Задача III.5.11.в) Наилучшая среднеквадратичная линейная аппроксимация $f(x) = \ln(1+x)$ на $[0,1]$

Хамаш Виктории Б01-301

Постановка задачи

Требуется построить наилучшую среднеквадратичную линейную аппроксимацию функции $f(x) = \ln(1+x)$ на отрезке $[0,1]$ в виде:

$$F(x) = u_0 + u_1 x$$

Коэффициенты u_0 и u_1 находятся методом наименьших квадратов (МНК) путём минимизации функционала:

$$\Phi(u_0, u_1) = \int_0^1 (F(x) - f(x))^2 dx = \int_0^1 (u_0 + u_1 x - \ln(1+x))^2 dx$$

Теоретическое обоснование

Согласно Лекции 3 (МНК для непрерывного случая), для минимизации функционала Φ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно u_0 и u_1:

$$(\varphi_0, \varphi_0)u_0 + (\varphi_0, \varphi_1)u_1 = (f, \varphi_0)$$
$$(\varphi_1, \varphi_0)u_0 + (\varphi_1, \varphi_1)u_1 = (f, \varphi_1)$$

где:

- Базисные функции: $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$
- Скалярное произведение: $(g, h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$

Вычисление элементов системы

Элементы матрицы Грама

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = [x]_0^1 = 1$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \int_0^1 1 \cdot x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x \cdot x dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Элементы правой части

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1 \ln(1+x)\cdot 1dx = I_0$$
$$(f,\varphi_1)=\int_0^1 \ln(1+x)\cdot xdx = I_1$$

Вычислим интегралы I_0 и I_1.

Вычисление I_0: Применим интегрирование по частям. Положим:

$$\begin{cases} u=\ln(1+x)\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x} \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{cases}$$

Тогда:

$$I_0=[x\ln(1+x)]_0^1-\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

Вычислим оставшийся интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=[x-\ln(1+x)]_0^1=(1-\ln 2)-(0-0)=1-\ln 2$$

Подставляем:

$$I_0=(1\cdot\ln 2)-(1-\ln 2)=\ln 2-1+\ln 2=2\ln 2-1$$

Вычисление I_1: Также применим интегрирование по частям. Положим:

$$\begin{cases} u=\ln(1+x)\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x} \\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Тогда:

$$I_1=\left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

Разложим подынтегральное выражение:

$$\frac{x^2}{1+x}=\frac{x^2-1+1}{1+x}=\frac{(x-1)(x+1)}{1+x}+\frac{1}{1+x}=(x-1)+\frac{1}{1+x}$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)-(0)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Подставляем обратно в выражение для I_1:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Решение системы уравнений

Система принимает вид:

$$u_0 + \frac{1}{2}u_1 = 2\ln 2 - 1 \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{3}u_1 = \frac{1}{4} \tag{2}$$

Подставим численное значение $\ln 2 \approx 0.693147$ в уравнение (1):

$$u_0 + 0.5u_1 = 2 \cdot 0.693147 - 1 = 1.386294 - 1 = 0.386294$$

Умножим уравнение (2) на 2 для упрощения:

$$u_0 + \frac{2}{3}u_1 = 0.5$$

Теперь вычтем уравнение (1) из полученного уравнения:

$$\left(u_0 + \frac{2}{3}u_1\right) - (u_0 + 0.5u_1) = 0.5 - 0.386294$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)u_1 = 0.113706$$
$$\left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right)u_1 = 0.113706$$
$$\frac{1}{6}u_1 = 0.113706$$
$$u_1 = 0.113706 \cdot 6 = 0.682236$$

Теперь найдём u_0 из уравнения (1):

$$u_0 + 0.5 \cdot 0.682236 = 0.386294$$

$$u_0 + 0.341118 = 0.386294$$
$$u_0 = 0.386294 - 0.341118 = 0.045176$$

Ответ

Наилучшая среднеквадратичная линейная аппроксимация функции $f(x) = \ln(1+x)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет вид:

$$\boxed{F(x) \approx 0.04518 + 0.68224x}$$