Stochastik 1
Serie 8

Kevin Stehn 6416016 Gruppe 3
Konstantin Kobs 6414943 Gruppe 2

Aufgabe 1

(a) Unser Modell ist $\Omega = \{1,2,3,4,5\}^3$ und $P \mathrel{\widehat{=}} \mathit{Laplacema}ß$. Die Zufallsgröße Z definieren wir mit $Z : \Omega \to \{1,2,3,4,5\}$ als kleinste gezogene Zahl.
Weil die Zahl k *mindestens* die kleinste Zahl der drei gezogenen Zahlen sein soll, können wir die Wahrscheinlichkeiten für $Z \geq k$ wie folgt aufstellen:

$$P(Z \geq 1) = \frac{5^3}{5^3} = 1$$
$$P(Z \geq 2) = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$
$$P(Z \geq 3) = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$
$$P(Z \geq 4) = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$
$$P(Z \geq 5) = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$$

(b)

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{5} P(Z \geq i) = 1 + \frac{64}{125} + \frac{27}{125} + \frac{8}{125} + \frac{1}{125} = 1,8$$

Aufgabe 2

Wir ersetzen den Faktor $\frac{5}{3}$ durch den Faktor $\frac{7}{4}$ und berechnen das Beispiel erneut:
Der Erwartungswert eines Wurfes liegt bei $E(Y_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{9}{8} > 1$. Damit läge der Erwartungswert bei n Würfen (berechenbar durch die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen) bei $E(X_n) = \left(\frac{9}{8}\right)^n \to \infty$ für $n \to \infty$. Auch hier würde erwartungsgemäß der Gewinn ins Unermessliche steigen.
Um das GGZ anzuwenden, betrachten wir wieder die Logarithmen der Werte, um aus einem Produkt eine Summe zu bilden:

$$\log(X_n) = \log(Y_1) + ... + \log(Y_n)$$

$\log(Y_1), ..., \log(Y_n)$ sind dabei unabhängig. Auch hier ist dann der Erwartungswert negativ:

$$\mu := \log(Y_i) = \frac{1}{2} \cdot \log(1/2) + \frac{1}{2} \cdot \log(7/4) < 0$$

Dadurch können wir die im Skript ausgeführten Umformungen der Formel ebenfalls durchführen und kommen zu dem gleichen Schluss.

Aufgabe 3

Wir definieren die Zufallsgröße X_i, die den geworfenen Wert beim i-ten Wurf angibt. Der Erwartungswert dazu ist $E(X_i) = 3,5$ und die Varianz ist $Var(X_i) = \frac{35}{12}$. Nun definieren wir die Zufallsgröße X, die das arithmetische Mittel nach n Würfen angibt. Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße beträgt weiterhin $E(X) = 3,5$ und die Varianz berechnet sich durch $Var(X) = \frac{35}{12n}$, da die Varianz mit jedem Wurf verkleinert wird. ϵ beträgt $\frac{1}{10}$.
Wir formen nun noch die Tschebyscheff-Ungleichung um, um die gewünschten Aussagen treffen zu können. Daraus ergibt sich:

$$P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$

In unserem speziellen Fall gilt nun:

$$P(|X - 3,5| < 1/10) \geq 1 - \frac{\frac{35}{12n}}{\frac{1}{100}} \geq 0,95$$

Nun formen wir die beiden rechten Teile der Ungleichung auf n um und erhalten $n \geq 5833,\overline{3}$.
Nach Tschebyscheff müssen wir also mindestens 5834 mal würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als $\frac{1}{10}$ vom Erwartungswert abzuweichen. Dies ist aber eine untere Schranke und kann durchaus auch sehr viel niedriger liegen.