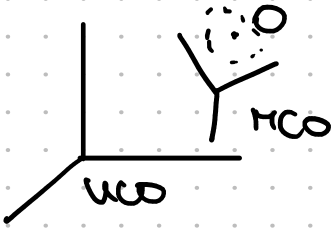
Полож. равновесия в неинерц. СО

Усл-ие равновесия: НСО

$\bar Q^{обс} + \bar Q^{инер} = 0$

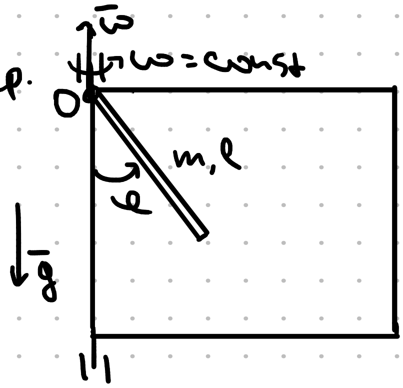


$\bar J_j^{кор} = -m_j 2\bar\omega \times \bar V_j^{отн}$

Если НСО вращ. отн. ИСО с пост. угл. ск. $\bar\omega$, то

$$\bar Q^{инер} = -\frac{\partial П^{инер}}{\partial \bar q}, \quad П^{инер} = -T^{пер}$$

Пр.



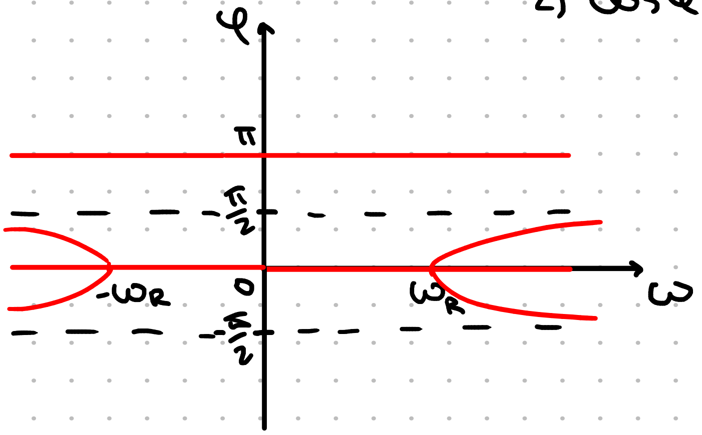
$П^g = -\frac{mgl}{2}\cos\varphi$, $П^{пер} = -T^{пер} = -\frac{1}{2} I_{O\omega}\omega^2 = -\frac{ml^2}{6}\omega^2\sin^2\varphi$

$П = -\frac{mgl}{2}\cos\varphi - \frac{ml^2}{6}\omega^2\sin^2\varphi$

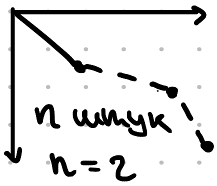
$\frac{\partial П}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow -\frac{mgl}{2}\sin\varphi - \frac{ml^2}{3}\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$

Кривые равновесия

1) $\sin\varphi = 0$
2) $\cos\varphi = \frac{3g}{2l}\omega^2$



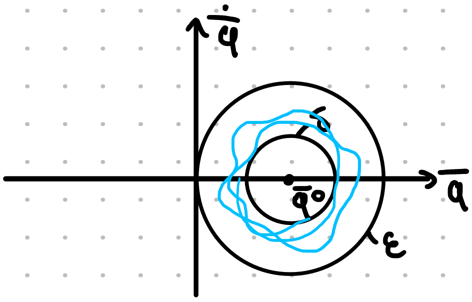
В заданиях:



Устойчивость положения равновесия

Фазовые переменные $\bar x = \begin{pmatrix} \bar q \\ \dot{\bar q} \end{pmatrix}$

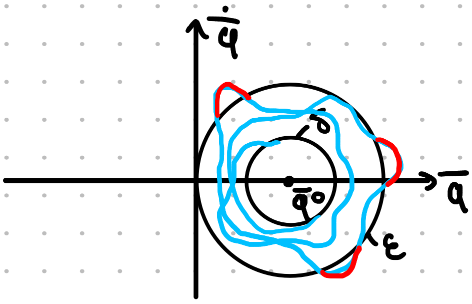
Пол. равновесия $\bar x^0 = \begin{pmatrix} \bar q^0 \\ 0 \end{pmatrix}$



<u>Опр</u> Полож. равновесия $\bar q^0$ наз. устойчивым (по Ляпунову), если:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \bar x(0) \in U_\delta$
решение $\bar x(\bar x(0), t) \in U_\varepsilon \ \forall t > 0$

То есть, образ изображ. точки остается в пределах U_ε.
Очевидно, $\varepsilon > \delta$

Опр Пол. равн. $\bar{x}^0=(\bar{q}^0,0)$ наз. притягивающим, если $\exists\, \Delta>0 : \forall\, \bar{x}(0)\in\Delta\ \exists \lim\limits_{t\to+\infty}\bar{x}(\bar{x}(0),t)=\bar{x}^0$



Опр Пол. равн. $\bar{x}^0=(\bar{q}^0,0)$ наз. асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее

Прямой (второй) метод Ляпунова исследования уст-ти.

$\dot{\bar{x}}=\bar{f}(\bar{x})$ (1) — 2n уравнений первого порядка
используются непр. дифф. ф-ции $V(\bar{x})$

1.1. Теорема Ляпунова об уст-ти
Если $\exists\, V(\bar{x})$, кот. имеет строгий мин. в пол. равн. $\bar{x}^0=(0,0)$, и ее произв. $\dot{V}_{(1)}\le 0$, то $\bar{x}^0=(0,0)$ – устойчиво

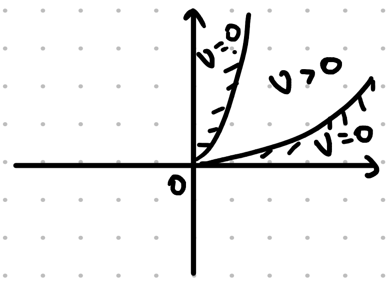
1.2. Если $\dot{V}_{(1)}<0$, то $\bar{x}^0$ - ас. устойчиво

$$\dot{V}_{(1)}=\frac{\partial V}{\partial \bar{x}^T}\dot{\bar{x}}=\frac{\partial V}{\partial \bar{x}^T}\bar{f}(x)$$

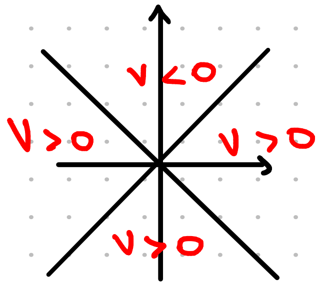
T1 $\begin{cases}\dot{x}=-x^3-y^3+xy^3\\ \dot{y}=x^3-y^3-x^4\end{cases}$ | Пол. равновесия: $(x,y)=(0,0)$

$V=\frac{x^4+y^4}{4}$; $\dot{V}_{(1)}=x^3(-x^3-y^3+xy^3)+y^3(x^3-y^3-x^4)=-x^6-y^6=-(x^6+y^6)$
$\Rightarrow (0,0)$ – ас. устойчиво

Теорема Четаева о неустойчивости
Если $\exists\, V(\bar{x})$: в обл. $V>0$ и произв. $\dot{V}_{(1)}>0$, то $\bar{x}=0$ – неустойчиво



T2 $\begin{cases}\dot{x}=x+y+x^3\\ \dot{y}=x-y-y^3\end{cases}$ (1)



$V=\frac{x^2-y^2}{2}$

$\dot{V}_{(1)}=x(x+y+x^3)-y(x-y-y^3)=$
$=x^2+y^2+x^4+y^4>0$ в любой т. $\Rightarrow$ по т. Четаева $(0,0)$ – неустойчивое пол. равн.