FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Präsenzlösung 1 : Endliche Automaten

Präsenzteil am 14./15. 10. – Abgabe am 21./22. 10. 2013

Präsenzaufgabe 1.1:

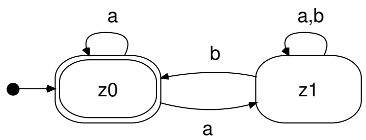
1. Wir wissen aus FGI-1, dass es zu jedem NFA A einen DFA B mit $L(A) = L(B)$ gibt. Kann man B aus A berechnen? Wenn ja, wie?

   Lösung: Potenzautomatenkonstruktion (siehe FGI-1).

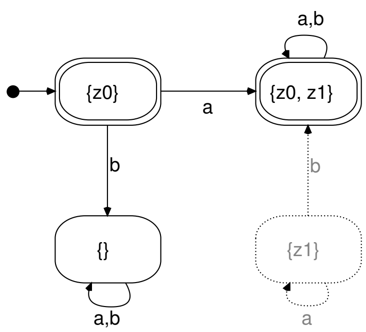
2. Sei A ein NFA mit $L(A) \subseteq X^*$. Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift für einen NFA $\bar{A}$ an, für den $L(\bar{A}) = X^* \setminus L(A)$ gilt. (Tipp: Wandeln Sie zunächst A in einen DFA um.)

   Lösung: O.b.d.A. sei A ein vollständiger DFA. Wir konstruieren $\bar{A}$ aus A, indem wir in $\bar{A}$ genau die Zustände als Endzustände wählen, die dies in A nicht sind. Die restlichen Komponenten bleiben gleich. Auch $\bar{A}$ ist ein vDFA. Wurde in A ein Wort akzeptiert, dann in $\bar{A}$ nicht und umgekehrt.

3. Konstruieren Sie den Potenzautomaten für folgenden NFA:



   Lösung: Der Potenzautomat ergibt sich wie folgt (der gestrichelte Teil gehört nicht zur initialen Zusammenhangskomponente und braucht nicht erzeugt zu werden):



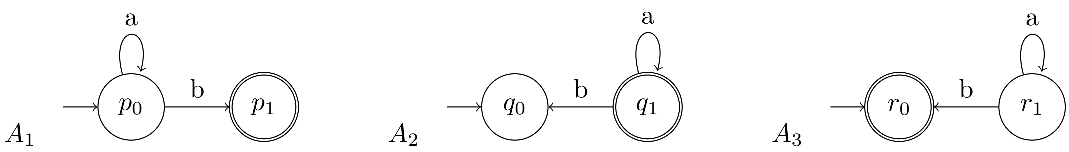
Präsenzaufgabe 1.2: Zeigen Sie die erste Teilaussage von Lemma 1.9: „Das Leerheitsproblem für NFA ist entscheidbar.“

1. Beschreiben Sie ein Verfahren, welches für einen gegebenen nicht-deterministischen Automaten $A := (Q, \Sigma, \delta, Q^0, F)$ feststellt, ob $L(A) = \emptyset$ gilt.

Lösung: Zuerst ist die initiale Zusammenhangskomponente von A zu bilden. Hierzu wird die Menge der erreichbaren Zustände Q' zunächst mit den Startzuständen von A gefüllt ($Q' := Q^0$) und anschließend so lange um Nachfolgezustände von allen bereits in Q' enthaltenen Zuständen ergänzt, bis keine Änderungen mehr auftreten.

Enthält Q' keinen Endzustand (es gilt $Q' \cap F = \emptyset$), so akzeptiert A kein einziges Wort, also gilt $L(A) = \emptyset$.

2. Wenden Sie Ihr Verfahren auf folgende Automaten an:



Lösung: $p_1 \in Q'_1 = \{p_0, p_1\}$ $\quad$ $q_1 \notin Q'_2 = \{q_0\}$ $\quad$ $r_0 \in Q'_3 = \{r_0\}$

$L(A_1) = \{a\}^*\{b\} \neq \emptyset$ $\quad$ $L(A_2) = \emptyset$ $\quad$ $L(A_3) = \{\varepsilon\} \neq \emptyset$

3. Begründen Sie Korrektheit und Termination Ihres Verfahrens.

Lösung: *Korrektheit:* Die Argumentation wird leichter, wenn beide Seiten negiert werden:

$$\begin{aligned} & L(A) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Q' \cap F = \emptyset \\ \equiv \quad & L(A) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Q' \cap F \neq \emptyset \end{aligned}$$

Es sind nun zwei Richtungen zu zeigen:

(a) Falls $L(A) \neq \emptyset$, dann $Q' \cap F \neq \emptyset$.
Sei $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in L(A)$. Dann gibt es eine Rechnung von einem Startzustand $q_0 \in Q^0$ zu einem Endzustand $q_e \in F$: $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} q_e$. Da q_{i+1} jeweils ein Nachfolgezustand von q_i ist und q_0 anfänglich in Q' aufgenommen wurde, ist am Ende auch $q_e \in Q'$. Also ist die Schnittmenge $Q' \cap F$ nicht leer.

(b) Falls $Q' \cap F \neq \emptyset$, dann $L(A) \neq \emptyset$.
Sei $q_e \in Q' \cap F$. Dann ist q_e entweder ein Startzustand (direkt in Q' enthalten) oder ein Nachfolgezustand eines zuvor schon in Q' aufgenommenen Zustandes q'. Für q' gilt Gleiches: Entweder ist $q' \in Q^0$ oder q' ist Nachfolgezustand von q''. Diese Argumentation lässt sich fortsetzen, bis man auf einen Startzustand q^m trifft. Die Übergänge $q^m \xrightarrow{a_1} \ldots \xrightarrow{a_{m-1}} q' \xrightarrow{a_m} q_e$ bilden eine Erfolgsrechnung im NFA A, so dass $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in L(A)$ gilt. Also ist $L(A)$ nicht leer.

Termination: Die Konstruktion der Menge Q' bricht garantiert nach endlich vielen Schritten ab, da die Menge Q, aus welcher die Elemente für Q' stammen, endlich ist. Ob Q' einen Endzustand enthält, lässt sich durch reihenweises Überprüfen der in Q' enthaltenen Elemente in endlicher Zeit feststellen. Somit terminiert das Verfahren immer in endlicher Zeit.

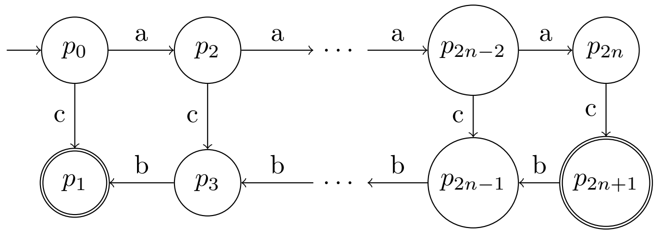
4. Ist Ihr Verfahren ohne Modifikationen für deterministische und verallgemeinerte endliche Automaten anwendbar? Wenn nicht, was müsste modifiziert werden?

Lösung: Das Verfahren für NFA ist genauso für DFA anwendbar, da ein DFA lediglich ein Spezialfall eines NFA ist.

Die Argumentation zu Teilaufgabe 3 ist nicht davon abhängig, ob an den Kanten genau ein Symbol steht. Beim verallgemeinerten FA können die Teile $a_1 \ldots a_n$ als Teilwörter beliebiger Länge betrachtet werden.

von
6

Übungsaufgabe 1.3: Gegeben ein beliebiges, festes n. Zu n sei der Automat A_n wie folgt gegeben:



1. Beschreiben Sie $L(A_n)$ durch einen regulären Ausdruck. (Sie dürfen Auslassungspunkte verwenden.)
2. Beschreiben Sie $L(A_n)$ als Menge (ohne Auslassungspunkte).
3. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Antworten.
4. Ist $L(A_n)$ regulär? Begründen Sie dies.
5. Zusatz: Betrachten Sie die Vereinigung aller Mengen $L(A_n)$: $A := \bigcup_{n \geq 0} L(A_n)$

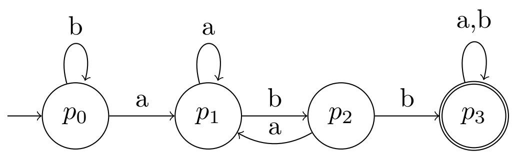
   Ist A regulär? Kann man A durch eine Grammatik darstellen? Begründen Sie dies.

von
6

Übungsaufgabe 1.4: Es soll ein einfacher Textverarbeitungs-Algorithmus in Form eines endlichen Automaten erstellt werden. Gesucht ist ein endlicher Automat, der die akzeptierten Wörter eines anderen Automaten akzeptiert, mit dem Unterschied das jedes Symbol verdoppelt wird.

1. Beschreiben Sie ein Verfahren, welches für einen gegebenen deterministischen Automaten $A := (Q, \Sigma, \delta, \{q^0\}, F)$ einen deterministischen Automaten $A' := (Q', \Sigma', \delta', \{q'^0\}, F')$ konstruiert, der genau die 'gedoppelten' Wörter von $L(A)$ akzeptiert,
   d.h. $L(A') = \{a_0a_0a_1a_1 \ldots a_na_n | a_0a_1 \ldots a_n \in L(A)\}$.
2. Beweisen Sie, dass der folgende Automat A, die Menge aller Wörter über $\Sigma = \{a, b\}$ akzeptiert, die das Teilwort abb enthalten.

   A

3. Beschreiben Sie diese Wortmenge durch einen regulären Ausdruck.
4. Wenden Sie Ihr Verfahren unter 1. auf diesen Automaten A an. Dokumentieren Sie dabei die Zwischenergebnisse.
5. Begründen Sie die Korrektheit der Lösung.

Mehr Details zur Veranstaltung unter:

http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/WS1213/FGI2/

Bisher erreichbare Punktzahl: 12