

1. Комбинаторное (классическое) определение вероятности. Определения вероятностного пространства, алгебры и сигма-алгебры событий, функции вероятности. Теорема сложений (формула включений-исключений для вероятности). Основной принцип комбинаторики (правило произведения). Выборки: упорядоченные/неупорядоченные, с возвращением/без возвращения.
2. Условная вероятность. Теорема умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий (попарная и в совокупности), контрпример системы событий не независимых в совокупности, но независимых попарно. Биномиальная схема Бернулли / полиномиальная схема Бернулли. Предельная теорема Пуассона.
3. Случайная величина (с.в.) и случайный вектор. Борелевская сигма-алгебра, сигма алгебра, порожденная с.в. Независимость случайных величин. Функция распределения с.в., плотность распределения с.в., критерии независимости случайных величин. Виды случайных величин. Примеры случайных величин (в том числе гамма-распределение, гипергеометрическое распределение). Формула свертки распределений. Распределение крайних порядковых статистик. Лемма Бореля-Кантелли.
4. Маргинальное распределение. Преобразование случайных величин. Математическое ожидание (общее определение, определения для дискретной и абс. непрерывной с.в.). Математическое ожидание функции от с.в., теорема о замене переменной в матожидании. Свойства математического ожидания. Дисперсия. Свойства дисперсии. Корреляция и ковариация. Преобразование м.о. и дисперсии при преобразовании с.в.
5. Производящие функции с.в., свойства производящих функций, производящие функции известных распределений. Выражение матожидания и дисперсии через производящие функции, производящая функция случайной суммы случайных величин. Тождество Вальда: прямой метод, метод производящих функций.
6. Условное распределение, условное матожидание. Теорема Дуба, условное матожидание как задача оценивания, свойства условного матожидания. Выражение условного матожидания для дискретных и абс. непр. с.в., формула полного матожидания и формула полной дисперсии.
7. Неравенства Чебышева, Коши-Буняковского, Йенсена. Слабый закон больших чисел Чебышева. Виды сходимости случайных величин: наследование видов сходимости, контрпримеры. Сильный закон больших чисел Колмогорова. Слабая сходимость: два эквивалентных определения, связь со сходимостью функций распределения
8. Характеристические функции с.в., свойства характеристических функций, выражение n -го момента с.в. через n -ю производную характеристической функции в нуле. Критерий независимости с.в. через характеристические функции. Теорема

Леви о непрерывности. Центральная предельная теорема, теорема Берри-Эссеена. Лемма Слуцкого, доверительный интервал для параметра p распределения Бернулли.

9. Определение случайного процесса, сечения, траектории. Задание случайного процесса через семейство конечномерных распределений. Пуассоновский процесс. Теорема о явном виде пуассоновского процесса. Распределение моментов скачков и распределение времени между скачками и другие свойства пуассоновского процесса. Понятие о стационарности и эргодичности. Винеровский процесс.
10. Марковские случайные процессы. Марковское свойство. Дискретные цепи Маркова (ДЦМ): переходные вероятности, вектор состояний. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Уравнение эволюции ДЦМ. Однородные дискретные цепи Маркова (ОДЦМ). Методы решения уравнения эволюции ОДЦМ (диагонализация, производящие функции, рекуррентные уравнения). Алгоритм Метрополиса-Гастингса.
11. Виды состояний Марковских цепей: следующие (друг за другом) состояния, сообщающиеся состояния, существенное состояние. Разбиение ОДЦМ на замкнутые и открытый классы эквивалентности. Возвратное состояние, поглощающее состояние, нулевое состояние, периодическое состояние. Критерий возвратного состояния. Теорема о распространении свойств класса по цепи Маркова (свойство солидарности). Классификация состояний для конечной ОДЦМ и для счетной ОДЦМ (набор теорем о том какое состояние из какого наследуется). Среднее время первого возвращения цепи в выбранное состояние, марковский момент.
12. Стационарное состояние ОДЦМ. Эргодичность и сильная эргодичность ОДЦМ. Теорема о существовании стационарного состояния в конечной ОДЦМ. Уравнения детального баланса. Критерий сильной эргодичности ОДЦМ. Теорема о предельном распределении, скорость сходимости к стационарному распределению. Аналог УЗБЧ для ОДЦМ, среднее функции по стационарному распределению.
13. Непрерывные цепи Маркова. Уравнения Колмогорова-Чепмена и уравнение эволюции через матрицу перехода. Прямые и обратные уравнения Колмогорова, матрица интенсивностей (инфинитезимальная матрица). Марковский момент для непрерывной ДЦМ, время жизни цепи в i -ом состоянии, вероятность перехода из состояния i в состояние j . Эргодическая теорема для непрерывных ДЦМ. Процесс рождения-гибели.