FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

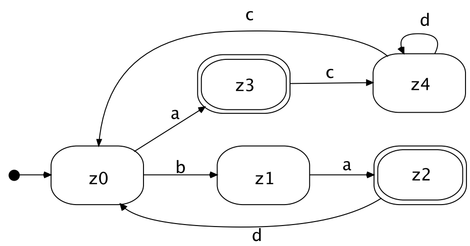
Präsenzlösung 2 : Büchi-Automaten, ω-reguläre Sprachen

Präsenzteil am 22./23. 10. – Abgabe am 29./30. 10. 2012

Präsenzaufgabe 2.1: Betrachten Sie den Büchi-Automaten A aus Beispiel 1.11 im Skript.

1. Erläutern Sie, warum $L^\omega(A)$ so aussieht, wie es im Skript angegeben ist.

   Lösung: Laut Beispiel 1.11 gilt $L^\omega(A) = (acd^*c + bad)^\omega$.

   A akzeptiert ein ω-Wort genau dann, wenn die Zustandsfolge zum Wort einen Endzustand unendlich oft enthält. Es muss also entweder z_2 oder z_3 unendlich oft auftreten.

   Fall z_2: Kann nur unendlich oft auftreten, wenn die Schleife z_0, z_1, z_2 unendlich oft durchlaufen wird, d.h. der Wortteil bad unendlich oft auftritt. In z_0 darf aber auch die obere Schleife zwischendurch beliebig oder unendlich oft gewählt werden, solange später wieder bad folgt.

   Fall z_3: Kann nur unendlich oft auftreten, wenn die Schleife z_0, z_3, z_4 unendlich oft durchlaufen wird, d.h. der Wortteil acc unendlich oft auftritt. In z_4 darf aber auch die d-Schleife beliebig oft eingeschoben werden, so dass der zu durchlaufende Wortteil auf acd^*c erweitert wird. Außerdem darf in z_0 auch die untere Schleife zwischendurch beliebig oder unendlich oft gewählt werden, solange später wieder acd^*c folgt.

   Als ω-reguläre Ausdrücke:

   Fall z_2: $((acd^*c)^* \cdot bad)^\omega$

   Fall z_3: $((bad)^* \cdot acd^*c)^\omega$

   Zusammen: $L^\omega(A) = ((acd^*c)^* \cdot bad)^\omega + ((bad)^* \cdot acd^*c)^\omega$

   Die beiden Alternativen lassen sich mit etwas Überlegung zum oben genannten Ausdruck zusammenfassen.

2. Betrachten Sie A als NFA. Bestimmen Sie $L(A)$.

   Lösung: $L(A) = (acd^*c + bad)^*(a + ba)$

3. Angenommen z_2 sei nicht mehr Endzustand und sei A' der resultierende Automat. Bestimmen Sie dann die resultierende Sprache $L^\omega(A')$.

   Lösung: $L^\omega(A') = ((bad)^* \cdot acd^*c)^\omega$

   (Die obere Schleife muss unendlich oft auftreten, um z_3 unendlich oft zu besuchen. Die untere Schleife $z_0z_1z_2$ kann sowohl endlich als auch unendlich oft auftreten. Eine unendliche Wiederholung der unteren Schleife wird aber nur akzeptiert, wenn auch die obere Schleife mit Endzustand z_3 unendlich oft dazwischen auftritt.)

Präsenzaufgabe 2.2: Zeigen Sie die erste Teilaussage von Lemma 1.15: „Die Vereinigung zweier ω-regulärer Mengen $U \cup V$ ist immer eine ω-reguläre Menge.“

1. Geben Sie ein Verfahren an, welches $U \cup V$ konstruktiv aus U und V ermittelt.

   Lösung: *A) Über ω-reguläre Ausdrücke:* Gegeben zwei ω-reguläre Ausdrücke R_U und R_V, die U respektive V beschreiben, d.h. es gelten $M_{R_U} = U$ und $M_{R_V} = V$. Dann ist gemäß Def. 1.6 und 1.17 $R_U + R_V$ ein ω-regulärer Ausdruck, der $M_{R_U+R_V} := M_{R_U} \cup M_{R_V} = U \cup V$ beschreibt.

   B) Über Büchi-Automaten: Gegeben zwei Büchi-Automaten $A_U = (Q_U, \Sigma, \delta_U, Q_{0,U}, F_U)$ und $A_V = (Q_V, \Sigma, \delta_V, Q_{0,V}, F_V)$, die U respektive V akzeptieren. Die Vereinigung der (disjunkten) Zustandsmengen und Übergangsrelationen liefert den gesuchten Büchi-Automaten B, der alle Wörter aus beiden Sprachen akzeptiert:

$$\begin{array}{lcl} Q_B & := & Q_U \cup Q_V \\ Q_{0,B} & := & Q_{0,U} \cup Q_{0,V} \\ F_B & := & F_U \cup F_V \\ \delta_B & := & \delta_U \cup \delta_V \\ & = & \{(q,x,q') \mid (q,x,q') \in \delta_U \vee (q,x,q') \in \delta_V\} \end{array}$$

   C) Ergänzung zu Variante B): Zusätzlich zur Vereinigung kann ein neuer Startzustand q_s eingeführt werden. Die bisherigen Startzustände sind dann keine mehr. Vom neuen Startzustand gehen Kanten zu allen Folgezuständen der bisherigen Startzustände mit jeweils identischer Beschriftung:

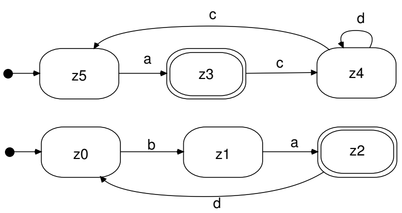
$$\begin{array}{lcl} Q_C & := & Q_B \cup \{q_s\} \\ Q_{0,C} & := & \{q_s\} \\ F_B & := & F_U \cup F_V \\ \delta_B & := & \delta_B \\ & \cup & \{(q_s,x,q') \mid \exists q \in Q_{0,U} : (q,x,q') \in \delta_U\} \\ & \cup & \{(q_s,x,q') \mid \exists q \in Q_{0,V} : (q,x,q') \in \delta_V\} \end{array}$$

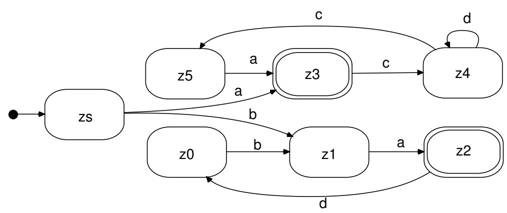
2. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Sprachen $L_{2.2.1} = \{bad\}^\omega$ und $L_{2.2.2} = (\{ac\} \cdot \{d\}^* \cdot \{c\})^\omega$ an.

   Lösung: ω-reguläre Ausdrücke gemäß Alternative A):

$$\begin{array}{lcl} R_U & = & (bad)^\omega \\ R_V & = & (ac \cdot d^* \cdot c)^\omega \\ R_{U+V} & = & (bad)^\omega + (ac \cdot d^* \cdot c)^\omega \end{array}$$

   Büchi-Automaten B und C gemäß Alternativen B) und C):





   Es gilt $L^\omega(B) = L^\omega(C) = (bad)^\omega + (acd^*c)^\omega$.

   Die rechte Lösung besitzt nur einen Startzustand.

3. Begründen Sie Korrektheit und Termination Ihres Verfahrens.

Lösung: *Termination:* Alle drei Verfahren bestehen nur aus einem Schritt, terminieren also immer.

Korrektheit:

A) Gemäß Def. 1.17 ist $R_U + R_V$ ein wohlgeformter ω-regulärer Ausdruck (es werden keine in Sequenzen eingeschachtelten ω-Abschlüsse eingeführt). Gemäß Def. 1.6 beschreibt $R_U + R_V$ genau die gesuchte Menge $M_{R_U+R_V} := M_{R_U} \cup M_{R_V} = U \cup V$.

B) Korrektheit ($(U \cup V) \subseteq L^\omega(B)$): Sei $w \in U$, d.h. $w \in L^\omega(A_U)$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad zu w in A_U, der einen Endzustand $q_e \in F_U$ unendlich oft enthält. Dieser Pfad ist in B ebenfalls möglich, da durch die Vereinigung weder Start- noch Endzustände noch Übergänge entfernt werden.

Analog kann für $w \in V$ argumentiert werden.

Korrektheit ($L^\omega(B) \subseteq (U \cup V)$): Da die Zustandsmengen vor der Vereinigung disjunkt waren, gibt es auch keine Übergänge zwischen Zuständen aus den beiden Automatenteilen. Daher können keine Wörter von B akzeptiert werden, die nicht von einem der einzelnen Automaten akzeptiert werden.

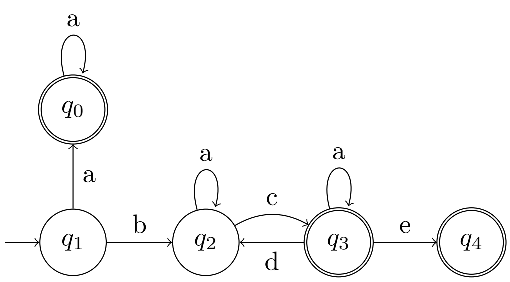
C) Da der neue Startzustand q_s in C die gleichen Übergänge bietet wie alle Startzustände in $Q_{0,B}$ zusammengenommen und die Übergänge jeweils in die gleichen Folgezustände führen, können dieselben Wörter gelesen werden. Alle akzeptierten Pfade in C unterscheiden sich ab dem zweiten Zustand nicht mehr von den akzeptierten Pfaden in B.

4. Vergleichen Sie die Sprache $L_{2.2.1} \cup L_{2.2.2}$ mit der Sprache $L^\omega(A)$ aus Präsenzaufgabe 2.1.

Lösung: In $L^\omega(A)$ können Schleifenteile gemischt auftreten, in $L_{2.2.1} \cup L_{2.2.2}$ nicht.

Übungsaufgabe 2.3: Gegeben der NFA $A_{2.3}$:

von
6



1. Geben Sie explizit die Sprache $L(A_{2.3})$ sowie die Sprachen $L^\omega(A_{2.3})$ und $(L(A_{2.3}))^\omega$ als regulären bzw. ω-regulären Ausdruck an.

2. Diskutieren Sie den Unterschied zwischen $L^\omega(A_{2.3})$ und $(L(A_{2.3}))^\omega$. Benennen Sie zwei konkrete ω-Wörter aus jeder Sprache (Sie können die Wörter als ω-reguläre Ausdrücke ohne die Operatoren $+$, $()^+$ und $()^*$ beschreiben).

3. Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm eines Büchi-Automaten, der $(L(A_{2.3}))^\omega$ akzeptiert. Begründen Sie die Korrektheit des Automaten.

Übungsaufgabe 2.4: Zeigen Sie die dritte Teilaussage von Lemma 1.15: „Die gemischte Konkatenation $W \cdot U \subseteq \Sigma^\omega$ ist eine ω-reguläre Menge, falls $W \subseteq \Sigma^*$ regulär und $U \subseteq \Sigma^\omega$ ω-regulär ist.“

von
6

Führen Sie einen konstruktiven Beweis durch. *Hinweis:* Der kurze Lösungsweg über reguläre Ausdrücke bringt maximal die halbe Punktzahl. Volle Punktzahl gibt es nur für die Konstruktion eines Büchi-Automaten.

1. Benennen Sie die Arbeitsschritte, die für einen konstruktiven Beweis des Lemmas notwendig sind.
2. Entwickeln Sie ein geeignetes Konstruktionsverfahren.
3. Weisen Sie die Qualität Ihres Verfahrens entsprechend Teilaufgabe 1 nach.
4. Wenden Sie das Verfahren aus Ihrem Beweis auf die reguläre Sprache an, die von dem DFA A aus Aufgabe 1.4 akzeptiert wird, und auf die ω-reguläre Sprache an, die von dem DFA $A_{2.3}$ aus Aufgabe 2.3 akzeptiert wird. Es soll also A für A_W und $A_{2.3}$ für A_U genommen werden.

Bisher erreichbare Punktzahl: 24