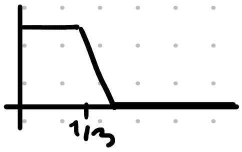
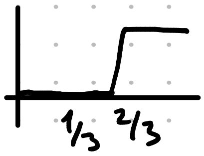
$f_4(x)$



$f_6(x)$



$f_5(x)$

$f_4(x) \longrightarrow 0 = f(x)$ в среднем квадр. ($\Rightarrow$ сх. в среднем)

$$\int_0^1 \underbrace{(f_n(x)-f(x))^2}_{\le 1} dx \le 2/n \longrightarrow 0,\ n\to+\infty$$

(если сх. не только средн., не непр. было бы $1/n$)

Покажем, что $f_n(x) \not\longrightarrow 0$ ни в одн. т.
$\forall x_0\in[0,1]$ то ...

Полные системы в ЛНП

Система эл-ов называется полной в ЛНП $\mathcal{L}$, если
$\forall x\in\mathcal{L}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\alpha_1,\dots\alpha_n\in\mathbb{R}\ \ \|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|<\varepsilon$

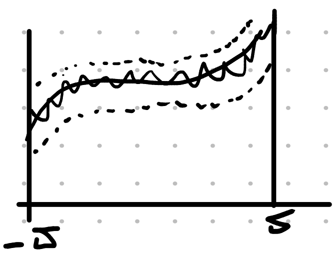
Из т. Вейерштрасса:

1. $\cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l} \dots$ – полные в подпр-ве $C[-l,l]$, выполн. усл. $f(l)=f(-l)$

$\forall f(x)$, непр. на $[-l,l]$ $f(l)=f(-l)$ $\forall\varepsilon>0$
$\exists T(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos\frac{\pi k x}{l}+\beta_k\sin\frac{\pi k x}{l})$
$\forall x\in[-l,l]$ $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ $\|f-T\|<\varepsilon$

Полна ли данная сист. в данном пр-ве?

(1) $(l=\pi)$
$1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx$ в $C[-\pi,\pi]$



– нет. Пусть сист. полная. Тогда
$\forall\varepsilon>0\ \exists T(x): \forall x\in[-l,l]\ |f(x)-T(x)|<\varepsilon$

Сравним знач. ф-и на концах отрезка

$$|\underbrace{f(\pi)-f(-\pi)}_{<\varepsilon}| \le |\underbrace{T(\pi)-T(-\pi)}_{=0}| + |\underbrace{T(-\pi)-f(-\pi)}_{<\varepsilon}| < 2\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ – любое $\Rightarrow f(\pi)=f(-\pi)$

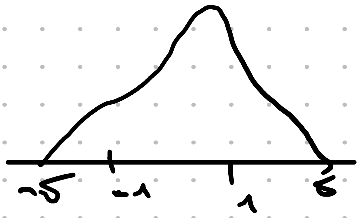
Приблизить можно только такие ф-и, для кот. $f(\pi)=f(-\pi)$

② $1, \cos x, \sin x, \ldots \cos nx, \sin nx \ldots$ в $C[-1,1]$ — <u>Да!</u>

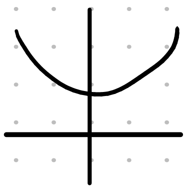
Продолжим $f(x)$ по непр-ти на $[-\pi,\pi]$ $f(\pi)=f(-\pi)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists T(x)$ – по тригон. сис.

$\forall x\ [-\pi,\pi]\quad |f(x)-T(x)|<\varepsilon \Rightarrow$ верно $\forall x\in[-1,1]$



③ $1, \cos x \ldots \cos nx$ в $C[0,\pi]$ <u>Да!</u>



Продолжим по чётн. на $[-\pi,\pi]$

f непр. на $[-\pi,\pi]$ $f(\pi)=f(-\pi)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists T(x)$ – мн: $\forall x\in[-\pi,\pi]\quad |f(x)-T(x)|<\varepsilon$

По теор. Вейерштрасса в кач. $T(x)$ можно взять чётн. сумму Фейера f, а она содерж. только косинусы

$\Rightarrow$ сис. мн-во по полной сис.

④ $1, \cos x, \ldots \cos nx \ldots$ в $C[-\pi,\pi]$, выполн. усл $f(\pi)=f(-\pi)$

Нет!

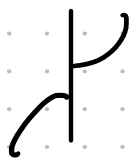
Пусть полна.

$\forall \varepsilon>0\ \forall f\in C[-\pi,\pi]\ \forall x\in[-\pi,\pi]\quad f(\pi)=f(-\pi)\quad |f(x)-T(x)|<\varepsilon$

$$|f(x)-f(-x)| \le \underbrace{|f(x)-T(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|T(x)-T(-x)|}_{=0} + \underbrace{|T(-x)-f(-x)|}_{<\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ в т.ч. $|f(x)-f(-x)|<\varepsilon \Rightarrow \forall x\ f(x)=f(-x)$

⑤ $\sin x, \sin 2x \ldots \sin nx$ в $C[0,\pi]$ Нет!



Выходит тогда, что $f(0)\neq 0$, $f(\pi)\neq 0$ полученные ф-ции не будут непр

Приблизить можно только такие ф-и, что $f(0)=f(\pi)=0$

Пусть полна.

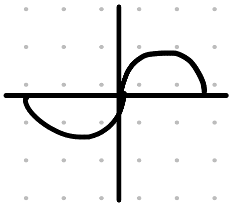
$\forall \varepsilon>0\ \forall f\in C[0,\pi]\ \exists T(x)$ по тригон. сис.

$\forall x\in[0,\pi]\quad |f(x)-T(x)|<\varepsilon$

$|f(0)| \le \underbrace{|f(0)-T(0)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|T(0)|}_{=0} < \varepsilon$ т.к. $\varepsilon>0 \Rightarrow f(0)$

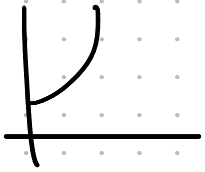
Аналогично $f(\pi)=0$

(6) $\sin x, \dots \sin nx \dots$ в подпр-ве $C[0,\pi]$, видим, что $f(0)=f(\pi)=0$



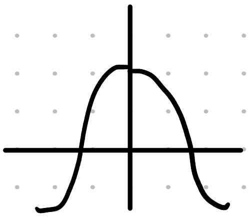
Продолжим по нечетн. — Да!
непр. ф-ю $[-\pi,0]$, $f(-x)=-f(x)$
по т. Вейерш. $\exists T(x)$ — тригон. : $\forall x \in [-\pi,\pi]$
$|f(x)-T(x)|<\varepsilon$
В кач-ве $T(x)$ можно взять сумму Фейера f
→ из однот. зн.

(7) $\cos x, \cos 3x, \dots \cos(2n+1)x$ в $C[0,\pi/2]$



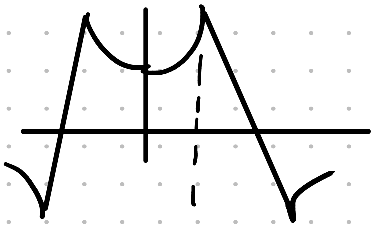
Нет! Приблизить можно только нечетно ф-ю, что $f(\pi/2)=0$

(8) $\cos x, \cos 3x \dots \cos(2n+1)x$ на $C[0,\pi/2]$, вып. усл. $f(\pi/2)=0$



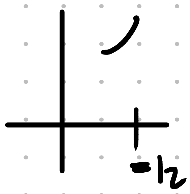
— Да! Продолжим $f(\pi-x)=-f(x)$ $x\in[0,\pi/2]$
далее по четн.
Получаем $f(x)$ непр на $[-\pi,\pi]$
и на концах один. знач.
Далее т. Вейерштрасса, в нем $f(x)$ сумма Фейера.
В сумм Ф. только кос. нечет. гарм.

(9) нельзя ли в $C[0,\pi/4]$



Да! Продолжим по непр. на $[0,\pi/2]$, $f(\pi/2)=0$
Далее как в (8).

(10) нельзя ли в $C[\pi/4,\pi/2]$

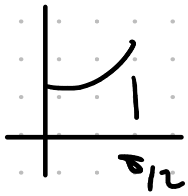


Нет! Аналогично (7), т.к. $f(\pi/2)\neq 0$

(11) нельзя ли в $C[-\pi/8,\pi/8]$

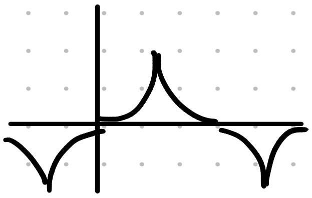
Нет! т.к. ф-ия необяз. непр.
Приблизить можно только непр. ф-ии.

(12) $\sin x, \sin^3 x, \dots \sin(2n+1)x$ в $C[0, \pi/2]$



нет! Аналогично (7) и (10) $f(\pi/2) \neq 0$

(13) а не полна в $C[0,\pi/2]$, вып. усл $f(0)=0$



Да! продолж. $f(\pi - x) = f(x)$ $0 \le x \le \pi/2$

далее по нечет.

$f(x)$ непр. на $[-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$

далее т. Вейерштрасса, $f(x)$ – сумма Фейера

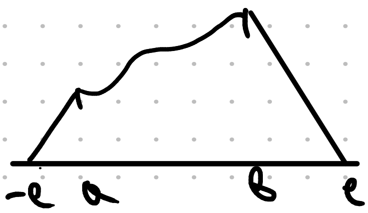
(в ряду Ф. только синусы неч. кр.)

Алгебраическая т. Вейерштрасса

Пусть $f(x)$ непр. на $[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$: $\forall x \in [a,b]$ $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$

Сист. $1, x, \dots x^n, \dots$ полна в $C[a,b]$

□ Т.к. f непр. на $[a,b]$, ее можно продолжить до $[-l,l]$ ($[a,b] \subset [-l,l]$) так, что $f(l) = f(-l)$



Применим тригон. т. Вейерштрасса:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists T(x)$ – многочлен с пер. $2l$:

$\forall x \in [-l,l]$ $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$

$T(x)$ – аналитич. ф-я с ряд. сх. ряд Тейлора $+\infty$.

$\Rightarrow$ ряд сх. равном. на $\forall$ комп. опр (свойство степ. рядов)

$\Rightarrow$ на $[-l,l]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P(x)$ – част. сумма ряда Тейлора (алг. многочл.) такая, что $\forall x \in [-l,l]$ $|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2$

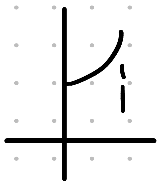
$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \subset [-l,l]$ $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ ■

Замечание: если $f(x)$ на симм. опр. $[-a,a]$ и четн, то $T(x)$ – сумма Фейера, то $T(x)$ – четн, а для четн. ф-ии в ряду Маклорена только четн. степ.

Поэтому $P(x)$ можно взять четн. Аналогично для нечетн.

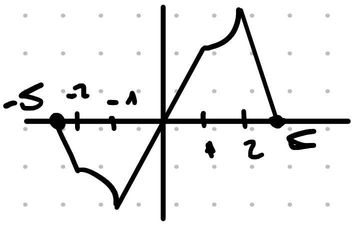
Полна ли сист?

1) $x, x^3, \dots x^{2n+1}$ в $C[0,2]$



Нет! Приближ. можно только ф-ции, где $f(0)=0$.

2) та же сист. в $C[1,2]$ **Да!**



Продолж. по непр. на $[0,5]$: $f(0)=f(5)=0$

Далее по нечетн.

$f(x)$ нечетн. на $[-5,5]$ $f(-5)=f(5)$

По т. Вей. $\exists P(x): \forall x \in [-5,5] \; |f(x)-P(x)|<\varepsilon$

По прибл. теореме $\exists T(x)$ - тригон.: $\forall x \in [-5,5] \; |f(x)-T(x)|<\varepsilon/2$

$T(x)$ - сумма Фурье ф-ии f, состоит из одних синусов.

$T(x)$ - конечн. аналит. ф-я с рад. сх. ряда Тейлора $+\infty$.

Ряд сх. равном. на $\forall$ комп. отрезке $\Rightarrow$ на $[-5,5]$.

Тогда сущ. $P(x)$ - част. сумма ряда Тейлора - только из нечет. степеней. $\forall x \in [-5,5] \; |T(x)-P(x)|<\varepsilon/2 \Rightarrow |f(x)-P(x)|<\varepsilon$