

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный университет
кафедра математики

Линейная Алгебра и Геометрия

Конспект лекций
Уфа, УГАТУ ОНФ, 4 августа 2019 г.

Содержание

1	Матрицы	2
1.1	Основные определения	2
1.1.1	Частные случаи матриц	2
1.2	Операции над матрицами и их свойства	3
1.3	Блочные матрицы.	6

1 Матрицы

1.1 Основные определения

Определение 1. Матрицей размеров $m \times n$ над множеством действительных чисел \mathbb{R} называется прямоугольная таблица из $m \cdot n$ вещественных чисел, имеющая m строк и n столбцов:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ - номер строки, $j = \overline{1, n}$ - номер столбца, $a_{i,j}$ - элементы матрицы, m и n - порядки матрицы. В этом случае говорят, что рассматриваемая матрица размера $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а число $m = n$ - её порядком.

Для изображения матрицы применяются либо круглые скобки, либо сдвоенные прямые:

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Для краткого обозначения матрицы используются либо заглавные латинские буквы (A, B, C, \dots) либо символы $(a_{ij}), \|a_{ij}\|$, указывающие обозначение элементов матрицы; либо используется запись $A = (a_{i,j})(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$.

Множество всех матриц размера $m \times n$ обозначается $\mathbb{R}_{m \times n} \equiv \mathbb{R}_{m,n}$.

1.1.1 Частные случаи матриц

1. Если $m = n$, то матрица называется квадратной. Её диагональ $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ называется главной диагональю, а $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ - побочной диагональю.
2. Диагональная матрица - это матрица, у которой все ненулевые элементы на-

ходятся на главной диагонали, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

3. Диагональная матрица вида $\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ называется скалярной.

4. Скалярная матрица с единичными элементами на главной диагонали называется единичной. Обозначается E или E_n , где n - ее порядок.

5. Матрица размера $m \times n$, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается $O_{m,n}$.

6. Если $m = 1$, то матрица называется строчной, или матрица-строка, или строка. Если $n = 1 \rightarrow$ столбцовая, или матрица-столбец, или просто столбец.

Определение 2. Две матрицы называются равными, если эти матрицы имеют одинаковые порядки и их соответствующие элементы совпадают.

1.2 Операции над матрицами и их свойства

Определение 3. Суммой матриц A и $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ (т.е. имеющих одинаковые порядки) называется матрица $C \in \mathbb{R}_{m,n} : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Обозначение: $C = A + B$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства 1 (сложения матриц).

1. Коммутативность сложения, т.е. $\forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ справедливо $A+B = B+A$.

2. Ассоциативность сложения, т.е. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{m,n}$ справедливо $(A+B)+C = A+(B+C)$.

$$3. \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A.$$

4. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n} \exists! B \in \mathbb{R}_{m,n} : A + B = B + A = O_{m,n}$. При этом, если $A = (a_{ij})$, то $b_{i,j} = -a_{ij}$. Матрица B называется противоположной к A и обозначается $-A$.

Доказательство свойств провести самостоятельно прямыми вычислениями.

Определение 4. Произведением элемента $\alpha \in \mathbb{R}$ на матрицу $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ называется матрица $C \in \mathbb{R}_{m,n} : c_{ij} = \alpha a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Обозначение: $C = \alpha A$.

Операция, сопоставляющая α и A их произведению $C = \alpha A$ называется умножением числа на матрицу.

Свойства 2 (умножения матрицы на число).

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{m,n}$ выполняется:

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
4. $1 \cdot A = A$.

Доказательство свойств - самостоятельно прямыми вычислениями.

Замечание 1.1. Разность $A - B$ двух прямоугольных матриц A и $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ определяется равенством $A - B = A + (-1)B = A + (-B)$.

Определение 5. Произведением матриц $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ размера $n \times r$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размеров $m \times r$ такая, что каждый элемент $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Обозначение: $C = A \cdot B \equiv AB$. Операция произведения A и B называется умножением этих матриц.

Из определения следует, что элемент матрицы A и B , стоящий в i -ой строке и j -ом столбце, равен сумме произведений элементов i -ом столбце, равен сумме произведений элементов A на j -ый столбец матрицы B .

Пример 2.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 20 \\ 3 & -9 & -18 \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, две матрицы можно перемножать, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Тогда матрица A называется согласованной с B . Из согласованности A с B не следует согласованность B с A . Если даже условие согласования выполняется, то в общем случае $AB \neq BA$.

Свойства 3 (умножения матриц).

1. Ассоциативность умножения матриц, т.е. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, B \in \mathbb{R}_{n,p}, C \in \mathbb{R}_{p,l}$ справедливо $(AB)C = A(BC)$.

Доказательство. Из определения 5 следует, что элемент d_{it} матрицы $(AB)C$ равен $d_{it} = \sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk})c_{kt}$, а элемент \overline{d}_{it} матрицы $A(BC)$ равен $\overline{d}_{it} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kt})$. Равенство $d_{it} = \overline{d}_{it}$ следует из возможности изменения порядка суммирования. \square

2. Дистрибутивность сложения относительно умножения, т.е.

$$A(B + C) = AB + AC, \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, B, C \in \mathbb{R}_{n,p}.$$

$$(A + B)C = AC + BC, \forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}, C \in \mathbb{R}_{n,p}.$$

Доказательство. Доказательство следует из определения суммы и произведения матриц. \square

3. $E_m A = A E_n = A, \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$.

Доказательство. Пусть $B = (b_{ij}) : B = AE_n$, и $C = E_m A$. Тогда $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \delta_{jj} = a_{ij}$. Здесь $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}. \quad \square$$

4. $(\alpha E_m)A = \alpha A = A(\alpha E_n), \forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

5. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, O_{p,m} \cdot A = O_{p,n}, A \cdot O_{n,p} = O_{m,p}.$

Доказательство. Доказательство свойств 4 и 5 проводится аналогично свойству 3. \square

6. $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}_{n,p}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$

Замечание 1.2. В общем случае произведение матриц не коммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Но из свойств 4 и 5 \rightarrow умножение квадратной матрицы на E и O коммутует. Также коммутует умножение квадратной матрицы на скалярную.

1.3 Блочные матрицы.

Пусть матрица A при помощи горизонтальных и вертикальных прямых разбита на отдельные прямоугольные клетки, каждая из которых является матрицей меньших размеров и называется блоком исходной матрицы. В этом случае A рассматривается как некоторая новая, блочная матрица $A = ||A_{\alpha\beta}||$, элементами которой являются блоки $||A_{\alpha\beta}||$ указанной матрицы ($A_{\alpha\beta}$ – элементы матрицы, поэтому A заглавное). Здесь α – номер блочной строки, β – столбца.

Например, если

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array} \right), \text{ то } A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}.$$

Замечательным является факт, что операции с блочными матрицами совершаются по тем же правилам, что и с обычными, только в роли элементов выступают блоки. Действительно, если $A = \|A_{\alpha\beta}\|$, то $\lambda A = \|\lambda a_{ij}\| = \|\lambda A_{\alpha\beta}\|$, где $\|\lambda A_{\alpha\beta}\|$ вычисляется по обычному правилу умножения матрицы на число. Аналогично, если A и B имеют одинаковые порядки и одинаковым образом разбиты на блоки, то сумме $A + B$ отвечает блочная матрица $C = \|C_{\alpha\beta}\| : C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}$.

Для умножения $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ на $B \in \mathbb{R}_{n,p}$ необходимо согласовать их разбиение на блоки, т.е. число столбцов каждого блока $A_{\alpha\beta}$ должно быть равно числу строк блока $B_{\beta\gamma}$. Тогда $C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}$.

Доказательство. Для доказательства необходимо расписать правую и левую части в терминах обычных элементов матриц C, A и B . Пусть разбиение матриц проведено следующим образом: $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k = m, 1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_l = p$.

Если $i \in m_{\alpha}, j \in p_{\beta}$, то $c_{ij} = C_{\alpha\beta}$ и $c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} = \sum_{t=1}^{n_1} a_{it} b_{tj} + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} a_{it} b_{tj} + \dots + \sum_{t=n_{l-1}+1}^{n_l} a_{it} b_{tj}$, откуда следует, что $C_{\alpha\beta} = A_{\alpha 1} B_{1\beta} + \dots + A_{\alpha l} B_{l\beta}$, что и требовалось доказать. \square

Пример 3. Пусть $A = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline -6 & 0 & 3 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$ т.е.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Аналогично на-

$$\text{ходятся остальные } C_{\alpha\beta}. \text{ В результате получаем } AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline -3 & -12 & 0 & -6 \end{array} \right).$$

В качестве применения блочных матриц рассмотрим

Определение 6. *Прямой суммой квадратных матриц A и B порядков m и n соответственно называется квадратная матрица C порядка*

$$m + n : C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Обозначение: $C = A \oplus B$.

Свойства 4 (прямой суммы).

$$1. (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

$$2. A \oplus B \neq B \oplus A.$$

$$3. (A_m \oplus A_n) + (B_m \oplus B_n) = (A_m + A_n) \oplus (B_m + B_n).$$

$$4. (A_m \oplus A_n)(B_m \oplus B_n) = (A_m B_m) \oplus (A_n B_n).$$

Доказательство – самостоятельно.