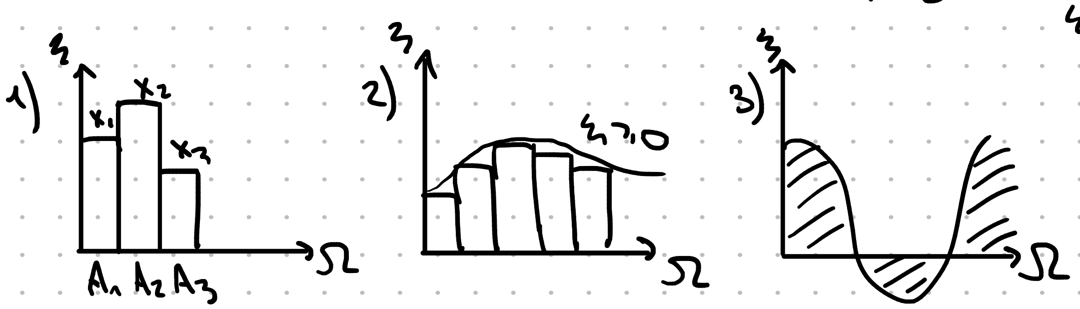
Мат. ожидание

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,dP(\omega)$$

1) Если ξ – пр. с.в., то $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\xi = x)$

2) Если $\xi \geq 0$ – с.в., то $\mathbb{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n$, где ξ_n – пр. с.в., $0 \le \xi_n < \xi$, $\xi_n \uparrow \xi$ $\forall \omega$

3) Если ξ – с.в., то $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$, где $\xi^+ = \max\{0, \xi\}$, $\xi^- = \min\{0, -\xi\}$



Свойства

1) $0 \le \xi \le \eta$ и $\mathbb{E}\eta < \infty \Rightarrow \mathbb{E}\xi < \infty$
2) $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}(c\xi) = c\,\mathbb{E}\xi$
3) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$
4) $\xi \le \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi \le \mathbb{E}\eta$
5) $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$
6) $\xi \overset{п.н.}{=} 0$ $\left(\Leftrightarrow P(\{\omega : \xi(\omega) = 0\}) = 1\right) \Rightarrow \mathbb{E}\xi = 0$
7) $\xi \overset{п.н.}{=} \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta$
8) $\xi \geq 0, \mathbb{E}\xi = 0 \Rightarrow \xi \overset{п.н.}{=} 0$
9) $\forall A \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{E}(\xi I_A) \le \mathbb{E}(\eta I_A) \Rightarrow \xi \overset{п.н.}{\le} \eta$
10) $a \le \xi \le b$, то $a \le \mathbb{E}\xi \le b$
11) $P(A) = \mathbb{E} I_A$
12) $\xi \overset{\text{независ.}}{\perp\!\!\!\perp} \eta \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$ Упр.: верно ли обратное?

Δ ξ и η – пр. с.в. $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{D_i}$; $\eta = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{H_j}$

$$\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j \underbrace{I_{D_i} I_{H_j}}_{I_{D_i \cap H_j}} \Rightarrow \mathbb{E}\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{E}(I_{D_i \cap H_j}) = \quad = P(\overset{\sigma_\xi}{D_i} \cap \overset{\sigma_\eta}{H_j})$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P(D_i) \cdot P(H_j) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

Пусть теперь ξ, η — произв. с.в. ≥ 0 ; по апп. Th $\exists\, \xi_n \uparrow \xi$,
$\eta_n \uparrow \eta$ $\forall \omega$, причем $\sigma_{\xi_n} \subset \sigma_\xi$; $\sigma_{\eta_n} \subset \sigma_\eta$

$\Rightarrow$ т.к. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то σ_{ξ_n} независ. с σ_{η_n}

$\Rightarrow \xi_n \perp\!\!\!\perp \eta_n$

Далее ξ_n, η_n — пр. с.в., по выше док-ву
тогда $\xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi_n\eta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n \cdot \mathbb{E}\eta_n$

$\Rightarrow \mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\, \mathbb{E}\eta$

Вспомним:

$(\Omega, F, \mathbb{P}) \xrightarrow{\xi(\omega)} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

С помощью отобр. ξ строим $\mathbb{P} \xrightarrow{\xi} P_\xi$ — распр. с.в.

$P_\xi \doteq P \circ \xi^{-1}$

Вспомним ξ^{-1}: $\sigma_\xi \xleftarrow{\xi^{-1}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$

После введем P_ξ получим вер. пр-во $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$

На новом пр-ве можно ст. $\mathbb{E}$ (инт. Лебега)

Вопрос: что явл. с.в. на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$ и
как связаны инт. по разным мерам?

Про с.в. g: это должно быть из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, т.к.
Ω' -//- это $\mathbb{R}$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и тогда можно записать

$\Rightarrow \exists \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP_\xi(x)$, g явл. борел. ф-ия

Вопрос №2: как связан этот инт. с инт. $\int_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega)$?

Th. [Теорема о замене переменных в $\mathbb{E}$]

Пусть ξ — с.в. на $(\Omega, F, \mathbb{P})$, $P_\xi = P \circ \xi^{-1}$ — расп. с.в. ξ

Тогда $\forall$ борел. функ. $g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mapsto \mathbb{E} g(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega))\, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP_\xi(x)$$