Th 7.1 Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – с.в. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда:

$\xi_1, \dots, \xi_n$ – независ. $\Longleftrightarrow F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) \doteq \mathbb{P}(\xi_1 \le x_1, \dots, \xi_n \le x_n) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$$

Классы с.в.

def Распр. с.в. ξ назыв. <u>дискретным</u>, если ξ может принимать конечное или счётное число значений $x_1, \dots, x_n$: $p_k = \mathbb{P}(\xi = x_k) > 0$ и $\sum_k p_k = 1$.

Т.о. распр. дискр. с.в. ξ однозначно её функц. вероятности, т.е. $\mathbb{P}(\xi = x_k)$

Примеры

1) $\xi \sim Be(p) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = p^k \cdot (1-p)^k, k \in \{0,1\}$

2) Геом. распр.: $\xi \sim Geom(p) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = p \cdot (1-p)^k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

3) Бином. распр.: $\xi \sim Binom(n,p) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$

4) Распр. Пуассона: $\xi \sim Poiss(\lambda) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

5) Отрицательное бин. распр.: $\xi \sim NB(n, p) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = C_{k+n-1}^k \cdot p^n \cdot (1-p)^k$

$\boxed{N1}$

Найти распр. дискр. с.в., равной кол-ву неудач, проводимых в послед. исп. Бернулли с вероятн. p, проводимой до r-го успеха.

• Пусть Y – число бросков до r-го успеха. $\{Y = k\}$ означает, что в ходе $k+r$ испытаний произошло равно r успехов, причем последнее исп. было успешным.

$$\mathbb{P}(Y=k) = \overset{\text{послед. успех}}{p} \cdot C_{\underbrace{k+r-1}_{\text{всего соб. без послед. успеха}}}^{\overbrace{r-1}^{r-1 \text{ успех}}} \cdot p^{r-1} \cdot (1-p)^k = C_{k+r-1}^k \, p^r \cdot (1-p)^k$$

def Распр. с.в. ξ назыв. <u>абс. непр.</u>, если $\exists f_\xi(x) \ge 0$: $\int_{\mathbb{R}} f_\xi(t)\,dt = 1$ и $\forall x \in \mathbb{R} \mapsto F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$.

$f_\xi(t)$ называется плотностью вероятности ξ.

$\boxed{Th\ 7.2^*}$ Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ — независ., с уд. плот. $f_{\xi_1},\dots,f_{\xi_n}$, то тогда случ. вектор, составленный из этих с. в., т.е. $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ имеет плотность

$$f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i),\ \text{где}$$

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_n$$

Примеры

1) Равн. распр.: $\xi\sim \mathcal{U}[a,b] \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{1}\{a\le x\le b\}$, $a\le x\le b$.

2) Норм. распр.: $\xi\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

3) Экс. распр.: $\xi\sim Exp(\lambda)\Leftrightarrow f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{1}\{x\geqslant 0\}$

4) χ^2 с n степ. свободы: $\xi\sim\chi^2_n=Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\xi \overset{d}{=} \eta_1^2+\dots+\eta_n^2$, где $\eta_i\sim\mathcal{N}(0,1)$

5) Г-распр.: $\xi\sim Gamma(\alpha,\lambda)\Leftrightarrow f(x)=\frac{\lambda^\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot e^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$

6) Логнорм. распр.: $\xi\sim\log\mathcal{N}(m,\sigma^2)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x\geqslant 0$

7) Распр. Коши: $\xi\sim Cauchy(m,\gamma)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{(x-m)^2+\gamma^2}$, $x\in\mathbb{R}$ — распр. с тяж. хвостом
(см. Th Фишера – Типпета – Гнеденко)

$\boxed{N2}$

Найти ф.р. зная, что $f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$.

• $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}\,dt=-\ \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$.

$\boxed{N3}$

Пусть с. в. $\tau\sim Exp(\lambda)$ — время приб. автобуса на остановку. Пусть мы приходим на остановку через время S после $t=0$ — момент отъезда автобуса. Как будет распределено время ожидания?

• Пришли на остановку в момент $t=S$, пусть время ожидания τ', тогда:

так можно???

$\mathbb{P}(\tau'>x)=\mathbb{P}(\tau>s+x\mid\tau>s)=\frac{\mathbb{P}(\tau>s+x)}{\mathbb{P}(\tau>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda x}\Rightarrow\tau'\sim Exp(\lambda)$.

А почему так? Из выкладок выше видно, что так получилось потому что
$\mathbb{P}(\tau>x+s)=\mathbb{P}(\tau>x)\cdot\mathbb{P}(\tau>s)$. Пусть $f(t)\doteq\mathbb{P}(\tau>t)\Rightarrow f(t+s)=f(t)\cdot f(s)$.
Функ. f нигде не обр. в о т.к. иначе $f(t)\equiv 0 \xrightarrow{\ln(\dots)} \exists g(t)=\ln f(t)\Rightarrow g(t+s)=g(t)+g(s)$ — функц. ур-ние Коши, среди непр. функ. ед. реш. $g(t)=c\cdot t\Rightarrow f(t)=e^{c\cdot t}$, $c<0$ — показ. распр.

$\boxed{\text{Упр}}$ Найти дискр. с.в. с эффектом „отсутствия памяти" и доказать его.

$\boxed{\text{Упр}*}$ С.в. τ' определена не на том же вероят. пр-ве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где опр. τ (например, τ' не определена для $\{\omega: \tau < s\}$ $\Rightarrow$ запись $\mathbb{P}(\tau' > x)$ не имеет смысла.

Записать вероят. пр-во $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, на котором опр. τ'!

$\boxed{N2}$ Покажите, что если с.в. $X_1,\dots,X_n$ имеет показ. распр., т.е.

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \lambda_1 \cdot \exp(-\lambda_i \cdot t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$, то тогда $\min\{X_1,\dots,X_n\} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

◁ Пусть $Y = \min\{X_1,\dots,X_n\}$, тогда:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\overset{\geq \text{ тоже можно тут}}{Y > t}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \dots, X_n > t) = \left|\{X_i\} - \text{независ.}\right| =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \mathbb{P}(X_i \leq t)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right). \quad ▷$$

$\boxed{N3}$ Пусть с.в. ξ имеет строго возраст. и непр. $F_\xi(x) = F(x)$. Найти распр. с.в. $\eta = F(\xi)$.

◁ Рассмотрим ф.р. F_η с.в. η : $F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta \le x) = \mathbb{P}(F(\xi) \le x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ? & \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

т.к. $F_\xi \in [0,1]$.

Пусть $0 < x < 1$, тогда $\mathbb{P}(F(\xi) \le x) = \mathbb{P}(\xi \le F^{-1}(x)) = F_\xi(F^{-1}(x)) = x$

Т.к. по усл. F строго возр. и непр., то $\exists F^{-1}$ и непр. $\Rightarrow F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

Смысл задачи: пусть производится моделирование с.в. ξ с заданной ф.р. F со св-вами из усл., есть также генератор равн. распр. на $[0,1]$, тогда $\xi = F^{-1}(\eta)$ генерирует с.в. с ф.р. F. ▷

$\boxed{N4}$ [Про порядковые статистики]

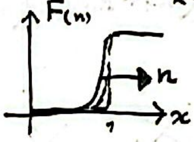
Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — i.i.d. с.в. с $F(x)$ — ф.р. Упорядочиваем значения с.в. при каждой реализации: $\forall \omega \in \Omega$ берём $(X_{(1)}(\omega), \ldots, X_{(n)}(\omega))$, где $X_1(\omega) \le \ldots \le X_n(\omega)$.

Возникают новые с.в.: порядковые статистики.

Найти распр. крайних порядковых статистик : $X_{(1)}(\omega)$ и $X_{(n)}(\omega)$.

◁ 1) $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $F_{(n)} = ?$

$$F_{(n)}(x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \le x) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \le x\}\Big) \overset{i.i.d.}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \le x) = (F(x))^n.$$

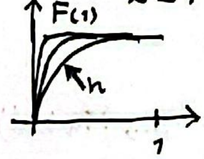
Для $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$: $F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$ 

$X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $F_{(1)} = ?$

2) $F_{(1)}(x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \le x) = \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) = 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) =$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k > x\}\Big) \overset{i.i.d.}{=\!=} 1 - \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(\{X_k > x\})}_{= 1 - F(x)} = 1 - (1 - F(x))^n$$

Упр! TODO: $F_{X_{(j)}}$ и $f_{X_{(j)}}$

Для $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$: 

. ▷

В задач очень вольно складывали с.в. и брали от них функции, а имели ли на это право?

def Отображение $f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ называется борелевским, если $\forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto f^{-1}(G) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ничего не напоминает? Чем это отличается от опр. с.в.?

Какие бывают борел. функ.: все непр. и т.п.

$\boxed{Th1^*}$ Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ – с.в. на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – борел. функ. Тогда:

$\eta=f(\xi_1,\dots,\xi_n)$ – с.в. на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Пусть ξ,η – с.в. на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $c\in\mathbb{R}$. Тогда: будут с.в.:

$c\cdot\xi,\ \xi+c,\ \xi\pm\eta,\ |\xi|,\ \xi\cdot\eta,\ \xi^+=\max\{\xi,0\},\ \xi^-=\min\{-\xi,0\}$.

Сформулируем и докажем важное утв., касающееся независ. событий.

$\boxed{Th2}$ [Лемма Бореля – Кантелли].

Пусть $A_1,A_2,\dots$ – послед. событий. Тогда:

1) Если $\sum\limits_n \mathbb{P}(A_n)<\infty$, то $\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcap\limits_N\bigcup\limits_{n>N}A_n}_{\text{произошло беск. число событий из послед. }\{A_n\}}\Big)=0$;

2) Если $A_1,A_2,\dots$ – независ., $\sum\limits_n \mathbb{P}(A_n)=\infty$, то $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_N\bigcup\limits_{n>N}A_n\Big)=1$;

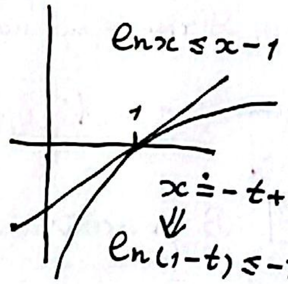
$\triangleleft$ 1) Возьмём некоторый N, тогда $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n>N}A_n\Big)\le\sum\limits_{n>N}\mathbb{P}(A_n)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$, тогда т.к. $\bigcap\limits_N\bigcup\limits_{n>N}A_n\subset\bigcup\limits_{n>N}A_n$,

то $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_N\bigcup\limits_{n>N}A_n\Big)=0$.

2) Рассмотрим $\mathbb{P}\Big(\Omega\setminus\Big(\bigcap\limits_N\bigcup\limits_{n>N}A_n\Big)\Big)=\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_N\bigcap\limits_{n>N}\overline{A_n}\Big)$, рассмотрим $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{n>N}\overline{A_n}\Big)$:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n>N}\overline{A_n}\Big)\le\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=N+1}^{M}\overline{A_n}\Big)\overset{\text{независ.}}{=}\prod_{n=N+1}^{M}(1-\mathbb{P}(A_n))=e^{\sum\limits_{n=N+1}^{M}\ln(1-\mathbb{P}(A_n))}\le$$

$$\le e^{-\sum\limits_{n=N+1}^{M}\mathbb{P}(A_n)}\xrightarrow[M\to\infty]{\text{ряд расход. по усл.}}0,\quad \overbrace{\bigcap_{n>N}\overline{A_n}}^{\doteq B_N}\nearrow_N$$, тогда по непр. вероят. меры:



$\ln x\le x-1$

$x\doteq -t+1$

$\Downarrow$

$\ln(1-t)\le -t$

B_N расширяются по N, тогда:

$\lim\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{n>N}\overline{A_n}\Big)=\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_N\bigcap\limits_{n>N}\overline{A_n}\Big)$

$\Rightarrow\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_N\bigcap\limits_{n>N}\overline{A_n}\Big)=0.$ $\triangleright$ $\Rightarrow\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_N\bigcup\limits_{n>N}A_n\Big)=1$

Рассмотрим асимптотику $X_{(n)}$, используя $Th2$.

$\boxed{N5}$ Пусть $\{\xi_n\}$ – послед. i.i.d. с.в. с ф.р. $F(x)$. Пусть $F(x)<1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\eta_n\doteq\max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ – послед. крайних статистик. Док.: $\mathbb{P}\Big(\{\omega:\eta_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty\}\Big)=1$.

$\triangleleft$ Рассмотрим $E=\{\omega:\eta_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty\}$ и $H=\overline{E}$, тогда $\mathbb{P}(E)=1\Leftrightarrow\mathbb{P}(H)=0$.

Рассмотрим структуру H: $\omega\in H\Leftrightarrow\{\eta_n(\omega)\not\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty\}$ т.е. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists N$ и $\{n_j\}:\eta_{n_j}(\omega)\le N$ $\Leftrightarrow$ $\omega\in\overline{\lim\limits_n}\{\eta_n\le N\}$ при некотором N.

$\{\omega:\eta_n(\omega)\le N\}$ – послед. событий $\qquad \overline{\lim\limits_n}\{\eta_n\le N\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\ge n}\{\omega:\eta_k(\omega)\le N\}$

//Почему так? $\quad \omega \in \overline{\lim\limits_n} A_n$ означает, что:

$\overline{\lim\limits_n} A_n \doteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geq n} A_k$ – произошло беск. много соб. из A_n, т.е. $\exists$ подпослед. $A_{n_k}: \omega \in A_{n_k}$. //

$$\Rightarrow H = \bigcup_{N=1}^{\infty} \overline{\lim_n} \{\eta_n \leq N\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} \{\omega : \eta_k(\omega) \leq N\}.$$

Рассмотрим $\mathbb{P}(\{\eta_n \leq N\}) = (\underset{<1}{F(N)})^n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\eta_n \leq N\}) < \infty$, тогда по

лемме Бореля – Кантелли: $\forall N \mapsto \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_n} \{\eta_n \leq N\}) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(H) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(E) = 1$. $\triangleright$

2 пар.

$\boxed{\text{Утв}}$: Для $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(B) = \int$ …