Дисп. и другие числ. хар-ки

Df Если у с.в. ξ $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, тогда $\overset{\circ}{\xi} = \xi - \mathbb{E}\xi$ — центр. с.в. k-ый (начальн.) момент $\nu_k = E[\xi^k]$ и k-ый центр. момент $\mu_k = \mathbb{E}[\overset{\circ}{\xi}^k]$

Если ξ — дискр., то $\nu_k = \sum_n x_n^k P(\xi = x_n)$, $\mu_k = \sum_n (x_n - E\xi)^k P(\xi = x_n)$

Если ξ - абс. непр., $\nu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f_\xi(x)dx$, $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} (x - E\xi)^k \cdot f_\xi(x) dx$.

Df Дисперсией с.в. наз. её 2-ой центр. мом. $D\xi = E(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$

Св-ва
1. $D\xi \geq 0$, $D\xi = 0 \Leftrightarrow P(\xi = const) = 1$, т.е. $\xi \overset{п.н.}{=} const$
2. $D\xi = E(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = E\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$
3. $D(a + b\xi) = b^2 D\xi$
4. с.в. ξ и η — незав., то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

   $\square$ $D(\xi+\eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta - \mathbb{E}\xi - E\eta)^2 = E((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + (\eta - E\eta)^2 - 2\underbrace{(\xi + E\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)}_{\text{незав. как ф. от нез. вел}}) = D\xi + D\eta + 0$

   Если нуж. $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$, то для рав-ва дост. попарн. незав. $\blacksquare$
5. $E\xi$ минимизирует $E((\xi - a)^2)$, $a \in \mathbb{R}$

$E(\xi^2 - 2\xi a + a^2) = E\xi^2 - 2aE\xi + a^2$

Опр. Ковариация ξ и η: $cov(\xi\eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

если ξ, η - независ., то $cov\xi\eta = 0$

Упр: верно ли обр?

Далее исп., что $\mathbb{D}\xi = cov(\xi \cdot \xi)$

$(cov.. = 0)$

Если $\xi_1, \ldots \xi_n$ - попарно некоррелир-ов, то $\mathbb{D}(\xi_1 + .. + \xi_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}\xi$

Преобразования $\mathbb{E}(..)$ и $\mathbb{D}(..)$

Пусть $\eta = A\xi + b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\eta = A\mathbb{E}\xi + b$

Опр. $\mathbb{D}\xi = [cov(\xi_i, \xi_j)]_{i,j=1}^n$

$\mathbb{D}\eta = \mathbb{E}((A\xi - A\mathbb{E}\xi)(A\xi - A\mathbb{E}\xi)^T) = A\mathbb{D}\xi A^T$

В частности,

$\forall a \in \mathbb{R}$ дисп$(a\xi)$: $0 \leq D(a\xi) = a^T \mathbb{D}\xi a \Rightarrow \mathbb{D}\xi \geq 0$

№1 Задача о совпадениях

(n конвертов, n писем)

η - сл. вел-во совп., $\mathbb{E}\eta$, $\mathbb{D}\eta$ - ?

Пусть $\eta_i = \mathbb{I}\{i$-ое адресат совпал$\}$

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Rightarrow \mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i$$

$$\mathbb{E}\eta_i = P(\eta_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = 1/n$$