Дз по диффурам Хачатурян Виктории Б01-302
задание 1, 4 сем.

I Завис-ть реш. от параметра и нач.усл.

Ф. №1064 Найти произв. по параметр. или по нач. усл. от реш. ур-ия

$y' = y + \mu(x + y^2)$ (1) $\quad y(0) = 1 \quad$ Найти: $\frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} = \varphi(x)$

искомая ф-ия

$y' = \frac{\partial y(x,\mu)}{\partial x}$

дифф (1) по $\mu$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial x} = \frac{\partial y}{\partial \mu} + x + y^2 + \mu \cdot 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \mu}$$

Считаем, что $y(x,\mu)$ обладает непр. дифф (из обч. теории)

$\mu = 0$: $$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \mu}\Big|_{\mu=0} = \frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} + x + \left(y|_{\mu=0}\right)^2$$

$y|_{\mu=0}$ — реш з.Коши при $\mu = 0$

$y' = y \quad y(0) = 1$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)\Big|_{\mu=0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}\right)}_{\text{операции перестановочн.}} = \varphi'(x)\right]$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + x + e^{2x}$$

ОРОУ: $\varphi(x) = C \cdot e^x$

Пр.ч. $x$

ЧРНУ: $Ax + B$

$A = Ax + B + x$

$\Rightarrow A = -1 = B$

$\varphi(x) = -x - 1$

Пр.ч. $e^{2x}$

ЧРНУ: $D \cdot e^{2x}$

$2D = D + 1$

$\Rightarrow D = 1$

$\varphi(x) = e^{2x}$

$$\Rightarrow \varphi = C \cdot e^x - x - 1 + e^{2x}$$

$$\left[\varphi(0) = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)\Big|_{\mu=0}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(y|_{x=0}\right)\Big|_{\mu=0}\right]$$

Все операции с $\mu$ перестановочн. с подстановк. $x$

$y|_{x=0} = 1 \quad \Rightarrow \varphi(0) = 0$

$\varphi(0) = C - 1 + 1 = C = 0$

$\Rightarrow$ Ответ: $\varphi(x) = -x - 1 + e^{2x}$

№1068 Усл. то же

$\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3 \quad x(0) = 1 + \mu \quad$ Найти: $\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} = \varphi(t)$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \mu} = 2x\frac{\partial x}{\partial \mu} + t x^3 + 3x^2 \mu t \frac{\partial x}{\partial \mu}$$

$\mu = 0$: $$\varphi'(t) = 2(x|_{\mu=0}) \cdot \varphi(t) + t \cdot (x|_{\mu=0})^3 + \cancelto{0}{3(x|_{\mu=0})^2 \mu t \varphi(t)}$$

$x|_{\mu=0}$ — реш з.Коши при $\mu = 0$ $\quad x' = x^2$ ; $x(0) = 1$

$\Rightarrow x|_{\mu=0} = -\frac{1}{t+C}$ ; $x(0) = -\frac{1}{C} = 1 \Rightarrow$ $C = -1$ $\quad x = -\frac{1}{t-1}$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = -\frac{2}{t-1}\varphi(t) - t \cdot \frac{1}{(t-1)^3}$$

ОРОУ: $\varphi(t) = \frac{e^c}{(t-1)^2} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{-t-\ln|t-1|+C}{(t-1)^2}$

$x(0) = 1+\mu \Rightarrow \varphi(0) = 1 \longrightarrow \varphi(0) = \frac{-\ln 1 + C}{1} = 1 \Rightarrow C = 1$

Ответ: $\varphi(t) = \frac{-t-\ln|t-1|+1}{(t-1)^2}$

## II Лин. ур-ия с перем. коэф.

Ф. №667

$y_1 = x,\ y_2 = x^5,\ y_3 = |x^5|$ Являются ли они лин. зав. на $(-1, 1)$?

$x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$ (1)

$C_1x + C_2x^5 + C_3|x|^5 = 0$

$x = 1/2$ $\quad 1/2\,C_1 + 1/32\,C_2 + 1/32\,C_3 = 0$

$x = -1/2$ $\quad -1/2\,C_1 - 1/32\,C_2 + 1/32\,C_3 = 0 \Rightarrow$ $C_1 = -1/16\,C_2 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ $\Rightarrow x, x^5, |x|^5$

$x = 1/10$ $\quad 1/10\,C_1 + 1/10^5\,C_2 + 1/10^5\,C_3 = 0$

лин.нез.на $(-1,1)$

Ответ: нет

№668 $y_1, y_2$ – реш. ур-ия $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, где $p(x), q(x)$ – непр.

максимумы $y_1, y_2$ наход. в одной т. $x = x_0$

Д-ать: $y_1$ и $y_2$ – лин. зависимы

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ $\quad y_1, y_2$ будут лин нез, если $\forall x \in \mathbb{R}\ W(y_1, y_2) \neq 0$ иначе они лин.зав.

при $W(y_1, y_2)$ в т. $x_0$ – макс. $y_1$ и $y_2$

$W = y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0)\cdot y_1'(x_0) = 0$, т.к. $y_2'(x_0) = y_1'(x_0) = 0$

$\Rightarrow y_1$ и $y_2$ – лин.зав. ч.т.д

№677 Составить лин.одн. дифф. ур-ие мин. порядка, имеющее данные частн. реш. (перем. коэф.)

$x^2 - 3x,\ 2x^2 + 9,\ 2x + 3$

$C_1(x^2-3x) + C_2(2x^2+9) + C_3(2x+3) = 0$

$x^2:\ C_1 + 2C_2 = 0 \quad \Rightarrow 6C_2 + 2C_3 = 0$

$x:\ -3C_1 + C_3 = 0 \quad \Rightarrow 6C_2 + 2C_3 = 0$ ) лин. зав.

$1:\ 9C_2 + 3C_3 = 0$

Одну ф-цию выкинем, оставшиеся $\underset{=y_1}{2x^2+9}$, $\underset{=y_2}{2x+3}$ – лин. нез. реш.

Пусть $y$ – произв. реш.

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \Rightarrow W(y,y_1,y_2) = 0$$

$$W(y,y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y & 2x^2+9 & 2x+3 \\ y' & 4x & 2 \\ y'' & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2x+3(4y'-4xy'') - 2(4y-(2x^2+9)y'') =$$

$$= y''(-12x+4x^2+18) + 12y' - 8y + 2x = 0$$

Ответ: $y''(4x^2-12x+18) + 12y' - 8y + 2x = 0$

С §9

№6 $(1-\ln x)y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = (1-\ln x)^2$

Ф-ла Лиувилля-Остр.

$$W(\underset{\text{угаданное}}{y_1}, \overset{\text{произв}}{y_0}) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt} = C\varphi(x) \Rightarrow \left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

Угадаем ЧРОУ: $y_1 = x$

$$W(y_1,y) = C\exp\left(-\int \frac{dx}{x(1-\ln x)}\right) = \begin{bmatrix} t = 1-\ln x \\ dt = -1/x \end{bmatrix} = C(1-\ln x)$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(1-\ln x)}{x^2} \text{ ;}$$

$$\frac{y}{x} = C\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} du = dx/x^2 & u = -1/x \\ v = 1-\ln x & dv = -dx/x \end{bmatrix} = C\left((\ln x - 1)1/x - \int \frac{dx}{x^2}\right) =$$

$$= C_1(\ln x - x)1/x + \cancel{C_1 1/x} + C_2 = \frac{C_1\ln x}{x} + C_2$$

ОРНУ: $y = C_1\ln x + C_2x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x)x = 0 \\ C_1'(x)1/x + C_2'(x) = 1-\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &C_1'(x)(\ln x - 1) = (\ln x - 1)x \\ &C_1'(x) = x \\ &\Rightarrow C_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

$$C_2'(x) = -\ln x; \quad C_2(x) = x - x\ln x + C_2$$

Итого: $y = \frac{x^2}{2}\ln x + C_1\ln x + x^2 - x^2\ln x + C_2x$

Ответ: $y = C_1\ln x + C_2x + x^2 - \frac{x^2}{2}\ln x$

№16 $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2x^2e^{2x}$

ЧРОУ: $y_1 = e^x$

$$W(y_1,y) = C\exp\left(\int \frac{2x+1}{x}dx\right) = Ce^{2x+\ln x + c} = Cxe^{2x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{Cxe^{2x}}{e^{2x}} = Cx \text{ ; } \frac{y}{e^x} = \frac{C_1x^2}{2} + C_2$$

ОРОУ: $y = C_1x^2e^x + C_2e^x$

$$C_1'(x)x^2e^x + C_2'(x)e^x = 0$$
$$C_1'(x)(2xe^x + x^2e^x) + C_2'(x)e^x = \frac{2x^2e^{2x}}{x} \leftarrow \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x) = 0 \\ C_1'(x)x(2+x) + C_2'(x) = 2xe^x \end{cases} \Rightarrow \quad C_1'(x) = e^x \quad C_2'(x) = -x^2e^x$$
$$C_1(x) = e^x + C_1 \quad C_2(x) = -e^x(x^2-2x+2) + C_2$$

Итого: $y = e^x(\cancel{e^x x^2} + C_1x^2 - \cancel{e^x x^2} + e^x2x - 2e^x + C_2)$

Ответ: $y = e^x(C_1x^2 + C_2) + 2e^{2x}(x-1)$

№53 $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6(x+1)$

ЧРОУ: $y_1 = 1/x$

$$W(y_1, y) = C\exp\left(-\int\frac{4x+2}{x(x+1)}dx\right) = \frac{C}{x^2(x+1)^2}$$

$$\int\frac{4x+2}{x(x+1)}dx = 2\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln x + 2\ln|x+1| + C$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{Cx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{C}{(x+1)^2}; \quad xy = C\int\frac{dx}{(x+1)^2} = C_1\frac{1}{x+1} + C_2$$

ОРОУ: $y = \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{C_2}{x}$

$$\begin{cases} \frac{C_1'(x)}{x(x+1)} + \frac{C_2'(x)}{x} = 0 \\ -\frac{C_1'(x)(2x+1)}{(x^2+x)^2} - \frac{C_2'(x)}{x^2} = \frac{6(x+1)}{x(x+1)} \end{cases} \Rightarrow \quad C_1'(x)\frac{x}{(x+1)^2} = -6x$$
$$C_1'(x) = -6(x+1)^2 \quad C_2'(x) = 6(x+1)$$
$$C_1(x) = -2(x+1)^3 + C_1 \quad C_2(x) = 3(x+1)^2 + C_2$$

Итого: $y = \frac{-2(x+1)^3 + C_1}{x(x+1)} + \frac{3(x+1)^2 + C_2}{x} = \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{C_2}{x} + \frac{-2(x^2+2x+1) + 3x^2 + 6x + 3}{x}$

Ответ: $y = \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{C_2}{x} + x + 2$

№73

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 2x^{5/2}e^x$$

ЧРОУ: $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$$W(y_1, y) = C\exp\left(-\int\frac{dx}{x}\right) = \frac{C}{x}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{Cx}{x\sin^2 x}; \quad \frac{y}{y_1} = C\int\frac{dx}{\sin^2 x} = C_1\operatorname{ctg} x + C_2 \Rightarrow \text{ОРОУ } y = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2'(x)\frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0 \\ C_1'(x)\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}\right) + C_2'(x)\left(-\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{2x^{5/2}e^x}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0 \\ C_1'(x)(2x\cos x - \sin x) + C_2'(x)(-2x\sin x - \cos x) = 4x^2e^x \end{cases} \Rightarrow C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = 2xe^x$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} C_1'(x) = 2xe^x\cos x \\ C_2'(x) = -2xe^x\sin x \end{matrix}$$

$$C_2(x) = -2\int x e^x \sin x\,dx = \left[\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=e^x\sin x\,dx & v=\frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2}\end{matrix}\right] = -2\left(x\frac{\sin x e^x-\cos x e^x}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac12\int(\sin x e^x - \cos x e^x)\,dx\right) = -2\left(x\frac{\sin x e^x-\cos x e^x}{2} - \frac12\,\frac{\sin x e^x-\cos x e^x}{2} + \frac12\,\frac{\sin x e^x+\cos x e^x}{2}\right)+C_1 =$$

$$= -x\sin x e^x + x\cos x e^x - \cos x e^x + C_1$$

$$C_1(x) = 2\int x e^x\cos x\,dx \overset{\text{аналогично}}{=} x\sin x e^x + x\cos x e^x - \sin x e^x + C_2$$

Итого: $y = \frac{\sin x}{\sqrt x}\left(x\sin x e^x + \cancel{x\cos x e^x} - \sin x e^x + C_1\right) - \frac{\cos x}{\sqrt x}\left(\cancel{x\sin x e^x} - x\cos x e^x + \cos x e^x + C_2\right)$

Ответ: $y = \frac{C_1\sin x}{\sqrt x} + \frac{C_2\cos x}{\sqrt x} + \frac{x-1}{\sqrt x}e^x$

ФБ22 №47 Пусть $y_1(x), y_2(x)$ — реш. ур-е

(*) $(x+2)y'' - 3y' + y\sqrt{1-x} = 0$ с нач. усл. $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, $y_2(0)=3$, $y_2'(0)=2$

а) На каком интервале продолж. реш?

По т. о сущ. и ед. Коши; $a_0(x)\neq 0$: на $(-2, 1]$

б) Составляют ли они ФСР?

$W(y_1,y_2)|_{x=0} = \begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow W(y_1,y_2)\neq 0$ ни в одной т.

$\Rightarrow y_1, y_2$ лин. нез. и сост. ФСР

$\Rightarrow$ да

в) Найти: $W(y_1,y_2)|_{x=-1}$

$W(y_1,y_2) = C\exp\left(\int\frac{3}{x+2}dx\right) = Ce^{3\ln(x+2)} = C(x+2)^3$

при $x=0$: $2=8C \Rightarrow C=1/4 \Rightarrow W(y_1,y_2) = 1/4\,(x+2)^3$

$\Rightarrow W(y_1,y_2)|_{x=-1} = 1/4$

Т1. Д-ть, что ур-е Бесселя (*) не может иметь 2 лин. нез. реш, огр. в окр. нуля со своими произв.

(*) $x^2y''+xy'+(x-\nu^2)y=0$, $\nu=\text{const}$ на $(0,+\infty)$

Пусть найдены 2 таких реш. $y_1$ и $y_2$

$W(y_1,y_2) = C\exp\left(-\int\frac{dx}{x}\right) = C/x \neq 0$ т.к. они лин. нез.

$\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix} = C/x$ — не огр. в окр. 0

$y_1y_2' - y_1'y_2$ — огр. в окр. 0 как сумма и произв огр. ф-ций

$\Rightarrow$ противоречие

ч.т.д.

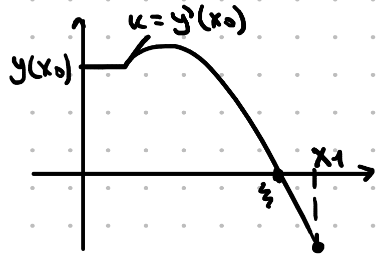
## III Теорема сравнения Штурма

Ф. №723 Д-ть: при $q(x)\le 0$ все реш. ур-я $y''+q(x)y=0$ с положит. нач. усл. $y(x_0)>0$ $y'(x_0)>0$ остаются положит. при всех $x>x_0$

Предположим это не так: $\exists x_1: y(x_1)\le 0$. Тогда $\exists \xi\in[x_0,x_1]: y(\xi)=0$

$$y'(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{y(x_0+t)-y(x_0)}{t} \Rightarrow \exists \delta>0: \forall x\in(x_0,x_0+\delta)\quad y(x)>y(x_0)$$

Считаем, что $\xi$ — наим. из точек, где $y(x)=0$.
(можем так делать, т.к. inf равен min)




Тогда $y(x)>0$ на $[x_0,\xi)$

$$y''+\underbrace{q(x)}_{\le 0}\underbrace{y}_{>0}=0 \Rightarrow y''>0 \Rightarrow y'(x)\uparrow \text{ на } [x_0,\xi)$$

$y'(x)\ge y'(x_0)>0 \Rightarrow y(x)\uparrow$ на $[x_0,\xi)$

Тогда $y(x)\ge y(x_0)>0$ на $[x_0,\xi)$

Но $y(\xi)=0 \Rightarrow$ противоречие ч.т.д.

№726 Найти расст. между двумя соседними нулями $\forall$ нетрив. реш. (1). Сколько нулей может содерж. на $x\in[a,b]$?

(1) $y''+my=0$ $m=const>0$

Пусть $\omega^2\le m\le\Omega^2$

Сравним реш (1) с реш ур-ий:

(2) $z''+\omega^2 z=0 \Rightarrow z=C_1\sin(\omega x+C_2)$

(3) $u''+\Omega^2 u=0$ $u=D_1\sin(\Omega x+D_2)$

Пусть $x_{1z}$ и $x_{2z}$ – последов. нули ур-я (2)

Тогда $x_{2z}=x_{1z}+\frac{\pi}{\omega}$

Пусть $x_{1y}$ и $x_{2y}$ – последов. нули ур-я (1)

По т. Штурма: $x_{1z}\le x_{1y}<x_{2y}\le x_{2z}$; $x_{2y}\le x_{2z}=x_{1z}+\frac{\pi}{\omega}\le x_{1y}+\frac{\pi}{\omega}$

$\Rightarrow x_{2y}-x_{1y}\le\frac{\pi}{\omega}$

аналогично получим: $x_{2y}-x_{1y}\ge\frac{\pi}{\Omega}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{\Omega}\le \overbrace{x_{2y}-x_{1y}}^{=d}\le\frac{\pi}{\omega}$

Возьмем $\omega^2=\Omega^2=m$. Тогда $x_{2y}-x_{1y}=\frac{\pi}{\sqrt{m}}$

Число нулей на $x\in[a,b]$:

$$N=\left[\frac{b-a}{\pi}\cdot\sqrt{m}\right] \text{ или на 1 больше}$$

Ответ: $d=\frac{\pi}{\sqrt{m}}$
$N=\left[\frac{b-a}{\pi}\sqrt{m}\right]$ или на 1 больше

## с §10

№2 Д-ть: $\forall$ нетрив. реш. (*) имеет на $[0,+\infty)$ конечн. число нулей

(*) $y''+\frac{1}{4(x^2+1)}=0$

Утв: $y''+Q(x)y=0$; $Q(x)\le 1/4x^2$ $x\ge a>0$
Тогда $\forall$ нетр. реш. имеет не более 1 нуля при $x\ge a$

$\tilde{Q}(x)=\frac{1}{4(x^2+1)}<\frac{1}{4x^2} \Rightarrow$ при $x\in[1,+\infty)$ реш. имеет не более 1 нуля

на $[0,1]$ реш имеет конечн. число нулей

$\Rightarrow$ на $[0,+\infty)$ $\forall$ нетр. реш. имеет конечн. число нулей

ч.т.д.

№3 Д-ть: ∀ нетрив. реш. ур-е (*) имеет беск. много нулей на $[0,+\infty)$

(*) $y''+\frac{1}{1+x^2}y=0$

{ Утв: $y''+Q(x)y=0$ ; $Q(x)\geq A/x^2$ $A>1/4$
Тогда ∀ нетрив. реш. имеет беск. много нулей при $x\geq a>0$

$\tilde{Q}(x)=\frac{1}{1+x^2}\geq\frac{1}{2x^2}=\frac{A}{x^2}$ , $A=1/2>1/4$

$\Rightarrow$ ∀ нетрив. реш. имеет беск. много нулей на $[1,+\infty)$
Следовательно, на $[0,+\infty)$ тоже.
ч.т.д

№6 Д-ть: ∀ нетрив. реш. ур-е (*) имеет $\leq 5$ нулей на $(-\infty,+\infty)$

(*) $y''+x^2y'+(x+4)y=0$

Преобр. Лиувилля:

$y=z\exp(-\frac{1}{2}\int x^2dx)=ze^{-1/6x^3}$

$y'=z'\cdot e^{-1/6x^3}-1/2zx^2e^{-1/6x^3}$

$y''=z''e^{-x^3/6}-z'x^2e^{-x^3/6}+ze^{-x^3/6}(1/4x^4-x)$

(*) $\to$ $z''-z'x^2+z(1/4x^4-x)-x^2(z'e^{-x/6}-\frac{1}{2}zx^2)+z(x+4)=0$

$z''-1/4zx^4+4z=0$

$z''+z(4-x^4/4)=0$

$4-x^4/4\leq 0$ ; $x^4\leq 16$ ; $|x|\geq 2$

На $(-\infty;-2]\cup[2,+\infty)$ не более 1 нуля (т.к. $Q(x)$ отр.)
Осталось показать, что на $[-2,2]$ не более 3 нулей.

$Q(x)=4-x^4/4\leq 4$

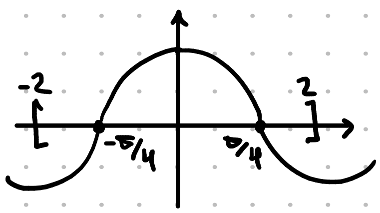
на $[-2;2]$:

(1) $z''+z(4-x^4/4)=0$ $N_1$ – число нулей нетрив. реш (1)

(2) $z''+4z=0$ $N_2$ – число нулей нетрив. реш (2)

Тогда по т. Штурма $N_1\leq N_2+1$
Достаточно показать, что $N_1\leq 3$, то есть $N_2\leq 2$
Найдем хотя бы 1 реш (2) такое, что $N_2\leq 2$

(2): $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$
Пусть $u=\cos 2x$.




$N_2=2$ на $[-2,2]$
$\Rightarrow$ $N_1\leq 3$
ч.т.д

Т3. $q(x)$ – непр., $q(x)\leq 0$. Д-ть: краевая задача $y''+q(x)y=0$ : $y(a)=A$, $y(b)=B$ при ∀ $A,B$, $a\neq b$ имеет реш. и оно единств.

1) существование

Р/м две з. Коши для одного ур-я

$y_1(a)=0$ $y_1'(a)=1$ По т. о сущ и единств. обе ф-ции однозн. опр. на $[a,b]$
$y_2(b)=0$ $y_2'(b)=1$

Тогда ∀ ф-я вида $C_1y_1(x)+C_2y(x)$ – реш. ОУ

Если $\varphi(x)$ — непр. реш. НУ, то $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \varphi(x)$ — реш. НУ

Подберем $C_1$ и $C_2$: $y_1(a) = A$ $y_2(b) = B$:

$$\begin{cases} C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + \varphi(a) = A \\ C_1y_1(b) + C_2y_2(b) + \varphi(b) = B \end{cases} \quad \text{Нужно, чтобы } \Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

По следствию из т. Штурма: реш. ОУ с $q(x) \leq 0$ не может иметь больше 1 нуля на $[a,b]$

Тогда из $y_2(b) = 0$ следует $y_1(b) \neq 0$;
из $y_1(a) = 0$ следует $y_2(a) \neq 0$ $\Rightarrow \Delta = \cancel{y_1(a)y_2(b)} - y_1(b)y_2(a) \neq 0$

ч.т.д.

2) единственность

Пусть $\exists$ 2 реш. $y_1$ и $y_2$

$$\begin{matrix} y_1'' + q(x)y_1 = f(x) & y_1(a) = y_2(a) = A \\ y_2'' + q(x)y_2 = f(x) & y_1(b) = y_2(b) = B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1(x) - y_2(x) = y(x) \\ y'' + q(x)y = 0;\ y(a) = 0\ \ y(b) = 0 \end{matrix}$$

Получим, что реш. ур-я с $q(x) \leq 0$ имеет более 1 нуля на $[a,b]$
$\Rightarrow$ противоречит сл. из т. Штурма

ч.т.д.

Т4. Д-ть: $\forall$ нетрив. реш. ур-я $(*)$ имеет на действ. оси $\leq 3$ нулей

$(*)$ $y'' + 2x^2y' + (2x+1)y = 0$

Преобр. Лиувилля:

$$y = z\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right) = z\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int 2x^2dx\right) = z\exp\left(-\int x^2dx\right) = ze^{-x^3/3}$$

$$y' = z'e^{-x^3/3} - x^2ze^{-x^3/3}$$

$$y'' = z''e^{-x^3/3} - x^2z'e^{-x^3/3} - z'x^2e^{-x^3/3} - z(2xe^{-x^3/3} - x^4e^{-x^3/3})$$

$$(*)\ \ z''e^{-x^3/3} - 2z'x^2e^{-x^3/3} + ze^{-x^3/3}(x^4 - 2x) + 2x^2z'e^{-x^3/3} - 2x^4ze^{-x^3/3} + 2xze^{-x^3/3} + ze^{-x^3/3} = 0$$

$$z'' + z(x^4 \cancel{-2x} - 2x^4 \cancel{+2x} + 1) = 0$$

$$z'' + z(1 - x^4) = 0$$

$Q(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2)$

$Q(x) \leq 0$ при $x^2 \geq 1$
$|x| \geq 1$

Тогда на $x \in (-\infty; -1] \cup [1, +\infty)$ не более 1 нуля по сл. из т. Штурма.

Осталось доказать, что на $[-1, 1]$ не более 2 нулей.

$Q(x) = 1 - x^4 \leq 1$

число нулей нетрив. реш. на $[-1,1]$

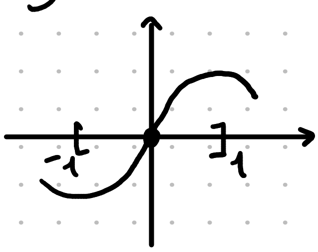
$z'' + z(1-x^4) = 0$ $N_1$ $N_2 \geq N_1 - 1$ по т. Штурма

$u'' + u = 0$ $N_2$ $N_1 \leq N_2 + 1$

Достаточно показать, что $N_1 \leq 2$, т.е. $N_2 \leq 1$

$u = C_1\cos x + C_2\sin x$

Пусть $u = \sin x$




$N_2 = 1 \Rightarrow N_1 \leq 2$

ч.т.д.

T5. Д-ть: ∀ нетрив. реш. ур-я $y''+(2+\cos 3x)y=0$ имеет т. $\xi\in[-1,6]$ : $y'(\xi)=0$

Достаточно показать, что ∀ нетрив. реш. имеет не менее 2 нулей на $[-1,6]$, далее по т. Ролля

(1) $u''+u=0$ $\quad N_1$

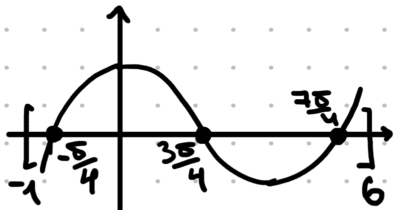
(2) $y''+(\underbrace{2+\cos 3x}_{\geq 1})y=0$ $\quad N_2$ $\quad N_2\geq N_1-1$ по т. Штурма

Достаточно показать, что $N_2\geq 2$, т.е. $N_1\geq 3$

Найдем реш (1), для которого $N_1\geq 3$

$u=C_1\cos x+C_2\sin x$

Пусть $u=\sin(x-\varphi)$, $\varphi=-\pi/4$. Нули: $x=\varphi, \varphi+\pi, \varphi+2\pi$




$N_1=3$ на $[-1,6]$

$\Rightarrow N_2\geq 2$ ч.т.д

T6. Д-ть:

а) ∀ нетрив. реш. ур-я Бесселя (*) имеет беск. число нулей на $(0,+\infty)$

б)* Расст. между последов. нулями $[x_{n+1}-x_n]$ любого реш стремится к $\pi$ при $n\to+\infty$

(*) $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ $\quad \nu=const$

(*) $\xrightarrow[\text{преобр. Лиувилля}]{}$ $z''+\left(1+\frac{1/4-\nu^2}{x^2}\right)z=0$

а) $Q(x)=1+\underbrace{\frac{1/4-\nu^2}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$ $\quad\exists c:\forall x\geq c\ Q(x)\geq 1/2$ ⇒ ∀ реш. имеет беск много нулей на $[1,+\infty)$ по сл. из т. Штурма

на $[0,1]$ конечн. число нулей ⇒ итого, на $(0,+\infty)$ беск. число нулей

ч.т.д

б)* из З. №726: Пусть $\omega^2\leq Q(x)\leq\Omega^2$

Тогда расст между последов. нулями: $\frac{\pi}{\Omega}\leq x_{n+1}-x_n\leq\frac{\pi}{\omega}$

$Q(x)=1+\frac{1/4-\nu^2}{x^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}Q(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}Q(x)=1$

Возьмем $\omega(n)$ и $\Omega(n)$ такие, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\omega^2(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\Omega^2(n)=1$; $\omega^2(n)\leq Q(n)\leq\Omega^2(n)$ $\forall n$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{\Omega}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{\omega}=\pi$ ⇒ по т. о 2 милиц. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\pi$

ч.т.д

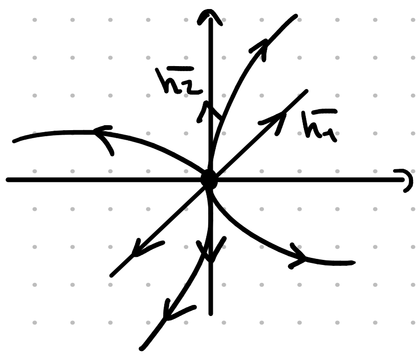
## IV Исследование поведения фазовых траекторий.

№971 $\begin{cases}\dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y\end{cases}$ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1) \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3;1$

неуст. узел

$\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$




№972 $\begin{cases}\dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x\end{cases}$

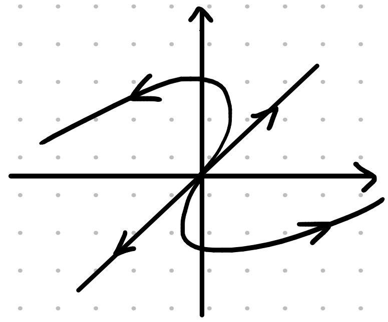
$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ кр. 2

$\Rightarrow$ неуст. вырожд узел

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Возьмем $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

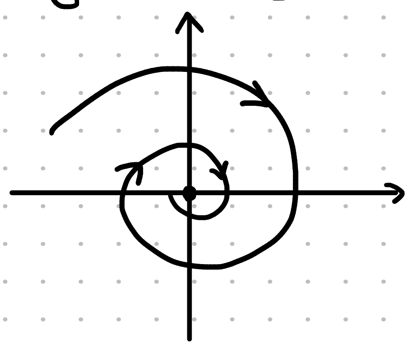
$\Rightarrow$ напр. определили



№973 $\begin{cases}\dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y\end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+5) + 18 = \lambda^2 + 4\lambda + 13 =$ $\Rightarrow$ уст. фокус

$= (\lambda+2)^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm 3i$



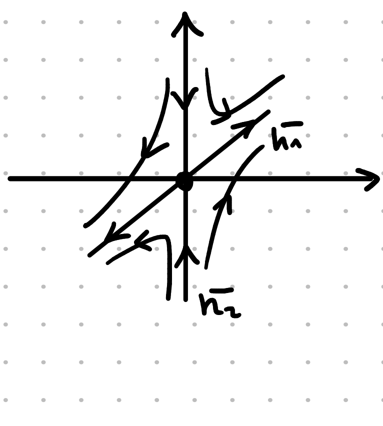
Возьмем $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

№974 $\begin{cases}\dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y\end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ — седло

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

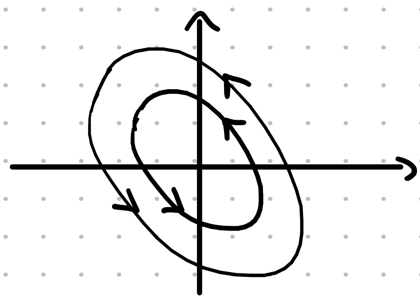
$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



№975 $\dot{x} = -2x-5y$, $\dot{y} = 2x+2y$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)+10 = \lambda^2+6=0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{6}i$ — центр

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



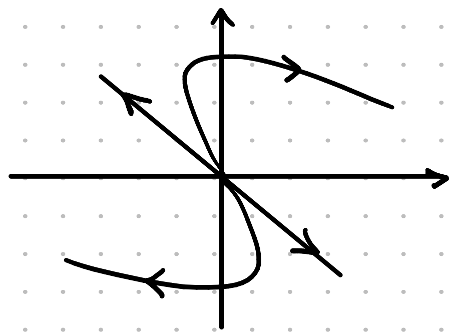
№976 $\dot{x} = 3x+y$, $\dot{y} = y-x$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)+1 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ кр.2

неуст. вырожд. узел

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$



§С13 Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономных систем (1–52):

№39 $\dot{x} = 8+4y-2xy$, $\dot{y} = x^2-4y^2$ $\Rightarrow$ $4+2y-xy=0$, $x^2=4y^2$ ; $y \neq 0$ ; $x = \frac{4}{y}+2$ ; $\frac{16}{y^2}+\frac{8}{y}+4-4y^2=0$ $\Rightarrow$ Полож. равновесия $(-2,-1),(4,2)$

1) $(-2,-1)$

$u = x+2$, $v = y+1$ $\quad u,v \to 0$ $\quad x = u-2$, $y = v-1$

$f_1(x,y) = 8+4y-2xy = 8+4v-4-2(u-2)(v-1) = 8+\cancel{4v}-4-2\cancel{uv}-\cancel{4v}-2u-4 =$
$= -2u+o(\rho)$

$f_2(x,y) = x^2-4y^2 = \cancel{u^2}-4u+\cancel{4}-\cancel{4v^2}+4v-\cancel{4} = 4v-4u+o(\rho)$

2) $(4,2)$

$u = x-4$, $v = y-2$ $\quad u,v \to 0$ $\quad x = u+4$, $y = v+2$

$f_1(x,y) = 8+4y-2xy = 8+4v+8-2(u+4)(v+2) = \cancel{16}+4v-2\cancel{uv}-8v-4u-\cancel{16} =$
$= -4v-4u+o(\rho)$

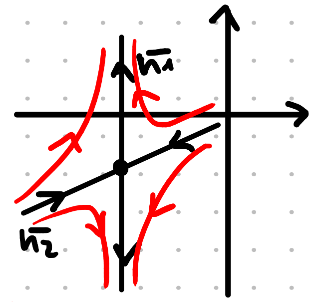
$f_2(x,y) = x^2-4y^2 = \cancel{u^2}+8u+\cancel{16}-\cancel{4v^2}-16v-\cancel{16} = 8u-16v+o(\rho)$

Траектории линеариз. сист.

$(-2,-1)$: $u = x+2$, $v = y+1$ : $\dot{u} = -2u$, $\dot{v} = -4u+4v$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$: $(\lambda+2)(\lambda-4)=0$
$\Rightarrow \lambda = 4; -2 \leftarrow$ седло

$\lambda=4$: $\begin{pmatrix}-6 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

седло:

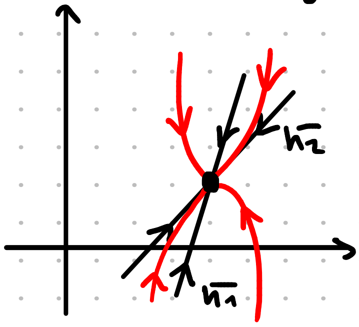



$\lambda=-2$: $\begin{pmatrix}0 & 0\\ -4 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$(4,2)$: $\begin{matrix}\dot u=-4u-4v\\ \dot v=8u-16v\end{matrix}$ $\begin{pmatrix}-4 & -4\\ 8 & -16\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=-12;-8$ уст. узел

$\lambda=-12$: $\begin{pmatrix}8 & -4\\ 8 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda=-8$: $\begin{pmatrix}4 & -4\\ 8 & -8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$




уст. узел

№48 $\begin{matrix}\dot x=x-y^2\\ \dot y=\operatorname{arctg}(1-y^2)\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}x=y^2\\ y^2=1\end{matrix} \Rightarrow$ Полож. равновесие $(1,1),(1,-1)$

1) $(1,1)$

$\begin{matrix}u=x-1\\ v=y-1\end{matrix}$ $u,v\to 0$ ; $\begin{matrix}x=u+1\\ y=v+1\end{matrix}$

$f_1(x,y)=x-y^2=u+1-(v+1)^2=u+1-v^2-2v-1=u-2v+o(\rho)$ , $\rho=\sqrt{u^2+v^2}$

$f_2(x,y)=\operatorname{arctg}(1-y^2)=\operatorname{arctg}(1-v^2-2v-1)=-2v+o(\rho)$

2) $(1,-1)$

$\begin{matrix}u=x-1\\ v=y+1\end{matrix}$ $u,v\to 0$ $\begin{matrix}x=u+1\\ y=v-1\end{matrix}$

$f_1(x,y)=x-y^2=u+\cancel{1}-v^2+2v-\cancel{1}=u+2v+o(\rho)$

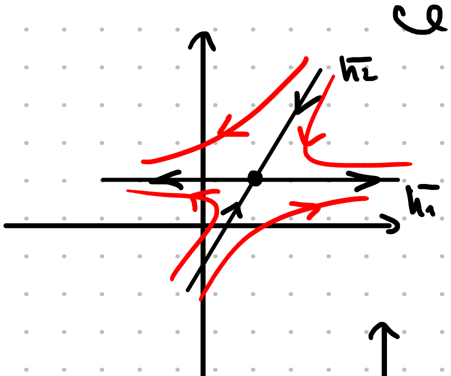
$f_2(x,y)=\operatorname{arctg}(1-v^2+2v-1)=2v+o(\rho)$

Приближенно линеариз. системы:

$(1,1)$: $\begin{matrix}u=x-1\\ v=y-1\end{matrix}$ ; $\begin{matrix}\dot u=u-2v\\ \dot v=-2v\end{matrix}$ $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $(\lambda-1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda=1;-2$ седло

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=-2$: $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

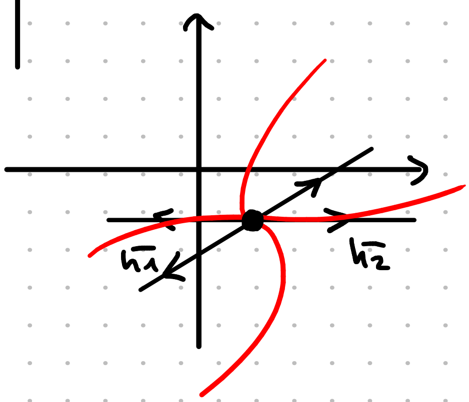



$(1,-1)$: $\begin{matrix}u=x-1\\ v=y+1\end{matrix}$ ; $\begin{matrix}\dot u=u+2v\\ \dot v=2v\end{matrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$(\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda=2;1$ – неуст. узел

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \bar h_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



ДЗ7 $\ddot{x}+2\dot{x}+x-2x^2+1=0$

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-2y-x+2x^2-1\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y=0\\ 2x^2-x-1=0\end{array} \Rightarrow x=1;-1/2 \Rightarrow$$

Полож. равнов. $(1,0),\ (-1/2,0)$

1) $(1,0)$

$u=x-1 \qquad x=u+1$

$v=y$

$f_1(x,y)=y=v$; $f_2(x,y)=-2y-x+2x^2-1=-2v-u-\cancel{1}+2\cancel{u^2}+4u+\cancel{2}-\cancel{1}=3u-2v+o(\rho)$

2) $(-1/2,0)$

$u=x+1/2 \qquad x=u-1/2$

$v=y$

$f_1(x,y)=y=v$; $f_2(x,y)=-2v-u+\cancel{1/2}-\cancel{1}+2(\cancel{u^2}-u+\cancel{1/4})=-3u-2v+o(\rho)$

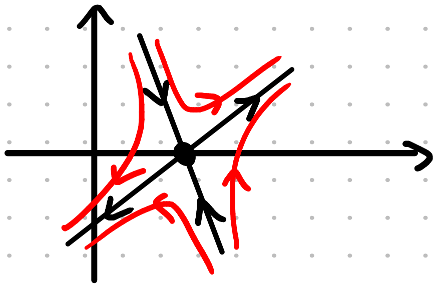
Траектории линеариз. сист.:

$(1,0)$: $\begin{array}{l}\dot{u}=v\\ \dot{v}=3u-2v\end{array}$ $\begin{pmatrix}0&1\\3&-2\end{pmatrix}$ $\lambda(\lambda+2)-3=\lambda^2+2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=-3;1$

седло

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix}-1&1\\3&-3\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=-3$: $\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$



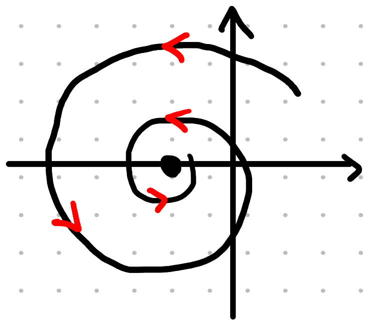
$(-1/2,0)$: $\begin{array}{l}\dot{u}=v\\ \dot{v}=-3u-2v\end{array}$ $\begin{pmatrix}0&1\\-3&-2\end{pmatrix}$

$\lambda(\lambda+2)+3=\lambda^2+2\lambda+3=(\lambda+1)^2+2=0$

$\lambda=-1\pm\sqrt{2}i$

уст. фокус

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$



ДФ-161

**161.** При каких соотношениях между коэффициентами $a$, $b$, $c$, $d$ особая точка системы $\dot{x}=ax+by$, $\dot{y}=cx+dy$ является
а) седлом,
б) узлом?

$\begin{array}{l}\dot{x}=ax+by\\ \dot{y}=cx+dy\end{array}$ $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=\lambda^2-\lambda(a+d)+ad-bc=0$

а) седло: $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=ad-bc<0 \Rightarrow \underline{ad<bc}$

При $ad<bc$:
$a^2-2ad+d^2+4bc>$
$>(a^2+d^2)+2ad=$
$=(a+d)^2>0$
(второе усл. уже выполн.)

б) узел: $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$\lambda_1\cdot\lambda_2>0 \Rightarrow ad-bc>0$; $ad>bc$

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow D>0$; $(a+d)^2-4(ad-bc)>0 \Rightarrow (a-d)^2+4bc>0$

$$\Rightarrow \underline{\begin{cases}ad>bc\\ (a-d)^2+4bc>0\end{cases}}$$

№894 **894.** Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$

$\square$ Пусть $\varphi(t)$ - реш. и оно уст.

$\dot{\bar{\varphi}} = A(t)\bar{\varphi} + \bar{f}(t)$

$\bar{x} - \bar{\varphi}(t) = y$ ; $\bar{x} = \bar{y} + \varphi(t)$ ; $\dot{\bar{y}} + \cancel{\dot{\bar{\varphi}}(t)} = A(t)(\bar{y} + \cancel{\bar{\varphi}(t)}) + \cancel{\bar{f}}(t)$

$\Rightarrow$ однор. сист. $\dot{\bar{y}} = A\bar{y}$ им. полож. равн. $\bar{y}_0 = 0$

$\bar{\varphi}(t)$ - уст. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall$ реш. $\bar{x}(t)$ $|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \delta$

$\forall t \geq t_0 \; |\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall$ реш. одн. сист. $\bar{y}(t)$: $|\bar{y}(t_0)| < \delta \; \forall t \geq t_0$ $|\bar{y}(t)| < \varepsilon$

нулевое реш. одн. сист. устойчиво

$\forall$ реш. неодн. сист. уст. одноврем. с нулевым реш. одн. сист.

Т.е. все реш. сист. уст. одноврем. $\blacksquare$