Stochastik 1
Serie 2

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ 12\} \wedge \omega_1 < \omega_2 < \omega_3\}$
mit rot $\widehat{=} \{1, 2, 3, 4, 5\}$, gelb $\widehat{=} \{6, 7, 8\}$, grün $\widehat{=} \{9, 10, 11, 12\}$.
Das Ereignis, dass alle drei die gleiche Farben haben, ist:
$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega |$für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt: ω_i entweder $\in$ rot, gelb oder grün$\}$
unter der Voraussetzung, dass die oben beschriebenen Zahlenmengen mit der Farbe bezeichnet werden.
Wir berechnen die Mächtigkeiten der Mengen mit Hilfe des Binomialkoeffizienten, da wir nicht "zurücklegen" und die Reihenfolge nicht beachten:

$$|\Omega| = \binom{12}{3} = 220$$
$$|A| = \binom{5}{3} + \binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 15$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, drei mal die selbe Farbe zufällig zu ziehen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} = 0,06\overline{81}$$

Aufgabe 2

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) | \omega_i \in \{1, ..., 7\} \forall i \neq j : \omega_i \neq \omega_j\}$
$|\Omega| = 7!$, da wir jede Stelle "ohne Zurücklegen" befüllen können.

(a) $A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) \in \Omega | \omega_7 \in \{2, 4, 6\}\}$
Die Mächtigkeit dieser Menge beträgt $3 \cdot 6!$, da wir eine Stelle mit einer der drei Zahlen reservieren und die restlichen Stellen beliebig füllen können (aber "ohne Zurücklegen"). Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{3 \cdot 6!}{7!} = \frac{3}{7} \approx 0,429$

(b) $B = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) \in \Omega | \sum \omega_i \forall i \in \{1, ..., 7\}$ ist durch 3 teilbar$\}$
Dieses Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit null, da jede Zahl aus Ω die gleiche Quersumme besitzt. Diese ist 28 und somit nicht durch 3 teilbar. Damit ist auch jede Zahl aus Ω nicht durch drei teilbar.

Aufgabe 3

Wir haben $\binom{36}{12}$ verschiedene Klausuren zu betrachten, da wir aus dem Aufgabenpool 12 Aufgaben ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ziehen. Dabei seien die Aufgaben von 1 bis 36 durchnummeriert.
$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_{12}) | \omega_i \in \{1, ..., 36\} \wedge \omega_i < \omega_j\}$

Angenommen, der Student kann die ersten 20 Aufgaben lösen. Dann gilt für das Ereignis A "Der Student besteht die Prüfung":
$A = \{(\omega_1, ..., \omega_{12}) \in \Omega | \text{Anzahl der } \omega_i \in \{1, ..., 20\} \geq 6\}$
Nun müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten summieren, dass der Student *genau* 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12 Aufgaben richtig beantwortet. Das ist ähnlich der Überlegung, beim Lotto "genau drei Richtige zu bekommen". Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=6}^{12} \frac{\binom{20}{i} \cdot \binom{16}{12-i}}{\binom{36}{12}} \\ &= \frac{247}{310} \\ &\approx 0,797 \end{aligned}$$