Маргинальные с.в.

Опр. Распр. с.в. $\bar{\xi}$ наз. маргинальным, если р/м неск. его подвектор $\bar{\xi}'$.

Пусть р/м колон. $\xi_{i1},\dots,\xi_{ik}$. Тогда в $F_{\xi}(x_1,\dots,x_n)$ устремим $\{x_i\}_{i=1}^{n}\setminus\{x_{i1},\dots,x_{ik}\}\to\infty$. Получим $F_{\xi_1}(x_{i1},\dots,x_{ik})$ - ф.р. ξ'.

Если $\bar{\xi}$ - абс.непр., то $f_{\xi}(x_{i1},\dots,x_{ik})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_{j1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_{j2}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_{n-k}f_{\xi}(x_1,\dots,x_n)$,

где $\{j_1\dots j_{n-k}\}=\{1\dots n\}\setminus\{x_{i1},\dots,x_{ik}\}$

Упр $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\sim Poly(k_1,p_1,\dots,p_n)$; Д-ть: $\forall i\ \xi_i\sim Binom(n,p_i)$

Пр. Ф-ла свертки

ξ,η - с.в., $f_{\xi\eta}(x,y)$ - совм. плотн. Найти пл. расп. $\zeta=\xi+\eta$

Р/м линейное преобр. $\begin{pmatrix}\theta\\ \zeta\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, где $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}\theta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \xi+\eta\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\theta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta\\ \theta-\zeta\end{pmatrix}$$

$$f_{\theta\zeta}(x,z)=\frac{1}{|A|}\cdot f_{\xi\eta}(\overset{=x}{x},\overset{=y}{x-z})$$

хотим пл. распр. по ζ

$$\Rightarrow f_{\zeta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}(x,x-z)\,dx$$

Опр. Р/м вероятн. пр-во (Ω,F,P), $B\in F$, $P(B)>0$

Условная ф-я распр. отн. соб. B:

$$F_{\xi}(x|B)=P(\{\omega:\xi(\omega)\le x\}|B)$$

Р/м с.в. ξ и η с совм. ф.р. $F_{\xi\eta}(x,y)$, а η - $F_{\eta}(y)$

$$\Rightarrow F_{\xi\eta}(x|\eta<y)=\frac{F_{\xi\eta}(x,y)}{F_{\eta}(y)},\quad F_{\eta}(y)>0$$

Тут требовали $P(B)>0$. Если с.в. ξ и η имеют абс. непр. расп (и совм. пл. $f_{\xi\eta}$), то $F_{\xi}(x|\eta=y)$ ввести не получится.

Заметим, что $F_{\xi\eta}(x|\eta=y)=\lim\limits_{\Delta y\to0}F_{\xi}(x|\eta\in[y,y+\Delta y])\ \circleddash$

$$\circleddash\ \lim_{\Delta y\to0}\frac{P(\xi\le x,\ \eta\in[y,y+\Delta y])}{P(\eta\in[y,y+\Delta y])}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{y}^{y+\Delta y}f_{\xi\eta}(u,v)\,du\,dv}{\int\limits_{y}^{y+\Delta y}f_{\eta}(v)\,dv}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}f_{\xi\eta}(u,y)\,du\,dy}{f_{\eta}(y)}$$

$\Rightarrow$ Введем усл. плотность отн. η: $f_{\xi|\eta}(x,y)=\dfrac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)}$

Математическое ожидание

Опр. Мат. ожиданием ξ наз. „инт Лебега от ξ по мере P" $\Omega\to\mathbb{R}$

Для инт. Лебега нужна изм. функция, в кач. которой берем с.в. ξ.

$$\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\,dP(\omega)$$ $P(d\omega)$ это не умн, это обозн. меры

Процесс построения инт. Лебега:

1) ξ — простые с.в., т.е. $\xi=\sum_{k=1}^n x_k \cdot I_{A_k} \Rightarrow \mathbb{E}\xi=\sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$

$\Omega=A_1\sqcup\ldots\sqcup A_n$, x_k — разные

2) $\xi\geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\xi=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\xi_n$, где $\{\xi_n\}$ — послед. простых с.в. $\xi_n \uparrow_{n\to\infty} \xi\ \forall\omega$

Вопрос: почему сущ. такие $\{\xi_n\}$?

Ответ: аппроксимац. теорема

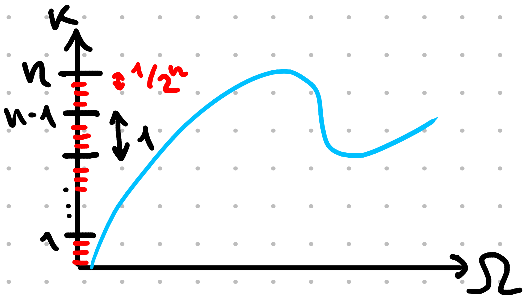
Теорема [Аппроксим. т.]

Пусть с.в. $\xi\geq 0$. Тогда сущ. $\{\xi_n\}$ простых с.в. $\xi_n(\omega)\uparrow\xi(\omega)\ \forall\omega$

Более того, $\sigma_{\xi_n}\subset\sigma_{\xi_{n+1}}\subset\sigma_\xi\ \forall n$

□ $\forall n$ введем $D_n=\{\Delta_n, D_1^{(n)},\ldots, D_{n\cdot 2^n}^{(n)}\}$, где Δ_n — прообраз $[n,+\infty)$

$\Delta_n=\{\omega:\xi(\omega)\geq n\}$. $D_k^{(n)}=\{\omega: \frac{k-1}{2^n}\le\xi(\omega)<\frac{k}{2^n}\}$, $k=1,\ldots,n\cdot 2^n$



Возьмем $\xi_n(\omega)=n\cdot I_{\Delta_n}(\omega)+\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{D_k^{(n)}}(\omega)$

• Д-ть: ξ_n удовл. усл. т., монотон., т.е. $\xi_n(\omega)\uparrow$

Если $\omega\in\Delta_n$, то $\xi_n(\omega)=n$, $\xi_{n+1}(\omega)\geq n$ даже если и попадет в новое дробл. на шаге $n+1$

$\omega\in D_k^{(n)}$, то $\xi_n(\omega)=\frac{k-1}{2^n}$

На шаге $D_k^{(n)}=D_{2k-1}^{(n+1)}\sqcup D_{2k}^{(n+1)}$

Если $\omega\in D_{2k-1}^{(n+1)}$, то $\xi_{n+1}(\omega)=\frac{(2k-1)-1}{2^{n+1}}=\frac{k-1}{2^n}=\xi_n(\omega)$

Если $\omega\in D_{2k}^{(n+1)}$, то $\xi_{n+1}(\omega)=\frac{2k-1+1}{2^{n+1}}=\frac{k}{2^n}>\xi_n(\omega)$

Покажем, что $\forall\omega\ \xi_n(\omega)\uparrow_n\xi(\omega)$

Если $\omega:\xi(\omega)=+\infty$, то $\forall n \to \omega\in\Delta_n\Rightarrow\xi_n(\omega)=n\ \forall\omega$

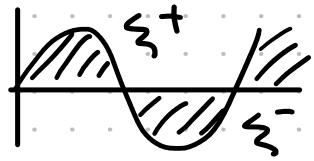
Если $\omega:\xi(\omega)<+\infty$, то $\exists N\ \xi(\omega)<N \Rightarrow \forall n\geq N\ \omega\in D_k^{(n)}$

$\xi_n(\omega)=\frac{k-1}{2^n}\le\xi(\omega)<\frac{k}{2^n}=\xi_n(\omega)+1/2^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)$

- По постр. $\sigma_{\xi_n} = \sigma(D_n)$, D_{n+1} получ. дроблением D_n, тогда $\sigma(D_n) \subset \sigma(D_{n+1})$.

При этом $\sigma_{\xi_{n+1}} \subset \sigma_\xi$ т.к. прообразы $\xi^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ вкл. в себя прообразы $\xi_{n+1}^{-1}(B)$

3) Если ξ – с.в., то $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$, где



$$\underbrace{\xi^+ = \max\{0,\xi\}}_{\xi \geqslant 0}; \quad \underbrace{\xi^- = -\min(0,\xi)}_{\xi < 0}$$