Prof. Dr. Matthias Rarey
M. v. Behren, F. Heitmann, M. Hilbig,
F. Lauck, T. Otto, J. Röwekamp

Zentrum für Bioinformatik Hamburg (ZBH)
Abteilung für Algorithmisches Molekulares Design

Wintersemester 2012/2013

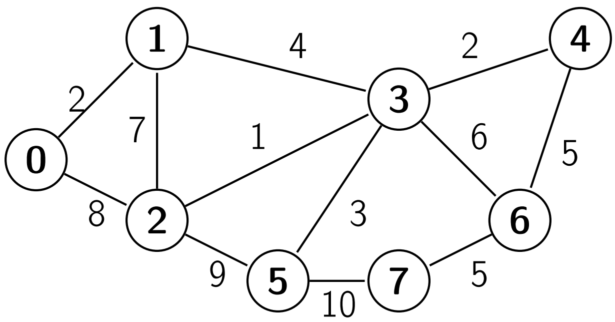
Übung zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 6

Abgabe: 14.01.2013, 12 Uhr

Aufgabe 1: Minimale Spannbäume

a)

Gegeben sei folgender Graph G:



1. Berechnen Sie den minimalen Spannbaum von G mit Hilfe Kruskals Algorithmus. Geben Sie nach jeder Iteration, in der sich die Anzahl der Teilbäume verringert hat, diese an.

2. Berechnen Sie den minimalen Spannbaum von G mit Hilfe Prims Algorithmus mit Startknoten 0. Geben Sie nach jeder Iteration, in der sich der Spannbaum vergrößert hat, die Werte von $\pi[v]$ und $key[v]$ für alle Kanten v an.

(4 Punkte)

b)

Geben Sie ein Beispiel für einen verbundenen Graphen $G = (V, E)$. Beweisen oder Widerlegen Sie folgende Aussage:
„Gibt es in G einen Schnitt, den zwei leichte Kanten kreuzen, so ist ein minimaler Spannbaum zu G nicht eindeutig.“

(2 Punkte)

c)

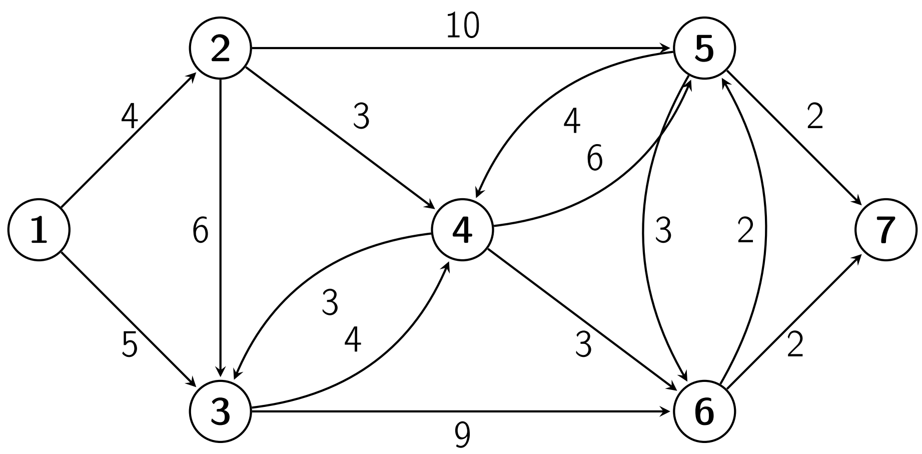
Gegeben sei ein ungerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer zusätzlichen Kantenmarkierung $t[e]$, die angibt, ob eine Kante zum minimalen Spannbaum T gehört oder nicht. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der nach dem Entfernen einer zum Spannbaum T gehörenden Kante e aus E einen neuen minimalen Spannbaum $T' \neq T$ berechnet, sofern dies möglich ist und NULL sonst. Ihr Algorithmus sollte bzgl. seiner asymptotischen Laufzeit in $O(|V| + |E|)$ liegen.
Erläutern Sie die grundlegende Idee Ihres Algorithmus und geben Sie den Pseudocode an. Zeigen Sie informell aber schlüssig, dass Ihre Lösung die gewünschte Laufzeit hat.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Kürzeste Pfade

a)

Gegeben sei folgender Graph G:

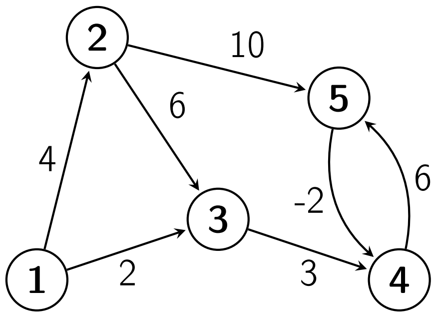


Bestimmen Sie in G alle kürzesten Pfade ausgehend von Knoten 1, indem Sie den Dijkstra Algorithmus anwenden. Geben Sie nach jeder Iteration $d[v]$ und $\pi[v]$ für alle Knoten v an.

(2 Punkte)

b)

Gegeben sei folgender Graph G:



1. Erläutern Sie, warum Dijkstras Algorithmus für diesen Graphen kein korrektes Ergebnis liefert.
2. Bestimmen Sie in G alle kürzesten Pfade ausgehend von Knoten 1, indem Sie den Bellman-Ford Algorithmus anwenden. Geben Sie nach jeder Iteration $d[v]$ und $\pi[v]$ für alle Knoten v an.

(3 Punkte)

c)

Entwickeln Sie einen Algorithmus basierend auf Dijkstra, der zusätzlich zum Gewicht des Pfades auch die Länge des Pfades, d.h. die Anzahl der Kanten, berechnet und während der Berechnung speichert. Geben Sie den Algorithmus in Pseudocode an.

(2 Punkte)