Равн. сх-ть несобств. интегр.

$\forall \alpha \in \Omega$ $f(x,\alpha)$ инт. по Риману на $\forall [a,b'] \subset [a,b)$ b – кон. или $+\infty$

$\forall \alpha \in \Omega$ $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx$ сх

$\forall \alpha \in \Omega$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b' \in (a,b)$ $\forall \eta \in (b',b)$; $b' = b'(\alpha, \varepsilon)$

$$\left| \int_\eta^{\to b} f(x,\alpha)dx \right| < \varepsilon$$

Говорят, что $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx$ сх. равн. по $\alpha \in \Omega$, если

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists b' \in (a,b)$ $\forall \eta \in (b',b)$ $\underbrace{\forall \alpha \in \Omega \ \left| \int_\eta^{\to b} f(x,\alpha)dx \right| < \varepsilon}_{\sup\limits_{\alpha \in \Omega} \left| \int_\eta^{\to b} f(x,\alpha)dx \right| \le \varepsilon}$

$\Updownarrow$ $b' = b'(\varepsilon)$

$$\lim_{\eta \to b-0} \sup_{\alpha \in \Omega} \left| \int_\eta^{\to b} f(x,\alpha)dx \right| = 0$$

Пр. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сх. при $\alpha > 1$

$$\int_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\eta^{+\infty} = \frac{\eta^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{\eta^{\alpha-1}(\alpha-1)}$$

η – фикс. $\sup\limits_{\alpha > 1} \left| \int_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = +\infty$ $\Rightarrow$ <u>сх. по $\alpha > 1$ неравномерно</u>

Р/м $\alpha \geq \alpha_0 > 1$

$$\sup_{\alpha \geq \alpha_0} \left| \int_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \frac{1}{(\alpha_0 - 1)\eta^{\alpha_0 - 1}} \xrightarrow[\eta \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ <u>сх. по $\alpha \geq \alpha_0 > 1$ равномерно</u>

Пр. Вейерштрасса

Пусть $\forall \alpha \in \Omega$ $f(x,\alpha)$ инт. по Риману на $\forall [a,b'] \subset [a,b)$ и $|f(x,\alpha)| \le \varphi(x)$, где $\int_a^{+b} \varphi(x)dx$ сх.

Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)dx$ сх равном. по $\alpha \in \Omega$

$\alpha \geq \alpha_0 > 1$ $\left| \frac{1}{x^\alpha} \right| \le \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ – инт. сх $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сх. по $\alpha \geq \alpha_0 > 1$ равномерно по пр. В-са

Пр.

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx$ $\quad |e^{-\alpha x}\cos x| \le e^{-\alpha x}$ при $\alpha>0$ инт. абс. сх. по пр. сравнения

$\alpha \ge \alpha_0 > 0$

$|e^{-\alpha x}\cos x| \le e^{-\alpha_0 x}$ — инт. сх.

инт. сх. равн. по $\alpha \ge \alpha_0 > 0$ по пр. В-са $\quad e^{-\alpha x}(\cos x + i\sin x) \to 0$

$$\int_\eta^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx = \mathrm{Re}\int_\eta^{+\infty} e^{(-\alpha+i)x}dx = \mathrm{Re}\,\frac{e^{(-\alpha+i)x}}{-\alpha+i}\Big|_\eta^{+\infty} = \mathrm{Re}\,\frac{e^{(-\alpha+i)\eta}}{\alpha-i} =$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{e^{-\alpha\eta}(\cos\eta+i\sin\eta)(\alpha+i)}{1+\alpha^2} = \frac{e^{-\alpha\eta}(\alpha\cos\eta-\sin\eta)}{1+\alpha^2}$$

инт. сх. равном., если

$\forall\varepsilon>0\ \exists B'>0\ \forall\eta>B'\ \forall\alpha>0: \left|\int_\eta^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon$

инт. сх. неравном., если

$\exists\varepsilon>0\ \forall B'>0\ \exists\eta>B'\ \exists\alpha>0\ \left|\int_\eta^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right|\ge\varepsilon$

Возьмем $\eta=2\pi n-\pi/2$, $\alpha=\frac{1}{2\pi n-\pi/2}$

$$\int_\eta^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx = \frac{e^{-1}}{1+\frac{1}{(2\pi n-\pi/2)^2}} \ge \frac{1}{2e} \quad n\ge n_0$$

$\exists\varepsilon=\frac{1}{2e}\ \forall B'>0\ \exists\eta=2\pi n-\pi/2>B'\ \exists\alpha=\frac{1}{2\pi n-\pi/2}>0$

$\left|\int_\eta^{+\infty}\dots\right|\ge\varepsilon \Rightarrow$ сх. неравном.

Пр. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$ $\quad$ Иссл. равном. сх-сть

1) $\alpha>0$

2) $\alpha<0$

1) $\int_\eta^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}=\int_{\eta-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}$ $\quad\uparrow$ по α

$t=x-\alpha$

$\sup\limits_{\alpha>0}\left|\int_\eta^{+\infty}\dots\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}=C>0$ — сх. по $\alpha>0$ неравном.

2) $\sup\left|\int_\eta^{+\infty}\dots\right| = \int_\eta^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\xrightarrow[\eta\to+\infty]{}0$ — сх. по $\alpha<0$ равном.

Пр. $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx$ 1) $\alpha>0$ 2) $\alpha\geq\alpha_0>0$

$t=\sqrt{\alpha}\,x$

$$\int_{\eta}^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx=\int_{\sqrt{\alpha}\eta}^{+\infty}e^{-t^2}dt \quad \uparrow \text{ по } \alpha$$

$$\sup_{\alpha>0}\left|\int_{\eta}^{+\infty}\dots\right|=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ — сх. по $\alpha>0$ неравном.

$$\sup_{\alpha\geq\alpha_0>0}\left|\int_{\eta}^{+\infty}\dots\right|=\int_{\sqrt{\alpha_0}\eta}^{+\infty}e^{-t^2}dt\xrightarrow[\eta\to+\infty]{}0$$ — сх. по $\alpha\geq\alpha_0$ равном.

Вопрос. $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ — не зав. от α

$t=\sqrt{\alpha}\,x$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ сх. равн. по $\alpha>0$

Дело в том, что при иссл. равн. сх. инт. нельзя делать замену, завис. от параметра!

Кр. Коши равн. сх-ти интегр.

Пусть $\forall\alpha\in\Omega$ $f(x,\alpha)$ инт. по Риману на $\forall[a,b']\subset[a,b)$

Тогда $\int_a^{\to b}f(x,\alpha)dx$ равн. сх. по $\alpha\in\Omega$

$\Updownarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists b'\in(a,b)\ \forall\eta',\eta''\in(b',b)\ \forall\alpha\in\Omega\ \left|\int_{\eta'}^{\eta''}f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$

Пр. $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos x\,dx$ $\alpha>0$

$\eta'=2\pi n-\pi/2$, $\eta''=2\pi n+\pi/2$ $\alpha=\frac{1}{2\pi n-\pi/2}$

$$\int_{\eta'}^{\eta''}e^{-\alpha x}\underbrace{\cos x}_{\geq 0}dx\geq e^{-\alpha(2\pi n-\pi/2)}\overbrace{\int_{2\pi n-\pi/2}^{2\pi n+\pi/2}\cos x\,dx}^{=2}=2e^{-\alpha(2\pi n-\pi/2)}=\frac{2}{e}$$

$\exists\varepsilon=\frac{1}{2e}$ $\forall b'>0$ $\exists\eta'=2\pi n-\pi/2>b'$ $\exists\eta''=2\pi n+\pi/2>b'$ $\exists\alpha=\frac{1}{2\pi n-\pi/2}>0$ $\left|\int_{\eta'}^{\eta''}e^{-\alpha x}\cos x\,dx\right|\geq\varepsilon$ $\Rightarrow$ инт. сх. неравн. по кр. Коши

Пр. Дирихле равном. сх. несоб. инт-ла

Пусть $\forall \alpha \in \Omega$ $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\alpha)$ непр. на $[a,b)$

Пусть:

1) $f(x)$ имеет первообразную по x, огр. равном. по α

$$\exists M>0 \quad \forall x \in [a,b) \quad \forall \alpha \in \Omega \quad \left|\int_a^x f(t,\alpha)dt\right| \le M$$

2) $\forall \alpha \in \Omega$ $g(x,\alpha) \downarrow$ по x $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,\alpha) \le 0\right)$

3) $\forall \alpha \in \Omega$ $|g(x,\alpha)| \le p(x) \xrightarrow[x\to b-0]{} 0$ $\left(g(x,\alpha) \underset{\alpha\in\Omega}{\rightrightarrows} 0, \ x \to b-0\right)$

Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx$ сх. равном. по $\alpha \in \Omega$

Пр. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сх $\forall \alpha > 0$

Проверим применимость пр. Дирихле

$f(x,\alpha) = \sin x$ имеет огр. первообр. $-\cos x$, не завис. от α

$g(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha} \underset{\text{по } x}{\downarrow}$ при $\alpha > 0$

$\alpha \ge \alpha_0 > 0$

$|g(x,\alpha)| \le \frac{1}{x^{\alpha_0}} \longrightarrow 0$

Инт. сх. равном. по пр. Дирихле по $\alpha \ge \alpha_0 > 0$

Сх. инт по $\alpha > 0$ <u>неравном.</u>

$$\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \ge \frac{1}{(2\pi n+\pi)^\alpha} \overbrace{\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\, dx}^{=2} = \frac{2}{(2\pi n+\pi)^\alpha}$$

$(2\pi n+\pi)^\alpha = 2$; $\alpha \ln(2\pi n+\pi) = \ln 2$

$\log_{(2\pi n+\pi)} 2 = \alpha$; $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln(2\pi n+\pi)}$

$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall B' > 1 \quad \exists \xi' = 2\pi n > B' \quad \exists \xi'' = 2\pi n + \pi > B'$

$\exists \alpha = \frac{\ln 2}{\ln(2\pi n+\pi)} : \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,\alpha)dx\right| \ge \varepsilon$

T1. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx$ 1) $\alpha>0$ 2) $\alpha\geq\alpha_0>0$

опеч. здесь 1 (не 0)

2) $g(x)=\frac{1}{x}\downarrow 0$ по x и не завис. от α

$f(x,\alpha)=\sin\alpha x$ имеет огр. первообр. $\frac{\cos\alpha x}{\alpha}$

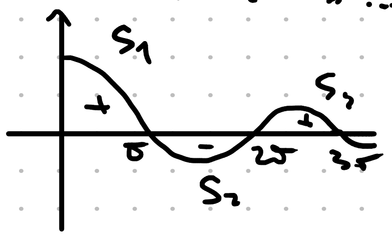
$\alpha\geq\alpha_0>0$ $\left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right|\leq\frac{1}{\alpha_0}$

Сх. равном. по пр. Дирихле по $\alpha\geq\alpha_0>0$

1) при $\alpha>0$ <u>сх. неравном.</u>

$\exists\varepsilon>0\ \forall B'>1\ \exists\xi_1>B'\ \exists\alpha>0\ \left|\int_{\xi_1}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\geq\varepsilon$

$S_1>S_2>S_3>\dots$



$\int_{\xi_1}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{\alpha\xi_1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

$t=\alpha x$ $\alpha=\frac{2\pi}{\xi_1}$, $\xi_1=2\pi n$

$\exists\varepsilon=\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt>0\ \forall B'>1\ \exists\xi=2\pi n>B'$

$\exists\alpha=\frac{2\pi}{2\pi n}$ $\int_{\xi}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\geq\varepsilon$ ч.т.д.

Пр. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}dx$ $\alpha\geq 0$

$\int_1^{+\infty}\frac{x\sin x^2}{x(1+x^\alpha)}dx$ $f(x,\alpha)=x\sin x^2$, первообр. $-\frac{1}{2}\cos x^2$ огр. и не завис. от α

$g(x,\alpha)=\frac{1}{x(1+x^\alpha)}\downarrow$ по x $\forall\alpha\geq 0$

$|g(x,\alpha)|\leq\frac{1}{x}\to 0\Rightarrow$ <u>знач. сх. равном. по пр. Дирихле</u>