Voorbereiding oefeningen les 10

Leen Van Houdt
Sander Mergan
Seppe Duwé
Willem Melis
Wouter Duyols
Xavier Dejager

April 27, 2016

1 Oefening 0.5

Met een tegenvoorbeeld kunnen we aantonen dat de bewering niet waar is. We stellen dat $x = 0$ en $z = 0$. Er geldt dat $xy = 0$ en $xz = 0$. Hieruit volgt dat $xy = xz$. We weten echter dat $y \neq z$. De bewering geldt dus enkel als $x = 1$.

We kunnen de bewering dus aanvullen met "gegeven dat $x = 1$", en dit kan bewezen worden door x te vervangen door 1: $xy = xz \Rightarrow 1.y = 1.z \Rightarrow y = z$ maar dit is uiteraard triviaal.

Ook kunnen we de bewering omdraaien: "in de Booleaanse algebra volgt uit $y = z$ dat $xy = xz$", en dit kan bewezen worden door y te vervangen door z in de 2$^{\text{e}}$ vergelijking maar ook dit bewijs is triviaal.

2 Oefening 4.30

Deel 1 Met de exhaustieve methode (alle gevallen nagaan in de waarheidstabel) vinden we volgende oplossing:

N	**x**	**y**	**z**	**t**	**v**
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

De mintermnormaalvorm wordt gevonden door te kijken naar de kolommen waar $f = 1$ is:

$$v = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyzt \tag{1}$$

De maxtermnormaalvorm wordt gevonden door te kijken naar de kolommen waar $f = 0$ is:

$$\begin{aligned} v = {} & (x + y + z + \bar{t})(x + y + \bar{z} + t)(x + \bar{y} + z + t)(x + \bar{y} + \bar{z} + \bar{t})(\bar{x} + y + z + t) \\ & (\bar{x} + y + \bar{z} + \bar{t})(\bar{x} + \bar{y} + z + \bar{t})(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + t) \end{aligned} \tag{2}$$

De maxtermnormaalvorm bijvoorbeeld kan gerealiseerd worden met volgend poortennetwerk:

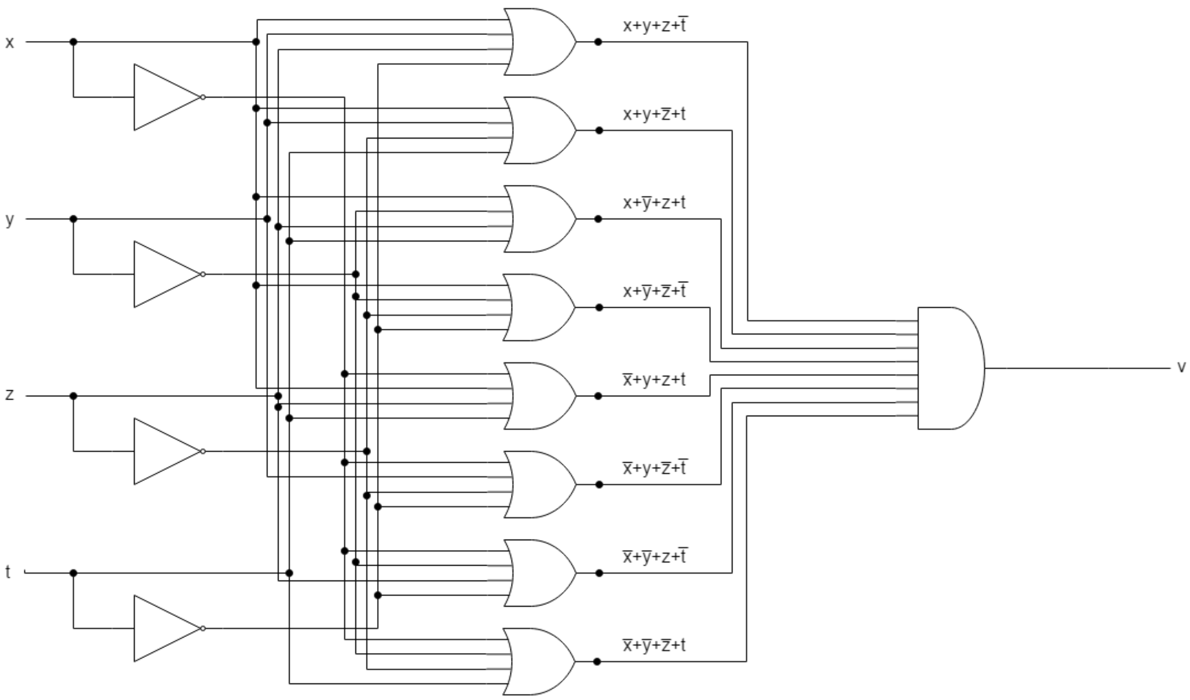

Figure 1: Poortnetwerk met maxtermen

Deel 2 Gevraagd is de vergelijking $v = 1$ op te lossen met de systematische methode. $v = 1$ als $\bar{v} = 0$.

$\bar{v}$ kan makkelijk bekomen worden door de negatie van de maxtermnormaalvorm te nemen en deze vervolgens te vereenvoudigen met de wet van de Morgan:

$$\bar{v} = \neg((x+y+z+\bar{t})(x+y+\bar{z}+t)(x+\bar{y}+z+t)(x+\bar{y}+\bar{z}+\bar{t})(\bar{x}+y+z+t) \\ (\bar{x}+y+\bar{z}+\bar{t})(\bar{x}+\bar{y}+z+\bar{t})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+t)) = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}yzt + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}zt + xy\bar{z}t + xyz\bar{t} = 0 \quad (4)$$

We beschouwen enkel x als veranderlijke en herschrijven de vergelijking:

$$x(\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{y}zt + y\bar{z}t + yz\bar{t}) + \bar{x}(\bar{y}\bar{z}t + \bar{y}z\bar{t} + y\bar{z}\bar{t} + yzt) = 0 \quad (5)$$

Met behulp van de wet van De Morgan kunnen we aantonen dat:

$$\neg(\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{y}zt + y\bar{z}t + yz\bar{t}) = (\bar{y}\bar{z}t + \bar{y}z\bar{t} + y\bar{z}\bar{t} + yzt) \quad (6)$$

Stel voor de leesbaarheid $q = (\bar{y}\bar{z}\bar{t}+\bar{y}zt+y\bar{z}t+yz\bar{t})$, dan volgt dat: $\bar{q} = \bar{y}\bar{z}t+\bar{y}z\bar{t}+y\bar{z}\bar{t}+yzt$. De vergelijking wordt dan:

$$xq + \bar{x}\bar{q} = 0 \quad (7)$$

De oplossing voor x is:

$$x = \bar{q} + \bar{q}\lambda = \bar{q}(1+\lambda) = \bar{q} = \bar{y}\bar{z}t + \bar{y}z\bar{t} + y\bar{z}\bar{t} + yzt = \bar{y}(\bar{z}t + z\bar{t}) + y(\bar{z}\bar{t} + zt) \tag{8}$$

De voorwaarde voor oplosbaarheid is:

$$q.\bar{q} = 0 \tag{9}$$

Dit geldt echter altijd dus deze voorwaarde is triviaal. y, z en t kunnen dus willekeurig gekozen worden. Stel $y = \lambda_1$, $z = \lambda_2$ en $t = \lambda_3$. We krijgen volgend stelsel:

$$\begin{cases} x &= \bar{\lambda_1}(\bar{\lambda_2}\lambda_3 + \lambda_2\bar{\lambda_3}) + \lambda_1(\bar{\lambda_2}\bar{\lambda_3} + \lambda_2\lambda_3) \\ y &= \lambda_1 \\ z &= \lambda_2 \\ t &= \lambda_3 \end{cases} \tag{10}$$

Als we nu alle waarden doorlopen voor λ_1, λ_2 en λ_3 krijgen we alle oplossingen voor $\bar{v} = 1$ en dus voor $v = 0$.

λ_1	λ_2	λ_3	x	y	z	t
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Als we deze tabel vergelijken met de tabel van de exhaustieve methode (zie deel 1) dan zien we dat deze waarden voor x, y, z en t inderdaad overeenkomen met $v = 1$.

3 Oefening 4.41

Deeloefening 1 De inverse van $x^2+1 \mod x^3+x^2+1$ zoeken:

$$
\begin{array}{ccccccc|ccc}
x^3 & + & x^2 & + & 0x & + & 1 & x^2 & + & 1 \\ \cline{8-10}
x^3 & + & 0x^2 & + & x & + & 1 & x & + & 1 \\ \cline{1-7}
 & & x^2 & - & x & + & 1 & & & \\
 & & x^2 & + & 0x & + & 1 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & x & + & 0 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x^2 & + & 1 & \text{x} \\ \cline{4-4}
x^2 & & & \text{x} \\ \cline{1-3}
 & & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3+x^2+1 &= (x+1)(x^2+1)+x \qquad (11)\\
x^2+1 &= x \cdot x + 1 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= (x^2+1) - x \cdot x \qquad (13)\\
&= (x^2+1) - x(x^3+x^2+1-(x+1)(x^2+1)) \qquad (14)\\
&= (1+x+x^2)(x^2+1) - x(x^3+x^2+1) \qquad (15)\\
& \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$1+x+x^2 = \text{gezochte inverse} \qquad (17)$$

$$
\begin{aligned}
(x^2+1)y(x) &= x^2+x+1 \mod (x^3+x^2+1) \qquad (18)\\
\Leftrightarrow y(x) &= (x^2+1)^{-1}(x^2+x+1) \mod (x^3+x^2+1) \qquad (19)\\
&= (x^2+x+1)(x^2+x+1) \mod (x^3+x^2+1) \qquad (20)\\
&= x^4+x^2+1 \mod (x^3+x^2+1) \qquad (21)\\
&= x \mod (x^3+x^2+1) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc|ccccc}
x^4 & + & 0x^3 & + & x^2 & + & 0x & + & 1 & x^3 & + & x^2 & + & 1 \\ \cline{10-14}
0x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & x & - & 1 & & \\ \cline{1-9}
0 & - & x^3 & + & x^2 & - & x & + & 1 & & & & & \\
 & - & x^3 & - & x^2 & + & 0x & - & 1 & & & & & \\ \cline{2-9}
 & & 0 & + & 0 & + & x & + & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Deeloefening 2

$$\begin{cases} 2z + 4y = 1 & \text{①} \\ 3z + 2y = 2 & \text{②} \end{cases} \tag{23}$$

$\boxed{\text{modulo 7:}}$

$$\text{①} + 2 \cdot \text{②} \Rightarrow z = 5 \mod 7 \tag{24}$$
$$\Rightarrow 3 + 4y = 1 \mod 7 \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow 4y = -2 = 5 \mod 7 \tag{26}$$
$$\Leftrightarrow y = 5 \cdot 4^{-1} = 5 \cdot 2 = 3 \mod 7 \tag{27}$$

$\boxed{\text{modulo 6:}}$

$$\text{①} + 2 \cdot \text{②} \Rightarrow z = 5 \mod 6 \tag{28}$$
$$\Leftrightarrow z = 5 \cdot 2^{-1} \mod 6 \tag{29}$$

De inverse van 2 bestaat echter niet in $\mathbb{Z}_6$, dus het stelsel is niet eenduidig oplosbaar in $\mathbb{Z}_6$.

Deeloefening 3

Deeloefening 4

$$\begin{cases} 3V = 2 \mod 5 \\ 2V = 2 \mod 7 \\ 4V = 0 \mod 11 \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} V = 4 \mod 5 \\ V = 8 \mod 7 \\ V = 0 \mod 11 \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} V = 4 \mod 5 \\ V = 1 \mod 7 \\ V = 0 \mod 11 \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} V = a_1 \mod m_1 \\ V = a_2 \mod m_2 \\ V = a_3 \mod m_3 \end{cases} \tag{33}$$

$$M = 5.7.11 \tag{34}$$

$$M1 = \frac{M}{m_1} = \frac{5.7.11}{5} = 7.11 = 77 \tag{35}$$

$$M2 = \frac{M}{m_2} = \frac{5.7.11}{7} = 5.11 = 55 \tag{36}$$

$$M3 = \frac{M}{m_3} = \frac{5.7.11}{11} = 5.7 = 35 \tag{37}$$

$$N_1.M_1 = 1 \mod m_1 \tag{38}$$

$$N_1.77 = 1 \mod 5 \tag{39}$$

$\boxed{N_1 = 3}$

$$N_2.M_2 = 1 \mod m_2 \tag{40}$$

$$N_2.55 = 1 \mod 7 \tag{41}$$

$\boxed{N_2 = 6}$

$$N_3.M_3 = 1 \mod m_3 \tag{42}$$

$$N_3.35 = 1 \mod 11 \tag{43}$$

$\boxed{N_3 = 6}$

$$x = \sum_{i=1}^{r} = a_i.N_i.M_i = 4.3.77 + 1.6.55 + 0.6.11 = 1254 \tag{44}$$

Deeloefening 5