5.3.3 a. $\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}=1\times(-2)+(-1)\times1+3\times1=0$, $\vec{b_1}\cdot\vec{b_3}=1\times4+(-1)\times7+3\times1=0$, $\vec{b_2}\cdot\vec{b_3}=-2\times4+1\times7+1\times1=0$ ✓

$\operatorname{proj}_{\vec{b_1}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{b_1}}{\|\vec{b_1}\|^2}\vec{b_1}=\frac{a-b+3c}{1^2+(-1)^2+3^2}=\frac{a-b+3c}{11}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\operatorname{proj}_{\vec{b_2}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{b_2}}{\|\vec{b_2}\|^2}\vec{b_2}=\frac{-2a+b+c}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\operatorname{proj}_{\vec{b_3}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{b_3}}{\|\vec{b_3}\|^2}\vec{b_3}=\frac{4a+7b+c}{66}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ ✓

b. $\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}=1\times1+0\times4+(-1)\times1=0$, $\vec{b_1}\cdot\vec{b_3}=1\times2+0\times(-1)+(-1)\times2=0$, $\vec{b_2}\cdot\vec{b_3}=1\times2+4\times(-1)+1\times2=0$ ✓

$\operatorname{proj}_{\vec{b_1}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{b_1}}{\|\vec{b_1}\|^2}\vec{b_1}=\frac{a-c}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ✓, $\operatorname{proj}_{\vec{b_2}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{b_2}}{\|\vec{b_2}\|^2}\vec{b_2}=\frac{a+4b+c}{18}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ ✓

$\operatorname{proj}_{\vec{b_3}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{b_3}}{\|\vec{b_3}\|^2}\vec{b_3}=\frac{2a-b+2c}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ ✓

5.3.4 a. $\operatorname{proj}_{\vec{u_1}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|^2}\vec{u_1}=\frac{13\times1+(-20)\times(-2)+15\times3}{1^2+(-2)^2+3^2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\operatorname{proj}_{\vec{u_2}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_2}\|^2}\vec{u_2}=\frac{13\times(-1)+(-20)\times1+15\times1}{(-1)^2+1^2+1^2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{x}=7\vec{u_1}-6\vec{u_2}$ ✓

b. $\operatorname{proj}_{\vec{u_1}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|^2}\vec{u_1}=\frac{14\times2+1\times(-1)+(-8)\times0+5\times3}{2^2+(-1)^2+0^2+3^2}\vec{u_1}=3\vec{u_1}$

$\operatorname{proj}_{\vec{u_2}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_2}\|^2}\vec{u_2}=\frac{14\times2+1\times1+(-8)\times(-2)+5\times(-1)}{2^2+1^2+(-2)^2+(-1)^2}\vec{u_2}=4\vec{u_2}$

$\vec{x}=3\vec{u_1}+4\vec{u_2}$ ✓

8.1.2a. $\operatorname{proj}_U\vec{x}=\operatorname{proj}_{\vec{u_1}}\vec{x}+\operatorname{proj}_{\vec{u_2}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|^2}\vec{u_1}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_2}\|^2}\vec{u_2}=\frac{1\times1+5\times(-2)+7\times3}{1^2+(-2)^2+3^2}\vec{u_1}+\frac{1\times(-1)+5\times1+7\times1}{(-1)^2+1^2+1^2}\vec{u_2}$

$=\frac{6}{7}\vec{u_1}+\frac{11}{3}\vec{u_2}$

$\vec{x}=\operatorname{proj}_U\vec{x}+(\vec{x}-\operatorname{proj}_U\vec{x})=\frac{6}{7}\vec{u_1}+\frac{11}{3}\vec{u_2}+\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}-\frac{6}{7}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}-\frac{11}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{6}{7}\vec{u_1}+\frac{11}{3}\vec{u_2}+\begin{pmatrix}80/21\\64/21\\16/21\end{pmatrix}$

b. $\operatorname{proj}_U\vec{x}=\operatorname{proj}_{\vec{u_1}}\vec{x}+\operatorname{proj}_{\vec{u_2}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|^2}\vec{u_1}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_2}\|^2}\vec{u_2}=\frac{2\times3+1\times(-1)+6\times2}{3^2+(-1)^2+2^2}\vec{u_1}+\frac{2\times2+1\times0+6\times(-3)}{2^2+0^2+(-3)^2}\vec{u_2}$

$=\frac{17}{14}\vec{u_1}-\frac{14}{13}\vec{u_2}$ ??

$\vec{x}=\operatorname{proj}_U\vec{x}+(\vec{x}-\operatorname{proj}_U\vec{x})=\frac{17}{14}\vec{u_1}-\frac{14}{13}\vec{u_2}+\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}-\frac{17}{14}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{14}{13}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}=\frac{17}{14}\vec{u_1}-\frac{14}{13}\vec{u_2}+\begin{pmatrix}341/182\\31/14\\508/91\end{pmatrix}$

8.1.4. a. $A^T=\begin{pmatrix}\vec{u_1}^T\\ \vec{u_2}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\text{proj}_U\vec{x}\in U$

$\left.\begin{array}{l}A^T(\vec{x}-\vec{p})=\vec{0}\\ \vec{p}=A\vec{\alpha}\end{array}\right\}\Rightarrow A^T(\vec{x}-A\vec{\alpha})=\vec{0}\Rightarrow\vec{\alpha}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2.5\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{p}=A\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\1.5\\1.5\end{pmatrix}$ ✓

b. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\text{proj}_U\vec{x}\in U$

$\frac{2\times14\times13-17\times3+14\times2}{14\times13}$ $\frac{31}{14}$ $\frac{508}{91}$

$\vec{\alpha}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{p}=A\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ✓

c. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\text{proj}_U\vec{x}\in U$

$\vec{\alpha}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{p}=A\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ ??

d. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\text{proj}_U\vec{x}\in U$

$\vec{\alpha}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p}=A\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ✓

5.6.2 a. $M=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\1&4\\1&6\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $M^TM=\begin{pmatrix}4&14\\14&62\end{pmatrix}$, $M^T\vec{y}=\begin{pmatrix}10\\43\end{pmatrix}$

$M^TM\vec{z}=M^T\vec{y}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&14\\14&62\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\43\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}z_0=0.35\\z_1=0.62\end{array}\right.\Rightarrow y=0.35+0.62x$ ✓

b. $M=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\\1&7\\1&8\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$, $M^TM=\begin{pmatrix}4&21\\21&133\end{pmatrix}$, $M^T\vec{y}=\begin{pmatrix}10\\42\end{pmatrix}$

$M^TM\vec{z}=M^T\vec{y}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&21\\21&133\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\42\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}z_0=4.92\\z_1=-0.46\end{array}\right.\Rightarrow y=4.92-0.46x$ ✓

c. $M=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\4\\6\end{pmatrix}$, $M^TM=\begin{pmatrix}5&5\\5&15\end{pmatrix}$, $M^T\vec{y}=\begin{pmatrix}12\\29\end{pmatrix}$

$M^TM\vec{z}=M^T\vec{y}\Rightarrow\begin{pmatrix}5&5\\5&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\29\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}z_0=0.7\\z_1=1.7\end{array}\right.\Rightarrow y=0.7+1.7x$ ✓

d. $M=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\\ -2\\ -4\end{pmatrix}$, $M^TM=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$, $M^T\vec{y}=\begin{pmatrix}-2\\ -17\end{pmatrix}$

$M^TM\vec{z}=M^T\vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -17\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_0=-0.4\\ z_1=-1.7\end{cases} \Rightarrow y=-0.4-1.7x$ ✓

5.6.9. $M=\begin{pmatrix}1 & 50 & 18 & 10\\ 1 & 40 & 20 & 16\\ 1 & 35 & 14 & 10\\ 1 & 40 & 12 & 12\\ 1 & 30 & 16 & 14\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}28\\ 30\\ 21\\ 23\\ 23\end{pmatrix}$, $M^TM=\begin{pmatrix}5 & 195 & 80 & 62\\ 195 & 7825 & 3150 & 2390\\ 80 & 3150 & 1320 & 1008\\ 62 & 2390 & 1008 & 796\end{pmatrix}$, $M^T\vec{y}=\begin{pmatrix}125\\ 4945\\ 2042\\ 1568\end{pmatrix}$

$M^TM\vec{z}=M^T\vec{y} \Rightarrow \begin{cases} z_0=-5.19\\ z_1=0.34\\ z_2=0.51\\ z_3=0.71\end{cases} \Rightarrow y=-5.19+0.34x_1+0.51x_2+0.71x_3$ ✓