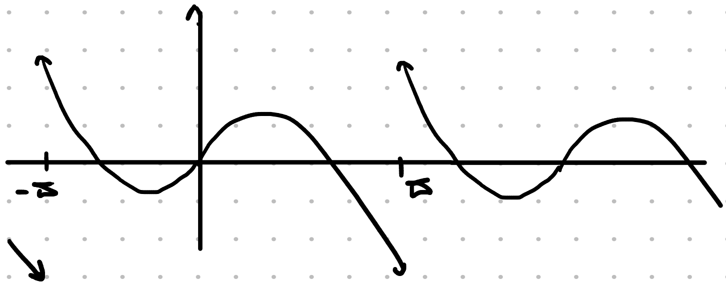
Пр. $f(x) = x\cos x$

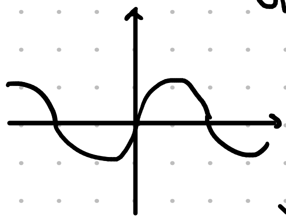


$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt = -1/2$$

если $l = \pi/2$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\cos t\sin 2nt\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\dots$$



Период другой
=> ф-ция другая
нечет. сх

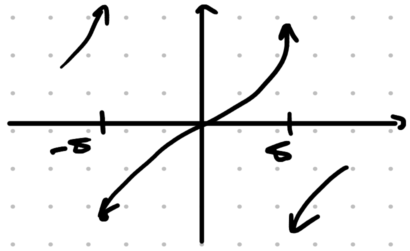
$f(x) \in L_2(0,l)$

Если ее продолжить по четности

$\to f(x) \in L_2(-l,l)$

ее ряд Фурье — ряд Фурье $f(x)$ на $(-l,l)$ по косинусам
по нечетн. ряд Фурье по синусам

Пр. Разложить по синусам $f(x)=x^2$; $0 < x < \pi$

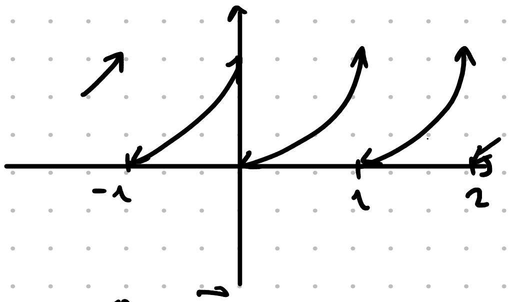


Ряд сх. неравн., т.к. функция разрывна

$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\sin nt\,dt$

$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $0 \le x \le \pi$

Пр. Разл. в ряд Ф. $f(x)=x^2$ $0 < x < 1$ с периодом 1



$2l = 1 \quad l = 1/2$

$a_n = 2\int_0^1 t^2\cos 2\pi nt\,dt \qquad n = 0,1,\dots$

$b_n = 2\int_0^1 t^2\sin 2\pi nt\,dt \qquad n = 1,2,\dots$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx) \qquad 0 < x < 1$$

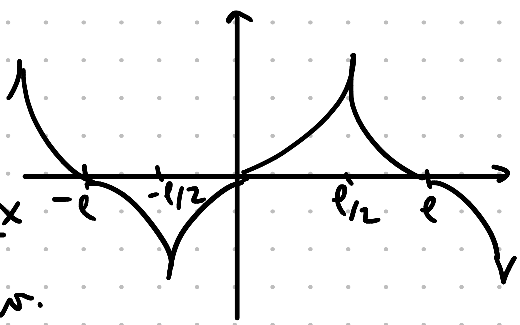
Ряд сх. неравн. на $(-\infty, +\infty)$ т.к. функция разрывна

Разложение по кос. или син. четных или нечет. кратн. дуг

$f(x) \in L_2(0, l/2)$ — симм. отн. пр. $x = l/2$

$f(x) = f(l-x)$ — далее по нечетн.

$0 < x < l/2$ — далее с периодом



$a_n = 0 \quad b_{2n} = 0$

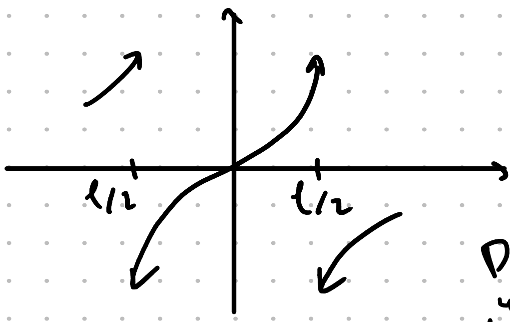
$$b_{2n+1} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{\pi(2n+1)t}{l}\,dt;\quad n=0,1,\dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

по син. нечетн. кратн. дуг

$f(x)\in L_2(0, l/2)$ $0<x<l/2$

далее по нечетн., с пер. $2l$ далее } симм. отн. точки $(l/2, 0)$



$a_n=0$ $b_{2n+1}=0$

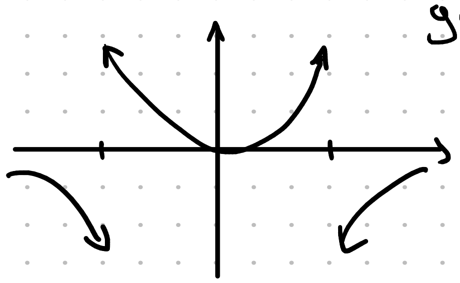
$$b_{2n}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{2\pi n t}{l}\,dt \; ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{2\pi n x}{l}$$

Разл. по синусам четн. кратн. дуг

(разл. по син. с периодом l)

$f(x)\in L_2(0, l/2)$ $f(x)=-f(l-x)$

далее по четн., далее с пер. $2l$



$b_n=0$ $a_{2n}=0$

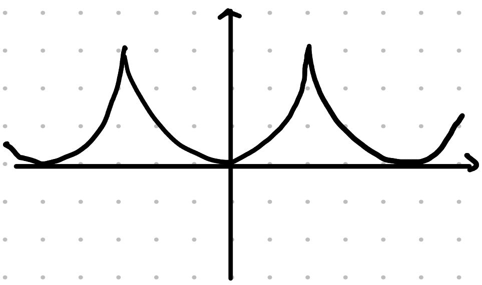
$$a_{2n+1}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\cos\frac{\pi(2n+1)t}{l}\,dt\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

Разл. по кос. нечетн. кр. дуг

$f(x)\in L_2(0, l/2)$ $f(x)=f(l-x)$ $0<x<l/2$

Далее по четн., далее с пер. $2l$



$b_n=0$ $a_{2n+1}=0$

$$a_{2n}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\cos\frac{\pi 2n t}{l}\,dt\,;$$

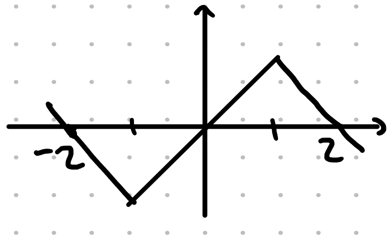
Разл. по кос. четн. кр. дуг

(разл. по кос. с пер. l)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos\frac{\pi 2n x}{l}$$

Пр. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$

Разл. в ряд Фурье по син. на $[0,2]$ $\Rightarrow$ $l=2$ $T=4$



Симм. отн. $x=1$

$f(x)=f(2-x)$ $0\le x\le 1$

Только синусы нечетн. кр. дуг

$$b_{2n+1}=\frac{4}{2}\int_0^1 t\sin\frac{\pi(2n+1)t}{2}\,dt = 2\int_0^1 t\sin\pi(n+1/2)t\,dt = -\frac{2}{\pi(n+1/2)}\int_0^1 t\,d(\cos\pi(n+\tfrac12)t) =$$

$$= \frac{-2}{\pi(n+1/2)}\left[t\cos\pi(n+1/2)t\Big|_0^1-\int_0^1\cos\pi(n+1/2)t\,dt\right] = \frac{2}{(\pi(n+1/2))^2}\sin\pi(n+1/2)t\Big|_0^1 =$$

$= \frac{2}{(\pi(n+1/2))^2}\cdot \sin(\pi n + \pi/2) = \frac{2(-1)^n}{(\pi(n+1/2))^2}$; $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin\pi(n+1/2)x$

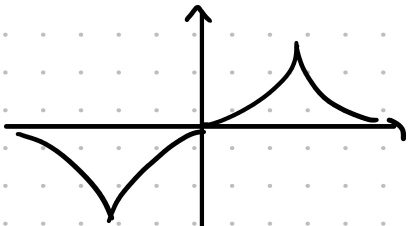
$0 \le x \le 2$

Ряд сх. равн. на $(-\infty, +\infty)$ т.к.
$f(x)$ непр. пер. 4 и кус.-гл. на $[-4, 4]$

Постр. графики р. Фурье по кос. и син. чет.

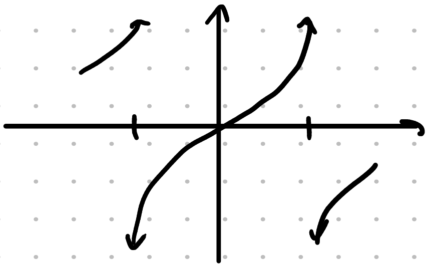
$f(x) = \operatorname{sh} x \quad 0 < x < \pi/2$

синусы неч. пр. ч/з



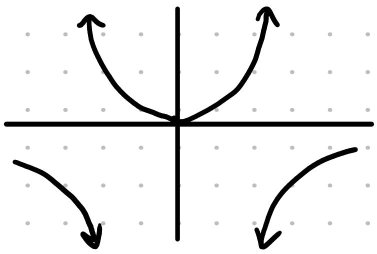
сх. равн. на
f имеет пер 2π
и кус-гл. на $[-\pi, \pi]$

синусы четн. пр. ч/з



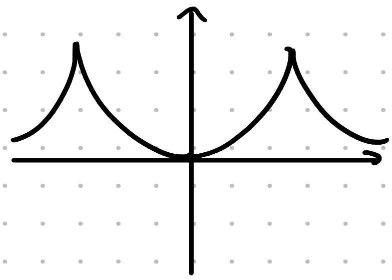
сх неравн. на $(-\infty, +\infty)$
т.к. имеет разр.

кос. неч. пр. ч/з



сх. неравн.

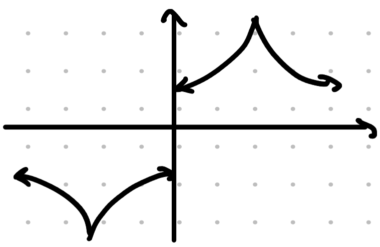
кос. четн. пр. ч/з



сх. равн.

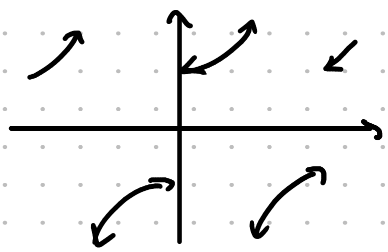
$f(x) = \operatorname{sh} x + 1$

син. неч. пр. ч/з



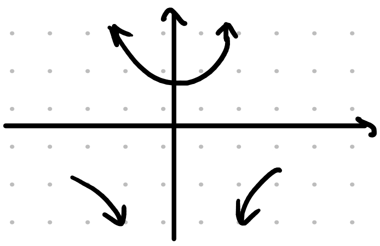
сх неравн.

син. четн. пр. ч/з



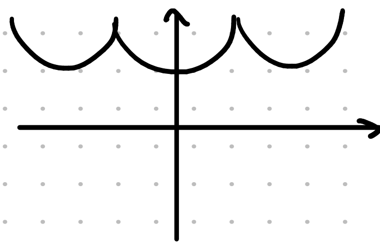
сх неравн.

кос неч. пр. ч/з



сх. неравн.

кос чет. пр. ч/з



сх. равн.

Почленное дифф-ие рядов Фурье

Пусть $f(x)$ имеет пер. $2l$ и кус-гл. на $[-l, l]$, тогда:

а) ее ряд Фурье сх. равн. на $(-\infty, +\infty)$

б) ряд Фурье можно почленно дифф.

если $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$

сх. равн.

и ряд Фурье $f'(x)$ (которая кус-непр на $[-l, l]$) получается почлен. дифф. ряда Фурье f:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n \frac{\pi n}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} + b_n \frac{\pi n}{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\right)$$

имеет ряд Ф.

не обязан сходиться

Пр $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad -\pi \le x \le \pi$

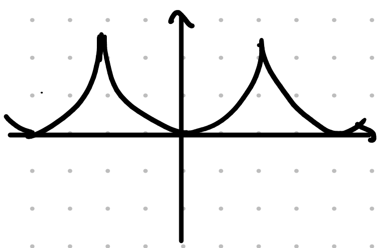
сх. равн.

Продифф.

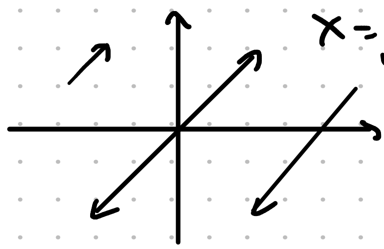
$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

имеет ряд Фурье

Сумма ряда равна $2x$ на интервале $(-\pi, \pi)$ по сл. из пр. Лейбница



$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$



$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L^2_R(I)$ - мн-во ф-й, абс. инт на $(-l, l)$ вместе с $(f(x))^2$ для неогр. промежутков:

$$L^2_R(I) \subset L_R(I)$$

Если $f(x) \in L^2_R(-l, l)$ и имеет пер. $2l$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} (f(x))^2 dx$$ — Равенство Парсеваля

сх.

$f(x)=x$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$a_0=0$

$a_n=0$

$f(x)=x^2$

$a_0=2/3\,\pi^2 \qquad \frac{2}{9}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx=\frac{2\pi^4}{5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{8}{45}\pi^4=\frac{1}{90}\pi^4$

Дзета-ф-ия $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \quad x>1$

$\zeta(2)=\pi^2/6\ ;\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$