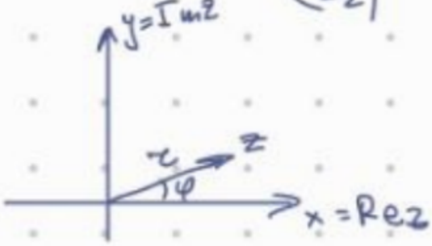
$\mathbb{R}^2: \overbrace{(x_1, y_1)}^{z_1}, \overbrace{(x_2, y_2)}^{z_2}$

$$\left.\begin{aligned} &0)\ z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \\ &1)\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\ &2)\ z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}\right\} \mathbb{C}$$

Сопряжение: $\bar{z} = x - iy$ — перестанов. с. $\pm$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\bar{z}_1)}{(\bar{z}_2)}$$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = |z|$ — модуль

$\varphi = \arg z$

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ — парам. ф. записи z

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$0 \ne z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}: \varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k \end{cases}$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$

$\operatorname{Arg} z = \{\arg z\}$

$\arg_0 z \in (-\pi, \pi]$

$\arg_0(1+i) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \arg_0(-1) = \pi$

$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$

$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$

$\frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\frac{x_1}{x_2}, 0\right)$

$(x, 0) = x$

Тригонометр. форма зап.

$e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$

$e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin\varphi,\quad z \in \mathbb{C}$

0) $e^{x+i0} = e^x$

1) $|e^z| = e^x \ne 0$

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

3) $(e^z)^n = e^{zn}$

4) $e^{z+2\pi i} = e^z$ — периодичность; $2\pi k i$ — единствен. пер.

Показат. форма записи

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

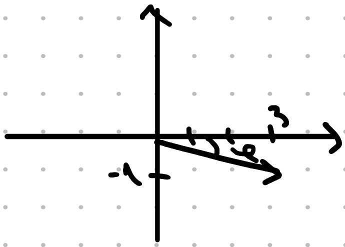
$\to z_1 = r_1 e^{i\varphi}$

Д/и z_1, z_2: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

модули умнож. арг. складыв.

Пр. §1 №1 2) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=$

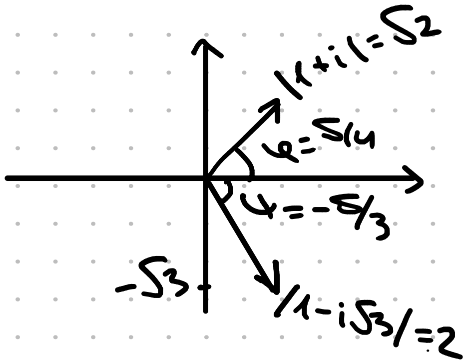


$=\frac{5(1-2i)}{5}+\frac{5(2+i)}{5}=3-i=\sqrt{10}\,e^{-i\,\mathrm{arctg}\,1/3}$

$|z|=\sqrt{10}$;

$\arg(3-i)=-\mathrm{arctg}\,1/3$

№2 4) $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}=$



$=\frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^9}{(2e^{-i\pi/3})^6}=\frac{2^{9/2}\cdot e^{9i\pi/4}}{2^6e^{-2\pi i}}=2^{-3/2}e^{i\pi/4}$

№3 4) $|z|^2-2iz+2i=0$ реш?

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)-2i(x+iy)+2i=0$

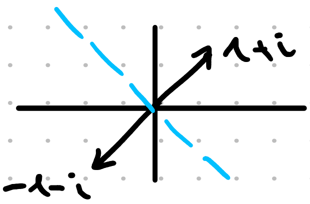
$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2y)+i(2-2x)=0+i\cdot 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2y=0 \\ 2-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=-1 \\ x=1 \end{matrix}$

Отв: 1 реш.: $z=1-i$

№4 2) $\begin{cases} |z^2-2i|=4 & (1) \\ |z+1+i|=|z-1-i| & (2) \end{cases}$

(2): $|z-(-1-i)|=|z-(1+i)|$



(2) $\Leftrightarrow y=-x$; $z=x-ix$

$|(x-ix)^2-2i|=4$

$|x^2+i^2x^2-2ix^2-2i|=4$

$|(-2i)(x^2+1)|=4 \Leftrightarrow x^2+1=2$

Ответ: $1-i$;
$-1+i$

Пр. Решить: $z^n = a$

случ.1: $a=0$: $\exists!$ реш $z=0$

дз: доказать

случ.2: $a \neq 0$

$z^n = a$ имеет n решения:

$$(\sqrt[n]{a})_k = \sqrt[n]{|a|\,e^{i\frac{\arg a + 2\pi k}{n}}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

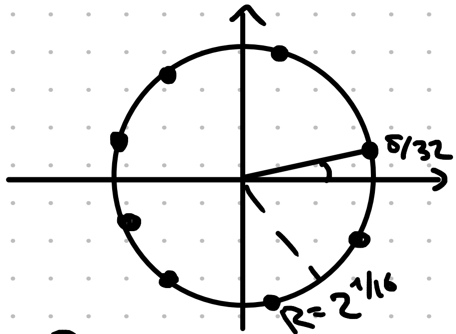
№5 4) $z^8 = \underbrace{1+i}_{=a} \neq 0$

$n = 8$

$|1+i| = \sqrt{2}$

$\arg(1+i) = \pi/4$ $\Rightarrow$ $(\sqrt[8]{1+i})_k = 2^{1/16} \cdot e^{i\frac{\pi/4 + 2\pi k}{8}}$

, $k = 0, 1, \dots 7$



№6 Пусть $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_k \in \mathbb{R}$

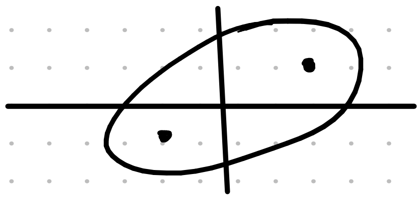
Д-ть: если z - корень, то $\bar{z}$ - корень

Имеем: $p(z) = 0 \Rightarrow \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n} =$$

$$= \underbrace{\overline{a_0}}_{=a_0} + \underbrace{\overline{a_1}}_{=a_1}\bar{z} + \dots + \underbrace{\overline{a_n}}_{=a_n}\bar{z}^n = p(\bar{z})$$ ч.т.д.

№2 3) $\begin{cases} |z - z_1| + |z - z_2| = 2a \\ a > 1/2\,|z_1 - z_2| \end{cases}$



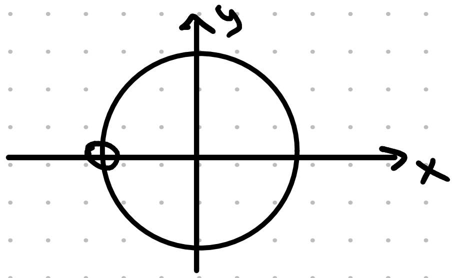
№9 4) $a > 0$

$\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0$ Найти все реш. в $\mathbb{C}$, изобразить их

$$\operatorname{Re} \frac{x+iy-a}{x+iy+a} = \operatorname{Re} \frac{(x+iy-a)(x-iy+a)}{(x+iy+a)(x-iy+a)} = \operatorname{Re} \frac{(x+iy-a)(x-iy+a)}{(x+a)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + ax - ax - a^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = \frac{x^2 - a^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = 0$$

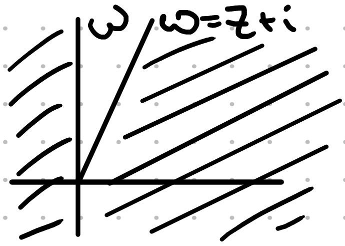
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ |x+a| + |y| \neq 0 \end{cases}$$

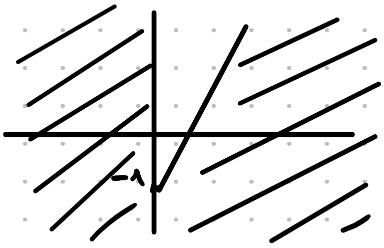


Пр. Мн-во реш?

$\pi/4 < \arg(z+i) < \pi/2$

$\pi/4 < \arg w < \pi/2$





II Элементарные ф-ции

$e^{i\pi/2} = i$

$e^{i\pi} = -1$;

$e^{-i\pi/2} = -i$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad$ $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\Rightarrow$ $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$ $\quad$ $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$ $\quad$ $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$

$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$ $\quad$ $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$

область опр не все

$$\cos(x + i\cdot 0) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} = \cos x$$

§3 №9 8) Д-ть: $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 =$

$$= \frac{(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2})}{2\cdot 2} - \frac{(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})}{2i\cdot 2i} =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{i(z_1+z_2)} + \cancel{e^{i(z_1-z_2)}} + \cancel{e^{i(z_2-z_1)}} + e^{i(-z_1-z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} -$$

$$- \cancel{e^{i(z_2-z_1)}} - \cancel{e^{i(z_1-z_2)}} + e^{i(-z_1-z_2)}\Big) =$$

$$= 1/2\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \cos(z_1+z_2)$$