Stochastik 1
Serie 6

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1

Zu zeigen ist, dass folgende Aussage gilt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Beweis:

$$\begin{aligned}
E(X) + E(Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot P(\omega) \\
&\underset{\text{ist wieder eine Zg}}{\overset{\text{Summe zweier Zgn}}{=}} E(X+Y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir müssen ein Modell (Ω, P) angeben, wobei wir das P erst noch berechnen müssen. Dazu stellen wir aber erst einmal das Ω auf, welches die Anzahl der geschossenen Tore eines Spielers beschreibt und so aussieht: $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$
Um P auszurechnen, stellen wir ein lineares Gleichungssystem auf, mit den Gleichungen, die wir aus der Aufgabe und den Voraussetzungen für Verteilungen aufstellen können.
Aus der Aufgabe:

$$\begin{aligned}
P(\{0\}) &= 20 \cdot P(\{3\}) \\
P(\{1\}) &= 2,5 \cdot P(\{2\})
\end{aligned}$$

Durch den Erwartungswert:

$$E(\Omega) = 1 = 0 \cdot P(\{0\}) + 1 \cdot P(\{1\}) + 2 \cdot P(\{2\}) + 3 \cdot P(\{3\})$$

Durch die Dichteeigenschaft:

$$P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$$

Dieses Lineare Gleichungssystem lässt sich eindeutig lösen. Als Lösungen ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
P(\{0\}) &= \frac{5}{21} \\
P(\{1\}) &= \frac{15}{28} \\
P(\{2\}) &= \frac{3}{14} \\
P(\{3\}) &= \frac{1}{84}
\end{aligned}$$

Alle Wahrscheinlichkeiten sind positiv, weshalb auch die zweite Dichteeigenschaft gilt.
Somit ist unser Modell mit folgender Definition komplett:
(Ω, P) mit $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ und

$$P(\omega) = \begin{cases} 5/21 & \text{für } \omega = 0 \\ 15/28 & \text{für } \omega = 1 \\ 3/14 & \text{für } \omega = 2 \\ 1/84 & \text{für } \omega = 3 \end{cases}$$

Aufgabe 3

Unser Modell sieht wie folgt aus: $\Omega = \{\{1, ..., 6\}^2\}$ $P = Laplaceverteilung$. Unsere Zufallsgröße X bildet von Ω in die Menge $\{-3, 0, 2\}$ ab und beschreibt den Gewinn des Bierverkäufers. Dabei geben negative Zahlen den Verlust und positive Zahlen den Gewinn des Betrages an.

$$X(\omega) = \begin{cases} -3 & \text{für } \omega = (6, 6) \\ 0 & \text{für } \omega \in \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich dann:

$$P(X = -3) = \frac{1}{36}$$
$$P(X = 0) = \frac{5}{36}$$
$$P(X = 2) = \frac{30}{36}$$

Der erwartete Gewinn des Verkäufers pro Spiel berechnet sich durch den Erwartungswert der Zufallsgröße X:

$$\begin{aligned} E(X) &= -3 \cdot P(X = -3) + 0 \cdot P(X = 0) + 2 \cdot P(X = 2) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{36} + 0 \cdot \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{30}{36} \\ &= \frac{19}{12} \approx 1,58 \end{aligned}$$

Der Verkäufer macht pro Spiel also durchschnittlich etwa $1,58$ Euro Gewinn.