ЛДУ с постоянными коэффициентами

Общее решение однородного:

1. $\lambda \in \mathbb{R},\ k=1 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda x}$
2. $\lambda \in \mathbb{C}: \lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
3. $\lambda \in \mathbb{R},\ k=n \Rightarrow y = P_{n-1}(x)\cdot e^{\lambda x}$

Частное решение неоднородного:

- Квазимногочлен: МНК $\rightarrow y(x) = x^s P_m(x)\cdot e^{\gamma x}$
  s - кратность γ как корня характеристического уравнения
- $f(x) = \sin\alpha x \longrightarrow y(x) = x^s[P_m(x)\cos\alpha x + Q_m(x)\sin\alpha x]$
- Неквазимногочлен: МВП $\rightarrow C(x)$
  $y(x) = C_1(x)A(x) + C_2(x)\cdot B(x)$
  $\Downarrow$
  $$\begin{cases} C_1'(x)A(x) + C_2'(x)B(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot A'(x) + C_2'(x)B'(x) = \dfrac{f(x)}{a_0} \end{cases}$$

Система ЛДУ с постоянными коэффициентами

- Характеристическое уравнение: $(A-\lambda E) = 0 \longrightarrow \lambda \longrightarrow \bar{h}$
  $(A-\lambda E)\bar{h} = 0$

1. λ - однократные: $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}\bar{h}_i$
2. $\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda = \alpha \pm i\beta \rightarrow$ берем одно λ и находим h
   $e^{\alpha t}[\cos\beta t + i\sin\beta t]\cdot\bar{h} \longrightarrow$ отделим Re и Im
3. Присоединенный вектор: $(A-\lambda E)\tilde{h} = h$
   $\Rightarrow \bar{x}(t) = C_1 e^{\lambda t}h + C_2 e^{\lambda t}(ht + \tilde{h})$
   Можно искать и присоединенный к $\tilde{h} \rightarrow \hat{h}$
   $\bar{x}(t) = C_1 e^{\lambda t}h + C_2 e^{\lambda t}(ht + \tilde{h}) + C_3 e^{\lambda t}\left(h\frac{t^2}{2} + \tilde{h}t + \hat{h}\right)$

$\lambda = \alpha \pm i\beta$

$X_\lambda = e^{\alpha t}\cdot\bar{h}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ Реш: $C_1\cdot \mathrm{Re}X_\lambda + C_2\cdot \mathrm{Im}X_\lambda$

ЛДУ 2го порядка с переменными коэффициентами

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$

Подобрать одно частное решение $y_0 \rightarrow e^{\alpha x}$, x^α, $\ln x$

Формула Лиувилля-Остроградского:

$W(x) = W(x_0)\cdot\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{y}{y_0}\right)' = \frac{C}{y_0^2}\cdot\exp\left(-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$

ОРОУ: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
МВП:
$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = \dfrac{f(x)}{a(x)} \end{cases}$$

ЛДУ в частных производных

$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$

$\rightarrow$ находим первые интегралы C_1 и C_2

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} C_{1x}' & C_{1y}' & C_{1z}' \\ C_{2x}' & C_{2y}' & C_{2z}' \end{pmatrix} = 2$ - проверка на независимость

Общее решение: $u = F(C_1, C_2)$, где $F \in C^1$

решаем задачу Коши: $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ \text{условие} \end{cases} \rightarrow u(C_1; C_2) \rightarrow u$

Вариационное исчисление

1. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$; для свободного конца B: $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=B} = 0$
2. ур-е Эйлера: $x^2y'' + xy' + y = f(x)$ замена: $x = e^t$, $y_x' = e^{-t}y_t'$, $y_{xx}'' = e^{-2t}(y_{tt}'' - y_t')$
3. $h \in C^1[a,b]$; $\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0)$

Случай отсутствия экстр.:
берем $h = \varepsilon x^\alpha$ или $h = \sin\alpha x$
разное $\alpha \Rightarrow$ разные знаки $\Rightarrow$ нет экстр.

Изопериметрическая задача

- задача на исследование слабого экстремума при заданных условиях

$L = F + \lambda G$, где G - функция заданного условия

1. уравнение Эйлера: $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$
2. экстремаль $y(x)$
3. Выражаем C_1 и C_2 через λ и подставляем в уравнение условия $\rightarrow$ находим $\lambda \rightarrow C_1$ и C_2
   $\rightarrow$ допустимая экстремаль $\hat{y}(x)$
   $\Rightarrow$ уравнение Эйлера при заданных условиях
4. Исследуем на экстремум

Тейлор

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$
$\sin x = x + \frac{x^3}{6}$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$
$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$
$\mathrm{sh}\,x = x + \frac{x^3}{6}$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$
$\mathrm{ch}\,x = 1 + \frac{x^2}{2}$	$\mathrm{arctg}\,x = x - \frac{x^3}{3}$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6}$	
$\mathrm{arsh}\,x = x - \frac{x^3}{6}$	

Исследование ПР нелинейной системы

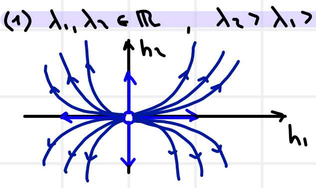
(1) ПР: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0 \rightarrow$ точка ПР - $A(x', y')$

Линеаризуем систему в точке $A(x', y')$:

$\begin{cases} x = \hat{x} + x' \\ y = \hat{y} + y' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = a\hat{x} + b\hat{y} \\ \dot{\hat{y}} = c\hat{x} + d\hat{y} \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

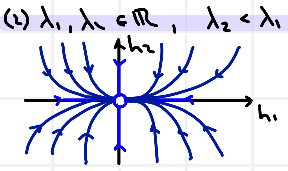
Характеристическое уравнение: $\det(B - \lambda E) = 0 \rightarrow \lambda$

(1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



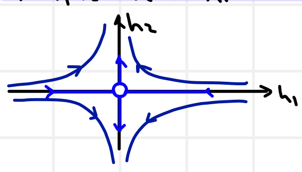
Неустойчивый узел

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



Устойчивый узел

(3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



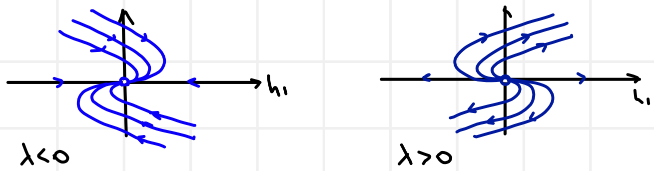
Седло
априори неустойчиво

(4) $\lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0 \wedge \exists\ h_1$ и h_2

$\lambda < 0$ — Дикритический устойчивый узел

$\lambda > 0$ — Дикритический неустойчивый узел

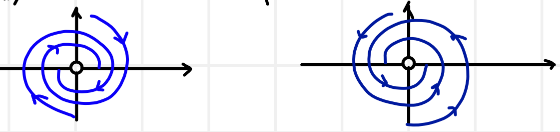
(5) $\lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0 \wedge \exists\ h_1$ и $\tilde{h}_1$ - присоединенный к h_1



$\lambda < 0$ — Вырожденный устойчивый узел

$\lambda > 0$ — Вырожденный неустойчивый узел

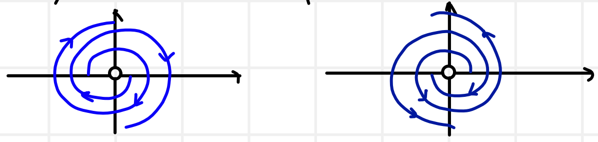
(6) $\lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{C}$: $\lambda = \alpha \pm i\beta$; $\alpha < 0$



$a_{12} < 0$ в матрице; $a_{12} > 0$ в матрице

Устойчивый фокус

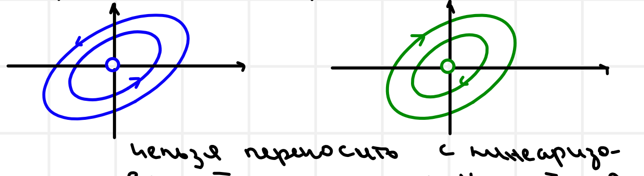
(7) $\lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{C}$: $\lambda = \alpha \pm i\beta$; $\alpha > 0$



$a_{12} > 0$ в матрице; $a_{12} < 0$ в матрице

Неустойчивый фокус

(8) $\lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{C}$: $\lambda = \alpha \pm i\beta$; $\alpha = 0$



Центр — нельзя переносить с линеаризованной системы на нелинейную

- Устойчивое ПР по Ляпунову - ПР $\bar{x}^* = \bar{0}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall\ \bar{x} : |\bar{x}| < \delta_\varepsilon \hookrightarrow |\bar{x}| < \varepsilon$ для $\forall t > 0$

Матричные экспоненты

$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

J - диаг.: $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

J - жорданова: $e^{J_i t} = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ & 1 & t \\ & & 1 & \dots \end{pmatrix}$

H - матр. собств. векторов; J - матр. собств. знач.

$\det(A - \lambda E) \rightarrow \lambda_i$; $J = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$

$H^{-1}AH = J$ $\quad H = (\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n)$

$(Jt)^n = H^{-1}(At)^n H$

$e^{Jt} = E + \frac{Jt}{1!} + \frac{(Jt)^2}{2!} + \dots = H^{-1}EH + \frac{H^{-1}AtH}{1!} + \frac{H^{-1}(At)^2H}{2!} + \dots$

$\Rightarrow e^{Jt} = H^{-1}e^{At}H \rightarrow$ если знаем J и H: $e^{At} = He^{Jt}H^{-1}$

реш. сист.: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

ДУ 1го порядка, неразрешенное

Либо $y = f(x,p)$, либо $x = f(y,p)$; $p = y' = \frac{dy}{dx}$

Пытаемся найти $p = p(x,C)$ или $p = p(y,C)$

Получаем два реш.: вырожд. и беск.

Ур-е p-дискр. кривой:

$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \text{ - исх.} \\ \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ получ. кандидат в особое y_0

Проверка касания: y-семейство беск. реш.

$\begin{cases} y_0(x_0) = y(x_0, C) \\ y_0'(x_0) = y'(x_0, C) \end{cases} \Rightarrow$ при каком-то C верно $\Rightarrow y_0$-особое

Задача Коши 2го порядка с понижением

он y: $z = y'$

1. Нет явной зависимости от x
   $y' = z(y)$
   $y'' = z'(y)\cdot z$ $\rightarrow$ подстановка в исходник
2. Однородное уравнение
   $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$
   $y' = z(x)\cdot y(x)$
   $y'' = z'y + z\cdot y'$ $\longrightarrow$ подстановка в исходник
3. Обобщенно-однородное
   $x \rightarrow \lambda x$ $\quad y' = \lambda^{s-1}x$
   $y \rightarrow \lambda^s x$ $\quad y'' = \lambda^{s-2}x$ $\longrightarrow s = \mathrm{const}$
   Замена: $x = e^t$; $y = z(t)\cdot e^{st}$

Сначала находим общее решение для замены $\rightarrow$ найдем константы из начальных условий
$\downarrow$
Вернёмся к $y(x)$ и тоже найдем константы из НУ

Задача с параметром

$y = y(x, \mu)$ - решение задачи Коши
μ - параметр $\quad \left.\partial y/\partial\mu\right|_{\mu=0}$ - ?

Т.к. функция непрерывна, то вблизи исследуемой точки она представима в виде ряда Тейлора

$y(x,\mu) = a_0(x) + a_1(x)\mu + a_2(x)\mu^2$

$y_x' = a_0' + a_1'\mu + a_2'\mu^2$

$y_\mu' = a_1(x) + 2a_2(x)\mu$

$\downarrow$

Подставляем в исходник и с учётом НУ найдем $a_1(x)$ и $a_0(x) \rightarrow$ найдем y_μ'

Таблица интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$
$\int dx = x$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$
$\int\frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x$
$\int\sin x\,dx = -\cos x$	$\int\mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x$
$\int\cos x\,dx = \sin x$	$\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x$
$\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x$	$\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x$
$\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x$	

Теорема Штурма:

$y'' + q(x)y = 0$ (1) N_1 - кол-во нетр. реш.

$z'' + Q(x)z = 0$ (2) N_2 - кол-во нетр. реш.

$Q(x) \geq q(x) \Rightarrow N_1 \leq N_2 + 1$

Кол-во из $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ нул. (+)?

Преобр. Лиувилля: $y = z\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)$
не менее n нулей $\Rightarrow$ хотя бы 1 реш.
не более n нулей $\Rightarrow$ д-ть для всех