Дз, задание 2 по диффурам, 3 сем.
Хаман Виктории Б01-302

I Ур-ия с пост. коэф.

с §8

№8.3 $y''+3y'+2y=0$

$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda_{1,2}=-2,-1$

Ответ: $y=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{-x}$

№8.7 $y''-6y'+18y=0$

$\lambda^2-6\lambda+18=0$

$\lambda^2-6\lambda+9+9=0$

$(\lambda-3)^2+9=0$

$\lambda=3\pm3i$

Ответ: $y=C_1\cdot e^{3x}\cdot\cos3x+C_2\cdot e^{3x}\cdot\sin3x$

№8.12 $y''-6y'+9y=0$

$\lambda^2-6\lambda+9=0$

$(\lambda-3)^2=0$

$\lambda=3$ кр.2

Ответ: $y=e^{3x}(C_1+x\cdot C_2)$

№8.23 $y^{(4)}-y'''+2y'=0$

$\lambda^4-\lambda^3+2\lambda=0$

$\lambda(\lambda^3-\lambda^2+2)=0$

$\lambda(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0$

$\lambda(\lambda+1)((\lambda-1)^2+1)=0$

$\lambda=0;-1;1\pm i$

Ответ: $C_1+C_2\cdot e^{-x}+e^{x}(C_3\cdot\cos x+C_4\cdot\sin x)$

№8.31 $y^{(4)}+6y'''+12y''+8y'=0$

$\lambda^4+6\lambda^3+12\lambda^2+8\lambda=0$

$(\lambda+2)(\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda)=0$

$\lambda(\lambda+2)^3=0$

$\lambda=0,\ \lambda=-2$ кр.3

Ответ: $C_1+e^{-2x}(C_2+C_3x+C_4x^2)$

№8.35 $y^{(4)}+8y''+16y=0$

$\lambda^4+8\lambda^3+16=0$

$(\lambda^2+4)^2=0$

$\lambda=\pm2i$ кр.2

Ответ: $C_1\cdot\cos2x+C_2\cdot\sin2x+$
$+C_3\cdot x\cdot\cos2x+C_4\cdot x\cdot\sin2x$

№8.47 $y''+4y=4xe^{-2x}-\sin 2x \quad \lambda^2+4=0 \quad \lambda=\pm 2i$

ОРОУ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

Пр.ч. $4xe^{-2x}$

$\mu=-2 \quad m=1 \quad k=0$

ЧРНУ: $y=(Ax+B)e^{-2x}$

$y'=-2e^{-2x}\cdot(Ax+B)+A\cdot e^{-2x}$

$y''=4e^{-2x}(Ax+B)-2Ae^{-2x}-2Ae^{-2x}=$

$=4e^{-2x}(Ax+B)-4Ae^{-2x}$

y'': $e^{-2x}(4Ax+4B-4A)$

y: $e^{-2x}(4Ax+4B)$

$8Ax+8B-4A=4x$

$\Rightarrow A=1/2, \; B=1/4$

$y=(1/2x+1/4)e^{-2x}$

Пр.ч. $-\sin 2x$

$\mu=\pm 2i \quad m=0 \quad k=1$

ЧРНУ: $y=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$

Пр. часть $(-\sin 2x)$ нечетна $\Rightarrow$ ищем ЧРНУ $y=Ax\cos 2x$

$y'=A\cos 2x-2Ax\sin 2x$

$y''=-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x$

$-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x+4Ax\cos 2x=$

$=-4A\sin 2x=-\sin 2x$

$4A=1 \Rightarrow A=1/4$

$y=1/4x\cos 2x$

Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+e^{-2x}(1/2x+1/4)+1/4x\cos 2x$

№8.56 $y''+4y'+4y=2e^{-2x}$

$\lambda^2+4\lambda+4=0$

$(\lambda+2)^2=0$

$\lambda=-2$ кр.2 $\Rightarrow$ ОРОУ: $y=e^{-2x}(C_1+C_2\cdot x)$

Пр.ч. $2e^{-2x}$ $\quad \mu=-2 \quad m=0 \quad k=2$

ЧРНУ: $4y=4Ax^2e^{-2x}$; $4y'=8Ax\cdot e^{-2x}-8Ax^2e^{-2x}$;

$y''=2Ae^{-2x}-4Axe^{-2x}-4Axe^{-2x}+4Ax^2e^{-2x}=2Ae^{-2x}-8Axe^{-2x}+4Ax^2e^{-2}$

$2Ae^{-2x}-8Axe^{-2x}+8Axe^{-2x}=2Ae^{-2x}=2e^{-2x} \Rightarrow A=1$

ЧРНУ: $y=x^2e^{-2x}$

Ответ: $e^{-2x}(C_1+C_2x)+x^2e^{-2x}$

№8.107 $y'''-2y''+2y'=20\sin^2 x/2=20\cdot\frac{1-\cos x}{2}=10-10\cdot\cos x$

$\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda^2-2\lambda+2)=\lambda((\lambda-1)^2+1)=0$

$\lambda=0, \; \lambda=1\pm i$

ОРОУ: $y=C_1+C_2e^x\cos x+C_3e^x\sin x$

Пр.ч. $10 \quad \mu=0 \quad m=0 \quad k=1$

ЧРНУ: $y=Ax$; $y'=A$; $y''=y'''=0 \Rightarrow 2A=10 \quad A=5 \Rightarrow y=5x$

Пр.ч. $-10\cos x \quad \mu=\pm i \quad m=0 \quad k=0$

ЧРНУ: $y=A\sin x+B\cos x$; $y'=A\cos x-B\sin x$; $y''=-A\sin x-B\cos x$;

$y'''=-A\cos x+B\sin x$

$\Rightarrow -A\cos x+B\sin x+2A\sin x+2B\cos x+2A\cos x-2B\sin x=$

$=\cos x(A+2B)+\sin x(2A-B)=-10\cos x$

$\Rightarrow \begin{cases} A+2B=-10 \\ B=2A \end{cases} \quad 5A=-10 \Rightarrow A=-2 \quad B=-4 \Rightarrow y=-2\sin x-4\cos x$

Ответ: $y=C_1+C_2e^x\cos x+C_3e^x\sin x+5x-2\sin x-4\cos x$

№8.131 $y^{(4)}-y''-2y=12\sin 3x\cos 2x-6(e^{-2x}+\sin 5x)=$

$=6\cdot\sin x+\cancel{6\sin 5x}-6e^{-2x}-\cancel{6\sin 5x}=6\sin x-6e^{-2x}$

$\lambda^4-\lambda^2-2=0$; $\lambda^2=2;-1$ $\lambda=\pm\sqrt{2}$, $\lambda=\pm i$

ОРОУ: $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos x+C_4\sin x$

Пр.ч. $6\sin x$ $\mu=-i$ $m=0$ $k=1$

ЧРНУ $y=Ax\cos x$; $y'=A\cos x-Ax\sin x$; $y''=-2A\sin x-Ax\cos x$;

$y'''=-3A\cos x+Ax\sin x$; $y^{(4)}=4A\sin x+Ax\cos x$

$4A\sin x+Ax\cos x+$
$+2A\sin x+Ax\cos x$ $=6\sin x$ $\Rightarrow 6A=6$; $A=1$ $\Rightarrow$ ЧРНУ: $y=x\cos x$
$-2Ax\cos x$

Пр.ч. $-6e^{-2x}$ $\mu=-2$ $m=0$ $k=0$

ЧРНУ: $y=Ae^{-2x}$; $y''=4Ae^{-2x}$; $y^{(4)}=16Ae^{-2x}$

$Ae^{-2x}(16-4-2)=10Ae^{-2x}=-6e^{-2x}$; $A=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ ЧРНУ: $y=-\frac{3}{5}e^{-2x}$

Ответ: $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos x+C_4\sin x+x\cos x-3/5\,e^{-2x}$

№8.153 $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\lambda=2;1$

ОРНУ: $y=C_1(x)\cdot e^{2x}+C_2(x)\cdot e^x$

$$\begin{cases}C_1'(x)\cdot e^{2x}+C_2'(x)\cdot e^x=0\\ C_1'(x)\cdot 2e^{2x}+C_2'(x)\cdot e^x=\frac{1}{1+e^x}\end{cases}\Rightarrow C_1'(x)\cdot e^{2x}=\frac{1}{1+e^x};\quad C_1'(x)=\frac{1}{e^{2x}(1+e^x)}$$

$$C_1(x)=\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{3x}}\underset{u=e^x}{=}\int\frac{du}{u^3(u+1)}\underset{v=u/(u+1)}{=}\int\frac{v-2v+1}{v^3}dv=\int\frac{dv}{v}-2\int\frac{dv}{v^2}+\int\frac{dv}{v^3}=\ln|v|+\frac{4v-1}{2v^2}=$$

$$=-\ln(e^x+1)+\frac{2e^x-1}{2e^{2x}}+x+C_1$$

$C_2'(x)\cdot e^x=-\frac{1}{1+e^x}$; $C_2(x)=-\frac{1}{e^x+e^{2x}}$

$$-C_2(x)=\int\frac{dx}{e^x+e^{2x}}=\int\frac{du}{u^2(u+1)}=\int\frac{v-1}{v^2}dv=-\int\frac{dv}{v}+\int\frac{dv}{v^2}=-\ln|v|-\frac{1}{v}=$$

аналогично

$$=\ln|u+1|-\ln|u|-\frac{u+1}{u}=\ln(e^x+1)-\frac{1}{e^x}-x+C_2$$

Ответ: $y=\left(-\ln(e^x+1)+\frac{2e^x-1}{2e^{2x}}+x+C_1\right)e^{2x}+\left(-\ln(e^x+1)+\frac{1}{e^x}+x+C_2\right)e^x$

$\Leftrightarrow$ $y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^x+(e^{2x}+e^x)(x-\ln(e^x+1))+e^x+\frac{1}{2}$

Д.

№593 $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$

$x = e^t$; $y'_x = e^{-t}\cdot y'_t$; $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$y''_{tt} - y'_t - y'_t + y = 8x^3$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)^2 = 0$ $\lambda = 1$ кр.2

ОРОУ: $y = e^t(C_1 + t\cdot C_2) = x(C_1 + C_2\ln|x|)$

Пр.ч. $8e^{3t}$ $\mu = 3$ $m = 0$ $k = 0$

ЧРНУ: $y = Ae^{3t}$; $y' = 3Ae^{3t}$; $y'' = 9Ae^{3t}$

$9Ae^{3t} - 6Ae^{3t} + Ae^{3t} = 4Ae^{3t} = 8e^{3t}$ => $A = 2$; ЧРНУ: $y = 2e^{3t} = 2x^3$

Ответ: $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3$

№598 $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$

$x = e^t$; $y'_x = e^{-t}\cdot y'_t$; $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$y''_{tt} - y'_t - 2y = \sin t$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda = 2; -1$ => ОРОУ: $y = C_1\cdot e^{2t} + C_2\cdot e^{-t} = C_1\cdot x^2 + C_2\cdot x^{-1}$

Пр.ч. $\sin t$ $\mu = \pm i$ $m = 0$ $k = 0$

ЧРНУ: $y = A\cos t + B\sin t$; $y' = -A\sin t + B\cos t$; $y'' = -A\cos t - B\sin t$

$$\left.\begin{aligned} &-A\cos t - B\sin t \\ &-B\cos t + A\sin t \\ &-2A\cos t - 2B\sin t \end{aligned}\right\} = \sin t \Rightarrow \begin{cases} 3A + B = 0 \\ A - 3B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 + 10B = 0 \\ A = 3B + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -3/10 \\ A = 1/10 \end{cases}$$

=> ЧРНУ: $y = 1/10\cos t - 3/10\sin t$

Ответ: $y = C_1\cdot x^2 + C_2\cdot x^{-1} + 1/10\cdot\cos\ln x - 3/10\sin\ln x$

№613 Построить лин. одн. диф. ур-ие, имеющие данные частн. реш.

$y_1 = x^2e^x = e^x(C_1x^2 + C_2x + C_3)$ – корень $\lambda = 1$ кр.3

=> $(\lambda-1)^3 = 0$ => $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

Ответ: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

№615 $y_1 = x\sin x = C_1\cos x + C_2\sin x + x(C_3\cos x + C_4\sin x)$ – корень $\lambda = \pm i$ кр.2

=> $(\lambda^2+1)^2 = 0$ => $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Ответ: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

№617 $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{-x}$

$y_1 + y_2 = C_1\cdot e^{-x} + e^x(C_2 + xC_3)$ – $\lambda = -1$ кр.1; $\lambda = 1$ кр.2

=> $(\lambda+1)(\lambda-1)^2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

Ответ: $y''' - y'' - y' + y = 0$

№1 $y'' - ay' + 2y = e^x \cos x$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$\lambda^2 - a\lambda + 2 = 0$

$\lambda = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$

$|a| > 2$

ОРОУ: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$|a| = 2$

$\lambda = a/2$ кр.2

ОРОУ: $y = C_1 e^{a/2\, x} + C_2 x e^{a/2\, x}$

$|a| < 2$

$\lambda = \dfrac{a \pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$

ОРОУ: $y = e^{a/2\, x}\left(C_1 \cdot \cos \underbrace{\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}}_{=b} x + C_2 \cdot \sin \dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2} x\right)$

Пр.ч $e^x \cos x$ $\quad \mu = 1 \pm i$

μ-кор. хар. ур-ия, если:

$(1+i)^2 - a(1+i) + 2 = 0$

$2i - a - ai + 2 = 0$

$a = 2$ – резонанс есть

При $a \neq 2$ $\quad k = 0 \quad m = 0$

ЧРНУ: $y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$

При $a = 2$ $\quad k = 1 \quad m = 0$

ЧРНУ: $y = x(Ae^x \cos x + Be^x \sin x)$

(дальше не нем.)

Ответ: при $|a| > 2$: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + Ae^x \cos x + Be^x \sin x$

при $|a| = 2$: $y = C_1 \cdot e^{a/2\, x} + C_2 x e^{a/2\, x} + x(Ae^x \cos x + Be^x \sin x)$

при $|a| < 2$: $y = e^{a/2\, x}(C_1 \cdot \cos bx + C_2 \cdot \sin bx) + Ae^x \cos x + Be^x \sin x$,

где $\lambda_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$

II Лин. системы с пост. коэф.

С§11.

№1 $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y \\ \dot{y} = 8x + 9y \end{cases}$; $A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 1$

$\lambda = 1$

$A - E = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} x = -y \\ y = y \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$

$A - E = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} x = -3/4\, y \\ y = y \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

№5 $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y \\ \dot{y} = 10x + 7y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 1 \pm 2i$

$\lambda = 1 + 2i$

$A - E = \begin{pmatrix} -6-2i & -4 \\ 10 & 6-2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3+i & 2 \\ -5 & 3+i \end{pmatrix}$ $\quad (3+i)x = -2y$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \end{pmatrix}$

$e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \end{pmatrix} = e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = e^t\left(\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ 3\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ -3\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ Ответ: $C_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ 3\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^t \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 3\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}$

№12 $\begin{cases} \dot{x} = -5x+4y \\ \dot{y} = -x-y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $(5+\lambda)(1+\lambda)+4 = \lambda^2+6\lambda+9 = (\lambda+3)^2 = 0$

$\lambda = -3$ кр.2

$A+3E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x = 2y \\ y = y \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{h_1}$

$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \overline{h_2} = \overline{h_1}$; $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\overline{h_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

№23 $\begin{cases} \dot{x} = x+2y-z \\ \dot{y} = 9x-6y+3z \\ \dot{z} = 20x-20y+10z \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 20 & -20 & 10 \end{pmatrix}$ $\lambda = 0, 2, 3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 20 & -20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A-2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 20 & -20 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A-3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 9 & -9 & 3 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

№31 $\begin{cases} \dot{x} = x+2y+2z \\ \dot{y} = 2x+y+2z \\ \dot{z} = 2x+2y+z \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = -1$ кр.2, 5 кр.1

$A+E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A-5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

№46 $\begin{cases} \dot{x} = 7x-4y+z \\ \dot{y} = 7x-3y+z \\ \dot{z} = 4x-2y+2z \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2 ; 2 \pm i$

$A-2E = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A-(2+i)E = \begin{pmatrix} 5-i & -4 & 1 \\ 7 & -5-i & 1 \\ 4 & -2 & -i \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} (5-i)x-4y+z=0 \\ 7x-(5+i)y+z=0 \\ 4x-2y-iz=0 \end{matrix}$; $\begin{matrix} -(2+i)x+ \\ +(1+i)y=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} y = \frac{2+i}{1+i}x \\ z = \frac{2}{1+i}x \end{matrix}$ $\Rightarrow \overline{h_2} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix}$

$e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{2t} \left(C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ 2\sin t + \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \right)$

№68 $A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-6&-4&3\\-2&2&-3\end{pmatrix}$ $\lambda=-1$ кр.1 $\lambda=-4$ кр.2

$$A+E=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-6&-3&3\\-2&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-9&9\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A+4E=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-6&0&3\\-2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&0\\0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow h_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Ищем h_3, присоед. к h_2

$$(A+4E)h_3=h_2:\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\-6&0&3&0\\-2&2&1&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\0&3&0&3\\0&3&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow h_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+C_3e^{-4t}\left[t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$

№79 $A=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-2&3&-1\\-5&4&-1\end{pmatrix}$ $\lambda=2$ кр.3

$$A-2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&1&-1\\-5&4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&3&0\\0&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&1\\0&3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$(A-2E)h_2=h_1$; $(A-2E)h_3=h_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\-2&1&-1&1\\-5&4&-3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\1&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&-3&1&-1\\1&1&0&0\end{array}\right)\quad \begin{matrix}x+y=0\\-3y+z=-1\end{matrix}\Rightarrow h_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\-2&1&-1&1\\-5&4&-3&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\1&1&0&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\1&1&0&-1\end{array}\right)\quad \begin{matrix}x+y=-1\\x-2y+z=0\end{matrix}\Rightarrow h_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ответ: $C_1\cdot e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+C_2\cdot\left[t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right]+C_3\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

№88 $A=\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$ $\lambda=-3$ кр.3

$$A+3E=\begin{pmatrix}12&-6&-2\\18&-9&-3\\18&-9&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6&-3&-1\\6&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6&-3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\langle\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}\right\rangle\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\ h_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

h_3 – присоед., $(A+3E)h_3=\alpha h_1+\beta h_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}12&-6&-2&2\beta\\18&-9&-3&\alpha+3\beta\\18&-9&-3&-3\alpha+3\beta\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6&-3&-1&\beta\\0&0&0&4\alpha\\6&-3&-1&-\alpha+\beta\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6&-3&-1&\beta\\0&0&0&4\alpha\\0&0&0&\alpha\end{array}\right)\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=0\\\beta=1\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6&-3&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow h_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Ответ: $C_1\cdot e^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}+C_2\cdot e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}+C_3\cdot e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$

№154 $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^t \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda = \pm 3i$

$A - (3i)E = \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix}$ $(-3i+1)(-3i-1) + 10 = -9 - 1 + 10 = 0 \Rightarrow rg = 1$

$2y = (1-3i)x \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

$$e^{(3i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} = (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$$

ОРОС: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

Пр.ч. $\begin{pmatrix} -2t \\ -2t-6 \end{pmatrix} e^t$ $\mu = 1$ $k = 0$ $m = 1$, $m + k = 1$

$\Rightarrow$ ЧРНС: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} e^t$

$\dot{x} = e^t (At + B + A) = e^t (At + B - 2Ct - 2D - 2t)$
$\dot{y} = e^t (Ct + D + C) = e^t (5At + 5B - Ct - D - 2t - 6)$

$\begin{array}{l} A = A - 2C - 2 \\ C = 5A - C - 2 \\ A + B = B - 2D \\ D + C = 5B - D - 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} C = -1 \\ A = 0 = D \\ B = 1 \end{array} \Rightarrow$ ЧРНС: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} e^t$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$

№159 $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t \\ \dot{y} = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t \\ \dot{z} = x + y - 2z \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \lambda = -1 \text{ кр.2} \\ \lambda = 1 \text{ кр.1} \end{array}$

$A - E = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A + E = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ищем присоед. в-р h_3: $(A+E)h_3 = h_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ОРОС: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Пр. части: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t$ $\mu = \pm i$ $k = 0$ $m = 0$

$\Rightarrow$ ЧРНС: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sin t + B\cos t \\ C\sin t + D\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = A\cos t - B\sin t = -3A\sin t - 3B\cos t - 4C\sin t - 4D\cos t + \sin t + \cos t$$
$$\dot{y} = C\cos t - D\sin t = 3A\sin t + 3B\cos t + 4C\sin t + 4D\cos t - \sin t - \cos t$$
$$\dot{z} = 0 = A\sin t + B\cos t + C\sin t + D\cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -3B - 4D + 1 \\ B = 3A + 4C - 1 \\ C = 3B + 4D - 1 \\ -D = 3A + 4C - 1 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3B - 4D + 1 \\ B = 3A + 4C - 1 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B + 1 \\ B = C - 1 \\ C = -A \\ D = -B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \\ B = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ЧРНС: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

№183 $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \frac{1}{1+e^{-t}} \\ \dot{y} = -3x - 2y - \frac{1}{1+e^{-t}} \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\lambda = 0; 1$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \sim (3\ 2)$ $h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \sim (1\ 1)$ $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ОРОС: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Мет. вар. пост.:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = -2C_1' - \cancel{e^t C_2} - e^t C_2' = -\cancel{6C_1} - \cancel{3C_2 e^t} + \cancel{6C_1} + \cancel{2C_2 e^t} - \frac{1}{1+e^{-t}}$$
$$\dot{y} = 3C_1' + \cancel{e^t C_2} + e^t C_2' = \cancel{6C_1} + \cancel{3C_2 e^t} - \cancel{6C_1} - \cancel{2C_2 e^t} - \frac{1}{1+e^{-t}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2C_1' + e^t C_2' = \frac{1}{1+e^{-t}} \\ 3C_1' + e^t C_2' = -\frac{1}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5C_1' + 2e^t C_2' = 0 \\ C_1' = -\frac{2}{1+e^{-t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = -\frac{5C_1'}{2e^t} = \frac{5e^{-t}}{1+e^{-t}} \\ C_1' = -\frac{2}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} C_2 &= -5\int \frac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}} = -5\ln|e^{-t}+1| + \tilde{C}_2 \\ C_1 &= -2\int \frac{dt}{1+e^{-t}} = 2\int \frac{d(e^{-t})}{e^{-t}(1+e^{-t})} = 2\int \frac{d(e^{-t})}{e^{-t}} - 2\int \frac{d(e^{-t})}{1+e^{-t}} = 2\ln|e^{-t}+1| + 2t = -2\ln|e^{t}+1| + \tilde{C}_1 \end{aligned}$$

Ответ: $\begin{aligned} x &= -2C_1 - C_2 e^{t} + 4\ln(e^{t}+1) + 5e^{t}\ln(e^{-t}+1) \\ y &= 3C_1 + C_2 e^{t} - 6\ln(e^{t}+1) - 5e^{t}\ln(e^{-t}+1) \end{aligned}$

III Матричная экспонента

Везде $x(0)=y(0)=2 \Rightarrow \bar{c}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

№117 $\begin{cases}\dot{x}=2x+y\\ \dot{y}=x+2y\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ $\lambda=1;3$

$A-E=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $A-3E=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow h_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

в базисе $\langle h_1,h_2\rangle$: $A'=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix} \Rightarrow e^{A't}=\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}$

$S=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ $S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$$e^{At}=Se^{A't}S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^t&e^{3t}\\-e^t&e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^t+e^{3t}&-e^t+e^{3t}\\-e^t+e^{3t}&e^t+e^{3t}\end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{x}=e^{At}\bar{c} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^t+e^{3t}&e^{3t}-e^t\\e^{3t}-e^t&e^{3t}+e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

№124 $\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=x+4y\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$ $(2-\lambda)(4-\lambda)+1=8+\lambda^2-6\lambda+1=(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda=3$ кр. 2

по т. Гамильтона-Кэли: $(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow (A-3E)^2=0$

$$e^{At}=e^{(A-3E)t+3Et}=e^{3Et}e^{(A-3E)t}=e^{3t}E\cdot\left(E+t(A-3E)+\frac{t^2}{2}\cancel{(A-3E)^2}^{\,0}+\ldots\right)=$$

$$=e^{3t}(E+t(A-3E))=e^{3t}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\right)=e^{3t}\begin{pmatrix}1-t&-t\\t&1+t\end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{x}=e^{At}\bar{c} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1-t&-t\\t&1+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

№128 $\begin{cases}\dot{x}=2x-3y\\ \dot{y}=3x+2y\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}2&-3\\3&2\end{pmatrix}$ $(2-\lambda)^2+9=(\lambda-2)^2+9=0 \Rightarrow \lambda=2\pm3i$

по т. Гамильтона-Кэли: $(A-(2+3i)E)(A-(2-3i)E)=0$

$\underbrace{(A-2E-3iE)}_{C}\underbrace{(A-2E+3iE)}_{C}=0 \Rightarrow C^2+9E^2=0$; $\underline{C^2=-9E^2}$

$$e^{At}=e^{(C+2E)t}=e^{2t}E\cdot\left(E+Ct+\frac{C^2t^2}{2}+\ldots\right)=e^{2t}\left[\left(E+\frac{C^2t^2}{2!}+\frac{C^4t^4}{4!}+\ldots\right)+C\left(t+\frac{C^2t^3}{3!}+\frac{C^4t^5}{5!}+\ldots\right)\right]=$$

$$=e^{2t}\Big[E\underbrace{\left(1-\frac{3^2t^2}{2!}+\frac{3^4t^4}{4!}+\ldots\right)}_{\cos 3t}+C\underbrace{\left(t-\frac{3^2t^3}{3!}+\frac{3^4t^5}{5!}+\ldots\right)}_{\frac{1}{3}\sin 3t}\Big]=e^{2t}\left(E\cos 3t+\frac{A-2E}{3}\sin 3t\right)$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}\cos 3t&0\\0&\cos 3t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\sin 3t\\ \sin 3t&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t&-\sin 3t\\ \sin 3t&\cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t&-\sin 3t\\ \sin 3t&\cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

ДТ2 Решить з.Коши: $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ $\quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$. $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a \\ 0 & -\lambda & a \\ a & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - a^2) - a(\lambda a) = -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ кр.3}$$

$\lambda^3 = 0 \Rightarrow A^3 = 0$ по т. Гамильтона-Кэли

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0$$

$$e^{At} = E + At + A^2\frac{t^2}{2} + \underbrace{\ldots}_{=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} -a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{a^2t^2}{2} & -\frac{a^2t^2}{2} & -at \\ \frac{a^2t^2}{2} & 1+\frac{a^2t^2}{2} & at \\ at & at & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1-\frac{a^2t^2}{2} & -\frac{a^2t^2}{2} & -at \\ \frac{a^2t^2}{2} & 1+\frac{a^2t^2}{2} & at \\ at & at & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}_0$

ДТ3

а) Записать ОРС $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если A в базисе $\bar{h}_1 \ldots \bar{h}_5$ имеет вид A'

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\bar{h}_1, \ldots \bar{h}_6$ - жорд. базис $\Rightarrow S = (\bar{h}_1, \ldots \bar{h}_6)$

$$e^{A't} = \left(\begin{array}{ccc|cc} e^{2t} & te^{2t} & \frac{e^{2t}t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{array}\right) \Rightarrow e^{At} = Se^{A't}S^{-1}, \quad \bar{x} = e^{At}\bar{x}_0$$

$\bar{C} = (C_1, \ldots C_6)^T$ произв.

Ответ: $\bar{x} = Se^{A't}S^{-1}\cdot\bar{C}$, где $S = (\bar{h}_1, \ldots \bar{h}_6)$

б) $e^{A'}$?

Ответ: $e^{A'} = \left(\begin{array}{ccc|cc} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 \end{array}\right)$

$f(t)$	$F(p)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(p)$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda t}t\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-\lambda)}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$
$e^{\lambda t}t\cos\omega t$	$\frac{(p-\lambda)^2-\omega^2}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$

IV Операционный метод.

§С8 при $t \geq 0$ решить з.Коши

Д172 $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

$y(t) \doteqdot Y(p)$; $y'(t) = pY(p) - \cancel{y(0)}^{\,0} = pY(p)$; $y''(t) = p^2Y(p) - \cancel{py(0)}^{\,0} - y'(t)^{\,1} = p^2Y(p) - 1$

П.ч.: $e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}$

$\Rightarrow p^2Y(p) - 1 - 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p+1}$; $\quad Y(p)(p^2-3p+2) = \frac{p+2}{p+1} \Rightarrow Y(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p-2)}$

$Y(p) = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} = \frac{A(p^2-1) + B(p^2-p-2) + C(p^2-3p+2)}{(p-2)(p-1)(p+1)} = p+2$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B-3C=1 \\ -A-2B+2C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4/3 \\ B = -3/2 \\ C = 1/6 \end{cases} \Rightarrow Y(p) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p+1} \Rightarrow y(t) = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t}$$

Ответ: $y(t) = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t}$

№182 $y''+4y=4(\cos 2t+\sin 2t)$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=1$

$y(t)\doteqdot Y(p)$; $y'(t)=pY(p)-\cancel{y(0)}^{=0}=pY(p)$; $y''=p^2Y(p)-\cancel{py(0)}^{=0}-y'(0)^{=1}=p^2Y(p)-1$

$4(\cos 2t+\sin 2t)\doteqdot 4\cdot\frac{p+2}{p^2+4}$

$\Rightarrow p^2Y(p)-1+4Y(p)=\frac{4(p+2)}{p^2+4}$; $Y(p)(p^2+4)=\frac{4p+8+p^2+4}{p^2+4}$

$Y(p)=\frac{1}{p^2+4}+\frac{4p+8}{(p^2+4)^2}=\frac{1}{p^2+4}+\frac{4p}{(p^2+4)^2}+\frac{8}{(p^2+4)^2}=\frac{4p}{p^2+4}+\frac{p^2+4+8}{(p^2+4)^2}=\frac{4p}{(p^2+4)^2}+\frac{2}{p^2+4}+\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$

$\Rightarrow y=\sin 2t+t\sin 2t-t\cos 2t$

Ответ: $y=\sin 2t+t\sin 2t-t\cos 2t$

§C11

№189 $\begin{cases}\dot x=x+y+e^{2t}\\ \dot y=-2x+4y+e^{2t}\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=1\\ y(0)=2\end{matrix}$ $\quad e^{2t}\doteqdot\frac{1}{p-2}$

$x(t)\doteqdot X(p)$; $\dot x(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p)-1$; $y(t)\doteqdot Y(p)$; $\dot y(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-2$

$\begin{cases}pX(p)-1=X(p)+Y(p)+\frac{1}{p-2}\\ pY(p)-2=-2X(p)+4Y(p)+\frac{1}{p-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y(p)=(p-1)(X(p)-\frac{1}{p-2}\\ X(p)=\frac{p^2-3p+1}{(p-3)(p-2)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X(p)=\frac{p^2-3p+1}{(p-3)(p-2)^2}\\ Y(p)=\frac{2p^2-7p+5}{(p-3)(p-2)^2}\end{cases}$

$X(p)=\frac{A}{p-3}+\frac{Bp+C}{(p-2)^2}=\frac{A(p^2-4p+4)+Bp^2+(C-3B)p-3C}{(p-3)(p-2)^2}$

$\begin{matrix}A+B=1\\ -4A-3B+C=-3\\ 4A-3C=1\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}A=1\\ B=0\\ C=1\end{matrix}\quad\Rightarrow X(p)=\frac{1}{p-3}+\frac{1}{(p-2)^2}\Rightarrow x(t)=e^{3t}+te^{2t}$

$Y(p)=\frac{A}{p-3}+\frac{Bp+C}{(p-2)^2}=\frac{A(p^2-4p+4)+Bp^2+(C-3B)p-3C}{(p-3)(p-2)^2}$

$\begin{matrix}A+B=2\\ -4A+3B+C=-7\\ 4A-3C=5\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\ B=0\\ C=1\end{matrix}\quad\Rightarrow Y(p)=\frac{2}{p-3}+\frac{1}{(p-2)^2}\Rightarrow y(t)=2e^{3t}+te^{2t}$

Ответ: $\begin{matrix}x(t)=e^{3t}+te^{2t}\\ y(t)=2e^{3t}+te^{2t}\end{matrix}$

№194 $\begin{cases}\dot x=4x+5y+4\\ \dot y=-4x-4y+4t\end{cases}$ $\quad\begin{matrix}x(0)=0\\ y(0)=3\end{matrix}$

$x(t)\doteqdot X(p)$; $\dot x\doteqdot pX(p)$ $\quad y(t)\doteqdot Y(p)$; $\dot y(t)\doteqdot pY(p)-3$ $\quad 4\doteqdot\frac{4}{p}$; $4t\doteqdot\frac{4}{p^2}$

$\begin{cases}pX(p)=4X(p)+5Y(p)+\frac{4}{p}\\ pY(p)=-4X(p)-4Y(p)+\frac{4}{p^2}+3\end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c}p-4 & -5 & 4/p\\ 4 & p+4 & \frac{3p^2+4}{p^2}\end{array}\right)\Rightarrow X(p)=\frac{19p^2+16p+20}{p^2(p^2+4)}$; $Y(p)=\frac{3p^3-12p^2-12p-16}{p^2(p^2+4)}$

$X(p)=\frac{Ap+B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}=\frac{A(p^3+4p)+B(p^2+4)+Cp^3+Dp^2}{p^2(p^2+4)}$

$\begin{matrix}A+C=0\\ B+D=19\\ 4A=16\\ 4B=20\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}A=4\\ B=5\\ D=-1\\ C=-14\end{matrix}\quad X(p)=\frac{4}{p}+\frac{5}{p^2}-\frac{14p+1}{p^2+4}\Rightarrow x(t)=4+5t-4\cos 2t+7\sin 2t$

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} = \frac{A(p^3+4p)+B(p^2+4)+Cp^3+Dp^2}{p^2(p^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+C=3 \\ B+D=-12 \\ 4A=-12 \\ 4B=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=-4 \\ C=6 \\ D=-8 \end{cases} \quad Y(p) = -\frac{3}{p} - \frac{4}{p^2} + \frac{6p-8}{p^2+4} \Rightarrow y(t) = -3-4t+6\cos 2t - 4\sin 2t$$

Ответ: $x(t) = 4+5t-4\cos 2t+7\sin 2t$
$y(t) = -3-4t+6\cos 2t-4\sin 2t$