### Transformada de Fourier

Juan-Pablo Cáceres CCRMA Stanford University

Agosto, 2007



### **Contenidos**

Introducción

Síntesis Aditiva

**Análisis Espectral** 

Transformada Continua de Fourier

**DFT** 

**Teoremas de Fourier** 

**FFT** 

Convolución

### Introducción

Toda señal

periódica, sin importar
cuan complicada
parezca, puede ser
reconstruida a partir de
sinusoides cuyas
frecuencias son
múltiplos enteros de
una frecuencia
fundamental, eligiendo
las amplitudes y fases
adecuadas.



Matemático francés Joseph Fourier (1768-1830)



#### Síntesis Aditiva

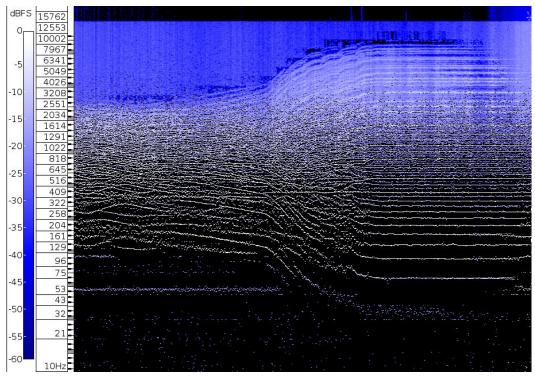
Reglas de la **Síntesis Aditiva** (o síntesis de Fourier):

- ► Sólo **sinusoides** pueden ser combinadas
- Las frecuencias de <u>todas</u> las sinusoides deben estar armónicamente relacionas

Sólo tenemos libertad para cada sinusoide en la elección de:

- Frecuencia fundamental
- Amplitud
- Fase

# Expansión de Síntesis Aditiva



**Deep Note**: La pieza de música por computador más famosa del mundo (James "Andy" Moorer) deep\_note.wav



# Armónicos y Periodicidad

Para una frecuencia fundamental f, cualquier múltiplo entero de f es un armónico.

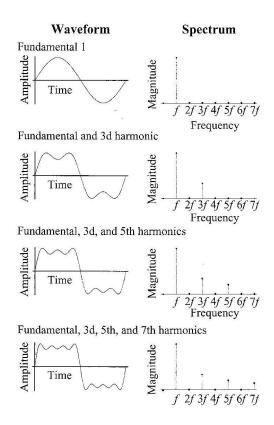
Una serie armónica puede expresarse entonce:

$$f + 2f + 3f + 4f + 5f + 6f + 7f + \cdots$$

Una función (señal) f(t) es periodica son periodo  $\tau$  si para cualquier t,

$$f(t) = f(t+\tau), \quad (-\infty < t < \infty)$$

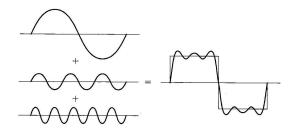
### Ejemplo: Onda Cuadrada





## Ejemplos de Síntesis Aditiva: Clarinete

Con las siguientes reglas se puede construir un sonido tipo clarinete:



- ▶ Sólo los armonicos impares estan presentes
- La Amplitud de los armónicos decrece a medida que el número de armónico crece
- No hay diferencia de fase entre los armonicos (esto simplifica la síntesis)

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t + 0) \quad \text{con } n \text{ impar}$$

$$s(t) = \sin(\omega t + 0) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t + 0) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t + 0) + \cdots$$

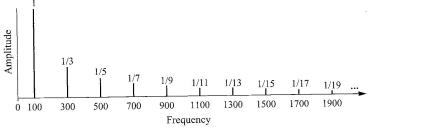


### **Análisis Espectral**

Cualquier señal (waveform) peródica puede ser descompuesta en sinusoides

- Estudio de timbres musicales
- Clasificación de sonidos por contenido espectral
- Resíntesis usando síntesis de Fourier
- Sintetización de sonidos hibridos (mezcla de sonidos analizados, morphing)
- Creación arbitraria de mezclas de frecuencias

El espectro (analizado) del clarinete debiera verse así:

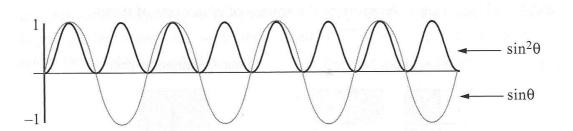


**◆ロ > ◆御 > ◆ き > ◆き \* き \* か**へぐ

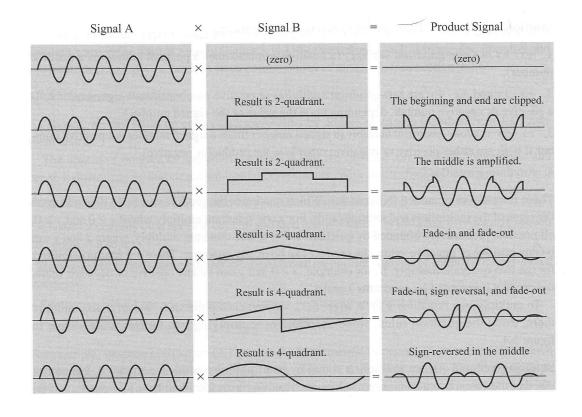
# Como detectamos (analizamos) las Frecuenias?

En el espectro anterior, aparecen claramente la energía de cada sinusoide del clarinete. Como detectamos esto con análisis?

Preambulo: Multiplicación de Señales



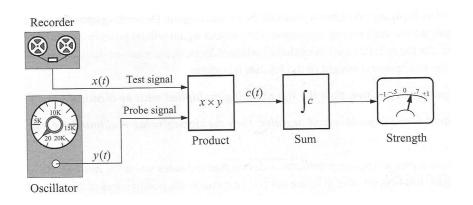
## Multiplicación de Señales



### **Detector de Frecuencias**

Multiplicación de señales idénticas genera una señal que es siempre positiva.

- x(t): sinusoide como señal de prueba (señal que será analizada)
- $lackbox{ }y(t)$ : señal de sondeo, sinusoide con frecuencia variable
- ightharpoonup c(t): el producto de las 2 señáles x(t)y(t)
- c(t) será mayor cuando x(t) e y(t) sean idénticas.



### Formalización del Detector

Como señal de sondeo usamos un fasor:

$$e^{-j2\pi ft}$$

Este fasor tiene una sóla componente en frecuencia.

Primero, multipicamos la señál de input con el fasor de sondeo:

$$x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}$$

Finalmente sumamos (integramos) el producto:

$$\int x(t)e^{-j2\pi ft}$$



### Transformada Continua de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$
 Transformada de Fourier

- ▶ *t*: Tiempo
- ightharpoonup f: Frecuencia en Hz
- ightharpoonup x(t): Señal de prueba
- $e^{-j2\pi ft}$ : Fasor de Sondeo (Kernel Function)
- lacktriangleq X(f): Espectro en función de la frecuencia f

 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , es decir para una función x(t) existe un equivalente X(f).

X(f), el espectro, revela la fuerza (energía) de varias componentes de frecuencia, ordenadas por frecuencia.

La transformada de Fourier actúa como un detector de energia en frecuencia-dependiente



#### Transformada Inversa de Fourier

A partir de la transformada, podemos recuperar la señal original tomando la Transformada Inversa de Fourier.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$
 Transformada Inversa de Fourier

Notar la simetría con respecto a la Transformada de Fourier.



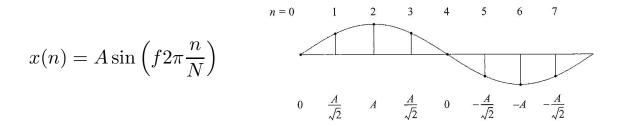
# **Tranformadas Discretas (DFT)**

El equivalente en tiempo y frecuencia discreta es la *Transformada Discreta de Fourier (DFT)* 

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2\pi j}{N}kn} DFT$$

- ▶ N: Número de Samplers en x[n]
- ightharpoonup x[n]: Señal de prueba discreta (con índice n)
- ▶ X[k]: Espectro en función de la frecuencia discreta (con índice k)
- $e^{-jk\omega n/N}$ : Fasor de Sondeo discreto (Kernel Function)

## **Ejemplo**



Para simplificar este analisis, descomponemos nuestra transformada:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad DCT$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot -j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \middle| DST$$



# **Ejemplo**

Para simplificar más operemos en una DST real positiva

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) DST$$

Para N=8, f=1 y k=1, es decir ambas señal de sondeo y de prueba son iguales:

Sample	0	1	2	3	4	5	6	7
Input	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	A	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	-A	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$
Sondeo	0	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
Producto	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	A	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}^2$	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}^2$

# **Ejemplo**

Para  $x(n) = A \sin \left( f 2\pi \frac{n}{N} \right)$  con k = f ,

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = 0 + \frac{A}{2} + A + \frac{A}{2} + 0 + \frac{A}{2} + A + \frac{A}{2}$$

$$= 4A$$

Para un N general, se obtiene:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi j}{N} kn\right) = \frac{A}{2}$$



# Caso de Frecuencia sin Energía

Para k=2f

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N} 2fn\right)$$

Se hace el mismo proceso y se suman los términos:

$$0 + \frac{A}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{A}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{A}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{A}{\sqrt{2}} = 0$$

 $\Rightarrow$  No hay energía en k=2f

## Energía en las Frencuencias Negativas

Veamos que pasa para k = -f

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(-k\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Nuevamente haciendo la tabla y sumando,

$$0 - \frac{A}{2} - A - \frac{A}{2} + 0 - \frac{A}{2} - A - \frac{A}{2} = -4A$$

Normalizando:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(-k\frac{2\pi j}{N}n\right) = -\frac{A}{2}$$



# Señal Combinada (Reconstrucción)

Podemos reconstruir la señal a partir de las componentes en frecuencia,

$$x[n] = \frac{A}{2} [\sin(f2\pi n/N) - \sin(-f2\pi n/N)]$$
$$= A\sin(f2\pi n/N)$$

Si hacemos el mismo ejemplo con señal de prueba  $\cos(f2\pi n/N)$  y DCT, obtenemos:

$$x[n] = \frac{A}{2} [\cos(f2\pi n/N) + \cos(-f2\pi n/N)]$$
$$= A\cos(f2\pi n/N)$$

- ▶ DST sólo "ve" señales tipo sin, es decir componenter impares del Espectro
- ► DCT sólo "ve" señales tipo cos, es decir componenter **pares** del Espectro

#### Señales con Fase Arbitraria

Si se toma como señal de prueba:

$$x[n] = a\cos(f2\pi n/N) + b\sin(f2\pi n/N)$$

Cualquier señal sinusoidal con fase arbitraria puede ser representada por una suma de  $\sin y \cos z$ :

$$A\sin(\theta + \phi) = a\cos\theta + b\sin\theta$$

Por lo tanto, usando la DCS y la DST juntas podemos detectar cualquier señal con frecuencia y fase arbitrarias.
Usando la DFT combinamos ambas en forma más elegante:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2\pi j}{N}kn} \qquad \text{DFT}$$

Más Complejo es Más Simple



#### Teoremas de Fourier

Tenemos entonces la transformada discreta de Fourier,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2\pi j}{N}kn}, \ k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$
 DFT

Y su inversa,

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{2\pi j}{N} kn}, \ n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$
 IDFT

Definimos  $\omega_k \triangleq 2\pi k/N$  con lo que

$$e^{\frac{2\pi j}{N}kn} = e^{j\omega_k n}$$

Y como notación ocupamos el par transformado,

$$x \leftrightarrow X$$
 ("x" corresponde a X)



### **Teoremas de Fourier**

Las sinusoides de la DFT  $s_k[n] \triangleq e^{j\omega_k n}$  son periodicas tal que  $s_k[n+mN] = s_k[n]$  para todo entero m.

Como sabemos que cualquier señal x de largo N puede ser expresada como combinación lineal de las sinusoides DFT en el dominion del tiempo,

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k} X[k] s_k(n)$$

implica que x[n] fuera del rango [0,N-1] es de extensión periódica, i.e., x[n+mN]=x[n]

Esto tambien sucede con la DFT con X[k+mN]=X[k]

Matemáticamente, las señales x en que se opera una DFT son samples (muestras) de  $\bf 1$  periodo de una señal periodica, con periodo NT



#### **Teoremas de Fourier**

#### Theorem (Linealidad)

Para cualquier  $x,y\in\mathbb{C}^N$  y para  $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ , la DFT satisface:

$$\alpha x + \beta y \leftrightarrow \alpha X + \beta Y$$

#### Theorem (Conjugado)

Para cualquier  $x \in \mathbb{C}^N$ ,

$$\overline{x} \leftrightarrow \operatorname{FLip}(\overline{X})$$
$$\operatorname{FLip}(\overline{x}) \leftrightarrow \overline{X}$$

### **Teoremas de Fourier**

### Theorem (Reverso)

Para cualquier  $x \in \mathbb{C}^N$ ,

$$\operatorname{FLIP}(x) \leftrightarrow \operatorname{FLIP}(X)$$

### **Corollary (Reverso)**

Para cualquier  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\operatorname{FLIP}(x) \leftrightarrow \overline{X}$$

$$\operatorname{Flip}(X) = \overline{X}$$

#### **Theorem**

$$x \in \mathbb{R}^N \leftrightarrow X$$
 es Hermitiano



### Teoremas de Fourier: Simetría

#### **Theorem**

Para cualquier  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $Re\{X\}$  es par y  $Im\{X\}$  es impar

#### **Theorem**

Para cualquier  $x \in \mathbb{R}^N$ , |X| es par y  $\angle X$  es impar

#### **Theorem**

$$x \text{ par} \leftrightarrow X \text{ par}$$

x real y par  $\leftrightarrow X$  real y par

### Teoremas de Fourier: Shift

#### **Theorem**

Para cualquier  $x \in \mathbb{C}^N$  y para cualquier entero  $\triangle$ ,

$$DFT_k[SHIFT_{\triangle}(x)] = e^{-j\omega_k \triangle}X(k)$$



### Señales de Fase Lineal

Podemos escribir la Transformada de Fourier en forma polar,

$$X[k] = G[k]e^{j\Theta[k]}$$

Por el Teorema de Shift para retrasos,

$$e^{-j\omega_k\triangle}X[k]\triangleq e^{-j\omega_k\triangle}G[k]e^{j\Theta[k]}=G[k]e^{j[\Theta[k]-\omega_k\triangle]}$$

Esto implica que la pendiente de la curva  $\triangle$  equivale al delay en el tiempo.

- ▶ Pendiente **negativa** lineal equivale a **retraso** (delay)
- ▶ Pendiente positiva lineal equivale a adelanto

 $e^{-j\omega_k \triangle}$  es conocido como termino de fase lineal

## Teoremas de Fourier: Zero Padding

Zero padding consiste en extender la señal con ceros, por ejemplo,

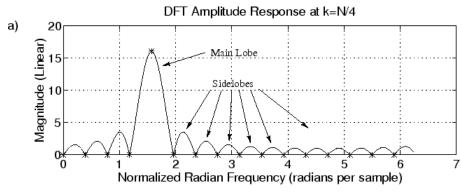
#### Theorem (Interpolación Espectral)

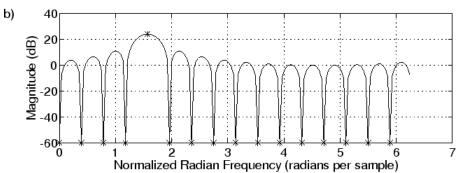
Para señales de banda limitada, hacer Zero Pad en el tiempo corresponde a interpolación ideal en el dominio de la frecuencia.



### **Ejemplo**

Vemos que en los "agujeros" de frecuencia si hay contenido espectral cuando hacemos la interpolación,







# Transformada Rápida (FFT)

En la práctica, la Transformada de Fourier se calcula con una algoritmo llamado "Fast Fourier Transform" o FFT. Por ejemplo en MATLAB o OCTAVE la función para calcular la transformada de Fourier se llama 'fft'.

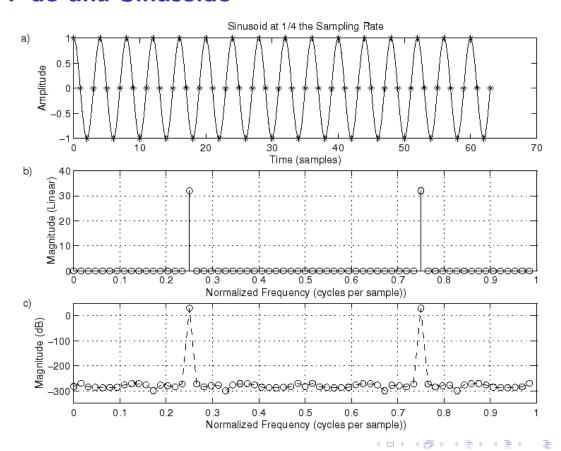
Este algoritmo es más eficiente cuando N es potencias de 2, i.e.,  $N=2^p\ {\rm con}\ p$  un número entero.

Es por esto que en la práctica en general se hace Zero Padding de modo que la señal tenga un largo  $N=p^2$  con los beneficios,

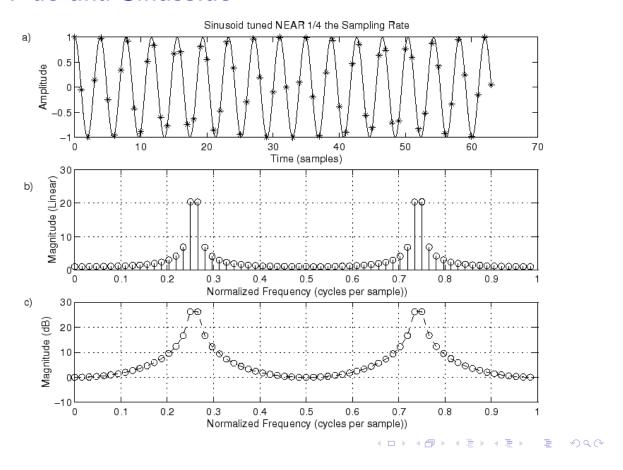
- ▶ Mayor eficiencia del algoritmo FFT
- ▶ Efecto colateral de mejorar la interpolación espectral.



### FFT de una Sinusoide

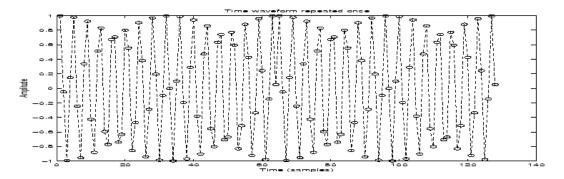


### FFT de una Sinusoide

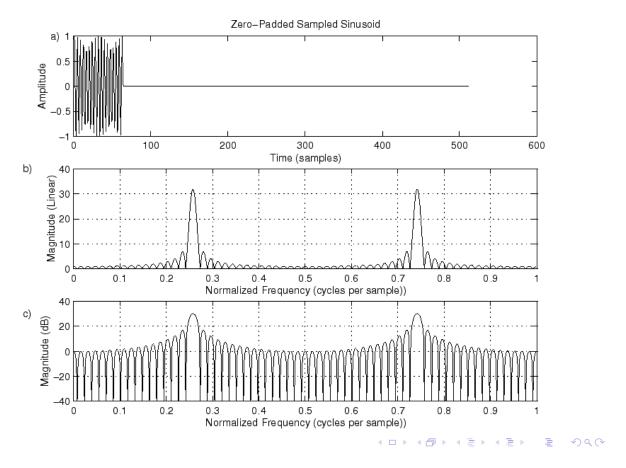


### FFT de una Sinusoide

Discontinuidades por extensión periodica,



### FFT de una Sinusoide



### Teoremas de Convolución

### Theorem (Convolución)

Para cualquier  $x,y\in\mathbb{C}^N$ ,

$$x\circledast y \leftrightarrow X\cdot Y$$

### Theorem (Dual de la Convolución)

Para cualquier  $x,y\in\mathbb{C}^N$ ,

$$x \cdot y \leftrightarrow \frac{1}{N} X \circledast Y$$

Estos son quizas el <u>más importante teorema</u>. Son la base de la implementación de Filtros por convolución (Debido a la rapidez del FFT).

# **Otras Aplicaciones**

La Transformada de Fourier es la base del análisis y síntesis expectral,

- ► Filtros y Convolución
- ► Transformada Corta de Fourier
- Espectrogramas
- Vocoders
- ► Síntesis sinusoidal

