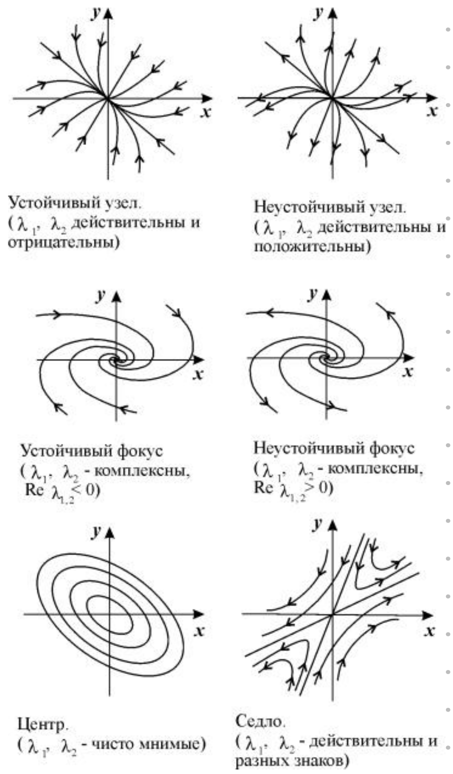
Дз Хамиси Виктории
по диффуру, 4 сем
задание 2

I Первые интегралы и их исп. для нелин. автономных систем

С §14

2 Иссл. при $\forall a$ поведение фаз. траекторий в окр. $(0,0)$

$$\begin{cases} \dot x = y + ax\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot y = x + ay\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad (*)$$



Устойчивый узел.
($\lambda_1$, $\lambda_2$ действительны и отрицательны)

Неустойчивый узел.
($\lambda_1$, $\lambda_2$ действительны и положительны)

Устойчивый фокус
($\lambda_1$, $\lambda_2$ - комплексны, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$)

Неустойчивый фокус
($\lambda_1$, $\lambda_2$ - комплексны, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$)

Центр.
($\lambda_1$, $\lambda_2$ - чисто мнимые)

Седло.
($\lambda_1$, $\lambda_2$ - действительны и разных знаков)

при $a=0$: $\begin{cases}\dot x = y \\ \dot y = x\end{cases}$ $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda = \pm 1$

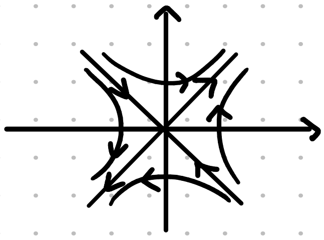
Полож. равновесия $(0,0)$
<u>седло</u>

$\lambda = 1$:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim (1\ -1)$ $\bar h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim (1\ 1)$ $\bar h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$a \neq 0$:

Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$(*)$: $\begin{cases} \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi = r\sin\varphi + ar^2\cos\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi = r\cos\varphi + ar^2\sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\varphi r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\varphi r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\varphi r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot r = \sin 2\varphi\cdot r + ar^2 \\ \dot\varphi r = r\cdot\cos 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot r = ar^2 + r\sin 2\varphi \\ \dot\varphi = \cos 2\varphi \end{cases}$

в т. $(0,0)$ $\begin{cases} \dot r \sim r\sin 2\varphi \\ \dot\varphi = \cos 2\varphi \end{cases}$

система не зав. от. параметра $a$ $\Rightarrow$ $\forall a$ фаз. траектории - седло $\lambda = \pm 1$

Ответ

№12 Иссл. при $\forall a$ поведение фаз. кривых на всей фаз. пл.

$$\dot{x} = y + ax(x^2+y^2-2)$$
$$\dot{y} = -x + ay(x^2+y^2-2)$$

при $a=0$: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ Полож. равновесия $(0,0)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda^2+1=0$ $\lambda = \pm i$ - <u>центр</u>

при $a \neq 0$: $y + ax(x^2+y^2-2) = 0$, $-x + ay(x^2+y^2-2) = 0$ $x^2+y^2-2 = -\frac{y}{ax} = \frac{x}{ay}$

$x^2+y^2 = 0$

$\Rightarrow$ $\forall a$ единств. полож. равновесия $(0,0)$

$\dot{x} = y - 2ax$
$\dot{y} = -x - 2ay$ $\begin{pmatrix} -2a & 1 \\ 1 & -2a \end{pmatrix}$

$(2a+\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2a \pm i$

$a > 0$ - уст. фокус

$a < 0$ - неуст. фокус

Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} = r\sin\varphi + ar\cos\varphi(r^2-2) \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} = -r\cos\varphi + ar\sin\varphi(r^2-2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar(r^2-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar(r^2-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \\ -\sin^2\varphi - \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar(r^2-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ ar(r^2-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = ar(r^2-2) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -t + C \rightarrow \underline{\varphi = -t}$$

Можно считать $C=0$

$r \geq 0$: $r = 0$ - реш (полож. равновесия)
$r = \sqrt{2}$ - реш (окружность)

$\frac{dr}{dt} = ar(r^2-2)$; $\frac{r\,dr}{r^2(r^2-2)} = a\,dt$; $r^2 = u$; $\frac{du}{u(u-2)} = 2a\,dt$

$\frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} = \frac{1}{u(u-2)} \Rightarrow A = -1/2$, $B = 1/2$ $\Rightarrow du\left(\frac{1}{u-2} + \frac{1}{u}\right) = 4a\,dt$

$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| = 4at + C$

$\frac{u-2}{u} = Ce^{4at} \Rightarrow u = \frac{2}{1-Ce^{4at}}$ $a>0$; $\underline{r = \sqrt{\frac{2}{1-Ce^{4at}}}} = \sqrt{\frac{2}{1-Ce^{-4a\varphi}}}$

**Определение.** Предельным циклом системы (1) называется такая замкнутая траектория (1) в области $\Omega$, которая изолирована от всех остальных замкнутых траекторий системы (1) в области $\Omega$.

а) устойчивый (притягивающий) предельный цикл, где траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при $t \to +\infty$ (см. пример 3);

б) неустойчивый (отталкивающий) предельный цикл, где траектории — спирали удаляются от предельного цикла с обеих сторон при $t \to +\infty$;

в) полуустойчивый предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на предельный цикл и удаляются от него с другой стороны при $t \to +\infty$.

$c=0$: $r=\sqrt{2}$ – окружность

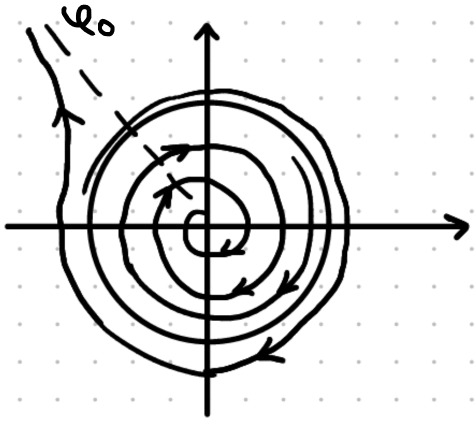
$c<0$: $r<\sqrt{2}$

если $\varphi \to +\infty$ $(t \to -\infty)$: $r \to \sqrt{2}-0$

если $\varphi \to -\infty$ $(t \to +\infty)$: $r \to +0$

$(0,0)$ – уст. фокус;

$r=\sqrt{2}$ – неуст. предельный цикл




$c>0$: $1-ce^{-4a\varphi} > 0$

$e^{-4a\varphi} < 1/c$; $4a\varphi > \ln c$; $\varphi > \frac{\ln c}{4a}$

$\Rightarrow t < -\frac{\ln c}{4a}$

$\varphi = \varphi_0 = \frac{\ln c}{4a}$

Траектория есть только при $\varphi > \varphi_0$ $(t < -\varphi_0)$

если $\varphi \to \varphi_0 + 0$ $(t \to -\varphi_0 - 0)$: $r \to +\infty$ – асимпт. луч $\varphi = \varphi_0$

если $\varphi \to +\infty$ $(t \to -\infty)$: $r \to \sqrt{2}+0$

Ф-и $u_1(x_1,..x_n), \dots u_m(x_1,\dots x_n)$ явл. независ. на $G \subset \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $rg\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = m$ — число строк

Ф-и $u_1(x_1..x_n), \dots u_m(x_1,\dots x_n)$ наз. ф. завис., если $\exists F(u_1,\dots u_m)=0$ (т.е. одна из них явл. ф-ей других)

Ф. №1164 Проверить, являются ли $u_1, u_2$ независ. перв. инт-ми

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ $\quad v_1 = \frac{x+y}{z+x}$ $\quad v_2 = \frac{z-y}{x+y}$

$\dot{x} = x$
$\dot{y} = y$
$\dot{z} = z$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = C_1 x \Rightarrow \underline{u_1 = y/x}$

$\frac{dx}{dz} = \frac{x}{z} \Rightarrow \underline{u_2 = z/x}$ – независ. первые инт.

Для $v_1$ и $v_2$:

$v_2 - \frac{1}{v_1} = \frac{z-y}{x+y} - \frac{z+x}{x+y} = \frac{-y-x}{x+y} = -1$

$\Rightarrow v_2 = 1 - 1/v_1$

$\Rightarrow$ $\underline{v_1 \text{ и } v_2 \text{ – завис.}}$ ч.т.д.

$$(*)\ \begin{cases}\dot x_1 = f_1(x_1, \dots x_n) \\ \dots \\ \dot x_n = f_n(x_1, \dots x_n)\end{cases};\quad x_1(t), \dots x_n(t) \text{ — решение}$$

$$u(x_1(t), \dots x_n(t)) \equiv const$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\dot x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\dot x_n = 0$$

Необх. и дост. усл-е первого интеграла (*):

$$f_1(x_1, .. x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x_1, \dots x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

ДТ1. Проверить, что $u = y + xz^2$ — первый интеграл системы. Найти все первые интегралы сист.

$$\begin{cases}\dot x = -x(2xz^2 + 2y + 3z) \\ \dot y = xz^3 \\ \dot z = z(xz^2 + y + z)\end{cases} \quad (*)$$

Проверим необх. и дост. усл-е для $u = y + xz^2$:

$$-z^2x(2xz^2 + 2y + 3z) + xz^3 + 2xz^2(xz^2 + y + z) =$$

$$= -\cancel{2x^2z^4} - \cancel{2xyz^2} - \cancel{3xz^3} + \cancel{xz^3} + \cancel{2x^2z^4} + \cancel{2xyz^2} + \cancel{2xz^3} = 0 \text{ — верно}$$

$\Rightarrow u$ - первый интеграл

$$y + xz^2 = C_1$$

$$\Rightarrow y = C_1 - xz^2$$

$$(*)\ \begin{aligned}\dot x &= -x(2C_1 + 3z) \\ \dot z &= z(C_1 + z)\end{aligned} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}\cdot\frac{C_1 + z}{2C_1 + 3z};\quad \frac{dz(2C_1 + 3z)}{z(C_1 + z)} = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{2C_1 + 3z}{z(C_1 + z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{C_1 + z};\quad A(z + C_1) + Bz = 2C_1 + 3z$$

$$\Rightarrow A = 2;\ B = 1$$

$$2\ln|z| + \ln|z + C_1| = -\ln|x| + C_2$$

$$z^2(z + C_1) = 1/x \cdot C_2$$

$$C_2 = xz^2(z + C_1) = xz^2(z + y + xz^2) \Rightarrow u_2 = xz^2(xz^2 + y + z)$$

2-й первый инт.

Итого $F = (y + xz^2,\ xz^2(xz^2 + y + z))$

общий вид первого инт. (*)

С§16 Найти первые инт., решить систему

№6 $\dot{x} = x - xy$ $\qquad x > 0,\ x + y > 1$

$\dot{y} = -x + xy$

$\frac{dy}{dx} = -1$; $dy = -dx$; $y = -x + C \Rightarrow \underline{u_1 = y + x}$ – первый интеграл

$\dot{x} = x(1-y) = x(1 + x - C) = x^2 + x - Cx$

$\frac{dx}{dt} = x^2 + x - Cx$; $\frac{dx}{x(x+1-C)} = dt$ $\quad \Big\{ \ \frac{1}{x(x+1-C)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1-C}$

$Ax + A - AC + Bx = 1$

$\Rightarrow A = -B$, $A(1-C) = 1$ $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{1-C}$, $B = \frac{1}{C-1}$

$\frac{dx}{x(1-C)} + \frac{dx}{(x+1-C_1)(C_1-1)} = dt$

$\frac{1}{C_1-1}\left[\frac{dx}{x+1-C_1} - \frac{dx}{x}\right] = dt$

$\frac{1}{C_1-1}\left[\ln|x+1-C_1| - \ln|x|\right] = t + C_2$

$\ln|x+1-C_1| - \ln|x| = (C_1-1)(t+C_2) = t(C_1-1) + C_2$

$\frac{x+1-C_1}{x} = C_2 \cdot e^{t(C_1-1)} = 1 + \frac{1-C_1}{x}$

$$\Rightarrow\ x = \frac{1-C_1}{C_2e^{t(C_1-1)} - 1};\quad y = C_1 - \frac{1-C_1}{C_2e^{t(C_1-1)} - 1}$$

Ответ

№26 $\dot{x} = x^2$

$\dot{y} = 2x^3 - xy - z$ $\qquad x > 0$

$\dot{z} = xz - 2x^4$

$\frac{dz}{dx} = \frac{xz - 2x^4}{x^2}$; $x^2dz + (2x^4 - xz)dx = 0$ (*)

Приведем к виду ур-я с полными дифф., домножим на $\mu(x)$

$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)\cdot x^2) = \frac{\partial}{\partial z}(\mu(x)(2x^4 - xz))$ $\qquad xdz + (2x^3 - z)dx = 0$

$\mu'(x)\cdot x^2 + 2x\mu(x) = -x\mu(x)$ $\qquad d(xz$

$\mu'(x)x^2 + 3x\mu(x) = 0$

$\mu'(x) = -\frac{3}{x}\mu(x)$; $\frac{d\mu}{dx} = -\frac{3\mu}{x}$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3dx}{x}$; $\mu = x^{-3} + C$

$\Rightarrow$ домножаем (*) на $x^{-3}$:

$\frac{dz}{x} + \left(2x - \frac{z}{x^2}\right)dx = 0$

$d\left(x^2 + \frac{z}{x}\right) = 0$; $x^2 + \frac{z}{x} = C_1 \Rightarrow \underline{u_1 = x^2 + \frac{z}{x}}$ – первый интеграл

$\Rightarrow z = C_1x - x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - xy - C_1x + x^3}{x^2} = \frac{3x^3 - xy - C_1x}{x^2}$$

$$x^2 dy + (xy + C_1x - 3x^2)\,dx = 0$$

$$x\,dy + (y + C_1 - 3x)\,dx = 0$$

$$d\left(yx + C_1x - \frac{3x^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u_2 = yx - \frac{3x^2}{2} + C_1x} \text{ — первый интеграл}$$

**I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем**

**С. §14:** 2; 12.
**Ф.:** 1164.

**1.** Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

**2.** Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$;  б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$;  в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

**С. §16:** [illegible]; 26.