Реш. лин. ур-е 2-го порядка

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \qquad x\in I$

a_0, a_1, a_2, b — непр.

Предположим, мы угадали y_1 — реш. ОУ (ищем в виде $e^{\alpha x}, x^k, ax+b$ и т.д.)

Найдем ОРОУ.

Ф-ла Лиувилля-Остроградского.

$$W(y_1,y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt} = C\cdot\varphi(x)$$

y_1 — найденное реш

y — произв. реш.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x);\quad \frac{y_1y'-yy_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2};\quad \left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2};\quad \frac{y}{y_1} = C_2\int\frac{\varphi(x)}{y_1^2}dx + C$$

$\Rightarrow$ ОРОУ: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

ОРНУ: вариация постоянных

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases} \qquad \Delta = W(y_1,y_2) \ne 0$$

Пр. $2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x} \qquad x>0$ (чтобы $a_0\ne 0$)

ЧРОУ: $y_1 = e^{-x}$; y — произв. реш.

$$W(y_1,y) = C\exp\Big(\underbrace{-\int_{x_0}^{x}\frac{4x+1}{2x}dx}_{=-I}\Big) = C\exp\left(-2x - \frac{\ln x}{2}\right) = Ce^{-2x}\cdot x^{-1/2} = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$$

$$\left[I = \int\frac{4x+1}{2x}dx = \int 2\,dx + \int\frac{1}{2x}dx = 2x + \frac{1}{2}\ln x + C_1\right]$$

Делим на e^{-2x}:

$$\underbrace{\frac{y'e^{-x}+ye^{-x}}{e^{-2x}}}_{=\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)'} = Cx^{-1/2} \Rightarrow \frac{y}{(e^{-x})} = Cx^{1/2} + C_1$$

$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x}\sqrt{x}$ — ОРОУ

$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-x}\sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - C_2'(x)e^{-x}\sqrt{x} + \frac{1}{2}C_2'(x)e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-x}}{2x} \end{cases} \quad \oplus$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} C_2'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \end{matrix};\quad \begin{matrix} C_1'(x) = -1 \\ C_1(x) = -x + C_1 \end{matrix}$$

ОРНУ

$\Rightarrow y = (-x + C_1)e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2)e^{x}\sqrt{x} =$

$= C_1e^{-x} + C_2e^{x}\sqrt{x} + xe^{-x}$

Ответ.

Пр. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=x(\ln x-1)^2$

$x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=x(\ln x-1)^2, \quad x>e$

ЧРОЗ: $y_1=x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{-x}{x^2(\ln x-1)}dx} = C(\ln x-1)+C$$

2/4

$$\frac{y_1y'-yy_1'}{y_1^2} = \frac{C(\ln x-1)}{x^2} \qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' \qquad C\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$$

$$\frac{y}{y_1} = C\frac{\ln x}{x}+C_1 \qquad y=C_1x+C_2\ln x$$

ОРНУ: $y=C_1(x)x+C_2(x)\ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)x+C_2'(x)\ln x=0 \\ C_1'(x)+C_2'(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln x-1}{x} \quad \Big| \cdot x \end{cases} \ominus$$

$C_2'(x)(\ln x-1)=1-\ln x$

$C_2'(x)=-1$

$C_2(x)=-x+C_2$

$C_1'(x)=\frac{\ln x}{x}$

$C_1(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+C_1$

$$y=\left(\frac{\ln^2 x}{2}+C_1\right)x+(-x+C_2)\ln x = C_1x+C_2\ln x + \frac{x\ln^2 x}{2}-x\ln x$$

Ответ

Пр. $(2x+3)y''-2y'-\frac{6}{x^2}y=3(2x+3)^2 \qquad x>0$

ищем y_1 в виде x^k

$k(k-1)(2x+3)x^{k-2}-2kx^{k-1}-6x^{k-2}=0$

$(2x+3)k(k-1)-2kx-6=0$

$2k(k-1)-2k=0$

$3k(k-1)-6=0$

$2k-2-2=0 \Rightarrow k=2 \Rightarrow \underline{y_1=x^2}$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\exp\left(\int\frac{2}{2x+3}dx\right)=C(2x+3)+C_1$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(2x+3)}{x^4} = \frac{2C}{x^3}+\frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = \frac{2C}{-2}x^{-2}+\frac{3C}{-3}x^{-3}+C_1 = C\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+C_1$$

$\Rightarrow y=C_2(1+1/x)+C_1x^2$ — ОРОУ

$y=C_1(x)x^2+C_2(x)(1+1/x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x)(1+1/x) = 0 \\ 2C_1'(x)x - \frac{1}{x^2}C_2'(x) = 3(2x+3) \quad \Big| \cdot x \end{cases}$$

$$2C_1'(x)x^2 - C_2'(x)\cdot 1/x = 3x(2x+3)$$

$$\Rightarrow C_2'(x)\left(-2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right) = 3x(2x+3); \quad -C_2'(x)(2+3/x) = 3x(2x+3);$$

$$\Rightarrow C_2'(x) = -3x^2 \qquad C_1'(x) = 3(1+1/x)$$

$$C_2(x) = -x^3 + C_2 \qquad C_1(x) = 3x + 3\ln x + C_1$$

ОРНУ: $y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)(1+1/x)$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = C_1x^2 + C_2(1+1/x) + 2x^3 + 3x^2\ln x$

Уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad \nu = \text{const}$$

T1 **1.** Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0; \infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

Пусть y_1, y_2 — 2 таких реш. (от противного)

$$W(y_1, y_2) = C\exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) = C/x$$

$C \neq 0$ т.к. они лин. нез

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C/x \quad ; \quad y_1y_2' - y_1'y_2 \text{ — огр. в окр. } 0$$

$\Rightarrow$ <u>ч.т.д</u>

Приведение ур-ия 2-го порядка к виду, не содерж. y'

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\Rightarrow z'' + Q(x)z = 0$$

Преобр. Лиувилля (замена неизв. ф-ии)

$$y = z\exp\left(-1/2\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)$$

$$y = z\exp\left(-1/2\int \frac{dx}{x}\right) = zx^{-1/2}$$

$$y' = z'x^{-1/2} - 1/2\, zx^{-3/2}$$

$$y'' = z''x^{-1/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} + 3/4\, zx^{-5/2} = z''x^{-1/2} - z'x^{-3/2} + \frac{3}{4}zx^{-5/2}$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Подставляем:

$$z''x^{3/2} - \cancel{z'x^{1/2}} + 3/4\, z x^{-1/2} + \cancel{z'x^{1/2}} - 1/2\, z x^{-1/2} + (x^2 - \nu^2) z x^{-1/2} = 0$$

$$z''x^{3/2} + 1/4\, z x^{-1/2} + z x^{3/2} - \nu^2 z x^{-1/2} = 0$$

$$z'' + z\left(1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2}\right) = 0$$ — ур-ие Бесселя после замены

при $\nu = \pm 1/2$:

$$z'' + z = 0$$

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x \Rightarrow y = \frac{C_1 \cos x + C_2 \sin x}{\sqrt{x}}$$

при <u>всех</u> ост. ν решения не выр. элементарн. ф-ями.

З.Коши для лин. ур-я n-го порядка

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

все ф-ии непр. на I

$a_0(x) \neq 0$

Th. Реш. З.Коши единств. на <u>всем</u> пром. I

(в отличие от Th. общего ур-ия, где З.Коши