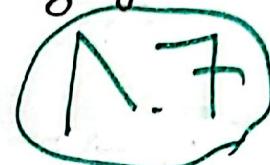


Какие предсказания находим на $\hat{\xi}$? $\hat{\xi}$ должна нести ту же саму информацию
чтобы, чем ξ , т.е. $G(\hat{\xi}) \subseteq G(\xi)$, т.е. $\hat{\xi}$ должна быть $G(\xi)$ -измеримой.

Th2 [Теорема Дыда]



Пусть с. в. γ изм. однос. $G(\xi)$, т.е. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \gamma^{-1}(B) \in G(\xi)$. Доказа:

\exists доп. изм. $\varphi: \gamma = \varphi(\xi)$.

\triangleleft Пусть где настраиваем $\gamma = \sum_{j=1}^M c_j \cdot I_{A_j^{(w)}}$, $A_j \cap A_m = \emptyset$, c_j - разные, т.е. γ - простое.

П.к. по усл. γ изм. $G(\xi)$ -изм., то: $A_j = \{\omega: \gamma(\omega) = c_j\} = \xi^{-1}(B_j)$, $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
тогда $\gamma = \sum_{j=1}^M c_j \cdot I_{B_j}(\xi(\omega)) = \varphi(\xi)$.

Пусть теперь $\gamma > 0$, тогда по определению $\exists \exists \{\gamma_n\}$ -простое: $\gamma_n \rightarrow \gamma \forall w$.

По доказательству $\exists \varphi_n$ -сопр.: $\gamma_n = \varphi_n(\xi)$. Так как φ_n -сопр., то $B = \{x: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевское множество. Погрешение φ_n : $\varphi_n = \hat{\varphi}_n \cdot I_B$; $\xi(w) \in B$, т.к. $\varphi_n(\xi(w)) = \gamma_n \rightarrow \gamma$, но не всегда $\hat{\varphi}_n$ непрерывна.

$\Rightarrow \varphi_n(\xi) = \hat{\varphi}_n(\xi)$: По определению $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_n(x) = \varphi(x)$ и $\varphi(x)$ -сопр. получаем $\hat{\varphi}_n$ -сопр.

$\Rightarrow \gamma = \varphi(\xi)$. \triangleright $\{\omega: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)\} = \bigcap_k \bigcup_{N, n, m, N} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| < \frac{1}{k}\}$ в с.в.

Итак, если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — G -алгебра (исходные альгебры для σ -системы).

Мы можем найти с.в. $\hat{\xi}$, такое что для каждого $\hat{\xi}$, который обл. \mathcal{G} -изм. и среди всех \mathcal{G} -изм. с.в. приближает ξ наименьшим образом.

Если $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и найдено $\hat{\xi} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Тогда по Th 1:

$\exists! \hat{\xi} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}): \|\xi - \hat{\xi}\| = \inf_{\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})} \|\xi - \hat{\xi}\|$, $(\xi - \hat{\xi}) \perp L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \gamma \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \mapsto \langle \xi - \hat{\xi}, \gamma \rangle = 0$ м.е. $E[\gamma \hat{\xi}] = E[\gamma \xi]$.

def III | Пусть ξ — с.в. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $E[\xi] < \infty$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — G -алгебра. Тогда утверждение и.о.

ξ одн. \mathcal{G} называем с.в. $\hat{\xi}$ м.р. $\hat{\xi}$ обл. \mathcal{G} -изм. и $\forall \mathcal{G}$ -изм. с.в. η есть:

$E[\eta \xi] = E[\eta \hat{\xi}]$. Обозначение: $\hat{\xi} = E(\xi | \mathcal{G})$ (такое в силу того что $\hat{\xi}$ обладает в \mathcal{G} -изм. свойством независимости от \mathcal{G} -изм.)

Доказательство $E(\xi | \mathcal{G})$ это линейное с.в. — приближение с.в. ξ среди всех \mathcal{G} -изм с.в. независимо от \mathcal{G} .
В частности: Возьмем $\gamma = I_G$, $G \in \mathcal{G}$, тогда $E[I_G \xi] = E[I_G \hat{\xi}]$, но из этого следует

и само приближение, т.к. если верно что $\xi = I_G$, то можно док. и что $\xi = \hat{\xi}$.

• А что же с задачей оценки ожидания? $\exists \mathcal{G} = G(\xi)$, $\gamma: E[\gamma] < \infty$, тогда

$\exists \hat{\gamma} = E(\gamma | G(\xi)) := E(\gamma | \hat{\xi})$, по Th 2: \exists сопр. φ : $\hat{\gamma} = \varphi(\xi)$, но какой смысл $\varphi(\xi)$?

Понятно бывает, что $\varphi(\xi)$ означает некоторое с.в. $E(\gamma | \xi = x)$ при $\mathbb{P}(\xi = x) > 0$, м.е.

Это называется ξ при соединении $\{\omega: \xi(\omega) = x\}$

Последним простым с.в. $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot I_{D_i}$, $D_i = \{D_1, \dots, D_n\}$ — разб. Ω , $\mathbb{P}(D_k) > 0$

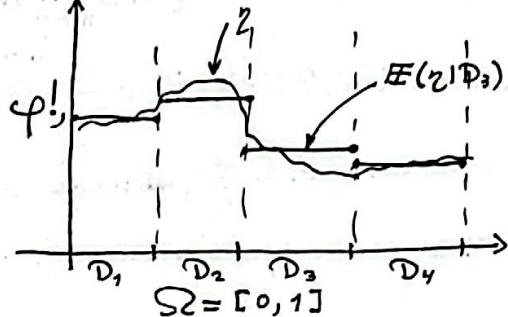
ξ — с.в. $E[\xi] < \infty$, $\hat{\xi} = E(\xi | \hat{\xi}) = \varphi(\xi)$

7) $\mathbb{P}.$ к. $G(\hat{\zeta}) \subset G(\xi) = G(D_\xi)$, но имеем показывая, что $\hat{\zeta} = \sum_{i=1}^n y_i I_{D_i}$, $y_i = ?$

Угл. опр. YMO: $\forall D_k \in G(\xi) \mapsto \mathbb{E}[\hat{\zeta} I_{D_k}] = \mathbb{E}[\zeta I_{D_k}]$
 \Downarrow
 $y_k \cdot \mathbb{P}(D_k)$

$\Rightarrow y_k = \frac{1}{\mathbb{P}(D_k)} \cdot \mathbb{E}[\zeta I_{D_k}]$, это и доказывает что $\hat{\zeta}$ имеет вид

$\mathbb{P}.$ к. $\hat{\zeta} = \sum_{i=1}^n y_i I_{D_i}$, но $\varphi(x_k) = y_k$ — это и есть искомое φ !
на графике x φ не имеет смысла, т.к. $\xi(w) \rightarrow \{x_k\}$,
но это определяет реальное значение.



$$\mathbb{E}(\zeta | \xi = x_k) := \varphi(x_k) = y_k = \frac{1}{\mathbb{P}(D_k)} \cdot \mathbb{E}[\zeta I_{D_k}]$$

$$|\mathbb{E}[\zeta]|, |\mathbb{E}[\zeta]| < \infty$$

• Но что, если $f_{\xi|y}$ — одн. непр.? Тогда ξ, ζ опр. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ через $f_{\xi|y}(x, y)$.

Понятие для условной плотности: $f_{\xi|y}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{\xi,y}(x, y)}{f_{\xi}(x)}, & \text{если } f_{\xi}(x) \neq 0 \\ +\infty, & \text{если } f_{\xi}(x) = 0. \end{cases}$

Задача φ через $f_{\xi|y}$: показать, что $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi|y}(y|x) dy$. Для проверки
нужно показать, что $\mathbb{E}[\varphi(\xi)] I_A = \mathbb{E}[\zeta] I_A \quad \forall A \in G(\xi)$ (*).

$\triangleleft A \in G(\xi) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}: A = \xi^{-1}(B)$, перенести (*) на B : $I_A = I_B(\xi)$, предполагаем

1.4. и П.4 р-да (*):

$$1.4. = \mathbb{E}[\zeta I_A] = \mathbb{E}[\zeta I_B(\xi)] \quad , \quad \text{П.4.} = \mathbb{E}[\varphi(\xi) \cdot I_A] = \mathbb{E}[\varphi(\xi) \cdot I_B(\xi)]$$

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} y I_B(x) \cdot f_{\xi|y}(x, y) dx dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot I_B(x) \cdot \underbrace{f_{\xi|y}(x)}_{\text{no } IP_{\xi|y}} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} I_B(x) \int_{\mathbb{R}} y f_{\xi|y}(x, y) dx dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} I_B(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{\xi|y}(y|x) dy}_{\text{no! } \mathbb{E}(\zeta|y) = \varphi(y)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} I_B(x) f_{\xi|y}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} y f_{\xi|y}(y|x) dy \right) dx$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi|y}(y|x) dy,$$

$$\text{no! } \mathbb{E}(\zeta|y) = \varphi(y).$$

мы можем и утверждать на $f_{\xi|y}(x)$, но генеральная закономерь т.к. в мере x : $f_{\xi|y}(x) \stackrel{a.s.}{=} f(x, y) = 0$ для
т.к. $f_{\xi|y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi|y}(x, y) dy = 0$, а $f_{\xi|y}(x, y) \geq 0 \Rightarrow f_{\xi|y}(x, y) = 0$

Свойства YMO

$$\textcircled{1} \text{ линейность: } E(\alpha \xi + \beta \zeta | \gamma) \stackrel{n.u.}{=} \alpha \cdot E(\xi | \gamma) + \beta \cdot E(\zeta | \gamma).$$

$$\text{Монотонность: } \xi \stackrel{n.u.}{\leq} \zeta \Rightarrow E(\xi | \gamma) \stackrel{n.u.}{\leq} E(\zeta | \gamma)$$

△ Проверка линейности: надо показать, что в качестве $E(\alpha \xi + \beta \zeta | \gamma)$ получим выражение $\alpha \cdot E(\xi | \gamma) + \beta \cdot E(\zeta | \gamma)$.

• $\alpha \cdot E(\xi | \gamma)$ и $\beta \cdot E(\zeta | \gamma)$ — явн. γ -излн. сумма; интегрируются.

• μ -бо: нужно \subseteq явн. γ -излн., тогда:

$$E[\alpha E(\xi | \gamma) \cdot S + \beta \cdot E(\zeta | \gamma) \cdot S] = \left| \begin{array}{l} \text{имм. } E \\ \text{анр. YMO} \end{array} \right| = \alpha \cdot E \xi S + \beta \cdot E \zeta S = E[(\alpha \xi + \beta \zeta) S]. \triangleright$$

$$\textcircled{2} E(E(\xi | \gamma)) = E\xi \quad - \text{характер наивысшей вероятности (установление утверждения = утверждение)}$$

△ Доказем $G = \Omega$: $I_G \equiv 1 \Rightarrow \xi = I_A \Rightarrow P(A) = \int \limits_{\substack{\text{IP}(A | \gamma) \\ \text{IP}(A | \gamma)}} E(I_A | \gamma) dP(d\omega)$ иначе $\gamma = G(\gamma)$, то $IP(A) = \int IP(A | \gamma = y) dP(\omega)$

$$\textcircled{3} \xi - \gamma\text{-независ. (и.е. } G(\xi) \text{ и } \gamma \text{-независ.)}, \text{ тогда: } E(\xi | \gamma) = E\xi$$

$$\xi - \gamma\text{-излн., тогда: } E(\xi | \gamma) \stackrel{n.u.}{=} \xi$$

$$\triangle E(E\xi | \gamma) = E\xi E\gamma = \stackrel{\text{независ.}}{=} E(\xi \cdot \gamma) \triangleright$$

$$\text{Если } \gamma \text{ есть н.в.м., то } dP(y) = f_\gamma(y) dy$$

$$\textcircled{4} \text{ Если } \gamma \text{ явн. } \gamma\text{-излн., то } E(\xi \cdot \gamma | \gamma) = E(\xi | \gamma) \cdot \gamma$$

△ S — γ -излн., $E(S \cdot \underbrace{\gamma \cdot E(\xi | \gamma)}_{\gamma\text{-излн.}}) \stackrel{\text{анр.}}{=} E(S \cdot \xi) = E((S \cdot \gamma) \cdot \xi) \triangleright$

N1 Чему равна косая подделимаемая в раз., ξ — н.в.м. наивысш. "1", γ — н.в.м. наив. "6"!
 $E(\gamma | \xi) = ?$

△ Тогда $\gamma_i = I\{\text{най-е.н. бросок "6"}\} \Rightarrow \gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$. К сожалению линейности YMO.

$$E(\gamma | \xi) = \sum_{i=1}^n E(\gamma_i | \xi), \quad E(\gamma_i | \xi) = ? \quad - \text{при этом находим } E(\gamma_i | \xi = k).$$

$$\begin{aligned} E(\gamma_i | \xi = k) &= \frac{1}{P(\xi = k)} \cdot E(\gamma_i \cdot I_{\{\xi = k\}}) = \left| \begin{array}{l} \text{имм. н.в.м. разделяем } E \\ \text{и.к. } \gamma_i \text{ и } I_{\{\xi = k\}} \text{ независ.} \end{array} \right| = \frac{1}{P(\xi = k)} \cdot E I_{\{\xi = k \cap \xi = \text{н.в.н. раз.}\}} = \\ &= \frac{1}{P(\xi = k)} \cdot P\left(\gamma_i = 1, \xi = k\right) = \frac{\frac{1}{6} \cdot C_{n-1}^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}}{C_n^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot (n-1)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{\frac{5}{6} \cdot k! \cdot (n-k-1)! \cdot n!} = \frac{n-k}{5^n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(\gamma_i | \xi = k) = \frac{n-k}{5^n}$$

$$E(\gamma_i | \xi) = \sum_{k=0}^n E(\gamma_i | \xi = k) \cdot I_{\{\xi = k\}} = \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{5^n} \cdot I_{\{\xi = k\}} = \frac{n-\xi}{5^n} \Rightarrow E(\gamma | \xi) = \frac{n-\xi}{5^n}$$

нечем разбогатить "1" — "6"
бесприм. "1" — "6" (22)

N3 S_n -ravno nes. vsejcie Bernoulli s naprav. p. $E(S_m | S_n) = ?$, $m < n$.

$$\triangleleft S_m = \sum_{i=1}^m \xi_i, \quad \xi_i = I\{\text{i-vygran.-yvneix}\}, \quad i \leq n$$

$$E(\xi_i | S_n = k) = \frac{1}{P(S_n = k)} \cdot E[\xi_i I_{\{S_n = k\}}] = \frac{1}{P(S_n = k)} \cdot P(\{\xi_i = 1\} \cap \{S_n = k\}) =$$

\downarrow

P

$P(\xi_i = 1, S_n = k) = P(\xi_i = 0, S_{n-1} = k-1)$

$\begin{matrix} k-1 \text{ yvneix} \\ \text{uz } n-1 \text{ kprame } i=0 \\ \text{bez } \xi_i \text{ kprame } \xi_i \end{matrix}$

$$= \frac{P \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}}{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} = \frac{k! \cdot (n-k)! \cdot (n-1)!}{n! \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \frac{k}{n}$$

$$\Rightarrow E(\xi_i | S_n) = \frac{S_n}{n} \Rightarrow E(S_m | S_n) = \frac{m}{n} \cdot S_n. \triangleright$$

Inpr1 Pytym c. t. ξ_1, ξ_2 - nezavis. u neskom konkretnom v.

$$\text{Dok.: } E(\xi_1 | \xi_1 + \xi_2) = E(\xi_2 | \xi_1 + \xi_2) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}.$$

Inpr2 Pytym $\{\xi_n\}$ - i.i.d., $E|\xi_1| < \infty$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

$$\text{Dok.: } E(\xi_1 | S_n, S_{n+1}, \dots) = \frac{S_n}{n}$$

Inpr3 $\xi_1, \xi_2 \sim U[0, 1]$ - nezavis. $X = \min\{\xi_1, \xi_2\}$, $Y = \max\{\xi_1, \xi_2\}$. $E(X | Y) = ?$

$$\text{No } X \sim U[-1, 1], \quad E[X | X^2] = ? \quad \triangleleft X = -X \Rightarrow E(-X | (-X)^2) = E(X | X^2) = -E(X | X^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[X | X^2] = 0 \triangleright$$

$$X \sim U[-1, 1], \quad E[X^2 | X] = ? \quad \triangleleft X^2 \text{ ubr } G(x) - uzn. \Rightarrow E[X^2 | X] = X^2. \triangleright$$