Stochastik 1
Serie 7

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1 und 2

(a) Wir stellen eine Wertetabelle auf, um die Wahrscheinlichkeiten vergleichen zu können. Dabei erkennen wir, dass sowohl für $X = 2$ als auch für $X = 3$ die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht. Diese beträgt $P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{3^3}{3!} \cdot e^{-3} \approx 0,224$. Die Wahrscheinlichkeiten nehmen rundherum ab. Da wir wissen, dass die Wahrscheinlichkeiten poissonverteilt sind, sind diese die beiden Werte mit der höchsten erreichbaren Wahrscheinlichkeit.

(b) Die Frage ist nach $P(X > 4)$. Diese Wahrscheinlichkeit können wir über das Gegenereignis leichter bestimmen, nämlich mit $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) \\
&= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)) \\
&= 1 - \left(\frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} + \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} + \frac{3^3}{3!} \cdot e^{-3} + \frac{3^4}{4!} \cdot e^{-3}\right) \\
&= 1 - e^{-3} \cdot (1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 3,375) \\
&= 1 - \frac{16,375}{e^3} \\
&\approx 0,185
\end{aligned}$$

Also muss mit etwa 18,5 prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Schiff warten.

(c) Der Erwartungswert berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) \\
&= 1 \cdot 0,149 + 2 \cdot 0,224 + 3 \cdot 0,224 + 4 \cdot 0,168 \\
&\approx 1,942
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Damit X und Y unkorreliert sind muss gelten: $Cov(X, Y) = 0$

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \\
E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 0 \\
E(Y) &= 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
Cov(X, Y) &= (1 - 0)(0 - 1/3)\frac{1}{3} + (0 - 0)(1 - 1/3)\frac{1}{3} + (-1 - 0)(0 - 1/3)\frac{1}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Damit die beiden Zufallsgrößen stochastisch unabhängig sind, müssten folgende Eigenschaften gelten

$$\begin{aligned}
P(X=-1, Y=0) &= P(X=-1) \cdot P(Y=0) \\
P(X=-1, Y=1) &= P(X=-1) \cdot P(Y=1) \\
P(X=0, Y=0) &= P(X=0) \cdot P(Y=0) \\
P(X=0, Y=1) &= P(X=0) \cdot P(Y=1) \\
P(X=1, Y=0) &= P(X=1) \cdot P(Y=0) \\
P(X=1, Y=1) &= P(X=1) \cdot P(Y=1)
\end{aligned}$$

da eine stochastische Unabhängigkeit zustande kommt, wenn die Wahrscheinlichkeiten aller Kombinationen der Zufallsgrößen Produktgestalt haben.

Dies lässt sich sehr leicht widerlegen, da schon die erste Gleichung nicht aufgeht. Es gilt:

$$P(X=-1, Y=0) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = P(X=-1) \cdot P(Y=0)$$

Damit ist gezeigt, dass die beiden Zufallsgrößen nicht stochastisch unabhängig sind.