Пр. $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \ldots = \frac{\pi}{2}|\alpha|$

инт. Дирихле

интегр. по частям

II способ:

дифф. по параметру

$I'(\alpha) \overset{?}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \pi/2$

$I(\alpha) \overset{?}{=} \pi/2\,\alpha + C$

$\alpha=0$ $\quad I(0)=0,\ C=0$

$\Rightarrow I(\alpha)=\pi/2\,\alpha$

Обоснование:

$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx = I_1(\alpha)+I_2(\alpha)$

$I_2'(\alpha)\overset{?}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx \quad (*)$

тогда можно, т.к. сх равн. при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ по пр. Дирихле

т.к. $f(x,\alpha)=\sin\alpha x$, первообр $-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}$

$\left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha_0}$ – огр. равном. по α

и $1/x \downarrow 0$, не зав. от α

Дифф. можно при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$

т.к. α_0 – $\forall$, то можно дифф. при $\forall \alpha > 0$

$I_1'(\alpha) \overset{?}{=} \int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{x}dx \quad (**)$

Для этого нужно, чтобы

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{\alpha^2}{2}, & x=0\end{cases}$$

была непр. на $\Pi=\{0\leq x\leq 1, 0\leq\alpha\leq A\}$ как ф-я 2-х переменных

$$g(u)=\begin{cases}\frac{1-\cos u}{u^2}, & u\neq 0\\ 1/2, & u=0\end{cases}$$ – элемент. ф-я одной перем. $\Rightarrow$ непр. функц

$f(x,\alpha)=\underset{\text{непр}}{g(\alpha x)}\cdot\underset{\text{непр}}{\alpha^2}$ $\Rightarrow$ непр. как ф. 2-х переменных

$\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ – непр. аналогично

(**) – дифф. собств. инт. по параметру

суммируем: $I'(\alpha)=$ как сумма $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx \quad \alpha>0$

Осталось обосн. пред. переход при $\alpha\to+0$

Для этого нужно, чтобы $I(\alpha)$ непр. при $\alpha\in[0,1]$

$I_1(\alpha)$ непр, т.к. инт. собств.

$I_2(\alpha)$ непр, т.к. при $x\geqslant 1$ $\left|\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2}$ – сх. равном. по пр. В-са

$\Rightarrow I(\alpha)$ сх. равном. по $\alpha\in[0,1]$ $\Rightarrow$ непр. ф. на $[0,1]$

ч.т.д.

Интегралы Лапласа

$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx \rightsquigarrow \left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$ инт. сх. равн. по пр. В–са

$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$

$I(\alpha)$ сх. абс. $\forall\alpha$ и равн. по $\alpha\in\mathbb{R}$ $\Big|\Rightarrow I(\alpha)$ непр. на $\mathbb{R}$

Будем считать, что $\alpha\ge 0$
(I – чет, J – нечет)

$J(\alpha)$: $\alpha=0 \Rightarrow$ нулевой

При $\alpha>0$ сх. по пр. Дирихле, т.к. $\sin\alpha x$ имеет огр. первообр. $-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}$ и $g(x)=\frac{x}{1+x^2}\downarrow 0,\ x\to+\infty$ монотонно, т.к.

$$g'(x)=\frac{(1+x^2)-x2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0 \text{ при } x>1$$

Инт. сх. по пр. Дирихле.

Сх-ся равн. по $\alpha\ge\alpha_0>0$, т.к. $\left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right|\le\frac{1}{\alpha_0}$

$\Rightarrow J(\alpha)$ непр $\forall[\alpha_0,+\infty),\ \alpha_0>0 \Rightarrow$ непр на $(0,+\infty)$

$I'(\alpha)\overset{?}{=}-J(\alpha) \Rightarrow$ верно для $\forall[\alpha_0,+\infty),\ \alpha_0>0 \Rightarrow$ верно $\forall\alpha>0$

Пусть $K(\alpha)=J(\alpha)-\pi/2=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ $=\pi/2$ при $\alpha>0$

$$=-\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}dx}$$

$\left|\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\right|\le\frac{\alpha^2}{1+x^2}\le\frac{A^2}{1+x^2}$, $0\le\alpha\le A$

$\Rightarrow$ инт. сх. равномерно

$I''(\alpha)=-J'(\alpha)=-K'(\alpha)$

$K'(\alpha)\overset{?}{=}-I(\alpha)$ – сх. равн. по $\alpha\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ дифф. можно

$I'(\alpha)=-J(\alpha)$, $\alpha>0$

$I''(\alpha)=I(\alpha)$, $\alpha>0$ $\swarrow$ $\lambda^2=1$, $\lambda=\pm1 \Rightarrow I(\alpha)=C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}$, $\alpha>0$

$|I(\alpha)|\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty}=\pi/2$

$I(\alpha)$ – огр $\Rightarrow C_1=0$

$\Rightarrow I(\alpha)=C_2\cdot e^{-\alpha}$, $\alpha>0$

$I(\alpha)$ непр $\Rightarrow$ сохр. при $\alpha=0$

$\Rightarrow I(\alpha)=C_2\cdot e^{-\alpha}$, $\alpha\ge0$

$C_2=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi/2$

$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$, $\alpha\ge0$ $\quad$ четность $\Rightarrow$ $\underline{I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}}$

$J(\alpha)=-I'(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$, $\alpha>0$

нечетн $\Rightarrow$ $\underline{J(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sign}\alpha}$

Интегралы Фруллани

1) Пусть $f(x)$ непр. на $[0,+\infty)$ и $\forall A>0$ сх. $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$

Тогда $\forall a,b>0$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}$$

2) Пусть $f(x)$ непр. на $[0,+\infty)$ и $\exists$ конечный предел $f(+\infty)$

Тогда $\forall a,b>0$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\big(f(0)-f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}$$

Пр. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$

$f(x)=e^{-x}$ 1) и 2) выполн.

Пр. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax-\operatorname{arctg}bx}{x}dx=(0-\pi/2)\ln\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$

$f(x)=\operatorname{arctg}x$; 1) не выполн.; 2) выполн.

2-й способ:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x}\Big(\int\limits_b^a\frac{x\,dy}{1+x^2y^2}\Big)dx\overset{?}{=}\int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2y^2}=\int\limits_a^b\frac{dy}{y}\operatorname{arctg}xy\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\int\limits_b^a\frac{dy}{y}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$$

$\operatorname{arctg}xy\Big|_b^a$ нужно, чтобы $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2y^2}$ сх. равн. по $y\in[b,a]$

$\left|\frac{1}{1+x^2y^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2b^2}$ – инт. сх.

Внутр. инт. сх.

равн. по пр. В-са

Пр. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos^2ax-\cos^2bx}{x}dx$

$f(x)=\cos^2x$ предела на ∞ нет

$\int\limits_A^{+\infty}\frac{\cos^2x}{x}$ расх $\to$ 1) и 2) неприменимы

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos2ax-1-\cos2bx}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos2ax-\cos2bx}{x}=\frac{1}{2}f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Пр. $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$ $\qquad |\ldots|\le\frac{1}{(1+x^2)^2}\sim\frac{1}{x^4}$

сх. равн. по пр. В-са

$I'(\alpha)\overset{?}{=}\int_0^{+\infty}\frac{-x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$

$|\ldots|\le\frac{x}{(1+x^2)^2}\sim\frac{1}{x^3}$ инт. сх. равн., дифф. можно при $\forall\alpha$

$I''(\alpha)\overset{?}{=}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$ ⊜

$|\ldots|\le\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\sim\frac{1}{x^2}$ инт. сх. равн., дифф. можно при $\forall\alpha$

⊜ $-\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\cos\alpha x\,dx=-\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$

$I''=I-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad \alpha\ge0$

ОДОУ: $y=C_1\cdot e^{\alpha}+C_2\cdot e^{-\alpha}$

ЧРНУ: резонанс $y=A\alpha e^{-\alpha}$; $y'=Ae^{-\alpha}-A\alpha^2e^{-\alpha}$; $y''=-A\alpha e^{-\alpha}-2A\alpha e^{-\alpha}+A\alpha^3e^{-\alpha}$

$\Rightarrow I(\alpha)=C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}+\frac{\pi}{4}\alpha e^{-\alpha},\quad \alpha>0$

$|I(\alpha)|\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ – сх – огр $\Rightarrow C_1=0$; $I(\alpha)=(C_2+\frac{\pi}{4}\alpha)e^{-\alpha}$

$I(0)=C_2$

$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt\cos^4t}{\cos^2t}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt\cdot\cos^4t}{\cos^2t}=\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos2t}{2}dt=0$

$x=\operatorname{tg}t$

$dx=\frac{dt}{\cos^2t}$ $\qquad\Rightarrow I(\alpha)=\frac{\pi}{4}(1+\alpha)e^{-\alpha},\quad \alpha\ge0$

$$\underline{I(\alpha)=\frac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}}$$

Пр. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=$ $\qquad \alpha,\beta>0$

$=\int_0^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta e^{-x^2y}dy\right)dx\overset{?}{=}\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}dx$ ⊜

$\frac{e^{-x^2y}}{x^2}\Big|_\alpha^\beta$

Нужно, чтобы $\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}dx$ сх. равн. по $y\in[\alpha,\beta]$. Считаем $\beta>\alpha$.

$|e^{-x^2 y}| \le e^{-\alpha x^2}$ $\Rightarrow$ равн. сх. равн. по пр. В-са

$$= \int_\alpha^\beta dy \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}\,dt}{\sqrt{y}} = \int_\alpha^\beta \frac{dy}{\sqrt{y}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}_{=\sqrt{\pi}/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_\alpha^\beta \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\pi}\cdot y\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}$$