Задачи нелин. диф.

Найти положение равновесия и нарисовать фазовые траектории нелинейн. систем в окр. полож. равновесия

Пр. $\begin{cases}\dot{x} = \operatorname{arctg}(x-y-4) \\ \dot{y} = 2x-2y-4\sqrt[3]{x^2-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-4=0 \\ x-y = 2\sqrt[3]{x^2-1}\end{cases} \quad \sqrt[3]{x^2-1} = 2 \Rightarrow x^2 = 9, \quad x = \pm 3, \quad y = -1, -7$

$\Rightarrow$ Полож. равновесия $(3,-1), (-3,-7)$

$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}(x-y-4)$

$f_2(x,y) = 2x-2y-4\sqrt[3]{x^2-1}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{(x-y-4)^2+1}$; $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{1}{(x-y-4)^2+1}$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 - \frac{4}{3}(x^2-1)^{-2/3} \cdot 2x$; $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -2$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(3,-1) = 1$; $\frac{\partial f_1}{\partial y}(3,-1) = -1$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(3,-1) = 2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 6 = 0$ $\frac{\partial f_2}{\partial y}(3,-1) = -2$

$\ldots(-3,-7) = 1$; $\ldots = -1$

$\ldots = 2 - \frac{4}{3}\frac{1}{4}(-6) = 4$; $\ldots = -2$

2-й способ: применение одномерн. ф-лы Тейлора

1) $(3,-1)$

$u = x-3$
$v = y+1$ $\quad u, v \to 0$

$\Rightarrow x = u+3$
$y = v-1$

$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}(u-v-4) = \operatorname{arctg}(u-v) = u-v+o(\rho)$, $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$

$f_2(x,y) = 2(u+3) - 2(v-1) - 4\sqrt[3]{(u+3)^2-1} = 2u-2v+8-8\sqrt[3]{1+\frac{u^2+6u}{8}} =$

$= 2u-2v+8-8(1+\frac{1}{4}u)+o(\rho) = -2v+o(\rho)$

2) $(-3,-7)$

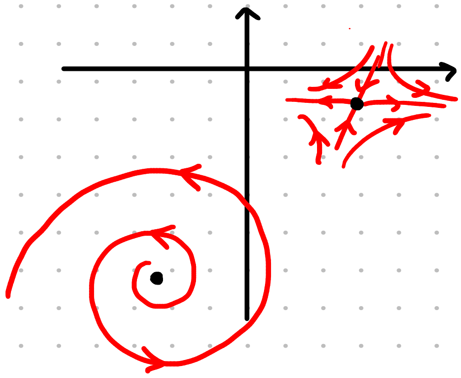
$u = x+3$; $v = y+7$; $x = u-3$; $y = v-7$

$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}(u-v+4-4) = u-v+o(\rho)$

$f_2(x,y) = 2(u-3) - 2(v-7) - 4\sqrt[3]{(u+3)^2-1} = 2u-2v+8-8\sqrt[3]{1+\frac{u^2-6u}{8}} =$

$= 2u-2v+8-8(1-\frac{1}{4}u)+o(\rho) = 4u-2v+o(\rho)$

траектории линеариз. систем:



$(-3,-1)$ $\begin{cases} u = x-3 \\ v = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot u = u - v \\ \dot v = -2v \end{cases}$

$(-3,-7)$ $\begin{cases} u = x+3 \\ v = y+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot u = u - v \\ \dot v = 4u-2v \end{cases}$

1) $(3,-1)$ $\begin{cases} \dot u = u - v \\ \dot v = -2v \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1; -2$ — седло

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $(-3,-7)$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$ — уст. фокус

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ против часовой стрелки

$\ddot x = f(x, \dot x)$ Полож. равн. всегда на оси x!

$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = f(x,y) \end{cases}$ — фаз. портрет в осях $x, \dot x$

Пр. $\ddot x + (2+\dot x)^2 \operatorname{arctg} \dot x + x^3 = 1$

$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = 1 - x^3 - (2+y)^2 \operatorname{arctg} y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ 1 - x^3 = 0 \Rightarrow (1,0) \\ x = 1 \end{cases}$

$(1,0)$ $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y \end{cases}$ $x = u+1$

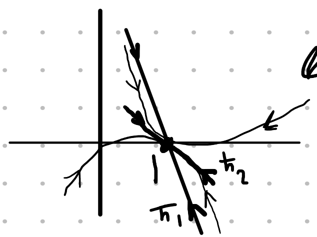
$f_2(x,y) = 1 - (u+1)^3 - (2+v)^2 \operatorname{arctg} v = 1 - u^3 - 3u^2 - 3u - 1 - (u^2+4u+4)\cdot$
$\cdot (v + o(v)) = \ldots = 1 - (u+1)^3 - (2+v)^2 \operatorname{arctg} v =$
$= -3u - 4v + o(\rho)$

$\begin{cases} \dot u = v \\ \dot v = -3u - 4v \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

уст. узел $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$

$\lambda = -3$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



← это типо парабола, а старалась <3

Устойчивость (по Ляпунову)

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ $\quad \bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ - реш. сис., опред. при $t \geq t_0$

$\bar{f}$ — непр. дифф. $\forall x$, $t \geq t_0$

Реш. $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ наз. уст. (по Лап.), если $\forall$ реш. $\bar{x}(t)$ той же сис. такое, что $|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \delta$ $\quad \forall t \geq t_0$ $\quad |\bar{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$

(если реш. близки при $t = t_0$, то при $t \geq t_0$ далеко не разбегутся)

Реш. наз. асс. уст., если оно уст. и при этом $\lim\limits_{t \to +\infty} (x(t) - \varphi(t)) = 0$.

Если сис. автономна (т.е. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$) и $\bar{x}_0$ — полож. равн., то ему соотв. const реш. ($\bar{x} = \bar{x}_0$)

Полож. равн. $\bar{x} = \bar{x}_0$ автон. сис. наз. уст., если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что реш. $\bar{x}(t)$ такого, что $|\bar{x}(t_0) - \bar{x}_0| < \delta$, $\forall t \geq t_0$ вып. $|\bar{x}(t) - \bar{x}_0| < \varepsilon$

Асс.-ски-уст., если оно уст. и $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}_0$

$n = 2$ для лин. авт. сис.

уст. узел, уст. фокус — асс. устойч.
центр — уст., но не асс.
неуст. узел, неуст. фокус, седло — неуст.

90 - 920 $\quad$ Определить уст-ть, зная λ (сами λ счит. не надо)

90 - 854 $\quad$ Д-ть, что если какое-либо реш. лин. сис. уст., то и все реш. уст.

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$

$\square$ $\exists \varphi(t)$ — реш. $\quad$ $\exists$ оно уст. $\quad$ $\dot{\varphi} = A(t)\bar{\varphi} + \bar{f}(t)$

$\bar{x} - \bar{\varphi}(t) = y$ $\quad$ $\bar{x} = \bar{y} + \varphi(t)$ $\quad$ $\dot{\bar{y}} + \cancel{\dot{\bar{\varphi}}(t)} = A(t)(\bar{y} + \cancel{\bar{\varphi}(t)}) + \cancel{\bar{f}(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ однор. сис. $\dot{\bar{y}} = A(t)\bar{y}$, им. полож. равн. $\bar{y}_0 = 0$

$\bar{\varphi}(t)$ — уст. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall$ реш. $\bar{x}(t)$, $|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \delta$, $\forall t \geq t_0$ $|\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall$ реш. однор. сис. $\bar{y}(t)$: $|\bar{y}(t_0)| < \delta$, $\forall t \geq t_0$, $|\bar{y}(t)| < \varepsilon$

нулевое реш. однор. сис. уст.

$\forall$ реш. неоднор. сис. уст. одновр. с нулевым реш. однор. сис.

Т.е. все реш. неоднор. сис. уст. одновременно $\blacksquare$