$$A=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_p \end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda E}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$e^A=\begin{pmatrix} e^{J_1} & & & 0 \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{J_p} \end{pmatrix} \qquad e^J=e^{\lambda E}\cdot e^B$$

перестановочн. с любой

$$\forall B \quad (\lambda E)\cdot B=B\cdot\lambda E$$

$$e^{\lambda E}=\begin{pmatrix} e^\lambda & & & 0 \\ & e^\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^\lambda \end{pmatrix}=e^\lambda E$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}\ \dots\ B^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}\ \dots\ B^n=0$$

$$\Rightarrow e^B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B^k}{k!}=E+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{6}+\dots\frac{B^{n-1}}{(n-1)!} \qquad e^B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & 1 & 1/2 & \\ & & 1 & 1 & 1/2 \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^A=\begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & e^\lambda/2 & \dots & \frac{e^\lambda}{(n-1)!} \\ & e^\lambda & e^\lambda & e^\lambda/2 & \\ & & \dots & & \\ & & & e^\lambda & e^\lambda \\ & & & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

Пр.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & 0 \\ & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 4 & 1 & \\ 0 & & & & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad e^A=\left(\begin{array}{ccc|cc|c} e^3 & e^3 & e^3/2 & & 0 & \\ & e^3 & e^3 & & & \\ & & e^3 & & & \\ \hline & & & e^4 & e^4 & \\ & 0 & & & e^4 & \\ \hline & & & & & e^4 \end{array}\right)$$

Пусть матр. лин. однор. с пост. коэф. приводима к ж.н.ф. A в базисе $h_1, h_2, \dots h_n$

$$\bar{x}=C_1e^{3t}\bar{h}_1+C_2e^{3t}(\bar{h}_2+t\bar{h}_1)+C_3e^{3t}\left(h_3+th_2+\frac{t^2}{2}h_1\right)+$$
$$+C_4e^{4t}\bar{h}_4+C_5e^{4t}(\bar{h}_5+t\bar{h}_4)+C_6e^{4t}\bar{h}_6$$

Пр. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-5)+1=\lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2$$

$$A-4E=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{h}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A-4E)\bar{h}_2=\bar{h}_1 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow \bar{h}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad e^{At}=Se^{A't}S^{-1} \qquad S=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 4t & t \\ 0 & 4t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$e^{A't}=\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}e^B \qquad e^{A't}=\begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\dots$$

$$B^2=0 \qquad e^B=E+B=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dots=\begin{pmatrix} (1-t)e^{4t} & te^{4t} \\ -te^{4t} & (t+1)e^{4t} \end{pmatrix}$$

Операционный метод

$f(t)$ опр. и непр. на замкн. луче $[0,+\infty)$. Возможно кон. кол-во разрывов 1 рода

Р/м $F(t)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, $p\in\mathbb{R}$

инт. сходится, если $|f(t)|\le Me^{\lambda t}$, $p>\lambda$

$f(t)\doteqdot F(p)$
оригинал изображение

Пр. $f(t)=1$ $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\frac{1}{p}$, $p>0$

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$1/p$	$\begin{Bmatrix} t^k\cos\omega t \\ t^k\sin\omega t\end{Bmatrix}$	$\frac{k!}{(p^2+\omega^2)^{k+1}}\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix}(p+\omega)^{k+1}$
$e^{-\lambda t}$	$1/p+\lambda$ $(\lambda+p>0)$		
$t^k, k\in\mathbb{R}$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-\lambda t}t^k$	$\frac{k!}{(p+\lambda)^{k+1}}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$		

$f(t)\doteqdot F(p)$

$f'(t)\doteqdot\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=\left[\begin{matrix}u=e^{-pt} & du=-pe^{-pt}dt\\ dv=f'(t)dt & v=f(t)\end{matrix}\right]=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=$
$=pF(p)-f(0)$

$\lim\limits_{p\to+\infty} f(t)e^{-pt}=0$

$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

Оригинал восст. по изобр однозн (до искл. знач. в т. разр.)

Пр. $y''+4y=4(\cos 2t+\sin 2t)$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$ реш. з. Коши

$y(t)\doteqdot Y(p)$

$p^2Y(p)-p\underbrace{y(0)}_{=0}-\underbrace{y'(0)}_{=1}+4Y(p)=\frac{8}{p^2+4}+\frac{4p}{p^2+4}$

$p^2+12=A(p^2+4)+B(p^2-4)$
$A+B=1$, $A-B=3$ $\Rightarrow$ $A=2$, $B=-1$

$Y(p)=\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{(p^2+4)^2}+\frac{4p}{(p^2+4)^2}=\frac{4p}{p^2+4}+\frac{p^2+4+8}{(p^2+4)^2}=\frac{4p}{(p^2+4)^2}+\frac{2}{p^2+4}-\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$

$\Rightarrow y=\sin 2t+t\sin 2t-t\cos 2t$

Для нахожд. общ. реш. взять в нач. усл. произв. C_1 и C_2

Пр. $\begin{cases} \dot{x} = -x-2y+2e^{-t} \\ \dot{y} = 3x+4y+e^{-t} \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=-1$

$x(t) \doteqdot X(p) \qquad \dot{x}(t) \doteqdot pX(p)+1$

$y(t) \doteqdot Y(p) \qquad \dot{y}(t) \doteqdot pY(p)+1$

подст. в сист.

$$pX(p)+1=-X(p)-2Y(p)+\frac{2}{p+1}$$

$$pY(p)+1=3X(p)+4Y(p)+\frac{1}{p+1}$$

$$(p+1)X(p)+2Y(p)=\frac{2}{p+1}-1=\frac{1-p}{p+1}$$

$$-3X(p)+(p-4)Y(p)=\frac{1}{p+1}-1=-\frac{p}{p+1}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & 2 \\ -3 & p-4 \end{vmatrix}=(p+1)(p-4)+6=p^2-3p+2=(p-1)(p-2)$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} \frac{1-p}{p+1} & 2 \\ -\frac{p}{p+1} & p-4 \end{vmatrix}=\frac{(1-p)(p-4)+2p}{p+1}=\frac{-p^2+7p-4}{p+1}$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} p+1 & \frac{1-p}{p+1} \\ -3 & -\frac{p}{p+1} \end{vmatrix}=-p+\frac{3-3p}{p+1}=\frac{-p^2-4p+3}{p+1}$$

$$X(p)=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-p^2+7p-4}{(p-1)(p-2)(p+1)}=\ldots=$$

$$Y(p)=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-p^2-4p+3}{(p-1)(p-2)(p+1)}$$