Stochastik 1
Serie 5

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1

(a) Nachweis der Dichteeigenschaft:
1.
$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = c \cdot \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow c = \frac{6}{\pi^2}$$
2.
Da c positiv ist, sind auch alle Werte der Folge p_n für $n > 0$ positiv. Somit gilt auch diese Eigenschaft.

(b)
$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 2) - P(X = 1) \\ &= 1 - \frac{6}{4\pi^2} - \frac{6}{\pi^2} \approx 0,24 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir modellieren unsere Zufallsgröße X als die Anzahl der Mitglieder im Sonderausschuss, die aus der Gruppe A kommen: $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. P^X ist somit hypergeometrisch verteilt. Eine Analogie hierzu ist das Lottospielen, bei dem 5 Kugeln gezogen werden und wir die Wahrscheinlichkeit für genau 2 Richtige ausrechnen wollen. Somit gilt:
$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{3}}{\binom{12}{5}} = \frac{175}{396} = 0,44\overline{19}$$

Aufgabe 3

(a) Wir modellieren unsere Zufallsgröße X als die Anzahl der 100 Studenten, die heute Geburtstag haben, also: $X : \Omega \to \{0, \dots, 100\}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student heute Geburtstag hat, beträgt $\frac{1}{365}$. Die Wahrscheinlichkeit bei einem einzelnen Studenten ist also bernoulliverteilt. Da wir aber ein 100-stufiges Bernoulliexperiment betrachten, ist die Verteilung unserer Zufallsgröße binomial.

(b) Da wir ein $n = 100 > 50$ und ein $p = \frac{1}{365} < 5\%$ vorliegen haben, lässt sich die Wahrscheinlichkeit mit Poisson approximieren. Dabei ist der Parameter $\lambda = 100 \cdot \frac{1}{365} = \frac{20}{73}$

(c) $P(X = 0) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\frac{20}{73}^0}{0!} \cdot e^{-\frac{20}{73}} \approx 0,76$
Zum Vergleich die durch die binomiale Verteilung berechnete Wahrscheinlichkeit: $P(X = 0) = \binom{100}{0} \cdot \frac{1}{365}^0 \cdot \frac{364}{365}^1 00 \approx 0,76$. Die Approximation stimmt also.