Дз Хамиш Виктории Б01-302
по гармон. анализу, 4 сем
задание 1

С2 §22

№110 Д-ать: пр. ряд равн. сх => он ряд Фурье своей суммы

Ряд $\sum u_n$ – равн. сх. на $(-\infty, +\infty)$, его сумма – $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сумма равн. сх. ряда из непр. ф-ий – непр. ф-ия $\Rightarrow f(x)$ – непр.; с периодом 2π

Равн. сх. ряд из непр. ф-ий на компакт. отр. можно почленно интегрир-ть:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt\right); \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

Зафиксируем m:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$$ – сх. равн. на $(-\infty, \infty)$ т.к. $\cos mx$ – огр.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt \cos mt\,dt}_{0 \text{ при } n \neq m} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt \cos mt\,dt}_{0}\Big) =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mt\,dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \frac{\cos 2mt}{2}\right)dt = \pi a_m \Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt$$

аналогично b_m – чтд

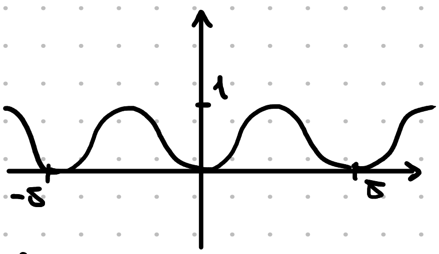
№111 Явл. ли ряды рядами Фурье?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ – сх. равн. на $(-\infty, +\infty)$ по пр. Вейерштрасса $\Rightarrow$ да

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ $\quad \sin nx \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ нет (по необх. усл.)

№1 1) Разложи в ряд Фурье

$f(x) = \sin^2 x$ – четн $\Rightarrow b_n = 0$ $\quad n = 1, 2, ..$



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x \cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin^2 x & du = 2\sin x \cos x\,dx \\ dv = \cos nx & v = \frac{\sin nx}{n}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx \cdot \sin 2x}{n}dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos((n-2)x)\,dx + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos((n+2)x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\frac{\sin((n-2)\pi)}{n-2} + \frac{\sin((n+2)\pi)}{n+2}\right] = 0 \text{ при } n \neq 2$$

$f(x)$ непр. период и кус-гл на $[-\pi, \pi]$

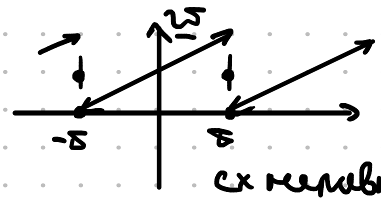
$\Rightarrow$ Ряд сх. равн.

при $n = 2$: $a_2 = -1/2$

$\Rightarrow$ Ответ: $1/2 - 1/2\cos 2x$

№8 * Найти сумму ряда в т. x_0; указать промеж, где $S(x)=f(x)$

$f(x)=\pi+x \quad -\pi \le x \le \pi; \quad x_0=\pi$



сх неравн., т.к. сумма разрывна

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi^2=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nx\,dx=\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}^{\,0}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=x & dv=\cos nx\,dx\\ du=dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=\frac{x}{n}\cancel{\sin nx}^{\,0}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}^{\,0}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nx\,dx=\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}^{\,0}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx & v=-\frac{\cos nx}{n}\end{bmatrix}=$$

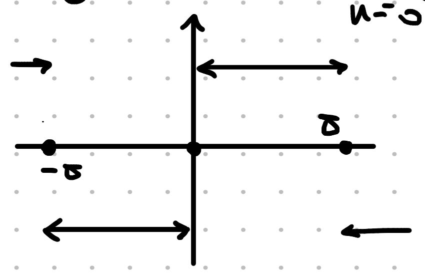
$$=-\frac{x\cos nx}{\pi n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}^{\,0}=\frac{1}{\pi n}\left(-\pi\cos\pi n-\pi\cos(-\pi n)\right)=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$,

в т. $x_0=\pi$ $S(x)=\pi\ \left(=\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}\right)$

$f(x)=S(x)$ при $-\pi<x<\pi$

№12 $f(x)=\operatorname{sign}x \quad -\pi<x<\pi$ Найти: сумма ряда Лейбница $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$



сх неравн., т.к. сумма разрывна

$f(x)$ нечетн. $\Rightarrow a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sign}x\sin nx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot(-\cos nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sign}x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx \quad -\pi<x<\pi$$

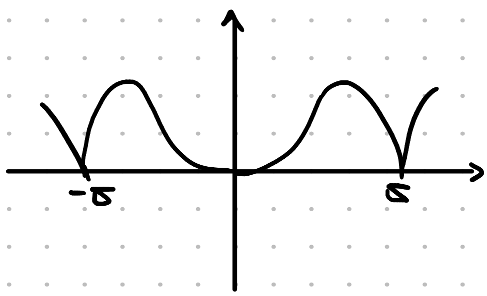
$\operatorname{sign}x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ — Ответ

$x=\pi/2$: $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^k$

$\Rightarrow 1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1}$; $1-1/3+1/5-1/7+\ldots=\pi/4$ - сумма ряда Лейбница

№24 $f(x)=x\sin x$ на $[-\pi,\pi]$

чет. $(x\sin x=-x\sin(-x))\Rightarrow b_n=0$



сх. равном., т.к. ф-ция с пер. 2π

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x\left(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x\sin(n+1)x-x\sin(n-1)x\right)dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=\sin(n\pm1)x\,dx\\ du=dx & v=-\frac{\cos(n\pm1)x}{n\pm1}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}\Big|_0^{\pi}+\cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos(n+1)x}{n+1}dx}^{\,0}-\cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)x}{n-1}dx}^{\,0}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n^2-1} \quad \text{т.к. } \cos(n+1)\pi=\cos(n-1)\pi=(-1)^{n+1}$$

$a_0/2=1$
$a_1=-1/2$ $\Rightarrow$ Ответ: $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$

№25 $f(x) = x\cos x$ на $[-\pi/2, \pi/2]$

нечетн, т.к. $x\cos x = -(-x\cos(-x))$

$\Rightarrow a_n = 0$

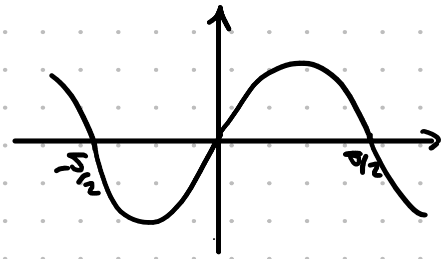
$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x \sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\,x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin(2n\pm1)x \\ du = dx & v = -\frac{\cos(2n\pm1)x}{2n\pm1} \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{\cos(2n+1)x\,x}{2n+1}}^{\to 0} + \cancel{\frac{\cos(2n-1)x\,x}{2n-1}}^{\to 0}\right]_0^{\pi/2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)x\big|^{\pi/2}}{(2n+1)^2} + \frac{\sin(2n-1)x\big|^{\pi/2}}{(2n-1)^2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right] =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\left[\frac{2\cdot 4n}{(4n^2-1)^2}\right] = \frac{16}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$



Сх. равном., т.к. сумма непр. ф-ии с пер. π

№28 $f(x) = x^2$ $\quad -1 \le x \le 1$ $\quad l = 1$

четн $\Rightarrow b_n = 0$

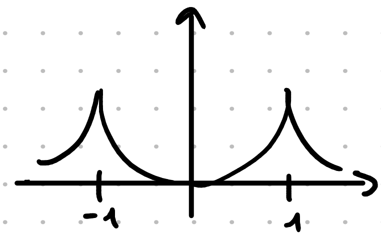
$$a_0/2 = \frac{1}{l}\int_0^l x^2\cos \pi nx\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos \pi nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = \cos\pi nx\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \frac{\sin\pi nx}{\pi n} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\cdot\cancel{\frac{\sin\pi nx}{\pi n}}^{\to 0}x^2\Big|_0^1 - \frac{4}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin\pi nx\,dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos\pi nx}{\pi n} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos\pi nx\,dx\right] = -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2}\sin\pi nx\Big|_0^1\right] = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $x^2 = 1/3 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx$



Сх. равном., т.к. сумма непр-ых ф-ии. с периодом 2

№41 $f(x) = \cos 2x$ $\quad 0 \le x \le \pi$ $\quad$ Разл. по синусам

Продолжим по нечетн. на $[-\pi, \pi]$, далее с периодом 2π $\quad a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+2)x + \sin(n-2)x)\,dx =$$

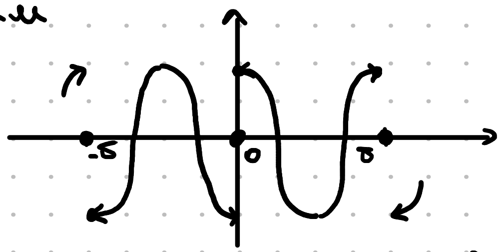
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\pm2)x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n+2)\pi}{n+2} + \frac{1-\cos(n-2)\pi}{n-2}\right)$$

n - четн.: $b_n = 0$

n - нечетн.: $b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{2(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\cos 2x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$

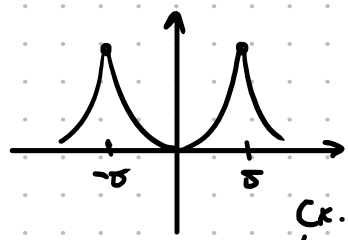


Сх. неравн., т.к. сумма разрывн.

ДЗ5 $f(x)=x^2$ + найти: $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$; $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; $S_3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

1) по косинусам на $[-\pi;\pi]$

$b_n=0$ \ продолжаем по четн. с пер. 2π



$$a_0/2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}$$

Сх. равн, тк сумма непр-на с пер. 2π

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left[\begin{matrix}u=x^2 & dv=\cos nx\,dx\\ du=2x\,dx & v=\frac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}2x\,dx\right)=-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,x\,dx=-\frac{4}{\pi n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$
$$=\frac{4}{\pi}\frac{\pi\cos n\pi}{n^2}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$
$$\Rightarrow\ x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Пусть $x=\pi$:
$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n\ \Rightarrow\ \frac{2\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \Rightarrow\ S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

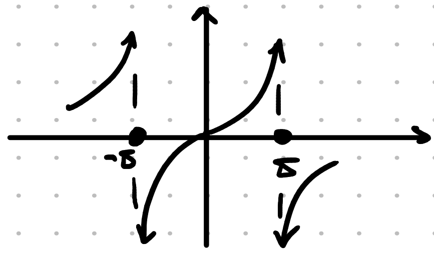
Пусть $x=0$:
$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\ \Rightarrow\ S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

Найдем S_3:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \Rightarrow\ S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=3/4\,S_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$
$$\Rightarrow\ S_3=\frac{\pi^2}{8}$$

2) по синусам на $(0,\pi)$

Продолжим по нечетн, далее с пер. 2π

$a_n=0$

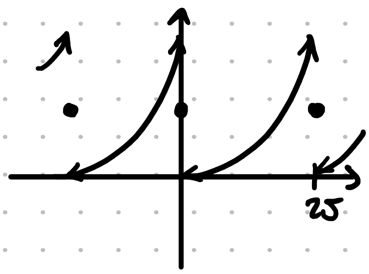


$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}2x\,dx\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{2}{n}\left(\cancel{x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{2}{n}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n}+\frac{2((-1)^n-1)}{n^3}\right]$$

Сх. неравн, тк сумма разрывна

$$\Rightarrow\ x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$$

3) по синусам и косинусам на $(0,2\pi)$
продолжим с пер. 2π



$$a_0/2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^3}{2\cdot3\pi}=\frac{4\pi^2}{3}$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=4/n^2\ ;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{4\pi}{n^2}$$
$$\Rightarrow\ x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n^2}\right)$$

Сх. неравн, тк сумма разрывна

№65 $f \in L_R[0,\pi]$ $f(\pi-x)=f(x)$

Д-ать: 1) $a_{2n-1}=0$ $n\in\mathbb{N}$ при разл. по кос.

2) $b_{2n}=0$ $n\in\mathbb{N}$ при разл. по син.

$f(\pi-x)=f(x)$ => симм. по четности отн. прямой $x=\pi/2$

1) по косинусам

$$a_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(2n-1)x\,dx=\left|\begin{matrix}x=\pi-z\\ dx=-dz\end{matrix}\right|=-\frac{2}{\pi}\int_\pi^0 f(\pi-z)\cos(2n-1)(\pi-z)\,dz \ (=)$$

$$\cos(2n-1)(\pi-z)=\cos[(2n-1)\pi-(2n-1)z]=\cos(2n-1)\pi+\cos(2n-1)z= =-\cos(2n-1)z$$

$$(=)\ \frac{2}{\pi}\int_\pi^0 f(z)\cos(2n-1)z\,dz=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(2n-1)x\,dx$$

$\Rightarrow a_{2n-1}=0$ ч.т.д. почему ?

2) по синусам

$$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2nx\,dx=\left|\begin{matrix}x=\pi-z\\ dx=-dz\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\pi-z)\sin 2n(\pi-z)\,dz \ (=)$$

$$\sin 2n(\pi-z)=\sin(2\pi n-2nz)=\cancel{\sin 2\pi n\cos 2nz}^{\,0}-\sin 2nz\cos 2\pi n=-\sin 2nz$$

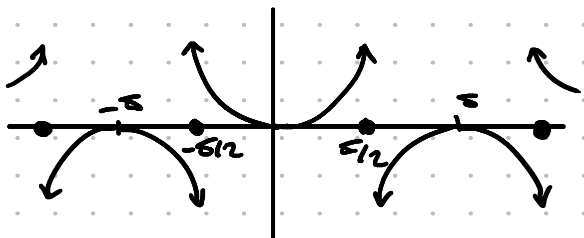
$$(=)\ -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(z)\sin 2nz\,dz=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2nx\,dx$$

$\Rightarrow b_{2n}=0$ ч.т.д.

№66 $f\in L_R[0,\pi/2]$, Как ее продолжить на $[-\pi,\pi]$, чтобы ее ряд Фурье был: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$ – косинусы нечет. кр. дуг

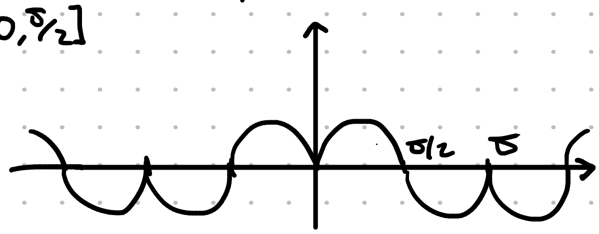
=> Продолжим $[0,\pi/2]$ до $[0,\pi]$, отражением симм. отн. точки $(\pi/2,0)$ т.е. чтобы $f(\pi-x)=-f(x)$

Далее по четн. на $[-\pi,\pi]$, далее с периодом 2π.



№68 Разложить $f(x)=x(\pi/2-x)$ на $[0,\pi/2]$

1) по сист. $\{\cos(2n-1)x\}$ $n\in\mathbb{N}$
кос. нечет. кр. дуг



сх. равном., т.к. сумма непр-на.

$$a_{2n-1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(x)\cos(2n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x\,dx=$$

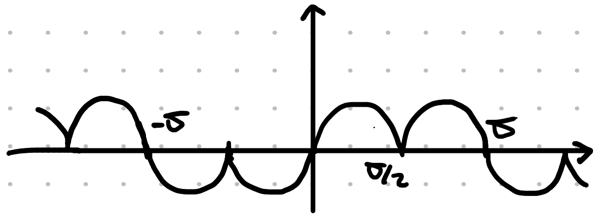
$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{x(\pi/2-x)\sin(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_{\pi/2}^{0}-2\int_0^{\pi/2}x\sin(2n-1)x\,dx\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi}{2(2n-1)}-2\left(\cancel{-\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2}}+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx\right)\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi}{2(2n-1)}-2\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2}\right]=-\frac{2}{(2n-1)^2}-\frac{8(-1)^n}{\pi(2n-1)^3}=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)$$

2) по сист. $\{\sin(2n-1)x\}$ $n\in\mathbb{N}$
сим. неч. пр. дуг



Продолжим $f(x)$ с $[0,\pi/2]$ до $[0,\pi]$, отразив симм. отн. прямой $x=\pi/2$ (т.е. $f(\pi-x)=f(x)$)
Далее по нечетн. на $[-\pi,\pi]$, далее с пер. 2π

$$b_{2n-1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2n-1)x\,dx=\frac{4}{\pi}\left[\cancel{-\frac{x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x}{2n-1}}\Big|_0^{\pi/2}\to 0+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\cos(2n-1)x\,dx\right]$$

$$=\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi}{2}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}x\cos(2n-1)x\,dx\right]=\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}-2\left(\frac{x\sin(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2n-1}\int_0^{\pi/2}\sin(2n-1)x\,dx\right)\right]=\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}-2\left(\frac{\frac{\pi}{2}(-1)^{n+1}}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2}\right)\right]=$$

$$=\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi(-1)^{n+1}}{2(2n-1)}-2\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{2n-1}-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)\right]=\frac{4}{\pi(2n-1)}\left[\frac{\pi(-1)^{n+1}}{2(2n-1)}+\frac{2}{(2n-1)^2}\right]=$$

$$=\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}+\frac{8}{\pi(2n-1)^3}$$

№72 Каковы особенн. обладают коэф. Фурье ф-ций пер. 2π, если:

1) график $f(x)$ имеет центр симметрии в т. $(0,0)$ и $(\pm\frac{\pi}{2},0)$

$(0,0)$ − т. симм. $\Rightarrow$ $f(x)$ нечетн. $\Rightarrow$ $f(x)=-f(-x)$; $a_n=0$

$(\pm\frac{\pi}{2},0)$ − т. симм. $\Rightarrow$ $f(\pi-x)=-f(x)$ $\Rightarrow$ разл. по синусам нечт. пр. дуг

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\,dx=\begin{vmatrix}z=\pi-x\\ dz=-dx\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\pi-z)\sin(2n-1)(\pi-z)\,dz=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\,dx\Rightarrow b_{2n-1}=0$$

Итого: $a_n=0$; $b_{2n-1}=0$

2) график $f(x)$ имеет центр симметрии в т. $(0,0)$ и имеет оси симметрии $x=\pm\frac{\pi}{2}$

$(0,0)$ − т. симм. $\Rightarrow$ $f(x)$ нечетн. $\Rightarrow$ $f(x)=-f(x)$; $a_n=0$

$x=\pm\frac{\pi}{2}$ − оси симм. $\Rightarrow$ $f(\pi-x)=f(x)$ $\Rightarrow$ разлож. по синт. нечетн. пр. дуг

$$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)\,dx=\begin{vmatrix}z=\pi-x\\ dz=-dx\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\pi-z)\sin(2n-1)(\pi-z)\,dz=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\,dx.\Rightarrow b_{2n}=0$$

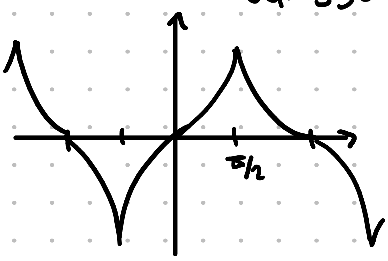
Итого: $a_n=0$; $b_{2n}=0$

???

T1 $f(x) = \text{sh}\, x \quad x \in [0, \pi/2]$; $g(x) = \text{sh}\, x + 1 \quad x \in [0, \pi/2]$

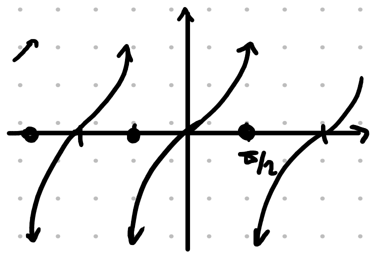
I для $f(x) = \text{sh}\, x$

а) $\{\sin(2n-1)x\}_{n=1}^{\infty}$ – синуси непарн. кр. дуг



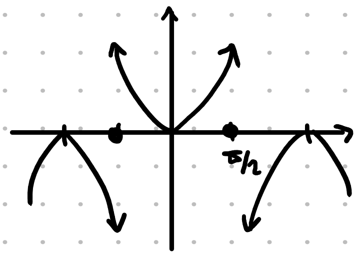
сх рівн, тк сумма непр. ф-ція с пер. 2π

б) $\{\sin 2nx\}_{n=1}^{\infty}$ – синуси парн. кр. дуг



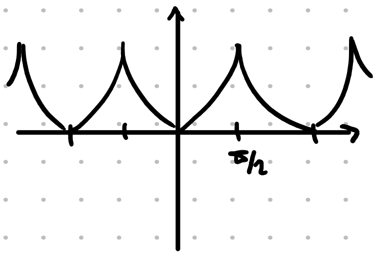
сх нерівн, тк сумма розривна

в) $\{\cos(2n-1)x\}_{n=1}^{\infty}$ – косинуси непарн. кр. дуг



сх нерівн, тк сумма розривна

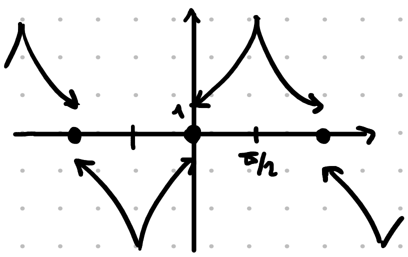
г) $\{\cos 2nx\}_{n=1}^{\infty}$ – косинуси парн. кр. дуг



сх рівн, тк сумма непр. ф-ція с пер. 2π

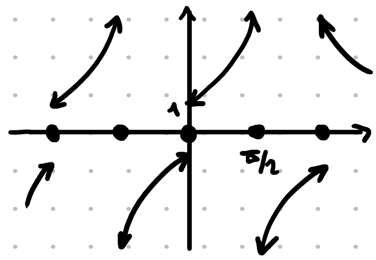
II для $g(x) = \text{sh}\, x + 1$

а) син. непарн. кр. дуг



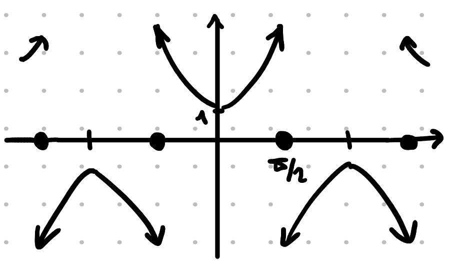
сх нерівн, тк сумма розривна

б) син. парн. кр. дуг



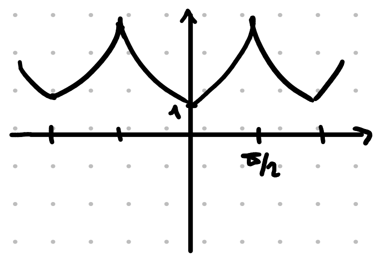
сх нерівн, тк сумма розривна

в) кос. непарн. кр. дуг



сх нерівн, тк сумма розривна

г) кос. парн. кр. дуг



сх рівн, тк сумма непр. ф-ція с пер. 2π

T2. Определить порядок убыв. коэф. Фурье. Ф-ции опр. на $[-\pi,\pi]$

Утв.1 Если $f(x)$ им. период $2l$ и $f^{(k-1)}(x)$ $\overset{\text{непр и кус. непр. диф.}}{\text{кус. гл.}}$ на $[-l,l]$, то $a_n, b_n = o(1/n^k)$

Утв.2 Если $f(x)$ им. период $2l$ и $f^{(k-2)}(x)$ непр. на $[-l,l]$ и $f^{(k-1)}(x)$ $\underbrace{\text{кус. непр. диф.}}$, то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

т.е. $f^{(k)}(x)$ непр. всюду, кроме конечн. числа т с разр. 1 рода

$f''(x) = \ldots x^{2023}$
кус. непр.

а) $f(x) = x^{2025}$

1) $f(x)$ не кус-гл (не непр) $\Rightarrow$ утв. неприменимо
2) $f(x)$ - кус. непр. диф. $\Rightarrow k-1=0$
$f'(x) = 2025 \cdot x^{2024}$ - непр. $\Rightarrow a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

б) $f(x) = x^{2024}$

1) $f(x)$ - кус.гл. $\Rightarrow k-1=0$; $k=1$ $\Rightarrow a_n, b_n = o(1/n)$
2) $f(x)$ - кус.непр.диф
$f'(x) = 2024 \cdot x^{2023}$ -
$f''(x) = 2024 \cdot 2023 \cdot x^{2022}$ -

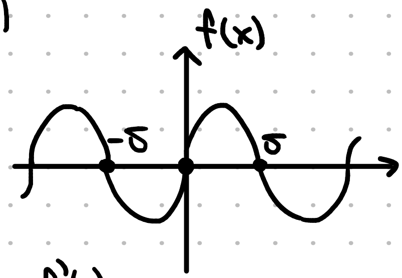
в) $f(x) = (x^2 - \pi^2)^3$

с§22 №115 Сх. ли пор. равном.? Построить гр. суммы $S(f')$ и $S(f'')$ на $(-\pi,\pi)$

$f(x) = \pi x - x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \pi x - x^2, & x>0 \\ \pi x + x^2, & x<0 \end{cases}$$

$f(-\pi) = f(\pi) = f(0) = 0$



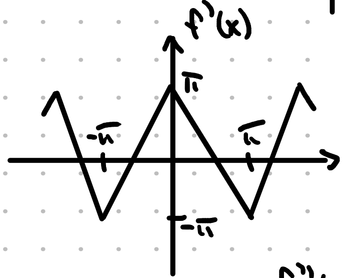
сх. равн., т.к. сумма нуч. гл. сн. 25

⇓

f можно почленно диф.

$$f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & x>0 \\ \pi + 2x, & x<0 \end{cases}$$

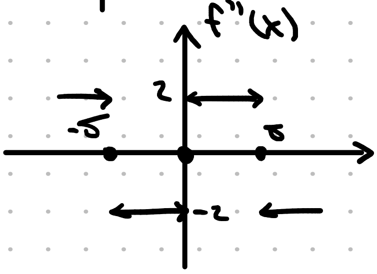
$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x>0 \\ 2, & x<0 \end{cases}$$



по сл. из 1 пр. Липшица это график суммы $f'(x)$

сх. равн., т.к. сумма нус. гл. с пер. 25

Ответ: сх. равн.



по сл. из 1 пр. Липшица это график суммы $f''(x)$

не сх. равн., т.к. сумма разрывна

№116 $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ $-\pi<x<\pi$ Найти разложения x^2, x^3, x^4

исп. почл. инт.

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}$

Тогда $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$

$F(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n}\left(a_n\sin\frac{\pi n x}{l} - b_n\cos\frac{\pi n x}{l}\right)$

$c = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$

1) $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$; $\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{2} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$

$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

2) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} = \int_0^x t^2dt - \frac{\pi^2}{3}x$; $\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$

$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^3/3 - \pi^2x/3\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\pi^2x^2}{6}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow x^3 = 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n\sin nx}{n^3}$

$\Rightarrow x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx$

3) $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx$

$\frac{x^4}{4} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n+1}\cdot\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\cos nx$; $c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^4}{4}dx = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{20\pi} = \frac{\pi^4}{10}$

$\frac{x^4}{4} = \frac{\pi^4}{20} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6-\pi^2n^2}{n^4}\cos nx \Rightarrow x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6-\pi^2n^2}{n^4}\cos nx$

Пр. Вычислить $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

Равенство Парсеваля.
Если $f(x)\in L^2R(-l,l)$ с пер. $2l$:
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2dx$$

1) $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

$a_0=\frac{2\pi^2}{3}$; $a_n=\frac{4(-1)^n}{n^2}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}16/n^4=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^4}{5}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{8\pi^4}{45}\cdot\frac{1}{16}=\frac{\pi^4}{90}$$

2) $f(x)=x^3=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx$

$a_n=0$; $b_n=\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}$; $b_n^2=\frac{(\pi^4n^4-12\pi^2n^2+36)}{n^6}$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi^4n^4-12\pi^2n^2+36}{n^6}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^6dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^6}{7}$$

$$4\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^4}{n^2}}_{=\pi^4\cdot\pi^2/6}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\pi^2}{n^4}}_{=12\pi^2\cdot\pi^4/90}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{n^6}}_{=36S}\Big]=\frac{2\pi^6}{7};\quad \frac{\pi^6}{6}-\frac{2\pi^6}{15}+36S=\frac{\pi^6}{14};\quad 36S=\frac{15\pi^6-35\pi^6+28\pi^6}{210}$$

$$\Rightarrow S=\frac{8\pi^6}{36\cdot 210}=\frac{\pi^6}{945}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

Т3. Неравенство Виртингера.

а) f – непр.дифф. на $[-\pi,\pi]$

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$; $f(-\pi)=f(\pi)$ Д-ать: $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\le\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)dx$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

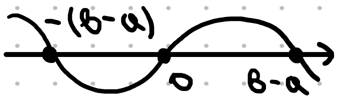
$f'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$ – кус.непр.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx&=\sum_{n=1}^{\infty}(na_n^2+nb_n^2)\end{aligned}\right|\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\le\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)dx$$

ч.т.д

б) f – непр.дифф. на $[a,b]$; $f(a)=f(b)=0$

Пусть $\varphi(x)=f(x+a)$: $\varphi(0)=0$, $\varphi(b-a)=0$ Д-ть: $\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx$



Продолж. по нечетн. с периодом $2(b-a)$, $l=b-a$

сх равн, т.к. ф-ия с неп.

$\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{b-a}$; $\varphi'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{b-a}\cos\frac{\pi nx}{b-a}$

$\Rightarrow \frac{2}{b-a}\int_0^{b-a}\varphi^2(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$; $\frac{2}{b-a}\int_0^{b-a}\varphi'^2(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(b-a)^2}b_n^2$

т.е.: $\int_0^{b-a}\varphi^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^{b-a}\varphi'^2(x)dx$; $\int_0^{b-a}f^2(x+a)dx\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^{b-a}f'^2(x+a)dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx$$

ч.т.д

C2 §16

№48 Показать, что ряды суммируются методом средн. арифм.

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$: $1, -1, 1, -1, \ldots$ — расходится

S_n: $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, \ldots$; σ_n: $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = \frac{1+0}{2} = 1/2$, $\sigma_2 = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$, $\sigma_3 = \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sigma_{2n} = \frac{S_0+S_1+\ldots+S_{2n}}{2n+1} = \frac{S_0+S_2+\ldots+S_{2n}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{S_0+S_2+\ldots+S_{2n}}{2n+2} = \frac{n+1}{2n+2}, \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_{2n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{2}$$

2) $D = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n\alpha$, $0 < |\alpha| < \pi$ ряд расходится по необх. усл-ю

$$D_n = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha \quad \Big| \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}D_n = \sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + 2\cos n\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \quad \Big| \; 2\cos\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}D_n = \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}} + \cancel{\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)} - \cancel{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)} + \sin\left(2\alpha+\frac{\alpha}{2}\right) - \cancel{\sin\left(2\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)} + \ldots + \sin\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right) - \cancel{\sin\left(n\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{\sin(n+1/2)\alpha}{2\sin\alpha/2} : \quad D_0 = \frac{\sin\alpha/2}{2\sin\alpha/2} = 1/2, \quad D_1 = \frac{\sin 3/2\alpha}{2\sin\alpha/2}, \quad D_2 = \frac{\sin 5/2\alpha}{2\sin\alpha/2}$$

$$\sigma_n = \frac{D_0+\ldots+D_n}{n+1} = \frac{\sin\alpha/2 + \sin 3\alpha/2 + \ldots + \sin(n+1/2)\alpha}{(n+1)2\sin\alpha/2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\alpha/2\sin 3\alpha/2 + \ldots + 2\sin\alpha/2\sin(n+1/2)\alpha}{4(n+1)\sin^2\alpha/2} =$$

$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta = \cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{1 - \cancel{\cos\alpha} + \cancel{\cos\alpha} - \cancel{\cos 2\alpha} + \cancel{\cos 2\alpha} - \ldots + \cancel{\cos n\alpha} - \cos(n+1)\alpha}{4(n+1)\sin^2\alpha/2} =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)\alpha}{4(n+1)\sin^2\alpha/2} = \frac{2\sin^2\frac{n+1}{2}\alpha}{4(n+1)\sin^2\alpha/2} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\alpha/2}\right)^2 \text{ — ядро Фейера}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$$

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, а также порядок убывания остатка ряда для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^{2025}; б) x^{2024}; в) $(x^2-\pi^2)^3$.

С.2. §22: 115; 116. ~~С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.~~

3. а) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, такая что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

семинар

Указание: воспользоваться неравенством Парсеваля. б) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, такая что $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx.$$

семинар

Указание: после сдвига продолжить функцию нечётным образом.

в)* ~~Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, такая что $f(a) = 0$, то~~

$$\cancel{\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx}$$

С.2. §16: 47(2); 48(1, 2).

если в Демидовиче

II Функциональные пространства

Th. Если $f(x)$ имеет пер. $2l$ и непр. на $[-l,l]$, то ряд Фурье f сумм. методом Фейера к $f(x)$ равномерно на $(-\infty,+\infty)$

Т.е. ряд Фурье ф-ии не обязан сходиться к ней, где ф-я непр., но сумм. методом средн. арифм. он обязан.

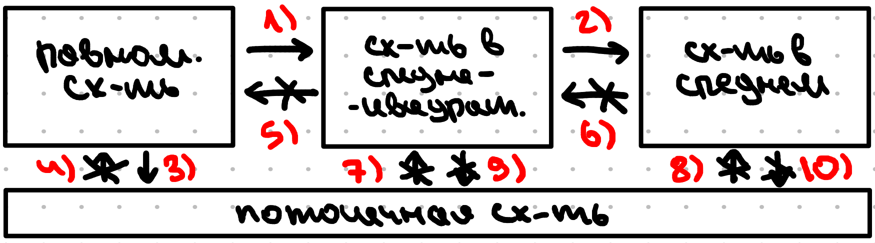
Равном. сх-ть. $C[a,b]$: $f_n \to f$, если $\|f_n - f\| \to 0$

Сх-ть в среднеквадрат. $L^2_c[a,b]$: $\|f_n - f\|_2 \to 0$, если $\int_a^b |f_n - f|^2 dx \to 0$

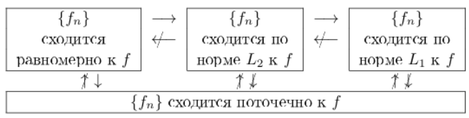
Сх-ть в среднем. $L^1_c[a,b]$: $\|f_n - f\|_1 \to 0$, если $\int_a^b |f_n - f| dx \to 0$

Th. f - непр. на $[a,b]$

D-во:



4. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке приведите контрпример):



С.З. §18: 97; 98.
С.З. §20: 20*; 23*.

5. Полна ли система $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ в пространствах

а) $C[-\pi,\pi]$; б) $CL_1[-\pi,\pi]$; в) $C[-1,1]$?

6. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

С.З. §19: 116.

7. Полна ли система функций $\{x^{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах

а) $C[1;10]$; б) $C[0;2]$?

8. Полна ли система функций $\{1\} \cup \{x^{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C[0;2]$?

9. Полна ли система функций $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространствах

а) $C[0;\pi/4]$; б) $C[\pi/4;\pi/2]$; в) $C[-\pi/8;\pi/8]$?

$\boxed{43 + 4^*}$