# FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 6 : Asynchrone Produkte, part. Ordnung, Nachrichtenordnung, Arbeiten mit Renew

Präsenzteil am 18./19. 11. – Abgabe am 25./26. 11. 2013

**Präsenzaufgabe 6.1:** Seien $\leq$, $R$, $R_1$ und $R_2$ innere Relationen über derselben Basismenge $A$.

1. Sei $\leq$ eine partielle Ordnung. Ist $R = (\leq \cup \leq^{-1})$ eine Äquivalenzrelation?

   **Lösung:** Gegenbeispiel: Sei $a \leq b$ und $a \leq c$. Dann ist $R = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\} \cup id$ nicht transitiv, da $(b,a),(a,c) \in R$ gilt, aber nicht $(b,c)$.

2. Zeige: Seien $R_1$ und $R_2$ partielle Ordnungen, dann ist $R_1 \cap R_2$ ebenfalls eine partielle Ordnung.

   **Lösung:** $R = R_1 \cap R_2$ ist ebenfalls eine partielle Ordnung.

   Reflexivität ist klar: Da $aR_ia, i = 1,2$ für alle $a \in A$ gilt, ist auch $aRa$.

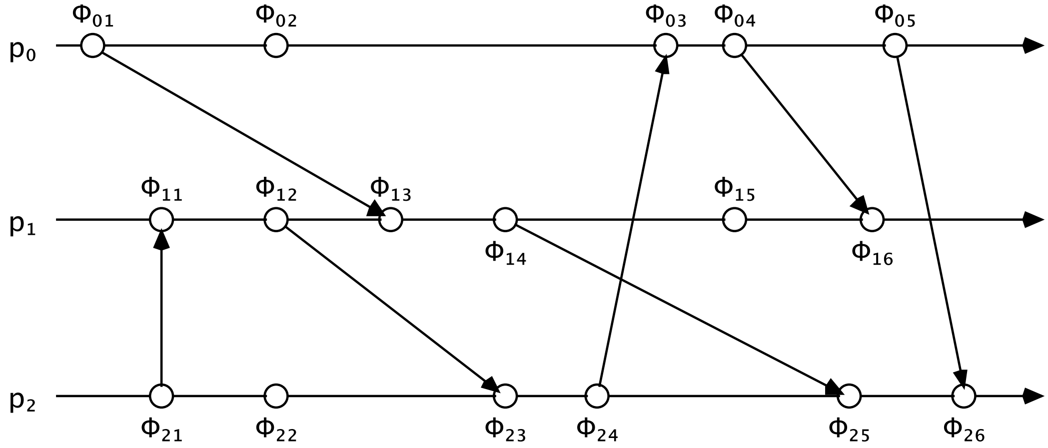
   Antisymmetrie: Sei $aRb, bRa, i = 1,2$, dann muss $aR_ib, bR_ia, i = 1,2$ gewesen sein und da $R_i$ antisymmetrisch ist, gilt auch $a = b$.

   Transitivität. Sei $aRb, bRc, i = 1,2$, dann muss $aR_ib, bR_ic, i = 1,2$ gewesen sein und deswegen gilt auch $aR_ic, i = 1,2$, also auch $aRc$.

3. Zeige: Seien $R_1$ und $R_2$ partielle Ordnungen, dann ist $R_1 \cup R_2$ i.a. keine partielle Ordnung.

   **Lösung:** Gegenbeispiel: Sei $R_1 = \{(a,b)\} \cup id$ und $R_2 = \{(b,c)\} \cup id$. Dann ist $R := R_1 \cup R_2 = \{(a,b),(b,c)\} \cup id$ nicht transitiv, da $(a,b),(b,c) \in R$ gilt, aber nicht $(a,c)$.

4. Gegeben sei das folgende Zeitskalenmodell. Geben Sie $LT(\phi_i)$ für alle Ereignisse $\phi_i$ an.



**Lösung:**

$$\begin{aligned}&\Phi_{01}:1,\ \ \Phi_{02}:2,\ \ \Phi_{03}:6,\ \ \Phi_{04}:7,\ \ \Phi_{05}:8,\\&\Phi_{11}:2,\ \ \Phi_{12}:3,\ \ \Phi_{13}:4,\ \ \Phi_{14}:5,\ \ \Phi_{15}:6,\ \ \Phi_{16}:8,\\&\Phi_{21}:1,\ \ \Phi_{22}:2,\ \ \Phi_{23}:4,\ \ \Phi_{24}:5,\ \ \Phi_{25}:6,\ \ \Phi_{26}:9\end{aligned}$$

5. Ist die Relation ·**vor**· i.a. eine strikte Ordnung? Eine totale strikte Ordnung?

   **Lösung:** Die Relation ·**vor**· (Def. 5.7) ist eine strikte, aber keine totale strikte Ordnung. Für Striktordnungen muss Irreflexivität und Transitivität gelten (Def. 5.2 b), der entsprechende Beweis für die Relation ·**vor**· ist auf S. 79 im Skript nachzulesen. Vollständigkeit (Def. 5.2 c.2) gilt nicht, da z.B. die ersten Ereignisse zweier Prozesse, welche nicht sofort eine Nachricht austauschen, voneinander unabhängig sind und somit nicht in der Relation ·**vor**· stehen.

6. Warum gilt $\phi_1 \mathbf{vor} \phi_2 \Longrightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2)$?

   **Lösung:** Stehen zwei Ereignisse aufgrund von Bedingung Def. 5.7 a) in Relation (sie sind Teil desselben Prozesses), so erhält das zweite Ereignis einen höheren Zeitstempel, da jedes Ereignis einen mindestens „um 1 größeren Wert“ (S. 81) als das vorhergehende Ereignis desselben Prozesses erhält.

   Stehen zwei Ereignisse aufgrund von Bedingung Def. 5.7 b) in Relation (Sende- und Empfangsereignis einer Nachricht), so erhält das zweite mindestens einen um 1 größeren Zeitstempel als der in der Nachricht übertragene, welcher vom Sendeereignis stammt.

   Stehen zwei Ereignisse transitiv in Relation (Def. 5.7 c), so gilt, dass alle Zwischenereignisse aufgrund von Bedingung a) oder b) bereits höhere Zeitstempel erhalten haben. Also hat auch das letzte Ereignis der transitiven Kette einen höheren Zeitstempel, somit gilt die Behauptung (siehe Satz 5.12).

7. Warum gilt aber die Umkehrung $LT(\phi_1) < LT(\phi_2) \Longrightarrow \phi_1 \mathbf{vor} \phi_2$ nicht?

   **Lösung:** Gegenbeispiel in der Lösung zu 1. Aufgabe: $\phi_{22}$ und $\phi_{12}$ stehen nicht in Relation trotz $LT(\phi_{22}) = 2 < 3 = LT(\phi_{12})$.

8. Was ändert sich an Teilfragen 6 und 7, wenn wir mit vektoriellen Zeitstempeln arbeiten?

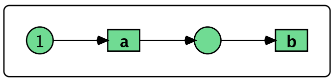
   **Lösung:** $\phi_1 \mathbf{vor} \phi_2 \Longrightarrow VC(\phi_1) < VC(\phi_2)$ gilt weiterhin, die Argumentation läuft analog zu $LT$. Bei jedem Ereignis wird das komponentenweise Maximum der eingehenden Zeitstempel gebildet und um 1 in der zu $p_i$ gehörenden Komponente vergrößert.

   $VC(\phi_1) < VC(\phi_2) \Longrightarrow \phi_1 \mathbf{vor} \phi_2$ gilt nun auch, da die vektoriellen Zeitstempel von Ereignissen, welche nicht in Relation stehen, ebenfalls unvergleichbar sind (Satz 5.18).

**Präsenzaufgabe 6.2:** Verwenden Sie für diese Übungsaufgabe Renew auf ihrem Rechner (wenn Sie einen dabei haben).

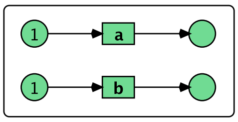
1. Zeichnen Sie ein Petrinetz in dem zwei sequentielle Transitionen a und b vorkommen.

**Lösung:** Ein mögliches Netz:



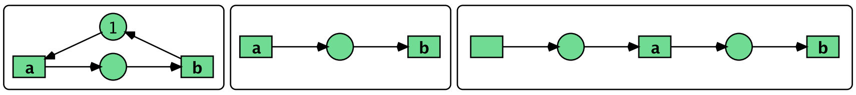

2. Zeichnen Sie ein Petrinetz in dem zwei nebenläufige Transitionen a und b vorkommen.

**Lösung:** Ein mögliches Netz:



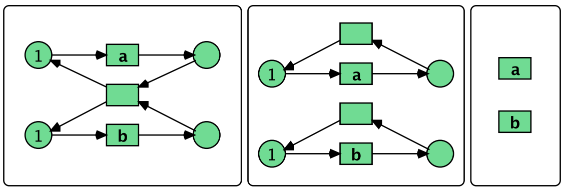

3. Zeichnen Sie ein Petrinetz in dem zwei sequentielle Transitionen a und b immer wieder vorkommen können.

**Lösung:** Drei mögliche Netze:




4. Zeichnen Sie ein Petrinetz in dem zwei nebenläufige Transitionen a und b immer wieder vorkommen können.

**Lösung:** Drei mögliche Netze:

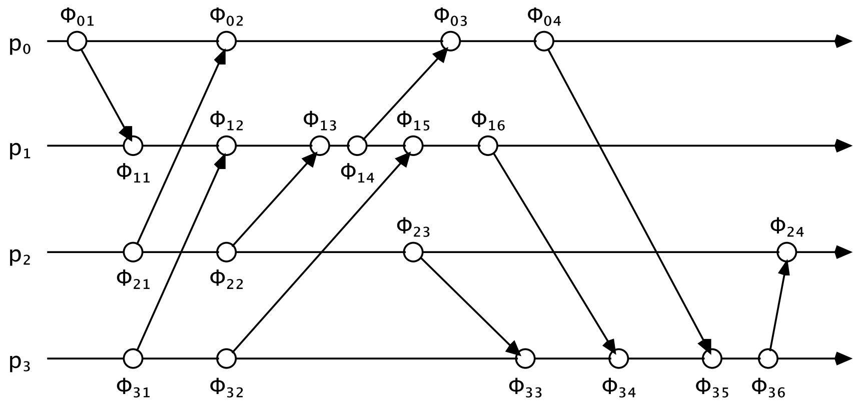



5. Wählen Sie eine geeignete Markierung und simulieren Sie diese Netze mittels RENEW.

**Lösung:** Die Markierung ist in den oberen Netzen bereits mit angegeben.

**Übungsaufgabe 6.3:** Betrachten Sie das folgende Zeitskalenmodell.

| |
|---|
| |
| von |
| 6 |




1. Geben Sie $VC(\phi_i)$ für alle $\phi_i$ an.

   **Lösung:**

$$\Phi_{01} : \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \Phi_{02} : \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \Phi_{03} : \begin{pmatrix}3\\4\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \Phi_{04} : \begin{pmatrix}4\\4\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\Phi_{11} : \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \Phi_{12} : \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \Phi_{13} : \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \Phi_{14} : \begin{pmatrix}1\\4\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \Phi_{15} : \begin{pmatrix}1\\5\\2\\2\end{pmatrix}, \quad \Phi_{16} : \begin{pmatrix}1\\6\\2\\2\end{pmatrix},$$

$$\Phi_{21} : \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \Phi_{22} : \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \Phi_{23} : \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \Phi_{24} : \begin{pmatrix}4\\6\\4\\6\end{pmatrix},$$

$$\Phi_{31} : \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \Phi_{32} : \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \Phi_{33} : \begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix}, \quad \Phi_{34} : \begin{pmatrix}1\\6\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \Phi_{35} : \begin{pmatrix}4\\6\\3\\5\end{pmatrix}, \quad \Phi_{36} : \begin{pmatrix}4\\6\\3\\6\end{pmatrix}$$

2. Geben sie für jeden der vier Prozesse jeweils ein Ereignis an, so dass die vier Ereignisse paarweise durch die Relation **vor** angeordnet sind (Def. 5.7).

   **Lösung:** Die vier Ereignisse $\phi_{21}$, $\phi_{02}$, $\phi_{35}$ und $\phi_{24}$ stehen jeweils paarweise in der Relation **vor**, da folgende direkten Beziehungen gelten:

$$\phi_{21}\ \mathbf{vor}_b\ \phi_{02}\ \mathbf{vor}_a\ \phi_{04}\ \mathbf{vor}_b\ \phi_{35}\ \mathbf{vor}_a\ \phi_{36}\ \mathbf{vor}_a\ \phi_{24}$$

   Dies kann auch an den vektoriellen Zeitstempeln nachvollzogen werden:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}4\\4\\2\\1\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}4\\6\\3\\5\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}4\\6\\3\\6\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}4\\6\\4\\6\end{pmatrix}$$

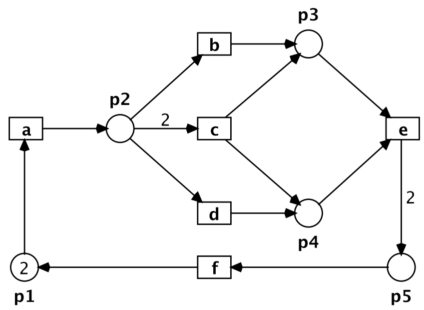
3. Geben Sie für jeden der vier Prozesse jeweils ein Ereignis an, so dass die vier Ereignisse paarweise unabhängig sind (Def. 5.16).

**Lösung:** Die vier Ereignisse $\phi_{02}$, $\phi_{12}$, $\phi_{22}$ und $\phi_{32}$ sind jeweils paarweise unabhängig voneinander, wie an den unvergleichbaren Vektorzeiten überprüft werden kann.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

**Übungsaufgabe 6.4:** Gegeben ein Petrinetz: $N_{6.1} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$:

von 3

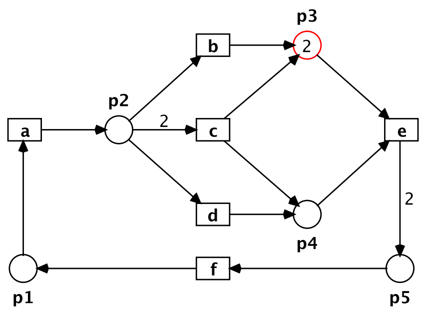



1. Zeichnen Sie dieses Netz mit Renew.
2. Simulieren Sie dieses Netz mit Renew (im P/T-Netz-Formalismus!). Schalten Sie das Netz in einen verklemmenden Zustand (einen Zustand, in dem kein Schalten mehr möglich ist).
3. Modifizieren Sie dieses Netz so, dass es nicht mehr verklemmen kann. Nennen Sie mindestens zwei Möglichkeiten dieser Aufforderung nachzukommen.

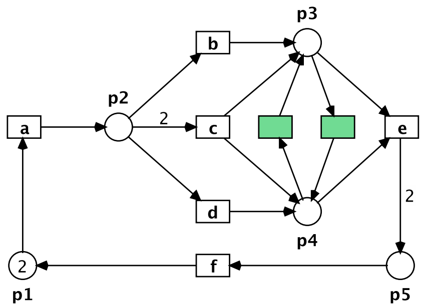
Anmerkung: Schicken Sie die Netzzeichnungen der dritten Aufgabe (weiße Fenster) als `.rnw` *und* `.pdf`-Dateien an Ihre Übungsgruppenleitung. Schicken Sie Ihre Simulationen (blaue Fenster) als pdf-Datei an Ihre Übungsgruppenleitung. Versuchen Sie nicht die Simulation als `.draw`-Datei abzuspeichern, da das zu Dateiverlust führen kann, sondern nutzen Sie ausschließlich Export. Verwenden Sie informative Dateinamen wie `FGI_G`*x*`_A6_`*Netz/SimuA*`_MeierMuellerSchulze.pdf`, wobei $x$ für die Übungsgruppennummer und *Netz/SimuA* zur Kennzeichnung Ihrer Netz- und Simulationsvarianten stehen soll. Schreiben Sie außerdem in jedes Ihrer Modelle Ihre Namen und den Gruppennamen, so dass diese auch auf einem Ausdruck sichtbar sind. Nutzen Sie dafür das Text Tool in der oberen Werkzeugleiste. Die pdf-Dateien erstellen Sie bitte mittels: File → Export → Export Current Drawing

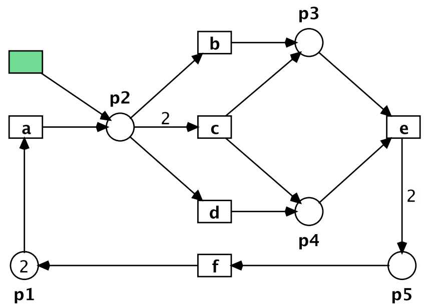
**Lösung:**

1. Siehe oben
2. Die Markierung zeigt eine der möglichen erreichbaren Markierungen, in der das Netz verklemmt und keine Transition mehr schalten kann.




3. Die grünen Transitionen zeigen zwei Möglichkeiten.




*Bisher erreichbare Punktzahl*: 69