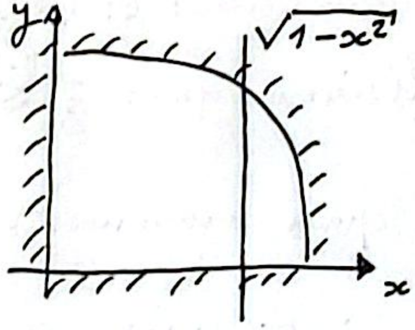
№2 Случ. вектор (ξ, η) имеет равн. распр. в обл. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

Найти $\mathbb{E}(\eta \mid \xi)$.



$\triangleleft$ $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{4}{\pi} \cdot I_D(x,y)$ – известно, но $f_\xi(x) = ?$

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy \overset{x \in [0,1]}{=} \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot I_{[0,1]}(x)$$

$$\Rightarrow f_{\eta \mid \xi}(y \mid x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot I_D(x,y).$$

$\mathbb{E}(\eta \mid \xi = x) \equiv \varphi(x) = ?$

$$\mathbb{E}(\eta \mid \xi = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\eta \mid \xi}(y \mid x)\,dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \mathbb{E}(\eta \mid \xi) = \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-\xi^2}}^{\text{сред равн. распр.}}. \ \triangleright$$

№6 Пусть X – выборка из $\mathcal{U}[0,1]$, т.е. $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ – i.i.d, $X=(X_1, \dots X_n)$.

Найти: $\mathbb{E}[X_1 | X_{(n)}] = ?$

◁ <u>I Способ: через условную плотность:</u>

Рассмотрим совместную ф.р.:

зависимы

$$\mathbb{P}(X_1 \le x, X_{(n)} \le y) = \mathbb{P}(X_1 \le x, X_1 \le y, X_2 \le y, \dots, X_n \le y) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \le x, X_1 \le y) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le y, \dots, X_n \le y) = \min\{x,y\} \cdot y^{n-1}$$

Т.о. $F_{(X_1, X_{(n)})}(x,y) = \min\{x,y\} \cdot y^{n-1}$.

Если $x<y$, то т.к. $f_{(X_1, X_{(n)})}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X_1, X_{(n)})}(x,y)$, то тогда

$f_{(X_1, X_{(n)})}(x,y) = (n-1)\cdot y^{n-2}$, $x<y$

Ранее доказывали, что $F_{X_{(n)}}(y) = y^n \Rightarrow f_{X_{(n)}}(y) = n \cdot y^{n-1} \Rightarrow f_{X_1|X_{(n)}}(x|y) = \dfrac{(n-1)y^{n-2}}{n \cdot y^{n-1}} =$

$= \dfrac{n-1}{ny}$, $x<y$.

• А что при $y<x$? $\mathbb{P}(X_1 \le x, X_{(n)} \le y) = \mathbb{P}(X_1 \le y, X_{(n)} \le y) = y^n \Rightarrow f_{(X_1, X_{(n)})}(x,y) = 0$.

• При $y=x$: т.к. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1|X_{(n)}}(x|y)\,dx = 1$, то тогда остаётся, что вся вероят. „сидит" в $\{\omega: X_1(\omega) = X_{(n)}(\omega)\}$: $\mathbb{P}(X_1 = y | X_{(n)} = y) = 1 - \int\limits_0^y \dfrac{n-1}{ny}\,dx = \dfrac{-n+1}{n} + 1 = \underline{\underline{\dfrac{1}{n}}}$

Начинаем считать само УМО по ф-ле полного УМО:

$$\bullet\, y>x \text{ и } y=x:\ \mathbb{E}(X_1 | X_{(n)} = y) = \int\limits_0^y x \cdot \frac{n-1}{ny}\,dx + y\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{y}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\int\limits_0^y x\,dx + y\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{y}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{y^2}{2} + y\cdot\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}\cdot y + y\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{n+1}{2n}\cdot y \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X_1 | X_{(n)}] = \frac{n+1}{2n}\cdot X_{(n)}}$$

*/ Проверка здравого смысла: знаем, что $\mathbb{E}X_{(n)} = \dfrac{n}{n+1}$, тогда

$$\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|X_{(n)}]]}_{\mathbb{E}X_1} = \frac{n+1}{2n}\cdot\mathbb{E}X_{(n)} = \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}, \text{ как и должно быть!}$$ /*

<u>II Способ: через интегральное свойство</u>

Воспользуемся определением УМО, применив интегральное свойство:

22.1

Хотим найти $\varphi(X_{(n)}) \equiv \mathbb{E}(X_1 | X_{(n)})$, знаем, что $\mathbb{E}(\varphi(X_{(n)}) \cdot \eta) = \mathbb{E}(X_1 \cdot \eta)$ $\forall \eta$ - $\mathfrak{S}_{X_{(n)}}$ - измеримой с. в. Возьмём $\eta = I_A$, где $A = \{\omega : X_{(n)} \le z\} \in \mathfrak{S}_{X_{(n)}}$, $0 \le z \le 1$.

$A = \{X_1 \le z, \ldots, X_n \le z\} \Rightarrow$

$$\text{Л.Ч.} = \mathbb{E}(\underbrace{\varphi(X_{(n)}) \cdot I_A}_{\substack{\text{завис. только} \\ \text{от } X_{(n)} \\ \text{как от одной с. в.}}}) = \int_0^1 \varphi(y) \cdot I\{y \le z\} \cdot \underbrace{f_{X_{(n)}}(y)}_{= n \cdot y^{n-1}} dy = \int_0^z \varphi(y) \cdot n \cdot y^{n-1} dy$$

$$\text{П.Ч.} = \mathbb{E}(X_1 \cdot I_A) = \mathbb{E}(\underbrace{X_1 \cdot I\{X_1 \le z, \ldots, X_n \le z\}}_{\substack{\text{зависит от } X_1, \ldots, X_n \\ \text{всех сразу}}}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 x_1 \cdot \underbrace{f_{(X_1 \ldots X_n)}(x_1, \ldots, x_n)}_{= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{(X_1 \ldots X_n)}(x_1 \ldots x_n)} dx_1 \ldots dx_n =$$

где $F_{(X_1 \ldots X_n)}(x_1 \ldots x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

$$= \int_0^z \ldots \int_0^z x_1 \cdot dx_1 \ldots dx_n = \frac{z^2}{2} \cdot z^{n-1}.$$

Т.о. т.к. Л.Ч. = П.Ч., то $\int_0^z \varphi(y) n \cdot y^{n-1} dy = \frac{z^2}{2} \cdot z^{n-1} \overset{\frac{\partial}{\partial z}}{\Rightarrow} \varphi(z) \cdot n \cdot z^{n-1} \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{(n+1)}{2} \cdot z^n$

$$\Rightarrow \varphi(z) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{n+1}{2 \cdot n} \cdot z \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(X_1 | X_{(n)}) = \frac{n+1}{2n} \cdot X_{(n)}}$$

Подумать: $\mathbb{E}(X_1 | X_{(1)}) = ?$, $\mathbb{E}(X_1 | (X_{(1)}, X_{(n)})) = ?$

№4 [Формула полной дисперсии] Л8

X, Y – с.в., на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{D}Y < \infty$, тогда $\mathbb{D}Y = \mathbb{E}[\mathbb{D}(Y|X)] + \mathbb{D}[\mathbb{E}(Y|X)]$

$\triangleleft$ $\mathbb{D}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2$. // Усл. дисперсия: $\mathbb{D}(Y|X) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2 \,\middle|\, X\right)$

$$\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y^2|X)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{D}(Y|X) + (\mathbb{E}(Y|X))^2\right).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{E}\left(\mathbb{D}(Y|X) + (\mathbb{E}(Y|X))^2\right) - \left(\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))\right)^2 =$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{D}(Y|X)) + \left\{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|X]^2\right] - \left(\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]\right)^2\right\} = \mathbb{E}(\mathbb{D}(Y|X)) + \mathbb{D}(\mathbb{E}(Y|X)). \triangleright$$

№5 Стержень единичной длины ломается в случ. точке, а потом ещё раз ломается. Найти: м.о. и дисп. длины оставшейся части.

$\triangleleft$ $f_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{1}{x} \cdot I_{\{0<y<x<1\}}$

$$\cdot\ \mathbb{E}(\eta|\xi=x) = \frac{1}{x}\cdot\int_0^x y\,dy = \frac{1}{2}x \Rightarrow \mathbb{E}(\eta|\xi) = \frac{1}{2}\cdot\xi$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\eta = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta|\xi)) = \mathbb{E}\left(\tfrac{1}{2}\xi\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\cdot\ \mathbb{E}(\eta^2|\xi=x) = \frac{1}{x}\cdot\int_0^x y^2\,dy = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow \mathbb{E}(\eta^2|\xi) = \frac{1}{3}\xi^2.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\eta^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta^2|\xi)) = \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{9} \Rightarrow \mathbb{D}\eta = \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}. \triangleright$$

Неравенства. Сходимость последовательностей с. в.

Опр. м.о. $\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi\,d\mathbb{P}$, формула замены переменной: $\mathbb{E}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mathbb{P}_\xi(x)$, все св-ва м.о. проистекают из св-в инт. Лебега.

Th1 [Неравенство Чебышёва]

Пусть ξ – с.в. $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Тогда: $\mathbb{P}(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}$;

плохо для оц. „хвостов" распр.: $\mathbb{P}(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \int_\varepsilon^\infty x\,dF_\xi(x) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{} 0$

$\triangleleft$ Если $\omega: |\xi| < \varepsilon$, то $0 \leq \frac{1}{\varepsilon}|\xi|$, если $|\xi| \geq \varepsilon$, то $1 \leq \frac{1}{\varepsilon}|\xi| \Rightarrow I_{\{|\xi|\geq\varepsilon\}} \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot|\xi|$

По св-ву монот. МО: $\mathbb{P}(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathbb{E}|\xi|$. $\triangleright$

Правило „3σ": $\mathbb{D}\xi = \sigma^2$, тогда: $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ Если $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то $\forall \varepsilon > 0 \mapsto \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$. Почему требуем только $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$?