Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ «09.03.04 Программная инженерия»

ОТЧЕТ

ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Название: Интервальные оценки

Дисциплина: Математическая статистика

Студент ИУ7-66Б ____________ А.Д. Ковель

Группа Подпись, дата И. О. Фамилия

Преподаватель ____________ Т. В. Андреева

Подпись, дата И. О. Фамилия

Москва, 2023 г.

1 Содержание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:

a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n), \overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

c) вычисление оценок $\hat{\mu}$ и S^2 математического ожидания MX и дисперсии DX;

d) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n), \overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретические сведения

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}; \;\; \overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2.1}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \;\; \overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{2.2}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения $\chi^2(n-1)$ с n - 1 степенями свободы.

3 Результаты расчетов

1. Точечные оценки $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно: $\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -4.758$, $S^2(\vec{x}_n) = 0.812$

2. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n), \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX: $\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -4.894, \overline{\mu}(\vec{x}_n) = -4.622$

3. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}(\vec{x}_n), \overline{\sigma}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX: $\underline{\sigma}(\vec{x}_n) = 0.664, \overline{\sigma}(\vec{x}_n) = 1.019$

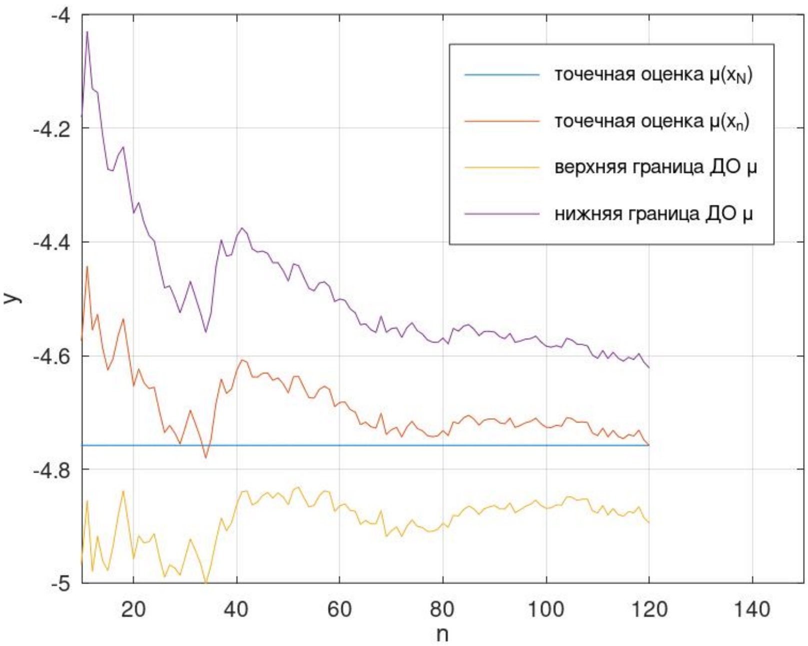

Рисунок 3.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

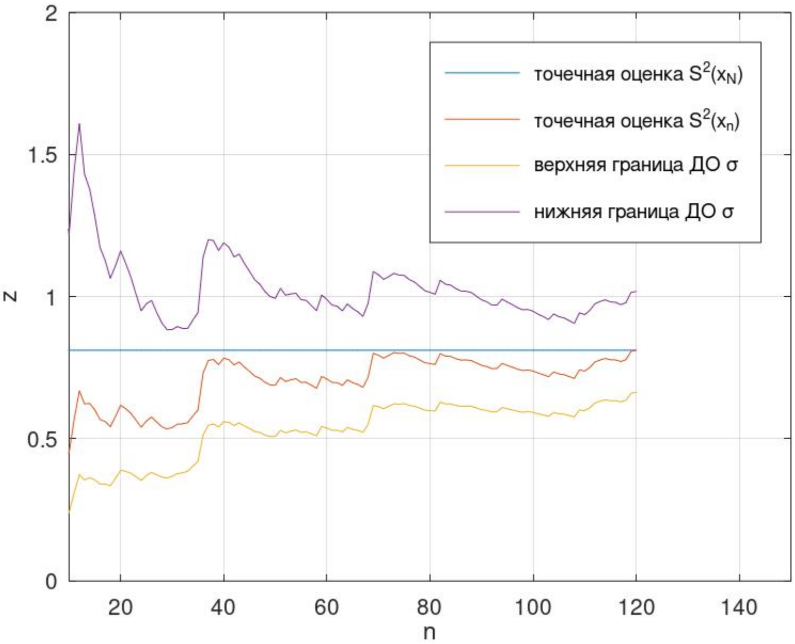

Рисунок 3.2 – Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.