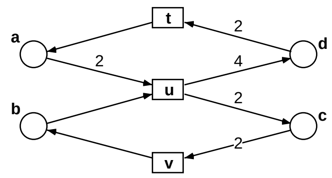
FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 7 : P/T-Netze: Schaltregel, Modellierung, Systemeigenschaften

Präsenzteil am 25./26. 11. – Abgabe am 02./03. 12. 2013

Präsenzaufgabe 7.1: Gegeben sei das folgende P/T Netz N. Sei $\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\4\\1\end{pmatrix}$.



1. Gilt $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{u}$?
2. Für welche $\mathbf{m}'$ gilt $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{u} \mathbf{m}'$? Gibt es mehrere?
3. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $(\mathbf{m}_1 - (k,0,0,0)^t) \xrightarrow{u}$?
4. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $(\mathbf{m}_1 - (0,0,k,0)^t) \xrightarrow{u}$?
5. Beschreibe die Menge aller Markierungen, für die die Transition u **nicht** aktiviert ist.
6. Sei $m_0 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. Konstruiere den Erreichbarkeitsgraphen $RG(N)$.
7. Ist (N, m_0) beschränkt? ...lebendig? ...reversibel? (s. Tabelle 6.1, S. 104 (Skript vom 23.11.12))

Lösung:

1. Ja, u ist in m_1 aktiviert, denn $m_1(a) = 3 > 2 = W(a,u)$ und $m_1(b) = 2 > 1 = W(b,u)$.
2. Es gibt nur eine Nachfolgemarkierung, die exakt bestimmt werden kann:

$$m' = m_1 - W(\bullet, u) + W(u, \bullet) = \begin{pmatrix}3\\2\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\6\\5\end{pmatrix}$$

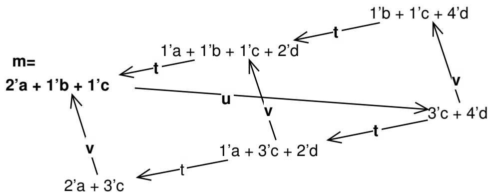
   oder, in Multimengenschreibweise:

$$m' = (3'a + 2'b + 4'c + d) - (2'a + b) + (2'c + 4'd) = (a + b + 6'c + 5'd)$$

3. u ist aktiviert, solange mindestens 2 Marken in a liegen, also für $k \in \{0, 1\}$.
4. u ist unabhängig von der Zahl der Marken in c aktiviert, es gilt also $k \leq 4$ (Einschränkung, um keine negativen Marken in c zu erzeugen).
5. u ist nicht aktiviert, wenn weniger als 2 Marken in a vorhanden sind oder weniger als eine Marke in b vorhanden ist (oder beides). Die anderen Stellen dürfen beliebig hoch markiert sein. Kurz:

$$\mathbf{m} \in \left\{ \begin{pmatrix}1\\l\\n\\o\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\l\\n\\o\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k\\0\\n\\o\end{pmatrix} \middle| k, l, n, o \in \mathbb{N} \right\}$$

6. Der vollständige Erreichbarkeitsgraph sieht wie folgt aus:



7. Wie am Erreichbarkeitsgraphen zu sehen ist, ist das Netz N mit der Anfangsmarkierung m_0 sowohl beschränkt und lebendig als auch reversibel.

Präsenzaufgabe 7.2: Sei $N = (P, T, F, W, m_0)$ ein P/T Netz, für das $W(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in F$ gilt und für das (P, T, F) eine Zustandsmaschine ist, d.h. es gilt $\forall t \in T : |{}^\bullet t| = |t^\bullet| = 1$.

Zeigen Sie per Induktion über die Schaltfolgenlänge: $\forall \mathbf{m} \in R(N, \mathbf{m}_0) : |\mathbf{m}| = |\mathbf{m}_0|$

Lösung: Zu jeder erreichbaren Markierung $\mathbf{m}$ gibt es gemäß Definition von $R(N, \mathbf{m}_0)$ mindestens eine Schaltfolge $w \in T^*$ mit $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{m}$. Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion über die Länge $n = |w|$ der Schaltfolgen.

I.A. Sei $n = 0$, d.h. $w = \varepsilon$. Es gilt $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{m}_0$. Somit ist $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ und auch $|\mathbf{m}| = |\mathbf{m}_0|$.

I.V. Es gelte für alle Schaltfolgen w mit $|w| \leq n$: $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{m} \Longrightarrow |\mathbf{m}| = |\mathbf{m}_0|$.

I.S. Sei v eine Schaltfolge der Länge $n + 1$. Dann kann die letzte Transition der Schaltfolge abgetrennt werden: $\exists w \in T^* \; \exists t \in T : v = wt$. Es gibt dann eine Markierung $\mathbf{m}'$, so dass $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{m}' \xrightarrow{t} \mathbf{m}$ gilt. $\mathbf{m}$ berechnet sich gemäß Schaltregel wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{m} & = & \mathbf{m}' - W(\bullet, t) + W(t, \bullet) \\ |\mathbf{m}| & = & |\mathbf{m}'| - \sum_{p \in P} \widetilde{W}(p, t) + \sum_{p \in P} \widetilde{W}(t, p) \\ (*) & = & |\mathbf{m}'| - 1 + 1 \\ & = & |\mathbf{m}'| \end{array}$$

Zur Gleichheit (*) ist Folgendes anzumerken: Die Summe aller Marken, die die Transition t von Plätzen abzieht, ist 1, da die Transition nur einen Eingangsplatz p hat ($|{}^\bullet t| = 1$) und das Gewicht der Kante auf 1 festgesetzt ist ($W(p, t) = 1$). Gleichermaßen erzeugt die Transition nur eine Marke in einem Platz.

Da $|w| = n$ gilt, ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar, d.h. $|\mathbf{m}'| = |\mathbf{m}_0|$. Somit gilt auch $|\mathbf{m}| = |\mathbf{m}'| = |\mathbf{m}_0|$

Wir haben die Aussage für beliebige lange Schaltfolgen bewiesen. Also gilt sie für alle Schaltfolgen und damit auch für alle erreichbaren Markierungen.

Übungsaufgabe 7.3: Ein Automobilhersteller will seine Arbeitsabläufe einer genaueren Prüfung unterziehen. Modellieren Sie folgende Anleitung als P/T-Netz N_1:

von
6

> Ein Auto wird durch einen Roboter zusammengebaut und besteht aus mehreren Bauteilen, die zwecks Vereinfachung in drei Baugruppen zusammengefasst werden: ein Motorblock, Reifen und Türen. Bauteile aus diesen Baugruppen werden zunächst in einem Sammelbehälter gesammelt, wo sie dann einzeln am Metallrahmen (ist vorhanden, muss nicht zusätzlich modelliert werden) ausgerichtet werden, um schließlich vom Roboter festgeschweißt zu werden. Die Reifen werden vor ihrer Lieferung in den Sammelbehälter aus zwei Komponenten

zusammengesetzt: eine Felge und ein Gummireifen werden zu einem Reifen zusammengesetzt. Bevor der Roboter ordnungsgemäß arbeiten kann, muss er zunächst eingeschaltet werden. Da ein Motorblock sehr schwer ist, muss der Roboter eingeschaltet sein, bevor er den Block in den Sammelbehälter verfrachten kann. Ein Automobil besteht aus vier Reifen, die Zahl der Türen ist variabel.

1. Achten Sie beim Modellieren auf folgende Hinweise:

   Verwenden Sie folgende Transitionen: `rz` „Reifen zusammensetzen“, `rh` „Reifen holen“, `th` „Tür holen“, `mh` „Motorblock holen“, `a` „Bauteil ausrichten“, `s` „Bauteil anschweißen“, `e` „Roboter einschalten“.

   Modellieren Sie eine Türressource, aus der Sie mehrere Türen entnehmen können. Der Einfachheit halber kann die Ressource so modelliert werden, dass sie sich gar nicht verbraucht.

   Modellieren Sie Unabhängigkeit, wo sie im Verfahren möglich ist (falls mehrere Autos gleichzeitig zusammengesetzt werden): Das Holen von Reifen, Türen und des Motorblocks sowie das Zusammenfügen der Reifenkomponenten kann unabhängig voneinander durchgeführt werden. Es kann aber immer nur ein Bauteil aus dem Sammelbehälter zur Zeit am Metallrahmen ausgerichtet und angeschweißt werden.

   Machen Sie sich zudem Gedanken über eine gute Struktur des Netzes, um die Lesbarkeit zu fördern (z.B. keine überschneidenen Kanten).

2. Ist ihr P/T-Netz N_1 lebendig, beschränkt und/oder reversibel? Sind einzelne Transitionen lebendig oder Plätze beschränkt?

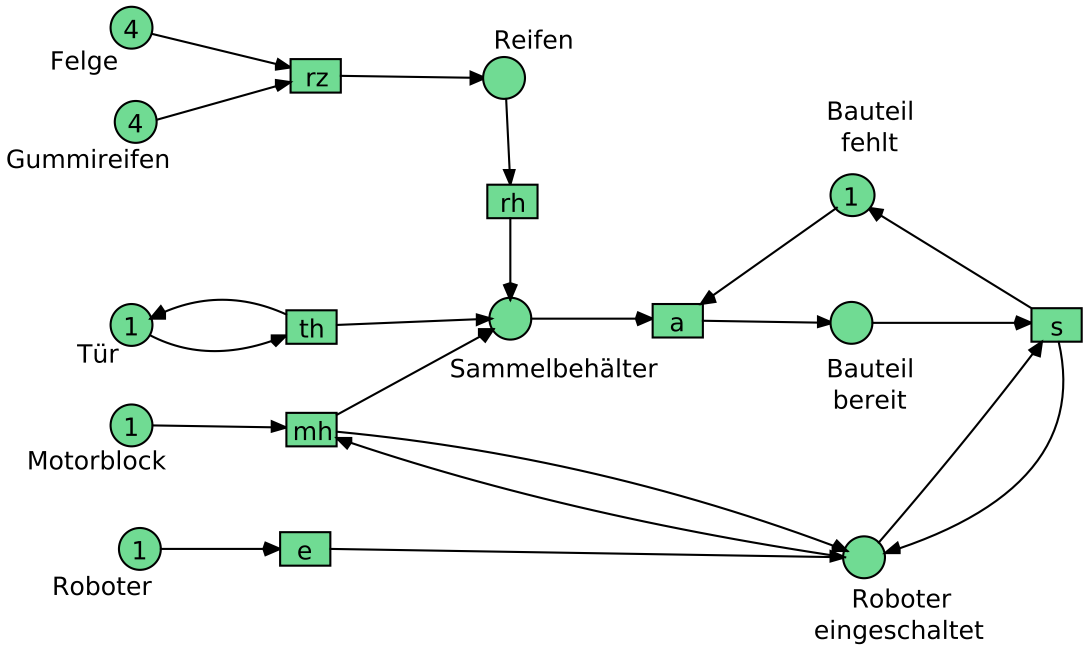
3. Bauen Sie Ihr Netz so in ein Netz N_2 um, dass N_2 lebendig und reversibel ist.

4. Bauen Sie N_2 so in ein Netz N_3 um, dass N_3 beschränkt ist. Sie können hierzu die zu verbauende Türzahl festlegen.

5. Zeichnen Sie die drei Netze mit Renew (`http://www.renew.de/`) und schicken Sie Ihre drei Zeichnungen als ein ZIP-Archiv an Ihren Übungsgruppenleiter. Beachten Sie die Hinweise zur Verwendung von Renew in der Online-Version des Aufgabenblattes.

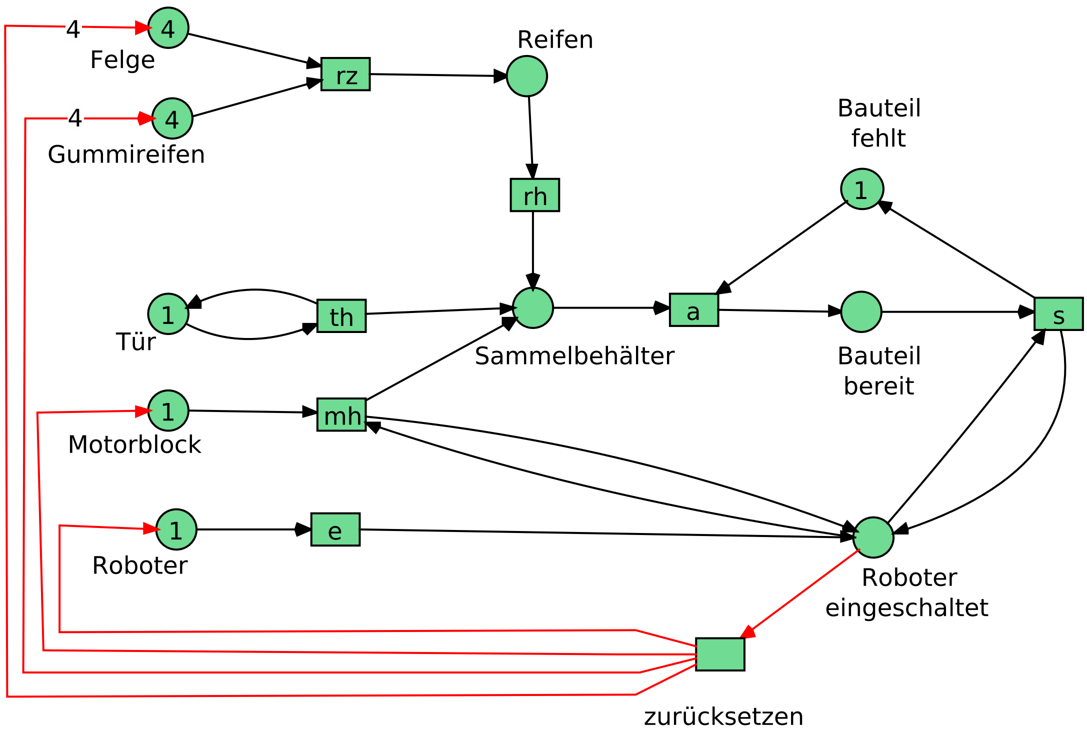
Lösung: Drei Versionen:

N_1 (Transitionen gemäß Hinweis in der Aufgabe):

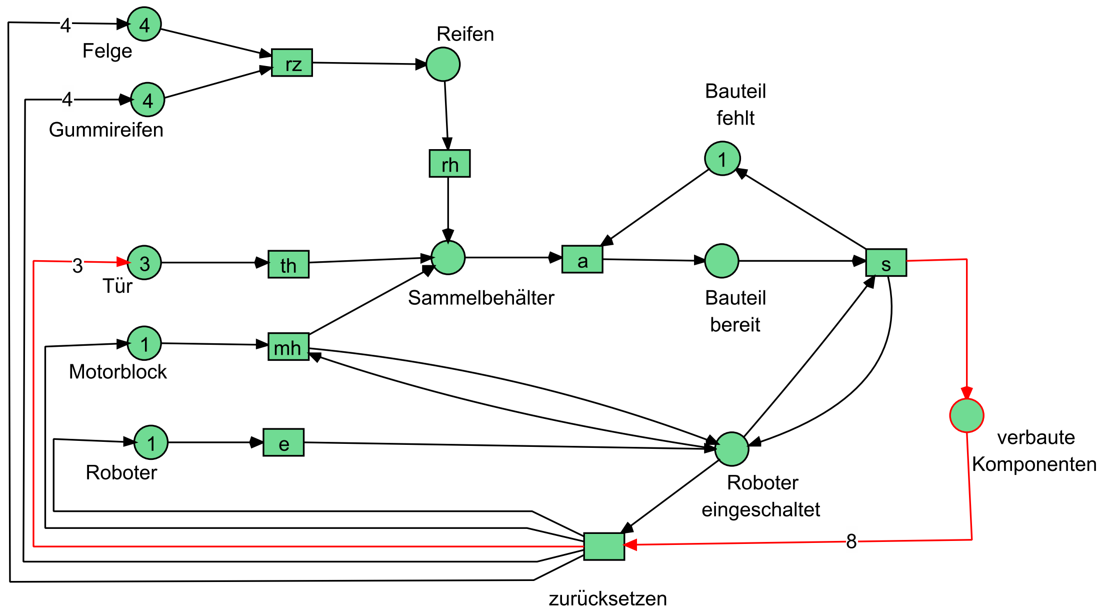


Lebendig sind nur die Transitionen `th`, `a` und `s`. Beschränkt sind alle Plätze außer `Sammelbehälter`. Somit ist das Netz insgesamt nicht lebendig und nicht beschränkt. Das Netz ist nicht reversibel.

N_2 (Marken können in die Anfangsplätze zurücklegt werden):



N_3 (Endlicher Vorrat an Türen):



von
6

Übungsaufgabe 7.4: Gegeben sei folgendes Netz $N_{7.4a}$ sowie ein leicht abgewandeltes Netz $N_{7.4b}$

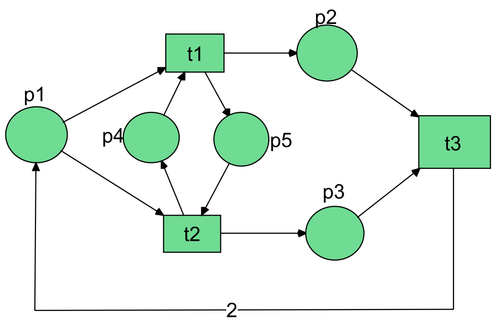


Abbildung 1: Netz $N_{7.4a}$

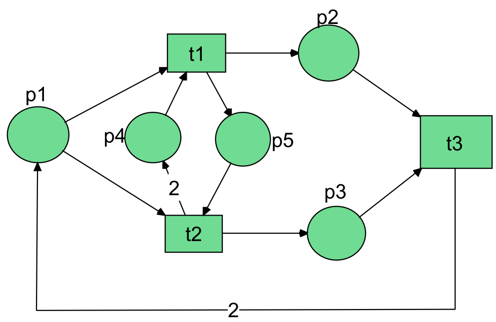
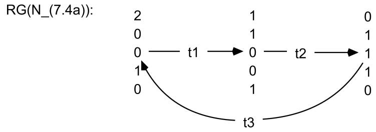
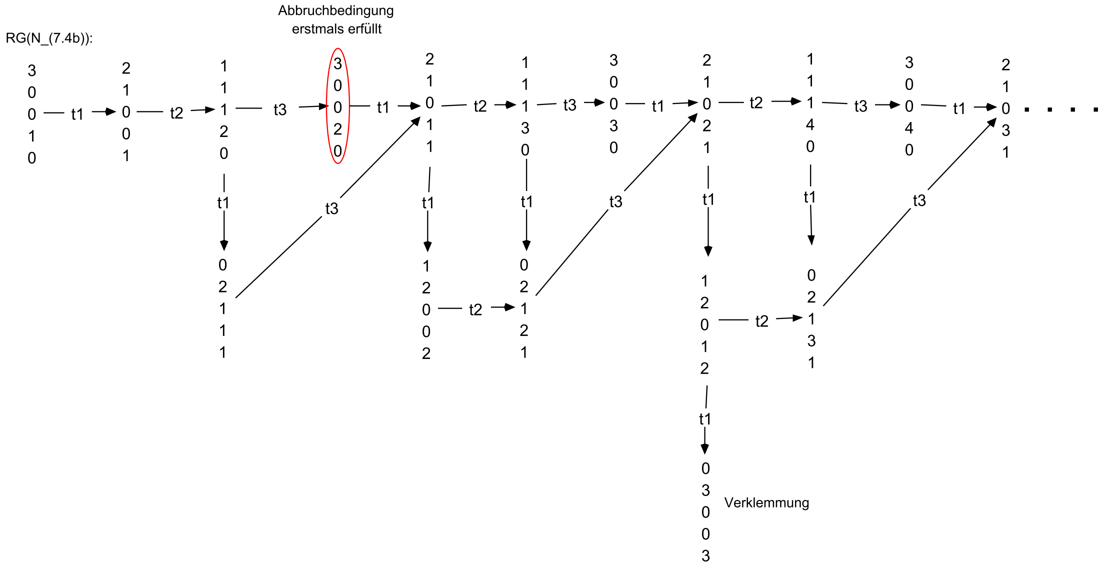


Abbildung 2: Netz $N_{7.4b}$

1. Konstruieren Sie für beide Netze einen Erreichbarkeitsgraphen. Die Anfangsmarkierung für $N_{7.4a}$ sei $m_{0a} = (2, 0, 0, 1, 0)$ und für $N_{7.4b}$ $m_{0b} = (3, 0, 0, 1, 0)$. Sollte ein Netz unbeschränkt sein, zeichnen Sie das Anfangsstück des Graphen bis zur Schaltfolgenlänge 10. Kennzeichnen Sie die Markierung, in denen Algorithmus 7.1 abgebrochen hätte.

   Lösung:





2. Bestimmen Sie für $N_{7.4a}$ unter m_{0a} und $N_{7.4b}$ unter m_{0b}: Sind die Netze beschränkt? k-beschränkt für $k = 1$ oder $k = 3$? verklemmungsfrei? reversibel?

   Ist $N_{7.4a}$ strukturell lebendig? Ist $N_{7.4b}$ strukturell beschränkt?

   Begründen Sie jeweils ihre Antworten.

   Lösung:

Eigenschaft	$N_{7.4a}$	$N_{7.4b}$	Begründung
beschränkt	ja	nein	$RG(N_{7.4a}, m_{0a})$ ist endlich, $RG(N_{7.4b}, m_{0b})$ nicht (vgl. Teilaufgabe 1)
1-beschränkt	nein	nein	Mehr als eine Marke in $m_{0a}(p1)$ bzw. $m_{0b}(p1)$
3-beschränkt	ja	nein	z.B. vier Marken in $m_{0b} \xrightarrow{w} (1, 1, 1, 4, 0)$ mit $w = (t_1t_2t_3)^2t_1t_2$
verklemmungsfrei	ja	nein	Verklemmt z.B. bei $m_b \xrightarrow{w} (0, 3, 0, 0, 3)$ mit $w = (t_1t_2t_3)^2(t_1)^3$
reversibel	ja	nein	siehe Teilaufgabe 1. Netze mit Dead-locks können nicht reversibel sein
$N_{7.4a}$ strukt. lebendig	ja		in m_{0a} lebendig
$N_{7.4b}$ strukt. beschr.	nein		in m_{0b} nicht beschränkt

3. Sei N ein ein P/T-Netz mit $T \neq \emptyset$ und sei t_0 eine Transition. Wir nennen t_0 *fleißig*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Transition t_0 mindestens n-mal zum Schalten gebracht werden kann. Formal: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren Schaltworte $w_1, \dots, w_n \in T^*$ und eine Startmarkierung m_0, so dass $m_0 \xrightarrow{w_1t_0 \cdots w_nt_0}$ gilt.

   (a) Zeige: Wenn $t_0 \in T$ lebendig ist, dann ist t_0 auch fleißig.

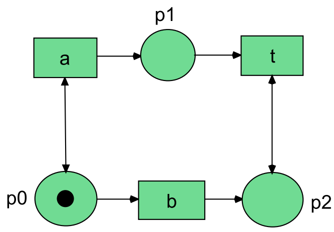
   (b) Zeige: Ist eine Transition fleißig, dann ist sie nicht unbedingt auch lebendig.

Lösung: Da t_0 lebendig ist, können wir t_0 in jeder Markierung wieder zum Schalten bringen. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl. Es gibt also ein w_1, so dass $m_0 \xrightarrow{w_1 t_0}$ gilt. Wenn wir das Argument n-fach wiederholen, sehen wir, dass Schaltfolgen $w_1, \dots, w_n$ existieren, so dass folgendes gilt:

$$m_0 \xrightarrow{w_1 t_0 \cdots w_n t_0}$$

Also ist t_0 fleißig.

Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt. Im folgenden Netz ist die Transition t fleißig aber nicht lebendig, da wir durch n-maliges Schalten der Transition a n viele Marken in $p1$ sammeln können. Einmaliges Schalten von b ergibt dann die Markierung $(0, n, 1)$, sodass t n-mal geschaltet werden kann. Das Netz verklemmt dann in $(0, 0, 1)$ und t ist somit nicht lebendig.



4. Gegeben sei ein P/T-Netz, für das $\forall t \in T : \sum_{p \in P} \widetilde{W}(p, t) = \sum_{p \in P} \widetilde{W}(t, p)$ gilt. Zeigen Sie, dass die Summer aller Markierungen immer gleich ist, also $\forall m \in R(N, m_0) : |m| = |m_0|$ gilt. Hinweis: Sie können hierfür eine vollständige Induktion über die Schaltfolgenlänge nutzen.

Lösung: Vorüberlegung: Sei $m \xrightarrow{t} m'$, dann gilt nach Def. $m'(p) = m(p) - \tilde{W}(p, t) + \tilde{W}(t, p)$. Nun ist $|m| = \sum_{p \in P} m(p)$. Also folgt:

$$\begin{aligned}
|m'| &= \textstyle\sum_{p \in P} m'(p) \\
&= \textstyle\sum_{p \in P} [m(p) + \tilde{W}(t, p) - \tilde{W}(p, t)] \\
&= \textstyle\sum_{p \in P} m(p) + \sum_{p \in P} \tilde{W}(t, p) - \sum_{p \in P} \tilde{W}(p, t) \\
&= \textstyle\sum_{p \in P} m(p) + 0 \text{ (gemäß Aufgabenstellung)} \\
&= |m|
\end{aligned}$$

Die Vorüberlegung gilt nur für das Schalten einer einzelnen (aber beliebigen) Transition.

Wir zeigen die Aussage nun für alle $m \in R(N, m_0)$. Da $m \in R(N, m_0) \iff \exists w \in T^* : m_0 \xrightarrow{w} m$, zeigen wir dies durch eine Induktion über die Schaltfolgen w, genauer über ihre Längen.

- IA. Es sei $m_0 \xrightarrow{w} m'$ und $w = \epsilon$. Dann ist $m' = m_0$ und die zu zeigende Aussage gilt offensichtlicherweise.
- IB: Die Aussage $m_0 \xrightarrow{w} m' \implies |m_0| = |m'|$ gelte für alle Worte w bis zur Länge n.
- IS: Es sei $m_0 \xrightarrow{wt} m', |w| = n$, weil es ein m'' gibt, so dass $m_0 \xrightarrow{w} m''$ und $m'' \xrightarrow{t} m'$ gilt. Nach IB gilt die Aussage für m'', d.h. $|m_0| = |m''|$. Nach der Vorüberlegung folgt aus $m'' \xrightarrow{t} m'$ auch $|m''| = |m'|$. Insgesamt also $|m_0| = |m''| = |m'|$. Also gilt die Aussage auch für wt mit der Länge $|wt| = n + 1$.

Wir haben die Aussage für beliebige lange Schaltfolgen bewiesen. Also gilt sie für alle Schaltfolgen und damit auch für alle erreichbaren Markierungen.

Bisher erreichbare Punktzahl: 81