$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \xrightarrow[\text{замена}]{} z'' + Q(x)z = 0$

$y = z\exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)$ — преобр. Лиувилля

не меняет мн-во нулей решений

Ур-е Бесселя:

$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \xrightarrow[y = zx^{-1/2}]{} z'' + \left(1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2}\right)z = 0$

Утв. $\forall$ нетрив. реш. ур-е Бесселя имеет беск. много нулей на $[a, +\infty)$ $a > 0$

□ $Q(x) = 1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2}$ $\exists c: \forall x \geq c \ Q(x) \geq 1/2$

$\Rightarrow$ любое реш. имеет беск. много нулей (по сл. из т. Штурма)

на оставшемся отрезке $[a, c]$ конечн. число нулей

$\Rightarrow$ много беск. много нулей ■

Пр. С 10.6 Д-ть: $\forall$ нетр. реш. ур-е $y'' + x^2y' + (x+4)y = 0$ имеет ≤ 5 нулей на $(-\infty, +\infty)$

Преобр. Лиувилля:

$y = z\exp\left(-\frac{1}{2}\int x^2dx\right) = ze^{-1/6x^3}$

$y' = z'e^{-1/6x^3} - \frac{1}{2}zx^2e^{-1/6x^3}$

$y'' = z''e^{-x^3/6} - z'x^2e^{-x^3/6} + ze^{-x^3/6}(1/4x^4 - x)$

$z'' - z'x^2 + z\left(\frac{1}{4}x^4 - x\right) - x^2\left(z'e^{-x^3/6} - \frac{1}{2}zx^2\right) + z(x+4) = 0$

$z'' - 1/4zx^4 + 4z = 0$

$z'' + z(4 - x^4/4) = 0$ $4 - x^4/4 \leq 0$

$x^4 \leq 16$ $|x| \geq 2$

На $(-\infty, -2]$ и $[2, +\infty)$ не более 1 нуля (по след. опр.)

Осталось доказать, что на $[-2, 2]$ не более 3 нулей.

$Q(x) = 4 - x^4/4 \leq 4$

$z'' + z(4 - x^4/4) = 0$ (1) N_1 — число нулей нетрив. реш. (1)

$u'' + 4u = 0$ (2) N_2 — —//— (2)   на $[2, 2]$

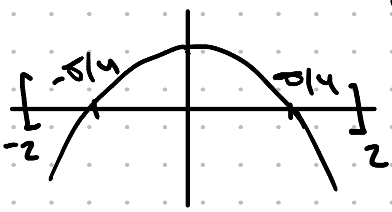
Тогда по т. Штурма $N_1 \leq N_2 + 1$

Хотим д-ть: $N_1 \leq 3$, то если $N_2 \leq 2$

Нужно найти хотя бы 1 реш (2): $N_2 \leq 2$

(2): $u = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

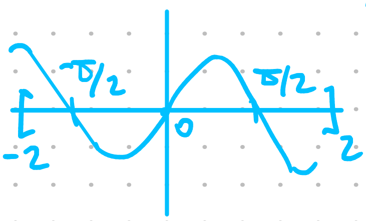
$u = \cos 2x$



$N_2 = 2 \Rightarrow N_1 \leq 3$

ч.т.д.

Если взять $u = \sin 2x$:



3 нуля — не подходит!

Пр. Д-ть: $\forall$ нетрив. реш. ур-е $y''+(2+\cos 3x)y=0$ на $[-1,6]$ $\exists$ т., где $y'(\xi)=0$

Достаточно, показать, что $\forall$ нетрив. реш. ур-е имеет не менее 2 нулей, далее т. Ролля

(2) $y''+(\underbrace{2+\cos 3x}_{\ge 1})y=0$ $\quad N_2$ — // — (2)

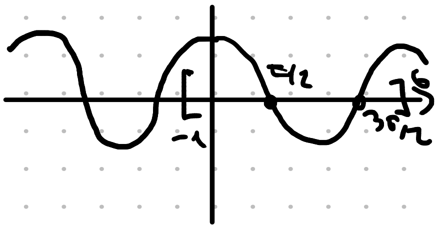
(1) $z''+z=0$ $\quad N_1$ — // — (1)

$N_2 \ge N_1-1$; хотим $N_2\ge 2 \Rightarrow N_1\ge 3$

Нужно найти нетр. реш. (1) для которого $N_1\ge 3$

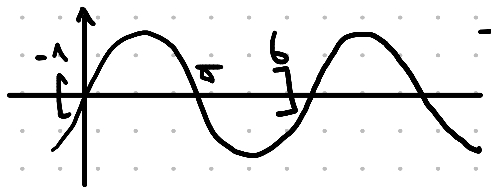
$z=C_1\cos x+C_2\sin x$

Пусть $z=\cos x$ на $[-1,6]$



– 2 нуля мало!

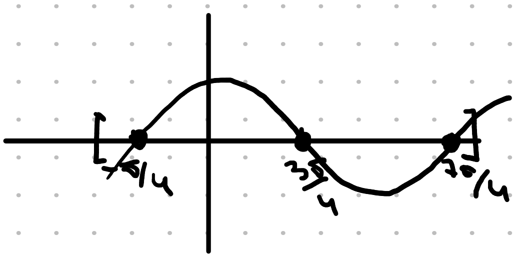
Пусть $z=\sin x$ на $[-1,6]$



– тоже мало

Ищем реш. в виде $z=\sin(x-\varphi)$. нули: $x=\varphi;\ \varphi+\pi;\ \varphi+2\pi$

Возьмем $\varphi=-\pi/4$



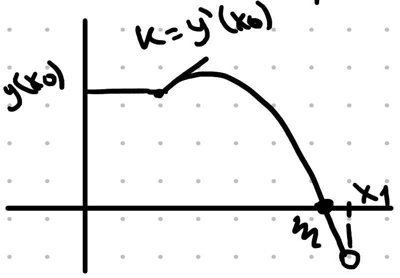
3 нуля подходит!

ч.т.д.

КР
1) Лин. ур-е I порядка
2) З. на особое реш } повторение
3) Лиувилль-Остр
4) Фазовые хар-е

Пр. Ф№223

Д-ть: если $q(x)\le 0$, то все реш. ур-е $y''+q(x)y=0$ с полож. нач. усл. $y(x_0)>0;\ y'(x_0)>0$ остаются полож. при всех $x\ge x_0$. $\forall$ нетр на $[x_0,+\infty)$



От противного: $\exists x_1:\ y(x_1)\le 0$

Если $y(x_1)<0$, то $\exists \xi\in(x_0,x_1):\ y(\xi)=0$

$y'(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{y(x_0+t)-y(x_0)}{t} \Rightarrow \exists\delta>0:\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ $y(x)>y(x_0)$

Считаем, что ξ — наим. из т., где $y(x)=0$

(мн-во нулей нетрив. реш. на огр. конечно $\Rightarrow$ не может им. пред. т. $\Rightarrow$ inf равен минимуму)

Тогда $y(x)>0$ на $[x_0,\xi)$

$\underset{\leq 0}{\varphi(x)}$: $y''+\varphi(x)\underset{>0}{y}=0 \Rightarrow y''>0$; $y'(x)\uparrow$ на $[x_0,\xi)$

$y'(x)\geq y'(x_0)>0 \Rightarrow y(x)\uparrow$ на $[x_0,\xi)$

Тогда $y(x)\geq y(x_0)>0$ на $[x_0,\xi)$

Но $y(\xi)=0 \Rightarrow$ это невозможно

ч.т.д.

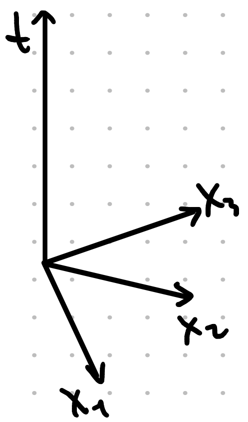
Фазовые траектории автономных систем

$$\bar{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

Автономная лин. одн. сист. — это сист. вида:

$$\dot{\bar{x}}=A(\bar{x})$$

З. Коши: $\dot{\bar{x}}=A(\bar{x})$, $t\geq t_0$, $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$ — сущ. единственно, если $A(x)$ непр. на $[t_0,+\infty)$: $A(x)=\begin{pmatrix}a_1(\bar{x})\\ \vdots \\ a_n(\bar{x})\end{pmatrix}$



Реш. з. Коши

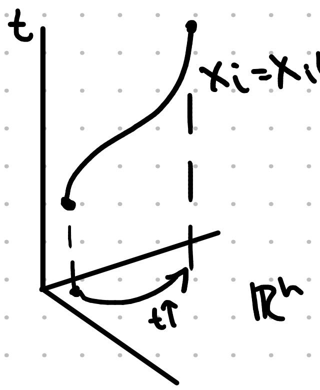
$x_1=x_1(t)\dots x_n=x_n(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^{n+1}$

n-мерное пр-во

$\mathbb{R}^n(x_1,\dots x_n)$ — фазовое пр-во

Проекция реш. з. Коши на фазовое пр-во — фазовые траектории.

Задание реш. на пр-ии, но лишь непараметр. задание кривой в $\mathbb{R}^n$



Если $\bar{x}(t)$ — реш., то $\bar{x}(t+c)$ — реш. с той же самой траекторией. (только для автономных систем)

Две разные траектории не имеют общих точек.

Пост. реш. сист. перп. фазовой пл.
$\Rightarrow$ траект. — точка (полож. равновесия)
$A(\bar{x})=0$

Как искать фаз. траект. на фазовой пл. $(n=2)$.

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f_1(x,y)\\ \dot{y}(t)=f_2(x,y)\end{cases} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$$

Запишем реш. в виде $F(x,y)=C$

Ф-я $F(x,y)$ пост. на любой траект. (не касаясь пост. реш. сист.) наз. первым интегралом сист.

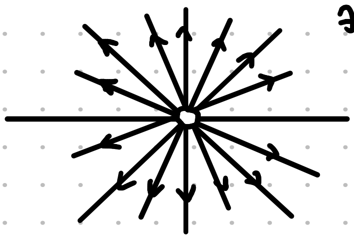
То есть траект. — линии уровня первого интегр.

Пр. $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ полож. равн-е $(0,0)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; $x\,dy - y\,dx = 0$; $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \underline{\frac{y}{x} = C}$ — первый интеграл $F(x,y) = y/x$

это лучи!

а не прямые, без ос.тр. не пересек.



Построим линии уровня первого инт.
и из общ. соображ. разделение их или пересечений.

неустойч. дикритический узел

2-й способ

$x = Ce^t$
$y = Ce^t$ $t\uparrow \Rightarrow x, y \to \infty$

Траектории для лин. сис:
1) полож. равновесия
2) лучи, выходящие из полож. равновесия

Классификация полож. равновесия для лин. сист.

$\dot{x} = a_1 x + a_2 y$
$\dot{y} = b_1 x + b_2 y$

$(0,0)$ — полож. равн.

Других полож. равн нет $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ не явл. собств. зн. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$