Kapitel 2: Elementare Datenstrukturen

1. Elementare und strukturierte Datentypen
2. Stapel und Warteschlangen
3. Listen
4. Bäume

2.1 Elementare und Strukturierte Datentypen

- **Abstrakter Datentyp (ADT) / Datenstruktur:**
  - Ein oder Mehrere Objekt(e) (Beschreibung der Daten) und
  - Operationen (Manipulation der Daten)
- Beispiel: Datum
  - Objekt D: Tag.Monat.Jahr — 1.11.2002
  - Objekt T: Tage — 17 Tage
  - Operationen:
    - Addition: D x T → D — 1.11.2002 + 5 Tage → 6.11.2002
    - Subtraktion 1: D x T → D — 1.11.2002 – 5 Tage → 27.10.2002
    - Subtraktion 2: D x D → T — 1.11.2002 – 27.10.2002 → 5 Tage
    - IstFeiertag: D → {wahr,falsch} — IstFeiertag(1.11.2002) →falsch (in HH)
- Entwurf von Datentypen (konstruktive Methode):
  - Definition der Objekte (Bestehend aus elementaren Datentypen)
  - Definition aller Operationen (Operanden, Ergebnis, Spezifikation)

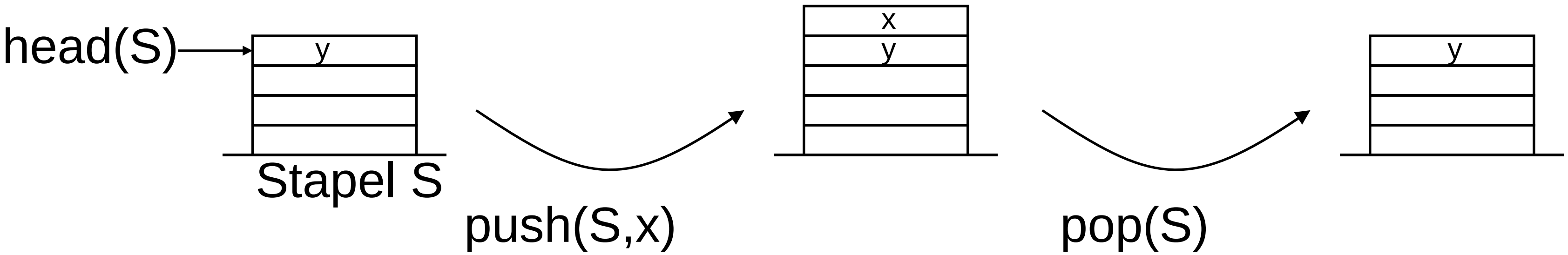
Elementare und strukturierte Datentypen

- **Elementare Datentypen:** ADTs, die typischerweise (in einer Programmiersprache) zur Verfügung stehen:
  - INTEGER: ganze Zahlen
  - REAL: reelle Zahlen
  - BOOLEAN: Wahrheitswerte {TRUE, FALSE}
  - CHAR: Zeichen

  [Achtung: in Cormen et al wird dieser Begriff anders verwendet!]
- **Strukturierter Datentyp:** aus elementaren (oder strukturierten!) Datentypen zusammengesetzte Datentypen, wichtige Strukturierungsmethoden:
  - ARRAY: über natürliche Zahlen indizierte Menge
  - RECORD/STRUCT: Gruppierung ggf. verschiedener Datentypen
  - ENUM: konstante Wertemenge
  - UNION: Vereinigung verschiedener Datentypen
- **Referenzen:** Verweise auf andere Daten (Zeiger, Adressen)

2.2 Stapel

- **LIFO-Prinzip** (last-in first-out): Speicherung mit Zugriffsmöglichkeit nur auf dem zuletzt gespeicherten Objekt
- Stapel (Stack): linearer Speicher mit folgenden Operationen
  - **head**(S): Wert des ‚obersten' Elements
  - **push**(S,x): Lege x oben auf den Stapel
  - **pop**(S): Entferne oberstes Element vom Stapel



- Implementierung: Sequenzielle oder verkettete Speicherung

Stapel: Sequentielle Speicherung

- Datenstruktur:
  stack S : Array mit Elementen 1,..,MAXE
  S.top : Index des ‚obersten Elements'

- EMPTY-STACK(S)
```
 if( S.top == 0 ) return TRUE
 else             return FALSE
```

- PUSH(S, x)
```
 if( S.top == MAXE ) error „Überlauf!"
 else S.top = S.top+1
      S[S.top] = x
```

- POP(S)
```
 if( EMPTY-STACK(S) ) error „Unterlauf!"
 else S.top = S.top-1
      return S[S.top+1]
```

- HEAD(S)
```
 if( EMPTY-STACK(S) ) error „Unterlauf!"
 else return S[S.top]
```

Stapel: Anwendung

- Problem: Erkennung wohlgeformter Klammerausdrücke
  - finde zu jeder schließenden Klammer die zugehörige öffnende
  - Eingabe Array brackstr[1,...,nofbrack]
  - Ausgabe Array pairno[1,...,nofbrack]
    (Index der öffnenden/schließenden Klammer)

Beispiel:

`index:`	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
`brackstr:`	(	(	)	(	)	(	(	)	(	)	)	)
`pairno:`	12	3	2	5	4	11	8	7	10	9	6	1

- Lösung: speichere Index öffnender Klammern in einem Stack

Stapel: Anwendung

- BRACKETS(brackstr, pairno)

```
// brackstr: array[1,...,nofbrackstr] of char (Eingabe)
// pairno: array[1,...,nofbrackstr] of integer(Ausgabe)

S = INIT();        //  initialisiere Stack S
for p = 1 to nofbrackstr do
  if( brackstr[p] == '(' ) PUSH(S,p)
  else
    if( EMPTY-STACK(S) ) error „Opening bracket missing!"
    else pairno[p] = HEAD(S)
         pairno[HEAD(S)] = p
         POP(S)
if( not EMPTY-STACK(S) ) error „Closing bracket missing!"
else return „Format correct."
```

Stapel: Anwendung

Beispiel:

```
index:      1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12
brackstr: (  (  )  (  )  (  (  )  (  )  )  )
pairno:     0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
                  ↑p
```

Stack
2
1

p=3

Stapel: Anwendung

Beispiel:

index:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
brackstr:	(	(	)	(	)	(	(	)	(	)	)	)
pairno:	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

p

Stack	Stack
2	4
1	1
p=3	p=5

Stapel: Anwendung

Beispiel:

index:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
brackstr:	(	(	)	(	)	(	(	)	(	)	)	)
pairno:	0	3	2	5	4	0	8	7	0	0	0	0

p

Stack	Stack	Stack
		9
2	4	6
1	1	1
p=3	p=5	p=9

Stapel: Anwendung

Beispiel:

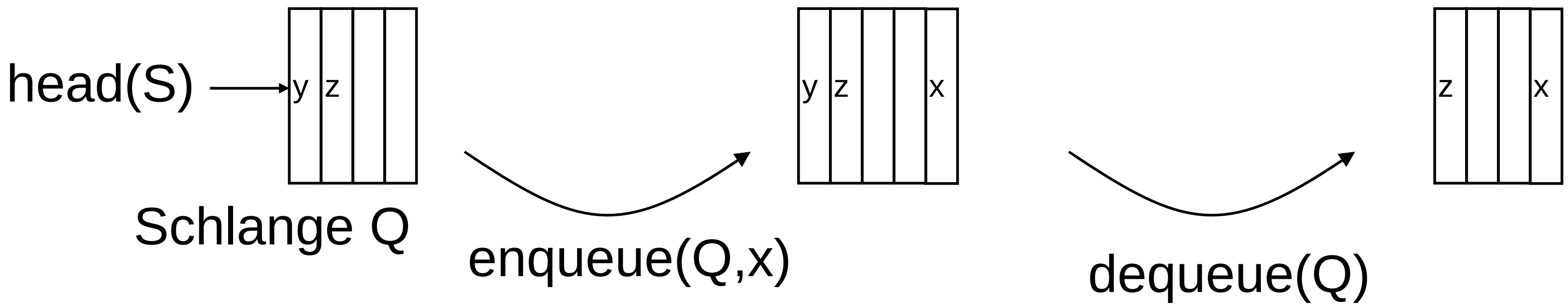
index:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
brackstr:	(	(	)	(	)	(	(	)	(	)	)	)
pairno:	12	3	2	5	4	11	8	7	10	9	6	1

p

		9	
2	4	6	
1	1	1	
Stack	Stack	Stack	Stack
p=3	p=5	p=9	p=13

Schlange

- **FIFO-Prinzip** (first-in first-out): Speicherung mit Zugriffsmöglichkeit nur auf dem zuerst gespeicherten Objekt
- Schlange (Queue): linearer Speicher mit folgenden Operationen
  - **head**(Q): Wert des ‚vordersten' Elements
  - **enqueue**(Q,x): Füge x am Ende der Schlange an
  - **dequeue**(Q): Entferne vorderstes Element der Schlange

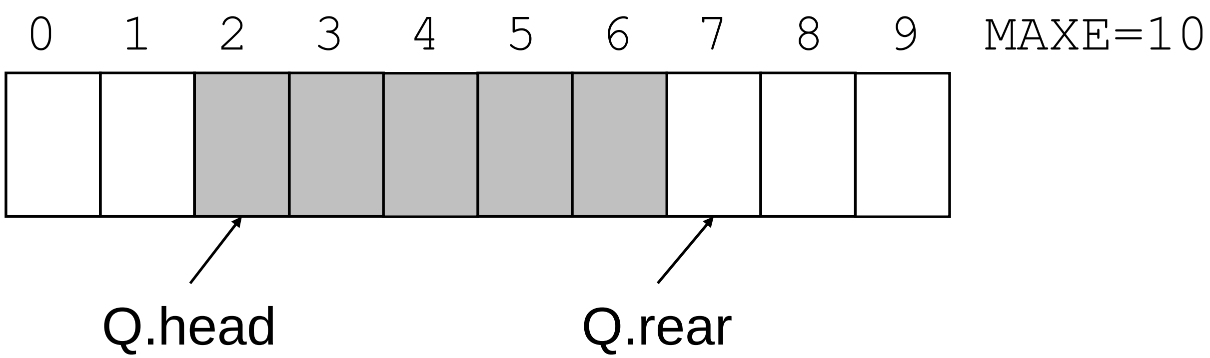


- Implementierung: Sequenzielle oder verkettete Speicherung

Schlange: Sequentielle Speicherung

- Datenstruktur:
  queue Q : Array 0,..,MAXE
  Q.head : Position des ersten Elements
  Q.rear : Pos. des ersten freien Elements (hinter der Schlange)
  // ACHTUNG: Implementierung im Cormen mit Array 1..n

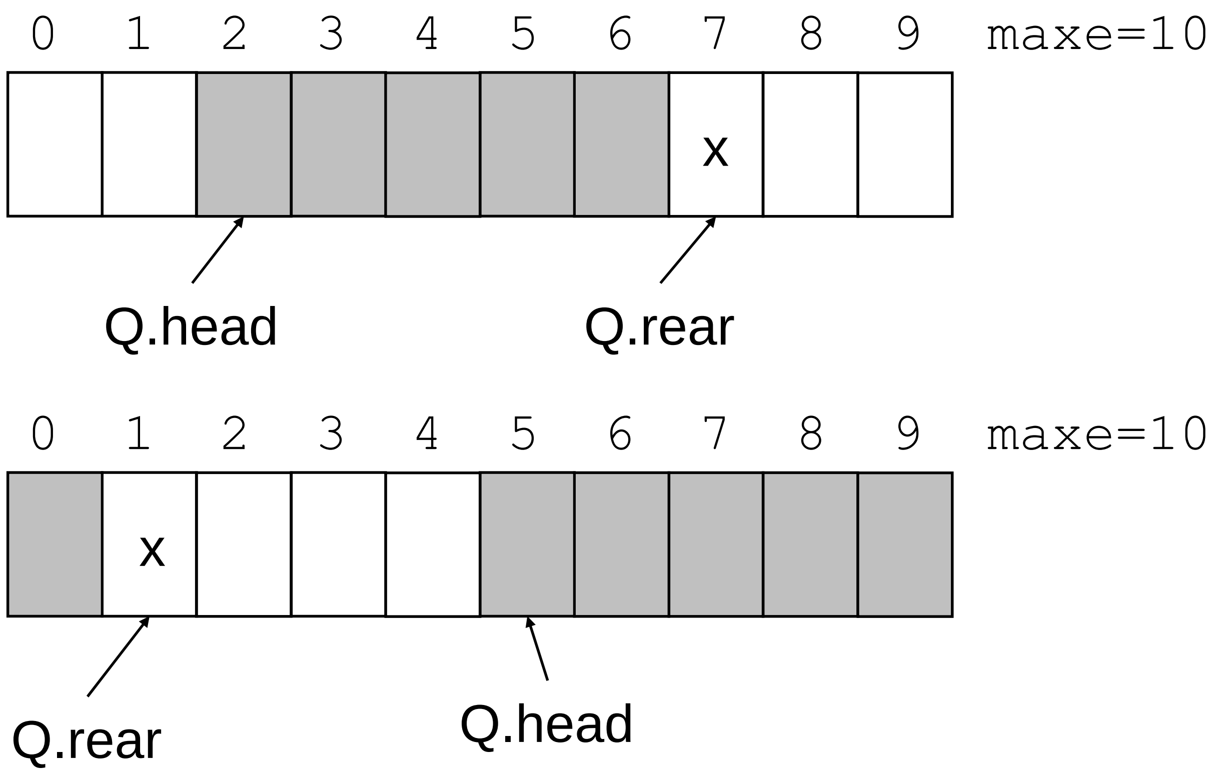
- `INIT(Q)`
```
 Q.head = Q.rear = 1
```
- `EMPTY-QUEUE(Q: queue)`
```
 if( Q.head == Q.rear ) return TRUE
 else return FALSE
```



Schlange: Sequentielle Speicherung

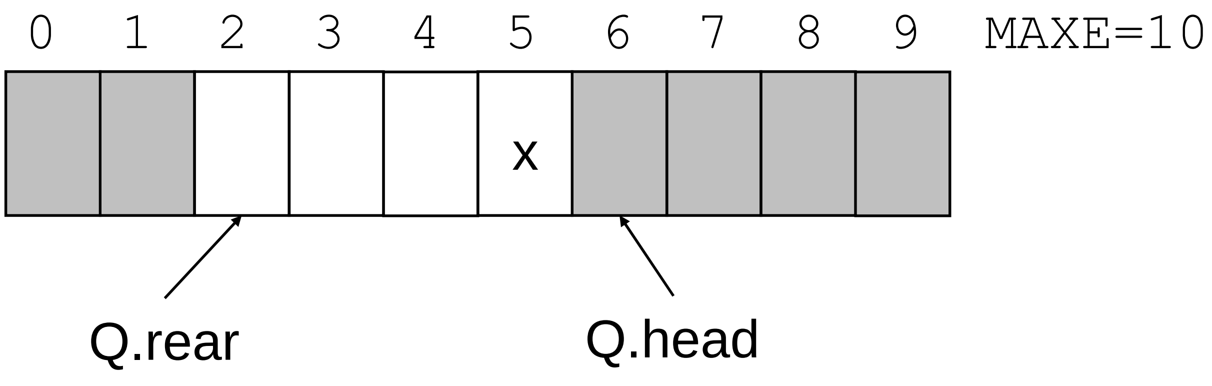
- ENQUEUE(Q, x)

```
if( (Q.rear +1) mod MAXE == Q.head ) error „Overflow!"
else Q[Q.rear] = x
     Q.rear = (Q.rear +1) mod MAXE
```



Schlange: Sequentielle Speicherung

```
DEQUEUE( Q )
if( Q.head == Q.rear ) error „Underflow!“
else x = Q[Q.head]
     Q.head = (Q.head + 1) mod MAXE
     return x
```



2.3 Lineare Listen

- Lineare Liste:
  - Endliche Folge von Elementen eines Grundtyps
  - Elemente haben eine Ordnung: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
  - Grundtyp ist von untergeordneter Bedeutung (hier Integer)
  - Nomenklatur: $L = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$; leere Liste: $\langle\rangle$
- Grundoperationen:
  - Einfügen(x,p,L): einfügen von x an Stelle p in L

    $\langle a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n \rangle \rightarrow \langle a_1, \dots, a_p, x, a_{p+1}, \dots, a_n \rangle$
  - Entfernen(p,L): entfernen des p-ten Elements

    $\langle a_1, \dots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n \rangle \rightarrow \langle a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, \dots, a_n \rangle$
  - Suchen(x,L): Position von Element mit Wert x

    $\langle a_1, \dots, a_{p-1}, x, a_{p+1}, \dots, a_n \rangle \rightarrow p$
  - Zugriff(p,L): Wert des p-ten Elements

    $\langle a_1, \dots, a_{p-1}, x, a_{p+1}, \dots, a_n \rangle \rightarrow x$

Lineare Listen

- weiterführende Operationen:
  - Verketten(L_a,L_b): verbindet zwei Listen zu einer

    $\langle a_1, ..., a_n \rangle \,||\, \langle b_1, ..., b_m \rangle \rightarrow \langle a_1, ..., a_{n,}\ b_1, ..., b_m \rangle$
  - Leer(L): wahr, falls $L = \langle\ \rangle$
  - Länge(L): Anzahl der Elemente in L

    $\langle a_1, ..., a_n \rangle \rightarrow n$
  - Anhängen(L,x): hängt ein neues Element x an L an

    $\langle a_1, ..., a_n \rangle \rightarrow \langle a_1, ..., a_n, x \rangle$
  - Kopf(L), rest(L): zerlegt eine Liste in erstes Element und Rest

    kopf: $\langle a_1, ..., a_n \rangle \rightarrow a_1$ rest: $\langle a_1, ..., a_n \rangle \rightarrow \langle a_2, ..., a_n \rangle$
  - Entfernen2(x,L): Entfernen(Suchen(x,L),L)

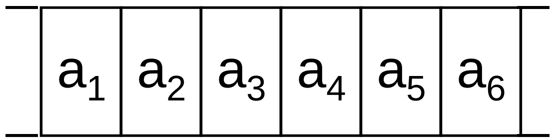
    :

    :

Lineare Listen

- Wie können lineare Listen am effizientesten realisiert werden?

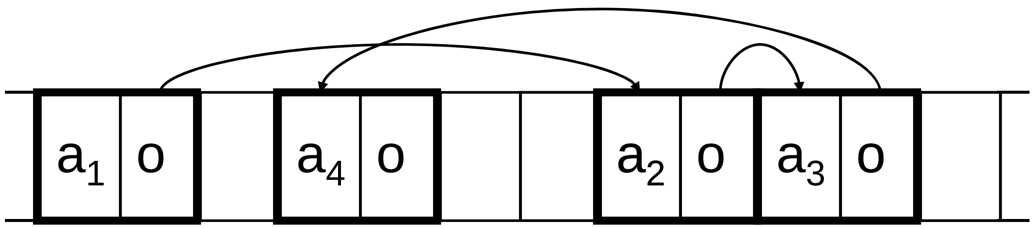
- Variante 1: Sequenzielle Speicherung



Speicher

  - Vorteil: schneller Zugriff   Nachteil: langsames Einfügen

- Variante 2: verkettete Speicherung



Speicher

  - Vorteil: schnelles Einfügen Nachteil: langsamer Zugriff, höherer Speicherbedarf

Lineare Listen: Sequenzielle Speicherung

- Datenstruktur:

  list L : Array 0,..,MAXE; Speicherung ab Position 1

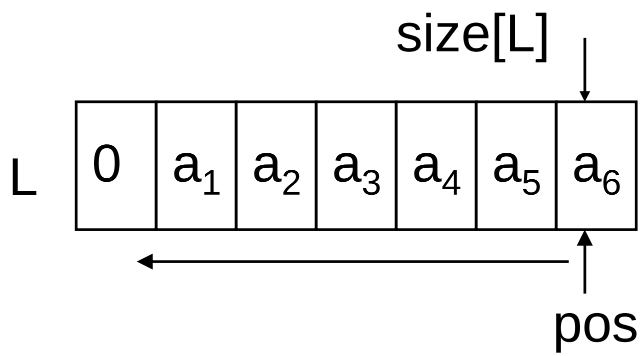
  L.size : Anzahl Elemente in der Liste

Zugriff	direkt über Index p: L.element[p]	O(1)
Suchen	durchlaufe die Liste bis x gefunden wurde	O(N)
Einfügen	verschiebe Elemente p+1,...,n um eine Position nach hinten	O(N)
Entfernen	verschiebe Elemente p+1,...,n um eine Position nach vorne	O(N)
Verketten	füge die Elemente von Liste 2 hinter Liste 1 ein	O(N)

Lineare Listen: Sequentielle Speicherung

- LIST-SEARCH(x, L)

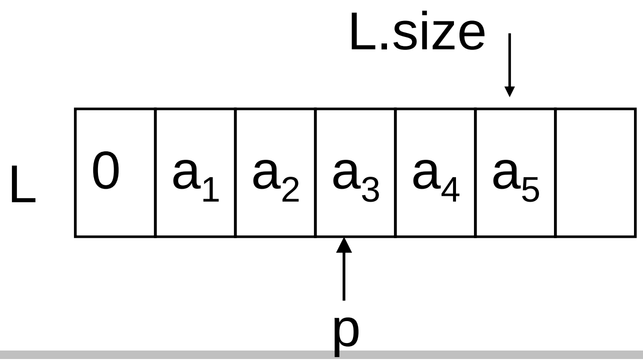
```
L[0] = x
pos = L.size
while L[pos] ≠ x
  pos = pos -1
return pos
```

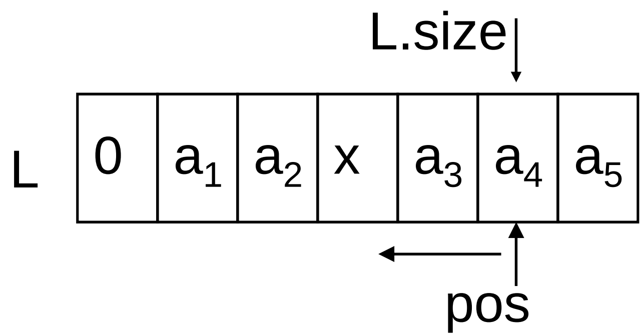


Lineare Listen: Sequentielle Speicherung

- LIST-INSERT(x, p, L)

```
if( L.size == MAXE ) error "Overflow!"
else
  if( p > L.size + 1 or p < 1 ) error "Invalid position!"
  else
    for pos = size[L] downto p
      L[pos+1] = L[pos]
    L[p] = x
    L.size = L.size +1
```

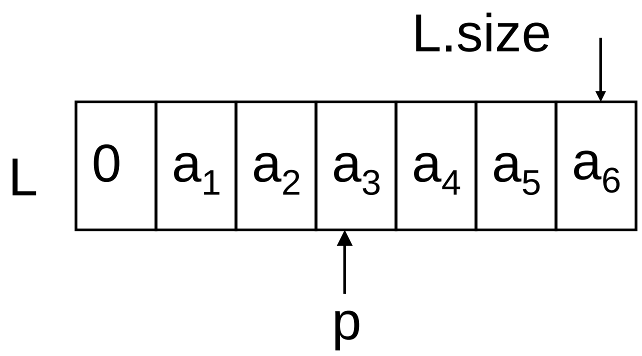


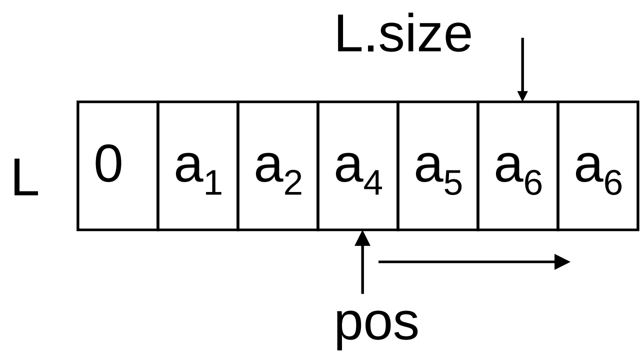


Lineare Listen: Sequentielle Speicherung

- LIST-DELETE(p, L)

```
if( L.size == 0 ) error "Empty list!"
else
  if( p > L.size or p < 1 ) error "Invalid position!"
  else
    L.size = L.size -1
    for pos = p to L.size
      L[pos] = L[pos+1]
```





Lineare Listen: Verkettete Speicherung

- Datenstruktur:

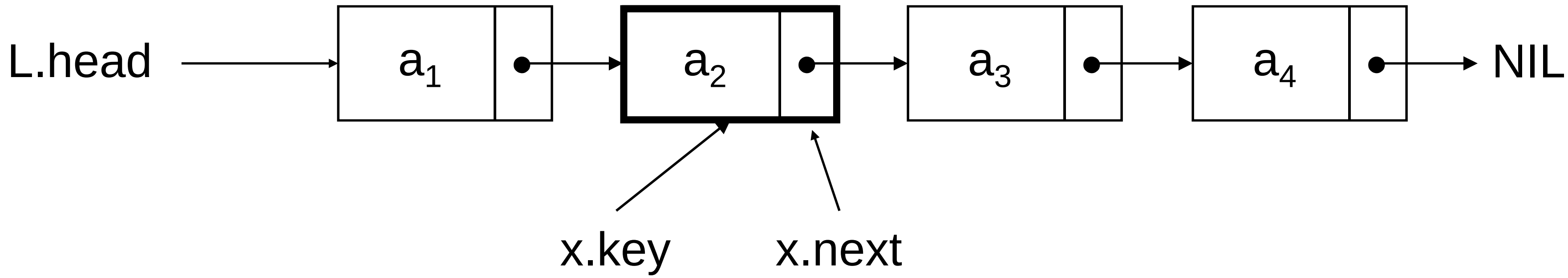
  List node x : Listenelement

  x.key : Schlüssel des Elements x

  x.next : Zeiger auf das Nachfolger-Element von x

  L.head : Zeiger auf das erste Listenelement

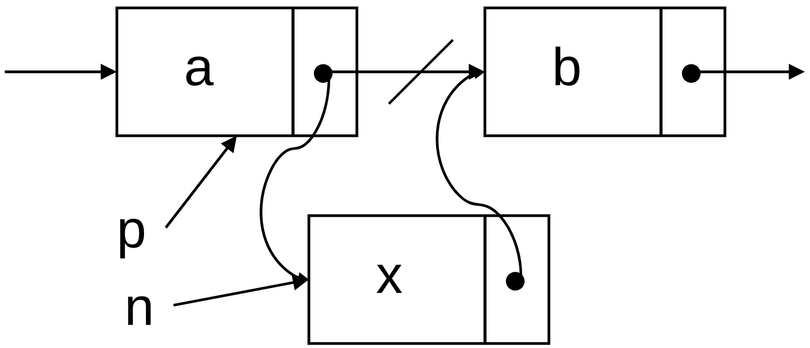
einfach verkettete Liste



Lineare Listen: Verkettete Speicherung

- Durchlaufen der Liste (für Suchen, Einfügen, Entfernen)

```
p = L.head
while p ≠ NIL
     <tue etwas mit p.key >
     p = p.next
:
```



- Einfügen von x hinter Element p:

```
new(n)
n.key  = x
n.next = p.next
p.next = n
```

- Entfernen hinter Position p:

```
:
d = p.next
p.next = p.next.next
delete(d)
```

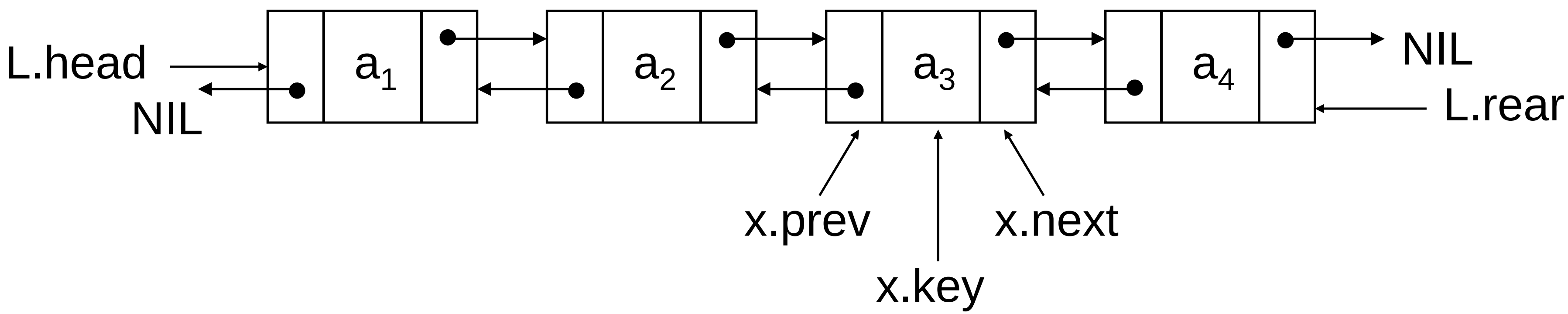
- Achtung: besondere Regeln zum Einfügen/Entfernen am Listenanfang

Lineare Listen: Doppelt verkettete Speicherung

- Datenstruktur:

  List node x : Listenelement
  x.key : Schlüssel des Elements x
  x.next : Zeiger auf das Nachfolger-Element von x
  x.prev : Zeiger auf das Vorgänger-Element von x
  L.head : Zeiger auf das erste Listenelement
  L.rear : Zeiger auf das letzte Listenelement

doppelt verkettete Liste



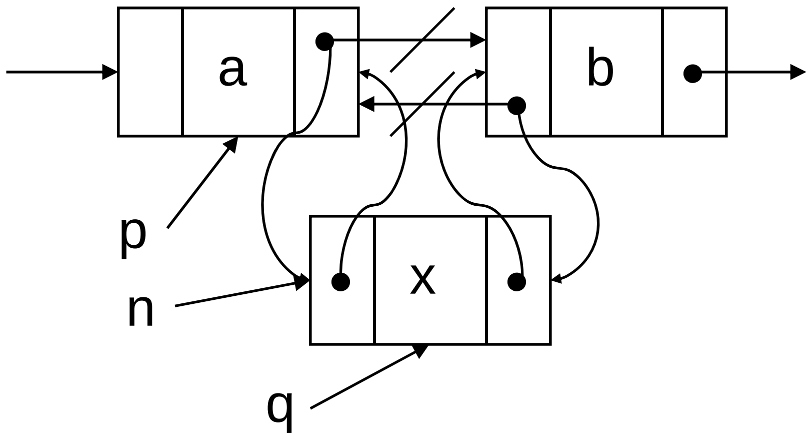
Doppelt-verkettete Listen

- Durchlaufen der Liste vorwärts und rückwärts möglich

```
p = L.head
while p ≠ NIL
  <tue etwas mit p.key>
  p = p.next
```

rückwärts:

head→rear, next→prev



- Einfügen hinter Position p:

```
new(n)
n.key = x
n.next = next[p]
n.prev = p
n.next.prev = n
n.prev.next = n
```

- Entfernen **an** Position q:

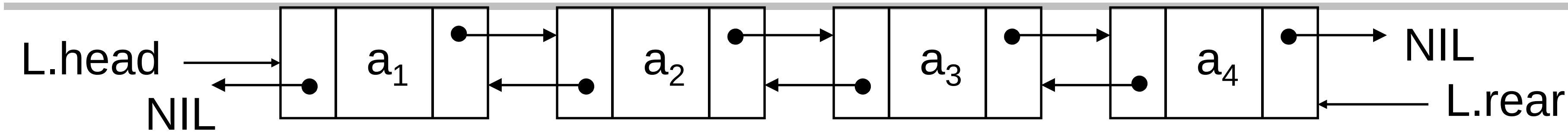
```
:
q.prev.next = q.next
q.next.prev = q.prev
delete(q)
```

Lineare Listen: (Doppelt-)verkettete Speicherung

Zugriff	durchlaufe die Liste bis Position p	O(N) [O(1)]
Suchen	durchlaufe die Liste bis x gefunden wurde	O(N)
Einfügen	erzeuge neues Element, ‚verbiege' Zeiger	O(N) [O(1)]
Entfernen	‚verbiege' Zeiger, lösche das Element	O(N) [O(1)]
Verketten	next-Zeiger des letzten Elements der Liste 1 zeigt auf erstes Element der Liste 2	O(1)

[ ] : falls pos-Zeiger bereits an Position p

Doppelt-verkettete Listen mit Wächter

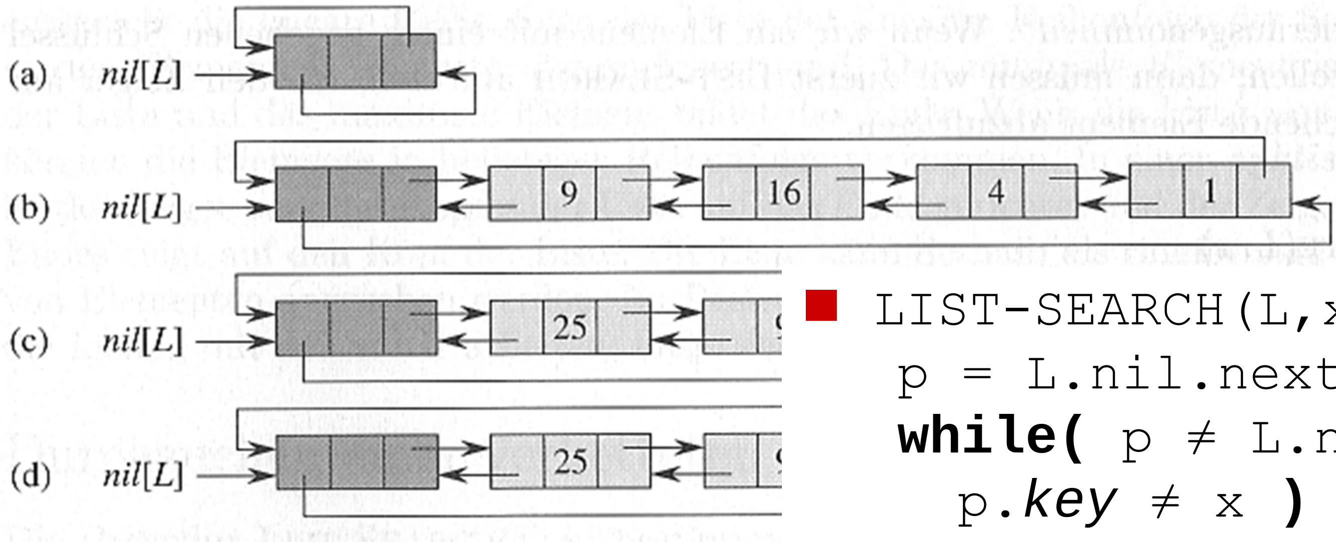


- Spezieller Code für das Einfügen und Löschen am Listenanfang / -ende notwendig:
- `LIST-INSERT(L, x, p)     // fügt Element x hinter p ein`

```
x.prev = p
if p == NIL                        // Listenanfang
  x.next = L.head
  if( L.head == NIL ) L.rear = x // Listenanfang/-ende
  else L.head.prev = x
  L.head = x
else                               // Listenmitte oder -ende
  x.next = p.next
  p.next = x
  if( x.next == NIL ) L.rear = x      // Listenende
  else x.next.prev = x
L.size = L.size + 1
```

Doppelt-verkettete Liste mit Wächter

- Wächter L.nil: spezielles Listenelement, repräsentiert Listenanfang und -ende
  - L.nil.next: Listenanfang (= L.head)
  - L.nil.prev: Listenende (= L.rear)
  - L.nil.key: NIL (speichert keinen Wert)




- ```
  LIST-SEARCH(L,x)
   p = L.nil.next
   while( p ≠ L.nil and
     p.key ≠ x )
     p = next[p]
   return p
  ```
  ```

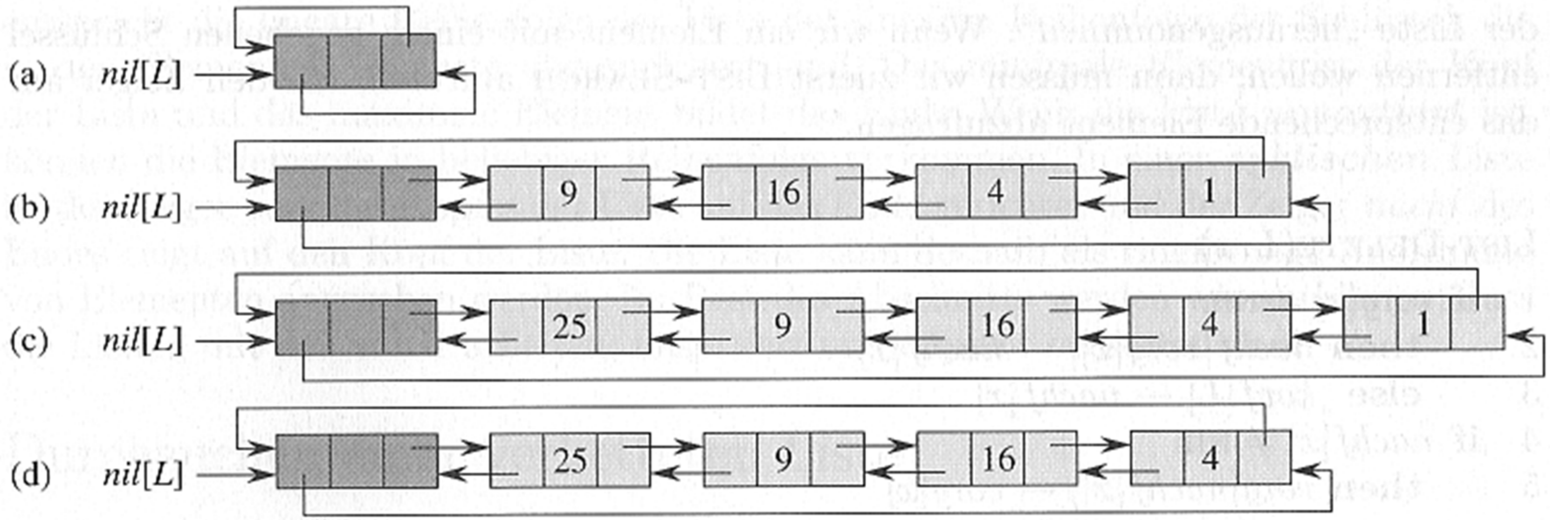
Doppelt-verkettete Liste mit Wächter

- `LIST-INSERT(L, x, p)`

```
x.next = p.next
x.prev = p
x.prev.next = x
x.next.prev = x
```

- `LIST-DELETE(L, x)`

```
x.prev.next = x.next
x.next.prev = x.prev
```

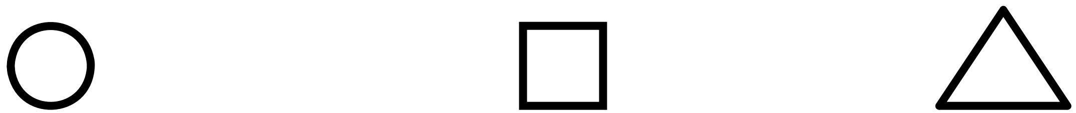


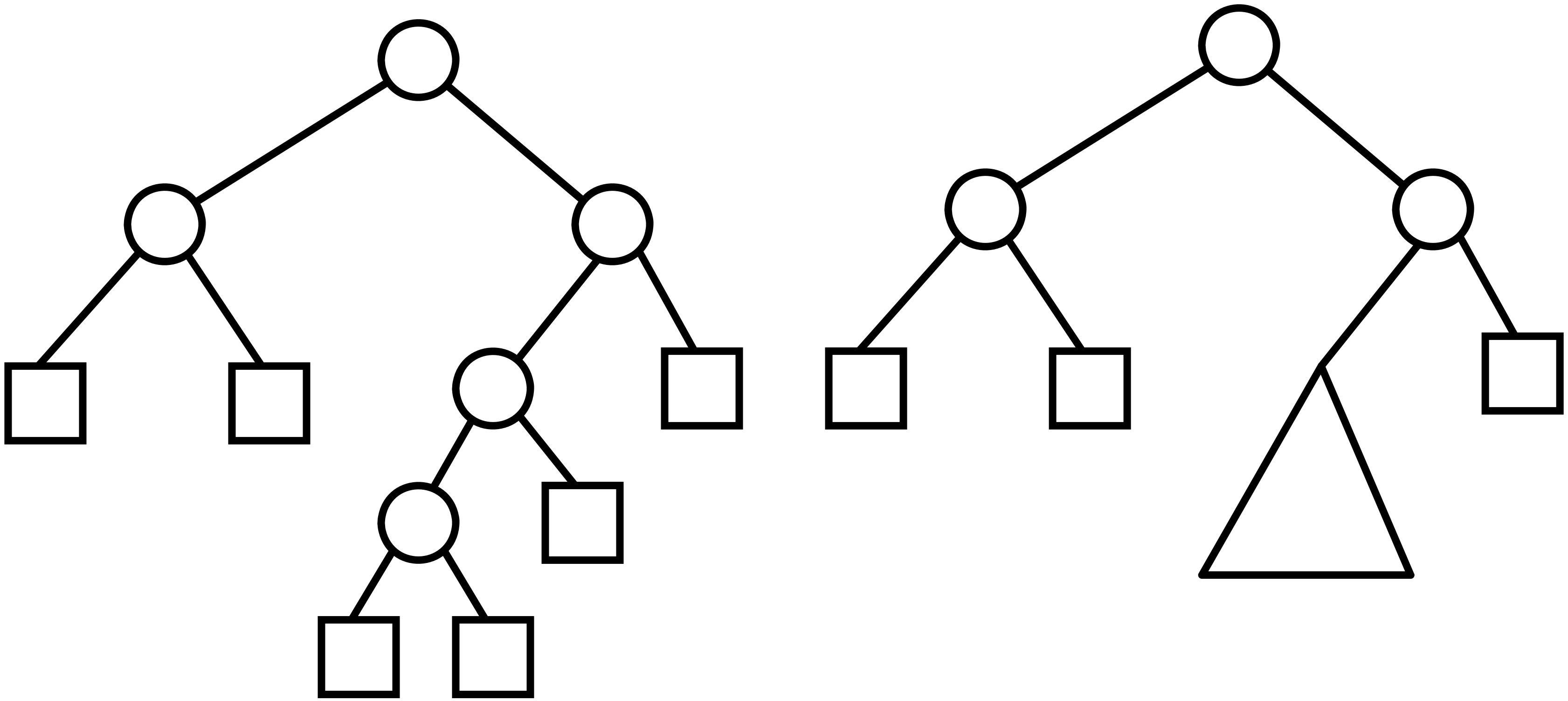
2.4 Bäume

- Datenstruktur (Binär-)Baum:
  - wie Listen, jedoch mit einer endlichen Anzahl (2) Nachfolger
- Nomenklatur:
  - Knoten: Element eines Baums
  - (direkter) Vorgänger: vorheriges Element im Baum (eindeutig!)
    (Vater, Elter, parent)
  - (direkter) Nachfolger: nachfolgendes Element im Baum
    (Sohn, Kind, child)
  - Vorfahre: Knoten auf dem Weg zur Wurzel
  - Nachfahre: Knoten auf dem Weg zu einem Blatt
  - geordneter Baum: Nachfolger haben eine feste Reihenfolge
    (left, right bei Binärbäumen)
  - Wurzel: Knoten ohne Vorgänger
  - innerer Knoten: mit Nachfolger
  - Blatt / externer Knoten: Knoten ohne Nachfolger
  - Ordnung: Anzahl direkter Nachfolger eines Knotens
  - Pfad (v_1,...v_k): Folge von Knoten mit v_i=parent(v_{i-1})

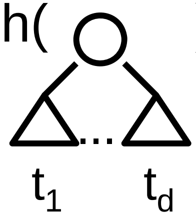
Bäume

- Nomenklatur:
  - innerer Knoten Blatt Teilbaum

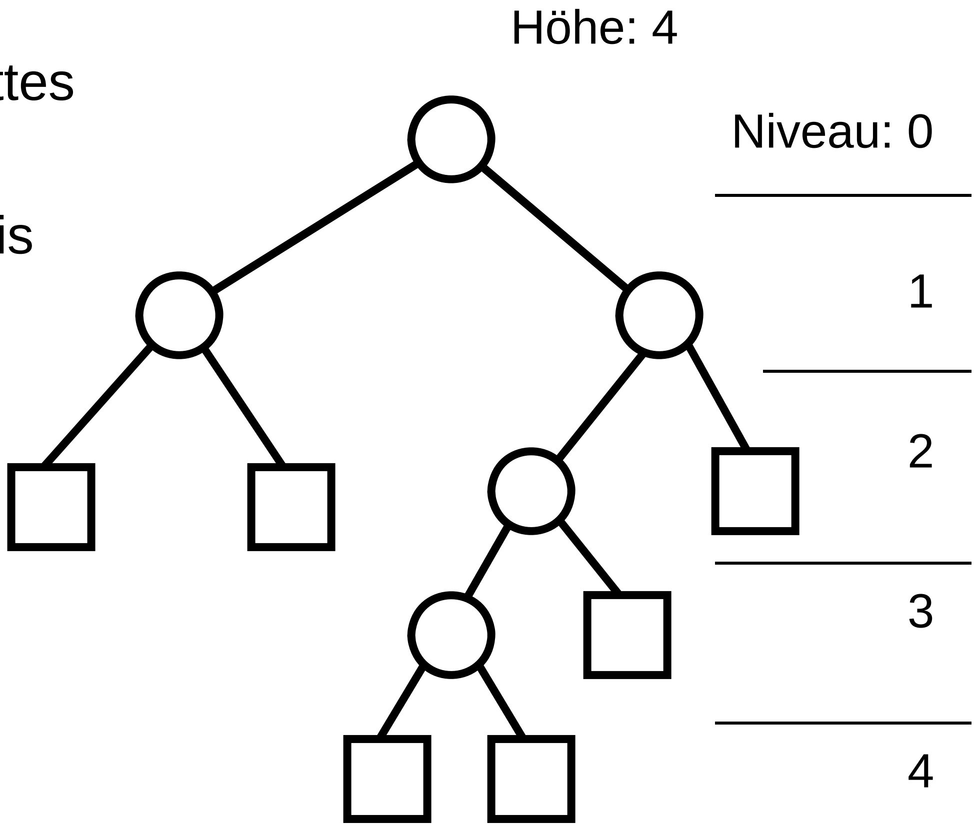




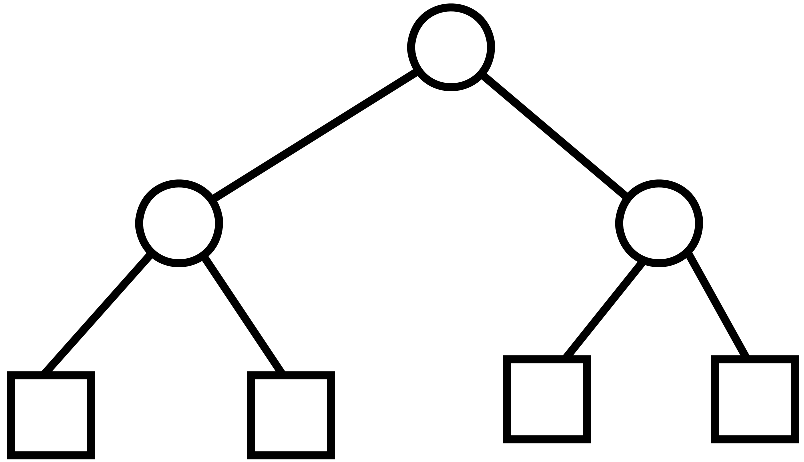
Bäume: Höhen und Tiefen

- Höhe eines Baums: (rekursive Definition)
  - $h(\square) = 0$;   h() = $\max\{h(t_1),\ldots,h(t_d)\} + 1$

  - oder: max. Tiefe eines Blattes
- Tiefe eines Knotens k:
  - Anzahl der Kanten von k bis zur Wurzel
- Niveau / Ebene i:
  - alle Knoten der Tiefe i



Bäume: Zahlen

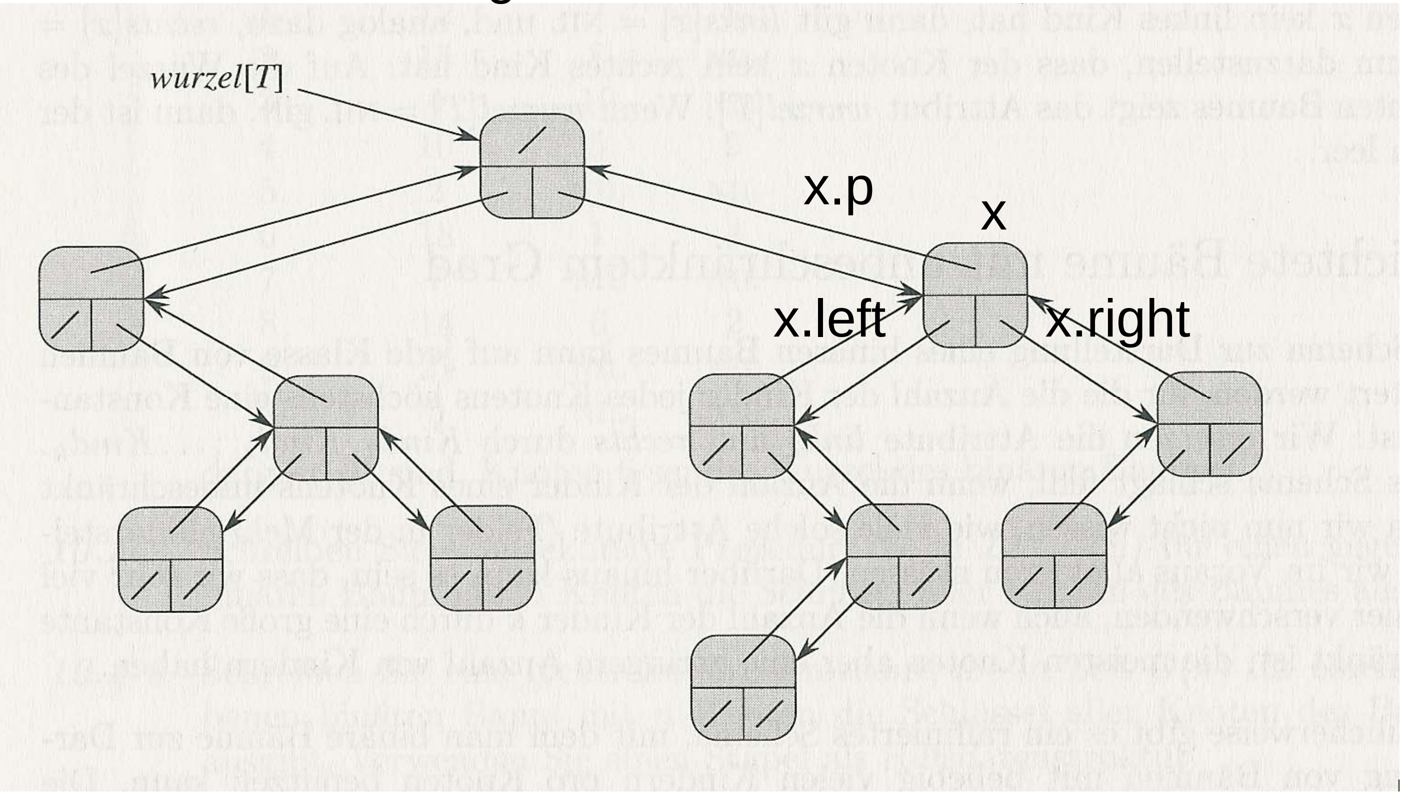


- Vollständiger Binärbaum der Höhe h:
  - auf jedem Niveau die maximal mögliche Anzahl Knoten
  - alle Blätter auf Niveau h
- Für einen vollst. Binärbaum der Höhe h gilt:
  - Anzahl Knoten auf Ebene i: 2^i
  - Anzahl der Blätter: 2^h
  - Anzahl der Knoten: $|K| = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$
  - zur Speicherung von |K| Knoten benötigt man einen Binärbaum der Höhe:

$$h = \log_2\left(\frac{|K|+1}{2}\right) = \log_2(|K|+1) - 1 = \Theta(\log |K|)$$

Darstellung von binären Bäumen

- T.root : Wurzel des Baums T
- Sei x ein Knoten des Baumes, dann ist
  - x.p : Vorgänger / Vater von x
  - x.left : linker Nachfolger / Sohn von x
  - x.right : rechter Nachfolger / Sohn von x



Darstellung von Bäumen mit unbeschränktem Grad

- Vermeidung von Nachfolger Listen/Arrays durch *left-child/right-sibling* Repräsentation:
  - x.p : Vorgänger / Vater von x
  - x.left-child : links-stehender Nachfolger von x
  - x.right-sibling : rechter Bruder von x