Интегралы Эйлера

$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ — Гамма-ф-ция сх. при $p>0$

$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ — Бета-ф-ция сх. при $p>0$ $q>0$

$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $B(p,q)=B(q,p)$

$B(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$

$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, $p>0$

$n=1,2,3,\dots$

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\dots1\cdot\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}=n!$ — обобщение факториала

$\Gamma(n+1/2)=(n-1/2)\Gamma(n-1/2)=\dots=(n-1/2)(n-3/2)\dots\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$

$n=0,1,2,\dots$

$\Gamma(1/2)=\int\limits_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}dx=\int\limits_0^{+\infty}t^{-1}e^{-t^2}2t\,dt=2\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$

$\underline{B(p,1-p)}=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\underbrace{\Gamma(1)}_{=0!=1}}=\underline{\dfrac{\pi}{\sin\pi p}}$ — ф-ла дополнения для бета-ф-ций

Пр. $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}\underset{x=2t}{=}\int\limits_0^1\dfrac{2dt}{\sqrt[5]{2^3t^3(2-2t)^2}}=\int\limits_0^1\dfrac{dt}{\sqrt[5]{t^3(1-t)^2}}=\int\limits_0^1 t^{-3/5}(1-t)^{-2/5}dt=B\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)=\dfrac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}$

Пр. $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=B(5/4,3/4)=\dfrac{\Gamma(5/4)\cdot\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}=\dfrac{\frac{1}{4}\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{1}=1$

Пр. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4x\cos^6x\,dx=\left[\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{matrix}\right]=\int\limits_0^{\pi/2}t^4\cdot(1-t^2)^{5/2}\cdot dt=\left[\begin{matrix}t^2=u\\ 2t\,dt=du\end{matrix}\right]=$

$=\int\limits_0^1u^2(1-u)^{5/2}\cdot\dfrac{du}{2\sqrt{u}}=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1u^{3/2}(1-u)\,du=\dfrac{1}{2}B(5/2,7/2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\underbrace{\Gamma(6)}_{=5!=120}}=$

$=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3}{2^9}\Gamma(\frac{1}{2})^2=\frac{3\pi}{2^9}$

Задание 2.
Собств. инт-лы, зависящие от параметра.

$$\Phi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

$f(x,\alpha)$ инт. по Риману на $x\in[a,b]$ $\forall\alpha\in\Omega$

Свойства:

① непр. по параметру

Пусть $f(x,\alpha)$ непр. на прямоуг. $\Pi=\{a\le x\le b,\ A\le\alpha\le B\}$

$\Phi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непр. по $\alpha\in[A,B]$

Пр. Найти: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\sqrt{1+\alpha^2x^4}\,dx = \int_0^1\left(\lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{1+\alpha^2x^4}\right)dx = 1$ $\forall x$

т.к. $f(x,\alpha)$ непр.
на всей плоскости

② Интегрирование по параметру

Пусть $f(x,\alpha)$ непр. на $\Pi=\{a\le x\le b,\ A\le\alpha\le B\}$

Тогда $\int_A^B\left\{\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha=\int_a^b\left\{\int_A^B f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx$

Контрпример, когда данное равенство неверно:

$$\int_0^1 d\alpha\int_0^1\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}dx \ne \int_0^1 dx\int_0^1\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}d\alpha$$

Ф-я $f(x,\alpha)=\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$ не явл. непр. в т. $(0,0)$!

Проверим:

$$\int_0^1\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}dx=\left|\begin{matrix}x=\alpha\,\mathrm{tg}\,t\\ dx=\frac{\alpha\,dt}{\cos^2t}\end{matrix}\right|=\int_0^{\mathrm{arctg}(1/\alpha)}\frac{\alpha^2-\alpha^2\mathrm{tg}^2t}{(\alpha^2+\alpha^2\mathrm{tg}^2t)^2}\cdot\frac{\alpha\,dt}{\cos^2t}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\mathrm{arctg}(1/\alpha)}\frac{1-\mathrm{tg}^2t}{(1+\mathrm{tg}^2t)^2}\frac{dt}{\cos^2t}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\mathrm{arctg}(1/\alpha)}(1-\mathrm{tg}^2t)\cos^2t\,dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\mathrm{arctg}(1/\alpha)}\cos 2t\,dt=\frac{1}{2\alpha}\sin 2t\Big|_0^{\mathrm{arctg}\,1/\alpha}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$$

$$\sin 2x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2x};\quad \sin 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\alpha}=\frac{2\cdot 1/\alpha}{1+1/\alpha^2}=\frac{2}{\alpha+1/\alpha}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$$

Тогда $\int_0^1 d\alpha\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1\frac{d\alpha}{\alpha^2+1}=\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\,0=\pi/4$

$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha=-\pi/4$ $\Rightarrow$ <u>ч.т.д.</u>

кр:

1. задача на разложение в ряд фурье
остальные задачи на понимание: синусы косинусы четных/нечетных дуг; дифференцирования рядов фурье; порядок убывания коэффициентов; полнота системы, мб еще что нибудь

Пр. $\int \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy =$

$= \int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}$

иначе инт. был бы не взять

③ Диф-ие по параметру

Пусть $f(x,\alpha)$ непр. в $П = \{a \le x \le b,\ A \le \alpha \le B\}$

Тогда $\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непр. дифф. на $[\alpha, \beta]$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx \ ; \quad \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$$

Пр. $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)\,d\varphi$

$|\alpha|>1$ — чтобы инт. был собственным

$\alpha^2 \ge \alpha^2-\sin^2\varphi \ge \alpha^2-1$

$\alpha^2 \ge \ln(\alpha^2-\sin^2\varphi) \ge \ln(\alpha^2-1)$

$\Rightarrow I(\alpha)$ — собств.

Что, если $\alpha=1$: $\int_0^{\pi/2}\ln(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi =$
особен. в т. $\pi/2$

Пусть $t = \pi/2 - \varphi$: $= \int_{0\leftarrow}^{\pi/2}\ln(1-\cos^2 t)\,dt = 2\int_{0\leftarrow}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt \sim \int_{0\leftarrow}^{\pi/2}\ln t\,dt$ — сх.
особен. в т. 0

$\Rightarrow$ при $\alpha=1$ сх. несобств. инт.

при $\alpha<1$ ф-я не определена на $[0, \pi/2]$

Вычислим $I(\alpha)$ при $\alpha>1$:

$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2\varphi}\,d\varphi = \left[\begin{matrix}\operatorname{tg}\varphi = t \\ d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}\end{matrix};\ \sin^2\varphi = \frac{t^2}{1+t^2}\right] = \int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt =$

$= \int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\alpha^2t^2-t^2} = \int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2(\alpha^2-1)}\,dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}+t^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\sqrt{\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}}\,t\Big|_0^{+\infty} =$

$\int\frac{dt}{t^2+b^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C$

$= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha>1$

$\Rightarrow I(\alpha) = \pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}) + C$, $\alpha>1$

Как найти C?

$I(\alpha) = \pi\ln\alpha + \pi\ln\underbrace{\left(1+\sqrt{1-1/\alpha^2}\right)}_{\to 2,\ \alpha\to+\infty} + C$

$\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to+\infty}(I(\alpha)-\pi\ln\alpha) = \pi\ln 2 + C$

С другой стороны,

$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\left(2\ln\alpha + \ln\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}\right)\right)d\varphi =$

$= \pi\ln\alpha + \int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}\right)d\varphi$

Итого: $\left| I(\alpha) - \pi \ln\alpha \right| \le \int_0^{\pi/2} \left| \ln\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}\right) \right| d\varphi \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$

$\sin^2\varphi \le 1$; $\quad 1 - 1/\alpha \le 1 - \frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2} \le 1$

$$\ln(1-1/\alpha) \le \ln\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}\right) \le 0$$

$$\left|\ln\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}\right)\right| \le \left|\ln(1-1/\alpha^2)\right| \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$$

Получили: $\underline{I(\alpha) = \pi\cdot\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}}$, $\alpha > 1$

Если $\alpha \to 1+0$ ← пока что переход не обоснован

$$I(1) = \pi \ln 1/2 = -\pi\ln 2$$