FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Aufgabenblatt 4 : LTL

Präsenzteil am 4./5. 11. – Abgabe am 11./12. 11. 2013

Präsenzaufgabe 4.1:

1. Betrachte das TS aus Abb. 2.8. Betrachte die ω-Sprache $L = y^\omega$ mit $y = (s_0 s_1 s_2 s_4)$. Gib die Ettikettensprache $E_S(L)$ an!
2. Betrachte das TS aus Abb. 2.8. Definiere die Aussagen α_4 = „In der Tasse ist Tee." und α_5 = „In der Tasse ist Kaffee.". Modifiziere das TS so, dass diese beiden Aussagen sinnvoll integriert werden. Gib eine LTL-Formel an, die Folgendes beschreibt: Immer, wenn Kaffee ausgewählt wurde, befindet sich kurz danach auch Kaffee in der Tasse (und nicht etwa Tee!).
3. Sei $AP = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Geben Sie die Menge $L^\omega(f)$ (vgl. Def. 3.3) für folgende LTL-Formeln an! (Beachten Sie, dass die Sprache $L^\omega(f)$ völlig unabhängig vom TS aus Abb. 2.8 ist.)

   (a) $f = \Box\alpha_2$

   (b) $f = \Diamond(\alpha_1 \land \circ\neg\alpha_2)$

   Sie können dabei die folgenden Mengen verwenden ($\alpha \in AP$ und $A \subseteq AP$):

$$\begin{aligned} \text{Obermengen}(A) &:= \{X \subseteq AP \mid A \subseteq X\} \\ \text{Obermengen}(\alpha) &:= \text{Obermengen}(\{\alpha\}) \\ \text{Obermengen}(\neg\alpha) &:= \{X \subseteq AP \mid \alpha \notin X\} \end{aligned}$$

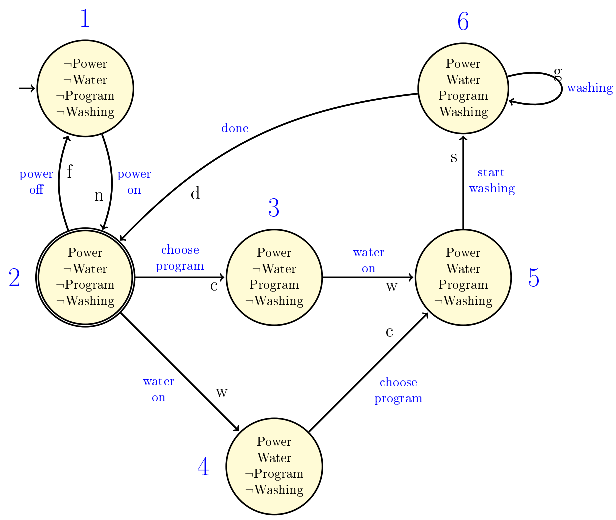
   Rechnen Sie die Mengen für die konkreten, von Ihnen benötigten α_i aus.

Präsenzaufgabe 4.2: Beweisen Sie die Äquivalenzen in LTL:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}f &\equiv \mathit{True}\,\mathbf{U}f \\ \mathbf{G}f &\equiv \neg(\mathbf{F}\neg f) \end{aligned}$$

von
6

Übungsaufgabe 4.3: Betrachten Sie die Kripkestruktur $TS_{Waschmaschine}$, welches eine Systembeschreibung einer Waschmaschine darstellt. Die Transitionsbezeichner und negierten Aussagen in den Etiketten sind optional und dienen nur der Verdeutlichung.



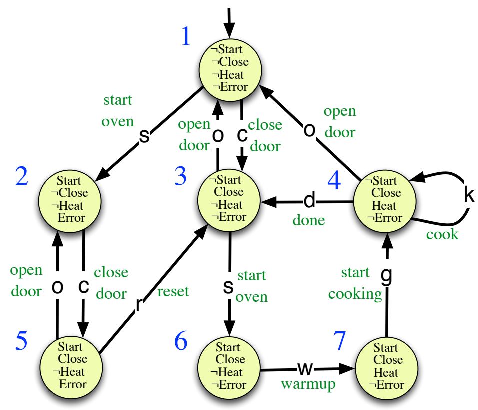
$TS_{Waschmaschine}$

1. Betrachten Sie $TS_{Waschmaschine}$ ohne Etiketten als Büchi-Automat mit 2 als einzigem Endzustand und Alphabet $\Sigma = \{c, d, f, g, n, s, w\}$. Geben Sie die Mengen $L(TS_{Waschmaschine})$ bzw. $L^\omega(TS_{Waschmaschine})$ als regulären bzw. ω-regulären Ausdruck an. Hinweis: Wie oft, kann es hilfreich sein, zuerst einen Pfad vom Anfangs- zum Endzustand zu betrachten und dann alle möglichen Zyklen anzufügen.

2. Betrachten Sie $TS_{Waschmaschine}$ mit Etiketten als Kripke-Struktur M. Bestimmen Sie die Menge $SS(M)$ aller Pfade (Def. 2.18) als ω-regulären Ausdruck. Das Alphabet dieses Ausdrucks ist also $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Bestimmen Sie die Etikettensprache $E_S(SS(M))$ (Def. 2.18) als ω-regulären Ausdruck. Das Alphabet dieses Ausdrucks besteht also aus den Etiketten der Zustände. Da alle Zustände verschiedene Etikette haben, können Sie abkürzend die Zustandsbezeichner als Bezeichner der Etikette wählen.

4. Betrachten Sie jetzt die vollständige Kripkestruktur M_{ofen} des Mikrowellen-Ofens:



M_{ofen}

Für eine Formel α sei $Sat(\alpha)$ die Menge der Zustände, in denen α gilt. Bestimmen Sie $Sat(Start \wedge Error)$ sowie $Sat(Heat)$. Prüfen Sie dann, ob die LTL-Formel

$$\mathbf{GF}(Start \wedge Error \;\Rightarrow\; \mathbf{F}Heat)$$

im Anfangszustend 1 gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung, d.h. entweder die Gültigkeit beweisen oder eine Rechnung als Gegenbeispiel angeben.

5. Prüfen Sie ebenso, ob die LTL-Formel

$$f = \mathbf{FG}(Error \wedge Start)$$

im Anfangszustend 1 gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung, d.h. entweder die Gültigkeit beweisen oder eine Rechnung als Gegenbeispiel angeben. Geben Sie zudem einen Pfad π an, für den diese Formel gilt, d.h. für den $M_{ofen}, \pi \models f$ gilt.

Übungsaufgabe 4.4: Betrachten Sie die Kripkestruktur M_{ofen} aus Aufgabe 4.3. und den unendlichen Zustandspfad $\pi = s_0 s_{i_1} s_{i_2} \ldots$ aus der Menge $13(125253)^\omega$.

von
6

Geben Sie an, ob für die folgenden LTL-Formeln f jeweils $M_{ofen}, \pi \models f$ und allgemeiner $M_{ofen} \models f$ gilt.

Anmerkung: Wie im Skript werden hier die temporalen Operatoren in der Form $\circ, \Diamond$ und $\Box$ benutzt, da Sie auf beide Formen auch in der Literatur treffen werden.

f	$M_{ofen}, \pi \models f$	$M_{ofen} \models f$
$\circ\neg(Start \wedge Heat)$		
$\Box\neg Start$		
$\Box(Start \Longrightarrow Close)$		
$\Box\Diamond(Heat \vee Error \vee \neg Start)$		
$\Diamond((Start \wedge Close \wedge \neg Error)\ \mathbf{U}\ Heat)$		
$\Box((Close \wedge \neg Heat \wedge Start) \Longrightarrow \circ\circ\neg Heat)$		

Bisher erreichbare Punktzahl: 48