K Teoria Algebraica
Els grups K_0 i K_1

Xavier López

Universitat Autònoma de Barcelona

xavier.lopeze@gmail.com

5 de juliol de 2017

Contingut

Introducció

R-mòdul

Sigui R un anell, un R-**mòdul per l'esquerra** és un grup abelià additiu M amb una operació binària $\cdot : R \times M \to M$, $(r, m) \to rm$, tal que

- $r(m+n) = rm + rn$
- $(r+s)m = rm + sm$
- $(rs)m = r(sm)$
- $1m = m$

Per tot $r, s \in R$ i $m, n \in M$, per a un $1 \in R$.

Dimensió

Els grup additiu format pels racionals $\mathbb{Q}$ és un $\mathbb{Z}$-mòdul sense base.

Invariància del cardinal de la base (IBN)

El cardinal de la base no és un invariant sobre tot R-mòdul, amb R anell no necessàriament commutatiu.

Grup de Grothendieck

Semigrup $\mathbb{N}$

Els monoides $\mathbb{N}$ i Proj R són isomorfs si R és un cos.

Grup de Grothendieck

Sigui S un semigrup commutatiu (sense necessitat de tenir element unitat). Existeix un grup abelià G, anomenat **grup de Grothendieck** o grup completat de S, junt amb un homomorfisme de semigrups $\varphi : S \to G$, tal que per a tot grup H i tot homomorfisme $\psi : S \to H$, hi ha un únic homomorfisme $\theta : G \to H$ amb $\psi = \theta \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] & G \arrow[dl, "\theta"'] \\ H & \end{tikzcd}$$

Idempotents

K_0 a paritr d'Idempotents

Per a tot anell R, podem identificar Proj R com el conjunt d'òrbites de l'acció de $GL(R)$ a Idem R. L'operació de semigrup és induïda per $(p, q) \mapsto \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$. Per tant $K_0(R)$ és el grup de Grothendieck d'aquest semigrup.

Invariància de Morita

Per a tot anell R i tot enter positiu n hi ha un isomorfisme natural

$$K_0(R) \leftrightarrow K_0(M_n(R)).$$

Donats dos anells R_1 i R_2,

$$K_0(R_1 \times R_2) \cong K_0(R_1) \oplus K_0(R_2).$$

El cas d'un cos

Si R és un cos, $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

El cas d'un DIP

Si R és un DIP, tot submòdul d'un R-m.ll.f.g. és lliure, a més és isomorf a R^n per a un únic n, anomenarem a aquest N rang del mòdul.

El cas d'un anell local

Si R és un anell local, no necessàriament commutatiu, aleshores tot R-m.p.f.g. és lliure amb un rang unívocament determinat. En particular $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$ i té per element generador la classe de mòduls de rang 1.

- $K[x]/(x^n)$ és un anell local.
- Sigui p un nombre primer i $k > 0$, aleshores l'anell $\mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z})$ és local.

K_0 relatiu

El grup K_0-**relatiu** d'un anell R i un ideal I ve definit per

$$K_0(R,I) = \ker((p_1)_*) : K_0(D(R,I)) \to K_0(R)).$$

Successió exacta

Sigui R un anell i $I \subset R$ un ideal. Aleshores existeix una successió exacta curta

$$K_0(R,I) \to K_0(R) \xrightarrow{q_*} K_0(R/I)$$

on q_* és induïda per l'aplicació quocient $q : R \to R/I$ i l'aplicació $K_0(R,I) \to K_0(R)$ és induïda per $p_2 : D(R,I) \to R$ (la projecció a la segona component).

Escisió

Si I és un ideal bilàter en un anell R, aleshores $K(R,I) \cong K_0(I)$ (i per tant no depèn de R, només en l'estructura de I com a anell sense unitat).

Construcció de K_1

Lema de Whitehead

Sigui R un anell,

$$[GL(R), GL(R)] = [E(R), E(R)] = E(R).$$

K_1

Sigui R un anell amb unitat, denotarem per $K_1(R)$ el **grup abelianitzat** $GL(R)_{\text{ab}} = GL(R)/E(R)$.

Invariància de Morita sobre K_1

Per a tot anell R

$$K_1(R) \cong K_1(M_n(R)).$$

Siguin R_1 i R_2 anells, aleshores

$$K_1(R_1 \times R_2) \cong K_1(R_1) \oplus K_2(R_2).$$

Casos

Corol·lari

Sigui $A \in GL(n, R)$, la matriu $2n \times 2n$ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ pertany a $E(2n, R)$.

El cas d'un cos

Si F és un cos, el determinant indueix un isomorfisme $\det : K_1(F) \to F^\times$.

- anells de divisió
- anells locals

Determinant per anells locals

Sigui R un anell local no necessàriament commutatiu, aleshores existeix una **única** aplicació "determinant": $GL(R) \to R^{x}_{\text{ab}}$ amb les següents propietats:

a) El determinant és invariant sota operacions elementals per files, en altres paraules, si $A \in GL(n, R)$ i A' és la matriu resultant de A a través d'afegir un múltiple per l'esquerra d'una fila a una altra, aleshores $\det(A') = \det\ (A)$.

b) El determinant de la matriu identitat és 1.

c) Si $A \in GL(n, R)$, $a \in R^{x}$, i A' és la matriu obtinguda a partir de multiplicar per a una de les files de A, aleshores $(\overline{a})(\det A)$, on $\overline{a}$ és la imatge de a a R^{x}_{ab}.

d) Si $A, B \in GL(n, R)$, aleshores $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

e) Si $A \in GL(n, R)$ i si A' es obtingut a partir de A intercanviant dues files, aleshores $\det A' = (-\overline{1})(\det A)$.

f) El determinant d'una matriu i la seva transposta sempre és el mateix.

Exemple

Per a tot $m > 0$

$$K_1(\mathbb{Z}/(m)) \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{p_1^{k_1}\mathbb{Z}}\right)^{\times} \times \cdots \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p_n^{k_n}\mathbb{Z}}\right)^{\times},$$

Els Quaternions

$$\mathbb{H}^{\times}_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{R}^{\times}_{+}$$

Observem que $\ker N = [\mathbb{H}, \mathbb{H}]$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^{\times} \arrow[r, "N"'] \arrow[d, "i"] & \mathbb{R}^{\times}_{+} \\ \mathbb{H}^{\times}_{\mathrm{ab}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dominis Euclidians

Un domini d'integritat (anell no trivial sense divisors de zero) commutatiu R es diu **domini Euclidià** si hi ha una funció norma $|| : R \to \mathbb{N}$ amb les següents propietats:

i) Si $a \in R$, $|a| = 0$ si i només si $a = 0$.

ii) Si $a, b \in R$, $|ab| = |a||b|$.

iii) Si $a, b \in R$, $b \neq 0$, aleshores existeix $q, r \in R$, que anomenarem quocient i residu respectivament, els quals compleixen $a = qb + r$ i $0 \leq |r| < |b|$.

Si R és un domini Euclidià, aleshores $K_1(R) \cong R^{\times}$.

Exemples

$K_1(\mathbb{Z}) \cong \{1, -1\}$, $K_1(\mathbb{Z}[i]) \cong \{1, i, -1, -i\}$, $K_1(K(x)) \cong K^{\times}$ i $K_1(\mathbb{Z}[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}]) \cong \{z \in \mathbb{C}; z^6 = 1\}$.

K_1 relatiu i la successió exacta

K_1 relatiu

Sigui R un anell (amb unitat) i I un ideal bilàter de R. Definim el grup K_1 **relatiu** de l'anell R i l'ideal I com

$$K_1(R, I) = \ker((p_1)_* : K_1(D(R, I)) \to K_1(R))$$

Successió exacta

Sigui R un anell i $I \subset R$ un ideal. Aleshores existeix una successió exacta

$$K_1(R, I) \to K_1(R) \xrightarrow{q_*} K_1(R/I) \xrightarrow{\partial} K_0(R, I) \to K_0(R) \xrightarrow{q_*} K_0(R/I), \qquad (1)$$

on q_* ve induïda per l'aplicació quocient $q : R \twoheadrightarrow R/I$ i les aplicacions $K_j(R, I) \to K_j(R)$ venen induïdes per $p_2 : D(R, I) \to R$.

φ