Государственное образовательное учереждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный университет

кафедра математики

Линейная Алгебра и Геометрия

Конспект лекций

Уфа, УГАТУ ОНФ, 13 июля 2019 г.

LaTeX

Содержание

1 Матрицы

1.1 Основные определения

Определение 1. *Матрицей размеров $m \times n$ над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ называется прямоугольная таблица из $m \cdot n$ вещественных чисел, имеющая m строк и n столбцов:*

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ - номер строки, $j = \overline{1, n}$ - номер столбца, $a_{i,j}$ - элементы матрицы, m и n - порядки матрицы. В этом случае говорят, что рассматриваемая матрица размера $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а число $m = n$ - её порядком.

Для изображения матрицы применяются либо круглые скобки, либо сдвоенные прямые:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Для краткого обозначения матрицы используются либо заглавные латинские буквы (A, B, C, ...) либо символы (a_{ij}), $||a_{ij}||$, указывающие обозначение элементов матрицы; либо используется запись $A = (a_{i,j})(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$.

Множество всех матриц размера $m \times n$ бозначается $\mathbb{R}_{m \times n} \equiv \mathbb{R}_{m,n}$.

1.1.1 Частные случаи матриц

1. Если $m = n$, то матрица называется квадратной. Её диагональ $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ называется главной диагональю, а $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ – побочной диагональю.

2. Диагональная матрица – это матрица, у которой все ненулевые элементы находятся на главной диагонали, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

3. Диагональная матрица вида $\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ называется скалярной.

4. Скалярная матрица с единичными элементами на главной диагонали называется единичной. Обозначается E или E_n, где n - ее порядок.

5. Матрица размера $m \times n$, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается $O_{m,n}$.

6. Если $m = 1$, то матрица называется строчной, или матрица-строка, или строка. Если $n = 1 \to$ столбцовая, или матрица-столбец, или просто столбец.

Определение 2. *Две матрицы называются равными, если эти матрицы имеют одинаковые порядки и их соответствующие элементы совпадают.*

1.2 Операции над матрицами и их свойства

Определение 3. *Суммой матриц A и $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ (т.е. имеющих одинаковые порядки) называется матрица $C \in \mathbb{R}_{m,n} : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.*

Обозначение: $C = A + B$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства 1 (сложения матицы)**.**

1. *Коммутативность сложения, т.е. $\forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ справедливо $A+B = B+A$.*

2. *Ассоциативность сложения, т.е.* $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{m,n}$ *справедливо* $(A+B)+C = A+(B+C)$.

3. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$.

4. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n} \exists! B \in \mathbb{R}_{m,n} : A + B = B + A = O_{m,n}$. *При этом, если* $A = (a_{ij})$, *то* $b_{i,j} = -a_{ij}$. *Матрица* B *называется противоположной к* A *и обозначается* $-A$.

   Доказательство свойств провести самостоятельно прямыми вычислениями.

Определение 4. *Произведением элемента* $\alpha \in \mathbb{R}$ *на матрицу* $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ *называется матрица* $C \in \mathbb{R}_{m,n} : c_{ij} = \alpha a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Обозначение: $C = \alpha A$.
Операция, сопоставляющая α и A их произведению $C = \alpha A$ называется умножением числа на матрицу.

Свойства 2 (умножения матрицы на число)**.**
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{m,n}$ *выполняется:*

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

4. $1 \cdot A = A$.

   Доказательство свойств - самостоятельно прямыми вычисления-ми.

Замечание. Разность $A - B$ двух прямоугольных матриц A и $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ определяется равенством $A - B = A + (-1)B = A + (-B)$.

Определение 5. *Произведением матриц* $A = (a_{ij})$ *размера* $m \times n$ *и* $B = (b_{ij})$ *размера* $n \times p$ *называется матрица* $C = (c_{ij})$ *размеров* $m \times p$ *такая, что каждый элемент* $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Обозначение: $C = A \cdot B \equiv AB$. Операция произведения A и B называется умножением этих матриц.

Из определения следует, что элемент матрицы A и B , стоящий в i–ой строке и j–ом столбце, равен сумме произведений элементов i–ом столбце, равен сумме произведений элементов A на j–ый столбец матрицы B.

Пример 2.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \to AB = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 20 \\ 3 & -9 & -18 \end{pmatrix},$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to AB = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Таким образом, две матрицы можно перемножать, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда матрица A называется согласованной с B. Из согласованности A с B не следует согласованность B с A. Если даже условие согласования выполняется, то в общем случае $AB \neq BA$.

Свойства 3 (умножения матриц)**.**

1. *Ассоциативность умножения матриц, т.е.* $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, B \in \mathbb{R}_{n,p}, C \in \mathbb{R}_{p,l}$ *справедливо* $(AB)C = A(BC)$.

   Доказательство. Из определения 5 следует, что элемент d_{it} матрицы $(AB)C$ равен $d_{it} = \sum\limits_{k=1}^{p}(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{kt}$, а элемент $\overline{d_{it}}$ матрицы $A(BC)$ равен $\overline{d_{it}} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum\limits_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kt}$ Равенство $d_{it} = \overline{d_{it}}$ следует из возможности изменения порядка суммирования. □

2. *Дистрибутивность сложения относительно умножения, т.е.*
   $A(B + C) = AB + AC, \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, B, C \in \mathbb{R}_{n,p}.$
   $(A + B)C = AC + BC, \forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}, C \in \mathbb{R}_{n,p}.$

   Доказательство. Доказательство следует из определения суммы и произведения матриц. □

3. $E_m A = AE_n = A, \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$.

Доказательство. Пусть $B = (b_{ij}) : B = AE_n$, и $C = E_m A$. Тогда $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}$. Здесь $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

$c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$. □

4. $(\alpha E_m)A = \alpha A = A(\alpha E_n), \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

5. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, O_{p,m} \cdot A = O_{p,n}, A \cdot O_{n,p} = O_{m,p}$.

Доказательство. Доказательство свойств 4 и 5 проводится аналогично свойству 3. □

6. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}_{n,p}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \to \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Замечание. В общем случае произведение матриц не коммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Но из свойств 4 и 5 $\to$ умножение квадратной матрицы на E и O коммутирует. Также коммутирует умножение квадратной матрицы на ска-лярную.

1.3 Блочные матрицы.

Пусть матрица A при помощи горизонтальных и вертикальных прямых разбита на отдельные прямоугольные клетки, каждая из которых является матрицей меньших раз-меров и называется блоком исходной матрицы. В этом случае A рассматривается как некоторая новая, блочная матрица $A = ||A_{\alpha\beta}||$, элементами которой являются блоки $||A_{\alpha\beta}||$ указанной матрицы ($A_{\alpha\beta}$– элементы матрицы, поэтому A заглавное). Здесь α – номер блочной строки, β – столбца.

Например, если

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right), \text{ то } A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

.

Замечательным является факт, что операции с блочными матрицами совершаются по тем же правилам, что и с обычными, только в роли элементов выступают блоки. Действительно, если $A = \left\| A_{\alpha\beta} \right\|$, то $\lambda A = \left\| \lambda a_{ij} \right\| = \left\| \lambda A_{\alpha\beta} \right\|$, где $\left\| \lambda A_{\alpha\beta} \right\|$ вычисляется по обычному правилу умножения матрицы на число. Аналогично, если A и B имеют одинаковые порядки и одинаковым образом разбиты на блоки, то сумме $A + B$ отвечает блочная матрица $C = \left\| C_{\alpha\beta} \right\| : C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}$.

Для умножения $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ на $B \in \mathbb{R}_{n,p}$ необходимо согласовать их разбиение на блоки, т.е. число столбцов каждого блока $A_{\alpha\beta}$ должно быть равно числу строк блока $B_{\beta\gamma}$. Тогда $C_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\gamma} A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}$.

Доказательство. Для доказательства необходимо расписать правую и левую части в терминах обычных элементов матриц C, A и B.Пусть разбиение матриц проведено следующим образом: $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_k = m, 1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < pq = p$.
Если $i \in m_\alpha, j \in p_\beta$, то $c_{ij} = C_{\alpha\beta}$ и $c_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{n_1} + \sum\limits_{t=n_1+1}^{n_2} + \ldots + \sum\limits_{t=n_{l-1}+1}^{n_l}$, откуда следует, что $C_{\alpha\beta} = A_{\alpha 1} B_{1\beta} + \ldots + A_{\alpha l} B_{l\beta}$, что и требовалось доказать. □

Пример 3. *Пусть* $A = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline -6 & 0 & 3 \end{array}\right), B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, *т.е.*
$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, *где* $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}, A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Тогда $C_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Аналогично находятся остальные* $C_{\alpha\beta}$. *В результате получаем* $AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline -3 & -12 & 0 & -6 \end{array}\right)$.

В качестве применения блочных матриц рассмотрим

Определение 6. *Прямой суммой квадратных матриц A и B порядков m и n соответственно называется квадратная матрица C порядка*
$m+n : C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Обозначение: $C = A \bigoplus B$.

Свойства 4 (прямой суммы)**.**

1. $(A \bigoplus B) \bigoplus C = A \bigoplus (B \bigoplus C)$.
2. $A \bigoplus B \neq B \bigoplus A$.
3. $(A_m \bigoplus A_n) + (B_m \bigoplus B_n) = (A_m + A_n) \bigoplus (B_m + B_n)$.
4. $(A_m \bigoplus A_n)(B_m \bigoplus B_n) = (A_m B_m) \bigoplus (A_n B_n)$.

   Доказательство – самостоятельно.