

# FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

## Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

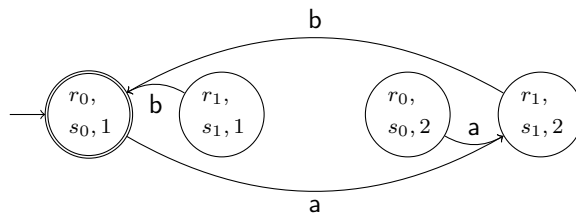
### Präsenzlösung 3: Produktsysteme, Bisimulation

Präsenzteil am 28./29.10. – Abgabe am 4./5.11.2013

#### Präsenzaufgabe 3.1:

1. Konstruieren Sie  $A_4$  gemäß Satz 1.21 zu den Büchi-Automaten  $A_1$  und  $A_2$  aus Beispiel 1.20. Bestimmen Sie  $L^\omega(A_4)$ .

**Lösung:** Es ergibt sich für  $A_4$ :  $L^\omega(A_4) = (ab)^\omega$



$L^\omega(A_4)$  entspricht genau der gesuchten Schnittmenge.

2. Bestimmen Sie zu Beispiel 1.20  $L(A_1)$ ,  $L(A_2)$ ,  $L(A_3)$  und  $L(A_4)$ . Diskutieren Sie die Übereinstimmung von  $L(A_3)$  und  $L(A_4)$  mit der Schnittmenge  $L(A_1) \cap L(A_2)$ .

**Lösung:** Die Sprachen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} L(A_1) &= (ab)^* \\ L(A_2) &= a \cdot (ba)^* \\ L(A_3) &= \emptyset \\ L(A_4) &= (ab)^* \\ L(A_1) \cap L(A_2) &= \emptyset \end{aligned}$$

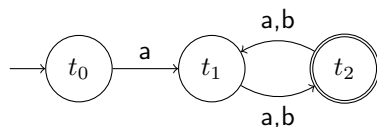
Die Schnittmenge  $L(A_1) \cap L(A_2)$  muss leer sein, weil  $A_1$  nur Wörter akzeptiert, die auf  $b$  enden,  $A_2$  aber nur solche, die auf  $a$  enden.  $L(A_4)$  entspricht also *nicht* der gesuchten Schnittmenge.

3. Konstruieren Sie einen Automaten  $B$ , der  $L(B) = \{w \in a \cdot (a+b)^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = 2n\}$  und zugleich  $L^\omega(B) = a \cdot (a+b)^\omega$  akzeptiert.

*Hinweis:* Sie benötigen nur 3 Zustände.

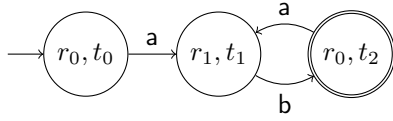
**Lösung:** Die akzeptierten Wörter müssen mit  $a$  beginnen, danach können die Buchstaben  $a$  und  $b$  in beliebiger Reihung folgen. Akzeptiert wird nach jedem zweiten Buchstaben (aber nicht das leere Wort).

$L(B)$  lässt sich auch umschreiben als:  $L(B) = a \cdot (a+b) \cdot [(a+b) \cdot (a+b)]^*$ .

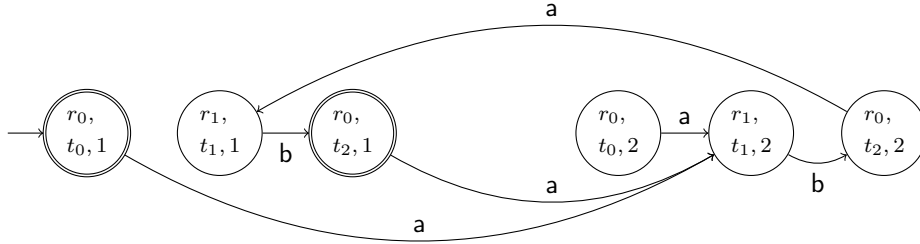


4. Konstruieren Sie die beiden Produktautomaten für  $L(A_1) \cap L(B)$  und  $L^\omega(A_1) \cap L^\omega(B)$ .

**Lösung:**  $L(A_{3.1.4}) = (ab)^+$  und  $L^\omega(A_{3.1.4}) = (ab)^\omega$ :



$L(A'_{3.1.4}) = (abab)^*$  und  $L^\omega(A'_{3.1.4}) = (ab)^\omega$ :



*Hinweis:* Aufgabenteile 5. und 6. sind optional.

5. Wandeln Sie das Verfahren aus Satz 1.8 ab: Vorausgesetzt werden nun zwei *vollständige* endliche Automaten  $A_1$  und  $A_2$ . Die Endzustandsmenge sei nun  $F_3 := \{(s, r) \mid s \in F_1 \vee r \in F_2\}$ . Alle anderen Verfahrensschritte bleiben unverändert.

Welche reguläre Sprache wird  $A_3$  akzeptieren (relativ zu  $L(A_1)$  und  $L(A_2)$  gesehen)? Überlegen Sie sich, wie Sie Ihre Vermutung beweisen könnten.

Lässt sich die Vermutung auf  $\omega$ -Sprachen übertragen?

*Gedächtnisstütze:* Def. Vollständigkeit:  $\forall q \in Q \forall x \in \Sigma \exists q' \in Q : (q, x, q') \in \delta$

**Lösung:**  $A_3$  akzeptiert nun die Vereinigung:  $L(A_3) = L(A_1) \cup L(A_2)$ .

*Beweis:*  $L(A_1) \subseteq L(A_3)$ : Sei  $w \in L(A_1)$ , d.h. es gibt eine Erfolgsrechnung  $s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \dots s_{n-1} \xrightarrow{a_n} s_n$  mit  $s_0 \in Q_1^0$  und  $s_n \in F_1$ . Da  $A_2$  vollständig ist, wird durch das Verfahren immer ein  $(s_i, r_i) \xrightarrow{a_{i+1}} (s_{i+1}, r_{i+1})$  in  $A_3$  erzeugt werden. Das Paar  $(s_n, r_n)$  ist wegen  $s_n \in F_1$  ein Endzustand in  $F_3$ . Somit existiert zu  $w$  auch eine Erfolgsrechnung in  $A_3$ .

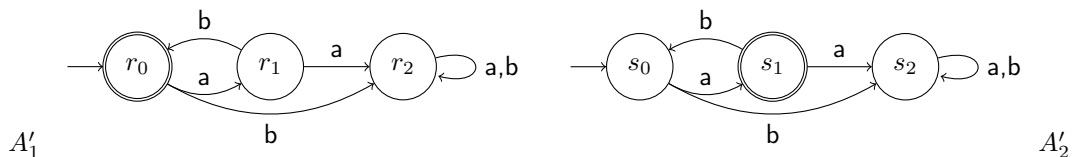
$L(A_2) \subseteq L(A_3)$ : Kann analog zu  $L(A_1)$  argumentiert werden.

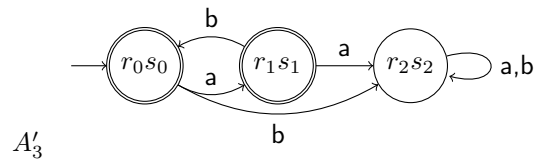
$L(A_3) \subseteq L(A_1) \cup L(A_2)$ : Sei  $w \in L(A_3)$ , d.h. es gibt eine Erfolgsrechnung  $(s_0, r_0) \xrightarrow{a_1} (s_1, r_1) \xrightarrow{a_2} (s_2, r_2) \dots (s_{n-1}, r_{n-1}) \xrightarrow{a_n} (s_n, r_n)$  mit  $s_0 \in Q_1^0$  und  $r_0 \in Q_2^0$ . Der Endzustand  $(s_n, r_n)$  geht auf  $s_n \in F_1$  oder auf  $r_n \in F_2$  zurück. Falls  $s_n \in F_1$ , können alle Zustandsbezeichner der Rechnung auf die erste Komponente projiziert werden, um eine Erfolgsrechnung in  $A_1$  zu erhalten. Falls  $r_n \in F_2$ , führt eine Projektion auf die zweite Komponente zu einer Erfolgsrechnung in  $A_2$ . Also wird  $w$  von  $A_1$  oder von  $A_2$  akzeptiert.

$\omega$ -Sprachen: Die Vermutung gilt gleichermaßen:  $L^\omega(A_3) = L^\omega(A_1) \cup L^\omega(A_2)$ . Der Beweis läuft analog zu den Sprachen über endlichen Wörtern.

6. Vervollständigen Sie die Automaten  $A_1$  und  $A_2$  aus Beispiel 1.20 und wenden Sie das Verfahren aus Teilaufgabe 5 darauf an.

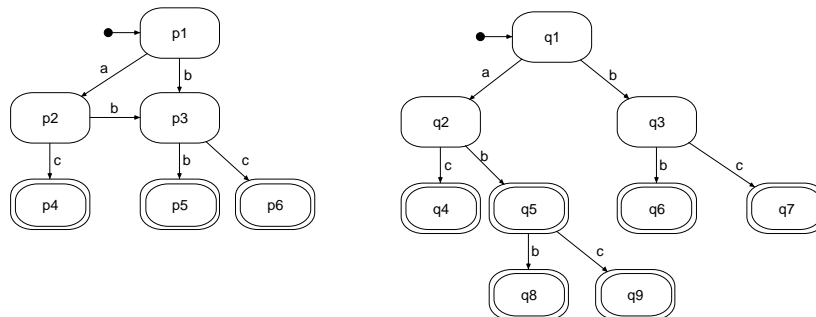
**Lösung:** Die vervollständigten Automaten sehen so aus:



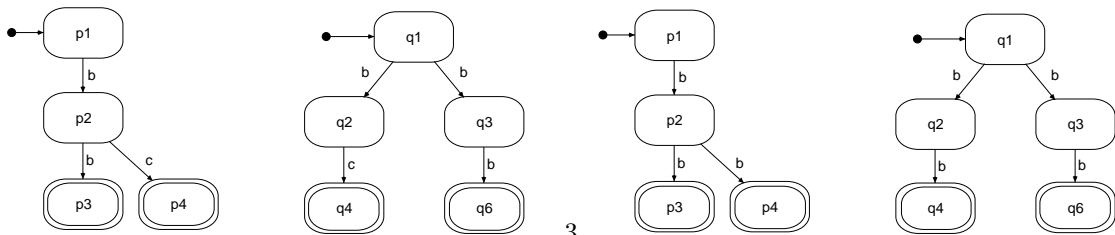


Es gilt  $L(A'_3) = (ab)^* + a \cdot (ba)^*$  und  $L^\omega(A'_3) = (ab)^\omega$

**Präsenzaufgabe 3.2:** Prüfen Sie, ob die folgenden Transitionssysteme bisimilar sind. Geben Sie die Bisimulationsrelation explizit an.



1.



2.

3.

**Lösung:**

1. Es bietet sich die folgende Relation an:

$$\{(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), (p_4, q_4), (p_3, q_5), (p_5, q_8), (p_6, q_9), (p_5, q_6), (p_6, q_7)\}$$

Einziger Nachteil: Das Paar  $(p_3, q_5)$ , denn nur einer ist Endzustand. Diese Relation eignet sich also nicht als Bisimulation. Es ist aber zu begründen, dass keine einzige Bisimulationsrelation existiert.

Anderer Ansatz: Die beiden Transitionssysteme sind nicht akzeptanzäquivalent (rechts gibt es die terminale Aktionsfolge  $ab$ , links nicht). Gemäß Satz 2.8 können nicht akzeptanzäquivalente TS auch nicht bisimilar sein.

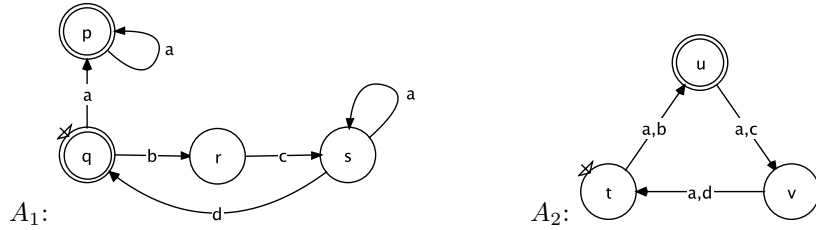
2. Dies ist der Klassiker für nicht bisimilare TS. Die Begründung läuft über die Eigenschaften aus Def. 2.4:

- Aus Bedingung a) folgt, dass das Paar  $(p_1, q_1)$  in  $\mathcal{B}$  enthalten sein muss (zu jedem Startzustand ist ein Partner erforderlich, der ebenfalls Startzustand ist).
- Wenn  $(p_1, q_1) \in \mathcal{B}$ , dann muss gemäß Bedingung b) auch  $(p_2, q_2) \in \mathcal{B}$  und  $(p_2, q_3) \in \mathcal{B}$  gelten.
- Beide Paare verletzen jeweils Bedingung b), denn in  $p_2$  ist Aktion  $b$  möglich, zu welcher  $q_2$  keine Entsprechung hat. Ebenso ist in  $p_2$  die Aktion  $c$  möglich, welche in  $q_3$  keine Entsprechung hat.

3. Die beiden TS sind trotz der strukturellen Ähnlichkeit zu Teil 2 bisimilar, da die jeweils 2. Aktion gleich ist.  $\mathcal{B} = \{(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_2, q_3), (p_3, q_4), (p_3, q_6), (p_4, q_4), (p_4, q_6)\}$

**Übungsaufgabe 3.3:** Schnitt von  $\omega$ -Sprachen.

von
6



1. Bestimmen Sie  $L(A_1)$ ,  $L(A_2)$ ,  $L^\omega(A_1)$  und  $L^\omega(A_2)$ .
2. Konstruieren Sie die initiale Zusammenhangskomponente des Produktautomaten  $A_3$  im Sinne von Satz 1.8 bzw. Lemma 1.19. *Hinweis:* Sie benötigen 8 Zustände.
3. Bestimmen Sie  $L(A_3)$  und  $L^\omega(A_3)$ . Vergleichen Sie  $L(A_3)$  mit  $L(A_1) \cap L(A_2)$  und  $L^\omega(A_3)$  mit  $L^\omega(A_1) \cap L^\omega(A_2)$ .
4. Konstruieren Sie die initiale Zusammenhangskomponente des Produktautomaten  $A_4$  im Sinne von Satz 1.21.
5. Bestimmen Sie  $L(A_4)$  und  $L^\omega(A_4)$ . Vergleichen Sie  $L(A_4)$  mit  $L(A_1) \cap L(A_2)$  und  $L^\omega(A_4)$  mit  $L^\omega(A_1) \cap L^\omega(A_2)$ .

**Übungsaufgabe 3.4:** Prüfen Sie für alle Zweierkombination der folgenden vier Transitionssysteme, ob diese bisimilar sind. Geben Sie für die bisimilaren Kombinationen die Bisimulationsrelation explizit an und weisen sie für eine davon nach, dass die relationierten Zustände die Definition der Bisimulation erfüllen. Zeigen sie für zwei der nicht-bisimilaren Kombinationen, dass keine Bisimulationsrelation angegeben werden kann. *Hinweis:* Sie können sich Arbeit sparen, wenn sie beachten, dass folgende Symmetrie gilt:  $TS_1 \Leftrightarrow TS_2$  impliziert  $TS_2 \Leftrightarrow TS_1$ .

von
6

