Непр. вект. поле $\bar{a}(x,y,z)=(P,Q,R)$
наз. потенц. в обл. $G\subset\mathbb{R}^3$
если $\exists$ непр. диф. ф-ия $u(x,y,z)$ (потенциал): $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ $\frac{\partial u}{\partial z}=R$
или: $\operatorname{grad} u=\bar{a}$

Пусть дано непр. вект. поле $\bar{a}$ в обл. G

Равносильны след. 3 усл-ия:

1°. $\bar{a}$ - потенц. в G

2°. $\oint\limits_\gamma(\bar{a},d\bar{r})=0$ $\forall$ замкн. кус.-гл. кривой $\gamma\subset G$

3°. $\int\limits_\gamma(\bar{a},d\bar{r})$ по кус.-гл. кривой $\gamma\subset G$ зависит только от нач. и кон. положения концов кривой A и B

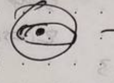
В этих случ.: $\int\limits_\gamma(\bar{a},d\bar{r})=u(B)-u(A)$

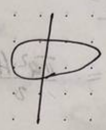
Определение

1 Обл. наз. односвязной, если $\forall$ замкн. кус-гл. кривой $\gamma\subset G$ явл. границей обл. $D\subset G$

Df. Обл. $G\subset\mathbb{R}^3$ наз. поверх. односвязн., если $\forall$ замкн. кус. гл. крив. $\gamma\subset G$ явл. краем кус. гл. пов-ти $S\subset G$.

Df. Обл. $G\subset\mathbb{R}^3$ наз. объемно односв., если $\forall$ замкн. КГП $S\subset G$ явл. границей обл. $D\subset G$.

$G=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$  — не явл. объемн. односв.
явл. пов. односв.

$G=\mathbb{R}^3\setminus\{x=0,\ y=0\}$  не явл. пов. односв.

Пусть вект. поле $\bar{a}$ непр. дифф. в $G\subset\mathbb{R}^3$. Тогда:

1) если $\bar{a}$ — потенц. в G, то $\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{0}$

2) если $\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{0}$ в пов.-но односвязной обл. G, то $\bar{a}$ — потенц.

$n=2$ Пусть вект. поле $\bar{a}(x,y)=(P,Q)$ непр. дифф. в $G\subset\mathbb{R}^2$. Тогда:

1) если $\bar{a}$ потенц. в G, то $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

2) если $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ в односв. обл. G, то $\bar{a}$ потенц. в G

NT1 $\oint\limits_\gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=2\pi$ γ: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $0\le t\le 2\pi$

$\int$-л по замкн. контуру $\neq 0 \Rightarrow$ пот-ла нет. Но $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Почему так произошло? $G=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ — неодносвяз.

Этот же пример в $\mathbb{R}^3$:

поле не потенц. $\oint\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+0\,dz=2\pi\neq 0$ γ: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=0$

$\bar{a}=(P,Q,R^{=0})$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=0$ $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0$

$\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{0}$

$$\int\limits_{\gamma} (x^2+yz)\,dx + (y^2+xz)\,dy + (z^2+xy)\,dz$$

γ – кусок винт. лин. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ в стор. $t\uparrow$

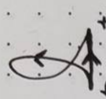
$t = 2\pi \to (\bar a,\ 0,\ 2\pi b)$

$t = 0 \to (a, 0, 0)$

$$\frac{8\pi^3 b^3}{3}$$

II способ: $\text{rot}\,\bar a = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+yz & y^2+xz & z^2+xy \end{vmatrix} = \bar e_1(x-x) + \bar e_2(y-y) + \bar e_3(z-z) = \bar 0$

$G = \mathbb{R}^3$ – пов. односв.



$t = 2\pi$, $t = 0$

след. поле потенц.

Интеграл можно посчитать по отр., соед. концы крив.

$x = a,\ y = 0,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi \quad t\uparrow$

$$+\int_0^{2\pi} b^2 t\, b\, dt = b^3 \frac{8\pi^3}{3}$$

III способ полный дифф. du $\Rightarrow$ $u = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} + xyz$

$$\int = u(a, 0, 2\pi) - u(0,0,0) = \frac{8\pi^3 b^3}{3}$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \bar a = (P, Q, R)$

$\nabla u = \text{grad}\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$(\nabla, \bar a) = \text{div}\,\bar a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ – число

$(\bar a, \Delta) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор диф. по в. $\bar a$

$(\bar a, \nabla)u = P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = (a, \nabla u) = (\bar a, \text{grad}\,u)$

$\bar a = \bar e,\ |\bar e| = 1$

$(\bar e, \Delta)u = (\bar e, \text{grad}\,u)$ – произв. по напр. в-ра $\bar e$

$(\bar a, \nabla)\bar b = ((\bar a, \nabla)b_x, (\bar a, \nabla)b_y, (\bar a, \nabla)b_z) \quad ;\ \bar b = (b_x, b_y, b_z)$

$\text{rot}\,\bar a = [\nabla, \bar a]$

$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$\Delta \bar a = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$

Пр. $\text{div}\,\text{rot}\,\bar a = (\nabla, [\nabla, \bar a]) = 0$ $\leftarrow$ ортогон.

Пр. $\text{rot}\,\cancel{\text{div}\,\bar a}$ – не бывает: rot – скаляр.

$$\operatorname{div}(u\bar a) = (\nabla, u\bar a) = (\nabla_u, \bar a) + (\nabla_{\bar a}, u\bar a) =$$
$$= (\nabla_u u, \bar a) + u(\nabla_{\bar a}, \bar a) = (\operatorname{grad} u, \bar a) + u \operatorname{div} \bar a$$

аналогично

$$\operatorname{rot}(u\bar a) = [\operatorname{grad} u, \bar a] + u \operatorname{rot} \bar a$$

$$\bar r = (x, y, z) \qquad r = |\bar r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\operatorname{div} \bar r = 3 \ ; \quad \operatorname{rot} \bar r = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar 0 \ ; \quad \operatorname{grad} r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\bar r}{r}$$

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u \ ; \quad \operatorname{grad} f(r) = f'(r) \operatorname{grad} r = \frac{f'(r)}{r} \cdot \bar r$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}$$

Центр. поле: $\quad \bar a = f(r)\bar r$

$$\operatorname{div}(f(r)\bar r) = (\operatorname{grad} f(r), \bar r) + f(r) \operatorname{div} \bar r = \left(\frac{f'(r)}{r}\bar r, \bar r\right) + 3f(r) = \underline{r f'(r) + 3f(r)}$$

$(r, \bar r) = r^2$

div центр. поля

$$\operatorname{rot}(f(r)\bar r) = \ldots = \underline{\bar 0}$$

rot центр. поля

$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ – пов. односвязн.

$\Rightarrow$ центр. поле потенциально

Непр. вект. поле $\bar a(x,y,z)$ наз. соленоидальным в обл. $G \subset \mathbb{R}^3$, если $\forall$ замкн. КГП $S \subset G$ $\quad \iint\limits_S (\bar a, d\bar S) = 0$

Пусть $\bar a$ – непр. дифф. вект. поле в обл. $G \subset \mathbb{R}^3$

1) если $\bar a$ соленоид., то $\operatorname{div} \bar a = 0$

2) если $\operatorname{div} \bar a = 0$ в объемно-односв. обл. G, то поле соленоидальн.

$\bar a$ – центр. поле

$\operatorname{div} \bar a = 0$

$r f'(r) + 3f(r) = 0$

$r^3 f'(r) + 3r^2 f(r) = 0$

$(r^3 f(r))' = 0$

$r^3 f(r) = C$

$$f(r) = \frac{C}{r^3}$$

$$\bar a = \frac{C}{r^3}\bar r$$

кулоновское поле

S – сфера $r = R$

$$\iint\limits_S (\bar a, d\bar S) = 4\pi C$$

внеш.

не явл. соленоид.

Пр. $\operatorname{div}[\bar a,\bar b]=(\nabla,[\bar a,\bar b])=$

$=(\nabla_a,[\bar a,\bar b])+(\nabla_b,[\bar a,\bar b]) \ominus$

$(\nabla_a,[\bar a,\bar b])=(\nabla_a,\bar a,\bar b)=(\bar b,\nabla_a,\bar a)=$

$(\bar b,[\nabla_a,\bar a])=(\bar b,\operatorname{rot}\bar a)$

$(\nabla_b,(\bar a,\bar b))=-(\nabla_b,[\bar b,\bar a])=-(\bar a,\operatorname{rot}\bar b)$

$\ominus\ (\bar b,\operatorname{rot}\bar a)-(\bar a,\operatorname{rot}\bar b)$

Кр: S через Грина
Поверх. инт. 2 способами
Стокс.
Набла.

Пр. $\bar c=(c_x,c_y,c_z)$ – пост. вр.

$\operatorname{div}[\bar c,\bar r]=(\bar r,\cancel{\operatorname{rot}\bar c}^{\,0})-(\bar c,\cancel{\operatorname{rot}\bar r}^{\,0})=0$

Пр. $\operatorname{rot}[\bar a,\bar b]=[\nabla_a,[\bar a,\bar b]]+[\nabla_b,[\bar a,\bar b]] \ominus$

$[\nabla_a,[\bar a,\bar b]]=\bar a(\nabla_a,\bar b)-\bar b(\nabla_a,\bar a)=$ $\longleftarrow$ $[A,[B,C]]=\bar B(\bar A,\bar C)-\bar C(\bar A,\bar B)$

$=(\bar b,\nabla_a)\bar a-\bar b\operatorname{div}\bar a=(\bar b,\nabla)\bar a-\bar b\operatorname{div}\bar a$

$[\nabla_b,[\bar a,\bar b]]=-[\nabla_b,[\bar b,\bar a]]=-(\bar a,\nabla)\bar b+\bar a\operatorname{div}\bar b$

$\ominus\ \bar a\operatorname{div}\bar b-\bar b\operatorname{div}\bar a+(\bar b,\nabla)\bar a-(\bar a,\nabla)\bar b$

Пр. $\operatorname{grad}(\bar r,\bar c)=\operatorname{grad}(xc_x+yc_y+zc_z)=$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(xc_x+yc_y+zc_z)\\ \frac{\partial}{\partial y}(xc_x+yc_y+zc_z)\\ \frac{\partial}{\partial z}(xc_x+yc_y+zc_z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}=\bar c$$

Пр. $\operatorname{rot}[\bar c,\bar r]=\bar c\underbrace{\operatorname{div}\bar r}_{3}-\cancel{\bar r\operatorname{div}\bar c}^{\,0}+\cancel{(\bar r,\nabla)\bar c}^{\,0}-\underbrace{(\bar c,\nabla)\bar r}_{=\bar c}=2\bar c$

Пр. $\operatorname{rot}[\bar r,[\bar c,\bar r]]=\operatorname{rot}(\bar c(\bar r,\bar r)-\bar r(\bar r,\bar c))=r^2\cancel{\operatorname{rot}\bar c}^{\,0}+[\operatorname{grad}r^2,\bar r]-$

$-(\bar r,\bar c)\cancel{\operatorname{rot}\bar r}^{\,0}-[\operatorname{grad}(\bar r,\bar c),\bar r]=[2\bar r,\bar c]-[\bar c,\bar r]=3[\bar r,\bar c]$

Пр. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar a=[\nabla,[\nabla,\bar a]]=\nabla(\nabla,\bar a)-\bar a(\nabla,\nabla)=\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar a-\Delta\bar a$