Пусть $\forall \alpha\in\Omega$ $f(x,\alpha)$ инт. по Риману $\forall [a',b]\subset(a,b]$

и $\forall \varepsilon>0\ \exists a'\in(a,b)\ \forall \xi\in(a,a')\ \forall\alpha\in\Omega\ \left|\int_{a\leftarrow}^{\xi} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$

Тогда $\int_{a\leftarrow}^{b} f(x,\alpha)dx$ сх. равном. по $\alpha\in\Omega$

$\Leftrightarrow \sup\limits_{\alpha\in\Omega}\left|\int_{a\leftarrow}^{\xi} f(x,\alpha)dx\right|\le\varepsilon$

$\lim\limits_{a'\to a+0}\sup\limits_{\alpha\in\Omega}\left|\int_{a\leftarrow}^{\xi} f(x,\alpha)dx\right|=0$

Пр. $\int_{0\leftarrow}^{1}\frac{dx}{x^\alpha}$ сх. при $\alpha<1$ равномерно ли?

$\int_{0\leftarrow}^{\xi}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_0^{\xi}=\frac{1}{(1-\alpha)\xi^{\alpha-1}}$ $\quad \sup\limits_{\alpha<1}\left|\int_{0\leftarrow}^{\xi}\dots\right|=+\infty\ \forall\xi$

неравном. сх

Иначе: $\alpha\le\alpha_0<1$

$\left|\frac{1}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^{\alpha_0}}$ – инт. $\int_0^1$ сх.

исх. инт. сх. равн. по пр. Вейерштрасса

Непрерывность инт. по параметру

Пусть $f(x,\alpha)$ непр. на $\Pi=\{a\le x<b,\ A\le\alpha\le B\}$ и

$\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx$ сх. равн. по $\alpha\in[A,B]$

Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx$ – непр. ф-я α на $[A,B]$

Пр.

$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)d\varphi$ $\quad$ $\alpha>1$ – собств. $\quad$ $\alpha=1$ – несобств. с особ. $\pi/2$

$I(\alpha)=\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2},\ \alpha>1\quad(*)$

Верно ли $(*)$ при $\alpha=1$?

т.е. $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln(1-\sin^2\varphi)d\varphi=\pi\ln 1/2$

Для обосн. дост. доказать непр-ть $I(\alpha)$ на $[1,2]$

Для этого дост. д-ть, что $I(\alpha)$ сх. равном. на $\alpha\in[1,2]$

$4 \geq \alpha^2 \geq \alpha^2 - \sin^2\varphi \geq 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$

$\ln 4 \geq \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi) \geq 2\underbrace{\ln\cos\varphi}_{<0}$

$|\ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)| \leq \underbrace{\max\{\ln 4, 2|\ln\cos\varphi|\}}_{=C}$ → инт. сх.

$\int_0^{\pi/2} C\,d\varphi$ — сх

$\int_0^{\to\pi/2} 2|\ln\cos\varphi|\,d\varphi$ — сх

$\Rightarrow \int_{0}^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)\,d\varphi$ сх равн. по $\alpha \in [1,2]$ по пр. В-са

Дифф. инт-ла по параметру

Пусть $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ непр. на $\Pi = \{a \leq x < b,\ A \leq \alpha \leq B\}$

$I(\alpha) = \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сх. при $\alpha = A$

$\int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$ сх. равн. по $\alpha \in [A,B]$

Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сх. $\forall \alpha \in [A,B]$;

$I(\alpha)$ непр. дифф. на $[A,B]$;

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right) = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$$

Пр. $I(\alpha) = \int_0^{\to 1} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Проверим, что сх.

$\alpha = 0$: нулевой $\Rightarrow$ сх.

$\alpha \neq 0$: $\int_0^{\to 1} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{\text{сх}}{\sim} \int_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\text{сх}}{\sim} \int_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \overset{t=1-x}{=} \int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{\sqrt{t}}$ — сх. т.к. $1/2 < 1$

$\Rightarrow I(\alpha)$ сх.

Найдём $I'(\alpha)$

$I'(\alpha) \overset{?}{=} \int_0^{\to 1} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{1+(\alpha x)^2}\,dx = \int_0^{\to 1} \frac{dx}{(1+(\alpha x)^2)\sqrt{1-x^2}} = \quad |\ldots| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — инт. сх.

Продифф. инт. сх. равн. по $\alpha \in \mathbb{R}$ по пр. В-са

$\ominus \begin{bmatrix} x = \cos t \\ dx = -\sin t\,dt \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t\,dt}{\sin t(1+\alpha^2\cos^2 t)} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = u; & t = \operatorname{arctg} u \\ dt = \frac{du}{1+u^2}; & \cos^2 t = \frac{1}{1+u^2} \end{bmatrix} =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+\frac{\alpha^2}{1+u^2})} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\underbrace{1+\alpha^2}_{=\beta^2}+u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1+\alpha^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$
на $\forall$ конечн. отрезке

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) + C$

$I(0) = C = 0$; $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$

показали, что $\frac{d}{d\alpha}\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$

Перестановка собств. и несобств. инт-ов

Пусть $f(x,\alpha)$ непр. на $\Pi = \{a \le x < b,\ A \le \alpha \le B\}$

$\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx$ сх. равн. по $\alpha \in [A,B]$

Тогда $\underbrace{\int_A^B}_{\text{собств}} \{ \underbrace{\int_a^{\to b}}_{\text{несобств}} f(x,\alpha)dx\} d\alpha = \underbrace{\int_a^{\to b}}_{\text{несобств}} \{ \underbrace{\int_A^B}_{\text{собств.}} f(x,\alpha)d\alpha\} dx$

Пр. $I(\alpha,\beta,\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x\,dx$ $\quad \alpha>0\ \beta>0\ \lambda\in\mathbb{R}$

Считаем, что $\lambda \ge 0$, т.к. ф-я по λ нечетн.

Посчитаем $I(\alpha,\beta,\lambda)$ тремя способами.

1-й способ: перестановка инт-ла

$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} = \int_\alpha^\beta e^{-xy}dy$

нужно чтобы внутр. несобств. инт. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin\lambda x dx$ сходился равн. по $y \in [\alpha,\beta]$

$I(\alpha,\beta,\lambda) = \int_0^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta e^{-xy}dy\right)\sin\lambda x\,dx \overset{?}{=} \int_\alpha^\beta\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin\lambda x\,dx\right)dy$

$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin\lambda x$: $|\ldots| \le e^{-x\alpha}$ — инт. сх.

$\Rightarrow$ сх. равн. по $y\in[\alpha,\beta]$ по пр. В-са

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin\lambda x\,dx = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{(-y+i\lambda)x}\,dx = \mathrm{Im}\,\frac{e^{(-y+i\lambda)x}}{-y+i\lambda}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$e^{(-y+i\lambda)x} = e^{-xy}(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) \longrightarrow 0,\ x\to+\infty$$

$$= \mathrm{Im}\,\frac{1}{y-i\lambda} = \mathrm{Im}\,\frac{y+i\lambda}{y^2+\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin\lambda x\,dx = \mathrm{Im}(\ldots) = \frac{\lambda}{y^2+\lambda^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos\lambda x\,dx = \mathrm{Re}(\ldots) = \frac{y}{y^2+\lambda^2}$$

Итого, $I(\alpha,\beta,\lambda) = \int_\alpha^\beta \frac{\lambda}{y^2+\lambda^2}\,dy = \lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{\lambda}\Big|_\alpha^\beta =$

$$= \mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\lambda} - \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\beta} - \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\beta}$$

$$I(\alpha,\beta,\lambda) = \mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\lambda} - \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\lambda}, \quad \lambda>0$$

$$= \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\alpha} - \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\beta}, \quad \lambda\geq 0$$

самый простой способ

2-й способ: дифф. по λ

$$I'_\lambda(\alpha,\beta,\lambda) \overset{?}{=} \int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\cos\lambda x\,dx \qquad (*)$$

$\alpha,\beta>0$ всюду

$$|\ldots| \leq e^{-\alpha x} + e^{-\beta x} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\ldots \text{ сх}$$

Продифф. инт. сх. равн. по $\lambda\in\mathbb{R}$ по пр. В-са

$\Rightarrow$ (*) верно для $\forall$ комп. отрезка по λ

$\Rightarrow$ верно $\forall\lambda$

$$I'_\lambda(\alpha,\beta,\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\lambda x\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\lambda x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} - \frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}$$

$$\Rightarrow I(\alpha,\beta,\lambda) = \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\alpha} - \beta\cdot\frac{1}{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\beta} + C(\alpha,\beta)$$

$$I(\alpha,\beta,0) = 0 = C(\alpha,\beta)$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha,\beta,\lambda) = \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\alpha} - \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\beta}$$

3-й способ: дифф. по α

$$I'_\alpha(\alpha,\beta,\lambda) \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}\sin\lambda x\,dx$$

$\alpha \geq \alpha_0 > 0$ $\quad |e^{-\alpha x}\sin\lambda x| \le e^{-\lambda_0 x}$ — инт. сх.

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\lambda x\,dx$ сх. равн. по $\alpha \geq \alpha_0$ по пр В-са

$\Rightarrow$ Дифф. можно на $\forall [\alpha_0, \alpha_1]$, $0<\alpha_0<\alpha_1$

но $\forall \alpha > 0 \ \exists [\alpha_0,\alpha_1] \ni \alpha$

$\Rightarrow$ дифф. можно $\forall \alpha > 0$

$$I'_\alpha(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{-\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}$$

$$I(\alpha,\beta,\lambda) = -\frac{\lambda}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\lambda} + C(\beta,\lambda) \qquad \lambda > 0$$

$$I(\beta,\beta,\lambda) = 0 = C(\beta,\lambda) - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad C(\beta,\lambda) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\lambda}$$

Тогда: $\underline{I(\alpha,\beta,\lambda) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\lambda} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\lambda}}$

Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$$

Пр. $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \ (=)$ $\quad x \to +0 \quad f(x,\alpha) \sim \frac{\frac{\alpha^2 x^2}{2}}{x^2} \to \frac{\alpha^2}{2}$

$|\ldots| \le \frac{2}{x^2}$ — сх.

Инт. по частям:

$$(=) \left[\begin{matrix} u = 1-\cos\alpha x & du = \alpha\sin\alpha x\,dx \\ dv = \frac{1}{x^2}dx & v = -\frac{1}{x} \end{matrix}\right] = \cancel{-\frac{1-\cos\alpha x}{x}\Bigg|_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\sin\alpha x}{x}\,dx \ (=)$$

$x=0 \quad \frac{1-\cos\alpha x}{x} \sim \frac{\frac{\alpha^2x^2}{2}}{x} \to 0 \qquad x \to +\infty$

$|\ldots| \le \frac{2}{x} \to 0$

$(=)\ \alpha\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sign}\alpha = \underline{\pi\operatorname{sign}\alpha}$

Пр. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^3)}{x}\,dx \underset{t=x^3}{=} \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sin(\alpha x^3)}{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \underline{\frac{\pi}{6}\operatorname{sign}\alpha}$