Вычисл. несобств. инт. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$C_R^+ = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| = R\}$

C_R^- – аналогично

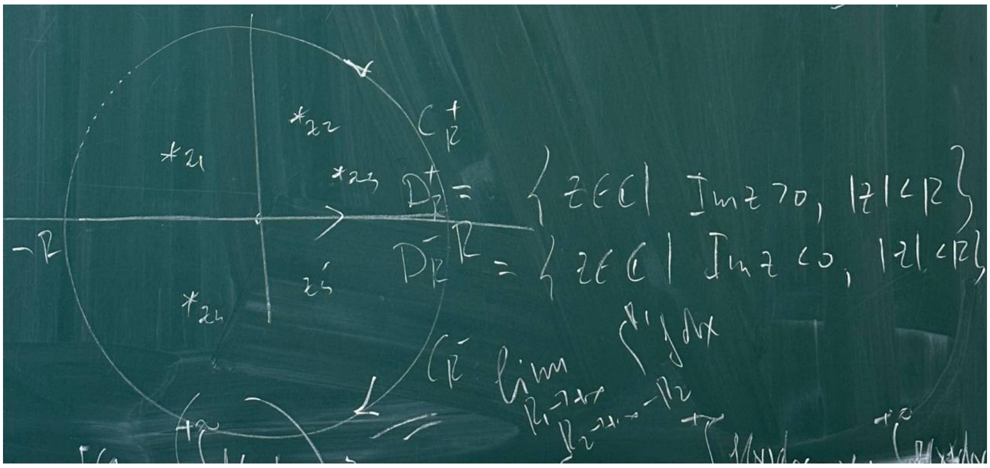
Th. Пусть 1) $f(z)$ рег. в $\mathbb{C}$ за искл. конечного числа т. $z_1, \dots, z_n$, не лежащ. на вещ. оси.

$$2)\ \int\limits_{C_R^+} f\,dz \to 0,\quad \int\limits_{C_R^-} f\,dz \to 0,\quad R\to+\infty$$

Тогда
$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_k:\\ \operatorname{Im} z_k>0}} \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \sum_{\substack{z_k:\\ \operatorname{Im} z_k<0}} \operatorname{res} f(z)$$

Замеч. Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ $\exists$ как несобств., то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\ R_2\to\infty}} \int\limits_{-R_2}^{R_1} f\,dx$



по Th. о вычетах для обл. D_R^+:

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \cancel{\int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz}^{\to 0} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1} + \operatorname*{res}_{z_2} + \operatorname*{res}_{z_3}\right) f \ = A = \text{const}$$

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = A$$

Для D_R^-:
$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \cancel{\int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz}^{\to 0} = \underbrace{-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_4} + \operatorname*{res}_{z_5}\right) f}_{B}$$

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = B$$

Утв.1 Пусть $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, многочлены P, Q не им. общих корней, степ. $Q \geq 2+$ степ. P; Q не им. вещ. корней.

Тогда $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{\substack{z_k,\\ \operatorname{Im} z_k>0}}\operatorname{res}\frac{P(z)}{Q(z)} = -2\pi i\sum_{\substack{z_k:\\ \operatorname{Im} z_k<0}}\operatorname{res}\frac{P(z)}{Q(z)}$$

z_k – корни знаменат.

§23 №1 в) $$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\left[f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3},\ \text{ОО}=\{\underbrace{\pm i}_{\Pi_3}\}\right]=$$

$$=2\pi i\operatorname{res}\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\underset{\substack{m=3\\ \text{порядок П}}}{\overset{T}{=}}2\pi i\cdot\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}(z-i)^3\right]=$$

$$=2\pi i\,\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{12}{(z+i)^5}\right]=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{(2i)^5}=2\pi i\cdot\frac{12}{2\cdot 32 i}=\frac{3\pi}{8}$$

Утв.2

Пусть 1) $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{i(\alpha z+\beta)}$,

2) многочлены $P(z), Q(z)$ не им. общих корней

3) $Q(z)$ не им. вещ. корн.

4) степ $Q >$ степ P, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Тогда $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i(\alpha x+\beta)}dx=\begin{cases}2\pi i\displaystyle\sum_{\substack{z_k,\\ \operatorname{Im} z_k>0}}\operatorname{res}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i(\alpha z+\beta)}, & \text{если } \alpha>0\\ -2\pi i\displaystyle\sum_{\substack{z_k,\\ \operatorname{Im} z_k<0}}\operatorname{res}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i(\alpha z+\beta)}, & \text{если } \alpha<0\end{cases}$$

$= A$

Следствие: в усл. утв.2 если $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\in\mathbb{R}$ при $x\in\mathbb{R}$, то в случае $\alpha>0$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(\alpha x+\beta)dx=\operatorname{Re}A,$$
$$\int\ldots\sin(\alpha x+\beta)\ldots=\operatorname{Im}A$$

§23: №2 13) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(8x-3)dx}{4x^2-7x+5}=$ 1 усл. следств. выполн.?, $t>0$

$$=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2-7x+5}dx=\left[\begin{array}{l} x^2-\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}=0 \quad \text{вещ. корн. нет} \\ x_{1,2}=\frac{7}{8}\pm\sqrt{\frac{49}{64}-\frac{5}{4}}=\frac{7\pm i\sqrt{31}}{8}\end{array}\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\operatorname{res}_{\frac{7\pm i\sqrt{31}}{8}}\frac{e^{i(8z-3)}}{4z^2-7z+5}\right]=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{i(8z-3)}}{8z-7}\right]\Bigg|_{z=\frac{7\pm i\sqrt{31}}{8}}=$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{(i\sqrt{31}+4)i}}{i\cdot\sqrt{31}}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{2\pi e^{-\sqrt{31}}(\cos4+i\sin4)}{\sqrt{31}}\right]=\frac{2\pi e^{-\sqrt{31}}\cos4}{\sqrt{31}}$$

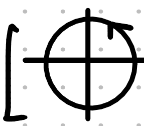
§23 №1 8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}dx=\left[\begin{array}{l}\alpha=1>0\\ \beta=-1\end{array}\right]=\frac{(x-3)e^{i(x-1)}}{x^2+4x+5}=$

$$=\left[\begin{array}{l}x^2+4x+5=0\\ x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm i\end{array}\right]=\mathrm{Im}\left[2\pi i\operatorname{res}_{z=-2+i}\frac{(z-3)e^{i(z-1)}}{z^2+4z+5}\right]=$$

$$=\mathrm{Im}\left[2\pi i\left(\frac{(z-3)e^{i(z-1)}}{2z+4}\Big|_{z=-2+i}\right)\right]=\mathrm{Im}\left[2\pi i\left(\frac{(-5+i)e^{i(-2+i-1)}}{2(-2+i)+4}\right]\right.=$$

$$=\mathrm{Im}\left(2\pi i\frac{(-5+i)e^{-3i-1}}{2i}\right)=\left[\mathrm{Re}\left[2\pi i\frac{e^{i(i\sqrt{31}+4)}}{i\sqrt{31}}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{2\pi e^{-\sqrt{31}}(\cos4+i\sin4)}{\sqrt{31}}\right]\right.$$

$$\left.=\frac{2\pi e^{-\sqrt{31}}\cos4}{\sqrt{31}}\right]=\mathrm{Im}\left[\pi(-5+i)e^{-1}(\cos(-3)+i\sin(-3))\right]=\frac{\pi}{e}(\cos3+5\sin3)$$

§14 №3 1) $a>1$; $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=\Bigg[$  $z=e^{i\varphi}\Rightarrow d\varphi=\frac{dz}{ie^{i\varphi}}$; $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$; $\cos\varphi=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\Bigg]=$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{z+1/z}{2}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{\frac{z^2+2az+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}=$$

$=\Bigg[$ Корни знам.: $z_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}$; z_1 в круге, z_2 вне круга $\Bigg]=-2i\cdot2\pi i\cdot\operatorname{res}_{-a+\sqrt{a^2-1}}\frac{1}{z^2+2az+1}=$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{2z+2a}\Big|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Пр. $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$ ← будут похожие примеры

рац.

Теорема Руше

Th. Руше.

Пусть 1) G – огр. ОСГБ,

2) $f(z), g(z)$ гол. в $\overline{G}$,

3) $\forall z \in \partial G: \ |g(z)| < |f(z)|$

Тогда ур-е $f(z)=0^{(1)}$ и $f(z)+g(z)=0^{(2)}$ имеют в G одинаков. число корней с учетом их кратности, а на ∂G ни (1), ни (2) корней не имеют

§15 №1 3) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ (*)

сколько корней в круге $\{|z|<1\}$ (с учетом их кратн.)

пусть $f(z) = -5z^4$, $g(z) = z^7 + z^2 - 2$

На ок. $|z|=1$: $|g(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \le |z^7| + |z^2| + |-2| =$

$= 1 + 1 + 2 = 4 < 5 = |-5z^4|$

$f(z)$ им. в обл. G 1 корень кр. 4

$\Rightarrow$ по Th. Руше (*) имеет 4 корня в круге

Ответ: 4

А сколько корней в $|z|<2$?

Пусть $f(z) = z^7$, $g(z) = -5z^4 + z^2 - 2$

На ок. $|z|=2$: $|g(z)| \le |-5z^4| + |z^2| + |-2| = 80 + 4 + 2 = 86 <$

$< 128 = |z^7|$

$\Rightarrow$ по Th. Руше Ответ: 7