Особые точки пл. ф-ий

Опр. Пусть $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $f(z)$ рег. в прок. $\overset{\circ}{B}_r(z_0)$, но не рег. или не опр. в z_0. Тогда z_0 наз. изолированной особой точкой однозначного характера. (ИОТОХ)

Классификация ИОТОХ.

Если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq \infty$, то z_0 — устранимая (УОТ)

Если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 — полюс

В ост. сл. z_0 — существенно особая (СОТ)

Пр.1 а) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$; ОТ $=\{0, \infty\}$

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1 \Rightarrow \{0\}$ — УОТ

$B_R(\infty)=\{z: |z|>R\}\cup\{\infty\}$

$z_n=n\to\infty$; $f(z_n)=\frac{\sin n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ $\quad\nexists \quad\Rightarrow \{\infty\}$ — СОТ

$\tilde{z}_n=in\to\infty$; $f(\tilde{z}_n)=\frac{\sin(in)}{in}=\frac{\operatorname{sh} n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

б) $g(z)=\frac{1}{(z-i)^2}-3z$; ОТ $=\{i; \infty\}$

полюса

в) $h(z)=e^{-1/z^4}$; ОТ $=\{0;\infty\}$

$z_n=1/n\to 0$, $h(z_n)=e^{-n^4}\to 0, n\to\infty$ $\quad\Rightarrow \{0\}$ — СОТ

$\tilde{z}_n=\frac{e^{i\pi/4}}{n}\to 0$, $h(\tilde{z}_n)=e^{n^4}\to\infty$

e^u — непр $\Rightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty}e^{-1/z^4}=e^{-\lim\limits_{z\to\infty}1/z^4}=e^0=1 \Rightarrow \{\infty\}$ — УОТ

Пусть $z_0\neq\infty$ — ИОТОХ f. Тогда в прок. $\overset{\circ}{B}_r(z_0)$ $\exists!$:

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n}_{\text{главная ч. ряда}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильн. ч. ряда}}$$

Пусть ∞ — ИОТОХ f. Тогда в прок. $\overset{\circ}{B}_r(\infty)$ $\exists!$:

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{0}c_nz^n}_{\text{правильн ч.}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n}_{\text{главная ч.}}$$

главные — такие, что $\forall$ член ряда уходит на ∞

Утв. 1 z_0 – УОТ $\Leftrightarrow$ гл.ч. р. Лор. в $\mathring{B}_R(z_0)$ отсутств.

z_0 – полюс $\Leftrightarrow$ гл.ч. сод. конечн. число слаг., но не нулевое

z_0 – СОТ $\Leftrightarrow$ гл.ч. сод. беск. много ненул. слагаемых

Вернемся к пр.1:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z} = [0<|z|<\infty] = \sum\limits_{n=0}^{\to\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$

В окр. $z=0$: гл.ч. отсутств $\Rightarrow$ $\{0\}$ – УОТ

В окр. ∞: гл.ч.: $\sum\limits_{n=1}^{\to\infty}\dots$ – беск. много слаг $\Rightarrow$ $\{\infty\}$ – полюс

Опр. Пусть $z_0\neq\infty$ – полюс ф-ии f.
Тогда: если $c_{-m}\neq 0$, но $c_k=0$ $\forall k<-m$
то z_0 – **полюс порядка m**

б) $g(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2}-3z = \underbrace{\dfrac{1}{(z-i)^2}}_{\text{гл.ч.}}\underbrace{-3i-3(z-i)}_{\text{прав.ч.}}$ $\Rightarrow$ $\{i\}$ – полюс порядка 2 ($\{i\}$ – Π_2)

в $\mathring{B}_R(i)$, $\forall R>0$

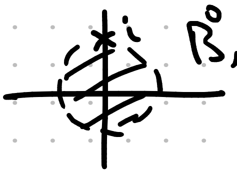
в $\mathring{B}_R(\infty)$:

$\dfrac{1}{z-i} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-i/z} = \sum\limits_{n=0}^{\to\infty}\dfrac{i^n}{z^{n+1}}$

$\dfrac{1}{(z-i)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\to\infty}\dfrac{(n+1)i^n}{z^{n+2}} = [n+2=-m] = \sum\limits_{m=-\infty}^{-2}(-m-1)\,i^{-m-2}z^m$

$g(z)=\underbrace{\sum\limits_{m=-\infty}^{-2}(-m-1)\,i^{-m-2}z^m}_{\text{прав.ч.}}\;\underbrace{-3z}_{\text{гл.ч.}}$

в $\mathring{B}_R(\infty)$ $\forall R>1$



$\mathring{B}_1(\infty)$

Т.к.: $c_1=-3$, $c_k=0$, $k>1$
$\Rightarrow$ ∞ – полюс порядка 1
$\{\infty\}$ – Π_1

Опр. Пусть $z_0=\infty$ – полюс.
Если $c_m\neq 0$, но $\forall k>m$: $c_k=0$, то
∞ – полюс порядка m

б) $h(z)=e^{-1/z^4} = \left[\forall w\in\mathbb{C}:\ e^w=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\right] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,z^{4n}}$

$\forall z:\ 0<|z|<\infty$

Для ОТ $z_0=0$ в гл. ч. беск. много слаг.
$\Rightarrow \{0\}$ – СОТ

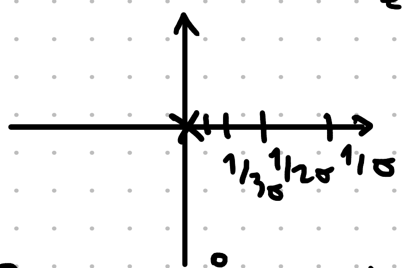
Для ОТ ∞ гл.ч. отс.
$\Rightarrow \{\infty\}$ – УОТ

Опр. Пусть f,g опр. в $B_R(z_0)$.
Пишут: $f(z)\sim g(z),\ z\to z_0$,
если в $\mathring{B}_R(z)$ опр. ф-я $\alpha(z)$: $f(z)\equiv\alpha(z)g(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z)=1$

Утв. Пусть $z_0\neq\infty$ – полюс ф-ции f.
Тогда полюс имеет порядок m $\Leftrightarrow$ $f(z)\sim\frac{A}{(z-z_0)^m}$, $A\neq\infty$, $z\to z_0$

Пусть $z_0=\infty$ – полюс ф-ции f.
Тогда полюс имеет порядок m $\Leftrightarrow$ $f(z)\sim\frac{A}{(z-z_0)^m}$, $A\neq 0$, $z\to z_0$

Пр.2 $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; ОТ $=\{0;\infty;\frac{1}{\pi n}, n\neq 0\}$



$\Rightarrow \{0\}$ – неизол. ОТ (НОТ)

В окр $\mathring{B}_{1/\pi}(\infty)$ f – рег. $\Rightarrow$ $\{\infty\}$ – изол.т. (ИОТОК)

$f(z)\sim z,\ z\to+\infty \Rightarrow [(A=1,\ n=1)] \Rightarrow \infty$ – $П_1$

Утв. Пусть 1) $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$

2) g,h рег. в т. z_0

3) z_0 – нуль п. $m\geq 0$ для g и нуль п. $n\geq 1$ для h

Тогда для $f(z)$ верно:

1) если $m\geq n$: z_0 – УОТ

2) если $m<n$: z_0 – $П_{n-m}$

Пр. $f(z) = \frac{1}{\sin 1/z}$; $z_0 = \frac{1}{\pi n}$; $g(z) = 1$
$h(z) = \sin 1/z$

z_0 – ноль п. $m=0$ для g
z_0 – ноль п. $n=1$ для h $\Big| \Rightarrow z_0 - П_1$ для f

$h(z_0) = -1/z^2 \cos 1/z \neq 0$
$h'(z_0) = -(\pi n)^2 \cdot \cos \pi n \neq 0$