Пр. $\dot x = -x(2xz^2+2y+3z)$

$\dot y = xz^3$

$\dot z = z(xz^2+y+z)$

$u_1 = y+xz^2$ – первый инт.

Как найти другой? $y+xz^2 = C_1$; $y = C_1 - xz^2$

$\dot x = -x(2C_1+3z)$

$\dot z = z(C_1+z)$

$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}\cdot\frac{C_1+z}{2C_1+3z}$; $\frac{dz(2C_1+3z)}{z(C_1+z)} = -\frac{dx}{x}$

$\frac{2C_1+3z}{z(C_1+z)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z+C_1}$; $A(z+C_1)+Bz = 2C_1+3z$

$\Rightarrow A=2$, $B=1$

можно показать, что таким образом получ. 2 независ. интеграла.

$\Rightarrow 2\ln|z| + \ln|z+C_1| = -\ln|x| + C_2$

$z^2(z+C_1) = 1/x \cdot C_2$

$C_2 = xz^2(z+C_1)$

$C_2 = xz^2(xz^2+z+y)$ $\Rightarrow$ $\underline{u_2 = xz^2(xz^2+y+z)}$

Итого $F = (y+xz^2, xz^2(xz^2+y+z))$

произв. непр. дифф. ф-я 2-х пер.

Общий вид перв. инт.-ла

Это и есть общ. реш. ур-я с частн. произв.

$-x(2xz^2+2y+3z)\frac{\partial u}{\partial x} + xz^3\frac{\partial u}{\partial y} + z(xz^2+y+z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

Почему эти инт-лы незав.?

Функции $u_1(x_1 \dots x_n), \dots u_m(x_1, \dots x_n)$ явл. незав. в $G \subset \mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$ $rg\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = m$ — число строк

$1 \le i \le m$

$1 \le j \le n$

Проверим:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 1 & 2xz \\ 2xz^4+yz^2+z^3 & xz^2 & x^2 4z^3+3z^2x+2xyz \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -xz^4 - yz^2 - z^3 = -z^2(xz^2+y+z) < 0$ если $x,y,z>0$ $\Rightarrow rg = 2$

$\Rightarrow$ первые инт. независ.

Ф. 1164

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \ (=dt) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \dot x = x \\ \dot y = y \\ \dot z = z \end{matrix}$$

2 первых инт.

$v_1=\frac{x+y}{z+x} \quad v_2=\frac{z-y}{x+y}$ — два завис. первых интеграла

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$; $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$; $\ln|y|=\ln|x|+C$; $y=C_1x$

Проверим: $u_1=y/x \quad u_2=\frac{z}{x}$ — два нез. перв. инт.

$$\begin{pmatrix} -y/x^2 & 1/x & 0 \\ -z/x^2 & 0 & 1/x \end{pmatrix} \qquad \Delta=1/x^2>0 \text{ при } x\neq 0$$

Теорема о кол-ве нез. перв. инт-ов верна в окр т.и, не явл. положением равновесия.

$$v_1=\frac{1+y/x}{z/x+1}=\frac{1+u_1}{1+u_2} \quad ; \quad v_2=\frac{z/x-y/x}{1+y/x}=\frac{u_2-u_1}{1+u_1}$$

Почему они завис?

$$v_2-\frac{1}{v_1}=\frac{z-y}{x+y}-\frac{z+x}{x+y}\cdot\frac{z+x}{x+y}=\frac{-y-x}{x+y}=-1$$

$$v_2=1-1/v_1 \text{ — завис.}$$

Применение первых интегралов для решения системы

Пр. $\dot x=-\frac{x}{y}$
$\dot y=y/x \qquad x,y>0$

перв. инт.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x}=-\frac{y^2}{x^2}$; $\frac{dy}{y^2}=-\frac{dx}{x^2}$; $-\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+C$; $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$$x=\frac{1}{C-1/y}=\frac{y}{Cy-1}$$

$\Rightarrow \dot y = Cy-1 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=Cy-1$; $\frac{dy}{Cy-1}=dt$; $\frac{C_1dy}{C_1y-1}=C_1dt$

$\Rightarrow \ln|C_1y-1|=C_1t+C_2$

$C_1y-1=C_2e^{C_1t}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{C_1}+\frac{C_2}{C_1}e^{C_1t}$

Тогда

$$x=\frac{1/C_1+C_2/C_1\cdot e^{C_1t}}{C_2e^{C_1t}}$$

$$x=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1t}$$

Ответ: $x=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1t}$
$y=\frac{1}{C_1}+\frac{C_2}{C_1}e^{C_1t}$

Дано ур-ие с частными производными (n=3). Найти общее решение и решить з. Коши.

$n=2$:

$$f_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+f_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$u(x_0(t),y_0(t))=u_0(t)$$

Найти реш, заданное на данной кривой.

Обычно t – это x или y

напр, $u(x,y_0(x))=u_0(x)$

или

$u(x_0(y),y)=u_0(y)$

Пр. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$u(x,x^2-x+1)=(x-1)^4$

$\dot{x}=1$, $\dot{y}=1$; $\frac{dy}{dx}=1$; $y-x=C$

первый инт. $u=y-x$

Общее реш. ур-я

$u=F(y-x)$; F – произв. непр. дифф. ф-я одной перем.

Найдем: F такую, что $F(x^2-x+1-x)=(x-1)^4$

$F((x-1)^2)=(x-1)^4 \Rightarrow F(\xi)=\xi^2$

Реш. з. Коши: $u=(y-x)^2$

Пр. $2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$\dot{x}=2$, $\dot{y}=3$; $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$; $3x-2y=C_1$, $u=3x-2y$ $\Rightarrow$ Общее реш. $u=f(3x-2y)$

1) $u=\sin y$, $x=0$

$f(-2y)=\sin y \Rightarrow f(\xi)=-\sin\frac{\xi}{2} \Rightarrow u=-\sin\frac{3x-2y}{2}$

2) $u=e^x$, $3x-2y=5$

$f(5)=e^x$???

решений нет!

Линии уровня первого инт (через них этот смысл) наз. характеристиками ур-я.

Если начальное усл. задано на кривой, не явл. характ., реш. з. Коши сущ. и единств.

Если на хар-ке, получается плохо.

3) $u=10$, $3x-2y=5$

$f(5)=10$ – подходит $\forall$ ф-я f: $f(5)=10$

$n=3$

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + f_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

З. Коши:

$$u(x_0(t,s), y_0(t,s), z_0(t,s)) = u_0(t,s)$$

Реш. задано на поверхности в $\mathbb{R}^3$

Обычно в кач. t и s – какие-то пары из x, y, z

Например, $u(x, y, z_0(x,y))$

Пр. $x\frac{\partial u}{\partial x} + (y+xz)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$u = 1-x$ при $z = x+y$

$x\frac{\partial u}{\partial x} + (y+xz)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ $\quad u=1-x$ при $z=x+y$

① $\dot x = x$

② $\dot y = y + xz$

③ $\dot z = z$

③:① $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$ $\quad \frac{z}{x} = C$ $\quad u_1 = \frac{z}{x}$ – 1ый Іой ф-я

ф сосм ф

$z = C_1 x$

① $\dot x = x$

③ $\dot z = C_1 x$

② $\dot y = y + C_1 x^2$

②:① $\frac{dy}{dx} = \frac{y + C_1 x^2}{x} = \frac{y}{x} + C_1 x$

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = C_1 x$ $\quad \dots \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = C_1 dx$

$d\left(\frac{y}{x}\right) = C_1 dx$

$\frac{y}{x} = C_1 x + C_2$

$u_2 = \frac{y}{x} - z$ – 2ой Іой ф-я

3/4

Общее реш. $u = F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x} - z\right)$

$F(1 + y/x, y/x - x - y) = 1 - x$

$\xi = 1 + y/x \qquad y = (\xi - 1)x$

$\eta = y/x - x - y \qquad \eta = \xi - 1 - x - (\xi-1)x = \xi - 1 - \xi x$

$x = \frac{\xi - 1 - \eta}{\xi}; \quad y = \frac{(\xi-1)(\xi-1-\eta)}{\xi}$

$F(\xi, \eta) = 1 - x = \frac{\xi - \xi + 1 + \eta}{\xi} = \frac{\eta + 1}{\xi}$

$x = \frac{\eta - \xi + 1}{-\xi} = \frac{\xi - \eta - 1}{\xi}$

Реш з. Коши

$$u = \frac{y/x - z + 1}{z/x} = \frac{y - zx + x}{z}$$