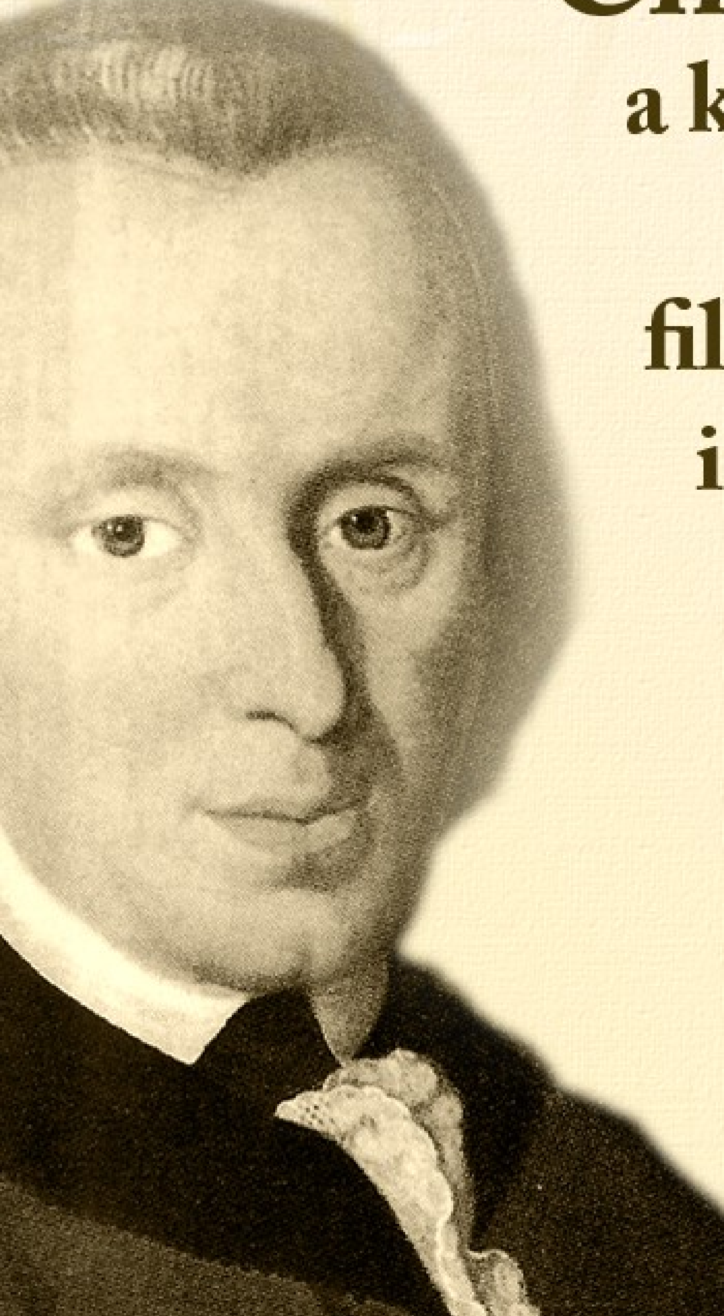


Charles S. Peirce
a kwestia aktualności kantowskiej filozofii matematyki i jej konsekwencji

Maciej Manna
(*UJ*/*AGH*)

Wprowadzenie

- **Jak należy rozumieć stwierdzenie Kanta, że sądy matematyki są syntetyczne?**
- **Co sprawia, że są one syntetyczne?**
- **Jakie jest znaczenie filozofii matematyki Kanta w kontekście współczesnej logiki i aksjomatycznie rozumianej matematyki?**
- **Czy jest ona jedynie historycznym przeżytkiem, czy raczej może zawierać cenne wskazówki dla współczesnej filozofii matematyki?**

Wprowadzenie

1) Prezentacja XX-wiecznych interpretacji kantowskiej syntetyczności matematyki:

a) B. Russell i L. Beck,

b) J. Hintikka;

2) Rekonstrukcja interpretacji C.S. Peirce'a, kwestia jej adekwatności i aktualności;

3) Zarys perspektyw wynikających z przyjęcia powyższej interpretacji.

(zob. **S.-J. Shin [1997].** „Kant's Syntheticity Revisited by Peirce”, *Synthese* 113: 1–41**)**

Źródła syntetyczności

Istnieją dwa możliwe sposoby lokowania syntetyczności:

[A] Niektóre aksjomaty lub definicje matematycz-ne są syntetyczne
[D] Niektóre kroki wnioskowania w ramach dowo-dów matematycznych są syntetyczne.

Jeżeli jedno ze zdań, [A] lub [D], są prawdziwe, to zdania (twierdzenia) matematyki są syntetyczne.

Stanowisko Russella

The Principles of Mathematics **[1903],**
Introduction to Mathematical Philosophy **[1920];**
Por. **M. Friedman**, *Kant and the Exact Sciences* **[1992].**

- **Kant opiera syntetyczność matematyki na [D];**
- **Dwa stanowiska Russella:**

  – *PoM*: matematyka i logika są syntetyczne,

  – *IMP*: matematyka i logika są analityczne (logicyzm)**,**
- **Dla Kanta istotne jest oddzielenie rozumowania w matematyce od analitycznego (filozofia, logika).**

Stanowisko Russella

Argumentacja Russella [R_]:

[R1] Jeśli Kant miałby dostęp do logiki predyka-tów, wtedy nie zaakceptowałby zdania [D];
(zmiana paradygmatu logiki i matematyki po Kancie: teoria kwantyfikatorów, aksjomatyzacja: Peano, Hilbert *etc.*)

[R2] Jeśli Kant nie zaakceptowałby zdania [D], wtedy nie uznałby zdań matematyki za syntetyczne;

[R3] Zatem, jeśli Kant miałby dostęp do logiki predykatów, wtedy nie uznałby zdań matematyki za syntetyczne.

Wniosek: Filozofia matematyki Kanta jest przestarzała!

Stanowisko Becka

Studies in the Philosophy of Kant **[1965];**
Por. **G. Martin,** *Kant's Metaphysics and Theory of Science* **[1955],**
Por. **C. Parsons**, „Kant's Philosophy of Arithmetic" **[1992].**

- **Beck opiera syntetyczność matematyki na [A];**
- **Istotnym elementem jest interpretacja konstrukcji u Kanta, która służy jedynie do tworzenia aksjomatów i definicji.**

Stanowisko Becka

Argumentacja Becka przeciw Russellowi [B_]:

[B1] Jeśli Kant miałby dostęp do logiki predykatów, wtedy nie zaakceptowałby zdania [D];
(pustospełnione; = [R1])

[B2] Kant nie akceptował zdania [D], a mimo to uznawał, że zdania matematyki są syntetyczne.
(przeciwne do [R2])

[B3] Zatem, jeśli Kant miałby dostęp do logiki predykatów, uznałby zdania matematyki za syntetyczne.

Wniosek: Zmiana paradygmatu logiki i matematyki nie ma żadnego wpływu na filozofię matematyki Kanta!

Wstępna ocena dwóch stanowisk

RUSSELL:

+ bierze pod uwagę fakt zmiany paradygmatu logiki,

– redukuje stanowisko Kanta do wytworu ograniczonej wiedzy logicznej i matematycznej;

BECK:

+ nie bierze pod uwagę skutków zmiany paradygmatu,

– uważa stanowisko Kanta za wciąż aktualne,

– trudno wytłumaczyć syntetyczność zdań arytmetyki. (wg Kanta arytmetyka nie ma aksjomatów)

KRV A716-7 / B744-5

Jakkolwiek długo [filozof] medytować będzie nad pojęciem [trójkąta], nigdy nie wytworzy nic nowego... Niech jednak kwestię ową podejmie geometra. Od razu rozpoczyna on konstruując trójkąt ... Tym sposobem, przez łańcuch wnioskowań kierowanych stale intuicją, dochodzi on do w pełni oczywistego i uniwersalnie poprawnego rozwiązania tego problemu.

- **tworzenie konstrukcji gwarantuje syntetyczność danych kroków wnioskowania [por. [D]];**
- **konstruowanie wchodzi w skład „łańcucha wnioskowań” [por. ~[A]];**

KRV B14

Ponieważ wykryto, że wszystkie wnioskowania odbywają się wedle zasady sprzeczności czego domaga się natura każdej apodyktycznej pewności, więc dano się przekonać, że i zasady matematyki uznaje się na na mocy zasady sprzeczności. W tym jednak pomylono się. Twierdzenie syntetyczne bowiem można bez wątpienia zrozumieć i uznać na mocy prawa sprzeczności, ale tylko w ten sposób, że przyjmie się jakieś inne twierdzenie syntetyczne, z którego tamto da się wywnioskować, nigdy zaś wprost samo w sobie.

- **wszystkie kroki wnioskowania przebiegają według (logicznej) zasady sprzeczności (por. ~[D]);**
- **do syntetyczności zdań matematyki potrzebne są więc syntetyczne aksjomaty/definicje (por. [A]);**

Russell i Beck - podsumowanie

- **istotą rozwiązania owych trudności jest kwestia, czy Kant akceptował zdanie [D];**

  (potwierdza to **B744-5**; przeczy zaś temu **B14)**

- **propozycja Becka podąża za B14, jednak konieczne jest wtedy przyjąć niestandardową interpretację znaczenia pojęcia konstrukcji u Kanta;**

- **Russell zaś przyjmuje bardziej stosowne pojęcie konstrukcji, jednak nie jest w stanie uzgodnić w pełni swojego stanowiska z B14.**

Propozycja Hintikki

M.in.: „Kant on the Mathematical Method” **[1967]**;
„Kantian intuition” **[1972]**;
Logic, Language-Games and Information **[1973]**.

- **Próba odnalezienia pośredniego stanowiska, które łączyłoby zalety dwóch poprzednich i pomijało wady;**

- **Za punkt wyjścia przyjmuje, jak Russell, pocho-dzenie syntetyczności matematyki u Kanta z [D];**

- **Wymaga to rozwiązania dwóch głównych kwestii:**

1) Jak możliwe jest uznanie zdania [D] tak, aby nie pociągało za sobą konsekwencji Russella [R1]?

2) Jak możliwe jest pogodzenie zdania [D] z tekstem *Krytyki* we fragmencie B14?

Strukturа dowodu

- Hintikka (1967): Kant przejmuje strukturę dowodu geometrycznego od Euklidesa (wg Proclusa):

(*) wypowiedzenie ogólnego tw. do udowodnienia;

(i) *rozpoczęcie* (rysowany jest konkretny obiekt i jego części są nazywane, aby egzemplifikować ogólne zdanie);

(i*) *definicja* i *specyfikacja* (nie brane pod uwagę);

(ii) *przygotowanie* (kreślenie linii pomocniczych);

(iii) *dowód właściwy* (rozumowanie na tej podstawie);

(*) wypowiedzenie udowodnionego tw. ogólnego.

Struktura dowodu

- Na etapach (i) oraz (ii) wykorzystywane są postulaty (zasady konstrukcji, syntetyczne); natomiast we właściwej części dowodu (iii) – *aksjomaty* (analityczne);
- dwa odmienne sposoby rozumowania w dowodzie;
- dwa znaczenia 'dowodu' u Kanta:
  - – szerokie (jako cała struktura) – w B744-5,
  - – wąskie (jako dowód właściwy) – w B14;
- pokazuje różnice w stosunku do Russella i Becka;
- Shin (1994):

  „Hintikka's most innovative idea is that even after axioms are completely formalized by polyadic logic, there are still different kinds of reasoning used in proofs."

Konstrukcja a syntetyczność

- **Hintikka rozważa akceptowalne dla R i B zdanie:**

[H4] Jeżeli w rozumowaniu musimy skonstruować figurę, wtedy jego rezultat jest syntetyczny.

- **dla interpretacji Russella – pustospełnione;**
- **dla interpretacji Becka – zgodne:**

[B4] = [H4]

[B5] Niektóre aksjomaty/definicje otrzymywane są przez konstruowanie figury;

[B6] Zatem, niektóre aksjomaty/definicje są syntetyczne

(i dalej: co z owych aksjomatów/definicji wynika jest syntetyczne**)**

Konstrukcja a syntetyczność

- **Hintikka (1967):**

… być może pojęcie konstrukcji może zostać utożsamione z określonymi metodami dowodowymi współczesnej logiki.

- **Próbuje więc zastąpić kontrowersyjną tezę [B5] i formułuje dające pożądany, kompromisowy wniosek:**

[H5] W geometrii Euklidesa musimy skonstruować figurę w kroku dowodowym WTW w formalizacji Hilberta potrzebujemy w tym kroku *określonej reguły dowodowej*.

[H6] Zatem, to co jest rezultatem określonej reguły dowodowej współczesnej logiki jest syntetyczne.

Konstrukcja a syntetyczność

- **Wnioski:**
  - **przyjmuje tradycyjną interpretację konstrukcji (zgodną z B744-5);**
  - **może przyjąć zdanie [D], a zarazem odrzucić przesłankę Russella ([R1]) i zastąpić ją jej negacją:**

[H1] Nawet jeśli Kant miałby do dyspozycji logikę predykatów, utrzymałby tezę [D];

- **uznaje, że rozróżnienie Kanta ma znaczenie dla współczesnej logiki i wskazuje na różnicę w dowodach logiki monadycznej i kwantyfikatorowej.**

Formalizacja pojęcia konstrukcji

- Co jest ową *określoną regułą dowodową*?
- Hintikka: reguła instancjacji egzystencjalnej (*existential instantiation rule* [EI]);
- zmiana znaczenia pojęcia 'naoczności' (problemy tekstualne: dyskusja Hintikka–Parsons);
- doprecyzowanie związku konstrukcji i [EI]: Krok dowodowy jest syntetyczny wtw użycie [EI] wprowadza nowe indywiduum, nieobecne w przesłankach;
- wnioski pokrywają się z rozróżnieniem Kanta: logika (monadyczna) nie może „obsłużyć” dowodów syntetycznych, więc istotnie różni się od matematyki (w znaczeniu Kanta)/ logiki predykatów (w znaczeniu współczesnym).

Podsumowanie

Koncepcja Hintikki:

- radzi sobie z problematycznymi tekstami;
- pozwala przenieść zaproponowane przez Kanta rozróżnienie na współczesną geometrię (tj. stosuje się też do symboli) i matematykę;
- wprowadzone doprecyzowanie nie pozwala utożsamić jednoznacznie pojęcia konstrukcji i [EI] jako źródła syntetyczności zdań matematyki – jej zastosowanie jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym;
- nie tłumaczy dlaczego tak się dzieje.

Kant a Peirce

- **Kant jako inspiracja dla Peirce'a;**
- **Krytyka filozofii matematyki Kanta:**
  - **Peirce bardzo mocno akcentuje fakt, że Kant nie miał do dyspozycji logiki predykatów,**
  - **odrzuca stanowczo kantowskie rozróżnienie na zdania syntetyczne i analityczne;**
- **Czy można zaliczyć Peirce'a do stronników Russella?**

Rodzaje rozumowań

- **Istotne podziały rozumowań dedukcyjnych:**
  - **wnioskowe (*corrolarial*),**
  - **teorematyczne (*theorematic*);**
- **Nazywa to *„pierwszym prawdziwym odkryciem…”*;**
- **Bazuje na Euklidesowym rozróżnieniu dowodzonych zdań na wnioski (*corrolaries*) i twierdzenia (*theorems*);**
- **(wg Proclusa) wnioski pojawiają się incydentalnie, jako dodatki, bez zbędnego „roztrząsania” przesłanek; twierdzenia – przeciwnie;**
- **istota różnicy – oczywistość, problemowość.**

Rodzaje rozumowań

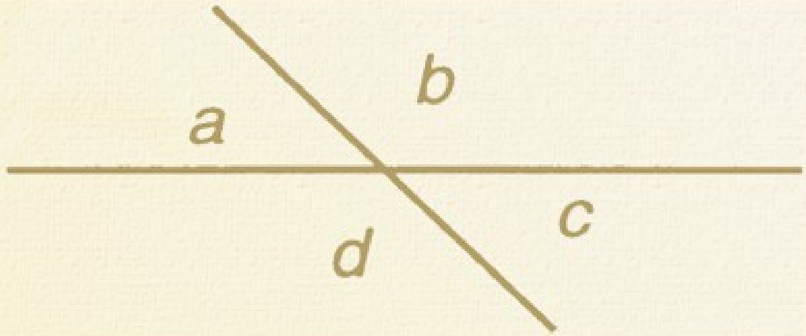
- **Peirce: problem w rozumowaniu teorematycznym tkwi w konieczności „błyskotliwego eksperymentu w wyobraźni:**

W dedukcji wnioskowej konieczne jest jedynie wyobrazić sobie dowolny przypadek, w którym założenia są prawdziwe, aby od razu dostrzec, że również wniosek zachodzi w tym przypadku. Wszystkie zwykłe sylogizmy i niektóre wnioskowania w logice relacji należą do tej klasy.

Dedukcja teorematyczna jest dedukcją, w ramach której konieczne jest, aby eksperymentować w wyobraźni nad obrazem przesłanki, aby z rezultatu takiego eksperymentu dokonać dedukcji wnioskowych ku prawdziwości wniosku.

(NEM 4: 38; por. CP 2.267)

Przykład I: Tw. 15. - wniosek



TWIERDZENIE 15: Jeśli dwie proste się przecinają, tworzą dwa kąty wierzchołkowe równe sobie.

WNIOSEK: Stąd oczywiste jest, że jeśli dwie proste się przecinają, to w miejscu przecięcia utworzą kąty równe czterem kątom prostym.

DOWÓD: Załóżmy sytuację jak na rusunku.

(1) Z twierdzenia 15.: a = c oraz b = d;

(2) Z twierdzenia 13.: a + b = 2R;

(3) Na bazie (1) i (2): a + b + c + d = 4R

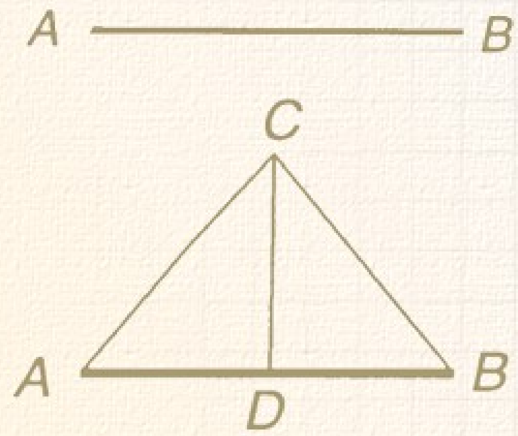
Przykład II

- **Peirce (NEM IV: 49):**

Szczególność rozumowania teorematycznego polega na tym, że rozważa coś, co nie jest wcale założone w pojęciach do tej pory zyskanych, czego *nie sugerują* ani definicje badanych przedmiotów, ani nic innego do tej pory znanego, choć na to *pozwalają*. Np. Euklides dodaje linie w swoich diagramach, które nie są wcale wymagane, ani sugerowane z perspektywy poprzednich twierdzeń.

- **Dodawanie linii jest dobrym przykładem takiego „błyskotliwego eksperymentu”;**
- **Kiedy dodanie linii zmienia status rozumowania na teorematyczne?**

Przykład III: Tw. 10.



TWIERDZENIE 10: Podzielić dany odcinek na pół.

DOWÓD:

**Niech AB będzie danym odcinkiem.
Wymagane jest podzielić dany odcinek na pół.
Skonstruujmy na nim trójkąt równoboczny
ABC (z Tw. 1.) i niech kąt ACB zostanie
podzielony na dwie części prostą CD (z Tw. 9.)**

Twierdzę, że odcinek AB jest podzielony na dwie połowy w punkcie D, ponieważ: skoro AC jest równy CB a CD jest wspólny, to dwa boki, AC i CD są równe bokom BC i CD, odpowiednio; także kąt ACD jest równy BCD; zatem podstawa AD jest równa podstawie BD (na bazie Tw. 4.)

Zatem dany (dowolny) odcinek AB jest podzielony na pół w punkcie D. ■

Źródło teorematyczności

- Źródłem jest wprowadzenie nowego obiektu do konstrukcji /por. Hintikka i [EI]/ (war. konieczny);
- Wymagany jest „błyskotliwy”, nie-trywialny eksperyment (war. wystarczający);
- Nietrywialność polega na konieczności wyboru odpowiedniej konstrukcji, gdy nie mamy w przesłankach zawartego jasnego wskazania, którą mamy wybrać;
- Dotychczas znane pojęcia na taką operację…
  – pozwalają (stąd jest to dedukcja „konieczne”),
  – ale jej nie sugerują (potrzebny eksperyment).

Peirce a Hintikka

- Hintikka uznaje swoją interpretację kantowskiego podziału analityczne/syntetyczne oraz podział rozumowań Peirce'a za identyczne;
- Peirce lokuje źródło nie-trywialności dowodów w konieczności wyboru któregoś z możliwych indywiduów, a nie skupia się jedynie na ich wprowadzaniu (tłumaczy więc dlaczego są one nie-trywialne);
- Peirce zauważa, że nowe indywidua muszą zniknąć;
- Peirce zwraca uwagę na istotność wprowadzania indywiduów w dowodach matematyki (jak Hintikka).

Peirce a podział Kanta

[Kant] niestety uważał, że tradycyjna logika była doskonała i że nie ma już możliwości jej dalszego rozwoju. [CP. 4.37]

Od czasów Kanta zwykło się twierdzić, że dedukcja jedynie prowadzi do tego, co implicite pomyślane jest w przesłankach; a znany podział na sądy analityczne i syntetyczne opera się na tym przekonaniu. [CP 3.641]

... prawdą jest, że [zdania matematyki] w znacznej mierze nie są tym, co [Kant] nazywał sądami analitycznymi; tzn. że predykat, w sensie zamierzonym przez [Kanta], nie zawiera się w definicji podmiotu. [CP 4.232]

Podział [Kanta] na sądy syntetyczne i analityczne reprezentuje tego typu koncepcję rozumowania. Ów podział może zbliżać się do miana słusznego i cennego rozróżnienia; jednak nie może być przyjęte jako trafnie zdefiniowane. [CP 7.52]

Peirce a Russell

- Dwie perspektywy:
  - rozumowanie teorematyczne jest dedukcją, a więc (w sensie Russella) jego wnioski są analityczne,
  - rozumowanie teorematyczne zawiera błyskotliwe eksperymenty (konstrukcje), a więc w kantowskim sensie jego wnioski są syntetyczne;
- Shin: Peirce tam zagłębia się w problem, gdzie Russell uważa sprawę za rozwiązaną i zakończoną;
- Peirce odrzuca podział Kanta na zdania syntetyczne oraz analityczne, ale „przechowuje” znaczenie tego podziału w kontekście współczesnej sobie logiki i matematyki.

Peirce a Russell

- Peirce uznaje, że podział Kanta ma swoje znaczenie w kontekście nowej logiki i matematyki;
- Russell nie dopuszcza rozróżnień w rozumowaniach dedukcyjnych, podczas gdy Peirce uważa, że możliwe jest i wartościowe wyróżniać jego podklasy;
- Różnica między podziałem Kanta i Peirce'a – zakres:
  - Kant lokuje go *między* logiką i matematyką;
  - Peirce – *w ramach* logiki i matematyki.

Podsumowanie

... [dowód teorematyczny] wymaga stworzenia idei, która nie jest całkiem nam narzucona przez terminy zawarte w tezie. Jeśli [Euklides] nie doszedłby do pomysłu rysowania konkretnych linii pomocniczych na swoich diagramach, nie mógłby stworzyć swoich dowodów. Prawo do kreślenia owych linii wypływa zaś z jego postulatów. [NEM 4: 8]

- **RT wymaga wprowadzania nowych indywiduów (Hintikka) i odpowiedniego ich wyboru;**
- **RT jest oparte i wywnioskowane z postulatów (dedukcyjne), ale Kant nie mógł tego dostrzec z punktu widzenia ówczesnej logiki (Russell);**
- **syntetyczność postulatów powoduje syntetyczność wniosków (Beck).**

Meta(?)-rozróżnienie

- **Analizowane zagadnienia skłaniają do rozważenia w badaniach nad historią i współczesnymi problemami filozofii matematyki rozróżnienia dwóch aspektów, w jakich na nią spoglądamy:**
  - **– *statyczny* – jako „zbiór" jej *wytworów*, tzn. dowodów, twierdzeń etc.,**
  - **– *dynamiczny* – jako określony *proces* dochodzenia do owych wytworów.**

Spojrzenie historyczne

WIZJA „DYNAMICZNA”:

- **Obecne w spojrzeniu na matematykę przed „zmianą paradygmatu”, zob. m.in. Euklides, Kant;**
- **Nawet u nowożytnych logicystów (tj. Leibniz, Wolff, Mendelssohn), choć uznają, że diagramy odgrywają jedynie rolę pomocniczą, to jednak nie mają narzędzi by konsekwentnie to pokazać;**
- **Obserwacje Kanta – wg Russella – są wyrazem tej właśnie ówczesnej „nieporadności”.**

Spojrzenie historyczne

WIZJA „STATYCZNA”:

- **Obecne w spojrzeniu na matematykę po „zmianie paradygmatu”, m.in. u Russella, Brouwera i Hilberta;**
- **Owe „zachłyśnięcie” się aksjomatyzacją widać wyraźnie w koncepcjach Russella i Hilberta;**
- **Nawet intuicjonizm/konstruktywizm Brouwera wymagał „statycznej aksjomatyzacji” – *vide* logika INT;**
- **Do dziś dominujące spojrzenie na matematykę.**

Spojrzenie historyczne

w. dynamiczna

● EUKLIDES ● KANT ● FREGE ● PEIRCE ● RUSSELL ● HILBERT ● BROUWER

w. statyczna

WIZJA „Z PRZEŁOMU”:

- **U świadków i prowodyrów „zmiany paragygmatu” m.in. Frege i Peirce;**
- **Frege – kantowskie spojrzenie na geometrię (dynamiczne), ale aksjomatyzacja arytmetyki (statyczne);**
- **Peirce – spojrzenie na całą matematykę zarówno dynamicznie (dwa sposoby rozumowania), jak i statycznie (strukturalizm na wzór semiotyki???), wyraźnie widoczne w heterogenicznej teorii grafów egzystencjalnych (zawiera nieredukowalne elementy zarówno *symboliczne*, jak i *ikoniczne*).**

Spojrzenie współczesne

- Ruch tzw. „back to the visual” we współczesnej matematyce/filozofii matematyki;
- Dziedziny matematyki, gdzie wizualizacja była konieczna w odkryciu i udowodnieniu twierdzeń – m.in. teoria chaosu/fraktali (zależność zb. Mandelbrota i Julii) oraz geometria różniczkowa;
- Teza, że rola diagramów nie jest jedynie heurystyczna i mogą one mieć substancjalne znaczenie w dowodach;
- Próby tworzenia heterogenicznych systemów logicznych.

Podsumowanie

Wnioski merytoryczne:

- **Intuicje zawarte w kantowskim podziale syntetyczne/analityczne można ocalić w Peirce'owskim – wyrażonym w „dynamicznych” terminach – na rozumowania wynikowe i teorematyczne;**
- **Podział na perspektywę statyczną i dynamiczną pokrywa się z dostrzeżeniem elementów symbolicznych (sformalizowanych) i ikonicznych (diagramy); a także wyraża się w dowartościowaniu roli dowodów (statyczne), bądź algorytmów (dynamiczne) [por. problemy związane z tezą Churcha?].**

Podsumowanie

Wnioski historyczne:

- **Okres do „zmiany paradygmatu”: rozwój ludzkiej wyobraźni i istotny wpływ metod graficznych i konstrukcji (intuicja obecna u Kanta);**
- **Okres po „zmianie paradygmatu”: wyobraźnia wyczerpała swoje pole do rozwoju i w sposób konieczny zastępuje ją formalizacja, która usuwa to ograniczenie i powoduje gwałtowny rozwój matematyki;**
- **Obecnie: zakres możliwości formalizacji został dość mocno wyeksploatowany, a rosną na nowo możliwości „wyobraźni” (wizualizacji) dzięki metodom komputerowym.**

Otwarte pytania...

- Na jakim poziome występuje takie rozróżnienie (ontologicznym, epistemologicznym, psychologicznym, metodologicznym, jest tylko pseudo-podziałem)?
- Jakie może mieć ona znaczenie dla zagadnienia podstaw matematyki?
- Czy zmiana sposobu myślenia o matematyce i logice wywołała „zmianę paradygmatu”, czy odwrotnie?
- Na ile te dwa aspekty są od siebie niezależne?
- Jak można je łączyć ze sobą w teorii oraz w praktyce matematycznej?

...

Dziękuję za uwagę!

maciejmanna@gmail.com