Ф. 22.47 y_1, y_2 – два реш. ур-ия; $y_1(0)=1$ $y_1'(0)=0$

$(x+2)y'' - 3y' + y\sqrt{1-x} = 0$ $\quad y_2(0)=3$ $y_2'(0)=2$

а) на каком инт. продолж. реш?
б) сост. ли ФСР?
в) найти $W(y_1,y_2)|_{x=-1}$

а) по т. о сущ. и ед. з. Коши; $a_0(x)\neq 0$ => а) на $(-2, 1]$

б) $W(y_1,y_2)|_{x=0} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} \neq 0$
=> $W(y_1,y_2)\neq 0$ ни в одной т.
=> y_1, y_2 – лин. нез.
=> б) да, образуют

в) $W(y_1,y_2) = C\exp\left(\int \frac{3}{x+2}dx\right) =$
$= Ce^{3\ln(x+2)} = C(x+2)^3$

при $x=0$: $2 = C\cdot 8$ => $C = 1/4$
$W(y_1,y_2) = 1/4(x+2)^3$

=> в) $W(y_1,y_2)|_{x=-1} = 1/4$

Вопрос о кол-во нулей нетрив. реш. лин. ур-я 2-го порядка на I

Тн. Любое нетрив. реш. ур-ия $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, где $a_i(x), f(x)$ непр. на I, $a_0(x)\neq 0$ имеет не более конечн. числа нулей на отрезке (компакт.) I.

□ Пусть есть нетрив. реш. $y(x)$, имеющее беск. много нулей на $[a,b]$
По т. Больцано-Вейерштрасса ∃ сход. поп. $x_n \to x_0 \in [a,b]$; $y(x_n)=0$
т.к. $y(x)$ непр. в т. x_0, то $y(x_0) = \lim_{n\to\infty} y(x_n) = 0$

$x_1, x_2, \dots x_n, \dots$

Т. Ролля: $\exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$: $y'(\xi_1)=0$
$\exists \xi_2 \in (x_2, x_3)$: $y'(\xi_2)=0$
...
$\exists \xi_n \in (x_n, x_{n+1})$: $y'(\xi_n)=0$

$x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$
=> по т. о 2 мил.: $\xi_n \to 0$
$y'(x)$ непр => $y'(x_0) = \lim_{n\to\infty} y'(x_n) = 0$

Тогда по т. ед. з. Коши
$y(x_0) = y'(x_0) = 0$ => $y(x) \equiv 0$, но по усл. реш нетрив.
=> противоречие ■

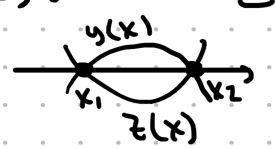
Теорема Штурма

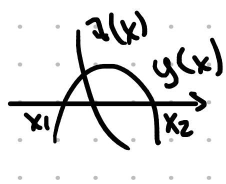
Пусть даны 2 ур-ия $y'' + Q_1(x)y = 0$ (1)
$z'' + Q_2(x)z = 0$ (2)

Q_1, Q_2 – непр. на промежутке I
и $Q_1(x) \le Q_2(x)$ на I

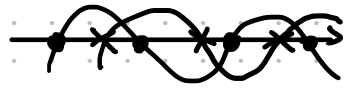
Пусть $y(x)$ – нетр реш (1)
$z(x)$ – нетр реш (2)
x_1, x_2 – два нуля $y(x)$, между ком. нет других нулей

Тогда 1) $z(x_1) = z(x_2) = 0$
либо
2) ∃ нуль $z(x)$ между x_1 и x_2





Вывод: Пусть N_1 – кол-во нулей $y(x)$ на I
N_2 – кол-во нулей $z(x)$ на I
Тогда $N_2 \geq N_1 - 1$



Возможно, N_1 или $N_2 = +\infty$

Утверждение

I) $y'' + Q(x)y = 0$
$Q(x) \leq 0$ и непр на I (кон или беск.)
Тогда $\forall$ нетр. реш. ур-ия (1) имеет не более 1 нуля на I

□ (1) $y'' + Q(x)y = 0$ N_1 – числ.н. нетрив. реш
(2) $z'' = 0$ N_2 – числ.н. нетрив. реш

Покажем, что $N_1 \leq 1$
Возьмем $z \equiv 1$ $N_2 = 0$ на любом интерв.
$N_1 \leq N_2 + 1 = 1$ ■

II) $y'' + Q(x)y = 0$ (2) N_1
$Q(x) \geq a^2 > 0$ и непр. на беск. промеж. I
Тогда $\forall$ нетрив. реш. имеет беск. много нулей на I

□ $z'' + a^2 = 0$ (1)
Докажем, $N_1 = +\infty$
$N_1 \geq N_2 - 1$

$z = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$
на беск. промеж. $N_2 = +\infty \Rightarrow N_1 = +\infty$ ■

Краевая задача для ур-й 2-го порядка

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$
$x \in [a, b]$
a_i, f непр. на $[a, b]$, $a_0 > 0$

Краевая задача: заданы два граничн. усл-я $y(a) = A$; $y(b) = B$
Реш. может не быть, может быть беск. много.

Например:

$y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$y(0) = y(2\pi)$
не имеет реш

$y'' + y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$C_1 = 0$ $C_2 \ \forall$
$y = C \sin x$ – реш
реш. беск. много

Утв $y''+Q(x)y=f(x) \quad x\in[a,b]$

Q, f – непр на $[a,b]$

Краевая задача $y(a)=A$, $y(b)=B$ имеет реш, причем единств

$\square$ а) существование

Решим две з. Коши для одн. ур-я

1) $y_1(a)=0 \quad y_1'(a)=1$

2) $y_2(b)=0 \quad y_2'(b)=1$

по т. сущ. и ед. обе ф-ции однозначно опр. на $[a,b]$

Тогда $\forall$ ф-я вида $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ – реш. ОУ.

Если $\varphi(x)$ – непр. реш. НУ, то $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\varphi(x)$ – реш. НУ

Подберем C_1, C_2: $y(a)=A$, $y(b)=B$

$C_1y_1(a)+C_2y_2(a)+\varphi(a)=A$

$C_1y_1(b)+C_2y_2(b)+\varphi(b)=B$

Нужно, чтобы $\Delta=\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b)\end{vmatrix}\neq 0$

Т.к. $y_1(a)=0$, то $y_1(b)\neq 0$

т.к. по следствию из т. Штурма реш. ОУ с $Q(x)\leq 0$ не может иметь больше 1 нуля на $[a,b]$

$y_2(b)=0 \Rightarrow y_1(b)\neq 0$; $W=\underbrace{y_1(a)}_{=0}\underbrace{y_2(b)}_{=0}-\underbrace{y_2(a)}_{\neq 0}\underbrace{y_1(b)}_{\neq 0}\neq 0$

б) единственность

Пусть $\exists$ 2 реш y_1 и y_2

$y_1''+Q(x)y_1=f(x)$

$y_2''+Q(x)y_2=f(x)$

$y_1(a)=A \quad y_1(b)=B$

$y_2(a)=A \quad y_2(b)=B$; $y_1-y_2=y(x)$

$y''+Q(x)y=0$

$y(a)=0$, $y(b)=0$.

реш. ур-я с $Q(x)\leq 0$ им. 2 нуля

$\Rightarrow$ противоречие сл. из т. Штурма $\blacksquare$

III $y''+Q(x)y=0$ (1) ; $Q(x)\leq \frac{1}{4x^2} \quad x\geq a>0$

Тогда $\forall$ нетрив. реш. (1) имеет ≤ 1 нуля при $x\geq a$

IV $y''+Q(x)y=0$ (2) ; $Q(x)\geq \frac{A}{x^2} \quad A>1/4 \quad x\geq a>0$

Тогда $\forall$ нетрив. реш. (2) имеет беск. много нулей

Пр. $z'' + \frac{A}{x^2} z = 0$ — ур-ие Эйлера

$x^2 z'' + Az = 0$

Замена $x = e^t$; $z'_x = z'_t e^{-t}$; $z''_{xx} = (z''_{tt} - z'_t) e^{-2t}$

$\cancel{e^{2t}}(z'' - z')\cancel{e^{-2t}} + Az = 0$

$z'' - z' + Az = 0$

$\lambda^2 - \lambda + A = 0$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4A}}{2}$

$A = 1/4$: $\lambda = 1/2$ кр. 2

$z = (C_1 + C_2 t)e^{t/2} = (C_1 + C_2 \ln x)\sqrt{x}$

$A > 1/4$: $\lambda_{1,2} = 1/2 \pm i\sqrt{A - 1/4} = \pm i\beta$

$z = (C_1 \cos x + C_2 \sin\beta t)e^{t/2} = (C_1 \cos\beta \sin x + C_2 \sin\beta \ln x)\sqrt{x}$

Д-во $\overline{\text{III}}$

□ $y'' + Q(x)y = 0$ (1) N_1

$z'' + \frac{1}{4x^2} z = 0$ (2) N_2

нужно д-ть, что $N_1 \leq 1$

$N_1 \leq N_2 + 1$

$z = (C_1 + C_2 \ln x)\sqrt{x}$

$C_2 = 0$ $z = \sqrt{x}$ не имеет нулей при $x > 0$

$N_2 = 0 \Rightarrow N_1 \leq 1$ ■

Д-во $\overline{\text{IV}}$

□ $y'' + Q(x)y = 0$ (2) N_2

$z'' + \frac{A}{x^2} z = 0$ (1) N_1

$\forall$ C_1, C_2 на беск. много нулей

$N_1 = +\infty$

$N_2 \geq N_1 - 1 = +\infty$ ■

Пр. 10.2 Д-ть: $\forall$ нетр. реш. ур-я $y'' + \frac{1}{4(x^2+1)} y = 0$
имеет на $[0, +\infty)$
не более кон. числа нулей

□ $[0,1]$ – кон. число нулей, т.к. на конечн. отрезке
на $[1, +\infty)$ – не более 1 нуля по $\overline{\text{III}}$
итого, не более кон. числа нулей ■

Пр. 10.3 Д-ть: $\forall$ нетрив. реш. ур-я $y'' + \frac{1}{1+x^2} = 0$
имеет беск. много нулей на $(0, +\infty)$

$\square$ Достаточно показать, что беск. много нулей на $[1, +\infty)$

$\frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{2x^2} = \frac{A}{x^2}$ $\quad A = 1/2 > 1/4 \quad \Rightarrow$ по $\underline{\text{IV}}$ беск. много нулей $\blacksquare$