CHAP. : FONCTIONS AFFINES. INÉQUATIONS PRODUIT

1.Représentation graphique et Accroissements d'une fonction affine

1.1. Rappels

Définition :

- ⋆ Soient m et p deux réels donnés. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$ est appelée fonction affine. Sa représentation graphique est une droite d.
- ⋆ Lorsque $p = 0$, f est une fonction linéaire et la droite d passe par l'origine du repère.
- ⋆ Lorsque $m = 0$, f est une fonction constante et la droite d est parallèle à l'axe des abscisses.

Vocabulaire :

On dit que la droite d a pour équation $y = mx + p$.
Le nombre m est appelé coefficient directeur de d.
Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine de d

1.2. Proportionnalité des accroissements

Soient m et p deux réels donnés et soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$

Propriété :

Quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 appartenant à $\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Preuve :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + p - (mx_1 + p)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + p - mx_1 - p}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Rq : Cette propriété permet notamment de déterminer entièrement l'expression d'une fonction affine pour laquelle on connaît l'image de deux points distincts.

Ex : Déterminer l'expression de la fonction affine f qui vérifie $f(2) = 1$ et $f(4) = -3$.

f est une fonction affine, on a donc $f(x) = mx + p$.
Déterminons m :
$m = \dfrac{f(2) - f(4)}{2 - 4} = \dfrac{1 - (-3)}{-2} = \dfrac{4}{-2} = -2$ donc $f(x) = -2x + p$
Déterminons p :
De $f(x) = -2x + p$ on obtient $f(2) = -2 \times 2 + p = -4 + p$. Mais $f(2) = 1$, on a donc $-4 + p = 1$ d'où l'on déduit que $p = 5$
Finalement, f est la fonction définie par $f(x) = -2x + 5$

1.3. Variations d'une fonction affine

Propriété : Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$

- $\star$ Si $m > 0$, alors la fonction f est strictemenent croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\star$ Si $m < 0$, alors la fonction f est strictemenent décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $\star$ Si $m = 0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$

- $\star$ Premier cas, $m > 0$: $x_1 < x_2$ donc $mx_1 < mx_2$ car $m > 0$, donc $mx_1 + p < mx_2 + p$, soit $f(x_1) < f(x_2)$.
  Ceci étant vrai pour tous les réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\star$ Deuxième cas, $m < 0$: $x_1 < x_2$ donc $mx_1 > mx_2$ car $m < 0$, donc $mx_1 + p > mx_2 + p$, soit $f(x_1) > f(x_2)$.
  Ceci étant vrai pour tous les réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $\star$ Troisième cas, $m = 0$: On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p$ et f est constante.

1.4. Signe d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$ avec $m \neq 0$

$$f(x) = 0 \iff mx + p = 0 \iff mx = -p \iff x = \frac{-p}{m}$$

- $\star$ Premier cas, $m > 0$: On a vu qu'alors f est strictement croissante, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$		$-$	0	$+$	

- $\star$ Deuxième cas, $m < 0$:On a vu qu'alors f est strictement décroissante, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$		$+$	0	$-$	

On pourra s'aider d'une figure pour se convaincre de ce qui précède...

Ex : Dresser le tableau de signe de la fonction affine $f : x \mapsto -2x + 5$

2. Inéquations Produit (sur des exemples)

Un exemple d'inéquation produit

On cherche le signe du produit $(2x+6)(2-x)$ On peut le trouver, par des calculs, pour des valeurs particulières de x.

x est égal à ...	$2x+6$ est ...	$2-x$ est ...	$(2x+6)(2-x)$ est donc...
5	positif (ça fait 16)	négatif (ça fait -3)	négatif
0	positif	positif	positif
-4	négatif	positif	négatif

Mais cela ne nous permet pas de le connaître pour n'importe quelle valeur de x.
On va donc utiliser deux notions déjà étudiées :

⋆ Le signe d'une fonction affine (vu dans le cours de seconde sur les fonctions affines)
⋆ Le signe d'un produit (vu en quatrième)

- Signe de $2x+6$.
  La fonction affine $x \mapsto 2x+6$ est strictement croissante ($m = 2 > 0$), elle est donc négative avant de devenir positive.
  $2x+6=0 \iff 2x=-6 \iff x=-3$.
  On en déduit donc la tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$	

- Signe de $2-x$.
  La fonction affine $x \mapsto 2-x$ est strictement décroissante ($m = -1 < 0$), elle est donc positive avant de devenir négative.
  $2-x=0 \iff 2=x$.
  On en déduit donc la tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

- Signe de $(2x+6)(2-x)$
  On utilise les tableaux des signes précédents et on complète la dernière ligne en utilisant la règle des signes d'un produit.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x + 6$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+6)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ce tableau des signes nous permet de résoudre l'inéquation $(2x+6)(2-x) \leqslant 0$. En effet, en observant la dernière ligne du tableau, on trouve que $(2x+6)(2-x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$. On a donc $\mathscr{S} =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$

Un exemple d'inéquation quotient

On cherche à résoudre $\dfrac{-3x-1}{x+3} \geqslant 0$. Cette inéquation n'est définie que lorsque $x + 3 \neq 0$, c'est à dire lorsque $x \neq -3$. On utilise alors une double barre dans la dernière ligne du tableau pour exclure cette valeur

x	$-\infty$		-3		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
$-3x - 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-3x-1}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On a donc $\mathscr{S} =]-3; \frac{-1}{3}]$