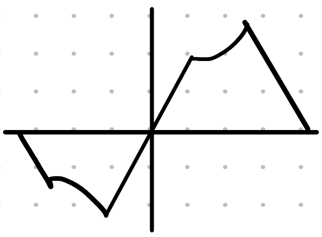
① $x, x^3, x^5, \dots x^{2n+1} \dots$ полна в $C[1,2]$?



Да

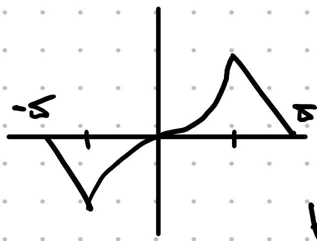
② она же в $C[0,2]$

нет

③ $1, x, x^3, x^5, \dots x^{2n+1} \dots$ да

$f(x) \in C[0,2]$

$g(x) = f(x) - f(0) \in C[0,2]$, $g(0) = 0$



$g(x)$ продолжим. по нечетн.

далее с пер. 2δ

$g(-\delta) = g(\delta)$

По теор. Вейерштрасса $\exists T(x)$ – тригон. многочлен с пер. 2δ

$\forall x \in [-\delta, \delta]$ $|g(x) - T(x)| < \varepsilon$

$T(x)$ – сумма Фурье $\Rightarrow T(x)$ – нечет.

Тогда $g(x)$ – нечетн. функц. ф-я.

R сх. ряда Маклорена $+\infty$, ряд сх. равном. на $\forall$ огр. отр.

$\Rightarrow$ на $[-\delta, \delta]$

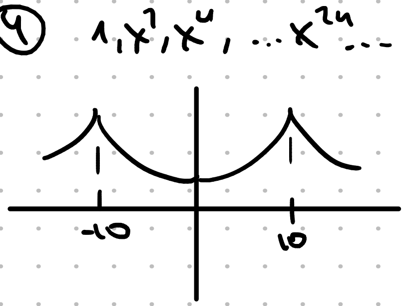
В ряду можно менять. члены

$\Rightarrow \forall x \in [-\delta, \delta]$ $|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2$

Тогда $|f(x) - (f(0) + P(x))| = |g(x) - P(x)| < \varepsilon$

$f(0) + P(x)$ – по исходной сист. $1, x, x^3, \dots x^{2n+1} \dots$

④ $1, x^2, x^4, \dots x^{2n} \dots$ в $C[0,10]$ да



Продолжим. по четн. на $[-10,0]$

далее с периодом 20 $(l=10)$

По т. Вейерштрасса $\exists$ четн. тригон. многочлен с пер. 20

ч.л. сумма Фурье

$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{\pi k x}{10} + b_k \sin\frac{\pi k x}{10}\right)$: $\forall x \in [0,10]$ $|f(x) - T(x)| < \varepsilon/2$

далее приближаем. члены. суммы рядом Макл. $P(x)$ – четн. алг. многочлен.

$\forall x \in [-10,10]$: $|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

(5) мн-ны из сист. в $C[-1,10]$ **нет**

приближать можно только четн. ф-ции.

(6) $1, x^6, x^{12}, x^{18}, \dots$ в $C[0,10]$

сделаем замену $x^3=t$

$1, t^2, t^4, t^6, \dots$ в $C[0,\sqrt[3]{10}]$ — четные степ. полны аналогично (4)

$f(x)\in C[0,10]$

$\varphi(t)=f(\sqrt[3]{t})\in C[0,\sqrt[3]{10}]$ — по т. о непр. сложн. ф-ии

$\forall\varepsilon>0\ \exists P(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k t^{2k}:\ \forall t\in[0,\sqrt[3]{10}]\ |\varphi(t)-P(t)|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists P^*(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k x^{6k}:\ \forall x\in[0,10]\ |\underset{f(x)}{\underset{\parallel}{\varphi(x^3)}}-P^*(x)|<\varepsilon$

да

Система $e_1, e_2, \dots e_n \dots$ полна в $L^2_R[a,b]$ или $L^2_C[a,b]$ или $L^1_R[a,b]$ или $L^1_C[a,b]$

если $\forall f\in\dots\ \forall\varepsilon>0\ \exists\alpha_1,\dots,\alpha_n:$

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|<\varepsilon$$

← норма

Утв. Если сист. непр. на $[a,b]$ ф-ций полна в $C[a,b]$, то она полна в $L^2_R[a,b]$, в $L^1_R[a,b]$ и т.д.

обратное неверно.

□ Схема

C <u>плотно</u> в $L^2_R[a,b]$, т.е. $\forall f\in L^2_R[a,b]\ \forall\varepsilon>0$ $\exists g$ — непр. на $[a,b]$: $\|f-g\|<\varepsilon$

$f\in L^2_R[a,b]$

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists g$ — непр. на $[a,b]$: $\|f-g\|_2<\varepsilon/2$

а для $g\ \exists P(x)$ — многочлен по сист. $e_1,\dots,e_n\dots$: $\|g-P\|_2<\varepsilon/2$

т.к. сист. полна в C, то $\|g-P\|_C<\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$ $\qquad \le\sqrt{b-a}\,\|g-P\|_C$

$\Rightarrow\ \|f-P\|_2<\varepsilon$ ■

(1) $1, x, x^2, \dots x^n \dots$ **да**

полна в $L^2_R[a,b]$ т.к. полна в $C[a,b]$

Утв. сохр., если считать, что f — непр. на $[a,b]$ и приближ. для конечн. отд. знач.

(2) $1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx \dots$ в $L^2_R(-\pi,\pi)$ **да**

полна, т.к. полна в $C[a,b]$, где выполн. $f(\pi)=f(-\pi)$

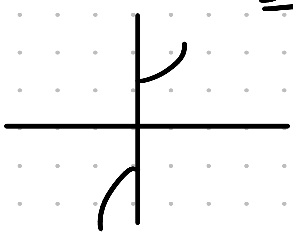
Теорема. Если $f \in L^2_R(-l,l)$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в среднем квадратичном

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T(x)$ - част. сумма ряда Фурье: $\|f - T\|_2 < \varepsilon$

Триг. сист. $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \dots$ полна в $L^2_R(-l,l)$

(3) $\sin x, \sin 2x \dots \sin nx \dots$ в $L^2_R(0,\pi)$ **да**

Продолж. по нечет., далее по пер-2π



(при этом **не** полна в $C[0,\pi]$)

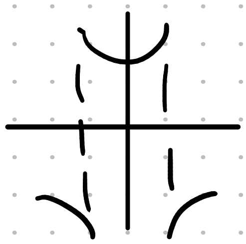
$f \in L^2_R(-\pi,\pi)$

$S_n(f,x) \to f(x)$ в $\|\dots\|_2$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T(x)$ - полин. тригон. многочлен $\|f - T\|_2 < \varepsilon$
част. сумма ряда Фурье

(4) $\cos x, \cos 3x \dots \cos(2n+1)x \dots$ в $L^2_R(0,\pi/2)$ **да**

Продолж. $f(\pi - x) = -f(x)$ $0 < x < \pi/2$
далее по четн.,
далее по пер. 2π



(и **не** полна в $C[a,b]$)

$S_n(f,x) \to f(x)$ в средн. кв.

$\Rightarrow$ система полна ортог. ?

Утв Если ортог. $e_1, \dots e_n, \dots$ из ненулевых эл-ов полна в евклидовом пр-ве L, то никакая собств. подсистема $e_{n1}, e_{n2}, \dots e_{nk}$ не будет полной (не совпад. с исх.)

☐ для полной сист. $e_1, e_2, \dots e_n, \dots$ в беск. евкл. пр-ве выполн. нер-во Парсеваля: $\forall x \ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_i)^2$

Пусть x - какой-то эл. исходной сист, не принадл. подсистеме. Если подсист. полна, то выполн. р-во Парсеваля.

$\underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_{nk})^2}_{= 0 \text{ из-за ортог.}}$ $\Rightarrow$ противоречие. ■

(5) $1, \cos x, \cos 2x, \dots \cos nx \dots$ в $L^2_R(-\pi,\pi)$ **нет**

Все сист $1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx$ полна
$\Rightarrow$ подсист из косинусов **не** полна

Вопрос $1, x, x^2, \dots x^n, \dots$ — полна в $C[1,2]$ → в $L^2_R(1,2)$

$x, x^3, \dots x^{2n+1}, \dots$ — полна в $C[1,2]$ → в $L^2_R(1,2)$

Чего мы?

Отв.: сист. не ортог.

Ряд Фурье в комплексной форме

$f(x) \in L_2(-l,l)$ имеет пер. $2l$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-\frac{\pi n i t}{l}}\, dt \quad n\in\mathbb{Z}$$

$c_0 = \frac{a_0}{2}$; $c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}, n\in\mathbb{N}$ — коэф. Фурье

$c_{n} = \frac{a_n + i b_n}{2}, -n\in\mathbb{N}$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{\pi n i x}{l}}$ сх. им. главного ряда: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\dots$

Пр. Разл. в ряд Фурье $f(x)=e^x$ $-\pi<x<\pi$ $(l=\pi)$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{1}{2\pi} e^t\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1-in)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{(1-in)\pi} - e^{(1-in)(-\pi)}}{1-in} =$$

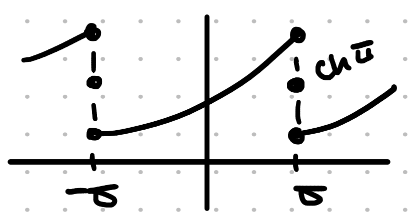
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}(-1)^n = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}(-1)^n\cdot\frac{1}{1-in} \qquad \left\{\begin{array}{l} e^{-\pi n i} = \cos\pi n - i\sin\pi n \\ e^{\pi n i} = \cos\pi n + i\sin\pi n \end{array}\right\} = (-1)^n$$

Пр. $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx} = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}e^{-inx}\right) =$

$$\left[\frac{e^{inx}}{1-in}+\frac{e^{-inx}}{1+in} = 2\operatorname{Re}\frac{e^{inx}}{1-in} = 2\operatorname{Re}\frac{(\cos nx + i\sin nx)(1+in)}{1+n^2} = 2\,\frac{\cos nx - n\sin nx}{1+n^2}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)$$

гр. суммы ряда:



сх. неравном. из-за разр.