FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 12 : Prozeßalgebra: BPA, Normalformen

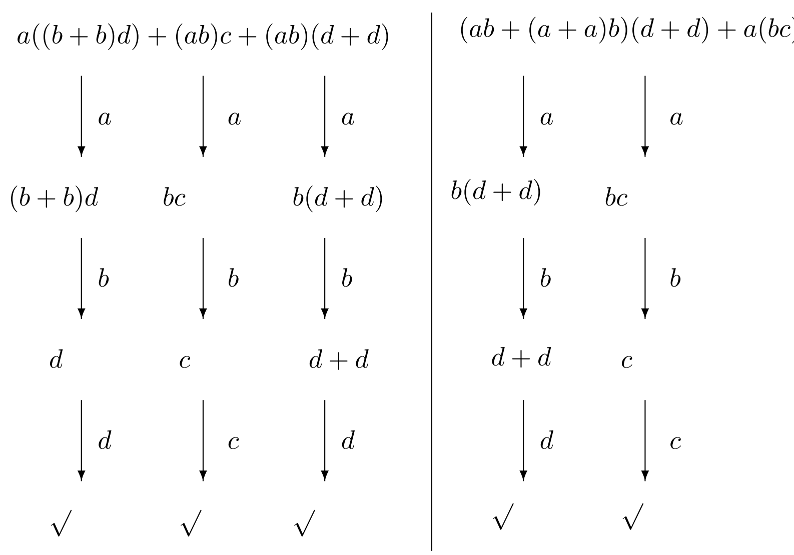
Präsenzteil am 13./14. 1. – Abgabe am 20./21. 1. 2014

Präsenzaufgabe 12.1: Betrachten Sie die folgenden Prozessausdrücke:

$$\begin{aligned} t_1 &= a((b+b)d) + (ab)c + (ab)(d+d) \\ t_2 &= (ab + (a+a)b)(d+d) + a(bc) \end{aligned}$$

1. Konstruieren Sie für die Prozessausdrücke jeweils den Prozessgraphen!

Lösung:



2. Identifizieren Sie alle bisimilaren Knoten in den beiden Prozessgraphen.

Lösung: Für t_1 und t_2 gilt: Es ist $d \underline{\leftrightarrow} (d+d)$, $(d+d) \underline{\leftrightarrow} (d+d)$ und $c \underline{\leftrightarrow} c$. Damit ist auch $(b+b)d \underline{\leftrightarrow} b(d+d)$ und $b(d+d) \underline{\leftrightarrow} b(d+d)$ sowie $bc \underline{\leftrightarrow} bc$. Und schließlich $t_1 \underline{\leftrightarrow} t_2$.

3. Sind t_1 und t_2 bisimilar?

Lösung: Ja, s.o.

4. Konstruieren Sie für t_2 mit den BPA-Transitionsregeln die Ableitungen so vieler Zustandsübergänge zur Aktion a wie möglich!. Geben Sie die in jedem Schritt verwendete Transitionsregel und die Variableninstanziierung an!

Lösung: Wir betrachten nur einen Übergang. Es gilt:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{a \xrightarrow{a} \surd}\; A_0, \sigma_1}{ab \xrightarrow{a} b}\; T_{\cdot}^{\surd}, \sigma_2}{(ab + (a+a)b) \xrightarrow{a} b}\; T_{+R}, \sigma_3}{(ab + (a+a)b)(d+d) \xrightarrow{a} b(d+d)}\; T_{\cdot}, \sigma_4}{t_2 = (ab + (a+a)b)(d+d) + a(bc) \xrightarrow{a} b(d+d)}\; T_{+R}, \sigma_5$$

$$\sigma_1 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a \end{array} \qquad \sigma_2 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & a, \\ y & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_3 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & ab, \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & (a+a)b \end{array}$$

$$\sigma_4 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & (ab + (a+a)b), \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & (d+d) \end{array} \qquad \sigma_5 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & a, \\ x & \mapsto & (ab + (a+a)b)(d+d), \\ x' & \mapsto & b(d+d), \\ y & \mapsto & a(bc) \end{array}$$

Präsenzaufgabe 12.2: Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie ihre Antwort!

1. Wenn Prozessgraphen isomorph sind, dann sind sie auch bisimilar. (Isomorphie gilt, wenn beide Graphen durch Umbenennung der Knoten gleich werden. Formal: Zu den Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $E_i \subseteq V_i \times A \times V_i$ muss es eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ geben, welche zu $\varphi(E_1) = E_2$ führt.)

   Lösung: Wenn zwei Prozessgraphen gleich oder isomorph sind, dann sind sie auch bisimilar, denn zu jedem Zustand kann im anderen Graphen ein passender bisimilarer Partner angegeben werden: $\mathcal{B} = \{(x, x) \mid x \in V_1 = V_2\}$ bzw. $\mathcal{B} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in V_1\}$.

2. Wenn Prozessgraphen bisimilar sind, dann sind sie auch isomorph.

   Lösung: Die Aussage gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt: Die beiden Prozessgraphen zu den Termen ab und $ab + a(b+b)$ sind nicht isomorph, obwohl die Terme bisimilar sind (da $b \leftrightarrow b + b$ gilt):

$$ab \xrightarrow{a} b \xrightarrow{b} \surd \qquad \text{und} \qquad ab + a(b+b) \begin{array}{l} \xrightarrow{a} \; b \; \xrightarrow{b} \surd \\ \xrightarrow{a} (b+b) \xrightarrow{b} \surd \end{array}$$

3. Alice sagt: „Im BPA-Kalkül (S. 203) kann nur $s = t$ bewiesen werden, nicht aber $s \neq t$.“

   Bob sagt: „Im BPA-Ersetzungskalkül (S. 204) kann sogar $s \neq t$ bewiesen werden.“

   Lösung: Beide Aussagen stimmen. Grundsätzlich gilt in Kalkülen, dass sie zur Ableitung von Positivbeispielen geeignet sind, im Falle des BPA-Kalküls also von gültigen Äquivalenzen $s = t$. Dass Nicht-Ableiten-Können eines Beispiels stellt aber keinen zulässigen Beweis dar – es muss außerhalb des Kalküls argumentiert werden, warum so eine Ableitung *unmöglich* ist.

   Der Ersetzungskalkül zur Normalformbildung liefert solch eine Argumentation für den BPA-Kalkül, da die AC-Äquivalenz von Normalformen in endlicher Zeit überprüft werden kann (es gibt nur endlich viele Permutationen der Summanden innerhalb eines Terms).

4. Alice sagt: „Das Tolle an Normalformen ist, dass man von der Gleichheit (modulo AC) auf die Bisimilarität schließen kann.“

   Bob sagt: „Viel besser ist noch, dass man von der *Un*gleichheit (modulo AC) der Normalformen auf die *Un*gültigkeit der Bismilarität schließen kann.“

   Lösung: Beide Aussagen stimmen. Diese beiden Aussagen ergänzen vorigen beiden Aussagen um den Zusammenhang zwischen BPA-Äquivalenzen und Bisimilarität.

5. Angenommen wir interpretieren Prozessterme nicht durch Prozessgraphen, sondern durch die rationalen Zahlen, wobei $x+y$ wie üblich die Summe und $x \cdot y$ das Produkt beschreibt. Anstelle von Bisimilarität verwenden wir die arithmetische Gleichheit der ausgerechneten Ausdrücke. Haben wir dann auch ein Modell, für das die Axiome des BPA-Kalküls gelten, ist also der BPA-Kalkül korrekt und/oder vollständig bezüglich der arithmetischen Interpretation?

   Lösung: Die rationalen Zahlen sind kein mögliches Modell, denn die Axiome A1 bis A5 sind für die arithmetische Interpretation weder vollständig noch korrekt. Das Axiom A3 ($x + x = x$) gilt beispielsweise nicht für $x = 1$, daher ist der BPA-Kalkül nicht korrekt. Der Kalkül ist auch nicht vollständig, da $2(3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ ist (beide Ausdrücke ergeben die Zahl 14), dies aber durch die Axiome und Schlußregeln des BPA-Kalküls nicht hergeleitet werden kann.

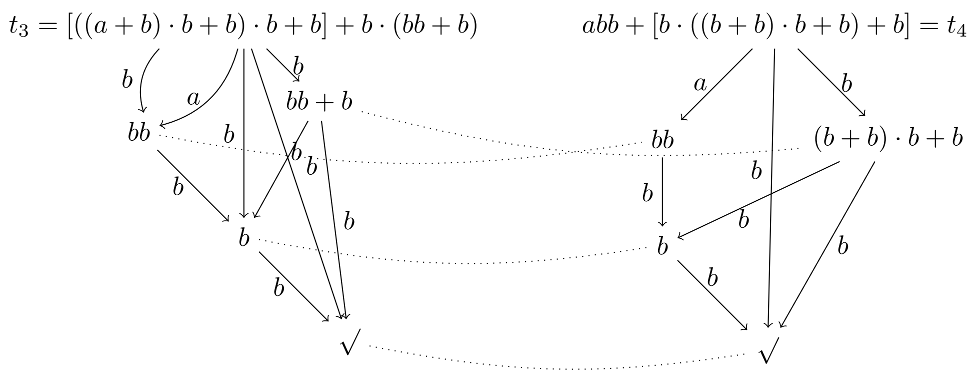
Übungsaufgabe 12.3: Betrachten Sie die folgenden Prozessausdrücke:

von
4

$$
\begin{aligned}
t_3 &= [((a+b) \cdot b + b) \cdot b + b] + b \cdot (bb + b) \\
t_4 &= abb + [b \cdot ((b+b) \cdot b + b) + b]
\end{aligned}
$$

1. Konstruieren Sie für die Prozessausdrücke jeweils den Prozessgraphen!

   Lösung:



2. Identifizieren Sie alle bisimilaren Knoten in den beiden Prozessgraphen.

   Lösung: s.o.

3. Sind t_3 und t_4 bisimilar?

   Lösung: Nein, s.o.

4. Konstruieren Sie zu mindestens 3 von t_3 ausgehenden b-Übergänge im Prozessgraphen von t_3 jeweils eine Ableitung mit BPA-Transitionsregeln. Geben Sie die in jedem Schritt verwendete Transitionsregel und die Variableninstanziierung an!

Lösung: Es gibt 4 solche b-Übergänge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b \xrightarrow{b} \surd}\ A_0, \sigma_1}{b(bb+b) \xrightarrow{b} bb+b}\ T_{\cdot}^{\surd}, \sigma_2}{[((a+b)b+b)b+b] + b(bb+b) \xrightarrow{b} bb+b}\ T_{+L}, \sigma_3$$

$$\sigma_1 : v \mapsto b \qquad \sigma_2 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & (bb+b) \end{array}$$

$$\sigma_3 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & [((a+b)b+b)b+b], \\ y & \mapsto & b(bb+b), \\ y' & \mapsto & (bb+b) \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b \xrightarrow{b} \surd}\ A_0, \sigma_1}{((a+b)b+b)b+b \xrightarrow{b} \surd}\ T_{+L}^{\surd}, \sigma_2}{[((a+b)b+b)b+b] + b(bb+b) \xrightarrow{b} \surd}\ T_{+R}^{\surd}, \sigma_3$$

$$\sigma_1 : v \mapsto b \qquad \sigma_2 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & ((a+b)b+b)b, \\ y & \mapsto & b \end{array}$$

$$\sigma_3 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & [((a+b)b+b)b+b], \\ y & \mapsto & b(bb+b) \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b \xrightarrow{b} \surd}\ A_0, \sigma_1}{(a+b)b+b \xrightarrow{b} \surd}\ T_{+L}^{\surd}, \sigma_2}{((a+b)b+b)b \xrightarrow{b} b}\ T_{\cdot}^{\surd}, \sigma_3}{((a+b)b+b)b+b \xrightarrow{b} b}\ T_{+R}, \sigma_4}{[((a+b)b+b)b+b] + b(bb+b) \xrightarrow{b} b}\ T_{+R}, \sigma_5$$

$$\sigma_1 : v \mapsto b \qquad \sigma_2 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & (a+b)b, \\ y & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_3 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & ((a+b)b+b), \\ y & \mapsto & b \end{array}$$

$$\sigma_4 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & ((a+b)b+b)b, \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_5 : \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & [((a+b)b+b)b+b], \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & b(bb+b) \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b \xrightarrow{b} \surd}\;A_0,\sigma_1}{a+b \xrightarrow{b} \surd}\;T^{\surd}_{+L},\sigma_2}{(a+b)b \xrightarrow{b} b}\;T^{\surd}_{\cdot},\sigma_3}{(a+b)b+b \xrightarrow{b} b}\;T_{+L},\sigma_4}{((a+b)b+b)b \xrightarrow{b} bb}\;T_{\cdot},\sigma_5}{((a+b)b+b)b+b \xrightarrow{b} bb}\;T_{+R},\sigma_6}{[((a+b)b+b)b+b]+b(bb+b) \xrightarrow{b} bb}\;T_{+R},\sigma_7$$

$$\sigma_1: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_2: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & a, \\ y & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_3: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & (a+b), \\ y & \mapsto & b \end{array}$$

$$\sigma_4: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & (a+b)b, \\ y & \mapsto & b, \\ y' & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_5: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & ((a+b)b+b), \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & b \end{array}$$

$$\sigma_6: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & ((a+b)b+b)b, \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & b \end{array} \qquad \sigma_7: \begin{array}{rcl} v & \mapsto & b, \\ x & \mapsto & [((a+b)b+b)b+b], \\ x' & \mapsto & b, \\ y & \mapsto & b(bb+b) \end{array}$$

Übungsaufgabe 12.4: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jeder BPA-Term genau eine Normalform hat (modulo AC), und dass die nichtdeterministische Wahl der Reduktionsregel keine Auswirkung auf das Endergebnis hat.

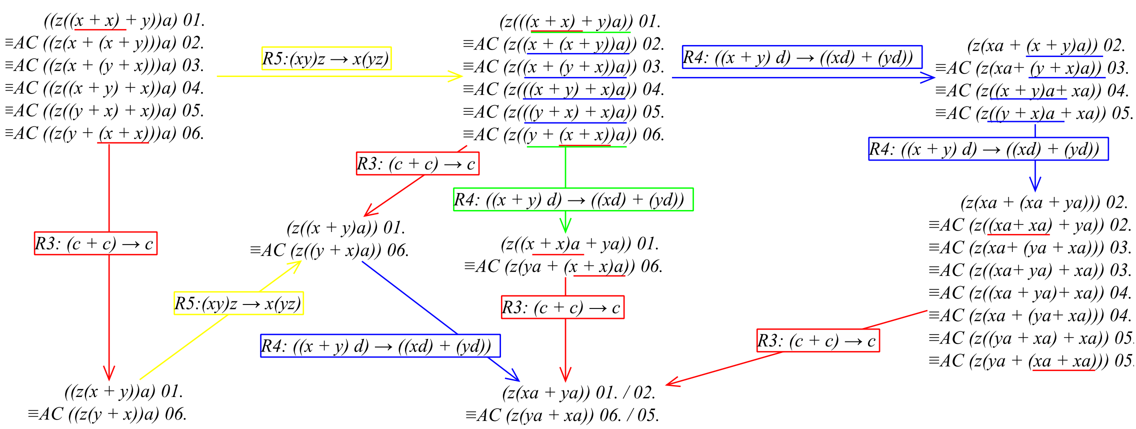
von
4

Wir wollen uns das an einem Beispiel klarmachen, indem wir das Transitionssystem konstruieren, das alle möglichen Reduktionen von $t = ((z(x + (y + x)))(x + y))$ enthält. Geben Sie bei jeder Reduktion die verwendete Reduktionsregel (inkl. der Substitution) an.

Zeigen Sie, dass dieses Transitionssystem genau einen Zustand besitzt, aus dem keine Kante mehr führt und dass dieser die Normalform ist. Verwenden sie *keine* Klammersparregeln.

Hinweis: Terme, die AC-äquivalent sind, sollen als *ein* Knoten dargestellt werden. Führen Sie dennoch in diesem Knoten sämtliche äquivalenten Terme auf, damit Sie keine Reduktionsmöglichkeit übersehen. Sie dürfen super-Zeichen verwenden um die Anzahl der Äquivalenten Terme die durch $R1$ auftreten zu reduzieren. Schreiben Sie hierbei explizit auf, welche super-Zeichen was bedeuten. Achten Sie dabei darauf, dass Ihre super-Zeichen nicht ggf. Strukturen verbergen, die noch nicht in Normalform sind.

Lösung: Wir verwenden das super-Zeichen „a“ für „$(x + y)$“, man beachte das also für jedes a in einem Term die Anzahl der eigentlichen Äquivalenten Terme durch $R1 : x + y = y + x$ verdoppelt ist. Der untere zentrale Knoten $t' = (z(xa+ya)) = (z(x(x+y)+y(x+y)))$ ist die AC-Normalform, denn es sind keine Reduktionen mehr anwendbar.



von
4

Übungsaufgabe 12.5: Ein Kalkül bezüglich Bisimulation in BPA muss nicht mit exakt den 5 Axiomen definiert werden, wie sie im Skript angegeben sind. Beispielsweise ist der Kalkül mit den Axiomen A3, A4, A5 und A6 ebenfalls korrekt und vollständig bezüglich Bisimulation in BPA. Hierbei sei:

$$\text{A6:} \quad (x + y) + (z + z) = (y + y) + (z + x)$$

Um Korrektheit und Vollständigkeit des neuen Kalküls zu zeigen, genügt es, die Äquivalenz der neuen Axiome zu den bekannten BPA-Axiomen zu zeigen. Für die unveränderten Axiome A3, A4 und A5 ist nichts weiter zu tun. Zeigen Sie, dass die BPA-Axiome A1, A2, A3 äquivalent zu den Axiomen A3 und A6 sind. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

1. $\Rightarrow$ Zeigen Sie, dass aus den BPA-Axiomen A1, A2, A3 auch A6 folgt!

2. $\Leftarrow$ Folgern sie A1 aus A3 und A6!

   Hinweis: Dies stellt die zentrale Herausforderung der Aufgabe dar. Beim Beweis ist es nötig, das Axiom A6 mehrfach zu verwenden. Ein Tipp: Wegen der Idempotenz ist es hilfreich, Terme der Form $(x + y) + (x + y)$ zu betrachten.

3. $\Leftarrow$ Folgern sie nun A2 aus A3 und A6!

   Hinweis: Da Sie bereits in Punkt 2. gezeigt haben, dass A1 aus A3 und A6 folgt, können Sie dies hier im Beweis verwenden.

Lösung: A1 ist die Kommutativität von $+$, A2 die Assoziativität und A3 die Idempotenz.

Wir nehmen die BPA-Axiome A1, A2, A3 an. Es folgt A6:

$$\begin{aligned}
(x + y) + (z + z) &= (x + y) + z && \text{mit A3} \\
&= x + (y + z) && \text{mit A2} \\
&= (y + z) + x && \text{mit A1} \\
&= y + (z + x) && \text{mit A2} \\
&= (y + y) + (z + x) && \text{mit A3}
\end{aligned}$$

Da A3 weiterhin gilt, folgt also A3 und A6 aus A1, A2 und A3.

Nehmen wir nun umgekehrt A3 und A6 an. Mit A3 folgt A1:

$$\begin{array}{rcll}
(x+y) & = & (x+y)+(x+y) & \text{A3} \\
& = & (x+y)+((x+y)+(x+y)) & \text{A3} \\
& = & (y+y)+((x+y)+x) & \text{A6 für z= (x+y)} \\
& = & y+((x+y)+x) & \text{A3} \\
& = & y+((x+y)+(x+x)) & \text{A3} \\
& = & y+((y+y)+(x+x)) & \text{A6 für Subterm} \\
& = & y+(y+(x+x)) & \text{A3} \\
& = & (y+y)+(y+(x+x)) & \text{A3} \\
& = & ((x+x)+y)+(y+y) & \text{A6} \\
& = & ((x+x)+(y+y))+(y+y) & \text{A3} \\
& = & ((x+x)+(y+x))+(y+y) & \text{A6 für Subterm} \\
& = & (x+(y+x))+(y+y) & \text{A3} \\
& = & ((y+x)+(y+x))+(y+x) & \text{A6} \\
& = & (y+x)+(y+x) & \text{A3} \\
& = & (y+x) & \text{A3}
\end{array}$$

Mit A3 folgt A2:

$$\begin{array}{rcll}
(x+y)+z & = & (x+y)+(z+z) & \text{A3} \\
& = & (y+y)+(z+x) & \text{A6} \\
& = & (z+x)+(y+y) & \text{A1} \\
& = & (x+x)+(y+z) & \text{A6} \\
& = & x+(y+z) & \text{A3}
\end{array}$$

Bisher erreichbare Punktzahl: 139