1.3.5 a. $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad -\frac{1}{3}x_5=0 \\ \qquad x_3 \quad +\frac{2}{3}x_5=0 \\ \qquad\qquad x_4+x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2s+\frac{1}{3}t \\ x_2=s \\ x_3=-\frac{2}{3}t \\ x_4=-t \\ x_5=t \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\\-1\\1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-3\\3\end{pmatrix}$

b. $\begin{cases} x_1+2x_2 \quad +2x_4+3x_5=0 \\ \qquad x_3+x_4+2x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2r-2s-3t \\ x_2=r \\ x_3=-s-2t \\ x_4=s \\ x_5=t \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=r\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$

c. $\begin{cases} x_1 \qquad +2x_4 \qquad =0 \\ \quad x_2 \quad -x_4 \qquad =0 \\ \qquad x_3 -x_4-x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2s \\ x_2=t \\ x_3=s+t \\ x_4=s \\ x_5=t \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

d. $\begin{cases} x_1 \qquad +x_4 \qquad =0 \\ \quad x_2-2x_3-3x_4 =0 \\ \qquad\qquad x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-s \\ x_2=2s+3t \\ x_3=s \\ x_4=t \\ x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

5.1.1 a. $U=\{(1,s,t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$

$(0,0,0)\notin U \Rightarrow U$ not subspace

b. $U=\{(0,s,t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$

① $(0,0,0)\in U$

② $(0,s_1,t_1)+(0,s_2,t_2)=(0,s_1+s_2,t_1+t_2)\in U$

③ $a(0,s,t)=(0,as,at)\in U$

$\Rightarrow U$ is subspace

c. $U=\{(r,s,t)\mid -r+3s+2t=0,\ r,s,t\in\mathbb{R}\}$

① $-0+3\cdot 0+2\cdot 0=0\Rightarrow(0,0,0)\in U$

② $(r_1,s_1,t_1)+(r_2,s_2,t_2)=(r_1+r_2,s_1+s_2,t_1+t_2)$, $-(r_1+r_2)+3(s_1+s_2)+2(t_1+t_2)=(-r_1+3s_1+2t_1)$

$+(-r_2+3s_2+2t_2)=0+0=0\Rightarrow(r_1,s_1,t_1)+(r_2,s_2,t_2)\in U$

③ $a(r,s,t)=(ar,as,at)$, $-ar+3as+2at=a(-r+3s+2t)=a\cdot 0=0\Rightarrow$

$a(r,s,t)\in U$

①+②+③ $\Rightarrow U$ is subspace

d. $U=\{(r,3s,r-2) \mid r,s\in R'\}$

① $(0,0,0)\notin U \Rightarrow U$ is not subspace

e. $U=\{(r,0,s) \mid r^2+s^2=0,\ r,s\in R\}$

① $0^2+0^2=0 \Rightarrow (0,0,0)\in U$

② $(r_1,0,s_1)+(r_2,0,s_2)=(r_1+r_2,\ 0,\ s_1+s_2)$, $(r_1+r_2)^2+(s_1+s_2)^2=r_1^2+r_2^2+s_1^2+s_2^2+2r_1r_2+2s_1s_2$

$=2r_1r_2+2s_1s_2\neq 0 \Rightarrow (r_1,0,s_1)+(r_2,0,s_2)\notin U \Rightarrow U$ is not subspace

f. $U=\{(2r,-s^2,t) \mid r,s,t\in R\}$

① $r=s=t=0 \Rightarrow (0,0,0)\in U$

② $(2r_1,-s_1^2,t_1)+(2r_2,-s_2^2,t_2)=\left(2(r_1+r_2),-(\sqrt{s_1^2+s_2^2})^2,t_1+t_2\right)\in U$

③ $a(2r,-s^2,t)=\left(2(ar),-(\sqrt{as^2})^2,at\right)\in U$

①+②+③ $\Rightarrow U$ is subspace

5.1.2. a. $k_1\vec{y}+k_2\vec{z}=\vec{x} \Rightarrow \begin{cases} k_1 \quad\ =2 \\ \quad k_2=-1 \\ \quad 0=0 \\ k_1+k_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=2 \\ k_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=2\vec{y}-\vec{z}$

b. $k_1\vec{y}+k_2\vec{z}=\vec{x} \Rightarrow k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\15\\11\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1+k_2=1 \\ -k_1-k_2=2 \\ -3k_2=15 \\ 2k_1+k_2=11 \end{cases} \Rightarrow$ no solution $\Rightarrow \vec{x}\notin span\{\vec{y},\vec{z}\}$

c. $k_1\vec{y}+k_2\vec{z}=\vec{x} \Rightarrow k_1\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\5\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-13\\20\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1-k_2=8 \\ k_1=3 \\ -3k_1+2k_2=-13 \\ 5k_1-3k_2=20 \end{cases} \Rightarrow$ no solution $\Rightarrow \vec{x}\notin span\{\vec{y},\vec{z}\}$

d. $k_1\vec{y}+k_2\vec{z}=\vec{x} \Rightarrow k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\5\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\8\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1-k_2=2 \\ -k_1+2k_2=5 \\ 2k_2=8 \\ 5k_1-3k_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=3 \\ k_2=4 \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=3\vec{y}+4\vec{z}$

5.1.3. a. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}+k_4\vec{x_4}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow R=span\{\vec{x_1},\dots,\vec{x_4}\}$

b. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}+k_4\vec{x_4}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-2&0&1\\3&1&2&-4\\-5&0&1&5\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k}=\begin{pmatrix}t\\t\\0\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow R\neq span\{\vec{x_1},\dots,\vec{x_4}\}$

5.2.1 a. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&3&3\\-1&2&5\\0&-1&-2\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ independent

b. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$ independent

c. $\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow -2\vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{x_3}=\vec{0}$ dependent

d. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow -\vec{x_1}+\vec{x_2}-\vec{x_3}+\vec{x_4}=\vec{0}$ dependent

5.2.3. a. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&9\\2&0&-6\\0&3&6\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=t\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow 3\vec{x_1}-2\vec{x_2}+\vec{x_3}=\vec{0}$

dimension $=2$, basis $=\{\vec{x_1},\vec{x_2}\}$

b. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&1&7\\0&1&4\\-1&1&1\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=t\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}\Rightarrow -3\vec{x_1}-4\vec{x_2}+\vec{x_3}=\vec{0}$

dimension $=2$, basis $=\{\vec{x_1},\vec{x_2}\}$

5.2.6 a. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x_1},\vec{x_2}$ are independent $\Rightarrow$ be a basis

b. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}$ are a basis

c. $k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+k_3\vec{x_3}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{k}=\begin{pmatrix}t\\t\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x_1}=-\vec{x_2}\Rightarrow\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}$ are not a basis.

5.4.1 a. $\begin{pmatrix}2&-4&6&8\\2&-1&3&2\\4&-5&9&10\\0&-1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ rank(colA) $=2$, basis colA $=\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-1\\-5\\-1\end{pmatrix}\right\}$

b. $\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&1&1\\4&-2&3\\-6&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-0.5&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ rank(colA) $=2$, basis of colA $=\left\{\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$

c. $\begin{pmatrix}1&-1&5&-2&2\\2&-2&-2&5&1\\0&0&-12&9&-3\\-1&1&7&-7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1.75&0.75\\0&0&1&-0.75&0.25\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, rank(colA) $=2$, basis of colA $=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-2\\-12\\7\end{pmatrix}\right\}$

d. $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-3&-6&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, rank(colA) $=2$, basis of colA $=\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right\}$

5.4.2 a. $\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, basis $=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \}$$

b. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5.4.3 a. $\begin{cases} \text{rank}(A_{3\times4}) \le 3 \\ \text{rank}(A_{3\times4}) \le 4 \end{cases} \Rightarrow \text{rank}(A_{3\times4}) \le 3 \Rightarrow \dim\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \le 3 \Rightarrow$ not ind

$\dim(\{r_1, r_2, r_3\}) \le 3 \Rightarrow$ when $\dim = 3$,