Нер-ва Виртингера.

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx - C\int_a^b (f'(x))^2\,dx$$

1) $f(x)$ кус. гл. на $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

Тогда $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx \le \int_a^b (f'(x))^2\,dx$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad a_0 = 0$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx)$$ — кус. непр.

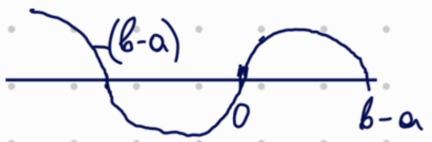
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}(n a_n^2 + n b_n^2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx$$

2) $f(x)$ кус. гл. на $[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$

Тогда $\int_a^b (f(x))^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx$

$\square$ $\varphi(x) = f(x+a)$ $\qquad \varphi(0) = f(a) = 0$

$\varphi(b-a) = f(b) = 0$



Прод. по нечет-ти, с пер. $2(b-a)$

р. Ф. сх. равн.

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{b-a} \qquad l = b-a$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{b-a} b_n \cos\frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{2}{b-a}\int_0^{b-a}(\varphi(x))^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \quad \frac{2}{b-a}\int_0^{b-a}(\varphi'(x))^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(b-a)^2} b_n^2$$

$$\int_0^{b-a}(\varphi(x))^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^{b-a}(\varphi'(x))^2\,dx$$

$$\int_0^{b-a}(f(x+a))^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^{b-a}(f'(x+a))^2\,dx$$

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx$$

3)* — продолжать по sin нечёт. кр. ф-ц.

Интегрирование р. Ф.

Пусть $f(x)$ кус. непр. на $[-l, l]$, пер. $2l$

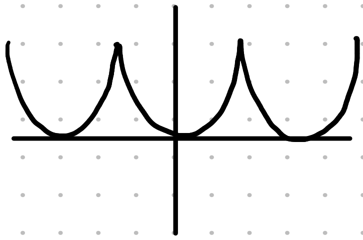
$$f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$$ — кус. гл. на $[-l, l]$, $F(-l) = F(l)$

$$F(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{\pi n} a_n \sin\frac{\pi n x}{l} + \frac{l}{\pi n} b_n \cos\frac{\pi n x}{l}\right)$$ — сумма равн. сх. р. Ф.

$$c = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(t)\,dt$$

Пр. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad -\pi \le x \le \pi$



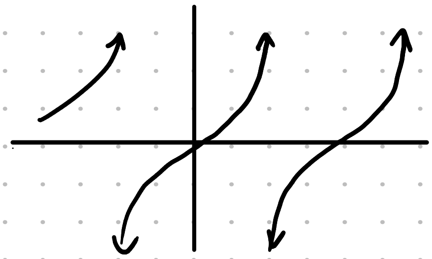
$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3}\right)dx = 0$$

$$x^3 = \pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3}\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi^2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3}\right)\sin nx$$

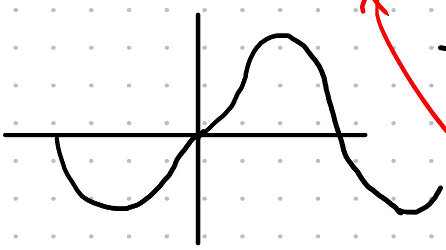
Пр.

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ — сх. неравном. т.к. сумма разр.



$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{2\pi^2}{n} + \frac{12}{n^3}\right)\sin nx \qquad -\pi < x < \pi$$

$$x^3 - \pi^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{n^3}\sin nx \qquad -\pi \le x \le \pi$$



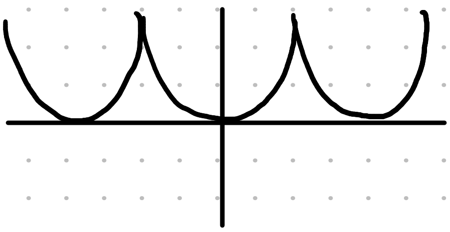
— сх. р-м. т.к. сумма непр. и кус.-гл.

проще всего считать $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

$$\frac{x^4}{4} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(-\frac{2\pi^2}{n^2} + \frac{12}{n^4}\right)\cos nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^4}{4}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^4}{4}dx = \frac{4}{2\pi}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{10}$$

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(-\frac{8\pi^2}{n^2} + \frac{48}{n^4}\right)\cos nx$$



Порядок убывания коэф. Фурье

← описание тогда не пишем, только ответ

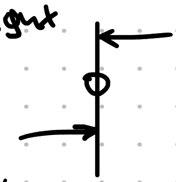
Если $f(x)$ кус-гл. на $[-l,l]$ и имеет период $2l$, то $a_n, b_n = o(1/n)$ [т.к. интегр. под-ряд Фурье и $a_n, b_n \to 0$]

$f(x)$ – кус-непр функ. на $[a,b]$, если $f'(x)$ непр. всюду, кроме конечн. числа т. с разр. 1-го рода

коэф. Фурье имеют оц-ки $O(1/n)$: $|a_n|, |b_n| \le C/n$

$f(x)$ – кус-гл, если она непр. и кус. непр. функ.

Sgn x



кус-непр-функ. на $[-\pi,\pi]$

Обобщение

А) Если $f(x)$ имеет пер. $2l$ и $f^{(k-1)}(x)$ кус-гл на $[-l,l]$, то $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ $k=1,2,\ldots$

Б) Если $f(x)$ имеет период $2l$ и $f^{(k-2)}(x)$ непр. на $[l,l]$ и $f^{(k-1)}(x)$ кус-непр-функ, то $a_n, b_n = O(1/n^k)$

Задачи: Оценить порядок убывания коэф. Фурье

Пр. $f(x) = x^2$ на $[-\pi,\pi]$ с периодом 2π

А) $k-1=0$ $k=1$ $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $b_n = 0$

Б) $k-2=0$ $k-1=1$ $k=2$ $a_n = O(1/n^2)$

Пр. $f(x) = x^3$

А) неприменимо (x^3 не кус-гл)

Б) $k-1=0$ $k=1$ $b_n = O(1/n)$ $a_n = 0$

Пр. $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ $[-\pi,\pi]$, период 2π

нужно сравн. последов. произв. в т. π и $-\pi$

✓ $f(\pi) = f(-\pi) = 0$

$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2)(-2x) = -4x(\pi^2 - x^2) = -4x\pi^2 + 4x^3$

✓ $f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$

$f''(x) = -4\pi^2 + 12x^2$

✓ $f''(\pi) = f''(-\pi)$ $\Rightarrow$ $f''(x)$ – кус-гл. $f'''(x)$ – кус-непр-функ $\Big| \Rightarrow$

$f'''(x) = 24x$

× $f'''(\pi) \ne f'''(-\pi)$

А) $k-1=2$; $k=3$ $\Rightarrow$ $a_n = o(1/n^3)$

Б) $k-1=3$; $k=4$ $\Rightarrow$ $a_n = O(1/n^4)$

Б) всегда выходит А)

Пр. $f(x) = \pi^3 x - x^4$ $0 \le x \le \pi$
разл. в ряд Ф по синусам

Построить графики сумм. и двукратн. дифф. ряда.
Оценить порядок убыв. коэфф. исх. ряда.

$f(\pi) = f(-\pi) = f(0) = 0$

$f'(x) = \pi^3 - 4x^3$

$f'(0) = \pi^3$

$f'(\pi) = -3\pi^3$

$f'(-\pi) = -3\pi^3$ четные

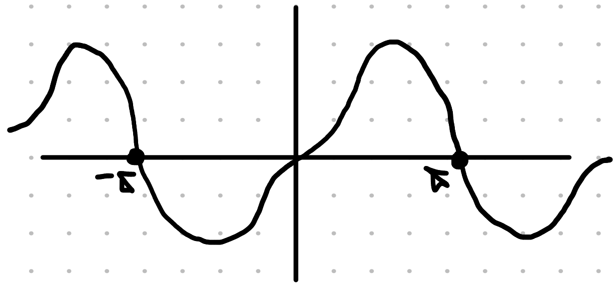
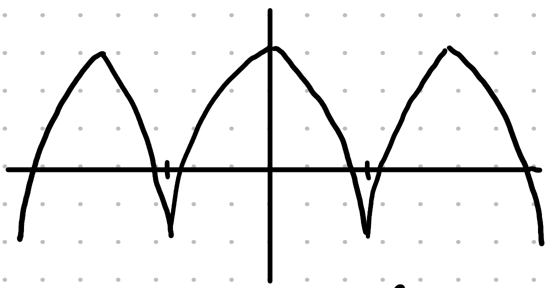
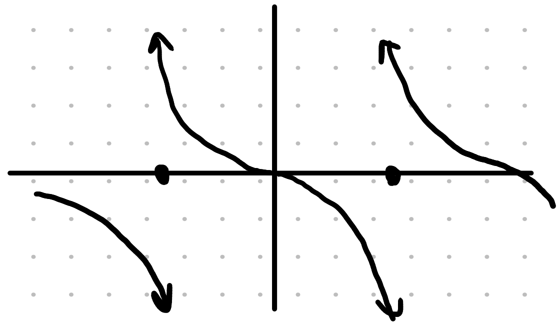


график суммы ряда
сх. равном., т.к. непр. + кус-гл.
⇒ f можно почленно дифф.



по сл. 1 из т. Римана
это график суммы р.Ф. $f'(x)$
но это гр. суммы продифф. ряда
сх. равн., т.к непр.+ кус-гл. на $[-\pi,\pi]$

$f''(x) = -12x^2$ $0 < x < \pi$
далее продолжим с пер. 2π



по сл. 1) и 2) из т. Римана
это гр. суммы р.Фурье $f''(x)$
по т. дифф.: но это гр.
суммы двукратн. продифф. ряда
сх неравн., т.к. сумма разрывна

f' кус гл

f'' кус-непр-дифф

А) $k-1=1$; $k=2$

$b_n = O(1/n^2)$

Б) $k-2=1$ $k-1=2$; $k=3$

$b_n = O(1/n^3)$

Суммирование рядов методом ср. арифм.

Т. (с 1 курса) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\dots+x_n}{n} = a$

[обратное неверно
$x_n = (-1)^n$ расх; $\frac{x_1+\dots+x_n}{n} = \begin{cases} 0, & n - \text{четн} \\ -1/n, & n - \text{нечетн} \end{cases}$]

Р/м ряд

$1+3-3+1+3-3+1+3-3+\dots$

ряд расх, т.к. общий член $\not\to 0$

ряд средних арифм.: частн. суммы $\to$ $S_n = \begin{cases} k, & n=3k \\ k+1, & n=3k+1 \\ k+4, & n=3k+2 \end{cases}$

$\frac{S_1+S_2+\dots+S_n}{n}$ ⇒ потом ...