(IV) $n=3 \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 \quad \dim E_\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}A\bar h_1 = \lambda_1 \bar h_1\\ A\bar h_2 = \lambda_2 \bar h_2\\ A\bar h_3 = \lambda_3 \bar h_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}(A-\lambda_1 E)\bar h_1 = 0\\ (A-\lambda_1 E)\bar h_2 = \bar h_1\\ (A-\lambda_1 E)\bar h_3 = \bar h_2\end{matrix}$$

(columns: $\bar h_1$, $\bar h_2$, $\bar h_3$)

$$\bar X = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}(\bar h_2 + \bar h_1) + C_3 e^{\lambda t}\left(\bar h_3 + t\bar h_2 + \frac{t^2}{2}\bar h_1\right)$$

Ex.
$$\begin{cases}\dot x = 4x - y + z\\ \dot y = -2x + 3y - z\\ \dot z = -5x + 4y - z\end{cases} \qquad \lambda_1 = 2 \text{ кр } 3$$

$$A = \begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ -5 & 4 & -1\end{pmatrix} \qquad A - 2E = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ -5 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & -4 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad rg = 1 \quad \dim F_2 = 1$$

$$\bar X = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix} x_2 \qquad \bar h_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix} \qquad (A-2E)\bar h_2 = \bar h_1$$

$x_1 = -x_2$
$x_3 = 3x_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1 & 1\\ -5 & 4 & -3 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ & & 0 & 0\end{array}\right)$$

$x_1 + x_3 = -1$
$3x_2 - x_3 = 1$

$$h_2 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$(A-2E)\bar h_2 = \bar h_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ -5 & 4 & -3 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -2 & -2\end{array}\right)$$

$x_1 + x_2 = -1$
$3x_2 - x_3 = -2$
$x_2 = 0 \quad x_1 = -1 \quad x_3 = 2$

$$\bar h_3 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\right) + C_3 e^{2t}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\right)$$

(V) $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$
$\Rightarrow h_1 \qquad \bar h_2, \bar h_3$ – компл. $\qquad \bar h_2 = \overline{\bar h_3}$

$e^{\lambda_2 t}\bar h_2, \quad e^{\bar\lambda_2 t}\bar{\bar h}_2$

$$\frac{e^{\lambda_2 t}\bar h_2 + e^{\bar\lambda_2 t}\bar{\bar h}_2}{2} = \operatorname{Re} e^{\lambda_2 t}\bar h_2 \qquad \frac{e^{\lambda_2 t}\bar h_2 - e^{\bar\lambda_2 t}\bar{\bar h}_2}{2i} = \operatorname{Im} e^{\lambda_2 t}\bar h_2$$

Фунд. сист. — Re и Im $e^{\lambda_2 t}\bar h_2$

Пр.
$$\begin{cases}\dot x = 3x - y + 2z\\ \dot y = 2x - 5y + 2z\\ \dot z = -2x - 4y - z\end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -5 & 2\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$A - E = \begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 2 & -6 & 2\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$A - (-2+i)E = \begin{pmatrix}5-i & -1 & 2\\ 2 & -3-i & 2\\ -2 & -4 & 1-i\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & (i-1)/2\\ 0 & -7-i & 3-i\\ 0 & -11+2i & 4-3i\end{pmatrix} \sim$$

$(-7-i)(4-3i) + (11-2i)(3-i) = \ldots = \underline{0}$

$\Rightarrow rg = 2, \ \dim = 1$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 2 & (i-1)/2\\ 0 & 1 & \frac{-2+i}{5}\end{pmatrix} \sim$$

↑ почему? (деление dans 2)

$$\frac{-3+i}{7+i} = \frac{(-3+i)(7-i)}{|7|^2+|1|^2} = \frac{-20+10i}{50} = \frac{-2+i}{5}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{i+3}{10}\\ 0 & 1 & \frac{i-2}{5}\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_2 = \begin{pmatrix}-3-i\\ 4-2i\\ 10\end{pmatrix}$$

($\bar h_3$ искать не нужно, он сопр.
$\bar h_3 = \begin{pmatrix}-3+i\\ 4+2i\\ 10\end{pmatrix}$)

Фунд. реш.

$$e^{(-2+i)t}\begin{pmatrix}-3-i\\4-2i\\10\end{pmatrix} = e^{-2t}(\cos t + i\sin t)\cdot\begin{pmatrix}-3-i\\4-2i\\10\end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix}-3\cos t+\sin t\\4\cos t+2\sin t\\10\cos t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-\cos t-3\sin t\\-2\cos t+4\sin t\\10\sin t\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = C_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix}-3\cos t+\sin t\\4\cos t+2\sin t\\10\cos t\end{pmatrix} + C_3\cdot e^{2t}\begin{pmatrix}-\cos t-3\sin t\\-2\cos t+4\sin t\\10\sin t\end{pmatrix}$

Линейные неодн. сист. с пост. коэф. и правой частью квазимногочленом

$\dot{\bar x} = A\bar x + \bar P_m(t)e^{\mu t}$ (или сумма таких выраж.)

ОРНС = ОРОС + ЧРНС

1) μ не явл. корнем хар. ур-ия

ЧРНС: $\bar x = \bar Q_m(t)e^{\mu t}$

$\bar P_m(t)$ – многочлен из векторов макс. степени коэф. $= m$

Если $\bar P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ или $\bar P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\mu = \alpha+\beta i$ не явл. корнем хар. ур-ия

ЧРНС: $\bar x = \bar Q_m^{(1)}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + \bar Q_m^{(2)}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\bar Q_m(t)$ – с неопр. коэф., наход. однозначно

2) μ явл. корнем хар. ур-ия

ЧРНС: $\bar x = \bar Q_{m+k}(t)e^{\mu t}$ – неизвестных больше, чем известных $\Rightarrow$ ЧР находится неоднозначно

$\mu = \alpha+\beta i$ – кор.

$\bar Q^{(1)}_{m+k}(t)$ и $\bar Q^{(2)}_{m+k}(t)$

Пр. $\begin{cases}\dot x = 4x - y\\ \dot y = x+2y+2e^{3t}\end{cases}$ Однород. $\begin{cases}\dot x = 4x-y\\ \dot y = x+2y\end{cases}$ $A = \begin{pmatrix}4&-1\\1&2\end{pmatrix}$

$A-\lambda E = \lambda^2-6\lambda+9=0 \to \lambda=3$ кр. 2

$A-3E = \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix} \sim (1\ -1) \Rightarrow \bar h_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ $A\bar h_1 = 3\bar h_1$

$\bar h_1 \ \bar h_2$ $A\bar h_2 = \bar h_1 + 3\bar h_2$

$(A-3E)\bar h_2 = h_1$

ОРОС: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1\cdot e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2e^{3t}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

Пр. ч. $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}e^{3t}$ $\mu=3$ $k=2$ $m=0$ $m+k=2$

ЧРНУ: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}At^2+Bt+C\\Dt^2+Et+F\end{pmatrix}e^{3t}$

$$\dot{x} = (2At + B)e^{3t} + 3e^{3t}(At^2 + Bt + C) = e^{3t}(3At^3 + (2A+3B) + B + 3C)$$

$$\dot{y} = e^{3t}(3Dt^2 + (2D+3E)t + E + 3F)$$

$$3At^2 + (2A+3B)t + B + 3C = 4At^2 + 4Bt + 4C - Dt^2 - Et - F$$

$$3Dt^2 + (2D+3E)t + E + 3F = At^2 + Bt + C + 2Dt^2 + 2Et + 2F + 2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} 3A = 4A - D & (1) \\ 2A + 3B = 4B - E & (2) \\ B + 3C = 4C - F & (3) \\ 3D = A - 2D & (4) \\ 2D + 3E = B + 2E & (5) \\ E + 3F = C + 2F + 2 & (6) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A = D \\ 2A = B - E \\ \cancel{A = D} \\ \cancel{2D = B - E} \\ B = C - F \\ E = C - F + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A = D \\ B = 2A + E \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ D = -1 \\ B = -2 + E \\ E = C - F + 2 \end{array}$$

Положим $E = F = 0$

$$\Downarrow$$

$$B = -2$$
$$C = -2$$

Отв.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - e^{3t}\begin{pmatrix} t^2 + 2t + 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$