Неравенства. Сходимость последовательностей с. в.

Опр. м.о. $\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi \, d\mathbb{P}$, формула замены переменной: $\mathbb{E}f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mathbb{P}_{\xi}(x)$, все св-ва м.о. проистекают из св-в инт. Лебега.

Th1 [Неравенство Чебышёва]

Пусть ξ – с.в. $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Тогда: $\mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}$;

плохо для оц. „хвостов" распр.: $\mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} x \, dF_{\xi}(x) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} 0$

◁ Если ω: $|\xi| < \varepsilon$, то $0 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}|\xi|$, если $|\xi| \geqslant \varepsilon$, то $1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}|\xi| \Rightarrow \mathbb{I}_{\{|\xi| \geqslant \varepsilon\}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \cdot |\xi|$

По св-ву монот. МО: $\mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}|\xi|$. ▷

Правило „3σ": $\mathbb{D}\xi = \sigma^2$, тогда: $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9}$

$\Leftarrow$

Если $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то $\forall \varepsilon > 0 \mapsto \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$. Почему требуем только $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$?

Th2 [Нер-во Коши - Буняковского]

$$\mathbb{E}|\xi|^2<\infty,\ \mathbb{E}|\eta|^2<\infty \Rightarrow \mathbb{E}|\xi\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}|\xi|^2}\cdot\sqrt{\mathbb{E}|\eta|^2}.$$

◁ Если $\mathbb{E}|\xi|^2=0$ или $\mathbb{E}|\eta|^2=0$, то $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} 0$ или $\eta \overset{\text{п.н.}}{=} 0$ и тогда получаем $0=0$.

Пусть $\mathbb{E}|\xi|^2\neq 0,\ \mathbb{E}|\eta|^2\neq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{\mathbb{E}|\xi|^2}}\cdot\frac{|\eta|}{\sqrt{\mathbb{E}|\eta|^2}}\right) \le \left| ab \le \frac{a^2+b^2}{2}\right| \le \frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\frac{|\xi|^2}{\mathbb{E}|\xi|^2}+\frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\frac{|\eta|^2}{\mathbb{E}|\eta|^2}=1$

$\Rightarrow \mathbb{E}|\xi\cdot\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}|\xi|^2}\cdot\sqrt{\mathbb{E}|\eta|^2}$. ▷

$\mathbb{E}|\xi\cdot 1| \le \sqrt{\mathbb{E}\xi^2}<\infty$ и т.д.

Следствие: Из конечности k-го момента след. конеч. всех $1\dots k-1$ моментов

Нер-во Гёльдера: $\mathbb{E}|\xi\eta| \le \sqrt[p]{\mathbb{E}|\xi|^p}\cdot\sqrt[q]{\mathbb{E}|\eta|^q}$, $1<p<\infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

Нер-во Минковского: $\sqrt[p]{\mathbb{E}|\xi+\eta|^p} \le \sqrt[p]{\mathbb{E}|\xi|^p}\cdot\sqrt[p]{\mathbb{E}|\eta|^p}$, $1\le p<\infty$

Нер-во Ляпунова: $1\le q<p<\infty$, $\xi\in L_p$. Если $\xi\in L_q$, то: $\|\xi\|_{L_q}\le\|\xi\|_{L_p}$

Th3 [Неравенство Йенсена]

Пусть φ - вып. на $\mathbb{R}$, тогда $\varphi(\mathbb{E}\xi)\le\mathbb{E}(\varphi(\xi))$

◁ Для вып. функ.: $\varphi(x)\ge\varphi(a)+k\cdot(x-a)$, пусть $a=\mathbb{E}\xi$, $x=\xi \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(\xi)\ge\varphi(\mathbb{E}\xi)+k\cdot(\xi-\mathbb{E}\xi) \Rightarrow \mathbb{E}\varphi(\xi)\ge\varphi(\mathbb{E}\xi)$. ▷

Верно и для УМО: $\varphi(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})) \overset{\text{п.н.}}{\le} \mathbb{E}(\varphi(\xi)|\mathcal{A})$.

Th4 [ЗБЧ в форме Чебышёва] (Слабый ЗБЧ)

$\exists\ \xi_1,\xi_2,\dots$ — ~~...~~ независ. т.ч. $\mathbb{D}\xi_i\le C$. Тогда $\forall\varepsilon>0 \mapsto \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right)=0$.

$S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$

◁ $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{n^2\cdot\varepsilon^2}\cdot\mathbb{D}S_n \le$

$\mathbb{D}S_n=\mathbb{D}\xi_1+\dots+\mathbb{D}\xi_n\le n\cdot C \qquad \le \frac{C}{\varepsilon^2\cdot n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. ▷

(сход. по вероятности)

Следствие [ЗБЧ Бернулли]

S_n – число успехов в схеме Бернулли с $0<p<1$. Тогда: $\forall\varepsilon>0\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right)=0$

◁ $\xi_i=I\{\text{успех в } i\text{-ом исп.}\}$, $\mathbb{E}\xi_i=p$, $\mathbb{D}\xi_i=\mathbb{E}\xi_i^2-(\mathbb{E}\xi_i)^2=\mathbb{E}\xi_i-(\mathbb{E}\xi_i)^2=(1-\mathbb{E}\xi_i)\cdot\mathbb{E}\xi_i=pq \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вып. усл. Th4. Т.к. $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i \Rightarrow \mathbb{E}S_n=n\cdot p\Rightarrow\mathbb{E}\frac{S_n}{n}=p\Rightarrow$ доказано по Th4. ▷

Этот факт и является теоретическим обоснованием проявления вероят. как частоты.

Пример [Метод Монте-Карло]

Пусть $g(x)$ — непр. функц. на $[0,1] \to [0,1]$. Интересует $I = \int\limits_0^1 g(x)\,dx = ?$

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — i.i.d., $\xi_i \sim \mathcal{U}[0,1] \Rightarrow$ с.в. $\eta_k = g(\xi_k)$ тоже i.i.d.

$\mathbb{E}\eta_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)\,dx = \int\limits_0^1 g(x)\,dx = I$ — искомый интеграл.

$S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$, тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} I$, при этом ξ_i можно моделировать численно и

взять такое n, что $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| < \varepsilon\right) \geq \alpha$, $\alpha \approx 1$ $n = ?$

Т.к. $\eta = g(\xi)$, $g \in [0,1]$, то $\mathbb{P}(\eta \leq 1) = 1 \Rightarrow \mathbb{D}\eta \leq \frac{1}{4}$ (см. пред. пару).

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{n \cdot \mathbb{D}\eta}{\varepsilon^2 \cdot n^2} \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot n} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| < \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| \geq \varepsilon\right) \geq \underbrace{1 - \frac{4}{4\varepsilon^2 \cdot n}}_{\geq \alpha} \Rightarrow n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\alpha)}.$$

Виды сходимостей случайных величин

В ЗБЧ уже получили некоторые стабилизации суммы к пределу, но есть ли другие варианты. Какие виды сходимостей вы знаете? На что влияет наличие той или иной сходимости? Случайные величины — функции, поэтому сущ. разные способы определить сход. послед. с.в. Пусть есть послед. $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

def 1 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi \iff \forall \varepsilon > 0 \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$

В ЗБЧ Бернулли была именно такая сходимость. Однако при $\mathbb{P}$-сходимости не знаем мощность мн-ва, на котором есть $\mathbb{P}$-сходимость.

def 2 $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \iff \mathbb{P}(\{\omega : \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}) = 1.$

Утв $[\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi] \Rightarrow [\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi]$

◁ Рассмотрим „плохое" событие: такие ω, что нет сходимости: фиксируем ω, для которых нет сход, тогда

$\left[\xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \xi(\omega)\right] \iff \exists\, \varepsilon > 0 : \forall N = N(\varepsilon)\ \exists\, n \geq N : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon$. Возьмём фиксированный $\varepsilon > 0$ из это утверждения, тогда:

По усл. вероят. „плохого" $= 0$: $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_N \underbrace{\bigcup\limits_{n \geq N} \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}}_{\doteq A_N}\Big) = 0$

$A_N \supset A_{N+1} \Rightarrow$ пересечение $\bigcap\limits_N$ берётся по сужающейся системе событий, используем непр. вероят. $\mathbb{P}$: если $A_n \downarrow A$, т.е. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\bigcap\limits_n A_n = A$, то $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(A)$.

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists N = N(\delta) : \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geq N(\delta)} \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}\Big) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \mapsto \mathbb{P}\big(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}\big) < \delta, \text{ т.е. } \mathbb{P}\big(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \triangleright$$

Пример 1| Обратное в общем случае неверно: $[\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi] \not\Rightarrow [\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi]$ Л. 9

$\triangleleft$ Пусть $\xi_n \sim Be(p_n)$, где p_n — некоторое. Из леммы Бореля – Кантелли:

*/ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geq n} A_k$, тогда $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$
A_n — нез. $\Rightarrow \big[\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1\big]$ /*

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \sum\limits_n p_n < \infty$. Действительно, пусть $A_n = \{\xi_n = 1\}$, тогда A сост. из тех и только тех ω, которые принадлежат к беск. числу соб. из $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит $\overline{A}$ состоит из тех и только тех ω, что $\xi_n(\omega) \longrightarrow 0$.

Аналогично: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 1 \iff \sum\limits_n (1 - p_n) < \infty$.

Пусть $p_n = \frac{1}{n}$, тогда ξ_n не может стрем. ни к 0 ни к 1 с вероят. 1, но 0 и 1 — единственные кандидаты на предел $\Rightarrow \xi_n$ не сход. с вероят. 1.

Сход. по вероят. к 0: $\mathbb{P}(|\xi_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\xi_n = 1) = p_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\triangleright$

def 3| Сход. порядка p: $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi \iff \mathbb{E}\big[|\xi_n - \xi|^p\big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$p = 1$ — сход. в среднем
$p = 2$ — сход в С.К.

Утв| Если $\mathbb{E}|\xi_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, $p > 0$, тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$

$\triangleleft$ Пусть $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \overset{\text{нер-во Чебышёва}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^p} \cdot \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{\text{по усл.}} 0$. $\triangleright$

Пример 3 $[\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi] \not\Rightarrow [\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi]$ в общ. случае.

$\triangleleft$ ξ_n :

0	1	−1
$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$

$\Rightarrow \mathbb{E}|\xi_n - 0|^p = 0\cdot(1-\frac{1}{n}) + 1^p\cdot\frac{1}{2n} + 1^p\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

По лемме Б.-К.: $[\xi_n \xrightarrow{п.н.} 0] \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n \neq 0) < \infty.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n \neq 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ нет сход. п.н. $\triangleright$

Мы подобрали примеры, показывающие связь сход. п.н, $\mathbb{P}$, L_p. Но насколько „далеки" эти сходимости?

А что насчёт сходимости интегралов? Th 0 [Теорема Лебега о мат. сход.]

Пусть $\{\xi_n\}$, η т.ч. $|\xi_n(\omega)| \leq \eta(\omega)\ \forall n$, $\mathbb{E}\eta < \infty$, $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$. Тогда: $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi - \xi_n| = 0$

Лемма | Если $\forall \delta > 0 \mapsto \sum\limits_{n} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \delta) < \infty$, то $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$

$\triangleleft$ Т.к. ряд сходится, то по лемме Б.-К.: $\forall \delta > 0 \mapsto \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcap\limits_{N} \bigcup\limits_{k \geq N} \{|\xi_n - \xi| \geq \delta\}}_{\doteq \tilde{A}_\delta}\Big) = 0.$

Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$ и сделаем $\bigcup\limits_{k} \tilde{A}_{\frac{1}{k}}$: $\bigcup\limits_{k} \bigcap\limits_{N} \bigcup\limits_{n \geq N} \{|\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{k}\} = \{\omega : \xi_n \not\to \xi\}$ −

// $\exists k \in \mathbb{N} : \forall N = N(k)\ \exists n \geq N : |\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{k}$ //

− событие отсутствия предела, состоит из счёт. объед. соб. вероят. 0 $\Rightarrow$ это соб. нулевой вероят. $\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ $\triangleright$

Th 1 [Теорема Рисса] $[\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi] \Rightarrow [\exists \{n_j\}_{j=1}^{\infty} : \xi_{n_j} \xrightarrow{п.н.} \xi]$.

$\triangleleft$ Т.к. $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, то $\exists n_j : \mathbb{P}\left(|\xi_{n_j} - \xi| \geq \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{2^j}$.

Для достаточно больших j вып. $\forall \delta > 0 \mapsto \{|\xi_{n_j} - \xi| \geq \delta\} \subset \{|\xi_{n_j} - \xi| \geq \frac{1}{2^j}\}$.
т.ч. $\frac{1}{2^j} < \delta$

$\mathbb{P}(|\xi_{n_j} - \xi| \geq \frac{1}{2^j}) < \frac{1}{2^j}$

$\Rightarrow \sum\limits_{j} \mathbb{P}(|\xi_{n_j} - \xi| \geq \delta) < \infty \overset{\text{лемма}}{\Longrightarrow} \xi_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{п.н.} \xi$. $\triangleright$

Th $\overset{*}{2}$ [Теорема Егорова]

$[\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi] \Rightarrow [\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}(A_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ и $\xi_n \overset{A_\varepsilon}{\rightrightarrows} \xi]$
$\exists A_\varepsilon$

равномерно: $\sup\limits_{\omega \in \Omega} |\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Нарисуем схему того что теперь знаем про сходимости: