

FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Präsenzlösung 4: LTL

Präsenzteil am 4./5. 11. – Abgabe am 11./12. 11. 2013

Präsenzaufgabe 4.1:

1. Betrachte das TS aus Abb. 2.8. Betrachte die ω -Sprache $L = y^\omega$ mit $y = (s_0 s_1 s_2 s_4)$. Gib die Ettikettensprache $E_S(L)$ an!

Lösung: $E_S(L) = z^\omega$ mit $z = (\{\} \{\alpha_1\} \{\alpha_1, \alpha_2\} \{\})$

2. Betrachte das TS aus Abb. 2.8. Definiere die Aussagen $\alpha_4 = \text{„In der Tasse ist Tee.“}$ und $\alpha_5 = \text{„In der Tasse ist Kaffee.“}$. Modifiziere das TS so, dass diese beiden Aussagen sinnvoll integriert werden. Gib eine LTL-Formel an, die Folgendes beschreibt: Immer, wenn Kaffee ausgewählt wurde, befindet sich kurz danach auch Kaffee in der Tasse (und nicht etwa Tee!).

Lösung: Zwischen s_4 und s_0 wird ein weiterer Zustand s_6 eingefügt, der über die Aktionen „Tee einfüllen“ erreicht und über eine neue Aktionen „Tasse entnehmen“ verlassen werden kann. Analog wird zwischen s_5 und s_0 ein Zustand s_7 eingefügt, der die Kaffee-Entnahme modelliert. Mit $E_S(s_6) = \{\alpha_4\}$ und $E_S(s_7) = \{\alpha_5\}$ sind die beiden Aussagen integriert.

Zwei verschiedene Interpretationen der Aufgabenstellung könnten als LTL-Formeln folgendermaßen aussehen:

$\Box(\alpha_3 \implies (\neg\alpha_4 \text{ U } \alpha_5))$ betont die Bedingung, dass zwischen dem Wählen von Kaffee und dem In-der-Tasse-Befinden des Kaffees sich auf keinen Fall Tee in der Tasse befinden darf.

$\Box(\alpha_3 \implies \bigcirc\bigcirc\alpha_5)$ betont das *kurz danach*, indem genau zwei Zustände später der Kaffee in der Tasse sein muss.

3. Sei $AP = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Geben Sie die Menge $L^\omega(f)$ (vgl. Def. 3.3) für folgende LTL-Formeln an! (Beachten Sie, dass die Sprache $L^\omega(f)$ völlig unabhängig vom TS aus Abb. 2.8 ist.)

(a) $f = \Box\alpha_2$

(b) $f = \Diamond(\alpha_1 \wedge \bigcirc\neg\alpha_2)$

Sie können dabei die folgenden Mengen verwenden ($\alpha \in AP$ und $A \subseteq AP$):

$$\text{Obermengen}(A) := \{X \subseteq AP \mid A \subseteq X\}$$

$$\text{Obermengen}(\alpha) := \text{Obermengen}(\{\alpha\})$$

$$\text{Obermengen}(\neg\alpha) := \{X \subseteq AP \mid \alpha \notin X\}$$

Rechnen Sie die Mengen für die konkreten, von Ihnen benötigten α_i aus.

Lösung: $L^\omega(f)$ ist hier eine unendliche Folgensprache über den logischen Atomen AP , d.h. eine Teilmenge von $\mathcal{P}(AP)^\omega$.

- (a) Es ist $L^\omega(\Box\alpha_2) = \text{Obermengen}(\alpha_2)^\omega = (\{\{\alpha_2\}, \{\alpha_2, \alpha_1\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3\}\})^\omega$. (Der Lösungsansatz steht auch auf der letzten Vorlesungsfolie des LTL-Abschnitts.)

- (b) Es ist $L^\omega(\Diamond(\alpha_1 \wedge \bigcirc\neg\alpha_2)) = \mathcal{P}(AP)^* \cdot \text{Obermengen}(\alpha_1) \cdot \text{Obermengen}(\neg\alpha_2) \cdot \mathcal{P}(AP)^\omega$
 $= (\{\{\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\})^*$
 $\cdot \{\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\} \cdot \{\{\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}\}$
 $\cdot (\{\{\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\})^\omega$

Präsenzaufgabe 4.2: Beweisen Sie die Äquivalenzen in LTL:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}f &\equiv \text{True} \mathbf{U} f \\ \mathbf{G}f &\equiv \neg(\mathbf{F}\neg f)\end{aligned}$$

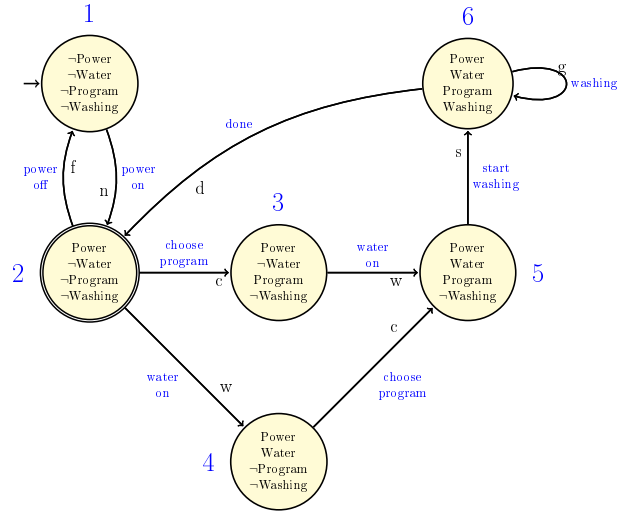
Lösung: Mit Definition 3.3 (S. 35) gilt:

$$\begin{aligned}& \alpha \models \mathbf{F}f && \text{Def. 3.3.8} \\ \Leftrightarrow & \exists k \geq 0 : \alpha^k \models f && g \equiv (g \wedge \top) \\ \Leftrightarrow & \exists k \geq 0 : ((\alpha^k \models f) \wedge \top) && \top \equiv (\forall 0 \leq j < k : \alpha^j \models \top) \\ \Leftrightarrow & \exists k \geq 0 : ((\alpha^k \models f) \wedge (\forall 0 \leq j < k : \alpha^j \models \top)) && \text{Def. 3.3.10} \\ \Leftrightarrow & \alpha \models \top \mathbf{U} f \\ \text{und:} & && \\ & \alpha \models \mathbf{G}f && \text{Def. 3.3.9} \\ \Leftrightarrow & \forall k \geq 0 : \alpha^k \models f && g \equiv \neg \neg g \\ \Leftrightarrow & \neg \neg (\forall k \geq 0 : \alpha^k \models f) && \neg \forall g \equiv \exists \neg g \\ \Leftrightarrow & \neg (\exists k \geq 0 : \alpha^k \not\models f) && \text{Def. 3.3.4} \\ \Leftrightarrow & \neg (\exists k \geq 0 : \alpha^k \models \neg f) && \text{Def. 3.3.8} \\ \Leftrightarrow & \alpha \not\models \mathbf{F}\neg f && \text{Def. 3.3.4} \\ \Leftrightarrow & \alpha \models \neg \mathbf{F}\neg f\end{aligned}$$

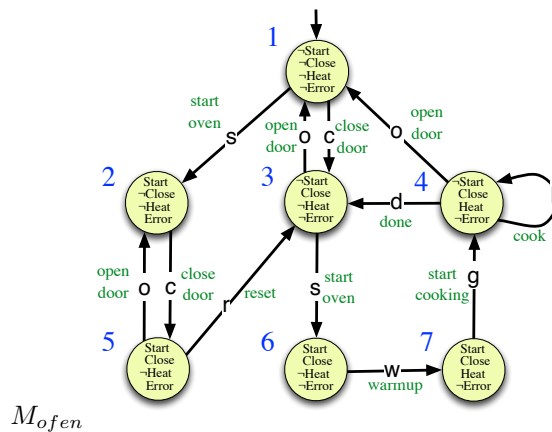
Beachten Sie, dass einige der auf der rechten Seite angegebenen benutzten Äquivalenzen sich nicht auf die LTL Formel beziehen, sondern sozusagen auf die Metaebene. So bezieht sich bspw. die im zweiten Schritt bei der zweiten Formel benutzte Äquivalenz $g \equiv \neg \neg g$ darauf, dass die ganze Formel $\forall k \geq 0 : \alpha^k \models f$ wahr oder falsch sein kann und somit als aussagenlogische Formel interpretiert werden kann. Für diese gilt dann die Äquivalenz.

Übungsaufgabe 4.3: Betrachten Sie die Kripkestruktur $TS_{Waschmaschine}$, welches eine Systembeschreibung einer Waschmaschine darstellt. Die Transitionsbezeichner und negierten Aussagen in den Etiketten sind optional und dienen nur der Verdeutlichung.

von
6



1. Betrachten Sie $TS_{Waschmaschine}$ ohne Etiketten als Büchi-Automat mit 2 als einzigem Endzustand und Alphabet $\Sigma = \{c, d, f, g, n, s, w\}$. Geben Sie die Mengen $L(TS_{Waschmaschine})$ bzw. $L^\omega(TS_{Waschmaschine})$ als regulären bzw. ω -regulären Ausdruck an. Hinweis: Wie oft, kann es hilfreich sein, zuerst einen Pfad vom Anfangs- zum Endzustand zu betrachten und dann alle möglichen Zyklen anzufügen.
2. Betrachten Sie $TS_{Waschmaschine}$ mit Etiketten als Kripke-Struktur M . Bestimmen Sie die Menge $SS(M)$ aller Pfade (Def. 2.18) als ω -regulären Ausdruck. Das Alphabet dieses Ausdrucks ist also $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Bestimmen Sie die Etikettensprache $E_S(SS(M))$ (Def. 2.18) als ω -regulären Ausdruck. Das Alphabet dieses Ausdrucks besteht also aus den Etiketten der Zustände. Da alle Zustände verschiedene Etikette haben, können Sie abkürzend die Zustandsbezeichner als Bezeichner der Etikette wählen.
4. Betrachten Sie jetzt die vollständige Kripkestruktur M_{Ofen} des Mikrowellen-Ofens:



Für eine Formel α sei $Sat(\alpha)$ die Menge der Zustände, in denen α gilt. Bestimmen Sie $Sat(Start \wedge Error)$ sowie $Sat(Heat)$. Prüfen Sie dann, ob die LTL-Formel

$$\mathbf{GF}(Start \wedge Error \Rightarrow \mathbf{F}Heat)$$

im Anfangszustand 1 gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung, d.h. entweder die Gültigkeit beweisen oder eine Rechnung als Gegenbeispiel angeben.

5. Prüfen Sie ebenso, ob die LTL-Formel

$$f = \mathbf{FG}(Error \wedge Start)$$

im Anfangszustand 1 gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung, d.h. entweder die Gültigkeit beweisen oder eine Rechnung als Gegenbeispiel angeben. Geben Sie zudem einen Pfad π an, für den diese Formel gilt, d.h. für den $M_{ofen}, \pi \models f$ gilt.

Übungsaufgabe 4.4: Betrachten Sie die Kripkestruktur M_{ofen} aus Aufgabe 4.3. und den unendlichen Zustandspfad $\pi = s_0 s_{i_1} s_{i_2} \dots$ aus der Menge $13(125253)^\omega$.

Geben Sie an, ob für die folgenden LTL-Formeln f jeweils $M_{ofen}, \pi \models f$ und allgemeiner $M_{ofen} \models f$ gilt.

von
6

Anmerkung: Wie im Skript werden hier die temporalen Operatoren in der Form \circ, \diamond und \square benutzt, da Sie auf beide Formen auch in der Literatur treffen werden.

f	$M_{ofen}, \pi \models f$	$M_{ofen} \models f$
$\circ \neg(Start \wedge Heat)$		
$\square \neg Start$		
$\square(Start \Rightarrow Close)$		
$\square \diamond(Heat \vee Error \vee \neg Start)$		
$\diamond((Start \wedge Close \wedge \neg Error) \mathbf{U} Heat)$		
$\square((Close \wedge \neg Heat \wedge Start) \Rightarrow \circ \circ \neg Heat)$		

Bisher erreichbare Punktzahl: 48