Хамам Виктория Б01-302

Ф. №1164 Проверить, являются ли v_1, v_2 независ. перв. инт-ми

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \Leftrightarrow$$

$\dot x = x$, $\dot y = y$, $\dot z = z$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow y=C_1x \Rightarrow \underline{u_1=y/x}$

$\frac{dx}{dz}=\frac{x}{z} \Rightarrow \underline{u_2=z/x}$ — независ. первые инт.

Проверим:
$\begin{pmatrix}-y/x^2 & 1/x & 0\\ -z/x^2 & 0 & 1/x\end{pmatrix}$ $\Delta=1/x^2>0$ при $x\neq0$

Р/м $v_1=\frac{x+y}{z+x}$ $v_2=\frac{z-y}{x+y}$: $v_1=\frac{1+y/x}{z/x+1}=\frac{1+u_1}{1+u_2}$, $v_2=\frac{z/x-y/x}{1+y/x}=\frac{u_2-u_1}{1+u_1}$

$v_2-\frac{1}{v_1}=\frac{z-y}{x+y}-\frac{z+x}{x+y}=\frac{-y-x}{x+y}=-1$

$\Rightarrow v_2=1-1/v_1 \Rightarrow \underline{v_1 \text{ и } v_2 \text{ — завис.}}$ ч.т.д.

§С6 №35 $4y^3y'^2-4xy'+y=0$ — $y=0$ — реш.

$p=\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}$; $dx=p\,dy$

$\frac{4y^3}{p^2}-\frac{4x}{p}+y=0$

(*) $4x=\frac{4y^3}{p}+yp$; $4p\,dy=\frac{12y^2p\,dy-4y^3dp}{p^2}+y\,dp+p\,dy$

$4p^3dy=12y^2p\,dy-4y^3dp+yp^2dp+p^3dy$

$dy(3p^3-12y^2p)+dp(4y^3-yp^2)=0$

$-3p(4y^2-p^2)dy+y(4y^2-p^2)dp=0$

$(4y^2-p^2)(y\,dp-3p\,dy)=0$

$\left[\begin{array}{l}p^2=4y^2\\ p=Cy^3\end{array}\right.$ 1) $p=\pm2y$: из (*): $4x=\frac{4y^3}{\pm2y}\pm2y^2$

$4x=\pm2y^2\pm2y^2$

$x=\pm y^2$

2) $p=Cy^3$:

из (*): $4x=\frac{4y^3}{Cy^3}+Cy^4$; $4x=4/C+Cy^4$

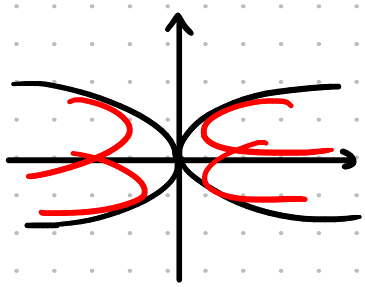
p-дискр. мн-во:

$\begin{cases}4x-\frac{4y^3}{p}-yp=0\\ \frac{4y^3}{p^2}-y=0\end{cases}$; $p^2=4y^2$, $p=\pm2y$; $x=\pm y^2$ — только они могут быть ос. р.

проверим кас.:

$\begin{cases}\pm4y_0^2=4/C+Cy_0^4\\ \pm\cancel{8}y_0=\cancel{4}Cy_0^3\end{cases}$; $y_0(Cy_0^2\mp2)=0$ $\left[\begin{array}{l}y_0=0 \quad \times\\ y_0^2=\frac{2}{C} \text{ — подходит}\end{array}\right.$ $\Rightarrow x=\pm y^2$ особые реш.

Через т. $(\pm y_0^2, y_0)$ проходит реш. $x = 1/c + cy^4/4$ при $c = \frac{2}{y_0^2}$, касающ. реш. $x = \pm y^2$ в этой т. и не совп. с ним ни в какой окр. при $y_0 \neq y$.



Ответ: $y = 0$; $x = 1/c + cy^4/4$, $x = \pm y^2$ – особые реш.

БС20.1 №8

$$J(y) = \int_1^2 [x^3 y'^2 - 8(x^2 - x) y y' + 4y^2 + 8x^2 y'] dx \quad y(2) = -7$$

$$-8(\cancel{x^2 - x}) y' + 8y = (2x^3 y' - 8(x^2 - x)y + 8x^2)' = 2x^3 y'' + 6x^2 y' - \cancel{8(x^2 - x) y'} - 8(2x - 1)y + 16x$$

$$2x^3 y'' + 6x^2 y' - 16xy + 16x = 0$$

$$x^2 y'' + 3xy' - 8y + 8 = 0 \quad ; \quad y_1 = x^2; \; y' = 2x; \; y'' = 2$$

$$W = \frac{c}{x^2} \exp\left(-\int \frac{3x}{x^2} dx\right) = \frac{c}{x^2} \exp(-3\ln x) = cx^{-5}$$

ОРОУ:

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{cx^{-5}}{x^2} = cx^{-7}; \quad \frac{y}{x^2} = c_1 x^{-6} + c_2; \quad y = c_1 x^{-4} + c_2 x^2$$

ЧРНУ: $y = A$; $-8A = -8 \Rightarrow y = 1$; ОРНУ. $y = c_1 x^{-4} + c_2 x^2 + 1$

$$y' = -4c_1/x^5 + 2c_2 x$$

$$\begin{cases} y(2) = -7 \\ (2x^3 y' - 8(x^2 - x)y + 8x^2)\big|_{x=1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1/16 + 4c_2 + 8 = 0 \\ -8c_1 + 4c_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{1}{16}c_1 + 8c_1 = 0$; $c_1 = 0$; $c_2 = -2 \Rightarrow$ доп. экстремаль $y_0 = 1 - 2x^2$

$h \in C^1[1,2]$, $h(2) = 0$

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_1^2 [x^3(2y_0' h' + h'^2) - 8(x^2 - x)[y_0 h + h^2/2]' + 4(2y_0 h + h^2) + 8x^2 h'] dx = \left[\begin{matrix} u = -8x^2 + 8x & dv = (y_0 h + h^2/2)' dx \\ du = -16x + 8 & v = y_0 h + h^2/2 \end{matrix}\right] = \int_1^2 [2y' h' x^3 + h'^2 x^3 + 8y_0 h + 4h^2 + 8x^2 h'] dx - \cancel{(8x^2 - 8x)(y_0 h + h^2/2)}\Big|_1^2 + \int_1^2 (16x - 8)(y_0 h + h^2/2) dx =$$

$$= \int_1^2 [2y' h' x^3 + h'^2 x^3 + 8y_0 h + \cancel{4h^2} + 8x^2 h' + 16x y_0 h + 8xh^2 - 8y_0 h - \cancel{4h^2}] dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = 2y' x^3 + 8x^2 & dv = h' dx \\ du = 2x^3 y'' + 6x^2 y' + 16x & v = h \end{matrix}\right] = \cancel{h(2y' x^3 + 8x^2)}\Big|_1^2 + \int_1^2 [h'^2 x^3 + \cancel{8y_0 h} + \cancel{16x y_0 h} + 8xh^2 - \cancel{8y_0 h} - \cancel{2x^3 h y''} - \cancel{6x^2 h y'} - \cancel{16xh}] dx = \int_1^2 [h'^2 x^3 + 8xh^2] dx \geq 0$$

$\Delta J = 0$: $h' = 0 \Rightarrow h = c$; $h = 0 \Rightarrow$ $y_0 = 1 - 2x^2$ строгий мин.

Ответ.

ДЗ2 в) $\dot{x} = 2xy$
$\dot{y} = x^2 + y^2 - 1$

$(x^2+y^2-1)\,dx - 2xy\,dy = 0 \quad |\cdot \mu(x)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x^2+y^2-1)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy\mu)$

$2y\mu = -2y\mu - 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x}$

$4y\mu = -2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow 2\mu = -x\frac{\partial \mu}{\partial x}\ ; \quad \mu = 1/x^2$

$\Rightarrow (1 + y^2/x^2 - 1/x^2)\,dx - 2\frac{y}{x}\,dy = 0$

$d(x - y^2/x + 1/x) = 0 \Rightarrow x - y^2/x + 1/x = C$

$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = x^2+y^2-1 \end{cases}$ Полож. равновесия $(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)$

1) $u = x \pm 1$, $v = y$; $\dot{u} = 2(u+1)v$, $\dot{v} = (u\mp1)^2 + v^2 - 1$; $\dot{u} = \mp 2v$, $\dot{v} = \mp 2u$ $\begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm 2$ седло в т. $(\pm 1, 0)$

2) $u = x$, $v = y \pm 1$; $\dot{u} = 2u(v\mp1)$, $\dot{v} = u^2 + (v\mp1)^2 - 1$; $\dot{u} = \mp 2u$, $\dot{v} = \pm 2v$

$\begin{pmatrix} \mp 2 & 0 \\ 0 & \mp 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp 2$ кр. 2 $\Rightarrow$ в т. $(0,1)$ неуст. узел
в т. $(0,-1)$ седло

$(-1,0)$ и $(1,0)$ – седло $\Rightarrow C = \pm 2$ – сепаратрисы

$(0,1)$ – неуст. т ; $(0,-1)$ – уст. т.

Фазовые траект. на пл.: