

FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 14: Prozessalgebra: Rekursion und Abstraktion

Präsenzteil am 27./28.1. – Abgabe am 3./4.2.2014

Bitte bereiten Sie die Übungsaufgaben (nicht nur die Präsenzaufgaben) zu dem letzten Übungsgruppentermin am 27./28.1. vor. Sie können dann dort bei Bedarf angesprochen werden. Wer möchte kann diese Übungsaufgaben via Email abgeben.

Präsenzaufgabe 14.1:

1. Zeigen Sie $a \xleftrightarrow{b} \tau a$ und $a \xleftrightarrow{b} a\tau$.

Lösung: Prozessgraphen und Bisimulationsrelationen:



- Es gilt $\sqrt{} \xleftrightarrow{b} \sqrt{}$, da die Bedingungen 3. und 4. aus Def. 9.48 passen, wenn auf der jeweils anderen Seite eine leere τ -Folge (Länge 0) eingesetzt wird. Es gilt $\sqrt{} \xleftrightarrow{rb} \sqrt{}$, weil beide Prozesse terminieren (Def. 9.51, Bedingungen 3. und 4.). $\sqrt{} \xleftrightarrow{b} \sqrt{}$ gilt nicht, weil in der klassischen Bisimulationsdefinition $\sqrt{}$ kein Prozessterm ist – es würde aber nicht schaden, die Definition entsprechend aufzulockern.
- Es gilt $p_1 \xleftrightarrow{b} q_2$, da beide Prozesse mit a terminieren (klassische Bisimulationsbedingungen 3. und 4.). Somit gilt auch $p_1 \xleftrightarrow{b} q_2$ und $p_1 \xleftrightarrow{rb} q_2$.
- Es gilt $p_1 \xleftrightarrow{b} q_1$:
 - Zu $p_1 \xrightarrow{a} \sqrt{}$ passt in Def. 9.48, Bedingung 1. die Folge $q_1 \xrightarrow{\tau} q_2 \xrightarrow{a} \sqrt{}$ mit $\sqrt{} \xleftrightarrow{b} \sqrt{}$.
 - Zu $q_1 \xrightarrow{\tau} q_2$ passt in Def. 9.48, Bedingung 2. die Verzweigungs-bisimilarität $p_1 \xleftrightarrow{b} q_2$.

$p_1 \xleftrightarrow{b} q_1$ gilt nicht, da in p_1 nur die Aktion a möglich ist, in q_1 jedoch nur die Aktion τ – gemäß den Bedingungen 1. und 2. der klassischen Bisimulation fehlen also die passenden korrespondierenden Übergänge. $p_1 \xleftrightarrow{rb} q_1$ gilt auch nicht, da Bedingung 1. und 2. in Def. 9.51 wie die klassische Bisimilarität gleiche Aktionen auf beiden Seiten fordern.
- Es gilt $\sqrt{} \xleftrightarrow{b} s_2$:
 - Da $\sqrt{}$ terminiert ist, passt in Def. 9.48, Bedingung 3. die τ -Folge $s_2 \xrightarrow{\tau} \sqrt{}$.
 - Zu $s_2 \xrightarrow{\tau} \sqrt{}$ passt in Def. 9.48, Bedingung 2. die Verzweigungs-bisimilarität $\sqrt{} \xleftrightarrow{b} \sqrt{}$.

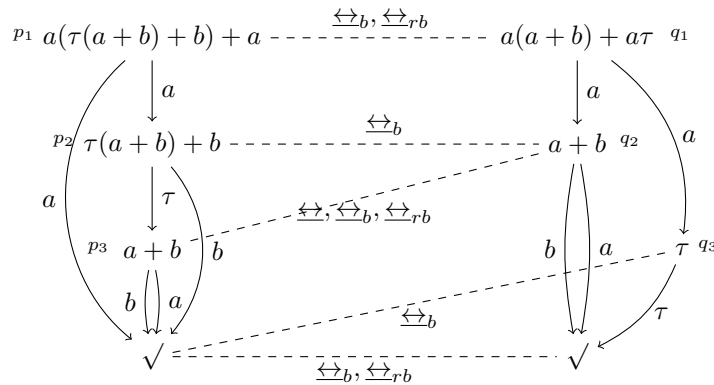
$\sqrt{} \xleftrightarrow{b} s_2$ gilt nicht, da $\sqrt{}$ gar kein Prozessterm ist. $\sqrt{} \xleftrightarrow{rb} s_2$ gilt nicht, da in $\sqrt{}$ die Aktion τ nicht ausführbar ist (verletzt Def. 9.51, Bedingung 2.).
- Es gilt $r_1 \xleftrightarrow{rb} s_1$, da beide Prozesse mit der Aktion a zu verzweigungs-bisimilaren Nachfolgern übergehen ($\sqrt{} \xleftrightarrow{b} s_2$). Daraus folgt automatisch auch $r_1 \xleftrightarrow{b} s_1$. $r_1 \xleftrightarrow{b} s_1$ gilt nicht, da die Nachfolger nicht auf klassische Weise bisimilar sind.

2. Begründen Sie, warum $\tau a + \tau b$ und $a + b$ nicht verzweigungs-bisimilar sind.

Lösung: Wenn die Terme verzweigungs-bisimilar wären, müssten für alle zu Beginn ausführbaren Aktionen der linken Seite die Bedingung 1. aus Def. 9.48 erfüllt werden. Da die Aktion jeweils τ ist müsste $a \xleftrightarrow{b} (a+b)$, $b \xleftrightarrow{b} (a+b)$ gelten. Das kann aber nicht gelten, da auf der linken Seite weniger Aktionen zur Wahl stehen als auf der rechten.

3. Geben Sie eine Verzweigungs-Bisimulations-Relation an, die zeigt dass $a(\tau(a+b)+b)+a$ und $a(a+b)+a\tau$ verzweigungs-bisimilar sind.

Lösung:



4. Identifizieren Sie alle „klassisch“ bisimilaren und initial verzweigungs-bisimilaren Knoten in den Prozessgraphen aus den Teilaufgaben 1 und 3.

Lösung: s.o.

5. Warum gilt $s \xleftrightarrow{b} t \implies s \xleftrightarrow{rb} t$?

Lösung: Wenn gemäß Def. 9.7, Bed. 1. und 2. in beiden Termen die gleichen Aktionen $s \xrightarrow{a} s'$ und $t \xrightarrow{a} t'$ möglich sind und zu einem bisimilarem Folgetermpaar $s' \xleftrightarrow{b} t'$ führen, so lässt sich dies Paarung direkt für Bed. 1. und 2. in Def. 9.51 verwenden. Für das Folgetermpaar wird nun $s' \xleftrightarrow{b} t'$ gefordert. Da $s' \xleftrightarrow{b} t'$ vorausgesetzt ist, sind wieder gleiche Aktionen mit bisimilaren Folgezuständen möglich, so dass die Bedingungen aus Def. 9.48 mit τ -Folgen der Länge 0 erfüllt sind.

Wenn gemäß Def. 9.7, Bed. 3. und 4. in beiden Termen die gleichen Aktionen $s \xrightarrow{a} s'$ und $t \xrightarrow{a} t'$ möglich sind und zur Termination führen, so genügt dies auch der schwächeren Bed. 3. und 4. in Def. 9.51. Zudem lässt sich die Argumentation zu Bed. 1. und 2. für das Aktionspaar anwenden, wenn als Nachfolgepaar $\checkmark \xleftrightarrow{b} \checkmark$ betrachtet wird.

6. Gilt $s \xleftrightarrow{b} t \implies s \xleftrightarrow{rb} t$? Gilt $s \xleftrightarrow{rb} t \implies s \xleftrightarrow{b} t$?

Lösung: Es gilt nur letzteres – als Gegenbeispiel für ersteres eignen sich die Terme aus Teilaufgabe 1.

Präsenzaufgabe 14.2: Rekursion und Äquivalenz im Kalkül.

1. Zeigen Sie im Kalkül: $\langle X | X = aX + b \rangle = \langle Y | Y = aY + b \rangle$

Lösung: Sei $E = \{X = aX + bd\}$ und $E' = \{Y = aY + b\}$. Mit RDP gilt:

$$\langle X|E \rangle = a\langle X|E \rangle + b$$

Also haben wir eine Term y gefunden, der E' löst, denn für $y = \langle X|E \rangle$ gilt:

$$y = t_1(y) \quad \text{bzw.} \quad y = ay + b$$

Mit RSP schließen wir, dass y eine Lösung von Y von E' ist, d.h. dass $y = \langle Y|E' \rangle$. Mit $y = \langle X|E \rangle$ folgt die Behauptung.

2. Zeigen Sie im Kalkül: $\langle X|X = aX \rangle = \langle Y_1|Y_1 = aY_2, Y_2 = aY_1 \rangle$

Lösung: Sei $E = \{X = aX\}$ und $E' = \{Y_1 = aY_2, Y_2 = aY_1\}$. Mit RDP folgt:

$$\begin{aligned} \langle X|E \rangle &= a\langle X|E \rangle = aa\langle X|E \rangle \\ \langle Y_1|E' \rangle &= a\langle Y_2|E' \rangle = aa\langle Y_1|E' \rangle \end{aligned}$$

Also haben wir zwei Lösungen für Z im Gleichungssystem $E'' = \{Z = aaZ\}$ gefunden, nämlich zum einen $y = \langle X|E \rangle$ und zum anderen $y' = \langle Y_1|E' \rangle$. Mit RSP schließen wir:

$$\begin{aligned} \langle X|E \rangle &= \langle Z|E'' \rangle \\ \langle Y_1|E' \rangle &= \langle Z|E'' \rangle \end{aligned}$$

Also $\langle X|E \rangle = \langle Z|E'' \rangle = \langle Y_1|E' \rangle$.

3. (Optional:) Zeigen Sie im Kalkül: $\langle Z|Z = aaZ \rangle = \langle W|W = aaaW \rangle$

Lösung: In der vorigen Teilaufgabe wurde bereits $\langle X|X = aX \rangle = \langle Z|Z = aaX \rangle$ bewiesen. Wir zeigen nun auch $\langle X|X = aX \rangle = \langle W|W = aaaW \rangle$. Daraus folgt dann mittels Transitivität und Symmetrie $\langle Z|Z = aaZ \rangle = \langle W|W = aaaW \rangle$.

Mit mehrfacher Anwendung von RDP ergibt sich:

$$\langle X|X = aX \rangle = a\langle X|X = aX \rangle = aa\langle X|X = aX \rangle = aaa\langle X|X = aX \rangle$$

$y'' = \langle X|X = aX \rangle$ ist also auch eine Lösung für $\langle W|W = aaaW \rangle$, mit RSP ergibt sich:

$$\langle X|X = aX \rangle = \langle W|W = aaaW \rangle$$

Bonusaufgabe 14.3: Seien zwei rekursive Spezifikationen gegeben:

$$\begin{aligned} E : \quad & \left| \begin{array}{l} X = ((a \cdot X) + (c \cdot X')) \\ X' = b \end{array} \right. \\ F : \quad & \left| \begin{array}{l} Y = ((a \cdot Y) + c) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Betrachten Sie die beiden Terme

$$\begin{aligned} t_1 &= \tau_I(\langle X|E \rangle) \quad \text{mit } I := \{b\} \\ t_2 &= \langle Y|F \rangle \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie $t_1 = t_2$ im Kalkül „ ACP_τ mit linearer geschützter Rekursion“ (2 Punkte).

von
6

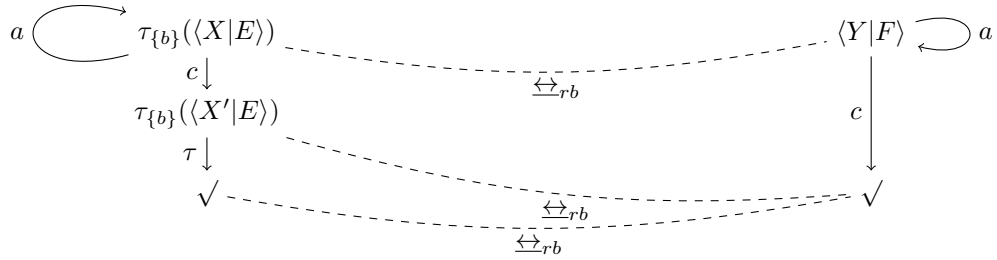
Lösung: Wir beginnen mit der linken Seite:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) &\stackrel{RDP}{=} \tau_{\{b\}}((a \cdot \langle X|E \rangle) + (c \cdot \langle X'|E \rangle)) \\
 &\stackrel{TI4}{=} \tau_{\{b\}}(a \cdot \langle X|E \rangle) + \tau_{\{b\}}(c \cdot \langle X'|E \rangle) \\
 &\stackrel{TI5}{=} \tau_{\{b\}}(a) \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) + \tau_{\{b\}}(c \cdot \langle X'|E \rangle) \\
 &\stackrel{TI1}{=} (a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)) + \tau_{\{b\}}(c \cdot \langle X'|E \rangle) \\
 &\stackrel{TI5}{=} (a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)) + (\tau_{\{b\}}(c) \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X'|E \rangle)) \\
 &\stackrel{TI1}{=} (a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)) + (c \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X'|E \rangle)) \\
 &\stackrel{RDP}{=} (a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)) + (c \cdot \tau_{\{b\}}(b)) \\
 &\stackrel{TI2}{=} (a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)) + (c \cdot \tau) \\
 &\stackrel{BI}{=} (a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)) + c
 \end{aligned}$$

Also haben wir $\tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) = a \cdot \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) + c$, d.h. $\tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)$ ist eine Lösung von $\langle Y|F \rangle$. Mit *RSP* bekommen wir daher $\tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) = \langle Y|F \rangle$.

2. Zeichnen Sie die Prozessgraphen der beiden Terme t_1 und t_2 .

Lösung:



3. Zeigen Sie $t_1 \xleftrightarrow{rb} t_2$, indem Sie alle initial verzweigungs-bisimilaren Knoten in den Prozessgraphen identifizieren.

Lösung: s.o.

4. Leiten Sie den Übergang $\tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) \xrightarrow{a} \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)$ im ACP_τ -Kalkül ab. Nutzen Sie die Transitionsregelbezeichner wie in Blatt 13 definiert, sowie $A_\tau, T_{v \notin \tau}^\vee, T_{v \notin \tau}, T_{v \in \tau}^\vee, T_{v \in \tau}$ für die Regeln auf S. 212.

Lösung:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{a \xrightarrow{a} \sqrt{}} A_0, \sigma_1 \\
\frac{}{(a \cdot \langle X|E \rangle) \xrightarrow{a} \langle X|E \rangle} T_{\cdot}^{\vee}, \sigma_2 \\
\frac{}{((a \cdot \langle X|E \rangle) + (c \cdot \langle X'|E \rangle)) \xrightarrow{a} \langle X|E \rangle} T_{+R}, \sigma_3 \\
\frac{}{\langle X|E \rangle \xrightarrow{a} \langle X|E \rangle} T_X, \sigma_4 \\
\frac{}{\tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle) \xrightarrow{a} \tau_{\{b\}}(\langle X|E \rangle)} T_{v \notin \tau}, \sigma_5
\end{array}$$

$$\sigma_1 : v \mapsto a$$

$$\sigma_2 : \begin{array}{l} v \mapsto a, \\ x \mapsto a, \\ y \mapsto \langle X|E \rangle \end{array}$$

$$\sigma_3 : \begin{array}{l} v \mapsto a, \\ x \mapsto a \cdot \langle X|E \rangle, \\ x' \mapsto \langle X|E \rangle, \\ y \mapsto c \cdot \langle X'|E \rangle \end{array}$$

$$\sigma_4 : \begin{array}{l} v \mapsto a, \\ y \mapsto \langle X|E \rangle, \\ t_X(\langle X|E \rangle) = ((a \cdot \langle X|E \rangle) + (c \cdot \langle X'|E \rangle)) \end{array}$$

$$\sigma_5 : \begin{array}{l} I = \{b\}, \\ v \mapsto a, \text{ mit } a \notin I, \\ x \mapsto \langle X|E \rangle, \\ x' \mapsto \langle X|E \rangle \end{array}$$

Bonusaufgabe 14.4: Ein Prozessterm t ist *regulär*, wenn die Menge der Prozessterme p , welche über Aktionsfolgen $t \xrightarrow{v_1} \dots \xrightarrow{v_i} p$ erreichbar sind, endlich ist. (Das bedeutet, dass der Prozessgraph zu t nur endlich viele Knoten enthält – als Transitionssystem betrachtet also einem endlichen Automaten entspricht. Außerdem ergibt sich zwingend, dass alle erreichbaren Prozessterme p ebenfalls regulär sind.)

von
6

1. (2 Punkte) Jeder Prozessterm x aus BPA ist regulär. Zeigen Sie, dass auch der Prozessterm $\tau_I(x)$ regulär ist (bei gegebener Menge I).

Hinweis: Betrachten Sie die Menge der möglichen direkten Übergänge $\{x \xrightarrow{a_1} x'_1, x \xrightarrow{a_2} x'_2, \dots, x \xrightarrow{a_k} x'_k, x \xrightarrow{b_1} \sqrt{}, \dots, x \xrightarrow{b_l} \sqrt{}\}$ zum Prozessterm x und ermitteln Sie daraus anhand der Transitionsregeln für den τ_I -Operator die Menge der Übergänge des Prozessterms $\tau_I(x)$. Vergleichen Sie den resultierenden Prozessgraphen mit dem des ursprünglichen Terms x .

Lösung: Wir betrachten den Term $\tau_I(x)$ mit seinen möglichen Übergängen wie in der Aufgabenstellung erläutert. Allgemein liegt zu jedem a_i oder b_i eine von zwei Möglichkeiten vor: Entweder ist $a_i \notin I$ oder $a_i \in I$ (bzw. analog. für b_i). Wir haben also vier Fälle zu unterscheiden:

- (a) $x \xrightarrow{a_i} x'_i, a_i \notin I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{\tau_I(x) \xrightarrow{a_i} \tau_I(x'_i)} T_{v \notin \tau}$$

- (b) $x \xrightarrow{a_i} x'_i, a_i \in I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{\tau_I(x) \xrightarrow{\tau} \tau_I(x'_i)} T_{v \in \tau}$$

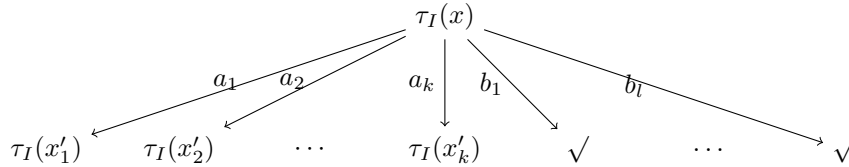
- (c) $x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}, b_i \notin I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}}{\tau_I(x) \xrightarrow{b_i} \sqrt{}} T_{v \notin \tau}^{\vee}$$

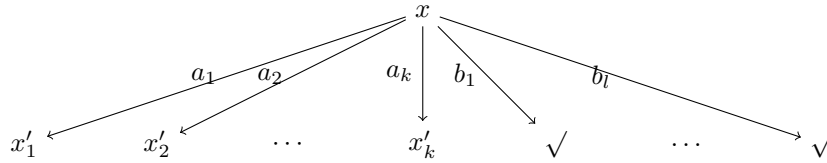
(d) $x \xrightarrow{b_i} \checkmark, b_i \in I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \checkmark}{\tau_I(x) \xrightarrow{\tau} \checkmark} T_{v \in \tau}^{\checkmark}$$

Der Anfang des resultierenden Prozessgraphen setzt sich aus all diesen Übergängen zusammen. Eine schematische Darstellung ist folgende, wobei einige a_i bzw. b_i fehlen können:



Zum Vergleich der Anfang des originalen Prozessgraphen:



Da der Prozessgraph zu $\tau_I(x)$ exakt genauso viele Knoten wie der Prozessgraph zu x enthält, und letzterer gemäß Voraussetzung nur endlich viele Knoten enthält, gilt dies auch für ersteren Prozessgraphen. Also ist $\tau_I(x)$ regulär.

2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Prozessterme t regulär sind, die sich mit den Operatoren $+$, \cdot , \parallel und τ_I sowie mit linearer Rekursion beschreiben lassen (also alle Prozessterme aus ACP_τ mit linearer Rekursion ohne ∂_H und die Operatoren Leftmerge \parallel und Communication Merge \mid).

Hinweise:

- Argumentieren Sie über den Termaufbau, d.h. betrachten Sie wie in einer strukturellen Induktion die atomaren Terme sowie in einer Fallunterscheidung den jeweiligen Hauptoperator zusammengesetzter Terme (der Ausdruck $\langle X_i | E \rangle$ zählt auch als Hauptoperator). Bilden Sie mit den Transitionsregeln jeweils alle Übergänge, und weisen Sie nach, dass die Zahl der möglichen direkten Übergänge endlich ist und dass alle Nachfolgeterme regulär sind.
- Die eigentliche Induktion sollte aber über den grad der Terme laufen, d.h. ihre Anzahl an Operatoren. Der grad sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll} \text{grad}(\checkmark) := 0 & \text{grad}(x + y) := \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1 \\ \text{grad}(a \in A) := 0 & \text{grad}(x \cdot y) := \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1 \\ \text{grad}(\tau) := 0 & \text{grad}(x \parallel y) := \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1 \\ \text{grad}(\langle X_i | E \rangle) := 1 & \text{grad}(\tau_I(x)) := \text{grad}(x) + 1 \end{array}$$

- In der Induktionsvoraussetzung reicht es nicht, nur die Teilterme des aktuell betrachteten Terms als regulär anzunehmen (wie bei struktureller Induktion üblich). Stattdessen müssen *alle* Terme mit kleinerem grad als regulär angenommen werden (wie bei vollständiger Induktion üblich). Damit diese Annahme gilt, muss im Induktionsschritt bewiesen werden, dass bei jedem Übergang im Prozessgraphen der grad gleich bleibt oder abnimmt (der Einfachheit halber ist auch $\text{grad}(\checkmark)$ definiert).

- In einigen wenigen Fällen hat ein Nachfolgeterm möglicherweise den gleichen grad wie der gerade behandelte Term. Da die Induktionsvoraussetzung nur für Nachfolgeterme mit *kleinerem* grad greift, ist in diesen Fällen eine separate Argumentation nötig, warum der Prozessgraph regulär bleibt.
- Sie können das Ergebnis aus Teilaufgabe 1 nicht direkt wiederverwenden, da es sich nur auf BPA-Terme x bezieht. Der Argumentationsweg bleibt aber ähnlich.

Lösung:

I.A. Nur Aktionen $a \in A$ und τ sind atomare Prozessterme, es gilt $\text{grad}(a) = \text{grad}(\tau) = 0$.

- Falls $t = a$, dann gibt es laut Kalkül gibt es nur den durch das Axiom A_0 definierten Übergang $a \xrightarrow{a} \sqrt{}$. Der Prozessgraph ist also endlich, der einzige Nachfolgeknoten hat ebenfalls $\text{grad}(\sqrt{}) = 0$.
- Falls $t = \tau$, dann gibt es laut Kalkül gibt es nur den durch das Axiom A_τ definierten Übergang $\tau \xrightarrow{\tau} \sqrt{}$. Der Prozessgraph ist ebenfalls endlich.

Da in beiden Fällen endliche Prozessgraphen entstehen, sind die atomaren Prozessterme regulär.

I.V. Es gelte, dass alle Prozessterme bis zu einem bestimmten grad regulär seien. Außerdem gelte für alle Prozessterme bis zu diesem grad, dass alle Nachfolgeterme bei allen Übergängen einen gleich hohen oder niedrigeren grad haben.

Ferner seien die Mengen der möglichen Übergänge zu zwei Termen x und y wie folgt beschrieben: $\{x \xrightarrow{a_1} x'_1, x \xrightarrow{a_2} x'_2, \dots, x \xrightarrow{a_k} x'_k, x \xrightarrow{b_1} \sqrt{}, \dots, x \xrightarrow{b_l} \sqrt{}\}$ und $\{y \xrightarrow{c_1} y'_1, y \xrightarrow{c_2} y'_2, \dots, y \xrightarrow{c_m} y'_m, y \xrightarrow{d_1} \sqrt{}, \dots, y \xrightarrow{d_n} \sqrt{}\}$ (Anmerkung: Diese Mengen sind endlich.)

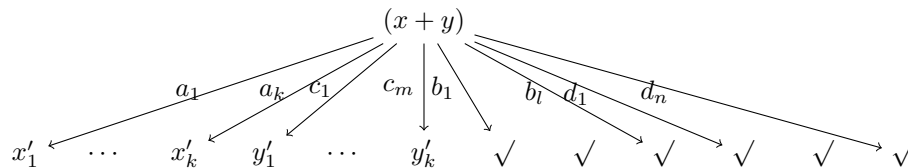
I.S. Zu zeigen ist, dass jeder Term t , der mit den Operatoren $+$, \cdot , \parallel , τ_I und $\langle X_i | E \rangle$ gebildet werden kann, ebenfalls regulär ist.

- $t = (x + y)$: Es ergeben sich folgende Ableitungsmöglichkeiten für t :

$$\begin{array}{cc} \frac{x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}}{(x + y) \xrightarrow{b_i} \sqrt{}} T_{+R}^\vee & \frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{(x + y) \xrightarrow{a_i} x'_i} T_{+R} \\ \frac{y \xrightarrow{d_i} \sqrt{}}{(x + y) \xrightarrow{d_i} \sqrt{}} T_{+L}^\vee & \frac{y \xrightarrow{c_i} y'_i}{(x + y) \xrightarrow{c_i} y'_i} T_{+L} \end{array}$$

Es gilt gemäß Induktionsvoraussetzung $\text{grad}(x'_i) \leq \text{grad}(x)$ und $\text{grad}(y'_i) \leq \text{grad}(y)$. Mit der Definition $\text{grad}(x + y) = \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1$ ergibt sich $\text{grad}(x'_i) < \text{grad}(x + y)$ und $\text{grad}(y'_i) < \text{grad}(x + y)$. Grundsätzlich gilt auch $\text{grad}(\sqrt{}) = 0 < \text{grad}(x + y)$, da letzter mindestens den Wert 1 hat.

Alle Nachfolgeterme haben also einen niedrigeren grad als $\text{grad}(x + y)$ und sind gemäß Induktionsvoraussetzung regulär. Es sind maximal $k + l + n + m$ direkte Nachfolgeterme erreichbar, also endlich viele. Der zusammengesetzte Prozessgraph sieht schematisch folgendermaßen aus:



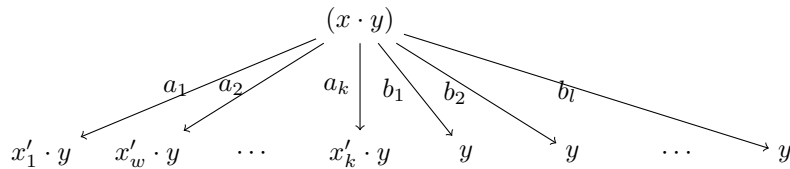
Dieser Prozessgraph ist endlich, da die unteren Knoten allesamt für endliche Prozessgraphen stehen.

(b) $t = (x \cdot y)$: Es ergeben sich folgende Ableitungsmöglichkeiten für t :

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \surd}{(x \cdot y) \xrightarrow{b_i} y} T.\surd \qquad \frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{(x \cdot y) \xrightarrow{a_i} x'_i \cdot y} T.$$

Es gilt gemäß Induktionsvoraussetzung $\text{grad}(x'_i) \leq \text{grad}(x)$. Mit der Definition $\text{grad}(x \cdot y) = \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1$ ergibt sich $\text{grad}(x'_i) + \text{grad}(y) < \text{grad}(x \cdot y)$ und $\text{grad}(y) < \text{grad}(x \cdot y)$. Grundsätzlich gilt auch $\text{grad}(\surd) = 0 < \text{grad}(x \cdot y)$, da letzter mindestens den Wert 1 hat.

Da die Nachfolgeterme y , $x'_i \cdot y$ und \surd alle einen niedrigeren grad als $\text{grad}(x \cdot y)$ haben, sind sie gemäß Induktionsvoraussetzung regulär. Es sind maximal $k + l$ direkte Nachfolgeterme erreichbar, also endlich viele. Der zusammengesetzte Prozessgraph sieht schematisch folgendermaßen aus:



Dieser Prozessgraph ist endlich, da die unteren Knoten allesamt für endliche Prozessgraphen stehen.

(c) $t = (x \parallel y)$: Es ergeben sich folgende Ableitungsmöglichkeiten für t :

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \surd}{(x \parallel y) \xrightarrow{b_i} y} T.\surd_y \qquad \frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{(x \parallel y) \xrightarrow{a_i} x'_i \parallel y} T.\parallel_y$$

$$\frac{y \xrightarrow{d_j} \surd}{(x \parallel y) \xrightarrow{d_j} x} T.\surd_x \qquad \frac{y \xrightarrow{c_j} y'_j}{(x \parallel y) \xrightarrow{c_j} x \parallel y'_j} T.x_\parallel$$

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \surd \quad y \xrightarrow{d_j} \surd}{(x \parallel y) \xrightarrow{\gamma(b_i, d_j)} \surd} T.\surd_\gamma \qquad \frac{x \xrightarrow{b_i} \surd \quad y \xrightarrow{c_j} y'_j}{(x \parallel y) \xrightarrow{\gamma(b_i, c_j)} y'_j} T.\surd_\gamma^y$$

$$\frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i \quad y \xrightarrow{d_j} \surd}{(x \parallel y) \xrightarrow{\gamma(a_i, d_j)} x'_i} T.x_\parallel^\surd \qquad \frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i \quad y \xrightarrow{c_j} y'_j}{(x \parallel y) \xrightarrow{\gamma(a_i, c_j)} x'_i \parallel y'_j} T.\parallel_\gamma$$

Es gilt gemäß Induktionsvoraussetzung $\text{grad}(x'_i) \leq \text{grad}(x)$ und $\text{grad}(y'_j) \leq \text{grad}(y)$. Mit der Definition $\text{grad}(x \parallel y) = \text{grad}(x) + \text{grad}(y) + 1$ ergibt sich in allen Fällen ein gleicher oder kleinerer Grad der Nachfolgeterme:

$$\begin{aligned} \text{grad}(y) &< \text{grad}(x \parallel y) & \text{grad}(x'_i \parallel y) &= \text{grad}(x'_i) + \text{grad}(y) + 1 \leq \text{grad}(x \parallel y) \\ \text{grad}(x) &< \text{grad}(x \parallel y) & \text{grad}(x \parallel y'_j) &= \text{grad}(x) + \text{grad}(y'_j) + 1 \leq \text{grad}(x \parallel y) \\ \text{grad}(\surd) &= 0 < \text{grad}(x \parallel y) & \text{grad}(y'_j) &\leq \text{grad}(y) < \text{grad}(x \parallel y) \\ \text{grad}(x'_i) &\leq \text{grad}(x) < \text{grad}(x \parallel y) & \text{grad}(x'_i \parallel y'_j) &\leq \text{grad}(x) + \text{grad}(y) < \text{grad}(x \parallel y) \end{aligned}$$

Die Nachfolgeterme, die einen niedrigeren grad als $\text{grad}(x||y)$ haben, sind gemäß Induktionsvoraussetzung regulär. Die Nachfolgeterme, die möglicherweise einen gleichen grad haben, werden wir weiter unten behandeln. Es sind maximal $(k+l+1) \cdot (m+n+1)$ direkte Nachfolgeterme erreichbar (alle Kombinationen sowie die Einzelschritte), also endlich viele. Der zusammengesetzte Prozessgraph sei hier aus Platzgründen eingespart.

- (d) $t = \tau_I(x)$: Es ergeben sich die Ableitungsmöglichkeiten für t wie in Teilaufgabe 1 (die Ergebnisse müssen an diese Aufgabenstellung angepasst werden, da nun komplexere Terme x zu betrachten sind und der grad zu bestimmen ist).

- i. $x \xrightarrow{a_i} x'_i, a_i \notin I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{\tau_I(x) \xrightarrow{a_i} \tau_I(x'_i)} T_{v \notin \tau}$$

Es gilt $\text{grad}(x'_i) \leq \text{grad}(x)$ und somit auch $\text{grad}(\tau_I(x'_i)) \leq \text{grad}(\tau_I(x))$.

- ii. $x \xrightarrow{a_i} x'_i, a_i \in I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{a_i} x'_i}{\tau_I(x) \xrightarrow{\tau} \tau_I(x'_i)} T_{v \in \tau}$$

Es gilt $\text{grad}(x'_i) \leq \text{grad}(x)$ und somit auch $\text{grad}(\tau_I(x'_i)) \leq \text{grad}(\tau_I(x))$.

- iii. $x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}, b_i \notin I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}}{\tau_I(x) \xrightarrow{b_i} \sqrt{}} T_{v \notin \tau}^\vee$$

Es gilt $\text{grad}(\sqrt{}) = 0 < \text{grad}(\tau_I(x))$.

- iv. $x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}, b_i \in I$. Die einzige Ableitungsmöglichkeit ist:

$$\frac{x \xrightarrow{b_i} \sqrt{}}{\tau_I(x) \xrightarrow{\tau} \sqrt{}} T_{v \in \tau}^\vee$$

Es gilt $\text{grad}(\sqrt{}) = 0 < \text{grad}(\tau_I(x))$.

Falls die Nachfolgeterme einen kleineren grad als $\text{grad}(\tau_I(x))$ haben, sind sie gemäß Induktionsvoraussetzung regulär. Es sind maximal $k+l+m+n$ direkte Nachfolgeterme erreichbar, also endlich viele. Die Nachfolgeterme, die möglicherweise einen gleichen grad haben, werden wir weiter unten behandeln.

Der zusammengesetzte Prozessgraph sieht aus wie in Teilaufgabe 1.

- (e) $t = \langle X_r | E \rangle$ (die Variablen i, k, l, n in diesem Abschnitt haben nichts mit denen aus der Induktionsvoraussetzung zu tun!): Es gibt zwei Ableitungsmöglichkeiten entsprechend des Terms t_r aus der Spezifikation, wie auf S. 207 definiert.

$$\frac{t_r(\langle X_1 | E \rangle, \langle X_2 | E \rangle, \dots, \langle X_n | E \rangle) \xrightarrow{b_i} \sqrt{}}{\langle X_r | E \rangle \xrightarrow{b_i} \sqrt{}} T_{X_r}^\vee$$

$$\frac{t_r(\langle X_1 | E \rangle, \langle X_2 | E \rangle, \dots, \langle X_n | E \rangle) \xrightarrow{a_i} x'_i}{\langle X_r | E \rangle \xrightarrow{a_i} x'_i} T_{X_r}$$

Im ersten Fall gilt $\text{grad}(\sqrt{}) = 0 < \text{grad}(\langle X_r | E \rangle) = 1$. Im zweiten Fall sind weitere Überlegungen nötig. Da wir auf lineare Rekursion beschränkt sind, hat die rechte Seite der Gleichung zu Variable X_r folgende Form:

$$t_r(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_1 X_{j_1} + a_2 X_{j_2} + \dots + a_k X_{j_k} + b_1 + b_2 + \dots + b_l$$

Dies hat zum einen den Effekt, dass maximal $k + l$ direkte Nachfolgeterme erreichbar sind, also endlich viele. Zum anderen ergibt sich, dass wir x'_i zu einem a_i genau kennen. Die zweite Ableitungsregel konkretisiert sich zu:

$$\frac{a_1 \langle X_{j_1} | E \rangle + a_2 \langle X_{j_2} | E \rangle + \dots + a_k \langle X_{j_k} | E \rangle + b_1 + b_2 + \dots + b_l \xrightarrow{a_i} \langle X_{j_i} | E \rangle}{\langle X_r | E \rangle \xrightarrow{a_i} \langle X_{j_i} | E \rangle} T_{X_r}$$

Hier gilt nun $\text{grad}(\langle X_{j_i} | E \rangle) = 1 = \text{grad}(\langle X_r | E \rangle)$. Es gibt allerdings nur endlich viele Knoten der Art $\langle X_{j_i} | E \rangle$, da es nur endlich viele Variablen im Gleichungssystem gibt. Somit ist trotz gleichen grad des Nachfolgeknotens sichergestellt, dass keine unendlichen Knotenmengen entstehen. Also ist der Term $\langle X_r | E \rangle$ regulär.

In drei weiteren Fällen kam eine mögliche grad-Gleichheit heraus:

$$\begin{aligned} \text{grad}(x'_i \| y) &= \text{grad}(x'_i) + \text{grad}(y) + 1 \leq \text{grad}(x \| y) \\ \text{grad}(x \| y'_j) &= \text{grad}(x) + \text{grad}(y'_j) + 1 \leq \text{grad}(x \| y) \\ \text{grad}(\tau_I(x'_i)) &\leq \text{grad}(\tau_I(x)) \end{aligned}$$

Allen drei Gleichungen ist gemein, dass bei einer strengeren Induktionsvoraussetzung $\text{grad}(x'_i) < \text{grad}(x)$ bzw. $\text{grad}(y'_j) < \text{grad}(y)$ auch ein strengeres Ergebnis zu erzielen wäre, d.h. die Nachfolgeterme einen echt kleineren grad aufwiesen und somit gemäß Induktionsvoraussetzung regulär wären.

grad-Gleichheit wird also nur durch die Rekursion ermöglicht. Da dort bereits argumentiert wurde, dass nur endlich viele Prozessterme mit gleichem Grad existieren, gilt dies auch für alle Vorgänger-Prozessterme. Somit sind die Nachfolgeterme auch in den drei genannten Fällen regulär.

Schluss Da die atomaren Terme regulär sind und jeder zusammengesetzte Term nur endlich viele reguläre Nachfolgeterme hat, sind alle Terme regulär.

Bisher erreichbare Punktzahl: 151