Пусть

$$J(x)=\int_a^b\left(A(x)y'^2+B(x)yy'+C(x)y^2+D(x)y'+F(x)y\right)dx$$

$y(a)=A_0,\ y(b)=B_0$

Если y_0 – доп. экстр., $h\in C^1[a,b]$
$h(a)=h(b)=0$,

Без доп. вф. => не обяз. не использ.

то $$\Delta J=J(y_0+h)-J(y_0)=\int_a^b\left(A(x)h'^2+\left(C(x)-\frac{B'(x)}{2}\right)h^2\right)dx$$

Алгоритм:

1. Члены с $A(x)h'^2$ и $C(x)h^2$ не трогаем
2. Если $B\neq 0$, то будет член $B(x)(y_0h'+y_0'h+hh')=(y_0h+\frac{h^2}{2})'$
3. Проинт. по частям
4. В то что осталось подстав. знач. y_0

Простейшие вариац. задачи:

Пр. $J(y)=\int_{-2}^{-1}(2yy'-x^2y'^2)dx$ $y(-2)=3/2$, $y(-1)=2$

Ф-ла Эйлера: $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$

$2y'=(2y-2x^2y')'$; $(x^2y')'=0$; $x^2y'=C \to y'=\frac{C}{x^2}$

$\Rightarrow y=\frac{C}{x}+C_1$; $2=-C+C_1$ $1/2=-1/2$

$3/2=\frac{C}{-2}+C_1$ $\Rightarrow$ $C=-1$, $C_1=1$ $y_0=-\frac{1}{x}+1$

$h\in C^1[-2,-1]$, $h(-2)=h(-1)=0$

$$\Delta J=J(y_0+h)-J(y_0)=\int_{-2}^{-1}\left(2(y_0+h)(y_0'+h')-x^2(y_0'+h')^2\right)dx$$

$$-\int_{-2}^{-1}(2y_0y_0'-x^2y_0'^2)dx=\int_{-2}^{-1}\left((2y_0h'+2y_0'h+hh')-2x^2y_0'h'-x^2h'^2\right)dx=$$

$$=-\int_{-2}^{-1}x^2h'^2dx+(2y_0h+h^2)\Big|_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}2x^2y_0'h'dx=-\int_{-2}^{-1}x^2h'^2dx-\int_{-2}^{-1}2h'dx=-\int_{-2}^{-1}x^2h'^2dx\leq 0$$

$y_0'=1/x^2$ $\quad 2h\Big|_{-2}^{-1}=0$

Если $\Delta J=0 \Rightarrow h'=0$

$h=const$; $h(-2)=h(-1)=0 \Rightarrow h=0 \Rightarrow$ y_0 – строгий max по опр.

Пр. $J(y)=\int_1^2\left(\frac{3y^2}{x^3}+\frac{y'^2}{x}+8y\right)dx \quad y(1)=0 \quad y(2)=8\ln 2$

$$\frac{6y}{x^3}+8=\left(2\frac{y'}{x}\right)'=2\left(\frac{y''x-y'}{x^2}\right)$$

$$6y+8x^3=2x^2y''-2xy'$$

$$x^2y''-xy'-3y=4x^3 \quad \text{— ур-е Эйлера:}$$

$$x=e^t$$

$$y'_x=e^{-t}y'_t$$

$$y''_{xx}=e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t)$$

$$y''_{tt}-y'_t-3y=4e^{3t}$$

$$y''-2y'-3y=4e^{3t}$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$$\lambda=-1;3$$

ОРОУ: $y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$

ЧРНУ: $y=Ate^{3t}$; $y'=(A+3At)e^{3t}$; $y''=(6A+9At)e^{3t}$

$$6A+\cancel{9At}-2A-\cancel{6At}-\cancel{3At}=4 \Rightarrow A=1$$

ОРНУ: $y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+te^{3t}$

$$y=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+x^3\ln x$$

$y(1)=0$: $C_1+C_2=0$

$y(2)=8\ln 2$: $\frac{C_1}{2}+8C_2+\cancel{8\ln 2}=\cancel{8\ln 2}$

$\Rightarrow C_1=C_2=0$

$\Rightarrow y_0=x^3\ln x$

$h\in C^1[-2,-1]$, $h(-2)=h(-1)=0$

$$J(y)=\int_1^2\left(\frac{3y^2}{x^3}+\frac{y'^2}{x}+8y\right)dx$$

$$\Delta J=J(y+h)-J(y_0)=\int_1^2 \frac{3(y_0+h)^2}{x^3}+\frac{(y_0'+h')^2}{x}+8(y_0+h)-\frac{3y_0^2}{x^3}-\frac{y_0'^2}{x}-8y_0\,dx=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{6y_0h+3h^2}{x^3}+\frac{2y_0'h'+h'^2}{x}+8h\right)dx=\int_1^2\left(\frac{3h^2}{x^3}+\frac{h'^2}{x}\right)dx+\int_1^2\left(\left(\frac{6y_0}{x^3}+8\right)h+\frac{2y_0'h'}{x}\right)dx \;\text{⊜}$$

$$y_0=x^3\ln x \quad y_0'=3x^2\ln x+x^2$$

$$\left(\frac{6y_0}{x^3}+8\right)h+\frac{2y_0'h'}{x}=(6\ln x+8)h+(6x\ln x+2x)h'=(6x\ln x+2x)'=$$

$$=6+6\ln x+2=6\ln x+8$$

$$\text{⊜}\int_1^2\left(\frac{3h^2}{x^3}+\frac{h'^2}{x}\right)dx+(6x\ln x+2x)h\Big|_1^2 \Rightarrow \Delta J=\int_1^2\left(\frac{3h^2}{x^3}+\frac{h'^2}{x}\right)dx\geq 0$$

$\Delta J=0$ им $h=h'\equiv 0$

$\Rightarrow y_0$ — сильный мин.

Кр 2 по диф.

1. частн. произв
2. вариац. задачи
3. системы x, y, z однородн.
4. З. Коши для ур. 2-го порядка

Пр. $J(y)=\int_0^{\pi/4}\left(y'^2\cos^2x+x^2yy'+xy^2-2y'\cos^3x\right)dx$ $y(0)=0$, $y(\pi/4)=1/\sqrt{2}$

$\cancel{x^2y'}+2\cancel{x}y=(2y'\cos^2x+\cancel{x^2y}-2\cos^3x)'$ $(x^2y)'=x^2y'+2xy$

$y'\cos^2x-\cos^3x=C_1$

$y'=\cos x+\frac{C_1}{\cos^2x}$

$y=\sin x+C_1\,\mathrm{tg}\,x+C_2$
$0=C_2$
$\frac{1}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}+C_1$ $C_1=0$ $\Rightarrow$ $\underline{y_0=\sin x}$

$A(x)=\cos x$ $B(x)=x^2$
$C(x)=x$ $C(x)-\frac{B'(x)}{2}=0$)

$\Delta J=J(y_0+h)-J(y_0)=$ $h\in C_1[0,\pi/4]$ $h(0)=h(\pi/4)=0$

$$=\int_0^{\pi/4}\Big((y_0'+h')^2\cos^2x+x^2(y_0+h)(y_0'+h')+x(y_0+h)^2-2(y_0'+h')\cos^3x-y_0'^2\cos^2x-x^2y_0y_0'-xy_0^2+2y_0'\cos^3x\Big)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\Big((2y_0'h'+h'^2)\cos^2x+x^2(y_0h'+y_0'h+hh')+x(2y_0h+h^2)-2h'\cos^3x\Big)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/4}(h'^2\cos^2x+\cancel{xh^2})dx+\cancel{x^2\left(y_0h+\frac{h^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4}}^{\,0}-\int_0^{\pi/4}2x\left(\cancel{y_0h}+\cancel{\frac{h^2}{2}}\right)dx+$$

$$+\int_0^{\pi/4}(2y_0'h'\cos^2x+2\cancel{xy_0h}-2h'\cos^3x)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/4}h'^2\cos^2x\,dx+\cancel{\int_0^{\pi/4}(2y_0'h'\cos^2x-2h'\cos^3x)dx}=\int_0^{\pi/4}h'^2\cos^2x\,dx\geq 0$$

$y_0'\cos^2x=\cos^3x$
" $\sin x$

если $\Delta J=0 \Rightarrow h'=0$ $h\equiv c$
$\Rightarrow h\equiv 0$

$\Rightarrow$ $\underline{y_0 \text{ – сильный лок. мин.}}$

T6. а)

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a:
а) $J[y]=\int_0^{\pi/2}(y'^2-ay^2)dx$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=0$;
б)* $J[y]=\int_0^{\pi/2}(y'^2-ay^2)dx$, $y(0)=0$.

$J(y)=\int_0^{\pi/2}(y'^2-ay^2)dx$ $\quad y(0)=y(\pi/2)=0$

Покажем, что если y_0 — экстремаль, то

$\Delta J=J(y_0+h)-J(y_0)=\int_0^{\pi/2}(h'^2-ah^2)dx$; $h\in C^1[0,\pi/2]$, $h(0)=h(\pi/2)=0$

$\Delta J=\int_0^{\pi/2}((y_0'+h')^2-a(y_0+h)^2-y_0'^2+ay_0^2)dx=\int_0^{\pi/2}(2y_0'h'+h'^2-2ay_0h+ah^2)dx=$

$=\int_0^{\pi/2}(h'^2-ah^2)dx+2\int_0^{\pi/2}\cancelto{0}{(y_0'h'-ay_0h)}dx =$

ур-е Эйлера: $-2ay=(2y')'$

$y''+ay=0$

$\int_0^{\pi/2}y_0'h'dx=y_0'h\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}hy_0''dx$

$u=y_0'$ $\quad du=y_0''dx$

$h'dx=dv$ $\quad v=h$

$2\int_0^{\pi/2}h(\underbrace{y_0''+ay_0}_{=0})dx=0$

$=\int_0^{\pi/2}(h'^2-ah^2)dx$

1) $a<0$ $\quad$ 2) $a=0$ $\quad$ 3) $a>0$

{ при $a\le 0$:

$y''+a(x)y=0$ $\quad$ теор. краевой з. единств.

$a(x)\le 0$ $\quad\Rightarrow$ единств. $y_0=0$

$\Delta J=0 \Rightarrow h'=0$; $h=C \Rightarrow h\equiv 0$

при $a\le 0$ единств. доп. экстремаль $y_0=0$ — стр. лок. мин

{ при $a>0$: $\quad a=b^2$, $b>0$

$y''+b^2y=0$

$y=C_1\cos bx+C_2\sin bx$

$y(0)=C_1=0$; $y(\pi/2)=C_2\sin b\pi/2=0$

либо $C_2=0 \Rightarrow y_0=0$

либо $\sin b\pi/2=0 \Rightarrow b\pi/2=\pi k$, $k\in\mathbb{N}$

$b=2k$, $a=4k^2$, $k\in\mathbb{N}$

при $a\ne 4k^2$

единств. допуст. экстр $y_0=0$

при $a=4k^2$

бескон. много доп. экстр. $y_0=C\sin 2kx$, $C\in\mathbb{R}$

Нер-во Виртингера: $\int_a^b f(x)^2dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2dx$ при $f(a)=f(b)=0$ (сейчас $a=0$, $b=\pi/2$)

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} h'^2dx \geqslant 4\int_0^{\pi/2} h^2dx$

$\Delta J = \int_0^{\pi/2}(h'^2 - ah^2)dx$

при $0<a\le 4$

$\Delta J \geqslant \int_0^{\pi/2}(h'^2-4h^2)dx \geqslant 0$ — мин.

при $a<4$:

$\Delta J > \int_0^{\pi/4}(h'^2-4h^2)dx \geqslant 0$ — единств. доп. экстр. даёт сильн. лок. мин

при $a=4$

$n=1$ — $y_0=C\sin 2x$ — беск. много нестрог доп. экстр.

при $h(x)=\alpha\sin 2x$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha=4$: $\Delta J = \int_0^{\pi/2}(h'^2-4h^2)dx = \alpha^2\int_0^{\pi/2}(4\cos^2 2x - 4\sin^2 2x)dx = 0$

в $\forall$ U_δ любой экстр. $\exists$ h, где $\Delta J=0$

$\Rightarrow$ нестрогий лок. мин.

при $a>4$:

$a\ne 4n^2$, $n=1,2,3,\dots$ — единств. доп. экстр. $y_0=0$

$a=4n^2$ — беск. много доп. экстр. $y_0=C\sin 2nx$

$h=\alpha\sin 2px$, $p\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$h(0)=h(\pi/2)=0$

$\Delta J = \alpha^2\int_0^{\pi/2}(4p^2\cos^2 px - 4n^2\sin^2 2px)dx = \frac{\alpha^2}{2}4(p^2-n^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\alpha^2}{4}(4p^2-a)$

при $p=1$: $4-a<0$, $\Delta J<0$

при $p^2>a/4$: $\Delta J>0$

$\Rightarrow$ За счёт выбора α норма h может быть сделана сколь угодно малой

$\Rightarrow$ в $\forall$ $U_\delta(y_0)$ $\exists$ h, где $\Delta J>0$ и h, где $\Delta J<0$

т.е. доп. экстр. не явл. лок. экстр.