Тригонометр. ряды Фурье.

Пусть $f(x)\in L_R(-l,l)$ и имеет период $2l$ $\qquad$ $L_R(-l,l)$ – абс. интегр. на $(-l,l)$

$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ абс. сх.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt,\quad n=1,2,\dots \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt\quad n=1,2,\dots$$

инт. абс. сх.

Коэф. Фурье: a_n и b_n

Лемма Римана.

$f(x)\in L_R(I)$ $\Rightarrow$ $\int_I f(t)\cos tx\,dt \xrightarrow{x\to\infty} 0$

I – промежуток $\qquad \int_I f(t)\sin tx\,dt \xrightarrow{x\to\infty} 0$

Следствие: $f(x)\in L_R(-l,l) \Rightarrow a_n, b_n \to 0$

Тригоном. ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l}+b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$ наз. рядом Фурье.

Если $f(x)\in L_R(-l,l)$ и нечетная $\Rightarrow a_n=0$ $n=1,2,\dots$

четная $\Rightarrow b_n=0$ $n=1,2,\dots$

a_n, b_n – инт-лы можно брать по $\forall$ отрезку длины $2l$. напр. $\int_0^{2l}$

§ Дост. условия разложимости ф-ии в ряды Фурье.

Следствия из признака Липшица

1) Пусть $f(x)\in L_R(-l,l)$ имеет период $2l$

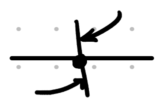
в т. x_0 $f(x)$ имеет конечн. одност. произв. $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$

тогда ряд Фурье $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$

2) Пусть $f(x)\in L_R(-l,l)$ им. период $2l$

x_0 – разрыв 1 рода и при конечных „обобщ. одност. произв.“

$$\lim_{u\to -0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u},\quad \lim_{u\to +0}\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}$$



нет одн. произв., есть обобщ. одн. произв.

тогда в т. x_0 ряд Фурье сх к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

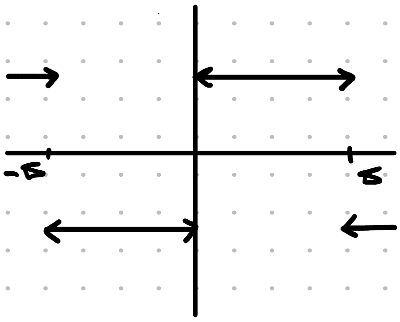
Пр. Пусть $l=\pi$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ $\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Разл. в ряд Фурье $f(x)=\operatorname{sign}x \quad -\pi<x<\pi$

граф. суммы ряда



$f(x)$ нечетн $\Rightarrow a_n=0$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt$

четн.

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sign}x\,\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt=$

$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}(-\cos nt)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$

$\Rightarrow \operatorname{sign}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\operatorname{sign}x, \quad -\pi<x<\pi$

$\operatorname{sign}x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

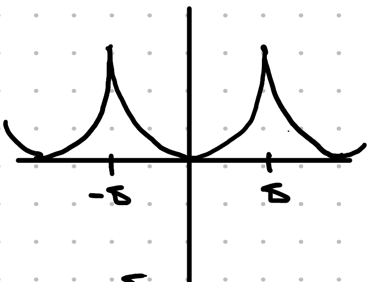
$x=\frac{\pi}{2} \quad \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^k$

$1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$

Ряд не явл. равном. сх на всей числ. оси,
т.к. его сумма разрывна
(Th. равн. сх. ряд из непр. ф-ий имеет непр. сумму)

Пр. $f(x)=x^2 \quad -\pi<x<\pi$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx \quad n=0,1,\ldots \qquad b_n=0$



Ряд сх в $\forall$ т. по 1. призн из следствия Липшица
$(\forall x_0\ \exists f'_+(x_0),\ f'_-(x_0))$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x^2 & du=2x\\ dv=\cos nx\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=\frac{2}{\pi}\Big[\cancel{\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}}\Big]-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}2x\sin nx\,dx=$

$=-\frac{4}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=-\frac{4}{\pi n}\Big[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\cancel{\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}\Big]=$

$=\frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad$ Итого: $x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$

$x=\pi$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n(-1)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \pi^2/6$

$x=0$

$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Дост. усл. равн. сх. ряда Фурье

Пусть $f(x) \in L_R[-l,l]$ имеет период $2l$ и кус-гладкая на $[-l,l]$ ($f(x)$ непр на $[-l,l]$, $f'(x)$ кус непр на $[-l,l]$ - непр всюду, кроме кон. числа т, где у нее разрыв 1 рода) тогда ряд Фурье $f(x)$ сх. равн. на R

Известно. Если $f'(x)$ опр. всюду на промеж, то у нее не может быть разрывов 1-го рода.
Поэтому в т.о равном. сх. р. Фурье в т. разрыва $f'(x)$ не сущ.

$\Rightarrow$ ряд Фурье x^2 сх равн. на $(-\infty, +\infty)$

Утв 22-110

Пусть тригон. ряд (для простоты $l=\pi$)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

сх. равн. на $(-\infty, \infty)$.

Тогда его сумма $f(x)$ — непр. 2π-период. ф-ия и (1) — ряд Фурье своей суммы

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ — сх равн.

Сумма равн. сх ряда из непр. ф-ий — непр. ф-ия.

$\Rightarrow f(x)$ - непр, с периодом 2π

Равн. сх. ряд из непр. ф-й на конечн. отрезке можно почленно проинтегрировать.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\,dt\right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

Утв Если равн. сх. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in E$ умножить на огр. ф-ию $g(x)$, то полученный ряд тоже сх. равн.

Крит. Коши равн. сх

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in N\ \forall x \in E: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$

□ Тогда: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in E$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,g(x)\right| = |g(x)|\cdot\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по крит. Коши ряд сх. равн.

при фикс. m

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx\cos mx + b_n\sin nx\cos mx\right)$$

— сх. равн. на $(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\cos mt\,dt}_{=0 \text{ при } n\neq m} + b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\cos mt\,dt}_{=0}\Big) =$$

$$= a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mt\,dt = a_m\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mt}{2}\,dt = \underline{\pi a_m}$$

$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots \cos nt, \sin nt$ ортогон. система в пр-ве непр. ф-ий на $[-\pi,\pi]$ со скалярн. произв.

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt$$

Аналогично b_m ■

№ 22.111

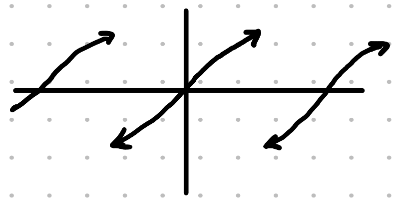
Явл. ли рядами Фурье абс. интегр. ф-ий?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ — сх. равн. на $(-\infty,\infty)$ $\Rightarrow$ ряд Фурье равн. сх. по пр. Вейерштрасса

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ — не явл. рядом Фурье, т.к. $a_n = 1 \not\to 0$

Пр. $f(x) = x\cos x \quad -\pi\le x\le\pi$
нечетн.

Ряд сх неравном. из-за т. разрыва $\Leftarrow$



$a_n = 0 \quad n = 1, 2\dots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos t\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\sin(n+1)t + \sin(n-1)t\right)dt =$$

$\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) -$

$$= \begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\sin(n\pm1)t\,dt & v=-\frac{\cos(n\pm1)t}{n\pm1}\end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t\cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t\cos(n-1)t}{n-1}\Big|_0^{\pi} +\right.$$

$$\left. + \cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos(n+1)t}{n+1}dt}^{\,0} + \cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)t}{n-1}dt}^{\,0}\right] = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{n^2-1}$$

$\cos(n+1)\pi = \cos(n-1)\pi = (-1)^{n+1}$

{ считаем, что $n\geq 2$

Теперь $n=1$: по част.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi} + \cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos 2t}{2}dt}^{\,0}\right) \Rightarrow x\cos x = -\frac{\pi}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{n^2-1}\sin nx$$