

Styczeń 2026

Anna Gruca

# **Model FitzHugh–Nagumo pojedynczego neuronu**

(Modelowanie i symulacja komputerowa)

# Spis treści

1	Modelowanie aktywności neuronu	3
1.1	Definicja neuronu oraz jego budowa . . . . .	3
1.2	Układ FitzHugh–Nagumo . . . . .	4
1.3	Znaczenie zmiennych i parametrów . . . . .	5
1.4	Interpretacja dynamiczna układu . . . . .	5
2	Symulacja pojedynczego neuronu	5
2.1	Metody numeryczne . . . . .	5
2.2	Przebiegi czasowe . . . . .	6
2.3	Portret fazowy . . . . .	7
2.4	Scenariusze napotkane podczas dobierania parametrów . . . . .	8
3	Analiza wyników symulacji i podsumowanie	11
4	Bibliografia	12

# 1 Modelowanie aktywności neuronu

## 1.1 Definicja neuronu oraz jego budowa

Neuron, czyli komórka nerwowa, jest podstawową jednostką budującą układ nerwowy. Odpołowiada za odbieranie, przetwarzanie oraz przekazywanie informacji w postaci impulsów elektrycznych. Składa się on z następujących elementów:

- ciała komórki (zawierającego jądro),
- licznych dendrytów, odbierających sygnały od innych neuronów,
- jednego aksonu, przewodzącego sygnały do innych neuronów lub tkanek.

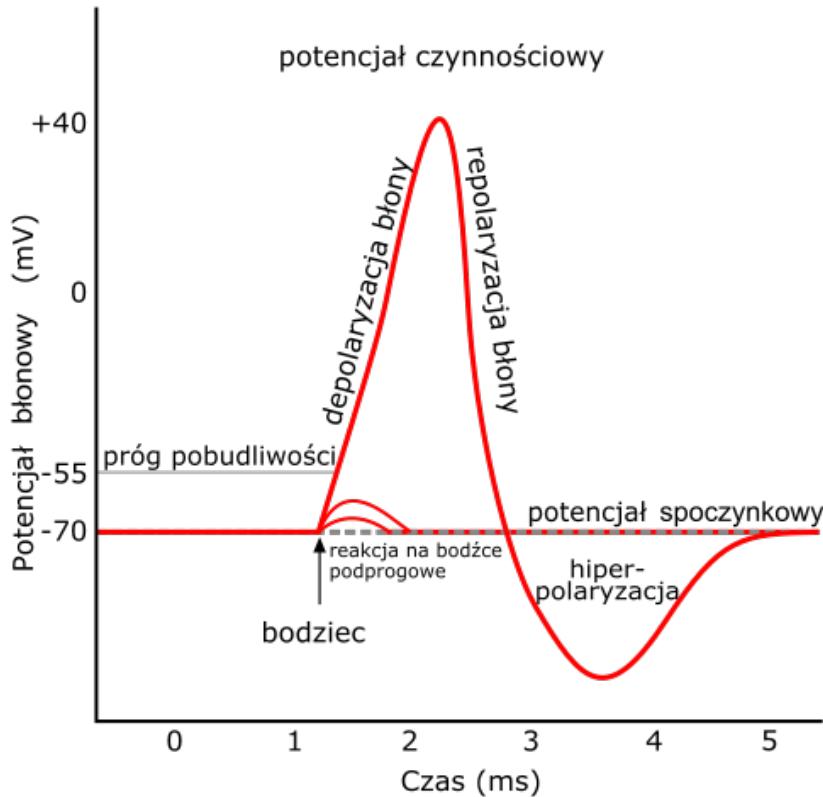
Neurony tworzą złożone sieci połączeń, zwane synapsami, które umożliwiają funkcjonowanie mózgu oraz całego układu nerwowego. Odpowiadają one za zmysły, ruch, a także procesy poznawcze, takie jak myślenie i uczenie się.

Potencjał neuronu to różnica ładunków elektrycznych pomiędzy wnętrzem komórki a jej otoczeniem, wynikająca z nierównomiernego rozłożenia jonów po obu stronach błony komórkowej. Wyróżnia się dwa podstawowe typy potencjałów:

- **potencjał spoczynkowy** (ang. *resting potential*) – stan niepobudzenia neuronu, w którym nie wysyła on sygnału, a jego wnętrze jest bardziej ujemne niż otoczenie (polaryzacja),
- **potencjał czynnościowy** (ang. *action potential, spike*) – krótki impuls elektryczny powstający w odpowiedzi na silniejszy bodziec zewnętrzny.

Proces powstawania potencjału czynnościowego przebiega w kilku charakterystycznych fazach:

- **depolaryzacja** – błona komórkowa staje się mniej ujemna wskutek otwarcia kanałów sodowych i napływu jonów sodu do wnętrza komórki,
- **repolaryzacja** – następuje powrót potencjału do bardziej ujemnych wartości poprzez zamknięcie kanałów sodowych oraz otwarcie kanałów potasowych, co umożliwia wypływ jonów potasu,
- **hiperpolaryzacja** – okres, w którym neuron chwilowo nie reaguje na kolejny impuls.



Rysunek 1: Fazy potencjału czynnościowego neuronu

## 1.2 Układ FitzHugh–Nagumo

Model FitzHugh–Nagumo jest jednym z klasycznych uproszczonych modeli matematycznych opisujących aktywność elektryczną neuronu. Został zaproponowany jako redukcja złożonego modelu Hodgkina–Huxleya, zachowując jednak jego kluczowe własności dynamiczne, takie jak występowanie potencjału czynnościowego oraz zjawisko refrakcji.

Model opisany jest układem dwóch nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = v - \frac{v^3}{3} - w + I, \\ \frac{dw}{dt} = \varepsilon(v + a - bw). \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

- $v(t)$  opisuje zmienną pobudzenia, czyli potencjał neuronu,
- $w(t)$  jest zmienną regeneracyjną,
- $I$  oznacza zewnętrzne pobudzenie (impuls),
- $a, b, \varepsilon$  są parametrami modelu.

### 1.3 Znaczenie zmiennych i parametrów

W modelu FitzHugh–Nagumo zmienne pełnią jasno określone role dynamiczne. Zmienna  $v(t)$  reprezentuje szybką dynamikę potencjału błonowego neuronu. Odpowiada ona za gwałtowny wzrost i spadek napięcia elektrycznego, charakterystyczny dla potencjału czynnościowego. Nieliniowy składnik  $-\frac{v^3}{3}$  umożliwia wystąpienie progowego zachowania układu oraz generowanie gwałtownych impulsów.

Zmienna  $w(t)$  opisuje wolniejszy proces regeneracyjny, który działa hamując wzrost potencjału. Odpowiada ona za powrót neuronu do stanu spoczynkowego po wygenerowaniu impulsu.

Parametr  $\varepsilon$  odgrywa kluczową rolę w rozdzieleniu skal czasowych układu. Dla małych wartości  $\varepsilon$  zmienna  $w$  zmienia się znacznie wolniej niż  $v$ , co odpowiada fizjologicznej obserwacji, że procesy regeneracyjne w neuronie są wolniejsze od samego impulsu.

Parametry  $a$  i  $b$  regulują położenie punktów równowagi oraz stabilność układu, natomiast parametr  $I$  modeluje zewnętrzne pobudzenie neuronu. Zmiana wartości  $I$  może prowadzić do przejścia od stanu spoczynkowego do oscylacji, co odpowiada rozpoczęciu generowania potencjałów czynnościowych.

### 1.4 Interpretacja dynamiczna układu

Z punktu widzenia teorii układów dynamicznych model FitzHugh–Nagumo jest nieliniovym układem równań różniczkowych, którego zachowanie jakościowe zależy od wartości parametrów. Układ może posiadać stabilny punkt równowagi odpowiadający stanowi spoczynkowemu neuronu lub stabilny cykl graniczny odpowiadający generowaniu impulsów elektrycznych.

W przestrzeni fazowej  $(v, w)$  przejście z punktu równowagi do cyklu granicznego następuje po przekroczeniu określonego progu pobudzenia. Oznacza to, że bodźce poniżej tego progu nie wywołują odpowiedzi neuronu, natomiast bodźce dostatecznie silne prowadzą do powstania pełnego potencjału czynnościowego. Zjawisko to odzwierciedla biologiczną zasadę „*wszystko albo nic*”.

Model FitzHugh–Nagumo stanowi zatem prosty, lecz istotny przykład układu dynamicznego, który w sposób jakościowy opisuje mechanizm progowego generowania impulsów w neuronach.

## 2 Symulacja pojedynczego neuronu

### 2.1 Metody numeryczne

Układ FitzHugh–Nagumo nie posiada ogólnego rozwiązania analitycznego, dlatego do analizy jego dynamiki wykorzystano metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

Symulacje przeprowadzono w języku Python z użyciem bibliotek `numpy` oraz `scipy`, które

implementują adaptacyjne algorytmy całkowania równań typu ODE. W pracy zastosowano funkcję `solve_ivp`, wykorzystującą metody Rungego–Kutty o zmiennym kroku czasowym. Takie podejście pozwala na stabilne i dokładne odwzorowanie zarówno szybkich zmian potencjału neuronu, jak i wolniejszych procesów regeneracyjnych.

Symulacja została przeprowadzona na zadanym przedziale czasu, przy ustalonych warunkach początkowych oraz wartościach parametrów modelu.

## 2.2 Przebiegi czasowe

Pierwszym etapem analizy numerycznej było wyznaczenie przebiegów czasowych zmiennej pobudzenia  $v(t)$ , interpretowanej jako potencjał neuronu. Celem tej symulacji było sprawdzenie, czy układ FitzHugh–Nagumo generuje potencjały czynnościowe oraz w jaki sposób przebiega proces pobudzenia i powrotu do stanu spoczynkowego.

Na podstawie otrzymanych wyników można zaobserwować charakterystyczny impuls elektryczny — szybki wzrost potencjału, po którym następuje jego spadek oraz okres refrakcji. Odpowiada to jakościowo biologicznemu potencjałowi czynnościowemu neuronu.

Listing 1: Symulacja przebiegu czasowego modelu FitzHugh–Nagumo

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# parametry modelu FitzHugh—Nagumo
a = 0.7
b = 0.8
epsilon = 0.08
I = 0.5

# definicja ukladu rownan
def fhn(t, y):
    v, w = y
    dvdt = v - (v**3)/3 - w + I
    dwdt = epsilon * (v + a - b*w)
    return [dvdt, dwdt]

# przedzial czasu
t_span = (0, 200)
t_eval = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 5000)

# warunki poczatkowe
y0 = [-1.0, 1.0]

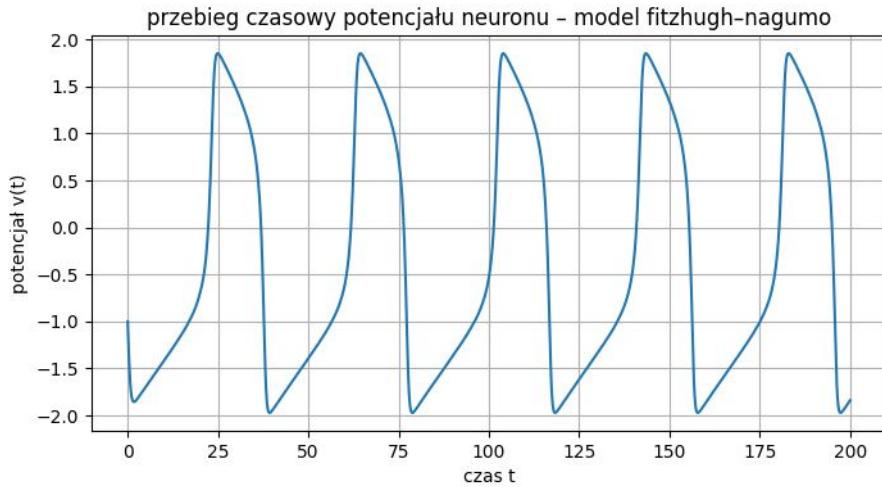
# rozwiazanie numeryczne
solution = solve_ivp(fhn, t_span, y0, t_eval=t_eval)

# wykres przebiegu czasowego
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(solution.t, solution.y[0])
```

```

plt.xlabel("czas_t")
plt.ylabel("potencjal_v(t)")
plt.title("Przebieg_czasowy_potencjału_neuronu_ model_FitzHugh—Nagumo")
plt.grid(True)
plt.show()

```



Rysunek 2: Przebieg czasowy potencjału neuronu  $v(t)$

### 2.3 Portret fazowy

W celu dokładniejszej analizy dynamiki układu rozważono portret fazowy w przestrzeni zmiennych  $(v, w)$ . Portret fazowy przedstawia trajektorię układu w przestrzeni stanów i pozwala na identyfikację stabilnych punktów równowagi oraz cykli granicznych.

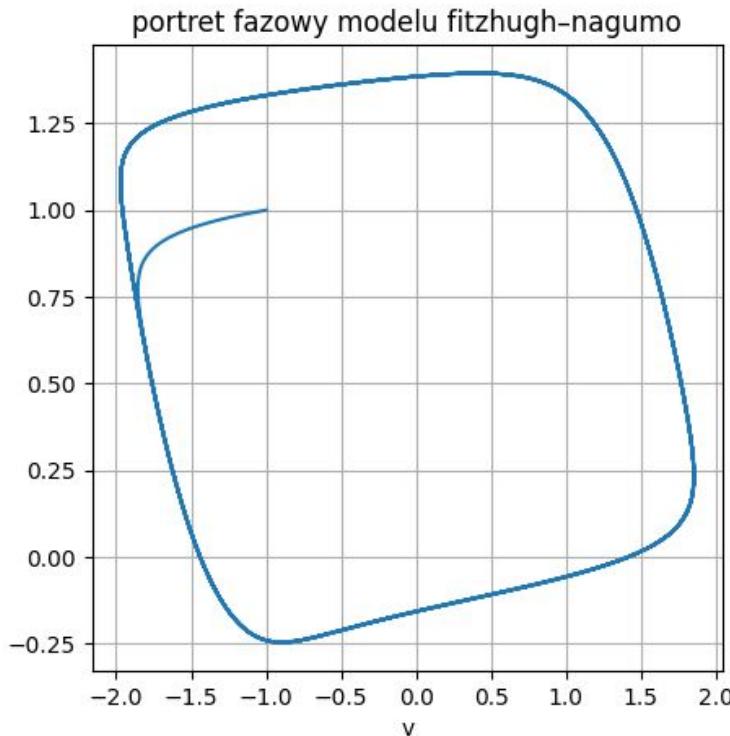
Dla dobranych parametrów modelu trajektoria tworzy zamkniętą pętlę, co oznacza istnienie stabilnego cyklu granicznego. Zjawisko to odpowiada okresowemu generowaniu potencjałów czynnościowych przez neuron.

Listing 2: Portret fazowy modelu FitzHugh–Nagumo

```

# portret fazowy
plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.plot(solution.y[0], solution.y[1])
plt.xlabel("v")
plt.ylabel("w")
plt.title("Portret_fazowy_modelu_FitzHugh—Nagumo")
plt.grid(True)
plt.show()

```



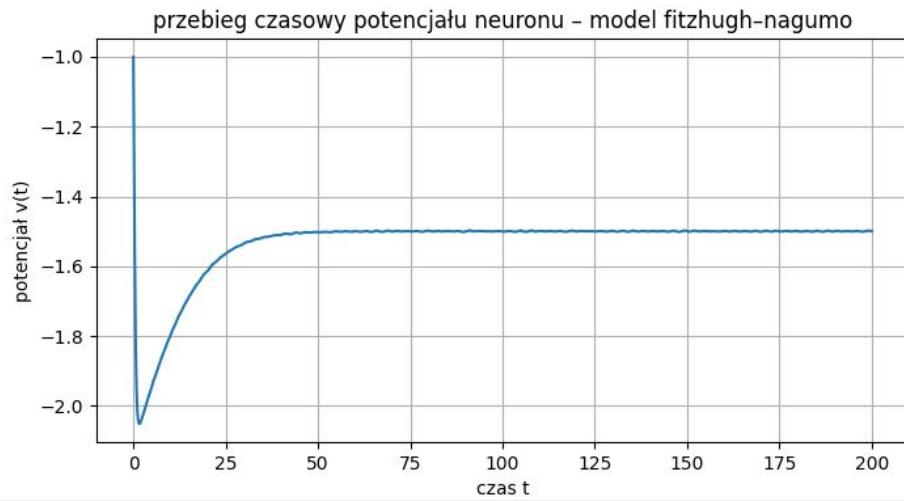
Rysunek 3: Portret fazowy modelu FitzHugh–Nagumo

Otrzymane wyniki potwierdzają, że model FitzHugh–Nagumo poprawnie odtwarza podstawowe cechy aktywności neuronu. Występuje wyraźny impuls potencjału oraz stabilny cykl graniczny w przestrzeni fazowej, co odpowiada okresowemu pobudzeniu neuronu.

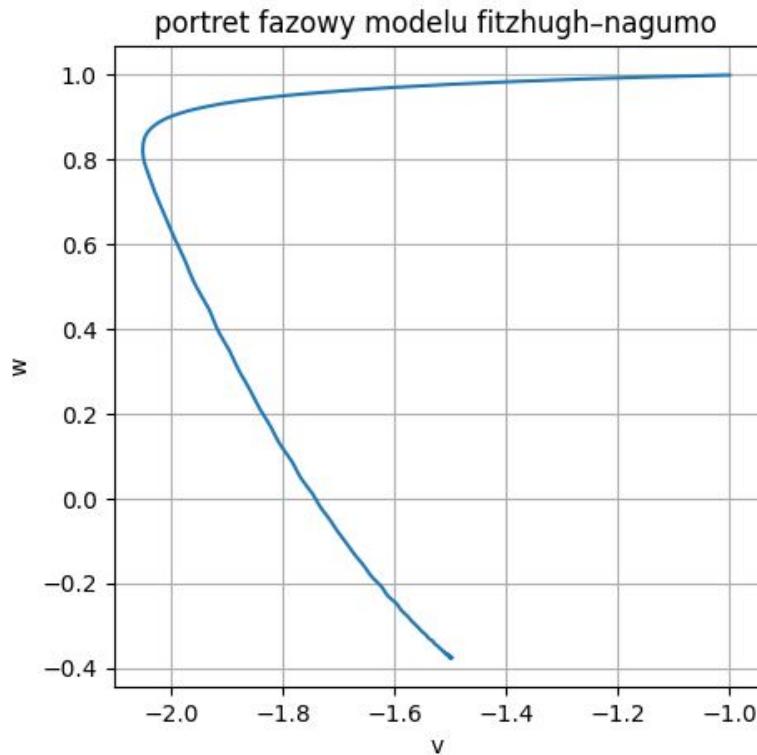
## 2.4 Scenariusze napotkane podczas dobierania parametrów

Podczas analizy numerycznej modelu FitzHugh–Nagumo zaobserwowano istotny wpływ parametrów na zachowanie dynamiczne układu. Zmiana wartości prądu pobudzającego  $I$ , progu pobudzenia  $a$  oraz parametru  $\varepsilon$  prowadziła do jakościowo różnych scenariuszy aktywności neuronu.

**Stan spoczynkowy** W przypadku zmniejszenia wartości prądu  $I$  oraz/lub podwyższenia progu pobudzenia  $a$  neuron nie osiąga progu aktywacji. Układ pozostaje w stabilnym stanie spoczynkowym, a potencjał nie wykazuje impulsów czynnościowych.

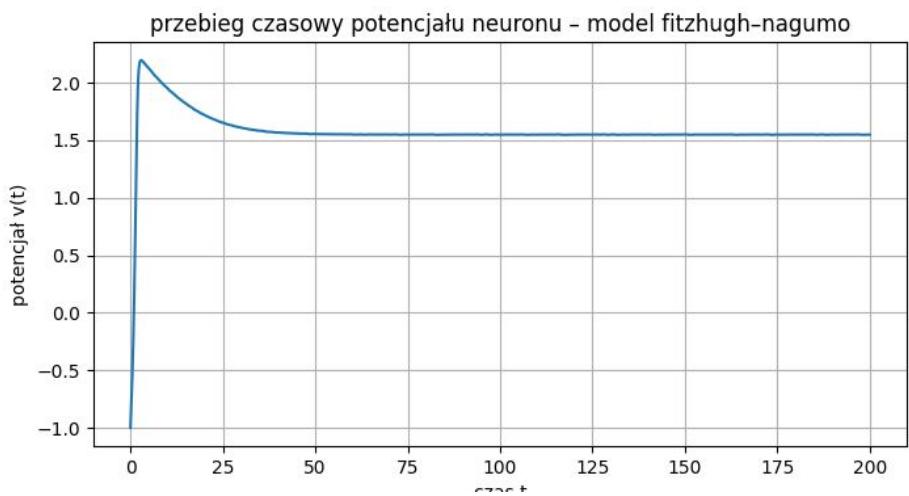


Rysunek 4: Brak pobudzenia neuronu dla niskiej wartości prądu  $I$  i wysokiego progu  $a$

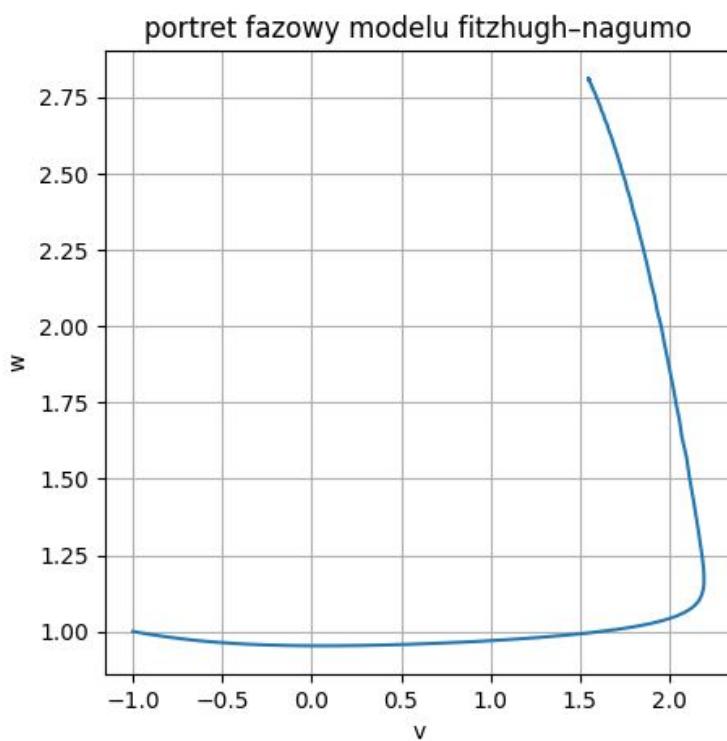


Rysunek 5: Portret fazowy odpowiadający stanowi spoczynkowemu neuronu

**Zbyt silne pobudzenie** Dla zbyt wysokich wartości prądu pobudzającego, na przykład  $I = 2,5$ , potencjał neuronu utrzymuje się na wysokim poziomie. W takim przypadku mechanizm generowania impulsów zanika, a neuron przechodzi w stan niefizjologiczny, który nie odpowiada rzeczywistej aktywności biologicznej.

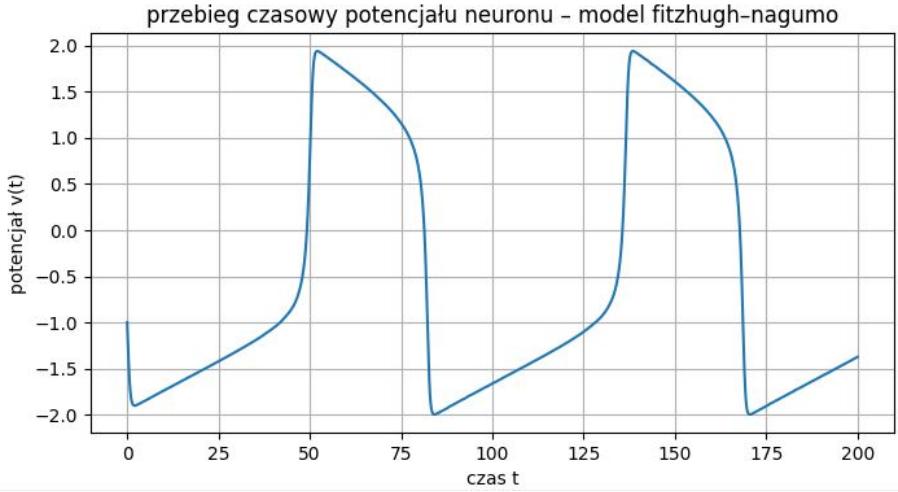


Rysunek 6: Przebieg czasowy potencjału dla nadmiernego pobudzenia ( $I = 2,5$ )



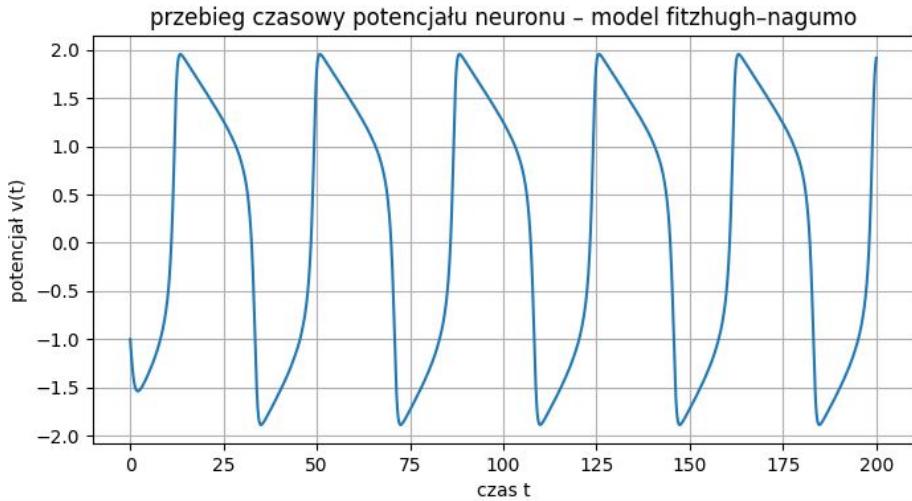
Rysunek 7: Portret fazowy dla zbyt wysokiej wartości prądu pobudzającego

**Wpływ parametru regeneracji** Zmniejszenie wartości parametru  $\varepsilon$ , odpowiadającego za tempo regeneracji, prowadzi do spowolnienia zmiennej  $w(t)$ . Skutkuje to powstawaniem szerokich impulsów oraz wydłużeniem okresów refrakcji, ponieważ proces regeneracyjny nie nadąża za zmianami potencjału.



Rysunek 8: Wpływ zmniejszenia parametru  $\varepsilon$  na przebieg potencjału neuronu

**Nadpobudliwość neuronu** Dla pośrednich wartości prądu, na przykład  $I = 1,1$ , zaobserwowano zjawisko nadpobudliwości neuronu. Stałe pobudzenie prowadzi do samopodtrzymującej się aktywności układu, co objawia się ciągłym generowaniem impulsów czynnościowych.



Rysunek 9: Nadpobudliwość neuronu dla wartości prądu  $I = 1,1$

### 3 Analiza wyników symulacji i podsumowanie

Symulacje modelu FitzHugh–Nagumo umożliwiły jakościową analizę mechanizmu generowania potencjałów czynnościowych w pojedynczym neuronie. Model, mimo swojej prostej, poprawnie odtwarza kluczowe cechy aktywności neuronu, takie jak pobudliwość progowa, okres refrakcji oraz możliwość występowania regularnych impulsów elektrycznych.

Zachowanie analizowanego układu dynamicznego silnie zależy od wartości parametrów modelu. Zmiana prądu zewnętrznego  $I$  oraz parametrów  $b$  i  $\varepsilon$  prowadziła do przejść po-

miedzy różnymi reżimami pracy neuronu, od stabilnego stanu spoczynkowego, poprzez okresową aktywność, aż do zaniku impulsów. Zaobserwowane zjawiska są zgodne z biologiczną zasadą „*wszystko albo nic*”.

Zastosowanie portretów fazowych pozwoliło na jednoznaczną identyfikację stabilnych punktów równowagi oraz cykli granicznych, dostarczając pełniejszego obrazu dynamiki układu niż sama analiza przebiegów czasowych. Uzyskane wyniki potwierdzają, że model FitzHugh–Nagumo stanowi użyteczne narzędzie do jakościowego opisu podstawowych mechanizmów aktywności elektrycznej neuronów.

## 4 Bibliografia

### Literatura

- [1] Joanna Kośmider, *Aktionspotential.svg*, opracowanie na podstawie pracy: Chris 73, Di-berri, licencja CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15376633>.
- [2] FitzHugh–Nagumo model, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/FitzHugh%20%93Nagumo\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/FitzHugh%20%93Nagumo_model).
- [3] Neuron, Wikipedia (PL), <https://pl.wikipedia.org/wiki/Neuron>.
- [4] Springer Reference, *FitzHugh–Nagumo Model*, [https://link.springer.com/rwe/10.1007/978-1-4614-7320-6\\_147-1](https://link.springer.com/rwe/10.1007/978-1-4614-7320-6_147-1).