Дз Хамаи Виктории Б01-302 по матану.
Задание 2, 3 семестр

I Криволин. инт. Ф-ла Грина

§10

№1 4) $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{y-x}$ $\quad \Gamma$ – отрезок $(0,-2),(4,0)$:

$y = 1/2x - 2, \ 0 \le x \le 4$

$$\int\limits_\Gamma \frac{ds}{y-x} = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{1+1/4}\,dx}{-1/2x-2} = -\int\limits_0^4 \frac{\sqrt5\,dx}{x+4} = -\sqrt5 \ln|x+4|\Big|_0^4 = -\sqrt5\ln8+\sqrt5\ln4 = -\sqrt5\ln2$$

Ответ: $-\sqrt5\ln2$

№9 $\int\limits_\Gamma (x^{4/3}+y^{4/3})ds$ $\quad \Gamma$ – астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

$x = a\cos^3 t, \ y = a\sin^3 t, \ 0 \le t \le 2\pi$

$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$

$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2} = \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)} = 3a|\cos t\sin t| = \frac{3a}{2}|\sin 2t|$$

$$I = 4\int\limits_0^{\pi/2}(a^{4/3}\cos^4 t + a^{4/3}\sin^4 t)\cdot\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = 4a^{7/3}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos^2 2t}{2}\cdot\frac32\cdot\sin2t\,dt = \begin{bmatrix}\cos2t=u\\ -\sin2t=\frac{du}{2}\end{bmatrix} =$$

$$= 3a^{7/3}\int\limits_{-1}^{1}(1+u^2)\frac{du}{2} = 3a^{7/3}\int\limits_0^1(1+u^2)du = 3a^{7/3}\left(u+\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 4a^{7/3}$$

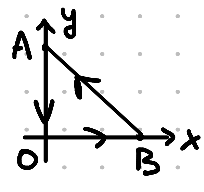
Ответ: $4a^{7/3}$

№29 4) $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$ $\quad \Gamma$ – треугольник $(0,0),(1,0),(0,1)$

$\overline{OB}$: $y=0 \quad 0\le x\le 1 \quad \int\limits_0^1 x^2dx = 1/3 = I_1$

$\overline{BA}$: $y=-x+1 \quad 0\le x\le 1 \quad \int\limits_1^0 (x^2+(1-x^2))dx-(x^2-(1-x^2))dx = 0 = I_2$

$\overline{AO}$: $x=0 \quad 0\le y\le 1 \quad \int\limits_1^0 -y^2dy = \int\limits_0^1 y^2dy = -1/3 = I_3$

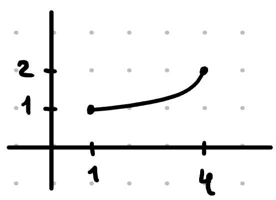


$I_0 = I_1+I_2+I_3 = 0 \Rightarrow$ Ответ: 0

№85 4) m? Γ: $y^2=x$, $A(1,1)$, $B(4,2)$, $\rho(x,y)=y$

$$m = \int\limits_\Gamma \rho(x,y,z)\,ds = \int\limits_1^2 y\cdot\sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac12\int\limits_1^4\sqrt{1+4y^2}\,dy^2 =$$

$$= \frac12\cdot\frac14\cdot\frac23\cdot(1+4y^2)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt5)$$



Ответ: $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt5)$

№110 1) A? $\vec{F}=(4x-5y;\ 2x+y)$, Γ - ломаная APB, $A(1,-9)$ $B(3,-3)$ $P(1,-3)$

$\overline{AP}$: $x=1$, $-9\le y\le -3$

$$A_1=\int_{-9}^{-3}(2+y)\,dy=-6+9/2+18-81/2=-24$$

$\overline{PB}$: $y=-3$, $1\le x\le 3$

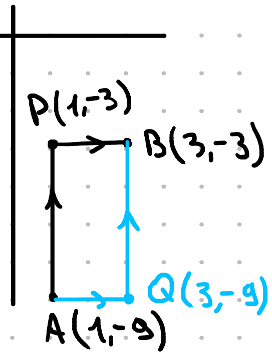
$$A_2=\int_{1}^{3}(4x+15)\,dx=18+45-2-15=46$$

$A=A_1+A_2=22$

$\Downarrow$

Ответ: 22

Γ:



2) —//— Γ - ломаная AQB, $Q(3,-9)$

$\overline{AQ}$: $y=-9$ $1\le x\le 3$

$$A_1=\int_{1}^{3}(4x+45)\,dx=18+45\cdot 3-2-45=106$$

$\overline{QB}$: $x=3$, $-9\le y\le -3$

$$A_2=\int_{-9}^{-3}(6+y)\,dy=-18+9/2+54-81/2=0$$

$A=A_1+A_2=106$ $\Rightarrow$ **Ответ: 106**

№46 $\int\limits_{\Gamma}(2xy-y)\,dx+x^2\,dy$ Γ - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$Q=x^2$ $P=2xy-y$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$

$\iint\limits_{S}dx\,dy$ - площадь эллипса $=\pi ab$

Ответ: πab

№100 G - огр. мн. обл, ∂G - ее кусочно-гл. граница (G слева)

Д-ать: $S=\oint\limits_{\partial G}x\,dy=-\oint\limits_{\partial G}y\,dx=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G}x\,dy-y\,dx$

Д-во: $\int\limits_{\partial G}(\overbrace{Ax+By}^{P})\,dx+(\overbrace{Cx+Dy}^{Q})\,dy=(C-B)\cdot\iint\limits_{G}dx\,dy$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=C-B$

$\Rightarrow$ площадь G: $\dfrac{1}{C-B}\int\limits_{\partial G}(\ldots)=S$

при $Q=x$, $P=0$: $S=\int\limits_{\partial G}x\,dy$ при $Q=0$, $P=x$: $S=-\int\limits_{\partial G}y\,dx$

$\Rightarrow$ $S=\int\limits_{\partial G}x\,dy=-\int\limits_{\partial G}y\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}x\,dy-y\,dx$

их среднее арифм.

ч.т.д.

№59 $\int\limits_{\Gamma}2xy\,dx+x^2\,dy$ $A(0,0)$, $B(-2,-1)$

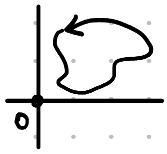
$du=2xy\,dx+x^2\,dy$ $\Rightarrow$ $u=x^2y$

$\Rightarrow$ $\int\limits_{\Gamma}2xy\,dx+x^2\,dy=u(B)-u(A)=-4$

Ответ: -4

№71 $\oint\limits_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ γ — простые замкн. гл. кр., не прох. через $(0,0)$, ориент. против час. стрелки

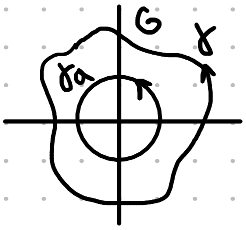
$P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$



$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\gamma = \partial G$ $\Rightarrow$ по ф-ле Грина $\oint\limits_\gamma = \underline{0}$ — применимо только если $(0,0)$ $\underline{\text{вне}}$ γ (в силу требования о непр.)

Если $(0,0)$ внутри γ:



$\gamma_a = \{x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi\}$

$\int\limits_{\gamma_a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a\cos t\, a\cos t - a\sin t(-a\sin t)}{a^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = \underline{2\pi}$

G — неодносвязн. обл., $P, Q \in C^1(\overline{G})$

$\Rightarrow$ к G прим. ф-ла Грина

$\oint\limits_\gamma + \oint\limits_{\gamma_a} = 0 \Rightarrow \oint\limits_\gamma = \oint\limits_{\gamma_a} = 2\pi$

Ответ: $\oint\limits_\gamma = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \gamma \end{cases}$

II Поверхностные интегралы

§9

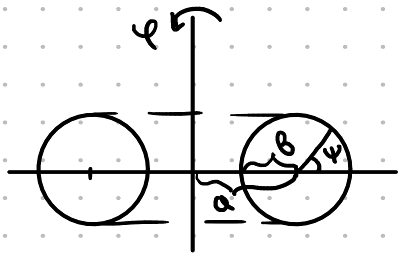
№37 конус: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, цилиндр: $x^2+y^2 = 2x$

$G: (x-1)^2 + y^2 \le 1$

$S = \iint\limits_G |[F_u, F_v]|\,du\,dv = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dx\,dy = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\overbrace{\iint\limits_G dx\,dy}^{\text{пл. круга } R=1} = \pi\sqrt{2}$

Ответ: $\pi\sqrt{2}$

№51



$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$
$y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$
$z = a\sin\psi$

$0 < a \le b$

$[F_\varphi, F_\psi] = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix} =$

$= \overline{e}_1 \cdot a(b+a\cos\psi)\cos\varphi\cos\psi + \overline{e}_2 \cdot a(b+a\cos\psi)\sin\varphi\cos\psi + \overline{e}_3 \cdot a(b+a\cos\psi)\sin\psi$

$\Rightarrow |[F_\varphi, F_\psi]|^2 = a^2(b+a\cos\psi)^2 \underbrace{(\cos^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\psi)}_{1}$

$\Rightarrow |[F_\varphi, F_\psi]| = a(b + a\cos\psi)$

$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} a(b + a\cos\psi)\,d\psi = 2\pi\cdot ab\cdot 2\pi = 4\pi^2 ab$

Ответ: $4\pi^2 ab$

№72 $S?$ $x^2+y^2+z^2=R^2$; $z=c$, $z=c+h$ $c, c+h \in [-R,R]$

$x=R\cos\psi\cos\varphi$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y=R\cos\psi\sin\varphi$ $\quad c \le R\sin\psi \le c+h$; $\underbrace{\frac{c}{R}}_{=\sin\psi_1} \le \sin\psi \le \underbrace{\frac{c+h}{R}}_{=\sin\psi_2}$ $\qquad |[\bar r_\varphi, \bar r_\psi]| = R^2\cos\psi$

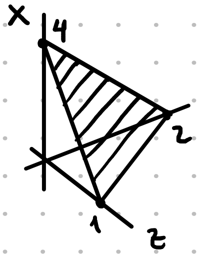
$z=R\sin\psi$

$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2\cos\psi\, d\psi = 2\pi R^2 \int_{\psi_1}^{\psi_2}\cos\psi\, d\psi = 2\pi R^2(\sin\psi_2-\sin\psi_1) = 2\pi R^2\cdot\left(\frac{c+h-c}{R}\right) = 2\pi h R$$

Ответ: $S=2\pi hR$, зависит только от h и R

§11

№1 1) $\iint_S (x+y+z)\,dS$ $\qquad S$: $x+2y+4z=4$, $x\ge 0$ $y \ge 0$ $z \ge 0$



$x=4-2y-4z=f(y,z)$

$y=y$ $\qquad ; \ |[\bar r_y, \bar r_z]| = \sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$

$z=z$

$$\int_0^2 dy \int_0^{1-y/2} [4-2y-4z+y+z]\cdot\sqrt{21}\, dz = \sqrt{21}\cdot\int_0^2 dy\int_0^{1-y/2}[4-y-3z]\,dz =$$

$$=\sqrt{21}\cdot\int_0^2 dy\left((4-y)(1-y/2)-3/2(1-y/2)^2\right) = \sqrt{21}\cdot\int_0^2 dy\left[4-y-2y+y^2/2-3/2+3/2y-3/8y^2\right] =$$

$$=\sqrt{21}\left(\tfrac{5}{2}\cdot 2-\tfrac{3}{4}\cdot 4+1/3\right) = 7/3\cdot\sqrt{21}$$

Ответ: $\frac{7}{3}\sqrt{21}$

№18 1) x_c, y_c, z_c? $\quad x^2+y^2+z^2=R^2$ $\quad x,y,z \ge 0$

В силу симм. сферы $x_c=y_c=z_c=\frac{1}{M}\iint_S x\,dS$;

$x=R\cos\psi\cos\varphi$

$y=R\cos\psi\sin\varphi$ $\qquad M=\iint_S dS = \iint_G R^2\cos\psi\, d\varphi\, d\psi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi\cdot R^2\cos\psi = \frac{\pi R^2}{2}$

$z=R\sin\psi$

$|[\bar r_\varphi, \bar r_\psi]| = R^2\cos\psi$ $\quad\to x_c=\frac{1}{M}\cdot\iint_S x\,dS = \frac{1}{M}\cdot\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}R^3\cdot\cos^2\psi\cos\varphi = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^3}{4}=\frac{R}{2}$

Ответ: $x_c=y_c=z_c=\frac{R}{2}$

№37 1) $\iint_S yz\,dz\,dx$ $\qquad S$ - внешняя сторона верх части эллипсоида

знак ⊕ $\qquad x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ $\quad z \ge 0$

$x=a\cos\psi\cos\varphi$ $\quad 0\le\varphi\le 2\pi$

$y=b\cos\psi\sin\varphi$ $\quad 0 \le \psi \le \pi/2$ $\qquad \iint_S yz\,dz\,dx - \iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$

$z=c\sin\psi \ge 0$

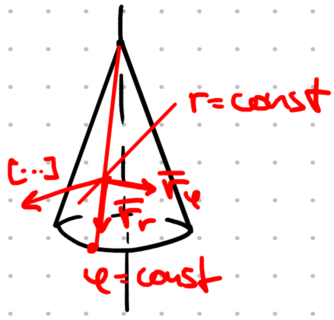
$$\iint_S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi\cdot \begin{array}{ccc} dydz & dzdx & dxdy \end{array} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\psi\cdot\begin{vmatrix} 0 & bc\cos\psi\sin\psi\sin\varphi & 0 \\ -a\cos\psi\sin\varphi & b\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\psi\cos\varphi & -b\sin\psi\sin\varphi & c\cdot\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\psi\cdot\left[c\cdot\cos\psi\cdot\left(abc\cos^2\psi\sin\psi\sin^2\varphi\right)\right] = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\psi\cdot\left[abc^2\cos^3\psi\sin^2\varphi\cdot\sin\psi\right] =$$

$$= abc^2\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^3\psi\sin\psi\, d\psi = abc^2\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\cdot\left(\frac{\cos^4\psi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{abc^2}{4}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{\pi abc^2}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi abc^2}{4}$

№38 $\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz$ S – внешн. сто. бок. п. конуса $\sqrt{y^2+z^2} \le x \le H$



$y = r\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$
$z = r\sin\varphi \quad 0 \le r \le H \qquad x^2 = y^2+z^2$

$$\iint\limits_S = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H r\,dr\cdot[2r^2+r^2] = -6\pi\int_0^H r^3\,dr = -6\pi\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^H = -\frac{3\pi H^4}{2}$$

Ответ: $-\frac{3\pi H^4}{2}$

№42 $\iint\limits_S x^6\,dy\,dz + y^4\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$ S – нижн. сто. эл. параб. $z = x^2+y^2 \quad z \le 1$ ⊖

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^6 & y^4 & z^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = x^6(-2x) + 2y^5 - z^2 = -2x^7+2y^5-z^2$$

$$\iint\limits_S = -\iint\limits_G [-2x^7+2y^5-(x^2+y^2)^2]\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi\ ;\ 0 \le r \le 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr\,[2r^5\sin^5\varphi - 2r^7\cos^7\varphi - r^4] = -\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\sin^5\varphi\cdot\frac{r^7}{6} - \cos^7\varphi\cdot\frac{r^9}{8} - \frac{r^6}{6}\right]\Big|_0^1 =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\cancel{\frac{\sin^5\varphi}{6}}^{\,0} - \cancel{\frac{\cos^7\varphi}{8}}^{\,0} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

IV Ф-лы Гаусса-Остроградского и Стокса

§11

№45 $\iint\limits_S z\,dx\,dy + (5x+y)\,dy\,dz$

$$\iint\limits_S = -\iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{a}\,dx\,dy\,dz\ ;\quad \bar{a} = (5x+y,\ 0,\ z)\ ;\quad \operatorname{div}\bar{a} = 5+0+1 = 6$$

2) S: внутр. сто. эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$

$x = 2r\cos\psi\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$
$y = 3r\cos\psi\sin\varphi \quad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2 \qquad I = 6r^2\cos\psi$
$z = r\sin\psi \quad 0 \le r \le 1$

$$\iint\limits_S = -36\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^1 r^2\cos\psi\,dr = -72\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = -24\pi\cdot\sin\psi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -48\pi$$

Ответ: -48π

3) S: внешн. сто. шар. обл. $1 < x^2+y^2+z^2 < 4$

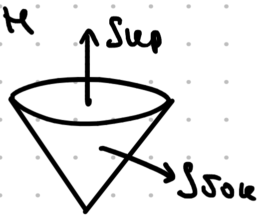
$x = r\cos\psi\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$
$y = r\cos\psi\sin\varphi \quad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2 \qquad I = r^2\cos\psi$
$z = r\sin\psi \quad 1 < r < 2$

$$\iint\limits_S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_1^2 6r^2\cos\psi\,dr = 12\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = 12\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot\sin\psi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 56\pi$$

Ответ: 56π

№52 3) $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, S: внешн. сн. кон. поверх. $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le H$

$\bar a=(x^2,y^2,z^2)$, $\operatorname{div}\bar a=2(x+y+z)$



$x=r\cos\varphi$ $\quad 0\le\varphi\le2\pi$

$y=r\sin\varphi$ $\quad 0\le h\le H$ $\quad \gamma=r$

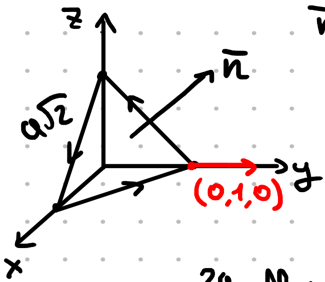
$z=h$ $\quad 0\le r\le h$

$$\iint\limits_{Sup}+\iint\limits_{S бок}=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H dh\int_0^h dr\left[r^2(\cancel{\cos\varphi+\sin\varphi})+rh\right]=4\pi\int_0^H dh\cdot\frac{r^2h}{2}\Big|_0^h=\int_0^H2\pi h^3dh=\frac{\pi H^4}{2}$$

Sup: $h=H$, $x^2+y^2\le z^2$; $\iint\limits_{Sup}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H H^2r\,dr=2\pi\cdot\frac{H^4}{2}=\pi H^4 \Rightarrow \iint\limits_{S бок}=-\frac{\pi H^4}{2}$

Ответ: $-\frac{\pi H^4}{2}$

№62 $\int\limits_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$ $\quad L$ − граница $\Delta\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}$, ориент. положит. отн. $(0,1,0)$



$\bar n=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad I=\iint\limits_\Delta(\operatorname{rot}\bar a,\bar n)dS$

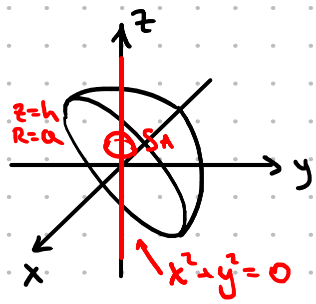
$\operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y^2&z^2&x^2\end{vmatrix}\Rightarrow \operatorname{rot}\bar a=(-2z,-2x,-2y)$

$(\operatorname{rot}\bar a,\bar n)=\frac{1}{\sqrt3}(-2x-2y-2z)=-\frac{2}{\sqrt3}(x+y+z)\overset{a}{=}-\frac{2a}{\sqrt3}$

$$I=-\frac{2a}{\sqrt3}\iint\limits_\Delta dS\overset{S_\Delta}{=}-\frac{2a}{\sqrt3}\cdot\frac{(a\sqrt2)^2\sqrt3}{4}=-a^3$$

Ответ: $-a^3$

№63 2) $\int\limits_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+z\,dz$ $\quad L$ − окр. $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориент. положит. отн. $(0,0,1)$



Нет поверх. односвязности ⇒ нельзя прим. ф-лу Стокса

Но! Вне S_A ф-лу Стокса применить можно.

$\iint\limits_{\partial S_A^-}+\iint\limits_{L^+}=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\bar a,d\bar S)$; $\bar a=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},z\right)\Rightarrow\operatorname{rot}\bar a=\bar 0$

$\Rightarrow\iint\limits_{L^+}=\iint\limits_{\partial S_A^+}$

$$\int\limits_{\partial S_A^+}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+h\,dz=\begin{bmatrix}x=R\cos\varphi\quad y=R\sin\varphi\\ z=-R(\cos\varphi+\sin\varphi)\end{bmatrix}=2\pi$$

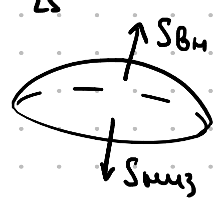
Ответ: 2π

№73 $\iint\limits_S(2x+3y)dydz+(x+y+z)dzdx+(x+2y+3z)dxdy$

S − часть вн. сн. эллипс. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+z^2=1$, $x\ge0$

$\iint\limits_{Sвн}+\iint\limits_{Sниз}=\iiint\limits_G\operatorname{div}\bar a\,dxdydz=I$ $\quad \bar a=(2x+3y,x+y+z,x+2y+3z)$

$\operatorname{div}\bar a=2+1+3=6$



$x=2\cos\psi\cos\varphi$ $\quad \varphi\in(-\pi/2,\pi/2)$

$y=5\cos\psi\sin\varphi$ $\quad \psi\in(-\pi/2,\pi/2)$ $\quad \gamma=abcr^2\cos\psi=10r^2\cos\psi$

$z=\sin\psi$

$$I=60\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi\int_0^1r^2dr=60\pi$$

Ответ: 60π

§12

№68 4) Найти поток $\bar{a}$ через S $(\bar{r}=(x,y,z),\ r=|\bar{r}|)$

S - внешн. ст. сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ $\quad |(x,y,z)|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$

$\bar{a}=\frac{\bar{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}(x,y,z) \quad \operatorname{div}\bar{a}=\frac{3}{r^3}$

$\iint\limits_S(\bar{a},\bar{n})ds=\frac{3}{r^3}\iint\limits_S ds=\frac{3}{r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi$

Ответ: 4π

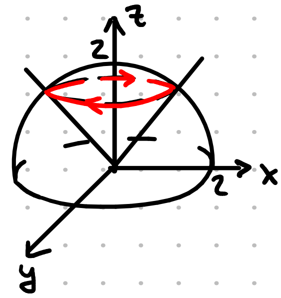
№94 4) Найти циркуляцию $\bar{a}$ вдоль Γ, ориент $\circlearrowright$ из $(0,0,0)$

$\bar{a}=(y,-x,z) \quad \Gamma=\{x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z\geq 0\}$

$\bar{n}=(0,0,1) \quad \operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & z \end{vmatrix}=(0,0,-2)$

$\Gamma:\ x^2+y^2=2$

$S_\Pi=2\pi$



$I=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\bar{a},\bar{n})ds=-2\iint\limits_S ds=-2\cdot 2\pi=-4\pi$

Ответ: -4π

№104 Потенц. ли поле $H=2I\frac{-yi+xj}{x^2+y^2}$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$

$\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{0}$

1) в полупр-ве $x>0$ - поверхн. односвязно $\Rightarrow$ да

2) в пр-ве без оси Oz - не поверхн. односвязно $\Rightarrow$ нет

Ответ: 1) да 2) нет

№112 1) Яв. ли $\bar{a}$ потенц., соленоид. (для $r>0$ и $z>0$)

$\bar{r}=(x,y,z) \quad r=|\bar{r}|$

$\bar{a}=\bar{r}/r^3=\frac{1}{r^3}(x,y,z) \qquad \operatorname{div}\bar{a}=0 \ ; \ \operatorname{rot}\bar{a}=\bar{0}$

$G=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ - поверхн. односвязн, не объемно односвязн.

G поверхн. одн.; $\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{0} \Rightarrow \bar{a}$ потенц.

для $r>0$: $G'=\mathbb{R}^3$ объемно односвязн; $\operatorname{div}\bar{a}=0 \Rightarrow \bar{a}$ соленоид.

для $z>0$: G не объемн. односвязн $\Rightarrow \bar{a}$ не соленоид.

Ответ: потенц., при $r>0$ соленоид., при $z>0$ не соленоид.

III Элементы теории поля.

§3

№44 1) Найти произв f в т. M по напр. $\bar{e}$

$f=3x^4+y^3+xy \quad M(1,2) \quad \widehat{\bar{e},Ox}=135^\circ \Rightarrow \operatorname{grad}f=(12x^3+y,\ 3y^2+x,\ 0)$

$\bar{e}=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$ $\qquad \operatorname{grad}f(M)=(14,13,0)$

$(\bar{e},\operatorname{grad}f(M))=-\frac{14}{\sqrt{2}}+\frac{13}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $-1/\sqrt{2}$

№48 1)

$f = xy^2 - 3x^4y^5 \quad M(1,1)$

$\operatorname{grad} f = (y^2 - 12x^3y^5, 2xy - 15x^4y^4)$; $\operatorname{grad} f(M) = (-11, -13)$

$e = (\cos\alpha, \sin\alpha) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial e} = (e, \operatorname{grad} f) \leq |\operatorname{grad} f|$

$|\operatorname{grad} f(M)| = \sqrt{121+169} = \sqrt{290}$ – искомое

Ответ: $\sqrt{290}$

§12

№13 Д-ть: $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

ч.т.д

№19 Д-ть: $\nabla f(r) = f'(r)\frac{\bar r}{r}$

$\operatorname{grad} \bar r = \left(\frac{\partial \bar r}{\partial x}, \frac{\partial \bar r}{\partial y}, \frac{\partial \bar r}{\partial z}\right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}\cdot\bar r$

из пред. задачи: $\nabla f(r) = \operatorname{grad} f(r) = f'(r) \operatorname{grad} r = f'(r)\cdot\frac{\bar r}{r}$ ч.т.д

№15 $\bar a, \bar b$ – пост. векторы Найти: $\operatorname{grad} u$?

3) $u = 1/r \quad \nabla(1/r) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\bar r}{r} = -\frac{\bar r}{r^3}$

5) $u = (\bar a, \bar r) \quad \nabla(\bar a, \bar r) = \nabla(x a_x + y a_y + z a_z) = (a_x, a_y, a_z) = \bar a$

6) $u = (\bar a, \bar b, \bar r) \quad \nabla(\bar a, \bar b, \bar r) = \nabla([\bar a, \bar b], \bar r) = [\bar a, \bar b]$

№37 2) проверить: $\operatorname{div}(u\bar a) = (\nabla u, \bar a) + u \operatorname{div} \bar a$

$\operatorname{div}(u\bar a) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u}\bar a) + (\nabla, u\overset{\downarrow}{\bar a}) = (\nabla u, \bar a) + u \operatorname{div} \bar a$

$\operatorname{div}(u\bar a) = \frac{\partial u\bar a}{\partial x} + \frac{\partial u\bar a}{\partial y} + \frac{\partial u\bar a}{\partial z} = a_x\frac{\partial u}{\partial x} + a_y\frac{\partial u}{\partial y} + a_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = (\nabla u, \bar a) + u \operatorname{div} \bar a$

№39 $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

№40 1) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = (\nabla, u\nabla u) = (\nabla u, u\nabla u) + (\nabla_{\nabla u}, u\nabla u) =$

$= (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) + u\cdot\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = (\nabla u)^2 + u\Delta u$

№41

3) $\operatorname{div} r\bar c = (\nabla, r\bar c) = (\nabla_r, r\bar c) + r\overset{0}{\cancel{(\nabla_c, \bar c)}} = (\nabla r, \bar c) = \frac{1}{r}(\bar r, \bar c)$

6) $\operatorname{div}(f(r)\bar c) = (\nabla_{f(r)}, f(r)\bar c) = (f'(r)\cdot\frac{\bar r}{r}, \bar c) = \frac{f'(r)}{r}(\bar r, \bar c)$

7) $\operatorname{div}[\bar c, \bar r] = (\nabla_{\bar c}, [\bar c, \bar r]) + (\nabla_{\bar r}, [\bar c, \bar r]) = (\bar r, \overset{0}{\cancel{\operatorname{rot} \bar c}}) - (\bar c, \overset{0}{\cancel{\operatorname{rot} \bar r}}) = 0$

№49

3) $\mathrm{rot}(u\bar{a}) = [\nabla, u\bar{a}] = [\nabla_u u, \bar{a}] + u[\nabla_a, \bar{a}] = \underline{u\,\mathrm{rot}\,\bar{a} + [\mathrm{grad}\,u, \bar{a}]}$

5) $\mathrm{rot}[\bar{a},\bar{b}] = [\nabla, [\bar{a},\bar{b}]] = [\nabla_a, [\bar{a},\bar{b}]] + [\nabla_b, [\bar{a},\bar{b}]]$

$= \bar{a}(\nabla_a, \bar{b}) - \bar{b}(\nabla_a, \bar{a}) + \bar{a}(\nabla_b, \bar{b}) - \bar{b}(\nabla_b, \bar{a}) = \underline{\bar{a}\,\mathrm{div}\,\bar{b} - \bar{b}\,\mathrm{div}\,\bar{a} + (\bar{b},\nabla)\bar{a} - (\bar{a},\nabla)\bar{b}}$

6) $\mathrm{div}[\bar{a},\bar{b}] = (\nabla_a, [\bar{a},\bar{b}]) + (\nabla_b, [\bar{a},\bar{b}]) = \underline{(\bar{b}, \mathrm{rot}\,\bar{a}) - (\bar{a}, \mathrm{rot}\,\bar{b})}$

№50 5) $\mathrm{rot}(u(r)\bar{r}) = [\nabla, u\bar{r}] = [\nabla_u u, \bar{r}] + u[\nabla_r, \bar{r}] = \frac{u'}{r}\cancel{[\bar{r},\bar{r}]}^{0} + u\,\cancel{\mathrm{rot}\,\bar{r}}^{0} = \underline{0}$

№54 2) $\mathrm{rot}[\bar{r}[\bar{c},\bar{r}]] = \mathrm{rot}(\bar{c}r^2 - \bar{r}(\bar{r},\bar{c})) = [\nabla_r r^2, \bar{c}] - [\nabla, \bar{r}(\bar{r},\bar{c})] =$

$= 2[\bar{r},\bar{c}] - \cancel{[\nabla_r, \bar{r}]}^{0}(\bar{r},\bar{c}) - [\nabla_{(r,c)}(\bar{r},\bar{c}), \bar{r}] = 2[\bar{r},\bar{c}] - [\bar{c},\bar{r}] = \underline{3[\bar{r},\bar{c}]}$