§ Кинет. момент

$$\mathbf{K}_O=\sum_i \mathbf{r}_{Oi}\times m_i\mathbf{V}_i,\quad \mathbf{K}_O = m\mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{V}_O+\int \hat{r}^T\hat{r}\,dm \qquad \vec{\rho}\times\vec{\omega}=\hat{\rho}\omega$$

§ Тензор инерции

$$\mathbf{J}_O^{xyz} = \int \hat{r}^T\hat{r}\,dm = \begin{pmatrix} J_O^{xx} & J_O^{xy} & J_O^{xz} \\ J_O^{yx} & J_O^{yy} & J_O^{yz} \\ J_O^{zx} & J_O^{zy} & J_O^{zz} \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

(момент инерции отн. оси u)
$J_u=\sum_i m r_i^2=\int r^2 dm$

называется *тензором инерции твердого тела* относительно базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Элементы этой матрицы определяются следующими формулами:

Физ. смысл:
при вращ. движ.
$\bar{K}_O = J_O\cdot\bar{\omega}$

$$\begin{aligned} J_o^{xx} &= \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2), & \overbrace{J_o^{xy} = J_o^{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i,}^{\text{центробежные моменты инерции}} \\ J_o^{yy} &= \sum_i m_i(z_i^2+x_i^2), & J_o^{yz} = J_o^{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i, \qquad (5.4^*) \\ J_o^{zz} &= \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2), & J_o^{zx} = J_o^{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i. \end{aligned}$$

Через тензор инерции $\mathbf{J}_O$ можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку O. Обозначая через $\mathbf{e}$ единичный вектор, указывающий направление оси, и учитывая формулу (5.5), получаем

$$J_e = e^T J_O e \qquad (5.6)$$

§ Преобр. тензора ин. при повороте базиса.

$$\underbrace{r'_{Oi}=S r_{Oi}}_{\text{орт. матр}} \Rightarrow J'_O = S J_O S^T$$

§ Главные моменты

Th. ∀ т. O тела ∃ орто базис, в котором тензор инерции имеет диаг. вид.

$$J_O=\begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C\end{pmatrix};$$ A, B, C – главные моменты инерции (собств. знач.)

оси указ. базиса – главные оси (собств. векторы)

Th. для A, B, C действ. правило треуг ($A+B \geq C$ и т.д.)

§ Теорема Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции

Поэтому формула преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса из центра масс твердого тела записывается в виде

$\bar{\rho}=\bar{\rho}'+\bar{a}$

$$\mathbf{J}_O=\mathbf{J}_C+\cancel{m(\mathbf{r}_{OC}^2\mathbf{E}-\mathbf{r}_{OC}\mathbf{r}_{OC}^T)}\ \underbrace{m\hat{a}^T\hat{a}}_{\text{тензор квадратов расстояния}} \qquad (5.10)$$

$j(\bar{\rho})=\hat{\rho}^T\hat{\rho}$

§ Эллипсоид инерции

В произв. напр., задаваемом вектором $\bar{e}$, отложим отрезок длиной $\frac{1}{\sqrt{J_e}}$; гео. место таких точек называется эллипсоидом инерции

✓ось симметрии однородного тела является главной для всех точек данной оси;

✓для точек, лежащих в плоскости материальной симметрии, главной является ось, перпендикулярная этой плоскости.

Кинематические моменты и энергия тв. тела.

Кин. момент отн. произв. полюса

$$\mathbf{K}_O = m\mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_O + \mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \overline{K}_O = J_C \cdot \overline{\omega} + m\overline{r}_{OC} \times \overline{V}_C$$

Если полюс совп. с неподвиж. т. тела или центром масс:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_C = \mathbf{J}_C\boldsymbol{\omega}$$

Кин. энергия тв. тела с неподвиж. точкой O:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega}$$

По т. Кёнига (С неподвиж.)

$$T = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}^T J_C \overline{\omega}$$

Динамические ур-ия вращ. движ. тв. тела

Движ. тв. тела с неподвиж. т. O в инерц. сист. отсчета

$$\dot{\overline{K}}_O = \overline{M}_O^{ex} \quad ; \quad \dot{\overline{K}}_O = \underbrace{J_O\dot{\overline{\omega}}}_{\text{отн. ск. векк. } \overline{K}_O} + \underbrace{\overline{\omega} \times J_O\overline{\omega}}_{\text{переносн. ск. вект. } \overline{K}_O}$$

=> Динамические уравнения Эйлера:

$$J_O\dot{\overline{\omega}} + \overline{\omega} \times J_O\overline{\omega} = \overline{M}_O^{ex}$$ – связывают угл. скорость тела с моментом действ. сил.

В проекциях на гл. оси:

$$A\dot{p} + (C-B)qr = M_1$$
$$B\dot{q} + (A-C)rp = M_2$$
$$C\dot{r} + (B-A)pq = M_3$$

Теперь точка O не неподвижна:

$$J_C\dot{\overline{\omega}} + \overline{\omega} \times J_C\overline{\omega} = \overline{M}_C^{ex}$$; J_C – центральный тенз. ин.
$\overline{M}_C^{ex}$ – момент отн. центра масс

Движ. динамически симметр. тела

Определение. Твердое тело называется *динамически симметричным относительно точки O, если равны друг другу два из главных моментов инерции тела для точки O.*

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$ – плоск. дин. симм. тела
– ось дин. симм. тела

Такое движ. описывается ур-ями:

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{K}_O \times \mathbf{e}_3}{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$$

– замкн. сист. ур-ий, если момент сил, действ. на тело зависит только от напр. оси симм. e_3 и вектора кин. мом. K_O.

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{K}_C \times \mathbf{e}_3}{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C$$

аналогично отн. центра масс

Случай Эйлера

В задаче о движения твердого тела с неподвижной точкой *O случай Эйлера* определяется условием $\mathbf{M}_O = 0$ и называется *движением тела по инерции*.

внешние моменты равны нулю

Первые интегралы движения

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2 = \text{const},$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = \text{const}.$$

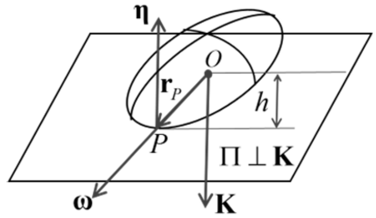
Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и движения, при котором эта ось вращается вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют **прецессией**. Прецессия называется **регулярной**, если вращение тела вокруг неизменно связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.

Движение динам. симм. тела в случае Эйлера явл. регулярной прецессией.

В случае Эйлера ур-ия вращ. движ. тела интегрируемы при $\forall$ нач. условиях

Геом. интерпретации Пуансо и Мак-Куллага (для случ. Эйлера)

Пуансо: В интерпретации Пуансо (рис. 5.8) движение твердого тела описывается движением жестко связанного с ним эллипсоида инерции, и в случае Эйлера этот эллипсоид катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента тела.



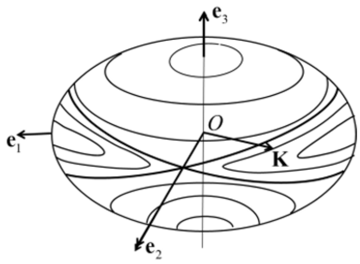
Мак-Куллаг

Первые инт-лы записываются через проекции K на гл. оси

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2, \quad \text{— сфера}$$

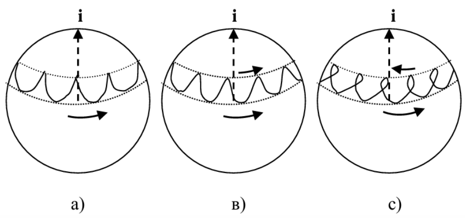
$$\frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T. \quad \text{— эллипсоид Мак-Куллага}$$

Линии пересечения сферы (5.36) с эллипсоидом (5.37) представляют собой траектории неподвижного в инерциальном базисе вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ на поверхности неподвижного в теле эллипсоида Мак-Куллага. Эти траектории являются замкнутыми кривыми и разделены двумя сепаратрисами, пересекающимися по главной оси $\mathbf{e}_2$, соответствующей среднему по



Случай Лагранжа

Случаем Лагранжа называется движение динамически симметричного относительно неподвижной точки *O* тела (волчка) в однородном поле тяжести, когда центр тяжести волчка *C* лежит на оси динамической симметрии $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ на расстоянии L от неподвижной точки (рис. 5.10).



Динамический винт

В общем случае динамика твердого тела относительно инерциального базиса описывается уравнениями

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}, \quad \mathbf{J}_C\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}_C\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C . \qquad (5.66)$$

Хотим упростить... (Найти простейшую систему действ. на тело сил для которой F и Mc такие же)

Вспомним ф-лу $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_C - \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}$

и найдем точку T, относительно которой момент $\mathbf{M}_T$ параллелен вектору $\mathbf{F}$.

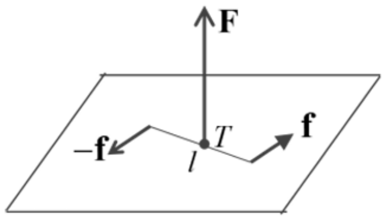
$$\mathbf{h}_T = \mathbf{F}\times\mathbf{M}_C / F^2 , \qquad (5.68)$$

Таким образом, точки T, для которых $\mathbf{M}_T \parallel \mathbf{F}$, образуют целую прямую, параллельную вектору $\mathbf{F}$, расположенную на расстоянии (5.68) от точки C. Эта прямая называется *осью динамического винта* (рис. 5.14).

Динамический винт — тройка векторов $\{\bar{F}, \bar{f}, -\bar{f}\}$

$\bar{F}$ — гл. вектор действ. на тело сил

$\bar{f}, -\bar{f}$ — реализуют момент винта M_T



Отметим, что частными случаями динамического винта являются *равнодействующая* ($\mathbf{F}\neq 0$, $\mathbf{M}_T = 0$), *пара сил* ($\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M}_T \neq 0$) и *векторный нуль* ($\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M}_T = 0$).

Лагранжева механика

Р/м несвободную мех. систему из мат. точек и тв. тел.

$\bar{R} = (R_1, .. R_n)^T$ — вектор, задающий полож. сист. отн. $Oi_1i_2i_3$.

Если сист. состоит из j мат. точек и l тв. тел, то $\dim \bar{R} = 3j + 6l$. Положение отд. эл-ов задаются ф-ями $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{R})$

<u>Опр.</u> Механич. связи — ограничения на $\bar{R}$ и $\dot{\bar{R}}$ системы.

$f_k(\dot{\bar{R}}, \bar{R}, t) \overset{=}{\leq} 0 \quad k = 1, \dots m$

(=) — удерживающие связи

(≤) — неудерживающие связи

далее будут только такие

Если связей нет, то система свободная.

Удерживающие связи

- Конечные: $f_k(\bar{R}, t) = 0$
- дифференциальные: $f_k(\dot{\bar{R}}, \bar{R}, t)$

интегрируемые, если представимы в виде конеч. связи

$F(\bar{R}, t) - C = 0 \qquad (6.6)$

з-ит от $\dot{\bar{R}}$ линейно

$$f = \mathbf{a}^T\dot{\mathbf{R}} + b = \sum_{i=1}^{S} a_i \dot{R}_i + b = 0 , \qquad (6.4)$$

$\bar{a} = \bar{a}(\bar{R}, t)$ — s-мерн в-р-ф-ия

$b = b(\bar{R}, t)$ — скалярн. ф-ия переменных $\bar{R}, t$

Связь

- Стационарн. f_k з-т от t
- Нестационарн. f_k не з-ит от t

Все конечные и интегрируемые кинематические связи называются *голономными*, а все остальные связи – *неголономными*. В свою очередь, системы без связей и системы, на которые наложены *только* голономные связи, *называются голономными*, а при наличии хотя бы одной неголономной связи – *неголономными*.

Числом степеней свободы механической системы называется разность между размерностью S вектора $\mathbf{R}$, задающего положение системы без связей, и числом m *независимых* связей, наложенных на систему:

$$n = S - m. \tag{6.13}$$

если сист. голономна: из связей находим m переменных R_i, остальные n R_k – независимые, (и время t).
=> положение сист. будет однозн. определяться n перемен.
Произв. набор из n незав. перем. $q^T = (q_1, \dots q_n)$: $\bar{R} \underset{\text{биекция}}{=} \bar{R}(\bar{q}, t)$
которыми опр. полож. сист.
называется обобщ. коорд. голономной сист.

Таким образом, *для голономной системы число степеней свободы равно числу независимых обобщенных координат, однозначно определяющих положение системы в любой заданный момент времени.* Неголономные системы указанным свойством не обладают.

Идеальные связи

Р/м произв. мех. систему $\bar{R}$ ($\dim = S$); $r_j = r_j(\bar{R})$ – опр. полож. r_j ∀ мат. точки через в-р $\bar{R}$

Пусть наложены p конечн. связей $f_k(\bar{R}, t) = 0$ $k = 1, \dots p$
и d дифф. связей $\varphi_i = \bar{a}_i^T \dot{\bar{R}} + b = \sum_{\nu=1}^{S} a_{i\nu} \dot{R}_\nu + b_i = 0$ $i = 1, \dots d$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} d\mathbf{R} + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0; \quad k = 1, \dots, p, \qquad (6.19)$$
$$\mathbf{a}_i^T d\mathbf{R} + b_i dt = 0; \qquad i = 1, \dots, d.$$

Мн-во всех реш-й $d\bar{R}(dt)$ – мн-во возможных перемещений мех. сист.
Размерность равна степени свободы $n = S - p - d$

(6.19) при $dt = 0$: $\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \delta\mathbf{R} = 0 \ (k = 1, \dots, p)$, $\mathbf{a}_i^T \delta\mathbf{R} = 0 \ (i = 1, \dots, d)$, (6.20)

Мн-во всех реш. $\delta\bar{R}$ – виртуальные перемещения системы.
Это перемещения, допускаемые связями при замороженном t.
Размерность тоже равна ст. свободы n.

Виртуальные = возможные
если все кон. связи не з-ят от t
и $\forall i$ $b_i = 0$

$$d\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} d\mathbf{R}, \qquad \delta\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} \delta\mathbf{R} \quad (6.21)$$

3-н Ньютона: $m_j \ddot{\bar{r}}_j = \bar{F}_j + \bar{N}_j$ (6.22)

$\bar{F}_j$ – акт. сила действ. на т. при отсутствии связей
$\bar{N}_j$ – реакция связи, силы, возникающие при наложении связей

Определение. Связи называются *идеальными, если суммарная работа реакций этих связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, т.е.*

$$\sum_j \mathbf{N}_j^T \delta\mathbf{r}_j = 0. \tag{6.23}$$

В принципе:
идеальность обеспечивается ортогональностью реакций связи и мн-ву вирт. перемещений.

Общее ур-ие движения.

(6.22) и (6.23) => $\sum_j (\mathbf{F}_j - m_j\ddot{\mathbf{r}}_j)^T\delta\mathbf{r}_j = 0$. (6.24)

Это уравнение озвучивается так: *для любого совместимого со связями движения системы сумма работ активных сил* $\mathbf{F}_j$ *и сил инерции* $(-m_j\ddot{\mathbf{r}}_j)$ *на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.*

Ур-ие Лагранжа 2-го рода.

Р/м голоном. сист. с идеальными связями, движ. в инерц. СО.

Ур-ие Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k;\quad k=1,\dots,n$$

← можно если $\ddot{\bar q}$

Система из n ур-ий второго порядка для n обобщ. коорд.

Изохронные дифф-лы:

$$\delta\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T}d\mathbf{q} \qquad (6.29)$$

Обобщ. силы:

$$Q_k = \sum_j \mathbf{F}_j^T\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k};\quad k=1,\dots,n. \quad (6.37) \quad = \frac{\delta A(dq_k)}{dq_k}$$

Ур-ие Лагранжа в вект. виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{F}_j$$

Потенциальность сил, Лагранжиан

← потенц. энергия

Опр. Обобщ. силы наз. потенц., если $\exists\, \Pi(\bar q, t)$: $\bar Q(\bar q, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar q}$

Опр. Обобщ. силы наз. обобщ. потенц., если $\exists\, V(\bar q, \dot{\bar q}, t)$:

$$\bar Q(\bar q, \dot{\bar q}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\bar q}} - \frac{\partial V}{\partial \bar q}$$

обобщ. потенциал

Лагранжиан

потенц. силы: $L = T - \Pi$

обобщ. пот. силы: $L = T - V$

=> ур-ие Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \qquad (6.44)$$

системы, опис. (6.44) – лагранжевые

Ур-ие Лагранжа в неинерц. СО

$$m_j\ddot{\mathbf{r}}_j^{отн} = \mathbf{F}_j + \mathbf{J}_j^{пер} + \mathbf{J}_j^{кор} + \mathbf{N}_j \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial T^{отн}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T^{отн}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{пер} + \mathbf{Q}^{кор} \qquad (6.45)$$

при этом: $\mathbf{Q}^{ин} = \mathbf{Q}^{пер} + \mathbf{Q}^{кор} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$; $V = T^{отн} - T$ (6.46)

=> силы инерц. явл. обобщ. пот => $V = T^{отн} - T$

Св-ва ур-ий Лагранжа

1. ***Ковариантность.*** Прежде всего отметим, что под ковариантностью уравнений подразумевается инвариантность правила их составления по отношению к замене переменных, а не инвариантность самих уравнений [2].

4. ***Разрешимость относительно старших производных.*** Таким образом, уравнения Лагранжа разрешимы относительно старших производных, т.е. представимы в нормальной форме Коши:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \qquad (6.59)$$

2. ***Калибровочная инвариантность.*** Непосредственной проверкой устанавливается, что для функции $\varphi = \dot{f}(\mathbf{q}, t)$, представляющей собой полную производную по времени от произвольной функции координат и времени, справедливо тождество

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} \equiv 0. \qquad (6.50)$$

Отсюда следует, что при добавлении такой функции к кинетической энергии системы уравнения Лагранжа (6.38) остаются неизменными. Это свойство уравнений Лагранжа называется *калибровочной инвариантностью*.

Первые интегралы

Определение. *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений называется функция фазовых переменных и времени, определенная в той же области, что и сама система, и сохраняющая свои значения на любом решении этой системы.

Уравнения Лагранжа представляют собой уравнения второго порядка. Фазовыми переменными в них являются обобщенные координаты $\mathbf{q}$ и обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}}$. Поэтому первыми интегралами уравнений Лагранжа могут быть функции вида $f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

Распространенным типом первых интегралов в лагранжевых системах являются *циклические* интегралы. Переменная называется *циклической*, если она не входит в выражение для функции Лагранжа L. Из уравнений Лагранжа (6.44) следует, что если q_k – циклическая координата, то функция $\partial L / \partial \dot{q}_k$ является циклическим первым интегралом системы.

Система называется *склерономной* (*стационарной*), если параметризация (6.14) стационарна, т.е. $\partial \mathbf{R}/\partial t \equiv 0$. Для склерономных систем положения материальных точек будут зависеть только от значений обобщенных координат $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q})$, а кинетическая энергия не зависит явно от времени и выражается квадратичной формой обобщенных скоростей:

Р/м голономн. сист. в которых $\bar{Q}$ имеют непотенц. составл. $\bar{Q}^*$

Тогда ур-ия Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*$ (6.61)

Пусть обобщ. энергия системы: $H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L$ (6.62)

$\Rightarrow H = T_2 - T_0 + \Pi$ (6.63)

Если сист. стационарна, то $T_0 = T_1 = 0$

$\Rightarrow H = E = T + \Pi$ (6.64)

полная энергия

в этом движении

$\dot{H} = \dot{\bar{q}}^T \bar{Q}^* - \frac{\partial L}{\partial t}$ (6.65);

если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$: $H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = h = \text{const}$ (6.66)

Интеграл обобщ. энергии

для стац. сист. $\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* + \frac{\partial V}{\partial t}$ (6.67)

З-н изменения энергии

Склерономная система называется *консервативной*, если все обобщенные силы потенциальны, а потенциальная энергия не зависит явно от времени, т.е. $\partial \Pi / \partial t \equiv 0$. Для консервативной системы интеграл обобщенной энергии (6.66) принимает вид закона сохранения полной энергии:

$$E = T + \Pi = \text{const}. \tag{6.69}$$

Мощность обобщ. сил: $\dot{\bar{q}}^T \bar{Q}^*$

$= 0$ гироскопич. (не соверш. работы $\forall$ движ.)

≤ 0 диссипативные

Теорема Эмми-Нетер

Преобразуем коорд. и время, имеющие обратимое (6.92)

Рассматривается однопараметрическое семейство (*группа*) преобразований координат и времени:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \alpha)\,, \quad \tau = \varphi(\mathbf{q}, t, \alpha)\,. \tag{6.91}$$

Теорема Эмми Нетер. *Если лагранжиан системы* $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ *инвариантен относительно преобразования* (6.91), *удовлетворяющего условиям* (6.92), (6.93), *то эта система имеет первый интеграл*:

$$f = \mathbf{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} - H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}\,; \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\,, \quad H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L\,. \tag{6.94}$$

Иными словами, при наличии инвариантности новый лагранжиан $\tilde{L}$ получается таким, как при тождественном преобразовании.