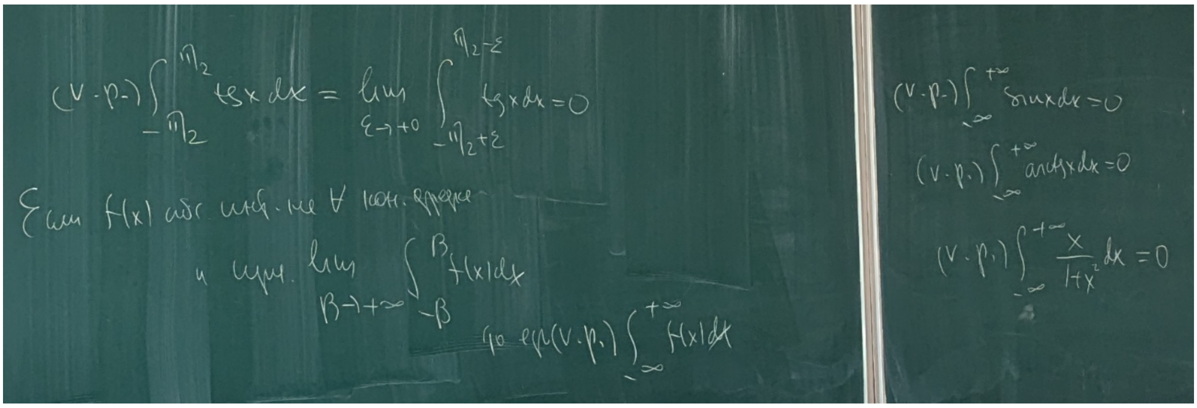


$$(v.p.)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} tg\,x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} tg\,x\,dx = 0$$

Если $f(x)$ абс. интегр.-ма $\forall$ кон. отрезке

и сущ. $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B} f(x)dx$

то его $(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0$$

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} arctg\,x\,dx = 0$$

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$$

Интегралы Фурье

$f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$

$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt$; $b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt$

Инт. Фурье:

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty}(a(y)\cos xy + b(y)\sin xy)\,dy$$

Св-ва:

1) $\lim\limits_{y\to\infty} a(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} b(y) = 0$
2) $a(y)$ и $b(y)$ равном. непр. на $(-\infty, +\infty)$

Аналог частичн. суммы ряда Ф:

$$\Phi_B(x) = \int_A^B (a(y)\cos xy + b(y)\sin xy)\,dy$$

Инт. сх., если $\exists \Phi(x) = \lim\limits_{B\to+\infty}\Phi_B(x)$

$L_c^1(-\infty, +\infty)$ - мн-во ф-ий из $L_R(-\infty, +\infty)$ таких, что $f(x)$ - кус-непр. на $\forall$ кон. отр

Дост. усл. сх. инт. Фурье:

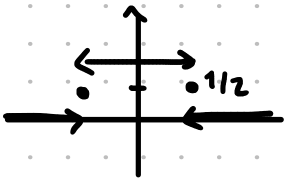
1) Пусть $f(x) \in \overset{\leftarrow \text{необяз}}{L_c^1}(-\infty, +\infty)$ в т. x_0 непр. и имеет конечн. $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$. Тогда в т. x_0 инт. Ф. сх. к $f(x_0)$

2) Пусть $f(x) \in L_c^1(-\infty, +\infty)$, в т. x_0 разрыв 1-го рода и $\exists$ кон. обобщ. пр.: $\lim\limits_{u\to+0}\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}$ и $\lim\limits_{u\to+0}\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$

Тогда в т. x_0 инт. сх. к $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

Предст. инт-ом Фурье:

Пр. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

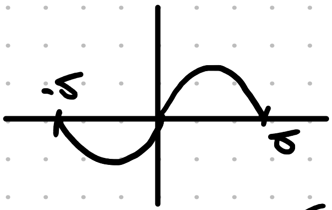


четн $\Rightarrow b(y) = 0$

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos ty\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{\sin ty}{y}\Big|_0^a = \frac{2}{\pi}\frac{\sin ay}{y}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\sin ay}{y}\cos xy\,dy = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 1/2, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Пр. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$



$f(x)$ нечетн $\Rightarrow a(y) = 0$

$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin ty\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t \sin ty\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos t(1-y) - \cos t(1+y))\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin t(1-y)}{1-y}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin t(1+y)}{1+y}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

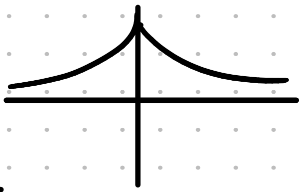
$y \neq \pm 1$ ↑ неважно, тк это интегр., а они мер

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi - \pi y)}{1-y} - \frac{\sin(\pi + \pi y)}{1+y}\right) = \frac{\sin \pi y}{\pi}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin \pi y}{1-y^2}$$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin \pi y}{1-y^2}\sin xy\,dy$$

Пр. $f(x) = e^{-|x|}$



$b(y) = 0$

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos ty\,dt =$$

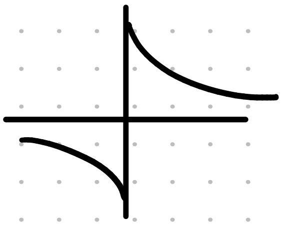
$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{t(-1+iy)}\,dt = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\,\frac{e^{t(-1+iy)}}{-1+iy}\Big|_0^{+\infty}\overset{=0}{\underset{=1}{}} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-iy} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\,\frac{1+iy}{1+y^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy$$

↑ 1-й инт. Лапласа:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$$

Пр. $f(x) = e^{-|x|}\operatorname{sign} x$



$a(y) = 0$

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin ty\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int\ldots = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{1+y^2} \Rightarrow f(x) = e^{-|x|}\operatorname{sign} x = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}\,dy$$

Преобразование Фурье

$$c(y) = a(y) - ib(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}dt$$

$$C(-y) = a(y) + ib(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity}dt$$

можно показать:

$$\Phi_B(x) = \int_A^B (a(y)\cos xy + b(y)\sin xy)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} c(y)e^{ixy}dy$$

$$\Rightarrow \lim_{B\to+\infty}\Phi_B(x) = \frac{1}{2}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} c(y)e^{ixy}dy$$

Если $f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$, $\forall x_0$ $f(x)$ непр. и имеет кон. одност. пр., то

$$c(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}dt \quad и \quad f(x) = \frac{1}{2}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} c(y)e^{ixy}dy$$

Преобр. Фурье:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{ixy}dy$$

В общем виде:

Пусть $f(x)$ абс. инт. на $\forall$ кон. отрезке и $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists\ (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$

Тогда преобр. Фурье

$$F[f](y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

Обратное преобр. Фурье

$$\tilde{f}(y) = \hat{f}(-y) = F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$$

внутр. – абс. сх.,
внешн. – необяз.

Если $f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$, в каждой т. непр. и имеет кон. одност. произв., то $F^{-1}[F[f]] = f$ и $F[F^{-1}[f]] = f$

Свойства преобр. Фурье (для абс. инт. ф-и)

1) $\hat{f}(y) \to 0,\ y \to +\infty$

2) $\hat{f}(y)$ равн. непр. на $(-\infty, +\infty)$

3) Производная от преобр. Фурье

Пусть $f(x)$ непр. на $(-\infty, +\infty)$; $f(x), x f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$.

Тогда $F[f]$ непр. диф. ф-я и $\frac{d}{dy} F[f] = F[-ixf(x)]$

Обобщение:

Пусть $f(x)$ непр. на $(-\infty, +\infty)$; $f, xf, \dots x^n f \in L_R(-\infty, +\infty)$.

Тогда $F[f]$ n раз непр. диф. и $\frac{d^n}{dy^n} F[f] = F[(-ix)^n f(x)]$

4) Преобр. Фурье от производной

Пусть $f(x)$ кус-гл. на $\forall$ кон. отр; $f, f' \in L_R(-\infty, +\infty)$.

Тогда $F[f'] = iyF[f]$

Следствие: $F[f] = o(1/y),\ y \to +\infty$

Обобщение:

Пусть $f^{(n-1)}(x)$ кус-гл. на $\forall$ кон. отр; $f, f', \dots f^{(n)} \in L_R(-\infty, +\infty)$.

Тогда $F[f^{(n)}] = (iy)^n F[f]$

Следствие: $F[f] = o(1/y^n),\ y \to +\infty$

Пр. $f(x) = \dfrac{x-1}{1+|x|^9} \in L_R(-\infty, +\infty)$

$\uparrow$ т.к. $f(x) \sim 1/x^8,\ x \to +\infty$

1) Сколько непр. пр. имеет $F[f]$?

2) Оценить скорость убыв. $F[f]$ при $y \to \infty$.

$x^6 f(x) \sim \frac{1}{x^2} \in L_R(-\infty, +\infty)$
$x^7 f(x) \notin L_R(-\infty, +\infty)$ | $\Rightarrow$ $F[f]$ имеет <u>6</u> непр. пр.

Для 2) нужно найти n такое, что $f^{(n-1)}(x)$ кус-гл., а $f^{(n)}(x)$ кус-непр.

$\varphi(x) = |x|^9$ $n = 9$:

$\varphi^{(8)}(x)$ кус-гл.
$\varphi^{(9)}(x)$ кус-непр } являются ли $f', \dots f^{(9)}$ абс. инт?

Утв. Если $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ – отнош. 2-х многочленов, то при дифф., разность степеней знам. и числ. увеличивается на 1.

$\frac{x-1}{1+x^9}$ Δст$=8$; $\left(\frac{x-1}{1+x^9}\right)'$ = –//– Δст$=9$ и т.д.

$\Rightarrow$ Все производные, которые сущ., абс. инт.

Преобр. Фурье:

$F[f]=o(1/y^9),\ y\to+\infty$

Пр. Д-ть: $F[f(x-a)]=e^{-iay}F[f(x)]$

Если $f(x)\in L_R(-\infty,+\infty)$:

$$F[f(x-a)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-a)e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(t+a)y}dt=e^{-iay}F[f]$$

<u>ч.т.д</u>

Иначе не решить.