1 Преобразование случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия

1.1 Преобразование случайных величин

Теорема 1 (Преобразование с.в.). *Пусть ξ - с.в. с функцией распределения $F_\xi(x)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская функция. Тогда для $\eta = \varphi(\xi)$:*

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\xi \in \varphi^{-1}((-\infty, y]))$$

Теорема 2 (Плотность преобразованной с.в.). *Если ξ абсолютно непрерывна с плотностью $f_\xi(x)$, φ - диффеоморфизм, то $\eta = \varphi(\xi)$ имеет плотность:*

$$f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1})'(y)|$$

В общем случае:

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}$$

Пример 1. *Если $X \sim N(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, и $Y = X^3$, то:*

$$f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-y^{2/3}/2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$$

1.2 Математическое ожидание

Определение 1 (Общее определение). ***Математическое ожидание*** *с.в. ξ определяется как:*

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega)$$

Определение 2 (Для дискретной с.в.). *Если ξ дискретна: $P(\xi = x_i) = p_i$, то:*

$$E\xi = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Определение 3 (Для абсолютно непрерывной с.в.). *Если ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, то:*

$$E\xi = \int_\mathbb{R} x \cdot f_\xi(x) dx$$

Теорема 3 (О замене переменной в м.о.). *Пусть ξ - с.в. с распределением P_ξ, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская функция. Тогда:*

$$Eg(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega)) dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x) dP_\xi(x)$$

Свойство 1 (Свойства математического ожидания).

1. ***Линейность:*** $E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta$
2. ***Монотонность:*** *если $\xi \leq \eta$ п.н., то $E\xi \leq E\eta$*
3. *$E[I_A] = P(A)$ для любого события A*
4. *Если $\xi = c$ п.н., то $E\xi = c$*
5. *Если $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.*
6. $|E\xi| \leq E|\xi|$
7. *Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq E\xi \leq b$*

1.3 Дисперсия

Определение 4 (Дисперсия).

$$D\xi = E[(\xi - E\xi)^2] = E[\xi^2] - (E\xi)^2$$

Свойство 2 (Свойства дисперсии).

1. *$D\xi \geq 0$, причем $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ п.н.*
2. *$D(a\xi + b) = a^2 D\xi$*
3. *Если ξ и η независимы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$*

1.4 Ковариация и корреляция

Определение 5 (Ковариация).

$$cov(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E[\xi\eta] - E\xi \cdot E\eta$$

Определение 6 (Корреляция).

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

Свойство 3 (Свойства ковариации).

1. *$cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$*
2. *$cov(\xi, \xi) = D\xi$*
3. *$cov(a\xi + b, c\eta + d) = ac \cdot cov(\xi, \eta)$*
4. *$cov(\xi + \eta, \zeta) = cov(\xi, \zeta) + cov(\eta, \zeta)$*

1.5 Преобразования м.о. и дисперсии

Теорема 4 (М.о. линейного преобразования). *Для линейного преобразования $\eta = a\xi + b$:*

$$E\eta = aE\xi + b, \quad D\eta = a^2 D\xi$$

Теорема 5 (М.о. и дисперсия суммы). *Для $\xi_1, \ldots, \xi_n$:*

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i<j} cov(\xi_i, \xi_j)$$

Теорема 6 (Дисперсия суммы независимых с.в.). *Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, то:*

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$$

2 Производящие функции случайных величин

2.1 Определение и свойства

Определение 7 (Производящая функция). *Для целочисленной случайной величины ξ с распределением $P(\xi = n) = p_n$* ***производящая функция*** *определяется как:*

$$g_\xi(z) = E[z^\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

Радиус сходимости $R \geq 1$, причем $g_\xi(1) = 1$.

Свойство 4 (Свойства производящих функций).

1. *$g_\xi(0) = p_0$, $g_\xi(1) = 1$*
2. *$g_\xi^{(k)}(0) = k! \cdot p_k$*
3. *Производящая функция однозначно определяет распределение: $g_\xi(z) \equiv g_\eta(z) \Leftrightarrow \xi \sim \eta$*
4. *Если $E|\xi| < \infty$, то $E\xi = g'_\xi(1)$*
5. *Если $E\xi^2 < \infty$, то $D\xi = g''_\xi(1) + g'_\xi(1) - (g'_\xi(1))^2$*

2.2 Производящие функции известных распределений

- **Бернулли:** $g(z) = 1 + p(z-1)$
- **Биномиальное:** $g(z) = (1 + p(z-1))^n$
- **Пуассона:** $g(z) = e^{\lambda(z-1)}$
- **Геометрическое:** $g(z) = \frac{p}{1-z(1-p)}$
- **Отрицательное биномиальное:** $g(z) = \left(\frac{p}{1-z(1-p)}\right)^n$

2.3 Производящая функция случайной суммы

Теорема 7 (Производящая функция случайной суммы). *Если ξ_i - i.i.d., J - целочисленная с.в., независимая от ξ_i, то для $S_J = \sum_{i=1}^{J} \xi_i$:*

$$g_{S_J}(z) = g_J(g_\xi(z))$$

2.4 Тождество Вальда

Теорема 8 (Тождество Вальда). *Для $S_J = \sum_{i=1}^{J} \xi_i$, где ξ_i - i.i.d., J - целочисленная с.в.:*

$$ES_J = E\xi \cdot EJ$$

Если также $E\xi^2 < \infty$, то:

$$DS_J = E\xi^2 \cdot DJ + (E\xi)^2 \cdot D\xi$$

3 Условное математическое ожидание

3.1 Определения

Определение 8 (Условное матожидание относительно события). *Для события C с $P(C) > 0$:*

$$E[\xi|C] = \frac{1}{P(C)} E[\xi \cdot I_C]$$

Определение 9 (Условное матожидание относительно σ-алгебры). $E[\xi|\mathcal{G}]$ *- $\mathcal{G}$-измеримая с.в., удовлетворяющая:*

$$\int_A E[\xi|\mathcal{G}]dP = \int_A \xi dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

3.2 Теорема Дуба и свойства

Теорема 9 (Теорема Дуба). *Условное матожидание - наилучшее среднеквадратичное приближение ξ в классе $\mathcal{G}$-измеримых с.в.:*

$$E[\xi|\mathcal{G}] = \arg\min_{\eta \in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} E|\xi - \eta|^2$$

Свойство 5 (Свойства условного матожидания).

1. ***Линейность:*** $E[a\xi + b\eta|\mathcal{G}] = aE[\xi|\mathcal{G}] + bE[\eta|\mathcal{G}]$
2. ***Формула полного м.о.:*** $E[E[\xi|\mathcal{G}]] = E\xi$
3. *Если ξ измерима относительно $\mathcal{G}$, то* $E[\xi|\mathcal{G}] = \xi$
4. $E[\eta\xi|\mathcal{G}] = \eta E[\xi|\mathcal{G}]$ *для $\mathcal{G}$-измеримой η*

3.3 Выражения для условного матожидания

Теорема 10 (Для дискретных с.в.). *Если ξ, η дискретны, то:*

$$E[\xi|\eta = y] = \sum_x x \cdot P(\xi = x|\eta = y)$$

Теорема 11 (Для абсолютно непрерывных с.в.). *Если (ξ, η) имеют совместную плотность $f_{\xi,\eta}(x, y)$, то:*

$$E[\xi|\eta = y] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)dx$$

где $f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}$

3.4 Формулы полного матожидания и дисперсии

Теорема 12 (Формула полного матожидания). *Если $C_1, \ldots, C_n$ - разбиение Ω, то:*

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)E[\xi|C_i]$$

В общем случае: $E\xi = E[E[\xi|\mathcal{G}]]$

Теорема 13 (Формула полной дисперсии).

$$D\xi = E[D(\xi|\eta)] + D[E(\xi|\eta)]$$

4 Неравенства и законы больших чисел

4.1 Неравенства

Теорема 14 (Неравенство Чебышева). *Если* $E\xi^2 < \infty$, *то* $\forall\varepsilon > 0$*:*

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Теорема 15 (Неравенство Коши-Буняковского).

$$|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

Теорема 16 (Неравенство Йенсена). *Если* φ *- выпуклая функция, то:*

$$\varphi(E\xi) \leq E\varphi(\xi)$$

4.2 Законы больших чисел

Теорема 17 (Слабый закон больших чисел Чебышева). *Для* ξ_i *- i.i.d.,* $E\xi_i = m$, $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$*:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{P} m$$

Теорема 18 (Сильный закон больших чисел Колмогорова). *Для* ξ_i *- i.i.d.:*

$$E|\xi_1| < \infty \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$$

4.3 Виды сходимости случайных величин

Определение 10 (Сходимость по вероятности).

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$$

Определение 11 (Сходимость почти наверное).

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow P(\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

Определение 12 (Сходимость в среднем порядка p).

$$\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi \Leftrightarrow E|\xi_n - \xi|^p \to 0$$

Теорема 19 (Иерархия видов сходимости).

- *Сходимость п.н.* $\Rightarrow$ *сходимость по вероятности*
- *Сходимость в* L_p $\Rightarrow$ *сходимость по вероятности*
- *Сходимость по вероятности* $\Rightarrow$ *существование подпоследовательности, сходящейся п.н.*

4.4 Слабая сходимость

Определение 13 (Слабая сходимость)**.**

$$\xi_n \Rightarrow \xi \Leftrightarrow \forall f \in C_b(\mathbb{R}) : Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$$

Определение 14 (Сходимость функций распределения)**.**

$$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x) \quad \forall x \in C(F_\xi)$$

где $C(F_\xi)$ *- точки непрерывности* F_ξ

Теорема 20 (Эквивалентность определений)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\xi_n \Rightarrow \xi$
2. $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ *во всех точках непрерывности* F_ξ