Selbstorganisierte Kritikalität

Self-organized Criticality (SOC)

Lawinen sind Ausdruck komplexen Verhaltens.

Parameter:

- Wind
- Temperatur
- Schneebeschaffenheit
- Steilheit des Hangs

Vorhersagen möglich?

Erdbeben entstehen jeden Tag. Die meisten sind harmlos, manche jedoch katastrophal.

Auch seismische Systeme sind komplex.

Ist eine Erdbebenvorhersage möglich?

Was haben Lawinen und Erdbeben gemeinsam?

Was charakterisiert diese Phänomene?

Folgen solche Systeme allgemeinen Prinzipien?

Granulare Systeme

Sandpile Model

Granulare Systeme

- zeigen emergentes Verhalten
- sind weder „fest“ noch „flüssig“

Barhan-Düne (Namibia)

Sandhaufen als zellulärer Automat

Beschreibungsgrößen:

- Koordinaten $x_1, \dots, x_d$
- Höhe $h(x_1, \dots, x_d)$
- Steigung $z(x_1, \dots, x_d)$

Sandhaufen auf einer Plattform

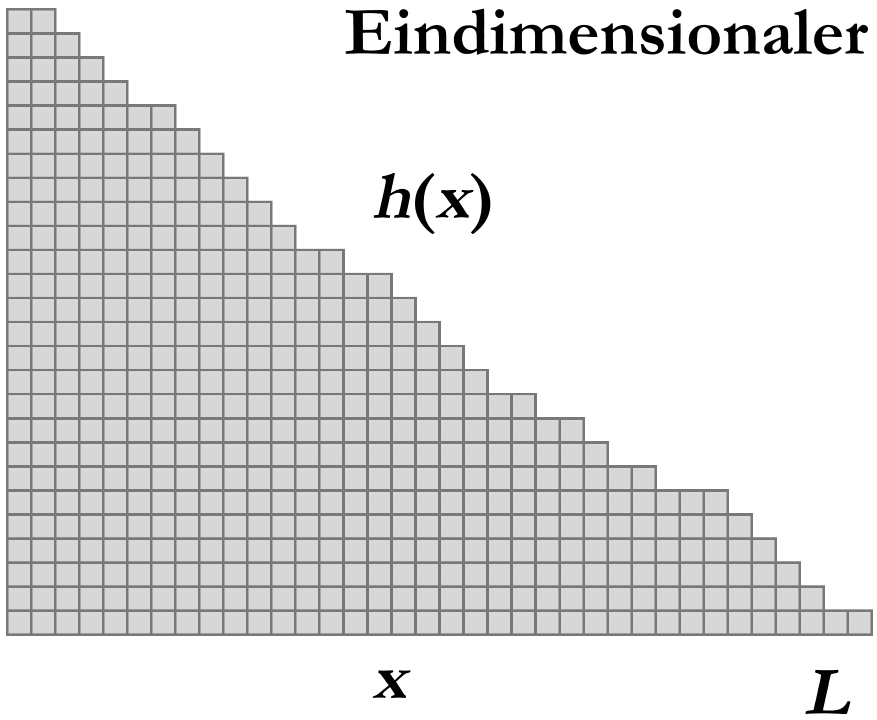
Parameter:

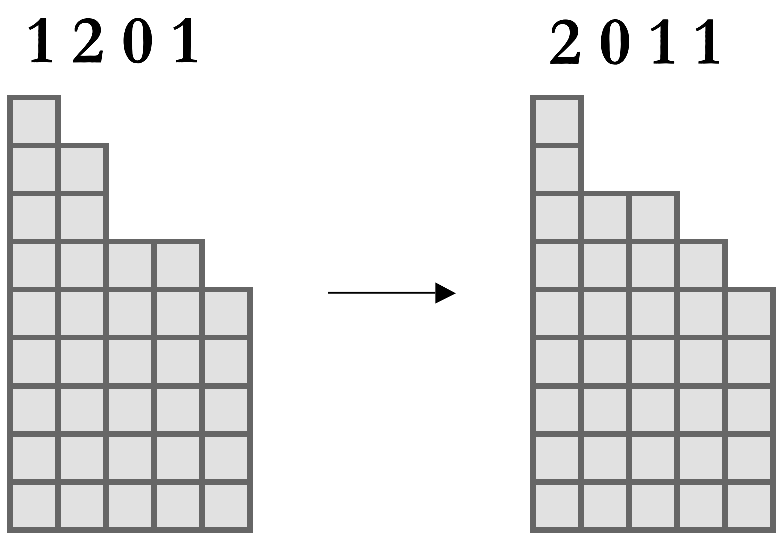
- Dimension d
- Seitenlänge L
- Kritische Steigung z_C
- Lawinenfaktor ν

Zustandsübergangsregeln:

- Hinzufügen von Sand
- Herunterrieseln von Sand

Eindimensionaler Fall: $d = 1$, $z_C = 2$





Hinzufügen von Sand:

$$z(x) \longrightarrow z(x) + 1$$
$$z(x-1) \longrightarrow z(x) - 1$$

Herunterrieseln von Sand:

$$z(x) \longrightarrow z(x) - 2\nu$$
$$z(x+1) \longrightarrow z(x+1) + \nu$$
$$z(x-1) \longrightarrow z(x-1) + \nu$$

Lawinen sind in diesem Modell Kettenreaktionen.

Die Lawinenverteilung hängt von den Parametern ν, L ab.

Für $\nu > 1$ folgt die Lawinengröße einem Potenzgesetz.

Wir beobachten die funktionelle Abhängigkeit

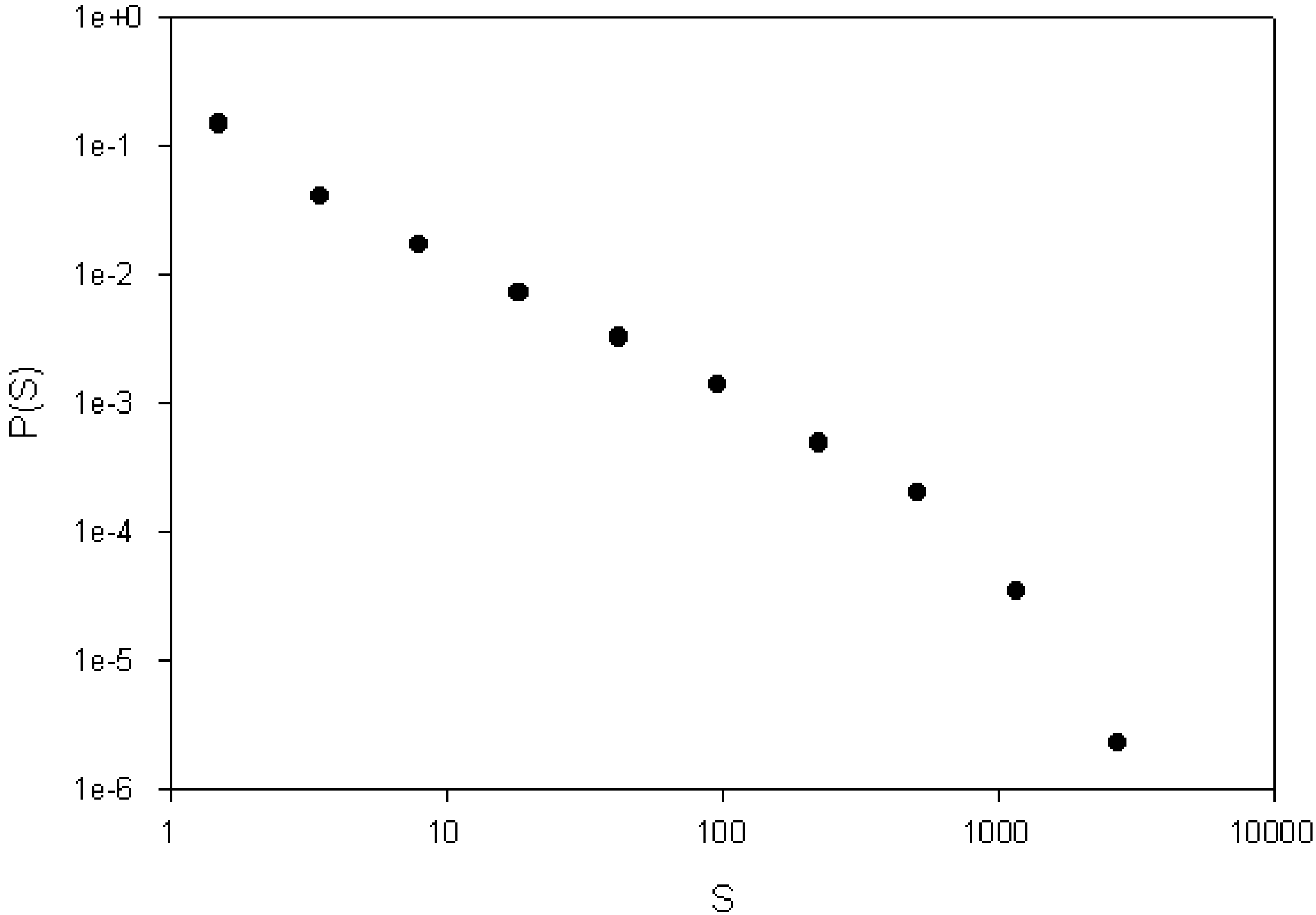
$$\boxed{N(s) = C\, s^{-\tau}} \qquad \nu = 2: \quad \tau \approx 1.0 \pm 0.1$$

Das exakte Aussehen des Graphen variiert mit L.

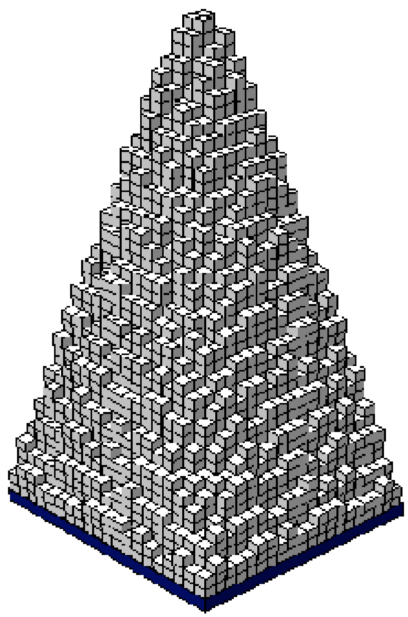
Bei doppelt logarithmischer Auftragung sehen wir also eine Gerade mit Steigung $-\tau$:

$$\log N(s) = \log C - \tau \log s$$

Lawinenverteilung



Höherdimensionale Fälle: $d > 1$, $z_C > 1$



Für höherdimensionale Sandhaufen folgt die Lawinenverteilung ebenfalls dem Potenzgesetz.

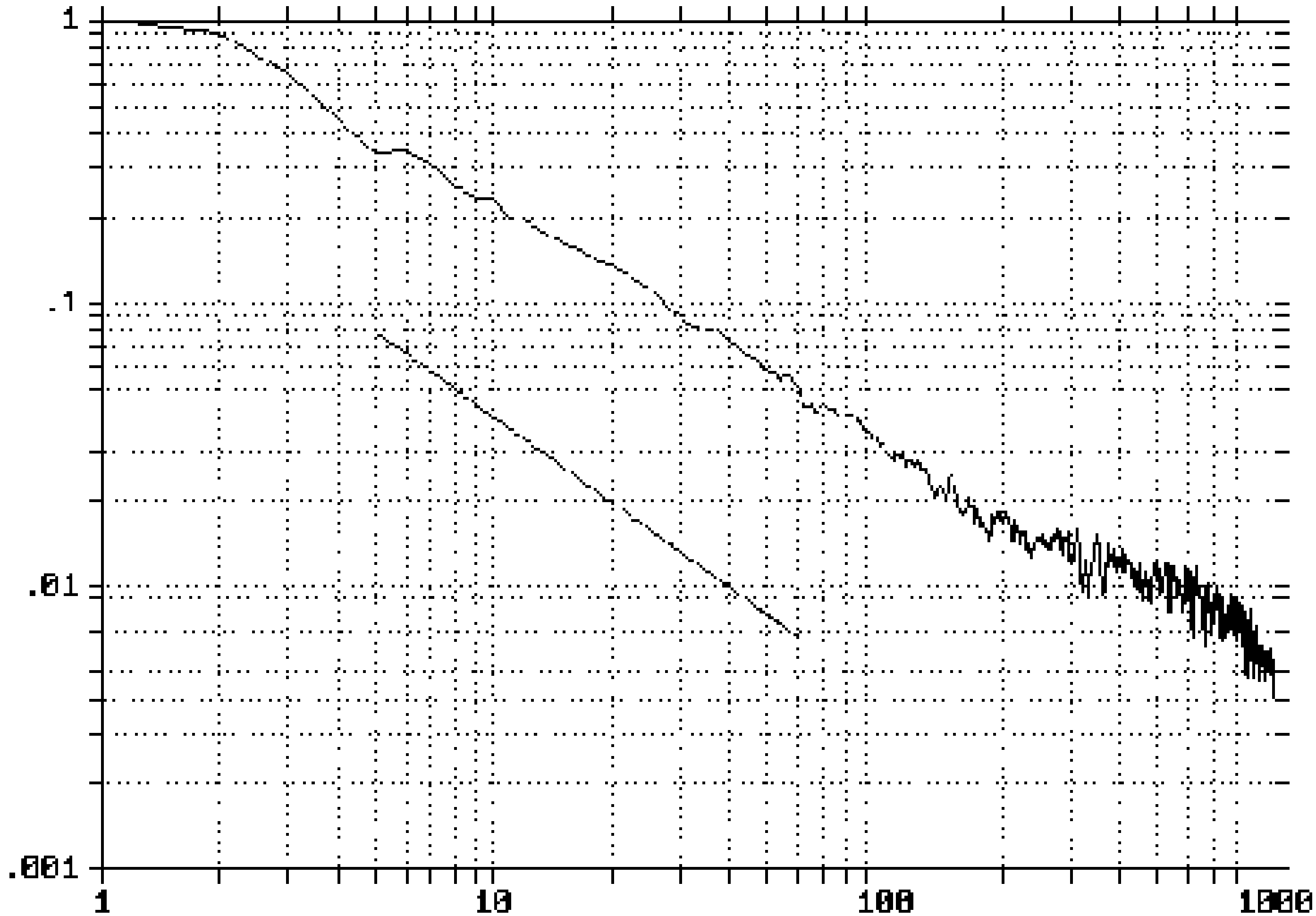
$$\tau_2 \approx 1.12 \pm 0.05$$
$$\tau_3 \approx 1.37$$

Die genauen Konstanten sind also geometrieabhängig.

Beobachtung: Bei allen Simulationen bildet sich eine Durchschnittssteigung des Hangs heraus.

Diese scheint einen kritischen Wert darzustellen.

Lawinenverteilung



Skalengesetze

Frage: Gilt eine ähnliche Gesetzmäßigkeit auch für echte Lawinen?

Antwort: Ja. Auch reale granulare Systeme lassen sich durch Skalengesetze beschreiben.

Unter Skalengesetzen versteht man exponentielle Gesetzmäßigkeiten und Potenzgesetze (polynomiale Gesetze).

Potenzgesetze gelten auf allen Größenskalen gleichsam. Man spricht von Skaleninvarianz.

Drei Typen von Potenzgesetzen

1. Frequenzdistributionen

$$\boxed{P(f) \sim f^{-\alpha}}$$

spektrale Energiedichte P bei einer Frequenz f

2. Größendistributionen

$$\boxed{N(s) \sim s^{-\tau}}$$

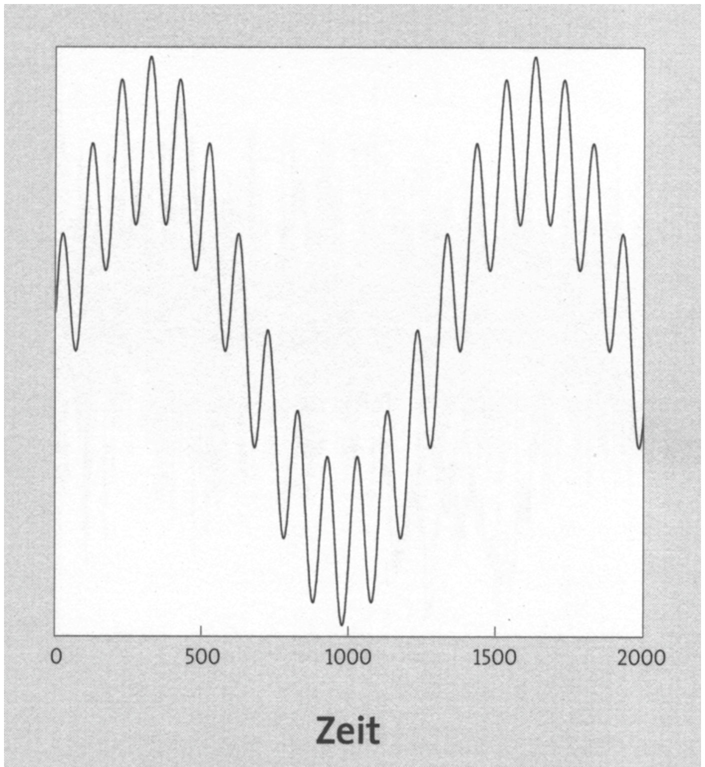
Anzahl N von Ereignissen der Größe s

3. Zeitliche Distributionen

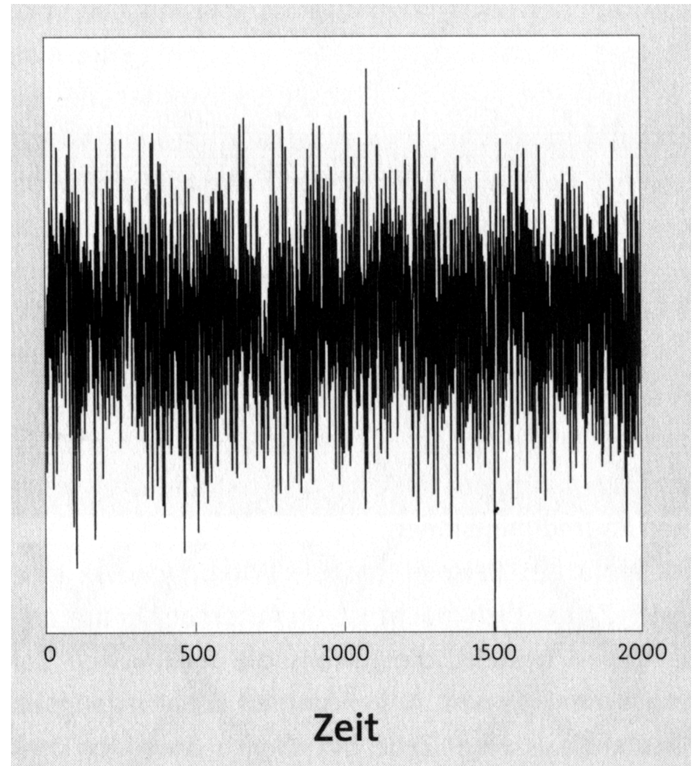
$$\boxed{N(t) \sim t^{-\gamma}}$$

Anzahl N von Ereignissen bei Dauer/Intervall t

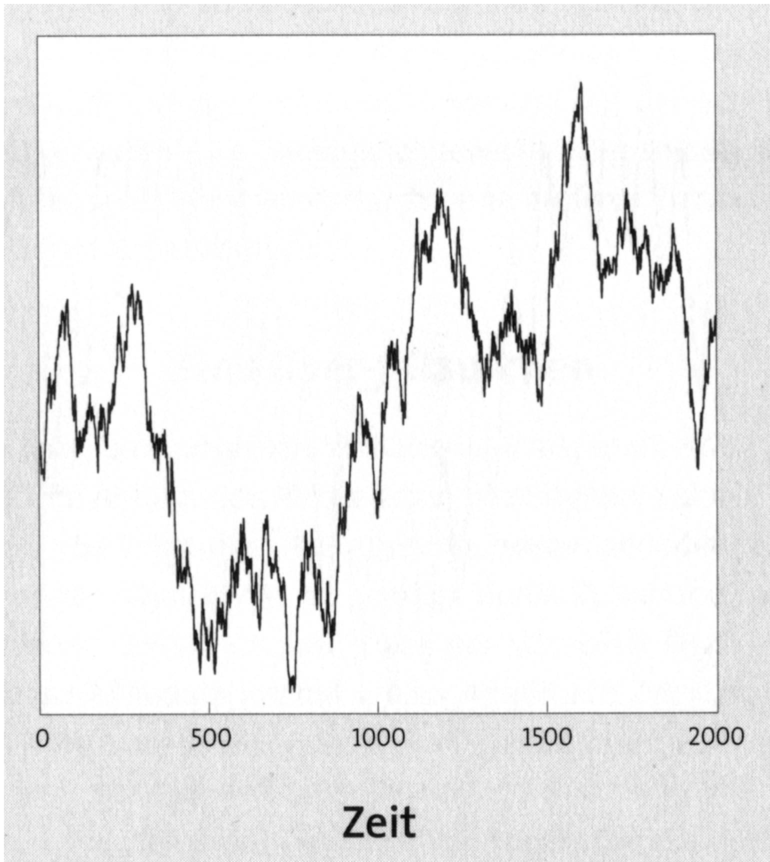
1-über-f-Rauschen



Überlagerung zweier Sinus-Schwingungen



Weißes Rauschen

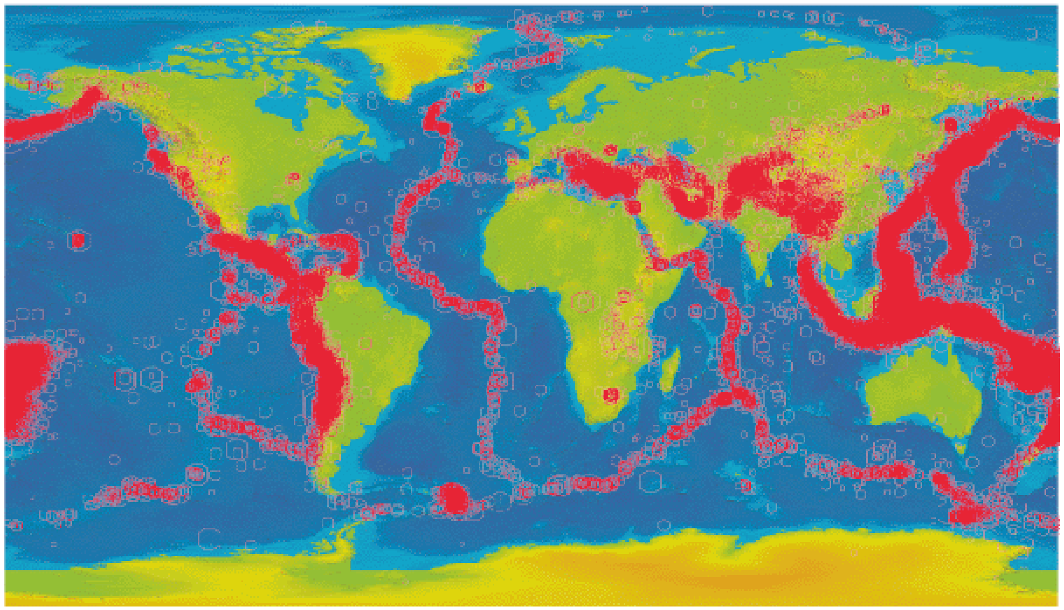


„Rosa“ Rauschen

Beim 1/f-Rauschen nimmt das Amplitudenquadrat umgekehrt proportional zur Frequenz ab.

- **skalenfrei**
- **selbstähnlich (fraktal in der Zeit)**
- **bei akustischen Signalen subjektiv eine Gleichverteilung**

Gutenberg-Richter-Gesetz



Weltweite Verteilung von Erdbeben

$M = 5$: spürbar, aufweckend
$M = 6$: erste leichte Schäden ~ 10 km
$M = 7$: schwere Schäden ~ 100 km

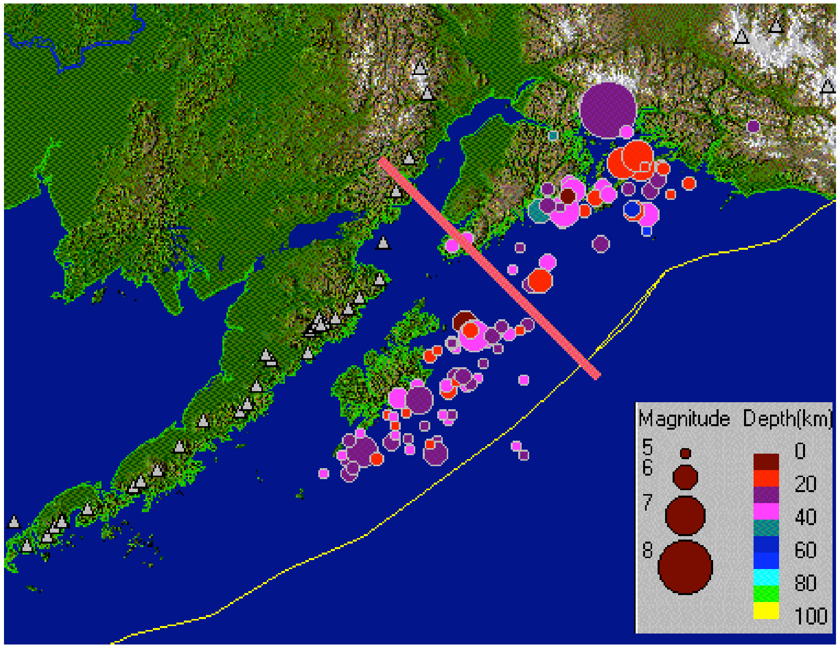
Richter-Skala:

$$M \sim \log A_{max}$$

(logarithmisch)

$M < 5$: messbar, hat aber in der Regel keinerlei Auswirkungen

$M > 7$: enorme Verwüstungen



„Good Friday Earthquake“ am 27. März 1964 in Alaska (Stärke $M = 9.2$, 125 Tote)

Gutenberg-Richter-Gesetz:

$$\boxed{N(M) \sim 10^{-bM}}$$

(1956)

Der Wert von *b* variiert von Region zu Region, aber es gilt $b \approx 1$.

Also unterliegt auch die Größenverteilung von Erdbeben einem einfachen Potenzgesetz.

Andere Beispiele

- **Turbulente Strömungen**
- **Wärmerauschen**
- **Salpeter-Gesetz**
- **Strahlungsintensität bei Quasaren**
- **Metabolismusrate**
- **Kursschwankungen**
- **Benfordsches Gesetz**
- **Bradfords Gesetz**
- **Pareto-Verteilung**

Allen diesen Phänomenen liegen Skalengesetze zugrunde, obwohl sie sehr unterschiedlich sind.

Das Zipf´sche Gesetz

Zipf´s Law

George K. Zipf
(1902-1950)

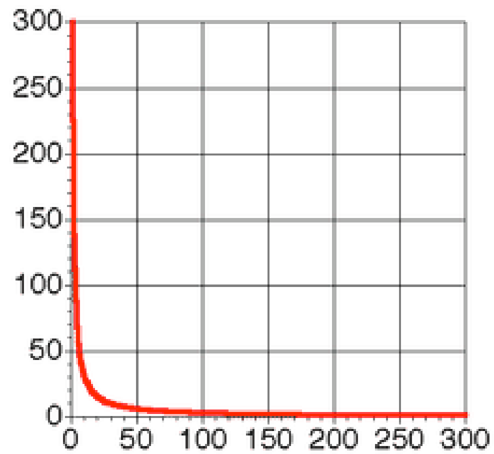
- Häufigkeit P eines Ereignisses
- Rang i, bestimmt durch P

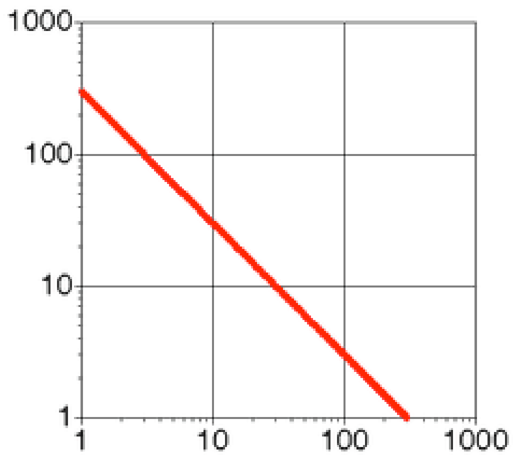
Dann ist P eine Funktion von i in Form eines Potenzgesetzes:

$$\boxed{P(i) = C\, i^{-a}} \qquad a \approx 1$$

Zipf-Mandelbrot: $$P(i) = C\,(i + b)^{-a}$$

Zipf-Verteilungen





- wenige Elemente sehr häufig
- eine mittlere Anzahl mittelhäufig
- sehr viele Elemente sehr selten

1. Beispiel: quantitative Linguistik

Die Häufigkeit von Wörtern in der menschlichen Sprache bildet eine Zipf-Verteilung.

Sei $a = 1$. Dann gilt für die relative Häufigkeit

$$i\,P(i) = C \quad \text{und} \quad \Sigma_i\, P(i) = 1$$

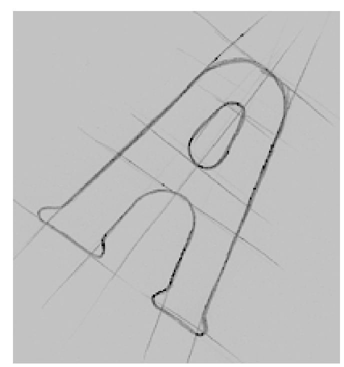
Dann ist $\sum_i \frac{1}{i} C = 1$ und $C = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{i}}$

Rang	Wort	Häufigkeit	C/Rang
1	UND	0.08427	0.14027
2	DIE	0.05390	0.07014
3	DER	0.05383	0.04676
4	IN	0.02164	0.03507
5	WIR	0.01676	0.02805
6	ZU	0.01564	0.02338
7	FÜR	0.01536	0.02004
8	SIE	0.01306	0.01753
9	VON	0.01285	0.01559
10	DEN	0.01208	0.01403

Top 10 der Wörter in einem deutschen Text

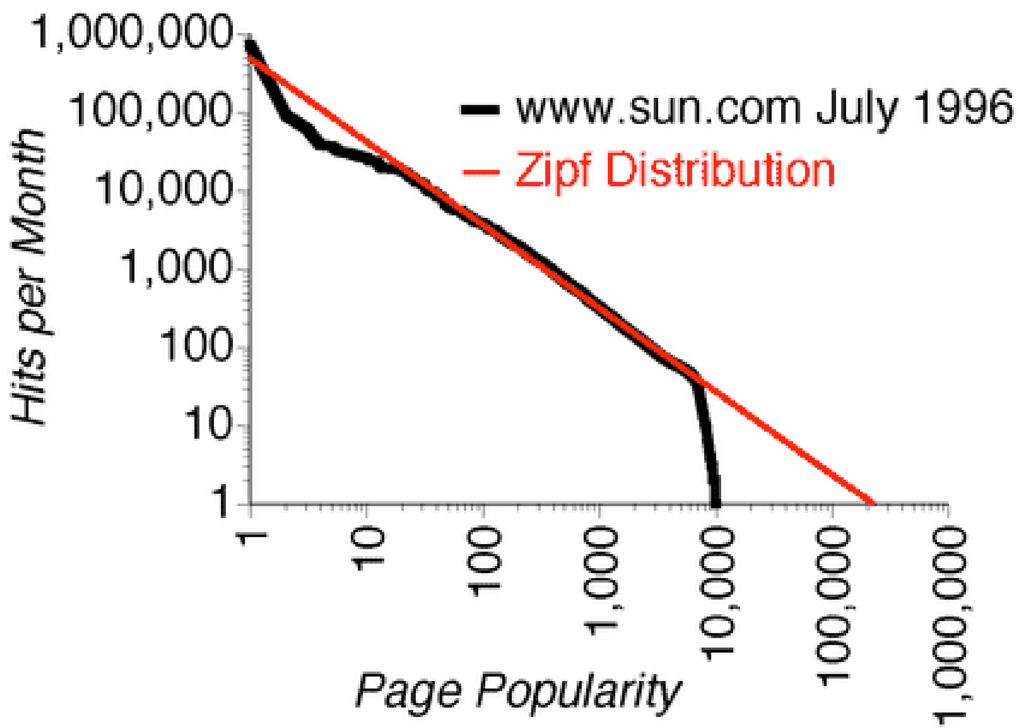
$C = 1/7.13$
$= 0.140$

(bei Beschränkung auf die ersten 700 sortierten Ränge)



Quelle: Wikipedia

2. Beispiel: Anfragewahrscheinlichkeit von Webseiten



Verteilung für diskrete Werte: Zipf

Verteilung für kontinuierliche Werte: Pareto

Kritikalität: Phasenübergänge

Ein Phasenübergang ist eine qualitative Änderung eines Systems bei nur geringfügiger quantitativer Änderung des sogenannten Kontrollparameters.

Man unterscheidet Phasenübergänge
- erster Art (Entropie macht einen Sprung)
- zweiter Art (Entropie stetig)

Beispiele:
- Änderung des Aggregatzustandes (z.B. Schmelzen)
- Magnetisierung eines Ferromagneten

Der Ordnungsparameter ist hier die Magnetisierung, der Kontrollparameter die Temperatur.

Magnetisierung

$$\boxed{M(T) = M_0\,(1 - T/T_C)^\gamma}$$

Dabei ist T_C die Curie-Temperatur.

Im Fall $T \approx T_C$ gibt es langreichweitige Korrelationen.

In der Nähe der Curie-Temperatur ist das im Gleichgewicht befindliche System in einem kritischen Zustand.

Der Ordnungsparameter wird im Näherungsbereich durch den Kontrollparameter festgelegt.

Dieser muss von außen justiert werden. Ein solches System ändert nicht von selbst seine Phase.

Prinzip der Universalität

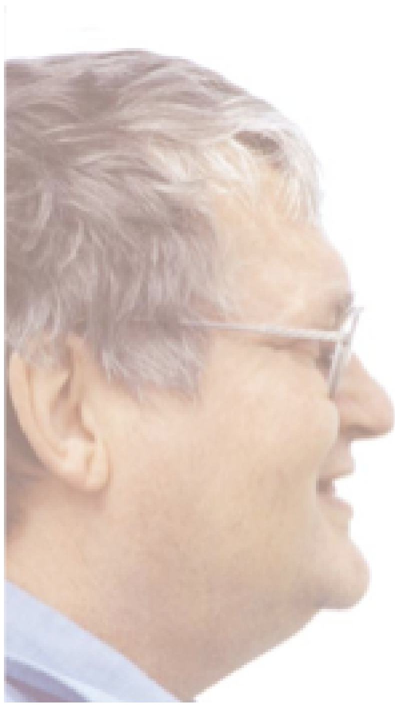
Die Universalität solcher Phasenübergänge besteht darin, dass sie sich alle in gleicher Weise durch Skalengesetze beschreiben lassen, vorausgesetzt, Größen wie der Ordnungsparameter sind bekannt.

Universelles Phänomen: Nicht durch Systemdetails bestimmt, sondern durch wenige globale Größen

Universalitätsklassen ermöglichen es, einfache mathematische Modellsysteme statt der realen komplexen Probleme zu betrachten.

Es bleibt die Frage: Woher kommt die Universalität bei Systemen im Nichtgleichgewicht?

Selbstorganisierte Kritikalität



Per Bak
(1987)

These: Ausgedehnte Systeme im Nichtgleichgewicht neigen dazu, selbst einen kritischen Zustand fernab vom Gleichgewicht zu entwickeln.

Der Prozess der Selbstorganisation zur Kritikalität kann sich über sehr lange Zeitspannen erstrecken, bis das kritische Stadium schließlich erreicht ist.

Historischer Aspekt: Beispiel Erdbeben

Wechselspiel: Ein System nähert sich dem kritischen Zustand immer wieder an, dieser ist aber instabil.

Starke These: Komplexität ist gleich Kritikalität.
In jedem komplexen System lassen sich kritische Zustände identifizieren.

Nach Bak ist der selbstorganisiert kritische Zustand der bestmögliche, den ein System erreichen kann (auch wenn er nicht optimal ist).

Bei SOC beobachtet man Skalengesetze.

Konsequenz: Katastrophen sind systemimmanent, unvorhersehbar und unvermeidlich!

Voraussetzungen für SOC

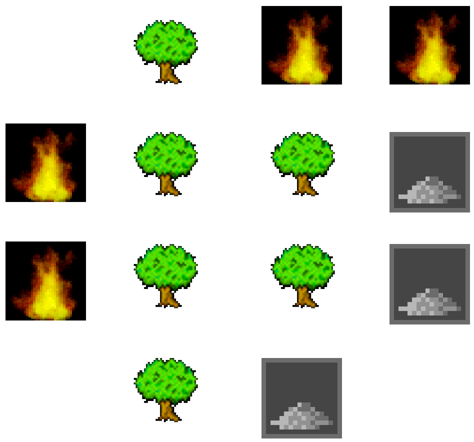
- dynamisches System mit der Möglichkeit zur Selbstorganisation (lokale Interaktion, lokale Freiheitsgrade der einzelnen Agenten)
- verlustbehafteter Transport von Fluktuationen (Beispiele: Sand, Information)
- Fluktuationen und Rauschen müssen das ganze System erreichen können
- Separation der Zeitskalen: Steuerung des Systems mit infinitesimaler, aber nicht verschwindender Steuerungsrate (Frequenz)

Waldbrände

Forest Fire Model

Zellulärer Automat:

- **Zweidimensionales Gitter**
- **Drei Zustände: *T*, *B*, *A***



Zustandsübergangsregeln:

$$B \longrightarrow A$$
$$B\ T \longrightarrow A\ B$$

Nicht-deterministische Regeln:

$$p < 1: \quad A \longrightarrow T$$
$$f << 1: \quad T \longrightarrow B$$

Ohne die Regel $T \longrightarrow B$ mit Wahrscheinlichkeit f ergibt sich kein kritisches Verhalten, sondern ein periodisches, wellenartiges Verhalten.
Es fehlt eine Steuerung des Systems.

Mit der Zeit erreicht die mittlere Baumdichte $\overline{\rho}$ einen kritischen, aber stabilen Wert. Um SOC-Verhalten zu erzeugen, müssen die Cluster brennender Bäume verschwinden. Man erhält die Steuerungsbedingung:

$$f << p$$

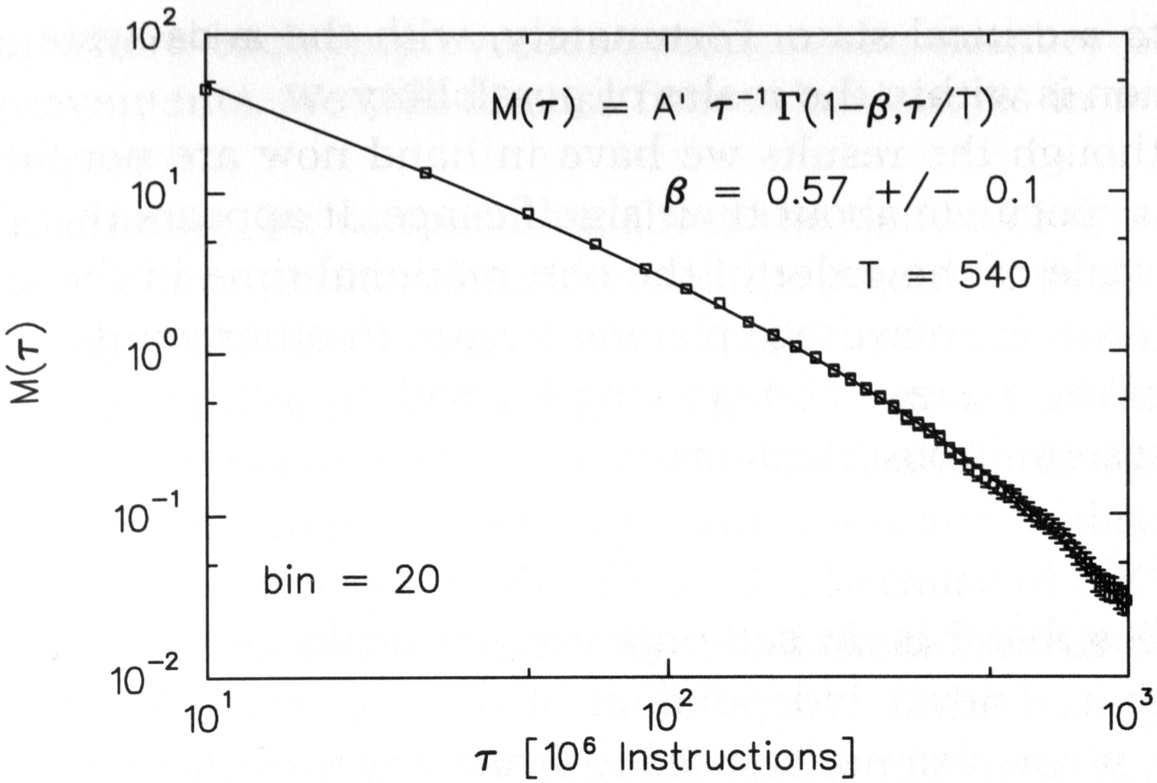
Um selbstorganisiert kritisches Verhalten zu beobachten, muss also auch hier eine infinitesimale Steuerungsrate vorliegen.

SOC und künstliches Leben

Lassen sich Evolutionsszenarien durch SOC erklären?

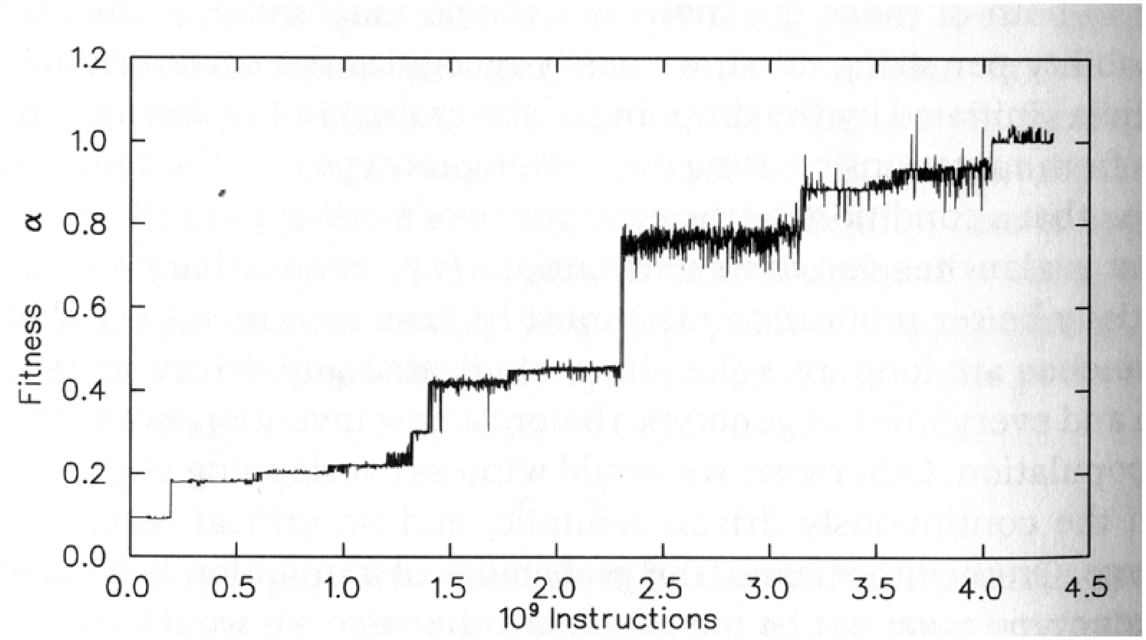
Folgendes spricht dafür:

- **verlustbehafteter Transport von Information**
- **Lawinen sind hier Mutationen. Sie initiieren Phasenübergänge erster Art.**
- **Die Population wird durch eine Quasispezies dominiert, welche die beste Replikationsrate aller Lebewesen besitzt.**
- **Der kritische Wert ist dabei die mittlere Wachstumsrate $\gamma \approx 0$.**
- **Die Zeit zwischen Mutationen scheint als Potenzgesetz verteilt zu sein.**



Verteilung der Epochenlängen

Es ist also womöglich kein evolutionärer Sprung zu groß, um nicht durch übliche Mutationen erklärt werden zu können.



„Devil‘s Staircase“

Verlauf der Fitnesskurve

- Die durchschnittliche Plateaulänge in einer Fitnesskurve ist immer abhängig von der Zeit, in der wir das System betrachten (Skaleninvarianz).
- Die Fraktalität der Kurve deutet an, dass die Betrachtung kleiner Zeitskalen ausreicht.

Offene Fragen

- SOC noch etwas mysteriös, Thesen von Per Bak zum Teil umstritten
- noch keine vereinheitlichte Theorie
- Zusammenspiel von Ordnungsparameter und Kontrollparameter bei SOC noch nicht genau verstanden
- beschreibbar durch Theorie von Phasenübergängen zweiter Art, sollten aber Phasenübergänge erster Art sein
- Umstände (notwenige und hinreichende Bedingungen) für SOC unklar

Die Forschung an SOC ist also weiterhin hochaktuell.