$\boxed{N7}$ [Выражение для $\mathbb{E}$ через ф.р. F]

Пусть X − с.в. с ф.р. $F(x)$, тогда: $\mathbb{E}X = \int\limits_0^{\infty}(1-F(x))\,dx - \int\limits_{-\infty}^{0} F(x)\,dx.$

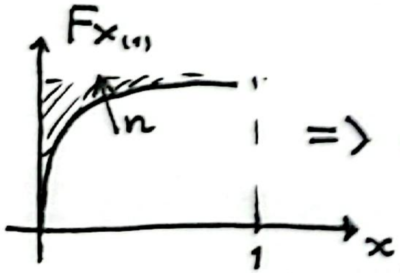
◁ Представим $X = X^+ + X^-$, $X^+ = \max\{X, 0\}$, $X^- = \max\{-X, 0\}$, запишем X^+ и X^- в виде интегралов:

$$X^+ = \int\limits_0^{+\infty} I\{X > t\}\,dt, \quad X^- = \int\limits_{-\infty}^{0} I\{t \geqslant X\}\,dt \Rightarrow$$

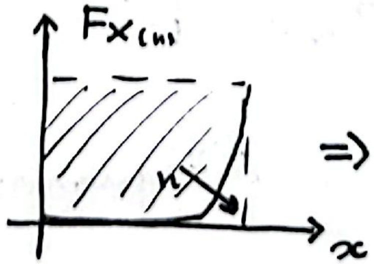
$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}[X^+ - X^-] = \mathbb{E}\Big[\int\limits_0^{+\infty} I\{X > t\}\,dt\Big] - \mathbb{E}\Big[\int\limits_{-\infty}^{0} I\{t \geqslant X\}\,dt\Big] = [\text{Th. Фубини}] =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}(I\{X > t\})}_{\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t)}\,dt - \int\limits_{-\infty}^{0} \underbrace{\mathbb{E}(I\{X \leqslant t\})}_{\mathbb{P}(X \leqslant t) = F(t)}\,dt \quad \triangleright$$

В задаче про 1-ую и n-ую выборочную статистики:



$\Rightarrow \mathbb{E}X_{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$\Rightarrow \mathbb{E}X_{(n)} \longrightarrow 1$

$\boxed{N8}$ [Тождество Вальда]

N3

Рассмотрим удобный инструмент для работы с с.в.:

<u>Производ. функ. с. в.</u>

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - вероят. пр-во с с.в. ξ: $\mathbb{P}(\xi=n)=p_n$.

def | Производ. функ. целочисл. дискр. неотр. с.в. ξ: $g_\xi(z) \doteq \mathbb{E}[z^\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot z^n,\ z\in\mathbb{C}$.

Т.к. $p_n \le 1$, то радиус сход. $R<1$, при $z=1$ тоже сход. т.к. $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow g_\xi(1)=1$

<u>Свойства</u> $g_\xi(z)$:

① $g_\xi(0)=p_0$, $g_\xi(1)=1$

② $g_\xi^{(k)}(0) = k!\cdot p_k$,

③ Производ. функ. однозначно опр. целочисл. с.в., т.е. $g_\xi(z)=g_\eta(z) \Leftrightarrow \xi$ и η имеют одинак. распр.

Действительно, если $g_\xi(z)$ и $g_\eta(z)$ совпад., то совпад. и их производные любого порядка $\Rightarrow$ в силу ②: $\mathbb{P}(\xi=n)=\mathbb{P}(\eta=n)\ \forall n\in\mathbb{N}$.

④ $\mathbb{E}\xi = g'_\xi(1)$, если $\mathbb{E}|\xi|<\infty$; $\mathbb{D}\xi = g''_\xi(1)+g'_\xi(1)-(g'_\xi(1))^2$, если $\mathbb{E}\xi^2<\infty$.

8

• $g'_\xi(1)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot 1^{n-1}\cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot p_n = \mathbb{E}\xi$

• $g''_\xi(1)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot 1^{n-2}\cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\cdot p_n - \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot p_n = \mathbb{E}\xi^2-\mathbb{E}\xi$.

$\Rightarrow \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = g''_\xi(1)+g'_\xi(1)-(g'_\xi(1))^2$.

⑤ Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независ. с.в., то для с.в. $\eta_n=\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ произв. функ. имеет вид: $g_{\eta_n}(z)=\prod_{k=1}^{n} g_{\xi_k}(z)$.

$z^{\xi_k}, k=\overline{1,n}$ - независ. т.к. ξ_k - независ.

◁ $g_{\eta_n}(z)=\mathbb{E}[z^{\eta_n}] = \mathbb{E}\left[z^{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} z^{\xi_k}\right] \overset{\downarrow}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[z^{\xi_k}] = \prod_{k=1}^{n} g_{\xi_k}(z)$. ▷

N1 Найти производ. функ. с.в. ξ:

а) $\xi\sim Be(p)$, б) $\xi\sim Binom(n,p)$, в) $\xi\sim Poiss(\lambda)$, г) $\xi\sim Geom(p)$, д) $\xi\sim NB(n,p)$.

◁ а) $g_\xi(z)=\mathbb{E}[z^\xi]=z^0\cdot(1-p)+z^1\cdot p = 1+p\cdot(z-1)$.

9

б) Пусть $\eta_1,\dots,\eta_n$ - независ., $\eta_i\sim Be(p) \Rightarrow \xi=\sum_{i=1}^{n} \eta_i \sim Binom(n,p)$.

№7

Тогда по св-ву 5: $g_\xi(z) = \prod_{k=1}^{n} g_{\eta_k}(z) = (1+p\cdot(z-1))^n$,

$E\xi = g'_\xi(1) = n\cdot(1+p\cdot(z-1))^{n-1}\cdot p\Big|_{z=1} = n\cdot p$ //

в) $g_\xi(z) = E[z^\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\left(\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\right) = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$.

г) $g_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot p(1-p)^n = \frac{p}{1-z(1-p)} = \frac{p}{1-zq}$

д) $\xi\sim NB(n,p)$ – число неудач в серии исп. Бернулли, проводимого до n-го успеха,

т.е. если $\eta_1,\dots,\eta_n$ – независ. с.в.: $\eta_i\sim Geom(p)$, то $\xi = \sum_{k=1}^{n}\eta_k \Rightarrow$

$\Rightarrow g_\xi(z) = (g_{\eta_1}(z))^n = \left(\frac{p}{1-z\cdot(1-p)}\right)^n$.

N5 Найти среднее число неудач до достижения N успехов в схеме Бернулли.

◁ Это отриц. биномиальное распр.: серия N геом. распр.: ξ_i

$$g_{\xi_i}(z)=\frac{p}{1-z(1-p)} \Rightarrow g'_{\xi_i}(z)=\left(\frac{1}{1-z(1-p)}\right)^2 p(1-p) \Rightarrow \mathbb{E}\xi_i = g'_{\xi_i}(1)=\frac{p(1-p)}{p^2}=\frac{1-p}{p}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\xi = N\cdot\frac{1-p}{p}.$$

$$\mathbb{D}\xi_i = g''_{\xi_i}(1)+g'_{\xi_i}(1)-\left(g'_{\xi_i}(1)\right)^2 = \frac{+2}{(1-z(1-p))^3}\cdot p\cdot(1-p)^2\Big|_{z=1}+\frac{1-p}{p}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2=$$

$$\frac{2\cancel{p}\cdot(1-p)^2}{p^{\cancel{3}2}}$$

$$=\frac{(1-p)^2}{p^2}+\frac{1-p}{p}=\frac{(1-p)^2+p\cdot(1-p)}{p^2}=\frac{(1-p)\cdot[1-p+p]}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$ ▷

5

$$\Rightarrow \mathbb{D}\xi = N\cdot\frac{1-p}{p^2}.$$

Упр Честно посчитать $\mathbb{E}\xi$: $\xi\sim NB(n,p)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot C_{N+k-1}^{N-1}\cdot p^N\cdot(1-p)^k$$

N6

$\xi\sim$ Cauchy$(0,1)$, т.е. $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+1}$ $\Rightarrow$ т.к. $\int_{\mathbb{R}} x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx=\infty$, то м.о. $\nexists$.

Условное мат. ожидание

Л.5

Вспомним что такое условная вероятность: $C \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(C) > 0$, тогда $\mathbb{P}(A|C) \doteq \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$.

При этом появилась новая вероят. мера на $\mathcal{F}$: $A \longrightarrow \mathbb{P}(A|C)$.

Пусть ξ – с.в., $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Как изменится значение м.о., если знаем, что произошло C? Надо сконструировать $\mathbb{E}[\xi|C]$.

Введём $d\mathbb{P}(\omega|C) = \frac{1}{\mathbb{P}(C)} \cdot I_C(\omega) \cdot d\mathbb{P}(\omega)$, тогда

если $\xi = \sum_j c_j I_{A_j}$, то $\mathbb{E}(\xi|C) = \sum_j c_j \cdot \mathbb{P}(A_j|C) = \int_\Omega \xi d\mathbb{P}(\omega|C) = \int_\Omega \frac{\xi(\omega) \cdot I_C(\omega)}{\mathbb{P}(C)} d\mathbb{P}(\omega) =$

$= \frac{1}{\mathbb{P}(C)} \cdot \mathbb{E}\left(\xi(\omega) \cdot I_C(\omega)\right)$

def I | Если ξ – с.в., $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, $\mathbb{P}(C) > 0$, то у.м.о. с.в. ξ относ. события C назовём

$$\mathbb{E}(\xi|C) \doteq \frac{1}{\mathbb{P}(C)} \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot I_C)$$

. Уже из этого опр. можем много получить!

Пусть $\Omega = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_N$. Тогда $\mathbb{E}(\xi \cdot I_{C_1}) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{E}(\xi|C_1), \ldots,$
$\mathbb{E}(\xi \cdot I_{C_N}) = \mathbb{P}(C_N) \cdot \mathbb{E}(\xi|C_N)$ – сложим:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\xi I_{C_i})}_{\mathbb{E}\xi \text{ в силу адд. инт. по мн-ву}} = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(C_i) \cdot \mathbb{E}(\xi|C_i) \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}\xi = \sum_i \mathbb{P}(C_i) \cdot \mathbb{E}(\xi|C_i)}$$

– Формула полного матожидания.

1

Вернёмся к тождеству Вальда:

Рассмотрим $B_n = \{\nu = n\} \Rightarrow \mathbb{E}S_\nu = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\nu = n) \cdot \mathbb{E}(S_\nu | B_n) =$

$\int_\Omega S_\nu \cdot I_{B_n} \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[S_\nu \cdot I_{B_n}] = \mathbb{E}[S_n \cdot I_{B_n}] = \mathbb{E}S_n \cdot \mathbb{E}I_{B_n}$

$$= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\nu = n) \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\nu = n) \cdot n \cdot \mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\nu.$$

2 Пусть $\xi_1, \ldots \xi_n$ – i.i.d и независ вместе с ν, $S_\nu = \sum_{k=1}^\nu \xi_i$. Найти производ. функ. с.в. S_ν. Рассмотреть случай $\nu \sim Poiss(\lambda)$, $\xi_i \sim Be(p)$.

$$g_{S_\nu}(z) = \mathbb{E}[z^{S_\nu}] = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}(z^{S_\nu} | \nu = n) \cdot \mathbb{P}(\nu = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}(z^{\xi_1 + \ldots + \xi_n}) \cdot \mathbb{P}(\nu = n) = \sum_{n=0}^\infty \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(z^{\xi_i}) \cdot \mathbb{P}(\nu = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\nu = n)\cdot \left(g_{\xi_1}(z)\right)^n = \mathbb{E}\left(\left(g_{\xi_1}(z)\right)^{\nu}\right) = g_\nu\left(g_{\xi_1}(z)\right).$$

Если $\nu \sim Poiss(\lambda)$, $\xi_i \sim Be(p)$, то $g_{S_\nu}(z) = e^{\lambda(g_\xi(z)-1)} = e^{\lambda(1-p+pz-1)} =$

$= e^{\lambda p(z-1)}$, т.е. S_ν имеет производ. функ. пуасс. с.в. с инт. λp, а т.к. дискр. распр. полностью опр. производ. функ., то $S_\nu \sim Poiss(\lambda p)$.

// Почему работает интуитивное правило?

Из опр.: $\mathbb{P}(C)\cdot \mathbb{E}(\xi | C) = \int\limits_{\Omega} \xi \cdot I_C \cdot d\mathbb{P}(\omega)$, т.е. действительно считается м.о. только по исходам из B. //

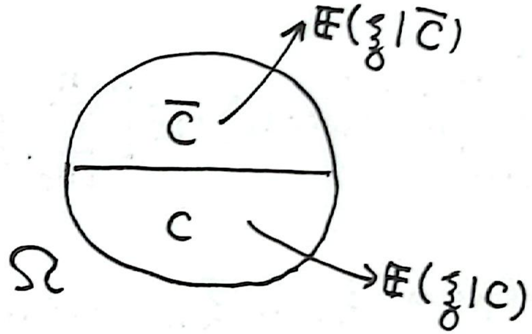
$\boxed{N1}$ [Тождество Вальда через g] $\boxed{\text{Упр}}$

$\xi_1, \dots, \xi_n$ — i.i.d. и независ. с с.в. ν, $\mathbb{E}\xi = m_\xi$, $\mathbb{E}\nu = m_\nu$, $\mathbb{D}\xi = \sigma_\xi^2$, $\mathbb{D}\nu = \sigma_\nu^2$.

$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i$, $\mathbb{E} S_\nu = ?$, $\mathbb{D} S_\nu = ?$

$=1$ $\qquad g_{S_\nu}(z) = g_\nu(g_\xi(z))$

$\Rightarrow \mathbb{D} S_\nu = \mathbb{D}\nu (\mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}\nu \cdot \mathbb{D}\xi$. ▷



Продолжим обобщать понятие условного математического ожидания.

Имеем: $\mathbb{E}[\xi|C] = \frac{1}{\mathbb{P}(C)} \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot I_C)$. Но работаем не только с C, но и со всем, что порождает C, в т.ч. с $\overline{C}$, тогда имеем и $\mathbb{E}(\xi|\overline{C})$.

Числа $\mathbb{E}(\xi|C)$ и $\mathbb{E}(\xi|\overline{C})$ дают ожидаемое значение ξ при попадании ω в C или в $\overline{C}$ $\Rightarrow$ У.М.О. это функция от события.

Рассмотрим $\sigma(C) \equiv \sigma(I_C) = \{\varnothing, \Omega, C, \overline{C}\}$ и ответим на вопрос:

Как устроена любая $\sigma(C)$ – измеримая с.в., т.е. такая с.в. η, что $\sigma(\eta) \subset \sigma(C)$?

• η – явл. изм. относ. $\sigma(C) \iff \eta = const$ на C и $\eta = const$ на $\overline{C}$. Это так, т.к. иначе если бы в C были разные значения η, то могли бы взять его прообраз и он лежал бы в C и не совпадал с ним, но это невозможно т.к. такого мн-ва нет в $\sigma(C)$. Аналогично и для $\overline{C}$.

$\Rightarrow$ получим, что У.М.О. это $\sigma(C)$-изм. с.в. со знач. $\mathbb{E}(\xi|C)$ и $\mathbb{E}(\xi|\overline{C})$ на C и $\overline{C}$.

Пусть $\Omega = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_N$, $\mathbb{P}(C_i) > 0$. Обозначим $\mathcal{C} = \sigma(\{C_1, \ldots, C_N\})$

Как устроена $\mathcal{C}$? – строка из 0 и 1 длины N. Как устроены $\mathcal{C}$ – изм с.в. η?

Аналогичными рассужд, но для C_i в отдельности: $\eta = \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot I_{C_j}$.

<u>def II</u> Пусть $\Omega = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_N$, $\mathcal{C} = \sigma(C_1, \ldots, C_N)$. Тогда УМО ξ относ. $\mathcal{C}$ опр. как $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})(\omega) \doteq \frac{1}{\mathbb{P}(C_i)} \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot I_{C_i})$, при $\omega \in C_i$, $i = \overline{1, N}$.

До этого доказывали, что $\mathbb{E}\xi$ явл. лучшим с.к. – приближ. ξ в пр-ве констант.
А что получится, если попытаться приблизить с.в. ξ $\mathcal{C}$ – изм. с.в. η?

<u>Утв</u> $\forall \mathcal{C}$-изм. с.в. $\eta \mapsto \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) \cdot \eta)$;

$\triangleleft$ $\eta = \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot I_{C_j}$, $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot I_{C_j})}{\mathbb{P}(C_j)} \cdot I_{C_j} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta \cdot \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot I_{C_j})}{\mathbb{P}(C_j)} \cdot I_{C_j} \Rightarrow \mathbb{E}(\eta \cdot \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})) = \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot I_{C_j}) = \mathbb{E}\xi\eta$. $\triangleright$

<u>Th</u> $\forall \mathcal{C}$-изм. с.в. $\eta \mapsto \mathbb{E}|\xi - \eta|^2 \geqslant \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})|^2$, а р-во $\iff \eta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$.

(не $\overset{п.н.}{=}$, а $=$ т.к. $\mathbb{P}(C_j) > 0$)

$\triangleleft$ $\mathbb{E}|\xi - \eta|^2 = \mathbb{E}|(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})) + \underbrace{\varsigma}_{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) - \eta \text{ – явл. } \eta\text{-изм. с.в.}}|^2 =$

$= \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})|^2 + 2 \cdot \underbrace{(\mathbb{E}\xi\varsigma - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) \cdot \varsigma))}_{= 0 \text{ по Утв}} + \underbrace{\mathbb{E}|\varsigma|^2}_{\geqslant 0} \Rightarrow \mathbb{E}|\xi - \eta|^2 \geqslant \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})|^2$

$=$, если $\varsigma = 0$, т.е. если $\eta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C})$. $\triangleright$

Итак, У.М.О. $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ явл. наилучшим С.К.-прибл. с.в. ξ среди всех $\mathcal{G}$-изм. с. в, причем верно $\mathbb{E}\,\xi\eta = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\cdot\eta)$ $\forall\eta$-изм. с.в.

На что это похоже? — проекции на подпр-ва из пр-ва $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

<u>def</u> $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - пр-во всех с.в., опр. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$.

Под элем. L^2 понимаем класс. с.в., отличающихся п.н., т.е. такие с. в. не различаем.

Скал. произведение: $\xi, \eta \in L^2 \Rightarrow \langle\xi, \eta\rangle \doteq \mathbb{E}\,\xi\eta$, норма: $\|\xi\| = \sqrt{\langle\xi, \xi\rangle}$.

$\boxed{\text{Th}^*1}$ Пусть $\mathcal{M}$ — замк. лин. подпр-во L^2, $\xi \in L^2$. Тогда $\exists!\ \hat{\xi} \in \mathcal{M}$ т.ч.

$$\|\xi - \hat{\xi}\| = \inf_{\eta\in\mathcal{M}} \|\xi - \eta\|,$$ причем $(\xi - \hat{\xi}) \perp \mathcal{M}$, т.е. $\mathbb{E}((\xi - \hat{\xi})\cdot\eta) = 0$ $\forall\eta\in\mathcal{M}$.

<u>Задача</u>: приблизить с.в. ξ другими с. в. из некоторого подпр-ва $\mathcal{M}$. Какое брать $\mathcal{M}$?

Пусть имеем некоторые наблюдаемые с. в. $\xi_1, \dots, \xi_n$, возьмём $\mathcal{M} = \mathcal{L}(1, \xi_1, \dots, \xi_n)$

Для $\mathcal{L}(1)$: $(\xi - \hat{\xi}) \perp \mathcal{M}$, $\eta = m = const \in \mathcal{L}(1) \Rightarrow \langle \xi - m, \alpha\rangle = 0$, т.е. $\mathbb{E}\alpha(\xi - m) = 0 \Rightarrow m = \mathbb{E}\xi$.

Для $\mathcal{L}(1, \xi_1, \dots, \xi_n) \to$ линейная регрессия.

Пусть хотим приблизить с. в. ξ некоторой $\hat{\xi}$

Какие требования наложить на $\hat{\xi}$? $\hat{\xi}$ должна нести ту же или меньшую инфо., чем ξ, т.е. $\sigma(\hat{\xi}) \subseteq \sigma(\xi)$, т.е. $\hat{\xi}$ должна быть $\sigma(\xi)$-измеримой.

$\boxed{\text{Th}2}$ [Теорема Дуба] Л.7

Пусть с.в. η изм. относ. $\sigma(\xi)$, т.е. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \eta^{-1}(B) \in \sigma(\xi)$. Тогда:

$\exists$ бор. функц. φ : $\eta \overset{\text{п.н.}}{=} \varphi(\xi)$.