



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
(МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ \_\_\_\_\_ «09.03.04 Программная инженерия»

## ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Название: \_\_\_\_\_ Алгоритм Копперсмита-Винограда

Дисциплина: \_\_\_\_\_ Анализ алгоритмов

Студент	ИУ7-56Б	_____	Ковель А.Д.
	Группа	Подпись, дата	И. О. Фамилия
Преподаватель		_____	Волкова Л.Л.
		Подпись, дата	И. О. Фамилия
Преподаватель		_____	Строганов Ю.В.
		Подпись, дата	И. О. Фамилия

Москва, 2022 г.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Аналитический раздел</b>	<b>5</b>
1.1 Применение математического подхода . . . . .	5
1.2 Алгоритм Копперсмита – Винограда . . . . .	5
1.3 Вывод . . . . .	6
<b>2 Конструкторский раздел</b>	<b>7</b>
2.1 Трудоемкость алгоритмов . . . . .	7
2.2 Оптимизация алгоритма Копперсмита – Винограда . . . . .	8
2.3 Трудоемкость алгоритмов . . . . .	8
2.3.1 Классический алгоритм . . . . .	8
2.3.2 Алгоритм Копперсмита — Винограда . . . . .	9
2.3.3 Оптимизированный алгоритм Копперсмита — Вино- града . . . . .	10
2.4 Схемы алгоритмов . . . . .	11
2.4.1 Вывод . . . . .	15
<b>3 Технологический раздел</b>	<b>16</b>
3.1 Требования к ПО . . . . .	16
3.2 Средства реализации . . . . .	16
3.3 Листинги кода . . . . .	16
3.4 Листинги кода . . . . .	16
3.5 Тестовые данные . . . . .	19
3.6 Вывод . . . . .	20
<b>4 Исследовательская часть</b>	<b>21</b>
4.1 Технические характеристики . . . . .	21
4.2 Демонстрация работы программы . . . . .	21
4.3 Время выполнения алгоритмов . . . . .	22
4.4 Графики функций . . . . .	23

<b>Заключение</b>	<b>26</b>
<b>Литература</b>	<b>27</b>

# Введение

Цель лабораторной работы — разработка, реализация, оптимизация и исследование алгоритма Копперсмита – Винограда.

Разработка и совершенствование матричных алгоритмов является важнейшей алгоритмической задачей. Непосредственное применение классического матричного умножения требует времени порядка  $O(n^3)$ . Однако существуют алгоритмы умножения матриц, работающие быстрее очевидного. В линейной алгебре алгоритм Копперсмита – Винограда[1], названный в честь Д. Копперсмита и Ш. Винограда, был асимптотически самый быстрый из известных алгоритмов умножения матриц с 1990 по 2010 год. В данной работе внимание акцентируется на алгоритме Копперсмита – Винограда и его улучшениях.

Алгоритм не используется на практике, потому что он дает преимущество только для матриц настолько больших размеров, что они не могут быть обработаны современным вычислительным оборудованием. Если матрица не велика, эти алгоритмы не приводят к большой разнице во времени вычислений.

Задачи данной лабораторной следующие:

- 1) изучение алгоритмов перемножения матриц;
- 2) применение оптимизации при реализации алгоритма умножения матриц Копперсмита–Винограда;
- 3) получение практических навыков реализаций алгоритма Копперсмита–Винограда;
- 4) проведение сравнительного анализа алгоритмов умножения матриц по затратам времени;
- 5) получение экспериментального подтверждения различий по временной эффективности алгоритмов умножения матрица, путем измерения процессорного время с помощью разработанного программного обеспечения;
- 6) описание и обоснование полученных результатов в отчете о выполненной лабораторной работе, выполненного как расчетно-пояснительная записка к работе.

# 1 Аналитический раздел

В этом разделе будут представлены описания алгоритмов нахождения редакторских расстояний Левенштейна и Дамерау-Левенштейна и их практическое применение.

## 1.1 Применение математического подхода

Даны матрицы,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , произведение матриц,  $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$  — такая матрица,  $C = A \times B$ , каждый элемент которой вычисляется согласно формуле 1.1:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \text{ где } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p} \quad (1.1)$$

Стандартный алгоритм умножения матриц реализует формулу (1.1).

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.

## 1.2 Алгоритм Копперсмита — Винограда

Для начала стоит обратить внимание на альтернативный подсчет выражения  $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$  осуществляется согласно 1.2:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1 \cdot a_1 \\ \lambda_2 &= b_1 \cdot b_1 \\ \lambda_3 &= (a_1 + b_2) \cdot (a_2 + b_1) \\ \text{результат: } &\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Классическое умножение матриц, по своей сути, является нахождением некоторого числа скалярных произведений каждого столбца первого множителя с каждой строкой второго. Процедура может быть усовершенствована: если один вектор  $V$  встречается множество раз, то операция на-

хождения векторного произведения для него может быть выполнена единожды. Идея препроцессирования в случае перемножения квадратных матриц,  $n \times n$  приводит к определению алгоритма Копперсмита – Винограда. Для вектора,  $x = (x_1 \cdots x_n)$ , можно записать(1.3):

$$W(x) = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n \quad (1.3)$$

Тогда умножения матрицы выполняется согласно следующему алгоритму:

1. Для каждой строки  $R_i$  матрицы  $M$  вычислить  $W(R_i)$  и для каждого столбца  $C_i$  матрицы  $M$  вычислить  $W(C_i)$ ;
2. Для каждой пары  $(i, j)$ , где  $r$  соответствует  $R_i$  и  $c$  соответствует  $C_i$ , вычислить 1.4:

$$r \cdot c = (r_1 + c_2) + (r_2 + c_1) \cdot (r_3 + c_4) \cdot (r_4 + c_3) + \cdots + (r_{n-1} + c_n) + (r_n + c_{n-1}) - W(r) - W(c). \quad (1.4)$$

Если оценивать подход Копперсмита – Винограда опуская идею препроцессирования, то можно заметить, что арифметических операций в ней больше, чем в формуле классического скалярного произведения. Однако, сохранение результатов  $W(C_i)$  и  $W(R_i)$  позволяет выполнять меньше операций, чем при нахождении матричного произведения математически. Разница при таком подходе, очевидно, будет заметна на матрицах настолько больших размеров, что они не могут быть обработаны ЭВМ.

## 1.3 Вывод

Была выявлена основная особенность подхода Копперсмита – Винограда — идея предварительной обработки. Разница во времени выполнения при такой оптимизации будет экспериментально вычислена в исследовательском разделе.

## 2 Конструкторский раздел

В данном разделе представлены схемы реализуемых алгоритмов и их модификации.

### 2.1 Трудоемкость алгоритмов

Для получения функции трудоемкости алгоритма необходимо ввести модель оценки трудоемкости. Трудоемкость "элементарных" операций оценивается следующим образом:

1. Трудоемкость 1 имеют операции:

$+, -, =, <, >, <=, >=, ==, + =, - =,$   
 $++, --, [], \&\&, ||, >>, <<$

2. Трудоемкость 2 имеют операции:

$*, /, \backslash, \%$

3. Трудоемкость конструкции ветвления определяется согласно формуле 2.1

$$f_{if} = f_{condition} + \begin{cases} \min(f_{true}, f_{false}) & \text{в лучшем случае,} \\ \max(f_{true}, f_{false}) & \text{в худшем случае.} \end{cases} \quad (2.1)$$

4. Трудоемкость цикла рассчитывается по формуле 2.2

$$f_{loop} = f_{init} + f_{cmp} + N(f_{body} + f_{inc} + f_{cmp}), \quad (2.2)$$

где

$f_{init}$  — трудоемкость инициализации,

$f_{body}$  — трудоемкость тела цикла,

$f_{iter}$  — трудоемкость инкремента,

$f_{cmp}$  — трудоемкость сравнения,

$N$  — количество повторов.



5. Трудоемкость вызова функции равна 0.

## 2.2 Оптимизация алгоритма Копперсмита – Винограда

Алгоритм Копперсмита – Винограда можно оптимизировать следующим образом:

- Счетчики цикла можно объявить единожды и обнулять их по требованию. В этом случае стоимость инициализации при расчете трудоемкости цикла сократится;
- Увеличение числа на определенное число можно заменить на операцию  $+=$ , поскольку она имеет меньший вес чем в сумме сложение и присвоение;
- Для алгоритма худшим случаем являются матрицы с нечётным общим размером, а лучшим - с четным. Соответственно, алгоритм можно ускорить в соответствии с четностью размера.

## 2.3 Трудоемкость алгоритмов

### 2.3.1 Классический алгоритм

Пусть на вход алгоритму поступают матрицы  $M_{left}$  и  $M_{right}$  с размерностью  $n \times m$  и  $m \times q$ . Тогда трудоемкость классического алгоритма определяется по формуле 2.3

$$\begin{aligned} f_{alg} = f_{loop_i} &= 2 + n (2 + f_{loop_j}) = 2 + n (2 + 2 + q (2 + f_{loop_k})) = \\ &= 2 + n (2 + 2 + q (2 + 2 + 14 \cdot m)) \approx 14mnq = 14MNK \quad (2.3) \end{aligned}$$

### 2.3.2 Алгоритм Копперсмита — Винограда

Трудоёмкость алгоритма Копперсмита — Винограда состоит из:

- создания и инициализации массивов  $MH$  и  $MV$ , трудоёмкость которого (2.4):

$$f_{init} = M + N; \quad (2.4)$$

- заполнения массива  $MH$ , трудоёмкость которого (2.5):

$$f_{MH} = 2 + K(2 + \frac{M}{2} \cdot 11); \quad (2.5)$$

- заполнения массива  $MV$ , трудоёмкость которого (2.6):

$$f_{MV} = 2 + K(2 + \frac{N}{2} \cdot 11); \quad (2.6)$$

- цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого (2.7):

$$f_{cycle} = 2 + M \cdot (4 + N \cdot (11 + \frac{K}{2} \cdot 23)); \quad (2.7)$$

- цикла, для дополнения умножения суммой последних нечётных строки и столбца, если общий размер нечётный, трудоёмкость которого (2.8):

$$f_{last} = \begin{cases} 2, & \text{чётная,} \\ 4 + M \cdot (4 + 14N), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Итого, для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем (2.9):

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 11.5 \cdot MNK \quad (2.9)$$

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем (2.10):

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 11.5 \cdot MNK \quad (2.10)$$

### 2.3.3 Оптимизированный алгоритм Копперсмита — Винограда

Оптимизированный алгоритм Винограда представляет собой обычный алгоритм Винограда, за исключением следующих оптимизаций:

- вычисление происходит заранее;
- используется битовый сдвиг, вместо деления на 2;
- последний цикл для нечётных элементов включён в основной цикл, используя дополнительные операции в случае нечётности  $N$ .

Трудоёмкость улучшенного алгоритма Копперсмита — Винограда состоит из:

- создания и инициализации массивов  $MH$  и  $MV$ , трудоёмкость которого (2.11):

$$f_{init} = M + N; \quad (2.11)$$

- заполнения массива  $MH$ , трудоёмкость которого (2.12):

$$f_{MH} = 2 + K(2 + \frac{M}{2} \cdot 8); \quad (2.12)$$

- заполнения массива  $MV$ , трудоёмкость которого (2.13):

$$f_{MV} = 2 + K(2 + \frac{M}{2} \cdot 8); \quad (2.13)$$

- цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого (2.14):

$$f_{cycle} = 2 + M \cdot (4 + N \cdot (11 + \frac{K}{2} \cdot 18)); \quad (2.14)$$

- условие, для дополнения умножения суммой последних нечётных строки и столбца, если общий размер нечётный, трудоёмкость которого (2.15):

$$f_{last} = \begin{cases} 1, & \text{чётная,} \\ 4 + M \cdot (4 + 10N), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Итого, для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем (2.16):

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 9MNK \quad (2.16)$$

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем (2.17):

$$f = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 9MNK \quad (2.17)$$

## 2.4 Схемы алгоритмов

На рисунке 2.1 приведена схема классического алгоритма умножения матриц. На рисунке 2.2 приведена схема алгоритма Копперсмита – Винограда. Рисунок 2.3 демонстрируют схему оптимизированного алгоритма Копперсмита – Винограда.

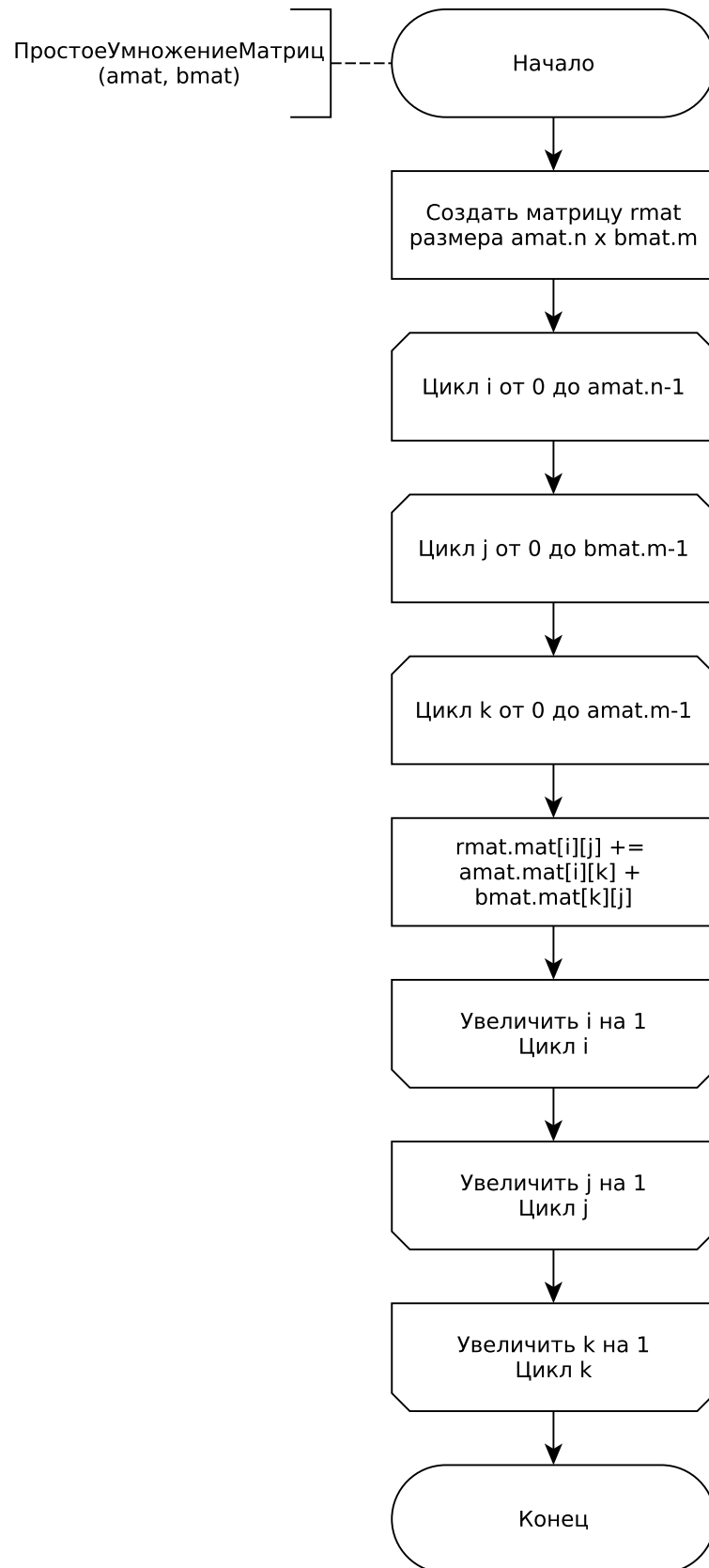


Рисунок 2.1 – Схема классического алгоритма умножения матриц

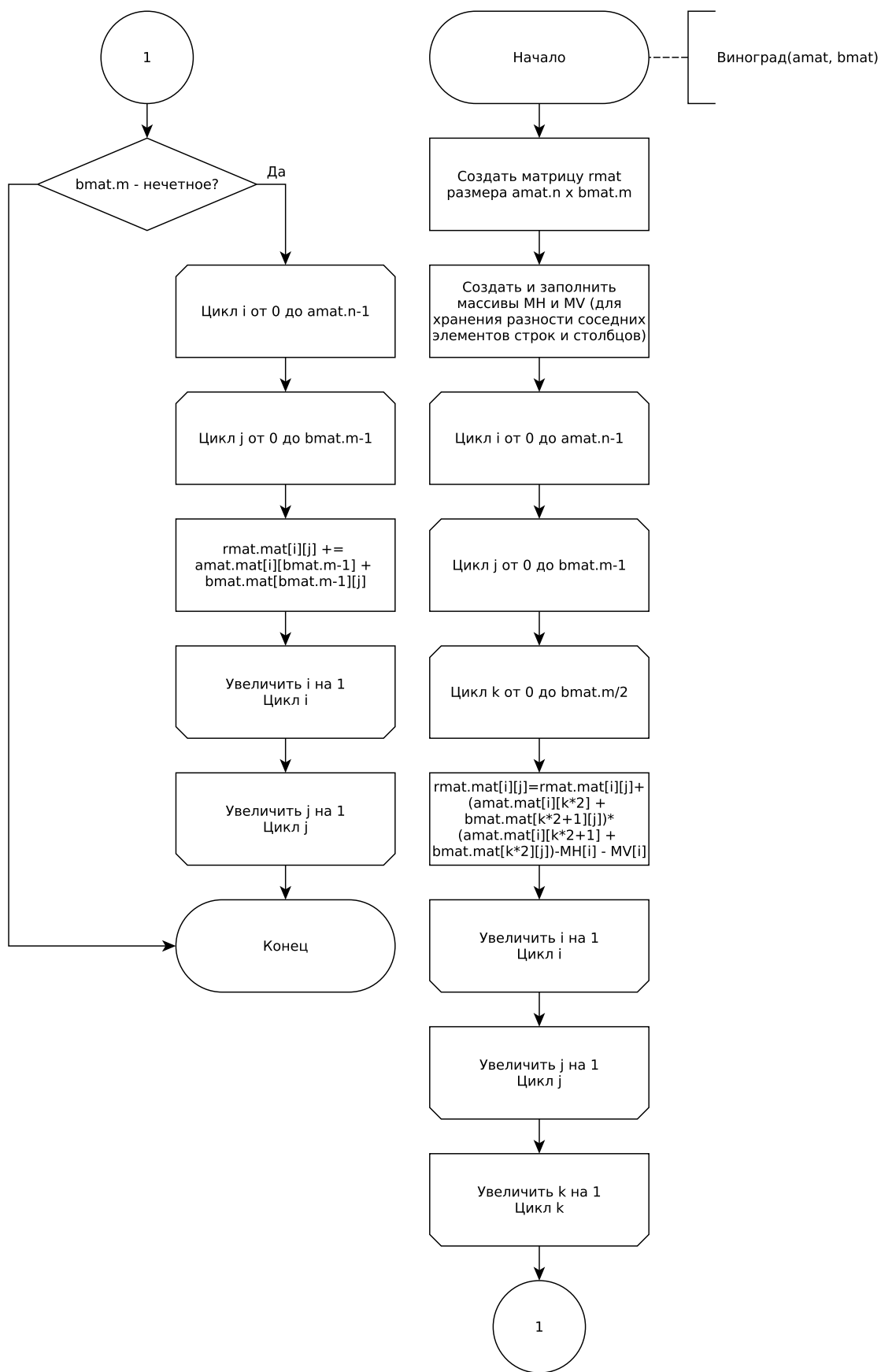


Рисунок 2.2 – Схема алгоритма умножения матриц Копперсмита – Винограда

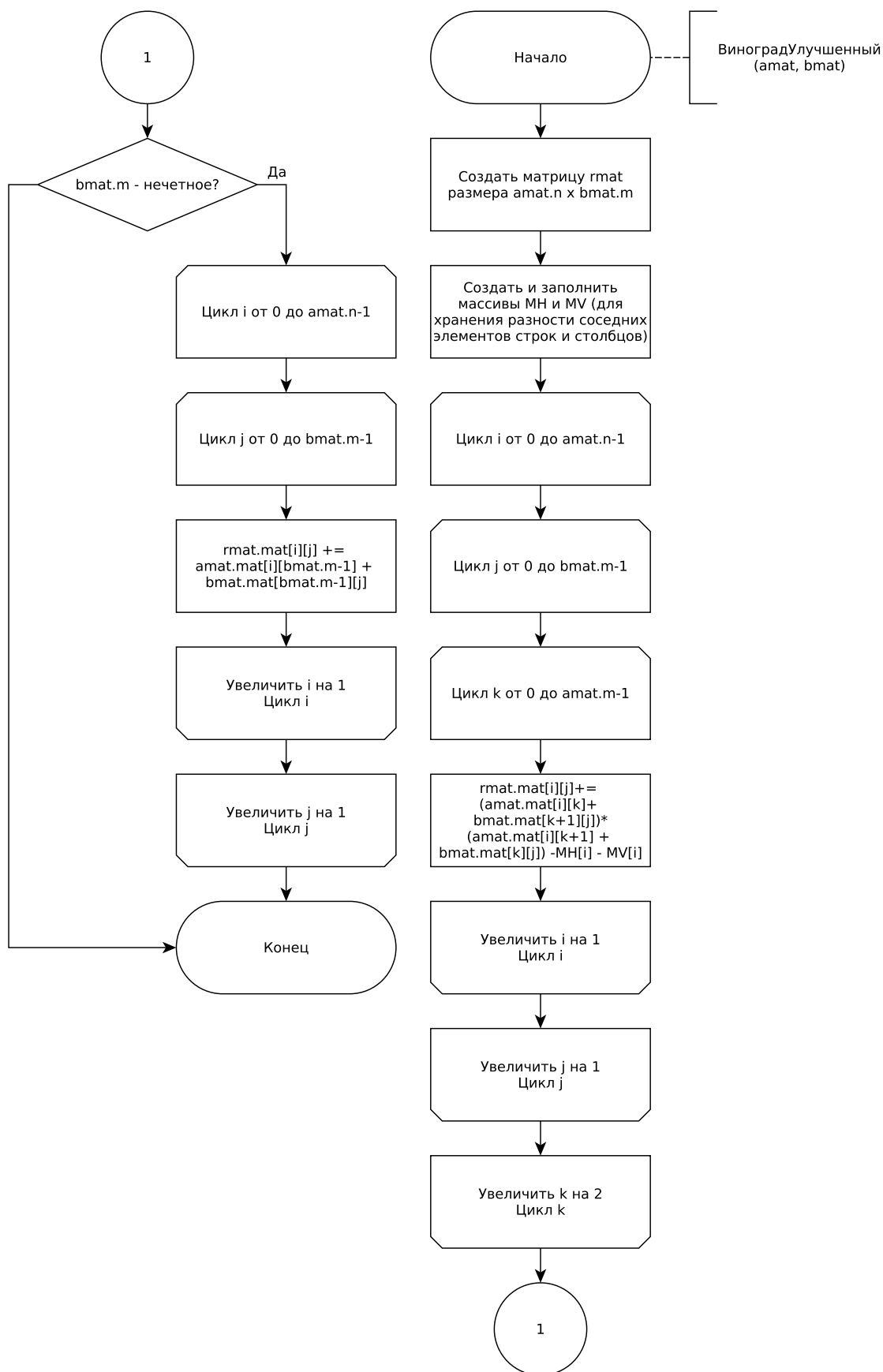


Рисунок 2.3 – Схема оптимизированного алгоритма умножения матриц Копперсмита – Винограда

### 2.4.1 Вывод

Алгоритмы были проанализированы с точки зрения временных затрат. Было выявлено, что алгоритм Копперсмита – Винограда работает на  $1.5MNK$  быстрее, чем классический матричный. Оптимизация алгоритма же дает выигрыш на  $2.5MNK$ .

Были построены схемы алгоритмов. Теоретически были исследованы способы оптимизации алгоритма Копперсмита – Винограда. Было получено достаточно теоретических сведений для разработки ПО, решающего поставленную задачу.



## 3 Технологический раздел

В данном разделе будут приведены требования к программному обеспечению, средства реализации и листинга кода.

### 3.1 Требования к ПО

Программное обеспечение должно удовлетворять следующим требованиям:

- программа получает на вход с клавиатуры две матрицы размеров в пределах  $10000 \times 10000$  либо получает два числа – размерность матрицы в пределах 10000;
- программа выдает матрицу - произведение двух полученных матриц;
- в программе возможно измерение процессорного времени.

### 3.2 Средства реализации

Для реализации ПО был выбран язык программирования Golang[2].

В данном языке есть все требующиеся инструменты для данной лабораторной работы.

В качестве среды разработки была выбрана среда VS Code[?], запуск происходил через команду `go run main.go`.

### 3.3 Листинги кода

### 3.4 Листинги кода

Листинг 3.1 демонстрирует классический алгоритм умножения.

Листинг 3.1 – Классический алгоритм умножения

```

1 func SimpleMult(amat, bmat MInt) MInt {
2   rmat := formResMat(amat.n, bmat.m)
3   for i := 0; i < rmat.n; i++ {
4     for j := 0; j < rmat.m; j++ {
5       for k := 0; k < amat.m; k++ {
6         rmat.mat[i][j] += amat.mat[i][k] * bmat.mat[k][j]
7       }
8     }
9   }
10  return rmat
11 }

```

Листинг 3.2 – умножение матриц алгоритмом Винограда.

Листинг 3.2 – Алгоритм умножения Виноградом

```

1 func WinogradMult(amat, bmat MInt) MInt {
2   rmat := formResMat(amat.n, bmat.m)
3   rowcf := precomputeWinogradRows(amat)
4   colcf := precomputeWinogradCols(bmat)
5
6   for i := 0; i < rmat.n; i++ {
7     for j := 0; j < rmat.m; j++ {
8       for k := 0; k < rmat.m/2; k++ {
9         rmat.mat[i][j] = rmat.mat[i][j] +
10          (amat.mat[i][k*2]+bmat.mat[k*2+1][j])*
11          (amat.mat[i][k*2+1]+bmat.mat[k*2][j]) -
12          rowcf.mat[i][k] - colcf.mat[k][j]
13       }
14     }
15   }
16   if rmat.m%2 != 0 {
17     for i := 0; i < rmat.n; i++ {
18       for j := 0; j < rmat.m; j++ {
19         rmat.mat[i][j] += amat.mat[i][amat.m-1] *
20          bmat.mat[bmat.n-1][j]
21       }
22     }
23   }
24   return rmat
25 }

```

Листинг 3.3 – умножение оптимизированным согласно 2.2 алгоритмом винограда.

Листинг 3.3 – Оптимизированный алгоритм умножения Виноградом

```
1 func WinogradMultImp(amat, bmat MInt) MInt {
2
3   rmat := formResMat(amat.n, bmat.m)
4
5   rowcf := precomputeWinogradRowslmp(amat)
6   colcf := precomputeWinogradColslmp(bmat)
7
8   for i := 0; i < rmat.n; i++ {
9     for j := 0; j < rmat.m; j++ {
10      for k := 0; k < rmat.m-1; k += 2 {
11
12        l := k/2 + k%2
13        rmat.mat[i][j] +=
14        (amat.mat[i][k]+bmat.mat[k+1][j])
15        *(amat.mat[i][k+1]+bmat.mat[k][j]) -
16        rowcf.mat[i][l] - colcf.mat[l][j]
17
18      }
19    }
20  }
21
22  if rmat.m%2 != 0 {
23    k := amat.m - 1
24    for i := 0; i < rmat.n; i++ {
25      for j := 0; j < rmat.m; j++ {
26
27        rmat.mat[i][j] += amat.mat[i][k] * bmat.mat[k][j]
28
29      }
30    }
31  }
32
33  return rmat
34 }
```

Функции оптимизации, реализующие формулу 1.3 представлены на листинге 3.4

Листинг 3.4 – Функции препроцессирования для алгоритмов Винограда

```
1 func precomputeWinogradRowslmp(mat MInt) MInt {
2   s := mat.m / 2
3   cf := formResMat(mat.n, s)
4
5   for i := 0; i < mat.n; i++ {
6     for j := 0; j < mat.m-1; j += 2 {
7       cf.mat[i][j/s+j%2] = mat.mat[i][j] * mat.mat[i][j+1]
8     }
9   }
10
11  return cf
12 }
13
14 func precomputeWinogradColslmp(mat MInt) MInt {
15   s := mat.n / 2
16   cf := formResMat(s, mat.m)
17
18   for i := 0; i < mat.n-1; i += 2 {
19     for j := 0; j < mat.m; j++ {
20       cf.mat[i/s+i%2][j] = mat.mat[i][j] * mat.mat[i+1][j]
21     }
22   }
23
24  return cf
25 }
```

## 3.5 Тестовые данные

Таблица 3.1 – Тестовые случаи

№	Вход. матрица №1	Вход. матрица №2	Результат			
			Классический	Виноград	Виноград оптимизированный	
1	−3 5 −1 7	−3 5 −1 7	−73 −2 32 −9	−73 −2 32 −9	−73 −2 32 −9	
	−8 2 −2 1	−8 2 −2 1	2 −30 17 −53	2 −30 17 −53	2 −30 17 −53	
	0 −3 −4 0	0 −3 −4 0	24 6 22 −3	24 6 22 −3	24 6 22 −3	
	−6 0 5 1	−6 0 5 1	12 −45 −9 −41	12 −45 −9 −41	12 −45 −9 −41	
2	0 0 −2	0 0 −2	8 0 2	8 0 2	8 0 2	
	2 3 2	2 3 2	−2 9 0	−2 9 0	−2 9 0	
	−4 0 −1	−4 0 −1	4 0 9	4 0 9	4 0 9	
3	5 7	5 7 7 0	46 42 −14 35	46 42 −14 35	46 42 −14 35	
	7 0	3 1 −7 5	35 49 49 0	35 49 49 0	35 49 49 0	
	3 1		18 22 14 5	18 22 14 5	18 22 14 5	
4	−4 9		7 −45 61	7 −45 61	7 −45 61	
	−4 −1	−4 9 −4	17 −35 11	17 −35 11	17 −35 11	
	−1 5	−1 −1 5	−1 −14 29	−1 −14 29	−1 −14 29	
	5 3		−23 42 −5	−23 42 −5	−23 42 −5	

## 3.6 Вывод

Было написано и протестировано программное обеспечение для решения поставленной задачи.

## 4 Исследовательская часть

### 4.1 Технические характеристики

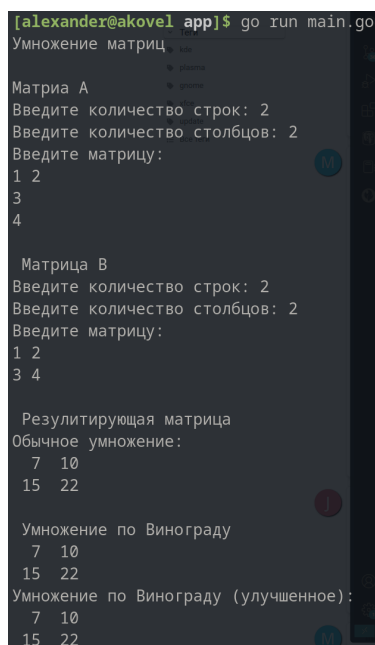
Тестирование выполнялось на устройстве со следующими техническими характеристиками:

- Операционная система Pop!\_OS 22.04 LTS [4] Linux [5];
- Оперативная память 16 GiB;
- Процессор AMD® Ryzen 7 2700 eight-core processor × 16 [6].

Во время тестирования устройство было подключено к блоку питания и не нагружено никакими приложениями, кроме встроенных приложений окружения, окружением и системой тестирования.

### 4.2 Демонстрация работы программы

На рисунке 4.1 представлен результат работы программы.



```
[alexander@akovel app]$ go run main.go
Умножение матриц
Матрица A
Введите количество строк: 2
Введите количество столбцов: 2
Введите матрицу:
1 2
3
4

Матрица B
Введите количество строк: 2
Введите количество столбцов: 2
Введите матрицу:
1 2
3 4

Результирующая матрица
Обычное умножение:
7 10
15 22

Умножение по Винограду
7 10
15 22
Умножение по Винограду (улучшенное):
7 10
15 22
```

Рисунок 4.1 – Пример работы программы

## 4.3 Время выполнения алгоритмов

Алгоритмы тестировались при помощи вставки кода на языке СИ 4.1. Данная команда возвращает значения процессорного времени типа `int` в наносекундах.

Замеры времени для каждого алгоритма проводились 100 раз.

Листинг 4.1 – Пример теста эффективности

```
1  /*
2  #include <pthread.h>
3  #include <time.h>
4  #include <stdio.h>
5
6  static long long getThreadCpuTimeNs() {
7      struct timespec t;
8      if (clock_gettime(CLOCK_THREAD_CPUTIME_ID, &t)) {
9          perror("clock_gettime");
10         return 0;
11     }
12     return t.tv_sec * 1000000000LL + t.tv_nsec;
13 }
14 */
15 import "C"
16
17 func test(){
18
19     cputime1 := C.getThreadCpuTimeNs()
20     for i := 0; i < n; i++ {
21         matrix.WinogradMult(amat, bmat)
22     }
23     cputime2 := C.getThreadCpuTimeNs()
24     fmt.Printf(cputime2 - cputime1)
25
26 }
```

Результаты профилирования алгоритмов приведены в таблице 4.1. Результаты тестирования приведены в таблице 3.1.

Таблица 4.1 – Время выполнения алгоритмов

Таблица 4.1.1 – Четная размерность матриц

n	Время, ns		
	Класс.	Виноград	Вин. опт.
10	4.49e-06	3.91e-06	4.01e-06
20	2.74e-05	2.24e-05	2.30e-05
30	8.84e-05	6.72e-05	7.01e-05
40	2.09e-04	1.49e-04	1.58e-04
50	3.96e-04	2.98e-04	3.14e-04
60	6.58e-04	4.95e-04	5.15e-04
70	1.07e-03	7.95e-04	8.43e-04
80	1.60e-03	1.20e-03	1.22e-03
90	2.26e-03	1.68e-03	1.77e-03
100	3.14e-03	2.25e-03	2.38e-03
150	1.06e-02	7.88e-03	8.33e-03
200	2.84e-02	2.20e-02	2.34e-02
250	6.73e-02	5.34e-02	5.74e-02
300	1.14e-01	8.97e-02	9.60e-02
350	1.80e-01	1.39e-01	1.50e-01
400	2.67e-01	2.05e-01	2.21e-01
450	4.17e-01	3.23e-01	3.48e-01
500	5.71e-01	4.42e-01	4.75e-01

Таблица 4.1.2 – Нечетная размерность матриц

n	Время, ns		
	Класс.	Виноград	Вин. опт.
11	5.17e-06	4.56e-06	5.05e-06
21	3.25e-05	2.58e-05	2.59e-05
31	9.63e-05	7.23e-05	7.69e-05
41	2.14e-04	1.64e-04	1.73e-04
51	4.10e-04	3.15e-04	3.38e-04
61	7.13e-04	5.37e-04	5.70e-04
71	1.11e-03	8.36e-04	8.79e-04
81	1.67e-03	1.28e-03	1.35e-03
91	2.33e-03	1.73e-03	1.85e-03
101	3.23e-03	2.36e-03	2.49e-03
151	1.08e-02	8.03e-03	8.50e-03
201	2.74e-02	2.13e-02	2.29e-02
251	6.80e-02	5.27e-02	5.66e-02
301	1.16e-01	9.13e-02	9.82e-02
351	1.82e-01	1.40e-01	1.52e-01
401	2.58e-01	1.99e-01	2.14e-01
451	4.21e-01	3.26e-01	3.50e-01
501	5.74e-01	4.43e-01	4.76e-01

## 4.4 Графики функций



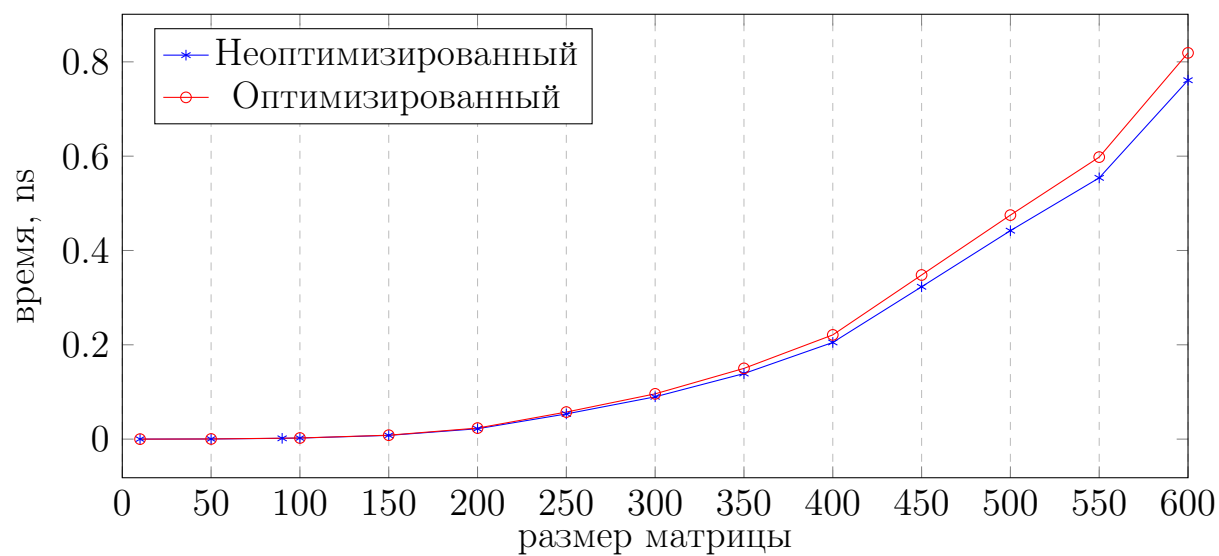


Рисунок 4.2.1 – Четная размерность матрицы

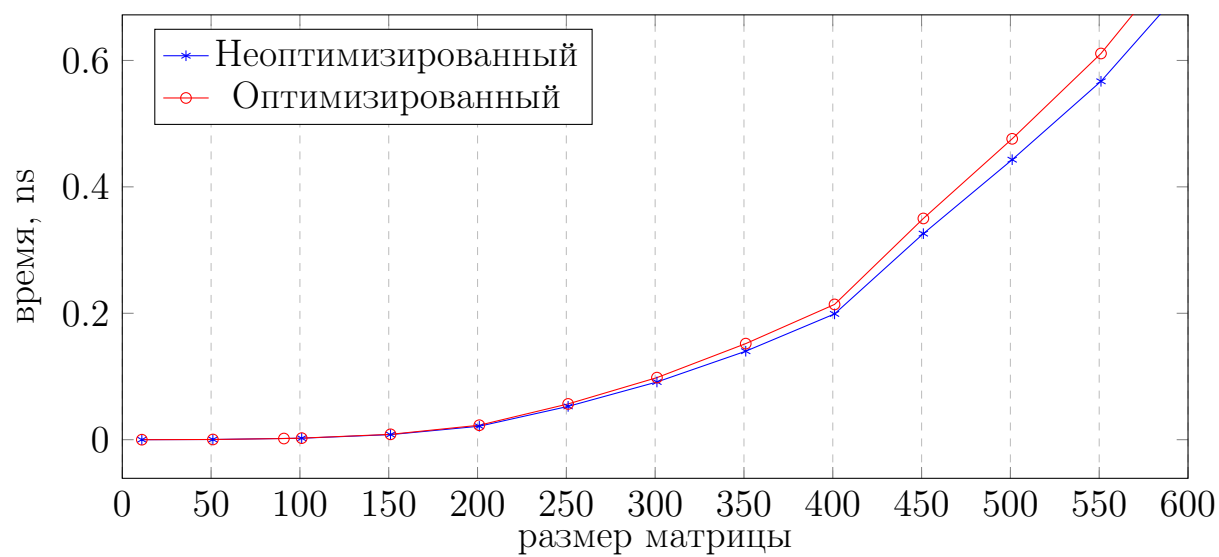


Рисунок 4.2.2 – Нечетная размерность матрицы

## Вывод

В данном разделе были сравнены алгоритмы по времени. Оптимизированный алгоритм Винограда является самым быстрым, за счет проведенных изменений в стандартном алгоритме Винограда.

# Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были решены следующие задачи:

- были изучены и реализованы 3 алгоритма перемножения матриц: обычный, Копперсмита-Винограда, модифицированный Копперсмита-Винограда;
- был произведен анализ трудоёмкости алгоритмов на основе теоретических расчетов и выбранной модели вычислений;
- был сделан сравнительный анализ алгоритмов на основе экспериментальных данных;
- подготовлен отчет о лабораторной работе.

Оптимизированный алгоритм Винограда быстрее обычного на 5 процентов при размерах матрицы 500 на 500.

Поставленная цель достигнута.

# Литература

- [1] Coppersmith Don, Winograd Shmuel. Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions // Journal of Symbolic Computation. 1990.
- [2] Golang Документация[Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://go.dev/doc/> (дата обращения: 24.09.2022).
- [3] Vscode Документация[Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://code.visualstudio.com/docs> (дата обращения: 24.09.2022).
- [4] Pop OS 22.04 LTS [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://pop.system76.com> (дата обращения: 04.09.2022).
- [5] Linux – Документация [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.kernel.org> (дата обращения: 24.09.2022).
- [6] Процессор AMD® Ryzen 7 2700 eight-core processor × 16 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.amd.com/en/products/cpu/amd-ryzen-7-2700> (дата обращения: 04.09.2022).