Государственное образовательное учереждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный университет

кафедра математики

Линейная Алгебра и Геометрия

Конспект лекций

Уфа, УГАТУ ОНФ, 11 июля 2019 г.

LaTeX

Содержание

1 Матрицы

1.1 Основные определения

Определение 1. *Матрицей размеров $m \times n$ над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ называется прямоугольная таблица из $m \cdot n$ вещественных чисел, имеющая m строк и n столбцов:*

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ - номер строки, $j = \overline{1, n}$ - номер столбца, $a_{i,j}$ - элементы матрицы, m и n - порядки матрицы. В этом случае говорят, что рассматриваемая матрица размера $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а число $m = n$ - её порядком.

Для изображения матрицы применяются либо круглые скобки, либо сдвоенные прямые:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Для краткого обозначения матрицы используются либо заглавные латинские буквы (A, B, C, $\dots$) либо символы (a_{ij}), $||a_{ij}||$, указывающие обозначение элементов матрицы; либо используется запись $A = (a_{i,j})(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$.

Множество всех матриц размера $m \times n$ бозначается $\mathbb{R}_{m \times n} \equiv \mathbb{R}_{m,n}$.

1.1.1 Частные случаи матриц

1. Если $m = n$, то матрица называется квадратной. Её диагональ $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ называется главной диагональю, а $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ – побочной диагональю.

2. Диагональная матрица – это матрица, у которой все ненулевые элементы находятся на главной диагонали, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

3. Диагональная матрица вида $\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ называется скалярной.

4. Скалярная матрица с единичными элементами на главной диагонали называется единичной. Обозначается E или E_n, где n - ее порядок.

5. Матрица размера $m \times n$, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается $O_{m,n}$.

6. Если $m = 1$, то матрица называется строчной, или матрица-строка, или строка. Если $n = 1 \rightarrow$ столбцовая, или матрица-столбец, или просто столбец.

Определение 2. *Две матрицы называются равными, если эти матрицы имеют одинаковые по-рядки и их соответствующие элементы совпадают.*

1.2 Операции над матрицами и их свойства.

Определение 3. *Суммой матриц A и $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ (т.е. имеющих одинаковые порядки) называется матрица $C \in \mathbb{R}_{m,n} : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.*

Обозначение: $C = A + B$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства 1 (сложения матриц).