

Halleffekt

Leon Bentrup

13. Mai 2016

Zusammenfassung

Team: Lukas Rapp, Leon Bentrup

Es wird der Halleffekt bei einem Leiter und bei einem Halbleiter untersucht. Dabei wird jeweils die Hallkonstante, die Ladungsträgerkonzentration und die Driftgeschwindigkeit berechnet. Abschließend wird eine Fehlerbetrachtung angestellt.

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	4
1.1	Driftgeschwindigkeit	4
1.2	Halleffekt	5
2	Versuch	7
2.1	Silberplättchen	7
2.1.1	Material	7
2.1.2	Durchführung	8
2.1.3	Messergebnisse	8
2.1.4	Auswertung	10
2.2	Germaniumplättchen	13
2.2.1	Material	13
2.2.2	Durchführung	14
2.2.3	Messergebnisse	14
2.2.4	Auswertung	16
3	Fehlerbetrachtung	19
3.1	Silberplättchen	19
3.2	Germaniumplättchen	19

1 Theorie

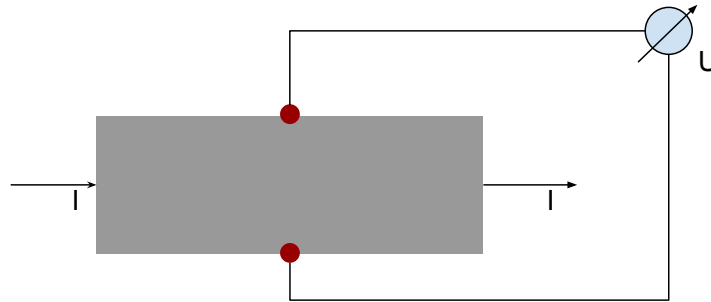


Abbildung 1.1: Halleffekt-Plättchen

1.1 Driftgeschwindigkeit

Schließt an einen elektrischen Leiter eine Ladungspumpe an, so entsteht entlang des Leiters ein elektrisches Feld. Durch das elektrische Feld erfahren die freien Elektronen im Leiter die Kraft:

$$F_{el} = E \cdot e$$

Die durch diese Kraft beschleunigten Teilchen stoßen mit übrigen Teilen des Leiters zusammen. Es stellt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit im Leiter ein. Diese Geschwindigkeit nennt man *Driftgeschwindigkeit* der Elektronen.

Wir betrachten ein Leiterplättchen mit der Breite s und der Höhe h . Fließt Strom durch das Plättchen, bewegen sich alle Elektronen im Leiter mit \vec{v} Richtung Pluspol. Dafür benötigen sie die Zeit

$$t = \frac{s}{v}$$

In dieser Zeit übertragen alle N strömenden Elektronen die Ladung

$$Q = N \cdot e$$

Dabei fließt die Stromstärke

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{s} \cdot v$$

Dabei ist $\frac{N \cdot e}{s}$ konstant. Daraus folgt

$$I \sim v$$

1.2 Halleffekt

Wird das stromdurchflossene Leiterplättchen senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen mit einem Magnetfeld durchsetzt, erfahren die Elektronen jeweils die Lorentzkraft

$$F_L = B \cdot e \cdot v$$

Die Elektronen wandern also auf eine Seite des Leiters. Wenn die Elektronen z. B. von links nach rechts strömen, das Magnetfeld von vorne nach hinten zeigt, wandern die Elektronen nach der Drei-Finger-Regel der linken Hand nach unten. Dieses Phänomen wird *Halleffekt* genannt.

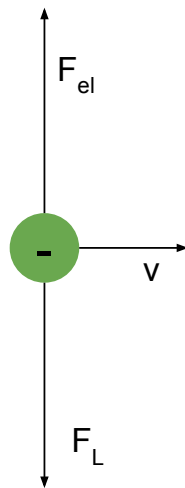


Abbildung 1.2: Kräfte diagramm für ein Elektron im Hallplättchen

Die Elektronen „sammeln“ sich an einer Seite. Durch diese Ladungsverschiebung entsteht im Leiterplättchen ein elektrisches Feld. Nach kurzer Zeit stellt sich das Kräftegleichgewicht

$$F_L = F_{el}$$

ein. Die weiteren Elektronen durchlaufen das Plättchen also geradlinig. Misst man an zwei direkt gegenüberliegenden Punkten oben und unten am Plättchen die Spannung, erhält man die Hallspannung U_H .

Nach der Formel für die Spannung eines Elektrischen Feldes $E = \frac{U}{d}$ ergibt sich für U_H :

$$U_H = E \cdot h$$

E lässt sich aus der Kraft, die das Feld auf die Elektronen ausübt bestimmen. Da diese Kraft im Gleichgewicht mit der Lorentzkraft steht, gilt für die Feldstärke E

$$E = \frac{F_L}{e}$$

$$E = B \cdot v$$

Für die Hallspannung gilt dann dementsprechend:

$$U_H = B \cdot v \cdot h$$

Mit dem oben beschriebenen Zusammenhang von I und v ergibt sich:

$$v = \frac{I \cdot s}{N \cdot e}$$
$$U_H = B \cdot h \cdot \frac{I \cdot s}{N \cdot e}$$

Die Anzahl der Ladungsträger N wird für das entsprechende Material des Leiterplättchens in Abhängigkeit vom Volumen als n angegeben:

$$n = \frac{N}{V}$$
$$n = \frac{N}{h \cdot s \cdot d}$$
$$N = n \cdot h \cdot s \cdot d$$

Somit gilt für die Hallspannung:

$$U_H = B \cdot \frac{I}{n \cdot d \cdot e}$$

2 Versuch

Beim Versuch wurde das Leiter bzw. Halbleiterplättchen jeweils in ein homogenes Magnetfeld gestellt. Die Stärke des Magnetfeldes wurde mit einem Teslameter bestimmt. An das Hallplättchen wurde ein Querstrom I_Q angelegt und variiert. Es wurde die Hallspannung U_H in Abhängigkeit zum Querstrom gemessen.

Anhand der Messwerte wurde jeweils

- die Hallkonstante R_H
- die Ladungsträgerkonzentration n
- die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger v

bestimmt.

Beim Silberplättchen wurde zusätzlich noch die Anzahl der Leitungselektronen pro Atom bestimmt.

2.1 Silberplättchen

2.1.1 Material

- Silberplättchen
- Labornetzteil für den Querstrom (bis 20 A)
- 2 Spulen als Vorwiderstand für das Silberplättchen
- Elektromagnet
- Labornetzteil für den Elektromagneten (bis 5 A)
- Mobile-CASSY mit Mikrovoltbox
- Hochstromzange
- Teslameter

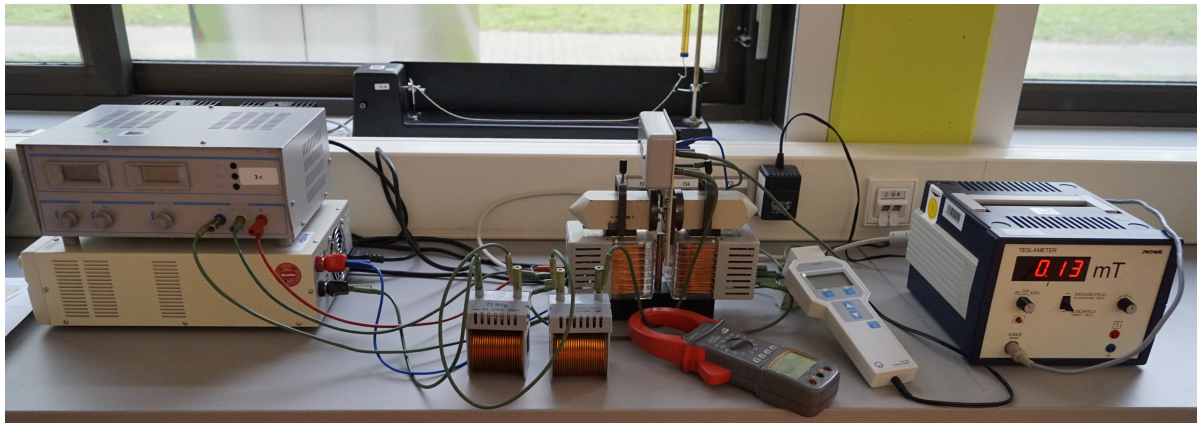


Abbildung 2.1: Versuchsaufbau zur Messung mit dem Silberplättchen

2.1.2 Durchführung

Das Silberplättchen wurde in den Elektromagneten eingespannt. Die beiden Spulen des Elektromagneten wurden in Reihe geschaltet und an ein Labornetzteil angeschlossen. Die beiden Anschlüsse des Silberplättchens wurden an ein weiteres Labornetzteil angeschlossen. Die beiden Spulen wurden in Reihe geschaltet und ebenfalls in Reihe in den Querstromkreis eingebaut. Die beiden Anschlüsse für die Hallspannung am Silberplättchens wurden an die Mikrovoltbox angeschlossen, welche an das Mobile-CASSY gesteckt wurde.

Dann wird der Elektromagnet eingeschaltet. Der Strom betrug $I_{mag} = 4.74 \text{ A}$. Das Teslameter wurde außerhalb des Magnetfeldes justiert, so dass es 0 mT anzeigt. Dann wurde die Sonde senkrecht zur Feldrichtung in das Magnetfeld des Elektromagneten gehalten.

Der Elektromagnet wurde wieder ausgeschaltet. Dann wurde der Querstrom eingeschaltet und auf den niedrigsten möglichen Wert, $I_Q = 3 \text{ A}$ eingestellt. Das Potentiometer am Plättchen wurde so eingestellt, dass die gemessene Hallspannung mit ausgeschaltetem Magnetfeld 0 mV betrug. Mit der Stromzange wurde die Querstromstärke bestimmt. Dazu wurde sie um eines der Kabel, durch das der Querstrom fließt gelegt. Der Elektromagnet wurde eingeschaltet und die gemessene Hallspannung mit der Querstromstärke notiert. Dieser Vorgang wurde dann in 1 A -Schritten bis 20 A wiederholt.

2.1.3 Messergebnisse

Für das Silberplättchen erhielten wir bei einem Magnetfeld mit $B = 195 \text{ mT}$. Das Plättchen hat eine Dicke von $d = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Querstrom I_Q in A	Hallspannung U_H in μV
4.9	1
6.0	2
6.7	3
7.2	2
8.2	3
9.7	3
10.9	4
11.9	4
13.0	4
14.0	4
14.9	5
16.1	5
16.7	6
17.4	6
18.8	6
20.4	6

Abbildung 2.2: Messwerte mit Silber

Für eine Fehlerrechnung werden folgende Fehler zu Grunde gelegt:

$$I_Q : \pm 0.5 \text{ A}$$

$$U_H : \pm 1 \mu\text{V}$$

$$B : \pm 6 \text{ mT}$$

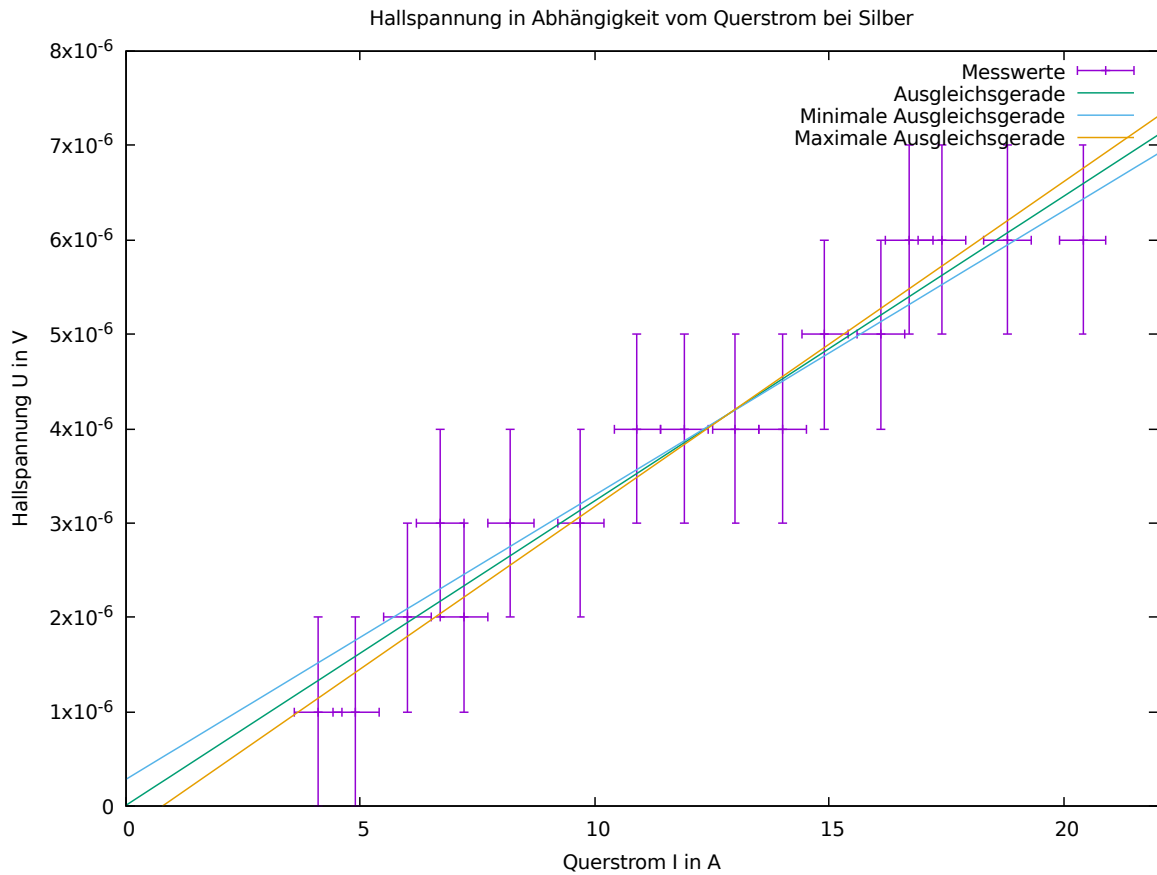


Abbildung 2.3: Graphische Darstellung und Auswertung der Messwerte mit Silber

2.1.4 Auswertung

Mit `GNUplot` wurde eine lineare Regression durchgeführt. Für die Steigung der Geraden erhält man

$$m = (3.226 \pm 0.214) \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Hallkonstante

Für die Hallspannung gilt folgende Formel:

$$U_H = \frac{B \cdot I_Q}{d} \cdot \frac{1}{n \cdot e}$$

Der rechte Teil $\frac{1}{n \cdot e}$ ist die Hallkonstante R_H .

$$R_H = \frac{U_H}{I_Q \cdot B}$$

Aus der Steigung kann man R_H so bestimmen:

$$m = \frac{U_H}{I_Q}$$

$$R_H = \frac{m \cdot d}{B}$$

Für unsere Messwerte ergibt das:

$$R_H = \frac{(3.226 \pm 0.214) \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{(195 \pm 6) \text{ mT}}$$

$$R_H = 8.27 \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta R_H = 8.27 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \cdot \sqrt{\left(\frac{0.214 \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}}{\text{A}}}{3.226 \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}}{\text{A}}} \right)^2 + \left(\frac{6 \cdot 10^{-3} \text{ T}}{195 \cdot 10^{-3} \text{ T}} \right)^2}$$

$$= 6.05 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$$

Somit kann man die Hallkonstante für das Silberplättchen angeben

$$R_H = (8.27 \pm 0.61) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$$

Laut Anleitung beträgt die Hallkonstante $8.9 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$. Der Literaturwert liegt somit knapp außerhalb des Fehlerbereichs.

Ladungsträgerkonzentration

Die Ladungsträgerkonzentration kann man aus der bereits ermittelten Hallkonstante bestimmen.

$$R_H = \frac{1}{n \cdot e}$$

$$n = \frac{1}{R_H \cdot e}$$

$$= \frac{1}{8.27 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

$$= 7.55 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Für den Fehler:

$$\Delta n = 7.55 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{0.61 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}}{8.27 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}}$$

$$= 0.56 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Die Ladungsträgerkonzentration kann mit

$$n = (7.55 \pm 0.56) \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

angegeben werden.

Anzahl der Leitungselektronen pro Atom

Die Dichte von Silber beträgt

$$\rho_{Ag} = 10\,490 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Die Molare Masse von Silber beträgt

$$M_{Ag} = 0.1079 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$m_{Ag} = \rho_{Ag} \cdot V$$

$$N_{Ag} = \frac{m_{Ag}}{M_{Ag}} \cdot N_A$$

Zahl der Silberatome

$$z = \frac{n \cdot V}{N_{Ag}}$$

Ladungsträger pro Atom

$$= \frac{n \cdot M_{Ag}}{\rho_{Ag} \cdot N_A}$$

$$= \frac{7.55 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot 0.1079 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{10\,490 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}$$

$$= 1.28$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta z = 1.28 \cdot \frac{0.56 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}}{7.55 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}} \\ \approx 0.09$$

Somit kann man das Verhältnis aus Ladungsträgern und Atomen angeben mit:

$$z = 1.28 \pm 0.09$$

Driftgeschwindigkeit

Für die Driftgeschwindigkeit v gilt:

$$v = \frac{I \cdot s}{n \cdot V \cdot e} \\ = \frac{I}{n \cdot h \cdot d \cdot e}$$

Die Driftgeschwindigkeit ist abhängig von der Stromstärke.

$$v(I) = \frac{1}{n \cdot h \cdot d \cdot e} \cdot I$$

Das Silberplättchen hat eine Höhe von

$$h = (0.020 \pm 0.001) \text{ m}$$

Mit unseren Messwerten ergibt sich für den Faktor:

$$\begin{aligned} \frac{v}{I} &= \frac{1}{n \cdot h \cdot d \cdot e} \\ &= \frac{1}{7.55 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot 0.02 \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \\ &= 8.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s A}} \end{aligned}$$

Der Fehler beträgt

$$\begin{aligned} \Delta \frac{v}{I} &= 8.27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s A}} \cdot \sqrt{\left(\frac{0.0001 \text{ m}}{0.02 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{0.56 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}}{7.55 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}}\right)} \\ &= 0.62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s A}} \end{aligned}$$

Die Proportionalitätskonstante für die Driftgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Querstromstärke ist also:

$$\frac{v}{I} = (8.27 \pm 0.62) \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s A}}$$

2.2 Germaniumplättchen

2.2.1 Material

- Germaniumplättchen
- Labornetzteil für den Querstrom (bis 30mA)
- U-förmiger Dauermagnet
- Mobile-CASSY mit Spannungsmessgerät
- Multimeter für die Stromstärkemessung
- Teslameter

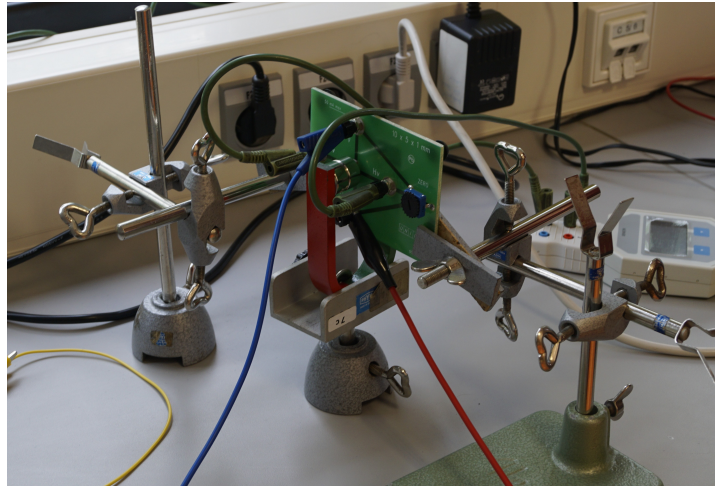


Abbildung 2.4: Versuchsaufbau zur Messung mit dem Germaniumplättchen

2.2.2 Durchführung

Da das Germaniumplättchen nicht gut in den Elektromagneten gepasst hat, wurde für diesen Versuch ein Dauermagnet verwendet. Das Plättchen wurde mit Stativmaterial im Magnetfeld des Dauermagneten befestigt. Das Labornetzteil wurde an die Anschlüsse für den Querstrom angeschlossen; das Multimeter wurde ebenfalls in diesen Stromkreis eingebaut und auf „mA“ gestellt. Das CASSY wurde an die Anschlüsse für die Hallspannung angeschlossen.

Mit dem Teslameter wurde die Stärke des Magnetfeldes des Dauermagneten bestimmt. Dann wurde der Magnet entfernt, der Querstrom auf 30 mA gestellt und das Potentiometer am Germaniumplättchen so eingestellt, dass das Spannungsmessgerät 0 V anzeigt. Dann wurde der Magnet wieder eingesetzt.

Bei der Messung wurde die Querstromstärke in 1 mA-Schritten bis auf 0 mA verringert und die jeweils zugehörige gemessene Hallspannung notiert.

2.2.3 Messergebnisse

Die Magnetfeldstärke betrug $B = 705 \text{ mT}$. Das Plättchen hat eine Dicke von $d = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Querstrom I_Q in mA	Hallspannung U_H in mV
1	7.6
2	16.9
3	26.2
4	35.4
5	44.6
6	54.2
7	63.5
8	72.7
9	82.0
10	91.2
11	100.7
12	109.8
13	119.0
14	128.5
15	137.2
16	146.8
17	155.5
18	164.5
19	173.8
20	183.8
21	191.8
22	200.5
23	209.2
24	218.3
25	227.2
26	236.3
27	244.8
28	259.5
29	263.0
30	272.0

Abbildung 2.5: Messwerte mit Germanium

Für eine Fehlerrechnung werden folgende Fehler zu Grunde gelegt:

$$I_Q : \pm 0.5 \text{ mA}$$

$$U_H : \pm 1 \text{ mV}$$

$$B : \pm 6 \text{ mT}$$

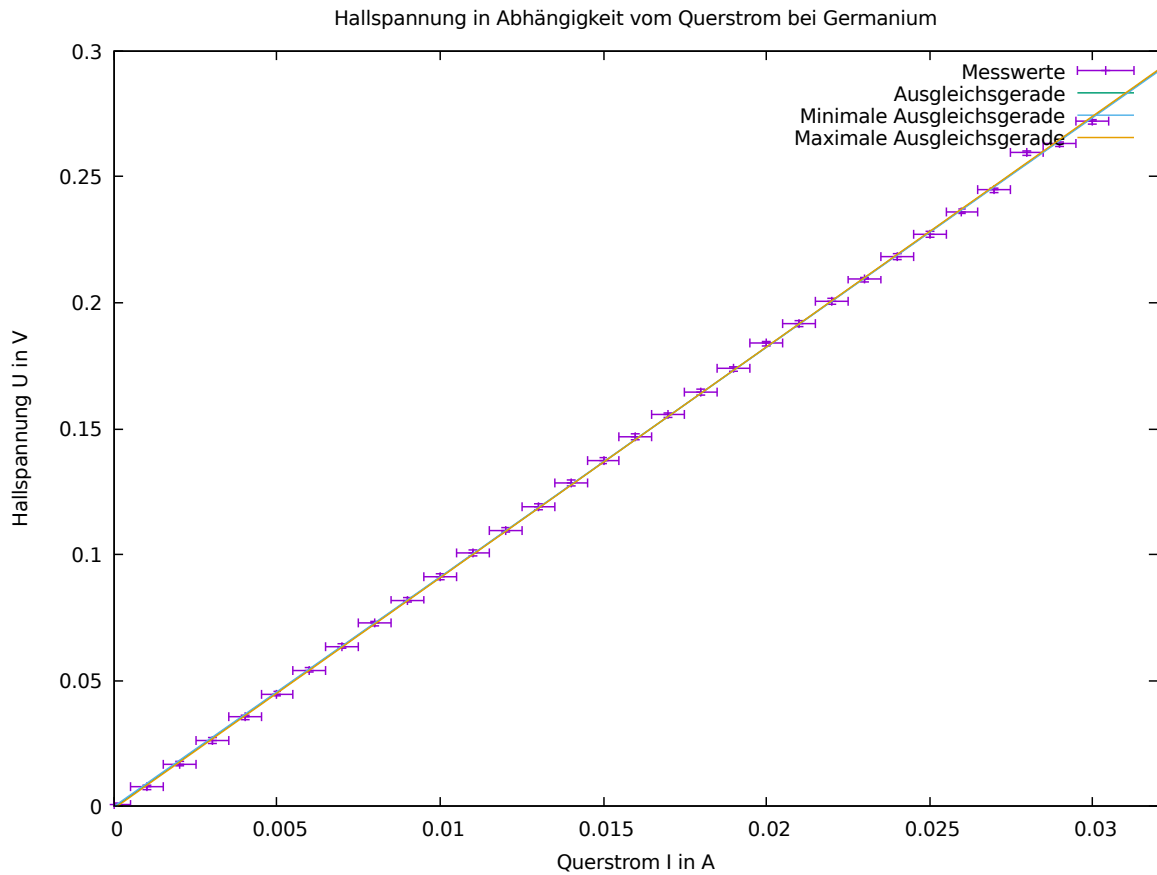


Abbildung 2.6: Graphische Darstellung und Auswertung der Messwerte mit Germanium

2.2.4 Auswertung

Die lineare Regression mit `GNUplot` liefert

$$m = (9.140 \pm 0.002) \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Hallkonstante

$$\begin{aligned}
 R_H &= \frac{m \cdot d}{B} \\
 &= \frac{9.140 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0.705 \text{ T}} \\
 &= 1.30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}
 \end{aligned}$$

Der Fehler beträgt:

$$\begin{aligned}\Delta R_H &= 1.30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \cdot \sqrt{\left(\frac{0.002 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{9.140 \frac{\text{V}}{\text{A}}}\right)^2 + \left(\frac{0.006 \text{ T}}{0.705 \text{ T}}\right)^2} \\ &= 1.10 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}\end{aligned}$$

Die Hallkonstante des Germaniumplättchens beträgt:

$$R_H = (1.30 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$$

In der Anleitung des Germaniumplättchens ist die Hallkonstante als $0.5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$ bis $1.5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$ angegeben. In diesem Bereich liegt auch unser Messergebnis.

Ladungsträgerkonzentration

$$\begin{aligned}n &= \frac{1}{R_H \cdot e} \\ &= \frac{1}{1.30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \\ &= 4.80 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

Der Fehler beträgt:

$$\begin{aligned}\Delta n &= 4.80 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{0.02 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}}{1.20 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}} \\ &= 8.01 \cdot 10^{18} \frac{1}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

Die Ladungsträgerkonzentration im Germanium-Halbleiterplättchen beträgt:

$$n = (4.80 \pm 0.08) \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Driftgeschwindigkeit

Die Höhe des Plättchens beträgt

$$h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\frac{v}{I} &= \frac{1}{n \cdot h \cdot d \cdot e} \\ &= \frac{1}{4.80 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \\ &= 2600.91 \frac{\text{m}}{\text{s A}}\end{aligned}$$

Der Fehler beträgt:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{v}{I} &= 2600.91 \frac{\text{m}}{\text{s A}} \cdot \frac{0.08 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}}{4.80 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}} \\ &= 43.34 \frac{\text{m}}{\text{s A}}\end{aligned}$$

Die Proportionalitätskonstante für die Driftgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Querstromstärke beträgt:

$$\frac{v}{I} = (2600.92 \pm 43.34) \frac{\text{m}}{\text{s A}}$$

3 Fehlerbetrachtung

Insgesamt sind die Messwerte gut. Sie bestätigen den entsprechenden Zusammenhang von Querstrom und Hallspannung bei konstantem B-Feld. Jedoch bereitete vor allem der Versuch mit dem Silberplättchen einige Schwierigkeiten bei der Genauigkeit der Messung.

3.1 Silberplättchen

Zunächst war es schwierig, ein Messgerät für die sehr hohe Stromstärke des Querstroms zu finden. Alle vorhandenen „normalen“ Amperemeter sind bis max. 10 A ausgelegt. Das Labornetzteil hat zwar eine eingebaute Anzeige für die Stromstärke, diese sind allerdings erfahrungsgemäß nicht sehr genau. Schließlich haben wir die Stromstärke mit der Stromzange gemessen. Sie misst das Drehmagnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter. Es kann daher sein, dass durch den Elektromagneten Messfehler entstanden sind.

Auch die Messung der sehr kleinen Hallspannung war problematisch. Die Mikrovoltbox hat nur eine Auflösung von 1 μV . Da die Spannung selbst bei 20 A Querstrom nur 6 μV beträgt, sind die Fehler sehr hoch.

Die ermittelte Hallkonstante liegt dennoch sehr nahe am in der Anleitung angegebenen Wert.

3.2 Germaniumplättchen

Die Messung mit dem Germaniumplättchen ist wesentlich genauer möglich, da zum einen die geringer Querstromstärke mit einem Multimeter genau gemessen werden kann, und zum anderen die Hallspannung im mV-Bereich liegt. Sie kann also ebenfalls genauer bestimmt werden. Dies führt zu einem sehr kleinen Fehler bei der ermittelten Hallkonstante.

Die daraus berechnete Ladungsträgerkonzentration liegt allerdings nicht im Bereich, der in der Anleitung angegeben ist. Dort werden für n $6 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}$ bis $9 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}$ angegeben. Unser Wert beträgt $n = (4.80 \pm 0.08) \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{m}^3}$. Da der Wert für die Hallkonstante allerdings sehr gut innerhalb des in der Anleitung angegebenen Bereichs liegt und für die Berechnung der Ladungsträgerkonzentration außer R_H nur Konstanten und Angaben aus der Anleitung verwendet wurden, gehen wir hier nicht von einem Fehler aus.