Blockkurs Einführung in die Informatik
Mathematische Grundlagen
Das 111 - Formeln - Überlebenspaket

Prof. Dr. M. Rarey
Arbeitsgruppe AMD
Version 2, Sept. 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **2**
1.1 Potenzen . . . 2
1.2 Logarithmen . . . 2
1.3 Binomische Formeln und quadratische Gleichungssysteme . . . 3

2 Logik und Beweistechniken **4**
2.1 Aussagenlogik . . . 4
2.2 Logik mathematischer Beweise . . . 5
2.3 Prädikatenlogik . . . 6

3 Mengen und Relationen **7**
3.1 Mengen . . . 7
3.2 Potenzmenge und Komplementarität . . . 9
3.3 Relationen . . . 9

4 Summen und Reihen **10**
4.1 Wichtige Reihen und deren geschlossene Form . . . 10
4.2 Herleitung und Summenformeln . . . 11
4.3 Weitere nützliche Summen . . . 13

5 Lineare Gleichungssysteme **13**
5.1 Gauß-Elimination und Gauß-Jordan-Verfahren (für n=m) . . . 14
5.2 Rechnen mit Matrizen . . . 15

6 Stochastik **16**
6.1 Zähltheorie . . . 16
6.2 Wahrscheinlichkeit . . . 17
6.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 18
6.4 Zufallsvariablen . . . 19
6.5 Geometrische und Binomialverteilung . . . 20

1 Grundlagen

1.1 Potenzen

Definition: Die Potenz a^n (a heißt Basis, n heißt Exponent der Potenz) wird für reelle oder komplexe Zahlen a und natürliche Zahlen n definiert durch $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}$

Potenzgesetze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{1}$$
$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \tag{2}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{3}$$

Achtung:

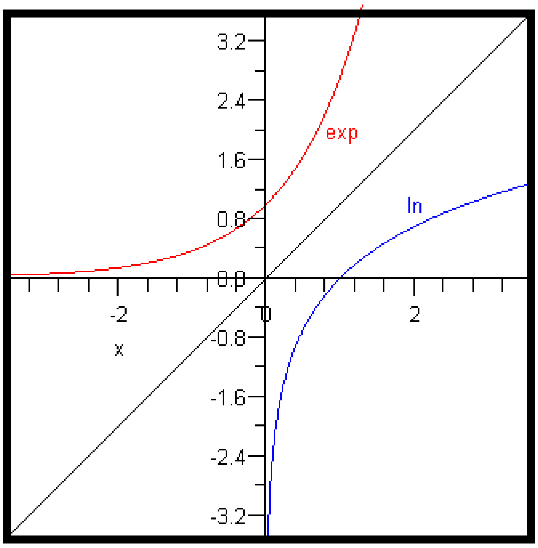
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a^0 = 1$, also gilt: $0^0 = 1$ aber $0^n = 0$ für $n > 0$.
- Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}$ gilt: $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$
- Für $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, q gerade ist $\sqrt[q]{a} \notin \mathbb{R}$

Abgeleitete Regeln:

$$b \cdot a^n = b \cdot (a^n) \tag{4}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \tag{5}$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{6}$$
$$(a^m)^n = (a^n)^m \tag{7}$$

1.2 Logarithmen

Allgemein: Die Funktion f heißt Exponentialfunktion zur Basis a, wenn sie die Gestalt $f(x) = a^x$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$, $a \neq 1$ hat. Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ ist sie streng monoton fallend. Ferner ist sie auf ganz $\mathbb{R}$ konvex und besitzt keine Extrema oder Wendepunkte.
Weil die Exponentialfunktionen zur Basis a streng monoton sind, sind sie auch umkehrbar. Ihre Umkehrfunktionen heißen Logarithmusfunktionen zur Basis a; $g(x) = log_a(x)$.



Logarithmen:

Für $b, c, x \epsilon \mathbb{R}, b \neq 1; b, c > 0$ gilt:
$b^x = c \Leftrightarrow x = log_b c$

Spezielle Basen:

dekadischer log: $log_{10}\ c = lg\ c$
natürlicher log: $log_e\ c = ln\ c$
binärer log: $log_2\ c = ld\ c$

Ableitungen:

$$(ln\ x)' = \frac{1}{x} \tag{8}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{9}$$

Rechenregeln:

$$b^{log_b\ c} = c \tag{10}$$

$$log_a\ c = \frac{log_b\ c}{log_b\ a} \quad \text{Basiswechselsatz} \tag{11}$$

$$log_b\ (u \cdot v) = log_b\ u + log_b\ v \tag{12}$$

$$log_b\ (\frac{u}{v}) = log_b\ u - log_b\ v \tag{13}$$

$$log_b\ (c^n) = n \cdot log_b\ c \tag{14}$$

$$log_b\ (\sqrt[n]{c}) = \frac{1}{n} \cdot log_b\ c \tag{15}$$

$$log_b\ c = \frac{1}{log_c\ b} = log_{\frac{1}{b}}\ (\frac{1}{c}) \tag{16}$$

1.3 Binomische Formeln und quadratische Gleichungssysteme

Binomische Formeln für n=2:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{17}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{18}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{19}$$

Allgemein gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\ b^k \tag{20}$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k\ b^{n-1-k} \tag{21}$$

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{22}$$

Vereinfachungen:

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{23}$$

$$\binom{n}{1} = n \tag{24}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \tag{25}$$

Rechenregeln:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \tag{26}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \tag{27}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{28}$$

Pascal'sches Dreieck:

							0 = k				
								1			
n = 0					**1**				2		
1				**1**		**1**				3	
2			**1**		**2**		**1**				4
3		**1**		**3**		**3**		**1**			
4	**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		

Quadratische Gleichung:

$$\text{Allgemeine Form: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{Normalform: } x^2 + px + q = 0$$

$$\text{Lösung der Normalform: } x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}_{\textit{Diskriminante } d}$$

$$d > 0: \ \text{2 Lösungen}; \ d = 0: \ \text{1 Lösung}; \ d < 0: \ \text{keine Lösung}$$

2 Logik und Beweistechniken

2.1 Aussagenlogik

Zweiwertigkeitsprinzip: Jede Aussage ist entweder **wahr** (1) oder **falsch** (0).

Operationen auf Aussagen:

A	B	$\wedge$ [und]	$\vee$ [oder]	$\Rightarrow$ [Impl.]	$\Leftrightarrow$ [Äquiv.]	$\neg A$ [nicht]
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

$\Rightarrow$ (Implikation): wenn-dann Beziehung
$\Leftrightarrow$ (Äquivalenz): genau-dann-wenn Beziehung

Bindungstärke: $\wedge \ - \vee - \Rightarrow \ - \Leftrightarrow$

Rechenregeln:

$$\text{Idempotenzgesetz:} \quad A \wedge A = A \tag{29}$$
$$A \vee A = A \tag{30}$$
$$\text{Kommutativgesetz:} \quad A \wedge B = B \wedge A \tag{31}$$
$$A \vee B = B \vee A \tag{32}$$
$$\text{Assoziativgestz:} \quad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \tag{33}$$
$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) \tag{34}$$
$$\text{Distributivgesetz:} \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{35}$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{36}$$
$$\text{Doppelte Verneinung:} \quad \neg\neg A = A \tag{37}$$
$$\text{Morgan'sche Regeln:} \quad \neg\ (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \tag{38}$$
$$\neg\ (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \tag{39}$$
$$\text{Weitere Regeln:} \quad A \Rightarrow B = \neg A \vee B \tag{40}$$
$$A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \tag{41}$$
$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) \tag{42}$$
$$\text{Sheffer-Operation (Exklusion):} \quad A|B = \neg(A \wedge B) \tag{43}$$

- Zu jeder aussagenlogischen Formel existiert eine äquivalente Formel, die nur $\wedge$ und $\neg$ entählt.
- Zu jeder aussagenlogischen Formel existiert eine äquivalente Formel, die nur aus $|$ besteht. Z. B. $A|A = \neg A$ oder $(A|B)|(A|B) = A \wedge B$
- Tautologie: Formel, die immer wahr ist. Z. B. $A \vee \neg A$; $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- Erfüllbarkeit: Formel, für die eine Belegung mit Wahrheitswerten wahr ergibt, heißt erfüllbar; sonst unerfüllbar oder kontradiktorisch.

2.2 Logik mathematischer Beweise

Ziel: Zeige, dass eine Aussage B wahr ist, in dem sie auf andere, wahre Aussagen zurückgeführt werden kann.

- Modus Ponens $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- Modus Tollens $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
- Schlussketten $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- Kontrapositionsgesetz $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Prinzip des **indirekten Beweises** (Beweis durch Widerspruch): Aus A folgt B ist wahr, genau dann wenn gilt: Ist A wahr und B falsch, dann folgt daraus eine Kontradiktion ($\neg A$ oder B oder $(C \wedge \neg C)$)

2.3 Prädikatenlogik

Prädikat: Eine Aussage über n Elemente einer Menge, die wahr oder falsch sein kann (z.B. P(x) = 'x ist gerade'; x ϵ $\mathbb{N}$)
Freie Variablen: Variablen, die einen beliebigen Wert annehmen können.
Gebundene Variablen: Variablen, deren Wert durch einen Quantor festgelegt wird.
Quantoren:

- Allquantor: $\forall x:\ A(x)$ (Für alle x gilt: $A(x)$, auch $\bigwedge$)
- Existenzquantor: $\exists x:\ A(x)$ (Es gibt ein x, für das gilt: $A(x)$, auch $\bigvee$)

Bsp: $P(x)$ = 'x ist gerade', $Q(x)$ = 'x ist ungerade'; $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$

Prädikatenlogik: logische Ausdrücke unter Verwendung von Prädikaten.

Regeln: Sind F_1, F_2 Ausdrücke in Prädikatenlogik, so sind $F_1 \wedge F_2$; $F_1 \vee F_2$; $F_1 \Rightarrow F_2$; $F_1 \Leftrightarrow F_2$ wieder Ausdrücke, wenn gilt: Es gibt keine Variable, die in einem Ausdruck frei, in dem anderen gebunden ist.

Beispiele:

$$\underbrace{(\exists x\ P(x))}_{x \text{ gebunden}} \wedge \underbrace{(\forall y\ Q(x,y))}_{x \text{ ungebunden}} \longleftarrow \text{falsch!} \qquad \neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \forall y \exists x\ Q(x,y) \longleftarrow \text{richtig!}$$

Prädikatenlogische Gesetze:

$$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \tag{44}$$
$$\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg P(x) \tag{45}$$
$$\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x) \tag{46}$$
$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \tag{47}$$
$$\forall x P(x) \Rightarrow P(y) \tag{48}$$
$$P(y) \Rightarrow \exists x P(x) \tag{49}$$
$$\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x) \tag{50}$$
$$\forall x \forall y Q(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(x,y) \tag{51}$$
$$\exists x \exists y Q(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x Q(x,y) \tag{52}$$
$$\exists x \forall y Q(x,y) \Leftrightarrow \forall y \exists x Q(x,y) \tag{53}$$
$$\forall x (P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x R(x)) \tag{54}$$
$$\exists x (P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \exists x R(x)) \tag{55}$$
$$\forall x (P(x) \Leftrightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Leftrightarrow \forall x R(x)) \tag{56}$$

3 Mengen und Relationen

3.1 Mengen

Menge = Sammlung von Objekten (Elementen), i.d.R. definiert durch Aufzählung oder durch ein Prädikat.

Notationen:

$$
\begin{aligned}
\emptyset :&\ \text{leere Menge} \\
\in, \notin:&\ \text{ist Element von, ist nicht Element von} \\
\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{N} :&\ \text{Menge der ganzen, reelen, natürlichen Zahlen} \\
A \subseteq B :&\ A \text{ ist Teilmenge von } B \\
\subset:&\ \text{ist echte Teilmenge von (d.h. nicht gleich)} \\
\supseteq, \supset:&\ \text{ist (echte) Obermenge von} \\
=, \neq:&\ \text{ist (un-)gleich}
\end{aligned}
$$

Achtung:
- $\subseteq$ und $\subset$ werden in der Literatur inkonsistent verwendet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ enthält in der Literatur manchmal auch die '0'.

Regeln für Mengenbezeichnungen:

$$\text{Kommutativität:} \quad M_1 = M_2 \quad \Rightarrow M_2 = M_1 \tag{57}$$

$$\text{Transitivität:} \quad M_1 = M_2 \wedge M_2 = M_3 \quad \Rightarrow M_1 = M_3 \tag{58}$$

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \quad \Rightarrow M_1 \subseteq M_3 \tag{59}$$

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1 \quad \Rightarrow M_1 = M_2 \tag{60}$$

Mengenoperationen:

$$
\begin{aligned}
\text{Schnitt:}&\ A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \\
\text{Vereinigung:}&\ A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \\
\text{Differenz:}&\ A - B;\ A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und nicht } x \in B\} \\
\text{Symmetrische Differenz:}&\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \mid x \in A \text{ exklusiv oder } x \in B\}
\end{aligned}
$$

Gesetzte für Mengenoperationen:

$$A \cap \emptyset = \emptyset;\ A \cup \emptyset = A \tag{61}$$

Idempotenz:
$$A \cap A = A;\ A \cup A = A \tag{62}$$

Kommutativität
$$A \cap B = B \cap A \tag{63}$$
$$A \cup B = B \cup A \tag{64}$$

Assoziativität
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{65}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{66}$$

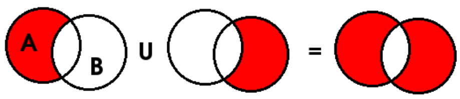
Distributivität
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{67}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{68}$$

Absorption
$$A \cap (A \cup B) = A \tag{69}$$
$$A \cup (A \cap B) = A \tag{70}$$

de Morgan'sche Gesetze
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{71}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{72}$$

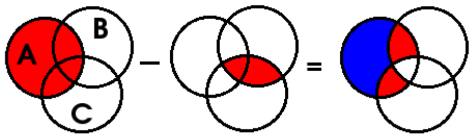
Venn Diagramme

Symmetrische Differenz:



$A \setminus B$ $\quad$ $B \setminus A$

De Morgan:



A $\quad \setminus \quad$ $B{\cap}C$ $\quad$ $(A{\setminus}B){\cup}(A{\setminus}C)$

Kardinalität

Die Anzahl der Elemente einer Menge bezeichnet man mit $|A|$ (Kardinaliät, Größe).
Kardinalität der leeren Menge: $|\emptyset| = 0$.
Ist $|A| \in \mathbb{N}$, dann ist die Menge **endlich**, sonst unendlich.
Gibt es eine bijektive Abbildung von $A \to \mathbb{N}$, so ist A abzählbar unendlich, sonst **überabzählbar**.

Rechenregeln:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{73}$$
$$|A \cup B| \leq |A| + |B| \tag{74}$$
$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B| \tag{75}$$

Kartesisches Produkt: $A \times B$ bezeichnet die Menge aller Tupel.
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$; $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

3.2 Potenzmenge und Komplementarität

Sei U eine **Universalmenge** (oder Grundmenge). $P(U) = \{A \mid A \subseteq U\}$ (Menge aller Teilmengen). P(U) wird manchmal auch mit 2^U bezeichnet und ist die **Potenzmenge** von U.
Sei $A \in P(U)$, dann bezeichnet $\overline{A} = U \setminus A$ das **Komplement** von A.

Gesetzmäßigkeiten für Komplemente
$$\overline{\overline{A}} = A \tag{76}$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset;\ A \cup \overline{A} = U \tag{77}$$

de Morgan'sche Gesetze
$$\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C} \tag{78}$$
$$\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C} \tag{79}$$

Disjunktheit und Partition

Mengen A, B sind **disjunkt**, genau dann wenn $A \cap B = \emptyset$. Sei $T = S_1, ..., S_n;\ S_i \subseteq U$ eine Menge von Teilmengen über U.
T ist eine **Partition**, falls:
1. $\forall\ i,\ j;\ i \neq j : S_i \cap S_j = \emptyset$ und **2.** $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = U$

Weitere Symbole:

$\uplus$ Vereinigung disjunkter Mengen

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_n = S_1 \cup S_2 \cup \cdots S_n$$
$$\bigcap_{k=1}^{n} S_n = S_1 \cap S_2 \cap \cdots S_n$$

'+' symbolisiert, dass kein Element in A und B vorkommt und somit kann die Kardinalität addiert werden, also $|A \uplus B| = |A| + |B|$

3.3 Relationen

$R \subseteq A \times B$ ist eine **binäre Relation**. Ist $(a, b) \in \mathbb{R}$, so schreibt man aRb.

Eigenschaften von Relationen: $R \subseteq A \times A$
1. R heißt **reflexiv**, falls $\forall a \in A : aRa$ gilt.
2. R heißt **symmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ folgt.
3. R heißt **transitiv**, falls $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ folgt.
   Erfüllt R alle 3 Eigenschaften, so ist R eine **Äquivalenzrelation**.
   R partitioniert A in Äquivalenzklassen $[a] = \{b \in A \mid bRa\}$.
4. R heißt **antisymmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ folgt.
   Erfüllt R die Eigenschaften 1, 3 und 4, so ist R eine **Ordnungsrelation** und A eine **geordnete Menge**.
   R heißt **vollständige Ordnung**, falls $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$ gilt.

4 Summen und Reihen

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ bezeichnet die **Summe** $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$(a_1, a_2, ...)$ wird als **Folge** bezeichnet;

$(a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \cdots)$ als zugehörige **Reihe**.

Analog bezeichnet man mit $\prod_{i=1}^{n} a_i$ das **Produkt** $a_1 \cdot a_2\ \cdots\ a_n$

Summen treten in der Informatik häufig bei Laufzeitbetrachtungen auf. Ziel ist es in der Regel eine geschlossene Form zu finden.

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ bezeichnet die **unendliche Summe**. Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$, so ist die Reihe **konvergent**, sonst **divergent**.

Linearität der Summe: (gilt auch für unendlich konvergente Reihen)

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{80}$$

4.1 Wichtige Reihen und deren geschlossene Form

$$\text{Arithmetische Reihe} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{81}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{82}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{83}$$

$$\text{Geometrische Reihe/Exponentialreihe} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{(n+1)} - 1}{x - 1};\ x \neq 1 \tag{84}$$

$$\text{Unendlich fallende, geometrische Reihe} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x};\ |x| \leq 1 \tag{85}$$

$$\text{Harmonische Reihe} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq ln(n) + 1 \tag{86}$$

Weitere geschlossene Formen erhält man durch Intergration und Differentiation, z.B erhält man durch Ableitung der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{87}$$

Teleskopreihen:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \tag{88}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n \tag{89}$$

Beispiel einer Teleskopreihe:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n}$$

Produkte lassen sich manchmal durch Logarithmieren lösen:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = exp(ln(\prod_{k=1}^{n} a_k)) = exp(\sum_{k=1}^{n} ln(a_k))$$

4.2 Herleitung und Summenformeln

Vorgehensweise:

1. Summe für $n = 1, 2, 3, ...$ berechnen
2. Geschlossenen Form oder Schranke raten
3. Korrektheit durch vollständige Induktion beweisen

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = S(n) \text{ mit } S(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Induktionsanfang: n=1:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot (1+1) = S(n)$$

Induktionsannahme: Für n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) = S(n)$$

Induktionsschritt: (Folgere die Korrektheit der Aussage für $n+1$ aus der Induktionsannahme)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = S(n) + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= (\frac{1}{2}n+1)(n+1) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) = S(n+1)\end{aligned}$$

Abschätzung von Summen

Annahme: Für eine Konstante c: $\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c * 3^n$

Anfang: Für n =0 gilt: $\sum_{k=0}^{0} 3^k = 1 \leq c * 1;$ für $c \geq 1$

Annahme: Für beliebiges n gilt: $\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c * 3^n$

Schritt: $\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \leq c * 3^n + 3^{n+1} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{c})c3^{n+1} \leq c3^{n+1}$

Falls: $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \leq 1 \Leftrightarrow c + 3 \leq 3c \Leftrightarrow c \geq \frac{3}{2}.$

Beachte: c wird nicht vorab festgelegt sondern im Beweis abgeleitet!

Abschätzen von Termen und Aufspalten

Sei $a_{max} = \max_{1 \leq k \leq n} a_k$, dann gilt $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq n \cdot a_{max}$.

Beispiel: Abschätzung der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \sum_{k=1}^{n} n = n^2$$

Sei (a_n) eine Folge mit $a_{n+1} \leq r \cdot a_k, 0 < r < 1$. Dann ist $a_k \leq \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{\text{k mal}} \cdot a_0 = r^k \cdot a_0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = a_0 \frac{1}{1-r}$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+2)3^{k+1}}{(k+1)3^{k+2}} = \frac{1}{3}\frac{k+2}{k+1} \leq \frac{2}{3} = r \text{ und } a_0 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Aufspalten und Gruppieren

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor ld\ n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i+j}$$

Teilung der Summe in die Abschnitte: $2^0 = 1; 2-3; 4-7; 8-15; 2^i - (2^{i+1}-1)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor ld\ n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i+j} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor ld\ n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\lfloor ld\ n \rfloor} 2^i \cdot \left(\frac{1}{2^i}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{\lfloor ld\ n \rfloor} 1 \leq ld(n) + 1$$

4.3 Weitere nützliche Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{90}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \tag{91}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = sin(x) \tag{92}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = cos(x) \tag{93}$$

5 Lineare Gleichungssysteme

Gleichungsysteme in der Matrixschreibweise:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

n: Anzahl freier Variablen, m: Anzahl Gleichungen

Operationen auf Gleichungssystemen: Umformungen:
1. Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$
2. Addition zweier Gleichungen

Linerare Unabhängigkeit: keine Gleichung läßt sich durch Umformung aus den anderen Gleichungen erzeugen.

Ist ein Gleichungssystem linear unabhängig, so gilt:
- $n = m \Rightarrow$ eindeutige Lösung
- $n < m \Rightarrow$ überbestimmt (keine Lösung)
- $n > m \Rightarrow$ unterbestimmt (Lösungsraum)

5.1 Gauß-Elimination und Gauß-Jordan-Verfahren (für n=m)

Gauß-Elimination: Wiederhole für $i = 1, \cdots, m-1;\ j = i+1, \cdots, m$:
$\rightarrow$ multipliziere Gleichung i mit $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}{}^*$
$\rightarrow$ addiere sie zu Gleichung j.
$\Rightarrow$ Variable i tritt nur noch in Gleichungen $1, \cdots, i$ auf.

Gauß-Jordan: Wiederhole für $i = n, \cdots, 2; j = i-1, \cdots, 1$:
$\rightarrow$ multipliziere Gleichung i mit $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}{}^*$
$\rightarrow$ addiere sie zu Gleichung j.
$\Rightarrow$ Variable i tritt nur noch in Gleichungen i auf.

*) Falls $a_{ii} = 0$, muss die i-te Gleichung zuvor mit einer Gleichung j mit $a_{ij} \neq 0$ vertauscht werden.

$\Rightarrow$ Koeffizientenmatrix A wird in Diagonalform überführt, Vektor b gibt die Lösung an.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{I: } x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ \text{II: } 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 0 \\ \text{III: } 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 5 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}\cdot(-2)+\text{III}]{\text{I}\cdot(-2)+\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 5 \\ 0 & -1 & 5 & | & -10 \\ 0 & 1 & 6 & | & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 5 \\ 0 & -1 & 5 & | & -10 \\ 0 & 0 & 11 & | & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}\cdot(-\frac{5}{11})+\text{II}]{\text{III}\cdot(-\frac{2}{11})+\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 11 & | & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot 2+I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 11 & | & -22 \end{pmatrix}$$

Lösung: $x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ x_3 = -2$

5.2 Rechnen mit Matrizen

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ist eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, $m \cdot n$ Elementen a_{ij}; $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ ist ein Zeilenvektor, $(a_{1i}, \dots, a_{mi})$ ein Spaltenvektor.

Begriffe:

- Ist $m = n$, so ist A **quadratisch**.
- Gilt $\forall i, j : a_{ij} = a_{ji}$, so ist A **symmetrisch**.
- Die Matrix ${}^tA = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}$ ist die zu A **transponierte Matrix**.
- Die Matrix $O = (0)$ (d.h. $\forall i, j;\ a_{ij} = 0$) ist die **Nullmatrix**.
- Die quadratische Matrix $E = (e_{ij})$ mit $e_{ii} = 1, e_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist die **Einheitsmatrix**.

Operationen auf Matrizen

- **Skalares Produkt:** $\alpha \cdot A = (\alpha\ a_{ij})$
- **Addition:** $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- **Matrixprodukt:** ('Zeile · Spalte-Regel')
  Sei A eine $m \times p$-Matrix, B eine $p \times n$-Matrix, dann ist $D := A \cdot B$ eine $m \times n$-Matrix mit $d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Rechenregeln:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \tag{94}$$

Assoziativiät
$$A + (B + C) = (A + B) + C \tag{95}$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \tag{96}$$

Distributivität
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{97}$$

Kommutativität
$$A + B = B + A \tag{98}$$

ALLGEMEIN GILT NICHT
$$A \cdot B = B \cdot A \tag{99}$$

Neutrale Elemente und Inverse (für quadratische Matrizen)

$$A + 0 = A;\ A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0 \tag{100}$$
$$A \cdot E = E \cdot A = A \tag{101}$$

Zu einer Matrix A ist die Matrix A^{-1} die **Inverse**, falls $A \cdot A^{-1} = E$.
Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen-/Spaltenvektoren bezeichnet man als den **Rang** der Matrix $r(A)$.
Eine $n \times n$-Matrix ist **invertierbar**, genau dann wenn $r(A) = n$.
Die Inverse einer Matrix kann mit einem erweiterten Gauß-Jordan Verfahren berechnet werden:

$$\begin{array}{cc} (A|E) & \text{wandle A mittels Zeilenmultiplikation und -addition} \\ \downarrow & \text{in die Einheitsmatrix; wende alle Operationen} \\ (E|A^{-1}) & \text{auch auf die rechts stehende Einheitsmatrix an.} \end{array}$$

Wichtige weitere Begriffe:
Sei A eine $n \times n$-Matrix, A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix, die durch Löschen der i-ten Zeile und j-ten Spalte ensteht.

$$det(A) := \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} det(A_{1j}) & \text{sonst} \end{cases} \text{ ist die } \textbf{Determinante} \text{ der Matrix } A.$$

Sei A eine $n \times n$-Matrix, x ein n-Vektor, dann heißt x **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** λ, wenn gilt: $Ax = \lambda x$.
λ ist ein Eigenwert von A, genau dann wenn $det(A - \lambda E) = 0$
$P(\lambda) = det(A - \lambda E)$ heißt **charakteristisches Polynom**, dessen Nullstellen die Eigenwerte von A darstellen.

6 Stochastik

6.1 Zähltheorie

- **Summenregel:**
  Anzahl der Möglichkeiten, ein Element aus zwei Mengen zu wählen:
  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- **Produktregel:**
  Anzahl der Möglichkeiten, ein geordnetes Paar aus zwei Mengen zu wählen:
  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- Für **Zeichenketten** über einem Alphabet S mit Länge k gilt:
  Es gibt $|S|^k$ viele Zeichenketten.

- Eine **Permutation** einer Menge S ist eine geordnete Folge aller Elemente. Es gibt bei $|S| = n$ Elementen $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

- Eine **k-Permutation** ist eine Permutation einer k-elementigen Teilmenge. Bei $n = |S|$ Elementen gibt es $n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

- Eine **k-Kombination** einer Menge S mit $|S| = n$ Elementen ist eine k-elementige Teilmenge. Es gibt $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Möglichkeiten.

- **Binomialkoeffizienten** sind definiert als (siehe auch Kapitel I):
  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
  Es gilt $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
  Abschätzen von Binomialkoeffizienten:
  Es gilt $k! \geq (\frac{k}{e})^k$ (Stirling Formel).
  $$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$
  Weitere Regeln zum Rechnen mit Binomialkoeffizienten: siehe Kapitel I.

6.2 Wahrscheinlichkeit

- **Ereignisraum** S**:** Menge möglicher Ereignisse.
- **Elementarereignis:** möglicher Ausgang eines Experiments.
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $Pr\{\}$**:** Abbildung $S \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mit:
  1. $\forall A \in S : Pr\{A\} \geq 0$
  2. $Pr\{S\} = 1$
  3. Schließen sich A und B gegenseitig aus, so gilt $Pr\{A \cup B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\}$
  Allgemein: $\forall \{A_1, A_2, \dots\} \subseteq 2^S$:
  $(\forall\ i, j \text{ mit } i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow Pr\{\bigcup_i A_i\} = \sum_i Pr\{A_i\}$
  1.-3. heißen **Wahrscheinlichkeitsaxiome**; $Pr\{A\}$ die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A.

Ereignisse kann man als Teilmenge über den Ereignisraum S interpretieren.
Es gilt:

$$Pr\{\emptyset\} = 0 \tag{102}$$
$$Pr\{\overline{A}\} = 1 - Pr\{A\} \quad [\ \overline{A} = S \setminus A \text{ ist das Komplement von A }] \tag{103}$$
$$Pr\{A \cup B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\} - Pr\{A \cap B\} \tag{104}$$

Beispiel: 2 maliges werfen einer Münze {Kopf (K), Zahl (Z)}.
$S = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$
$Pr\{$'minestens $1 \times$ Kopf'$\} = Pr\{KK,\ KZ,\ ZK\} = \frac{3}{4}$
$Pr\{$'Beide Würfe gleich'$\} = Pr\{KK,\ ZZ\} = \frac{1}{2}$

Wahrscheinlichkeiten sind:

- **diskret**, wenn sie über einen abzählbaren Ereignisraum verfügen.
- **gleichmäßig**, wenn jedes Elementarereignis $s \in S;\ Pr\{s\} = \frac{1}{|s|}$ hat.
- **kontinuierlich uniform**, wenn S überabzählbar über ein Intervall $[a, b]$ definiert ist und $\forall c \leq d$ gilt $Pr\{[c, d]\} = \frac{d-c}{b-a}$.

6.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr\{A|B\}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Annahme, dass B eintritt.

$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{A \cap B\}}{Pr\{B\}} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit, dass } A \text{ und } B \text{ eintreten}}{\text{Wahrscheinlichkeit, dass } B \text{ eintritt}} \tag{105}$$

Beispiel: 2 maliges werfen einer Münze:
$Pr\{$'beide Münzen Kopf'|'mindestens eine Münze Kopf'$\} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

Zwei Ereignisse sind **unabhängig**, falls $Pr\{A \cap B\} = Pr\{A\} \cdot Pr\{B\}$, d.h Ereignis B hat keinen Einfluß auf A.
Falls $Pr\{B\} \neq 0$ gilt $Pr\{A|B\} = Pr\{A\}$.

Eine Menge $A_1, \ldots, A_n$ von Ereignissen sind **paarweise unabhängig**, falls $\forall i < j$: $Pr\{A_i \cap A_j\} = Pr\{A_i\} \cdot Pr\{A_j\}$.

Die Ereignisse sind **vollständig unabhängig**, falls für jede Teilmenge $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_k}$; $i_1 < i_2 < \ldots i_k$ gilt: $Pr\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\} = Pr\{A_{i_1}\} \cdot \ \cdots \ \cdot Pr\{A_{i_k}\}$

Folgt aus paarweiser Unabhängigkeit vollständige Unabhängigkeit? - Nein.

Beispiel:
A_1 = 'erste Münze Kopf'; A_2 = 'zweite Münze Kopf'; A_3 = 'erste Münze $\neq$ zweite Münze'

$Pr\{A_1\} = Pr\{A_2\} = Pr\{A_3\} = \frac{1}{2}$
$Pr\{A_1 \cap A_2\} = Pr\{A_1 \cap A_3\} = Pr\{A_2 \cap A_3\} = \frac{1}{4}$
Aber: $Pr\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} = 0 \neq \frac{1}{8}$

A_1, A_2, A_3 sind paarweise unabängig, aber nicht vollständig unabhängig.

Bayes'sches Theorem der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{A\}Pr\{B|A\}}{Pr\{B\}} \tag{106}$$

Beispiel:
Aus einer fairen und einer gezinkten Münze (nur Kopf-Ergebnisse) wird eine Münze zufällig gewählt und 2 mal geworfen. Wenn zwei mal Kopf geworfen wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze gezinkt ist?

Ereignis A: “Münze ist gezinkt”
Ereignis B: “zwei mal Kopf”
Gesucht: $Pr\{A|B\}$

$$Pr\{A\} = \frac{1}{2};\ Pr\{B|A\} = 1;\ Pr\{B|\overline{A}\} = \frac{1}{4}$$
$$Pr\{B\} = Pr\{A\} \cdot Pr\{B|A\} + Pr\{\overline{A}\} \cdot Pr\{B|\overline{A}\} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$
$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{A\} \cdot Pr\{B|A\}}{Pr\{B\}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$$

6.4 Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariable: Sei X eine Funktion über einem (abzählbaren) Ergebnisraum S, $X:\ S \to \mathbb{R}$, die jedem Ereignis (Zufallsexperiment) eine reelle Zahl als Ergebnis zuordnet.
Ereignisse unter Zufallsvariablen: “$X = x$”$= \{s \in S | X(s) = x\}$
Wahrscheinlichkeitsverteilung für “$X = x$”: $Pr\{X = x\} = \sum_{s \in S : X(s) = x} Pr\{s\}$
Wahrscheinlichkeitsdichte: $f(x) = Pr\{X = x\}$
Offensichtlich gilt: $0 \leq f(x) \leq 1 \wedge \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

Beispiel: Würfeln mit 2 Würfeln: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die größere Punktzahl x ist?
Es gibt 36 Elementarereignisse.
$Pr\{s\} = \frac{1}{36}$
Sei X = max{Würfel 1,Würfel 2}
$Pr\{X = 3\} = Pr\{(1,3)\} + Pr\{(2,3)\} + Pr\{(3,3)\} + Pr\{(3,2)\} + Pr\{(3,1)\} = \frac{5}{36}$

Für zwei Zufallsvariablen X, Y ist die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte**
$f(x, y) = Pr\{X = x \text{ und } Y = y\}$.
Die Zufallsvariablen X, Y sind **unabhängig**, falls für alle x, y gilt:
$Pr\{X = x \text{ und } Y = y\} = Pr\{X = x\} \cdot Pr\{Y = y\}$.

Erwartungswert von X:

$$E[X] = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} \tag{107}$$

Beispiel: Erwartete Punktzahl beim Würfeln mit einem Würfel.

$$E[X] = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 3,5$$

Linearität des Erwartungswertes:
$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$, gilt auch wenn X und Y abhängig sind!
Zudem gilt: $E[aX] = aE[X]$

Beispiel: Erwartete Punktzahl mit zwei Würfeln, wenn die Punktzahl des ersten verdoppelt wird:
$E[2X+Y] = 2E[X] + E[Y] = 10,5$

Für das Produkt zweier unabhängiger Zufallsvariablen gilt:
$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

Die **Varianz** beschreibt die Abweichung vom Mittelwert und damit die "Verschmiertheit" der Daten:

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{108}$$

Wenn X und Y unabhängig sind, gilt:
$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$
Allgemein gilt: $\mathrm{Var}[aX] = a^2 \cdot \ \mathrm{Var}[X]$

Die **Standardabweichung** ist definiert als $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

Beispiel: Beim Würfeln mit einem Würfel gilt:

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6}(x - 3,5)^2 = \frac{1}{6} \cdot 17,5 \approx 2,9$$

$$\sigma \approx 1,7$$

6.5 Geometrische und Binomialverteilung

Bernoulli-Versuch: Experiment mit 2 Ausgängen:
$Pr\{\text{"Erfolg"}\} = p;\ Pr\{\text{"Misserfolg"}\} = q = 1 - p$

Geometrische Verteilung: Anzahl der Bernoulli-Versuche bis zum ersten Erfolg:

$$Pr\{X = k\} = q^{k-1}p \quad \text{[k-1 Misserfolge, 1 Erfolg]} \tag{109}$$

$$E[X] = \frac{1}{p};\ \mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2} \tag{110}$$

Beispiel: Anzahl Würfe mit zwei Würfeln, bis eine $< x >$ geworfen wird:

x =	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p =	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
E[X]=	36	18	12	9	7,2	6	7,2	9	12	18	36

Binomialverteilung: Anzahl Erfolge k bei n Bernoulli-Versuchen

$$Pr\{X = k\} = \binom{n}{k} \cdot \overbrace{p^k}^{k \cdot \text{Erfolg}} \cdot \underbrace{q^{n-k}}_{(n-k)\cdot \text{Misserfolg}} = b(k; n; p) \tag{111}$$

($\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Erfolge und $n - k$ Misserfolge anzuordnen)

Zusammenhang mit Binomialreihe

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} b(k; n; p) = 1$$

$$E[X] = n \cdot p$$

$$Var[X] = n \cdot p \cdot q$$

Beispiel: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei $n = 5$ Würfen mit 2 Würfeln k mal x zu werfen?

k =	0	1	2	3	4	5
x = 2	0,87	0,12	0,007	0,0003	0,00005	0,00000002