Сл. вел.

$\xi(\omega) = \frac{i_1 + \dots + i_{10}}{10}$, $i_j \in \{0, \dots, 10\}$, $\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \geq 3{,}(1)\})$ — ?

$A = \{\omega : \xi(\omega) \geq 3{,}(1)\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ модиф. понятие с.в.

Df Пусть K — класс подмн. в Ω. Через $\sigma(K)$ будем обозн. σ-алг. подмн. в K, т.ч.:

1) $K \subset \sigma(K)$
2) Если $\mathcal{A}$ — люб. σ-алг. подмн-в K, то $\sigma(K) \subseteq \mathcal{A}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(K)$ — мн-во σ-алг., порожд. K

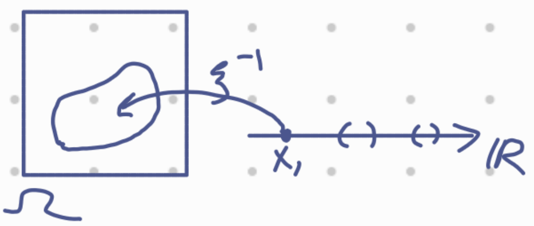
Можно пок., что $\forall K \, \exists! \, \sigma(K)$, т.е. опр. $\sigma(K)$ корректно

Ex $\Omega = \mathbb{R}$, K — все откр. мн-ва
$\sigma(K) := \mathcal{B}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{B}$ — борелевская σ-алг.

Можно пок., что $\mathcal{B}$ порожд. в т.ч. $\{(-\infty, x]\}_{x \in \mathbb{R}}$,
$\{(-\infty, x)\}_{x \in \mathbb{R}}$,
$\{[a, b]\}_{a, b \in \mathbb{R}}$
...

T - совок-ть полуинтерв. вида $(-\infty, x]_{x \in \mathbb{R}} \Rightarrow \sigma(T) = \mathcal{B}$

Df v2 С.в. ξ наз. изм. ф-цию $\Omega \to \mathbb{R}$, т.ч.:
$\forall B \in \mathcal{B} \longrightarrow \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \equiv \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$
(прообр. обяз. леж. в $\mathcal{F}$)



М/б, что $\{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ мож. не давать все $\mathcal{F}$.
Напр., если ξ-дискр., то принимает конеч. набор зн. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ вводим $\sigma_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ — все ξ-прообр. борел. мн-в
σ-алг., порожд. с.в. ξ. Можно пок., что это σ-алг.

$\Pi(\xi) = \{\xi^{-1}((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}\}$

$\sigma(\Pi(\xi)) = \sigma_\xi$

Df Классы подмн-в $K_i \subset \mathcal{F}, i=\overline{1,n}$ наз. незав., если $\forall A_1 \in K_1 \dots A_n \in K_n \to A_1 \dots A_n$ — незав. в совокупн.

Df Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ не опр. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, тогда $\xi_1, \dots, \xi_n$ - незав., если $\sigma_{\xi_1}, \dots, \sigma_{\xi_n}$ — незав.

Распр. с.в.

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

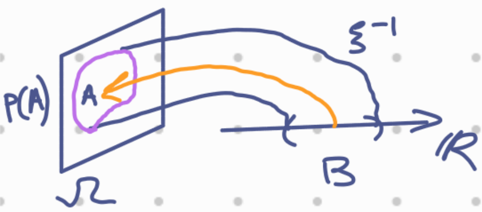
$\xi: \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathbb{P} \circ \xi^{-1}$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ и тогда опр. $\mathbb{P}(\xi^{-1}(B))$

При этом $\mathbb{P} \circ \xi^{-1}(B)$ — вер. мера, т.к. прообр. сохр. теор.-множ. опер.

$P_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B\})$ — распр. с.в.



Весь эффект в переносе меры (push forward) с $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_\xi)$

$\mathbb{P}_\xi$ полностью опр. действием с.в. на $(-\infty, x]$ и ф-цией распр.: $F_\xi(x) = \mathbb{P}_\xi((-\infty, x]) \equiv \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \le x\})$

Св-ва $F_\xi(x)$:

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$
2) $F_\xi(x)$ не убыв
3) $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(+\infty) = 1$
4) F_ξ непр. справа $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\exists$ лев. стор. пред. $F_\xi(x-0)$

Упр

$P(a < \xi < b) = F_\xi(b-0) - F_\xi(a)$

$P(a < \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

$P(\xi > a) = 1 - F_\xi(a)$