Утв: $f = g\cdot h^{\neq 0}$, $z_0 \neq \infty$ — НОТОХ для g, но не СОТ или т. рег. т
— СОТ для h

Тогда z_0 — СОТ$_f$.

№ 12.15(8)

$$f = \frac{\operatorname{tg} z\cdot e^{\operatorname{tg} z}}{\operatorname{tg} 4z} \overset{\text{если } \cos 4z\neq 0}{=} \frac{\sin z\cdot\cos 4z}{\cos z\cdot \sin 4z}\cdot e^{\operatorname{tg} z} = \frac{g_1\cdot g_2\cdot g_3}{g_4\cdot g_5}$$

h

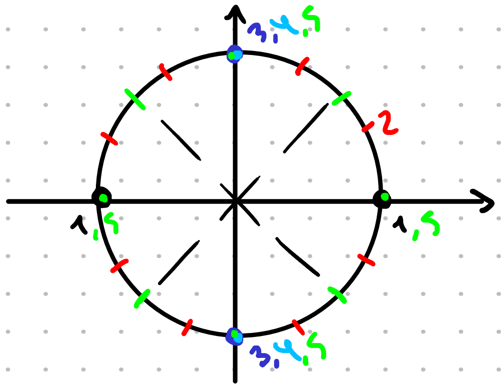
	Нули	ОТ
g_1	π – Н$_1$ (нуль четного порядк.)	∞ – СОТ
g_2	$\pi/8+\pi/4\, m$ – Н$_1$	∞ – СОТ
g_3	$\varnothing$	$\pi/2+\pi k$ – СОТ
g_4	$\pi/2+\pi l$ – Н$_1$	∞ – СОТ
g_5	$\pi/4\, q$ – Н$_1$	∞ – СОТ

Иссл. $e^{\operatorname{tg} z}$ в $\dot{B}(\pi/2)$

$\lim\limits_{x\to \pi/2-0} \frac{\sin x}{\cos x}$

? каково типа особенн. нуля h в т. $\pi/2+\pi l$

ответ: в П$_2$



ОТ $= \{\pi/2+\pi l\}$ – СОТ

$\{\pi n\}$ – УОТ

$\{\pi/8 + \frac{\pi k}{4}\}$ – УОТ

$\{\pi/4+\pi s\}$ – П$_1$

$\{\infty\}$ – НОТ

Т1

$$f(z) = \frac{\cos^2(z+1/z) - \sin^2(z-1/z)}{\sin 2z \cos\frac{2}{z}}\operatorname{th}\frac{1}{z+i} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ \sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2};\right.$$

$$\left.\cos^2(z+1/z) - \sin^2(z-1/z) = \frac{1+\cos(2z+2/z)-1+\cos(2z-2/z)}{2} = \cos 2z\cos 2/z\right] =$$

$$= \frac{\cos 2z\cos^2 1/z\,\operatorname{sh}\frac{1}{z+i}}{\sin 2z\cos^2 1/z\,\operatorname{ch}\frac{1}{z+i}} = \frac{g_1 g_2 g_3}{g_4 g_5 g_6}$$

(1) $\cos^2 1/z = 0$; $\frac{2}{z} = \frac{\pi}{2}+\pi m \neq 0$ $\Rightarrow z = \frac{2}{\pi/2+\pi m}$

$-\sin\frac{2}{z}(-2/z^2) = \sin(\frac{\pi}{2}+\pi m)\cdot\frac{1}{2}(\pi/2+\pi m)^2 \neq 0$

(2) $\operatorname{sh}(\frac{1}{z+i}) \Leftrightarrow \sin(\frac{i}{z+i}) = 0$

$\frac{i}{z+i} = \pi k$; $z = i(-1+\frac{1}{\pi k})$

	Нули	ОТ
g_1	$\pi/4+\pi/2\, n$ – Н$_1$	∞ – СОТ
g_2	$\frac{2}{\pi/2+\pi m}$ – Н$_1$ (1)	0 – СОТ; ∞ – УОТ
g_3	$i(-1+\frac{1}{\pi k})$ – Н$_1$ (2)	$-i$ – СОТ; ∞ – УОТ
g_4	$\pi/2\, l$ – Н$_1$	∞ – СОТ
g_5	$i(-1+\frac{1}{\pi/2+\pi k})$ – Н$_1$ (3)	$-i$ – СОТ; ∞ – УОТ

$\operatorname{sh} w = \sum\limits_0^\infty \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\operatorname{sh}\ldots = \sum \frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z+i)^{2n+1}}$

беск. чл. ч.

$\Rightarrow$ СОТ

(3) $\operatorname{ch}\frac{1}{z+i}=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{i}{z+i}\right)=0;\ \frac{1}{z+i}=\pi q+\pi/2;\ z=i\left(-1+\frac{1}{\pi/2+\pi q}\right)$

$ОТ=\{-i-НОТ;\ \infty-НОТ;\ 0-НОТ;\ \frac{\pi l}{2}-П_1;$
$\frac{2}{\pi/2+\pi m}-УОТ;\ i\left(-1+\frac{1}{\pi/2+\pi q}\right)-П_1\}$ - ответ

Вычеты

1) Пусть $z_0\neq\infty$, f рег. в $\dot B_R(z_0)$. Тогда $\exists!$ разл. в р.Л.:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n;$$

тогда **вычетом** f в z_0 наз. $\underset{z_0}{\operatorname{res}} f = c_{-1}$

2) Пусть $f(z)$ рег. в $\dot B_R(z_0)$, тогда $\exists!$ разл.:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

тогда **вычетом** f в z_0 наз. $\underset{\infty}{\operatorname{res}} f = -c_{-1}$

Пр. пусть $z_0\neq\infty$ - УОТ $\Rightarrow \underset{z_0}{\operatorname{res}} f=0$ (нет гл.ч.)

-//- - точка рег-сти $\Rightarrow$ можно разл. в ряд Т.
$\Rightarrow \underset{z_0}{\operatorname{res}} f=0$

пусть ∞ - УОТ f
$\Rightarrow$ тогда может быть, что $\underset{\infty}{\operatorname{res}} f\neq 0$

например: а) $g(z)=1/z \leftarrow c_{-1}=-1$, ост. $-0 \Rightarrow \underset{\infty}{\operatorname{res}} g=-1$

б) $h(z)=1/z^2 \leftarrow$ только $c_{-2} \Rightarrow \underset{\infty}{\operatorname{res}} h=0$