Зависимость реш. з. Коши от параметра и нач. усл.

$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0$

$f(x,y,\mu) \quad y_0 = y_0(\mu)$

реш з. Коши $y = y(x,\mu)$

№10.67

(1) $y' = y + \mu(x+y^2) \quad y(0)=1$ Найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \varphi(x)$ - искомая ф-ия

$y' = \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial x} \quad y = y(x,\mu)$

Считаем, что $y(x,\mu)$ обладает непр. дифф. (из этой теории)

Дифф. (1) по μ:

$$\frac{\partial^2 y(x,\mu)}{\partial\mu\,\partial x} = \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu} + x + y^2 + \mu\cdot 2y\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,\mu)}{\partial x\,\partial\mu} = \frac{\partial y}{\partial\mu} + x + y^2 + \mu\cdot 2y\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu}$$

$\mu = 0$:

$$\left.\frac{\partial^2 y(x,\mu)}{\partial x\,\partial\mu}\right|_{\mu=0} = \left.\frac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0} + x + \left(y|_{\mu=0}\right)^2$$

$y|_{\mu=0}$ — реш з. Коши при $\mu=0$

$y' = y \quad y(0)=1$

Слева:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)\Big|_{\mu=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}\right)}_{\text{операции перестановочн.}} = \varphi'(x)$$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + x + e^{2x}$

ОРОУ $\varphi(x) = C\cdot e^x$

Пр.ч x

ЧРНУ: $Ax+B$

$A = Ax+B+x \Rightarrow A=-1=B$

$y = -x-1$

Пр.ч e^{2x}

ЧРНУ: $D\cdot e^{2x}$

$2D = D+1 \Rightarrow D=1$

$y = e^{2x}$

$$\varphi(0) = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)\Big|_{\mu=0}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(y|_{x=0}\right)_{\mu=0}$$

Все опер. с μ перестановочны с подстановкой x.

$y|_{x=0} = 1 \Rightarrow \varphi(0) = 0$

$\Rightarrow$ ОРНУ: $\varphi = Ce^x - x - 1 + e^{2x}$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Ответ: $\varphi(x) = -x-1+e^{2x}$

не обр. задача экзамена.

Дифф. по нач. условиям

(1) $y' = y + y^2 + xy^3 \qquad y(2) = y_0 \qquad$ Найти: $\frac{\partial y}{\partial y_0}\Big|_{y_0=0} \qquad y = y(x, y_0)$

$= \varphi(x)$

$y = y(x, y_0) \qquad y' = \frac{\partial y(x,y_0)}{\partial x}$

дифф. (1) по y_0

$$\frac{\partial^2 y(x,y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial y}{\partial y_0} + 2y\frac{\partial y}{\partial y_0} + x\cdot 3y^2\cdot\frac{\partial y}{\partial y_0} \ ; \quad \frac{\partial^2 y(x,y_0)}{\partial x \partial y_0} = \frac{\partial y}{\partial y_0}\left(1 + 2y + 3xy^2\right)$$

$y_0 = 0$:

$$\frac{\partial^2 y(x,y_0)}{\partial x \partial y}\Big|_{y_0=0} = \frac{\partial y}{\partial y_0}\left(1 + 2y|_{y_0=0} + 3x\, y^2|_{y_0=0}\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\Big|_{y_0=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\Big|_{y_0=0}\right),$$

подст. $y_0=0$ и дифф. по x перестановочны

$y|_{y_0=0}$? нач. з. Коши

$y' = y + y^2 + xy^3$

$y(2) = 0$

$\Rightarrow y|_{y_0=0} = 0$ — единств. в силу т. единств. з. Коши

$\varphi'(x) = \varphi(x) \qquad \varphi(x) = Ce^x$

Найдем $\varphi(2) = \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\Big|_{y_0=0}\right)_{x=2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y|_{x=2}\right)\Big|_{y_0=0} = 1$

$y|_{x=2} = y_0 \qquad Ce^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi(x) = e^{x-2}}$

Линейная зависимость функций

$y_1(x), \dots y_n(x)$ — наз. лин. зависимыми на мн-ве E, если $\exists\, c_1, \dots c_n : c_1^2 + \dots + c_n^2 > 0$ такие, что $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$ на E

соответственно лин. независ., если из $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$ следует, что $c_1 = \dots = c_n = 0$

Явл. ли лин. завис. на $\mathbb{R}$?

1) $x, e^x, x\cdot e^x$

Пусть: $c_1 x + c_2 e^x + c_3 x e^x = 0$

$x = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$x = 1 \qquad c_1 + c_3 e = 0 \qquad \Rightarrow$ нет

$x = -1 \Rightarrow -c_1 - c_3 e^{-1} = 0$

2) $\sin x, \sin(x+2), \cos(x-5)$

$\sin(x+2) = \sin x\cdot\cos 2 + \cos x\cdot\sin 2$

$\cos(x-5) = \cos x\cdot\cos 5 + \sin x\cdot\sin 5$

все выраж. через $\sin x$ и $\cos x \Rightarrow$ да

3) $x, x^5, |x^5|$

на $[0, +\infty)$ — да

на $\mathbb{R}$ — нет

$c_1 x + c_2 x^5 + c_3 |x|^5$

$x = 1 \quad c_1 + c_2 + c_2 = 0$

$x = -1 \quad -c_1 - c_2 + c_3 = 0$

$x = 2 \quad 2c_1 + 3c_2 = 0$

$\Rightarrow c_3 = 0, \ c_2 = 0, \ c_1 = -c_2 = 0 \qquad$ ч.т.д.

Лин. однородн. ур-ие n-го порядка

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$

$a_i(x)$ непр. на I

$a_0(x) \neq 0$ на I $\Rightarrow$ можно сказать, $a_0 = 1$

Мн-во реш - лин. пр-во размерн. n

Базис: ФСР $y_1, \dots y_n$

Общее реш: $y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n$

ДФ-667 Парадокс.

$x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$ – ур-ие Эйлера

$y_1 = x$, $y_2 = x^5$ – можно проверить

$y_3 = |x^5|$ $\quad y_1, y_2, y_3$ – лин. нез

Как так может быть? $\quad$ т.к. $a_0(x) \neq 0$ на I

Порядок равен 2, а реш. 3.

Лин. незав. на $\mathbb{R}$.

Определитель Вронского

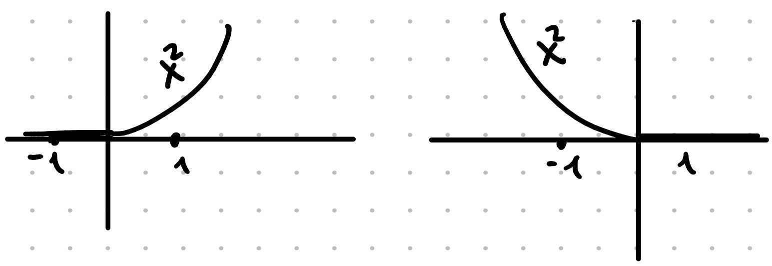
n ф-ий $y_1(x), \dots y_n(x)$, имеющие $n-1$ произв.

$$W(y_1, \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Если $y_1 \dots y_n$ лин зав на I, то $W(y_1, \dots y_n) \equiv 0$ на I

Обратное неверно

$n = 2$



$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0$$

$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$

$x = 1$ $C_1 = 0$ $\quad x = -1$ $C_2 = 0$

$\Rightarrow y_1, y_2$ лин нез.

Если $y_1(x) \dots y_n(x)$ – n реш. однород ур-ия $a_0y^{(n)} + \dots + a_ny = 0$ (1)

где a_i непр. и $a_0(x) \neq 0$

то из $W(y_1, \dots y_n) = 0$ следует лин. зав.

Формула Лиувилля-Остроградского.

Если $y_1, \dots y_n$ – реш (1), то $W(y_1, \dots y_n) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$

$C = 0 \Rightarrow W \equiv 0$ реш лин.з. ; $C \neq 0 \Rightarrow W \neq 0$ ни в одной т.
реш. лин. незав.

Пр. Составить лин. однород. ур-ие мин. порядка с перем. коэф. наим. порядка, имеющее данное лин. незав. реш.

$y_1, \dots y_n$ – данное реш.

y – произв. реш. $\Rightarrow y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$

$$W(y, y_1, \dots y_n) = 0 \qquad \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & & & \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Пр. $y_1 = x \quad y_2 = e^x$

$$\begin{vmatrix} y & x & e^x \\ y' & 1 & e^x \\ y'' & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0 \qquad y'' \cdot (xe^x - e^x) + e^x(y - y'x) = 0$$

$y''(x-1) + y - y'x = 0$ – второй порядок

(отдельно на промежутках $x > 1$ и $x < 1$)

Если нужно сост. ур-ие с пост. коэф. наим. порядка:

$\lambda = 0$ кр. 2
$\lambda = 1$ кр. 1 $\; : \; \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow y''' - y'' = 0$ – третий порядок

Если ур-ие необяз. линейное:

$y = C_1 x + C_2 \cdot (e^x - x)$

$C_1 = 1 \quad y = e^x$
$C_1 = 0 \quad y = x$
$\qquad C_1 = \dfrac{y - x}{e^x - x}; \quad \dfrac{(e^x - x)(y' - 1) - (y - x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$ – первый порядок

Пр. Найти лин. ур-ие с перем. коэф. наим. порядка, имеющ. реш.:

$y_1 = x^2 - 3x \quad y_2 = 2x^2 + 9 \quad y_3 = 2x + 3$ – они лин. зав.

$C_1(x^2 - 3x) + C_2(2x^2 + 9) + C_3(2x + 3) = 0$

$x^2: \; C_1 + 2C_2 = 0 \Rightarrow 6C_2 + 2C_3 = 0$
$x: \; -3C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow 6C_2 + 2C_3 = 0$
$1: \; 9C_2 + 3C_3 = 0$

лин. зав.

одну вычеркн.
ост. 2 лин. незав.
$W(y, y_1, y_2) = 0$
$\Rightarrow$ второй порядок