Stochastik 1
Serie 11

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1 und 2

(a) Damit f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Daraus folgt für c:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)dt \\
&= \int_{0}^{\infty} cte^{-t/2}dt \\
&= c \cdot \int_{0}^{\infty} te^{-t/2}dt \\
&= c \cdot \left([-2te^{-t/2}]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} -2e^{-t/2}dt \right) \\
&= c \cdot \left([-2te^{-t/2}]_0^{\infty} - [4e^{-t/2}]_0^{\infty} \right) \\
&\overset{\text{l'hopital}}{=} c \cdot ((0-0) - (0-4)) \\
&= 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(b) Zu berechnen ist:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Dabei muss unterschieden werden zwischen:

- $x \leq 0$: Dann ergibt das oben gegebene Integral immer 0.

- $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \frac{1}{4} te^{-t/2} dt \\
&= \frac{1}{4} \cdot \int_0^x te^{-t/2} dt \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left([-2te^{-t/2}]_0^x - \int_0^x -2e^{-t/2} dt \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left([-2te^{-t/2}]_0^x - [4e^{-t/2}]_0^x \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(-2xe^{-x/2} - (4e^{-x/2} - 4) \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4 \right) \\
&= -\frac{1}{2} xe^{-x/2} - e^{-x/2} + 1 \\
&= \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) \cdot e^{-x/2} + 1
\end{aligned}$$

Somit ist die Verteilungsfunktion die folgende:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot e^{-x/2} + 1 & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(X \geq 6) &= 1 - P(X \leq 6) + P(\{6\}) \\
&= 1 - F(6) + P(\{6\}) \\
&= 1 - (-4 \cdot e^{-3} + 1) + 0 \\
&= 4e^{-3} \approx 0,1991
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Um von der Dichtefunktion von X auf die Dichtefunktion von $-X$ zu kommen, müssen die Werte $f(x)$ und $f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ vertauscht werden. Da diese aber laut Aufgabe identisch sind, ist die Dichtefunktion von X identisch mit der Dichtefunktion von $-X$. Dadurch ist auch die Verteilungsfunktion identisch. $\square$

(b) Der Erwartungswert berechnet sich wie folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$$

Wir fassen zusammen und addieren die linke und rechte Seite an den Stellen t und $-t$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$:

$$t \cdot f(t) + (-t) \cdot f(-t)$$

Da $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, können wir schreiben:

$$t \cdot f(t) + (-t) \cdot f(t) = f(t) \cdot (t - t) = 0$$

Es heben sich also alle Werte links und rechts auf.
Für $t = 0$ gilt dann:

$$0 \cdot f(0) = 0$$

Alles zusammen ergibt dann also 0, was das Ergebnis und damit unser Erwartungswert ist.