Дз Хамиан Виктории по теорверу, 1 задание
осень 2025

Лекция 1.

№1

Упражнение 1 [Формула сложения]

Пусть $A,\ B \in \mathcal{F}$ - события. Доказать, что $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$.

$$A \cup B = (A \setminus AB) \cup (B \setminus AB) \cup AB$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(B) - \cancel{\mathbb{P}(AB)} + \cancel{\mathbb{P}(AB)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

ч.т.д.

№2

Упражнение 2 [Формула включений-исключений]

Пусть $A_1,\ A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$ - события. Доказать:

$$(*) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \ldots A_n)$$

Для $n=2$ доказано в №1: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$

Предположим, что $(*)$ верно для всех чисел до $n-1$.

Покажем, что оно верно и для n:

$$P\left(A_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P(A_n) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_n A_i\right) =$$

$$= P(A_n) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-2} P(A_1 \ldots A_{n-1})\right] -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_n A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} P(A_n A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-2} P(A_1 \ldots A_n)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n)$$

ч.т.д.

№3

Упражнение 3 [Задача про очередь]

Пусть у билетной кассы стоит очередь из $2n$ человек. Из них n человек имеет 50р и еще n - 100р. Билет стоит 50р, изначально касса пуста. Пусть А = {очередь не встанет}. Найти $\mathbb{P}(A)$.

Если приходит чел. с 50 руб., то в кассе +1 50-руб. купюра.

Если приходит чел. с 100 руб., то в кассе −1 50-руб. купюра (т.к. ее нужно отдать им сдачу)

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\{$очередь не встанет$\} =$

$= \mathbb{P}\left\{\begin{matrix}\text{в каждый момент времени} \\ \text{сумма послед. из } -1 \text{ и } +1 \\ \text{будет неотриц.}\end{matrix}\right\}$

Таким образом, задача сводится к задаче о количестве правильных скобочных последовательностей

$|A|$ — числа Каталана для n: $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n}{C_{2n}^{n}} = \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}(n+1)!} \cdot \frac{\cancel{n!} \cdot n!}{\cancel{(2n)!}} = \frac{1}{n+1}$$

Ответ: $\frac{1}{n+1}$

Лекция 2.

№4 **Упражнение 4**

Следует ли из попарной независимости событий $A_1,\ A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$ их независимость в совокупности?

Контрпример: Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где ω_i – равновер.

$A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$

Все события попарно независимы,

но $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$ $\Rightarrow$ нет

Ответ:

№5 **Упражнение 5**

В записи, определяющей независимость событий $A_1,\ A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$ в совокупности,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{P}(A_i)\ \forall I \subseteq \{1,\ 2, \dots, n\},$$

содержится $2^n - n - 1$ равенств. Следует ли из выполнения самого длинного равенства выполнение всех остальных?

Контрпример: пусть подбросили 2 игр. кости

$A = \{$на 1-й кости 1, 2 или 5$\}$

$B = \{$на 1-й кости 4, 5 или 6$\}$ $\Rightarrow$ $P(ABC) = 1/36 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 4/36 =$

$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$C = \{$сумма выпавших очк. – 10$\}$

самое длинное рав-во выполняется

но нет даже попарной нез-ти $\Rightarrow$ нет

Ответ:

№6 **Упражнение 6**

Найти дискретную случайную величину, обладающую свойством "отсутствия памяти".

Ответ: $X \sim Geom(p)$

Д-во: Св-во „отсутствия памяти" означает:

$$P(X > m+k \mid X > m) = P(X > k)$$

Проверим для $X \sim Geom(p)$.

$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $P(X > k) = (1-p)^k$

$$P(X > m+k \mid X > m) = \frac{P(X > m+k)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+k}}{(1-p)^m} = (1-p)^k = P(X > k)$$

ч.т.д.

№7 **Упражнение 7**

[Корректность выражений в доказательстве "отсутствия памяти"у $\tau \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$]

Случайная величина $\tau' = \{\tau \mid \tau > s\}$ определена не на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, что и случайная величина τ. Например, τ' не определена для события $\{\omega : \tau < s\}$. Найти вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}')$, на котором определена τ' и при этом выкладки из лекции не изменились.

$\Omega' = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > s\}$; $F' = \{A \cap \Omega' : A \in F\}$

$\forall A' = A \cap \Omega' \in F'$: $P'(A') = P(A \mid \tau > s) = \dfrac{P(A \cap \{\tau > s\})}{P(\tau > s)}$

Нашли $\Rightarrow (\Omega', F', P')$

Выкладки не изменились, т.к. τ' на (Ω', F', P') – сужение исходной τ на Ω'. То есть, $\forall \omega \in \Omega'$ $\tau'(\omega) = \tau(\omega)$.

$P'(\tau' > x) = P'(\{\omega \in \Omega' : \tau'(\omega) > x\}) = P(\{\omega \in \Omega' : \tau(\omega) > x\} \mid \tau > s)$

$= P(\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > x\} \mid \tau > s$

$\Rightarrow P'(\tau' > x) = P(\tau > x)$

Лекция 3.

№8 **Упражнение 8**

$X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_1),\ Y \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_2),\ X \perp Y$. Найти $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda_1};\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$P(X=k \mid X+Y=n)=\frac{P(X=k;X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=$$

$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot \cancel{e^{-\lambda_1}}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\cancel{e^{-\lambda_2}}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n\cdot \cancel{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}}{n!}}=\frac{C_n^k\cdot\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+n-k}}=\underbrace{C_n^k\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}}_{\text{Ответ:}}\ \sim \text{Binom}$$

№9 **Упражнение 9**

Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность i.i.d. случайных величин с функцией распределения $F(x) < 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Пусть $\eta_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ - последовательность крайних статистик.
Доказать: $\mathbb{P}\left(\{\omega :\ \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\}\right) = 1$.

На лекции доказано:

$\eta_n=\max\{\xi_1,\dots\xi_n\}$ имеет ф.р. $F_{(n)}=P(\eta_n\le x)=(F(x))^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Лемма Бореля-Кантелли:

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — некоторая последовательность событий из $\mathscr{F}$. Напомним (см. табл. 1 в § 1), что через $\{A_n$ б. ч.$\}$ обозначается событие $\overline{\lim}\, A_n$, состоящее в том, что произойдет *бесконечное число* событий из $A_1, A_2, \dots$

Лемма 1 (Бореля—Кантелли). a) *Если $\sum \mathsf{P}(A_n) < \infty$, то вероятность $\mathsf{P}\{A_n$ б. ч.$\} = 0$.*

b) *Если $\sum \mathsf{P}(A_n) = \infty$ и события $A_1, A_2, \dots$ независимы, то вероятность $\mathsf{P}\{A_n$ б. ч.$\} = 1$.*

Для события $E_n(x)=\{\eta_n\le x\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(F(x))^n<\infty \text{ при } F(x)<1$$

$\Rightarrow$ по п. а) леммы $P(E_n\ \text{б.ч.})=0$

Тогда события $E_n(x)$ происходят только кон. число раз с ед. вер.

$\Rightarrow \exists N:\ \forall n\ge N$ соб. E_n не происходит, т.е. $\eta_n>x$

Т.к. x произвольное: $\forall x\ \exists N:\forall n\ge N\ P(\eta_n>x)=1$

$$\Rightarrow P(\{\omega:\eta_n(\omega)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty\})=1$$

ч.т.д.

№10 **Упражнение 10**

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - последовательность i.i.d. случайных величин с функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$. Построим вариационный ряд $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$.
Найти функцию распределения $F_{X_{(j)}}$ и плотность распределения $F_{X_{(j)}}$, $1 \le j \le n$.

Событие $\{X_{(j)}\le x\}\equiv\{$не менее j эл. выборки лежат в $(-\infty,x]\}$

При фикс. x у $X_{(j)}$ есть два исхода:

- успех: $X_{(j)}\le x$ с вер. $F(x)$
- неуспех: $X_{(j)}>x$ с вер. $1-F(x)$

Введем N_x - число успехов: $P(N_x=k)=C_n^kF^k(x)[1-F(x)]^{n-k}$

Тогда: $F_{X_{(j)}}=P(X_{(j)}\le x)=P(N_x\ge j)=\sum_{k=j}^{n}C_n^kF^k(x)[1-F(x)]^{n-k}$

$f_{X_{(j)}}(t)$ - плотность расп. $F_{X_{(j)}}$

$$f_{X_{(j)}}(x)=F'(x)=\sum_{k=j}^{n}C_n^k\left[k\cdot F(x)^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}-F(x)^k(n-k)[1-F(x)]^{n-k-1}\right]f(x)=$$

$$=f(x)\Big[\underbrace{\sum_{k=j}^{n}C_n^k\cdot k\cdot F^{k-1}(1-F)^{n-k}}_{S_1}-\underbrace{\sum_{k=j}^{n}C_n^k(n-k)F^k(1-F)^{n-k-1}}_{S_2}\Big]$$

$$S_1 = \left[k\cdot C_n^k = nC_{n-1}^{k-1}\right] = \sum_{k=j}^{n} nC_{n-1}^{k-1}\cdot F^{k-1}(1-F)^{n-k} = [m=k-1] =$$

д-во по опр. C_n^k

$$= \sum_{m=j-1}^{n-1} nC_{n-1}^{m}\cdot F^{m}(1-F)^{n-m-1}$$

$$S_2 = \left[(n-k)C_n^k = nC_{n-1}^{k}\right] = \sum_{k=j}^{n} nC_{n-1}^{k}\cdot F^{k}(1-F)^{n-k-1}$$

Тогда $f_{x_{(j)}}(x) = f(x)\left[S_1 - S_2\right] = f(x)\left[S_1|_{m=j-1} - S_2|_{k=n}\right] =$

$$= f(x)\left[nC_{n-1}^{j-1}\cdot F^{j-1}\cdot(1-F)^{n-j} - \cancel{nC_{n-1}^{n}\cdot F^{n}(1-F)^{-1}}_{0}\right] =$$

$$= f(x)\left[\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}F^{j-1}\cdot(1-F)^{n-j}\right]$$

Ответ: $F_{x_{(j)}} = \sum_{k=j}^{n} C_n^k F^k(x)\left[1-F(x)\right]^{n-k}$;

$f_{x_{(j)}} = f(x)\left[\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}F(x)^{j-1}\cdot\left[1-F(x)\right]^{n-j}\right]$

№11 **Упражнение 11**

Пусть случайные величины ξ, η обладают плотностями f_ξ, f_η. Найти плотность $\xi - \eta$. Пусть ξ, $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Найти $\mathrm{P}(\xi > \eta)$. Остается ли ответ верным, если случайные величины ξ, η распределены не по нормальному закону?

Пусть $\nu = \xi - \eta$ — с.в. с пл. f_ν; $P(\xi>\eta) = P(\nu>0)$

$$F_\nu(z) = P(\xi-\eta\le z) = \iint_{x-y\le z} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \left[\begin{matrix}x=x\\ u=x-y\end{matrix};\ |J|=1\right] =$$

$$= \iint_{u\le z} f_{\xi,\eta}(x,x-u)\,dx\,du = \int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, f(x,x-u) \Rightarrow f_\nu(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,x-u)\,dx$$

Для $\forall\, \xi,\eta$ таких, что 1) $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ и одинаково распр (*)
2) ξ,η им. непр. распр

Верно: $P(\xi>\eta) + P(\xi<\eta) + \cancel{P(\xi=\eta)} = 1$ — 0 в силу 2)

$P(\xi>\eta) = P(\xi<\eta)$ в силу 1) $\Rightarrow P(\xi>\eta) = 1/2$

$\xi,\eta \sim N(0,1)$ — частн. случай

Ответ: $\nu = \xi-\eta$: $f_\nu(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,x-u)\,dx$;

$P(\xi>\eta) = 1/2$ для всех с.в., уд. (*)

№12 **Упражнение 12**

В n ячейках случайно и независимо друг от друга размещается k частиц так, что каждая из них попадает в $i-$ю ячейку с вероятностью p_i, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ - случайный вектор, $i-$я компонента которого соответствует числу частиц в $i-$ой ячейке. Доказать, что $\boldsymbol{\xi} \sim \mathrm{Poly}(k, p_1, \ldots, p_n)$.

$$P(\xi = (m_1,\ldots m_n),\ m_1+\ldots+m_n = k) = \frac{k!}{m_1!\cdot\ldots\cdot m_n!}\cdot p_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{m_n} \quad (*)$$

$m_1\ldots m_n$ — произв $\Rightarrow$ (*) — полиномиальн. распр. с параметрами $(k, p_1, \ldots p_n)$

ч.т.д.

№13

Упражнение 13

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim \text{Poly}(k, p_1, \dots, p_n)$. Доказать: $\xi_i \sim \text{Binom}(k, p_i)$.

Интерпретируем полином. распр. как размещение k частиц. по n ячейкам с вероятн. $p_1 \dots p_n$.

Тогда любая частица с вер. p_1 попадает в 1-ую ячейку и с вер. $(1-p_1)$ в одну из других ячеек.

$\Rightarrow$ ξ_1 – число успехов в k независимых испытаниях с вер. успеха p_1

то есть, $\xi_1 \sim \text{Binom}(k, p_1)$

Аналогично для $\xi_2, \dots \xi_n$

Итого: $\xi_i \sim \text{Binom}(k, p_i)$ ч.т.д.

№14

Упражнение 14 | Общий случай формулы изменения плотности |

В общем случае функция $y = \varphi(x)$ может быть такова, что $x = \psi(y)$ неоднозначна, т.е. одному y может соответствовать несколько значений x: $x_1 = \psi_1(y), \dots, x_n = \psi_n(y)$, где x_i - корни $\varphi(x)$, n - число участков монотонности $\varphi(x)$. Модифицируйте формулу для $f_\eta(y)$ для описанного случая.

Формула изменения плотности:

1) $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ – с.в. с плотн. $g(x)$; $\xi(\Omega) = A \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\varphi : A \to B$ – диффеоморфизм (биект, φ, φ^{-1} – непр. дифф)

Тогда плотность с.в. $\varphi(\xi)$ равна:

$$f_{\varphi(\xi)}(t) = g(\varphi^{-1}(t)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}| \cdot I\{t \in B\}$$

Сформулируем задачу:

Пусть ξ – с.в. с плотн. $g(x)$, опр. на A; $\eta = \varphi(\xi)$;

$\exists$ разбиение A на $I_1, \dots I_n$; $\forall k$ на I_k $\varphi(\xi)$ строго мон., диф.;

$B_k = \varphi(I_k)$ – образ I_k;

Для $y \in B_k$ опр. ф-я $x = \psi_k(y)$

Найти: $f_\eta(y)$

Для произвольного C:

$$P(\varphi(\xi) \in C) = P(\xi \in \varphi^{-1}(C)) = \left[\varphi^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \cap \varphi^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^{n} \psi_k(C \cap B_k)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(\xi \in \psi_k(C \cap B_k)) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\psi_k(C \cap B)} g(x)\,dx = \left[x = \psi_k(y);\ dx = \left|\frac{d\psi_k}{dy}\right| dy\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{C \cap B_k} g(\psi_k(y)) \cdot \left|\frac{d\psi_k}{dy}\right| dy = \int_C \sum_{k=1}^{n} g(\psi_k(y)) \left|\frac{d\psi_k}{dy}\right| \cdot I(y \in B_k)\,dy$$

$$\Rightarrow f_{\varphi(\xi)} = \sum_{k=1}^{n} g(\psi_k(y)) \left|\frac{d\psi_k}{dy}\right| I(y \in B_k)$$

Ответ: