ \equiv \;& \neg\mathbf{EF}\neg f \\ \equiv \;& \neg\mathbf{E}(\mathit{True}\,\mathbf{U}\neg f) \end{aligned}$$

Der CTL-Model-Checking-Algorithmus arbeitet die Teilformeln von innen nach außen ab, führt also folgende Schritte durch:

1. $F_1 = f$: Alle Zustände, in denen f gilt, erhalten f als Label (dieser Schritt hängt zwar vom Aufbau von f ab und kann sehr komplex ausfallen, diese Details sind aber für die Fragestellung nicht weiter relevant).
2. $F_2 = \neg F_1$: Alle anderen Zustände erhalten als Label $\neg f$.
3. $F_3 = \mathbf{E}(\mathit{True}\,\mathbf{U}F_2)$: (Der Einfachheit halber sei das Versehen eines Zustandes mit der Formel $\mathbf{E}(\mathit{True}\,\mathbf{U}\neg f)$ als „Einfärben" bezeichnet.) Im ersten Teilschritt werden alle Zustände eingefärbt, in welchen $\neg f$ gilt (also genau die im vorigen Schritt gelabelten). Im zweiten Teilschritt werden iterativ (da True keine Einschränkung darstellt) *alle* Zustände eingefärbt, von denen aus ein Übergang zu einem bereits gefärbten Zustand möglich ist.
4. $\neg F_3$: Diese Formel gilt in allen noch ungefärbten Zuständen.
5. Ergebnis: Die Formel $\mathbf{AG}f$ ist in der Kripke-Struktur genau dann erfüllt, wenn der Startzustand *nicht* gefärbt wurde. Dies bedeutet, dass vom Startzustand aus kein Zustand erreichbar ist, in dem $\neg f$ gilt.

Der Markierungsinvarianzalgorithmus läuft iterativ alle vom Startzustand aus erreichbaren Markierungen (Zustände) ab und bricht mit dem Ergebnis „gilt nicht" ab, sobald in einem Zustand $\neg f$ gilt. Er liefert das Ergebnis „gilt", wenn er den Erreichbarkeitsgraphen vollständig abgearbeitet hat, ohne auf eine solche Markierung zu treffen.

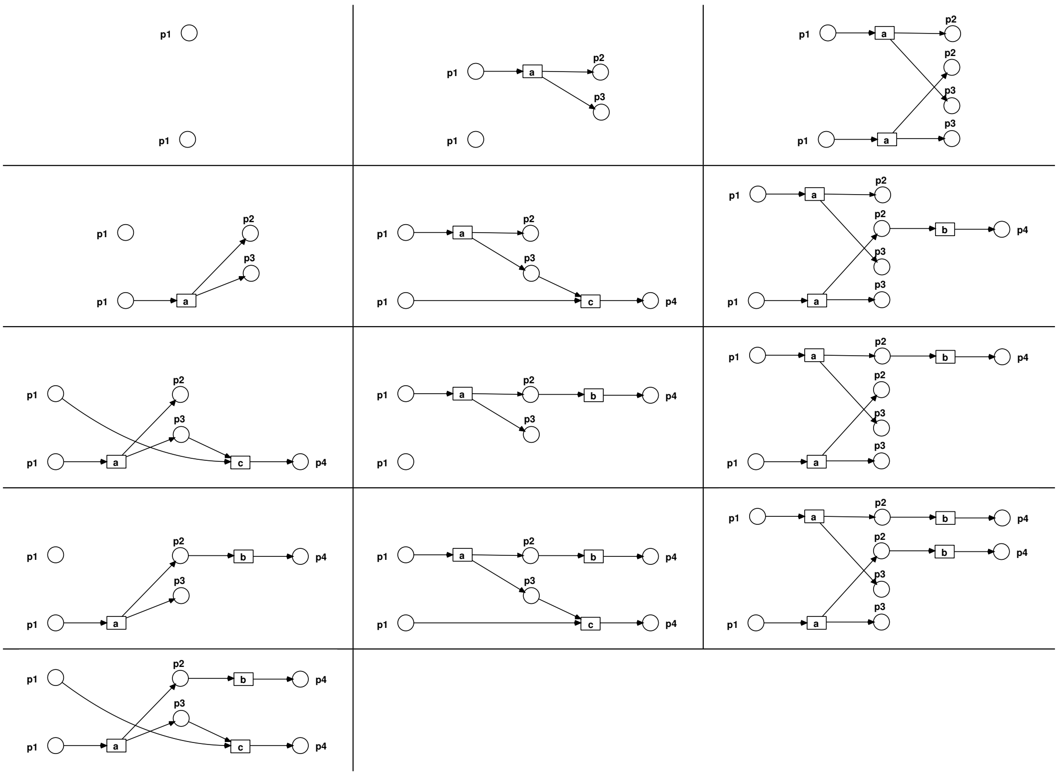
Also prüfen beide Algorithmen, ob vom Startzustand aus ein Zustand erreichbar ist, in dem $\neg f$ gilt.

Übungsaufgabe 8.3: Gegeben das Petrinetz $N_{8.1}$ aus der Präsenzaufgabe.

von 6

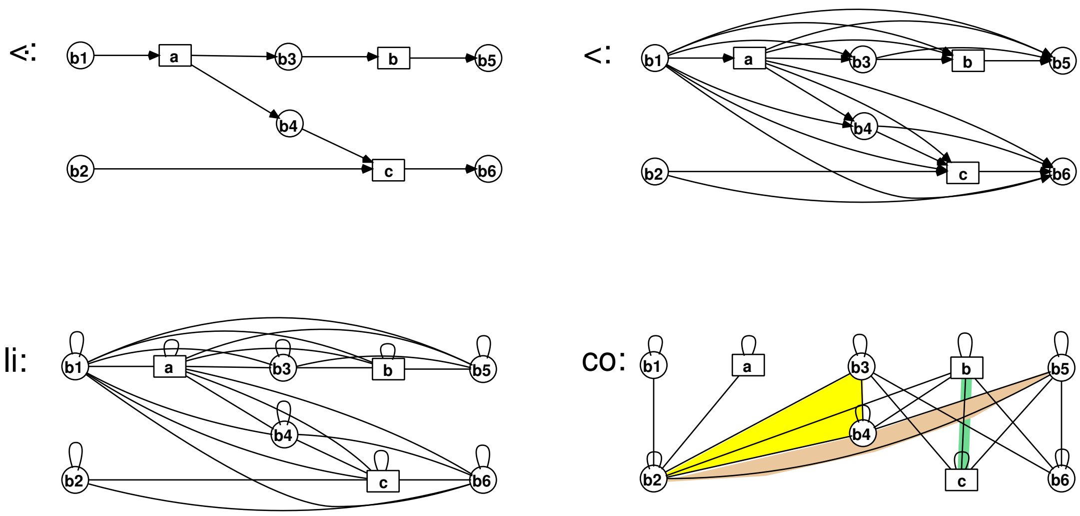
1. Zeichnen Sie alle nach Def. 6.31 und 6.32 konstruierbaren Prozesse des Netzes.

   Lösung: Zu beachten ist die Beschriftung der Prozesse. Diese erfolgt hier in Anlehnung an das Petrinetz $N_{8.1}$ und nicht R.



2. Bestimmen Sie für den um die Transition c verlängerten Prozess R' aus der Präsenzaufgabe die Relationen $\lessdot$, $<$, **li** und **co**. Stellen Sie die Relationen $\lessdot$ und $<$ jeweils als gerichtete und die Relationen **li** und **co** als ungerichtete Graphen dar.

Lösung:



Hinweis: Bei co stehen die Farben für die Schnitte. Gelb und Hellbraun sind P-Schnitte und Grün ist ein T-Schnitt.

3. Geben Sie je einen möglichst großen P-Schnitt und T-Schnitt für R' an.

   Lösung: P-Schnitte sind die erreichbaren Markierungen (in dieser Relation **co** treten nur zwei Platz-Kliquen mit drei Elementen auf, alle anderen haben maximal zwei Elemente):

   $$\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_3, b_4\}, \{b_3, b_6\}, \{b_2, b_4, b_5\}, \{b_5, b_6\}$$

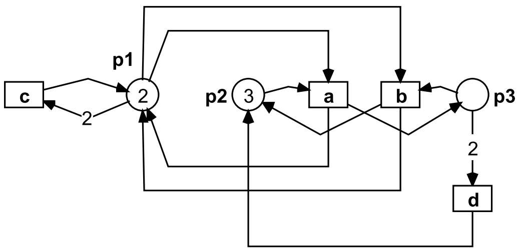
   T-Schnitte sind die nebenläufigen Transitionen (in dieser Relation **co** gibt es nur ein einziges Transitionspaar):

   $$\{b, c\}$$

Übungsaufgabe 8.4: Ermitteln Sie mithilfe des Algorithmus für Lebendigkeitsinvarianzeigenschaften, welche der vier Transitionen a, b, c und d lebendig sind. Erläutern Sie ihren Lösungsweg.

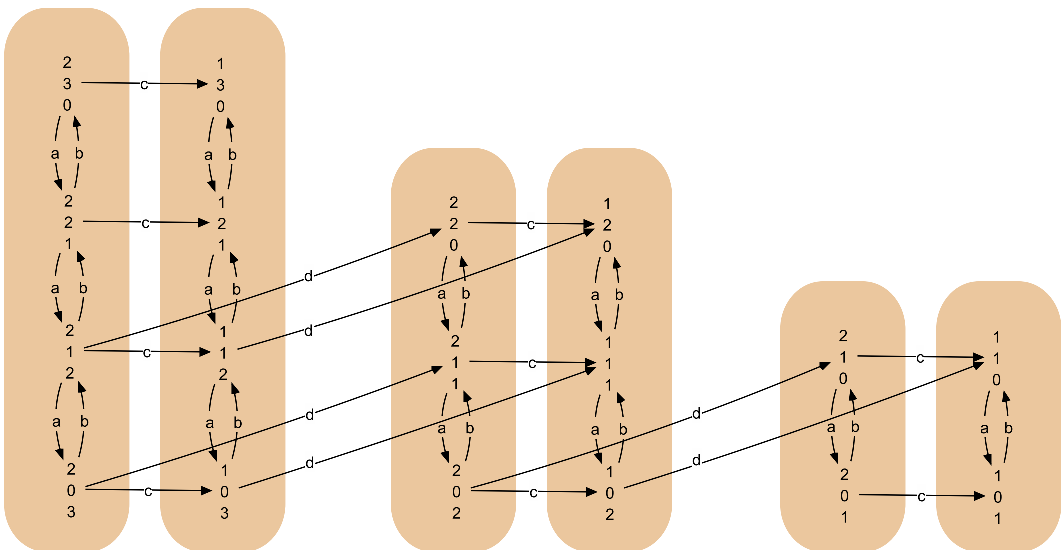
von 4

$N_{8.4}$:



Hinweis: Bitte bemühen Sie sich beim Zeichnen des Erreichbarkeitsgraphen um eine geometrisch einheitliche Struktur. Kanten zu gleichen Transitionen sollten im gesamten Graphen die gleiche Richtung und die gleiche Länge aufweisen.

Lösung: In der terminalen strengen Zusammenhangskomponente sind die zwei Transitionen a und b potenziell aktivierbar. Also sind diese zwei Transitionen lebendig. Die Transitionen c und d treten in der terminalen SKK nicht mehr auf, sind also nicht lebendig.



Bisher erreichbare Punktzahl: 91