Kapitel 3: Sortieren

Elementare Sortieralgorithmen

Heaps und Heapsort

Quicksort

Eine untere Schranke für das Sortierproblem

Counting-, Radix- und Bucketsort

Algorithmen für Auswahlprobleme

3.1 Elementare Sortieralgorithmen

- Problem:
  - Geg. Menge von Datensätzen s_i mit Schlüsseln k_i.
  - Geg. totale Ordnungsrelation $\leq$
  - Ges.: Permutation π mit: $k_{\pi(1)} \leq k_{\pi(2)} \leq \ldots \leq k_{\pi(n)}$
- partielle Ordnung R:
  - reflexiv: es gilt a R a
  - antisymmetrisch: a R b und b R a folgt a = b
  - transitiv: a R b und b R c folgt a R c
- totale Ordnung R:
  - R ist partielle Ordnung
  - für alle a,b gilt: a R b oder b R a
- Bsp: Ordnung auf der Menge der Menschen
  - R = ‚ist Nachfahre von' — partiell (und nicht reflexiv)
  - R = ‚hat größere Ausweisnummer' — nicht reflexiv!
  - R = ‚hat keine kleinere Ausweisnummer' — total

Elementare Sortieralgorithmen

- Für alle Sortieralgorithmen
  - Datentyp:

    struct item

    { key : integer

    info: Grundtyp

    }
  - Eingabe: A: array[1...N] of item
  - Ausgabe: A mit vertauschten Einträgen, so dass

    $A[i] \leq A[i+1]$ für $1 \leq i < N$ gilt.
  - Laufzeitanalyse:
    - Zugriffsoperation c_Z
    - Vergleichsoperationen c_V
    - Datenaustauschoperationen c_D
      - ggf. ist $c_D >> c_V$: Sortieren der Schlüssel, anschließend Datenaustausch

Sortieren durch Auswahl

- Idee:
  - Iteriere von 1 bis N-1:

    im i-ten Durchlauf: Schreibe das kleinste Element aus A[i...n] an Position A[i]

```
SELECTION-SORT(A)
for i = 1 to A.length-1
// suche kleinstes Element aus A[i..N]
  min = i
  for j = i+1 to A.length
    if( A[j] < A[min] ) min= j
// vertausche A[i] und A[min]
    SWAP(A[min], A[i])

SWAP(a,b)
t = a; a= b; b = t
```

```
index: 1  2  3  4  5  6  7  8

    A: 3  8 14  2  9 23  1  4
       ↑i                ↑min
    A: 1  8 14  2  9 23  3  4
          ↑i    ↑min
    A: 1  2 14  8  9 23  3  4
                :
                :
                :
```

- Laufzeit: $T(N) = \Theta(N^2)$
- nur O(N) Datenaustausche

Sortieren durch Einfügen

- Idee:
  - Iteriere von 2 bis N:

    im j-ten Durchlauf: Füge das j-te Element in die sortierte Folge A[1... j-1] ein

```
INSERTION-SORT(A)
for j = 2 to A.length
  key ← A[j]
// setzte A[j] sortiert in A[1..j-1] ein
  i = j-1
  while i>0 and A[i] > key
    A[i+1] = A[i]
    i = i-1
  A[i+1] = key
```

```
index: 1  2  3  4  5  6  7  8
                :
   A:  3  8 14  2  9 23  1  4
        i       j
   A:  2  3  8 14  9 23  1  4
             i     j
   A:  2  3  8  9 14 23  1  4
                :
                :
```

- Laufzeit (im Worst Case): $T(N) = \Theta(N^2)$

Bubblesort

- Idee:
  - Iteriere solange, bis keine Vertauschung mehr durchgeführt wird:

    im i-ten Durchlauf (for-Schleife): bringe Minimum von A[i...N] an Position A[i] durch sukzessives Vertauschen benachbarter Elemente

```
BUBBLESORT(A)
for i = 1 to A.length
  noswap = TRUE
  for j = A.length downto i+1
    if A[j] < A[j-1]
      SWAP( A[j], A[j-1] )
      noswap = FALSE
  if( noswap ) break
```

```
index: 1  2  3  4  5  6  7  8
    A: 3  8 14  2  9 23  1  4
    A: 3  8 14  2  9  1 23  4
    A: 1  3  8 14  2  9 23  4
i=2 A: 1  3  8 14  2  9 23  4
    A: 3  8  2  9 14  3  4 23
                 :
                 :
```

- Laufzeit (im Worst Case): $T(N) = \Theta(N^2)$

Mergesort

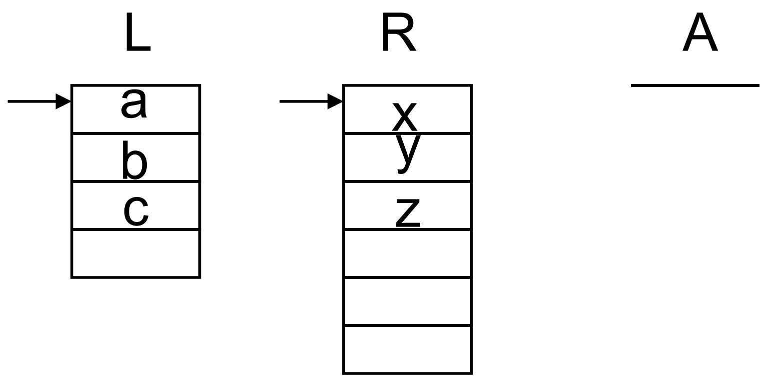
- Idee: Divide & Conquer
  - Teile die Folge in zwei Teilfolgen $L = A[1...\lfloor N/2 \rfloor]$, $R = A[\lfloor N/2 \rfloor+1...N]$
  - Sortiere L und R
  - Verschmelze sortierte Folgen L und R zu einer sortierten Folge

```
MERGE-SORT(A, l, r)
if l < r
    m = floor((l+r)/2)
    MERGE-SORT(A, l, m)
    MERGE-SORT(A, m+1, r)
    MERGE(A, l, m, r)
```

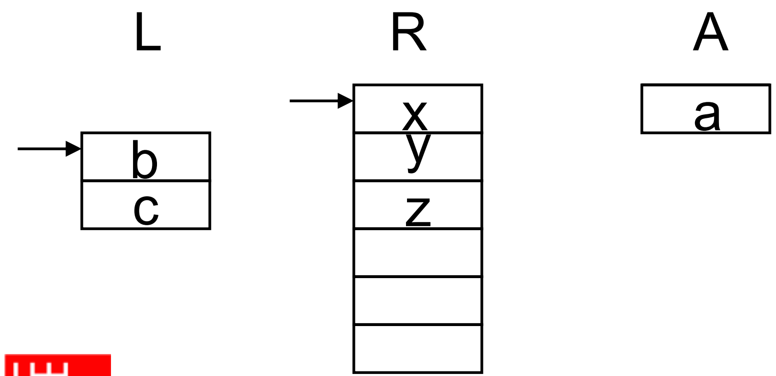
```
                L          R
index: 1   2   3   4 | 5   6   7   8

Divide:
    A: 3   8  14   2 | 9  23   1   4

Conquer:
    A: 2   3   8  14 | 1   4   9  23

Merge:
    A: 1   2   3   4   8   9  14  23
```

2-Wege Merge-Operation

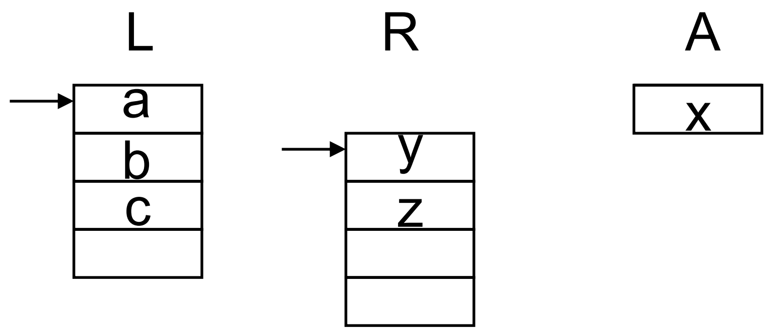
- Merge-Operation (mit Listen)
  - geg.: zwei aufsteigend sortierte Listen L und R
  - ges.: eine aufsteigend sortierte Liste A aus L und R



Fall 1: L.head < R.head
oder EMPTY(R)



Fall 2: L.head > R.head
oder EMPTY(L)



2-Wege Merge-Operation

- Listenoperationen:
  - INIT: initialisiere leere Liste
  - EMPTY: wahr, falls Liste leer
  - head: erstes Element der Liste
  - TAIL: Liste ohne erstes Element
  - APPEND: einfügen am Ende der Liste

- MERGE-LISTS(L,R : list)

```
 A = INIT()
 while  not (EMPTY(L) and EMPTY(R))
   if EMPTY(R) or L.head ≤ R.head
     APPEND(A, L.head)
     L = TAIL(L)
   elseif EMPTY(L) or L.head ≥ R.head
     APPEND(A, R.head)
     R ← TAIL(R)
 return A
```

Laufzeit: $O(|L|+|R|)$

2-Wege Merge-Operation mit Arrays

```
procedure merge (var a : sequence; l, m, r : integer);
{verschmilzt die beiden sortierten Teilfolgen a[l]...a[m]
 und a[m+1]...a[r] und speichert sie in a[l]...a[r]}
var
   b : sequence; {Hilfsfeld zum Verschmelzen}
   h, i, j, k : integer;
begin
   i := l; {inspiziere noch a[i] bis a[m] der ersten Teilfolge}
   j := m+1; {inspiziere noch a[j] bis a[r] der zweiten Teilfolge}
   k := l; {das nächste Element der Resultatfolge ist b[k]}
   while (i ≤ m) and (j ≤ r) do
      begin {beide Teilfolgen sind noch nicht erschöpft}
         if a[i].key ≤ a[j].key
            then {übernimm a[i] nach b[k]}
               begin
                  b[k] := a[i];
                  i := i+1
               end
            else {übernimm a[j] nach b[k]}
               begin
                  b[k] := a[j];
                  j := j+1
               end;
         k := k+1
      end;
   if i > m
   then {erste Teilfolge ist erschöpft; übernimm zweite}
      for h := j to r do b[k+h-j] := a[h]
   else {zweite Teilfolge ist erschöpft; übernimm erste}
      for h := i to m do b[k+h-i] := a[h];
   {speichere sortierte Folge von b zurück nach a}
   for h := l to r do a[h] := b[h]
end
```

- Liste L: a[l....m]   Liste R: a[m+1...r]
- Liste A: zunächst in b,
  wird abschließend kopiert nach a
- i: index von L.head
- j: index von R.head
- k: index von A.rear
- ... APPEND(...)
- ... TAIL(...)

- andere Schleifenstruktur:
  - Teil 1: beide Listen nicht leer
  - Teil 2: Liste L leer
  - Teil 3: Liste R leer

- Kopieren von b nach a

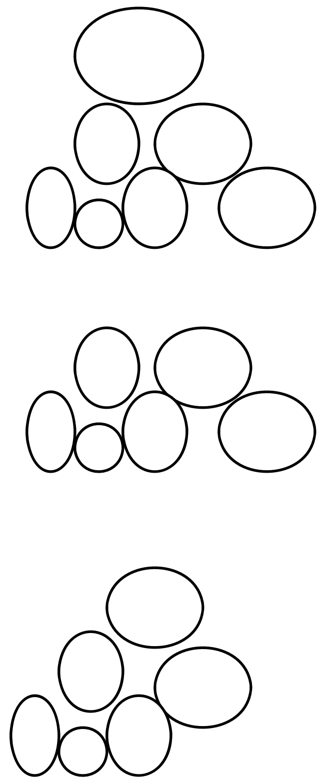
Laufzeit Mergesort

- Mergesort
  1. Teile die Folge in zwei Teilfolgen
     $L = A[1...\lceil n/2 \rceil]$, $R = A[\lceil n/2 \rceil+1...n]$ — O(1)
  2. Sortiere L und R — 2 * T(N/2)
  3. Verschmelze sortierte Folgen L und R zu einer sortierten Folge — O(N)
- Laufzeit: T(N) = 2 * T(N/2) + cN = O(N log N)
- Speicherbedarf:
  - Array A: c*N
  - Zwischenspeicherung in zweitem Array: c*N
  - doppelter Speicherbedarf!
- k-Wege Mergesort: Teile und Verschmelze k Teilfolgen
  Laufzeit: T(N) = k * T(N/k) + c k N = O(N log N)

  (k * N, da in jeder Iteration das Minimum aus k Listenköpfen bestimmt werden muss)

3.2 Heaps und Heapsort

- Sortieren durch Auswahl (siehe 3.1)
  - das kleinste Element wird ausgewählt und an die bereits sortierte Liste angehängt
  - Wie gestaltet man den Auswahlschritt?
- Neue Datenstruktur: Heap
  - ‚Objekte liegen auf einer Halde, ein Objekt ist immer mindestens so groß wie die darunter liegenden Objekte' (Heap-Bedingung)
  - Operationen:
    - BUILD-MAX-HEAP: baue eine Halde aus einer Menge von Elementen
    - HEAP-EXTRACT-MAX: nehme das größte Element von der Halde
      - MAX-HEAPIFY: stelle die Heap-Bedingung nach Entnahme wieder her



Der Heapsort-Algorithmus

- HEAPSORT-WITH-HEAP(A)

```
// Heapsort mit HEAP-Datenstruktur
H = INIT()
  for i = 1 to A.length
    HEAP-INSERT(H, A[i] )
for i = A.length downto 1
    A[i] = HEAP-EXTRACT-MAX(H)
```

- HEAPSORT(A)

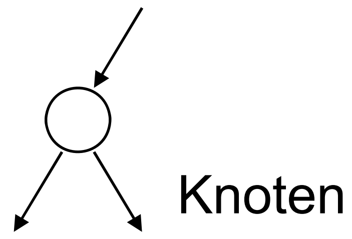
```
// Heap mit i Elementen steht im
// Array A[1..i], A[1] enthält das
// Maximum
BUILD-MAX-HEAP(A)
heap_size[A] = A.length
for i = A.length downto 2
  SWAP( A[i], A[1] )
  A.heap_size = A.heap_size - 1
  MAX-HEAPIFY(A,1)
```

- Laufzeit:
  - $T(N) = O(T_{build}(N) + N\, T_{xmax}(N))$

- füge alle Elemente in den Heap ein (Zeit $T_{build}(N)$)
- entnehme das größte Element (und stelle die Heap-Eigenschaft wieder her) (Zeit $T_{xmax}(N)$)

Der Heap

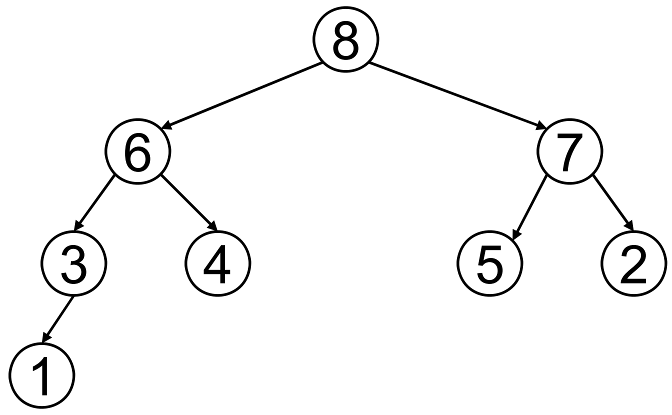
- Der Heap basiert auf einer *binären Baumstruktur:*
  - jeder Knoten i hat bis zu zwei Nachfolger LEFT(i), RIGHT(i)
  - alle bis auf ein Knoten haben genau einen Vorgänger PARENT(i)
  - jeder Knoten speichert ein Element A[i]



- **Heap-Eigenschaft:**

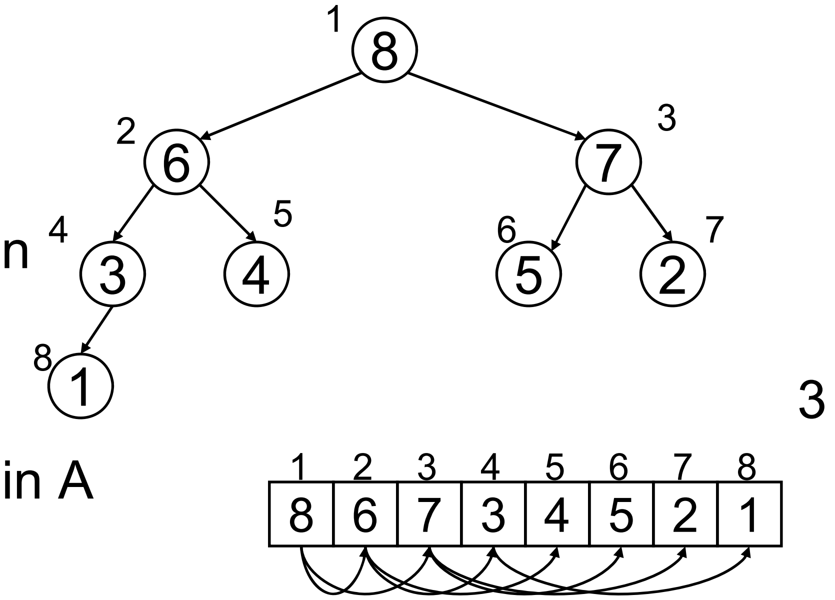
  Max-Heap: $\forall$ Knoten i außer der Wurzel: A[PARENT(i)] $\geq$ A[i]

  Min-Heap: $\forall$ Knoten i außer der Wurzel: A[PARENT(i)] $\leq$ A[i]



Der Heap

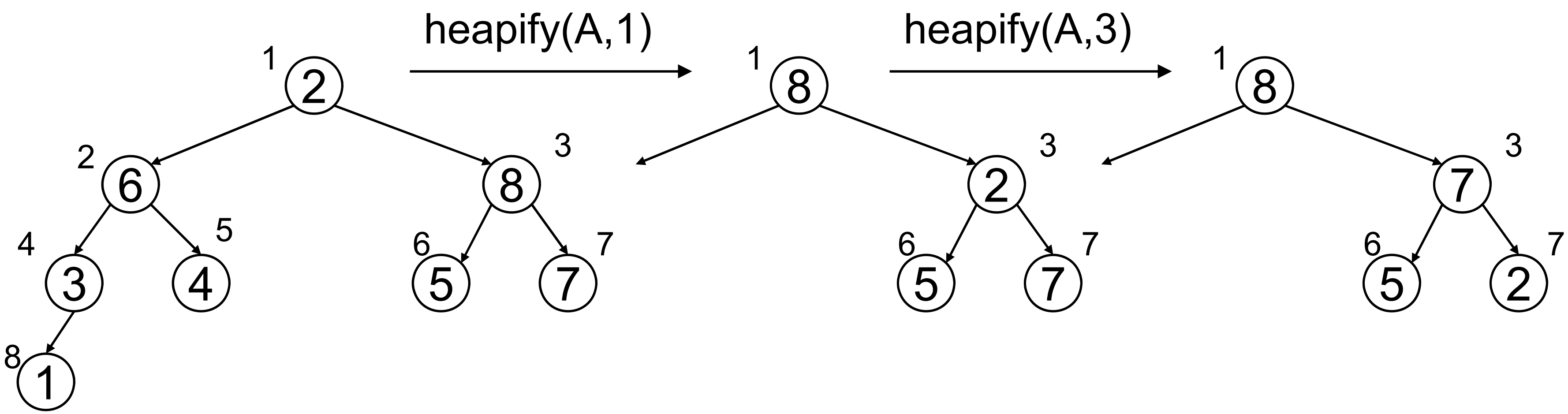
- Ein Heap kann durch ein Array repräsentiert werden:
  - PARENT(i) = i div 2
  - LEFT(i) = 2 * i
  - RIGHT(i) = 2 * i + 1



- Begriffe: Sei A ein Heap
  - *Höhe von A*: max Anzahl Knoten auf dem direktem Weg zu einem Blatt
  - A.heap_size: Anzahl Elemente in A
- Weitere Eigenschaften:
  - Ein Heap der Größe N hat max. Höhe: $\lfloor \log_2 N \rfloor$
  - auf Ebene i liegen 2^i Knoten

Die MAX-HEAPIFY-Operation

- Heap-Eigenschaft (top-down): Sei A ein Heap, dann gilt
  - A[i] $\geq$ A[LEFT(i)] und A[i] $\geq$ A[RIGHT(i)]
- Heapify (Versickern):
  - Annahme: A erfüllt Heap-Eigenschaft bis auf in einem Teilbaum unter Position i
  - MAX-HEAPIFY(A,i): repariert den Heap (stellt die Heap-Eigenschaft wieder her



HEAPIFY: - bestimme direkten Nachfolger c mit max. Wert A[c]
- vertausche A[i] mit A[c]
- HEAPIFY(A, c)

Die MAX-HEAPIFY-Operation

- `MAX-HEAPIFY(A,i)`

```
if( LEFT(i) ≤ A.heap_size and
   A[LEFT(i)] > A[i] )
   c = LEFT(i)
else c = i
if( RIGHT(i) ≤ A.heap_size and
    A[RIGHT(i)] > A[c] )
    c = RIGHT(i)
if c ≠ i
    SWAP(A[i], A[c])
    MAX-HEAPIFY( A, c)
```

c: Index des größten Elements aus der Menge i, left(i), right(i) innerhalb von A

heap_size[A]: Größe des Heaps, nicht die Anzahl der Elemente des Arrays!

c = i : Heap-Eigenschaft war nicht verletzt

c $\neq$ i: vertausche Elemente c und i

- Laufzeit:

  $T_{heapify}(n) = T_{heapify}(2n/3) + \Theta(1)$

  Master-Theorem, Fall 2:

  $T_{heapify}(n) = O(\log(n))$

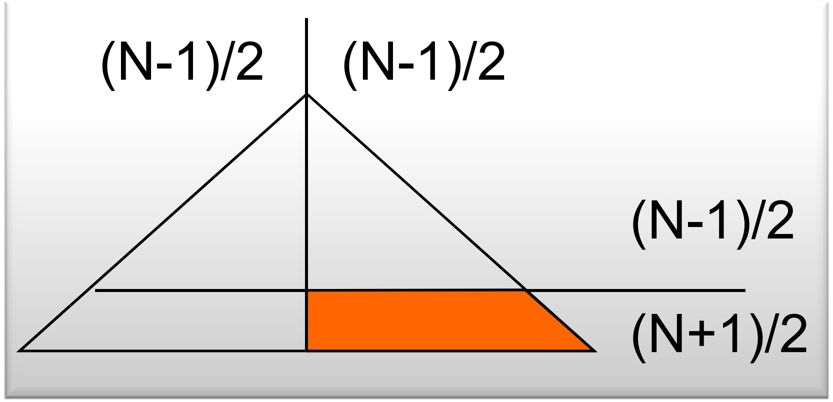
Laufzeit der MAX-HEAPIFY-Operation

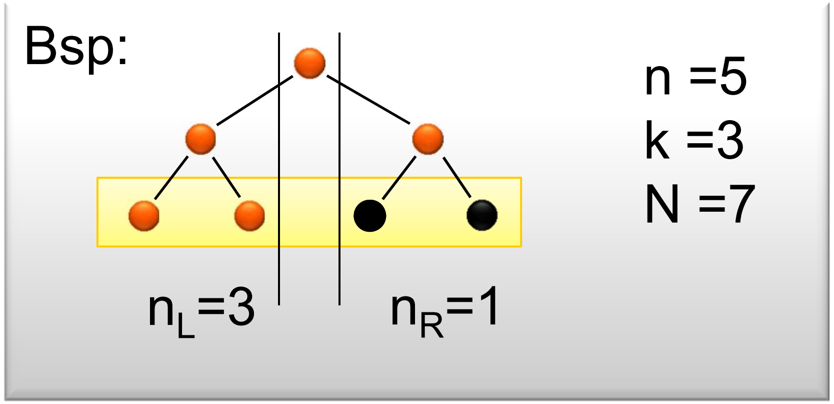
- Rekurrenzgleichung:

  Im Worst-Case gilt: $T_{heapify}(n) = T_{heapify}(2n/3) + \Theta(1)$

- Beweis:
  - Betrachte zunächst einen vollständigen binären Baum B der Höhe $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$:

    Sei N die Anzahl der Knoten von B, dann gilt:
    - B hat $N = 2^k-1$ Knoten
    - B hat $(N+1)/2$ Blätter
    - B hat $(N-1)/2$ Knoten in jedem Teilbaum unter der Wurzel



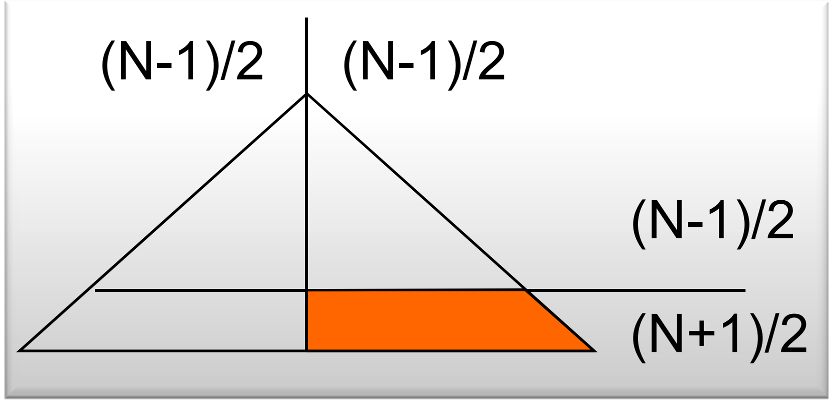


Laufzeit der MAX-HEAPIFY-Operation

- Beweis (Fortsetzung):

  Worst Case: MAX-HEAPIFY verzweigt in den größeren Teilbaum (links) mit insgesamt n_L Knoten: $T_{heapify}(n) = T_{heapify}(n_L) + \Theta(1)$

  Wie groß ist n_L in Bezug zur Gesamtzahl der Knoten n im Worst Case?



$$n_L = \frac{N-1}{2}$$

$$n_R = \frac{N-1}{2} - \frac{N+1}{4} = \frac{N-3}{4}$$

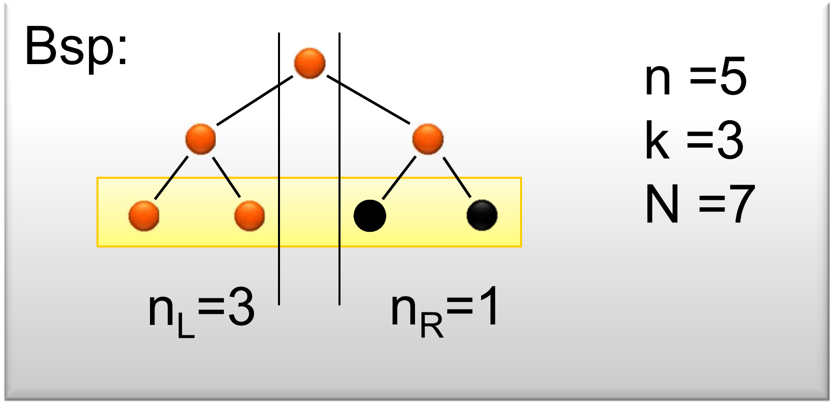
$$n = 1 + n_L + n_R$$

$$= 1 + \frac{N-1}{2} + \frac{N-1}{2} - \frac{N+1}{4}$$

$$= \frac{3N-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{4n+1}{3}$$

$$\Rightarrow n_L = \frac{N-1}{2} = \frac{\frac{4n+1}{3}-1}{2} = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}n$$



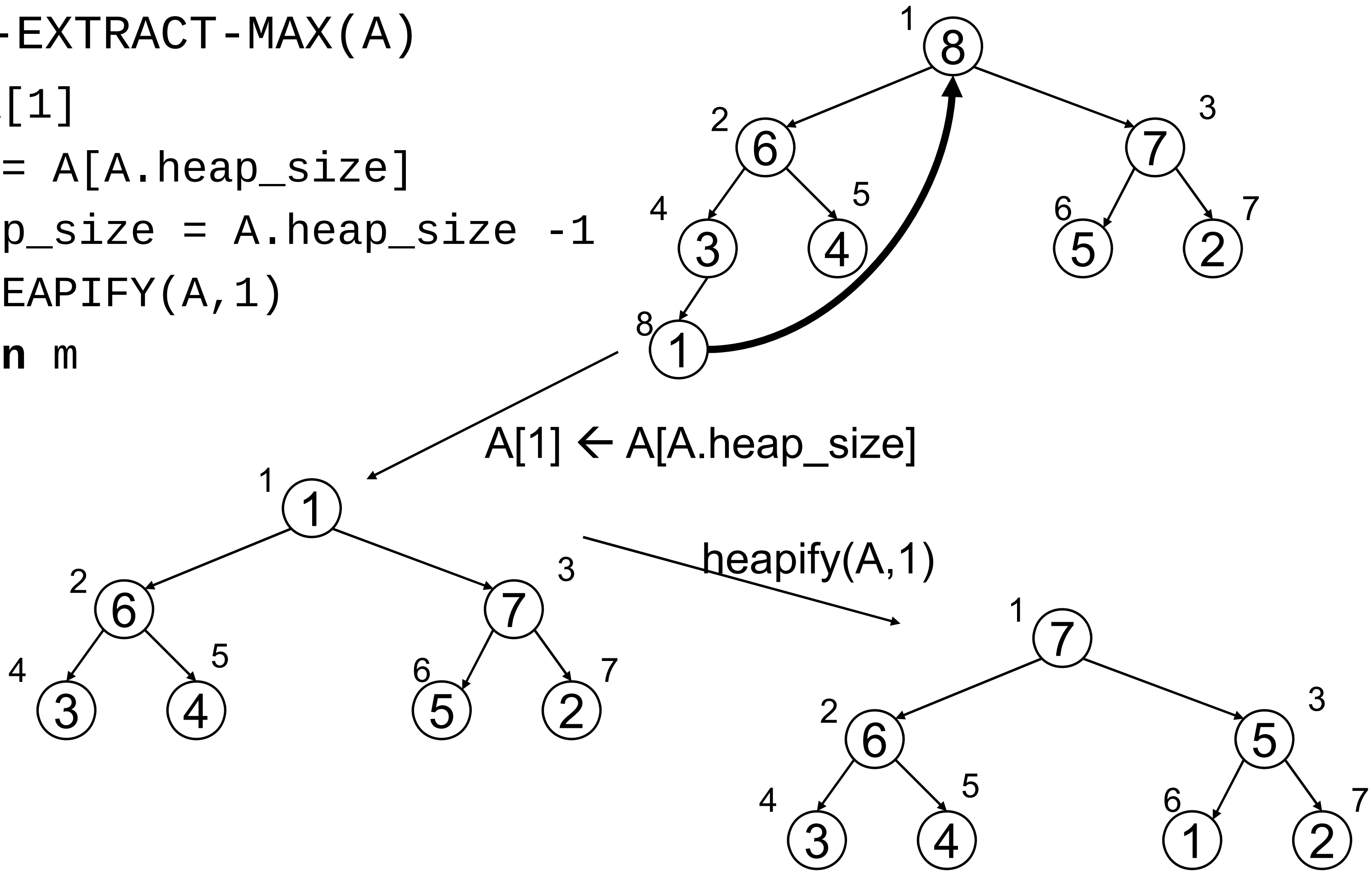
Die HEAP-EXTRACT-MAX-Operation

- HEAP-EXTRACT-MAX:

  Entnehme das maximale Element aus dem Heap

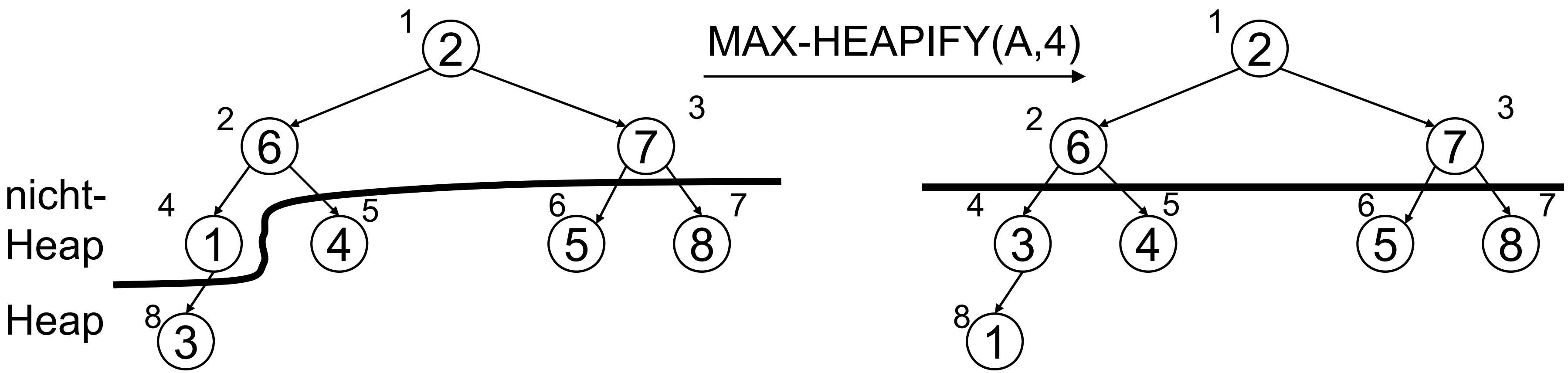
- HEAP-EXTRACT-MAX(A)

```
m = A[1]
A[1] = A[A.heap_size]
A.heap_size = A.heap_size -1
MAX-HEAPIFY(A,1)
return m
```



Die BUILD-MAX-HEAP-Operation

- BUILD-MAX-HEAP:
  - Eingabe: unsortiertes Array A
  - Ausgabe: Heap (als Array in A)
  - Idee:
    - Elemente ⌊A.heap_size/2⌋+1 – A.heap_size (die Blätter) sind ein-elementige Heaps
    - Verwende MAX-HEAPIFY um den Heap von unten nach oben aufzubauen

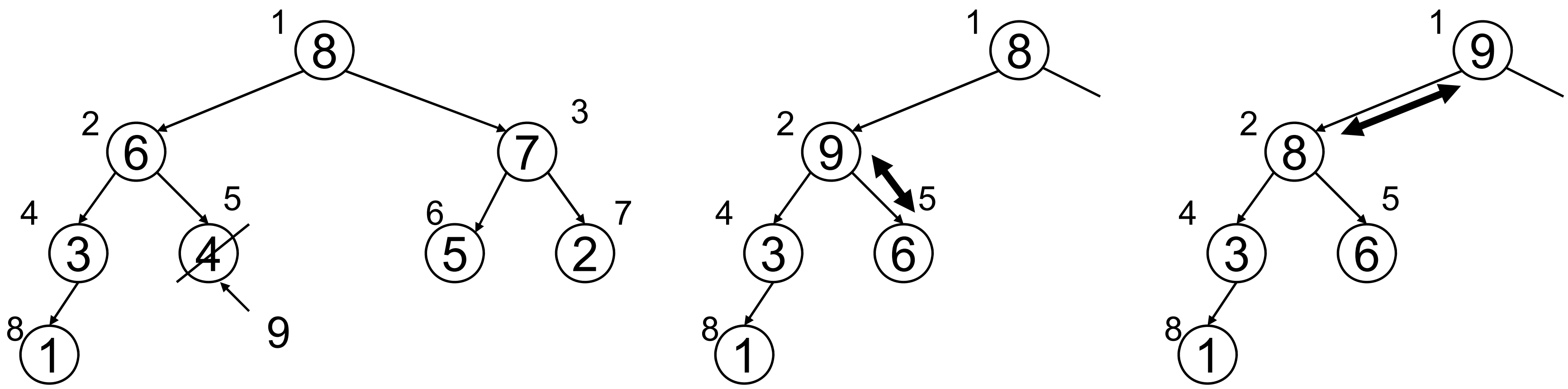


Die BUILD-MAX-HEAP-Operation

- ```
  BUILD-MAX-HEAP(A)
  A.heap_size ← A.length
  for i ← ⌊A.heap_size/2⌋ downto 1        n/2 Durchläufe
    MAX-HEAPIFY(A,i)                       O(log n)
  ```

- Korrektheit von BUILD-MAX-HEAP:

  Schleifeninvariante: $\forall$ k $\in$\{i+1,…, n=A.length\}: A[k] ist die Wurzel eines Max-Heaps.

  - Initialisierung:
    - Knoten A[$\lfloor n/2 \rfloor$+1], A[$\lfloor n/2 \rfloor$+2], …, n sind Blätter und erfüllen somit die Max-Heap-Eigenschaft.
  - Fortsetzung: Für Knoten i gilt:
    - LEFT(i) und RIGHT(i) sind Max-Heaps wg. der Schleifeninvariante
    - MAX-HEAPIFY(A,i) stellt somit die Max-Heap-Eigenschaft her.
  - Terminierung:
    - Schleife terminiert mit i=0, damit in A[1] die Wurzel eines Max-Heap.
  ```

Die BUILD-MAX-HEAP-Operation

- Laufzeit von BUILD-MAX-HEAP(A)
  Sei n= A.length, offensichtlich gilt $T_{build}(n) = O(n \log n)$.
- Gilt auch $T_{build}(n) = \Theta(n \log n)$?
  - Laufzeit ist proportional zur akkumulierten Laufzeit der MAX-HEAPIFY-Operationen
  - MAX-HEAPIFY für einen Knoten mit Höhe h: O(h)
  - Höhe variiert von h=0 bis $\lfloor \log n \rfloor$
  - Anzahl Knoten mit Höhe h: $\lceil n / 2^{h+1} \rceil$

    (Anzahl Knoten halbiert sich von Ebene zu Ebene)

$$T(n) = c \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil h = O\left(n \sum_{h=0}^{\log n} \frac{h}{2^h} \right) = O(n)$$

$$\text{mit} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \sum_{h=0}^{\infty} h \left(\frac{1}{2} \right)^h = \frac{1/2}{\left(1 - 1/2\right)^2} = 2$$

(Ableitung der geom. Reihe, siehe Cormen A.8)

Prioritätswarteschlangen (Priority Queues)

- Priority Queue:
  - Ziel: Warteschlange mit Prioritäten
  - Operationen:
    - HEAP-INSERT(A,x): füge ein Element x in die Warteschlange A ein
    - HEAP-EXTRACT-MAX(A): entnehme das Element mit max. Priorität
    - HEAP-INCREASE-KEY(A, i, k): erhöhe den Wert von Schlangenelement Nummer i auf k, k > A[i]
    - HEAP-DECREASE-KEY(A, i, k): verringert den Wert von Schlangenelement Nummer i auf k, k < A[i]
  - Realisierung: durch einen Heap
    - HEAP-EXTRACT-MAX-Operation: wie zuvor, Laufzeit O(log N)
    - HEAP-DECREASE-KEY-Operation: wie MAX-HEAPIFY, Laufzeit O(log N)

Achtung:
•Typo im Cormen S. 135: INCREASE-KEY(S,i,k), nicht (S,x,k)!
•Im Gegensatz zum Buch ist hier DECREASE-KEY() in einem Max-Heap gemeint.

Die HEAP-INCREASE-KEY-Operation

- ```
  HEAP-INCREASE-KEY(A, i, k )
  if( k < A[i] ) error „Increase-Error“
  else
    A[i] = k
    while i > 1 and A[parent(i)] < A[i] // parent(i) entspr. hier (i div 2)
      SWAP(A[i], A[parent(i)])
      i = parent(i)
  ```

- HEAP-INCREASE-KEY funktioniert wie heapify in umgekehrter Richtung:


  ```

Die INSERT-Operation

- ```
  HEAP-INSERT(A,x)
  A.heap_size = A.heap_size + 1
  A[A.heap_size] = -∞
  HEAP-INCREASE-KEY(A, A.heap_size, x)
  ```

- Mit einem Heap kann eine Priority-Queue mit Laufzeit O(log N) für die Operationen insert, delete, increase, decrease, extract-max realisiert werden.

- Anmerkung:

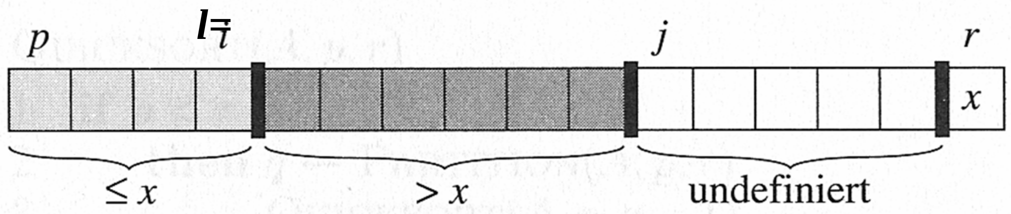
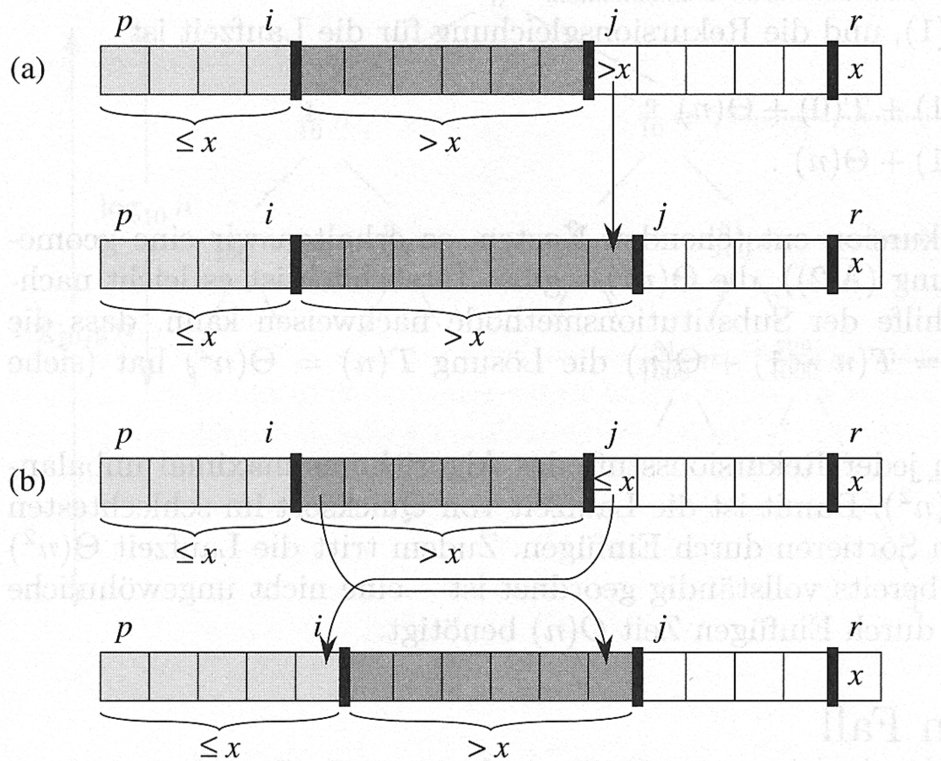
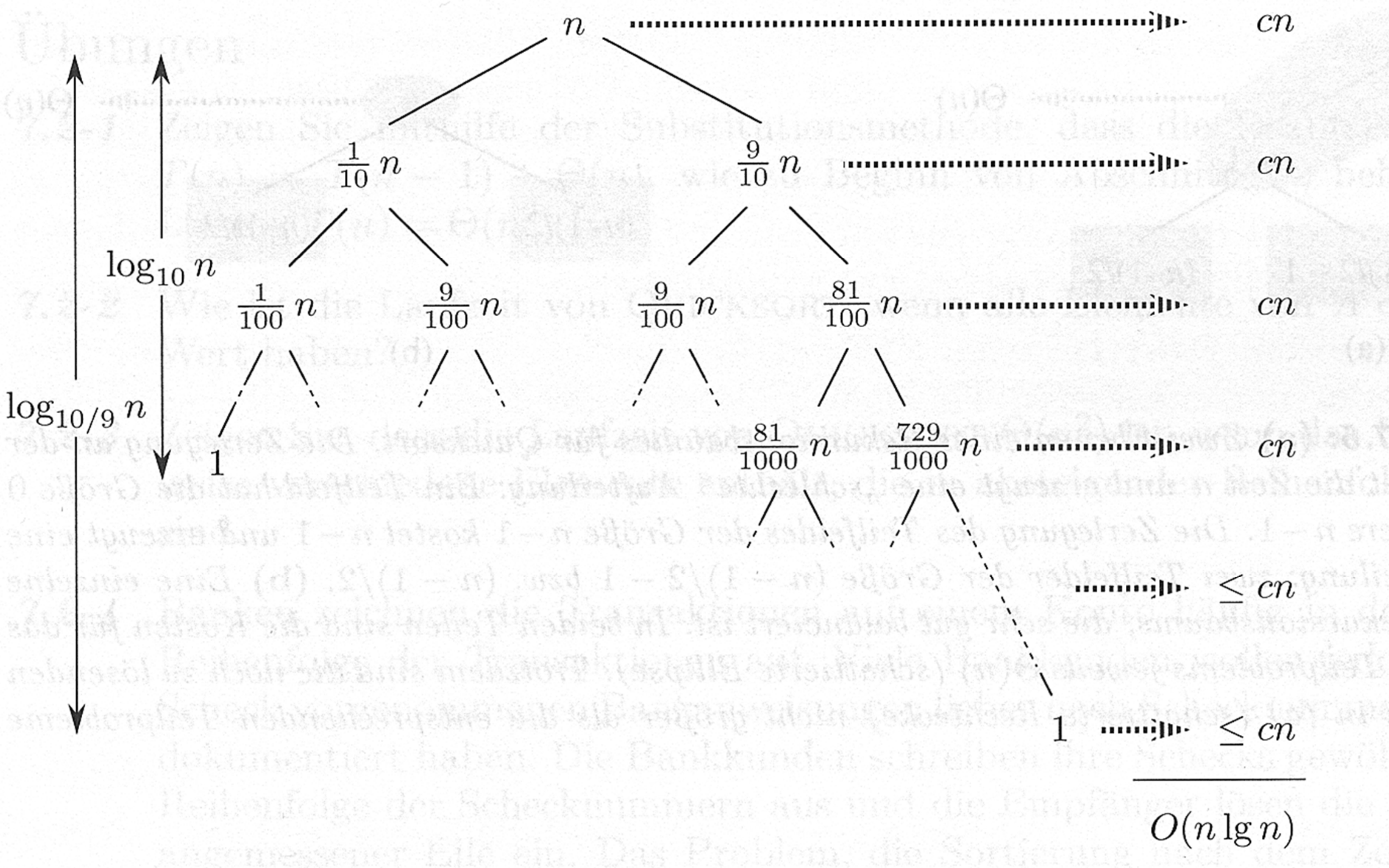
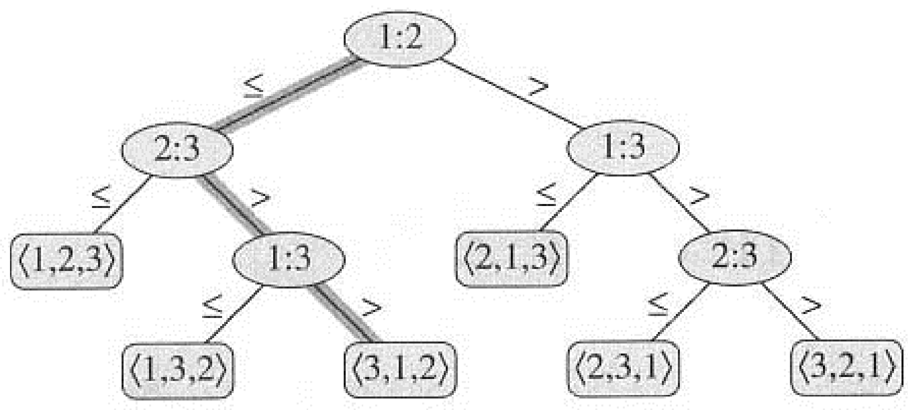
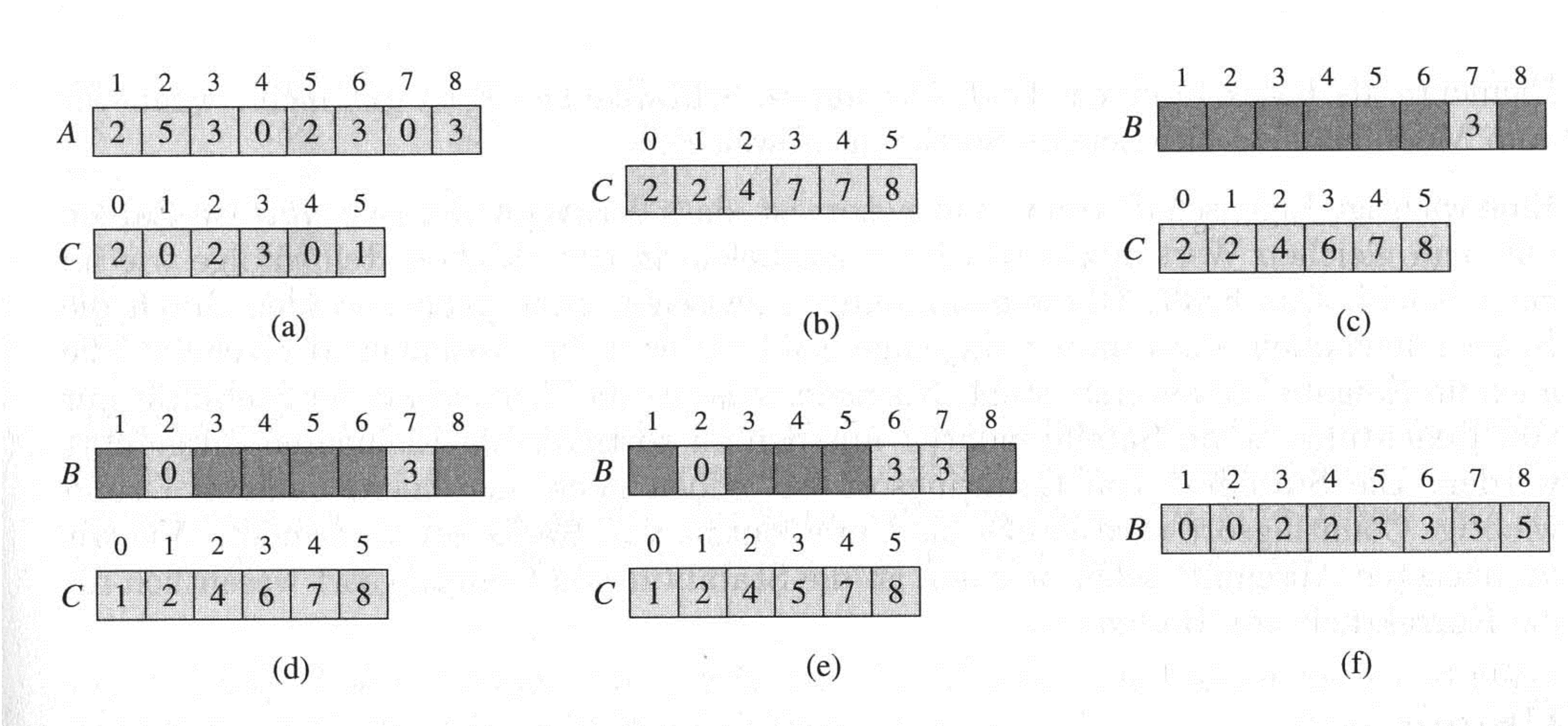
  Zum Auffinden eines Wertes x benötigt man eine zusätzliche Datenstruktur, z.B.

  - HEAP-INCREASE-KEY2(A, x, k):

    Problem: Finde i mit A[i] = x
  ```

3.3 Quicksort

- Idee: Divide & Conquer (T. Hoare, 1960)
  - Teile die Folge in zwei Teilfolgen A[1...q-1] und A[q+1...n] mit:
    $A[i] \leq A[q] \ \forall\, i < q$ und $A[i] \geq A[q] \ \forall\, i > q$ (*)
  - Sortiere die Teilfolgen A[1...q-1] und A[q+1...n]
  - (Kombination der Teilfolgen nicht nötig aufgrund von (*))

```
QUICKSORT( A, l, r )
if l < r
   q = PARTITION(A, l, r)   // Bestimmt q und stellt Bedingung (*) her
   QUICKSORT(A, l, q-1)
   QUICKSORT(A, q+1, r)
```

  - initialer Aufruf: QUICKSORT(A, 1, A.length)

Partition-Funktion

- Partition-Funktion (Hoare-Zerlegung)
  - geg: ein Array A[l...r]
  - ges: q mit $l \leq q \leq r$, umsortiertes Array A mit

    $A[i] \leq A[q] \;\; \forall\, i < q$ und $A[i] \geq A[q] \; \forall\, i > q$ // A[q]: *Pivot-Element*

```
PARTITION_HOARE(A, l, r )
// verwende A[r] als Pivot-Element
i = l-1; j = r;
while i < j
  repeat i = i+1 until A[i] ≥ A[r]
  repeat j = j-1 until A[j] ≤ A[r]
  if( i < j ) SWAP( A[i], A[j] )
SWAP( A[i], A[r] )     // schiebt das Pivot-Element in die Mitte
return i
```

Partition-Funktion

- Beispiel: Partition-Funktion nach Hoare

```
                 l                          r
         index:  1   2   3   4   5   6   7   8

           A  :  3   8  14   2   9  23   1   4   ← Pivot-Element
               ↑i                            ↑j
nach 4.:   A  :  3   8  14   2   9  23   1   4
                     ↑i                  ↑j
nach 5.:   A  :  3   1  14   2   9  23   8   4
nach 4.:                ↑i   ↑j

nach 5.:   A  :  3   1   2  14   9  23   8   4
nach 4.:                 ↑j ↑i

nach 7.:   A  :  3   1   2   4   9  23   8  14
                [    ≤    ] ↑i [     ≥       ]
```

i und j sind übereinander hinweggelaufen

Partition-Funktion

- Alternative Prozedur mit nur einer Schleife:
- PARTITION(A, l, r)

```
 // verwende A[r] als Pivot-Element
i = l-1
for j = l to r-1
  if A[j] ≤ A[r]
    i = i+1
    SWAP( A[i], A[j] )
SWAP( A[i+1], A[r] )
return i+1
```



- Funktionsweise:
  PARTITION zerlegt A in vier (ggf. leere) Bereiche:
  1. für l ≤ k ≤ i gilt: A[k] ≤ A[r]
  2. für i < k < j gilt: A[k] > A[r]
  3. für j ≤ k < r gilt: A[k] ? A[r]
  4. für k = r gilt: A[k] = A[r]

Partition-Funktion

- PARTITION(A, l, r)

```
 // verwende A[r] als Pivot
i = l-1
for j = l to r-1
  if A[j] ≤ A[r]
    i = i+1
    SWAP( A[i], A[j] )
SWAP( A[i+1], A[r] )
return i+1
```



- Korrektheit: (informell)
  - Fall 1: A[j] > A[r] : Verlängere Bereich 2 um ein Feld
  - Fall 2: A[j] ≤ A[r] : Vertausche A[i] und A[j],
    vergrößere Bereich 1 um ein Feld,
    verlängere Bereich 2 um ein Feld

Analyse von Quicksort

- Rekurrenzgleichung für Quicksort:
  - Sei q die Position des Pivot-Elements, dann gilt

    $T(N) = T(q - 1) + T(N - q) + c\,N$
- Annahme: Pivot-Element ist immer das Maximum der sortierten Teilfolge, d.h. q = N:

  $T(N) = T(N-1) + T(0) + c * N = c*(N + N-1 + N-2 + ... + 1) = \Theta(N^2)$
- Annahme: Pivot-Element liegt in der Mitte der sortierten Teilfolge, d.h. $q = \lceil N/2 \rceil$

  $T(N) = T(\lceil N/2 \rceil - 1) + T(N - \lceil N/2 \rceil) + c\,N \cong 2\,T(N/2) + c\,N = \Theta(N \log N)$
- Annahme: Pivot-Element liegt bei q = aN für ein konstantes 0,5 < a < 1

  $T(N) = T(\lceil a\,N \rceil) + T(\lceil (1-a)N \rceil) + c\,N$
  - Rekursionsbaum mit maximal $-\log_a N = \log_{1/a} N$ Ebenen
  - Laufzeit pro Ebene des Rekursionsbaums: cN
  - $T(N) = O(N \log N)$

Analyse von Quicksort

- Beispiel für a= 0,9:



Der randomisierte Quicksort

- **Randomisierter Algorithmus**:
  Algorithmus, der unter Verwendung von Zufallszahlen operiert.
  - ACHTUNG: Randomisierte Algorithmen sind (i.d.R.) deterministisch (d.h. sie liefern immer das gleiche Ergebnis)!

- `RAND-PARTITION(A, l, r)`

```
i = RANDOM(l, r)    // wählt eine ganzzahlige Zufallszahl aus [l,r]
SWAP( A[i], A[r] )
return PARTITION(A, l, r)
```

- `RAND-QUICKSORT(A, l, r)`

```
if l < r
  q = RAND-PARTITION(A, l, r)
  RAND-QUICKSORT(A, l, q-1)
  RAND-QUICKSORT(A, q+1, r)
```

- Erwartete Laufzeit von RAND-QUICKSORT ist unabhängig von der Vorsortierung

Analyse des randomisierten Quicksort

- **Theorem:** Angenommen, alle Werte sind voneinander verschieden, dann ist die *erwartete Laufzeit* von Quicksort O(N log N).
- **Beweisalternative 1**: (Mittelung über die Rekurrenzgleichung)

$$T_{\exp}(N) = \left[\frac{1}{N} \sum_{q=1}^{N} T(q-1) + T(N-q) \right] + cN \leq \left[\frac{2}{N} \sum_{q=1}^{\lceil N/2 \rceil} T(q) \right] + cN \overset{?}{=} O(N \log N)$$

- **Beweisalternative 2**: (Erwartete Anzahl Vergleiche)
  - Laufzeit von Quicksort wird durch PARTITION dominiert.
  - Laufzeit von PARTITION ist proportional zur Anzahl Vergleiche.
  - Sei X die Anzahl Vergleiche, dann ist T(N,X) = O(N + X).
- Wie hoch ist die erwartete Anzahl Vergleiche E[X] ?
  - Sei X_{ij} das Ereignis, dass A[i] mit A[j] verglichen wird.
  - Wenn X_{ij}=1, ist entweder A[i] oder A[j] Pivotelement, jeder Paarvergleich findet nur ein mal statt:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} X_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} E\left[X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Pr\{X_{ij} = 1\}$$

Analyse des randomisierten Quicksort

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass A[i] mit A[j] verglichen wird, d.h. $\Pr\{X_{ij}=1\}$?
  - Sei x der Pivotwert, dann gilt für alle A[i] < x < A[j]: $\Pr\{X_{ij}=1\} = 0$
  - Für jedes Teil-Array A[i…j] gilt: A[i] wird mit A[j] verglichen, genau dann wenn entweder A[i] oder A[j] als Pivotelement gewählt werden.
  - A[i…j] enthält j-i+1 Elemente, die Wahrscheinlichkeit zur Auswahl des Pivotelements ist gleichverteilt (RAND-PARTITION):

    $\Pr\{X_{ij}=1\}$ = Pr{A[i] oder A[j] ist erstes Pivotelement aus A[i…j]}

$$\Pr\{X_{ij}=1\} = \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}$$

Typo im Cormen: S. 156: k=j-i

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Pr\{X_{ij}=1\} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{j-i+1} \qquad \text{mit } k = j-i$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k} = \sum_{i=1}^{N-1} 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leq \sum_{i=1}^{N-1} 2(\log N + 1)$$

mit A.10 (harmonische Reihe)

$$= 2(N-1)(\log N + 1) = O(N \log N)$$

Abschließende Kommentare zu Merge-, Heap- und Quicksort

- **Sortieren durch Einfügen** hat eine Worst-Case Laufzeit von $O(N^2)$, ist allerdings vorteilhaft, wenn die Eingabe nahezu sortiert ist.
- **Mergesort** hat eine Worst-Case Laufzeit von O(N log N), ist aber kein in-place Sortierverfahren.
- **Mergesort** eignet sich gut für große Datenbestände auf Sekundärspeichern.
- **Heapsort** hat eine Worst-Case Laufzeit von O(N log N) und sortiert in-place.
- Die Worst-Case Laufzeit von **Quicksort** ist $O(N^2)$, die erwartete Laufzeit des randomisierten Verfahrens O(N log N). Um eine Worst-Case Laufzeit von O(N log N) zu erhalten, muß der Median der Eingabefolge in O(N) Zeit bestimmt werden.
- **Quicksort** zeigt in der Praxis ein sehr gutes Laufzeitverhalten (niedrige Konstanten).
- **Quicksort** kann in der Praxis weiter beschleunigt werden, in dem ein rekursiver Aufruf durch eine Iteration ersetzt wird (Endrekursion).

Sind O(N log N)-Sortierverfahren laufzeitoptimal?

3.4 Eine untere Schranke für das Sortierproblem

- Annahme: alle zu sortierenden Elemente sind paarweise verschieden.
- Vergleichende Sortierverfahren:
  - basieren ausschließlich auf Paarvergleiche zwischen den Elementen der Eingabe.
  - Operationen auf Elemente beschränkt auf: <, ≤, =, ≥, >
  - Operationen können auf eine reduziert werden: ≤
- Das Entscheidungsbaummodell:
  - vollständiger binärer Baum:
  - innere Knoten: Vergleich zwischen zwei Elementen A[i] und A[i]
  - Blätter: Permutation (Rangfolge) der Elemente



Eine untere Schranke für das Sortierproblem

- **Theorem:** Jedes vergleichende Sortierverfahren benötigt bei n zu sortierenden Datenelementen im Worst-Case Ω(n log n) Vergleichsoperationen.
  - Jedes Sortierverfahren führt eine Serie von Vergleichsoperationen aus.
  - diese entspricht einem Pfad von Wurzel zu Blatt in einem entsprechenden Entscheidungsbaum.
  - Jedes Sortierverfahren muss jede mögliche Permutation erzeugen können.
  - Der Entscheidungsbaum hat somit l = n! Blätter.
  - Die Höhe des Entscheidungsbaums ist eine untere Schranke für die Anzahl der Vergleiche:

$$h \geq \log_2 l = \log_2 n! = \Omega(N \log N)$$

Gleichung 3.18 Cormen S. 55

3.5 Counting-, Radix- und Bucketsort

- Gibt es Sortierverfahren, die nicht ‚vergleichend' sind?
  - Im allgemeinen nicht, da wir für die zu sortierenden Objekte lediglich die Ordnungsrelation kennen.

- **Annahme 1:** Die zu sortierenden Schlüssel sind ganzzahlig, paarweise verschieden und aus {1,…,N}
  - TRIVIAL_SORT(A)

```
for i = 1 to N
  B[A[i]] = A[i]
return B
```

- **Annahme 2:** Die zu sortierenden Schlüssel sind ganzzahlig aus {0,…,k}, k = O(N)
  - Idee: Zähle die Anzahl der Elemente mit kleinerem Schlüssel.
  - ➔ Countingsort

Countingsort

- Feld A: Eingabe, Feld B: sortierte Ausgabe
- Feld C[0…k]: Zähler-Array, ändert die Bedeutung während des Alg.
- `COUNTING-SORT(A, B, k)`

```
for( i = 0 to k ) C[i] = 0
for( j = 1 to A.length ) C[A[j]] ← C[A[j]] +1
        // C[i] enthält die Anzahl der Elemente, deren Schlüssel gleich i sind
for( i = 1 to k ) C[i] = C[i] + C[i-1]
        // C[i] enthält die Anzahl der Elemente, deren Schlüssel ≤ i sind
for j = A.length downto 1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] -1
return B
```

- Laufzeit von Countingsort: $T(N,k) = O(N + k)$

  Für $k = O(N)$ sortiert Countingsort in Linearzeit.

Countingsort: Ein Beispiel



- Beispiel für N=8, k=5
- a) nach Zeile 2 b) nach Zeile 3 c) nach 1. Iteration Zeile 4
- d) nach 2. Iteration e) nach 3. Iteration f) nach Zeile 7

Radixsort (Sortieren durch Fächerverteilen)

- **Definition:** Ein Sortierverfahren heißt *stabil*, genau dann wenn für alle $i < j$, $i,j \in \{1,\ldots,N\}$ mit $A[i] = A[j]$ gilt $\pi(i) < \pi(j)$
- **Satz:** Countingsort ist ein stabiles Sortierverfahren.

- **Annahme 3:** Sortierung erfolgt nach einem *m*-adischen Schlüssel $A[i] = (k_1,k_2,\ldots,k_d)$; $\forall\ 1 \leq j \leq d$: k_j ist ganzzahlig und $0 \leq k_j \leq m-1$

- Idee:
  - Verteilphase: Sortiere die Daten in m Fächer nach dem ersten (niederwertigsten!) Schlüssel
  - Sammelphase: Sammle die Daten wieder zu einer Liste
  - wiederhole mit dem nächsten Schlüssel
  - wichtig: im i-ten Durchlauf bleibt die relative Ordnung des i-1ten Durchlaufs erhalten, d.h. die Verteilphase setzt ein stabiles Sortierverfahren als Subroutine voraus

Radixsort (Sortieren durch Fächerverteilen)

- Beispiel: N= 7, m= 10, d= 3

329	720	720	329
457	355	329	355
657	436	436	436
839	457	839	457
436	657	355	657
720	329	457	720
355	839	657	839

- `RADIX-SORT(A, d, m)`

```
for j = 1 to d
// key[j]: Attribut, beschreibt den j-ten Schlüssel von A
   COUNTING-SORT( key[j][A], B, m-1 )
   A = B
```

Radixsort mit Warteschlangen

- ```
  RADIXSORT(A, d, m)
  // L: array [0...m-1] von Warteschlangen
   for( j = 0 to m-1 ) L[j] = init()
   for t = 1 to d            // sortiere nach Schlüssel t
       // Verteilphase
     for( i = 1 to N ) ENQUEUE(L[key[t][A[i]]], A[i] )
       // Sammelphase
     i = 1
     for j = 0 to m-1
      while not empty(L[j])
        A[i] = DEQUEUE(L[j])
        i = i+1
  ```
  ```

Radixsort: Laufzeit- und Speicherbedarf

- Parameter
  - m: Anzahl Schlüsselwerte
  - d: Anzahl Schlüsselelemente
  - N: Anzahl der Datensätze
- Laufzeit $T(N,d,m) = O(\, d(N + m)\,)$

  Fall 1: $d = O(1)$, $m = O(N)$: $O(N)$

  Fall 2: Alle Schlüssel verschieden: $d \geq \log_m N$: $O(N \log N)$

- Speicherbedarf:
  - Implementierung mit Arrays: $S(m,N) =$ $O(m\, N)$
  - Implementierung mit Schlangen : $S(m,N) =$ $O(m + N)$

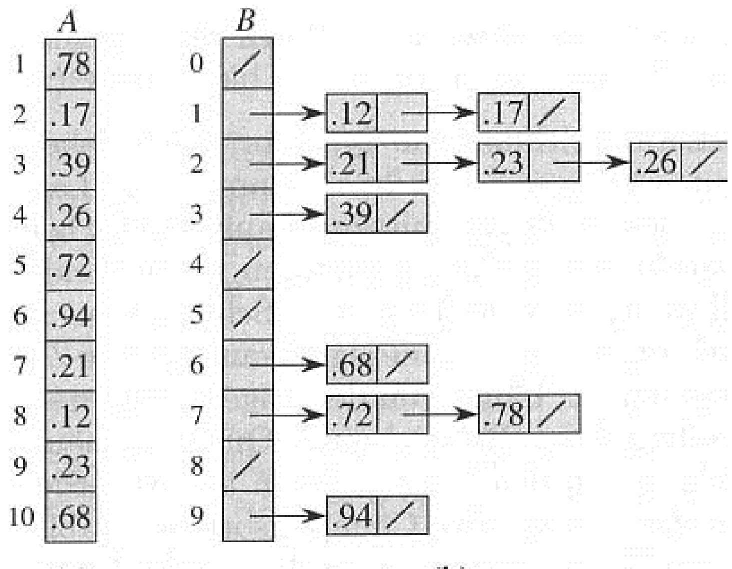
Radixsort sortiert somit nicht *in-place*.

Bucketsort

- **Annahme 4:** Für alle Element A[i] gilt: A[i] $\in$ IR, $0 \leq$ A[i] < 1. Die Elemente sind in [0,1) gleichverteilt.
- Idee:
  - Teile den Wertebereich in N gleich große Teilintervalle

    T[i] = [i/N, (i+1)/N), für $0 \leq i < N$
  - Erzeuge N Fächer B[0,…,N-1] mit N linearen Listen
  - Sortiere durch Fächerverteilung und verbinde die Listen
- BUCKET-SORT(A)

```
for i = 1 to A.length
  LIST-INSERT( B[⌊A.length * A[i]
i = 1
for j = 0 to A.length-1
  INSERTION-SORT(B[j])
  while not EMPTY( B[j] )
    A[i] = LIST-HEAD[B[j]];
    B[j] = LIST-TAIL[B[j]];
    i = i+1
```



(a) (b)

Bucketsort: Laufzeitanalyse

- Bucketsort ohne Zeile 5 benötigt O(N) Zeit. Sei n_i = length[B[i]]: INSERTION-SORT für Liste B[i] benötigt $O(n_i^2)$ Zeit.
- Worst-Case: $n_0 = N$, $n_i = 0$ für alle $i > 0$: $T_{Bucket}(N) = O(N^2)$ Dieses Szenario widerspricht allerdings der Gleichverteilungsannahme.
- Worst-Case erwartete Laufzeit:

$$T_{bucket}(N) = cN + \sum_{i=0}^{N-1} cn_i^{\,2}$$

$$E[T_{bucket}(N)] = E\left[cN + \sum_{i=0}^{N-1} cn_i^{\,2}\right] = cN + \sum_{i=0}^{N-1} cE\left[n_i^{\,2}\right]$$

- Angenommen, es gilt: $E[n_i^{\,2}] = 2 - 1/N$

dann folgt: $E[T_{bucket}(N)] = cN + \sum_{i=0}^{N-1} c(2 - 1/N) = cN(3 - 1/N) = O(N)$

Bucketsort: Laufzeitanalyse

- Bleibt zu zeigen: $E[n_i^2] = 2 - 1/N$

  Sei X_{ij} das Ereignis, dass A[j] in Bucket i einsortiert wird. Dann gilt:

  $$E[n_i^2] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{N} X_{ij}\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{N} E[X_{ij}^2] + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} E\left[X_{ij} X_{ik}\right]$$

  (Ausmultiplizieren des Quadrats zur Trennung stochastisch abhängigen von unabhängigen Termen)

  Ereignis X_{ij} tritt mit Wahrscheinlichkeit 1/N auf (Gleichverteilung!):

  $$E[X_{ij}^2] = 1\frac{1}{N} + 0\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}$$

  Ereignisse X_{ij} und X_{ik} sind unabhängig: $E[X_{ij} X_{ik}] = E[X_{ij}]E[X_{ik}] = \dfrac{1}{N^2}$

  Insgesamt folgt:

  $$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{1}{N^2} = N\frac{1}{N} + N(N-1)\frac{1}{N^2} = 2 - \frac{1}{N}$$

Bucketsort: Laufzeitanalyse

- Alternative Herleitung für: $E[n_i^2] = 2 - 1/N$

  Bestimmung über die Varianz: $E[n_i^2] = V[n_i] + E^2[n_i]$

  (dadurch entfällt die explizite Berechnung des Funktionsquadrats)

  Im folgenden laufen alle Summen ohne expl. Indizes von j=1,…,N.

  Es gilt:

$$E[n_i] = E\left[\sum X_{ij}\right] = \sum E[X_{ij}] = \sum \frac{1}{n} = 1$$

$$V\left[X_{ij}\right] = \sum_{z=0}^{1} \Pr\left\{X_{ij} = z\right\}\left(z - E\left[X_{ij}\right]\right)^2$$

$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(0-\frac{1}{N}\right)^2}_{z=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}_{z=1} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(\left(\frac{1}{N}\right)^2 + \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{N}\right)^2\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}$$

$$V[n_i] = V\left[\sum X_{ij}\right] = \sum V[X_{ij}] = \sum\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) = 1 - \frac{1}{N}$$

$$E[n_i^2] = V[n_i] + E^2[n_i] = 1 - \frac{1}{N} + 1^2 = 2 - \frac{1}{N}$$

Achtung: Die Umformung setzt stochastische Unabhängigkeit der X_{ij} voraus.

Abschließende Kommentare zu Sortieren in Linearzeit

- Wenn wir nur die Vergleichsrelation für die Sortierung von Objekten zur Verfügung haben, gilt die **untere Laufzeitschranke** Ω(N log N).
- Wenn arithmetische Operationen auf Schlüsseln möglich sind, kann diese Schranke unter Umständen durchbrochen werden:
  - Annahme 1: Die zu sortierenden Schlüssel sind ganzzahlig, paarweise verschieden und aus {1,…,N} ➔ **Trivialsort**
  - Annahme 2: Die zu sortierenden Schlüssel sind ganzzahlig aus {0,…,k}, k = O(N) ➔ **Countingsort**
  - Annahme 3: Sortierung erfolgt nach einem *m*-adischen Schlüssel $A[i] = (k_1,k_2,...,k_d)$; $\forall\ 1 \leq j \leq d$: k_j ist ganzzahlig und $0 \leq k_j \leq m-1$ ➔ **Radixsort**
  - Annahme 4: Für alle Element A[i] gilt: $A[i] \in \mathrm{IR}$, $0 \leq A[i] < 1$. Die Elemente sind in [0,1) gleichverteilt. ➔ **Bucketsort**
  - **Bucketsort** kann auch verwendet werden, wenn wir die Verteilung der Elemente kennen und eine Funktion entwickeln können, die die Elemente auf [0,…,N-1] gleichverteilt.

3.6 Algorithmen für Auswahlprobleme

- **Suchproblem:**
  - Eingabe eine sortierte Folge A mit N Schlüsseln A[i] und einen Suchschlüssel q
  - Ausgabe: Index eines Elements k mit A[k] = q oder -1, falls A[k] $\neq$ q für alle k

- **Auswahlproblem:**
  - Eingabe: Eine Menge A aus N (paarweise verschiedenen) Zahlen und einen Suchindex i mit $1 \leq i \leq N$
  - Ausgabe: Das Element $x \in A$ mit A[k] < x für i-1 Elemente A[k]

Suchen in sortierten Folgen

- Algorithmus 1: Lineare Suche
  - LINEAR-SEARCH(A, q)
    ```
    for( i = i to A.length ) if( A[i] == q ) return i
    return -1
    ```
  - Laufzeit: O(k), falls q in der Folge vorkommt, O(N) sonst

- Algorithmus 2: Binäre Suche (Aufruf mit BINARY-SEARCH(A,1,length[A],q)
  - BINARY-SEARCH(A, l, r, q)
    ```
    if( l > r ) return -1
    else
      m ← ⌊(l+r)/2⌋
      if( A[m] > q ) BINARY-SEARCH(A, l, m-1, q)
      elseif( A[m] < q ) BINARY-SEARCH(A, m+1, r, q)
      else return m
    ```
  - Laufzeit: T(N) = T(N/2)+ c = O(log N)

Suchen in sortierten Folgen

- Algorithmus 3: Exponentielle Suche
  - Idee: Verdopple den rechten Rand bis A[r] > q gilt, führe binäre Suche im Intervall [r/2,…,r] durch
  - `EXPONENTIAL-SEARCH(A, q)`

```
1 r ← 1
2 while( A[r] < q and r < N ) r = min( 2r, N)
3 return BINARY-SEARCH(A, r/2+1, r, q)
```

  - Laufzeit:
    - Fall 1: $\exists k : A[k] = q$

      Schleife 2: $\log_2 k + 1$ Durchläufe, dann gilt $r/2 < k \leq r$ — $O(\log k)$

      Binäre Suche: $O(\log r/2) = O(\log r - 1) =$ — $O(\log k)$

      Gesamtzeit: — $O(\log k)$
    - Fall 2: $\forall k : A[k] \neq q$ — $O(\log N)$

  Die Laufzeit von EXPONENTIAL-SEARCH ist **output-sensitiv**, d.h. sie hängt vom Resultat der Suche ab.

Das Auswahlproblem

- **Auswahlproblem:**
  - Eingabe: Eine Menge A aus N (paarweise verschiedenen) Zahlen und einen Suchindex i mit $1 \leq i \leq N$
  - Ausgabe: Das Element $x \in A$ mit $A[k] < x$ für i-1 Elemente A[k]
- Bsp:
  - i=1: Minimum-Problem O(N)
  - i=N: Maximum-Problem O(N)
  - i=N/2: Median-Problem ?
- Algorithmus 1: Iteratives Löschen der Minima

```
TRIVIAL-SELECT(A, i)
n ← length[A]
while i > 0
   k = MIN-INDEX(A, n )  // gibt den Index des min. Elements aus A[1…n]
   SWAP(A[k], A[n])
   i = i-1; n = n-1;
return A[n+1]
```

Laufzeit: $T(N,i) = \Theta(i\ N) = O(N^2)$

Der QUICK-SELECT Algorithmus

- Algorithmus 2: Sortieren

```
SORT-SELECT(A, i)
HEAPSORT(A)
output A[i]
```

Laufzeit: O(N log N)

- Algorithmus 3: Partielle Sortierung mit Quicksort

```
RAND-SELECT( A, l, r, i )
if( l == r ) return A[l]     // Annahme: l ≤ i ≤ r
else
  q = RAND-PARTITION(A, l, r)
  if( i == q ) return A[q]
  elseif( i < q ) RAND-SELECT(A, l, q-1, i )
  else RAND-SELECT(A, q+1, r, i)
```

Achtung: RAND-SELECT() und RANDOMIZED-SELECT() [Cormen Kap. 9.2] weichen geringfügig voneinander ab, lösen aber das gleiche Problem.

Der RAND-SELECT Algorithmus

- Beispiel: N=8, i=6

		1	2	3	4	5	6	7	8	
	index:	1	2	3	4	5	6	7	8	
	A:	3	8	14	2	9	23	1	6	← Pivot-Element
nach 3.:	A:	3	1	2	6	9	23	8	14	
		≤	≤	≤	↑q	≥	≥	≥	≥	
	A:	x	x	x	x	9	23	8	14	
nach 3.:	A:	x	x	x	x	9	8	14	23	
						≤	≤	↑q	≥	
	A:	x	x	x	x	9	8	x	x	
nach 3.:	A:	x	x	x	x	8	9	x	x	
						↑q	≥			
	A:	x	x	x	x	x	9	x	x	
							↑l=r=i			

Analyse des RAND-SELECT Algorithmus

- Rekurrenzgleichung für Rand-Select:
  - Sei q die Position des Pivot-Elements, dann gilt

    T(N) = T(q - 1) + a N falls i < q, T(N) = T(N - q)+ a N sonst.
  - Worst-Case: q=N => T(N) = T(N-1) + a N = $\Theta(N^2)$
- Wie hoch ist die erwartete Laufzeit E[T[N]] für Rand-Select?
  - Alle Elemente A[k] können gleichwahrscheinlich als Pivot-Element gewählt werden.
  - Im Worst-Case liegt der gesuchte Rang i immer in der größeren Partition

$$E[T(N)] \leq \sum_{k=1}^{N} \Pr\{q = k\} E[T(\max(k-1, N-k) + aN]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} E[T(\max(k-1, N-k) + aN] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} E[T(\max(k-1, N-k)] + aN$$

Analyse des RAND-SELECT Algorithmus

- Wie hoch ist die erwartete Laufzeit E[T[N]] für Rand-Select?
  - Für k < N/2 ergibt sich für k und N-k+1 der gleiche Summand:

$$\max(k-1, N-k) = \quad N-k \quad = \max((N-k+1)-1, N-(N-k+1))$$

$$E[T(N)] \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E[T(\max(k-1, N-k))] + aN \leq \frac{2}{N}\sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor}^{N-1} E[T(k)] + aN$$

- Welche Laufzeitschranke sollten wir intuitiv erwarten?
  - Im Vergleich zu Quicksort erfolgt nur ein rekursiver Aufruf, also höchstens O(N log N)
  - Angenommen, k=N/2, dann folgt T(N)=T(N/2)+ cN = O(N)

Analyse des Rand-SELECT Algorithmus

- Annahme: E[T[N]] = O(N), d.h. E[T[N]] ≤ c N für ein konstantes c
- Beweis:

$$E\left[T(N)\right] \leq \frac{2}{N} \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor}^{N-1} ck + aN$$

$$= \frac{2c}{N} \sum_{k=0}^{\lceil N/2 \rceil - 1} \left(\lfloor N/2 \rfloor + k\right) + aN$$

$$= \frac{2c\left(\lceil N/2 \rceil\right)\lfloor N/2 \rfloor}{N} + \frac{2c}{N} \frac{\left(\lceil N/2 \rceil - 1\right)\left(\lceil N/2 \rceil\right)}{2} + aN$$

$$\leq \frac{2c\left(N/2+1\right)\left(N/2\right)}{N} + \frac{2c}{N} \frac{\left(N/2\right)\left(N/2+1\right)}{2} + aN$$

$$= \frac{cN}{2} + c + \frac{cN}{4} + \frac{c}{2} + aN = \frac{3cN}{4} + \frac{3c}{2} + aN$$

$$= cN - \left(\frac{cN}{4} - \frac{3c}{2} - aN\right) \leq cN \quad \text{für} \quad N \geq \frac{6c}{c-4a}$$

Analyse des Rand-SELECT Algorithmus (Cormen-Variante)

$$E\left[T(N)\right] \le \frac{2}{N} \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor}^{N-1} ck + aN$$

$$= \frac{2c}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor -1} k \right) + aN$$

$$= \frac{2c}{N}\left(\frac{(N-1)N}{2} - \frac{(\lfloor N/2 \rfloor - 1)\lfloor N/2 \rfloor}{2} \right) + aN$$

$$\le \frac{2c}{N}\left(\frac{(N-1)N}{2} - \frac{(N/2-2)(N/2-1)}{2} \right) + aN$$

$$= \frac{2c}{N}\left(\frac{3N^2}{4} + \frac{N}{2} - 2 \right) + aN = \frac{3cN}{4} + \frac{c}{2} + aN$$

$$= cN - \left(\frac{cN}{4} - \frac{c}{2} - aN \right) \le cN \quad \text{für} \quad N \ge \frac{2c}{c-4a}$$

Der SELECT-Algorithmus

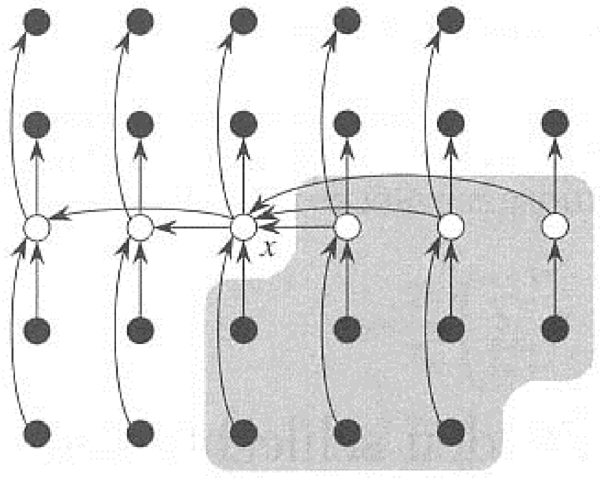
- Gibt es einen deterministischen Algorithmus für das Auswahlproblem mit asymptotisch linearer Laufzeit im Worst-Case?
- Idee: Verwende Rand-Select und garantiere, dass die Position q des Pivotelement nahe bei N/2 liegt.

- SELECT(A, l, r, i)

```
if( l = r ) return A[l]      // Annahme: l ≤ i ≤ r
else
 q = FIND-PIVOT-POSITION( A, l, r )
 SWAP( A[q], A[r] )
 q = PARTITION(A, l, r)
  if( i == q ) return A[q]
  elseif( i < q ) SELECT(A, l, q-1, i )
  else SELECT(A, q+1, r, i)
```

Der SELECT-Algorithmus

- Idee: Teile Menge in Fünfer-Gruppen, berechne die Fünfer-Mediane und den Median der Fünfer-Mediane:

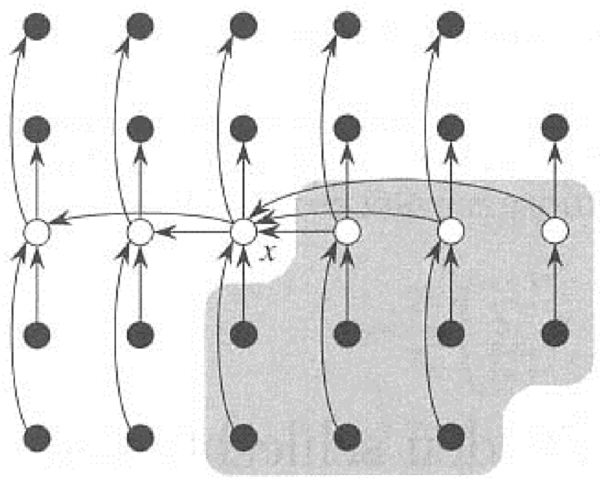


- FIND-PIVOT-POSITION(A, l, r)

```
n = r-l+1
// berechne die Mediane von je 5 benachbarten Elementen
for i = 1 to ⌈n/5⌉
  INSERTION-SORT( A[ (l + 5(i-1)), …, min( l+5i, r ) ] )
  M[i] = A[ min( l + 5i -3, r ) ]
// berechne rekursiv den Median der Mediane-von-5
x = SELECT( M, 1, ⌈n/5⌉, ⌊ ⌈n/5⌉/2⌋ )
return ( min( l + 5 x – 3, r ) )
```

Die Analyse des SELECT-Algorithmus

- FIND-PIVOT-POSITION: Wie viele Elemente aus A[l,…,r] sind größer als A[x]?
  - die Hälfte der Fünfer-Mediane
    + je zwei weitere Elemente
    - ohne die letzte Gruppe und
    - ohne die Gruppe, die x enthält



$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{N}{5}\right\rceil\right\rceil - 2\right) \geq \frac{3N}{10} - 6 = G(N)$$

- Der rekursive Aufruf von SELECT (Zeile 7 oder 8) erfolgt mit maximal 7N/10 + 6 Elementen.

Die Analyse des SELECT-Algorithmus

- Die Rekurrenz-Gleichung für SELECT:

$$T(N)=\begin{cases} c & \text{falls} \quad n \le 70 \\ T(\lceil N/5 \rceil)+T(7N/10+6)+aN & \text{sonst} \end{cases}$$

SELECT-Aufruf in FIND-PIVOT-POSITION

SELECT-Aufruf in SELECT

- Bestimmung der Fünfer-Mediane
- Aufruf von PARTITION

- Annahme: T(N) = O(N), d.h. T(N) ≤ cN für ein konstantes c
- Beweis: Für alle N ≤ 70 ist T(N) = c konstant. Sei N > 70, dann gilt:

$$T(N) \le c\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil + c\left(\frac{7N}{10}+6\right)+aN$$

$$\le \frac{cN}{5}+c+\frac{7cN}{10}+6c+aN = \frac{9cN}{10}+7c+aN$$

$$= cN - \left(\frac{1}{10}cN-7c-aN\right) \le cN$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}cN-7c-aN \ge 0 \Leftrightarrow c \ge 10a\left(\frac{N}{N-70}\right) \quad \text{für} \quad N>70$$

Abschließende Bemerkungen zum Auswahlproblem

- Das Auswahlproblem kann in asymptotisch erwarteter linearer Zeit mit dem **RAND-SELECT-Algorithmus** gelöst werden.
- Es gibt einen deterministischen Algorithmus (**SELECT-Algorithmus**), der das Auswahlproblem im Worst Case in asymptotisch linearer Zeit löst.
- Der **SELECT-Algorithmus** ist aufgrund hoher Konstanten nur von Interesse, falls die Eingaben sehr groß sind und eine Laufzeitgarantie gefordert ist.
- Lehren für die Algorithmenentwicklung:
  - Ein randomisierter, rekursiver Algorithmus, der in asymptotisch linearer Zeit die Eingabe gleichverteilt um einen Faktor $\alpha \in [0,1)$ verkleinert, hat asymptotisch eine erwartete lineare Laufzeit.
  - Ein deterministischer, rekursiver Algorithmus, der in asymptotisch linearer Zeit die Eingabe um einen Faktor $\alpha \in [0,1)$ verkleinert, hat asymptotisch eine lineare Laufzeit.