Rekurrenzgleichungen

Nachfolgend wollen wir zu einer Rekurrenzgleichung (auch: Rekursionsgleichung) eine geschloßene Form mittels der Substitutionsmethode bestimmen. Wir wollen ferner den Induktionsbeweis, der in der Vorlesung übersprungen wurde, führen.

Wir betrachten die folgende Rekurrenzgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 1 \\ 2T(n-1)+1 & \text{, falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Man beachte, dass, wenn oben z.B. $n-1$ für n eingesetzt wird, die Gleichung $T(n-1) = 2T((n-1)-1)+1 = 2T(n-2)+1$ entseht (entsprechend wenn man für n andere Werte z.B. $n-2$, $n-3$ usw. einsetzt). Damit folgt nun durch abwickeln:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-1)+1 \\
&= 2(2T(n-2)+1)+1 = 4T(n-2)+2+1 \\
&= 4(2T(n-3)+1)+2+1 = 8T(n-3)+4+2+1 \\
&= ... \\
&= 2^kT(n-k)+2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+2^0 \ (*) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\
&= \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile können wir dann $T(n) \in \Theta(2^n)$ schließen.

Zu beweisen ist noch die Zeile $(*)$, d.h. zu zeigen ist, dass nach k Abwicklungen mit $1 \leq k \leq n-1$ die Gleichung $T(n) = 2^kT(n-k)+2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+2^0 = 2^kT(n-k)+2^k-1$ entsteht (wobei $n > 1$ sei, da sonst keine Abwicklung möglich ist). Dies zeigt man per Induktion wie folgt: Der Induktionsanfang $(k = 1)$ ist bereits in der ersten Zeile obiger Abwicklung gezeigt worden und gilt damit. In der Induktionsannahme nehmen wir nun an, dass die Gleichung $T(n) = 2^kT(n-k)+2^k-1$ für ein $k \geq 1$ (und $k < n-1$) bereits gilt. Im Induktionsschritt folgt nun $T(n) = 2^kT(n-k)+2^k-1 = 2^k(2T(n-k-1)+1)+2^k-1 = 2^{k+1}T(n-(k+1))+2^k+2^k-1 = 2^{k+1}T(n-(k+1))+2^{k+1}-1$, was zu zeigen war.

Zu beachten ist hier, dass $(*)$ nur für k zwischen 1 und $n-1$ gilt (wir brauchen mindestens eine Abwicklung und für mehr als $n-1$ Abwicklungen macht die Aussage auch keinen Sinn, da dann $T(n-k)$ nicht mehr definiert ist). Dies wird bei anderen Rekurrenzgleichungen anders aussehen, da je nach Rekurrenzgleichungen die Anzahl der Abwicklungen unterschiedlich sein kann. Ferner ist in der Induktionsannahme k zwischen 1 und $n-2$ (nicht $n-1$), da wir ja wissen wollen, ob die Aussage für $k+1$ stimmt. $k+1$ darf aber (siehe ursprüngliche Behauptung) nicht grösser als $n-1$ werden. Dies ist gerade der Fall, wenn in der Induktionsannahme k höchstens $n-2$ wird.

Der Sinn des Induktionsbeweises ist es sich vor falsch vermuteten Parametrisierungen in der Zeile $(*)$ zu schützen. Hat man bspw. die Rekurrenzgleichung $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}$ so kann man nach zweimaliger Abwicklung ($T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2} = T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{4} + \frac{n}{2}$) vermuten, dass nach k-maliger Abwicklung $T(n) = T(\frac{n}{2k}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{2i}$ gilt. Hier wird der Induktionsbeweis aber nicht klappen (tatsächlich ist $T(n) = T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{2^i}$). Eine weitere Abwicklung hätte einen in diesem Fall bereits sehen lassen, dass die Vermutung nicht stimmt kann, i.A. aber ist dies nicht immer so leicht einsehbar und man sollte sich von der Richtigkeit der Vermutung $(*)$ stets durch eine Induktion überzeugen.

Version vom 31. Oktober 2010