

Abbildung 6.6: Schaltregel

Um das simultane Schalten von Transitionen zu beschreiben, wollen wir definieren, wann eine Transitionsmenge  $U \subseteq T$  aktiviert ist. Dies ist der Fall, wenn der Vorbereich von  $U$  markiert, der Nachbereich von  $U$  unmarkiert ist und die Umgebungen aller Transitionen in  $U$  disjunkt zueinander sind, d.h. wenn alle Transitionen nebenläufig zueinander sind.

**Definition 6.5** Sei  $\mathcal{N}$  ein Petrinetz und  $M \subseteq P$  eine Markierung.

Eine Transitionsmenge  $U \subseteq T$  ist in  $M$  aktiviert, wenn gilt:

1. Vorbereich markiert:  $\bullet U \subseteq M$ .
2. Nachbereich leer:  $U^\bullet \cap C = \emptyset$ .
3. Transitionen nebenläufig:  $\forall t, t' \in U : t \neq t' \Rightarrow loc(t) \cap loc(t') = \emptyset$ .

Die Nachfolgemarkierung  $M'$  ist definiert als  $M' = (M \setminus \bullet U) \cup U^\bullet$ .

Setzen wir  $U = \{t\}$ , so erhalten wir die bekannte sequentielle Schaltregel.

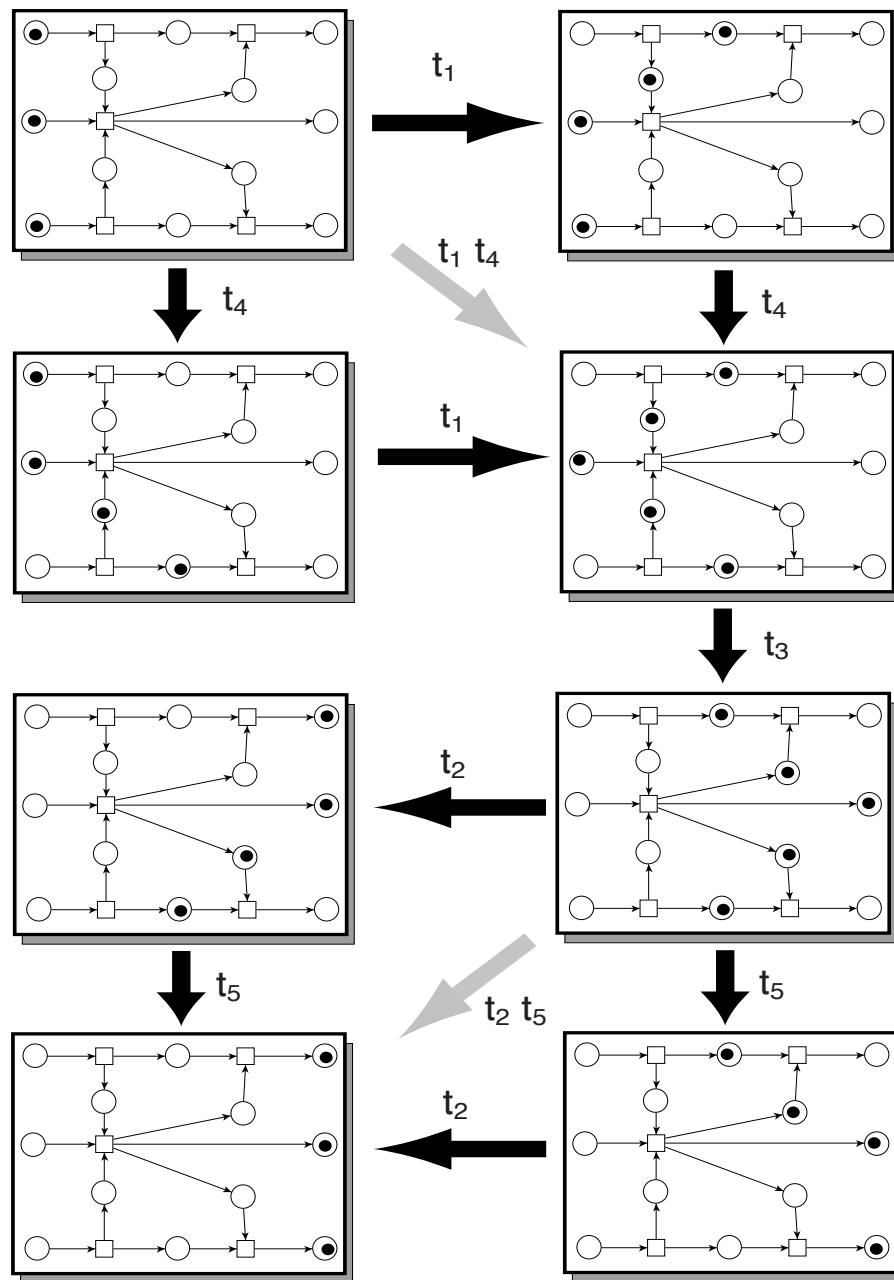
**Beispiel 6.6** Die Abbildung 6.7 zeigt alle möglichen Folgen von Transitionssereignissen. Nebenläufige (z.B.  $t_1$  und  $t_4$ ) Transitionen sind sowohl als simultaner Schritt wie auch in Folgensemantik dargestellt.

### 6.1.2 Verfeinerung und Vergrößerung von Netzen

Hierarchiebildung ist ein wesentliches Konzept zur Darstellung und Strukturierung von Systemen. Die entsprechenden Begriffe der Vergrößerung und Verfeinerung sind für Netze ohne Anschriften (Kantenbewertung, Markierung) definiert.

Die Konstruktion von Systemhierarchien durch Vergrößerung (Abstraktion) und Verfeinerung ist eine wichtige Methode des Systementwurfs. Petrinetze unterstützen dies durch besondere mit ihrer Struktur kompatible Konzepte. Diese werden unabhängig von Markierungen und speziellen Netzmodellen gebildet und daher für einfache Netze definiert. Wir beginnen mit dem Begriff des *Randes* einer Menge von Plätzen und Transitionen, der die Schnittstelle des zu vergrößernden Teiles bilden wird.

**Definition 6.7** Sei  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  ein Netz,  $X := P \cup T$  und  $Y \subseteq X$  eine Menge von Elementen. Dann heißt  $\partial(Y) := \{y \in Y \mid \exists x \notin Y . x \in loc(y)\}$  der Rand (engl. border) der Menge  $Y$ .



$Y$  heißt Platz-berandet (*place-bordered*) oder offen, wenn  $\partial(Y) \subseteq P$ , und Transitions-berandet (*transition-bordered*) oder abgeschlossen, falls  $\partial(Y) \subseteq T$ .

**Anmerkung:** Eine Menge  $Y$  kann gleichzeitig offen und abgeschlossen sein, wie z.B.:  $Y := P \cup T$ . In diesem Fall hängt es von der Interpretation bzw. Anwendung ab, ob  $Y$  durch einen Platz oder eine Transition ersetzt wird.

Platz-berandete Mengen heißen auch *offen*. Transitions-berandete Mengen heißen *abgeschlossen*. Die Bezeichnung ist in Anlehnung an die Topologie gewählt, denn offene und abgeschlossene Mengen definieren eine Topologie, die eine Formalisierung von Nachbarschaft auf der graphischen Struktur von Netzen darstellt.

Um eine Vergrößerung mit der Netzstruktur verträglich zu gestalten, sollten im Normalfall Platz- bzw. Transitions-berandete Mengen durch einen Platz bzw. eine Transition ersetzt werden.

Die Menge  $Y = \{p_3, p_4, t_2, t_3, t_4\}$  des Netzes in Abb. 6.8 ist Transitions-berandet und wird daher zu einer Transition  $t_Y$  vergröbert. Auf diese Weise erhält man wieder ein Netz  $\mathcal{N}[Y] = (P[Y], T[Y], F[Y])$ , das in Abb. 6.9 dargestellt ist.  $P[Y]$  enthält alle Plätze mit Ausnahme derjenigen aus  $Y$ .  $T[Y]$  enthält alle Transitionen mit Ausnahme derjenigen aus  $Y$  und das neue Element  $t_Y$ .  $F[Y]$  ist die Vereinigung von 3 Kantenmengen, nämlich (1) derjenigen, die kein Ende in  $Y$  haben, (2) derjenigen die von außerhalb von  $Y$  zu  $t_Y$  führen und (3) derjenigen, die von  $t_Y$  nach außerhalb führen. Diese Operation wird nun formalisiert.

**Definition 6.8** Sei  $\mathcal{N} = (P, T, F)$  ein Netz und  $Y$  eine nicht leere Transitions-berandete Menge von Elementen.

Dann heißt  $\mathcal{N}[Y] = (P[Y], T[Y], F[Y])$  elementare Vergrößerung von  $\mathcal{N}$  in Bezug auf  $Y$ , falls gilt:

1.  $P[Y] = P \setminus Y$ .
2.  $T[Y] = (T \setminus Y) \cup \{t_Y\}$ , wobei  $t_Y$  ein neues Element ist.
3.  $F[Y] = \{(x, y) \mid x \notin Y \wedge y \notin Y \wedge (x, y) \in F\} \cup \{(x, t_Y) \mid x \notin Y \wedge \exists y \in Y . (x, y) \in F\} \cup \{(t_Y, x) \mid x \notin Y \wedge \exists y \in Y . (y, x) \in F\}$ .

Wenn  $Y$  eine Platz-berandete Menge ist, dann ist  $\mathcal{N}[Y] = (P[Y], T[Y], F[Y])$  analog definiert:

1.  $P[Y] = (P \setminus Y) \cup \{p_Y\}$ , wobei  $p_Y$  ein neues Element ist,
2.  $T[Y] = T \setminus Y$ ,
3.  $F[Y] = \{(x, y) \mid x \notin Y \wedge y \notin Y \wedge (x, y) \in F\} \cup \{(x, p_Y) \mid x \notin Y \wedge \exists y \in Y . (x, y) \in F\} \cup \{(p_Y, x) \mid x \notin Y \wedge \exists y \in Y . (y, x) \in F\}$ .

**Anmerkung:** Die Definition von  $\mathcal{N}[Y]$  ist mehrdeutig, falls  $Y$  gleichzeitig Platz- und Transitions-berandet ist. Dann schreiben wir  $\mathcal{N}[Y^{(p)}]$  falls  $Y$  als Platz-berandete Menge aufgefasst wird und  $\mathcal{N}[Y^{(t)}]$  im anderen Fall.

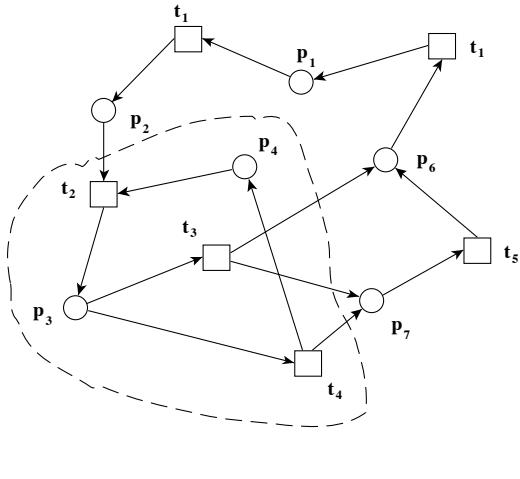


Abbildung 6.8: Eine transitionsberandete Menge

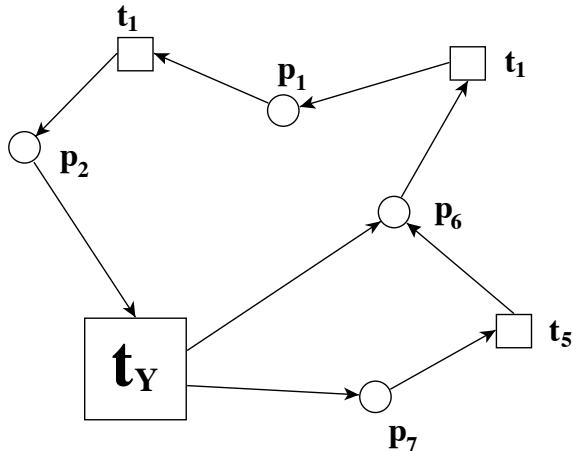


Abbildung 6.9: Vergrößerung des Netzes

**Definition 6.9** a) Wenn  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1[Y]$  eine einfache Vergrößerung von  $\mathcal{N}_1$  für eine Platz- oder Transitions-berandete Menge  $Y$  ist, dann heißt  $\mathcal{N}_1$  einfache Verfeinerung (simple refinement) von  $\mathcal{N}_2$ .

Für eine Menge  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  von paarweise disjunkten, Platz- oder Transitions-berandeten Teilmengen von  $P_1 \cup T_1$  wird  $\mathcal{N}_2 = (\dots((\mathcal{N}_1[Y_1])[Y_2])\dots[Y_n])$  Vergrößerung (abstraction) von  $\mathcal{N}_1$  genannt und  $\mathcal{N}_1$  ist eine Verfeinerung (refinement) von  $\mathcal{N}_2$ .  $\mathcal{N}_2$  wird durch  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$  bezeichnet.

b) Eine Vergrößerung  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$  von  $\mathcal{N}_1$  wird als Faltung (folding) bezeichnet, wenn jedes  $Y_i$  entweder eine Menge von Plätzen, d.h.  $Y_i \subseteq P_1$ , oder eine Menge von Transitionen, d.h.  $Y_i \subseteq T_1$ , ist.

In der Definition einer strikten Abstraktion wird  $Y_i$  im ersten Fall durch einen Platz  $p_{Y_i}$  und im zweiten Fall durch eine Transition  $t_{Y_i}$  ersetzt.  $\mathcal{N}_1$  wird strikte Verfeinerung von  $\mathcal{N}_2$  genannt.

Durch folgende Konvention können Mehrdeutigkeiten vermieden werden: falls in a) oder b) eine Menge  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sowohl Platz- als auch Transitions-berandet ist, kann die Vergrößerung durch  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1[Y_1, \dots, Y_i^{(d)}, \dots, Y_n]$  bezeichnet werden, wobei  $d = p$  bzw.  $d = t$  ist und  $Y_i$  als a Platz- bzw. Transitions-berandete Menge betrachtet wird.

Abb. 6.10 zeigt eine nicht einfache Vergrößerung. Das obere Netz stellt das aus der Vorlesung F4 bekannte Beispielnetz zum Start eines Autorennens dar. Dabei sind die vergrößerten Mengen  $Y = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, p_2, p_4, p_5, p_8, p_9, p_{11}\}$ ,  $Y_1 = \{t_6, p_{13}, t_7\}$  und  $Y_2 = \{t_8, p_{15}, t_9\}$ , in der oberen Abbildung durch eine gestrichelte Linien dargestellt. Es handelt sich um drei Transitions-berandete Mengen, die zu den Transitionen  $t_Y$ ,  $t_{Y_1}$  und  $t_{Y_2}$  im Netz  $\mathcal{N}[Y, Y_1, Y_2]$  der unteren Abbildung verwandelt werden.

Es ist einfach zu zeigen, dass die Vergrößerung eines Netzes wieder ein Netz ist, d.h. der Definition 6.1 genügt. Die Vergrößerung im unteren Teil von Abb. 6.10 hat sinngemäß das entsprechende Verhalten des Netzes darüber. Eine Vergrößerung muss jedoch

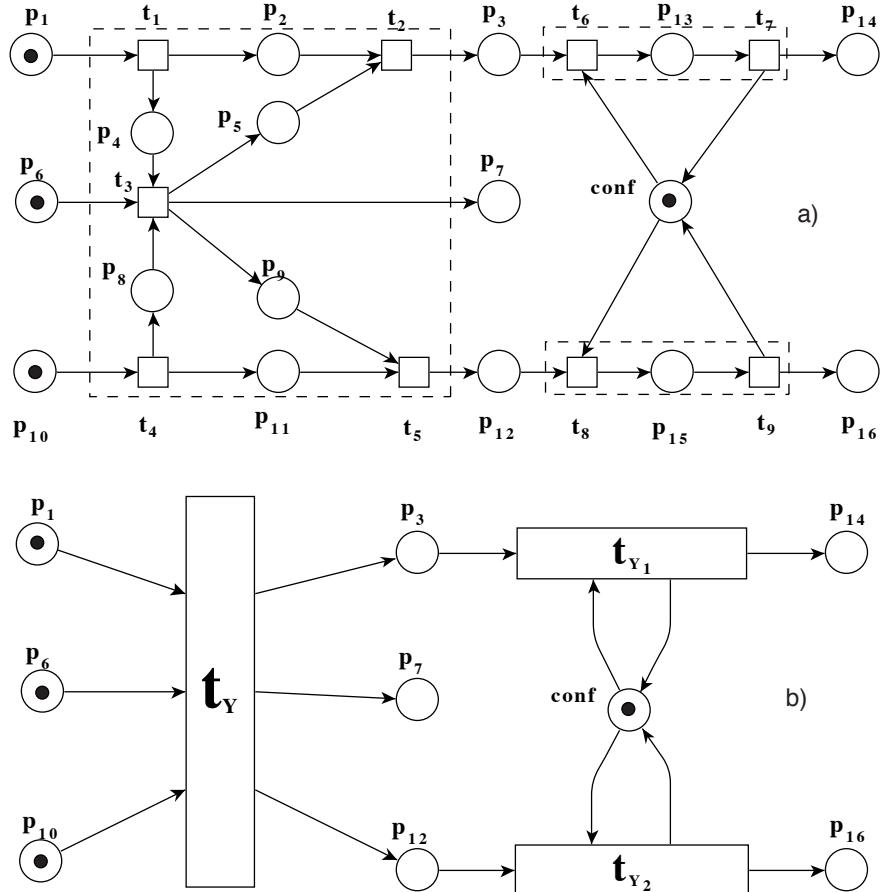


Abbildung 6.10: Eine (nicht einfache) Vergrößerung

nicht eine sinnvolle Interpretation haben. Insbesondere überträgt sich der Begriff nicht zwangsläufig auf seine Semantik (d.h. die Menge seiner Prozesse). Als Beispiel betrachte man das Netzfragment in Abb. 6.11 a). Intuitiv hat die Vergrößerung in Abb. 6.11 d) das entsprechende Verhalten: Marken können von links nach rechts „durchlaufen“. Allerdings ist dieses Netz auch Vergrößerung von Abb. 6.11 b). Das Verhalten ist hier jedoch völlig verschieden.

Die Vergrößerung in Abb. 6.11d) lässt sich in diesem Fall sinnvoll interpretieren, und zwar als Verschmelzung zweier Plätze als Schnittstelle zweier Komponenten. Die Operation wird als *Verschmelzung* oder *Fusion* bezeichnet und zuweilen wie in Abbildung 6.11 c) dargestellt. Die Abbildungen 6.11 e)-h) zeigen die entsprechenden Fälle für Transitionenberandete Mengen. Es handelt sich um die *Verschmelzung* oder *Fusion* von Transitionen.

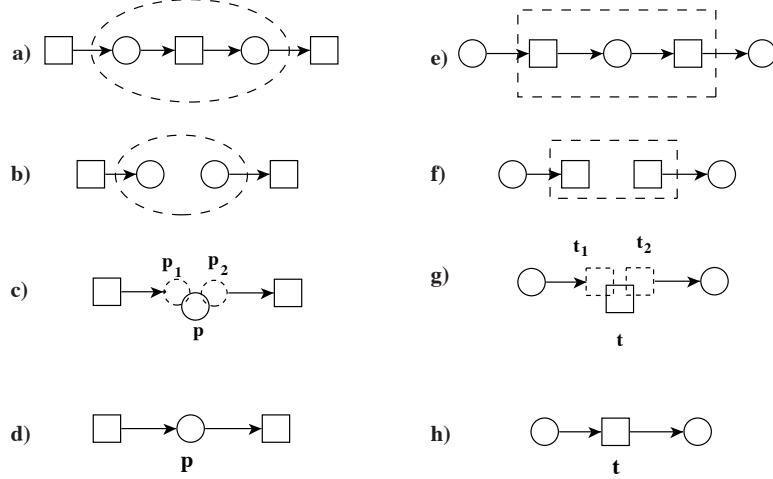


Abbildung 6.11: Vergrößerung und Verschmelzung (Fusion)

Mit Abb. 6.12 sind zwei Netze gegeben, deren Komposition durch Platzverschmelzung das Netz von Abb. 6.10 a) ergibt.

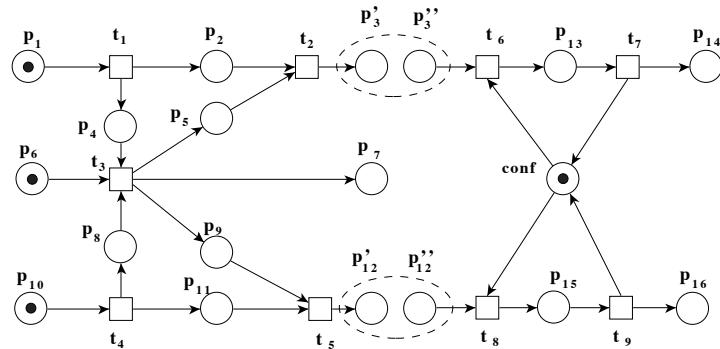


Abbildung 6.12: Komposition durch Verschmelzung (Fusion)

### 6.1.3 Netzmorphismen

Wie in algebraischen Theorien allgemein üblich, werden strukturerhaltende Abbildungen *Homomorphismen* oder kürzer *Morphismen* genannt. Im folgenden wird Strukturverträglichkeit für Netze eingeführt.

Unter Strukturverträglichkeit ist zu verstehen, dass bei einer Abbildung  $\phi$  eines Netzes  $\mathcal{N}_1 = (P_1, T_1, F_1)$  auf  $\mathcal{N}_2 = (P_2, T_2, F_2)$  die Kanten  $F$  „zusammen“ mit den Plätzen

$F$ -erhaltend abgebildet wird:

$$\forall x, y \in (P_1 \cup T_1) : (x, y) \in F_1 \Rightarrow ((\phi(x), \phi(y)) \in F_2 \vee \phi(x) = \phi(y))$$

Mit anderen Worten, die Abbildung der Kanten ergibt sich aus der Abbildung der Knoten.

Eine Abbildung  $\phi$  kann die Kantenrichtung umdrehen, indem einer Kante  $(p, t) \in F_1$  die Kante  $(\phi(p), \phi(t)) \in F_2$  zugeordnet wird, bei der  $\phi(p)$  eine Transition und  $\phi(t)$  ein Platz ist. Für Netzmorphismen wird ein solches Umdrehen der Richtung verboten.

Um ein solches Umdrehen der Richtung zu verhindern, wird zusätzlich noch gefordert, dass  $(x, y) \in F_1 \cap (P_1 \times T_1)$  auch  $(\phi(x), \phi(y)) \in F_2 \cap (P_2 \times T_2)$  oder  $\phi(x) = \phi(y)$  impliziert. Analog für  $(x, y) \in F_1 \cap (T_1 \times P_1)$ <sup>1</sup>

Ist der Netzmorphismus  $\phi$  surjektiv, so sind die Bildknoten  $P_2 \cup T_2$  aus den Knoten des Netzes  $\mathcal{N}_1$  mit  $\phi$  konstruierbar. Gilt zudem noch, dass jede Kante in  $\mathcal{N}_2$  ein Abbild einer Kante in  $\mathcal{N}_1$  ist, dann wird das Netz  $\mathcal{N}_2$  komplett durch  $\mathcal{N}_1$  und  $\phi$  konstruierbar. Solche Morphismen heißen Epimorphismen.

Wir definieren für Kanten  $(x, y) \in F$  die Notation  $\phi(x, y) := (\phi(x), \phi(y))$ .

**Definition 6.10** Seien  $\mathcal{N}_1 = (P_1, T_1, F_1)$  und  $\mathcal{N}_2 = (P_2, T_2, F_2)$  zwei Netze.

- Eine Abbildung  $\phi : (P_1 \cup T_1) \rightarrow (P_2 \cup T_2)$  heißt Netzmorphismus, falls gilt:

$$\begin{aligned} (x, y) \in F_1 \cap (P_1 \times T_1) &\Rightarrow ((\phi(x), \phi(y)) \in F_2 \cap (P_2 \times T_2) \vee \phi(x) = \phi(y)) \\ (x, y) \in F_1 \cap (T_1 \times P_1) &\Rightarrow ((\phi(x), \phi(y)) \in F_2 \cap (T_2 \times P_2) \vee \phi(x) = \phi(y)) \end{aligned}$$

- Ein Netzmorphismus  $\phi$  heißt Faltung, falls  $\phi(P_1) \subseteq P_2$  und  $\phi(T_1) \subseteq T_2$  gilt.
- Ein Netzmorphismus  $\phi$  ist ein Epimorphismus, falls  $\phi$  surjektiv ist und für jede Kante ein Urbild existiert, d.h. für alle  $f_2 \in F_2$  existiert ein  $f_1 \in F_1$  mit  $\phi(f_1) = f_2$ . Eine Faltung mit dieser Eigenschaft heißt Epifaltung.
- Ein Netzmorphismus  $\phi$  ist ein Netzisomorphismus, falls  $\phi$  eine Bijektion ist und  $\phi^{-1}$  ebenfalls ein Netzmorphismus ist.

**Theorem 6.11** Seien  $\mathcal{N}_1$  und  $\mathcal{N}_2$  zwei endliche Netze.

- $\mathcal{N}_2$  ist genau dann eine Vergrößerung von  $\mathcal{N}_1$ , wenn es einen Epimorphismus von  $\mathcal{N}_1$  nach  $\mathcal{N}_2$  gibt.
- $\mathcal{N}_2$  ist genau dann eine strikte Vergrößerung von  $\mathcal{N}_1$ , wenn es eine Epifaltung von  $\mathcal{N}_1$  nach  $\mathcal{N}_2$  gibt.

Für den Beweis siehe [GV03, Theorem 2.5.4].

Abbildung 6.13 zeigt den Übergang von einem einfachen Netz zu einem P/T-Netz mit mehreren Marken auf einem Platz und Kantengewichten größer als Eins mit Hilfe von Netzfaltungen.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>In der topologischen Terminologie wird also zusätzlich gefordert, dass offene (bzw. abgeschlossene) Mengen eben solche Urbilder haben.

<sup>2</sup>Mehrfache Marken und Kantengewichte sind für eine Faltung bislang so nicht definiert, denn Faltungen sind ja Abbildungen auf Petrinetzen. Es handelt sich also um eine verallgemeinerte Form der Faltung, die wir aber hier nicht mehr formal definieren wollen.

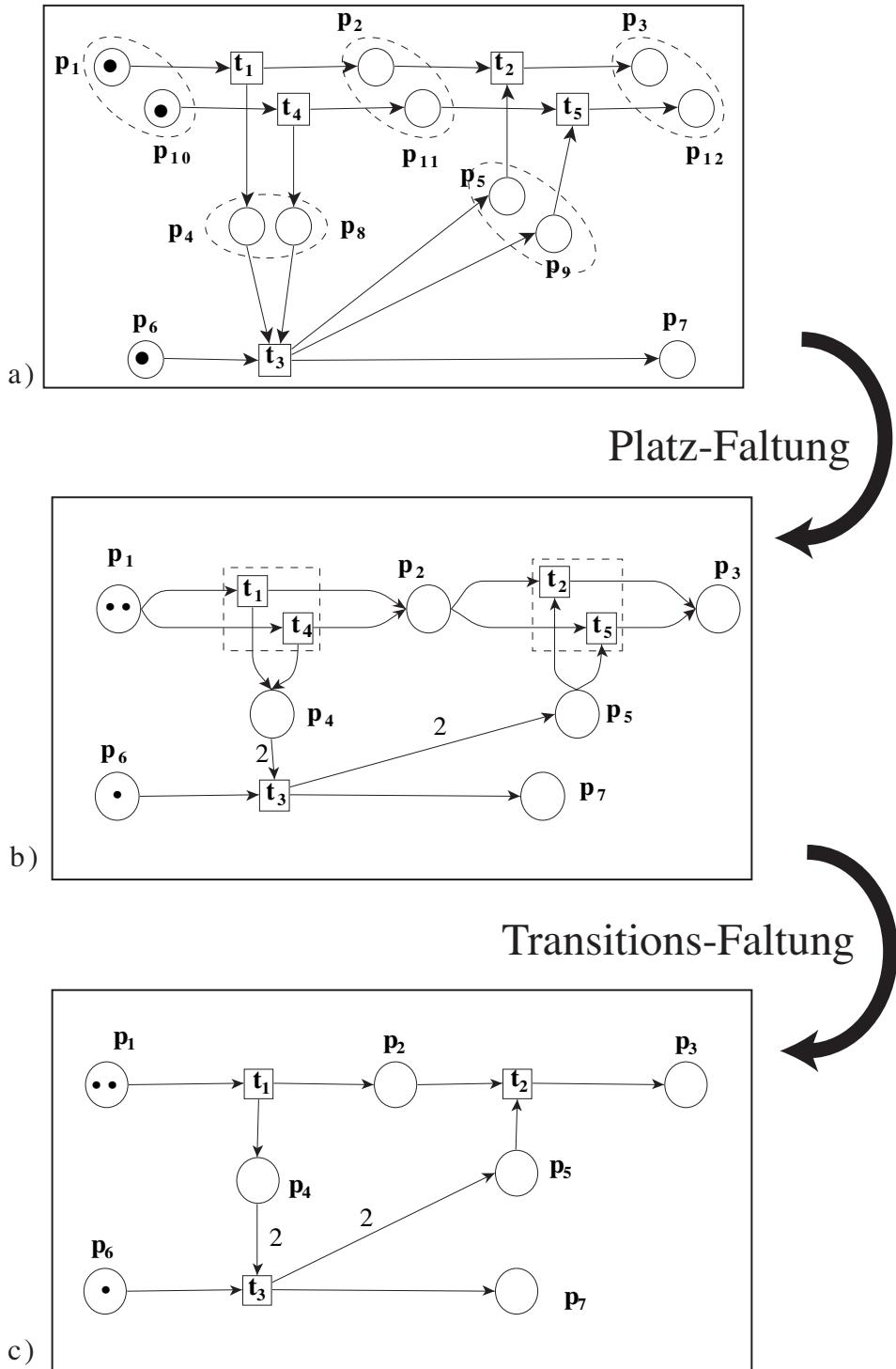


Abbildung 6.13: Netzfaltung zu Platz/Transitions-Netzen

## 6.2 Platz/Transitions-Netze

In diesem Abschnitt wird die Struktur und das Verhalten (auch: die *Semantik*) der Platz/Transitions-Netze (kurz: *P/T-Netz*) formal eingeführt.<sup>3</sup> Dazu gehören Markierungen von Plätzen und ihre Veränderung durch das Schalten von Transitionen. Darüber hinaus wird eine kleine Erweiterung der Netze betrachtet: das *Kantengewicht*.

### 6.2.1 Definitionen

**Definition 6.12** Ein Platz/Transitions-Netz  $\mathcal{N} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$  besteht aus den folgenden Komponenten:

- $(P, T, F)$  ist ein endliches Netz.
- $W : F \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ist die Kantengewichtung.
- $\mathbf{m}_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$  ist die Anfangsmarkierung.

Ein P/T-Netz heißt *einfaches Netz*, falls  $W(x, y) = 1$  für alle  $(x, y) \in F$  gilt.

Um die Anfangsmarkierung  $\mathbf{m}_0$  eines P/T-Netzes hervorzuheben, notiert man ein Netz auch in der Form  $(\mathcal{N}, \mathbf{m}_0)$  mit  $\mathcal{N} = (P, T, F, W)$ .

Notation: Eine Markierung  $\mathbf{m} : P \rightarrow \mathbb{N}$  kann auch als Tupel  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{|P|}$  aufgefasst werden.

Ein *Netzsystem* ist ein P/T-Netz  $\mathcal{N} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$  mit  $P \neq \emptyset$  und  $T \neq \emptyset$ .

Eine nicht vorhandene Kante – d.h.  $(x, y)$  mit  $(x, y) \notin F$  – können wir wie eine Kante mit dem Gewicht  $W(x, y) = 0$  behandeln. Dazu definieren wir die Erweiterung von  $W$  auf  $(P \times T) \cup (T \times P)$ , indem wir definieren:

$$\widetilde{W}(x, y) := \begin{cases} W(x, y), & \text{falls } (x, y) \in F \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir verwenden meist  $W$  sowohl für  $W$  als auch für  $\widetilde{W}$ .

**Definition 6.13** Sei das P/T-Netz  $\mathcal{N} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$  gegeben.

- Eine Transition  $t \in T$  heißt aktiviert in einer Markierung  $\mathbf{m}$ , falls  $\forall p \in \bullet t. \mathbf{m}(p) \geq W(p, t)$  (als Relation:  $\mathbf{m} \xrightarrow{t}$ ).
- Ist  $t$  in  $\mathbf{m}$  aktiviert, dann ist die Nachfolgemarkierung  $\mathbf{m}'$  für alle  $p \in P$  definiert durch:

$$\mathbf{m}'(p) = \mathbf{m}(p) - \widetilde{W}(p, t) + \widetilde{W}(t, p))$$

- Insgesamt notieren wir den Schaltvorgang durch  $\mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}'$ .
- Es gilt:  $\mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}' \iff \forall p \in P. (\mathbf{m}(p) \geq \widetilde{W}(p, t) \wedge \mathbf{m}'(p) = \mathbf{m}(p) - \widetilde{W}(p, t) + \widetilde{W}(t, p))$

---

<sup>3</sup>Die Menge  $P$  der Plätze wird in der Literatur auch durch *S (Stellen)* bezeichnet. Entsprechend heißt das Platz/Transitions-Netz dann *Stellen/Transitions-Netz (S/T-Netz)*.

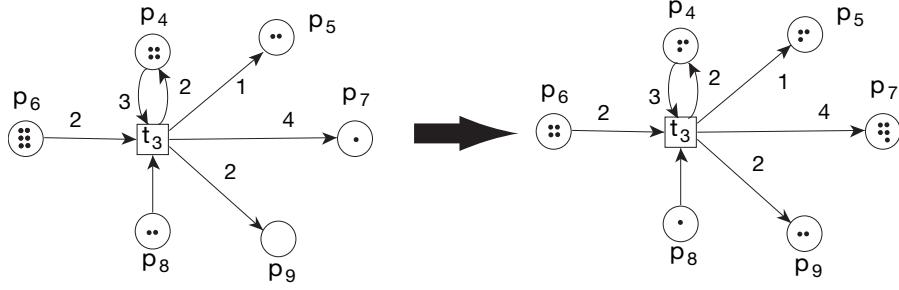


Abbildung 6.14: Schaltregel für P/T-Netze

Die Schaltregel ist in der Abbildung 6.14 an einem Beispiel illustriert.

Wir definieren den Pre-Vektor  $W(\bullet, t)$  der Länge  $|P|$  durch:

$$W(\bullet, t) := (\widetilde{W}(p_1, t), \dots, \widetilde{W}(p_{|P|}, t))$$

Analog ist der Post-Vektor:

$$W(t, \bullet) := (\widetilde{W}(t, p_1), \dots, \widetilde{W}(t, p_{|P|}))$$

Mit dieser Vektornotation kann die Aktivierung/Nachfolgemarkierung einfacher definiert werden:

$$\mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}' \iff \mathbf{m} \geq W(\bullet, t) \wedge \mathbf{m}' = \mathbf{m} - W(\bullet, t) + W(t, \bullet)$$

Dabei werden hier die auf  $\mathbb{Z}$  definierten Operatoren  $-$ ,  $+$  und  $\geq$  in ihrer komponentenweisen Erweiterung auf Vektoren aus  $\mathbb{Z}^{|P|}$  verwendet.

**Multimengennotation für den Vor- und Nachbereich** Wir definieren die Abbildungen  $\partial_0, \partial_1 : T \rightarrow P^\oplus$ , die jeder Transition ihren *Vorbereich* bzw. ihren *Nachbereich* aus dem Markenmonoid  $P^\oplus$ , d.h. den Multimengen über  $P$  zuordnet. Es gilt  $\partial_0(t)(p) := W(p, t)$  und  $\partial_1(t)(p) := W(t, p)$ , was sich auch als Multimenge darstellen lässt:

$$\partial_0(t) := \bigoplus_{p \in P} W(p, t) \cdot p \quad \text{bzw.} \quad \partial_1(t) := \bigoplus_{p \in P} W(t, p) \cdot p$$

**Schaltfolgen** Die *Nachfolgemarkierungsrelation* wird auf Wörter über  $T$  erweitert:

**Definition 6.14** Sei  $\mathcal{N}$  ein P/T-Netz.

- $\mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{m}'$  falls  $w$  das leere Wort  $\lambda$  ist und  $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ ,
- $\mathbf{m} \xrightarrow{wt} \mathbf{m}'$  falls  $\exists \mathbf{m}''' : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{m}''' \wedge \mathbf{m}''' \xrightarrow{t} \mathbf{m}'$  für  $w \in T^*$  und  $t \in T$ .

Eine Transitionsfolge  $w \in T^*$  heißt aktiviert in  $\mathbf{m}$  (in Zeichen:  $\mathbf{m} \xrightarrow{w}$ ), falls  $\exists \mathbf{m}_1 : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{m}_1$

$FS(\mathcal{N}) := \{w \in T^* \mid \mathbf{m}_0 \xrightarrow{w}\}$  ist die Menge der Schaltfolgen (firing sequence set) von  $\mathcal{N}$ .

**Der Erreichbarkeitsgraph** Sei  $\mathcal{N} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$  ein P/T-Netz. Für eine Menge  $S^0$  von Markierungen sei dann die Menge der von  $S^0$  aus erreichbaren Markierungen definiert als:

$$\mathbf{R}(\mathcal{N}, S^0) := \{\mathbf{m}_2 \mid \exists w \in T^*, \mathbf{m}_1 \in S^0 : \mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_2\}$$

Die Erreichbarkeitsmenge  $\mathbf{R}(\mathcal{N})$  ist  $\mathbf{R}(\mathcal{N}) := \mathbf{R}(\mathcal{N}, \{\mathbf{m}_0\})$ .

Für einelementige Mengen  $S^0$  schreiben wir  $\mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m})$  anstelle von  $\mathbf{R}(\mathcal{N}, \{\mathbf{m}\})$ .

Falls  $\mathcal{N}$  implizit gegeben ist, schreiben wir auch  $\mathbf{R}(\mathbf{m})$  für  $\mathbf{R}(\mathcal{N}, \{\mathbf{m}\})$ .

**Definition 6.15** Der Erreichbarkeitsgraph eines P/T-Netzes  $\mathcal{N}$  ist ein Graph  $RG(\mathcal{N}) := (Kn, Ka)$  mit Knotenmenge  $Kn := \mathbf{R}(\mathcal{N})$  und Kantenmenge  $Ka := \{(\mathbf{m}_1, t, \mathbf{m}_2) \mid \mathbf{m}_1 \xrightarrow{t} \mathbf{m}_2\}$ .

Der Erreichbarkeitsgraph eines P/T-Netzes  $\mathcal{N}$  kann auch als Transitionssystem  $TS = (\mathbf{R}(\mathcal{N}), T, Ka, \{\mathbf{m}_0\})$  aufgefasst werden. Dann ist  $R(TS) = \mathbf{R}(\mathcal{N})$  und  $FS(TS) = FS(\mathcal{N})$ .

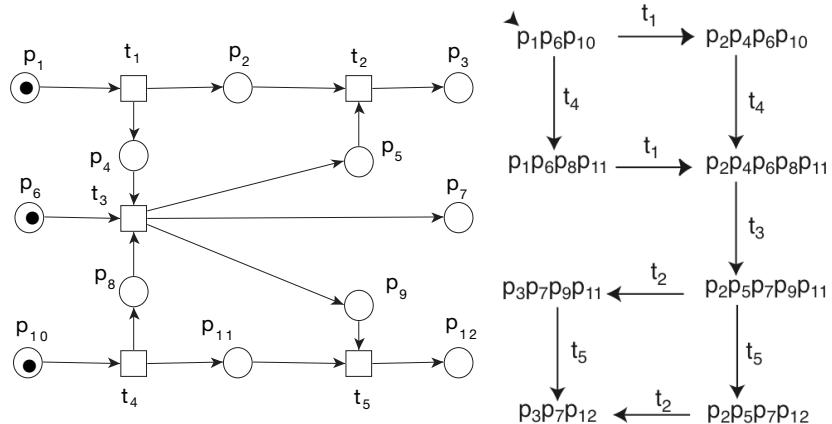


Abbildung 6.15: P/T-Netz  $\mathcal{N}$  mit Erreichbarkeitsgraph

Die Abbildung 6.15 zeigt rechts den Erreichbarkeitsgraph des linksstehenden P/T-Netzes.

**Beispiel 6.16** Das Netz 6.16 ist ein P/T-Netz. Die beiden Wagen sind hier als ununterscheidbare Objekte modelliert: „zwei Wagen stehen in Startposition“.

Im P/T-Netz  $\mathcal{N}_3$  von Abb. 6.16 ist die Anfangsmarkierung der Vektor  $\mathbf{m}_0 = (2, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$  oder (alternativ) die Abbildung  $\mathbf{m}_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\mathbf{m}_0(p_1) = 2$ ,  $\mathbf{m}_0(p_6) = 1$  und  $\mathbf{m}_0(p_i) = 0$  in den anderen Fällen.

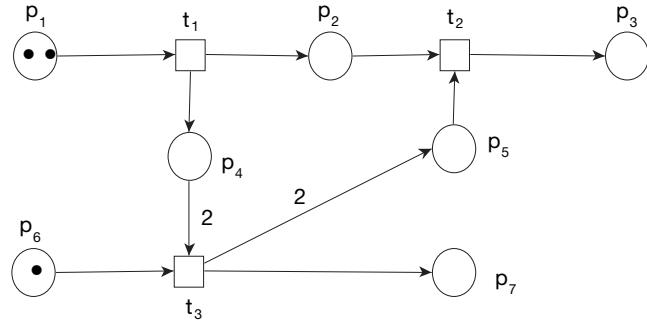


Abbildung 6.16: Platz/Transitions Netz  $\mathcal{N}_3$

Eine Schaltfolge für das P/T-Netz  $\mathcal{N}_3$  in der Vektorschreibweise ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oft ist es praktisch eine Markierung als Wort zu schreiben:  $\mathbf{m}_0 = p_1^2 p_6$  oder  $\mathbf{m}_0 = < p_1^2 p_6 >$ . Werden die Markierungen als Wörter dargestellt, so erhält man:

$$p_1^2 p_6 \xrightarrow{t_1} p_1 p_2 p_4 p_6 \xrightarrow{t_1} p_2^2 p_4^2 p_6 \xrightarrow{t_3} p_2^2 p_5^2 p_7 \xrightarrow{t_2} p_2 p_3 p_5 p_7 \xrightarrow{t_2} p_3^2 p_7$$

**Eigenschaften: Monotonie, Hürde** Eine zentrale Eigenschaft der P/T-Netze ist die der *Monotonie* – etwas salopp formuliert: „Mehr Marken schaden nicht.“

**Lemma 6.17** Für jedes P/T Netz gilt die folgende Additivität:

$$\forall w \in T^* : \mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_3 \Rightarrow \forall \mathbf{m} : (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}) \xrightarrow{w} (\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}) \quad (6.1)$$

(Da die Multimengenaddition kommutativ ist, könnten wir  $\mathbf{m}$  genausogut von links addieren.)

*Beweis:* Beweis der Behauptung (6.1) per Induktion über die Länge von  $w$  (als Übung).  $\square$

Die Monotonie-Eigenschaft der Schaltregel folgt dann direkt.

**Lemma 6.18** Für jedes P/T-Netz gilt die folgende Monotonie-Eigenschaft:

$$(\mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_3 \wedge \mathbf{m}_2 \geq \mathbf{m}_1) \Rightarrow \mathbf{m}_2 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_4 \quad (6.2)$$

*Beweis:* Setzen wir in (6.1) speziell  $\mathbf{m} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \geq \mathbf{0}$ , so ergibt sich (6.2):

$$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_3 \Rightarrow \mathbf{m}_2 = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}) \xrightarrow{w} (\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}) = (\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) = \mathbf{m}_4$$

D.h. die Folgemarkierung ergibt sich als  $\mathbf{m}_4 = (\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)$ .  $\square$

**Lemma 6.19** Definiere  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$  durch  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)(p) = \min(\mathbf{m}_1(p), \mathbf{m}_2(p))$ . Gilt  $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{\sigma}$  und  $\mathbf{m}_2 \xrightarrow{\sigma}$ , dann auch  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \xrightarrow{\sigma}$ .

*Beweis:* Für Schaltfolgen der Länge 1, d.h. für eine Transition, ist dies leicht einzusehen: Aktivieren  $\mathbf{m}_1$  und  $\mathbf{m}_2$  die Transition  $t$ , dann auch ihr Minimum.

Beweis per Induktion. Für  $\sigma = \epsilon$  gilt  $\mathbf{m} \xrightarrow{\sigma}$  für jedes  $\mathbf{m}$ .

Für  $\sigma = \sigma't$  sei nun  $\mathbf{m}_{1,2} \xrightarrow{\sigma'} \mathbf{m}'_{1,2}$  mit der Induktionsannahme  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \xrightarrow{\sigma'} \mathbf{m}'$  für ein  $\mathbf{m}'$ .

Es gilt nun  $\mathbf{m}' = \min(\mathbf{m}'_1, \mathbf{m}'_2)$ , denn es gilt:

1. Gilt  $\mathbf{m}_1(p) \leq \mathbf{m}_2(p)$ , dann ist  $\mathbf{m}'(p) = \min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)(p) + \Delta(\sigma')(p) = \mathbf{m}_1(p) + \Delta(\sigma')(p) = \mathbf{m}'_1(p)$ .
2. Gilt  $\mathbf{m}_1(p) \geq \mathbf{m}_2(p)$ , dann ist  $\mathbf{m}'(p) = \min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)(p) + \Delta(\sigma')(p) = \mathbf{m}_2(p) + \Delta(\sigma')(p) = \mathbf{m}'_2(p)$ .

Aus  $\mathbf{m}_{1,2} \xrightarrow{\sigma}$  folgt  $\mathbf{m}'_{1,2} \xrightarrow{t}$ . Damit gilt dann auch  $\min(\mathbf{m}'_1, \mathbf{m}'_2) \xrightarrow{t}$ . Also gilt  $\mathbf{m}' \xrightarrow{t}$  und damit  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \xrightarrow{\sigma}$ .  $\square$

Eine Markierung  $\mathbf{m}$  heißt *Hürde* für  $\sigma \in T^*$ , falls sie die kleinste  $\sigma$  aktivierende Markierung darstellt, d.h. falls  $\mathbf{m} \xrightarrow{\sigma}$  und  $\forall \mathbf{m}' \not\leq \mathbf{m} : \neg \mathbf{m}' \xrightarrow{\sigma}$  gilt.

**Lemma 6.20** Zu jedem  $\sigma \in T^*$  ist die Hürde eindeutig bestimmt. Sie wird mit  $H(\sigma)$  bezeichnet.

*Beweis:* Existenz: Dass es mindestens ein  $\mathbf{m}$  mit der Eigenschaft gibt, sieht man leicht. Man nehme eine beliebige Markierung, die  $\sigma = t_1 \dots t_n$  aktiviert, also bspw.  $\sum_{i=1}^n W(p, t_i)$ .

Von dieser Markierung entfernen wir nichtdeterministisch von irgendwelchen Stellen so lange Markierungen, wie sich an der Aktiviertheit von  $\sigma$  nichts ändert. Die resultierende Markierung  $\mathbf{m}$  aktiviert also  $\sigma$  und jede kleinere tut dies nicht mehr.

Eindeutigkeit: Gäbe es zwei verschiedene Hürden  $\mathbf{m}_1$  und  $\mathbf{m}_2$ . Für diese gilt  $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{\sigma}$  und  $\mathbf{m}_2 \xrightarrow{\sigma}$ , so dass nach Lemma 6.19 dann auch  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \xrightarrow{\sigma}$  gilt und da  $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2$  folgt damit  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \not\leq \mathbf{m}_1$  oder  $\min(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \not\leq \mathbf{m}_2$  im Widerspruch zu der Annahme, dass sowohl  $\mathbf{m}_1$  als auch  $\mathbf{m}_2$  als Hürden bereits minimal sind.  $\square$

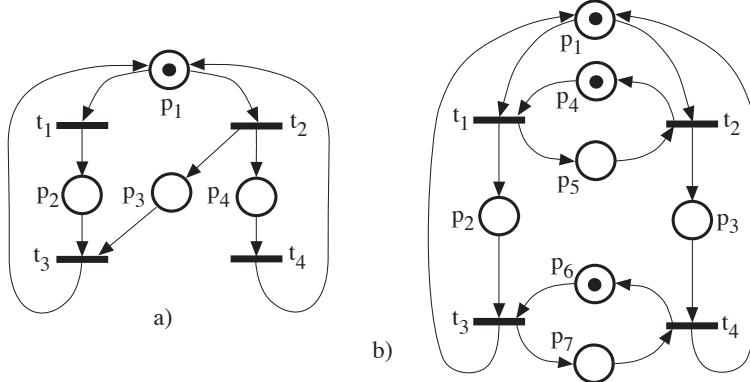


Abbildung 6.17: (a) ein unbeschränktes, nicht-lebendiges und nicht-reversibles Netz;  
 (b) ein lebendiges Netz, das aber bei vergrößerter Anfangsmarkierung  
 (z.B.  $m_0(p_5) = 1$ ) nicht lebendig ist.

### 6.2.2 Elementare Systemeigenschaften

In diesem Abschnitt werden einige elementare Systemeigenschaften eingeführt. Diese stellen natürlich nur eine kleine Auswahl von solchen Eigenschaften dar. Obwohl sie für P/T-Netze formuliert werden, sind sie überwiegend auch für andere Systemmodelle (darunter gefärbte Netze) formulierbar. Mit P/T-Netzen lassen sie sich jedoch besonders knapp und präzise definieren.

Die wichtigsten dieser Eigenschaften sind:

- 1) Beschränktheit (*boundedness*), was die Endlichkeit des Zustandraumes bedeutet,
- 2) Lebendigkeit (*liveness*), was die potenzielle Ausführbarkeit bedeutet,
- 3) Reversibilität (*reversibility*), was diejenigen Systeme charakterisiert, die immer in den Anfangszustand zurückgesetzt werden können,
- 4) wechselseitiger Ausschluss (*mutual exclusion*), was die Unmöglichkeit von simultanen Teilmarkierungen (p-mutex) oder Transitionsausführungen (t-mutex) bedeutet.
- 5) Eine Markierung heißt *Rücksetzzustand* (home state), wenn sie von jeder erreichbaren Markierung erreicht werden kann.

**Beispiel 6.21** Das Netz in Abb. 6.17 a) ist unbeschränkt, was einem „Überlauf“<sup>4</sup> in realen Systemen entspricht. Darüber hinaus ist es nicht lebendig. Die Vermehrung von Betriebsmitteln (resources) muss jedoch nicht zu einem lebendigen Netz führen, sondern kann sogar diese Eigenschaft zerstören, wie Abb. 6.17 b) zeigt.

Wenn im Netz von Abb. 6.17 a) die Transition  $t_1$  schaltet, wird eine *Verklemmung* (deadlock) erreicht, d.h. eine Markierung, in der keine Transition aktiviert ist. Ein Netz heißt *verklemmungsfrei* (deadlock-free), wenn die Erreichbarkeitsmenge keine Verklemmung enthält.

<sup>4</sup>z.B. zu große Zähler, zu volle Puffer, zu viele aktivierte Prozesse

*Lebendigkeit* (liveness) ist eine stärkere Eigenschaft. Eine Transition  $t$  heißt *potenziell aktivierbar* (potentially fireable) in einer gegebenen Markierung  $\mathbf{m}$ , wenn eine aktivierte Schaltfolge  $\sigma \in T^*$  existiert, die zu einer Markierung  $\mathbf{m}'$  führt, in der  $t$  aktiviert ist. Eine Transition heißt *lebendig* (live), wenn sie in jeder erreichbaren Markierung potenziell aktivierbar ist. Ein Netz heißt *lebendig*, wenn alle Transitionen in der Anfangsmarkierung lebendig sind.

Egal wie man die Anfangsmarkierung des Netzes in Abb. 6.17 a) wählt, es ist *nicht lebendig*. Dies ist also wieder eine strukturelle Eigenschaft, die daher *strukturelle Nicht-lebendigkeit* (structural non-liveness) heißt. Umgekehrt heißt ein Netz *strukturell lebendig* (structural live), wenn für es eine lebendige Markierung existiert.

In der Tabelle 6.1 sind die formalen Definitionen der diskutierten Eigenschaften zusammengefasst. Darin sind Notationen enthalten, die z.T. im vorangehenden Kapitel eingeführt wurden.

- 
- |      |  |
|------|--|
| (1)  | Sei $k \in \mathbb{N}$ . Dann heißt ein Platz $p \in P$ <i>k-beschränkt</i> ( <i>k</i> -bounded) in $\mathcal{N}$ , falls $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) : \mathbf{m}(p) \leq k$  |
| (2)  | $p$ heißt <i>beschränkt</i> (bounded) in $\mathcal{N}$ , falls $\exists k \in \mathbb{N} \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) : \mathbf{m}(p) \leq k$  |
| (3)  | $\mathcal{N}$ heißt <i>k-beschränkt</i> , wenn alle Plätze <i>k-beschränkt</i> sind.<br>$\mathcal{N}$ heißt <i>beschränkt</i> , wenn alle Plätze <i>beschränkt</i> sind.   |
| (4)  | $\mathcal{N}$ heißt <i>verklemmungsfrei</i> (deadlock-free), falls $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \exists t \in T : \mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}$  |
| (5)  | $t$ heißt <i>potenziell aktivierbar</i> in $\mathbf{m}$ , wenn gilt: $\exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma i} \mathbf{m}' \xrightarrow{t} \mathbf{m}$   |
| (6)  | $t$ heißt <i>lebendig</i> (live) in $\mathcal{N}$ , falls $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma t} \mathbf{m}'$  |
| (7)  | $\mathcal{N}$ heißt <i>lebendig</i> , falls alle Transitionen lebendig sind.   |
| (8)  | $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$ heißt <i>a Rücksetzzustand</i> (home state), falls $\forall \mathbf{m}' \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m}' \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m}$   |
| (9)  | $\mathcal{N}$ heißt <i>reversibel</i> (reversible), falls $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m}_0$   |
|      | <i>wechselseitiger Ausschluss</i> (mutual exclusion) in $\mathcal{N}$ :<br>$p_i$ und $p_j$ sind in <i>Markierungs-Ausschluss</i> (marking mutual exclusion) falls<br>$\nexists \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) : (\mathbf{m}(p_i) > 0) \wedge (\mathbf{m}(p_j) > 0)$<br>$t_i$ und $t_j$ sind in <i>Schalt-Ausschluss</i> (firing mutual exclusion)<br>falls $\nexists \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) : \mathbf{m} \geq W(\bullet, t_i) + W(\bullet, t_j)$ |
| (10) | Strukturelle Eigenschaften :<br>$\mathcal{N}$ heißt <i>strukturell beschränkt</i> (structurally bounded), falls $(\mathcal{N}, \mathbf{m})$ für alle $\mathbf{m}$ beschränkt ist.<br>$\mathcal{N}$ heißt <i>strukturell lebendig</i> (structurally live), falls $(\mathcal{N}, \mathbf{m})$ für mindestens ein $\mathbf{m}$ lebendig ist.  |
- 

Tabelle 6.1: Systemeigenschaften eines P/T-Netzes  $\mathcal{N} = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$

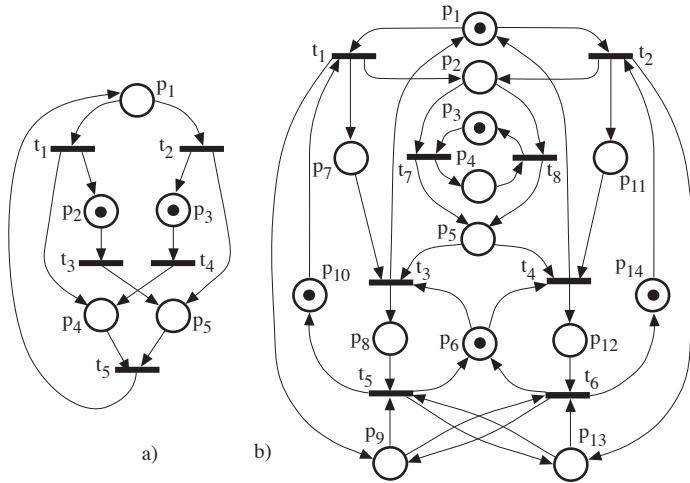


Abbildung 6.18: (a) Die Anfangsmarkierung ist kein Rücksetzzustand, jedoch alle übrigen; (b) Die Anfangsmarkierung ist kein Rücksetzzustand, der übrige Erreichbarkeitsgraph zerfällt in zwei streng zusammenhängende Zusammenhangskomponenten (siehe Abb. 7.4).

**Beispiel 6.22** Die Anfangsmarkierung des Netzes in Abb. 6.18 a) ist kein Rücksetzzustand. Das gilt auch für das Netz in Abb 6.18 b). Es ist ebenfalls lebendig und beschränkt, besitzt aber keinen Rücksetzzustand. Sein Erreichbarkeitsgraph enthält nämlich zwei verschiedene starke Zusammenhangskomponenten, die jeweils alle Transitionen enthalten. Die Menge aller Rücksetzzustände eines Netzes heißt *Rücksetzmenge* (*home space*). Die Existenz von Rücksetzzuständen ist natürlich generell für Systeme wünschenswert.

Lebendigkeit, Beschränktheit und Reversibilität sind prominente und „gute“ Systemeigenschaften, und man kann die Frage stellen, ob sie voneinander unabhängig sind, d.h. jede Kombination möglich ist.

**Lemma 6.23** *Lebendigkeit, Beschränktheit und Reversibilität sind voneinander unabhängige Systemeigenschaften.*

*Beweis:* Durch Abb. 6.19 wird anhand von Beispielen gezeigt, dass alle  $2^3 = 8$  Kombinationen tatsächlich vertreten sind.  $\square$

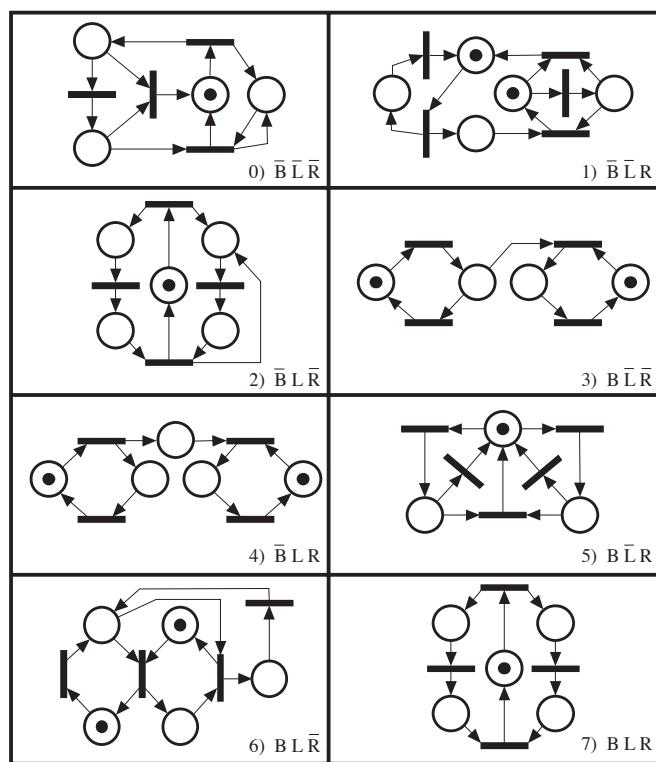


Abbildung 6.19: Beschränktheit (B), Lebendigkeit (L) und Reversibilität (R) sind unabhängige Eigenschaften

### 6.2.3 Das Erreichbarkeitsproblem

Das *Erreichbarkeitsproblem* ist das Problem, für eine Markierung zu entscheiden, ob sie im Erreichbarkeitsgraphen vorkommt:

**Gegeben:** Ein P/T-Netz  $(\mathcal{N}, \mathbf{m}_0)$  und eine Markierung  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^P$ .

**Frage:** Gilt  $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m}_0)$ ?

Das Überdeckbarkeitsproblem fordert nicht das exakte Erreichen einer Markierung, sondern nur das Erreichen einer Markierung, die mindestens so groß ist wie eine vorgegebene:

**Gegeben:** Ein P/T-Netz  $(\mathcal{N}, \mathbf{m}_0)$  und eine Markierung  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^P$ .

**Frage:** Gibt es eine Markierung  $\mathbf{m}' \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m}_0)$  mit  $\mathbf{m}' \geq \mathbf{m}$ ?

Das Erreichbarkeitsproblem ist (sogar für unbeschränkte) P/T-Netze entscheidbar. Der Beweis ist jedoch aufgrund seines enormen Umfangs Spezialveranstaltungen vorbehalten.

**Satz 6.24 (Mayr, 1984)** *Das Erreichbarkeitsproblem ist auch für unbeschränkte P/T-Netze entscheidbar.*

Die bekannten Algorithmen für das Erreichbarkeitsproblem für beliebige P/T-Netze konstruieren eine abgewandelte Form des Überdeckungsgraphen (s. Abschnitt 7.2) und haben daher eine Laufzeit, die auch bei Fällen endlicher Erreichbarkeitsmengen *keine* primitiv rekursive Funktion der Eingabegröße mehr ist. Dies gilt auch für andere Modelle als Petrinetze, sofern sie ein entsprechend nebenläufiges Verhalten darzustellen erlauben. Für beschränkte Netze ist es dagegen stets möglich, den Erreichbarkeitsgraphen zu konstruieren. Das Erreichbarkeitsproblem ist daher für beschränkte Netze offensichtlich entscheidbar. Die Komplexität ist aber enorm:

**Satz 6.25** *Das Erreichbarkeitsproblem für beschränkte P/T-Netze ist entscheidbar, benötigt jedoch mindestens exponentiell viel Platz.*

Eine untere Schranke  $NSpace(2^{O(n)})$  wurde von Lipton 1976 bewiesen.

Auch für syntaktisch stark eingeschränkte Netze, wie *1-konservative Netze*, sind hohe Analysekomplexitäten bekannt.

**Definition 6.26** *Ein P/T-Netz  $\mathcal{N}$  heißt konservativ, wenn es keine multiplen Kanten besitzt (d.h. stets  $W(x, y) \leq 1$  gilt) und eine Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  existiert, für die gilt:*

$$\forall t \in T : \sum_{p \in \bullet t} f(p) = \sum_{p \in t^\bullet} f(p).$$

*Netze, bei denen  $f(p) = 1$  für alle  $p \in P$  ist, heißen 1-konservativ und es gilt dann automatisch:  $\forall t \in T : |t^\bullet| = |\bullet t|$ .*

Das Erreichbarkeitsproblem ist aber selbst für beschränkte, ja selbst für 1-konservative P/T-Netze komplex.

**Satz 6.27** Das Erreichbarkeitsproblem für 1-konservative P/T-Netze ist  $\mathcal{PSPACE}$ -vollständig.

Nur in wenigen Teilklassen der allgemeinen P/T-Netze findet man  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit und in noch wenigeren sogar deterministische Verfahren, die die Erreichbarkeitsfrage in Polynomzeit lösen.

Ein P/T-Netz  $\mathcal{N}$  heißt *azyklisch*, wenn der Netzgraph keine Zyklen enthält.

**Satz 6.28** Das Erreichbarkeitsproblem für azyklische P/T-Netze ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

Ohne Beweis geben wir folgendes Ergebnis an:

**Satz 6.29** Das Äquivalenzproblem ist unentscheidbar, d.h. es ist unentscheidbar, ob zwei gegebene P/T-Netze  $\mathcal{N}_1$  und  $\mathcal{N}_2$  die gleiche Erreichbarkeitsmenge haben, d.h. ob  $\mathbf{R}(\mathcal{N}_1) = \mathbf{R}(\mathcal{N}_2)$  gilt.

Einen guten Überblick über weitere Komplexitätsresultate zu Algorithmen und Problemen bei Petrinetzen ist bei Esparza und Nielsen (1994) zu finden.

## 6.3 Prozesse von Petrinetzen

Der Erreichbarkeitsgraph beschreibt eine zustandsorientierte Sichtweise auf das Verhalten eines Systems. Allerdings ist es nicht möglich, den Marken eine Individualität zuzusprechen. Betrachte die Abb. 6.20. In der Entwicklung durch die Schaltfolge

$$p_1 + p_1 \xrightarrow{t_1} p_1 + p_2 \xrightarrow{t_2} p_1 + p_1$$

ist nicht zu erkennen, welche Marke  $p_1$  (von den zwei möglichen) zum Schalten von  $t_1$  genutzt wurde. Die Struktur von Markierungen erlaubt keine Unterscheidung von Marken, sondern drückt nur ihre Multiplizität aus.

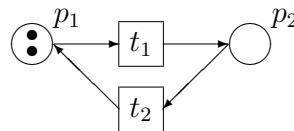


Abbildung 6.20: Ein Beispielnetz

Im Gegensatz dazu berücksichtigt die Prozess-Semantik auch die Historie der Marken. Betrachte das Netz in Abb. 6.20: Eine Verlängerung des Prozesses aus Abb. 6.21(a) kann an zwei verschiedenen Stellen stattfinden, da das Netz nicht 1-sicher ist.<sup>5</sup> Es ergeben sich die Prozesse in Abb. 6.21(b) und (c). Prozesse unterscheiden die beiden Fortsetzungen, da beide Marken unterscheidbar sind.

<sup>5</sup> Die Stellen der Prozessnetze aus Abb. 6.21 sind jeweils mit der Stelle des Netzes aus Abb. 6.20 beschriftet, auf die sie abgebildet werden.

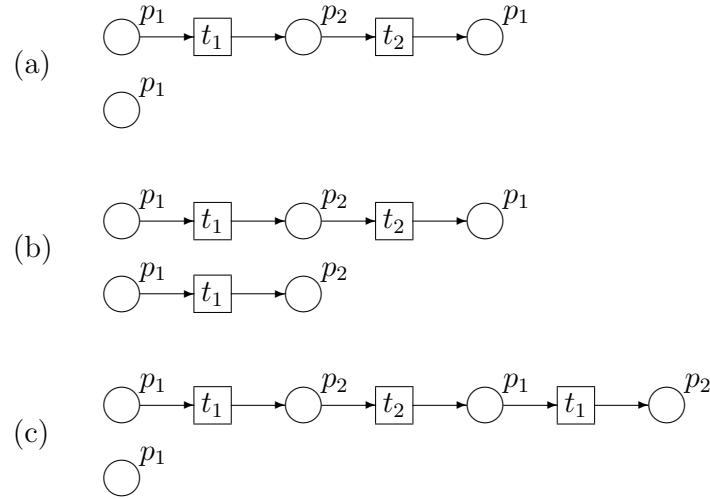


Abbildung 6.21: Prozesse: (a) Grundprozess,  
 (b) Verlängerung des Prozesses – erste Variante und  
 (c) Verlängerung des Prozesses – zweite Variante

### 6.3.1 Ereignis- und Kausalnetze

Die Prozesse eines Netzes sind Kausalnetze. Die abgeschwächte Form von Kausalnetzen sind *Ereignisnetze* (engl. „occurrence nets“), die – im Gegensatz zu Kausalnetzen – noch vorwärtsverzweigende Stellen erlauben, beispielsweise um Systemkonflikte in Prozessen (engl. „branching processes“) darzustellen [Eng91].

**Definition 6.30** Ein Petrinetz  $N = (B, E, F)$  heißt Ereignisnetz, gdw. der transitive Abschluss  $F^+$  azyklisch ist und für alle  $b \in B$  auch  $|{}^\bullet b| \leq 1$  gilt. Gilt zusätzlich noch  $|b^\bullet| \leq 1$ , so ist  $N$  ein Kausalnetz.

Für ein Ereignisnetz  $N = (B, E, F)$  definiere die Ordnungen  $<, \leq \subseteq (B \cup E)^2$  durch  $< := F^+$  und  $\leq := F^*$ . Die Menge der Vorgänger eines Elements  $y \in B \cup E$  ist  $\downarrow y := (\_ < y) := \{x \mid x < y\}$ . Das Ereignisnetz  $N$  heißt *vorgänger-endlich*, wenn für jedes  $b \in B$  die Vorgängermenge  $(\_ < b)$  endlich ist.

Da ein Ereignisnetz vorwärtsverzweigt, können Netzelemente in Konflikt stehen, nämlich dann, wenn eine Stelle  $b \in B$  existiert, von der zwei Konflikteneignisse  $e_1, e_2 \in b^\bullet$  ausgehen. Dies wird durch die symmetrische *Konfliktrelation*  $\# \subseteq (B \cup E)^2$  beschrieben:

$$x \# y \iff \exists b \in B : \exists e_1, e_2 \in b^\bullet : e_1 \neq e_2 \wedge e_1 \leq x \wedge e_2 \leq y$$



Kausalnetze sind demnach immer konfliktfrei:  $\# = \emptyset$ .

Sei  $R \subseteq A \times A$  eine symmetrische, reflexive Relation.  $K \subseteq A$  heißt *Klique* bezüglich  $R$ , gdw. alle Elemente in Relation stehen, d.h. für alle  $x, y \in K$  gilt  $x R y$ . Eine maximale Klique heißt *Bezirk*. Die Menge aller Bezirke von  $R$  wird durch  $BEZ(R)$  notiert.

Sei die Relation  $<$  gegeben. Die symmetrischen und reflexiven Relationen **li** und **co** sind definiert als:

$$\mathbf{li} := < \cup <^{-1} \cup id_A \quad \text{und} \quad \mathbf{co} := \bar{\mathbf{li}} \cup id_A$$

Die Menge der Bezirke bezüglich **li** werden als *Linien*, die Bezirke bezüglich **co** als *Schnitte* bezeichnet.

### 6.3.2 Prozesse

Am Anfang dieses Kapitels haben wir das dynamische Verhalten (auch Ablauf genannt) eines P/T-Netzes durch eine Folge von Transitionen dargestellt. In einem Prozess (auch verteilter Ablauf genannt) wird die Ausführung einer Transition durch eine Transition repräsentiert zusammen mit ihrem Vor- und Nachbereich und den verbindenden Pfeilen. In entsprechender aber umgekehrter Weise wurden die Aktionen von Abbildung 6.4 auf Seite 89 zu dem Netz in Abbildung 6.5 komponiert. Nun gehen wir von dem Netz aus und bilden die Aktionen, was dann zu einem Prozess in Form eines Kausalnetzes führt. Dabei wird wie in Abbildung 6.22 (a) ein Platz  $p$  mit  $k$  Marken durch  $k$  verschiedene

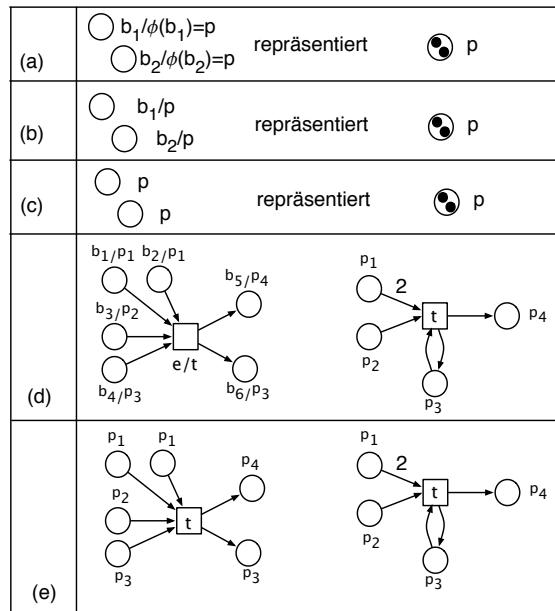


Abbildung 6.22: Aktion einer Transition

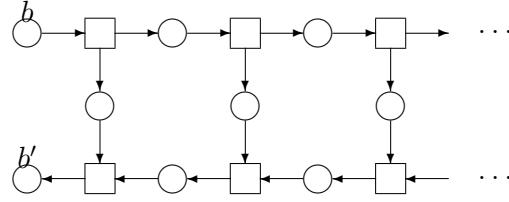


Abbildung 6.23: Ein unendlicher, nicht vorgänger-endlicher Prozess

Plätze  $b_i$  mit dem Etikett  $\phi(b_i) = p$  dargestellt. Die  $b_i$  sind also die eindeutigen Bezeichner der Plätze des Kausalthnetzes, während die Etikette  $\phi(b_i)$  nicht unbedingt eindeutig sein müssen. Abkürzend schreiben wir dafür auch  $b_i/p$  wie in (b) oder einfach nur  $p$  wie in (c) (und auch schon in Abbildung 6.21). Eine Transition  $t$  wird dann wie in (d) mit ihrem Vorbereich  $\bullet t$  und ihrem Nachbereich  $t^\bullet$  dargestellt, wobei der Platz entsprechend dem Kantengewicht  $W(p, t)$  bzw.  $W(t, p)$  mehrfach dargestellt wird. Vor- und Nachbereich sind hier immer disjunkt, da sie die Lage der Marke vor bzw. nach dem Schalten darstellen. Da in Abbildung 6.22 (d) der Platz  $p_3$  sowohl im Vor- als auch im Nachbereich von  $t$  liegt, entstehen dazu in der zugehörigen Aktion links daneben zwei Plätze  $b_4/p_3$  und  $b_6/p_3$  was die Marke in  $p_3$  vor und nach dem Schalten repräsentiert.

In Abbildung 6.27 (b) ist dieser Weise ein Prozess des Netzes aus Abb. 6.26 konstruiert worden. Eine auf einer solchen Konstruktion basierende Prozessdefinition folgt in Definition 6.32. Zunächst wird jedoch eine Definition behandelt, bei der das Etikett eines Platzes  $\phi(p)$  oder einer Transition  $\phi(t)$  explizit als Abbildung vorkommt.

Nach [BM84] wird ein Prozess (engl. „run“) eines Netzes  $N$  definiert als ein Kausalthnetz  $R = (B, E, F_R)$  zusammen mit einem Abbildungspaar  $\phi = (\phi_P : B \rightarrow P, \phi_T : E \rightarrow T)$ . Diese Abbildung heißt *Faltung* und ist auch eine Faltung im Sinne von Definition 6.10, falls die Kantengewichte höchstens den Wert 1 haben.

Kausalthnetze, die einen Prozess eines P/T-Netzes darstellen sollen, müssen vorgänger-endlich sein, denn nur dann kann eine Bedingung in endlicher Zeit realisiert werden. Abbildung 6.23 zeigt einen nicht vorgänger-endlichen Kausalthnetz, da Beispielsweise  $b'$  unendlich viele Vorgänger besitzt. Ist der Prozesse  $R$  vorgänger-endlich, so kann er als Grenzwert endlicher Prozesse dargestellt werden.

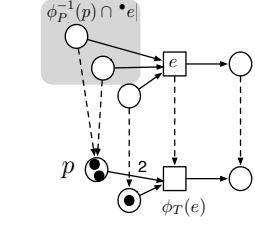
Um die Darstellung zu vereinfachen, beschränken wir die folgende Darstellung auf  $T$ -schlichte Netze. Sind die Netze  $T$ -schlicht, gilt  $\bullet t \neq \emptyset$ , d.h. es werden keine Marken aus dem „Nichts“ erzeugte.  ${}^\circ R$  bzw.  ${}^o R$  bezeichnen die minimalen bzw. maximalen Elemente eines Ereignisnetzes.

**Definition 6.31** Sei  $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$  ein P/T-Netz,  $R = (B, E, F_R)$  ein vorgängerendliches Ereignisnetz und  $\phi$  ist ein Abbildungspaar aus  $\phi_P : B \rightarrow P$  und  $\phi_T : E \rightarrow T$ , dann ist  $(R, \phi)$  ein Verzweigungsprozess des Netzes  $N$ , falls die folgenden Eigenschaften gelten:

1. Die Struktur von  $R$  „passt“ zu  $N$ :  $(x, y) \in F_R \Rightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in F$
2. Die Stellen  ${}^\circ R$  beschreiben  $\mathbf{m}_0$ :  $\forall p \in P : \mathbf{m}_0(p) = |\phi^{-1}(p) \cap {}^\circ R|$

3. Die Prozessabbildung  $\phi$  ist verträglich mit der Kantengewichtung:

$$\begin{aligned} \forall e \in E \quad \forall p \in \bullet \phi_T(e) : W(p, \phi_T(e)) = |\phi_P^{-1}(p) \cap \bullet e| \\ \forall e \in E \quad \forall p \in \phi_T(e)^\bullet : W(\phi_T(e), p) = |\phi_P^{-1}(p) \cap e^\bullet| \end{aligned}$$



Ist  $R$  zudem noch ein Kausalnetz, so heißt  $(R, \phi)$  ein Prozess des Netzes  $N$ .

Die Menge aller Verzweigungsprozesse von  $N$  wird mit  $BranProc(N)$  bezeichnet, die Menge aller Prozesse mit  $Proc(N)$ .

Ist  $R$  ein Prozess, so muss  $R$  ein endlich verzweigendes Kausalnetz sein. Im Beispielnetz von Definition 6.31 ist  $\mathbf{m}_0(p) = 2 = |\phi^{-1}(p) \cap {}^{\circ}R|$  und  $W(p, \phi_T(e)) = 2 = |\phi_P^{-1}(p) \cap \bullet e|$ . Als Alternative zu Definition 6.31 kann ein Prozess  $(R, \phi)$  auch durch eine Konstruktion erzeugt werden, die sich an den Schaltvorgängen im Netz  $N$  orientiert. Die Konstruktion erzeugt aus einem bestehenden Prozess induktiv einen weiteren, indem zum alten Prozessnetz – im Einklang mit dem Netz  $N$  – weitere Transitionen und Stellen hinzugefügt werden.

**Definition 6.32** Sei  $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$  ein  $P/T$ -Netz.

1. Sei  $C$  eine Menge mit  $\phi(c) \in P$  derart, dass  $\phi^{-1}(p) = \mathbf{m}_0(p)$  für alle  $p \in P$ .  $((C, \emptyset, \emptyset), \phi)$  ist ein Prozess (Prozessanfang). Für das Netz in Abbildung 6.24 (a) ist dies z.B. die Menge  $c_1, c_2, c_3, c_4$  mit  $\phi(c_1) = p_1, \phi(c_2) = p_1, \phi(c_3) = p_1, \phi(c_4) = p_4$  in Abbildung 6.24 (b). Streicht man hier die anderen Transitionen und Plätze, so erhält man den Anfangsprozess, der der Anfangsmarkierung entspricht.
2. Sei  $(R, \phi) = ((B, E, F_K), \phi)$  ein (schon konstruierter) Prozess und  $t \in T$  eine Transition. Sein maximaler Schnitt  $R^\circ$  enthalte für jeden Eingangsstelle  $p \in \bullet t$  mindestens  $W(p, t)$  Elemente  $b_i$  mit  $\phi(b_i) = p$ . Für den Prozess in Abbildung 6.24 (b) und die Transition  $c$  von (a) ist dies der Fall:  $R^\circ$  enthält 2 Elemente  $b_i$  mit  $\phi(b_i) = p_1$  und ein Element  $b_i$  mit  $\phi(b_i) = p_4$ . Es werden (außer dem Anfangsprozess) hier nur noch die Etikette angeben.
3. Der Prozess wird nun verlängert, indem eine neue Transition  $e$  mit  $\phi(e) = t$  eingefügt wird, die die unter 2. genannten Plätze als Eingangsplätze enthält. Als Ausgangsplätze werden für jedes  $p \in t^\bullet$  eine Anzahl von  $W(t, p)$  neuen Plätzen  $b_i$  mit  $\phi(b_i) = p$  angefügt. Dies ist für das Beispiel in Abbildung 6.24 (c) ausgeführt (hier ist  $t = c$  und  $p = p_3$ ).

Der in Abbildung 6.24 (c) gegebene Prozess kann verlängert werden (oder kürzer ausfallen). Wie die Abbildung 6.24 (d) zeigt, kann er jedoch auch ganz anders beginnen. Man beachte, dass die Transitionen  $a$  und  $c$  in (c) auf einer Linie liegen, also sequentiell schalten, während sie in (d) auf einem Schnitt liegen, d.h. nebenläufig schalten!

Damit beide Definitionen korrespondieren, ist für unendliche Prozesse nach Definition 6.31 die Eigenschaft der Vorgängerendlichkeit notwendig. Nach [GR83] ist jeder Prozess nach der Konstruktion in Definition 6.32 auch ein Prozess im Sinne der Definition 6.31 – und umgekehrt.

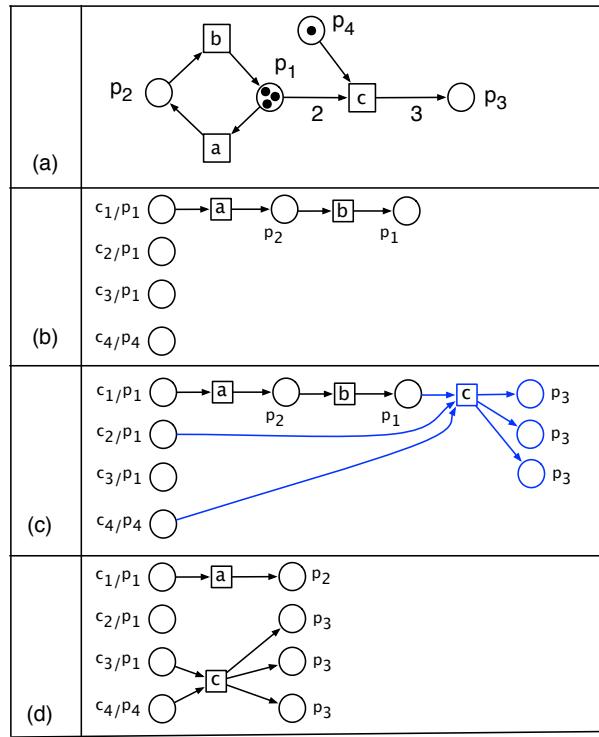


Abbildung 6.24: Zur 2. Prozessdefinition

Prozesse sind ausdrucksstark genug, um Nebenläufigkeit von Permutierbarkeit zu unterscheiden. So besitzt das Netz  $N_1$  aus Abb. 6.25 den in Abb. 6.27 (a) dargestellten Prozess, während das Netz  $N_2$  aus Abb. 6.26 die in Abb. 6.27 (b) und (c) dargestellten Prozesse besitzt. Die Netzknoten sind wieder nur mit ihrem Etikett, d.h. dem Bild der Abbildung  $\phi$  beschriftet.

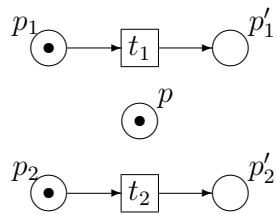


Abbildung 6.25: Das Petrinetz  $N_1$

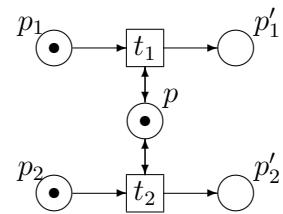


Abbildung 6.26: Das Petrinetz  $N_2$

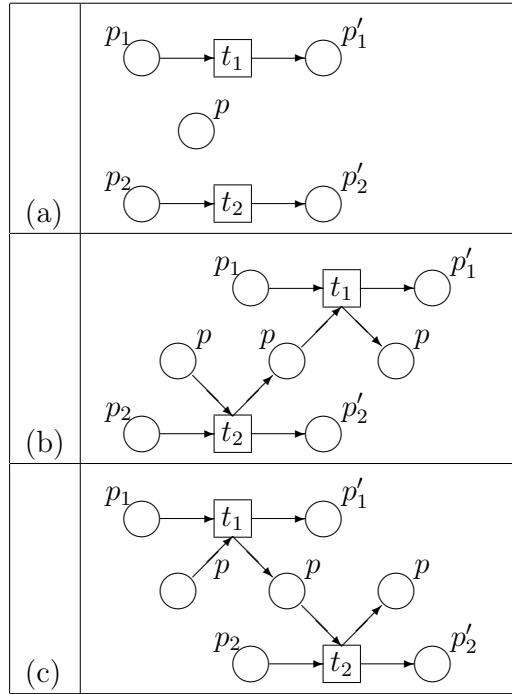


Abbildung 6.27: (a) Prozess des Netzes  $N_1$  aus Abb. 6.25 sowie  
 (b) und (c) Prozesse des Netzes  $N_2$  aus Abb. 6.26

Betrachtet man die Schnitte und Linien bezüglich **li** und **co**, die sich aus der Ordnung  $<$  ergeben, so ist es sinnvoll, diese auf reine Stellen bzw. auf reine Transitionsmengen zu beschränken.

Die Menge der  $P$ -Schnitte eines Prozesses  $R$  wird im Folgenden durch  $\mathcal{C}_R$  notiert. Insbesondere ergibt sich die Menge  $\mathcal{C}_R$  aller Stellen-Schnitte, kurz:  $P$ -Schnitte, als die Menge der möglichen Markierungen eines Prozesses:

**Theorem 6.33** Sei  $(R, \phi) \in \text{Proc}(N)$  ein Prozess von  $N$ , dann ist jeder Stellenschnitt  $C$  eine erreichbare Markierung:

$$C \in \mathcal{C}_R \Rightarrow \phi(C) \in RS(N)$$

Die Transitions-Schnitte, kurz:  $T$ -Schnitte, sind die nebenläufigen Transitionen.