З $A_1, A_2, \ldots$ - соб. Тогда

1) Если $\sum_n P(A_n) < \infty$, то $P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\ge N} A_n\right) = 0$

2) Если $A_1, A_2, \ldots$ - нез., $\sum_n P(A_n) = \infty$, то $P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\ge N} A_n\right) = 1$ " A_n беск. число"

Пр. Пусть $\{\xi_n\}$ - послед. беск. с.в, с ф.р. $F(x)$;
$F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$

$\eta_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ Док: $P\left(\{\omega : \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\}\right) = 1$

Для доп. мнеж. соб. $H = \overline{E} = \{\omega : \eta_n(\omega) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\}$

$\omega \in H \iff \exists N \text{ и } \{n_j\} : \eta_n(\omega) \le N$

$\iff \omega \in \overline{\lim_n}\{\eta_n \le N\}$ для некот. N

$\overline{\lim_n}\{\eta_n \le N\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} \{\omega : \eta_k(\omega) \le N\}$

С другой стороны:

$H = \bigcup_{N=1}^{\infty} \overline{\lim_n}\{\eta_n \le N\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} \{\omega : \eta_k(\omega) \le N\}$

$P(\{\eta_n \le N\}) = F(N)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(\{\eta_n \le N\}) < \infty$

$\Rightarrow \forall N \; P\left(\overline{\lim_n}\{\eta_n \le N\}\right) = 0 \Rightarrow P(H) = 0 \Rightarrow P(E) = 1$

Преобразования случ. величин

Утв. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(B) = \int_B p(x)dx$ – инт. Лебега

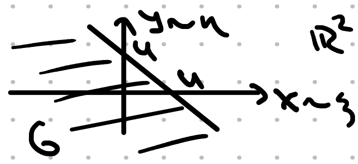
D2 [Формула свертки]

Пусть (ξ, η) - непр. с.в. с совм. плотн. $f_{\xi,\eta}(x,y)$

Покажем, что $\zeta = \xi + \eta$ имеет $f_\zeta(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, u-x)dx$

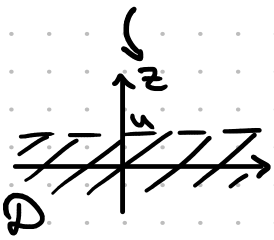
$P(\zeta \le z) = P(\xi + \eta \le z) = \int_{\substack{(x,y) \\ x+y<u}} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy \ominus$

" $F(\zeta \le z)$



$\ominus \begin{bmatrix} x = x \\ u = x+y \end{bmatrix} = \int_{\substack{(x,u): x\in\mathbb{R} \\ u \le z}} f_{\xi\eta}(x, u-x)\,dx\,du =$

якобиан: $\det J = -1$



$= \int_{-\infty}^{z} du \int f_{\xi\eta}(x, u-x)dx \Rightarrow f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, u-x)\,dx$

Если ξ и η - независ. $f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) \cdot f_\eta(u-x)\,dx$

ч.т.д.

Упр. Что, если надо найти вер., что $\xi > \eta \overset{\zeta =}{\Leftrightarrow} \xi - \eta > 0$

Пусть ξ и η одинаково распр., незав., $\xi, \eta \sim N(0,1)$

Теорема. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ - абс. непр. с.в. $\xi(\Omega) = A \in \mathbb{R}^n$

$\varphi: A \to B \subset \mathbb{R}^n$ - диф. (непр. диф. и биекц.) $\Rightarrow \varphi^{-1}$ - диф.

Тогда $\varphi(\xi)$ - абс. непр. и $f_{\varphi(\xi)}(\underset{\mathbb{R}^n}{t}) = f_\xi(\varphi^{-1}(t)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}| \cdot I\{t \in B\}$

Д-во: $\overset{ЛЧ}{P(\varphi(\xi) \in M)} = \int_M f_{\varphi(\xi)}(t)dt, \ \forall M \subset \mathbb{R}^n$. $I\{t \in B\}$ - индикатор

$M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \subseteq B$, M_2: $M_2 \cap B = \varnothing$

$\Rightarrow$ т.к. $\varphi(\xi) \in B$ и $M_2 \cap B = \varnothing$, то $ЛЧ = P(\varphi(\xi) \in M)$

$ПЧ = \int_{M_1} f_{\varphi(\xi)}(t)dt$ т.к. M_2 - обнул. по инд. нулевые

$\Rightarrow$ можно всегда [illegible] $M = M_1$

$$P(\varphi(\xi) \in M) = P(\xi \in \varphi^{-1}(M)) = \int_{\varphi^{-1}(M)} f_\xi(t)\,dt = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \int_M f_\xi(\varphi^{-1}(x)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}| dx \Rightarrow f_{\varphi(\xi)}(x) = f_\xi(\varphi^{-1}(x)) \cdot |J_{\varphi^{-1}}|$$

ч.т.д.

Пр. Если $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - невырожд. и ξ - абс. непр. с.в.

Р/м $\eta = A\xi + b$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\det A} \cdot f_\xi(A^{-1}(x - b))$$

Пр. $\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $\xi \sim N(0,1)$; Найти: ξ^3 и ξ^2

Р/м $\varphi(x) = x^3$

$\varphi^{-1}(x) = x^{1/3}$

$(\varphi^{-1}(x))' = 1/3\, x^{-2/3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(x) \quad \eta = \varphi(\xi) \\ f_\eta(y) = \dfrac{f_\xi(x)}{|\varphi'(x)|} = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot |\varphi^{-1}(y)'| \end{array} \right.$$

$$f_{\varphi(\xi)} = f_\xi(x^{1/3})\, 1/3\, x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} x^{-2/3} e^{-1/2 x^{2/3}}$$

Р/м $\varphi(x) = x^2$; $\eta = \xi^2$; $F_\eta(y) = P(\overset{=\xi^2}{\eta} \le y) = P(-\sqrt{y} \le \xi \le \sqrt{y}) =$

$= F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y})$

далее аналогично

С дискр. величин.:

Было распр. ξ: $P(\xi = x_k) = p_k$ и ф-я f: получим с.в. $f(\xi)$: $P(f(\xi) = f(x_k)) = p_k$; если f склеивает знач., то вер-ти надо сложить

Пр:

ξ	0	-1	1
p	1/3	1/3	1/3

$f(x) = |x| \Rightarrow$

$f(\xi)$	0	1
p	1/3	2/3