

Versuche am Federschwerependel

Leon Bentrup

3. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Ruhelage	3
1.2	Lineares Kraftgesetz	4
1.3	Bewegungsgleichung	4
1.4	Periodendauer der Schwingung	5
2	Versuch	6
2.1	Material	6
2.2	Aufbau	7
2.3	Durchführung	8
2.3.1	Bestimmung der Federhärte	8
2.3.2	Aufzeichnen der Schwingung	8
2.4	Messergebnisse	9
2.4.1	Federhärtebestimmung	9
2.4.2	Variieren der Amplitude	10
2.4.3	Variieren der Masse	10
2.4.4	Variieren der Federhärte	11
2.5	Auswertung	11
2.5.1	Bestimmung der Federhärten	11
2.5.2	Zusammenhang Amplitude und Masse	13
2.5.3	Zusammenhang Periodendauer und Masse	13
2.5.4	Bestimmung der Federhärte aus dem funktionalen Zusammenhang	15
2.5.5	Zusammenhang Periodendauer und Federhärte	16
2.5.6	Bestimmung der Masse aus dem funktionalen Zusammenhang	17
3	Fehlerbetrachtung	18
3.1	Messmethode BMW	18
3.2	Federn	18
3.3	Schwingende Masse	18

1 Theorie

1.1 Ruhelage

Befestigt man das obere Ende einer Feder und hängt an des untere Ende ein Massestück der Masse m , so dehnt sich die Feder aus, bis sich ein Kräftegleichgewicht zwischen der Gewichtskraft des Massestücks F_G und der entgegengesetzten Kraft der Feder (Federkraft F_F) einstellt. Das Massestück liegt dann in der Ruhelage.

$$F_G = F_R$$

Vernachlässigt man die Masse der Feder, so gilt gemäß dem Hook'schen Gesetz für die Federkraft:

$$F_R = D \cdot s$$

D ist dabei die Federhärte der Feder. s ist die Auslenkung der Feder. Die Auslenkung ist die Differenz zwischen der Länge, die die Feder hat, wenn keine Kraft auf sie wirkt und der Länge, die sie unter der Krafteinwirkung hat.

In der Ruhelage ist die Feder um eine gewisse Länge, s_0 ausgelenkt.

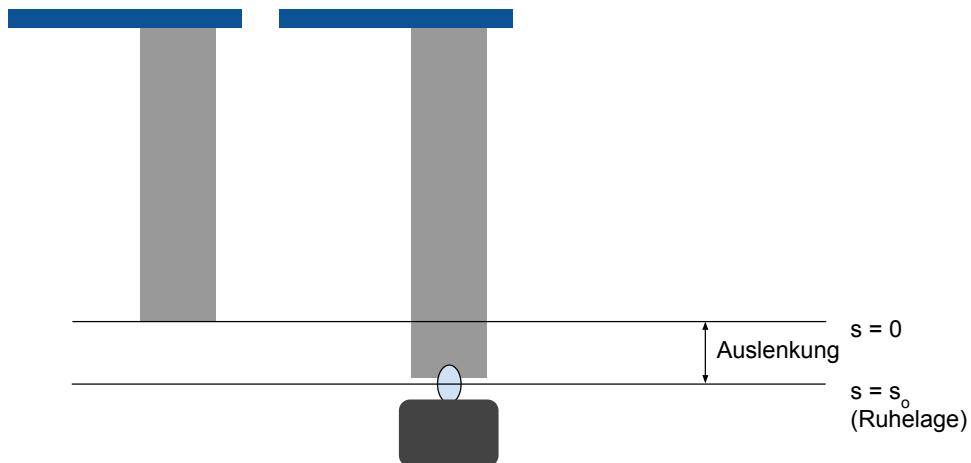


Abbildung 1.1: Ruhelage am Federschwerependel

1.2 Lineares Kraftgesetz

Wird das Massestück aus der Ruhelage heraus ausgelenkt, wirkt nach dem Hook'schen Gesetz eine entsprechend höhere Federkraft. Die Gewichtskraft bleibt unverändert.

$$F_{F2} = D \cdot (s_0 + s)$$

Zusammen mit der Gewichtskraft des Massestücks ergibt sich als Resultierende Kraft die Rückstellkraft F_R auf das Massestück.

$$\begin{aligned} F_R &= F_{F2} - F_G \\ F_G &= F_F \\ &= D \cdot s_0 \\ F_R &= D \cdot (s_0 + s) - D \cdot s_0 \\ &= D \cdot s \end{aligned}$$

Da die Rückstellkraft in die entgegengesetzte Richtung der Elongation (Auslenkung aus der Ruhelage) zeigt und in der obigen Herleitung jeweils mit dem Betrag der Kraft gerechnet wurde, muss das Vorzeichen der Rückstellkraft noch umgedreht werden.

$$F_R = -D \cdot s$$

Da die Rückstellkraft einem linearen Kraftgesetz folgt, also proportional zur Elongation ist ($F_R \sim s$), folgt das Federpendel einer harmonischen Schwingung.

1.3 Bewegungsgleichung

Es soll eine Bewegungsgleichung für das schwingende System hergeleitet werden.

Für die Rückstellkraft F_R gilt:

$$F_R = m \cdot a$$

Dabei ist m die Masse des gesamten schwingenden Systems, also das Massestück, sowie Teile der Feder. Letztere wird jedoch vernachlässigt, also ist m die Masse des Massestücks.

Setzt man obige Gleichung in das lineare Kraftgesetz ein, erhält man die Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung.

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -D \cdot s \\ m \cdot \ddot{s} &= -D \cdot s \\ \ddot{s} &= -\frac{D}{m} \cdot s \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für diese Differenzialgleichung ist:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

\hat{s} ist die maximale Auslenkung aus der Ruhelage, φ ist von der Position des Pendels zum Zeitpunkt $t = 0\text{ s}$ abhängig.

1.4 Periodendauer der Schwingung

Aus der Kreisfrequenz ω folgt die Periodendauer T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

2 Versuch

Beim Versuch wurden Federn mit verschiedenen Federhärten mit verschiedenen Massen und verschiedenen Amplituden zum Schwingen gebracht. Mit einem Messwerterfassungssystem (CASSY) wurde die Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit aufgezeichnet.

Von den verschiedenen Federn wurde jeweils durch Messen der Auslenkung, die durch Massestücke verschiedener Masse hervorgerufen wird, die Federhärte bestimmt.

Anhand der Messwerte wurde

- der Einfluss der Amplitude auf die Periodendauer
- der Zusammenhang $T \sim \sqrt{m}$
- der Zusammenhang $T \sim \frac{1}{D}$

untersucht.

Zusätzlich wurde anhand der aufgezeichneten Daten die schwingende Masse bestimmt, und mit der Masse des Massestücks verglichen.

Zu den Ergebnissen wurde jeweils eine Fehlerbetrachtung angestellt.

2.1 Material

- Verschiedene Federn
- Massestücke bekannter Masse
- Stativmaterial
- CASSY mit Laptop und BMW-Box
- Faden und leichtes Gegengewicht
- Maßstab

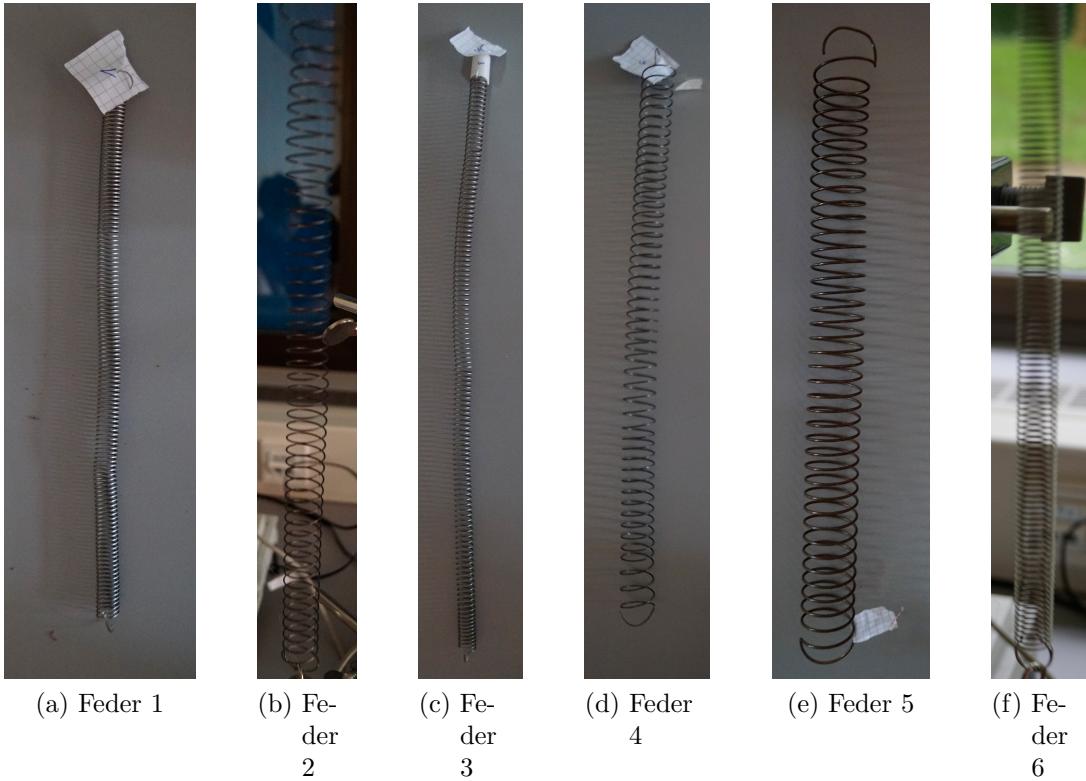


Abbildung 2.1: Federn

2.2 Aufbau

Zunächst wurde mit dem Stativmaterial eine geeignete Befestigung für die Federn aufgebaut. Die Feder hängt oben an einem Haken, unten wird sie nicht befestigt, so dass sie frei schwingen kann. Neben der Feder wird der Bewegungs-Messwandler (BMW) angebracht. Das leichte Gegengewicht wurde an den Faden gebunden, dieser wurde über den BMW gelegt und sein anderes Ende an die Unterseite der Feder gebunden. Ebenfalls an die untere Seite der Feder wurde das Massestück angehängt. Der BMW wird an das CASSY gesteckt, dieses wird an den Laptop angeschlossen.

Zur Messung der Federhärte wurde ebenfalls ein Stativ mit Haken aufgebaut, an den die Oberseite der Feder gehängt wurde, an die Unterseite wurden verschiedene Massestücke gehängt. Neben der Feder wurde ein Maßstab befestigt, um die Auslenkung der Feder ablesen zu können.

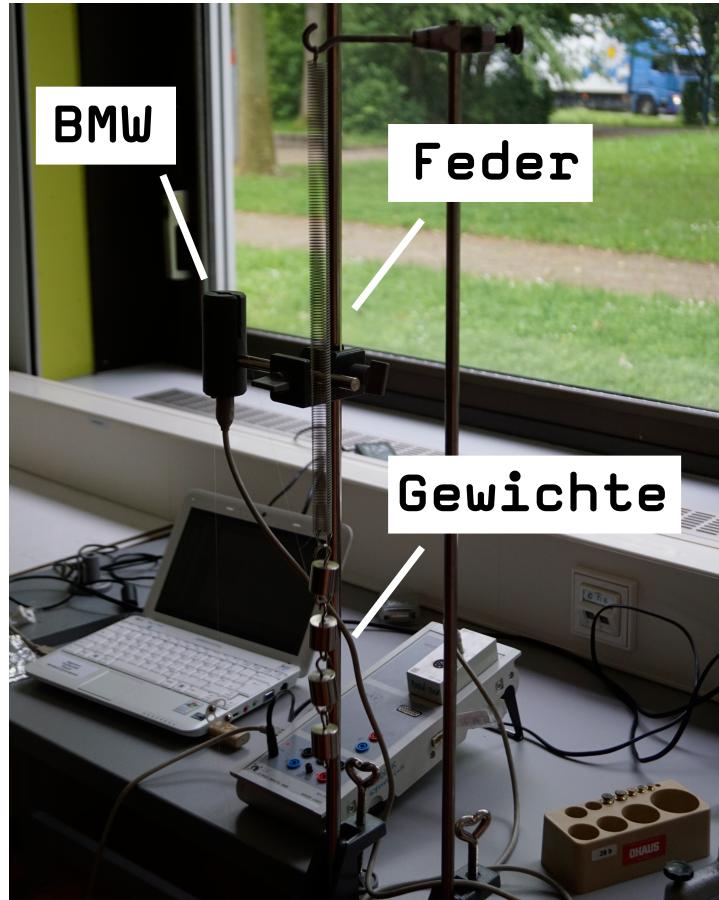


Abbildung 2.2: Versuchsanordnung

2.3 Durchführung

2.3.1 Bestimmung der Federhärte

An die Feder wurden nach und nach Massestücke verschiedener Masse gehängt. Am Maßstab wurde jeweils die Auslenkung, also die Strecke, um die sich die Feder verlängert, wenn das Gewicht angehängt wurde, abgelesen und zusammen mit der Masse notiert.

2.3.2 Aufzeichnen der Schwingung

Die entsprechende Masse wurde an die Feder gehängt. Der BMW wurde in der Ruhelage des Feder-Masse-Systems auf Null gestellt. Dann wurde dass Massestück nach unten ausgelenkt. Am CASSY konnte abgelesen werden, wie weit die Feder ausgelenkt wurde. Nachdem die gewünschte Auslenkung (und damit die Amplitude) eingestellt war, wurde die Feder losgelassen und möglichst schnell in CASSY die Aufzeichnung gestartet. Anhand der aufgezeichneten Daten konnte später die Periodendauer durch abzählen mehrerer Perioden einfach und in Ruhe erfolgen.

Feder1_250g_30mm.csv

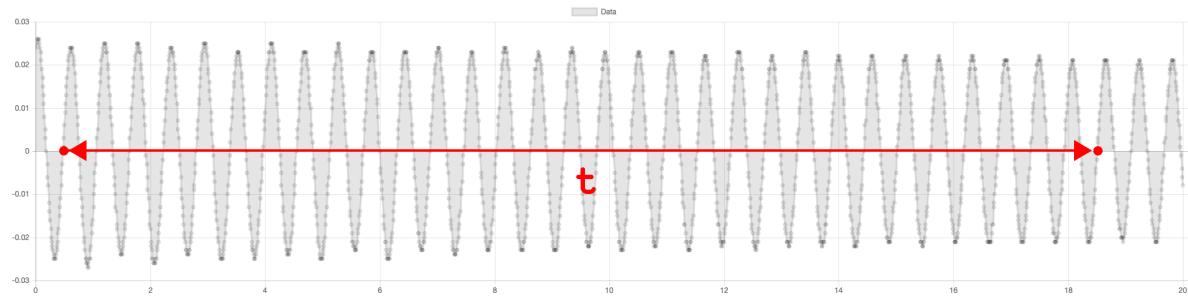


Abbildung 2.3: Grafische Darstellung einer CASSY-Aufzeichnung

2.4 Messergebnisse

2.4.1 Federhärtebestimmung

m in g	Feder 1	Feder 2	Feder 3	Feder 4	Feder 5	Feder 6
0	0	0	0	0	0	0
100	32	57	29	54	48	88
200	80	115	65	111	77	180
300	96	170	104	167	104	271
500	160	280	191	277	222	451

Abbildung 2.4: Masse und Auslenkung verschiedener Federn in mm

2.4.2 Variieren der Amplitude

Feder	Masse m in g	Amplitude \hat{s} in m	Periodendauer T in s
1	100	10	0.375
1	100	20	0.370
1	100	30	0.371
2	150	20	0.598
2	150	30	0.598
2	150	50	0.599
1	200	30	0.523
1	200	20	0.524
1	200	40	0.522
1	200	50	0.525
6	200	30	0.874
6	200	70	0.873
2	200	30	0.684
4	200	30	0.678

Abbildung 2.5: Periodendauer bei verschiedenen Amplituden

2.4.3 Variieren der Masse

Gemessen wurde jeweils mit einer Startauslenkung von $s_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ m.

Masse m in g	\sqrt{m}	Periodendauer T in s	Frequenz f in Hz
150	12.247	0.456	2.194
200	14.142	0.523	1.910
250	15.811	0.581	1.720
300	17.321	0.636	1.573
350	18.708	0.685	1.460
400	20.000	0.731	1.368
450	21.213	0.774	1.291
500	22.361	0.817	1.224

Abbildung 2.6: Messwerte mit verschiedenen Massen an Feder 1, $D = (30.86 \pm 2.08) \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Masse m in g	\sqrt{m}	Periodendauer T in s	Frequenz f in Hz
50	7.071	0.365	2.738
70	8.367	0.423	2.362
100	10.000	0.496	2.014
120	10.954	0.540	1.853
150	12.247	0.598	1.673
170	13.038	0.634	1.578
200	14.142	0.684	1.462
220	14.832	0.716	1.397
250	15.811	0.760	1.316
270	16.432	0.791	1.265

Abbildung 2.7: Messwerte mit verschiedenen Massen an Feder 2, $D = (17.52 \pm 0.12) \frac{\text{N}}{\text{m}}$

2.4.4 Variieren der Federhärte

Feder	Federhärte D in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	ΔD in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Periodendauer T in s	Frequenz f in Hz
1	30.86	2.08	0.523	1.910
2	17.52	0.12	0.684	1.462
3	25.46	1.13	0.527	1.897
4	17.66	0.07	0.678	1.475
5	22.98	2.11	0.528	1.894
6	10.85	0.03	0.874	1.144

Abbildung 2.8: Messwerte mit verschiedenen Federn bei gleicher Masse $m = 200 \text{ g}$

2.5 Auswertung

2.5.1 Bestimmung der Federhärten

Aus den gemessenen Ausdehnungen kann mit dem Hook'schen Gesetz die Federhärte bestimmt werden.

$$F = D \cdot s$$

$$D = \frac{F}{s}$$

$$= \frac{m \cdot g}{s}$$

Trägt man die Messwerte (siehe 2.4.1) in ein Masse-Auslenkungs-Diagramm ein und bestimmt die Steigung der Ausgleichsgeraden, erhält man:

$$k = \frac{s}{m}$$

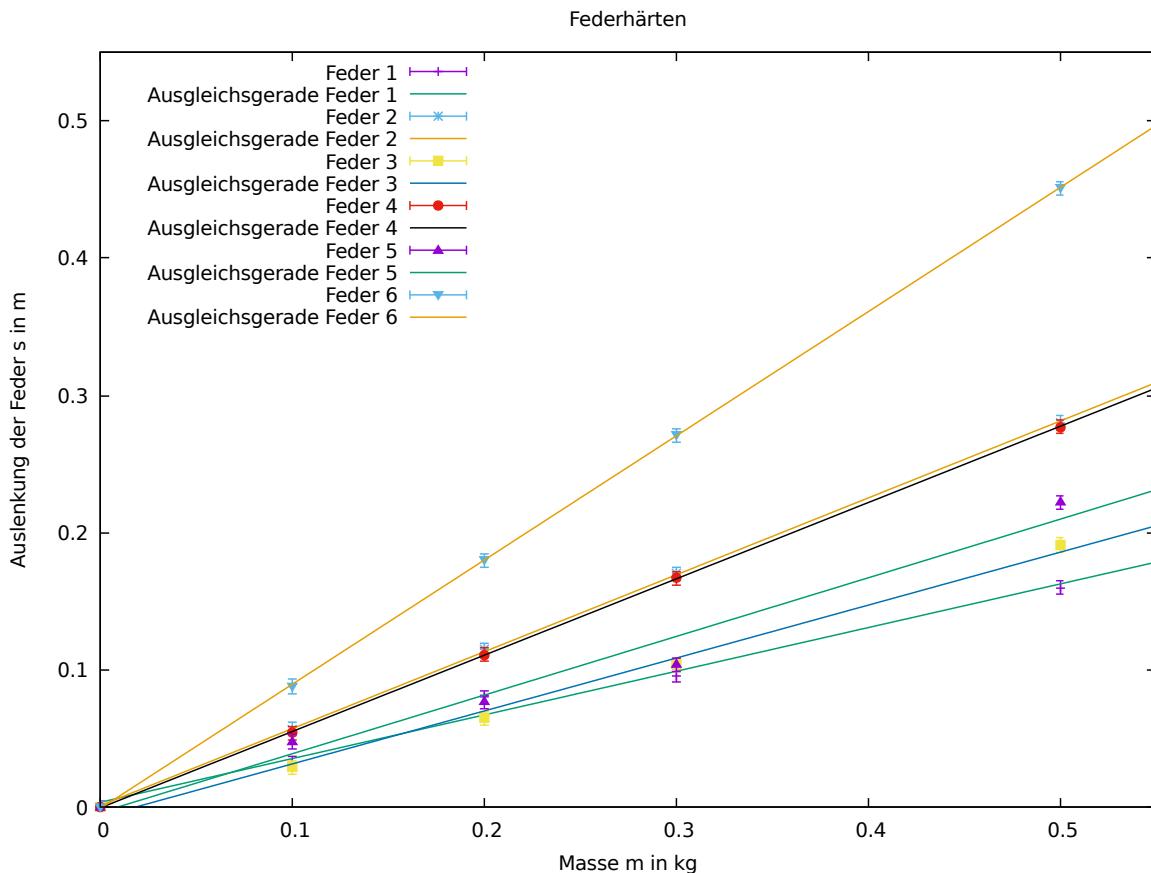


Abbildung 2.9: Masse-Auslenkungs-Diagramm

Setzt man die Steigung in obige Gleichung ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
 s &= k \cdot m \\
 D &= \frac{m \cdot g}{k \cdot m} \\
 &= \frac{g}{k}
 \end{aligned}$$

Feder	k in $\frac{\text{m}}{\text{kg}}$	Fehler Δk in $\frac{\text{m}}{\text{kg}}$	D in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Fehler ΔD in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$
1	0.317	0.022	30.86	2.08
2	0.560	0.004	17.52	0.12
3	0.385	0.017	25.46	1.13
4	0.556	0.003	17.66	0.07
5	0.427	0.040	0.317	2.11
6	0.904	0.003	10.85	0.03

Der Fehler der Steigung Δk kann von GNUPlot ermittelt werden, indem der Fehler

$$\Delta s = \pm 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

angenommen wurde. Die Masse wurde als exakt angenommen.

D ist durch ein Produkt (Faktor $\frac{1}{g}$) von k abhängig, daher ist der relative Fehler gleich. (Der Ortsfaktor wird als exakt angenommen).

$$\Delta D = D \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

Für den Ortsfaktor wurde der Wert

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

angenommen.

2.5.2 Zusammenhang Amplitude und Masse

Aus den Messwerten in 2.4.2 kann man sehen, dass die Periodendauern bei den Messwertgruppen, bei denen alle Faktoren, außer der Amplitude gleich sind, nahezu identisch sind. Die Amplitude, oder Startauslenkung, hat keinen Einfluss auf die Periodendauer.

2.5.3 Zusammenhang Periodendauer und Masse

Für die Periodendauer gilt

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{D}}$$

Damit gilt $T \sim \sqrt{m}$ mit der Proportionalitätskonstante

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

Aus den Messwerten (siehe 2.4.3) ergeben sich folgende Schaubilder:

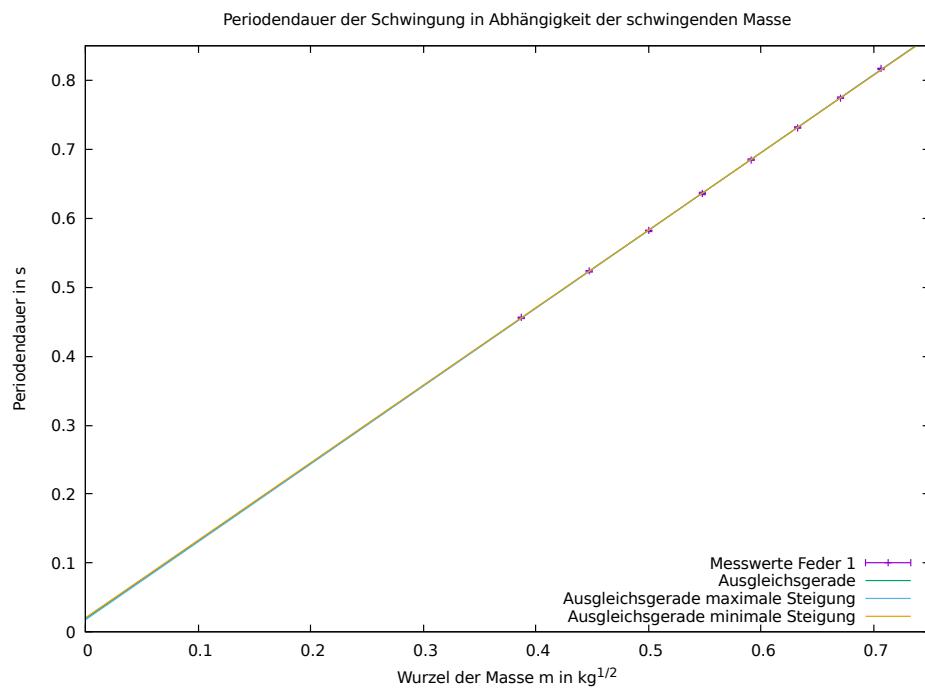


Abbildung 2.10: \sqrt{m} -T-Diagramm von Feder 1

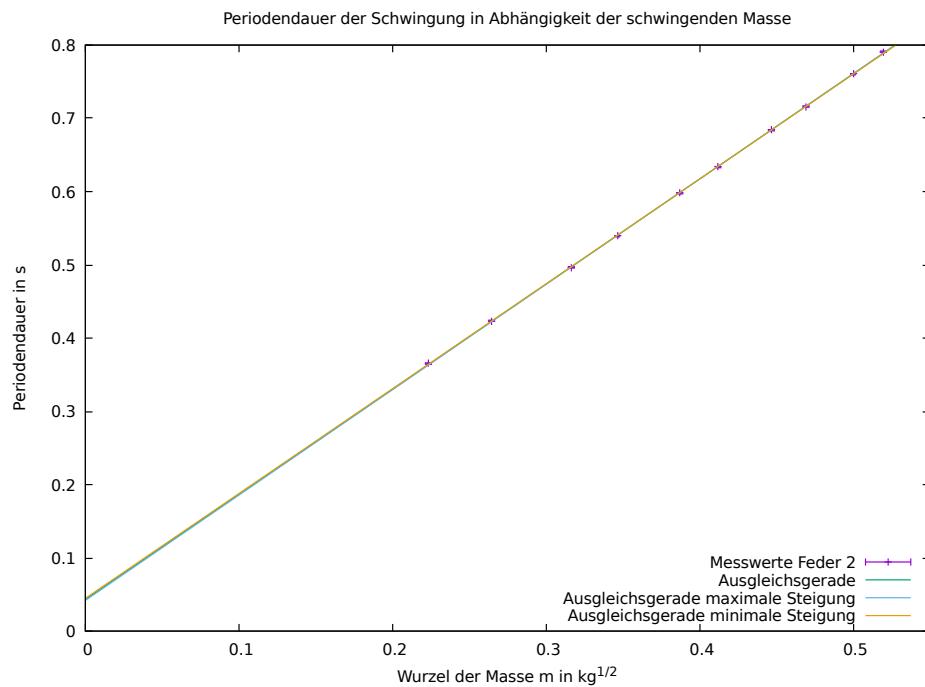


Abbildung 2.11: \sqrt{m} -T-Diagramm von Feder 2

In den Schaubildern sieht sich der $T \sim \sqrt{m}$ - Zusammenhang bestätigt. GNUMplot gibt

den Fehler der Steigung mit unter 1% an.

2.5.4 Bestimmung der Federhärte aus dem funktionalen Zusammenhang

Die Steigung des Graphen ergibt

$$k = \frac{T}{\sqrt{m}}$$

Setzt man sie in die Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

ein erhält man:

$$\begin{aligned}\sqrt{m} &= \frac{T}{k} \\ T &= 2\pi \frac{T}{k \cdot \sqrt{D}} \\ \sqrt{D} &= \frac{2\pi}{k} \\ D &= \frac{4\pi^2}{k^2}\end{aligned}$$

Für den Fehler erhält man durch Ableiten der obigen Funktion für D:

$$\Delta D = \frac{8\pi^2}{k^3} \cdot \Delta k$$

	k in $\text{s}\sqrt{\text{kg}}^{-1}$	Δk in $\text{s}\sqrt{\text{kg}}^{-1}$	D in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	ΔD in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	D_D in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	ΔD_D in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$
1	1.126	0.003	31.130	0.145	30.86	2.08
2	1.433	0.004	19.214	0.097	17.52	0.12

Abbildung 2.12: Ermittelte Werte für D , sowie Vergleich mit direkt gemessener Federhärte D_D

Die errechnete Steigung liegt bei Feder 1 im Bereich des Messfehlers, bei Feder 2, jedoch nicht. Eine Ursache dafür könnte ein in der Fehlerrechnung nicht berücksichtigter systematischer Fehler, oder ein Falsch abgeschätzter Messfehler sein.

2.5.5 Zusammenhang Periodendauer und Federhärte

Für die Periodendauer gilt

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{D}}$$

Damit gilt $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$ mit der Proportionalitätskonstante

$$k = 2\pi\sqrt{m}$$

Aus den Messwerten (siehe 2.4.4) ergibt sich folgendes Schaubild:

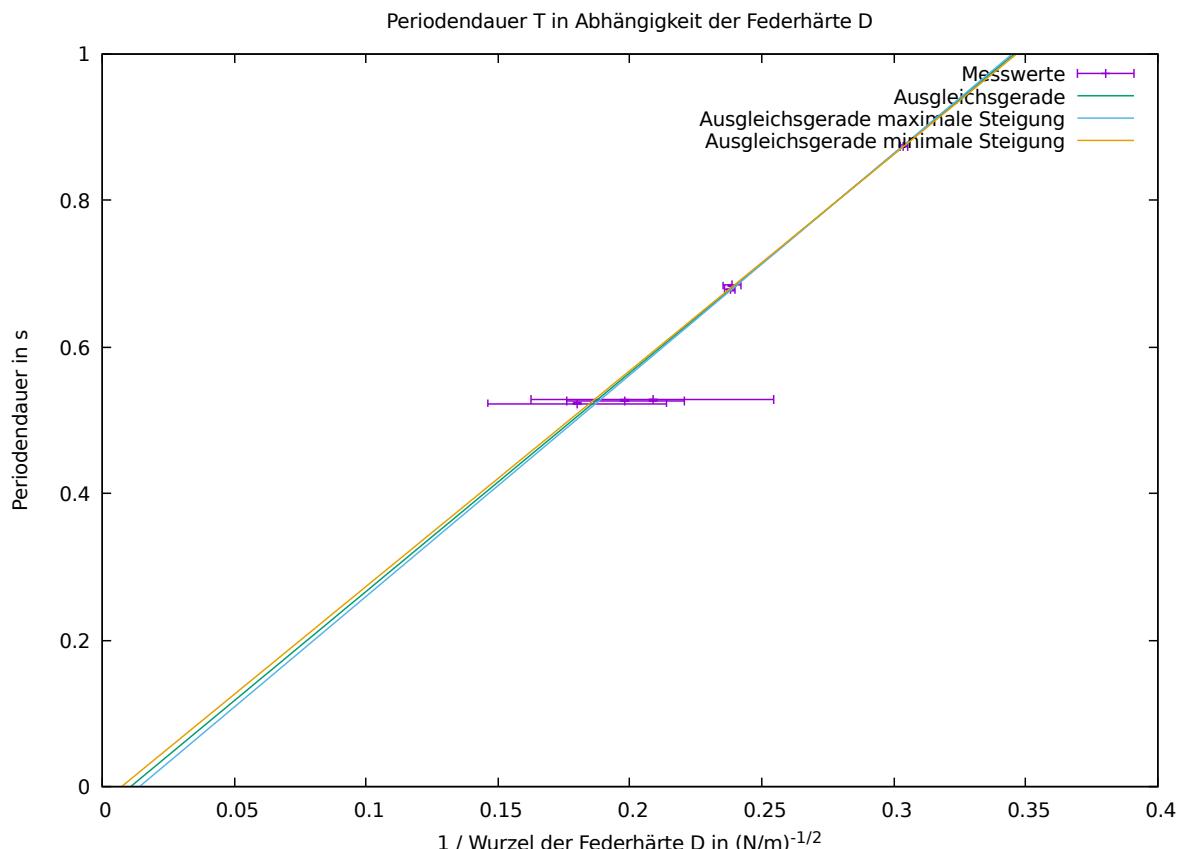


Abbildung 2.13: Periodendauer in Abhängigkeit zur Federhärte

GNUpot gibt für die Gerade einen Fehler von etwa 1.5%. Die Proportionalität $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$ wird somit von unseren Messwerten bestätigt.

2.5.6 Bestimmung der Masse aus dem funktionalen Zusammenhang

Die Steigung des Graphen ergibt:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{D} \cdot T \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \\ k &= 2\pi \sqrt{m} & = (2.985 \pm 0.038) \sqrt{\text{kg}} \end{aligned}$$

Für die Masse gilt also:

$$m = \frac{k^2}{4\pi^2}$$

Für den Fehler:

$$\Delta m = \frac{k}{2\pi^2} \Delta k$$

Die errechnete Masse beträgt:

$$m = (225 \pm 6) \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Diese Masse ist größer als die Masse des Massestücks alleine (200 g), da hier noch die Masse der Feder berücksichtigt wird.

3 Fehlerbetrachtung

3.1 Messmethode BMW

Durch die Aufhängung mit dem BMW war die Schwingung nicht mehr wirklich „frei“. Das bedeutet, dass die Schwingung durch die Reibung am BMW, und durch das Gegen Gewicht gedämpft wird. Dies hat jedoch keine Auswirkung auf die Periodendauer, bei der es um der Messung ging. Außerdem kann es passieren, dass der Faden auf dem BMW „durchrutscht“, dass sich das Pendel also bewegt, sich das Rad des BMW aber nicht dreht.

3.2 Federn

Für den Versuch ist es natürlich wichtig, dass nur Federn verwendet werden, für die das Hook'sche Gesetz gilt. Für manche Federn gilt das Hook'sche Gesetz auch nur in einem bestimmtem Bereich. Da dieser Bereich bei den Federn nicht angegeben war, kann es sein, dass ein Teil der Messungen außerhalb dieses Bereichs liegt. Diese Messungen wären dann fehlerhaft.

3.3 Schwingende Masse

Die Vereinfachung, die schwingende Masse zu vernachlässigen ist problematisch. Denn in Wirklichkeit erfährt die Feder natürlich auch eine Gewichtskraft, die einen Einfluss auf die Rückstellkraft hat.