Ориентация ППП

S: $\bar r = \bar r(u,v)$, $(u,v)\in \bar D$

$\bar\nu = \pm \dfrac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}$ – пара векторов ед. нормали

Сферы: $x = a\cos\psi\cos\varphi$
$y = a\cos\psi\sin\varphi$
$z = a\sin\psi$

$\oplus$ – внешняя
$\ominus$ – внутр.

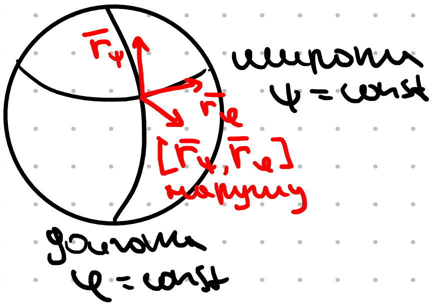


График функции $z = z(x,y)$; $x = x$; $y = y$;

$$[\bar r_x, \bar r_y] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z_x\bar e_1 - z_y\bar e_2 + \bar e_3 = (-z_x, -z_y, 1)$$

наверх (образует острый угол с полож. осью z)

+) $\nu = \dfrac{[\bar r_x, \bar r_y]}{|[\bar r_x, \bar r_y]|}$ – соотв. верхней стороне графика

$\ominus$ – нижней

Пов. интеграл 2-го рода

$\bar a(x,y,z) = (P, Q, R)$

непр. на ориентированной ППП S

Символ $\iint\limits_S (\bar a, d\bar S) = \iint\limits_S (P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy)$

Опр.

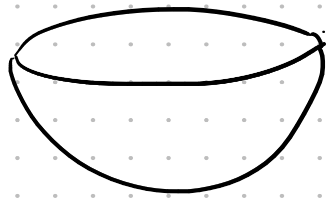
$$\iint\limits_S (\bar a, d\bar S) = \underbrace{\iint\limits_S (\bar a, \bar\nu)\, dS}_{\text{интеграл 1-го рода}} = \iint\limits_S \left(\bar a, \pm\frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}\right) dS = \pm \underbrace{\iint\limits_D \left(\bar a \cdot \frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}\right) |[\bar r_u, \bar r_v]|\, dudv}_{\text{двойной}} =$$

$\bar\nu$ – ед. нормаль

$$= \pm \iint\limits_D (\bar a, \bar r_u, \bar r_v)\, dudv = \pm \iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \pm \iint\limits_D \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) dudv$$

Пр. $\iint\limits_S z^2 dx\,dy$ S - внутр. ст. полусферы
$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, $z\le 0$



1-й способ.

$x = r\cos\psi\cos\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$
$y = r\cos\psi\sin\varphi \qquad -\frac{\pi}{2}\le\psi\le 0$
$z = r\sin\psi$

Знак ⊖

$$\iint\limits_S = -\int_{-\pi/2}^{0} d\psi\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{vmatrix} 0 & 0 & c^2\sin^2\psi \\ -c\cos\psi\sin\varphi & c\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -c\sin\psi\cos\varphi & -c\sin\psi\sin\varphi & c\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= -c^4\int_{-\pi/2}^{0} d\psi\int_0^{2\pi} d\varphi(\cos\psi\sin\psi\sin^2\psi) = -2\pi c^4\int_{-\pi/2}^{0}\cos\psi\sin^3\psi\, d\psi = -2\pi c^4\cdot\frac{\sin^4\psi}{4}\Big|_{-\pi/2}^{0} = \underline{=\frac{\pi c^4}{2}}$$

2-й способ.

$z=-\sqrt{c^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$

Инт. спец. вида $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & R(x,y,z(x,y)) \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dx\,dy =$

S - график $z=z(x,y)$ $=\pm\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$

⊕ - верхн. сторона
⊖ - нижняя

D: $(x-a)^2+(y-b)^2\le c^2$
=> полярные коорд

$$\iint\limits_S z^2 dx\,dy = +\iint\limits_D (c^2-(x-a)^2-(y-b)^2)\,dx\,dy = \int_0^c dr\int_0^{2\pi}(c^2-r^2)\,r\,d\varphi = \ldots = \underline{\frac{\pi c^4}{2}}$$

3-й способ.

Ф-ла Остроградского - Гаусса

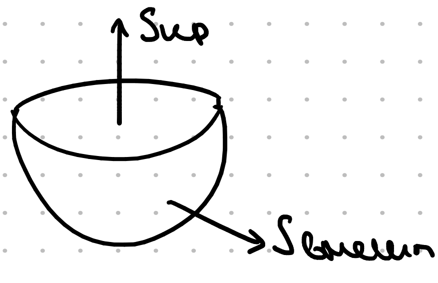
$G\subset\mathbb{R}^3_{xyz}$
$P,Q,R\in C^1(\overline{G})$ $\oiint\limits_{\partial G}(P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy)=\iiint\limits_G \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\bar a} dx\,dy\,dz$

∂G - внешн. граница

$\bar a=(0,0,z^2)$
$\operatorname{div}\bar a = 2z$

$\iint\limits_{S_{вн}}+\iint\limits_{S_{up}}=\iiint\limits_G 2z\,dx\,dy\,dz =$

Сфер. коорд.
$x=a+r\cos\psi\cos\varphi$
$y=b+r\cos\psi\sin\varphi$
$z=r\sin\psi$
$0\le\varphi\le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\psi\le 0$
$0\le r\le c$



$\circledequal \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{0} d\psi \int_0^c 2r\sin\psi\, r^2\cos\psi\, dr = 2\pi\int_{-\pi/2}^{0} \sin 2\psi\, d\psi \int_0^c r^3 dr = \pi\int_{-\pi/2}^{0} \sin 2\psi\, d2\psi \frac{c^2}{4} =$

$= -\frac{\pi c^4}{4}\cos 2\psi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi c^4}{2} \Rightarrow \iint\limits_{S_{\text{бокур.}}} = \frac{\pi c^4}{2}$

$S_{\text{кр}}: z=0$

$\Rightarrow \iint\limits_{S_{\text{кр}}} z^2\,dx\,dy = 0$

Пр. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy + zx\,dy\,dz + xy\,dz\,dx$

S – внешн. стор. части цилиндр. поверх.

$x^2+y^2=a^2 \quad x\le 0 \quad y\ge 0$

$0\le z\le H$

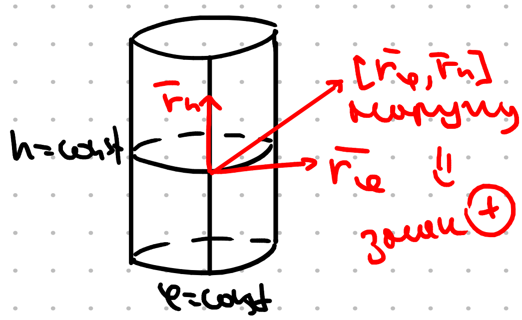
1-й

$x = a\cos\varphi \qquad \pi/2 \le \varphi \le \pi$

$y = a\sin\varphi \qquad 0\le h\le H$

$z = h$

$\bar a = (zx, xy, yz)$

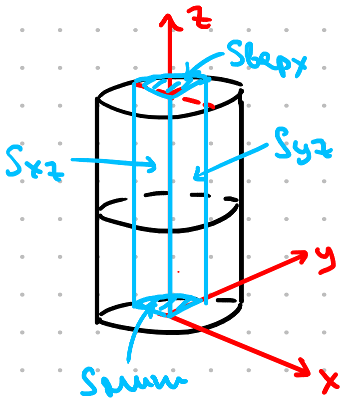


$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H \begin{vmatrix} ah\cos\varphi & a^2\cos\varphi\sin\varphi & ah\sin\varphi \\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dh =$

$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H (a^2h\cos^2\varphi + a^3\cos\varphi\sin^2\varphi)\,dh =$

$= a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^H h\,dh + a^3\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\, H = a^2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{H^2}{2} - \frac{1}{3}a^3H = \underline{\frac{\pi}{8}a^2H^2 - \frac{a^3H}{3}}$

2-й По ф-ле Гаусса-Остроградского



Нужно посчитать

$\iint\limits_{S_{\text{бок}}} + \iint\limits_{S_{\text{верх}}} + \iint\limits_{S_{\text{ниж}}} + \iint\limits_{S_{xz}} + \iint\limits_{S_{yz}} = \iiint\limits_G (x+y+z)\,dx\,dy\,dz \;\circledequal$

$G:\ x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = h$

$\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi = 0$

$\circledequal \int_0^H dh \int_0^c dr \int_{\pi/2}^{\pi} (r(\cos\varphi+\sin\varphi)+h)\,r\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^H h\,dh \int_0^a r\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{H^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{H^2a^2\pi}{8}$

$S_{xz}:\ y=0 \quad \bar a = (zx, 0, 0)$

$\bar\nu = (0,-1,0) \Rightarrow (\bar a,\bar\nu) = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{xz}} (a,\bar\nu)\,dS = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{xz}} = 0$

$S_{yz}:\ x=0 \quad \bar a = (0,0,yz);\ \bar\nu = (1,0,0)$

$(\bar a,\bar\nu) = 0 \quad \Rightarrow \iint\limits_{S_{yz}} = 0$

· $S_{нижн}$: $z=0$ $\bar{a}=(0, xy, 0)$; $\bar{\nu}=(0,0,1)$

$(\bar{a},\bar{\nu})=0$ $\Rightarrow$ $\iint\limits_{S_{нижн}} = 0$

$S_{верхн}$: $z=h$ $\bar{a}=(Hx, xy, Hy)$

↳ график ф-ции $z(x,y)=H$, верхн. сторона $\oplus$

D: $x \le 0$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \le a^2$

$x = r\cos\varphi$ $\quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$; $0 \le r \le a$

$y = r\sin\varphi$

$$\iint\limits_{S_{верхн}} = +\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^a \begin{vmatrix} Hr\cos\varphi & r^2\cos\varphi\sin\varphi & Hr\sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^a Hr\sin\varphi\, r\, dr =$$

$$= H\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr = \frac{Ha^3}{3}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_{бок}} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\bar{a}\, dx\,dy\,dz - \iint\limits_{S_{верхн}} = \frac{5a^2H^2}{8} - \frac{a^3H}{3} = \underline{\frac{5}{8}a^2H^2 - \frac{a^3H}{3}}$$