Stochastik 1
Serie 2

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{\text{rot, gelb, grün}\}^3 | \text{rot links von gelb; gelb links von grün}\}$
Das Ereignis, dass alle drei die gleiche Farben haben, ist:
$A = \{(\text{rot, rot, rot}), (\text{gelb, gelb, gelb}), (\text{grün, grün, grün})\}$

Wir berechnen die Mächtigkeiten der Mengen mit Hilfe des Binomialkoeffizienten, da wir nicht "zurücklegen" und die Reihenfolge nicht beachten:

$$|\Omega| = \binom{12}{3} = 220$$
$$|A| = \binom{5}{3} + \binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 15$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, drei mal die selbe Farbe zufällig zu ziehen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} = 0,06\overline{81}$$

Aufgabe 2

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) | \omega_i \in \{1, ..., 7\} \forall i \neq j : \omega_i \neq \omega_j\}$
$|\Omega| = 7!$, da wir jede Stelle "ohne Zurücklegen" befüllen können.

(a) $A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) \in \Omega | \omega_7 \in \{2, 4, 6\}\}$
Die Mächtigkeit dieser Menge beträgt $3 \cdot 6!$, da wir eine Stelle mit einer der drei Zahlen reservieren und die restlichen Stellen beliebig füllen können (aber "ohne Zurücklegen"). Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{3 \cdot 6!}{7!} = \frac{3}{7} \approx 0,429$

(b) $B = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7) \in \Omega | \sum \omega_i \forall i \in \{1, ..., 7\} \text{ ist durch 3 teilbar}\}$
Dieses Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit null, da jede Zahl aus Ω die gleiche Quersumme besitzt. Diese ist 28 und somit nicht durch 3 teilbar. Damit ist auch jede Zahl aus Ω nicht durch drei teilbar.

Aufgabe 3

Wir haben $\binom{36}{12}$ verschiedene Klausuren zu betrachten, da wir aus dem Aufgabenpool 12 Aufgaben ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ziehen. Dabei seien die Aufgaben von 1 bis 36 durchnummeriert.
$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_{12}) | \omega_i \in \{1, ..., 36\} \land \omega_i < \omega_j\}$
Angenommen, der Student kann die ersten 20 Aufgaben lösen. Dann gilt für das Ereignis A "Der Student besteht die Prüfung":
$A = \{(\omega_1, ..., \omega_{12}) \in \Omega | \text{Anzahl der } \omega_i \in \{1, ..., 20\} \geq 6\}$

Nun müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten summieren, dass der Student *genau* 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12 Aufgaben richtig beantwortet. Das ist ähnlich der Überlegung, beim Lotto "genau drei Richtige zu bekommen". Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=6}^{12} \frac{\binom{20}{i} \cdot \binom{16}{12-i}}{\binom{36}{12}} \\ &= \frac{247}{310} \\ &\approx 0,797 \end{aligned}$$