Установка нужных версий библиотек

Ввод [3]:

```
from sklearn.tree import DecisionTreeRegressor, plot_tree
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Получение данных ¶

Будем работать с набором данных для задачи регрессии (целевая переменная - стоимость дома) `california_housing` , который можно получить из стандартных датасетов в `sklearn'e` .

После `fetch_california_housing()` возвращается словарь с данными (`data`), целевой переменной (`target`), названиями характеристик в данных (`feature_names`) и описанием данных (`DESCR`).

Ввод [4]:

```
from sklearn.datasets import fetch_california_housing

data = fetch_california_housing()
data
```

Out[4]:

```
{'data': array([[   8.3252    ,   41.        ,    6.98412698, ...,    2.55
555556,
           37.88      , -122.23      ],
        [   8.3014    ,   21.        ,    6.23813708, ...,    2.10984183,
           37.86      , -122.22      ],
        [   7.2574    ,   52.        ,    8.28813559, ...,    2.80225989,
           37.85      , -122.24      ],
        ...,
        [   1.7       ,   17.        ,    5.20554273, ...,    2.3256351 ,
           39.43      , -121.22      ],
        [   1.8672    ,   18.        ,    5.32951289, ...,    2.12320917,
           39.43      , -121.32      ],
        [   2.3886    ,   16.        ,    5.25471698, ...,    2.61698113,
           39.37      , -121.24      ]]),
 'target': array([4.526, 3.585, 3.521, ..., 0.923, 0.847, 0.894]),
 'frame': None,
 'target_names': ['MedHouseVal'],
 'feature_names': ['MedInc',
  'HouseAge',
  'AveRooms',
  'AveBedrms',
  'Population',
  'AveOccup',
  'Latitude',
  'Longitude'],
 'DESCR': '.. _california_housing_dataset:\n\nCalifornia Housing dataset\n
--------------------------\n\n**Data Set Characteristics:**\n\n    :Number
of Instances: 20640\n\n    :Number of Attributes: 8 numeric, predictive at
tributes and the target\n\n    :Attribute Information:\n        - MedInc
median income in block\n        - HouseAge      median house age in block
\n        - AveRooms      average number of rooms\n        - AveBedrms
average number of bedrooms\n        - Population    block population\n
- AveOccup      average house occupancy\n        - Latitude      house blo
ck latitude\n        - Longitude     house block longitude\n\n    :Missing
Attribute Values: None\n\nThis dataset was obtained from the StatLib repos
itory.\nhttp://lib.stat.cmu.edu/datasets/\n\nThe target variable is the me
dian house value for California districts.\n\nThis dataset was derived fro
m the 1990 U.S. census, using one row per census\nblock group. A block gro
up is the smallest geographical unit for which the U.S.\nCensus Bureau pub
lishes sample data (a block group typically has a population\nof 600 to 3,
000 people).\n\nIt can be downloaded/loaded using the\n:func:`sklearn.data
sets.fetch_california_housing` function.\n\n.. topic:: References\n\n    -
Pace, R. Kelley and Ronald Barry, Sparse Spatial Autoregressions,\n      S
tatistics and Probability Letters, 33 (1997) 291-297\n'}
```

Ввод [5]:

```
data.keys()
```

Out[5]:

```
dict_keys(['data', 'target', 'frame', 'target_names', 'feature_names', 'DE
SCR'])
```

Ввод [6]:

```
print(data.DESCR)
```

```
.. _california_housing_dataset:

California Housing dataset
--------------------------

**Data Set Characteristics:**

    :Number of Instances: 20640

    :Number of Attributes: 8 numeric, predictive attributes and the target

    :Attribute Information:
        - MedInc        median income in block
        - HouseAge      median house age in block
        - AveRooms      average number of rooms
        - AveBedrms     average number of bedrooms
        - Population    block population
        - AveOccup      average house occupancy
        - Latitude      house block latitude
        - Longitude     house block longitude

    :Missing Attribute Values: None

This dataset was obtained from the StatLib repository.
http://lib.stat.cmu.edu/datasets/ (http://lib.stat.cmu.edu/datasets/)

The target variable is the median house value for California districts.

This dataset was derived from the 1990 U.S. census, using one row per cens
us
block group. A block group is the smallest geographical unit for which the
U.S.
Census Bureau publishes sample data (a block group typically has a populat
ion
of 600 to 3,000 people).

It can be downloaded/loaded using the
:func:`sklearn.datasets.fetch_california_housing` function.

.. topic:: References

    - Pace, R. Kelley and Ronald Barry, Sparse Spatial Autoregressions,
      Statistics and Probability Letters, 33 (1997) 291-297
```

Ввод [7]:

```
X = data.data
features = data.feature_names
y = data.target
```

Из признаков (характеристик данных) и целевой переменной сформируем датафрейм, в качестве названий колонок возьмем названия признаков.

Ввод [ ]:

```
df = pd.DataFrame(X, columns=features)
df['target'] = y

df.head()
```

Out[8]:

	MedInc	HouseAge	AveRooms	AveBedrms	Population	AveOccup	Latitude	Longitude
0	8.3252	41.0	6.984127	1.023810	322.0	2.555556	37.88	-122.23
1	8.3014	21.0	6.238137	0.971880	2401.0	2.109842	37.86	-122.22
2	7.2574	52.0	8.288136	1.073446	496.0	2.802260	37.85	-122.24
3	5.6431	52.0	5.817352	1.073059	558.0	2.547945	37.85	-122.25
4	3.8462	52.0	6.281853	1.081081	565.0	2.181467	37.85	-122.25

Чтобы более наглядно смотреть, как обучается дерево решений возьмем только 5 объектов.

Ввод [ ]:

```
features = ['HouseAge', 'Population']
```

Ввод [ ]:

```
df = df[features + ['target']]
df = df.head(5)
df
```

Out[10]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Ввод [ ]:

```
X = df[features]
y = df['target']
```

Обучение дерева решений

Инициализируем дерево решений для задачи регрессии и обучим на признаках (X) и целевой переменной (y). По признакам модель будет запоминать закономерности, которые ведут к изменению стоимости дома.

Ввод [ ]:

```
from sklearn.tree import DecisionTreeRegressor


tree = DecisionTreeRegressor(random_state=1)
tree.fit(X, y)
```

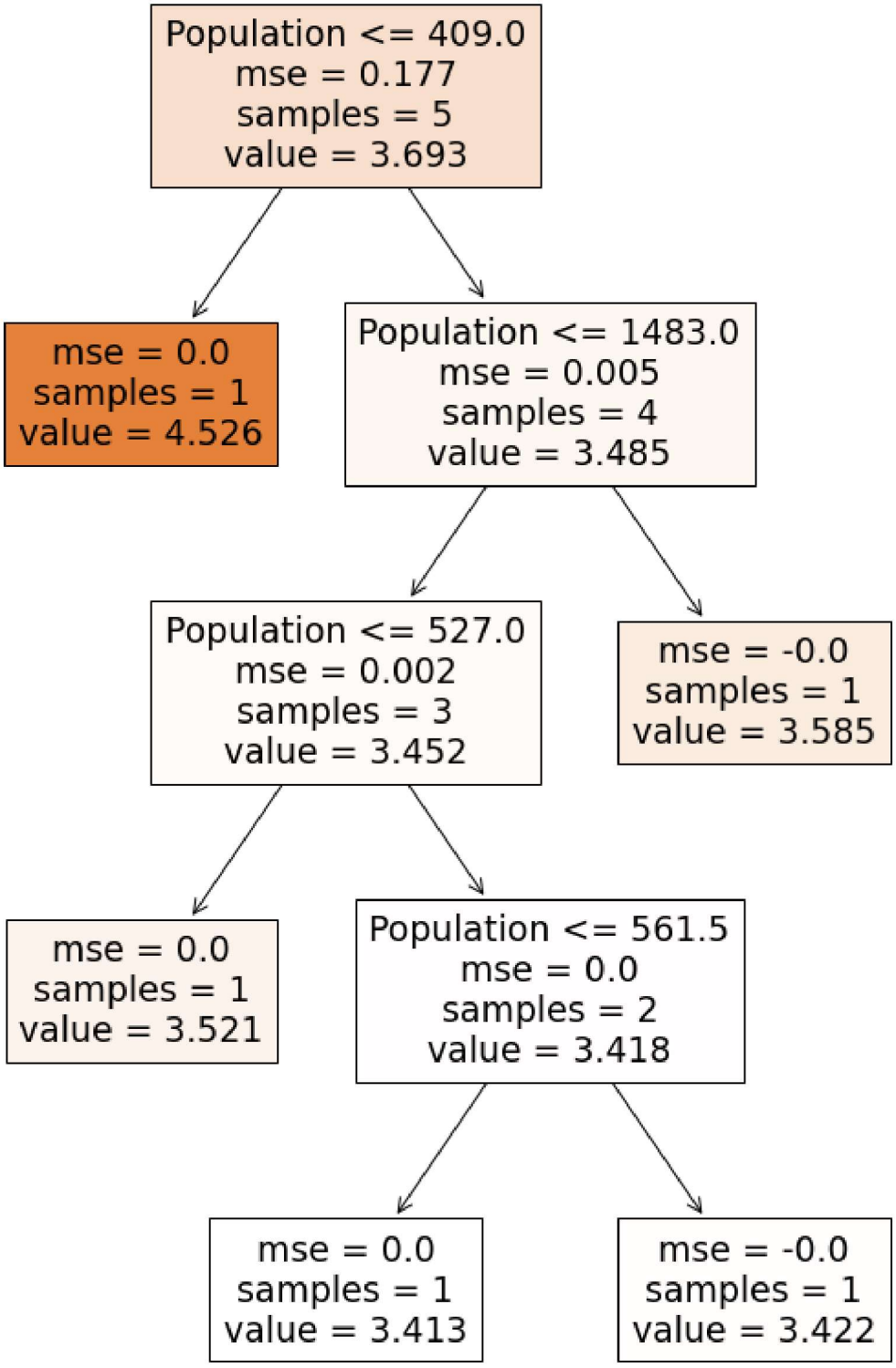
Out[12]:

```
DecisionTreeRegressor(ccp_alpha=0.0, criterion='mse', max_depth=None,
                      max_features=None, max_leaf_nodes=None,
                      min_impurity_decrease=0.0, min_impurity_split=None,
                      min_samples_leaf=1, min_samples_split=2,
                      min_weight_fraction_leaf=0.0, presort='deprecated',
                      random_state=1, splitter='best')
```

Теперь визуализируем наше обученное дерево решений. Узлы (ноды), где находится вопрос - называются вершинами, а где вопросов больше нет - это лист. В каждом узле хранятся объекты и предсказания, которые строятся как среднее по всем объектам, которые попали в этот узел.

Ввод [ ]:

```
from sklearn.tree import plot_tree


plt.figure(figsize=(10, 15))
plot_tree(tree, feature_names=features, filled=True);
```



Как же оно обучилось?

Чтобы наилучшим образом предсказывать стоимость дома, надо ввести функцию потерь - ошибка, которую мы будем стараться минимизировать. Ведь хочется, чтобы предсказанная стоимость дома совпадала с истинным значением

Ввод [ ]:

```
y
```

Out[14]:

```
0    4.526
1    3.585
2    3.521
3    3.413
4    3.422
Name: target, dtype: float64
```

Средне-квадратичная ошибка

Возьмем среднеквадратичную ошибку (mean squared error).

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(y_{true} - y_{pred})^2$$

Ввод [ ]:

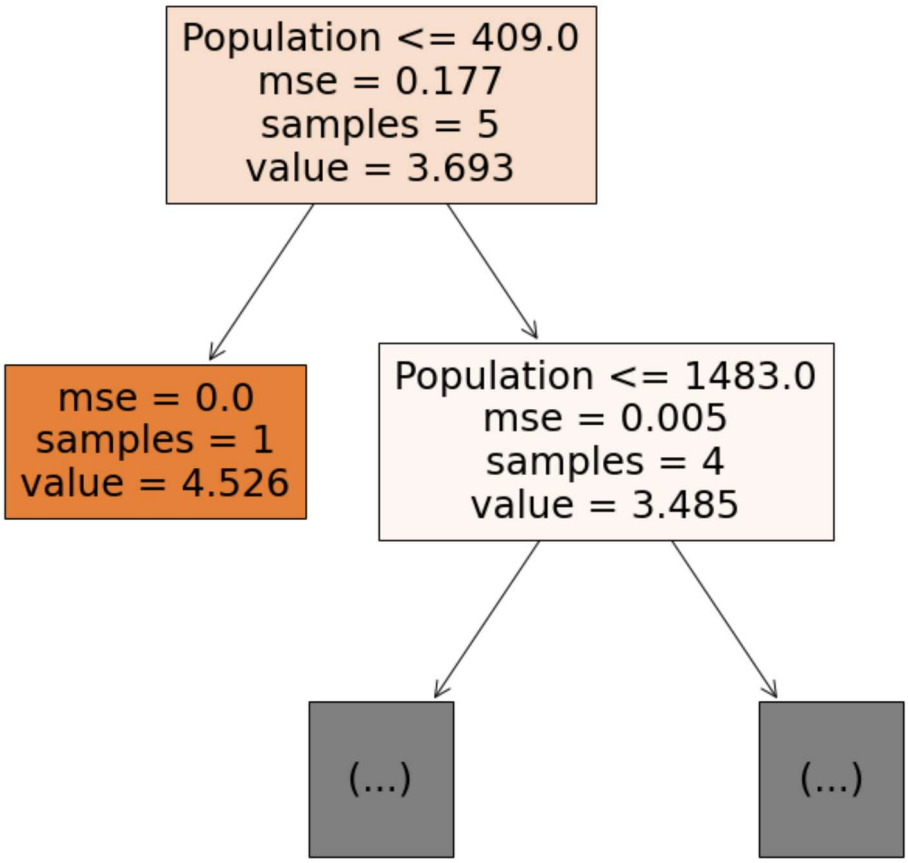
```
import numpy as np


def mse(true, pred):
    return np.mean(np.square(true - pred))
```

Population <= 409

Наше обученное дерево решило, что самый лучший первый вопрос к нашим данным - это Population <= 409. В этом случае происходит разбиение на две выборки:

Ввод [ ]:

```
plt.figure(figsize=(13, 12))
plot_tree(tree, feature_names=features, filled = True, max_depth=1);
```



Ввод [ ]:

```
df
```

Out[17]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

В одной 1 объект, который удовлетворяет этому условию.

Ввод [ ]:

```
df[df.Population <= 409]
```

Out[18]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526

Во второй 4 объекта, которые не следует этому условию.

Ввод [ ]:

```
df[~(df.Population <= 409)]
```

Out[19]:

	HouseAge	Population	target
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Корневой узел

Теперь можем посчитать среднеквадратичную ошибку в корневом узле, где находятся все 5 объектов. Считаем, что предсказание стоимости дома в этом узле - это среднее всех целевых переменных объектов, которые в узле находятся.

$$pred = \frac{4.526 + 3.585 + 3.521 + 3.413 + 3.422}{5} = 3.6934$$

Ввод [ ]:

```
print(f"Среднее предсказание в корневом узле равно {df['target'].mean()}")
```

```
Среднее предсказание в корневом узле равно 3.6934000000000005
```

$$MSE = \frac{(4.526 - 3.6934)^2 + (3.585 - 3.6934)^2 + (3.521 - 3.6934)^2 + (3.413 - 3.6934)^2 + (3.422 - 3.6934)^2}{5} = 0.17739$$

Ввод [ ]:

```
mse_root = mse(df['target'], df['target'].mean())
print(f"Среднеквадратичная ошибка в корневом узле равна {mse_root}")
```

```
Среднеквадратичная ошибка в корневом узле равна 0.17739543999999993
```

И ошибка, и среднее значение целевой переменной совпали с теми, что визуализировались на дереве решений в самом перевом узле.

Посмотрим, насколько уменьшается ошибка, если данным задать вопрос Population <= 409.

Ввод [ ]:

```
df_left = df[df.Population <= 409]
df_left
```

Out[22]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526

Левая выборка

В первой выборке 1 объект и его среднеквадратичная ошибка равна:

$$pred = \frac{4.526}{1} = 4.526$$

$$MSE = \frac{(4.526 - 4.526)^2}{1} = 0$$

Ввод [ ]:

```
print(f"Среднее предсказание в левой подвыборке после вопроса Population <= 409 равно {d

mse_left = mse(df_left['target'], df_left['target'].mean())
print(f"Среднеквадратичная ошибка в левой подвыборке после вопроса Population <= 409 рав
```

```
Среднее предсказание в левой подвыборке после вопроса Population <= 409 ра
вно 4.526
Среднеквадратичная ошибка в левой подвыборке после вопроса Population <= 4
09 равна 0.0
```

Правая выборка

Во второй правой выборке 4 объекта и их среднеквадратичная ошибка равна:

$$pred = \frac{3.585 + 3.521 + 3.413 + 3.422}{4} = 3.4852$$

$$MSE = \frac{(3.585 - 3.4852)^2 + (3.521 - 3.4852)^2 + (3.413 - 3.4852)^2 + (3.422 - 3.4852)^2}{4} = 0.00511$$

Ввод [ ]:

```
df_right = df[~(df.Population <= 409)]
df_right
```

Out[24]:

	HouseAge	Population	target
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Ввод [ ]:

```
print(f"Среднее предсказание в левой подвыборке после вопроса Population <= 409 равно {d

mse_right = mse(df_right['target'], df_right['target'].mean())
print(f"Среднеквадратичная ошибка в левой подвыборке после вопроса Population <= 409 рав
```

```
Среднее предсказание в левой подвыборке после вопроса Population <= 409 ра
вно 3.48525
Среднеквадратичная ошибка в левой подвыборке после вопроса Population <= 4
09 равна 0.005112187499999999
```

Прирост информации

Теперь хочется в целом понять, насколько данное разбиение помогает нам уменьшить ошибку, для этого нужно ввести понятие "прирост информации" (information gain). Он считается, как

$$IG = MSE_{root} - (\frac{n_{left}}{n} MSE_{left} + \frac{n_{right}}{n} MSE_{right})$$

где n_{left} - это количество объектов в левой ветке, n_{right} - это количество объектов в правой ветке, а n - количество объектов в корневом узле.

$$IG = 0.17739 - (\frac{1}{5} * 0 + \frac{4}{5} * 0.00511) = 0.1733$$

Ввод [ ]:

```
n_left = df_left.shape[0]
n_right = df_right.shape[0]
n = df.shape[0]

ig = mse_root - ((n_left / n) * mse_left + (n_right / n) * mse_right)
ig
```

Out[26]:

```
0.17330568999999993
```

HouseAge <= 50

А теперь попробуем другой вопрос, не тот, который выбрался самым лучшим по мнению этого дерева решений. К примеру, возьмем вопрос HouseAge <= 50.

В левой ветке 1 объект, который удовлетворяет этому условию.

Ввод [ ]:

```
df[df.HouseAge <= 50]
```

Out[27]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585

В правой ветке 3 объекта, которые не следует этому условию.

Ввод [ ]:

```
df[~(df.HouseAge <= 50)]
```

Out[28]:

	HouseAge	Population	target
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Корневой узел

Считаем среднеквадратичную ошибку в корневом узле, где находятся все 5 объектов, она будет такой же, как мы получали выше, потому что объекты в корне никак не меняются.

$$pred = \frac{4.526 + 3.585 + 3.521 + 3.413 + 3.422}{5} = 3.6934$$

$$MSE = \frac{(4.526 - 3.6934)^2 + (3.585 - 3.6934)^2 + (3.521 - 3.6934)^2 + (3.413 - 3.6934)^2 + (3.422 - 3.6934)^2}{5} = 0.17739$$

Ввод [ ]:

```
print(f"Среднее предсказание в корневом узле равно {df['target'].mean()}")
```

```
Среднее предсказание в корневом узле равно 3.6934000000000005
```

Ввод [ ]:

```
mse_root = mse(df['target'], df['target'].mean())
print(f"Среднеквадратичная ошибка в корневом узле равна {mse_root}")
```

```
Среднеквадратичная ошибка в корневом узле равна 0.17739543999999993
```

Левая выборка

Глянем на то, насколько уменьшается ошибка, если задаем вопрос HouseAge <= 50.

Ввод [ ]:

```
df_left = df[df.HouseAge <= 50]
df_left
```

Out[31]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585

$$pred = \frac{4.526 + 3.585}{2} = 4.0555$$

$$MSE = \frac{(3.585 - 4.0555)^2 + (3.521 - 4.0555)^2}{2} = 0.2213$$

Ввод [ ]:

```
print(f"Среднее предсказание в левой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50 равно {df_l

mse_left = mse(df_left['target'], df_left['target'].mean())
print(f"Среднеквадратичная ошибка в левой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50 равна
```

```
Среднее предсказание в левой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50 равно
4.0555
Среднеквадратичная ошибка в левой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50
равна 0.22137024999999994
```

Правая выборка

Ввод [ ]:

```
df_right = df[~(df.HouseAge <= 50)]
df_right
```

Out[33]:

	HouseAge	Population	target
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

$$pred = \frac{3.521 + 3.413 + 3.422}{3} = 3.452$$

$$MSE = \frac{(3.521 - 3.4852)^2 + (3.413 - 3.4852)^2 + (3.422 - 3.4852)^2}{3} = 0.00239$$

Ввод [ ]:

```
print(f"Среднее предсказание в правой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50 равно {df_

mse_right = mse(df_right['target'], df_right['target'].mean())
print(f"Среднеквадратичная ошибка в правой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50 равна
```

```
Среднее предсказание в правой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50 равн
о 3.452
Среднеквадратичная ошибка в правой подвыборке после вопроса HouseAge <= 50
равна 0.0023939999999999977
```

Прирост информации

И считаем прирост информации, чтобы объединить 3 значения среднеквадратичной ошибки в одно общее.

$$IG = 0.17739 - (\frac{2}{5} * 0.2213 + \frac{3}{5} * 0.00239) = 0.08743$$

Ввод [ ]:

```
n_left = df_left.shape[0]
n_right = df_right.shape[0]
n = df.shape[0]

ig = mse_root - ((n_left / n) * mse_left + (n_right / n) * mse_right)
ig
```

Out[35]:

```
0.08741093999999995
```

$$IG_{\text{population}} = 0.1733$$
$$IG_{\text{house\_age}} = 0.08743$$

$$IG_{\text{population}} > IG_{\text{house\_age}}$$

Прирост информации при вопросе HouseAge <= 50 получился меньше, чем при вопросе Population <= 409. значет выгодней задавать вопрос, связанный с населением.

Процесс построения дерева

Продемонстрируем процесс обучения дерева решения.

Дерево, чтобы получить самый полезный вопрос, проходится по всем признакам и по всем уникальным значениям в нём (либо по среднем между значениями) и выбирает тот вопрос, у которого прирост информации получился выше.

Ввод [ ]:

```
df
```

Out[36]:

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Сначала проход будет сделан по признаку HouseAge, найдутся все значения, при которых получаются уникальные разбиения.

Ввод [ ]:

```
split_values = sorted(df.HouseAge.unique())
split_values
```

Out[37]:

```
[21.0, 41.0, 52.0]
```

Можем сделать два уникальных разбиения:

1. с вопросом HouseAge <= 21

Ввод [ ]:

```
display(df[(df['HouseAge'] <= 21)], df[~(df['HouseAge'] <= 21)])
```

	HouseAge	Population	target
1	21.0	2401.0	3.585

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

2. с вопросом HouseAge <= 41

Ввод [ ]:

```
display(df[(df['HouseAge'] <= 41)], df[~(df['HouseAge'] <= 41)])
```

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585

	HouseAge	Population	target
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Вопрос HouseAge <= 52 не имеет смысла, т.к. все объекты оказываются в левой ветке.

Ввод [ ]:

```
display(df[(df['HouseAge'] <= 52)], df[~(df['HouseAge'] <= 52)])
```

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

	HouseAge	Population	target

Ввод [ ]:

```
def get_information_gain(df, feature, split):
    df_left, df_right = df[(df[feature] <= split)], df[~(df[feature] <= split)]

    n_left = df_left.shape[0]
    n_right = df_right.shape[0]
    n = df.shape[0]

    mse_root = mse(df['target'], df['target'].mean())
    mse_left = mse(df_left['target'], df_left['target'].mean())
    mse_right = mse(df_right['target'], df_right['target'].mean())

    ig = mse_root - ((n_left / n) * mse_left + (n_right / n) * mse_right)
    print(f'Прирост информации при вопросе {feature} <= {split} равен {ig}')
    return ig
```

Ввод [ ]:

```
information_gains = {}
```

Ввод [ ]:

```
feature = 'HouseAge'
for split in split_values[:-1]:
    information_gains[f'{feature} <= {split}'] = get_information_gain(df, feature, split
```

```
Прирост информации при вопросе HouseAge <= 21.0 равен 0.002937639999999963
6
Прирост информации при вопросе HouseAge <= 41.0 равен 0.08741093999999995
```

Ввод [ ]:

```
split_values = sorted(df.Population.unique())
split_values
```

Out[44]:

```
[322.0, 496.0, 558.0, 565.0, 2401.0]
```

Ввод [ ]:

```
feature = 'Population'
for split in split_values[:-1]:
    information_gains[f'{feature} <= {split}'] = get_information_gain(df, feature, split
```

```
Прирост информации при вопросе Population <= 322.0 равен 0.173305689999999
93
Прирост информации при вопросе Population <= 496.0 равен 0.072644006666666
62
Прирост информации при вопросе Population <= 558.0 равен 0.024041339999999
994
Прирост информации при вопросе Population <= 565.0 равен 0.002937639999999
9636
```

Теперь найдем максимальный прирост информации для нашего первого вопроса.

Ввод [ ]:

```
max(information_gains, key=information_gains.get)
```

Out[46]:

```
'Population <= 322.0'
```

Получилось, что самый полезный вопрос - Population <= 322.

По поводу того, что наш вопрос не совпал с вопросом из дерева с sklearn:
Мы брали уникальные значения признака, как пороговые значения, а в sklearn'e берутся средние арифметические двух значений, как раз вопрос Population <= 409 получился от значений 322 и 496 (т.к. $\frac{322+496}{2} = 409$), но при этом разбиения получаются одинаковые:

Ввод [ ]:

```
display(df[(df['Population'] <= 409)], df[~(df['Population'] <= 409)])
```

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526

	HouseAge	Population	target
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Ввод [ ]:

```
display(df[(df['Population'] <= 322)], df[~(df['Population'] <= 322)])
```

	HouseAge	Population	target
0	41.0	322.0	4.526

	HouseAge	Population	target
1	21.0	2401.0	3.585
2	52.0	496.0	3.521
3	52.0	558.0	3.413
4	52.0	565.0	3.422

Ввод [ ]:

```

```