Пр. $(z-x+3y)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x-3y)\frac{\partial u}{\partial y}-2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

$u=\frac{4y}{z}$ при $x=3y$

$\dot x = z-x+3y$ (1)

$\dot y = z+x-3y$ (2)

$\dot z = -2z$ (3)

$\dot x+\dot y+\dot z=0$

$x+y+z=C_1$

1-й первый инт.:

$u_1=x+y+z$

$y=C_1-x-z$

$\dot x = z-x+3(C_1-x-z) = -4x+2z+3C_1$

$\dot z=-2z$

$\frac{dx}{dz}=2\frac{x}{z}+1-\frac{3}{2}\cdot\frac{C_1}{z}=\frac{4x+2z-3C_1}{2z}$

$2z\,dx=(4x+2z-3C_1)dz$

$z\,dx-2x\,dz=(z-\frac{3}{2}C_1)dz$

$\frac{z^2dx-2xz\,dz}{z^4}=\frac{(z^2-3/2\,zC_1)}{z^4}dz=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{3}{2z^3}C_1\right)dz$

$\frac{x}{z^2}=-\frac{1}{z}+\frac{3C_1}{z^2}+C_2$

$\frac{x}{z^2}=\frac{-4z+3(x+y+z)}{4z^2}+C_2 \Rightarrow C_2=\frac{x+z-3y}{4z^2}$

$u_2=\frac{x+z-3y}{z^2}$ – 2-й первый интеграл

Общее реш.

$u=F\left(x+y+z,\ \frac{x+z-3y}{z^2}\right)$

$F(\xi,\eta)=\xi\eta-1$

$F\left(4y+z,\frac{1}{z}\right)=\frac{4y}{z}$

$\Rightarrow$ Реш. з. Коши

$u=\frac{(x+y+z)(x+z-3y)}{z^2}-1$

Пр. $(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ $u=\left(\frac{x}{z}\right)^2$ при $y=z$

$\dot x=x^2+y^2$

$\dot y=2xy$

$\dot z=z$

$\frac{dy}{dz}=2\frac{y}{z}$ $\frac{dy}{y}=\frac{2dz}{z}$ $\ln|y|=2\ln|z|+C_1 \Rightarrow y=C_1z^2$

$\Rightarrow u_1=\frac{z^2}{y}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$; $2xy\,dx-x^2dy=y^2dy$; $\frac{2xy\,dx-x^2dy}{y^2}=dy$; $d\left(\frac{x^2}{y}\right)=dy$

$\frac{x^2}{y}=y+C_2 \Rightarrow u_2=\frac{x^2-y^2}{y}$

Общее реш. $u=F\left(\frac{z^2}{y}, \frac{x^2-y^2}{y}\right)$

Реш. з. Коши $u=F\left(z, \frac{x^2}{z}-z\right)=\left(\frac{x}{z}\right)^2$

$F(\xi,\eta)=\frac{\eta}{\xi}+1$; $u=\frac{\frac{x^2-y^2}{y}}{z^2/y}+1=\frac{x^2-y^2}{z^2}+1$

Пр. $z(x+y^2\cos y)\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}+y\cos y\frac{\partial u}{\partial z}=0$

$\dot x = z(x+y^2\cos y)$ $\qquad u=\frac{3}{2}z^2$ при $x=2y\sin y+yz^2$

$\dot y = yz$ $\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{z}{\cos y}$; $\cos y\,dy = z\,dz \Rightarrow \sin y = \frac{z^2}{2}+C_1$

$\dot z = y\cos y$ $\qquad u_1=\sin y-\frac{z^2}{2}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^2\cos y}{y}$; $y\,dx-x\,dy=y^2\cos y\,dy \;\Big|:y^2$

$d\left(\frac{x}{y}\right)=\cos y\,dy \Rightarrow \frac{x}{y}=\sin y+C_2 \Rightarrow u_2=\frac{x}{y}-\sin y$

Общее реш. $u=F\left(\sin y-\frac{z^2}{2}, \frac{x}{y}-\sin y\right)$

$x=2y\sin y+yz^2$

$F\left(\sin y-\frac{z^2}{2}, 2\sin y+z^2-\sin y\right)$

$F\left(\sin y-\frac{z^2}{2}, \sin y+z^2\right)=\frac{3}{2}z^2$

$F(\xi,\eta)=\eta-\xi$

$\Rightarrow$ Реш. з. Коши: $u=\frac{x}{y}+\frac{z^2}{2}-2\sin y$

Пр. $xz^2\frac{\partial u}{\partial x}+2y(y-z^2)\frac{\partial u}{\partial y}-z^3\frac{\partial u}{\partial z}=0$

$\dot x = xz^2$ $\qquad u=x^2e^z$ при $y=z$, $z<0$

$\dot y = 2y(y-z^2)$ $\qquad \frac{dx}{dz}=-\frac{x}{z}$; $\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{z}$; $x=\frac{C_1}{z}$

$\dot z=-z^3$

$\Rightarrow u_1=xz$

$\frac{dy}{dz}=\frac{2yz^2-2y^2}{z^3}$; $y'_z=\frac{2y}{z}-\frac{2y^2}{z^3}$ — ур-е Бернулли

$\frac{y'}{y^2}=\frac{2}{yz}-\frac{2}{z^3}$; $\frac{1}{y}=u$ $\quad u'_z=-\frac{y'_z}{z}$; $-u'_z=\frac{2u}{z}-\frac{2}{z^3}$ — лин. ур-е

$-u'_z = \frac{2u}{z}$

$-\frac{du}{dz} = \frac{2u}{z}$; $\frac{du}{u} = -2\frac{dz}{z}$; $u = \frac{C}{z^2}$

ВП: $u = \frac{C(z)}{z^2}$

$\frac{C' z^2 - 2z C}{z^4} = \frac{2C}{z^3} - \frac{2}{z^3}$

$C' = \frac{2}{z}$; $C = 2\ln|z| + C_2$

$C_2 = \frac{z^2}{y} - 2\ln|z|$; $\underline{u_2 = \frac{2\ln|z| + C_2}{z^2}}$

Общее реш. $u = F\left(xz, \frac{e^{z^2/y}}{z^2}\right)$

$F\left(xz, \frac{e^z}{z^2}\right) = x^2 e^z$ $\quad F(\xi, \eta) = \xi^2 \eta$

Реш. з. Коши: $\underline{u = x^2 e^{z^2/y}}$

Вариационное исчисление

Функционал $f: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{L}$ - ЛНП

$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ $\qquad y \in C^1[a,b]$

F - непр. дифф. ф. 3-х перем. $\qquad \|y\| = \max_{[a,b]} |y(x)| + \max_{[a,b]} |y'(x)|$

y_0 - т. слабых лок. мин. ф-ла $J(y)$, если

$\exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathring{U}_\delta(y_0)$ $\ J(y) > J(y_0)$ - стр. min

$\geq$

$<$

$\leq$

$\mathring{U}_\delta(x_0) = \{ y \in \mathcal{L} : 0 < \|y - y_0\| < \delta \}$

Задача с закреп. концами: $y(a) = A$ $\ y(b) = B$

Ур-е Эйлера (Лагранжа)

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ $\qquad$ как правило, обыкн. дифф. ур-е 2-го порядка

Допустимая экстремаль ф-ла $J(y)$ наз. решение краевой задачи $y(a) = A$, $y(b) = B$ для ур. Эйлера

Если y_0 явл. точкой строгого лок. экстр. $J(y)$, то y_0 - доп. экстремаль

Пр. $J(y)=\int_1^2 (xy'+y)^2\,dx$ Иссл. на экстр.

$y(1)=1 \quad y'(2)=1/2$

$\int_1^2 (x^2y'^2+2xyy'+y^2)\,dx$

$2xy'+2y=\frac{d}{dx}(2x^2y'+2xy)$

$2(xy)'=(2x^2y'+2xy)'$

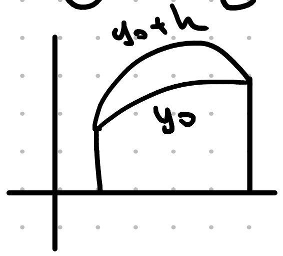
$\cancel{xy}=x^2y'+\cancel{xy}+C \Rightarrow y'=\frac{C}{x^2};\ \underline{y=\frac{C}{x}+C_1}$

$C+C_1=1 \quad C=1$

$\frac{C}{2}+C_1=1/2 \quad C_1=0$

$\Rightarrow$ доп. экстремаль: $\underline{y_0=\frac{1}{x}}$

Пусть $y=y_0+h$ $h\in C^1[1,2]$, $h(1)=h(2)=0$



Приращение ф-ла на экстремали запис. в виде

$\Delta J = J(y_0+h)-J(y_0)$

$$\Delta J=\int_1^2\left(x^2(y_0'+h')^2+2x(y_0+h)(y_0'+h')+(y_0+h)^2-x^2y_0'^2-2xy_0y_0'-y_0^2\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(2x^2y_0'h'+x^2h'^2+2x\underbrace{(y_0h'+y_0'h+hh')}_{=(y_0h+h^2/2)'}+2y_0h+h^2\right)dx=$$

по частям

$C=0$, $h(1)=h(2)=0$

$$=\int_1^2(x^2h'^2+h^2)\,dx+2x(y_0h+h^2/2)\Big|_1^2-\int_1^2(2y_0h+h^2)\,dx+\int_1^2(2x^2y_0'h'+2y_0h)\,dx=$$

$$=\int_1^2 x^2h'^2\,dx+\int_1^2 2x^2y_0'h'\,dx=\int_1^2 x^2h'^2\,dx-2\int_1^2 h'\,dx=\int_1^2 x^2h'^2\,dx\geq 0$$

$y_0'=-1/x^2$ $\quad h(x)\big|_1^2=0$

но строго даже >0,

т.к. $\Delta J=0$, если $\int_1^2 x^2h'^2\,dx=0 \Rightarrow h'=0$

т.е. $h\equiv C \Rightarrow h\equiv 0$

$\Rightarrow$ строгий слабый лок. мин. и даже глобальный (абс)