Пр. $1+2-3+1+2-3+\dots$

Ряд расх, т.к. общий член $\not\to 0$

Проверим что ряд суммируется методом средних арифм.

$$\left(\sigma_n = \frac{S_1+\dots+S_n}{n} \to S_0\right)$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=3k \\ 1; & n=3k+1 \\ 3, & n=3k+2 \end{cases} \quad \sigma_n = \begin{cases} \frac{4k}{3k}, & n=3k \\ \frac{4k+1}{3k+1}, & n=3k+1 \end{cases}; \quad \frac{4k}{3k+2}, \ n=3k+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\sigma_{3k} = 4/3 \\ &\sigma_{3k+1} \to 4/3 \\ &\sigma_{3k+2} \to 4/3 \\ &\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

любая т. кроме 4/3 не предел, т.к. имеем окр. в которой конеч. число членов

т.к. σ_n огр. и имеет единств. ч. предел 4/3

Пр. $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

Ряд сх $\Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{2\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin x/2}{2\sin x/2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x}{2\sin x/2} = \frac{\cos x/2 - \cos(n+1/2)x}{2\sin x/2} =$$

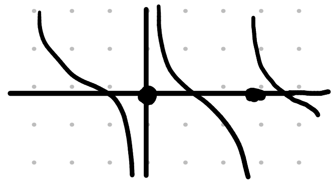
$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos(n+1/2)x}{2\sin x/2}$$

сопряж. ядро Дирихле

$$C_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k}{n} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{2\sum_{k=1}^{n}\cos(k+1/2)x \sin x/2}{4\sin^2 x/2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x/2 - \frac{\sum_{k=1}^{n} \sin(k+1)x - \sin kx}{n 4\sin^2 \frac{x}{2}} =$$

сопряж. ядро Фейера

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x/2 - \underbrace{\cancel{\frac{\sin(n+1)x - \sin x}{4n\sin^2 x/2}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, & x \neq 2\pi k \\ 0, & x = 2\pi k \end{cases}$$



Суммирование рядов Фурье методом Фейера

Th1 Пусть $f(x) \in L_R(-l,l)$, имеет пер. $2l$ и непр в т. x_0. Тогда ряд Фурье $f(x)$ суммир. в т. x_0 к $f(x_0)$ методом Фейера.

Th2 Пусть $f(x)$ имеет пер. $2l$ и непр. на $[-l,l]$. Тогда ряд Фурье $f(x)$ равном. суммируется к $f(x)$ мет. Ф-ра на $(-\infty,+\infty)$

$$\left(\sigma_n(f,x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)\right)$$

Утв. Пусть $f(x) \in L_R(-l,l)$ и непр в т. x_0, причем ряд Ф. сх. в т. x_0. Тогда он сх. именно к $f(x_0)$

□ Пусть $S_n \to a$ то ряд $\sigma_n \to a$

но $\sigma_n \to f(x_0)$ $\Rightarrow$ $a = f(x_0)$ ■

Тн. Вейерштрасса (тригоном.).

Пусть $f(x)$ непр. на $[-l,l]$, $f(-l)=f(l)$. Тогда $\forall \varepsilon>0$:

$\exists T(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\frac{\pi k x}{l}+\beta_k\sin\frac{\pi k x}{2}\right)$ — тригон. многочлен

$\forall x\in[-l,l] \quad |f(x)-T(x)|<\varepsilon$

Опр Линейное пр-во L наз. нормированным (ЛНП), если в нем введена норма.

$\forall x\in L$ опр. $\|x\|\in\mathbb{R}$ такое, что:

1) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$
2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$, $\alpha\in\mathbb{R}$
3) $\|x\|\geq 0$; $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

Для Евкл. пр-ва $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

ЛНП явл. метрическим, если $\rho(x,y)=\|x-y\|$

$x_n\to x$ в ЛНП, если $\|x_n-x\|\to 0$, $n\to\infty$

($\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \|x_n-x\|<\varepsilon$)

Послед. x_n в ЛНП наз. фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0\ \forall n,m\geq N_0\ \|x_n-x_m\|<\varepsilon$

x_n сх. в ЛНП $\Rightarrow$, $\not\Leftarrow$ x_n фундаментальн.

ЛНП наз. полным (банаховым) если в нем $\forall$ фунд. посл. сх.

Примеры банаховых пр-в: а) Любое конечномерное пр-во полное

б) $\mathbb{R}^1$ в) $\mathbb{R}^n$

$C[a,b]$ – пр-во ф-й, непр. на $[a,b]$;

$\|f\|=\max\limits_{[a,b]}|f(x)|$

$f_n\to f$ в $C[a,b]$

если $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \|f_n-f\|<\varepsilon$

($\max\limits_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$)

то же, что и равном. сх. $\Rightarrow$ $C[a,b]$ полно по пр. Коши равном. сх.

$C^1[a,b]$ – мн-во ф-й, непр.-дифф. на $[a,b]$

$$\|f\| = \max_{[a,b]}(f(x)+\max|f'(x)|)$$

Докажем, что C^1 полно

Пусть $f_n \in C^1[a,b]$ и фундам. ($\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m>n_0\ \|f_n-f_m\|<\varepsilon$)

$$\Rightarrow \forall x\in[a,b]\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$
$$|f_n'(x)-f_m'(x)|<\varepsilon$$

Th. Если $f_n(x)\in C^1[a,b]$, $\exists x_0\in[a,b]: f_n(x_0)$ сх, $f_n'(x)\rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$, $f(x)\in C^1[a,b]$, $f'(x)=\varphi(x)$

По кр. Коши равн. сх. $f_n(x)$ и $f_n'(x)$ сх. равн. на $[a,b]$

$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows \varphi(x)$ $\Rightarrow$ $f(x)\in C^1[a,b]$

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \forall x\in[a,b]$

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $|f_n'(x)-f'(x)|<\varepsilon$ $\Rightarrow \|f_n-f\|<2\varepsilon$

Следов., $f_n\to f$ в $C^1[a,b]$

$\Rightarrow C^1[a,b]$ полно

Пример неполного пр-ва

Мн-во непр.-дифф. ф-й на отр. $[a,b]$ с нормой $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ (норма из C)

Возьмем $f(x)=|x|$ на $[-\pi,\pi]$ далее с пер. 2π

кус.-гл. на $[-\pi,\pi]$

Ряд Ф. сх. равн: $S_n(f,x)\underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$

Фунд. посл. непр. дифф. в $C[-\pi,\pi]$. Пр. во не явл. непр. дифф.

Предел не явл. непр. дифф. ф-ей, посл. не явл. сх в нашем пр-ве $\Rightarrow$ пр-во неполно

Другие нормы в пр-ве непр. ф-ий

$\mathcal{L}^2_C[a,b]$

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b (f(x))^2dx}$$

$\mathcal{L}^1_C[a,b]$

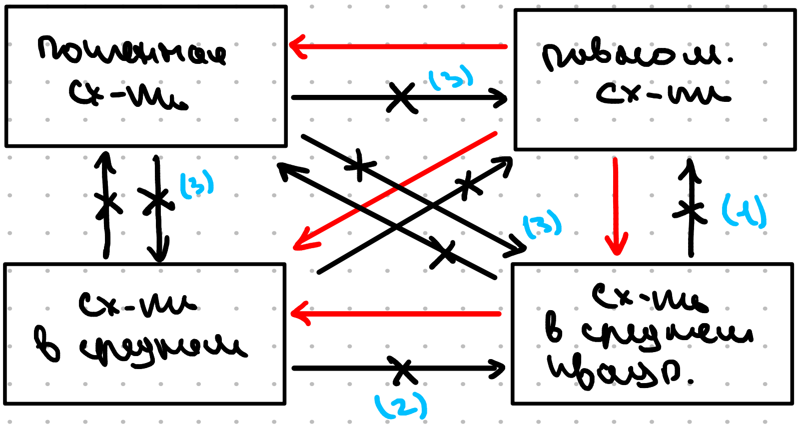
$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$$

$C[a,b]$: $f_n\to f$, если $\|f_n-f\|_C\to0$ равн. сх-ть

$\mathcal{L}^2_C[a,b]$ $\|f_n-f\|_2\to0$ $\int_a^b|f_n-f|^2\to0$ сх-ть в среднеквадратичном

$\mathcal{L}^1_C[a,b]$ $\|f_n-f\|_1\to0$ $\int_a^b|f_n-f|dx\to0$ сх-ть в среднем

в бесконечномерн. пр-ве сходимости в разных нормах неэквивалентны виды сх-ти непр. ф-ии [a, b]



Равн. сх => сх. средн. квадр.

$\|f_n - f\|_C \to 0$

$\|f_n - f\|_2^2 = \int_a^b (f_n - f)^2 dx \le \underbrace{\|f_n - f\|_C^2}_{\to 0} \cdot \int_a^b 1 dx$

$\Rightarrow (a-b)\|f_n - f\|_C^2 \to 0$

аналогично равн. сх => сх. в среднем

Из сх. в средн. кв. => сх. в среднем

$\|f_n - f\|_2 \to 0$

$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f| dx \le \sqrt{\int_a^b (f_n - f)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1^2 dx} = \sqrt{b-a}\, \|f_n - f\|_2 \to 0$ чтд

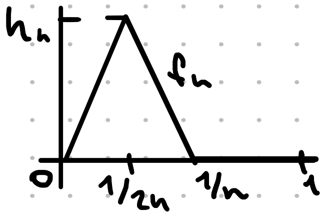
в евкл. пр-ве $\mathcal{L}^2_R$

$|(f,g)| \le |f| \cdot |g|$ нер-во Коши-Буняковского

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \le \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}$

Контрпримеры:

[illegible] того



$\forall x \in [0,1]\ f_n(x) \to f(x) \equiv 0$

$\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = h_n$

сх. равн. $\Leftrightarrow h_n \to 0$

$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n - f| dx = \frac{h_n}{2n}$ сх. в среднем, если $h_n = o(n)$

$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n - f|^2 dx = 2\int_0^{1/2n} (kx)^2 dx = 2 \cdot 4n^2 h_n^2 \int_0^{1/2n} x^2 dx = 8n^2 h_n^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 8n^3} = \frac{h_n^2}{3n}$

$k \cdot \frac{1}{2n} = h_n$

$k = 2n \cdot h_n$

если $h_n = 1$, равн. сх. нет, сх. в средн. квадр. есть (1)

$h_n = \sqrt{n}$ в средн. кв. нет, в средн. есть (2)

$h_n = n$ поточечн есть, ост. видов нет (3)