FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

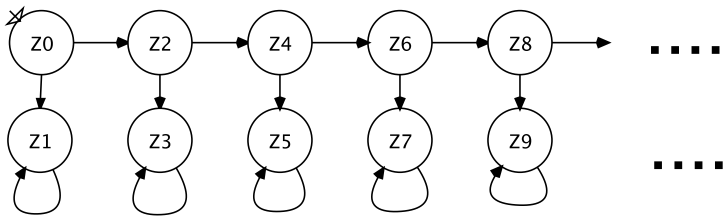
Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Aufgabenblatt 5: CTL und CTL-Model-Checking

Präsenzteil am 11./12. 11. – Abgabe am 18./19. 11. 2013

Präsenzaufgabe 5.1:

1. Betrachten Sie die Kripke-Strukturen M_1 und M_2 im Skript, Seite 41. Gibt es LTL-Formeln, die die beiden Strukturen unterscheiden? Falls ja, geben Sie welche an!
2. M_1 und M_2 wie zuvor: Gibt es CTL-Formeln, die die beiden Strukturen unterscheiden?
3. Betrachte die folgende Kripkestruktur mit unendlicher Zustandsmenge S, wobei die Zustandsettikettenfunktion für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $E_S(z_{2n}) = \emptyset$ und $E_S(z_{2n+1}) = \{p\}$ definiert sei.



   (a) Gilt $f_1 = \mathbf{EF}p$?

   (b) Gilt $f_2 = \mathbf{AGEF}p$?

   (c) Gilt $f_3 = \mathbf{AF}p$?

Präsenzaufgabe 5.2: Äquivalenzen in CTL.

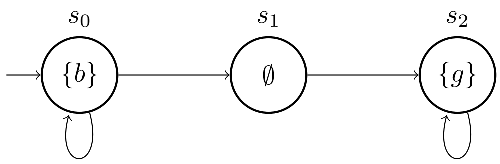
1. Formulieren Sie die folgenden Äquivalenzen in natürlicher Sprache und begründen Sie deren Gültigkeit: (i) $\neg\mathbf{G}f \equiv \mathbf{F}(\neg f)$, (ii) $\mathbf{F}f \equiv \mathit{True}\,\mathbf{U}f$, (iii) $\mathbf{A}f \equiv \neg(\mathbf{E}\neg f)$ und (iv) $\neg\mathbf{X}f \equiv \mathbf{X}\neg f$.
2. Beweisen Sie die Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AX}g &\equiv \neg\mathbf{EX}(\neg g)\\
\mathbf{EF}g &\equiv \mathbf{E}[\mathit{True}\,\mathbf{U}g]\\
\mathbf{AG}g &\equiv \neg\mathbf{EF}(\neg g)\\
\mathbf{AF}g &\equiv \neg\mathbf{EG}(\neg g)
\end{aligned}
$$

   Tipp: Nutzen Sie in der Argumentation die einfacheren Äquivalenzen der ersten Teilaufgabe.

von
6

Übungsaufgabe 5.3: Betrachten Sie das Kripke-Modell M_{AKW} eines Atomkraftwerkes. In dem Normalbetrieb (Zustand s_0: „Betrieb“ b) kann eine Störung (Zustand s_1) auftreten, wonach der Störbetrieb (Zustand s_2: „gestört“ g) aufgenommen wird.



M_{AKW}

1. Konstruieren Sie den Abwicklungsbaum $\mathit{Abwicklung}_{AKW}$ (siehe Skript Abb. 3.2) bis zur Tiefe 4 und bezeichnen dazu die Zustände und Etikette wie in M_{AKW}.

2. Wieder sei $\mathit{Sat}(\alpha)$ die Menge aller Zustände, die α erfüllen. Bestimmen Sie mit Hilfe von $\mathit{Abwicklung}_{AKW}$ (oder direkt mit M_{AKW}) die Mengen

   (a) $\mathit{Sat}(\alpha_1)$ mit $\alpha_1 = \mathbf{EX}b$,

   (b) $\mathit{Sat}(\mathbf{AG}\alpha_1)$,

   (c) $\mathit{Sat}(\alpha_2)$ mit $\alpha_2 = \mathbf{AG}\neg b$ und

   (d) $\mathit{Sat}(\mathbf{EX}\alpha_2)$.

3. Interpretieren Sie für M_{AKW} die Formeln $\beta_1 = \mathbf{AGEX}b$ und $\beta_2 = \mathbf{EXAG}\neg b$ und entscheiden Sie (unter zu Hilfenahme von 2.), ob sie für M_{AKW} gelten, d.h. ob

   (a) $M_{AKW} \models \mathbf{AGEX}b$ und

   (b) $M_{AKW} \models \mathbf{EXAG}\neg b$

   gelten. Dabei sei (analog zu Def. 3.5) $M \models \alpha :\Leftrightarrow \forall s \in S_0 : M, s \models \alpha$.

4. (a) Beweisen Sie für alle Aussagen a: $\mathbf{AXAG}a \equiv \mathbf{AGAX}a$.
   Hinweis: Konstruieren Sie (symbolisch) für beide Seiten den Abwicklungsbaum.
   (Anmerkung: Die Äquivalenz $\equiv$ ist definiert als: $f \equiv g$ gilt genau dann, wenn für jedes Modell M gilt: $M \models f$ gdw. $M \models g$. f ist also in jedem Modell wahr, in dem auch g wahr ist und andersherum. (Siehe auch die Definition zu Beginn von Abschnitt 3.4 im Skript auf Seite 40.))

   (b) Beweisen Sie, dass folgende Äquivalenz **nicht** gilt: $\mathbf{EXEG}(\neg b \wedge \neg g) \equiv \mathbf{EGEX}(\neg b \wedge \neg g)$.
   Hinweis: Benutzen Sie M_{AKW} zur Konstruktion eines Gegenbeispiels.

5. Indem man alle Symbole **A** und **E** streicht, erhält man aus einer CTL-Formel eine LTL-Formel. Ist die so erhaltene Formel äquivalent zur ursprünglichen (im Sinne der Definition vor Satz 3.14 auf Seite 40)?

   (a) Beweisen Sie als positives Beispiel: $\mathbf{AGAX}b \equiv \mathbf{GX}b$.
   (Hinweis: Die Äquivalenz ist hier so zu verstehen, dass jedes Modell, dass die CTL-Formel $\mathbf{AGAG}x$ auch die LTL-Formel $\mathbf{GX}b$ erfüllt und umgekehrt.)

   (b) Beweisen Sie als negatives Beispiel: $\mathbf{EG}b \equiv \mathbf{G}b$.
   Hinweis: Benutzen Sie M_{AKW} zur Konstruktion eines Gegenbeispiels.

von
6

Übungsaufgabe 5.4: Wenden Sie den CTL-Model-Checking-Algorithmus (Skript Abschnitt 4.2) auf die beiden CTL-Formeln $\beta_1 = \mathbf{AGEX}b$ und $\beta_2 = \mathbf{EXAG}\neg b$ von Aufgabe 5.3.3 und die Kripke-Struktur M_{AKW} an. Gehen Sie dabei fogendermaßen vor:

1. Bringen Sie β_1 und β_2 in eine Form β_1' und β_2', die nur **EX**, **EG** und **EU** verwendet. Auch **EF** kann sinnvollerweise als spezielle Form von **EU** benutzt werden.

2. Wenden Sie den CTL-Algorithmus nicht auf den Graphen von M_{AKW} an, sondern in Form folgender Tabelle:

Teilformel	Zustand s_0	Zustand s_1	Zustand s_2
b	$+$	$-$	$-$
$\mathbf{EX}b$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

   In der linken Spalte steht die zu prüfende Formel und aufsteigend alle Teilformeln, beginnend mit der kleinsten Teilformel b. Unter „Zustand s_i“ steht ein $+$, wenn die Teilformel der Zeile im entsprechenden Schritt im Graphen an diesen Zustand zu schreiben ist. Im anderen Fall steht ein $-$.

3. Entscheiden Sie, ob $M_{AKW} \models \beta_1$ und $M_{AKW} \models \beta_2$ gilt. Vergleichen Sie die letzten Zeilen der Tabellen mit Ihrem Ergebnis zu $Sat(\beta_1)$ und $Sat(\beta_1)$ aus Aufgabe 5.3.2. und erklären Sie Übereinstimmungen.

4. Anmerkung: Zu dem Verfahren der Umwandlung einer CTL-Formel in eine LTL-Formel gibt es ein interessantes Theorem. Wenn die durch Streichen der Quantoren **A** und **E** erzeugte LTL-Formel nicht äquivalent zur ursprünglichen ist, dann gibt es überhaupt keine LTL-Formel, die das leistet!

Bisher erreichbare Punktzahl: 60