$\dot x_1 = f_1(x_1,\dots x_n)$

$\dots$

$\dot x_n = f_n(x_1,\dots x_n)$

$u(x_1,\dots x_n)$ = первый интеграл сист. если $u \equiv const$ на $\forall$ реш. сист.

$n=2$: $\dot x = f_1(x,y)$, $\dot y = f_2(x,y)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \qquad y'_x = f(x,y)$

Решение $\Phi(x,y)=C$

первый интеграл.

Линии уровня перв. инт. из объед. соотв. ф. т на плоскости.

Пр. $\ddot x - x + x^2 = 0$ Постр. фаз. портр. на пл-ти $(x,\dot x)$

$\dot x = y$; $\dot y = x - x^2$

т на уровн. линеар. сист.

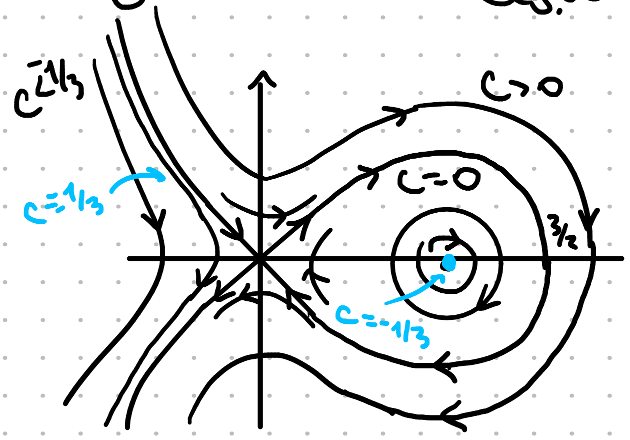
Положения равновесия $y=0$ $x-x^2=0$

$(0,0)$, $(1,0)$

$\dot x = y$, $\dot y = x$ $\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2}=\pm1$ седло

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ $h_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=-1$: $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $h_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$



$(1,0)$: $u=x-1$, $v=y$ $\qquad \dot u = v$, $\dot v = (u+1)-(u+1)^2 = -u + o(u)$

$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ $\Big\}$ $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $\lambda=\pm i$

центр.

Фаз. портрет во всей пл.

$\dot x=y$

$\dot y = x-x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x-x^2}{y}$

$y\,dy = x\,dx - x^2dx$

$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C$

Первый интеграл

$u = y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3$

Кривые

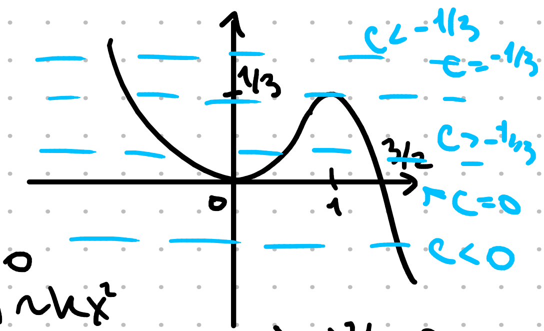
$y^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C$

$y=\pm\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x^3+C}$

$\varphi(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$

$\varphi(x)=0 \quad x=0, x=3/2$

$\varphi'(x) = 2x-2x^2 = 2x(1-x)$



$x\to0$

$\varphi(x)\sim kx^2$

$\sqrt{\varphi(x)}\sim\sqrt{k}|x|$

$x\to 3/2-0$

$\varphi(x)\sim k(3/2-x)$

$\sqrt{\varphi(x)}\sim\sqrt{k_1}\sqrt{3/2-x}$

Пр. $\dot{x} = y + ax(x^2+y^2-2)$
$\dot{y} = -x + ay(x^2+y^2-2)$

$a=0$ $\quad \dot{x} = y$
$\dot{y} = -x$ $\quad$ Полож. равновесия $(0,0)$
центр.

$a \neq 0$ полож. равн.
$y + ax(x^2+y^2-2) = 0$ $\qquad x^2+y^2-2 = -\frac{y}{ax} = \frac{x}{ay}$
$-x + ay(x^2+y^2-2) = 0$ $\qquad x^2+y^2 = 0$; $\underline{(0,0)}$
$(0,0)$ - пол. равн.
Тогда единств. пол. равн. $(0,0)$

$\begin{pmatrix} -2a & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix}$ $\quad$ В линеаризации $a>0$
$(2a+\lambda)^2 + 1 = 0$
$\lambda = -2a \pm i$
$a>0$ — уст. фокус
$a<0$ — неуст. фокус

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} = r\sin\varphi + ar\cos\varphi(r^2-r) \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = -r\cos\varphi + ar\sin\varphi(r^2-r) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ \cdot\sin\varphi \\ \cdot\cos\varphi \end{array} \quad \begin{array}{l} (2) \\ \cdot\cos\varphi \\ \cdot\sin\varphi \end{array}$$

$$(1)\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi\,\dot{\varphi} = r\sin^2\varphi + ar\cos\varphi\sin\varphi(r^2-r) \\ \dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} = -r\cos^2\varphi + ar\cos\varphi\sin\varphi(r^2-r) \end{cases}$$

$\Rightarrow r\dot{\varphi} = -r$; $\dot{\varphi} = -1$; $\varphi = -t + C$ $\qquad \Rightarrow \varphi = -t$
можно считать $C=0$
(это поворот. начала на этот угол)

$$(2)\begin{cases} \dot{r}\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = r\sin\varphi\cos\varphi + ar\cos^2\varphi(r^2-r) \\ \dot{r}\sin^2\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -r\sin\varphi\cos\varphi + ar\sin^2\varphi(r^2-r) \end{cases}$$
$\Rightarrow \dot{r} = \cos(r^2-r)$

$\frac{dr}{dt} = ar(r^2-r)$

$r \geq 0$ $\quad r=0$ — реш. (полож. равновесия)
$r = \sqrt{2}$ — реш. (окружн.)

$\frac{r\,dr}{r^2(r^2-r)} \underset{\uparrow}{=} a\,dt$; $\frac{du}{u(u-2)} = 2a\,dt$; $du\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}\right) = 4a\,dt$
$r^2 = u$

$\frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} = \frac{1}{u(u-2)}$; $A(u-2) + Bu = 1$
$u=0 \quad A = -1/2$
$u=2 \quad B = 1/2$

$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| = 4at + C$

$\frac{u-2}{u} = Ce^{4at}$

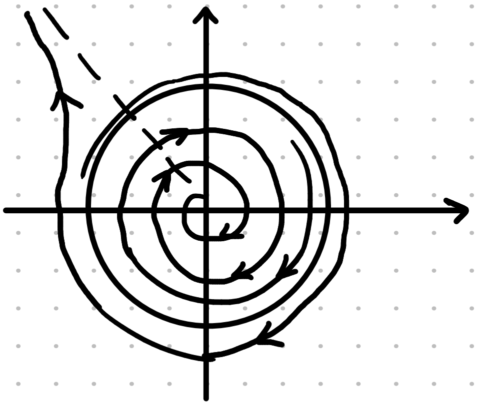
$u = 2 + Cue^{4at}$; $u = \frac{2}{1-Ce^{4at}}$ $a>0$; $r = \sqrt{\frac{2}{1-Ce^{4at}}} = \sqrt{\frac{2}{1-Ce^{-4a\varphi}}}$

$C=0$: $r=\sqrt{2}$ – окружность

$C<0$: $r<\sqrt{2}$ – опр. при $\forall\varphi$

если $\varphi \to +\infty$: $r \to \sqrt{2}-0$ $(t\to-\infty)$

$\varphi \to -\infty$: $r \to +0$ $(t \to +\infty)$



$(0,0)$ – уст. фокус

$r=\sqrt{2}$ – неуст. предельный цикл.

$C>0$: $1-Ce^{-4a\varphi}>0$

$Ce^{-4a\varphi}<1$

$e^{-4a\varphi}<1/C$; $e^{4a\varphi}>C$

$4a\varphi > \ln C$; $\varphi > \frac{\ln C}{4a}$

$\varphi=\varphi_0 = \frac{\ln C}{4a}$ $\Rightarrow$ $t < -\frac{\ln C}{4a}$

Траект. если задана при $\varphi>\varphi_0$ $(t<-\varphi_0)$

Если $\varphi \to \varphi_0+0$: $r\to+\infty$ $(t\to-\varphi_0-0)$

асимпт. луч $\varphi=\varphi_0$

$\varphi\to+\infty$: $r\to\sqrt{2}+0$ $(t\to-\infty)$

Утв. Если $u_1,\dots u_k$ – первые инт., то $\forall$ непр. дифф. ф-я $\Phi(u_1,\dots u_k)$ – тоже первый инт-л

Опр. Ф-ии $u_1\dots u_k$ наз. функц. завис., если $\exists F(u_1,\dots u_k)\equiv 0$ или (что то же самое) одна из них явл. функц. других.

Th. У системы (*) сущ. ровно $n-1$ нез. первых инт-в

(*) $\dot{x}_1 = f_1(x_1,\dots x_n)$
$\dots$
$\dot{x}_n = f_n(x_1,\dots x_n)$

Любой другой первый инт-л $u=\Phi(u_1,\dots u_{n-1})$

Пр. $n=2$ $\dot{x}=f_1(x,y)$, $\dot{y}=f_2(x,y)$ имеет ровно 1 первый инт. $u(x,y)$, любой другой $F(u(x,y))$

Как проверить, что ф-я $u(x_1,\dots x_n)$ явл. первым инт.-м?

$x_1(t),\dots x_n(t)$ — реш.

$u(x_1(t),\dots x_n(t)) = const$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\dot{x}_n = 0$$

$$f_1(x_1,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n(x_1,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$ — Необх. и дост. усл-е для u

Пр. Проверить, что $u = y + xz^2$ явл. перв. инт. сист.:

$$\dot{x} = -x(2xz^2+2y+3z)$$
$$\dot{y} = xz^3$$
$$\dot{z} = z(xz^2+y+z)$$

$$-z^2\cdot x(2xz^2+2y-3z) + xz^3 + 2xz^2(xz^2+y+z) =$$
$$= \cancel{-2x^2z^4} \cancel{-2yxz^2} + \cancel{3xz^3} + \cancel{xz^3} + \cancel{2x^2z^4} + \cancel{2yxz^2} + \cancel{2xz^3} = 0$$

ч.т.д.

1-й первый инт.: $u = y + xz^2$

Найти 2-й первый инт.

Общ. реш. ур-е с част. произв. — в след. лекц.

$$-x(2xz^2+2y+3z)\frac{\partial u}{\partial x} + x\cdot z^3\frac{\partial u}{\partial y} + z(xz^2+y+z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$u = F(u_1,u_2)$ F - произв. непр.-дифф. ф-я