Московский Физико-Технический Институт

Кафедра теоретической механики

Аналитическая механика

Часть I. Осенний семестр

Домрачев А.В.
Левченко Д.Н.
Ляпустина М.С.
Малинин П.А.
Шамсимухаметов Д.Р.
Шевцов А.Е.

Над текстом работала команда проекта "Физтех.Билеты"
при поддержке студсоветов ФРТК и ФУПМ
Автор проекта: Шамсимухаметов Д.Р.

Экзаменационная программа осеннего семестра.

Кинематичка точки и системы

1. Кинематика точки. Проекции скорости и ускорения точки на оси сопровождающего трехгранника.
2. Криволинейные координаты точки. Составляющие скорости и проекции ускорения точки на оси локального базиса.
3. Углы Эйлера. Совмещение двух произвольных положений твердого тела с неподвижной точкой поворотами на углы Эйлера.
4. Ортогональные матрица и их свойства (свойства собственных чисел и векторов без доказательства).Теорема Эйлера о конечном повороте.
5. Сложение поворотов в ортогональных матрицах.
6. Алгебра кватернионов.
7. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение).
8. Формулы сложения поворотов твердого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона.
9. Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела.
10. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона) в проекциях на неподвижные и связанные оси.
11. Распределение скоростей и ускорений точек твердого тела.
12. Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении.
13. Кинематика сложного движения тела. Сложение угловых скоростей и угловых ускорений.
14. Кинематические уравнения Пуассона для ортогональных матриц.
15. Кинематические уравнения Эйлера.
16. Приведение распределения скоростей в твёрдом теле к кинематическому винту.

Динамика

17. Импульс и кинетический момент механической системы. Перенос полюса.
18. Теоремы об изменении импульса и кинетического момента механической системы.
19. Кинетическая энергия механической системы. Теорема Кёнига.
20. Работа силы. Классификация сил.
21. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.
22. Потенциальные силы. Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии.
23. Движение материальной точки в центральном поле. Уравнение Бине. Законы Кеплера.
24. Применение основных теорем и законов механики в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции.
25. Геометрия масс твердого тела. Тензор и эллипсоид инерции.
26. Вычисление кинетической энергии и момента количества движения твердого тела с неподвижной точкой.
27. Динамические и кинематические уравнения Эйлера твердого тела с неподвижной точкой.
28. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Интегрирование уравнений движения в квадратурах.
29. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Интерпретация Мак-Куллага.
30. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Интерпретация Пуансо.
31. Регулярная прецессия в случае Эйлера. Выражения для угловых скоростей прецесси, собственного вращения и угла нутации через начальные условия.
32. Момент, поддерживающий регулярную прецессию твердого тела с неподвижной точкой при наличии динамической симметрии.
33. Случай Лагранжа в динамике твердого тела с неподвижной точкой. Интегралы движения, их использование для интергрирования уравнений движения в квадратурах. Качественный характер движения.
34. Регулярная прецессия в случае Лагранжа. Быстрая и медленная прецессия.
35. Механические связи и системы со связями. Классификация связей, возможные и виртуальные перемещения. Число степеней свободы системы.
36. Вывод уравнений Лагранжа.
37. Вычисление обобщенных сил.
38. Потенциальные и обобщенно-потенциальные обобщенные силы. Лагранжиан системы.
39. Исследование зависимости кинетической энергии от обобщённых координат и скоростей.
40. Теорема о разрешимости уравнений Лагранжа относительно старших производных. Приведение уравнений Лагранжа к нормальному виду Коши.
41. Первые интегралы лагранжевых систем: циклические координаты и интеграл Пенлеве-Якоби.

1. Кинематика точки. Проекции скорости и ускорения точки на оси сопровождающего трехгранника.

Задача кинематики - определение **положения** точки, её **скорости** и **ускорения**, а также **установление связей** между этими характеристиками при различных способах связи.

Траектория, скорость, ускорение: **Положение** материальной точки считается известным, если задан радиус-вектор $\vec{r}$ этой точки в некоторой заранее фиксированной декартовой системе координат. **Движение** материальной точки задается явной функцией времени $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Кривая, описываемая движущейся точкой, называется **траекторией**.

Скорость точки – $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, Модуль скорости – $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Ускорение точки – $\vec{w}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$, Модуль ускорения – $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$.

Естественный (сопровождающий) трехгранник. Разложение скорости и ускорения в осях трехгранника.

Пусть закон движения точки задан: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

. Новый параметр для траектории $s(t)$: - длина дуги. $\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}[s(t)] = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dot{s} = \vec{\tau}\dot{s}$, где $|\vec{\tau}| = 1$. Сам вектор определяет направление касательной к траектории в рассматриваемой точке. Вычислим ускорение точки:

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\dot{s} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Вектор ${}^{d\vec{\tau}}/_{ds}$ называется **вектором кривизны**. Он связан с единичным вектором нормали к кривой $\vec{n}$ следующим образом:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n},$$

где величина ρ называется **радиусом кривизны** траектории в рассматриваемой точке. Дополним векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ третьим ортогональным им единичным вектором $\vec{b}$: базис правый. $\left(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\right)$: - **естественный** или **сопровождающий** трехгранник. В нём:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ v^2/\rho \\ 0 \end{pmatrix},$$

где величины $\dot{v}$ и ${v^2}/_{\rho}$ называются соответственно **тангенциальным** и **нормальным** ускорениями.

2. Криволинейные координаты точки. Составляющие скорости и проекции ускорения точки на оси локального базиса. Коэффициенты Ламе.

Положение материальной точки $\vec{r} = x,y,z$ можно задавать не только при помощи декартовых координат x,y,z, но и любых других *независимых* величин q_1, q_2, q_3, называемых **криволинейными координатами** точки. Задание $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ полностью определяет положение материальной точки $\vec{r}(t) = \vec{r}[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]$.

Фиксируя две координаты и варьируя третью получим **координатную линию** последней. Касательные к координатным линиям в точке (q_1^*,q_2^*,q_3^*) образуют систему осей координат q_1, q_2 и q_3.

Для того чтобы определить компоненты **скорости** $\vec{v}$ по построенным таким образом осям координат, введем в рассмотрение соответствующие орты:

Орт $\vec{\tau}_i$ оси q_i $(i = 1,2,3)$ равен $\vec{\tau}_i = \dfrac{\partial\vec{r}/\partial q_i}{|\partial\vec{r}/\partial q_i|}$ и **коэффициенты Ламе**: $H_i = |\partial\vec{r}/\partial q_i|$ тогда

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = H_i\vec{\tau}_i \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i\dot{q}_i\vec{\tau}_i},$$

т.е. его компонента v_i скорости $\vec{v}$ по оси q_i равна $v_i = H_i\dot{q}_i$

Определим, далее, w^i - проекцию **ускорения** $\vec{w}$ на ось q_i, т.е. скалярное произведение $\vec{w}\cdot\vec{\tau}_i$:

$$w^i = \vec{w}\cdot\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{1}{H_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) - \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right].$$

Выражение для скорости определяет функцию $\vec{v} = \vec{v}(q,\dot{q})$, откуда следует

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i},$$

но, с другой стороны, очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}$$

Теперь равенство для проекции ускорения представимо в виде

$$w^i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}\right], \Rightarrow \boxed{w^i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q_i}\right]}.$$

3. Углы Эйлера. Совмещение двух произвольных положений твердого тела с неподвижной точкой поворотами на углы Эйлера.

Твердое тело – совокупность из $n > 1$ точек, расстояние между любыми двумя const.
Вращение – движение, при котором одна из точек тела неподвижна.
Произвольное движение т.т. – движение полюса и вращение относительно него.

Матрица направляющих косинусов.

Пусть ОНБ связанный с телом $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$. Радиус-вектор произвольной точки тела в этом базисе имеет неизменные компоненты $\vec{R} = (x,y,z)$. $A\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$ – неподвижная система отсчета,ОНБ с началом в A. Радиус-вектор произвольной точки тела в этом базисе:

$$\vec{r'} = \vec{R_O} + \vec{R} = \vec{R_O} + (x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + x\vec{e_3}), \qquad \vec{R_O} = \vec{AO}$$

Отсюда следует, что для однозначного опреления положения точки тела в системе $A\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$ достаточно задать положение базиса $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ относительно базиса $A\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$.

Движение базиса $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ относительно $A\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$ может быть полностью описано движением точки O и движением базиса $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ относительно $O\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$ (*вращение*). Теперь ориентацию твердого тела можно задать с помощью **матрицы направляющих косинусов** :

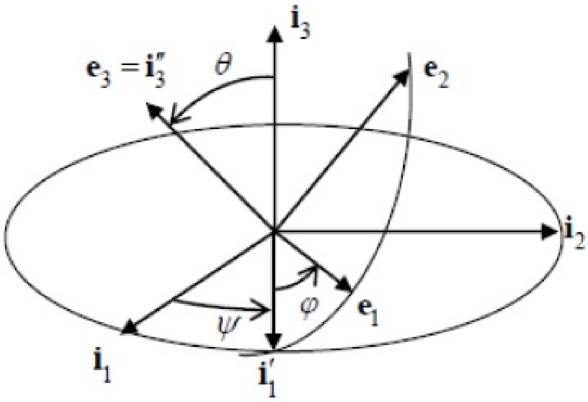
$$\vec{R'} = A\vec{R},$$

где $\vec{R'}$ - радиус-вектор произвольной точки тела в базисе $O\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$, A - матрица перехода от базиса $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ к базису $O\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$. Оба этих базиса ортонормированные, поэтому матрица направляющих косинусов ортогональна:

$$AA^T = E$$

Углы Эйлера.

Теорема 1. *Пусть базис $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ занимает произвольное положение. Все векторы $\vec{i_k}$ базиса $O\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$ можно совместить с базисными векторами $\vec{e_k}$ с помощью трех поворотов.*



1. Поворот вокруг оси $\vec{i_3}$ на угол ψ до совмещения вектора $\vec{i_1}$ *с линией узлов* $\vec{i'_1}$, т.е. с линией пересечения плоскостей векторов $\vec{i_1}, \vec{i_2}$ и $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

2. Поворот вокруг линии узлов $\vec{i'_1}$ на угол θ до совмещения орта $\vec{i_3}$ с ортом $\vec{e_3}$.

3. Поворот вокруг оси $\vec{e_3}$ отр $\vec{i''_3}$ на угол φ до полного совмещения базисов.

Совокупность указанных поворотов переводит базис $O\vec{i_1}\vec{i_2}\vec{i_3}$ в базис $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ и представляет собой последовательность поворота на *эйлеровы* углы ψ (угол прецессии), θ (угол нутации) и φ (угол собственного вращения).

Отметим, что с помощью углов Эйлера не всегда можно задать ориентацию твердого тела. Если $\sin\theta = 0$, то углы Эйлера вырождаются.

4. Ортогональные матрица и их свойства. Теорема Эйлера о конечном повороте.

Ортогональное преобразование – преобразование, сохраняющее расстояние между произвольной парой точек.

Поворот твердого тела математически может быть задан как ортогональное преобразование.

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; \vec{R}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \Rightarrow \vec{R}' = A\vec{R}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{23}\, a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из определения поворота следует равенство скалярных квадратов векторов $\vec{R}$ и $\vec{R}'$:

$$R^2 = \vec{R^T} \cdot \vec{R} = R'^2 = \vec{R'^T} \cdot \vec{R}' = \vec{R^T} A^T A \vec{R} \Rightarrow A^T A = E \Rightarrow A\text{– ортогональная матрица}$$

Свойство 1. Из равенства $det(A^T A) = 1$ вытекает $detA = \pm 1$.

Свойство 2. $\forall A : detA \neq 0 \; \exists! A^{-1} : A^{-1}A = AA^{-1} = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$

Свойство 3. A,B - ортогональные $\Rightarrow C = AB$ – ортогональна. ($C^T C = B^T A^T AB = E$).

Свойство 4. Множество всех ортогональных матриц образует группу с обозначением $O(3)$. Множество ортогональных матриц с $\det A = 1$ образует подгруппу, её обозначают $SO(3)$. Читается это обозначение так: *специальная ортогональная группа преобразований трёхмерного пространства в себя.*

Свойство 5. Между положениями твердого тела и $SO(3)$ имеется биекция. Действительно, рассмотрим образ первого единичного вектора триэдра xyz:

$$\vec{i'} = A\vec{i} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{23}\, a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \Rightarrow A = (\vec{i'_1}, \vec{i'_2}, \vec{i'_3})$$

Итак, группа $SO(3)$ представляет собой *конфигурационное многообразие* твердого тела с одной неподвижной точкой.

Свойство 6. Элементы ортогональной матрицы равны их алгебраическим дополнениям. Действительно, используя правило вычисления обратной матрицы имеем $A^{-1} = {A_{ij}}^T / det\, A$. Рассмотрим лишь матрицы с $det\, A = 1$ и, учитывая, что $A^T = A^{-1}$, находим $a_{ij} = Aij$.

Свойство 7. Определим действие ортогонального преобразования на комплексный вектор:

$$A(\vec{P} + i\vec{Q}) = A\vec{P} + iA\vec{Q}, \text{ где } \vec{P}, \vec{Q} \text{ – вещественные векторы}$$

Если определить норму комплексного вектора как

$$|\vec{P} + i\vec{Q}| = \sqrt{(\vec{P} + i\vec{Q})^T * (\vec{P} + i\vec{Q})} = \sqrt{\vec{P^T}\vec{P} + \vec{Q^T}\vec{Q}}, \qquad (\vec{P} + i\vec{Q})^T = \vec{P^T} - i\vec{Q^T}$$

то свойство ортогональных преобразований сохранять норму вектора распространяется и на комплексные векторы.

Свойство 8. Собственные числа:

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi, \qquad \cos\varphi = \frac{tr\,A - 1}{2}$$

Собственные векторы:

$$\vec{R_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{R_{2,3}} = \vec{P} \mp i\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Свойство 9.*Любое ортогональное преобразование пространства эквивалентно повороту пространства вокруг собственного вектора $\vec{R}$ на угол φ.

Действительно, перепишем уравнение $A\vec{R_k} = \alpha_k \vec{R_k}$ для каждого собственного вектора в вещественной форме:

$$A\vec{R} = \vec{R},\ A\vec{P} = \vec{P}\cos\varphi + \vec{Q}\sin\varphi,\ A\vec{Q} = -\vec{P}\sin\varphi + \vec{Q}\cos\varphi$$

Если оси исходного триэдра i,j,k выбрать направленными по векторам R,P,Q, то

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A\vec{R}, A\vec{P}, A\vec{Q}) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в базисе $\vec{R},\vec{P},\vec{Q}$ ортогональная матрица – матрица поворота вокруг $\vec{R}$ на угол φ.

Теорема 2 (Теорема Эйлера)**.** *Любое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой может быть заменено плоским поворотом вокруг некоторый оси на некоторый угол.*

В свойстве 9 вычислено направление этой оси и соответствующий угол.

5. Сложение поворотов в ортогональных матрицах.

Активная точка зрения (поворот: преобразование пространства, базис фиксирован)

$$\vec{R}' = A\vec{R},\ \vec{R}'' = B\vec{R}, \Rightarrow \vec{R}'' = B\vec{R}' = BA\vec{R} = C\vec{R} \Rightarrow \boxed{C = BA}.$$

$C = BA$, произведение матриц составляющих поворотов в *обратном порядке*, и есть матрица, задающая суммарный поворот.

В общем случае: $\boxed{C = A_n A_{n-1} ... A_1}$

Пассивная точка зрения (поворот: преобразование базиса, пространство фикс.)

Можно образы единичных векторов $\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$, т.е. $\vec{i}'$,$\vec{j}'$,$\vec{k}'$, рассматривать как базис новой системы $x'y'z'$, а ортогональное преобразование — как преобразование координат. Сами векторы при этом считаются неизменны.

Выясним, как подсчитываются координаты вектора $\vec{R}$ в новом базисе. Образы ортов исходного базиса имеют вид:

$$\vec{i}' = A\vec{i},\ \vec{j}' = A\vec{j},\ \vec{k}' = A\vec{k}\ \Rightarrow\ \vec{i} = A^T\vec{i}',\ \vec{j} = A^T\vec{j}',\ \vec{k} = A^T\vec{k}'.$$

в разложение

$$\vec{R}^{(')} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = xA^T\vec{i}' + yA^T\vec{j}' + zA^T\vec{k}' = A^T(x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}').$$

В новом базисе матричная форма записи ортов такова:

$$\vec{i}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{j}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{R^{(')}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\vec{R}^{(')} = A^T\vec{R},\ \vec{R}^{('')} = B^T\vec{R}^{(')}. \Rightarrow \boxed{C = AB}$$

В общем случае: $\boxed{C = A_1 A_2 ... A_n}$

Это и есть формула сложения поворотов с позиций преобразования координат.

Подчеркнем принципиальные различия двух точек зрения при сложении поворотов:

Активная точка зрения. Матрицы последовательных поворотов перемножаются в *обратном порядке.* Все матрицы вычисляются в общем для всех базисе i,j,k.

Пассивная точка зрения. Матрицы последовательных поворотов перемножаются в *прямом порядке.* Каждая матрица рассматривается в поворачиваемом ею базисе (A в $\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$, B в $\vec{i}'$,$\vec{j}'$,$\vec{k}'$ и т.д.

6. Алгебра кватернионов.

Кватернионы представляют собой четырехмерные гиперкомплексные числа:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{i_1} + \lambda_2 \vec{i_2} + \lambda_3 \vec{i_3} = \lambda_0 + \vec{\lambda},$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - произвольные действительные числа, называемые компонентами кватерниона Λ, а i_1, i_2, i_3 - кватернионные единицы.

1)Кватернионное **сложение** определяется по правилам обычной векторной алгебры:

$$\text{Пусть } M = \mu_0 + \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3, \Rightarrow \boxed{\Lambda + M = \lambda_0 + \mu_0 + \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k + \mu_k) i_k}$$

2)Кватернионное **произведение** обозначается знаком "$\circ$" и для умножения кватерниона на скаляр определяется так:

$$a \circ \Lambda = \Lambda \circ a = a\lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} a\lambda_k i_k,$$

правила умножения кватернионных единиц определяются следующим образом:

$$i_k \circ i_k = -1, \qquad i_1 \circ i_2 = i_3,\ i_2 \circ i_3 = i_1,\ i_3 \circ i_1 = i_2 \qquad i_2 \circ i_1 = -i_3,\ i_3 \circ i_2 = -i_1,\ i_1 \circ i_3 = -i_2$$

Правило умножения (определение): $i_k \circ i_j = i_k \times i_j - i_k \cdot i_j, \Rightarrow \Lambda \circ (M + N) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ N$

Получаем для кватернионного произведения векторов $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ формулу

$$\vec{\lambda} \circ \vec{\mu} = \vec{\lambda} \times \vec{\mu} - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} \Rightarrow \boxed{\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}}$$

3)Умножение кватернионов ассоциативно, но некоммутативно. А также скалярная часть произведения кватернионов не меняется при циклической перестановке сомножителей.

4)Для кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ определяется **сопряженный кватернион** $\widetilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$:

5)**Норма** кватерниона $||\Lambda|| = \Lambda \circ \widetilde{\Lambda} = \lambda_0^2 + \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} = \sum\limits_{k=0}^{3} \lambda_k^2$

$$\widetilde{M} \circ \widetilde{\Lambda} = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} - (\lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}) = (\widetilde{\Lambda \circ M}) \Rightarrow ||\Lambda \circ M|| = \Lambda \circ M \circ \widetilde{M} \circ \widetilde{\Lambda} = ||\Lambda|| \cdot ||M||$$

6) *Деление* – умножения на *обратный* кватернион.

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1 \Rightarrow \Lambda^{-1} = \frac{\widetilde{\Lambda}}{||\Lambda||}, \ (||\Lambda|| \neq 0).$$

Кватернион, обратный произведению кватернионов, вычисляется по формуле:

$$(\Lambda_1 \circ \cdots \circ \Lambda_n)^{-1} = \Lambda_n^{-1} \circ \cdots \circ \Lambda_1^{-1}$$

7. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение).

Отображение множества кватернионов в себя – **присоединённое отображение.**

$$R \longrightarrow R' :\ R' = \Lambda \circ R \circ \widetilde{\Lambda},\ ||\Lambda|| = 1$$

Свойство 1: Присоединённое отображение не изменяет скалярную часть кватерниона

$$R' = \Lambda \circ R \circ \widetilde{\Lambda} = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \widetilde{\Lambda} = \Lambda \circ r_0 \circ \widetilde{\Lambda} + \Lambda \circ \vec{r} \circ \widetilde{\Lambda}$$

$$\Lambda \circ r_0 \circ \widetilde{\Lambda} = r_0 \circ ||\Lambda|| = r_0, \quad \widetilde{\Lambda \circ \vec{r} \circ \widetilde{\Lambda}} = \Lambda \circ \widetilde{\vec{r}} \circ \widetilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \widetilde{\Lambda},$$

следовательно второе слагаемое не может дать скалярной части.

Свойство 2: Векторная часть кватерниона R при присоединённом отображении подвергается действию ортогонального преобразования (сохраняется модуль векторной части).

$$||R'|| = ||\Lambda \circ R \circ \widetilde{\Lambda}|| = ||\Lambda|| \circ ||R|| \circ ||\widetilde{\Lambda}||$$

$$\cancel{(r_o')^2} + (r_1')^2 + (r_2')^2 + (r_3')^2 = \cancel{r_0^2} + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

Теорема 3. *Присоединённое отображение, заданное кватернионом* $\Lambda = \cos\dfrac{\varphi}{2} + \vec{e}\sin\dfrac{\varphi}{2}$, *задает поворот пространства на угол* φ *вокруг оси* $\vec{e}$.

Доказательство. Кватернион единичный, откуда $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$. Два скаляра, удовлетворяющие уравнению единичной окружности, всегда могут быть представлены в таком виде, что $\Lambda = \cos\varphi/2 + +\vec{e}\sin\varphi/2$.

Рассмотрим базис $\vec{i}_1,\vec{i}_2,\vec{i}_3$: $\vec{i}_1 = \vec{e}$; $\vec{i}_2, \vec{i}_3 \perp \vec{e}$.

$$\vec{i}_1' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \vec{i}_1 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \vec{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) = (-\sin\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1\cos\frac{\varphi}{2}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \vec{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) =$$

$$= -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1\sin^2\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1\cos^2\frac{\varphi}{2} = \vec{i}_1$$

$$\vec{i}_2' = \vec{i}_2\cos\varphi + \vec{i}_3\sin\varphi$$

$$\vec{i}_3' = -\vec{i}_2\sin\varphi + \vec{i}_3\cos\varphi$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ – матрица поворота на угол } \varphi \text{ вокруг оси } \vec{e}.$$

□

В покомпонентной записи этот кватернион имеет вид

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + x\sin\frac{\varphi}{2}\vec{i}_1 + y\sin\frac{\varphi}{2}\vec{i}_2 + z\sin\frac{\varphi}{2}\vec{i}_3,$$

коэффициенты которого называются **параметрами Родрига-Гамильтона.**

8. Формулы сложения поворотов твердого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона.

Активная точка зрения.

Пусть первый поворот задан кватернионом Λ, второй кватернионом $\mathcal{M}$:

$$\vec{R}' = \Lambda \circ \vec{R} \circ \overline{\Lambda},\ \vec{R}'' = \mathcal{M} \circ \vec{R}' \circ \overline{\mathcal{M}}.$$

Следовательно, результирующий поворот

$$\vec{R}'' = \mathcal{M} \circ \Lambda \circ \vec{R} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \circ \Lambda \circ \vec{R} \circ \overline{(\mathcal{M} \circ \Lambda)}$$

задается кватернионом $\boxed{\mathcal{N} = \mathcal{M} \circ \Lambda.}$

Как и в случае матриц, сложению поворотов в случае их активного представления отвечает произведение кватернионов составляющих поворотов в *обратном порядке*. При этом все кватернионы заданы в исходном базисе $\vec{i_k}$ $(k = 1{,}2{,}3)$.

Пассивная точка зрения.

Выясним вначале, как изменяется запись вектора при переходе к новому базису

$$\vec{i'_k} = \Lambda \circ \vec{i_k} \circ \overline{\Lambda}.$$

Пусть в старом базисе имеем разложение вектора

$$\vec{R} = x\vec{i_1} + y\vec{i_2} + z\vec{i_3}.$$

При переходе к новому базису получаем

$$\vec{R^{(')}} = x\overline{\Lambda} \circ \vec{i'_1} \circ \Lambda + y\overline{\Lambda} \circ \vec{i'_2} \circ \Lambda + z\overline{\Lambda} \circ \vec{i'_3} \circ \Lambda = \overline{\Lambda} \circ (x\vec{i'_1} + y\vec{i'_2} + z\vec{i'_3}) \circ \Lambda = x'\vec{i'_1} + y'\vec{i'_2} + z'\vec{i'_3}.$$

Поскольку направляющие косинусы оси конечного поворота одинаковы как в исходных осях, так и в повернутых, то $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\vec{i_1} + \lambda_2\vec{i_2} + \lambda_3\vec{i_3} = \lambda_0 + \lambda_1\vec{i'_1} + \lambda_2\vec{i'_2} + \lambda_3\vec{i'_3}$ в последнем равенстве можно считать все кватернионы заданными в осях $\vec{i'_k}$.

Пусть кватернион $\mathcal{M}$ задает очередное преобразование базиса: $\vec{i''_k} = \mathcal{M} \circ \vec{i'_k} \circ \overline{\mathcal{M}}$, тогда по аналогии с предыдущим имеем:

$$\vec{R^{('')}} = \overline{\mathcal{M}} \circ (x'\vec{i''_1} + y'\vec{i''_2} + z'\vec{i''_3}) \circ \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \circ \overline{\Lambda} \circ (x\vec{i''_1} + y\vec{i''_2} + z\vec{i''_3}) \circ \Lambda \circ \mathcal{M}.$$

Кватернион результирующего поворота получился таким:

$$\boxed{\mathcal{N} = \Lambda \circ \mathcal{M}},$$

т. е. он равен произведению кватернионов составляющих поворотов в прямом порядке.

Определение

Параметры Родрига-Гамильтона коэффициенты кватерниона в базисе, преобразуемом этим кватернионом (пассивная точка зрения).

9. Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела.

Пусть совершается поворот на φ вокруг $\vec{e}$.

Определение

Вектор $\vec{\varphi} = \varphi_{\vec{e}}$ называется вектором Эйлера.

Определение

Вектор $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \longrightarrow 0} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$ –угловая скорость твердого тела, где $\Delta\vec{\varphi}$ – вектор эйлерова поворота за Δt

Определение

Угловым ускорением называется вектор $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$.

10. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона) в проекциях на неподвижные и связанные оси.

Пусть тело совершает непрерывное вращение вокруг неподвижной точки. Определим понятие мгновенной угловой скорости в мгновение времени t так. Положение тела в этот момент времени примем за начальное. Положение тела в близкий момент $t+\Delta t$ по теореме Эйлера может быть получено из начального положения поворотом вокруг некоторой оси $\varepsilon(t,\Delta t)$ на некоторый угол $\Delta\varphi(t,\Delta t)$. То есть это положение может быть описано вектором конечного поворота $\Delta\varphi(t,\Delta t)\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$. Мгновенной угловой скоростью твердого тела называется предел

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta\varphi(t,\Delta t)}{\Delta t}\vec{\varepsilon}(t,\Delta t),$$

если такой предел существует. Угловую скорость тела удобно связать с производной от положения тела, задаваемого кватернионом

$$\Lambda(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \vec{e}(t)\sin\frac{\varphi(t)}{2}.$$

В момент времени $t+\Delta t$ тело находится в положении

$$\Lambda(t+\Delta t) = \cos\frac{\varphi(t+\Delta t)}{2} + \vec{e}(t+\Delta t)\sin\frac{\varphi(t+\Delta t)}{2}.$$

Кватернион малого поворота, переводящий тело из первого положения во второе:

$$\Delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \varepsilon\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \varepsilon\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Закон сложения поворотов: *Активная точка зрения:*

$$\Lambda(t+\Delta t) = \Delta\Lambda\circ\Lambda(t) = \left(1+\varepsilon\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\circ\Lambda(t).$$

Отсюда получаем

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Lambda(t+\Delta t)-\Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\circ\Lambda(t).$$

То есть угловая скорость выражается через производную от кватерниона так:

$$\boxed{\vec{\omega} = 2\dot{\Lambda}\circ\overline{\Lambda}}.$$

И вектор $\vec{\omega}$, и кватернион Λ определены здесь в неподвижных осях.

Пассивная точка зрения

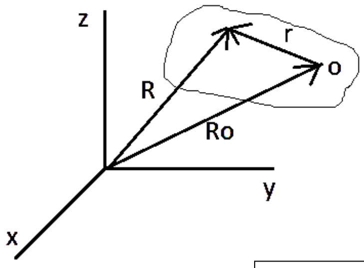
$$\Lambda(t+\Delta t) = \Lambda\circ\Delta\Lambda = \Lambda\circ\left(1+\varepsilon\frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Отсюда аналогично получаем

$$\boxed{\vec{\omega} = 2\overline{\Lambda}\circ\dot{\Lambda}}.$$

Здесь и вектор $\vec{\omega}$, и кватернион Λ определены в осях, связанных жестко с телом. Кватернион Λ имеет одинаковый вид в обоих случаях.

11. Распределение скоростей и ускорений точек твердого тела.



$$\vec{r} = \vec{R_0} + \vec{\rho}$$

$\vec{\rho}$ – жестко связано с твердым телом

Рассмотрим $\Delta\vec{r}$ за время Δt

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{R_0} + \Delta\vec{\rho}$$

$$\rho(t+\Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\vec{\rho}(t)$$

$\Delta\vec{\rho} \simeq \Delta\hat{\varphi}\vec{\rho} \Rightarrow \vec{V} = \lim\limits_{\Delta\longrightarrow 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{V_0} + \hat{\omega}\vec{\rho}$, также из этого следует, что $\boxed{\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$

где $\hat{\omega}$ соответствует $\vec{\omega}$

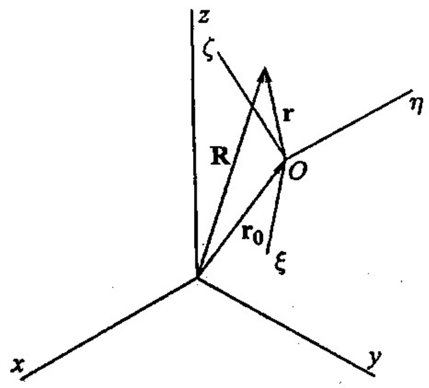
$$\boxed{\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}} \text{ – формула Эйлера}$$

$$\vec{w} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V_0}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}, \qquad \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} \text{ – угловое ускорение}$$

$$\boxed{\vec{w} = \vec{w_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}]} \text{ – формула Ривальса.}$$

12. Кинематика сложного движения точки. Вычисление скоростей и ускорений в сложном движении.

Мы будем полагать известными в проекциях на подвижные оси (система отсчета наблюдателя) следующие величины:
$\vec{v_0}(t)$ — скорость точки O; $\vec{w_0}(t)$ — ускорение точки O;
$\vec{\omega_0}(t)$ — угловая скорость системы $\xi\eta\zeta$ относительно системы xyz;



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \text{ – положение точки в подвижной системе;}$$

$$v_{\vec{\text{отн}}} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \text{ – скорость точки в подвижной системе;}$$

$$w_{\vec{\text{отн}}} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} \text{ – ускорение точки в подвижной системе.}$$

Требуется найти в проекциях на подвижные оси полную скорость точки относительно системы xyz и полное ускорение этой точки относительно той же системы. Пусть A есть ортогональная матрица преобразования от системы $x'y'z'$ к системе $\xi\eta\zeta$ (система $x'y'z'$ имеет общее начало с системой $\xi\eta\zeta$, а оси параллельны осям xyz). Тогда связь между изображенными на рисунке векторами будет такой:

$$\vec{R} = \vec{r_0} + A\vec{r}, \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \qquad \vec{r_0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Вычисляем полную производную:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r_0}}{dt} + \dot{A}\vec{r} + A\dot{\vec{r}}.$$

Перепроектируем это равенство на подвижные оси:

$$A^T\frac{d\vec{R}}{dt} = A^T\frac{d\vec{r_0}}{dt} + A^T\dot{A}\vec{r} + \dot{\vec{r}}.$$

Введя обозначение для полной скорости в проекциях на подвижные оси

$$\vec{V} = A^T\frac{d\vec{R}}{dt},$$

а также имея ввиду, что

$$A^T\frac{d\vec{r_0}}{dt} = \vec{v_0} \qquad \text{и} \qquad A^T\dot{A}\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

получим искомое выражение для скоростей:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v_{\text{отн}}}}.$$

Скорость $\vec{v_0} + \vec{w_0} \times \vec{r} = \vec{v_{\text{пер}}}$ называется *переносной* скоростью. Она определяет скорость той точки системы $\xi\eta\zeta$, с которой в данный момент совпадает рассматриваемая точка.

Для вычисления ускорения вернемся в последнем соотношении к проекциям на неподвижные оси:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r_0}}{dt} + A(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v_{\text{отн}}}).$$

Дифференцируя это соотношение, находим

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + \dot{A}(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v_{\text{отн}}}) + A(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{v}}_{\text{отн}})$$

Перепроектируя на подвижные оси, получаем

$$A^T \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = A^T \frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + A^T\dot{A}(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v_{\text{отн}}}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{v}}_{\text{отн}},$$

или

$$\boxed{\vec{W} = \vec{W_0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v_{\text{отн}}} + \vec{w_{\text{отн}}}}.$$

Мы получили, что полное ускорение может быть представлено в виде суммы трех частей. Первая часть называется *переносным* ускорением

$$\vec{W_{\text{пер}}} = \vec{W_0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Оно получается из полного ускорения в предположении, что рассматриваемая точка в системе $\xi\eta\zeta$ неподвижна: $\vec{v_{\text{отн}}} = 0, \vec{w_{\text{отн}}} = 0$.

Вторая часть представляет собой *относительное* ускорение. Оно совпадает с полным тогда, когда система $\xi\eta\zeta$ относительно системы xyz движется равномерно и поступательно, т. е. $\vec{w_0} = 0, \omega = 0$.

Третья часть представляет собой ускорение, называемое *кориолисовым*:
$\vec{w_{\text{кор}}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v_{\text{отн}}}$.

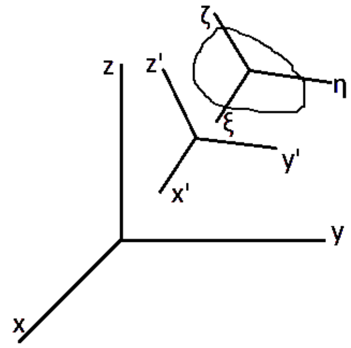
13. Кинематика сложного движения тела. Сложение угловых скоростей и угловых ускорений.

Известно: 1. движение базиса $x'y'z'$ относительно xyz.
2. движение твердого тела относительно $x'y'z'$.

$\vec{\omega^e}$,$\vec{\varepsilon^e}$ – угловая скорость и угловое ускорение базиса $x'y'z'$ относительно xyz.

$\vec{\omega^r}$,$\vec{\varepsilon^r}$ – угловая скорость и угловое ускорение твердого тела относительно $x'y'z'$.

Найти: абсолютные $\vec{\omega}$,$\vec{\varepsilon}$.



$$N = \Lambda \circ M \Rightarrow \dot{N} = \frac{1}{2}\vec{\omega_x} \circ N$$

$$\vec{\omega_x} = 2\dot{N} \circ \widetilde{N} = 2(\dot{\Lambda} \circ M + \Lambda \circ \dot{M}) \circ \widetilde{M} \circ \widetilde{\Lambda} =$$

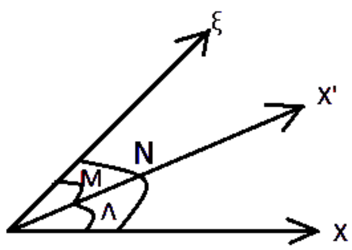
$$= 2\dot{\Lambda} \circ \widetilde{\Lambda} + \Lambda \circ 2\dot{M} \circ \widetilde{M} \circ \widetilde{\Lambda} = \vec{\omega^e_x} + \Lambda \circ \vec{\omega^r_{x'}} \circ \widetilde{\Lambda} = \vec{\omega^e_x} + \vec{\omega^r_x}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega^e} + \vec{\omega^r}}$$

Найдем абсолютное угловое ускорение: Пусть $\vec{\Omega}^r$ - угловая скорость тела относительно неподвижной системы. $\Rightarrow R\vec{\Omega}^r = \vec{\omega}^r$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega^e}} + \dot{\vec{\omega^r}} = \vec{\varepsilon^e} + \dot{R}\vec{\Omega}^r + R\dot{\vec{\Omega}}^r = \vec{\varepsilon^e} + (\dot{R}R^{-1})(R\vec{\Omega}^r) + \vec{\varepsilon}^r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon^e} + \vec{\varepsilon^r} + \vec{\omega^e} \times \vec{\omega^r}}$$



14. Кинематические уравнения Пуассона для ортогональных матриц.

Пусть вращение тела описывается в основных переменных, определяющих положение тела с одной стороны неподвижной точкой, т.е. в элементах группы $SO(3) : A(t)$. Тогда положение любой точки тела в пространстве xyz есть

$$\vec{r'} = A(t)\vec{r},$$

а ее скорость

$$\dot{\vec{r'}} = \dot{A}(t)\vec{r} = \dot{A}(t)A^T(t)\vec{r'}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера в матричной форме, получим

$$\Omega\vec{r'} = \dot{A}(t)A^T(t)\vec{r'},$$

откуда следует

$$\boxed{\dot{A} = \Omega A}.$$

Это и есть уравнения Пуассона в проекциях на оси xyz.
Для записи его в проекциях на оси $\xi\eta\zeta$ достаточно заметить, что

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} A^T.$$

И в проекциях на собственные оси получаем

$$\boxed{\dot{A} = A\Omega}.$$

15. Кинематические уравнения Эйлера.

Эти уравнения определяют связь между проекциями угловой скорости тела на оси, с ним жестко связанные, и производными от углов Эйлера. Связь легко установить, представив произвольное вращение как составленное из трех плоских вращений, воспользовавшись установленным выше законом сложения скоростей.

$$xyz \xrightarrow{\psi} x'y'z' \xrightarrow{\theta} x''y''z'' \xrightarrow{\varphi} \xi\eta\zeta.$$

Скорости составляющих вращений имеют вид

$$\dot{\vec{\Psi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \qquad \text{в осях} \qquad x', y', z',$$

$$\dot{\vec{\Theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{в осях} \qquad x'', y'', z'',$$

$$\dot{\vec{\Phi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \qquad \text{в осях} \qquad \xi\eta\zeta.$$

Эти скорости надо сложить, предварительно спроектировав их на оси $\xi\eta\zeta$:

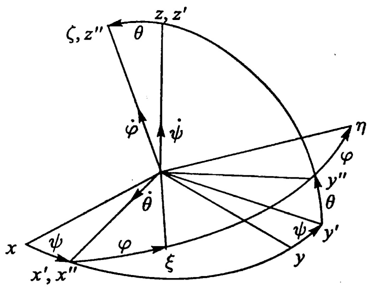
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Если нам задана угловая скорость тела $p(t), q(t), r(t)$ и необходимо найти его положение в углах Эйлера, то следует решить систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta},$$
$$\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)ctg\theta.$$

Система имеет особенность в точке $\theta = 0$.



16. Приведение распределения скоростей в твёрдом теле к кинематическому винту.

Согласно формуле Эйлера, в каждый момент времени произвольное движение твердого тела может быть представлено как комбинация поступательного движения со скоростью $\vec{V_O}$ некоторой точки O тела и вращения вокруг оси, проходящей через точку O, параллельной вектору $\vec{\omega}$. Выбирая в качестве полюса различные точки тела, получим разные представления одного и того же движения тела. **Кинематическим винтом** называется такое представление движения тела, в котором вектор скорости $\vec{V_C}$ выбранного полюса C параллелен вектору угловой скорости тела $\vec{\omega}$, т.е. $\vec{\omega} \times \vec{V_C} = 0$. Зная $\vec{V_O}$ и $\vec{\omega}$, найдем эту точку C.

В силу формулы Эйлера $\vec{V_C} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \times \vec{R_{OC}}$ для этой точки должно выполняться равенство

$$\vec{\omega} \times \vec{V_O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R_{OC}}) = 0$$

Разложим радиус-вектор искомой точки на две составляющие:

$$\vec{R_{OC}} = \vec{h_{OC}} + \vec{f_{OC}}, \vec{\omega} \cdot \vec{h_{OC}} = 0, \vec{\omega} \times \vec{f_{OC}} = 0$$

Тогда составляющая $\vec{f_{OC}}$, параллельная вектору $\vec{\omega}$ может принимать любые значения, а составляющая, ортогональная вектору $\vec{\omega}$

$$\boxed{\vec{h_{OC}} = \vec{\omega} \times \frac{\vec{V_O}}{\omega^2}}$$

Отсюда следует, что точки, удовлетворяющие условию $\vec{\omega} \times \vec{V_C} = 0$, образуют прямую, называемую *осью кинематического винта*. Эта прямая параллельна вектору угловой скорости тела - *главному вектору винта*. Скорости всех точек тела, принадлежащих оси винта, одинаковы по величине и по направлению. Величину V_C скорости этих точек можно определить по известной скорости точки O и угловой скорости тела, используя инвариантность скалярного произведения: $\vec{\omega} \cdot \vec{V_C} = \vec{\omega} \cdot \vec{V_O}$. записывая вектор $\vec{V_C}$ в виде $\vec{V_C} = {V_C \vec{\omega}}/{|\vec{\omega}|}$, получим

$$\boxed{V_C = {\vec{\omega} \cdot \vec{V_O}}/{|\vec{\omega}|}}$$

Кинематический винт характеризуется тремя параметрами: *осью винта, вектором угловой скорости тела* и *величиной скорости* $\vec{V_C}$ *точек винта.*

Отметим, что ось кинематического винта является осью минимальных скоростей твердого тела. В частном случае, когда $\vec{V_C} = 0$, движение тела представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси. Для мгновенного поступательного движения $(\vec{\omega} = 0)$ кинематический винт не определен.

17. Импульс и кинетический момент механической системы. Перенос полюса.

Рассмотрим непрерывную совокупность материальных точек, образующую механическую систему S.

Силы, действующие на рассматриваемую точку системы S со сторо- ны других точек этой же системы, называются *внутренними*, а силы, действующие на нее со стороны точек, лежащих вне рассматриваемой системы - *внешними*: *Количеством движения* изолированной материальной точки массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется вектор

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Количеством движения системы N изолированных материальных точек называется сумма количеств движения всех составляющих систему точек:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i};\ \text{для непрерывной системы} - p = \int\limits_s \vec{v}dm.$$

Моментом количества движения, или кинетическим моментом, изолированной материальной точки относительно точки O. радиус-вектор которой есть r_0, называется вектор

$$\vec{K} = m(\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{v}.$$

Моментом количеств движения системы N изолированных материальных точек называется сумма

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times \vec{v_i};\ \text{В непрерывном случае} - \vec{K} = \int\limits_s (\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{v}dm.$$

Центром масс системы N изолированных материальных точек называется точка, радиус-вектор которой вычисляется по формуле

$$\vec{r_c} = \frac{1}{M}\sum_{N}^{i=1} m_i\vec{r_i} \qquad (M = \sum_{i=1}^{N} m_i);\ \text{В непрерывном случае} - \vec{r_c} = \frac{1}{M}\int\limits_S \vec{r}dm \qquad (M = \int\limits_S dm).$$

Импульсом силы за время $t_2 - t_1$ называется интеграл

$$\vec{I} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

в случае, если $\vec{F}$ – дискретная сила. Если $\vec{F}$ – массовая плотность силы, то этот интеграл называется массовой плотностью импульса силы.

Формула переноса полюса

$$\vec{K_{O'}} = \int(\vec{r} - \vec{r_{O'}}) \times \vec{v}dm = \int(\vec{r} - \vec{r_O} + \vec{r_O} - \vec{r_{O'}}) \times \vec{v}dm = \vec{K_O} + \vec{O'O} \times \vec{p}$$

$$\boxed{\vec{K_{O'}} = \vec{K_O} + \vec{O'O} \times \vec{p}}$$

18. Теоремы об изменении импульса и кинетического момента механической системы.

Теорема 4 (Теорема об изменении количества движения)**.** *Производная от количества движения системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему.*

Доказательство. $\vec{p} = \int \vec{V}dm \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \int \vec{w}dm = \int \vec{f}dm = \int(\vec{f}^e + \vec{f}^r)dm$,

где $\vec{f}^e$ - массовая плотность внешних сил, $\vec{f}^i$ - массовая плотность внутренних сил.

В силу 3 закона Ньютона $\int \vec{f}^r dm = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{R}^e}$, где $\vec{R}^e$ - главный вектор внешних сил. □

Следствие [Теорема о движении центра масс]

$$\vec{p} = m\vec{V}_c \Rightarrow m\ddot{\vec{r}_c} = \vec{R}^e$$

Теорема 5 (Теорема об изменении кинетического момента)**.** *Скорость изменения кинетического момента относительно т.O равна моменту всех внешних сил, вычисленных относительно той же точки, за вычетом векторного произведения скорости т.O и импульса системы.*

Доказательство. $\vec{K}_o = \int(\vec{r} - \vec{r_o}) \times \vec{V}dm \Rightarrow \dot{\vec{K}}_o = \int(\vec{v} - \vec{v_o}) \times \vec{V}dm + \int(\vec{r} - \vec{r_o}) \times \vec{w}dm \Rightarrow$

$$\dot{\vec{K}}_o = -\vec{v_o} \times \vec{p} + \int(\vec{r} - \vec{r_o}) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^r)dm \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{K}}_o = \vec{M_0}^e - m\vec{v_o} \times \vec{v_c}}$$

□

19. Кинетическая энергия механической системы. Теорема Кёнига.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная неотрицательная величина
$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}.$$
Кинетической энергией системы N изолированных материальных точек называется сумма
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}\cdot\vec{v_i}.\text{ в непрерывном случае } T = \frac{1}{2}\int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{v}dm.$$

Введем понятие *относительной кинетической энергии* системы S. Это энергия, вычисленная в движении системы относительно поступательно перемещающегося трехгранника:
$$T_{\text{отн}} = \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt}dm.$$
Рассмотрим частный случай, когда начало подвижного трехгранника помещено в центр масс системы, и вычислим полную кинетическую энергию системы:
$$T = \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dm = \frac{1}{2}\int\left(\frac{d\vec{r_0}}{dt}+\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d\vec{r_0}}{dt}+\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)dm =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d\vec{r_0}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r_0}}{dt}\int dm + \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r_0}}{dt}dm + \frac{1}{2}\int\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt}dm.$$
Первый член в полученной сумме представляет собой кинетическую энергию материальной точки, помещенной в начало подвижного трехгранника и имеющей массу, равную массе системы. Второй член равен нулю, поскольку предположено, что центр масс лежит в точке O и, следовательно, $\int\vec{\rho}dm = 0$. Третий член равен относительной кинетической энергии системы.

Таким образом, установлена **теорема Кёнига**: *кинетическая энергия системы есть энергия движения центра масс (в определенном выше смысле) плюс энергия движения относительно центра масс.*

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}\int(V^r)^2dm}$$

20. Работа силы. Классификация сил.

Работой силы называется интеграл $A = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int\limits_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$.

$\partial\vec{F}/\partial t \equiv 0$, то работа, совершенная силой $\vec{F}$ за время от t_1 до t_2 может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла вдоль кривой γ, по которой переместилась за время от t_1 до t_2 точка приложение силы $\vec{F}$.

$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$ - *мощность*

Классификации сил

1. Потенциальные силы

$\vec{F}$ – потенциальная, если $\exists \Pi(t,\vec{r}) : \vec{F} = -\nabla\Pi = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$,

$$\text{так как } \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_j \partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ – критерий потенциальности системы}$$

Если $\Pi = \Pi(\vec{r}) \Rightarrow dT = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla\Pi \cdot d\vec{r} = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0$

$$T + \Pi = const$$

2. Гироскопические силы

$\vec{F}$: – гироскопическая, если она не потенциальная и $N = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

Пример Кориоллисова сила: $\vec{J}^c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}, N = \vec{J}^c \cdot \vec{v} = 0$

3. Диссипативные силы

$\vec{F} : N = \vec{F} \cdot \vec{v} \leqslant 0, < 0$ – силы с полной диссипацией

$\vec{F} = -\beta\vec{v} \Rightarrow N = -\beta v^2 < 0$

21. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Теорема. *Производная кинетической энергии системы по времени равна мощности всех сил, приложенных к ней.*

Доказательство. $T = \frac{1}{2}\int V^2 dm \Rightarrow \dot{T} = \int \overline{V}\,\dot{\overline{V}} dm = \int \overline{V}\,\overline{f} dm = \int \overline{V}(\overline{f^e} + \overline{f^i}) dm = N^e + N^i$
$\dot{T} = N^e + N^i$ □

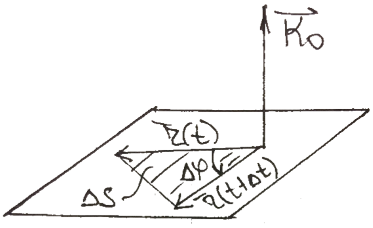
22. Потенциальные силы. Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии.

$\overline{F}$ *потенциальная*, если $\exists \Pi(t, \overline{r})$ — потенциальное силовое поле (стационарное или нестационарное в зависимости от t)

$$\overline{F} = -\nabla \Pi = -\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Так как $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x_j \partial x_i} \Rightarrow \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ – критерий потенциальности S
Если $\Pi = \Pi(\overline{r}) \Rightarrow dT = \overline{F} d\overline{r} = -\nabla \Pi dr = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$ — ЗСЭ полной механической энергии.

23. Движение материальной точки в центральном поле. Уравнение Бине. Законы Кеплера.

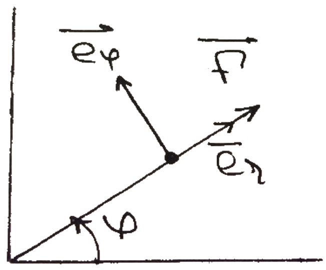


$\dot{\overline{K_0}} = \overline{r}\times\overline{F} = 0 \Rightarrow K_0 = \text{const} \Rightarrow$ движение происходит в плоскости $\perp \overline{K_0}$

$K_0 = mrv_\varphi = mr^2\dot\varphi = \text{const} \Rightarrow r^2\dot\varphi = \text{const} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta S \simeq 1/2r^2(t)\Delta\varphi \Rightarrow \dot S = 1/2c$

Уравнение движения в центральном поле в полярной СК



$v_r = \dot r$, $v_\varphi = r\dot\varphi$, $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$

Второй закон Ньютона: $\frac{m}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial v^2/2}{\partial q_i}\right) = \overline{F}\overline{q_i}$

$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F & \Rightarrow m\ddot r - m\frac{c^2}{r^3} = F \\ \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = 0 & \Rightarrow r^2\dot\varphi = \text{const} \end{cases}$$

Уравнение Бине

$$\ddot r = \frac{c^2}{r^3} + \frac{F}{m} \qquad (1)$$

Замена: $u = \frac{1}{r}$, $t \to \varphi$, введем обозначение $u' = \frac{du}{d\varphi}$. $r = \frac{1}{u}$, $\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{u'}{u^2}\varphi^2$

$$r^2\dot\varphi = c \Rightarrow \dot\varphi = cu^2 \Rightarrow \dot r = -cu',\ \ddot r = -cu''\dot\varphi = -c^2u^2u''$$

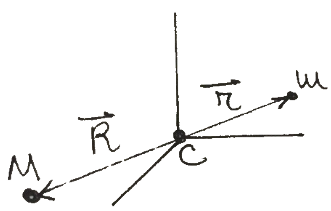
(1) $\Leftrightarrow$ $\boxed{u'' + u = \frac{F}{mc^2u^2}}$ — *уравнение Бине.*

Задача двух тел.

$$F = \gamma\frac{Mm}{(\overline{R}-\overline{r})^2}$$

По теореме об изменении импульса $M\dot{\overline{R}} + m\dot{\overline{r}} = \text{const}$, следовательно центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, СО "ц.м. системы"будет ИСО.

$$M\overline{R} + m\overline{r} = 0 \Rightarrow \overline{R} = -\frac{m}{M}\overline{r} \Rightarrow \cancel{m}\ddot{\overline{r}} = -\gamma\frac{M\cancel{m}}{(1+\frac{m}{M})^3}\frac{\overline{r}}{r^3} = -k\frac{\overline{r}}{r^3}$$



задача двух тел свелась к задаче о движении одной точки в центральном поле. Используем уравнение Бине:

$$u'' + u = \frac{-k}{c^2 \cancel{u^2}} \frac{1}{\cancel{r^2}} = \text{const} \quad \left(F = -\frac{km}{r^2}\right)$$

$$u = \frac{k}{c^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)}},$$

где $p = \frac{c^2}{k}$ — параметр орбиты, а r — траектория движения точки в центральном поле.

Законы Кеплера.

Первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов, которого находится Солнце ($e < 1$ — эллипс, $e = 1$ — парабола, $e > 1$ — гипербола)

Второй закон Кеплера: площади, заметаемые радиус–вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны времени. в которые они были заметен.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планеты вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.

$$S = \pi ab,\ 1/2cT = S \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{c} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2 a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{c^2 a} = const$$

24. Применение основных теорем и законов механики в не инерциальных системах отсчета. Силы инерции.

$\overline{w} = \overline{f}$, с другой стороны $\overline{w} = \overline{w^r} + \overline{w^e} + \overline{w^c} \Rightarrow \overline{w^r} = \overline{f} - \overline{w^e} - \overline{w^c} \Leftrightarrow \overline{w^r} = \overline{f} + \overline{j^e} + \overline{j^c}$
В не инерциальных СО: $\ddot{\rho} = \overline{f} + \overline{j^e} + \overline{j^c}$, где
$\overline{j^e} = -\overline{w^e}$ — плотность переносной силы инерции,
$\overline{j^c} = -\overline{w^c}$ — плотность кориолисовой силы инерции
Тогда основные законы динамики примут вид:

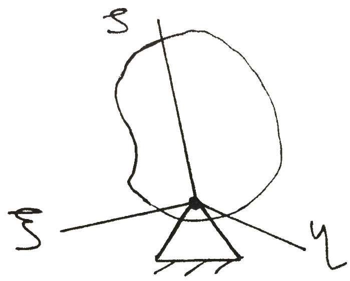
1. $\dot{\overline{p}} = \overline{R^e} + \overline{J^e} + \overline{J^c}$, где $J^* = \int j^* dm$
2. $\dot{\overline{K_0}} = \overline{M_0^e} + \overline{M_0^{J^e}} + \overline{M_0^{J^c}} - m\overline{v_0} \times \overline{v_c}$, причем $\overline{v_0} \times \overline{v_c}$ вычислены относительно НСО
3. $\delta T = \delta A^e + \delta A^i + \delta A^{J^e}$

25. Геометрия масс твердого тела. Тензор и эллипсоид инерции.

Тензор инерции

$$T = 1/2\int v^2 dm = 1/2\int(\overline{\omega}\times\overline{r})(\overline{\omega}\times\overline{r})dm = 1/2\int(R\overline{\omega})^T(R\overline{\omega})dm = \frac{1}{2}\overline{\omega}^T(\int R^T R dm)\overline{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\overline{\omega}^T J\overline{\omega}$$



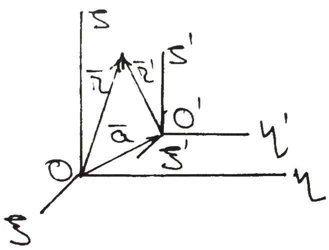
$$J = \int R^T R dm = \begin{pmatrix} \int \eta^2+\xi^2 dm & -\int \xi\eta dm & -\int \xi\zeta dm \\ \dots & \int \xi^2+\zeta^2 dm & -\int \eta\zeta dm \\ \dots & \dots & \int \xi^2+\eta^2 dm \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{\xi\xi} & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ \dots & J_{\eta\eta} & -J_{\eta\zeta} \\ \dots & \dots & J_{\zeta\zeta} \end{pmatrix},$$

где J_{ii} — освеые моменты инерции, J_{ij} — центробежные моменты инерции

Преобразование J при сдвиге и повороте осей.

1) Сдвиг



$$\overline{r} = \overline{r'} + \overline{a}$$

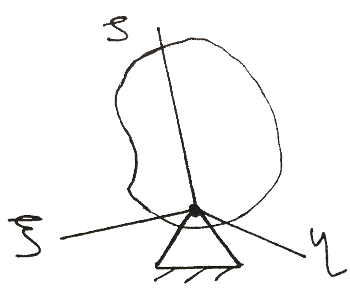
$$J_0 = \int R^T R dm = \int (R'^T + A^T)(R' + A)dm =$$

$$= \int R'^T R dm + 2R'^T A dm + \int A^T A dm$$

$$\text{если } o' = c \Rightarrow \int R' dm = 0$$

$J_{O'} + mA^T A$ — обобщенная теорема Гюйгенса–Штейнера

2) Поворот



$$\overline{K} = \int \overline{r}\times\overline{v}dm = \int \overline{r}\times(\overline{\omega}\times\overline{v})dm =$$

$$= \int(-R^T)(-R\overline{\omega})dm = \int(R^T R dm)\overline{\omega} - J\overline{\omega}$$

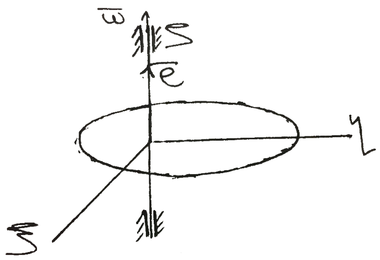
При повороте СК $K' = SK$, $\omega' = S\omega$

$$S^T\overline{K'} = JS^T\overline{\omega'} \Rightarrow \overline{K'} = SJS^T\overline{\omega'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J' = SJS^T$$

Т.к. J — симметрическая положительно определенная матрица существует $S:\ J' = \mathrm{diag}(A,B,C)$, где A,B,C — *главные моменты инерции*, а собственные вектора — главные оси инерции, если эти вектора проходят через центр масс, то эти оси называются центральными.

Эллипсоид инерции



$$\overline{\omega} = \omega\overline{e}||\zeta$$

$$T = 1/2\overline{\omega}^T J\overline{\omega} = 1/2\omega^2\overline{e}^T J\overline{e} = 1/2\omega^2 J_e,$$

где J_e — момент инерции относительно оси e

$$\overline{r} = \frac{\overline{e}}{\sqrt{J_e}} \Rightarrow \overline{r}^T J\overline{r} = 1 \qquad (1)$$

$J > 0 \Rightarrow (1)$ задает эллипсоид инерции твердого тела,

в главных осях: $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$, $r = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$

Если эллипсоид инерции для т. O построен, то момент инерции относительно какой-либо оси u равен $\frac{1}{ON}$, где ON — отрезок, соединяющий O и т. пересечения u с соленоидом.

Наименьшим моментом инерции обладает момент относительно наибольшей оси и наоборот.

Условие существование тела

$$\begin{cases} A + B \geq C \\ A + C \geq B \\ B + C \geq A \end{cases}$$

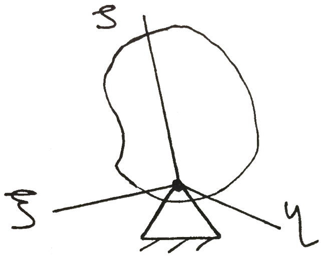
26. Вычисление кинетической энергии и момента количества движения твердого тела с неподвижной точкой.

Тело с неподвижной точкой

Кинетическая энергия

$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int (\vec{r}\times\vec{\omega})(\vec{r}\times\vec{\omega})dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\int \hat{r}^T\hat{r}dm\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J\vec{\omega}$

Получается, что $\boxed{T = \dfrac{1}{2}\vec{\omega}^T J\vec{\omega}}$



Кин. момент

$\vec{K} = \int \vec{r}\times\vec{V}dm = \int \vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{\omega})dm = \int \hat{r}^T\hat{r}\vec{\omega}dm = J\vec{\omega}$

Получается, что $\boxed{\vec{K} = J\vec{\omega}}$

Свободное тело

Кинетическая энергия

$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{\rho}\times\vec{\omega}$

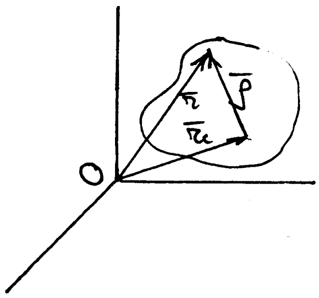
$T = \frac{1}{2}\int V_c^2 dm + \int \vec{V}_c\cdot(\vec{\rho}\times\vec{\omega})dm + \frac{1}{2}\int(\vec{\rho}\times\vec{\omega})^2 dm = \frac{1}{2}mV_c^2 + \vec{V}_c(\int \rho dm)\times\vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J_c\vec{\omega}$

$\boxed{T = \dfrac{1}{2}mV_c^2 + \dfrac{1}{2}\vec{\omega}^T J_c\vec{\omega}}$ (главные центральные оси: $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + cr^2)$)

Кин. момент

$\vec{K}_0 = \vec{K}_c + \vec{OC}\times m\vec{V}_c$

$\vec{K}_c = \int \vec{\rho}\times(\vec{V}_c + \vec{\rho}\times\vec{\omega})dm = \int \hat{\rho}^T\hat{\rho}\vec{\omega}dm = J_c\vec{\omega}$ $\boxed{\vec{K}_0 = J_c\vec{\omega} + \vec{OC}\times m\vec{V}_c}$



27. Динамические и кинематические уравнения Эйлера твердого тела с неподвижной точкой.

$\dot{\vec{K}} = \vec{M}$ - в неподвижных осях.
В главных осях: для неподвижной точки $\vec{K} = K_\xi \vec{\xi} + K_\eta \vec{\eta} + K_\zeta \vec{\zeta}$
$\dot{\vec{K}} = \dot{K}_\xi \vec{\xi} + K_\xi \dot{\vec{\xi}} + \ldots = \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}$
В главных осях: $\vec{K} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}$
Следовательно, система динамических уравнений Эйлера будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta \end{cases}$$

<u>Замечание:</u>
В общем случае $\vec{M} = \vec{M}(\vec{\omega}, \vec{\theta}, t) \Rightarrow$ система не замкнута.
Для замыкания присоединяют кинематические уравнения, связывающие положение тела с его угловой скоростью (кин.уравнения Эйлера, Пуассона ...).

28. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Интегрирование уравнений движения в квадратурах.

Движение твердого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера.

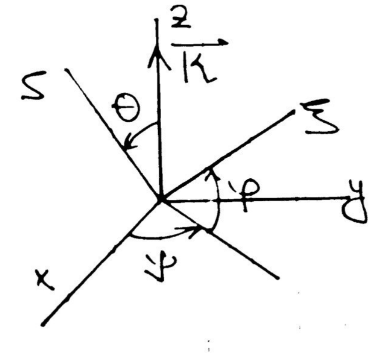
Условия:

$$\begin{cases} A \neq B \neq C, \text{допустим, что } A > B > C; \\ \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$$

Тогда уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0; \\ B\dot{q} + (A-C)rp = 0; \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0. \end{cases}$$

$\dot{\vec{K}} = M = 0 \Rightarrow \vec{K} = const$ в неподвижном базисе



$K^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = const$ в любом базисе

$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$

Следовательно:

$$\begin{cases} p = \pm\sqrt{a - bq^2}; \\ r = \pm\sqrt{c - dq^2}. \end{cases}$$

Т.к. $\begin{pmatrix} A & C \\ A^2 & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1q^2 \\ a_2 - b_2q^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p^2 \\ r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ A^2 & C^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 - b_1q^2 \\ a_2 - b_2q^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B\dot{q} \pm (A-C)\sqrt{a-bq^2}\sqrt{c-dq^2} = 0 \Leftrightarrow \pm\int \frac{dq}{\sqrt{a-bq^2}\sqrt{c-dq^2}} = \pm\int q(t) = \frac{C-A}{B}(t-t_0)$

Подставляя $q(t)$ в систему, находим $p(t)$ и $r(t)$.

Для решения кинетических уравнений Эйлера удобно выбрать трехгранник xyz:

$$\vec{K} || Oz \Rightarrow \vec{K} = \begin{pmatrix} K_\xi \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} sin\theta sin\phi \\ sin\theta cos\phi \\ cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} \Rightarrow$$

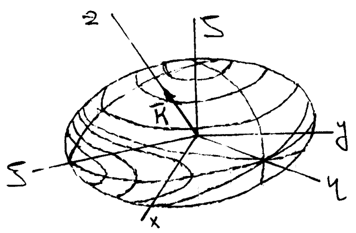
$$\Rightarrow cos\theta = \frac{Cr(t)}{K} \Rightarrow cos\phi = \frac{Bq(t)}{K sin\theta} \Rightarrow \psi(t) = \psi_0 + \int\limits_o^t \frac{p(t)sin\phi(t) + q(t)cos\phi(t)}{sin\theta(t)}dt$$

29. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Интерпретация Мак-Куллага.

Геометрическая интерпретация Мак-Куллага.

$$\begin{cases} K_\xi^2 + K_\eta^2 + K_\zeta^2 = K^2 = const \leftarrow \text{ сфера } S \text{ радиуса } K. \\ \frac{K_\xi^2}{A} + \frac{K_\eta^2}{B} + \frac{K_\zeta^2}{C} = 2T = const \leftarrow \text{эллипсоид } \varepsilon_0 \text{ Мак-Куллага с полуосями } \sqrt{2AT}, \sqrt{2BT}, \sqrt{2CT}. \end{cases}$$

Следовательно $\vec{K} \subset S \cap \varepsilon_0$ в процессе своего движения, поскольку $\vec{K}$ неподвижен в xyz, а ε_0 неподвижен в теле, то движение тела в пространстве xyz - обкатывание эллипсоидом неподвижного вектора $\vec{K}$ по линиям пересечения эллипсоида со сферой.



Критический случай: $K^2 = 2BT \rightarrow$ траектория плоская:

$$K_\xi^2(1 - \frac{B}{A}) + K_\zeta^2(1 - \frac{B}{C}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{B}{A}} K_\xi \pm \sqrt{1 - \frac{B}{C}} K_\zeta = 0$$

Обе плоскости проходят через η и пересекают ε_0 по двум эллипсоидам, разделяющие оси траекторий на 2 класса:

1) Эпициклоидальное движение - замкнутые вокруг $O\xi$;

2) Перициклоидальное движение - замкнутые вокруг $O\zeta$.

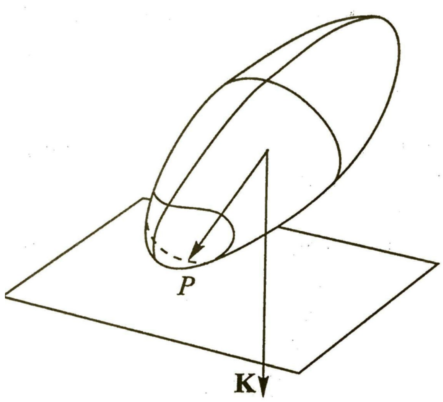
В первом случае предельное движение $K^2 = 2TC$, для которого $K_\xi = K_\eta = 0, K_\zeta \neq 0$; во втором $K^2 = 2TA$, для которого $K_\zeta = K_\eta = 0, K_\xi \neq 0$.
Из интерпретации Мак-Куллага $\Rightarrow$ малые возмущения почти не разрушают перманентные вращения относительно осей ξ и ζ и разрушают вращение относительно оси η.

30. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Интерпретация Пуансо.

Эллипсоид: $f = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 1 = \vec{r}^T J\vec{r} - 1 = 0$

Покажем, что при движении твердого тела в случае Эйлера жестко связанный с телом его эллипсоид инерции катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{K}$.

Рассмотрим точку на поверхности эллипсоида, через которую проходит $\vec{\omega}$: $\vec{r} = \lambda\vec{\omega} \Rightarrow \lambda^2\vec{\omega}^T J\vec{\omega} = 1 \Leftrightarrow 2T\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2T}} = const$



Нормаль к эллипсоиду в этой точке: $\vec{n} = \dfrac{df}{d\vec{r}} = 2J\vec{r} = 2\lambda J\vec{\omega} = \dfrac{2}{\sqrt{2T}}\vec{K} = const$

Для того, чтобы касательная плоскость к эллипсоиду в рассматриваемой точке была неизменной найдем расстояние от неё до неподвижной точки:

$$\rho(0,P) = \vec{r}\cdot\vec{n} = \frac{\vec{r}\vec{K}}{K} = \frac{\lambda}{K}\vec{\omega}\cdot\vec{K} = \frac{sqrt2T}{K} = const$$

$\Rightarrow$ поскольку через рассматриваемую точку проходит $\vec{\omega}$, то скорость этой точки $= 0 \Rightarrow$ эллипсоид инерции катится по неподвижной плоскости без проскальзывания

Точка P описывает в эллипсоиде кривую – полодия, а соответствующая кривая на плоскости – герполодия.

31. Регулярная прецессия в случае Эйлера. Выражения для угловых скоростей прецессии, собственного вращения и угла нутации через начальные условия.

Движение твердого тела с неподвижной точкой называется **регулярной прецессией**, если тело вращается вокруг *оси динамической симметрии* с постоянной скоростью и эта ось вращается с постоянной скоростью вокруг неподвижной *оси прецессии*, составляя с ней постоянный угол.

Динамически симметричное твёрдое тело – тело, обладающее свойством: $A = B \neq C$.

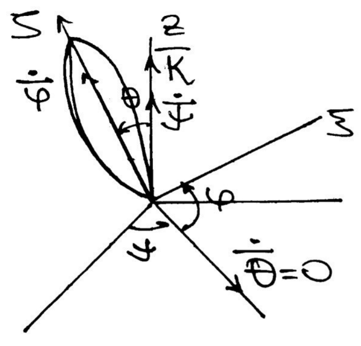
Ось динамической симметрии совпадает с ζ C – момент инерции вокруг этой оси. A – момент инерции вокруг любой оси $\perp O\zeta$.

Уравнение Эйлера: $C\dot{r} + \cancel{(B-A)}pq = 0 \Rightarrow Cr = const$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} = A\vec{\omega} + (C-A)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{K}}{A} + \frac{A-C}{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}$$

$K_\zeta = Cr = \vec{K}\vec{\zeta} = Kcos\theta \Rightarrow \dot{\vec{\theta}} = 0$ и вектор угловой скорости раскладывается на направления кинетического момента и оси динамической симметрии.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{Cr}{K} = const & \text{– угол нутации} \\ \dot{\vec{\psi}} = \dfrac{\vec{K}}{A} & \text{– угловая скорость прецессии} \\ \dot{\vec{\varphi}} = \dfrac{A-C}{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} & \text{– угловая скорость собст вращения} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ – регулярная прецессия

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} = \frac{1}{C}(A-C)\frac{rC}{K} = \frac{1}{C}(A-C)\cos\theta \Rightarrow C + (C-A)\frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}} = 0$$

прецессия не может происходить с произвольными $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \theta$.

В случае Эйлера отсутствует $\vec{M}$ и такая прецессия называется *свободной*.

32. Момент, поддерживающий регулярную прецессию твердого тела с неподвижной точкой при наличии динамической симметрии.

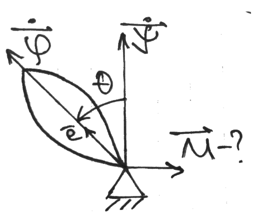
Твердое тело, движущееся вокруг фиксированной в нем точки, для которой эллипсоид инерции тела является эллипсоидом вращения, называют **гироскопом**.

В случае Эйлера мы видели, что **если момент внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю, то гироскоп совершает регулярную прецессию** вокруг неизменного кинетического момента $\vec{K}_0$

Но для того, **чтобы гироскоп совершал регулярную прецессию, вовсе не обязательно, чтобы момент внешних сил относительно неподвижной точки был равен нулю**.

Найдем условия, при выполнении которых гироскоп может совершать *регулярную прецессию* вокруг оси OZ с заданными постоянными значениями *угла нутации* ($\theta = \theta_0$), *угловой скорости собственного вращения* ($\dot{\phi} = \omega_1$) и *угловой скорости прецессии* ($\dot{\psi} = \omega_2$).

Пусть OXYZ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O тела, а Oxyz — система координат, оси которой нанаправлены по главным осям инерции тела для точки O. Пусть A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz и A = B. Динамические уравнения Эйлера в этом случае будут такими:



$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = M_x \\ A\dot{q} + (C-A)pr = M_y \\ C\dot{r} = M_z \end{cases}$$

Кинематические уравнения: $p = \omega_2 sin\theta_0 sin\phi,\ q = \omega_2 sin\theta_0 cos\phi,\ r = \omega_2 cos\theta_0 + \omega_1 = const$

Подставив p,q,r в систему и выполнив элементарные преобразования получим:

$$\begin{cases} M_x \ = \ \ \omega_2\omega_1 sin\theta_0 cos\phi\Big[C + (C-A)\dfrac{\omega_2}{\omega_1}cos\theta_0\Big] \\ M_y = -\omega_2\omega_1 sin\theta_0 sin\phi\Big[C + (C-A)\dfrac{\omega_2}{\omega_1}cos\theta_0\Big] \\ M_z = 0 \end{cases}$$

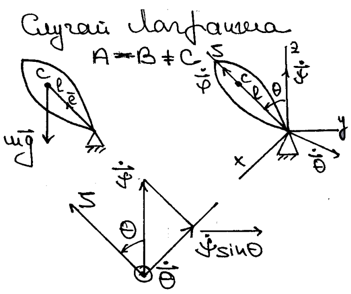
В Oxyz: $\vec{\omega_1} = (0, 0, \omega_1),\ \vec{\omega_2} = (\omega_2 \sin\theta_0 sin\phi, \omega_2 sin\theta_0 cos\phi, \omega_2 cos\theta_0)$. Отсюда получаем основную формулу гироскопии:

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{\omega_2} \times \vec{\omega_1}\Big[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}cos\theta_0\Big]}$$

33. Случай Лагранжа в динамике твёрдого тела с неподвижной точкой.

Динамически симметричное тело (A = B ≠ C) находится в поле тяжести, а центр масс смещен вдоль оси симметрии на расстояние l от неподвижной точки. Наша задача заключается в том, чтобы определить характер движения тела:

Интегралы движения



1. $\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g} \perp \vec{l} \Rightarrow \vec{M_H} = \dot{H} = 0 \Rightarrow \boxed{H = Cr = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\, cos\theta) = const}$

2. $p^2 + q^2 = \omega_\perp^2 = (\vec{\dot{\theta}} + \dot{\psi} sin^2\theta)^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 sin^2\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2}A(p^2+q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 sin^2\theta) + const \\ \Pi = mglcos\theta \end{cases}$
$$\Rightarrow \boxed{E = T + \Pi = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 sin^2\theta) + mgl\, cos\theta = const}$$

3. $\begin{cases} M_z = 0 \Rightarrow K_z = const \\ \vec{K} = A\vec{\omega_\perp} + H\vec{e} \Rightarrow K_z = \vec{K}\vec{e_z} = A\vec{\omega_\perp}\, \vec{e_z} + H\vec{e}\vec{e_z} = A\dot{\psi} sin^2\theta + Hcos\theta \end{cases}$
$$\Rightarrow \boxed{K_z = A\dot{\psi} sin^2\theta + Hcos\theta = const}$$
Итого имеем три первых интеграла:H, E, K_z

Интегрирование уравнений движения в квадратурах

Выразим из последнего $\dot{\psi}$ и подставим во второе уравнение.

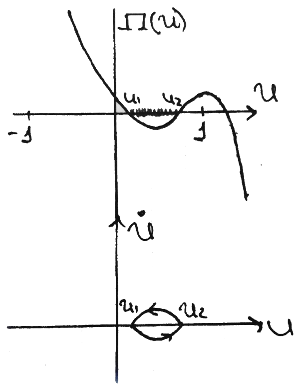
$\dot{\psi} = \frac{K_z - Hcos\theta}{Asin^2\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(K_z - Hcos\theta)^2}{2Asin^2\theta} + mgl\, cos\theta = E(/ * sin^2\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 sin^2\theta + \frac{(K_z - Hcos\theta)^2}{2A} + mglcos\theta(1 - cos^2\theta) = E(1 - cos^2\theta)$. Сделав замену $U = cos\theta$

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно U:

$$\boxed{\frac{1}{2}A\dot{U}^2 + \frac{(K_z - HU)^2}{2A} + mglU(1 - U^2) - E(1 - U^2) = 0}$$

Где первое слагаемое T(U), а всё остальное П(U)

Характер движения



Решение в квадратурах

Движение может происходить при:

$$\Pi(U) < 0 \Leftrightarrow (K - HU)^2 + 2AmglU(1 - U^2) - 2AE(1 - U^2) \leq 0$$

Интервал движения $[U_1, U_2]$, на границах которого $\dot{U} = 0$ и $\ddot{U}(U_1) > 0, \ddot{U}(U_2) < 0 \Rightarrow$ движение волчка происходит так, что $cos\theta$ периодически меняется между U_1 и U_2

Качественный характер движения

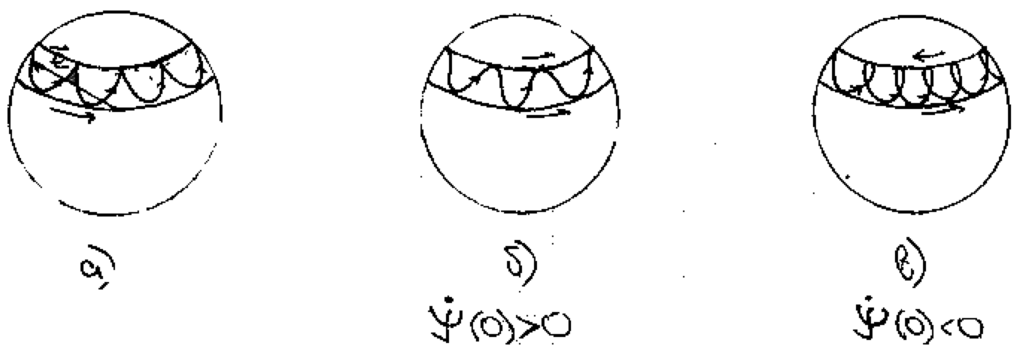
Поскольку $\dot{\psi} = \frac{K - H\cos\theta(t)}{A(\sin\theta(t))^2} \Rightarrow \dot{\psi}(t)$ - однозначная функция угла θ, то она также является периодической с тем, же периодом.

Если задать начальный угол, как $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, то в зависимости от $\dot{\psi}(0)$ получаются различные траектории оси динамической симметрии (б) и (в).

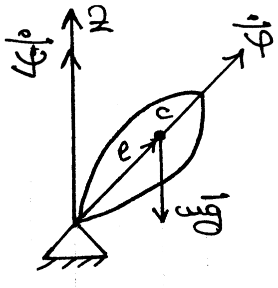
В случае а) в точках заострения ось останавливается, а в нижних точках она максимальна и обусловлена только угловой скоростью прецесии, поскольку там $\dot{\theta}(U_1) = 0$

В случае б) траектория - гладкая кривая, причем для каждой точки скорость прецессии положительная

В случае в) траектория петлеобразная, а скорость прецессии меняет знак, внизу +, наверху -.



34. Регулярная прецессия в случае Лагранжа. Быстрая и медленная прецессия.



$$\begin{cases} \vec{M} = [C + (C - A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta]\dot{\vec{\psi}} \times \dot{\vec{\varphi}} \\ \vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g} = mgl\vec{e} \times -\vec{e}_z = mgl\vec{e}_z \times \vec{e} = mgl\frac{\dot{\vec{\psi}} \times \dot{\vec{\varphi}}}{\dot\psi\dot\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [C + (C - A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta]\dot\psi\dot\varphi = mgl \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{C\dot\varphi\dot\psi + (C - A)\dot\psi^2\cos\theta = mgl}$$

$$M_{11} = 0 \Rightarrow Cr = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = H = const \Rightarrow \dot\varphi = \frac{H}{C} - \dot\psi\cos\theta$$

$$\Rightarrow \underline{C(\frac{H}{C} - \dot\psi\cos\theta)\dot\psi + (C - A)\dot\psi^2\cos\theta = mgl}$$

$\boxed{A\dot\psi^2\cos\theta - H\dot\psi + mgl = 0}$ - квадратное уравнение отн $\dot\psi$

$$\dot\psi_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4Amgl\cos\theta}}{2A\cos\theta} \quad (1)$$

два решения

Рассмотрим предельный случай $[H \longrightarrow \infty]$

1) $\dot\psi_1 \longrightarrow \frac{H}{A\cos\theta_0} \longrightarrow$ - быстрая прецессия

2)$\dot\psi_2 \backsimeq \frac{H - H(1 - \frac{2Amgl\cos\theta_0}{H^2})}{2A\cos\theta_0} \longrightarrow \frac{mgl}{H} \longrightarrow 0$ - медленная прецессия

Из (1) для возниконовения прецессии $H^2 > 4Amgl\cos\theta$

Предположение $H \longrightarrow \infty$ позволяет воспользоваться приближенной теорией гироскопов, получаемой, если в:

$$\dot{H} = M_\zeta, A\vec{e} \times \ddot{\vec{e}} + H\dot{\vec{e}} = \vec{M}_\perp$$

Пренебрегая членом $A\vec{e} \times \ddot{\vec{e}}$ в сравнении с $H\dot{\vec{e}}$, получаем **уравнения прецессионной теории гироскопа.** (весь кинетический момент сосредоточен вдоль оси симметрии)

$$\boxed{\dot{H} = M_\zeta, H\dot{\vec{e}} = \vec{M}_\perp}$$

35. Механические связи и системы со связями. Классификация связей. Возможные и виртуальные перемещения. Число степеней свободы системы.

Механическая система

Механической системой будем называть конечную или бесконечную совокупность материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем говорить, что **положение механической системы известно**, если известно положение любой ее точки в некоторой декартовой системе координат.

Механическая система называется **системой с конечным числом степеней свободы**, если можно ввести такое конечномерное линейное (векторное) пространство R^m и такое множество точек в нем, что между всеми возможными положениями механической системы и всеми точками множества $\subset R^m$ имеется взаимно-однозначное соответствие.

Множество M называется **конфигурационным многообразием** механической системы, если указанное соответствие дифференцируемо в обе стороны (под дифференцируемостью понимается k -кратная непрерывная дифференцируемость, при этом конкретное значение k несущественно).

Числом степеней свободы механической системы называется размерность ее конфигурационного многообразия. Напомним, что размерностью многообразия называется разность между размерностью пространства, в которое оно погружено, и числом уравнений, задающих многообразие аналитически.

Параметризацией механической системы с конечным числом степени свободы называется введение конечного числа параметров $(q_1..., q_n)$ задание которых однозначно определяет положение системы:

$$\vec{r} = \vec{r}(q,t)$$

Сами параметры $q_1..., q_n$ называются лагранжевыми параметрами.

Механические связи

Любые ограничения, накладываемые на движение исследуемой системы тем фактом, что материя занимает место в пространстве и поэтому в той или иной мере препятствует движению исследуемых материальных точек, называются **механическими связями**.

Механические связи подразделяются на два основных класса:

1. связь называется **удерживающей**, если накладываемые ею ограничения выражаются в форме равенства;

2. связь называется **неудерживающей**, если накладываемые ею на координаты точек ограничения выражаются неравенствами.

Удерживающие механические связи подразделяются на **конечные** и **дифференциальные** в зависимости от того, является ли равенство, выражающее их, конечным соотношением или дифференциальным уравнением.

Дифференциальные связи делятся на **интегрируемые** и **неинтегрируемые** в зависимости от того, могут ли соответствующие уравнения связи быть проинтегрированы, или нет.

Конечные связи и дифференциальные интегрируемые связи составляют класс **голономных** механических связей, а дифференциальные неинтегрируемые связи – класс **неголономных** связей. Системы, содержащие только голномные или только неголономные связи, называются соответственно **голономными и неголономными системами.**

Если равенства голономных связей не содержат явно время, то такая связь называется **стационарной или склерономной**. В тех случаях, когда время явно входит в эти равенства, связь называется **нестационарной или реономной**.

Возможные и виртуальные перемещения

Рассмотрим голономную систему из N точек. Для содержащихся в них связей могут быть выписаны уравнения вида

$$F_s(x,y,z,t) = 0, \quad s = 1,...,r$$

Во время движения системы все координаты являются функциями времени и уравнения голономных связей определяют r тождеств: $F_s(x(t), y(t), z(t), t) = 0, s = 1,...r$

Дифференцируя полученные тождества по времени, получим:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial F_s}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial F_s}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial F_s}{\partial z_i}\dot{z}_i) = 0$$

Этим соотношениям должны удовлетворять скорости точек $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Любые скорости, удовлетворяющие полученному уравнению, называются **возможными** скоростями, а любые бесконечно малые перемещения в направлении возможных скоростей, удовлетворяющие, следовательно, исходным уравнениям связей – **возможными перемещениями** .

Реономная связь называется **замороженной**, если в какой-то момент времени считается, что она перестает зависеть явно от времени.

Скорости, удовлетворяющие уравнениям замороженных связей (то есть полученным дифференциальным уравнениям без первого слагаемого) называются **виртуальными** скоростями, а любые бесконечно малые перемещения в направлении виртуальных скоростей – **виртуальными перемещениями**.

Число степеней свободы

В общем случае системы, содержащей N точек и стесненной R механическими связями, из уравнений связи можно выразить R декартовых координат точек через остальные. Поэтому для задания положения N точек нужно знать 3N - R координат, причем не обязательно использовать 3N - R декартовых координат. Можно подобрать иные независимые величины, определяющие положение всех точек системы.

Наименьшее число независимых величин, которое надо знать для того, чтобы определить положение всех точек голономной системы, называется **числом степеней свободы системы**.

Любой набор из M величин, независимых одна от другой и полностью определяющих положение системы, называются **системой обобщенных координат**, сами эти величины - **обобщенными координатами**, а их производные по времени - **обобщенными скоростями**. Разрешенные механическими связями положения механической системы, заданные в некотором пространстве, в каждый момент времени образуют поверхность, называемую **конфигурационным многообразием**. Исходя из этого определения, обобщенные координаты есть параметризация конфигурационного многообразия.

36. Вывод уравнений Лагранжа.

Гипотезы идеальности связей

Связи называются идеальными, если виртуальная работа реакций связи тождественно по δq равна нулю.

Для того, чтобы связи были идеальными необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю коэффициенты линейной формы виртуальной работы, вычисленных для $\vec{n}$
($\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{n}$, где f - кроме реакций связи, n - реакция связи)

$$\delta A = \int \vec{n}\,\delta\vec{r}\,dm = 0, \ \forall \text{ для любого виртуального перемещения}$$

Вывод уравнений Лагранжа

$\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{n} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} = \vec{f}\,\delta\vec{r} + \vec{n}\,\delta\vec{r}$

$\int \ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r}\,dm = \int \vec{f}\,\delta\vec{r}\,dm + \int \vec{n}\,\delta\vec{r}\,dm$, где последнее слагаемое равно 0

$$\int (\ddot{\vec{r}} - \vec{f})\,\delta\vec{r}\,dm = 0 \text{ - общее уравнение динамики}$$

Рассмотрим:

$\int \vec{f}\,\delta\vec{r}\,dm = \sum \int \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\vec{f}\,dm\,\delta q_i = \sum Q_i\,\delta q_i$, где $\int Q_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\vec{f}\,dm$ - обобщённая сила

Рассмотрим:

Запишем равенство для проекций ускорения:

$$w^i = \vec{w}\cdot\vec{\tau}_i = \ddot{r}\cdot\frac{\partial\vec{r}/\partial q_i}{|H_i|} = w^i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q_i}\right].\Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}\frac{\partial r}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\frac{V^2}{2}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\frac{V^2}{2}}{\partial q_i};$$

$\int \frac{V^2}{2}dm = T$ - кинетическая энергия. Подставим её в общее уравнение динамики, получим:

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0$$

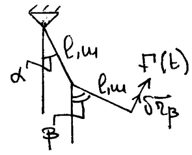
q_i - независимые $\Rightarrow$ δq_iнезвис. и производные:

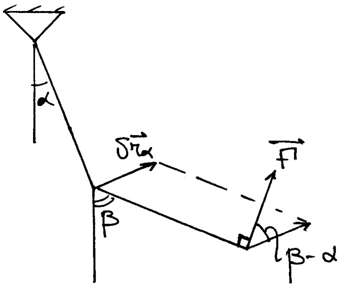
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \textbf{ - Урвнение Лагранжа 2-ого рода}$$

37. Вычисление обобщённых сил.

$Q_i = \int \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \vec{f}\, dm \; \delta A = \int \vec{f}\, \delta r\, dm = \sum Q_i\, \delta q_i \Rightarrow \delta A_i = Q_i \delta q_i$

Пример





Обобщённые координаты (α, β)

Расчёт Q_β**:** α - фиксированное, β - варьируется

$\delta A_\beta = \vec{F}_i\, \delta r_\beta = Fl\, \delta\beta \Rightarrow Q_\beta = Fl$

Расчёт Q_α : α - варьируется, β - фиксировано

$\delta A_\alpha = \vec{F}\, \delta r_\alpha = Flcos(\beta - \alpha)\, \delta\alpha \Rightarrow$

$Q_\alpha = Flcos(\beta - \alpha)$

38. Потенциальные и обобщённо-потенциальные силы. Лагранжиан системы.

Обобщённые силы Q_i называются **потенциальными**, если существует такая скалярная функция времени и обобщённых координат П(t, q), что силы Q_i могут быть записаны в виде:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\ i = \overline{1, n}$$

Обобщённые силы Q_i называются обобщённо-потенциальными, если существует такая скалярная функция времени, координат и скоростей П(t, q, $\dot{q}$), что обобщённые силы Q_i есть:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}$$

Тогда обозначив $Q_i = -\frac{\partial \Pi(\text{q, t})}{\partial q_i} + Q_i^*$ можно ввести функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi$$

Тогда уравнение Лагранжа представимо в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*$$

39. Исследование зависимости кинетической энергии от обобщённых координат и скоростей

Выясним, как зависит кинетическая энергия от обобщенных скоростей $\dot{q}$: $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t,q_1,...q_n)$

$$T = \frac{1}{2}\int \mathbf{V}^2 dm = \frac{1}{2}\int (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i)^2 dm =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dm + \sum_i \dot{q}_i \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dm + \frac{1}{2}\int (\frac{\partial R}{\partial t})^2 dm$$

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dm; \;\; b_i = \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dm; \;\; T_0 = \frac{1}{2}\int (\frac{\partial R}{\partial t})^2 dm$$

Кинетическая энергия записывается в виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + T_0 = T_2 + T_1 + T_0$$

и представляет собой сумму трех форм от обобщенных скоростей: квадратичной T_2, линейной T_1 и нулевой степени T_0. Коэффициенты этих форм являются функциями времени и обобщенных координат $a_{ij}(t,q)$, $b_i(t,q)$, $T_0(t,q)$.

Механические системы, у которых кинетическая энергия зависит от обобщенных скоростей указанным образом, называются *натуральными*.

40. Теорема о разрешимости уравнений Лагранжа относительно старших производных. Приведение уравнений Лагранжа к нормальному виду Коши.

Определение. Дифференциальные уравнения Лагранжа II порядка $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ назовем *уравнениями Лагранжа второго рода.*

В силу структуры кинетической энергии $T = T_2 + T_1 + T_0$ следует, что уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\sum a_{ij}\ddot{q}_i + F_i(t, q, \dot{q}) = 0$$

Они всегда оказываются линейны(!) по обобщенным ускорениям. Сформулируем теорему:

Теорема 6. *Уравнения Лагранжа II рода разрешимы относительно старших производных обобщенных координат.*

Доказательство. Покажем разрешимость относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_1 ... \ddot{q}_n$. Для этого достаточно отличия детерминанта матрицы коэффициентов $A = (a_{ij})$ от нуля.

Предположим обратное $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \exists\{e_i\} : \sum a_{ij}e_i = 0 \Rightarrow \sum a_{ij}e_ie_j = 0$

Подставим $a_{ij} = \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dm \Rightarrow \sum \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dm e_i e_j = 0 \Leftrightarrow \int (\sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} e_i)^2 dm = 0$

Это выражение может быть тождественно равно нулю только когда $\sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} e_i = 0$

Мы вводим так q, что $\sum e_i^2 = 1$. Функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\nu, t, q_1 ... q_n)$, задающая локальную параметризацию, должна обеспечивать взаимно однозначное и взаимно непрерывно дифференцируемое соответствие между точками указанных окрестностей. В частности, не должно существовать такого направления e_i, производная вдоль которого равна нулю тождественно по всем точкам системы, т.е. по ν. Следовательно, должно быть выполнено:

$$\sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} e_i \neq 0, \;\; \forall e_i \;\; (\sum e_i^2 = 1)$$

Таким образом, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

□

Приведение к нормальному виду Коши

$\ddot{q} = G(q,\dot{q},t)$, $\dot{q} = u$, $\dot{u} = G(q,u,t)$

Решение задачи Коши существует и единственно, значит задавая $q(t_0)$ и $\dot{q}(t_0)$ получим, что решение единственно.

41. Первые интегралы лагранжевых систем: циклические координаты и интеграл Пенлеве-Якоби.

Обобщенный интеграл энергии(Пенлеве-Якоби)

Рассмотрим уравнения Лагранжа с потенциальными силами. Умножая их на $\dot{q}_i$, и суммируя по i, получаем следующее скалярное соотношение:

$$\sum(\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i})=0 \Leftrightarrow \sum[\frac{d}{dt}(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})-\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i}]=0$$

Поскольку $\frac{d}{dt}L(t,q,\dot{q})=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum(\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i})$, то последнее соотношение переписывается в виде:

$$\frac{d}{dt}(\sum\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})-\frac{dL}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

Если функция Лагранжа от времени не зависит, т.е. $\partial L/\partial t=0$, то из записанного равенства следует первый интеграл:

$$\sum\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=const$$

Этот интеграл носит название *обобщенного интеграла энергии* или интеграла Пенлеве-Якоби.Выясним его структуру.

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_i b_i\dot{q}_i+T_0-\Pi \Rrightarrow \frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-T_0+\Pi=T_2-T_0+\Pi=const$$

Полная энергия в общем случае не сохраняется $E=T_2+T_1+T_0+\Pi$

Циклические интегралы

Еще один распространенный в механике тип первых интегралов составляют так называемые циклические интегралы. Они имею место, когда функция Лагранжа $L(t,q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n)$ не зависит от некоторых координат $q_{k+1}...q_n$. В этом случае уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad i=1,...,k;$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0,\quad i=k+1,...,n.$$

Из последних $n-k$ уравнений следует $n-k$ первых интегралов $\partial L/\partial \dot{q}_i=const$.

Сами переменные, которые не входят явно в функцию Лагранжа, называются *циклическими.*