

Какие требования наложены на  $\hat{\xi}$ ?  $\hat{\xi}$  должна быть ту же или меньше  
инф., чем  $\xi$ , т.е.  $\sigma(\hat{\xi}) \subseteq \sigma(\xi)$ , т.е.  $\hat{\xi}$  должна быть  $\sigma(\xi)$ -измеримой.

Th2 [Теорема Дуба]

(N.7)

Пусть с.в.  $\eta$  изм. относ.  $\sigma(\hat{\xi})$ , т.е.  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \eta^{-1}(B) \in \sigma(\hat{\xi})$ . Тогда:

$\exists$  бор. функ.  $\varphi : \eta = \varphi(\hat{\xi})$ .

◁ Пусть дан процесс  $\eta = \sum_{j=1}^M c_j \cdot \mathbb{I}_{A_j^{(\omega)}}$ ,  $A_j \cap A_m = \emptyset$ ,  $c_j$  - разные, т.е.  $\eta$  - простой.

П.к. по ген.  $\eta$  свр.  $\sigma(\hat{\xi})$  - изм., то:  $A_j = \{\omega : \eta(\omega) = c_j\} = \hat{\xi}^{-1}(B_j)$ ,  $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

тогда  $\eta = \sum_{j=1}^M c_j \cdot \mathbb{I}_{B_j}(\hat{\xi}(\omega)) = \varphi(\hat{\xi})$ .

По доказанному  $\exists \varphi_n$ -ср.:  $\gamma_n = \varphi_n(\xi)$ . П.к.  $\varphi_n$ -ср., то  $B = \{x: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -ср. Попробуем - в. Попробуем  $\varphi_n: \tilde{\varphi}_n = \varphi_n \cdot \mathbb{I}_B$ ;  $\xi(\omega) \in B$ , т.к.  $\varphi_n(\xi(\omega)) = \gamma_n \rightarrow \gamma$ , т.е. т.к.  $\xi$  не предель

$$\Rightarrow Z = \varphi(\xi). \triangleright \quad \{\omega: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)\} = \bigcup_k \bigcup_N \bigcup_{n, m \geq N} \underbrace{\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| < \frac{1}{k}\}}_{\text{c.б.}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\forall k \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N \mapsto |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| < \frac{1}{k}$$

Умеем, если  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра (некоторая часть информации о системе).

Ємо нр-бо  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  н нр-бо  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ . Мрга н Th1:

def III Пусть  $\xi$ -с.в. на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $E|\xi| < \infty$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ - $\sigma$ -алг. Тогда выполняются л.о.

$\exists \hat{\chi} \equiv \mathbb{E}(\chi | \sigma(\xi)) := \mathbb{E}(\chi | \xi)$ , но Th 2:  $\exists$  стр. гомом  $\varphi: \hat{\chi} = \varphi(\xi)$ , но какой гомом  $\varphi(x)$ ?

Рассмотрим простую с.в.  $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot I_{D_i}$ ,  $\mathcal{D}_\xi = \{D_1, \dots, D_n\}$  - разд.  $\Omega$ ,  $P(D_k) > 0$   
 $\eta$  - с.в.  $E|\eta| < \infty$ ,  $\hat{\eta} = E(\eta | \xi) = \varphi(\xi)$

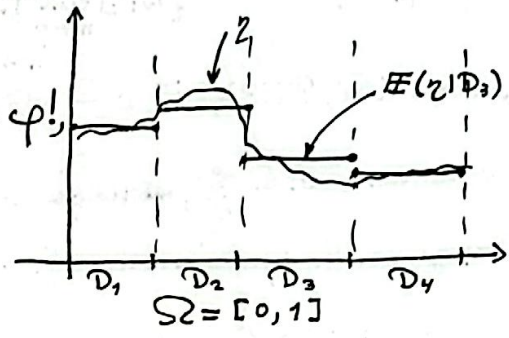
т.к.  $G(\hat{\zeta}) \subset G(\xi) = G(\mathcal{D}_\xi)$ , но мне показывать, что  $\hat{\zeta} = \sum_{i=1}^n y_i I_{D_i}$ ,  $y_i = ?$

Уз. нр.  $\gamma MO: \forall D_k \in G(\hat{\zeta}) \mapsto \mathbb{E} \hat{\zeta} I_{D_k} = \mathbb{E} \zeta I_{D_k}$   
 $\parallel$   
 $y_k \cdot IP(D_k)$

$\Rightarrow y_k = \frac{1}{IP(D_k)} \cdot \mathbb{E} \zeta I_{D_k}$ , что и дано в задании выше.

т.к.  $\hat{\zeta} \stackrel{n.н.}{=} \varphi(\xi)$ , но  $\varphi(x_k) = y_k$  — это и есть искомая  $\varphi$ !

на других  $x$   $\varphi$  не имеет смысла, т.к.  $\xi(\omega) \rightarrow \{x_k\}$ ,  
 нам не определено ее значение.



$\mathbb{E}(\zeta | \xi = x_k) := \varphi(x_k) = y_k = \frac{1}{IP(D_k)} \cdot \mathbb{E} \zeta I_{D_k}$ .

А что, если  $\xi$  и  $\zeta$  — абс. непр.? Пусть  $\xi, \zeta$  нр. на  $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$  через  $f_{\xi\zeta}(x, y)$ .  
 $\mathbb{E}[\xi], \mathbb{E}[\zeta] < \infty$

Построим же условную плотность:  $f_{\zeta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{\xi\zeta}(x, y)}{f_\xi(x)}, & \text{если } f_\xi(x) \neq 0 \\ 0, & \text{если } f_\xi(x) = 0. \end{cases}$

Главней  $\varphi$  через  $f_{\zeta|\xi}$ : покажем, что  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\zeta|\xi}(y|x) dy$ . Для проверки  
 нужно показать, что  $\mathbb{E} \varphi(\xi) I_A = \mathbb{E} \zeta \cdot I_A \quad \forall A \in G(\xi) \quad (*)$ .

$\triangle A \in G(\xi) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}: A = \xi^{-1}(B)$ , применим  $(*)$  на  $\mathcal{B}: I_A = I_B(\xi)$ , переобозначим

л.ч. и п.ч. р-ла  $(*)$ :

л.ч.  $= \mathbb{E} \zeta I_A = \mathbb{E} \zeta I_B(\xi) \stackrel{\text{но } IP_{\xi\zeta}}{\parallel} \int \int y I_B(x) \cdot f_{\xi\zeta}(x, y) dx dy$   
 п.ч.  $= \mathbb{E} \varphi(\xi) \cdot I_A = \mathbb{E} \varphi(\xi) \cdot I_B(\xi) \stackrel{\text{но } IP_\xi}{\parallel} \int \varphi(x) \cdot I_B(x) \cdot f_\xi(x) dx$

$\int_{\mathbb{R}} I_B(x) \int_{\mathbb{R}} y f_{\xi\zeta}(x, y) dy dx$   
 $\parallel$   
 $\int_{\mathbb{R}} I_B(x) f_\xi(x) \left( \int_{\mathbb{R}} y f_{\zeta|\xi}(y|x) dy \right) dx$

$\Rightarrow \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\zeta|\xi}(y|x) dy$ ,  
 но!  $\mathbb{E}(\zeta | \xi) \stackrel{n.н.}{=} \varphi(\xi)$ .  $\triangle$

мы же имеем и известие на  $f_\xi(x)$ , по которому законим т.к. в точке  $x: f_\xi(x) \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = 0 \forall y$   
 т.к.  $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\zeta}(x, y) dy = 0$ , а  $f_{\xi\zeta}(x, y) \geq 0 \Rightarrow f_{\xi\zeta}(x, y) = 0$

# Свойства УМО

① Линейность:  $E(\alpha \xi + \beta \eta | \mathcal{G}) \stackrel{n.u.}{=} \alpha \cdot E(\xi | \mathcal{G}) + \beta \cdot E(\eta | \mathcal{G})$ .

Монотонность:  $\xi \leq \eta \stackrel{n.u.}{\Rightarrow} E(\xi | \mathcal{G}) \leq E(\eta | \mathcal{G})$

△ Проверим линейность: надо показать, что в качестве  $E(\alpha \xi + \beta \eta | \mathcal{G})$  можно взять  $\alpha \cdot E(\xi | \mathcal{G}) + \beta \cdot E(\eta | \mathcal{G})$ .

•  $\alpha \cdot E(\xi | \mathcal{G})$  и  $\beta \cdot E(\eta | \mathcal{G})$  — слв.  $\mathcal{G}$ -изм.  $\Rightarrow$  изм. сумма; интегрируема.

• р-во: пусть  $\mathcal{S}$  слв.  $\mathcal{G}$ -изм, тогда:

$$E[\alpha E(\xi | \mathcal{G}) \cdot \mathcal{S} + \beta E(\eta | \mathcal{G}) \cdot \mathcal{S}] = \left| \begin{smallmatrix} \text{линейн. } E \\ \text{опр. УМО} \end{smallmatrix} \right| = \alpha \cdot E\xi \mathcal{S} + \beta \cdot E\eta \mathcal{S} = E[(\alpha \xi + \beta \eta) \mathcal{S}]. \triangle$$

②  $E(E(\xi | \mathcal{G})) = E\xi$  — формула полной вероятности (усреднение усреднений = усреднение)

△ Пусть  $\mathcal{G} = \Omega: I_{\mathcal{G}} \equiv 1 \triangleright \xi = I_A \Rightarrow P(A) = \int \frac{E(I_A | \mathcal{G})}{P(A | \mathcal{G})} dP(\omega)$  или если  $\mathcal{G} = \sigma(\eta)$ , то

$$P(A) = \int P(A | \eta = y) dP(\omega)$$

③  $\xi$  —  $\mathcal{G}$ -независ. (т.е.  $\mathcal{G}(\xi)$  и  $\mathcal{G}$ -независ.), тогда:  $E(\xi | \mathcal{G}) = E\xi$

$\xi$  —  $\mathcal{G}$ -изм., тогда:  $E(\xi | \mathcal{G}) \stackrel{n.u.}{=} \xi$

△  $E(\xi \cdot \eta) = E\xi E\eta \stackrel{\text{независ.}}{=} E(\xi \cdot \eta) \triangleright$

Если  $\eta$  есть п.р.м., то  $dP(y) = f_{\eta}(y) dy$

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} E(\xi | \eta = y) f_{\eta}(y) dy$$

④ Если  $\eta$  слв.  $\mathcal{G}$ -изм., то  $E(\xi \cdot \eta | \mathcal{G}) = E(\xi | \mathcal{G}) \cdot \eta$

△  $\mathcal{S}$  —  $\mathcal{G}$ -изм.,  $E(\underbrace{\mathcal{S} \cdot \eta}_{\mathcal{G}\text{-изм.}} | \mathcal{G}) \stackrel{\text{опр.}}{=} E(\mathcal{S} \eta | \mathcal{G}) = E((\mathcal{S} \cdot \eta) \cdot \xi) \triangleright$

[N1] Угловая кость подбрасывается  $n$  раз,  $\xi$  — число выпавших „1“,  $\eta$  — число выпавших „6“.

$E(\eta | \xi) = ?$

△ Пусть  $\eta_i = I\{\text{на } i\text{-ом броске „6“}\} \Rightarrow \eta = \sum_{i=1}^n \eta_i$ . По св-ву линейности УМО:

$E(\eta | \xi) = \sum_{i=1}^n E(\eta_i | \xi)$ ,  $E(\eta_i | \xi) = ?$  — для этого найдем  $E(\eta_i | \xi = k)$ .

$$E(\eta_i | \xi = k) = \frac{1}{P(\xi = k)} \cdot E(\eta_i \cdot I_{\{\xi = k\}}) = \left| \begin{smallmatrix} \text{мы не можем разложить } E \\ \text{т.к. } \eta_i \text{ и } I_{\{\xi = k\}} \text{ завис.} \end{smallmatrix} \right| = \frac{1}{P(\xi = k)} \cdot E I_{\{\xi = k\} \cap \{\xi_i = 1\}} =$$

$$= \frac{1}{P(\xi = k)} \cdot P(\eta_i = 1, \xi = k) \stackrel{\substack{\uparrow \frac{1}{6} \\ \text{всех } n-1 \text{ экз.} \\ \text{к разбросу „1“}}}{=} = \frac{\frac{1}{6} \cdot C_{n-1}^k \cdot (\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{n-k-1}}{C_n^k (\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{n-k}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot (n-1)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{\frac{5}{6} \cdot k! \cdot (n-k-1)! \cdot n!} = \frac{n-k}{5n}$$

$\Rightarrow E(\eta_i | \xi = k) = \frac{n-k}{5n}$

$E(\eta_i | \xi) = \sum_{k=0}^n E(\eta_i | \xi = k) \cdot I_{\{\xi = k\}} = \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{5n} \cdot I_{\{\xi = k\}} = \frac{n-\xi}{5n} \Rightarrow E(\eta | \xi) = \frac{n-\xi}{5}$

мет. разброс „1“ — „6“

вероятн. „1“ — „6“ (22)

**N3**  $S_n$  - число чет. в сечении Бернулли с парам. p.  $E(S_m | S_n) = ?$ ,  $m < n$ .

$$\triangleleft S_m = \sum_{i=1}^m \xi_i, \quad \xi_i = I\{\text{i-ое чет. - успех}\}, \quad i \leq n$$

$$E(\xi_i | S_n = k) = \frac{1}{P(S_n = k)} \cdot E \xi_i I_{\{S_n = k\}} = \frac{1}{P(S_n = k)} \cdot P(\{\xi_i = 1\} \cap \{S_n = k\}) =$$

↑ P  
k-1 успехов из n-1 кроме i-го

$$= \frac{p \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}}{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} = \frac{k! \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!}{n! \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \frac{k}{n}$$

$P(\xi_i = 1, S_n = k) = P(\xi_i = 0, S_{n-1} = k-1)$   
за  $\xi_i$  кроме  $\xi_i$

$$\Rightarrow E(\xi_i | S_n) = \frac{S_n}{n} \Rightarrow E(S_m | S_n) = \frac{m}{n} \cdot S_n. \triangleright$$

Imp1 Пусть с.б.  $\xi$  и  $\eta$  - независ. и имеют конечные м.о.

$$\text{Дока.: } E(\xi | \xi + \eta) = E(\eta | \xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}.$$

Imp2 Пусть  $\{\xi_n\}$  - i.i.d.,  $E|\xi_1| < \infty$ ,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

$$\text{Дока.: } E(\xi_1 | S_n, S_{n+1}, \dots) = \frac{S_n}{n}$$

Imp3  $\xi, \eta \sim \mathcal{U}[0, 1]$  - независ.  $X = \min\{\xi, \eta\}$ ,  $Y = \max\{\xi, \eta\}$ .  $E(X | Y) = ?$

Реш  $X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ ,  $E[X | X^2] = ?$ .  $\triangleleft X^2 = -X \Rightarrow E(-X | (-X)^2) = E(X | X^2) = -E(X | X^2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow E[X | X^2] = 0 \triangleright$

$X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ ,  $E[X^2 | X] = ?$   $\triangleleft X^2$  или  $\sigma(x)$  - узм.  $\Rightarrow E[X^2 | X] = X^2 \triangleright$