§9: №13 з) Д-ть с помощью т. единств.:
$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$ $z_1,z_2\in\mathbb{C}$,
зная это для веществ. чисел.

Шаг 1. Зафиксируем произв. $x_2^0\in\mathbb{R}$

Р/м $g(z_1)=\sin(z_1+x_2^0)$, $h(z_1)=\sin z_1\cos x_2^0+\cos z_1\sin x_2^0$

Применим к g,h следствие из т. единств, в кач. G всю пл-ть z_1, а в кач. E вещ. ось пл-ти z_1.

Условия 1) 2) 3) выполнены $\Rightarrow g(z_1)=h(z_1)$

В силу произв. доказано, что $\sin(z_1+x_2)\underset{\substack{z_1\in\mathbb{C}\\ x_2\in\mathbb{R}}}{\equiv}\sin z_1\cos x_2+\cos z_1\sin x_2$

Шаг 2. Зафиксир. произв. $z_1^0\in\mathbb{C}$

Р/м $\hat g(z_2)=\sin(z_1^0+z_2)$, $\hat h(z_2)=\sin z_1^0\cos z_2+\cos z_1^0\sin z_2$

$\hat G$ – пл-ть z_2, $\hat E$ – ее вещ. ось

В теор. единств. все условия 1) 2) 3) выполн. $\Rightarrow \hat g(z_2)\underset{\mathbb{C}}{\equiv}\hat h(z_2)$

В силу произв. – ч.т.д.

Р/м $f(z)=\underset{\neq 0}{c_m}(z-z_0)^m+\underset{\neq 0}{c_{m+1}}(z-z_0)^{m+1}$

z_0 – ноль порядка m нег. ф-ции f

$f(z)=\underset{\neq 0}{c_0}+c_1(z-z_0)$ z_0 – ноль нул. порядка

При $z_0=0$ если ноль порядка m для $g(z)$ и порядка n для $h(z)$

Какого порядка этот ноль для $f=g\cdot h$?

$g=\overset{\neq 0}{c_m}z^m+\dots$
$h=\overset{\neq 0}{d_n}z^n+\dots$ $\Rightarrow f=\overset{\neq 0}{c_m d_n}z^{m+n}$ – $\underline{m+n}$

А для $F(z)=(g(z))^s$? – $\underline{sm}$

§7 №11 4) Опр. порядок 0 в т. $a=-1$

$$f(z)=\underbrace{(z^4+2z^3-2z-1)^2}_{g(z)}\underbrace{(e^{i\pi z}+1)^3}_{h(z)}=g^2(z)\cdot h^3(z)$$

$g(-1)=0$
$g'(-1)=(4z^3+6z^2-2)|_{-1}=0$
$g''(-1)=(12z^2+12z)|_{-1}=0$
$g'''(-1)=(24z+12)|_{-1}=-12\neq 0$
$\Rightarrow g$ им. ноль 3-го порядка
g^2 –//– 6-го порядка

$h(-1)=0$

$h'(-1)=(i\pi e^{i\pi z})|_{-1}=-i\pi\neq 0 \Rightarrow$ h им. ноль 3-го порядка

h^3 —||— 9-го порядка

Ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}}_{№1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}}_{№2} \quad (1)$$

Опр. Ряд (1) сх. при z, если оба ряда №1 и №2 сх. при z

Th1. Если ряд (1) сх. в кольце K; $0\le R_1<|z-z_0|<R_2\le+\infty$, то его сумма есть регул. ф-я в этом кольце

Th2. Если f(z) рег. в кольце K, то ∃! ее разл. в ряд (1) в K, при этом

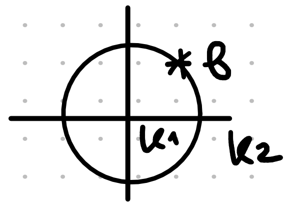
(2) $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $n\in\mathbb{Z}$; $|z-z_0|=\rho\in(R_1,R_2)$

Замечание: внутри кольца K, в кот. ряд сх., ряд можно почленно диф. ∀ число раз

Знаем, что $\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $w\in\mathbb{C}$, $|w|<1$

§11 №2 и) Пусть $b\neq 0\in\mathbb{C}$. Разл. ф-ю $\frac{1}{(z-b)^2}$ в ряд Л. по степ. z в K: $|z|>|b|$

K_1: $|z|<|b|$, K_2: $|z|>|b|$



$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-b/z}}_{A} \ominus$; $A=\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n$

т.к. $\left|\frac{b}{z}\right|<1$, $z\in K_2$

$\ominus\ \frac{1}{z-b}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}$

продифф.:

$$\frac{1}{(z-b)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n(n+1)}{z^{n+2}}=[n+2=-m]=\sum_{m=-\infty}^{-2} b^{-m-2}(m+1)z^m$$

кольцо - $R_1<|z-z_0|<R_2$

№10 б) Разл. в ряд Лорана по степ. $z-2i$

$$f(z)=\underbrace{\frac{z-1-5i}{z^2-2z+2}}_{№1}+\underbrace{\frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+i}}_{№2}$$ в K, содерж. т. $z_0=0$

Шаг 1: найдем корни знам. Д1 и Д2

Д1: $z^2-2z+1+1=0$; $(z-1)^2=-1$ $\quad z=1\pm i$

Д2: $z=i$; $1+i$

Шаг 2: разл. на простейшие дроби

$$f(z)=\left[\frac{A}{z-(1-i)}+\frac{B}{z-(1-i)}\right]+\left[\frac{C}{z-i}+\frac{D}{z-(1+i)}\right]$$

$$A(z-(1-i))+B(z-(1-i))\equiv z-1-5i$$

$$\ldots \Rightarrow A=3,\ B=-2,\ C=1,\ D=2$$

$$f(z)=\left[\frac{3}{z-(1-i)}-\frac{2}{\underline{z-(1-i)}}\right]+\left[\frac{1}{z-i}+\frac{2}{\underline{z-(1+i)}}\right]$$

Введем $\hat{f}(z)=\frac{3}{z-(1-i)}+\frac{1}{z-i}$; $\hat{f}=f$ при $z\neq 1+i$

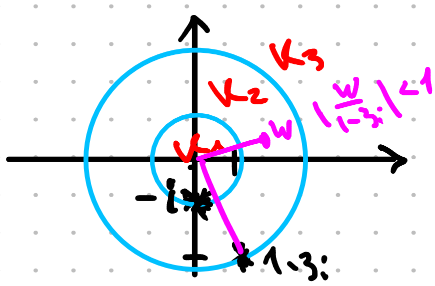
Шаг 3. В $\hat{f}(z)$ обозначим $z-2i=w$; $g(w)=\hat{f}(w+2i)$

$$g(w)=\underbrace{\frac{3}{w-(1-3i)}}_{A}+\underbrace{\frac{1}{w+i}}_{B}$$

K_1: $|w|<1$

K_2: $1<|w|<\sqrt{10}$

K_3: $|w|>\sqrt{10}$



$z_0=0 \to w_0=z_0-2i=-2i$

$\Rightarrow$ нас интересует кольцо K_2

Хотим исп. ф-лу для прогрессии: $\frac{1}{1-u}=\sum_0^\infty u^n$, $|u|<1$

$$A=\frac{-3}{(1-3i)-w}=\frac{-3}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{1-3i}}=\left[u=\frac{w}{1-3i},\ \text{для } w\in K_2\ |u|<1\right]=-\frac{3}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{1-3i}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)w^n}{(1-3i)^{n+1}}$$

$$B=\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1-(-i/w)}=\left[u=-\frac{i}{w}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{w^{n+1}}$$

$$\Rightarrow g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)(z-2i)^n}{(1-3i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(z-2i)^{n+1}} \to \sum_{n=-\infty}^{-1}(-i)^{-n-1}(z-2i)^n$$

в K_2: $1<|z-2i|<\sqrt{10}$

Для ф-ии $f(z)$ ответ тот же с выколотой т. $z=1+i$

КР: 1. лин. ур-е ф-ии z)

2. т. единств.

3. ряд Лорана

Всего 6 баллов + д3