Некоторые преобр. Фурье

$f(x)=e^{-|x|} \in L_R(-\infty,+\infty)$

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(f(x)\cos xy\,dx - i\,\underbrace{\cancel{f(x)\sin xy}}_{\to 0 \text{ т.к. нечет.}}\Big)dx =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{x(-1+iy)}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left.\frac{e^{x(-1+iy)}}{-1+iy}\right|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-iy}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\,\frac{1+iy}{1+y^2} \Rightarrow F[e^{-|x|}]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$ — важно.

← по усл. непр. не обязательно, это для док-ва

1) $f(x)$ непр на $(-\infty,+\infty)$; $f, xf, \dots x^n f \in L_R(-\infty,+\infty)$

Тогда $F[f]$ n раз непр. дифф., и $\frac{d^n}{dy^n}F[f]=F((-ix)^n f(x))$

2) $f^{(n-1)}$ непр-на на ∀ кон. отр.; $f, f', \dots f^{(n)} \in L_R(-\infty,+\infty)$

Тогда $F[f^{(n)}]=(iy)^n F[f]$

т.е. $F[f]=o(1/y^n)$, $y\to+\infty$

В нашем случае:

1) $\forall n$ $x^n e^{-|x|}\in L_R(-\infty,+\infty) \Rightarrow F[f]$ беск. дифф.

2) $n=1 \Rightarrow F[e^{-|x|}]=iyF[f]$; $F[e^{-|x|}]=o(1/y)$

Пр. $$F\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixy}}{1+x^2}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx}_{\text{инт. Лапласа}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-|y|}$$

1) $\frac{x^n}{1+x^2}\notin L_R(-\infty,+\infty)$ $n=1,2$ $\Rightarrow F\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|y|}$

$\Rightarrow F\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$ не дифф. на $\mathbb{R}$

2) $\frac{1}{1+x^2}$: $f', f'', \dots f^{(n)}\in L_R(-\infty,+\infty)$

$\Rightarrow F[f]=o(1/y^n)$ $\forall n$

Пр. $$F[\underbrace{e^{-|x|}\operatorname{sign}x}_{\in L_R(-\infty,+\infty)}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos xy\,dx}}_{\to 0}-i\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin xy\,dx\Big)=$$

$$=\frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xy\,dx=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y}{1+y^2}$$

$f(x)$ разрывна $\Rightarrow$ теоремы 1) и 2) неприменимы

действительно, $F[f]\neq o(1/y)$

при этом $\forall n$ $x^n f(x)\in L_R(-\infty,+\infty)$ и $F[f]$ — беск. дифф.

Пр. $F\left[\frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(v.p.)\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\cos xy\,dx} -$ → 0 нечетн.

$f \notin L_R(-\infty,+\infty)$

$y=0$ — сх.
$y\neq 0$ — сх. усл.

2я лемм. Лапласа

$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}(\cancel{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\sin xy\,dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\sin xy\,dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\pi}{2}e^{-|y|}\operatorname{sign} y =$

не (v.p)

$y=0$ — сх. абс
$y\neq 0$ — сх. усл

$= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|y|}\operatorname{sign} y$

т.к. $f(x)$ не абс. абс. инт. $\Rightarrow$ разрывная ф-я

$f(x) \notin L_R(-\infty,+\infty)$

Пр. Вычисл. преобр. Ф. от ф-и

$F\left[\frac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|})\right] \overset{?}{=} (iy)^2 F[xe^{-|x|}]$ (*)

$\left\{ F[f''] = (iy)^2 F[f] \right.$
верно, если f' — кус-гл.; $f', f'' \in L_R(-\infty,+\infty)$

Проверим:

$f = xe^{-|x|}$; $f' = xe^{-|x|}(-\operatorname{sign} x) + e^{-|x|} = e^{-|x|}(1-|x|)$ — кус-гладкая на ∀ конеч. отр.

f'' — кус. непр.

$f', f'' \in L_R(-\infty,+\infty)$ $\Rightarrow$ (*) верно

$F\left[\frac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|})\right] = (iy)^2 F[xe^{-|x|}]$

$\left\{ (F[f])' = F[-ixf(x)] = -iF[xf(x)] \right.$
$\Rightarrow F[xf(x)] = i(F[f])'$ — верно, если f непр; $f, xf \in L_R(-\infty,+\infty)$

Все условия выполн.

$\Rightarrow F\left[\frac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|})\right] = (iy)^2 F[xe^{-|x|}] = -y^2 F[xe^{-|x|}] =$
$= -iy^2(F[e^{-|x|}])' = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}y^2\left(\frac{1}{1+y^2}\right)'$ и т.д... досчитать!

Пр. $F[e^{-x^2/2}] = e^{-y^2/2}$

$F[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixy}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos xy\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}I(y)$

$\in L_R(-\infty,+\infty)$

$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos xy\,dx$;

$I'(y) \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} (-x e^{-x^2/2}) \sin xy \, dx =$ — верно
⇑
$|-xe^{-x^2/2}| \le xe^{-x^2/2}$ — сх. $\Rightarrow I'(y)$ — сх. равн. по пр. В-са по $y \in \mathbb{R}$

$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin xy & du = y\cos xy\, dx \\ -xe^{-x^2/2}dx = dv & v = e^{-x^2/2} \end{array}\right] =$

$= \cancelto{0}{e^{-x^2/2}\sin xy\Big|_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} xy e^{-x^2/2}\cos xy \, dx \Rightarrow I'(y) = -yI(y)$

$\frac{dI}{I} = -y\,dy$; $\ln|I(y)| = -y^2/2 + C \Rightarrow I(y) = Ce^{-y^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-y^2/2}$

$C = I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

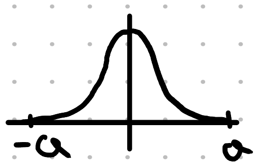
↑ инт. Пуассона

$\Rightarrow F[e^{-x^2/2}] = e^{-y^2/2}$

Обобщенные ф-ции

D - мн. пр-во финитных беск. дифф. ф-ций
↓
т.е. $\exists [A,B]: \forall x \notin [A,B] \ \varphi(x) = 0$

Например:



$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$

Сходимость в D:

$\varphi_n \to \varphi$ в D, если:

1) $\exists [A,B]: \forall x \notin [A,B], \forall n \ \varphi_n(x) = 0$
2) $\forall k = 0, 1, \ldots \ \varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x)$ на $\mathbb{R}$ ← нормы не задается

Линейный непр. функционал на D:

$f: D \to \mathbb{R}$
$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$
$f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2)$

по Гейне:
Если $\varphi_n \to \varphi$ в D, то $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$

D' - пр-во обобщ. ф-й - мн-во всех лин. непр. ф-лов на D

Обычные ф-и — лок. абс. инт. ф-я одной перем.
(абс. инт. на $\forall$ кон. отр.)

Обычные ли ф-и?

Да $1/\sqrt[3]{x}$ e^x x^2 $\frac{\sin x}{x}$ $\ln|x|$ — они должны не иметь кон. особенностей!

Нет $1/x$ e^x/x $\frac{\sin x}{x^2}$

Пусть f - обычная.

$\{f\}$ - лин. непр. функционал, соотв. f

$$\forall \varphi \in D \quad \{f\}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_A^B f(x)\varphi(x)dx,$$ где $\varphi(x)=0$ вне $[A,B]$

$\{f\}$ - регулярный функционал, соотв. f

Обобщ. ф-и, не явл. регулярными, наз. сингулярными

Напр: δ-ф-я — д-во было на лекции

$\delta(\varphi)=\varphi(0)$ или $\varphi_a(\varphi)=\varphi(a)$

Обозначение:

$\{f\} \to f$ или $f(x)$

$\{f\}(\varphi) \to (f,\varphi)$

$\Rightarrow$ по аналогии:

$\delta(x)$

$(\delta,\varphi)=\varphi(0)$

$(\delta(x-a),\varphi(x))=\varphi(a)$

ужас!

или $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$

Сходимость обобщ. ф-й.

Пусть $f_n, f \in D'$

$f_n \to f$ в D', если $\forall \varphi \in D$ $(f_n,\varphi)\to(f,\varphi)$ — слабая поточеч. сх-ть

Пр. $\sin nx \to 0$ в D'

т.к. $\forall \varphi$ $(\sin nx,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin nx\,\varphi(x)dx \to 0$ по л. Римана ?

$\cos nx \to 0$ в D' аналогично

Дифф. обобщ. ф-й

$f \in D'$

f' — называется обобщ. ф-я, что

$\forall \varphi \in D \quad (f', \varphi) = -(f, \varphi')$

Определение: пусть f — обычная диф-ма на $\forall$ кон. отр. Тогда f' — также обычная

$$\Rightarrow (f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \cancelto{0}{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi')$$

т.е. $\{f\}' = \{f'\}$ в случае, если f — диф-ма на $\forall$ кон. отр.

Пр. Произв. обобщ. ф-й

$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'_0$

$(\delta'', \varphi) = \varphi''(0)$

А что, если ф-я разрывна (не диф-ма)?

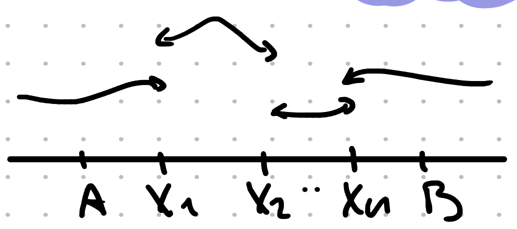
Пр. $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$(\theta', x) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0)$$

$\Rightarrow \underline{\theta' = \delta}$ $\qquad \{\theta\}' = \delta \; ; \; \{\theta'\} = 0$

не равны

Общие формулы



x_i — точки разрыва (конеч.)

$d_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$

Тогда $\underline{\{f\}' = \{f'\} + \sum_{i=0}^{n} d_i \delta(x - x_i)}$

вне $[A,B]$ — диф-ма,

на $[A,B]$ — кусоч. диф

Пр. $f(x) = \operatorname{sign} x \cos x \qquad x=0,\ d=2$

Обычные $f'(x) = -\operatorname{sign} x \sin x \qquad d=0$

Обобщ. $f'(x) = -\operatorname{sign} x \sin x + 2\delta(x)$

Обычные $f''(x) = -\operatorname{sign} x \cos x \qquad d=-2$

Обобщ. $f''(x) = -\operatorname{sign} x \cos x + 2\delta'(x)$

Обычные $f'''(x) = \operatorname{sign} x \sin x$

Обобщ. $f'''(x) = \operatorname{sign} x \sin x - 2\delta(x) + 2\delta''(x)$

Пр. $f(x) = e^{|x|} \qquad x=0 \quad d=0$

Обычные $f'(x) = e^{|x|} \operatorname{sign} x \qquad d=2$

Обобщ. $f'(x) = e^{|x|} \operatorname{sign} x$

Обычные $f''(x) = e^{|x|}$

Обобщ. $f''(x) = e^{|x|} + 2\delta(x) \quad d=0$

Обычные $f'''(x) = e^{|x|} \operatorname{sign} x$

Обобщ. $f'''(x) = e^{|x|} \operatorname{sign} x + 2\delta'(x)$