Теория вероятностей

1) Базовые опр.
2) Случ. величины + св-ва
3) М.О., дисперсия и т.д.
4) Произв. и хар. ф-ии
5) Условное мат. ожидание ← КР1
6) Случ. процессы
7) Марковские цепи, процессы ← КР2

Классич. опр. вер.

Эксп ⟶ Исходы ⟶ События ⟶ Вер-ть

Хотим, чтобы вер-ть были примерн. рав. частота соб. (Закон больших чисел)

Р/м n возможных событий $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ $\quad n < \infty$

мн-во эл. событий $\quad$ элементарные события

Событие $A \subset \Omega$ (подмн-во Ω)

$\omega^* \in A$: „в рез. эксп. произ. A"

$\omega^* \in A \cup B$: „...произошло A или B"

$\omega^* \in A \cap B$: ...

Примеры: $\Omega = \{1, 2, \dots 6\}$; $\{\triangle, \square, \nabla, \circ\}$; $\{[a,b), [c,d], \dots\}$

^ может быть любым

$\varnothing$ — невозможное событие

Опр. $\mathcal{A}$ — класс подмн-в мн-ва Ω наз. алгеброй, если

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Пр. $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ — алгебра, порожд. соб. A

Для $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ — вер. вводится поточечно

$\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n \geq 0$, нормировка: $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$

2^{Ω} - мн-во всех подмножеств Ω

Вер. события A: $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i: \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$

Классическое опр. вер-ти: $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \overset{const}{c} \; \forall c$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} \omega_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\omega_i) = N \cdot c \Rightarrow c = 1/N$

Тогда $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Пр. n разл. людей входят в комнату с круглым столом.

$\mathbb{P}$({два заранее опр. чел. сели рядом})

Ω -? ω -?

I способ:

$\omega = i$, i - номер места второго чел. от первого ↻

$|\Omega| = n-1$
$|A| = 2$
$\Big\}\ \mathbb{P}(A) = \frac{2}{n-1}$

II способ:

$\omega = (i_1, i_2)$ - рассадка двух людей

$|\Omega| = A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!}$
$|A| = 2n$
$\Big\}\ \mathbb{P}(A) = \frac{2}{n-1}$

III способ:

$\omega = (i_1, \dots i_n)$ - рассадка всех людей

$|\Omega| = n!$
$|A| = 2n \cdot (n-2)!$
$\Big\}\ \mathbb{P}(A) = \frac{2}{n-1}$

Пр. В комнате n человек.

1) $\mathbb{P}$({найдется пара чел. с один. днем рожд.})?

2) $\mathbb{P}$({найдется чел. с тем же др, что и у вас})?

Что, если Ω бесн.?

Опр. Класс $\mathcal{F}$ подмнож. мн-ва Ω наз. **σ-алгеброй**, если

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

3) Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ $(\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F})$

Опр. $(\Omega, \mathcal{F})$ - **измеримое пр-во**

Опр. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – изм. пр-во. Тогда $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0\ 1]$ наз. **вероятностью**, если удовл. усл.:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ $i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Св-ва:

1) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$
3) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$, $A \subseteq B$
4) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Упр. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$

Теорема. Ф-ла вкл-выкл.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \ldots A_n)$$

5) Непрерывность вероятности

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – изм. пр-во, $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$; $\mathbb{P}$ – конечн. адд.
Тогда а) б) в) эквивалентны:

а) Непр. в 0. $\left(\bigcap_n A_n = \varnothing,\ A_n \supset A_{n+1}\right)$
$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}: A_n \downarrow \varnothing$ $\mathbb{P}(A_n) \to 0$

б) Непр. сверху:
$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}: A_n \supset A_{n+1}$; $\bigcap_n A_n = A$ $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$

т.е: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A)$

в) Непр. снизу: $\left(A_n \subset A_{n+1},\ \bigcup_n A_n = A\right)$
$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}: A_n \uparrow A$ $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$

г) $\mathbb{P}$ будет счет. аддитивно

Пр.1 Показать, что $\forall A,B \in \mathcal{F}$ $|\mathbb{P}(AB)-\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)| \le 1/4$

$$|\mathbb{P}(AB)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(AB)\cdot\mathbb{P}(\bar A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| =$$

$$= |\cancel{\mathbb{P}(AB)\mathbb{P}(A)}+\mathbb{P}(AB)\mathbb{P}(\bar A)-\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(AB)}-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar A B)| =$$

$$= |\underbrace{\mathbb{P}(AB)}_{\le x}\underbrace{\mathbb{P}(\bar A)}_{=1-x}-\underbrace{\mathbb{P}(\bar A B)}_{\le 1-x}\underbrace{\mathbb{P}(A)}_{=x}| \le x(1-x) = x-x^2 \le 1/4$$

р-во: $x=1/2$; $\mathbb{P}(A)=1/2$ когда $B=\bar A$

Воспоминания о комбинаторике...

объем k, кол. шаров n

Выборка	С возвр.	Без возвр.
Упоряд.	n^k	$A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots = \frac{n!}{(n-k)!}$
Неупоряд.	C_{n+k-1}^{n-1}	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$\underbrace{1\,1}_{\text{сколько раз взяли шар 1}}\overset{n_1\,n_2\,n_3\ldots}{0\,0\,1\,0\,0}$$

$\underbrace{n-1}_{\text{перегородк.}}+\underbrace{k}_{\text{шары}}$

Размещение частиц

	Без огр.	С огр.
Различим.	n^k	A_n^k
Неразличим.	C_{n+k-1}^{n-1}	C_n^k

Максвелла-Больцмана

Бозе-Эйнштейна. Ферми-Дирака

Пр. Из урны без возвр. достают 10 ш.: 4 черн., 6 бел.

$P(\{\text{не 2 черных подряд}\})$

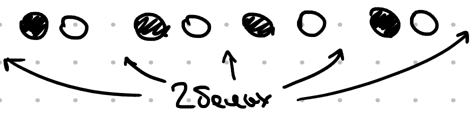
I: шары различимы

$\omega = \{i_1,\ldots i_{10}\}$; $|\Omega| = 10!$

$\underbrace{|\ \ |\ \ |\ \ |\ \ |\ \ |}_{4\ \text{шара}} \Rightarrow |A| = A_7^4\cdot 6!$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A_7^4\, 6!}{10!} = 1/6$$

II шары неразличимы



$|A| = C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$

или

$|\Omega| = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!}$ $\qquad \cdot|\ \ |\cdot|\cdot|\ \ |\cdot|$

$|A| = C_7^4 \qquad P(A) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{7!\,4!\,6!}{4!\,3!\,10!} = 1/6$

Пр. k частиц различимых, n ячеек без огр., найти $\mathbb{P}(A)$:

1) $A = \{$ни одна яч. не пуста, $n=k\}$
2) $A = \{$в опред. ячейке ровно m частиц, $m \le k\}$
3) $A = \{$ровно одна яч. ост. пустой, $n=k\}$

$|\Omega| = n^k$

1) $|A| = n!$; $\mathbb{P}(A) = \frac{n^k}{n^n} \longrightarrow 0$
2) $|A| = C_k^m \cdot (n-1)^{k-m}$
3) $|A| = n \cdot C_n^2 \cdot (n-1)$

Пр. Есть n конвертов и n писем, которые случ. распр. по конвертам. $\mathbb{P}(A)$?

$A = \{$хотя бы 1 письмо совп. со своим конвертом$\}$

$A_i = \{i$-ое письмо попало в свой конверт$\}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}_{n\cdot\frac{(n-1)!}{n!} = 1/1!} - \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_iA_j)}_{C_n^2\cdot\frac{(n-2)!}{n!} = 1/2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!} \to \underline{1 - 1/e}$$

$\sum \mathbb{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \underline{\frac{1}{k!}}$ – выраж. для каждого слагаемого

Упр. Пусть у билетной кассы $2n$ человек, n человек имеют 50р., n – 100р., $A = \{$очередь встанет$\}$

Билеты: 50, 100 руб. Касса исходно пуста