Министерство науки и высшего образования Российской Федерации



Федеральное государственное вюджетное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ	«Информатика и системы управления»		
КАФЕДРА	«Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»		
НАПРАВЛЕНІ	ИЕ ПОДГОТОВКИ «09.03.04 Программная инженерия»		

ОТЧЕТ по лабораторной работе №2

Название:	Алгоритм Кош		
Дисциплина:	Ана	лиз алгоритмов	
Студент	<u>ИУ7-56Б</u> Группа	—————————————————————————————————————	Ковель А.Д. И. О. Фамилия
Преподаватель		Подпись, дата	Волкова Л.Л. И. О. Фамилия
Преподаватель		Подпись, дата	Строганов Ю.В.

Москва, 2022 г.

Оглавление

Bı	веде	ние	2
1	Ана	алитический раздел	4
	1.1	Применение математического подхода	4
	1.2	Алгоритм Копперсмита – Винограда	4
2	Кон	нструкторский раздел	6
	2.1	Трудоемкость алгоритмов	6
	2.2	Трудоемкость алгоритмов	7
		2.2.1 Классический алгоритм	7
		2.2.2 Алгоритм Копперсмита — Винограда	7
		2.2.3 Оптимизированный алгоритм Копперсмита — Вино-	
		града	8
	2.3	Разработка алгоритмов	Ć
3	Tex	нологический раздел	14
	3.1	Требования к ПО	14
	3.2	Средства реализации	14
	3.3	Средства замера времени	14
	3.4	Реализации алгоритмов	15
	3.5	Тестовые данные	18
4	Исс	следовательская часть	20
	4.1	Технические характеристики	20
	4.2	Демонстрация работы программы	20
	4.3	Время выполнения алгоритмов	21
	4.4	Графики функций	22
Зғ	клю	очение	24
Cı	писо	к использованных источников	25

Введение

Разработка и совершенствование матричных алгоритмов является важнейшей алгоритмической задачей. Непосредственное применение классического матричного умножения требует времени порядка $O(n^3)$. Однако существуют алгоритмы умножения матриц, работающие быстрее очевидного. В линейной алгебре алгоритм Копперсмита - Винограда[1], названный в честь Д. Копперсмита и Ш. Винограда , был асимптотически самый быстрый из известных алгоритмов умножения матриц с 1990 по 2010 год. В данной работе внимание акцентируется на алгоритме Копперсмита - Винограда и его улучшениях.

Алгоритм не используется на практике, потому что он дает преимущество только для матриц настолько больших размеров, что они не могут быть обработаны современным вычислительным оборудованием. Если матрица не велика, эти алгоритмы не приводят к большой разнице во времени вычислений.

Цель лабораторной работы — реализация, оптимизация и исследование алгоритма умножения матриц Копперсмита - Винограда.

Задачи данной лабораторной следующее:

- 1) изучение алгоритмов перемножения матриц;
- 2) измерение трудоемкости различных алгоритмов умножения матриц;
- применение оптимизации при реализации алгоритма умножения матриц Копперсмита Винограда;
- 4) получение практических навыков реализаций алгоритма Копперсмита Винограда;
- 5) проведение сравнительного анализа алгоритмов умножения матриц по затратам времени;
- 6) получение экспериментального подтверждения различий по временной эффективности алгоритмов умножения матрица, путем измерения процессорного время с помощью разработанного программного обеспечения;
- 7) описание и обоснование полученных результатов в отчете о выполненной лабораторной работе, выполненного как расчетно-пояснительная записка к работе.

1 Аналитический раздел

В этом разделе будут представлены описания алгоритмов умножения матриц и алгоритм Копперсмита-Винограда.

1.1 Применение математического подхода

Даны матрицы, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, произведение матриц, $C = A \times B$, каждый элемент которой вычисляется согласно формуле 1.1.

$$c_{i,j} = \sum_{p=0}^{k=1} a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \text{ где } i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}$$
 (1.1)

Стандартный алгоритм умножения матриц реализует формулу(1.1).

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором.

1.2 Алгоритм Копперсмита – Винограда

Для начала стоит обратить внимание на альтернативный подсчет выражения $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ осуществляется согласно 1.2.

$$\lambda_{1} = a_{1} \cdot a_{1}$$
 $\lambda_{2} = b_{1} \cdot b_{1}$
 $\lambda_{3} = (a_{1} + b_{2}) \cdot (a_{2} + b_{1})$
результат: $\lambda_{3} - \lambda_{1} - \lambda_{2}$

$$(1.2)$$

Классическое умножение матриц, по своей сути, является нахождением некоторого числа скалярных произведений каждого столбца первого множителя с каждой строкой второго. Процедура может быть усовершенствована: если один вектор V встречается множество раз, то операция нахождения векторного произведения для него может быть выполнена единожды. Идея препроцессирования в случае перемножения квадратных матриц, $n \times n$ приводит к определению алгоритма Копперсмита — Винограда.

Для вектора, $x = (x_1 \cdots x_n)$, можно записать(1.3).

$$W(x) = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n \tag{1.3}$$

Тогда умножения матрицы выполняется согласно следующему алгоритму:

- 1. Для каждой строки R_i матрицы M вычислить $W(R_i)$ и для каждого столбца C_i матрицы M вычислить $W(C_i)$;
- 2. Для каждой пары (i, j), где r соответствует R_i и C соответствует C_i , вычислить 1.4.

$$r \cdot c = (r_1 + c_2) + (r_2 + c_1) \cdot (r_3 + c_4) \cdot (r_4 + c_3) + \dots + (r_{n-1} + c_n) + (r_n + c_{n-1}) - W(r) - W(c).$$
(1.4)

Если оценивать подход Копперсмита - Винограда опуская идею препроцессирования, то можно заметить, что арифметических операций в ней больше, чем в формуле классического скалярного произведения Однако, сохранение результатов $W(C_i)$ и $W(R_i)$ позволяет выполнять меньше операций, чем при нахождении матричного произведения математически. Разница при таком подходе, очевидно, будет заметна на матрицах настолько больших размеров, что они не могут быть обработаны ЭВМ.

Вывод

Была выявлена основная особенность подхода Копперсмита - Винограда — идея предварительной обработки. Разница во времени выполнения при такой оптимизации будет экспериментально вычислена в исследовательском разделе.

2 Конструкторский раздел

В данном разделе представлены схемы реализуемых алгоритмов и их модификации.

2.1 Трудоемкость алгоритмов

Для получения функции трудоемкости алгоритма необходимо ввести модель оценки трудоемкости. Трудоемкость "элементарных" операций оценивается следующим образом:

1. Трудоемкость 1 имеют операции:

$$+, -, =, <, >, <=, >=, ==, +=, -=, ++, --, [], \&\&, |], >>, <<$$

2. Трудоемкость 2 имеют операции:

3. Трудоемкость конструкции ветвления определяется согласно формуле 2.1.

$$f_{if} = f_{\text{условие}} + \begin{bmatrix} min(f_{true}, f_{false}) & \text{в лучшем случае,} \\ max(f_{true}, f_{false}) & \text{в худшем случае.} \end{bmatrix}$$
 (2.1)

4. Трудоемкость цикла расчитывается по формуле 2.2.

$$f_{\text{цикл}} = f_{\text{инициал.}} + f_{\text{сравн.}} + N \left(f_{\text{тело}} + f_{\text{инкремент}} + f_{\text{сравн.}} \right);$$
 (2.2)

5. Трудоемкость вызова функции равна 0.

2.2 Трудоемкость алгоритмов

2.2.1 Классический алгоритм

Пусть на вход алгоритму поступают матрицы M_{left} и M_{right} с размерностью $n \times m$ и $m \times q$. Тогда трудоемкость классического алгоритма определяется по формуле 2.3.

$$f_{alg} = f_i = 2 + n (2 + f_i) \approx 14mnq = 14MNQ;$$
 (2.3)

2.2.2 Алгоритм Копперсмита — Винограда

Трудоёмкость алгоритма Копперсмита — Винограда состоит из:

• создания и инициализации массивов МН и MV, трудоёмкость которого (2.4).

$$f = M + N; (2.4)$$

• заполнения массива МН, трудоёмкость которого (2.5).

$$f_{MH} = \frac{19}{2}MN + 6M + 2; (2.5)$$

• заполнения массива MV, трудоёмкость которого (2.6).

$$f_{MV} = \frac{19}{2}QN + 6Q + 2); (2.6)$$

• цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого (2.7).

$$f_{\text{щикл}} = 16MQN + 13MQ + 4M + 2; \tag{2.7}$$

• цикла, для дополнения умножения суммой последних нечётных стро-

ки и столбца, если общий размер нечёт., трудоемкость которого (2.8).

$$f_{\text{последний}} = 3 + \begin{cases} 0, & \text{чётная}, \\ 16MQ + 4M + 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$
 (2.8)

Итого, для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем (2.9).

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 16 \cdot MNQ; \tag{2.9}$$

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем (2.10).

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 16 \cdot MNQ; \tag{2.10}$$

2.2.3 Оптимизированный алгоритм Копперсмита — Винограда

Оптимизированный алгоритм Винограда представляет собой обычный алгоритм Винограда, за исключением следующих оптимизаций:

- вычисление происходит заранее;
- используется битовый сдвиг, вместо деления на 2;
- используется битовый сдвиг, вместо умножения на 2.

Трудоёмкость улучшенного алгоритма Копперсмита — Винограда состоит из:

• создания и инициализации массивов МН и MV, трудоёмкость которого (2.11).

$$f = M + N; (2.11)$$

• заполнения массива МН, трудоёмкость которого (2.12).

$$f_{MH} = \frac{13}{2}MN + 4M + 5; (2.12)$$

• заполнения массива MV, трудоёмкость которого (2.13).

$$f_{MV} = \frac{13}{2}QN + 4Q + 5; (2.13)$$

• цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого (2.14).

$$f_{\text{щикл}} = 2 + M \cdot (4 + N \cdot (11 + \frac{Q}{2} \cdot 21));$$
 (2.14)

• условие, для дополнения умножения суммой последних нечётных строки и столбца, если общий размер нечётный, трудоемкость которого (2.15).

$$f_{\text{последний}} = 3 + \begin{cases} 0, & \text{чётная}, \\ 13MQ + 4M + 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$
 (2.15)

Итого, для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем (2.16).

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{\text{пикл}} + f_{\text{последний}} \approx 10.5 MNK;$$
 (2.16)

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем (2.17).

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{\text{цикл}} + f_{\text{последний}} \approx 10.5 MNK;$$
 (2.17)

2.3 Разработка алгоритмов

На рисунке 2.1 приведена схема классического алгоритма умножения матриц. На рисунке 2.2 приведена схема алгоритма Копперсмита — Винограда. Рисунок 2.3 демонстрируют схему оптимизированного алгоритма Копперсмита — Винограда.

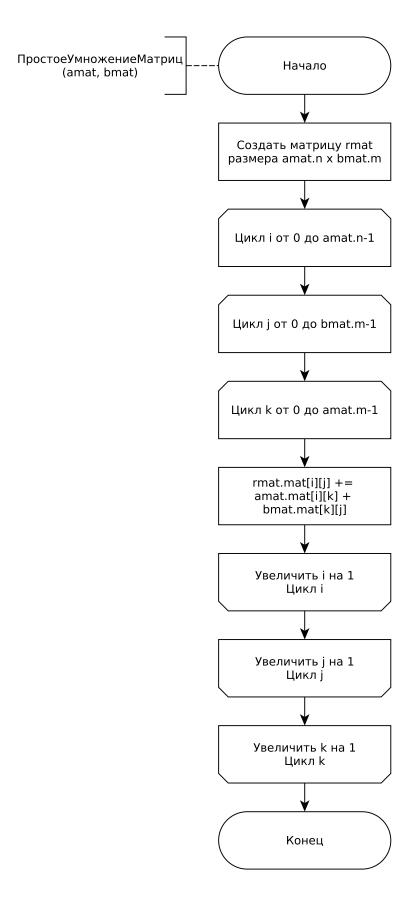


Рисунок 2.1 – Схема классического алгоритма умножения матриц

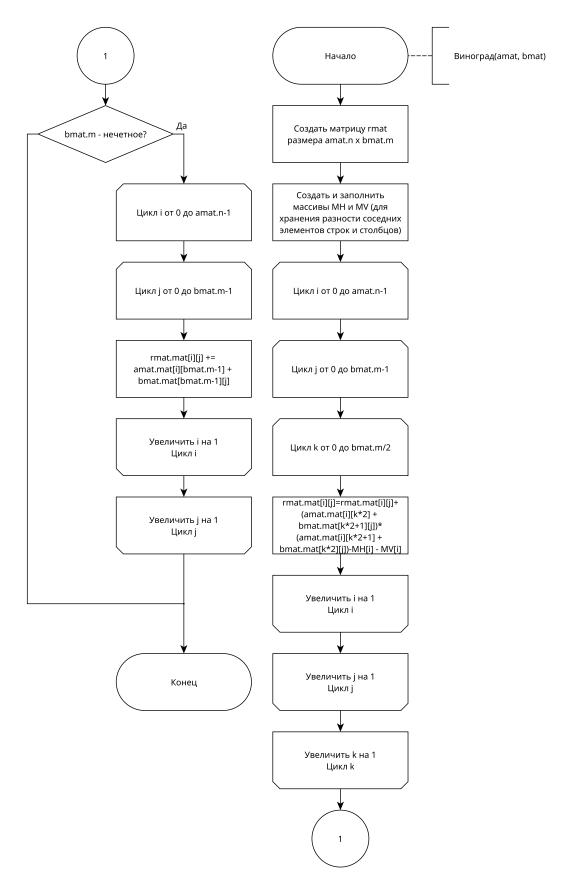


Рисунок 2.2 – Схема алгоритма умножения матриц Копперсмита – Винограда

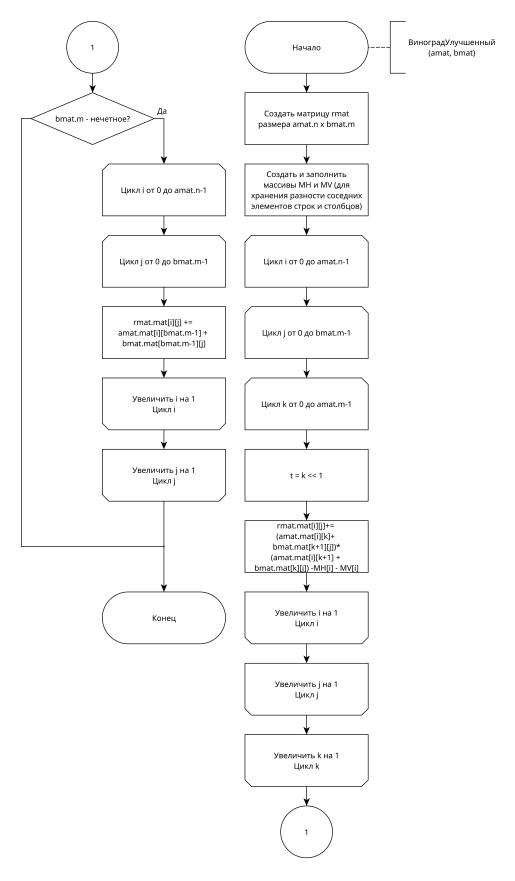


Рисунок 2.3 — Схема оптимизированного алгоритма умножения матриц Копперсмита — Винограда

Вывод

Алгоритмы были проанализированы с точки зрения временных затрат. Было выявлено, что оптимизированный алгоритм Копперсмита – Винограда работает в 1.5 раза быстрее, чем классический алгоритм Копперсмита-Винограда.

Были построены схемы алгоритмов. Теоретически были исследованы способы оптимизации алгоритма Копперсмита - Винограда. Было получено достаточно теоретических сведений для разработки ПО, решающего поставленную задачу.

3 Технологический раздел

В данном разделе будут приведены требования к программному обеспечению, средства реализации и листинга кода.

3.1 Требования к ПО

Программное обеспечение должно удовлетворять следующим требованиям:

- программа получает на вход с клавиатуры две матрицы размеров в пределах 10000×10000 либо получает два числа размерность матрицы в пределах 10000;
- программа выдает матрицу произведение двух полученных матриц;
- в программе возможно измерение процессорного времени.

3.2 Средства реализации

Для реализации ПО был выбран язык программирования Python[2].

В данном языке есть все требующиеся инструменты для данной лабораторной работы.

В качестве среды разработки была выбрана среда VS Code[3], запуск происходил через команду python main.py.

3.3 Средства замера времени

Алгоритмы тестировались при помощи функции process_time библиотеки time 3.1. Данная команда возвращает значения процессорного времени типа int в наносекундах.

Замеры времени для каждого алгоритма проводились 100 раз.

Листинг 3.1 – Пример теста эффективности

```
def test_simple_mult(A, B):
    # Start the stopwatch / counter

t1_start = process_time()

for i in range(N_TEST):
    simple_mult(A, M, B, N, M)

# Stop the stopwatch / counter

t1_stop = process_time()
```

3.4 Реализации алгоритмов

Листинг 3.2 демонстрирует классический алгоритм умножения.

Листинг 3.2 – Классический алгоритм умножения

```
def simple_mult(mat1, m, mat2, n, q):
    res = np.zeros([m, q])
    for i in range(m):
        for j in range(q):
             for k in range(n):
                res[i][j] = res[i][j] + mat1[i][k] * mat2[k][j]
    return res
```

Листинг 3.3 демонстрирует умножение матриц алгоритмом Винограда.

Листинг 3.3 – Алгоритм умнложения Виноградом

```
1 def precompile \ rows \ win(mat, n, m):
2
    mh = np.zeros([n])
3
     for i in range(n):
       for j in range (m // 2):
4
         mh[i] = mh[i] + mat[i][j * 2] * mat[i][j * 2 + 1]
5
6
     return mh
7
  def precompile\ cols\ win(mat, n, m):
    mv = np.zeros([m])
9
10
     for i in range(m):
11
       for j in range(n // 2):
12
         mv[i] = mv[i] + mat[j * 2][i] * mat[j * 2 + 1][i]
13
     return mv
14
15
16 | def winograd \setminus mult(A, m, B, n, q):
     res = np.zeros([m, q])
17
    mh = precompile \setminus rows \setminus win(A, m, n)
18
    mv = precompile \setminus cols \setminus win(B, n, q)
19
     for i in range(m):
20
       for j in range(q):
21
       res[i][j] = -mh[i] - mv[j]
22
       for k in range(n // 2):
23
         res[i][j] = res[i][j] + (A[i][k*2] +
24
            B[k*2+1][j])*(A[i][k*2+1] + B[k*2][j])
     if n \ \% \ 2 != 0:
25
       for i in range(n):
26
         for j in range(m):
27
            res[i][j] = res[i][j] + A[i][n-1]*B[n-1][j]
28
29
     return res
```

Листинг 3.4 демонстрирует умножение оптимизированным алгоритмом Винограда.

Листинг 3.4 – Оптимизированный алгоритм умножения Виноградом

```
1 def precompile rows win opt(mat, n, m):
2
    mh = np.zeros([n])
     opt = m // 2
3
     for i in range(n):
4
       for j in range(opt):
5
         t = j << 1
6
7
         mh[i] += mat[i][t] * mat[i][t + 1]
8
     return mh
9
  def precompile cols win(mat, n, m):
11
     mv = np.zeros([m])
12
     opt = n // 2
13
     for i in range(m):
14
       for j in range(opt):
15
         t = i << 1
16
17
         mv[i] += mat[t][i] * mat[t + 1][i]
18
     return mv
19
20 def winograd mult opt(A, m, B, n, q):
21
     res = np.zeros([m, q])
    mh = precompile rows win(A, m, n)
22
     mv = precompile cols win(B, n, q)
23
24
     opt = n // 2
25
     for i in range(m):
26
       for j in range(q):
27
         \mathsf{res}\,[\,i\,][\,j\,]\,=-\mathsf{mh}\,[\,i\,]\,-\,\mathsf{mv}\,[\,j\,]
28
         for k in range (n // 2):
29
           t = k << 1
30
            res[i][j] += (A[i][t] + B[t+1][j])*(A[i][t+1] + B[t][j])
31
     if n \% 2 != 0:
32
       for i in range(n):
33
         for j in range(m):
34
            res[i][j] += A[i][n-1]*B[n-1][j]
35
36
     return res
```

3.5 Тестовые данные

На таблице 3.1 представлены тестовые данные.

Таблица 3.1 – Функциональные тесты

1-ая матрица	2-ая матрица	Ожидаемый результат
		Сообщение об ошибке
()	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке
(5)	(5)	(25)
123	123	/ 30 36 42 \
$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	66 81 96
$\left(789\right)$	$\sqrt{789}$	102 126 150
$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
(1 2 3)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	(14)
$ \begin{array}{c cccc} & 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 & 6 \end{array} $	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$
$\left(789\right)$	$\sqrt{3}$ 6	$\left\langle 50 \ 122 \right\rangle$

Вывод

Было написано и протестировано программное обеспечение для решения поставленной задачи.

4 Исследовательская часть

4.1 Технические характеристики

Тестирование выполнялось на устройстве со следующими техническими характеристиками:

- Операционная система Pop! OS 22.04 LTS [4] Linux [5];
- Оперативная память 16 Гб;
- Процессор AMD® Ryzen 7 2700 eight-core processor × 16 [6].

Во время тестирования устройство было подключено к блоку питания и не нагружено никакими приложениями, кроме встроенных приложений окружения, окружением и системой тестирования.

4.2 Демонстрация работы программы

На рисунке 4.1 представлен результат работы программы.

```
→ python-app git: (main) x python main.py

7 82 7

60 26 35
3 29 63

27 21 49
27 64 50
34 74 54

2641.0 5913.0 4821.0
3512.0 5514.0 6130.0
3006.0 6581.0 4999.0

2641.0 5913.0 4821.0
3512.0 5514.0 6130.0
3006.0 6581.0 4999.0
```

Рисунок 4.1 – Пример работы программы

4.3 Время выполнения алгоритмов

Результаты профилирования алгоритмов приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Время выполнения алгоритмов

Таблица 4.1.1 – Время выполнения алгоритмов при четной размерности матриц

Таблица 4.1.2 – Время выполнения алгоритмов при нечетном размерности матриц

\mid n	Время, ns		
11	Класс.	Виноград	Вин. опт.
10	4.49e-06	3.91e-06	4.01e-06
20	2.74e-05	2.24e-05	2.30e-05
30	8.84e-05	6.72e-05	7.01e-05
40	2.09e-04	1.49e-04	1.58e-04
50	3.96e-04	2.98e-04	3.14e-04
60	6.58e-04	4.95e-04	5.15e-04
70	1.07e-03	7.95e-04	8.43e-04
80	1.60e-03	1.20e-03	1.22e-03
90	2.26e-03	1.68e-03	1.77e-03
100	3.14e-03	2.25e-03	2.38e-03
150	1.06e-02	7.88e-03	8.33e-03
200	2.84e-02	2.20e-02	2.34e-02
250	6.73e-02	5.34e-02	5.74e-02
300	1.14e-01	8.97e-02	9.60e-02
350	1.80e-01	1.39e-01	1.50e-01
400	2.67e-01	2.05e-01	2.21e-01
450	4.17e-01	3.23e-01	3.48e-01
500	5.71e-01	4.42e-01	4.75e-01

n	Время, ns			
11	Класс.	Виноград	Вин. опт.	
11	5.17e-06	4.56e-06	5.05e-06	
21	3.25e-05	2.58e-05	2.59e-05	
31	9.63e-05	7.23e-05	7.69e-05	
41	2.14e-04	1.64e-04	1.73e-04	
51	4.10e-04	3.15e-04	3.38e-04	
61	7.13e-04	5.37e-04	5.70e-04	
71	1.11e-03	8.36e-04	8.79e-04	
81	1.67e-03	1.28e-03	1.35e-03	
91	2.33e-03	1.73e-03	1.85e-03	
101	3.23e-03	2.36e-03	2.49e-03	
151	1.08e-02	8.03e-03	8.50e-03	
201	2.74e-02	2.13e-02	2.29e-02	
251	6.80e-02	5.27e-02	5.66e-02	
301	1.16e-01	9.13e-02	9.82e-02	
351	1.82e-01	1.40e-01	1.52e-01	
401	2.58e-01	1.99e-01	2.14e-01	
451	4.21e-01	3.26e-01	3.50e-01	
501	5.74e-01	4.43e-01	4.76e-01	

4.4 Графики функций

На графике 4.2 представлено время выполнения программы матрицы с четной размерности.

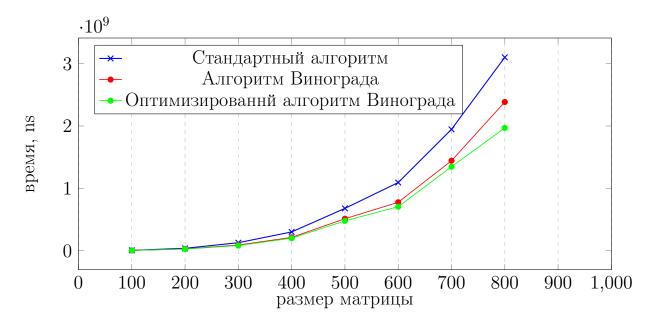


Рисунок 4.2 – Четная размерность матрицы

На графике 4.3 представлен время выполнения программы с матрицами нечетной размерности.

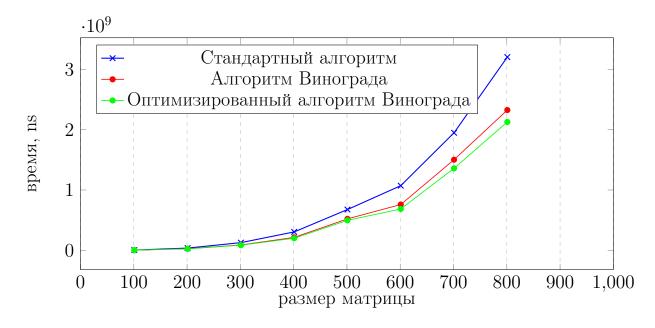


Рисунок 4.3 – Нечетная размерность матрицы

Вывод

В данном разделе были сравнены алгоритмы по времени. Оптимизированный алгоритм Винограда является самым быстрым, за счет проведенных изменений в стандартном алгоритме Винограда.

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были решены следующие задачи:

- были изучены и реализованы 3 алгоритма перемножения матриц: обычный, Копперсмита-Винограда, модифицированный Копперсмита-Винограда;
- был произведен анализ трудоёмкости алгоритмов на основе теоретических расчетов и выбранной модели вычислений;
- был сделан сравнительный анализ алгоритмов на основе экспериментальных данных;
- подготовлен отчет о лабораторной работе.

Оптимизированный алгоритм Винограда быстрее обычного на 5 процентов (на 0.1 нс) при размерах матрицы 500 на 500.

Поставленная цель достигнута.

Список использованных источников

- [1] Coppersmith Don, Winograd Shmuel. Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions // Journal of Symbolic Computation. 1990.
- [2] Python Документация[Электронный ресурс]. Режим доступа: https://docs.python.org/3/ (дата обращения: 24.09.2022).
- [3] Vscode Документация[Электронный ресурс]. Режим доступа: https://code.visualstudio.com/docs (дата обращения: 24.09.2022).
- [4] Pop OS 22.04 LTS [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://pop.system76.com (дата обращения: 04.09.2022).
- [5] Linux Документация [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://docs.kernel.org (дата обращения: 24.09.2022).
- [6] Процессор AMD® Ryzen 7 2700 eight-core processor × 16 [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.amd.com/en/products/cpu/amd-ryzen-7-2700 (дата обращения: 04.09.2022).