Утв. 1 Пусть $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$; g, h гол. в т. z_0; z_0 – Н1 для $h(z)$,

тогда $\operatorname{res}_{z_0} f = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Утв. 2 Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ есть полюс порядка не более m для $f(z)$. Тогда $\operatorname{res}_{z_0} f = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}$

Утв. 3 Пусть $z_0 = \infty$ – УОТ f и $f(z) \sim \dfrac{A}{z^m}$, $z \to \infty$, $m \in \mathbb{N}$

Тогда если $m = 1$, то $\operatorname{res}_{\infty} f = -A$

если $m \geq 2$, то $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$

Пр. $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$, $g(z) = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z} + 5z^2$

$f(z) \sim g(z)$, $z \to 0$ но $\operatorname{res}_0 f = 0$

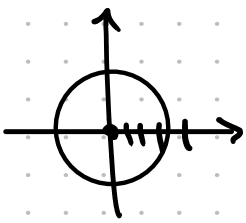
$\operatorname{res}_0 g = -1$

ОТ4 $f(z) = \dfrac{z}{\cos 1/z}$; вычисл. res во всех т. $z \in \mathbb{C}$, где $\exists$ res.

ОТ $= \{0, \infty, \text{нули знам.}\}$; $\cos 1/z = 0 \iff z = \dfrac{1}{\pi/2 + \pi k}$

Если $z \notin$ ОТ $\Rightarrow$ $f(z)$ гол. в z $\Rightarrow$ разл. в ряд Т

$\Rightarrow$ гл. часть отсутств. $\Rightarrow$ $\operatorname{res}_{z \notin \text{ОТ}} f = 0$



$\Rightarrow$ $\operatorname{res}_0 f = 0$

Д/м $g(w) = \dfrac{1}{\cos w} \overset{\text{гол.}}{=} a_0 + a_2 w^2 + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{w^2}{2} + \ldots} = 1 + \dfrac{w^2}{2} + \ldots$

в круге $|w| < \pi/2$ $\Rightarrow$ $g\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1 + \dfrac{1}{2z^2} + \ldots$ в $K: |z| > \dfrac{2}{\pi}$

$f(z) = \dfrac{z}{\cos 1/z} = z\left(1 + \dfrac{1}{2z^2} + \ldots\right) = \underbrace{z}_{\text{гл.}} + \underbrace{\dfrac{1}{2z} + \ldots}_{\text{пр.}}$ (*)

в $|z| > 2/\pi$

Если $f(z)$ гол. в $\mathring{U}(\infty)$ и $f(z) \sim Az^m$ ($A \neq 0$), $z \to \infty$, то ∞ – Пm

(*) $\Rightarrow$ $\operatorname{res}_{\infty} f = -c_{-1} = -1/2$

По утв.1: $f=\frac{z}{\cos 1/z}=\frac{g}{h}$; g, h рег в z_n

$h(z_n)=0$, $h'(z_n)=\left(-\sin\frac{1}{z_n}\right)\left(-\frac{1}{z_n}\right)^2\neq 0$

$$\Rightarrow \underset{z_n}{\operatorname{res}} f=\frac{g(z_n)}{h'(z_n)}=\frac{z_n}{\frac{1}{z_n^2}\cdot\sin\frac{1}{z_n}}=\frac{z_n^3}{\sin\frac{1}{z_n}}=\frac{1}{(\pi/2+\pi n)^3(-1)^n}$$

Утв.4 Если f имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ кон. число ОТ, то сумма вычетов, то $\sum_{k=1}^{n}\underset{z_k}{\operatorname{res}} f=0$

§13 №4 б)

$f(z)=z\cos^2\frac{\pi}{z}$ ОТ $=\{0,\infty\}$

Если $z\neq 0,\infty \Rightarrow f$ рег. в $z \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{z\notin ОТ}{\operatorname{res}}=0$

$f(z)=z\,\frac{1+\cos\frac{2\pi}{z}}{2}=$

$=\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\left(1-\frac{\left(\frac{2\pi}{z}\right)^2}{2}+\dots\right)=z-\frac{\pi^2}{z}+\dots \Rightarrow \underset{0}{\operatorname{res}}=c_{-1}=-\pi^2$

$\underset{\infty}{\operatorname{res}}=-c_{-1}=\pi^2$

Th. о вычетах

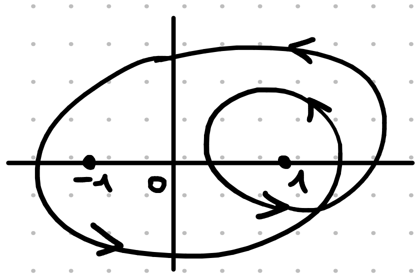
огр. с простой границей

Пусть 1) G – ОСПГ, ∂G положит. ориент.

2) $f(z)$ рег. в $\overline{G}$ за искл. кон. числа т. $z_1,\dots z_n\in G$

Тогда $\int_{\partial G} f\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z_k}{\operatorname{res}} f$

№5 $f(z)=\frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}$

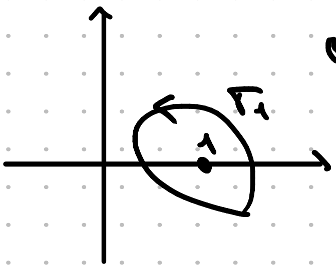


Γ_1 – малое кольцо

Γ_2 – большое кольцо

$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ – весь контур

Найти: а) $\int_{\Gamma_1} f\,dz$ б) $\int_{\Gamma} f\,dz=\int_{\Gamma_1} f\,dz+\int_{\Gamma_2} f\,dz$

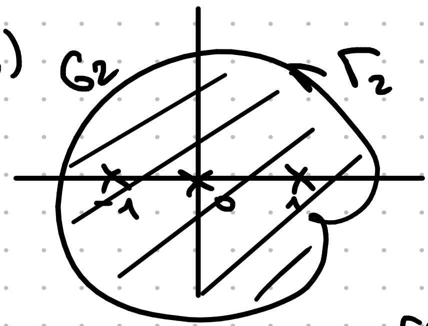


а) Применим Т. о вычетах к ОСТГ G_1:

$$\int_{\Gamma_1}\frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}=2\pi i\,\operatorname*{res}_{z=1}\frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z} =$$

$$\operatorname{res}\frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}\underset{\text{утв1}}{=}\frac{z^2\cdot\sin 1/z}{2z}\Big|_{z=1}=\frac{\sin 1}{2} \quad = \pi i\sin 1$$

Ответ а)



б) $$\int_{\Gamma_2} f\,dz=-\int_{\partial G_2} f\,dz=-2\pi i\,\operatorname*{res}_{\infty} f =$$

$f(z)$ гол. в К: $1<|z|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{1-1/z^2}\cdot\sin\frac{1}{z}\sim\frac{1}{z},\ z\to\infty$$

по утв.3: $\operatorname*{res}_{\infty} f=-1$ $= 2\pi i$

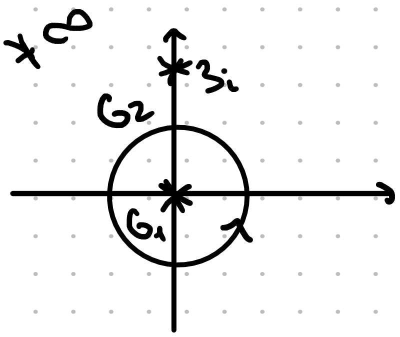
$$\int_{\Gamma} f\,dz=\int_{\Gamma_1} f\,dz+\int_{\Gamma_2} f\,dz=\pi i\sin 1+2\pi i$$

Ответ б)

§14 №2 17)

$$\oint_{|z|=1}\frac{(z-i)\sin\frac{1}{iz}}{(z-3i)^2}dz$$

$$\text{ОТ}=\{\overset{\text{СОТ}}{0},\ \overset{\text{УОТ}\ (\to\infty)}{\infty},\ \overset{\Pi_2}{3i}\}$$



$$\oint_{|z|=1} f\,dz=2\pi i\,\overset{G_1}{\operatorname*{res}_0 f}=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{3i} f+\overset{G_2}{\operatorname*{res}_{\infty} f}\right)$$

$$f=\frac{z-i}{(z-3i)^2}^{=g}\cdot\sin\frac{1}{iz}^{=h}$$

поэт. g, h в р. Лор в $\dot{B}(0)$

g пр. в $z=0$: $g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{z^n}$; $f=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{z^n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i_n z^n$ ← сложно!

$\Rightarrow$ посчитаем для G_2:

$$\oint_{|z|=1} f dz = -2\pi i\left(\operatorname{res}_{3i} f + \operatorname{res}_{\infty} f\right)$$

$$\operatorname{res}_{3i} f = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 3i}\left(\frac{(z-i)\sin\frac{1}{iz}}{\cancel{(z-3i)^2}}\cancel{(z-3i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\left(\sin\frac{1}{iz} + (z-i)\left(\cos\frac{1}{iz}\right)\left(-\frac{1}{iz^2}\right)\right) = \sin(-1/3) + 2i\cos(-1/3)\left(\frac{1}{9i}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\cos 1/3 - \sin 1/3$$

f гол. в к. $3<|z|<+\infty$; $f(z)\sim\frac{1}{iz^2}$, $z\to\infty$ $\Rightarrow$ $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$ (устр.3)

Тогда $I = 2\pi i\left(\sin 1/3 - 2/9 \cos 1/3\right)$

Ответ.