Дз по теорверу Хамам Виктории.
Весна 2025.

I Вероятн-ое пр-во. Свойства вероятности.

T1. Пусть A, B, C — три события. Найти выражения для событий:
а) произошло только A;
б) произошли A и B, а C не произошло;
в) все три события произошли;
г) произошло хотя бы одно из них;
д) произошло только одно из них;
е) ни одно из них не произошло;
ж) произошло не более двух из них.

а) $A\bar B\bar C$
б) $AB\bar C$
в) ABC
г) $A\cup B\cup C$
д) $A\bar B\bar C\cup\bar A B\bar C\cup\bar A\bar B C$
е) $\overline{A\cup B\cup C}$
ж) $\overline{ABC}$

T2. A, B – события. Найти все соб. X такие, что:

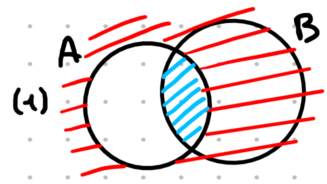
$$(\overline{X\cup A})\cup(\overline{X\cup\bar A}) = B = (\overline{X\cup A})\cup(\bar X\cap A) = (\bar X\cap\bar A)\cup(\bar X\cap A) = ((\bar X\cap\bar A)\cup\bar X)\cap((\bar X\cap\bar A)\cup A) =$$

$$= ((\bar X\cup\bar X)\cap(\bar A\cup\bar X))\cap((\bar X\cup A)\cap(\bar A\cup A)) = (\bar A\cup\bar X)\cap(A\cup\bar X) = \bar X\cup(A\cap\bar A) = \bar X = B$$

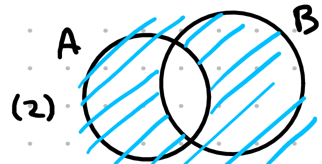
$\Rightarrow X=\bar B$ **Ответ:** $X=\bar B$

T3. A, B – события. Найти все соб. X такие, что $AX = AB$

Д-сть: $\begin{cases} AX \Rightarrow AB \\ AB \Rightarrow AX\end{cases}$ $\begin{cases}\overline{AX}\cup AB = 1 \\ \overline{AB}\cup AX = 1\end{cases}$ $\begin{cases}\bar A\cup AB\cup\bar X = 1 & (1) \\ \overline{AB}\cup AX = 1 & (2)\end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} A\setminus B\subseteq\bar X \\ AB\subseteq AX\end{cases}$ $\begin{cases} X\cap(A\setminus B)=\varnothing \\ AB\subseteq X\end{cases}$



Ответ: $\forall X: \begin{cases} X\cap(A\setminus B)=\varnothing \\ AB\subseteq X\end{cases}$

T4. а) $(A\cup B)\cap(A\cup\bar B) = A\cup(\overset{\varnothing}{\cancel{B\cap\bar B}}) = A$

б) $(A\cup B)\cap(\bar A\cup\bar B)\cap(A\cup\bar B) = (A\cup B)\cap(\bar B\cup A\bar A) = \bar B(A\cup B) = \bar BA\cup\bar BB = A\bar B$

в) $(A\cup B)\cap(B\cup C) = B\cup AC$

T5. $\Omega=\{1,2,3,4\}$ $\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\Omega,\{1\},\{2,3,4\}\}$ $\mathcal{A}_2=\{\varnothing,\Omega,\{2\},\{1,3,4\}\}$

Являются ли $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ алгебрами?

$\mathcal{A}_1$: Введем $D_1=\{\{1\},\{2,3,4\}\}$ – явл. разбиением, т.к. элементы попарно не пересекаются и их сумма равна Ω

Тогда $\mathcal{A}_1$ – алгебра, порожд. разбиением D_1

$\mathcal{A}_2$: $D_2=\{\{2\},\{1,3,4\}\}$ – далее аналогично

$\Rightarrow$ **Ответ:** да

Является ли $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ алгеброй?

$\mathcal{A}=\{\varnothing,\Omega,\{1\},\{2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$

Пусть $A=\{1\}$, $B=\{2\}$

$A\cup B=\{1,2\}\notin\mathcal{A}$ – противоречит опр. алгебры $\Rightarrow$ **Ответ:** нет

$N(\Omega)$ в задаче размещения n дробинок по M ячейкам			
Тип дробинки / Размещение	Различимые дробинки	Неразличимые дробинки	
Без запрета	M^n (статистика Максвелла—Больцмана)	C^n_{M+n-1} (статистика Бозе—Эйнштейна)	С возвращением
С запретом	$(M)_n$ $m(m-1)\ldots(m-n+1)$	C^n_M (статистика Ферми—Дирака)	Без возвращения
	Упорядоченные выборки	Неупорядоченные выборки	Выбор / Набор
	$N(\Omega)$ в задаче выбора n шаров из урны с M шарами		

Ф-ла Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} \cdot n^n$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right), \quad 0 < \theta_n < 1,$$

$$C^n_k = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$ – из k по n

II Опр. Вероятности. Комбинаторика. Геом. Вероятности.

ДТ8 $1 \le m \le n$ Д-ть: $C_n^m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1} = C_{m-1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m+1}^{m-1} + \ldots + C_{n-1}^{m-1}$

Пусть $k \le m$

При $n=1$: $C_1^1 = 1$ — верно

Предположим $C_n^m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1}$ — верно для n; докажем для $n+1$

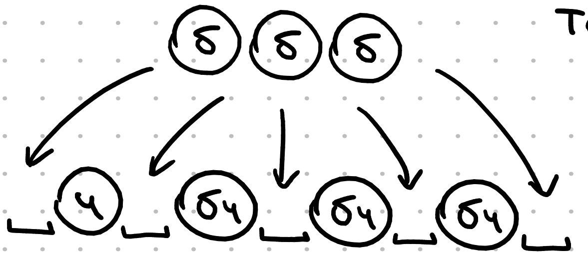
$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m = C_n^{m-1} + \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1} = \sum_{k=m}^{n+1} C_{k-1}^{m-1}$$ — ч.т.д

Т.9. Из урны по очереди без возвращения извлекают 10 шаров, среди которых 6 белых и 4 чёрных. Какова вероятность, что не будет извлечено подряд два чёрных шара?

ДТ9 10 шаров — 6 б. и 4 ч.

P? — вер-ть того, что не будет извлечено 2 ч. шара подряд без возвр.

Приведем задачу к задаче размещения 3 шаров по 5 ячейкам



Тогда: $P_1 = C^n_{m+n-1} = C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{6} = 35$

$P_2 = \frac{10!}{6!\cdot4!} = \frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4} = 210$

$\Rightarrow P = \frac{35}{210} = 1/6$

Ответ: 1/6

ДТ10 Почему при подбр. 3 игр. костей 11 выпадает чаще 12?

12 очков: 6 5 1, 6 4 2, 6 3 3, 5 4 3

11 очков: 6 4 1, 6 3 2, 5 4 2, 5 3 3, 4 4 3

11 очков можно получить большим кол-вом комбинаций

$\Rightarrow$ вероятность выпадения 11 выше

ч.т.д

ДТ11

Монета подбрасывается, пока не выпадет 2 раза одной ст.

Найти: а) распределение вер-тей

б) вер-ть, что эксп. закончится до 6 бросания

в) вер-ть, что потребуется четн. кол-во бросания

$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots a_k),\ a_i = 1 \text{ или } 0;\ a_{i-1} \ne a_i,\ 1 < i \le n-1;\ a_{k-1} = a_k\}$

Вер-ть, что потребуется ровно n бросаний

а) $P_n = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{1-n}$

б) $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16$

в) $P = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = 2\cdot\frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3$

ДТ12 Из 52 карт берут наугад 6. Какова вер-ть наличия 4 мастей?
(13 карт 1 масти)

$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots a_n),\ a_i = \{1,2,3,4\}\}$

4 масти, 6 карт: $2+2+1+1 \Rightarrow C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot C_4^2$
$3+1+1+1 \Rightarrow C_{13}^3 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 4$

Всего вариантов: C_{52}^6

$$P_{\text{искомое}} = \frac{\overset{12\cdot12\cdot13\cdot13}{\cancel{13!}}}{2!\,\cancel{11!}} \cdot \frac{\cancel{13!}}{2!\,\cancel{11!}} \cdot \frac{4!^{=2\cdot3}}{\underset{=1\cdot2}{2!\,2!}} \cdot \frac{6!\,46!}{52!} \cdot 169 + \frac{13!}{3!\,10!} \cdot \frac{6!\cdot46!}{52!} \cdot 13^3 \cdot 4 = \frac{12\cdot12\cdot13\cdot13\cdot3}{2} \cdot \frac{6!\cdot13\cdot13}{47\cdot48\cdot49\cdot50\cdot51\cdot52} +$$

$$+ \frac{11\cdot12\cdot13}{6} \cdot \frac{6!\cdot13^3\cdot4}{47\cdot48\cdot49\cdot50\cdot51\cdot52} = \frac{6!\cdot169}{47\cdot48\cdot49\cdot50\cdot51\cdot52}(12\cdot13\cdot13\cdot18 + 2\cdot11\cdot13\cdot13\cdot4) = \frac{6!\cdot13^4}{47\cdot\ldots\cdot52} \cdot 304 =$$

$$= 0{,}43$$

T.13. $2n$ команд разбиваются на 2 равные подгруппы. Какова вероятность того, что 2 сильнейшие команды окажутся в разных подгруппах?

ДТ13 $P = 1 \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$

в-ть что группа А в одной подгруппе

вер-ть, что группа В – одна из n групп из второй подгруппы

T.14. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

ДТ14 Это все равно, что упоряд. выбор шаров из урны с возвр.
12 чел, 12 месяцев.
$\Rightarrow$ Всего 12^{12} случаев.

P – искомая вер-ть; $P = 1 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{11!}{12^{11}}$ – если в каждом месяце рождение равновероятно

T.15. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

ДТ15 A – искомое событие
A_i – i-й адресат получит свое письмо

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$; $N(A_i) = (n-1)!$; $N(\Omega) = n!$

По т. сложения:

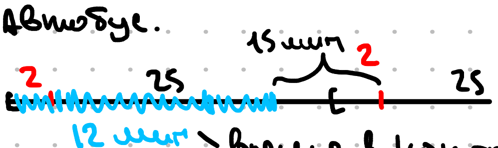
$$P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i \cdot A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \frac{(n-1)!}{n!}\, n - \frac{(n-2)!}{n!} \cdot C_n^2 + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \longrightarrow 1 - 1/e \Rightarrow \text{Ответ: } 1 - 1/e$$

T.16. Расстояние от пункта A до пункта B автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту A и отправляется в B пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

ДТ16 Найдем P – вер-ти того, что не догонит.

автобус.



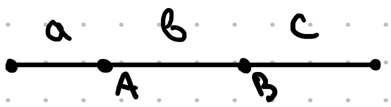
время, в которое пешеход может выйти и не пересечься с автобусом

$\Rightarrow P = 12/25 \Rightarrow P_{\text{искомое}} = 13/25$

Ответ: 13/25

T.17. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

DT17



Какова вер-ть, что $a+b \geq c$, $a+c \geq b$, $b+c \geq a$?

Найдем P - вер-ть того, что $c > a+b$ или $b > a+c$ или $a > b+c$

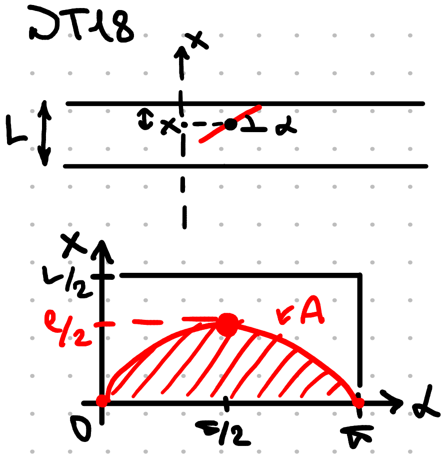
A и B здесь с вер-ю $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1/4$

вер-ть того, что $c > a+b$ равна 1/4, с ост. усл. аналогично

$\Rightarrow P = 3/4 \Rightarrow P_{\text{искомое}} = 1/4$ Ответ: 1/4

T.18. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

DT18



$0 \leq \alpha \leq \pi$

$0 \leq x \leq L/2$; x - рассм. до середины иглы до ближ. лин.

Игла пересечет линию, если $x \leq l/2 \sin\alpha$

Этому соотв. площадь под гр. $x = l/2 \sin\alpha$

$$P(A) = \frac{\text{mes}A}{\text{mes}\,\square} = \frac{1}{L/2\cdot\pi}\cdot\int_0^\pi l/2 \sin\alpha\, d\alpha = \frac{l}{L\pi}\cdot\int_0^\pi \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2l}{L\pi}$$

$$-\cos\alpha\Big|_0^\pi = 1+1 = 2$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{2l}{L\pi}$

T.19. У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в очереди имеет 100–рублевые купюры, а вторая половина — 50–рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета — 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

DT19 Если приходит чел. с 50-руб., то в нашей кассе +1 такая купюра

Если приходит чел. с 100-ой, то в кассе −1 50-руб. купюра (т.к. ее нужно будет отдать)

$\Rightarrow$ Нужно, чтобы сумма последов. из +1 и −1 была неотр. в каждый момент

$\Rightarrow$ Задача сводится к задаче о прав. скобочных последов.

Число Каталана при $n=50$: $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{100!}{50!51!}$

Всего вар. последов.: $C_{100}^{50} = \frac{100!}{50!50!}$ $\Rightarrow P = \frac{\cancel{100!}}{\cancel{50!}51!}\cdot\frac{\cancel{50!}50!}{\cancel{100!}} = 1/51$

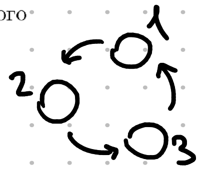
Ответ: 1/51

III Условные вероятности. Формула полной вер-ти. Независимость.

Т.21. Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$
$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

ДТ21 A_1 – выигр. 1-го $\quad P(A_1)=P_1$
A_2 – 2-го $\quad P(A_2)=P_2$
A_3 – 3-го $\quad P(A_3)=P_3$



H_1 – выпал герб (на 1 ходу)
H_2 – выпала решка (на 1 ходу)

если выпала решка, то 1-й становится 3-им.

$P_1 = P(A_1|H_1)\cdot P(H_1) + P(A_1|H_2)\cdot P(H_2) = 1\cdot 1/2 + P_3\cdot 1/2$

$P_2 = P(A_2|H_1)\cdot P(H_1) + P(A_2|H_2)\cdot P(H_2) = 0\cdot 1/2 + P_1\cdot 1/2$ 2-й становится 1-ым

$P_3 = P(A_3|H_1)\cdot P(H_1) + P(A_3|H_2)\cdot P(H_2) = 0\cdot 1/2 + P_2\cdot 1/2$

Итого: $\begin{cases} P_1 = 1/2 + 1/2 P_3 \\ P_2 = 1/2 P_1 \\ P_3 = 1/2 P_2 \end{cases} \Rightarrow P_1 = 1/2 + 1/2\cdot 1/4 P_1 \Rightarrow P_1 = 4/7$, $P_2 = 2/7$, $P_3 = 1/7$

Ответ: $P_1 = 4/7$, $P_2 = 2/7$, $P_3 = 1/7$

Т.22. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий и $C \subset B$. Покажите, что A и $B \setminus C$ также независимы.

ДТ22 A, B, C – попарно независ.; $C \subset B$; Д-ать: A и $B\setminus C$ нез.
т.е. $P(A(B\setminus C)) = P(A)P(B\setminus C)$

$P(AB\setminus C) = P(AB\setminus AC) = P(AB) - P(AC)$
т.к. $AC \subset AB$

Тогда $P(AB\setminus C) = P(A)P(B) - P(A)P(C) = P(A)P(B\setminus C)$ ч.т.д.

Т.23. В семье двое детей. Найти вероятность того, что оба ребёнка — мальчики, если

а) старший ребёнок — мальчик;

б) известно, что хотя бы один ребёнок — мальчик.

ДТ23 $\{ММ, МД, ДМ, ДД\}$

Пусть A – старш. реб. М, B – младший реб. М

Найти: а) $P(AB|A)$ б) $P(AB|A\cup B)$

$$P(AB|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 \quad ; \quad P(AB|A\cup B) = \frac{P(AB)}{P(A\cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

$\Rightarrow$ Ответ: а) $1/2$ б) $1/3$

Т.24. В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Пусть A – искомое событие

ДТ24 Случаи:

6н, 4ст $\xrightarrow{\text{I игра}}$

H_1: 6н, 4ст $\quad P(H_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{15} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2}$

H_2: 5н, 5ст $\quad P(H_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot 2 = \frac{8}{15} = \frac{C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^2}$

H_3: 4н, 6ст $\quad P(H_3) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \frac{C_6^2}{C_{10}^2}$

Искомая вер-ть:
$P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + P(A|H_3)\cdot P(H_3)$

$$P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{2}{15} + \frac{C_5^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{8}{15} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{45} + \frac{5!\cdot 2}{2!3!\cdot 10\cdot 9}\cdot\frac{8}{15} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{45} + \frac{16}{135} + \frac{2}{45} = \frac{28}{135}$$

Ответ: $\frac{28}{135}$

T.25. Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

$P(X)$ – искомая вер-ть

$P(A)$ – вер-ть того, что при первом броске выпало 5 очков

$P(B)$ – –//– 7 очков

$P(C)$ – –//– ни 5, ни 7 очков

Сумма в 5 очков: $4+1$, $3+2$ $\quad P(A) = \frac{2\cdot 2}{36} = \frac{1}{9}$ за 1 ход

в 7 очков: $6+1$, $5+2$, $4+3$ $\quad P(B) = \frac{3\cdot 2}{36} = \frac{1}{6}$ за 1 ход $\quad \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{4+6}{36} = \frac{13}{18}$

По ф-ле полной вер-ти

$$P(x) = P(X|A)\cdot P(A) + P(X|B)\cdot P(B) + P(X|C)\cdot P(C) = 1\cdot 1/9 + 0\cdot 1/6 + P(x)\cdot 13/18$$

$$\Rightarrow \frac{5}{18}P(x) = 1/9 \ ; \quad P(x) = 1/9 \cdot 18/5 = 2/5$$

Ответ: 2/5

T.28. Из урны, содержащей M белых и N черных шаров, утеряно r шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

ЭТ.28

$P(A)$ – искомое

H_i – среди утерянных i белых и $r-i$ черных шаров

$$P(A) = \sum_{i=0}^{r} P(A|H_i)\cdot P(H_i) = \sum_{i=0}^{r} \frac{M-i}{M+N-r}\cdot\frac{C_M^i\cdot C_N^{r-i}}{C_{M+N}^r} \Rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^{r}\frac{C_M^i\cdot C_N^{r-i}}{C_{M+N}^r}\cdot\frac{M-i}{M+N-r}$$

T.29. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой?

ЭТ.29 соб. A – на первой кости ровно 3 очка $\qquad P(A)$ – искомое

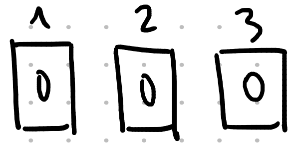
Два броска игр. кости – нез. события. Р/м бросок второй кости.

H_i – выпало число i. i должно быть $\geq$ чем то, что выпало на первой кости $\Rightarrow$ при H_i есть i вариантов того, что могло выпасть в первый раз

H_1	$P(A\mid H_1)=0$
H_2	0
H_3	$1/3$
H_4	$1/4$
H_5	$1/5$
H_6	$1/6$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A|H_i)\cdot P(H_i) = 1/6(1/3+1/4+1/5+1/6) = \frac{19}{120}$$

Т.27. Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью 1/2. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?



$P_1=0 \quad P_1=1/2 \quad P_2=1$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

1 попытка — неудача
2,3 попытки — удача

A - результат эксп.

Там, где 2 поп. подряд удачи:
H_1 – автомат неисправен
H_2 – .. полуисправен
H_3 – ... исправен

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$

Искомая вер-ть:

$$P=P(H_3|A)=\frac{P(AH_3)}{P(A)}=\frac{\cancel{P(H_3)}\cdot P(A|H_3)}{\sum_{i=1}^{3}\cancel{P(H_i)}\cdot P(A|H_i)}$$

Там, где 1 поп. неудачная:
D_1 – автомат неисправен
D_2 – автомат полуисправ.
D_3 – автомат исправен

$P(A|H_1)=0$

$P(A|H_2)=P(A|D_1H_2)\cdot P(D_1|H_2)+P(A|D_3H_2)\cdot P(D_3|H_2)=1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac12+0\cdot\frac12=\frac18$

$P(A|H_3)=P(A|D_1H_3)\cdot P(D_1|H_3)+P(A|D_2H_3)\cdot P(D_2|H_3)=1\cdot1\cdot1\cdot\frac12+\frac12\cdot1\cdot1\cdot\frac12=\frac34$

Итого: $P(H_3|A)=\frac{3/4}{0+1/8+3/4}=\frac{3/4}{7/8}=\frac{6}{7}$

Ответ: 6/7

Задание 2.

T.1. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta=0)=\mathsf{P}(\eta=1)=\mathsf{P}(\eta=-1)=\frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi+\eta$.

$$E\xi=\sum_{i=1}^{k} x_i\cdot P(A_i)$$
$$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=E(\xi^2)-(E\xi)^2$$
$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2\,cov(\xi,\eta)$$
$$cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi\cdot E\eta$$
$$\rho=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}}$$

ф-я распр.

$\beta=\xi+\eta$; $F_\beta=P(\beta\le x)=P(\xi+\eta\le x)=$

$=\frac{1}{3}\cdot[P(\xi+\eta\le x\mid\eta=0)+P(\xi+\eta\le x\mid\eta=1)+$

$+P(\xi+\eta\le x\mid\eta=-1)]$ $=$

$$P(\xi+\eta\le x\mid\eta=0)=\frac{P(\{\xi+0\le x\}\cap\cancel{\{\eta=0\}})}{P\cancel{(\eta=0)}}=$$

$$=P(\xi\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

аналогично: $P(\xi+\eta\le x\mid\eta=1)=P(\xi\le x-1)=\int_{-\infty}^{x-1} f_\xi(t)\,dt$

$P(\xi+\eta\le x\mid\eta=-1)=P(\xi\le x+1)=\int_{-\infty}^{x+1} f_\xi(t)\,dt$

$=\frac{1}{3}\left[\int_{-\infty}^{x-1} f(t)\,dt+\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt+\int_{-\infty}^{x+1} f(t)\,dt\right]$ => плотность $f_\zeta(x)=\frac{1}{3}\left[f_\xi(x-1)+f_\xi(x)+f_\xi(x+1)\right]$

T.2. Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть ξ — число бросаний. Найти распределение вероятностей ξ, $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi\leqslant 5$?

Р Т.2 успех: $p=1/6$, неудача: $q=5/6$

$P(\xi=k)=pq^{k-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q}=S(q)$$

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}=p\cdot S'(q)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=1/6\cdot 6^2=6$$

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=$

$E\xi^2=\sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot p\cdot q^{k-1}$ ...

$$P(\xi\le 5)=\cup P\{\xi=k\}_{k=1}^{5}=\sum_{k=1}^{5} pq^{k-1}=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{5} q^k=p/q\cdot\frac{q^6-q}{q-1}=1-(5/6)^5=0{,}598$$

T.4. Подбрасываются две игральные кости. Пусть ξ_1 — число очков, выпавших на первой игральной кости, а ξ_2 — на второй. Определим $\xi=\max\{\xi_1,\xi_2\}$, $\eta=\min\{\xi_1,\xi_2\}$. Найти $\mathsf{cov}(\xi,\eta)$.

$P(\xi=k)$ $k=1,2,\ldots 6$

$$\{\xi=k\}=\{\xi_1=k\}\underbrace{\{\xi_2<k\}}_{k-1\text{ исх.}}\cup\{\xi_2=k\}\underbrace{\{\xi_1<k\}}_{k-1}\cup\underbrace{\{\xi_1=\xi_2=k\}}_{1} \Rightarrow P\{\xi=k\}=\frac{2k-1}{36}$$

Тогда $E\xi=\sum_{k=1}^{6} k\cdot\frac{2k-1}{36}=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} 2k^2-k=\frac{1}{36}(1+6+15+28+45+66)=\frac{101}{36}$

$P\{\eta=k\}$

$$\{\eta=k\}=\{\eta_1=k\}\underbrace{\{\eta_1>k\}}_{6-k\text{ исх.}}\cup\{\eta_2=k\}\underbrace{\{\eta_1>k\}}_{6-k}\cup\underbrace{\{\eta_1=\eta_2=k\}}_{1} \Rightarrow P(\eta=k)=\frac{13-2k}{36}$$

Тогда $E\eta=\sum_{k=1}^{6} k\cdot\frac{13-2k}{36}=\frac{1}{36}(11+18+21+20+15+6)=\frac{91}{36}$

$\{\xi=k,\eta=m\}=\{\xi_1=k\}\{\xi_2=m\}\cup\{\xi_1=m\}\{\xi_2=k\}\cup\{\xi_1=\xi_2=k=m\} \Rightarrow P=3/36=1/12$

$cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=\sum_{k,m=1}^{6}(k+m)1/12$???

Т.5. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ — число появлений единицы, а η — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

$$cov(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$$

ξ_i – индикатор появл. 1 на i-м бросании

η_i – ... 6 ...

Тогда $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$; $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i$; $E\xi_i = P(\text{появ.} 1) = 1/6 = E\eta_i$

$D\xi_i = D\eta_i = pq = 1/6 \cdot 5/6 = 5/36$

$\Rightarrow E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = n/6 = E\eta$

$D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = 5n/36 = D\eta$

$$E(\xi\eta) = E\sum_{i,j=1}^n \xi_i\eta_j = E\sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \eta_i + E\sum_{i\neq j} \xi_i \cdot \eta_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \cancel{E\xi_i\eta_i}^{0} + \sum_{i\neq j} E\xi_i\eta_j = \sum_{i\neq j} E\xi_i \cdot E\eta_j = \frac{n(n-1)}{36}$$

Итого: $cov(\xi,\eta) = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}$

$\rho(\xi,\eta) = -\frac{n}{36} \cdot \frac{36}{5n} = \underline{-1/5}$

Т.7. Пусть ξ_k, $k = 1, 2$, — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

λ_1, λ_2 – их параметры

ДТ.7

$g_{\xi_k}(z) = e^{\lambda_k(z-1)}$; $S = \xi_1 + \xi_2$

$g_S(z) = Ez^{\xi_1+\xi_2} = Ez^{\xi_1} \cdot z^{\xi_2} = Ez^{\xi_1} \cdot Ez^{\xi_2} = g_{\xi_1}(z) \cdot g_{\xi_2}(z)$

$g_S(z) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)}$ — получили распр. Пуассона ✓

$P(S=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots$

Условное распр: $P(\xi_1 = k \mid \xi_1+\xi_2 = n)$, $k = 0,\ldots n$

по опр. $P(\xi_1 = k \mid \xi_1+\xi_2=n) = \frac{P(\xi_1=k, \xi_1+\xi_2=n)}{P(\xi_1+\xi_2=n)} = \frac{P(\xi_1=k)\cdot P(\xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)} =$

$$= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k \cdot e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k} \cdot n!}{k!(n-k)! \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^n} = C_n^k \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}, \ k = 0\ldots n$$ — биномиальное распр. ✓

Т.8. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется условиями $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

ДТ.8

$\xi \backslash \eta$	1	−1	0	
1	0	0	1/4	1/4
−1	0	0	1/4	1/4
0	1/4	1/4	0	1/2
	1/4	1/4	1/2	

$A = \{\xi \neq 0\}$, $B = \{\eta \neq 0\}$ $\Rightarrow$ $P(AB) = 0$; $P(A) \geq 1/2$; $P(B) \geq 1/2$

$0 \leq \underbrace{P(A\cup B)}_{\leq 1} = P(A) + P(B) - P(AB) \geq 1 = 1$

$\Rightarrow P(A) = P(B) = 1/2$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1/2$ – $\xi = 0$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1/2$ – $\eta = 0$

E, D, cov???

Т.24. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

Испытание – опечатка
Успех – опеч попала на опр. стр.

Схема Бернулли: $N=50,\ p=\frac{1}{500}=0{,}002$

Соб. A – на опр. стр. попало ≥ 3 опечатки

$\Rightarrow \overline{A} = B_n(0)\cup B_n(1)\cup B_n(2) = C_n^0\cdot p^0\cdot q + C_n^1 p\cdot q^{n-1} + C_n^2 p^2\cdot q^{n-2} = \ldots$

$P(B_n(k)) = C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$

Воспользуемся приближ. схемой: Теорема Пуассона.

$\lambda = np = 0{,}1$; $P(B_n(k)) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} = \ldots$