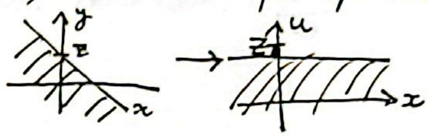
…Бореля – Кантелли: $\forall N \mapsto \mathbb{P}(\lim \{\eta_n = N\}) = \ldots$

Упр*: Для $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(B) = \int\limits_B p(x)\,dx$ (2 напр.), где $\mathbb{P}_\xi$ – распр. нек. абс. непр. с.в. с плот. $p(x)$
$\qquad \xi^{G} = \mathbb{P}_\xi(B)$

N6 [Формула Свертки]

Пусть (ξ, η) – абс. непр. с. в. с плотностью $f_{\xi,\eta}$. Показать, что плот. распр. с. в. $\varsigma = \xi + \eta$ равна $f_\varsigma(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, u-x)\,dx$.



$\triangleleft$ $F_\varsigma(z) = \mathbb{P}(\xi + \eta \le z) = \int\limits_{(x;y):\, x+y\le z} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \left| \begin{matrix} u = x+y \\ x = x \end{matrix} \right| \ominus \Rightarrow$ т.к. $|J| = 1$, то $\ominus$

$\ominus \int\limits_{x,u:\, x\in\mathbb{R},\, u<z} f_{\xi,\eta}(x, u-x)\,dx\,du = \int\limits_{-\infty}^{z} du \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x, u-x)}$, но с другой стороны $F_\varsigma(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \underbrace{f_\varsigma(u)}\,du$

$\Rightarrow f_\varsigma(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, u-x)\,dx$.

Если с. в. ξ и η независ., то $f_\varsigma(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) \cdot f_\eta(u-x)\,dx$. $\triangleright$

Упр А что если надо найти вероят., что $\xi > \eta$? Тогда надо рассм. $\xi - \eta = \varsigma$.

Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\mathbb{P}(\xi > \eta) = ?$

Упр*

N7 В n ячейках случайно и независимо друг от друга размещается k частиц так, что каждая из них попадает в i-ю яч. с вероят. p_i $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случ. вектор, i-я комп. ξ_i – число част. в яч. i. Док.: $\xi \sim Poly(n, p_1, \ldots, p_n)$

Преобразование случайных величин

Рассмотрим как преобразуется распр. с.в. при различных преобразованиях.

Th Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – абс. непр. с. век. ξ : $\xi(\Omega) = A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi: A \to B \subset \mathbb{R}^n$ – – диффеоморфизм, т.е. $\varphi: A \xleftrightarrow{\text{биек.}} B$, φ, φ^{-1} – непр. дифф.

Тогда: $\varphi(\xi)$ – абс. непр. с.в. и $f_{\varphi(\xi)}(t) = f_\xi(\varphi^{-1}(t)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}| \cdot I\{t \in B\}$

◁ Надо доказать: $\mathbb{P}(\varphi(\xi) \in M) = \int\limits_M f_{\varphi(\xi)}(t)dt \ \ \forall M \subset \mathbb{R}^2$ – по опр. плот. распр.

Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$, где $M_1 \subseteq B$, $M_2 : M_2 \cap B = \varnothing$.

$\Rightarrow$ т.к. $\varphi(\xi) \in B$ и $M_2 \cap B = \varnothing$, то $Л.Ч. = \mathbb{P}(\varphi(\xi) \subset M_1)$,

$П.Ч. = \int\limits_{M_1} f_{\varphi(\xi)}(t)dt$ т.к. на M_2 функ. под интегралом $=0$ $\Rightarrow$ можно считать, что $M \subseteq B$.

Итак, $\mathbb{P}(\varphi(\xi) \in M) = \mathbb{P}(\xi \in \overset{\text{сущ. по усл.}}{\varphi^{-1}}(M)) = \int\limits_{\varphi^{-1}(M)} f_\xi(t)\,dt = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{matrix} \right| =$

$= \int\limits_M f_\xi(\varphi^{-1}(x)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}|\,dx \Rightarrow f_{\varphi(\xi)}(t) = f_\xi(\varphi^{-1}(t)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}|$. ▷

<u>Напоминание</u> | Если $u_i = u_i(x_1, ..., x_n)$, $i = \overline{1,n}$, тогда $J_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

<u>Пример</u> | Если $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожд., ξ – абс. непр. с. век $\Rightarrow$ $\eta = A\xi + b$ имеет плотность

$f_\eta(x) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_\xi(A^{-1}(x - b))$.

В частности, пусть ξ – с.в., φ – непр., $\eta = \varphi(\xi)$, тогда:

$F_\eta(y) = \mathbb{P}(\eta < y) = \mathbb{P}(\varphi(\xi) < y) \underset{\text{пусть } \varphi \text{ – непр. и монотонно возр.}}{=} \mathbb{P}(\xi < \varphi^{-1}(y)) = F_\xi(\varphi^{-1}(y))$

Если ξ – абс. непр. с.в. а φ – дифф., $y = \varphi(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0 \ \forall x$, то $\exists$ плотность

$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(x)}{\varphi'(x)} = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot \overbrace{(\varphi^{-1}(y))'}^{\text{по Th об обр. функц.}}$.

Если же φ – убывает, то тогда $f_\eta(y) = \frac{f_\xi(x)}{|\varphi'(x)|} = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'|$.

<u>Пример</u> | Пусть $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, т.е. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$. Найти распр. $Y = X^3$, $Y = X^2$.

◁ • Т.к. $y = x^3$ монотонна на $\mathbb{R}$, то пусть $\varphi(x) = x^3 \Rightarrow \varphi^{-1} = \psi(y) = \sqrt[3]{y}$, $\psi'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$.

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$.

• $\varphi(x)=x^2$ – немонот. на $\mathbb{R}$. <u>Что делать?</u>.

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leqslant y)=\mathbb{P}(X^2\leqslant y)=\mathbb{P}(|X|\leqslant\sqrt{y})=\mathbb{P}(-\sqrt{y}\leqslant|X|\leqslant\sqrt{y})=$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}+0)=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})\Rightarrow f_Y(y)=\frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}+\frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(\sqrt{y})^2/2}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(-\sqrt{y})^2}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-y/2}.$$

Упр В общ. случае $y=\varphi(x)$ м.б. такова, что $x=\psi(y)$ неоднозначна, т.е. одному y м.б. соотв. несколько знач. x: $x_1=\psi_1(y),\ldots,x_n=\psi_n(y)$, где x_i – корни $\varphi(x)$, n – число участков монот. $\varphi(x)$.

Модифицировать формулу для $f_\eta(y)$.

В случае дискр. с.в.: берём функ. вероят. $\mathbb{P}(\xi=x_k)=p_k$ и перестраиваем под новую с.в. $g(\xi)$: $\mathbb{P}(g(\xi)=g(x_k))=p_k$. Но g может „склеить" некоторые x_k в одно: $g(x_{k_1})=g(x_{k_2})\Rightarrow$ необх. сложить соотв. вероят.

<u>Маргинальные и условные распределения</u>

def Распр. некоторого подвектора $\vec{\xi}'$ с. век. $\vec{\xi}$ назыв. <u>маргинальным</u>.

Пусть с. век. $\vec{\xi}'$ соотв. комп. $\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}$. Тогда в $F_\xi(x_1,\ldots,x_n)$: $\{x_i\}_{i=1}^n\setminus\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}\to+\infty$.

$\Rightarrow$ получаем ф.р. $F_{\xi'}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$ с. век. ξ'. Если ξ – абс. непр. с. век., то

$$f_{\xi'}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_{j_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_{j_2}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_{j_{n-k}}f_\xi(x_1,\ldots,x_n).$$

$$\{j_1,\ldots,j_{n-k}\}=\{1\ldots n\}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}.$$

$\boxed{N8}$

Упр Пусть $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\sim Poly(k,p_1,\ldots,p_n)$, k – чис. част., n – чис. ячеек. Покажите, что $\xi_i\sim Binom(k,p_i)$, $i=\overline{1,n}$.

$\boxed{N9}$ [Формула свёртки – $\underline{\text{II}}$]

$f_{\xi,\eta}$ – распр. (ξ,η), Найти плот. $\varsigma=\xi+\eta$.

◁ Рассм. лин. преобр. $\begin{pmatrix}\Theta\\ \varsigma\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\Theta\\ \varsigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \xi+\eta\end{pmatrix}$.

// $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ // $\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \Theta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Theta - \varsigma \end{pmatrix}$$

$f_{\varsigma,\Theta}(x,z) = \frac{1}{|A|_{=1}}\cdot f_{\xi,\eta}(x, z-x) \Rightarrow$ плот. марг. распр. ς: $f_\varsigma(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, z-x)\,dx$. $\triangleright$

def| Пусть дано вероят. пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $B\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B)>0$.

Условной ф.р. с.в. ξ относ. B назовём $F_\xi(x|B) \doteq \mathbb{P}(\{\omega: \xi(\omega)<x\}\,|\,B)$

Пусть с.в. ξ и η имеют совм. ф.р. $F_{\xi,\eta}(x,y)$, а η имеет марг. ф.р. $F_\eta(y)$, тогда

$$F_\xi(x\,|\,\eta<y) = \frac{F_{\xi,\eta}(x,y)}{F_\eta(y)}, \quad F_\eta(y)>0.$$

Тут требовали, что $\mathbb{P}(B)>0$. Если две с.в. ξ и η имеют абс. непр. распр., то $F_\xi(x\,|\,\eta=y)$ также ввести не выйдет.

$$F_\xi(x\,|\,\eta=y) \doteq \lim_{\Delta y\to 0} F_\xi(x\,|\,\eta\in[y, y+\Delta y]) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mathbb{P}(\xi<x, \eta\in[y,y+\Delta y])}{\mathbb{P}(\eta\in[y,y+\Delta y])} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv}{\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(v)\,dv} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi,\eta}(u,y)\,du}{f_\eta(y)} = \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{f_{\xi,\eta}(u,y)}{f_\eta(y)}\,du \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Определим усл. плот.: $f_{\xi|\eta}(x,y) = \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}$.

Математическое ожидание

Ввели с.в., смогли связать с ними числовую характ.: ф.р. и плот. Хотим извлечь чис. характ. из F и f.

def| Мат. ожид. с.в. ξ называется интеграл Лебега от ξ по $\mathbb{P}$.
$\xi:\Omega\to\mathbb{R}$

Для инт. Лебега необх. изм. функция, а у нас есть с.в. – подходит, тогда

$$\mathbb{E}\xi \doteq \int\limits_\Omega \xi(\omega)\,d\underset{\mathbb{P}(d\omega)}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}(\omega)}} \equiv \int\limits_\Omega \xi\,d\mathbb{P}$$

Процесс построения:

1) Если ξ – простая с.в., т.е. $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\cdot I_{A_k}$, то $\mathbb{E}\xi \doteq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\cdot\mathbb{P}(A_k)$, $A_k = \{\omega: \xi(\omega) = x_k\}$, при этом все x_i различны, A_i обр. разб. Ω.

$\boxed{\text{Th}^*}$ [Аппроксимационная теорема]

Пусть $\xi \geqslant 0$ – с.в. Тогда сущ. посл. $\{\xi_n\}$ – прост. неотр. с.в.: $\xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)\ \forall \omega$,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\ \forall\omega$, причём $\sigma(\xi_n) \subset \sigma(\xi_{n+1}) \subset \sigma(\xi)\ \forall n$.

Д-во аппроксимационной Th:

◁ Конструктивно построим ξ_n: начнём дробление области значений и возьмём прообразы полуинтервалов, возникающих в разбиении:

$\forall n = 1, 2, \ldots$ $\mathfrak{D}_n = \{\Delta_n, D_1^{(n)}, \ldots, D_{n\cdot 2^n}^{(n)}\}$, где $\Delta_n = \{\omega : \xi(\omega) \geqslant n\}$ − прообраз $[n, +\infty)$,

$D_k^{(n)} = \{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\}$, $k = 1, \ldots, n\cdot 2^n$

каждый единичный интервал разбиваем на 2^n частей длины $\frac{1}{2^n}$.

При этом каждое следующее дробление является измельчением предыдущего дробления.

Определим $\xi_n \doteq n\cdot I_{\Delta_n} + \sum\limits_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n}\cdot I_{D_k^{(n)}}$ − простая с.в., $\xi_n \leqslant n$.

Покажем, что ξ_n удовлетворяет условию:

• Монотонность ξ_n: $\forall \omega$ $\xi_n(\omega) \nearrow$?

Если $\omega \in \Delta_n$, то $\xi_{n+1}(\omega) = n$, а $\xi_{n+1}(\omega) \geqslant n$ даже если ω попало в новое дробление на шаге $n+1$.

Если $\omega \in D_k^{(n)}$, то $\xi_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n}$. Нужно рассмотреть куда попадает ω на шаге $n+1$:

$D_k^{(n)} = D_{2k-1}^{(n+1)} \cup D_{2k}^{(n+1)}$. Если $\omega \in D_{2k-1}^{(n+1)}$, то $\xi_{n+1}(\omega) = \frac{(2k-1)-1}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = \xi_n(\omega)$.

Если $\omega \in D_{2k}^{(n+1)}$, то $\xi_{n+1}(\omega) = \frac{2k-1+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} > \frac{k-1}{2^n} = \xi_n(\omega)$.

• Покажем, что $\forall \omega \mapsto \xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)$.

Если $\omega : \xi(\omega) = +\infty$, то $\forall n \mapsto \omega \in \Delta_n \Rightarrow \xi_n(\omega) = n \nearrow +\infty$.

Если $\omega : \xi(\omega) < +\infty$, то $\exists N : \xi(\omega) < N \Rightarrow \forall n \geqslant N \mapsto \omega \in D_k^{(n)}$ для некоторого k, а в $D_k^{(n)}$ выполняется нер-во $\xi_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} \leqslant \xi(\omega) < \frac{k}{2^n} = \xi_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$.

• Измеримость:

По построению $\sigma_{\xi_n} = \sigma(\mathfrak{D}_n)$, а $\mathfrak{D}_{n+1}$ получается дроблением $\mathfrak{D}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(\mathfrak{D}_n) \subset \sigma(\mathfrak{D}_{n+1}) = \sigma_{\xi_{n+1}}$. При этом $\sigma_{\xi_{n+1}} \subset \sigma_{\xi}$ поскольку прообразы $\xi^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ включают в себя прообразы $\xi_{n+1}^{-1}(B)$.