I. PROBLEMAS

1. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

CAPÍTULO 34

1. La amplitud del campo magnético de una onda electromagnética plana, monocromática es $5{,}4\text{x}10^{-7}$ T. La onda se propaga en un medio en que su rapidez es 0,8c.

   (a) Calcule la amplitud del campo eléctrico.

   (b) Calcule la intensidad de la onda.

   (c) Calcule la longitud de onda si la frecuencia es de 1,0[Hz].

2. La rapidez v de una onda electromagnética que se propaga en un medio transparente está dada por la relación $v^2 = (\kappa\ \mu_0\ \varepsilon_0)^{-1}$, donde κ es la constante dieléctrica del medio de propagación.

   (a) Determine la rapidez de propagación de la luz en agua cuya constante dieléctrica es 1,78 a las frecuencias ópticas.

   (b) Exprese el índice de refracción del medio en términos de la constante dieléctrica κ, y calcule su valor.

3. ¿Qué potencia debe ser radiada isotrópicamente para que a una distancia de 20 m, la amplitud del campo eléctrico sea de 55 V/m ?

4. Un láser de Helio-Neón para la enseñanza tiene una potencia de operación de 5,0 mW y emite un haz cuya sección transversal es de 4,0 mm^2 .

   (a) Determine el valor máximo del campo eléctrico en el haz.

   (b) Calcule la energía electromagnética contenida en 1,0 m de longitud del haz.

5. ¿Cuál es la longitud de una antena de media onda diseñada para transmitir ondas de radio cuya frecuencia es de 20 MHz?

6. Determine el rango de longitudes de onda para:

   (a) la banda AM de radiofrecuencias que se extiende entre 540 y 1600 kHz,

   (b) la banda FM de radiofrecuencias que va desde 88 a 108 MHz.

7. Una fuente de microondas de ''frecuencia'' 20 GHz, genera pulsos con período de 1,0 ns y potencia media por pulso de 25 kW. Un reflector parabólico de 6,0 m de radio se utiliza para enfocar la radiación como un haz paralelo.

(a) ¿Cuál es la ''longitud de onda'' de las microondas?

(b) ¿Cuál es la energía electromagnética contenida en cada pulso?

(c) Calcule la densidad media de energía contenida en cada pulso.

(d) Determine la ''amplitud media'' de los campos eléctrico y magnético en el haz de microondas.

2. ÓPTICA GEOMÉTRICA

CAPÍTULO 35

1. Roemer midió el periodo de la luna Io observando sus eclipses al pasar por detrás del planeta Júpiter, y encontró que es de aproximadamente 42,5 horas. Como resultado de cuidadosas observaciones, también encontró que el intervalo entre eclipses sucesivos de Io, aumentaba en 22 minutos en períodos de 6 meses, mientras la Tierra se movía desde el punto de su órbita más cercano a Júpiter, hasta un punto diametralmente opuesto. Si el periodo de Júpiter alrededor del Sol es de aproximadamente 12 años, utilice el valor 1.5×10^8 km como el radio promedio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, para calcular la rapidez de la luz a partir de estos datos.

2. En un experimento para determinar la rapidez de la luz utilizando el dispositivo de Fizeau, la distancia entre la fuente de luz y el espejo fue de 11.45 km y la rueda tenía 720 muescas. El valor de c determinado experimentalmente fue de 2.998×10^8 m/s. Calcule la velocidad angular mínima de la rueda utilizada en este experimento.

3. Cuando un "hombre rana" ve el Sol en un ángulo aparente de 45º medido desde la vertical. ¿Cuál es la posición real del Sol?

4. Un tanque cilíndrico abierto en su parte superior tiene un diámetro de 3m y está completamente lleno de agua. Cuando el Sol en el ocaso forma un ángulo de 28º con el horizonte, la luz solar deja de iluminar el fondo del tanque. ¿Cuál es la profundidad del tanque?

5. Un pez en un lago se encuentra a 15 m de la orilla. ¿A qué profundidad mínima debe sumergirse para ver una roca ubicada en la orilla?

6. Considere un espejismo común formado por el sobrecalentamiento del aire que se encuentra exactamente arriba de la carpeta asfáltica. Si una persona observa desde 2 m sobre el camino (donde $n = 1.0003$) verá agua sobre el asfalto a $\theta_1 = 88.8º$, encuentre el índice de refracción del aire que se encuentra exactamente arriba del pavimento. (*Sugerencia: maneje el problema como si se tratara de la reflexión interna total*).

7. Una fibra óptica está hecha con un plástico transparente de índice de refracción n = 1.50. ¿Qué ángulo debe formar la luz con la superficie para que permanezca dentro de la "guía" de plástico?

8. Cuando el Sol se encuentra directamente sobre nuestras cabezas, un haz angosto de luz entra a una catedral a través de una perforación pequeña localizada en el techo y forma una mancha sobre el piso que está 10,0 m más abajo.

(a) ¿Con qué rapidez (en cm/min) se nueve la mancha a través del piso (plano)?

(b) ¿Si un espejo se coloca sobre el piso para interceptar la luz, con qué rapidez se moverá la mancha reflejada a través del techo?

CAPÍTULO 36

1. Con la ayuda de un diagrama de rayos, determine la altura mínima de un espejo vertical plano de modo que una persona de 1,80 m de estatura pueda verse completamente (de pies a cabeza).

2. La altura de la imagen real en un espejo cóncavo es cuatro veces la altura del objeto que se encuentra a 30 cm frente al espejo. Con la ayuda de un diagrama de rayos, determine:

(a) la distancia imagen.

(b) el radio de curvatura del espejo.

3. Una esfera de vidrio (n = 1.50) de 15 cm de radio tiene una pequeña burbuja de aire ubicada a 5 cm del centro. La esfera se observa desde un punto muy cercano a la línea radial que contiene la burbuja. ¿Cuál es la ‘ profundidad ’ aparente de la burbuja, por debajo de la superficie de la esfera?

4. Una lente convexa forma la imagen real de un objeto en un punto localizado a 12 cm a la derecha de la lente. El objeto se coloca a 50 cm a la izquierda de la lente.

(a) Calcule la distancia focal de la lente.

(b) Con la ayuda de un diagrama de rayos, calcule la razón entre la altura de la imagen y la altura del objeto.

(c) ¿La imagen es derecha o invertida? ¿Real o virtual?

5. Un objeto real se ubica a 20cm a la izquierda de una lente divergente de distancia focal $f = -32\,\text{cm}$.

   (a) Determine la ubicación de la imagen.

   (b) Con la ayuda de un diagrama de rayos, determine la amplificación de la imagen.

6. Una persona con vista lejana que puede enfocar con nitidez objetos que se encuentran a más de 90 cm de distancia de sus ojos. Determine la distancia focal de las lentes que permitirán a esta persona leer confortablemente a la distancia de 25 cm.

7. Una persona con vista cercana no puede enfocar con nitidez objetos que se hallan a más de 200 cm de sus ojos. Determine la distancia focal de las lentes que permitirán a esta persona ver con claridad objetos distantes.

8. Una lente con distancia focal de 5 cm se utiliza como lente amplificadora.

   (a) ¿Dónde debe colocarse el objeto para obtener la máxima amplificación?

   (b) ¿Cuál es la amplificación?

3. ÓPTICA ONDULATORIA

CAPÍTULO 37

1. Se realiza un experimento de interferencia de Young usando luz azul-verde proveniente de un láser de argón. La separación entre rendijas es de 0,50 mm y el patrón de interferencia en una pantalla ubicada a 3,3 m muestra el primer máximo a 3,4 mm del máximo central.

   (a) Calcule la longitud de onda de la luz del láser de argón.

   (b) Determine la ubicación de los mínimos adyacentes al primer máximo.

2. Una franja brillante B de un patrón de interferencia de Young se halla a 12 mm del máximo central, sobre una pantalla que se encuentra a 119 cm de las dos rendijas. La separación entre rendijas es de 0,241 mm y ambas son iluminadas con la luz azul (λ=486nm) proveniente de un tubo de descarga de hidrógeno.

   (a) ¿Cuántas franjas brillantes hay entre el máximo central y la franja brillante B?

   (b) Determine la diferencia de camino entre las ondas que producen la franja brillante B.

3. Dos rendijas cuya separación es d, son iluminadas por un frente de ondas planas de longitud de onda λ, que incide perpendicularmente al plano de las rendijas. Se observa el patrón de interferencia en una pantalla ubicada a 140 cm del plano de las rendijas.

   (a) Calcule el cuociente d/λ para que la intensidad en un punto P ubicado a 8,0 mm del eje óptico sea el 75% de la intensidad máxima.

   (b) Indique si acaso es posible modificar la dirección de incidencia de modo que en el punto P se ubique el máximo central.

4. Los campos eléctricos provenientes de tres fuentes coherentes, en cierto punto P están descritos por: $E_1 = E_0\, sen\, \omega t$, $E_2 = E_0\, sen\, (\omega t + \phi)$ y $E_3 = E_0\, sen\, (\omega t + 2\phi)$.

   Representando el campo eléctrico resultante por $E = E_R\, sen\, (\omega t + \alpha)$, encuentre E_R y α utilizando el método de representaciones vectoriales para los casos:

   (a) $\phi = 20º$ (b) $\phi = 60º$ (c) $\phi = 120º$

5. Mediante un diagrama de representaciones vectoriales obtenga la resultante de sumar

$$E_1 = E_{01}\, sen\, wt \;\; y \;\; E_2 = E_{02}\, sen\, (\omega t + \phi), \text{ cuando } E_{02} = 1{,}5E_{01} \text{ y } \pi/6 \le \phi \le \pi/3.$$

Utilice el diagrama y la ley de los cosenos para mostrar que la intensidad resultante para dos ondas coherentes, se puede escribir en la forma $I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\,\phi$.

6. Considere *N* fuentes coherentes descritas por $E_1 = E_0\ sen\ (\omega t + \phi)$, $E_2 = E_0\ sen\ (\omega t + 2\phi)$, $E_3 = E_0\ sen\ (\omega t + 3\phi)$ .... , $E_N = E_0\ sen\ (\omega t + N\phi)$.

   Encuentre el valor mínimo de ϕ para el cual $E_R = E_1 + E_2 + E_3 + ... E_N$ es cero.

7. Una película delgada de MgF_2 de 10^{-5} cm de espesor (n = 1,38) se utiliza para recubrir la lente de una cámara fotográfica.

   ¿Alguna longitud de onda visible se intensificará en la luz reflejada?

8. Una burbuja de jabón (n = 1,33) refleja fuertemente los colores rojo y verde de la luz blanca. Calcule el espesor de la burbuja de jabón. (En el aire, λ rojo=700nm , λ verde=500nm).

9. Una película de aceite (n = 1,46) que se encuentra en el aire tiene un espesor de 500 nm y es iluminada perpendicularmente.

   ¿Qué longitud de onda comprendida en el rango de 300 a 700nm se reflejará fuertemente?

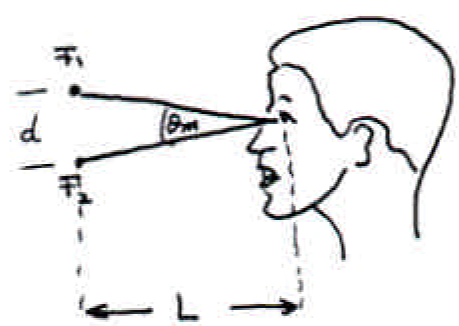
CAPÍTULO 38

1. Sobre una rendija de 0,5 mm de ancho incide luz monocromática cuya longitud de onda es de 460 nm. El patrón de difracción se observa en una pantalla ubicada a 120 cm de la rendija.

   Determine la distancia desde la segunda franja oscura hasta el eje de simetría del máximo central.

2. Un patrón de difracción se forma sobre una pantalla que se encuentra a 120 cm de una rendija de 0,4 mm de ancho, iluminada con luz monocromática de 546,1 nm de longitud de onda. Calcule la fracción de intensidad I/I_0 en un punto de la pantalla que se encuentra a 4,1 mm del centro del máximo principal.

3. El ángulo límite de resolución del ojo humano para una longitud de onda de 500 nm tiene el valor $\theta_{mín}$ = 2,3 x 10^{-4} rad. Para la situación mostrada en la figura, determine la máxima distancia L a la cual dos objetos puntuales cuya separación es de d = 1,0 cm, son distinguidos por la persona.



4. Encuentre el radio de la imagen de una estrella, que se forma en la retina del ojo, si el diámetro de la pupila en la noche es de 0,7 cm y la longitud del ojo es de 3,0 cm. Suponga que la longitud de onda de la luz de la estrella, en el ojo, es de 500 nm.

5. Una red de difracción de 3,0 cm de ancho y separación uniforme de 775 nm entre líneas, se ilumina en su totalidad con la luz proveniente de un tubo de descarga que contiene sodio.

Calcule la separación angular, en el espectro de primer orden, entre las dos longitudes de onda que forman el doblete de sodio (λ_1 = 589,0 nm y λ_2 = 589,6 nm).

6. Una red de difracción se emplea para resolver en el orden dos, las dos longitudes de onda que forman el doblete del sodio: 589,0 nm y 589,6 nm.

(a) Determine el mínimo número de líneas de la red de difracción.

(b) Calcule el ancho de la red de difracción si el doblete aparece a un ángulo de 15º.

7. Luz no polarizada pasa a través de dos placas de polaroid. El eje de la primera placa es vertical, y el de la segunda forma un ángulo de 30º respecto a la vertical

¿Qué fracción de intensidad de la luz incidente es trasmitida por el conjunto de placas?

8. Luz verticalmente polarizada pasa por tres filtros de polaroid acomodados uno a continuación del otro. Los ejes de transmisión de los filtros están en la siguiente secuencia de ángulos respecto a la vertical: 30º , 60º y 90º.

¿Qué fracción de la intensidad de la luz incidente es transmitida por el conjunto de filtros?

4. RELATIVIDAD ESPECIAL

CAPÍTULO 39 (CINEMÁTICA)

1. En el marco de referencia de un laboratorio, un observador se percata de que la segunda ley de Newton es válida.

   (a) Muestre que también es válida para un observador en un marco de referencia que se mueve con rapidez constante respecto al marco de referencia del laboratorio.

   (b) Muestre que no es válida para un observador en un marco de referencia que se mueve con aceleración constante respecto al marco de referencia del laboratorio.

2. Una bola es lanzada con una rapidez de 20[m/s] en el interior de un bus que se mueve sobre la vía con una rapidez de 40[m/s].

   Determine la rapidez de la bola respecto al suelo cuando es lanzada :

   (a) hacia adelante, (b) hacia atrás, (c) hacia afuera por la puerta lateral.

3. ¿Con qué rapidez constante debe moverse un reloj para que funcione a la mitad del ritmo de un reloj en reposo?

4. Determine la rapidez de una regla cuyo largo en reposo es de 1,00[m], si su longitud en movimiento es de 0,60[m].

5. Los rayos cósmicos de alta energía son protones cuyo factor gama es de orden 10^{10}, y atraviesan nuestra galaxia, la Vía Láctea, que tiene un diámetro de 10^5 años luz (ambos valores medidos por un observador en reposo en la Tierra).

   (a) Determine el diámetro de nuestra galaxia, en años luz y en kilómetros, desde el punto de vista de uno de esos protones.

   (b) ¿Cuánto tiempo demora uno de éstos protones en atravesar la Vía Láctea, medido desde el marco de referencia del protón?

6. Un observador ve dos partículas que se mueven en direcciones opuestas, cada una con una rapidez de $0.9c$. ¿Cuál es la rapidez de una partícula respecto a la otra?

CAPÍTULO 39 (DINÁMICA)

1. Un cubo de acero tiene un volumen de 1[cm^3] y una masa de 8[gr] cuando está en reposo sobre la Tierra. Si al cubo se le proporciona una rapidez de $0{,}9c$ ¿cuál es su densidad, medida por un observador en reposo en la Tierra?

2. Obtenga la magnitud del momentum lineal de un protón que tiene una energía total de dos veces su energía en reposo, y exprese el resultado en la unidad MeV/c.

3. Calcule la energía cinética de los protones que constituyen los rayos cósmicos de alta energía, para los cuales el factor gama es de orden 10^{10}.

4. El acelerador lineal de Stanford tiene una longitud de 3,0[km] y en él es posible acelerar electrones hasta que alcancen una energía de 20 GeV. Para un electrón con esa energía calcule,
   (a) su factor γ.
   (b) su rapidez.
   (c) la longitud del acelerador en el marco de referencia del electrón.

5. Un isótopo de Radio decae emitiendo una partícula α al transformarse en un isótopo de Radón de acuerdo con la siguiente reacción: ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Las masas de los átomos anteriores, en unidades de masa atómica unificada son 226,0254 u ; 222,0175 u y 4,0026 u respectivamente. ¿Cuánta energía se libera en el decaimiento?

6. La potencia emitida por el Sol es de 3.8 x 10^{26} W.
   (a) ¿Cuánta masa se convierte en energía en el Sol en un segundo?
   (b) ¿Cuánta masa entra y sale del proceso, en un segundo?

7. Un rayo gama (o fotón de alta energía) puede producir un par electrón-antielectrón cuando entra en el campo eléctrico de un núcleo pesado ($\gamma \rightarrow e^+ + e^-$). ¿Cuál es la energía mínima que debe tener el rayo γ para producir el par? (Recuerde que las masas del electrón y del antielectrón son iguales).

5. EFECTOS CUÁNTICOS

CAPÍTULO 40

1. Calcule la energía (en eV) y la longitud de onda para fotones cuyas frecuencias son :

   (a) $6{,}2 \times 10^{14}$ Hz (b) 3,1 GHz (c) 46 MHz

2. Suponga que la temperatura del cuerpo humano es de 37 ºC y utilice la ley de desplazamiento de Wien para calcular la frecuencia y longitud de onda de la radiación que emite una persona. ¿En qué parte del espectro electromagnético cae esta longitud de onda?

3. En una fotocelda la corriente electrónica se anula para un potencial de frenado de 0,54 V cuando se expone a radiación de 750 nm de longitud de onda. Encuentre la función de trabajo para el material de la fotocelda.

4. Cuando se utiliza luz verde emitida por una lámpara de mercurio (λ = 546,1 nm) para producir el efecto fotoeléctrico en un metal, un potencial retardador de 1,70 V reduce a cero la corriente de electrones. ¿Qué potencial de frenado se observará cuando se utiliza luz amarilla emitida por un tubo de descarga de helio (λ = 587,5 nm)?

5. Rayos X con longitud de onda 0,200 nm se dispersan en un bloque de carbón. Si la radiación dispersada se detecta a 60º respecto al haz incidente, encuentre la energía cinética que adquieren los electrones en retroceso.

6. Un fotón de rayos X con longitud de onda 0,030 nm es dispersado por un electrón libre. Si el cambio de longitud de onda del rayo X es igual a la longitud de onda de Compton del electrón, determine la energía cinética y la velocidad del electrón después de la interacción.

7. Un fotón de 0,0016 nm se dispersa en un electrón libre. ¿Para qué ángulo de dispersión (del fotón) el electrón de retroceso y el fotón dispersado tendrán la misma energía cinética?

8. Considere un gran número de átomos de hidrógeno, con todos los electrones inicialmente en el estado n = 4 correspondiente al modelo de Bohr.

   (a) ¿Cuántas longitudes de onda se podrán observar en el espectro de emisión ?

   (b) ¿Cuál es la longitud de onda más grande que se podrá observar? ¿A qué serie pertenece?

9. Determine los niveles de energía y construya un diagrama de niveles para el ion He^+ .
¿Cuál es la energía de ionización del He^+ ?

10. De acuerdo al modelo de Bohr, calcule la energía potencial y la energía cinética de un electrón en el primer estado excitado (n=2) del átomo de hidrógeno.

6. ONDAS CUÁNTICAS

CAPÍTULO 41

1. Calcule la longitud de onda De Broglie para un electrón cuya energía cinética es:

   (a) 50 eV (b) 50 keV

2. Calcule la longitud de onda De Broglie para una persona de 75 kg que corre a 5,0 m/s.

3. La habilidad para "ver" o poder de resolución de la radiación, está determinado por su longitud de onda. Si el tamaño de un átomo es del orden de 0,1 nm, ¿cuán rápido debe viajar un electrón para que tenga una longitud de onda lo suficientemente pequeña para que "vea" a un átomo?

4. Muestre que la longitud de onda De Broglie para un electrón acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial V está dada por $\lambda = 1{,}226/\sqrt{V}$ nm, donde V está en Volts.

5. En un microscopio electrónico se aceleran electrones a través de un potencial de 40 kV. Teóricamente, ¿cuál es la mínima distancia que puede ser observada?

6. Para que un electrón esté confinado a un núcleo atómico, su longitud de onda De Broglie debe ser menor que 10^{-14} m.
   (a) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón confinado a una región de ese tamaño?
   (b) ¿Esperaría encontrar al electrón en el núcleo? Explique.

7. Un haz de neutrones con una rapidez de 0,4 m/s pasan a través de dos ranuras muy angostas cuya separación es de 1 mm. Un arreglo de detectores se coloca a 10 m de la ranura.
   (a) ¿Cuál es la longitud de onda De Broglie de los neutrones?
   (b) ¿A qué distancia del eje de simetría se encuentra el primer punto de intensidad cero detectado por los sensores?
   (c) ¿Se puede ver a través de qué ranura pasan los neutrones? Explique.

8. Para un protón cuya energía cinética es de 1 MeV, se mide su cantidad de movimiento lineal con una incertidumbre de 5% ¿cuál es la mínima incertidumbre en su posición?

9. Un niño en una escalera deja caer esferitas sobre una mancha que se encuentra en el piso.

   (a) Usando el principio de incertidumbre, muestre que la distancia por la que falla debe ser al menos,

$$\Delta x = \sqrt{\frac{h}{2\pi m}}\left(\frac{H}{2g}\right)^{1/4},$$

   donde H es la distancia vertical que cae cada esferita y m es la masa de cada esferita.

   (b) Si H=2,0 [m] y m=0,50 [g], calcule Δx.

10. Un electrón tiene la siguiente función de onda

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Encuentre la probabilidad de encontrar al electrón en el intervalo entre $x = 0$ y $x = L/4$.

11. (a) Utilice el principio de incertidumbre para estimar la incertidumbre en la cantidad de movimiento de una partícula que se encuentra en una pozo infinito unidimensional.

    (b) Estime la energía del estado base y compare el resultado con la energía real del estado base.

12. Un electrón está contenido en una caja unidimensional de ancho 0,1 nm.

    (a) Dibuje el diagrama de niveles de energía del electrón hasta el nivel con $n = 4$.

    (b) Determine la longitud de onda para cada uno de los fotones que pueden ser emitidos por el electrón al efectuar transiciones que eventualmente lo lleven desde el estado con $n = 4$ hasta el estado con $n = 1$.

13. En una región del espacio, una partícula con energía cero tiene una función de onda dada por :

$$\psi(x) = Axe^{-x^2/L^2}$$

    (a) Obtenga la energía potencial U(x) correspondiente a la partícula.

    (b) Dibuje cualitativamente la función U(x).

7. ÁTOMOS Y TRANSICIONES

CAPÍTULO 42

1. (a) Determine los números cuánticos ℓ y m_ℓ para el ion He^+ en los estados con $n = 3$.

   (b) ¿Cuál es la energía de este nivel?

2 La función de onda para un electrón en un estado 2*p* en el átomo de hidrógeno es

$$\psi_{2p} = \frac{1}{\sqrt{3}\ (2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$$

¿ A qué distancia del núcleo atómico es más probable hallar el electrón cuando ocupa un estado 2*p* ?

3. ¿Cuántos conjuntos de números cuánticos son posibles para un electrón en un estado con:

(a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$ y (e) $n = 5$?

Verifique que sus resultados estén en concordancia con la regla general que establece que el número de conjuntos de números cuánticos es igual a $2n^2$.

4. Considere un electrón para el cual $n = 4$, $\ell = 3$ y $m_\ell = 3$. Calcule el valor numérico de :

   (a) el momento angular orbital, y

   (b) la componente *z* del momento angular orbital.

5. Al observar la tabla 42.4 (configuración electrónica de los elementos) en el sentido del número atómico ascendente, se ve que los electrones llenan las subcapas de tal forma que aquellas con los valores más bajos de $n + \ell$ se llenan primero. Si dos subcapas tienen el mismo valor $n + \ell$, aquella con el menor valor de n se llena primero. Usando estas dos reglas,

   (a) escriba el orden en el cual se llenan las subcapas para $n = 7$.

   (b) prediga la valencia química para los elementos con número atómico 15, 47 y 86. Compárelas con las valencias conocidas.

6. Si se desea producir rayos X con longitud de onda de 0,10 nm, ¿cuál es el voltaje mínimo que se debe usar para acelerar los electrones?

7. (a) ¿Cuál es la mínima longitud de onda emitida por un tubo de rayos X que opera a un voltaje de 50 kV?

   (b) La longitud de onda de una línea característica de rayos X en un blanco de molibdeno es 0,0709 nm. (Esta línea es aproximadamente 10.000 veces más intensa que el espectro continuo). ¿Cuál es el mínimo voltaje acelerador capaz de producir esta línea?

   (c) Muestre que para un fotón la relación entre la longitud de onda λ en nm y la energía E en eV está dada por $\lambda = 1240 / E$.

8. La familiar luz amarilla de una lámpara de la calle que contiene vapor de sodio, resulta de la transición $3p \rightarrow 3s$ en el átomo de sodio (Na).

   Evalúe la longitud de onda, dado que la diferencia de energía es : $E_{3p} - E_{3S} = 2{,}1$ eV.

9. Un láser de rubí produce un pulso de 10 ns de duración y potencia media de 1,0 MW. Si todos los fotones tienen una longitud de onda de 694,3 nm, ¿cuántos fotones contiene el pulso?

8. MOLÉCULAS

CAPÍTULO 43

1. La separación entre los iones K^+ y Cl^- en una molécula de KCl es de 2,8 x 10^{-10} m. Asumiendo que los dos iones actúan como cargas puntuales,

(a) determine la fuerza de atracción entre ellos,

(b) determine su energía potencial de atracción, en eV.

2. Una descripción razonable de la energía potencial entre dos átomos en una molécula está dada por el *potencial de Lenard-Jones*

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

donde A y B son constantes.

(a) En términos de A y B, obtenga el valor r_0 para el cual la energía U posee un mínimo.

(b) En términos de A y B, obtenga la energía E requerida para romper una molécula diatómica.

(c) Evalúe r_0 en metros , y E en electrónvolts para la molécula de H_2.

En sus cálculos use $A = 0{,}124 \times 10^{-120}$ eV · m^{12} y $B = 1{,}488 \times 10^{-60}$ eV · m^6.

3. La línea de absorción correspondiente a una transición rotacional desde un estado con J=5 hasta otro con J=6, en una molécula diatómica, ocurre a una longitud de onda de 1,35 cm (en la fase de vapor).

(a) Calcule la longitud de onda y la frecuencia correspondientes a la transición desde J = 0 hasta J = 1.

(b) Calcule el momento de inercia de la molécula.

4. La distancia entre los protones en la molécula de H_2 es $r = 0{,}75 \times 10^{-10}$ m.

(a) Calcule la energía del primer estado rotacional (J = 1).

(b) Calcule la longitud de onda de la radiación emitida en la transición desde un estado con J = 1 hasta otro estado con J = 0.

5. El espectro rotacional de la molécula de HCl contiene las siguientes longitudes de onda: 0,0604mm, 0,0690 mm, 0,0804 mm, 0,0964 mm, 0,1204 mm. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula de HCl?

9. FÍSICA NUCLEAR

CAPÍTULO 45 (EL NÚCLEO, RADIOACTIVIDAD, REACCIONES)

1. El núcleo comprimido de una estrella formada en el seno de la explosión de una supernova puede contener material nuclear puro, y se llama un pulsar o estrella de neutrones.

   Calcule la masa de 10 cm^3 de un pulsar.

2. Considere el átomo de hidrógeno como una esfera de radio igual al radio de Bohr (a_0) y calcule el valor aproximado de la razón entre la densidad nuclear y la densidad atómica.

3. Calcule el diámetro de una esfera de material nuclear que tendría una masa igual a la de la Tierra. En los cálculos considere un radio terrestre de $6{,}37 \times 10^6$ m, una densidad terrestre de $5{,}52 \times 10^3$ kg/m^3 y como densidad de la materia nuclear el valor $2{,}3 \times 10^{17}$ kg/m^3 .

4. Considere una dispersión frontal de una partícula con un núcleo de oro.
   (a) ¿Que energía cinética permitiría que una partícula alfa se acercara a una distancia de 10 fm del núcleo?
   (b) ¿Qué energía cinética necesitaría un protón para aproximarse hasta la distancia de 10 fm del núcleo?
   (c) Si la partícula alfa y el protón son acelerados desde el reposo a través de las diferencias de potencial V_a y V_p respectivamente, calcule la razón V_p / V_a .

5. Utilizando la masa atómica de ${}^{56}_{26}Fe$ cuyo valor es 55,934939 u, calcule su energía de ligadura. Después calcule la energía de ligadura por nucleón y compare el resultado con el valor 8,5 MeV que se obtiene por lectura en la figura correspondiente a la energía de ligadura por partícula.

6. (a) Estime la energía potencial electrostática debida a la repulsión de Coulomb entre dos protones cuya separación en un núcleo es de 3,0 fm.
   (b) Compare este valor con la energía en reposo de un electrón.

7. Las mediciones en una muestra de un isótopo radioactivo muestran que su actividad disminuye en un factor 5 durante un intervalo de 2 horas.

   Determine la constante de decaimiento y la vida media del isótopo radiactivo.

8. Calcule el número de átomos radioactivos contenidos en una muestra que tiene una actividad de 0,2 μCi y una vida media de 8,1 días.

9. Identifique el nucléido faltante (X) en cada una de las siguientes reacciones.

(a) $X \rightarrow {}^{65}_{28}\mathrm{Ni} + \gamma$

(b) ${}^{215}_{84}Po \rightarrow X + \alpha$

(c) $X \rightarrow {}^{55}_{26}\mathrm{Fe} + \beta^{+} + \nu$

(d) ${}^{109}_{48}\mathrm{Cd} + X \rightarrow {}^{109}_{47}\mathrm{Ag} + \nu$

(e) ${}^{14}\mathrm{N}(\alpha,\mathrm{X})\,{}^{17}\mathrm{O}$

10. Halle la energía liberada en el decaimiento alfa de ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ de acuerdo a la reacción :

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

La masa de los nucléidos involucrados en el proceso son:

$$M\left({}^{238}_{92}\mathrm{U}\right) = 238{,}050786 \text{ u} \qquad M\left({}^{234}_{90}\mathrm{Th}\right) = 234{,}043583 \text{ u} \qquad M\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) = 4{,}002603 \text{ u}$$

11. Calcule la energía cinética de una partícula alfa emitida por el nucléido ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ en el proceso de decaimiento descrito en la pregunta anterior. Desprecie la velocidad de retroceso del núcleo hijo, ${}^{234}_{90}\mathrm{Th}$.

12. Hay unas cuantas reacciones nucleares en las cuales la partícula emitida y el núcleo producto son idénticos. Un ejemplo de esto es la reacción

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li}\left(p,\alpha\right){}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Calcule el valor de Q para esta reacción.

CAPÍTULO 46 (FISIÓN Y FUSIÓN)

1. El estroncio 90 es un producto de la fisión de ^{235}U, particularmente peligroso debido a que es radioactivo y capaz de sustituir el calcio de los huesos. ¿Qué otros productos directos de la fisión lo acompañarán en la fisión del ^{235}U inducida por neutrones? (*Nota*: esta reacción puede liberar 2, 3 ó 4 neutrones).

2. Calcule la energía liberada en la siguiente reacción de fisión:

$$ {}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\left({}^{1}_{0}n\right) $$

Las masas de los nucléidos involucrados son:

$$ M\left({}^{1}_{0}n\right) = 1{,}008665\ u\ ,\ M\left({}^{235}_{92}U\right) = 235{,}043915\ u\ ,\ M\left({}^{141}_{56}Ba\right) = 140{,}9139\ u\ ,\ M\left({}^{92}_{36}Kr\right) = 91{,}8973\ u $$

¿Qué fracción de la energía inicial del sistema es liberada en el proceso?

3. (a) ¿Cuántos kilogramos de ^{235}U se deben fisionar durante un año de operaciones de una planta de energía eléctrica que produce una potencia de salida de 1,0 GW? Asuma que la planta tiene una eficiencia total del 30%.

   (b) Si la densidad del ^{235}U es 18,7 g/cm^3 , calcule el radio de una esfera formada por la masa de Uranio calculada en la parte (a).

4. Dos núcleos de números atómicos Z_1 y Z_2 se aproximan entre sí con energía cinética inicial K medida respecto a un sistema de referencia en el centro de masas.

   (a) En términos de Z_1 y Z_2 , estime K para que los núcleos se fusionen, suponiendo que para ello deben acercarse hasta que la distancia entre ellos sea al menos de 10^{-14} m.

   (b) Estime la energía cinética mínima de la fusión para las reacciones D-D y D-T.

II. DATOS Y RELACIONES

1. FÍSICA CLÁSICA

CONSTANTES

$c \simeq 3 \cdot 10^{8} [m/s]$; $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19} [C]$;

$k_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^{9} [N \cdot m^2 / C^2]$; $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} [N/A^2]$

REPASO DE MECÁNICA Y ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO

$\vec{F}_{neta} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{p} = m\vec{v}$; $a_c = \dfrac{v^2}{R}$

$E = K + U$; $K = \dfrac{1}{2} m v^2$; $U = \begin{cases} mgh \\ \frac{1}{2} k x^2 \\ q \cdot \Delta V \end{cases}$

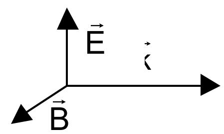
$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$

ECUACIONES DE MAXWELL

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\varepsilon_0$; $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{d}{dt}\phi_m$; $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{d}{dt}\phi_e$

ONDA ELECTROMAGNÉTICA



$\vec{S} = \vec{E} x \vec{B} / \mu_0$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \bullet \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad B_0 = E_0 / v \quad ; \quad n = \frac{c}{v}$$

$$\omega = kv \leftrightarrow v = \lambda \bullet f \quad ; \quad \omega = 2\pi f \,,\; k = 2\pi / \lambda$$

$$S_{prom} = I = v \bullet u = \frac{1}{2} v \varepsilon E_0^2 \quad ; \quad S_{prom} = \mathcal{P} / A \qquad p = U / c$$

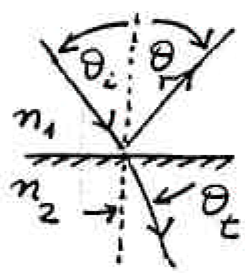
ÓPTICA GEOMÉTRICA

$$n = c / v$$

$$n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2$$

$$\theta_i = \theta_r$$

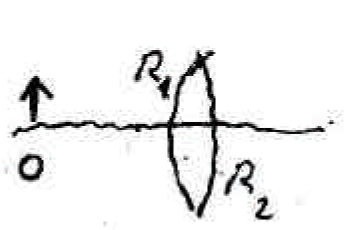
$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t$$



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad ;$$

$$|f| = R/2 : \text{espejos}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) : \text{ lentes}$$



ÓPTICA ONDULATORIA

Dos fuentes en fase: $I = I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$; $\qquad \phi = kd\,\mathrm{sen}\,\theta$;

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta = \begin{cases} m\lambda \ : \ \text{máximos} \\ \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \ : \ \text{mínimos} \end{cases}$$

Una rendija : $I = I_0\left(\frac{\mathrm{sen}\,\beta/2}{\beta/2}\right)^2$ $\qquad \beta = ka\,\mathrm{sen}\,\theta$; $\quad a\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$:mínimos.

Red de difracción: $\qquad d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$:máximos.

2. FÍSICA MODERNA

CONSTANTES

$h = 6{,}6 \bullet 10^{-34}\,[J \bullet s] = 4{,}1 \bullet 10^{-15}\,[eV \bullet s]$

$\hbar = h/2\pi$

$N_A = 6{,}0 \bullet 10^{23}\,[mol^{-1}]$

$1[eV] = 1{,}6 \bullet 10^{-19}\,[J]$

$1[u] = 1{,}66 \bullet 10^{-27}\,[kg] = 931{,}5\left[MeV/c^2\right]$

$1[fm] = 10^{-15}\,[m]$

RELATIVIDAD ESPECIAL

$x' = \gamma(x - vt)$; $y' = y$;

$z' = z$; $t' = \gamma\left(t - vx/c^2\right)$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \bullet v/c^2} \quad ; \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - u_x \bullet v/c^2\right)} ; \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - u_x \bullet v/c^2\right)}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad ; \quad \tau = \gamma \tau_0$$

Dinámica de una partícula:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad ; \quad p = \gamma m u \quad ; \quad E_0 = mc^2 \quad ; \quad E = \gamma m c^2 = E_0 + K \quad ; \quad E^2 = E_0^2 + (pc)^2$$

CUÁNTICA

$$\lambda_B = \frac{h}{p} \quad ; \quad E = hf \quad ; \quad hf = K_{máx.} + \phi_0 \quad ; \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda \quad ; \quad \Delta x \bullet \Delta p_x \geq h \quad ; \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right]\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

1 – Dimensión :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi \quad ; \quad \Psi(x,t) = \psi(x)\bullet e^{-iEt/\hbar}$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \Rightarrow \psi = e^{\pm ikx} \quad ; \quad \psi'' + \alpha^2\psi = 0 \Rightarrow \psi = e^{\pm\alpha x}$$

POZO INFINITO

$$U(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < L$$

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}\,kx \quad ; \quad k_n = n\pi/L \quad ; \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\bullet n^2$$

ÁTOMOS HIDROGENOIDE

$$E_n = -13{,}6[\mathrm{eV}] \bullet \frac{Z^2}{n^2} \quad ; \quad L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \quad , \quad \Delta\ell = \pm 1 \quad ; \quad L_z = m_\ell\hbar \quad , \quad \Delta m_\ell = 0, \pm 1$$

CONFIGURACIÓN ELECTRÓNICA

$$\begin{array}{llll}
1s\swarrow & & & \\
2s\swarrow & 2p\swarrow & & \\
3s\swarrow & 3p\swarrow & 3d\swarrow & \\
4s\swarrow & 4p\swarrow & 4d\swarrow & 4f \\
5s\swarrow & \cdots & \cdots & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

MOLÉCULAS

$$E = E_{rot.} + E_{vib.}$$

$$E_{rot.} = \frac{\hbar}{2I} J(J+1) \quad ; \; \Delta J = \pm 1 \quad , \quad E_{vib.} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) h f \quad ; \; \Delta \nu = \pm 1$$

NUCLEAR

$${}^{A}_{Z}X_{N} \quad , \; A = Z + N \quad ; \quad R = 1{,}2 \bullet A^{1/3} [fm]$$

DECAIMIENTO

$$N(t) = N_0 \bullet e^{-\lambda t} \quad ; \quad A = \lambda N$$

$$N(t) = N_0 \bullet 2^{-t/T} \quad ; \quad \lambda T = ln(2)$$

$$\alpha : {}^{4}_{2}He \; , \quad \beta^{\pm} : e^{\pm} + \nu^{\pm}$$

ENERGÍA DE LIGAZÓN (E_b)

$$M\left({}^{A}_{Z}X\right) = \left(Z \bullet m_p + N \bullet m_n\right) - E_b / c^2$$

ENERGÍA EN REPOSO $[\mathrm{MeV}]$

- Electrón : 0,511
- Neutrón : 939,57
- Tritión ${}^{3}_{1}H$: 2808,94
- Protón ${}^{1}_{1}H$: 938,28
- Deuterón ${}^{2}_{1}H$: 1875,63
- ${}^{4}_{2}He$: 3727,40

III. SOLUCIONES

1. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

CAPÍTULO 34

1. (a) $B_0 = 5{,}4 \bullet 10^{-7}\,[\mathrm{T}]$

$v = 0{,}8c \qquad \Rightarrow E_0 = vB_0 = 0{,}8 \bullet 3 \bullet 10^8 \bullet 5{,}4 \bullet 10^{-7} = 1{,}3 \bullet 10^2\,[\mathrm{V/m}]$

(b) $I = S_{prom} = \frac{1}{2} v \varepsilon E_0^2$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} \;;\; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \qquad \Rightarrow \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{\varepsilon \mu_0}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{c}{v}\right)^2$$

Entonces,

$$I = \frac{1}{2} v \bullet \varepsilon_0 \bullet \left(\frac{c}{v}\right)^2 E_0^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{c}{v}\right) \varepsilon_0 E_0^2$$

$$I = \frac{1}{2} 3 \bullet 10^8 \bullet \frac{1}{0{,}8} 8{,}9 \bullet 10^{12} \bullet \left(1{,}3 \bullet 10^2\right)^2 \approx 28\,[\mathrm{W/m^2}]$$

(c) $\lambda = v / f = 0{,}8 \bullet 3 \bullet 10^8 = 2{,}4 \bullet 10^8\,[\mathrm{m}]$

---

2. (a) $v^2 = \frac{1}{K \mu_0 \varepsilon_0} \;;\; c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \qquad \Rightarrow v^2 = \frac{c^2}{K} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{K}} \;;$

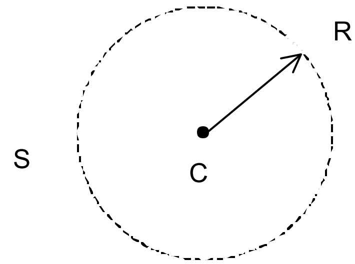
$$v = \frac{3 \bullet 10^8}{\sqrt{1{,}78}} = 2{,}2 \bullet 10^8\,[\mathrm{m/s}]$$

(b) Índice de refracción del medio : $n = \frac{c}{v} \Rightarrow n = \sqrt{K} \;;\; n = 1{,}33$

---

3. Potencia = Intensidad • Área

$$P = I \cdot A$$



La energía electromagnética que se genera en C es emitida en todas direcciones (isotrópicamente) y un instante después atraviesa la superficie S. En promedio, la energía que se genera y la que sale atravesando la superficie S, en un lapso determinado, son iguales.

$$I = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \quad ; \quad P = I \cdot 4\pi R^2 \quad \Rightarrow P = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \cdot 4\pi R^2 .$$

Dato: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 [N \cdot m^2 / C^2]$; $P = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^8 \frac{55^2 \cdot 20^2}{9 \cdot 10^9} = 20[kW]$.

---

4. (a) $P = 5{,}0 \cdot 10^{-3}[W]$; $A = 4{,}0[mm^2]$; $\ell = 1{,}0[m]$

Haciendo un modelo en que dentro del haz se considere una onda plana y fuera de él se considere que no existe onda, tenemos:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{2P}{c\varepsilon_0 A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi P}{c \cdot 4\pi\varepsilon_0 A}} .$$

Numéricamente, $E_0 = \left(\frac{8\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-6}} \right)^{1/2} = 9{,}7 \cdot 10^2 [V/m]$.

(b) Energía = densidad de energía x volumen = $w \cdot A \cdot \ell$

$$\varepsilon = w \cdot A \cdot \ell = \frac{\overbrace{w \cdot c}^{I} \cdot A \cdot \ell}{c} = \frac{\overbrace{I \cdot A}^{P} \cdot \ell}{c} = \frac{P \cdot \ell}{c} = P \cdot \tau$$

es decir, Energía = potencia x tiempo (en que la onda avanza la longitud ℓ)

$$\varepsilon = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}[W] \cdot 1{,}0[m]}{3{,}0 \cdot 10^8 [m/s]} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-11} [J] .$$

---

5. $\lambda = c / f = 3 \cdot 10^8 / 20 \cdot 10^6 = 300/20 = 15[m]$.

La antena de media onda es de longitud : $\frac{1}{2}\lambda = 7{,}5[m]$.

---

6. (a) Banda AM : desde 540[kHz] hasta 1600[kHz] ; esto significa longitudes de onda desde

$$\lambda_1 = \frac{3 \bullet 10^8}{1,6 \bullet 10^6} = 187,5[\text{m}] \quad \text{hasta} \quad \lambda_2 = \frac{3 \bullet 10^8}{5,4 \bullet 10^5} = 555,6[\text{m}]\,.$$

Conviene recordar que el orden de magnitud para la longitud de onda en la banda AM es 10^2[m].

(b) Banda FM : desde 88[MHz] hasta 108[MHz]. En términos de longitud de onda, esto es desde

$$\lambda_1 = \frac{3 \bullet 10^8}{88 \bullet 10^6} = 3,4[\text{m}] \quad \text{hasta} \quad \lambda_2 = \frac{3 \bullet 10^8}{108 \bullet 10^6} = 2,8[\text{m}]\,,$$

es decir, la longitud de onda en la banda FM es de orden de magnitud 10^0[m] .

---

7. $f = 20[\text{GHZ}] \quad \Rightarrow \quad \lambda = c/f = 3 \bullet 10^8 / 20 \bullet 10^9 [\text{m}] = 1,5[\text{cm}]$

$\tau = 1,0[\text{ns}]$

$\overline{P} = 25[\text{kW}] \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \overline{P} \bullet \tau = 25 \bullet 10^3 \bullet 1,0 \bullet 10^{-9} = 2,5 \bullet 10^{-5}[\text{J}]$

$R = 6[\text{m}]$

También, $\varepsilon = \overline{w} \bullet A \bullet \overbrace{\ell}^{c \bullet \tau} = \overline{w} \bullet A \bullet c \bullet \tau$, donde ℓ es la periodicidad espacial de los pulsos.

Luego;

$$\overline{w} = \frac{\varepsilon}{A \bullet c \bullet \tau} = \frac{2,5 \bullet 10^{-5}}{\pi \bullet 6^2 \bullet 3 \bullet 10^8 \bullet 1,0 \bullet 10^{-9}} = 7,4 \bullet 10^{-7}[\text{J}/\text{m}^3]\,.$$

---

2. ÓPTICA GEOMÉTRICA

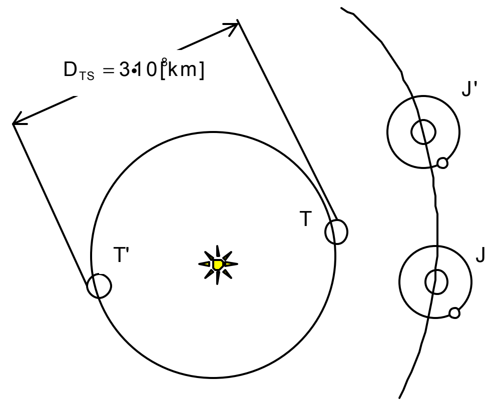
CAPÍTULO 35

1. $R_{TS} = 1{,}5 \cdot 10^8 [km] \Rightarrow D_{TS} = 3 \cdot 10^8 [km]$

$\Delta t = 22[min] \triangleq 1{,}32 \approx 10^3 [s]$

$$c = \frac{D_{TS}}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 10^8 [km]}{1{,}32 \cdot 10^3 [s]} \approx \frac{3 \cdot 10^8 [km]}{10^3 [s]}$$

$c \approx 3 \cdot 10^5 [km/s]$.

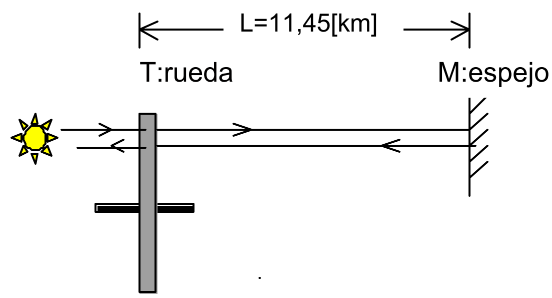


---

2. 720 muescas = N ; $c = 2{,}998 \cdot 10^8 [m/s]$

Tiempo empleado por la luz en viaje de ida y regreso $T \to M \to T$:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{22{,}9[km]}{2{,}99 \cdot 10^5 [km/s]} = 7{,}66 \cdot 10^{-5} [s]$$



Tiempo empleado por la rueda T para obstaculizar el paso del rayo de luz que regresa de M a T:

$$\Delta t' = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi / N}{\omega} = \frac{2\pi}{N\omega}$$

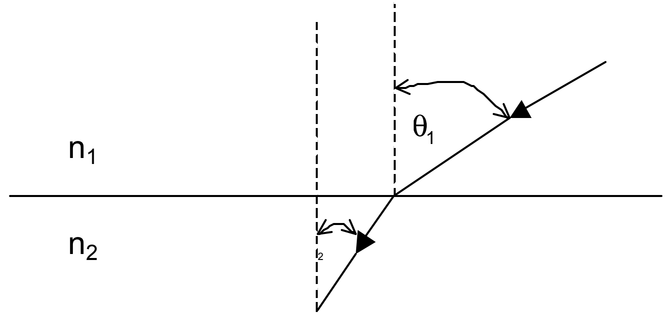
$$\Delta t = \Delta t' \Rightarrow \omega = \frac{\pi c}{NL} = \frac{2{,}99 \cdot 10^8 \cdot \pi}{720 \cdot 11{,}45 \cdot 10^3} \simeq 113{,}8 [rad/s] \simeq 1087 [rpm] .$$

---

3. $n_1 \approx 1$; $n_2 \approx 1{,}33 \approx {}^{3}\!/\!_{4}$; $\theta_2 = 45^\circ$

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$1 \bullet \operatorname{sen}\theta_1 = {}^{4}\!/\!_{3} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}44 \Rightarrow \theta_1 \approx 70^\circ$$

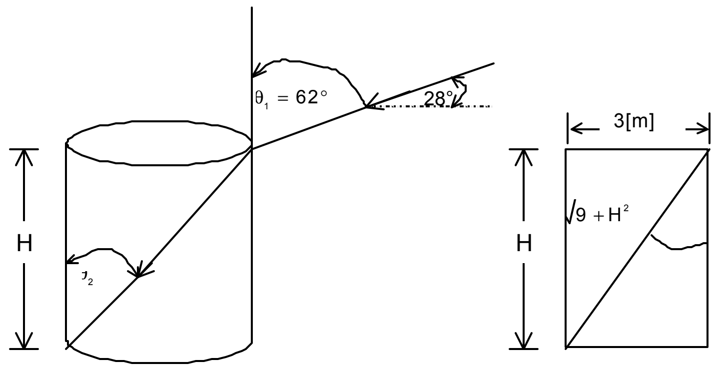
---

4. $n_1 = 1$;

$n_2 = {}^{4}\!/\!_{3}$;

$\theta_1 = 62^\circ$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{9 + H^2}}$$



$$\Rightarrow n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad \Rightarrow 1 \bullet \operatorname{sen}(62^\circ) = \frac{4}{3} \bullet \frac{3}{\sqrt{9 + H^2}} \Rightarrow H^2 = \frac{16}{(\operatorname{sen}62^\circ)} - 9$$

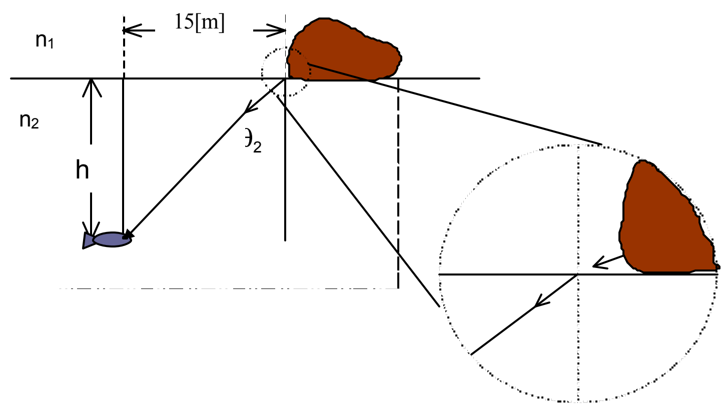
$$H = \sqrt{\frac{16}{(\operatorname{sen}62^\circ)^2} - 9} \approx 3{,}4[\text{m}] \ .$$

---

5. La profundidad máxima para ver la roca viene dada por el ángulo crítico $\theta_2 = \theta_c$

$n_1 = 1{,}0$

$n_2 = 1{,}33 \approx \frac{4}{3}$



$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \ \Rightarrow 1 = \frac{4}{3} \operatorname{sen}\theta_c$$

$$\operatorname{sen}\theta_c = 0{,}75 = \frac{3}{4} \ \Rightarrow \ \theta_c = 48{,}8^\circ$$

Si $\theta_2 = \theta_c$, se ve lo que está en la superficie del agua.

Entonces, $\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{3}{4} = \frac{15}{\sqrt{15^2 + h^2}} \ \Rightarrow \ h = 5\sqrt{7} \approx 13{,}2[\text{m}]$.

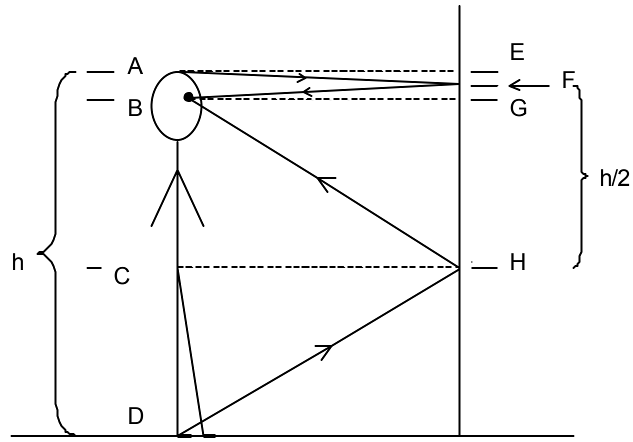
CAPÍTULO 36

1. $\measuredangle DHC = \measuredangle CHB \Rightarrow \overline{GH} = \overline{HI} = \dfrac{\overline{BD}}{2}$

Análogamente, $\overline{EF} = \overline{FG} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

Por lo tanto, un espejo de longitud $\overline{FH}$ cumple las condiciones donde:

$$\overline{FH} = \overline{FG} + \overline{GH} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AD}}{2}$$



Entonces, se requiere un espejo de altura igual a la mitad de la estatura de la persona.

---

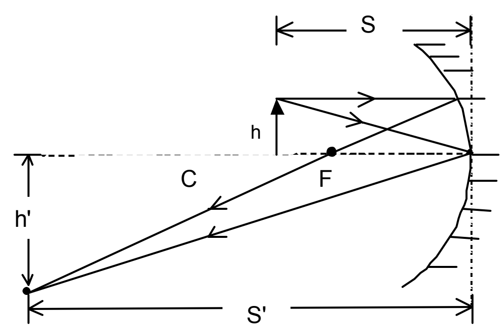
2. $S = 30[cm]$

a) $\dfrac{h'}{h} = -4 \;\Rightarrow\; h' = -4h$;

por semejanza de triángulos :

$$\frac{h'}{h} = -\frac{S'}{S} \;\Rightarrow\; S' = 120[cm]$$

b) $\dfrac{1}{S'} + \dfrac{1}{S'} = \dfrac{2}{R} \;\Rightarrow \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{2}{R} \;\Rightarrow R = 48[cm]$



---

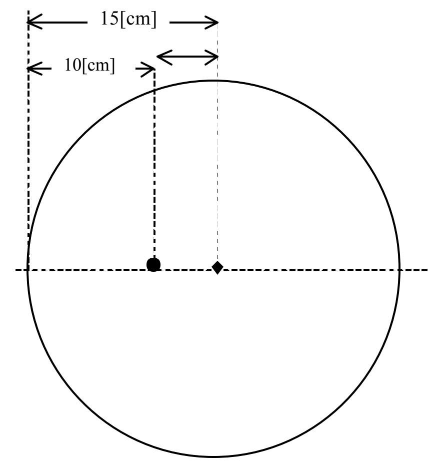
3. $n_1 = 1{,}50$; $R = -15[cm]$; $S = 10[cm]$

$$\frac{n_1}{S} + \frac{n_2}{S'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{1{,}5}{10} + \frac{1}{S'} = \frac{1-1{,}5}{-15} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow S' = -\frac{60}{7}[cm]$$

$$S' \approx -8{,}5[cm]$$

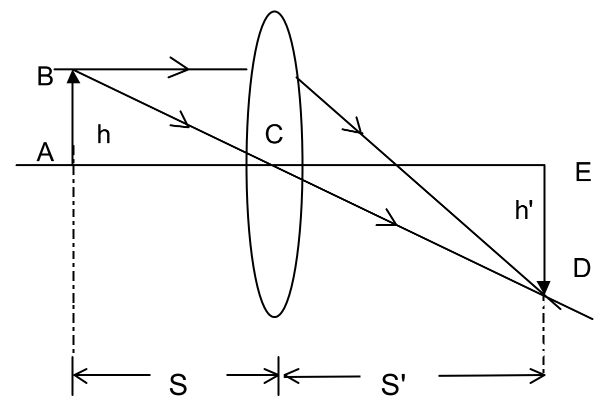


4. a) $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{S' \cdot S}{S' + S} = \frac{12 \cdot 50}{12+50} = \frac{600}{62}[cm]$

$\therefore f \simeq 9{,}67[cm]$

b) ΔABC semejante a ΔEDC

$\therefore \frac{\overline{AB}}{S} = \frac{\overline{ED}}{S'} \Rightarrow \frac{h}{S} = \frac{h'}{S'} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{S'}{S} = \frac{12}{50} = 0{,}24$

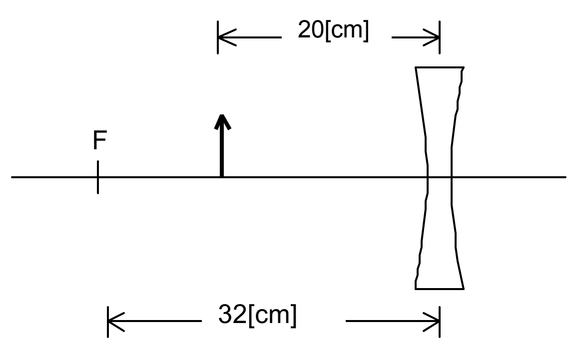


c) La imagen es invertida y real.

5. $S = 20[cm]$; $f = -32[cm]$

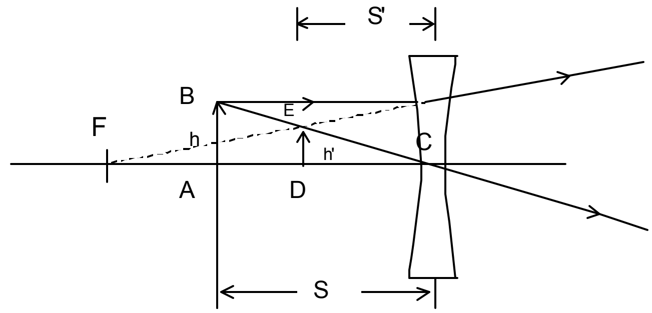
a) $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f} \Rightarrow S' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{S}} = \frac{1}{\frac{1}{-32} - \frac{1}{20}}$

$$S' = -\frac{160}{13}[cm] \approx -12{,}3[cm]$$



b) ΔABC semejante a $\Delta DEC \Rightarrow \dfrac{AB}{S} = \dfrac{ED}{S'} \Rightarrow \dfrac{h}{S} = \dfrac{h'}{S'}$

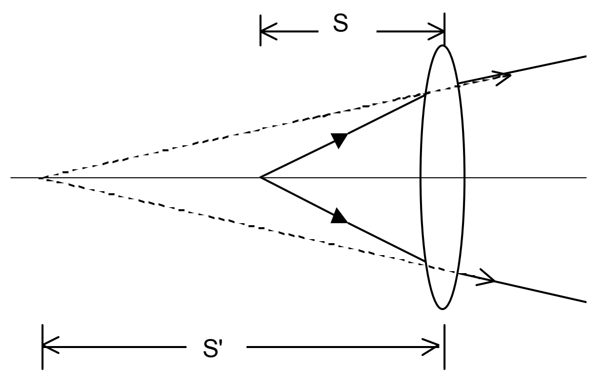
$$M = \frac{h'}{h} = \frac{S'}{S} = -\frac{160}{13 \bullet 20} = \frac{16}{26} \simeq 0,62$$



---

6. $S = 25[\text{cm}]$; $S' = -90[\text{cm}]$

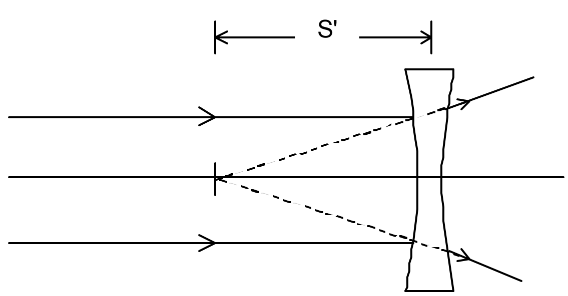
$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{S \bullet S'}{S + S'} = \frac{25 \bullet (-90)}{25 - 90} = 35,[\text{cm}]$$



---

7. $\dfrac{1}{S} + \dfrac{1}{S'} = \dfrac{1}{f}$ $\qquad S \to \infty$, $S' = -200[\text{cm}]$

$$\Rightarrow \frac{1}{\infty} - \frac{1}{200} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -200[\text{cm}]$$

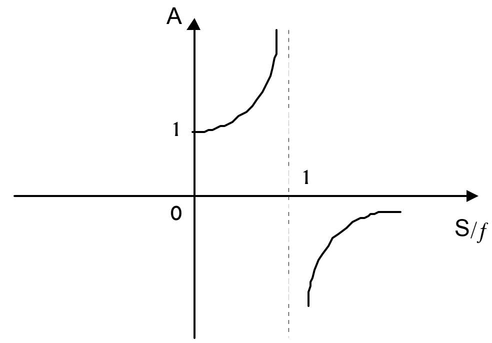


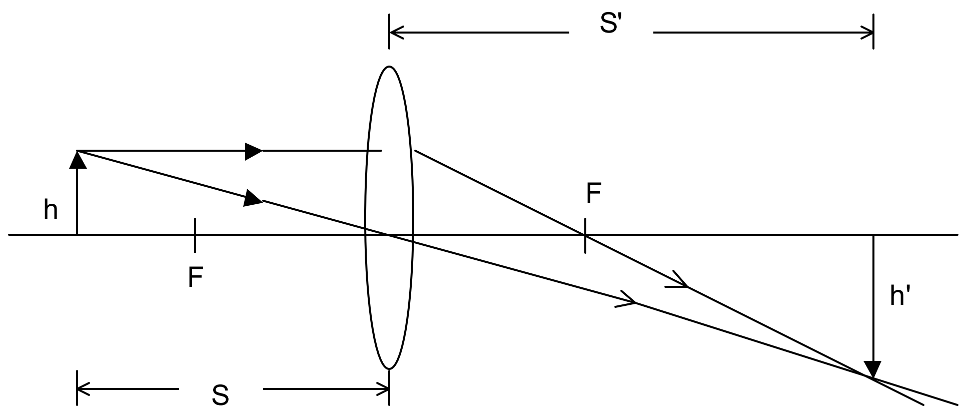
---

8. $\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{f}$; $A=-\frac{h'}{h}=\frac{-S'}{S}$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{S'/S}=\frac{S}{f}$ $\Rightarrow 1-\frac{1}{A}=\frac{S}{f}$ $\Rightarrow A(S)=\frac{1}{1-S/f}$

Para $S \to f$; $A \to \infty$





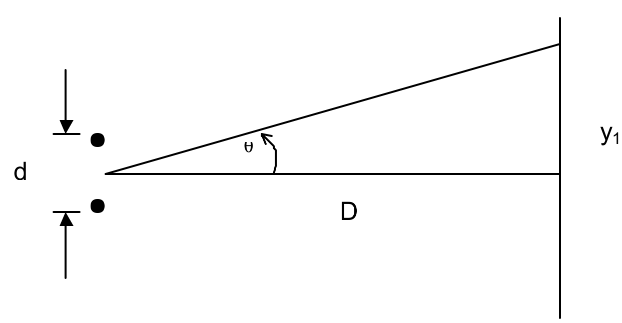
3. ÓPTICA ONDULATORIA

CAPÍTULO 37

1. a) $d=0{,}50[\mathrm{mm}]$

$D=3{,}3[\mathrm{m}]$

$y_1=3{,}4[\mathrm{mm}]$: máximo



Para máximos de interferencia de dos fuentes: $d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$, en este caso m=1.

Para $D \gg y_1$; $\mathrm{sen}\,\theta_1 \simeq \frac{y_1}{D}$. Luego; $\lambda = d\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \simeq d\frac{y_1}{D}$.

$$\lambda \simeq \frac{0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}4\cdot 10^{-3}}{3{,}3} = 5{,}15\cdot 10^{-7}[\mathrm{m}] = 515[\mathrm{nm}] \text{ : color azul-verde.}$$

b) Para mínimos: $d\,\text{sen}\,\theta = (2m-1)\bullet\frac{\lambda}{2}$; en este caso lo que se pide evaluar corresponde a m=1 y m=2. Los valores correspondientes a $d\,\text{sen}\,\theta$ son $\frac{1}{2}\lambda$ y $\frac{3}{2}\lambda$, mientras que para el primer máximo es λ. Entonces,

$$\text{sen}\theta_1 = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2d} \\ \dfrac{y_1}{D} \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{\lambda D}{2d} = \frac{5{,}15\bullet10^{-7}\bullet3{,}3}{2\bullet0{,}5\bullet10^{-3}} \simeq 1{,}7[\text{mm}]$$

Análogamente, $y_2 = \dfrac{3\lambda D}{2d} \simeq 5{,}1[\text{mm}]$

---

2. a) $y = 12[\text{mm}]$; $D = 119[\text{cm}]$; $d = 0{,}241[\text{mm}]$; $\lambda = 486[\text{nm}]$

Para franjas brillantes, $d\,\text{sen}\theta = m\lambda$. Además, $\text{sen}\theta \simeq \frac{y}{D} \Rightarrow y_m = \frac{D\bullet m\lambda}{d} = m\bullet2{,}4[\text{mm}]$.

Si $m = 5$, $y_5 = 12[\text{mm}]$. Luego, entre la franja brillante B y el máximo central (m=0) hay otras 4 franjas brillantes.

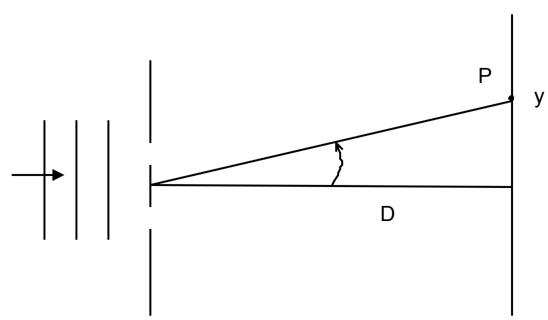
b) La diferencia de camino es $d\,\text{sen}\,\theta$, y en este caso corresponde a 5λ.

---

3. a) $D = 140[\text{cm}]$

$y = 8{,}0[\text{mm}]$

$I = 0{,}75\ I_{\text{máx.}}$



La intensidad depende de la diferencia de fase ϕ; según $I = I_{\text{máx.}}\cos^2(\phi/2)$,

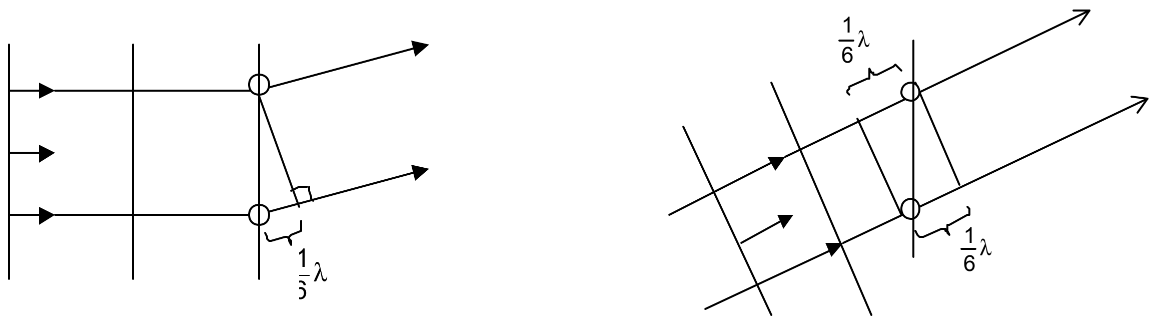
con $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\bullet d\,\text{sen}\theta$, y $\text{sen}\theta \simeq \frac{y}{D}$.

Entonces, en este caso: $\cos^2(\phi/2) = 0{,}75 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$

Luego, $\frac{2\pi}{\lambda}\bullet\frac{d\bullet y}{D} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{D}{6y} = 29,$

Note que hay otras soluciones. Acá se ha escogido la que surge de tomar el menor valor de ϕ.

b) La diferencia de camino en la respuesta (a) es $d\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{6}\lambda$. Esta diferencia se puede cancelar modificando la dirección de incidencia como se indica en las figuras.



La dirección de incidencia debe formar el ángulo θ con el eje (determinado por el punto P).

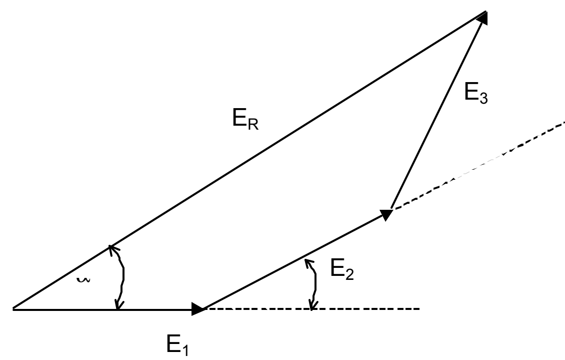
$$\operatorname{sen}\theta \simeq \frac{0{,}8}{140} \simeq 0{,}0057$$

---

4. $E_1 = E_0 \operatorname{sen}\omega t$

$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$E_3 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 2\phi)$



De la representación vectorial se concluye que:

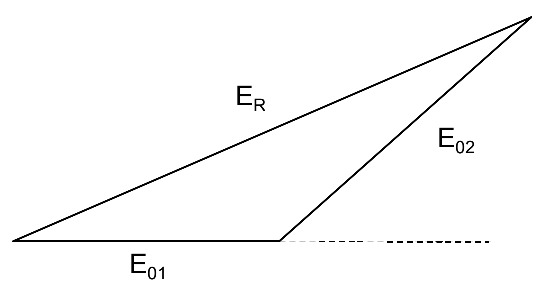
$$\alpha = \phi \qquad ; \qquad E_R = 2E_0 \cos\phi + E_0$$

Este resultado es válido para todos los valores dados de ϕ. Haga el cálculo para cada caso con los valores numéricos dados.

---

5. $E_1 = E_{01} \operatorname{sen}\omega t$

$E_2 = E_{02} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$



$$E_R^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}\bullet E_{02}\bullet\underbrace{\cos(\pi-\phi)}_{-\cos\phi}$$

$$E_R^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}\bullet E_{02}\bullet\cos\phi$$

Puesto que la intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado del campo eléctrico;

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2,$$

entonces: $I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\bullet\cos\phi.$

---

6. $E_1 = E_0\ \text{sen}(\omega t + \phi)$

$E_2 = E_0\ \text{sen}(\omega t + 2\phi)$

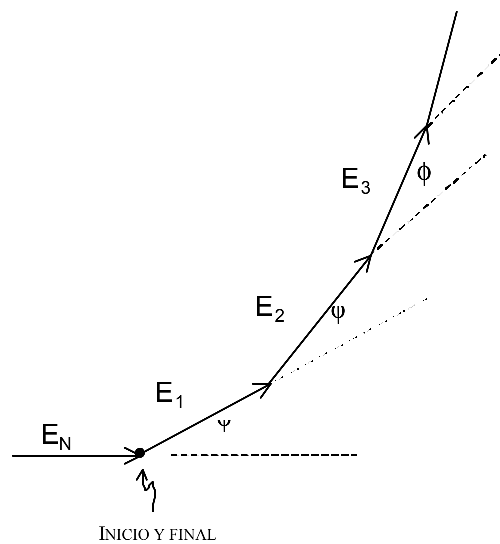
$E_3 = E_0\ \text{sen}(\omega t + 3\phi)$

$\vdots$

$E_N = E_0\ \text{sen}(\omega t + N\phi)$

El diagrama debe cerrarse como sugiere la figura.

Luego $N\phi = 2\pi \Rightarrow \quad \phi = 2\pi / N.$



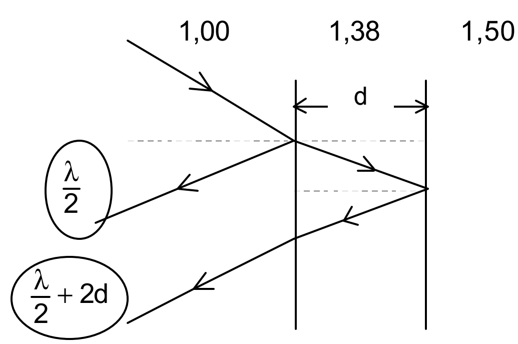
---

7. Para máximos en la luz reflejada que sale **perpendicularmente hacia atrás**, en este caso tenemos:

$$2d = m\bullet\lambda_n \quad , \quad m = 1, 2, \ldots\ldots \quad , \quad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Entonces: $\lambda_0 = \dfrac{2nd}{m} = \dfrac{2\bullet 1{,}38\bullet 10^{-7}[m]}{m} = \dfrac{276[nm]}{m}$

Ningún valor de m da longitud de onda en rango visible.



8. En este caso la expresión para máximos en la reflexión **perpendicular** es $2d = \frac{(2m+1)\lambda_0}{2n}$.

Se exige que ésta se cumpla para los colores rojo y verde, aprovechando que el parámetro entero m puede adoptar diferentes valores. Entonces,

$$\left.\begin{aligned} 2d &= \frac{(2m_R+1)\lambda_R}{2n} \\ 2d &= \frac{(2m_v+1)\lambda_v}{2n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (2m_R+1)\lambda_R = (2m_v+1)\lambda_v$$

Luego, $$\frac{\lambda_R}{\lambda_v} = \frac{700}{500} = \frac{2m_v+1}{2m_R+1} = \frac{7}{5}\ .$$

Se ve que hay una solución con $m_v = 3$ y $m_R = 2$.

El espesor d puede calcularse con cualesquiera de las dos expresiones anteriores, ambas dan el mismo resultado; por ejemplo:

$$d = \frac{(2\bullet 2+1)\bullet 700[nm]}{4\bullet 1{,}33} \simeq \frac{15}{16}\bullet 700 = 656[nm]\,.$$

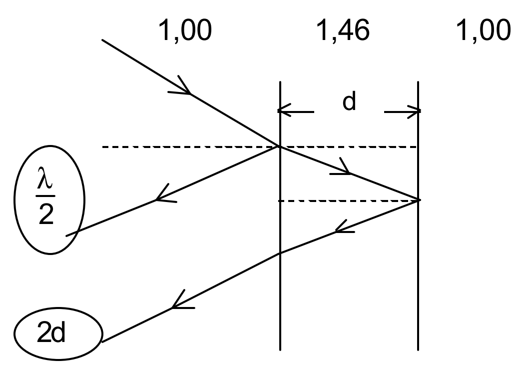
---

9. Máximos en la luz reflejada que sale **perpendicularmente** hacia atrás:

$$2d = \frac{\lambda_0}{2n}(2m+1)\,.$$

Entonces, $\lambda_0 = \frac{4d\bullet n}{2m+1} = \frac{2920[nm]}{2m+1}$

Los valores de m : 2, 3 y 4 son soluciones en el rango pedido, que son: 584[nm] , 417[nm] y 324[nm] respectivamente.

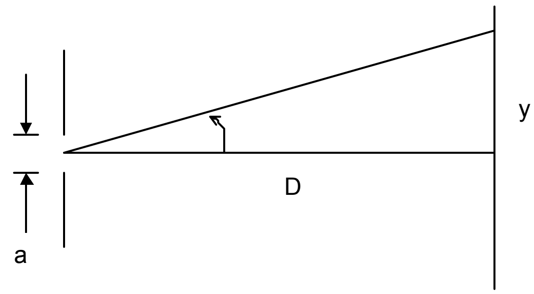


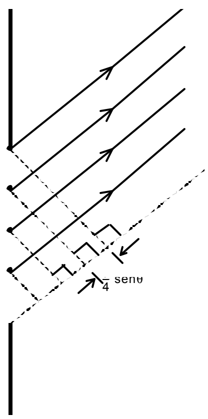
CAPÍTULO 38

1. $a = 0,5[mm]$

   $\lambda = 460[nm]$

   $D = 120[cm]$





$$\frac{a}{4}\,sen\theta_2 = \frac{\lambda}{2}, \qquad sen\theta_2 = \frac{y_2}{D} \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{2D\lambda}{a}$$

$$y_2 = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 4,60 \cdot 10^{-7}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 2,2[mm]$$

2. $D = 120[cm]$; $a = 0,4[mm]$; $\lambda = 546,1[nm]$

   $y = 4,1[mm]$ $\qquad I = I_{máx}\left(\frac{sen\beta/2}{\beta/2}\right)^2$; $\qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = a\,sen\theta$

$$sen\theta = \frac{y}{D} = \frac{4,1 \cdot 10^{-3}}{1,20} = 3,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\beta = \frac{2\pi \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 4,1 \cdot 10^{-3}}{5,461 \cdot 10^{-7} \cdot 1,2} = 2\pi \cdot 2,50[rad] = 900^\circ \;\Rightarrow\; sen\frac{\beta}{2} = 1$$

$$I = \frac{I_{máx} \cdot 1}{(2,5\pi)^2} = 0,016 I_{máx}$$

3. $\lambda = 500[nm]$; $\theta_{mín} = 2,3 \cdot 10^{-4}[rad]$; $d = 1,0[cm]$.

$$sen\theta_m \simeq \frac{d}{L} \;\Rightarrow\; L_{máx} = \frac{d}{sen\theta_{mín}}$$

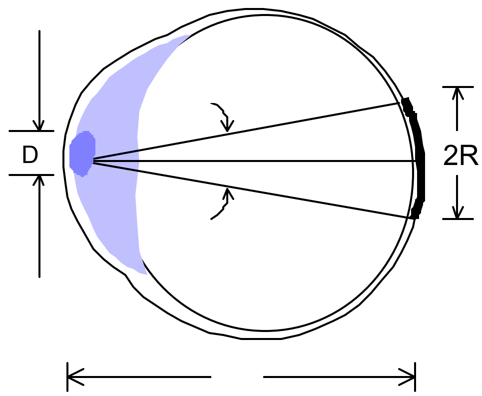
$$L_{máx} = 43,5[m]$$

4. $D = 0{,}7[\text{cm}]$;

   $\ell = 3{,}0[\text{cm}]$

   $\lambda = 500[\text{nm}]$

   $D\,\text{sen}\,\theta_{mín} = 1{,}22\lambda$; $\theta = \dfrac{2R}{\ell}$



$$R = \frac{1{,}22\lambda \cdot \ell}{2D} = \frac{1{,}22 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-7} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-2}} = 1{,}3 \cdot 10^{-9}[\text{m}]$$

$R = 1{,}3[\mu\text{m}]$ (menor que la separación entre conos).

---

5. $d = 775[\text{nm}]$

   $\lambda_1 = 589{,}0[\text{nm}]$ Máximos de interferencia (principales)

   $\lambda_2 = 589{,}6[\text{nm}]$ $d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$; m=1 (primer orden)

   Entonces, derivando respecto a λ: $d\cos\theta \cdot \dfrac{d\theta}{d\lambda} = 1$

   $\Rightarrow \Delta\theta = \dfrac{\Delta\lambda}{d\cos\theta}$ con λ_1 se calcula θ_1 según:

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{\lambda_1}{d} = \frac{589{,}0[\text{nm}]}{775[\text{nm}]} = 0{,}76 \qquad \Rightarrow \theta_1 = 49{,}4^\circ.$$

   Con $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}6[\text{nm}]$ se calcula $\Delta\theta = 0{,}068^\circ$.

---

6. a) $\lambda_1 = 589{,}0[\text{nm}]$ Máximos de interferencia (principales)

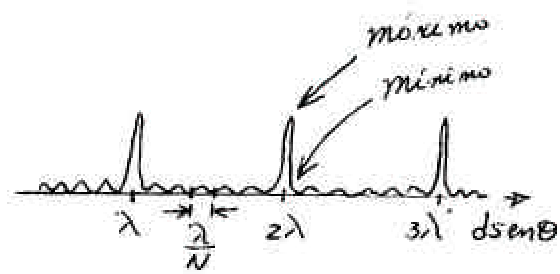
$\lambda_2 = 589{,}6[\text{nm}]$ $\quad d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$; m=2 (segundo orden)

Mínimos adyacentes (a máximo principal de orden m) : $d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda + \dfrac{\lambda}{N}$

Entonces,

$$d\,\text{sen}\,\theta_1 = 2\lambda_1$$

$$d\,\text{sen}\,\theta_2 = 2\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$$



El mínimo anterior debe corresponder a máximo para λ_2: $\quad d\,\text{sen}\,\theta_2 = 2\lambda_2$.

Luego, $2\lambda_1 + \dfrac{\lambda_1}{N} = 2\lambda_2$

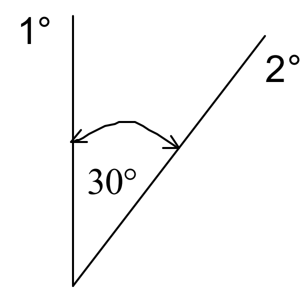
$$\Rightarrow\ 2(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{N} \qquad \Rightarrow\ N = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{589{,}0}{2\cdot 0{,}6} = 491$$

b) ancho : a = N • d

$$\theta_1 = 15^\circ \qquad \Rightarrow d = \frac{2\lambda_1}{\text{sen}\,\theta_1} = 4551[\text{nm}] \ \Rightarrow\ a = 2{,}24[\text{nm}]$$

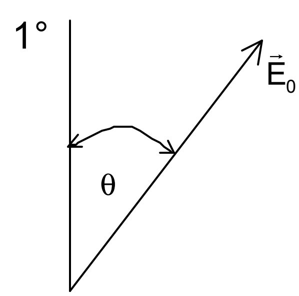
---

7. Al primer polarizador llega luz no polarizada. En un instante dado el campo $\vec{E}$ podría formar un ángulo θ con la vertical, y al instante siguiente cambiar a otro ángulo. Para obtener la intensidad después del primer polarizador es necesario hacer un promedio, suponiendo que todos los ángulos θ son igualmente probables. Entonces,



$$I_\theta = I_0 \cos^2\theta \ \Rightarrow\ \bar{I} = \int_0^{2\pi} I_\theta \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\bar{I} = I_0 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2} I_0$$



Después del primer polarizador, $\vec{E}$ está en dirección vertical y la intensidad es $I_1 = \frac{1}{2} I_0$.

Segundo polarizador: $E_2 = E_1 \bullet \cos 30° = E_1 \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \; I_2 = \frac{3}{4} I_1$.

Luego, $I_2 = \frac{3}{8} I_0$, es decir, es transmitida la fracción $\frac{3}{8}$ de la intensidad incidente.

---

8. Después del primer polarizador;

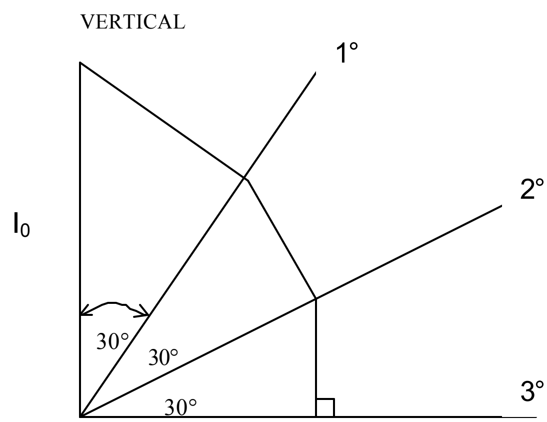
$$I_1 = I_0 \bullet \cos^2 30°$$

Después del segundo polarizador;

$$I_2 = I_1 \bullet \cos^2 (60° - 30°)$$

Después del tercer polarizador;

$$I_3 = I_2 \bullet \cos^2 (90° - 60°)$$



Finalmente,

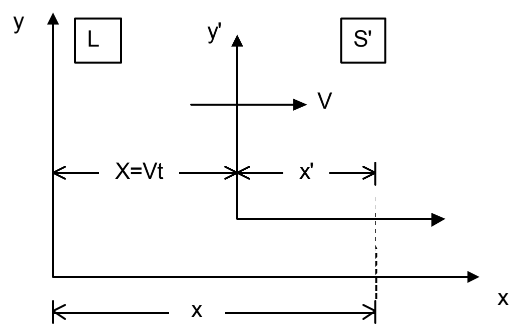
$$I_3 = I_0 \bullet \left(\cos^2 30°\right)^3 = I_0 \bullet \cos^6 (30°) = I_0 \bullet \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$$

$$I_3 = I_0 \bullet \left(\frac{3}{4}\right)^3 = I_0 \bullet \left(\frac{27}{64}\right) .$$

4. RELATIVIDAD ESPECIAL

CAPÍTULO 39 (CINEMÁTICA)

1. Segunda Ley de Newton : $\vec{F}_{resultante} = m\vec{a}$



a) $x = x' + X = x' + Vt$

Derivando respecto al tiempo t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \Rightarrow v = v' + V$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{0} = \frac{dv'}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} \Rightarrow \boxed{a = a'}$$

En sistema S' : $F' = ma' = ma = F \Rightarrow \boxed{F' = F}$ $\nearrow F = ma$, $\searrow F' = ma'$

b) $A = \dfrac{dV}{dt}$ (aceleración de sistema S' respecto a L)

$$x = x' + X \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dX}{dt} \Rightarrow v = v' + V$$

$$v = v' + V \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{dV}{dt} \Rightarrow a = a' + A \Rightarrow \boxed{a' = a - A}$$

Por lo tanto, en sistema S' :

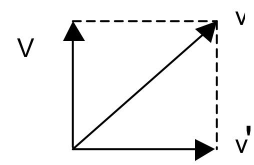
$$F' = ma' = m(a - A) = \underbrace{ma}_{F} - mA = F - mA$$

$\therefore F' \neq F$

---

2. $|v'| = 20[m/s]$; $V = 40[m/s]$

a) $v = v' + V = 20[m/s] + 40[m/s] = 60[m/s] \Rightarrow v = 60[m/s]$



b) $v = -v' + V = -20[m/s] + 40[m/s] = 20[m/s] \Rightarrow v = 20[m/s]$

c) $v = \sqrt{v'^2 + V^2} = \sqrt{(20)^2 + (40)^2} \Rightarrow v = 44{,}7[m/s]$

3. $$\left.\begin{array}{rcl}\Delta t_0 & = & 1/2\Delta t \\ \Delta t & = & \gamma\Delta t_0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t_0 = -\frac{\gamma\Delta t_0}{2} \Rightarrow \gamma = 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \left(v/c\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0{,}866c$$

---

4. $L' = 1[m] = L_0$ (longitud propia) ; $L = 0{,}6[m]$

$$L = \frac{L'}{\gamma} = L'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} \Rightarrow 0{,}6 = 1 \bullet \sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

$$\Rightarrow 0{,}36 = 1-\left(v/c\right)^2 \Rightarrow \left(v/c\right)^2 = 0{,}64 \Rightarrow v/c = 0{,}8$$

$$\therefore\ v = 0{,}8c$$

---

5. Rayos cósmicos.

$\gamma = 10^{10}$

$D_{V.L.} = 10^5$ [A.L.] : longitud propia para observador en Tierra.

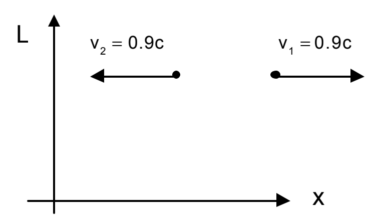
a) $D = \frac{D_{V.L}}{\gamma} = \frac{10^5}{10^{10}} = 10^{-5}\,[A.L.] \triangleq 10^8$ [km]

$$\begin{array}{rcl}1[A.L.] & \triangleq & 9{,}46 \bullet 10^{15}\ [m] \\ & \approx & 9{,}46 \bullet 10^{12}\ [km] \\ & \approx & 10^{13}\ [km]\end{array}$$

b) $t = \frac{D}{c} = 10^{-5}$ [año]

---

6. $$u'_x = \frac{u_x - v}{1-u_x \bullet v/c^2}$$



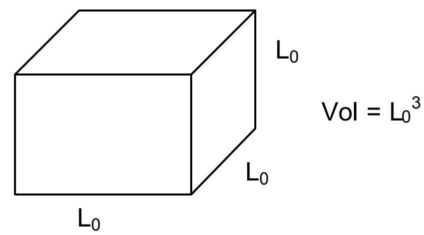
$v = v_1 = 0{,}9c$; $u_x = -v_2 = -0{,}9c$

Luego, $$u'_x = \frac{-0{,}9c - 0{,}9c}{1-\frac{(-0{,}9c)\bullet(0{,}9c)}{c^2}} = \frac{-1{,}8c}{1+0{,}81c} = \frac{-1{,}8}{1{,}81}c \simeq -0{,}99\ c$$

La velocidad relativa es aproximadamente $0{,}99c$.

CAPÍTULO 39 (DINÁMICA RELATIVISTA)

1. $\text{Vol} = 1[\text{cm}^3]$; $M = 8[\text{g}]$; $v = 0{,}9\ c$



$$\rho_0 = \frac{M}{V_0} = \frac{M}{L_0^3} = \frac{8[\text{g}]}{1[\text{cm}^3]} = 8\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{L_0^2 \bullet {}^{L_0}\!/_{\gamma}} = \gamma\,\frac{M}{L_0^3} = \gamma\,\rho_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left({}^{v}\!/_{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}19}} \simeq 2{,}3$$

Por lo tanto:

$$\rho = \gamma\,\rho_0 \simeq 18\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$$

---

2. $E = 2E_0$

$E_0 = 938[\text{MeV}]$

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

$$(2E_0)^2 = (pc)^2 + E_0^2 \Rightarrow 4E_0^2 - E_0^2 = 3E_0^2 = (pc)^2$$

$$p^2 = \frac{3E_0^2}{c^2} \Rightarrow p = \sqrt{3}\,\frac{E_0}{c}$$

Luego :

$$p = \sqrt{3}\bullet 938\left[\frac{\text{MeV}}{c}\right]$$

$$= 1624{,}6\left[\frac{\text{MeV}}{c}\right]$$

---

3. $\gamma = 10^{10}$, $E_K =$ energía cinética ,
$E_0 =$ energía en reposo (938 [MeV])

$$E_K = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 = [\gamma - 1]E_0 = \underbrace{\left[10^{10} - 1\right]}_{\approx 10^{10}}E_0$$

$$\Rightarrow \qquad E_K = 938\bullet 10^{10} = 9{,}38\bullet 10^{12}\,[\text{MeV}] \simeq 10^{13}\,[\text{MeV}]$$

---

4. $L = 3[\text{km}]$; $E = 20[\text{GeV}] = 2{,}0 \bullet 10^4\,[\text{MeV}]$; $E_0 = 0{,}511[\text{MeV}]$

a) $$\frac{E}{E_0} = \gamma = \frac{2{,}0 \bullet 10^4\,[\text{MeV}]}{0{,}511[\text{MeV}]} \approx 3{,}9 \bullet 10^4$$

b) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} \Rightarrow \left(v/c\right) = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\,c \simeq \left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right)c$$

$$\frac{c-v}{c} \simeq \frac{1}{2\gamma^2} = 3{,}3 \bullet 10^{-10}$$

La velocidad v es muy cercana a la velocidad de la luz. El resultado anterior corresponde a la diferencia, con el número apropiado de cifras significativas.

c) $$L' = \frac{L}{\gamma} \simeq 7{,}7[\text{cm}]$$

---

5. $m_{Ra} = 226{,}0254[u]$; $m_{Rn} = 222{,}0175[u]$; $m_{He} = 4{,}0026[u]$

$$m_{Rn} + m_{He} = 226{,}0201[u]$$

$$\Delta m = m_{Ra} - \left(m_{Rn} + m_{He}\right)$$

$$\Delta m = 226{,}0254 - 226{,}0201 = 0{,}0053[u]$$

$\big($ $1[u] = 1{,}66 \bullet 10^{-27}$ [kg]

$$\Rightarrow \quad \Delta m = 0{,}0053 \bullet \left(1{,}66 \bullet 10^{-27}[\text{kg}]\right)$$

$$\Delta m = 8{,}79 \bullet 10^{-30}[\text{kg}] \approx 8{,}8 \bullet 10^{-30}[\text{kg}]$$

$$\Rightarrow \quad E = \Delta m c^2 = 8{,}8 \bullet 9 \bullet 10^{-14}[J] \approx 7{,}92 \bullet 10^{-13}[J]$$

$$= \frac{7{,}92 \bullet 10^{-13}}{1{,}6 \bullet 10^{-19}}\,[\text{eV}] \approx 4{,}94[\text{MeV}]$$

---

6. $P = 3{,}8 \bullet 10^{26}\,[W]$ $\left(3{,}8 \bullet 10^{26}[J] \text{ en cada segundo}\right)$

a) $E = \Delta m c^2 \Rightarrow$

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}8 \bullet 10^{26}\,[J]}{9 \bullet 10^{16}\,[m/s]} = 4{,}2 \bullet 10^9\,[\text{kg}] \ \left(\text{en cada segundo}\right)$$

b) Proceso de fusión que ocurre en el Sol puede sintetizarse en la reacción:

$$4\,{}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2e^{+} + 2\nu$$

Balance de energía : $4m\left({}^{1}_{1}H\right)\bullet c^2 = m\left({}^{4}_{2}He\right)\bullet c^2 + 2m_e \bullet c^2 + E_{liberada}$

$$\Rightarrow \quad E_{liberada} = 4\bullet 938{,}28 - 3727{,}40 - 2\bullet 0{,}511 = 24{,}7[MeV]$$

El número de repeticiones de este proceso que producen la energía que irradia el Sol en cada segundo viene dado por:

$$E = N\bullet E_{liberada} \;\Rightarrow\; N = \frac{3{,}8\bullet 10^{26}\,[J]}{24{,}7[MeV]} = \frac{3{,}8\bullet 10^{26}\,[J]}{24{,}7\bullet 10^{6}\bullet 1{,}6\bullet 10^{-19}\,[J]} \simeq 9{,}6\bullet 10^{38}$$

En cada segundo entran al proceso 4N núcleos de ${}^{1}_{1}H$ cuya masa es aproximadamente :

$$4N\bullet 1{,}007825\bullet 1{,}66\bullet 10^{-27}\,[kg] \simeq 6{,}42\bullet 10^{11}[kg].$$

En cada segundo salen del proceso N núcleos de ${}^{4}_{2}He$ y 2N positrones, que en conjunto poseen una masa igual a N átomos de He, cuyo valor es aproximadamente:

$$N\bullet 4{,}002603\bullet 1{,}66\bullet 10^{-27}[kg] \simeq 6{,}38\bullet 10^{11}\,[kg].$$

Note que ambos valores de masa son muy cercanos entre sí; la diferencia entre ellos es equivalente a la energía de $3{,}8 \bullet 10^{26}\,[J]$.

---

7. Conviene analizar la situación en un sistema de referencia en que el momentum inicial es cero.

Inicialmente | Finalmente

Conservación de momentum: $\frac{hf}{c} - P = 0$ (finalmente están todos en reposo)

Conservación de energía : $hf + \frac{P^2}{2M} + Mc^2 = Mc^2 + 2m_ec^2$.

Despreciando la energía cinética del núcleo pesado, se obtiene la solución aproximada:

$$hf = 2m_e \bullet c^2 = 2 \bullet 0{,}511[\mathrm{MeV}] = 1{,}022[\mathrm{MeV}].$$

Esta solución puede corregirse, considerando que $Pc = hf$; entonces:

$$hf + \frac{(hf)^2}{2Mc^2} = 2m_e \bullet c^2$$

$$hf \simeq 2m_e \bullet c^2 - \frac{\left(2m_e \bullet c^2\right)^2}{2Mc^2}$$

$$hf \simeq 2m_e \bullet c^2 \left(1 - \frac{m_e}{M}\right)$$

Note que la corrección es muy pequeña para el caso de un núcleo pesado.

5. EFECTOS CUÁNTICOS

CAPÍTULO 40

1. $E = h \cdot f$; con $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}[J \cdot s] = \dfrac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}[eV \cdot s]$

Magnitud de la carga del electrón, en [C]

$h \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-15}[eV \cdot s]$

a) $E = 2{,}5[eV]$; b) $E = 1{,}3 \cdot 10^{-5}[eV]$; c) $E = 1{,}9 \cdot 10^{-7}[eV]$

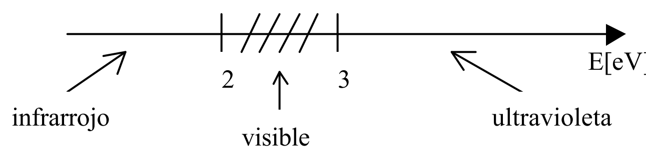
---

2. $\lambda_{max} \cdot T = 0{,}29 \cdot 10^{-2}[m \cdot K]$ T = 273 + 37 = 310 [K].

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{3{,}1 \cdot 10^{2}} \simeq 0{,}94 \cdot 10^{-5}[m]$$

$$f_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{0{,}94 \cdot 10^{-5}} = 3{,}2 \cdot 10^{13}[Hz]$$

$$E_{max} = h \cdot f_{max} = 0{,}13[eV]$$



---

3. $V_f = 0{,}54[V] \Rightarrow K_{max} = eV_f = 0{,}54[eV]$

$$hf = h\frac{c}{\lambda} = \frac{4{,}1 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{750 \cdot 10^{-9}} = \frac{4{,}13}{7{,}5} \cdot 10^{0}[eV] = 1{,}64[eV]$$

$$hf = K_{max} + \phi \Rightarrow \phi = hf - K_{max} = 1{,}10[eV]$$

---

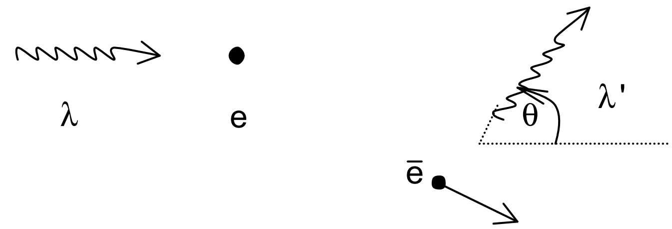
4. $hf_1 = \dfrac{4{,}1 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5{,}461 \cdot 10^{-7}} = 2{,}25[eV]$; $K_{max,1} = eV_{f1} = 1{,}70[eV]$

$$\Rightarrow \phi = hf_1 - K_{max,1} = 0{,}55[eV]$$

$hf_2 = \dfrac{4{,}1 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5{,}875 \cdot 10^{-7}} = 2{,}09[eV]$ $\Rightarrow eV_{f_2} = K_{max,2} = hf_2 - \phi$

$$eV_{f_2} = 1{,}54[eV] \Rightarrow V_{f_2} = 1{,}54[V]$$

5.



$$\underbrace{\Delta\lambda}_{\lambda'-\lambda} = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta\lambda$$

Conservación de la energía: $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{4,1\bullet10^{-15}\bullet3\bullet10^{8}}{2,00\bullet10^{-10}} = 6,15\bullet10^{3}[eV] \qquad ; \qquad m_e c^2 \simeq 0,511[MeV]$$

$$\Delta\lambda = \underbrace{\frac{4,1\bullet10^{-15}\bullet3\bullet10^{8}}{0,511\bullet10^{6}}}_{\lambda\ \text{Compton}}(1-\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}) \simeq 0,012\bullet10^{-10}[m] = 0,0012[nm]$$

Para corregir el manejo de cifras significativas, supongamos que el dato del enunciado es $\lambda = 0,2000[nm]$; entonces:

$$\lambda' = 0,2000 + 0,0012 = 0,2012[nm]$$

Finalmente,

$$K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = (6,150 - 6,110)[keV] \simeq 40[eV]$$

---

6. $\lambda = 0,030[nm] \qquad ; \qquad \lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e \bullet c} = 0,024\bullet10^{-10}[m] = \lambda_c$

$$\Delta\lambda = \lambda_c\bullet(1-\cos\theta) \Rightarrow \begin{cases} \theta = 90^\circ \text{ pues } \Delta\lambda = \lambda_c \\ \lambda' = \lambda + \lambda_c = 0,030 + 0,0024[nm] \end{cases}$$

$\lambda' = 0,0324[nm]$.

Nuevamente, usando conservación de la energía:

$$K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \left(4,100\bullet10^4 - 3,796\bullet10^4\right)[eV]$$

$$K_e \simeq 3,04[keV].$$

Comparando K_e con la energía en reposo del electrón: $E_0 \simeq 511[keV]$, resulta $E_0 \gg K_e$. Entonces, se usa relación no relativista entre K_e y velocidad:

$$K_e = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v \simeq \sqrt{\frac{2K_e\bullet c^2}{m_e c^2}} = c\sqrt{\frac{2\bullet3,04}{511}} \Rightarrow v \simeq 0,11c \simeq 3\bullet10^7[m/s].$$

Determine usted la dirección de $\vec{v}$.

7.

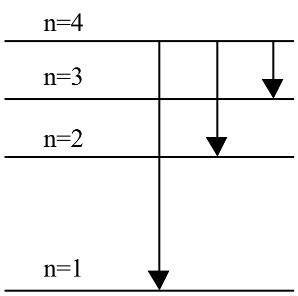
$$E_\lambda = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda'} \qquad \left.\begin{array}{l} E_\lambda = E_{\lambda'} + K_e \\ E_{\lambda'} = K_e \end{array}\right\} \Rightarrow E_\lambda = 2E_{\lambda'}$$

Entonces: $\lambda' = 2\lambda$

Además: $\lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) \Rightarrow \underbrace{\lambda}_{0,0016[nm]} = \underbrace{\lambda_c}_{0,0024[nm]}(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta = \frac{0,0016}{0,0024} = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta \simeq 71^\circ$$

8.



a) Se observan tres longitudes de onda, correspondientes a las transiciones mostradas.

b) $|E_4 - E_3| = \dfrac{hc}{\lambda}$; $E_n = -\dfrac{13,6[eV]}{n^2}$

$$\lambda = \frac{hc}{13,6[eV]\left(-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1,23 \cdot 10^{-6}(4 \cdot 3)^2}{13,6(4^2-3^2)}[m] = 1,86 \cdot 10^{-6}[m] = 1860[nm]$$

Esta línea espectral corresponde a la serie de Paschen.

Nota: Estudie respuesta (a) para el caso del modelo cuántico actual.

9. Niveles de energía para átomos hidrogenoide (con Z protones y un solo electrón):

$$E_n = -13,6[eV] \cdot \frac{Z^2}{n^2} \ ; \ n = 1,2,3,...$$

Acá $Z = 2 \Rightarrow E_1 = -54,4[eV], E_2 = -13,6[eV], E_3 = -6,0[eV]$,etc.

Primera energía de ionización: 54,4 [eV]. Dibuje usted la transición.

10. Energía potencial: $U = -\dfrac{k_c \bullet Ze^2}{r}$; Energía cinética: $K = \dfrac{1}{2}m_e v^2$.

Segunda Ley de Newton: $\dfrac{k_c Ze^2}{r^2} = m_e \dfrac{v^2}{r} \Rightarrow \dfrac{1}{2}m_e v^2 = \dfrac{k_c Ze^2}{2r}$.

Entonces, $K = -\dfrac{1}{2}U$. Además, $K + U = E = -13{,}6\dfrac{Z^2}{n^2}[\text{eV}]$.

Luego, $U = 2E = -\dfrac{27{,}2}{n^2}[\text{eV}]$; $K = \dfrac{13{,}6[\text{eV}]}{n^2}$, donde se usó $Z = 1$ (hidrógeno) y debe reemplazarse $n = 2$.

6. ONDAS CUÁNTICAS

CAPÍTULO 41

1. $E_0(\text{electrón}) = m_e \bullet c^2 \simeq 511[\text{keV}]$.

   a) $K = 50[\text{eV}] \ll E_0 \Rightarrow$ relación no relativista : $K = \dfrac{p^2}{2m_e} \Rightarrow$

   $$p = \frac{1}{c}\sqrt{2m_e c^2 \bullet K} = \frac{1}{c}\sqrt{2 \bullet 511 \bullet 0{,}050}\ [\text{keV}] \Rightarrow pc \simeq 7{,}1[\text{keV}].$$

   $$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15}[\text{eV} \bullet \text{s}] \bullet 3 \bullet 10^8[\text{m/s}]}{7{,}1 \bullet 10^3[\text{eV}]} = 1{,}7 \bullet 10^{-10}[\text{m}].$$

   b) $K = 50[\text{keV}] \simeq \dfrac{1}{10} E_0(\text{electrón})$. Es aconsejable usar mecánica relativista.

   $$\left.\begin{aligned} E^2 &= E_0^2 + (pc)^2 \\ E &= E_0 + K \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - E_0^2} = \sqrt{(E_0 + K)^2 - E_0^2} = \sqrt{K^2 + 2E_0 K} \\ pc &= \sqrt{K(K + 2E_0)} = 2{,}3 \bullet 10^5[\text{eV}]. \end{aligned}$$

   $$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15} \bullet 3 \bullet 10^8}{2{,}3 \bullet 10^5} = 5{,}3 \bullet 10^{-12}[\text{m}]$$ Notar que es más pequeña que en caso (a).

---

2. $p = mv = 75 \bullet 5{,}0 \underbrace{\left[\text{kg} \bullet \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]}_{[\text{J} \bullet \text{s/m}]}$, $\lambda_B = \dfrac{6{,}6 \bullet 10^{-34}[\text{J} \bullet \text{s}]}{75 \bullet 5{,}0[\text{J} \bullet \text{s/m}]} \approx 1{,}8 \bullet 10^{-36}[\text{m}]$.

λ_B resulta muy pequeño al compararlo hasta con el tamaño de un núcleo atómico. Se considera que estas condiciones no revelan el comportamiento ondulatorio de la materia.

---

3. Un electrón ve a un átomo cuando la longitud de onda del electrón es comparable al tamaño atómico, es decir:

   $$\lambda_B = 0{,}1[\text{nm}] \Rightarrow p_e = \frac{h}{\lambda_B} = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15}[\text{eV} \bullet \text{s}]}{10^{-10}[\text{m}]} = 4{,}1 \bullet 10^{-5}[\text{eV} \bullet \text{s / m}]$$

   $p_e \bullet c = 1{,}2 \bullet 10^4[\text{eV}]$. Vea ejercicio 1 y concluya que en este caso es aconsejable usar mecánica no-relativista.

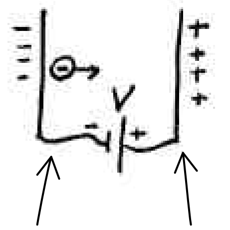
   $$p_e = m_e v \Rightarrow v = \frac{p_e}{m_e} = \frac{p_e \bullet c^2}{m_e c^2} = \frac{1{,}2 \bullet 10^4 \bullet 3 \bullet 10^8}{5{,}11 \bullet 10^5} = 7{,}0 \bullet 10^6[\text{m/s}]$$

   $$\Rightarrow v \simeq 0{,}02 \bullet c \ll c$$

4.

$$eV = \frac{p^2}{2m_e} \quad ; \quad \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot eV}} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}[J\cdot s]}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}[kg]\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}[C]}}\cdot\frac{1}{\sqrt{V}} = \frac{1{,}22}{\sqrt{V}}\cdot 10^{-9}[m]$$



K = 0 U = 0

U = eV K = eV

---

5. $V = 40[kV] \Rightarrow K = 40[keV]$

$$K = \frac{p_e^2}{2m} \qquad \Rightarrow \; p_e = \sqrt{2mK} \Rightarrow p_e \cdot c = \sqrt{2m\cdot c^2 \cdot K}$$

$$p_e c = \sqrt{2\cdot 511\cdot 40}[keV] = 202[keV] \qquad ;$$

$$\lambda_B = \frac{h}{p_e} = \frac{hc}{p_e c} = \frac{4{,}1\cdot 10^{-15}\cdot 3\cdot 10^{8}}{202\cdot 10^{3}}[m] = 6{,}1\cdot 10^{-12}[m].$$

Teóricamente, podría observarse distancias tan pequeñas como λ_B obtenido más arriba. Note que se hizo un cálculo no relativista, por ser más simple. Para la energía dada se requiere hacer el cálculo con mecánica relativista, como en el ejercicio 1 b) El resultado varía poco y puede decirse que teóricamente sería posible observar distancias del orden de $10^{-11}[m]$.

---

6. a) $\lambda_B \leq 10^{-14}[m]$. Los resultados del problema 1, indican que en este caso el electrón debe ser tratado con mecánica relativista.

Del problema 1, parte b) : $p_e \cdot c = \sqrt{K(K + 2E_0)}$. Además, $\lambda_B = \dfrac{h}{p_e}$

$$\Rightarrow K(K + 2E_0) = \left(\frac{hc}{\lambda_B}\right)^2 = \left(\frac{4{,}1\cdot 10^{-15}\cdot 3\cdot 10^{8}[eV\cdot m]}{10^{-14}[m]}\right)^2 = \left(1{,}2\cdot 10^{8}[eV]\right)^2 \gg E_0^2$$

Resolviendo la ecuación de 2° grado, para K se obtiene:

$$K = \sqrt{E_0^2 + \left(\frac{hc}{\lambda_B}\right)^2} - E_0 = \sqrt{\left(5{,}11\cdot 10^{5}\right)^2 + \left(1{,}2\cdot 10^{8}\right)^2} - 5{,}11\cdot 10^{5}[eV]$$

$K = 1,2 \cdot 10^{8}[\mathrm{eV}] \gg E_0$. Note que numéricamente ha resultado $K = p_e \cdot c = 1,2 \cdot 10^{8}[\mathrm{eV}]$. Al calcular $p_e c$ al principio y observar que $p_e c \gg E_0$, de inmediato se puede concluir que $K = p_e c$. Para comprenderlo bien repase dinámica relativista.

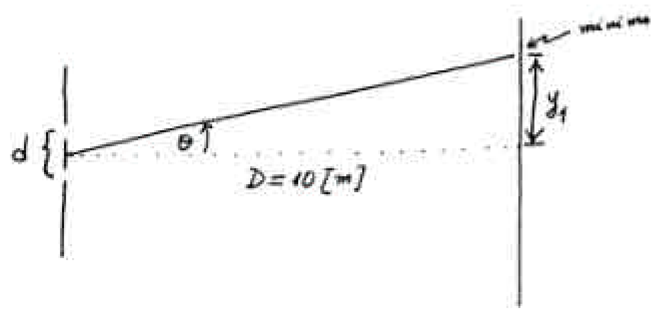
b) No. El modelo de Bohr muestra que las energías de electrones atómicos son de orden 10[eV], ...

---

7. $p_n = m_n \cdot v = 1,7 \cdot 10^{-27}[\mathrm{kg}] \cdot 0,4[\mathrm{m/s}] \simeq 0,68 \cdot 10^{-27}[\mathrm{J \cdot s/m}]$

a) $$\lambda_B = \frac{h}{p_n} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}[\mathrm{J \cdot s}]}{0,68 \cdot 10^{-27}[\mathrm{J \cdot s/m}]} = 9,7 \cdot 10^{-7}[\mathrm{m}]$$

b)



$$d\,\mathrm{sen}\theta = \frac{1}{2}\lambda \begin{pmatrix} \text{Interferencia} \\ \text{de dos fuentes} \\ \text{en fase .....} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{sen}\theta \simeq \frac{y_1}{D}$$

$$\Rightarrow y_1 = D \cdot \frac{\lambda}{2d} = 10 \cdot \frac{9,7 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}}[\mathrm{m}]$$

$$y_1 = 4,9 \cdot 10^{-3}[\mathrm{m}] = 4,9[\mathrm{mm}]$$

c) No.

---

8. $K = 1,0[\mathrm{MeV}]$; $E_0(\mathrm{proton}) \simeq 938[\mathrm{MeV}]$; $K \ll E_0 \Rightarrow$ usar mecánica no relativista.

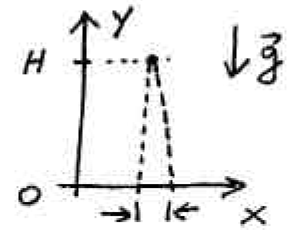
$$K = \frac{p^2}{2m_p} = \frac{(pc)^2}{2m_p \cdot c^2} \Rightarrow pc = \sqrt{2K \cdot m_p c^2}\ ; \quad pc = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 938}[\mathrm{MeV}] \simeq 43,[\mathrm{MeV}],$$

$$\Delta p = 5\% p = 0,05p = 2,2[\mathrm{MeV/c}]$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \Rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{4,1 \cdot 10^{-15}[\mathrm{eV \cdot s}] \cdot 3 \cdot 10^{8}[\mathrm{m/s}]}{2,2 \cdot 10^{6}[\mathrm{eV}]} \simeq 5,6 \cdot 10^{-13}[\mathrm{m}]$$

mínima incertidumbre en su posición: $\Delta x = 5,6 \cdot 10^{-13}[\mathrm{m}]$.

9. a) Si la pelota se suelta desde el punto (D,H), entonces cae al suelo en el punto $\left(D \pm \Delta x, 0\right)$. Δx aparece como consecuencia del principio de incerteza, aplicado al instante de partida, lo cual garantiza una velocidad horizontal v_0.



$2\Delta x$

Clásicamente: $$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$ $$x(t) = D + v_0 t$$

Llegada al suelo : $y(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ y entonces : $\Delta x = x(t_1) - D = v_0 \bullet t_1$.

La incerteza del momentum lineal es la misma al principio que al final : $\Delta x \bullet \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$,

entonces : $\Delta x \bullet m \bullet \dfrac{\Delta x}{t_1} \geq \dfrac{h}{4\pi} \Rightarrow \Delta x \geq \sqrt{\dfrac{h}{2\pi m} \bullet \left(\dfrac{2H}{g}\right)^{1/4}}$

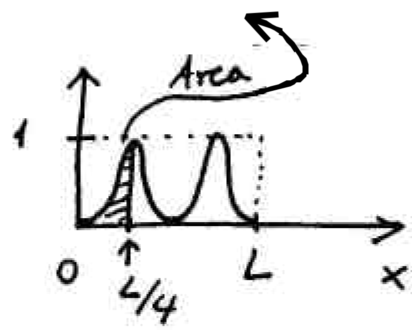
b) $\Delta x \geq 3{,}6 \bullet 10^{-16}[m]$

---

10. $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right)$; $P = \displaystyle\int_0^{L/4} |\psi|^2 dx = \dfrac{2}{L}\int_0^{L/4} \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right)dx$

$$P = \frac{2}{L} \bullet \frac{1}{4} \underbrace{\text{(área bajo la curva dibujada)}}_{\text{área achurada:}\ \frac{1}{4} \bullet \frac{1}{2} L}$$

$$P = \frac{2}{L} \bullet \frac{1}{4} \bullet \frac{1}{2} L = \frac{1}{4}$$

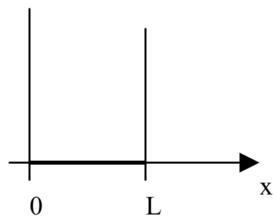


Notar que: $\displaystyle\int_0^L |\psi|^2 dx = 1$, donde la integral representa la probabilidad de encontrar al electrón en el intervalo $0 \leq x \leq L$.

Se calcula la integral con la ayuda de la gráfica anterior:

$$\frac{2}{L} \bullet \underbrace{\text{area bajo la curva dibujada}}_{\frac{1}{2} \bullet L = \frac{1}{2} \text{ area del rectangulo}} = \frac{2}{L} \bullet \frac{1}{2} L = 1$$

11. a)



Es evidente que $\Delta x \le L$ pues la partícula está restringida a estar dentro del pozo infinito. Entonces, $\Delta x \bullet \Delta p_x \ge h$.

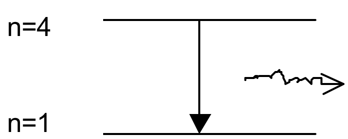
$$\Rightarrow \Delta p_x \ge \frac{h}{\Delta x} \ge \frac{h}{L}$$

b) $$E = \frac{p^2}{2m} .$$

Usando la **estimación** anterior, como valor de p; es decir, haciendo $p = \Delta p_x$, se estima $E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{h^2}{2mL^2}$. Esto es comparable a la energía del estado base: $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$.
Luego, la **estimación** dada es muy buena.

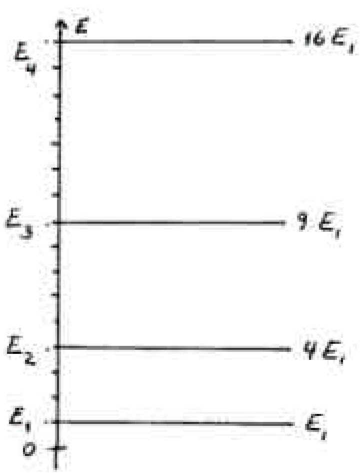
---

12. $$E_n = n^2 \bullet \frac{h^2}{8mL^2} \Rightarrow E_1 \frac{h^2}{8mL^2} \quad ; \quad E_2 = 4E_1 \quad ; \; E_3 = 9E_1 \quad ; \; E_4 = 16E_1$$



$$hf = h\frac{c}{\lambda_1} = E_4 - E_1 = 15E_1$$

Energía del fotón para una transición directa.



Otras transiciones de emisión:

$E_4 \to E_2 \quad \frac{hc}{\lambda_2} = 12E_1$

$E_3 \to E_1 \quad \frac{hc}{\lambda_3} = 8E_1$

$E_4 \to E_3 \quad \frac{hc}{\lambda_4} = 7E_1$

$E_3 \to E_2 \quad \frac{hc}{\lambda_5} = 5E_1$

$E_2 \to E_1 \quad \frac{hc}{\lambda_6} = 3E_1$

El paso de E_4 hacia E_1 puede hacerse de diferentes maneras, pasando por estados intermedios.

$E_4 \to E_1$: un fotón: λ_1

$E_4 \to E_2 \to E_1$: dos fotones: λ_2 , λ_4

$E_4 \to E_3 \to E_1$: dos fotones: λ_4 , λ_3

$E_4 \to E_3 \to E_2 \to E_1$: tres fotones: λ_4 , λ_5 , λ_6

Nota: Las longitudes de onda han sido ordenadas de menor (λ_1) a mayor (λ_6)

---

13. a) $E = 0$ $\quad \psi(x) = A \bullet e^{-x^2/L^2}$

Ecuación de Schröedinger : $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + U(x)\bullet\psi(x) = \underbrace{E}_{\text{cero}}\psi(x)$

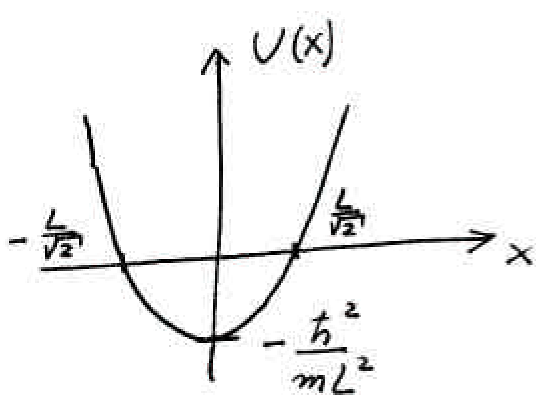
Derivando : $\psi'(x) = A\bullet e^{-x^2/L^2}\bullet\left(-\dfrac{2x}{L^2}\right)$; $\psi'' = A\bullet e^{-x^2/L^2}\bullet\left(-\dfrac{2x}{L^2}\right)^2 - A\bullet e^{-x^2/L^2}\bullet\dfrac{2}{L^2}$

$$\psi''(x) = \psi(x)\bullet\frac{2}{L^2}\left[\frac{2x^2}{L^2} - 1\right]$$

Sustituyendo en la ecuación Schröedinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x)\bullet\frac{2}{L^2}\left[\frac{2x^2}{L^2} - 1\right] + U(x)\psi(x) = 0 \Rightarrow U(x) = \frac{\hbar^2}{mL^2}\left[\frac{2x^2}{L^2} - 1\right]$$

b)



Este es un potencial armónico

7. ÁTOMOS Y TRANSICIONES

CAPÍTULO 42

1. a) $n = 3$; $\ell = 0, 1, 2$; $m_\ell = 0, \pm 1, ... \pm \ell$.

Identificando cada estado con tres números cuánticos: (n, ℓ, m_ℓ) todos los estados con $n = 3$ son: $(3,0,0)$ $(3,1,0)$ $(3,1,-1)$ $(3,1,1)$ $(3,2,0)$ $(3,2,1)$ $(3,2,-1)$ $(3,2,2)$ $(3,2,-2)$.

Son 9 estados (sin incluir spin electrónico).

b) $E_n = -13{,}6 \bullet \frac{Z^2}{n^2}[\mathrm{eV}]$; $n = 3$; $Z = 2$ $\Rightarrow E_3 = -13{,}6 \bullet \frac{4}{9}[\mathrm{eV}] \approx 6{,}0[\mathrm{eV}]$.

---

2. La función dada depende de r y no de las coordenadas θ y φ. Entonces, la probabilidad de encontrar al electrón en un cascarón esférico de espesor dr es:

$$P(r)dr = |\psi|^2 \bullet 4\pi r^2 dr$$

Luego, basta encontrar un máximo de la función $P(r) = |\psi|^2 \bullet 4\pi r^2$.

$$P(r) = \frac{4\pi r^4}{3 \bullet (2a_0)^3 \bullet a_0^2} \bullet e^{-r/a_0}$$

Derivando e igualando a cero tenemos:

$$\frac{dP}{dr} = 0 \qquad \Rightarrow \left(4r^3 - \frac{r^4}{a_0}\right)e^{-r/a_0} = 0 \qquad \Rightarrow r^3\left(4 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/a_0} = 0 \Rightarrow$$

Tres soluciones r=0: mínimo ; r=4a_0 : máximo, $r \to \infty$: mínimo.

La densidad de probabilidad radial correspondiente al máximo es:

$$P(4a_0) = \frac{128\pi \bullet e^{-4}}{3a_0}[m^{-1}]$$

3. a) $n = 1\ ;\ \ell = 0\ ;\ m_\ell = 0\ ;\ s = \frac{1}{2}\ ;\ m_s = \pm\frac{1}{2}\ \Rightarrow 1\bullet 1\bullet 1\bullet 1\bullet 2 = 2\text{estados}\ \left(2\bullet 1^2\right)$

b) $n = 2\ ;\ \ell = 0{,}1\ \begin{cases} \ell = 0, & m_\ell = 0, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ estados} \\ \ell = 1, & m_\ell = 0, \pm 1, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow 1\bullet 1\bullet 3\bullet 1\bullet 2 = 6 \text{ estados} \end{cases}$

Total 8 estados $\left(2\bullet 2^2\right)$.

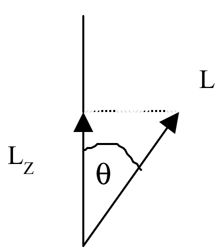
e) $n = 5\ ;\ \ell = \begin{cases} 0, & m_\ell = 0, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \ldots 1\bullet 1\bullet 1\bullet 1\bullet 2 = \quad 2\text{estados} \\ 1, & m_\ell = 0, \pm 1, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \ldots 1\bullet 1\bullet 3\bullet 1\bullet 2 = \quad 6\text{estados} \\ 2, & m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \ldots 1\bullet 1\bullet 5\bullet 1\bullet 2 = \quad 10\text{estados} \\ 3, & m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \ldots 1\bullet 1\bullet 7\bullet 1\bullet 2 = \quad 14\text{estados} \\ 4, & m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \quad \ldots 1\bullet 1\bullet 9\bullet 1\bullet 2 = \quad 18\text{estados} \end{cases}$

Total 50 estados $\left(2\bullet 5^2\right)$.

---

4. $n = 4\ ;\ \ell = 3\ ;\ m_\ell = 3$

a) $L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\bullet\hbar = \sqrt{12}\hbar$ b) $L_Z = m_\ell\bullet\hbar = 3\hbar$.



El ángulo entre L y L_z está dado por :

$$\cos\theta = \frac{L_Z}{L} = \frac{3}{\sqrt{3\bullet 4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta \approx 30^\circ.$$

---

5. a) $n = 7$: capa ; subcapas correspondientes poseen $\begin{matrix} \ell = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6 \\ s\ p\ d\ f\ g\ h\ i \end{matrix}$

y se denominan 7s, 7p, 7d, 7f, 7g, 7h y 7i.

De acuerdo al enunciado deben llenarse en el orden que están escritas, pues $n + \ell$ está en orden ascendente: 7,8,9,10,11,12 y 13.

b) Conviene determinar primero la estructura electrónica de los elementos mencionados. Para ello se usa el diagrama:

1s↙					2	2	Z=15
2s↙	2p↙				8	10	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^3$ (→ 6)
3s↙	3p↙	3d↙			18	28	$\Rightarrow$ valencia 3
4s↙	4p↙	4d↙	4f↙		32	60	(subcapa 3p incompleta,
5s↙	5p↙	5d↙	5f↙	5g↙			le faltan 3 electrones)
6s↙	6p↙						
7s↙							

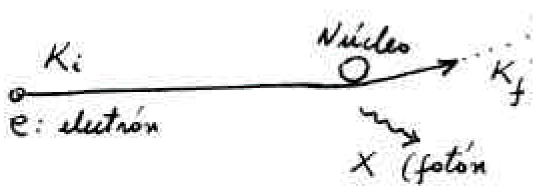
Z=47 $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^2\,3d^{10}\,4p^6\,5s^2\,4d^9$

$\Rightarrow$ valencia 1 (subcapa 4d incompleta, le falta un electrón)

Z=86 $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^6\,5s^2\,4d^{10}\,5p^6\,6s^2\,4f^{14}\,5d^{10}\,6p^6$

$\Rightarrow$ valencia 0 : (subcapas completas).

6.



$$K_i = K_f + hf$$

$$K_i = eV \quad ; \quad c = \lambda f$$

$$V_{mín.} \Rightarrow K_f = 0 \qquad ; \text{ luego : } \quad eV_{ním.} = hf \;\Rightarrow V_{mín} = \frac{hc}{e\lambda}$$

$$V_{mín.} = \frac{6{,}6 \bullet 10^{-34} \bullet 3 \bullet 10^{8}}{1{,}6 \bullet 10^{-19} \bullet 10^{-10}}[V] = 12{,}\bullet 10^3[V] = 12[kV].$$

---

7. a) Usando planteamiento del ejercicio anterior (pues λ mínima $\Rightarrow$ fmáxima $\Rightarrow K_f = 0$),

$$\text{entonces : } eV = \frac{hc}{\lambda_{min.}} \Rightarrow \lambda_{min.} = \frac{hc}{e \bullet V}.$$

$$\lambda_{min.} = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15}[eV \bullet s] \bullet 3 \bullet 10^{8}[m/s]}{50 \bullet 10^{3}[eV]} = 0{,}25 \bullet 10^{-10}[m].$$

b) $\lambda = 0{,}0709[nm]$; $V_{min.} = \dfrac{hc}{e\lambda} = 17{,}5[kV].$

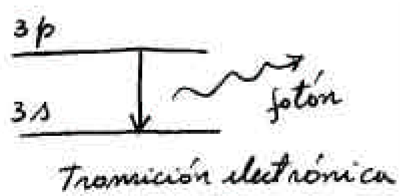
c) Fotón: $\left.\begin{array}{l} E = hf \\ c = \lambda f \end{array}\right\} \Rightarrow E = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{E} = \dfrac{4{,}1 \bullet 10^{-15}[eV \bullet s] \bullet 3 \bullet 10^{8}[m/s]}{E}$

$\lambda = \dfrac{12{,}3 \bullet 10^{-7}}{E}[m]$, si E está en [eV] . Entonces : $\lambda = \dfrac{1230}{E}[nm]$

Use usted un valor más preciso de $\hbar$ en $[eV \bullet s]$ para que obtenga exactamente lo pedido en el ejercicio.

8.

$$E_{3p} - E_{3s} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15} \bullet 3 \bullet 10^{8}}{2{,}1} = 5{,}9 \bullet 10^{-7}[m]$$

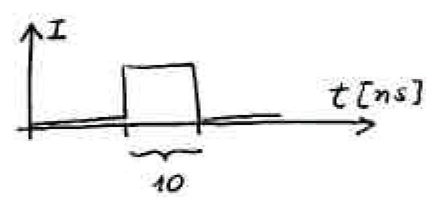


$\lambda \simeq 590[nm]$: visible!! (amarillo)

9.

$E_{foton} = \dfrac{hc}{\lambda}$ $E_{pulso} = N \bullet E_{foton}$

$E_{pulso} = \underbrace{\text{Potencia media}}_{10^{6}[W]} \times \underbrace{\text{duración}}_{10[ns]} = 10^{-2}[J]$



$$N = \frac{10^{-2}[J] \bullet 694{,}3 \bullet 10^{-9}[m]}{6{,}6 \bullet 10^{-34}[J \bullet s] \bullet 3 \bullet 10^{8}[m/s]} = 3{,}5 \bullet 10^{16} \text{ fotones} .$$

8. MOLÉCULAS

CAPÍTULO 43

1. a) $|F|=\frac{k_c \bullet e^2}{r^2}=\frac{9,\bullet 10^9 \bullet \left(1,6 \bullet 10^{-19}\right)^2}{\left(2,8 \bullet 10^{-10}\right)^2}[N]=2,9 \bullet 10^{-9}[N].$

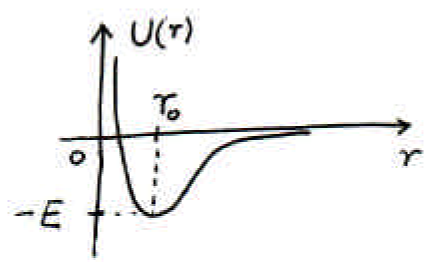
b) $|U|=\frac{k_c \bullet e^2}{r}=\frac{9 \bullet 10^9 \bullet 1,6 \bullet 10^{-19}}{2,8 \bullet 10^{-10}}[eV]=5,1 \bullet 10^0[eV]$

2. a) $U=\frac{A}{r^{12}}-\frac{B}{r^6}$; $\frac{dU}{dr}=0 \Rightarrow -\frac{12A}{r_0^{13}}+\frac{6B}{r_0^7}=0 \Rightarrow \frac{6B}{r_0^7}=\frac{12A}{r_0^{13}}$

$\Rightarrow r_0^6=\frac{2A}{B}$; el mínimo ocurre en $r_0=\left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$.

b) $E=-U(r_0)=-\frac{A}{r_0^{12}}+\frac{B}{r_0^6}=-\frac{A}{\left(\frac{2A}{B}\right)^2}+\frac{B}{\left(\frac{2A}{B}\right)}$

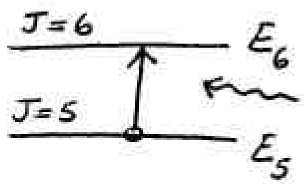
$E=-\frac{\cancel{A}B^2}{4A^{\cancel{2}}}+\frac{B^2}{2A}=\frac{B^2}{4A}$



c)

$$\left.\begin{aligned} r_0&=\left(\frac{2 \bullet 0,124 \bullet 10^{-120}}{1,488 \bullet 10^{-60}}\right)^{1/6}[m] \approx 0,742 \bullet 10^{-10}[m] \\ E&=\frac{\left(1,488 \bullet 10^{-60}\right)^2}{4 \bullet 0,124 \bullet 10^{-120}}[eV]=4,464[eV] \end{aligned}\right\} \text{Para molécula } H_2$$

3.



fotón absorbido: $\lambda_5 = 1{,}35[\text{cm}]$;

$$E_6 - E_5 = \frac{hc}{\lambda_5}$$

$E_J = \dfrac{J(J+1)\hbar^2}{2I_0}$: Niveles rotacionales.

$$E_6 - E_5 = \frac{6 \bullet 7\hbar^2}{2I_0} - \frac{5 \bullet 6\hbar^2}{2I_0} = \frac{12\hbar^2}{2I_0} = \frac{6\hbar^2}{I_0}$$

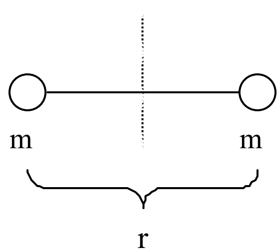
a) $E_1 - E_0 = \dfrac{\hbar^2}{I_0}$; $\qquad E_1 - E_0 = \dfrac{hc}{\lambda_0} \qquad \Rightarrow \dfrac{E_6 - E_5}{E_1 - E_0} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_5} = 6$

$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_5 \bullet 6 = 8{,}10[\text{cm}]$; $\qquad f = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{3 \bullet 10^8[\text{m/s}]}{8{,}1 \bullet 10^{-2}[\text{m}]} = 3{,}70 \bullet 10^9[\text{Hz}]$

b) $\dfrac{6\hbar^2}{I_0} = \dfrac{hc}{\lambda_5} \Rightarrow I_0 = \dfrac{6h^2}{4\pi^2}\dfrac{\lambda_5}{hc} = \dfrac{6h\lambda_5}{4\pi^2 \bullet c} = \dfrac{6 \bullet 6{,}6 \bullet 10^{-34} \bullet 1{,}35 \bullet 10^{-2}}{4\pi^2 \bullet 3 \bullet 10^8}[\text{kg} \bullet \text{m}^2]$

$\Rightarrow I_0 = 0{,}45 \bullet 10^{-44}[\text{kg} \bullet \text{m}^2]$: momento de inercia.

4.

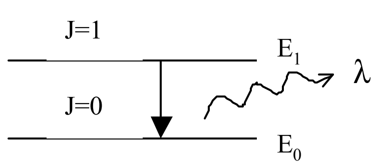


$$I_0 = m\left(\frac{1}{2}r\right)^2 \bullet 2 = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}1{,}67 \bullet 10^{-27}(0{,}75 \bullet 10^{-10})^2$$

$I_0 = 4{,}7 \bullet 10^{-48}[\text{kg} \bullet \text{m}^2]$: momento de inercia.

a) $E_J = \dfrac{J(J+1)\hbar^2}{2I_0} \Rightarrow E_1 = \dfrac{2\hbar^2}{2I_0} = \dfrac{h^2}{4\pi^2 I_0} = \dfrac{\left(6{,}6 \bullet 10^{-34}\right)^2}{4\pi^2 \bullet 4{,}7 \bullet 10^{-48} \bullet 1{,}6 \bullet 10^{-19}}[\text{eV}]$

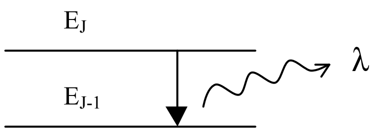
$$E_1 = 1{,}5 \bullet 10^{-2}[\text{eV}].$$



b) $E_0 = 0$ $\qquad$ $E_1 - E_0 = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{E_1 - E_0}$

$$\lambda = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15} \bullet 3 \bullet 10^{8}}{1{,}5 \bullet 10^{-2}}[\mathrm{m}] = 8{,}2 \bullet 10^{-5}[\mathrm{m}]: \text{ fotón infrarrojo.}$$

5.



$\Delta J = -1$: emisión.

$$E_J = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I_0} \quad ; \quad E_{J-1} = \frac{(J-1)\bullet J \bullet \hbar^2}{2I_0}$$

$$E_J - E_{J-1} = \frac{J \bullet \hbar^2}{2I_0}\left(J+1-J+1\right) = \frac{\hbar^2}{I_0} \bullet J$$

$$E_J - E_{J-1} = \frac{hc}{\lambda_J} \Rightarrow \lambda_J = \frac{hcI_0}{\hbar^2 J} \Rightarrow \frac{\lambda_J}{\lambda_{J-1}} = \frac{J-1}{J}$$

Datos: $\lambda_a = 0{,}1204[\mathrm{mm}]$; $\lambda_b = 0{,}0964[\mathrm{mm}]$; $\lambda_c = 0{,}0804[\mathrm{mm}]$

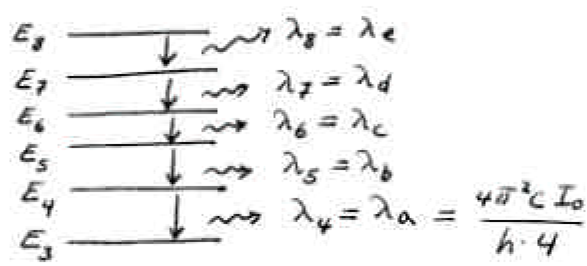
$\lambda_d = 0{,}0690[\mathrm{mm}]$; $\lambda_e = 0{,}0604[\mathrm{mm}]$

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_b} = 1{,}25 \quad , \quad \frac{\lambda_b}{\lambda_c} = 1{,}20 \quad , \quad \frac{\lambda_c}{\lambda_d} = 1{,}17 \quad , \quad \frac{\lambda_d}{\lambda_e} = 1{,}14$$

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{\lambda_a}{\lambda_b} \bullet \frac{\lambda_b}{\lambda_c} \bullet \frac{\lambda_c}{\lambda_d} \bullet \frac{\lambda_d}{\lambda_e} = 2{,}00 \,.$$

Suponiendo que los datos representan transiciones correspondientes a niveles puramente rotacionales consecutivos;

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{J}{(J-1)} \bullet \frac{(J-1)}{(J-2)} \bullet \frac{(J-2)}{(J-3)} \bullet \frac{(J-3)}{(J-4)} = 2{,}00 \Rightarrow \frac{J}{J-4} = 2{,}00 \Rightarrow \qquad J = 2J - 8 \Rightarrow J = 8$$



$$\Rightarrow I_0 = \lambda_a \bullet \frac{h}{\pi^2 c} = \frac{0{,}1204 \bullet 10^{-3} \bullet 6{,}6 \bullet 10^{-34}}{\pi^2 \bullet 3 \bullet 10^{8}}[\mathrm{kg} \bullet \mathrm{m}^2] = 2{,}7 \bullet 10^{-47}[\mathrm{kg} \bullet \mathrm{m}^2]$$

9. FÍSICA NUCLEAR

CAPÍTULO 45 (EL NÚCLEO, RADIOACTIVIDAD, REACCIONES)

1. Densidad de núcleos : $\rho_N = \dfrac{A}{\frac{4}{3}\pi\left(1{,}2\bullet 10^{-15}\right)^3 A}[u/m^3]$

Masa : $M = \rho \bullet V = \dfrac{3\bullet 10^{45}}{4\pi(1{,}2)^3}\bullet 10\bullet 10^{-6}[u]\bullet 1{,}66\bullet 10^{-27}[kg/u]$; $M \simeq 2{,}2\bullet 10^{12}[kg]$

---

2. $a_0 \simeq 0{,}5[\text{Å}]$ Densidad del átomo H : $\rho_A \simeq \dfrac{1[u]}{\frac{4}{3}\pi a_0^3}$

Densidad del núcleo H: $\rho_N \simeq \dfrac{1[u]}{\frac{4}{3}\pi\left(1{,}2\bullet 10^{-15}\right)^3}$

$$\frac{\rho_N}{\rho_A} \simeq \frac{\left(5\bullet 10^{-11}\right)^3}{(1{,}2)^3\bullet 10^{-45}} = \left(\frac{5}{1{,}2}\right)^3\bullet 10^{12} \simeq 7,\bullet 10^{13}$$

---

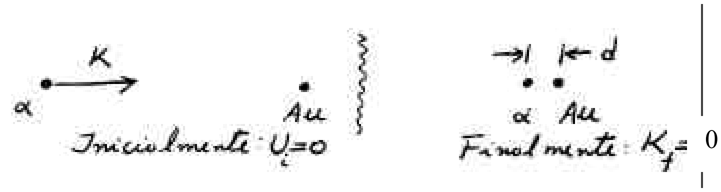
3. $\rho_T = \dfrac{M_T}{V_T}$ $\rho_N = \dfrac{M_N}{V_N}$ $M_T = M_N \Rightarrow \rho_T V_T = \rho_N \bullet V_N$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \Rightarrow \rho_T\bullet R_T^3 = \rho_N\bullet R_N^3 \Rightarrow R_N = R_T\left(\rho_T/\rho_N\right)^{1/3}$$

$$R_N = 6{,}37\bullet 10^6\bullet\left(5{,}52\bullet 10^3/2{,}3\bullet 10^{17}\right)^{1/3}[m] \simeq 184[m]$$

---

4. a) Oro: $^{197}_{79}Au$ $^{4}_{2}He : \alpha$



$$K + U = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad K_i = \left|U_f\right| = k_c \frac{(2e)(79e)}{d} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 79 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{10 \cdot 10^{-15}}$$

$$K_i = 3{,}6 \cdot 10^{-12}[J] = 2{,}3 \cdot 10^7 [eV].$$

b) $K'_i = \dfrac{k_c(e)(79e)}{d} = \dfrac{1}{2} K_i \simeq 11[MeV].$

c) $K_i = 2eV_\alpha \quad ; \quad K'_i = eV_p \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{K_i}{K'_i} = \dfrac{2\cancel{e}V_\alpha}{\cancel{e}V_p} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_p}{V_\alpha} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

---

5. ${}^{56}_{26}Fe$ $\qquad M\left({}^{56}_{26}Fe\right) = 26 m_p + (56-26) m_n - E_b / c^2$

$$55{,}934939[u] = 26 \cdot 1{,}007276[u] + 30 \cdot 1{,}008665[u] - E_b / c^2 .$$

$$\Rightarrow E_b = 0{,}514187[u] \cdot c^2 = 0{,}514187[u] \cdot c^2 \cdot 931{,}5[MeV/u \cdot c^2]$$

$$E_b \simeq 479[MeV] \qquad ; \qquad \frac{E_b}{A} \simeq 8{,}6[MeV] \qquad (A = 56)$$

---

6. a) $U = k_c \cdot \dfrac{e^2}{d} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot e}{3{,}0 \cdot 10^{-15}} = 4{,}8 \cdot 10^5 [eV] = 0{,}48[MeV]$

b) $E_0(\text{electron}) \simeq 0{,}511[MeV]$

Ambos valores son del mismo orden de magnitud.

---

7. $A(t) = A(0) \cdot 2^{-t/T} \quad ; \quad A(2) = A(0) \cdot 2^{-2/T} \quad ; \qquad A(2) = \dfrac{1}{5} A(0) \Rightarrow \dfrac{1}{5} = 2^{-2/T}$

$5 = 2^{2/T} \qquad \Rightarrow \ln 5 = \dfrac{2}{T} \ln 2 \Rightarrow T = \dfrac{2 \ln 2}{\ln 5} \simeq 0{,}86[h]$

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{1}{2} \ln 5 = 0{,}80[h^{-1}]$

---

8. $A = \lambda N \qquad\qquad \lambda T = \ln 2 \Rightarrow N = A/\lambda = AT/\ln 2$

$$N = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}}{\ln 2} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 8{,}1 \cdot 24 \cdot 3600 \simeq 7{,}5 \cdot 10^9 \text{ (núcleos).}$$

9. a) $X = \left({}^{65}_{28}\mathrm{Ni}\right)^{*}$ b) $X = {}^{211}_{82}\mathrm{Pb}$ c) $X = {}^{55}_{27}\mathrm{Co}$

d) $X = e^{-}$ e) $X = {}^{1}_{1}\mathrm{p}$

---

10. $M_{inicial} \cdot c^2 = M_{final} \cdot c^2 + E_{liberada}$

$$E_{liberada} = (238{,}050786 - 234{,}043583 - 4{,}002603) \cdot \cancel{c}^2 \cdot [\cancel{u}] \cdot 931{,}5 \left[\frac{\mathrm{MeV}}{\cancel{u} \cdot \cancel{c}^2}\right]$$

$$E_{liberada} \simeq 4{,}3[\mathrm{MeV}]$$

---

11. Despreciando la velocidad de retroceso del núcleo ${}^{243}_{90}\mathrm{Th}$, la energía cinética de la partícula α es aproximadamente 4,3[MeV]. . Sin hacer tal aproximación, tenemos:

Conservación de momentum lineal :

$$M(Th) \cdot v = M(\alpha) \cdot V$$

Conservación de energía :

$$E_{liberada} = \frac{1}{2} M(Th) \cdot v^2 + \frac{1}{2} M(\alpha) \cdot V^2$$

$$\Rightarrow E_{liberada} = \underbrace{\tfrac{1}{2} M(\alpha) \cdot V^2}_{K_\alpha} \left(1 + \frac{M(\alpha)}{M(Th)}\right) \qquad \Rightarrow K_\alpha \simeq \frac{4{,}3}{1 + \frac{4}{234}} \simeq 4{,}2[\mathrm{MeV}]$$

---

12. ${}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

$$\underbrace{m(p)}_{1{,}007276[u]} \cdot c^2 + \underbrace{m(Li)}_{7{,}016005[u]} \cdot c^2 = 2\underbrace{m(He)}_{4{,}002603[u]} \cdot c^2 + Q$$

$$Q = 0{,}018075[u] \cdot c^2 \cdot 931{,}5[\mathrm{MeV}/u \cdot c^2] \simeq 16{,}8[\mathrm{MeV}]$$

Este resultado es muy parecido al valor medido experimentalmente, que es : 17,3[MeV].

CAPÍTULO 46 (FISIÓN Y FUSIÓN)

1. $${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow \begin{cases} {}^{90}_{38}Sr + {}^{144}_{54}Xe + 2\,{}^{1}_{0}n \\ {}^{90}_{38}Sr + {}^{143}_{54}Xe + 3\,{}^{1}_{0}n \\ {}^{90}_{38}Sr + {}^{142}_{54}Xe + 4\,{}^{1}_{0}n \end{cases}$$ Aparecen los isótopos de Xenón indicados.

---

2. $$\underbrace{m_n \bullet c^2 + m(U) \bullet c^2}_{E_{inicial} \simeq 219.883[MeV]} = m(Ba) \bullet c^2 + m(Kr) \bullet c^2 + 3m_n \bullet c^2 + E_{liberada}$$

Usando los datos del problema, se obtiene: $E_{liberada} \simeq 200[MeV]$

$$E_{liberada} / E_{inicial} \simeq 9 \bullet 10^{-4}$$

---

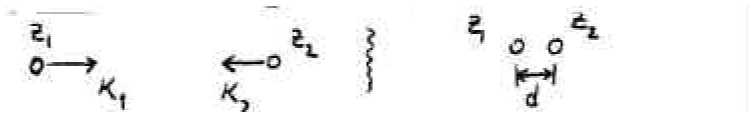
3. a) $E_{útil} / E_{liberada} = 0{,}30 \quad E_{útil} = 1{,}0[GW] \bullet 1{,}0[año] \simeq 3{,}15 \bullet 10^{16}[J]$

$$E_{lib.} = 200[MeV] \bullet N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{E_{útil}}{200[MeV] \bullet 0{,}30}$$

$$M = \frac{N}{N_A} \bullet 235[g] = \frac{3{,}15 \bullet 10^{16}[J] \bullet 235[g]}{0{,}3 \bullet 200[MeV] \bullet 6 \bullet 10^{23}} \simeq 1{,}29 \bullet 10^{3}[kg]$$

b) $$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho} = \frac{1{,}29 \bullet 10^3[kg]}{\frac{4}{3}\pi \bullet 18{,}7[kg/dm^3]} \quad \Rightarrow \quad R \simeq 2{,}54[dm]$$

4. a)



Inicialmente

Finalmente
(justo antes de fusionarse)

$K + U = \text{constante}$, con $U_{inicial} = 0$ y $K_{final} = 0$. Entonces,

$$K = K_1 + K_2 = \frac{k_c Z_1 e \cdot Z_2 e}{d}$$

$$K = 9 \cdot 10^9 \cdot Z_1 Z_2 \cdot \frac{e}{d} [eV] = 0{,}144 \cdot Z_1 Z_2 [MeV]$$

b) $D = {}^2_1H$, $T = {}^3_1H$, $Z_1 = Z_2 = 1$

$\Rightarrow$ $K = 0{,}144 [MeV]$ (para ambas reacciones).

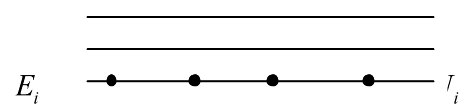
IV. MECÁNICA ESTADÍSTICA

1. GLÓBULO

Sistemas de muchas partículas tales como: el aire en una habitación, la radiación electromagnética en una cavidad, o los electrones en un metal, requieren mecánica estadística para el estudio de sus propiedades. Los tres sistemas mencionados tienen características comunes y se estudian mediante un modelo de gas ideal en que las partículas no interactúan entre sí, y llegan al equilibrio térmico mediante intercambio de energía a través de las paredes del recipiente. En el estado de equilibrio, los sistemas poseen una temperatura definida y una distribución determinada de la energía entre las partículas.

La energía total U de un sistema de partículas se calcula sumando la energía de cada una de ellas (pues no hay energía de interacción entre ellas). Para un sistema de niveles discretos de energía

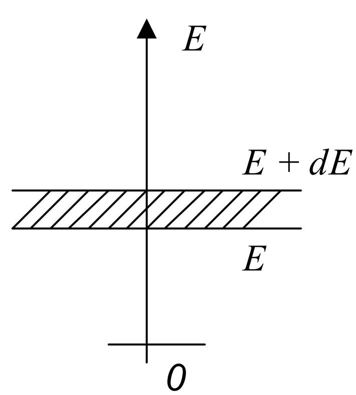
$$U = \sum_i E_i \; N_i \quad ,$$



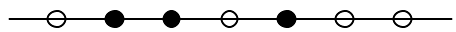
donde N_i es el número de partículas en el nivel de energía E_i. Para sistemas en que la energía es una cantidad continua,

$$U = \int E dN = \int E \left(\frac{dN}{dE} \right) dE \quad ,$$

donde dN es el número de partículas con energía entre E y $E + dE$. Esta manera de calcular la energía también es útil para sistemas que poseen un volumen macroscópico, pues en tal caso la separación entre niveles adyacentes es muy pequeña.



Conviene distinguir entre el número de partículas en un nivel de energía (N_i) y el número de estados disponibles correspondientes a dicho nivel (g_i). En la figura se ilustra el caso de un nivel con 7 estados disponibles $(g_i = 7)$, tres de los cuales están ocupados $(N_i = 3)$.



En un estado de equilibrio térmico, el número de partículas en un nivel de energía e_i (o número de estados ocupados con energía e_i) se construye como el producto del número de estados disponibles (g_i) por la probabilidad de ocupación.

La probabilidad de que sea ocupado un estado de energía e_i depende de :

a) el tipo de partículas que constituyen el sistema, y

b) la relación entre la longitud de onda De Broglie (l_B) de una partícula típica y la distancia típica (d) entre ellas.

Si $l_B \ll d$, las partículas obedecen a la estadística clásica de Maxwell-Boltzmann, y el número de estados ocupados con energía e_i es :

$$N_i = g_i \, e^{-(a + e_i / kT)} .$$

Si $l_B \sim d$, las partículas obedecen a una estadística cuántica. Acá aparece una distinción entre sistemas de partículas con spin entero (1, 2, ...) o bosones que obedecen a la estadística de Bose-Einstein, y partículas con spin semientero (1/2 , 3/2, ...) o fermiones que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac. Para ambos casos, el número de estados ocupados con energía e_i se escribe :

$$N_i = \frac{g_i}{e^{a + e_i / kT} + d} \quad ,$$

donde $d = -1$ para bosones, $d = 1$ para fermiones. El parámetro a determina para cada sistema en particular.

Notar que para niveles de energía tales que d se puede despreciar en comparación con la exponencial, se obtiene una aproximación que coincide con la estadística clásica.

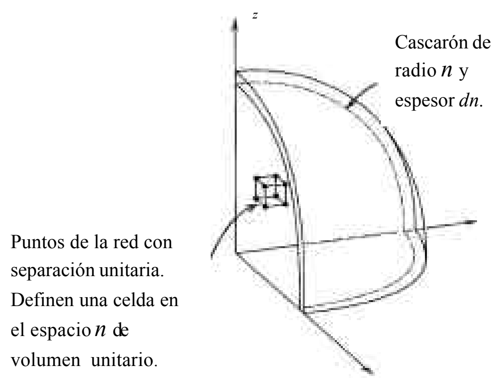
NÚMERO DE ESTADOS DISPONIBLES EN UNA CAJA CÚBICA DE PAREDES DURAS.

El estado de una partícula se describe con tres números enteros positivos $\left(n_x, n_y, n_z\right)$ asociados a las ondas estacionarias en cada una de las tres direcciones espaciales paralelas a los lados de la caja, más los números que describen el estado interno de una partícula. La energía de una partícula es función de $n = \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{1/2}$.

En un sistema de coordenadas ortogonales $\left(n_x, n_y, n_z\right)$ cada punto con n_x, n_y y n_z enteros positivos representan η estados, siendo η el número de estados internos de una partícula. Para contar aproximadamente muchos estados, conviene asociar a cada punto con n_x, n_y, n_z enteros positivos un volumen cúbico de lados $\Delta n_x = \Delta n_y = \Delta n_z = 1$ y a continuación calcular el volumen correspondiente al conjunto de puntos que se desea contar.

Entonces, el número de estados $g(n)dn$ en el rango comprendido entre n y $n + dn$, corresponde a $1/8$ del volumen del cascarón esférico de radio exterior n y espesor dn. Es decir,

$$g(n)dn = \eta \bullet \frac{1}{8} 4\pi\, n^2 dn\,.$$



Partículas cuánticas. La energía de una partícula se expresa como $E = \varepsilon_0 \bullet n^2$, y el número de estados con energía en el rango comprendido entre E y $E + dE$ que resulta de sustituir $n^2 dn$ en la expresión anterior es :

$$g(E)dE = \eta \bullet \frac{\pi}{4\varepsilon_0}\left(\frac{E}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} dE\,.$$

La cantidad $g(E)$ se denomina densidad de estados disponibles. La cantidad g_i que se usa cuando los niveles son discretos, se denomina degenerancia o número de estados disponibles.

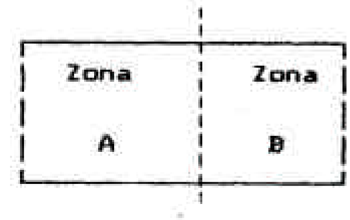
Radiación. La energía de un fotón se expresa como $E = e_0 \bullet n$, y el número de estados con energía en el rango comprendido entre E y $E + dE$ que resulta de sustituir $n^2 dn$ en la expresión para $g(n)dn$ es:

$$g(E)dE = h \bullet \frac{p}{2e_0}\left(\frac{E}{e_0}\right)^2 dE \quad .$$

Note que la densidad de estados para fotones (partículas sin masa) resulta diferente que para partículas con masa.

2. PROBLEMAS – 10 EJERCICIOS

1. Una partícula tiene la misma probabilidad para estar en A que en B. Determine la cantidad de posibilidades para 3 y para 10^{23} partículas.



2. Un sistema posee los niveles de energía (de una partícula) igualmente espaciados: 0, E, 2E, 3E, 4E, 5E, ... con degenerancias: 2, 1, 2, 1, 2, 1, ... respectivamente. Represente gráficamente las posibles maneras de repartir cuatro partículas (con energía total 4E) en los niveles de energía indicados, si :

   a) las partículas son bosones,

   b) las partículas son fermiones.

3. N partículas clásicas en equilibrio a temperatura T se reparten en dos niveles de energía: 0 y E (ambos con la misma degenerancia).

   a) Determine la energía promedio (por partícula).

   b) Examine el límite $E \ll kT$ y comente.

   c) ¿A qué temperatura T la cantidad promedio de partículas en el nivel de energía E es 1/4 del total?

4. Los posibles valores de energía para un sistema de partículas clásicas es 0, E, 2E, ... , nE, ...

   a) Determine la energía media de las partículas.

   b) Examine el límite de $E \ll kT$.

5. Si en un gas ideal clásico se cumple que $E = pc$, determine la energía promedio por partícula.

6. Estime a qué longitud de onda emite máxima radiación el cuerpo humano.

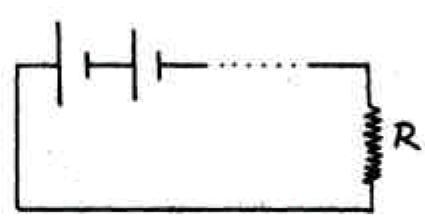
7. En el Sol la temperatura interior es de 10^7[K] y la concentración de electrones es de 10^{30}[cm^{-3}]. ¿Qué distribuciones usaría para calcular propiedades térmicas? Justifique.

8. ¿Qué estadística se aplica a electrones en un trozo de Cu a temperatura ambiente y a temperatura de 8[K]?

9. Calcule el número de electrones libres por átomo de un metal con energía de Fermi de 3,8[eV], función de trabajo de 2,5[eV], masa molar de 138[g/mol], densidad de 3,78[g/cm^3] y a temperatura ambiente.

10. Determine la corriente promedio y la potencia media disipada en la resistencia $R = 10[\Omega]$. Cada batería tiene la misma posibilidad de estar en cualquiera de las posiciones:

durante cada segundo.



3. SOLUCIONES – 10 EJERCICIOS

1. n_A : número de partículas en zona A.

   n_B :número de partículas en zona B.

   $N = n_A + n_B$: número total de partículas.

Consideremos todas las posibilidades para diferentes valores de N.

$N = 2$

n_A	0	1	2
n_B	2	1	0
Posibilidades	1	2	1

Total : 4 = 2^2

$N = 3$

n_A	0	1	2	3
n_B	3	2	1	0
Posibilidades	1	3	3	1

Total : 8 = 2^3

$N = 4$

n_A	0	1	2	3	4
n_B	4	3	2	1	0
Posibilidades	1	4	6	4	1

Total : 16 = 2^4

En general :

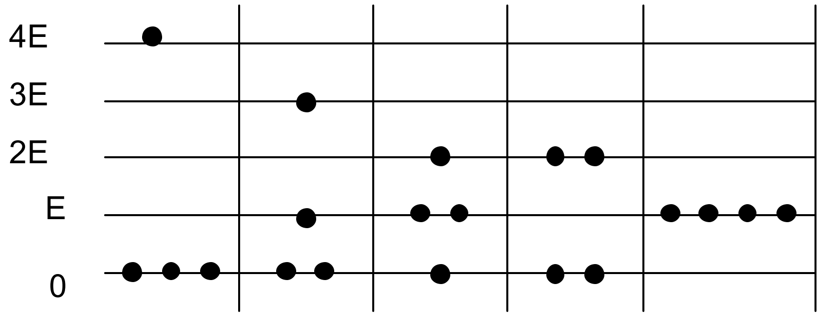
n_A	0	1	2	3		- - -	*N-1*	*N*
n_B		*N-1*	*N-2*	*N-3*		- - -	1	0
Posib.	1	*N*	$\frac{N(N-1)}{2}$			- - -	*N*	1

Total : 2^N

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{2 \bullet 3} = \binom{N}{3} = \frac{N!}{3!(N-3)!}$$

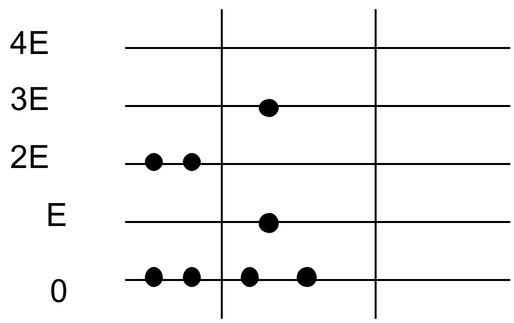
Probar por inducción que : $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$

2. a) Bosones



Para bosones, no hay restricción a la ocupación en cada nivel. Puede haber un número arbitrario de bosones en el mismo estado cuántico.

b) Fermiones



Para fermiones, la ocupación no puede exceder a la degenerancia, en cada nivel.

---

3. E ———————— $n_E = g \bullet e^{-E/k_BT}$

0 ———————— $n_0 = g \bullet e^0$

$$N = n_0 + n_E = g\left(1 + e^{-E/k_BT}\right)$$

$$E_T = 0 \bullet n_0 + E \bullet n_E = g\,E \bullet e^{-E/k_BT}$$

Entonces ;

a) $$\frac{E_T}{N} = \frac{g\,E \bullet e^{-E/k_BT}}{g\left(1 + e^{-E/k_BT}\right)} = \frac{E \bullet e^{-E/k_BT}}{1 + e^{-E/k_BT}}$$

b) Si $E \ll k_BT$; $e^{-E/k_BT} \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_T}{N} \simeq \frac{1}{2}E$

Notar que en estas condiciones; $n_0 = n_E = \frac{1}{2}N$.

4. Supondremos que la degenerancia es igual para todos los niveles (g).

$$n(E_n) = g \bullet e^{-E_n/k_BT}$$

$$N = g + g \bullet e^{-E/k_BT} + g \bullet e^{-2E/k_BT} + \cdots\cdots$$

$$= g\left(1 + e^{-E/k_BT} + e^{-2E/k_BT} + \cdots\right) = g \bullet \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nE/k_BT}$$

$$E_T = 0 \bullet n(0) + E \bullet n(E) + 2E \bullet n(2E) + \cdots$$

$$= 0 + E \bullet g \bullet e^{-E/k_BT} + 2E \bullet g \bullet e^{-2E/k_BT} + \cdots$$

$$= g \sum_{n=0}^{\infty} n\, E \bullet e^{-n\,E/k_BT}$$

Probar que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\,E/k_BT} = \dfrac{1}{1 - e^{-E/k_BT}}$, por tratarse de una serie geométrica.

Entonces, con $b = \dfrac{1}{k_BT}$; $\dfrac{\partial N}{\partial b} = -g \sum_{n=0}^{\infty} n\,E\,e^{-n\,E/k_BT} = -E_T$.

Luego;

$$N = g \bullet \frac{1}{1 - e^{-E/k_BT}} \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial b} = \frac{-g\,E\,e^{-E/k_BT}}{\left(1 - e^{-E/k_BT}\right)^2} \quad ; \quad E_T = \frac{g\,E\,e^{-E/k_BT}}{\left(1 - e^{-E/k_BT}\right)^2}$$

a) $\dfrac{E_T}{N} = \dfrac{E \bullet e^{-E/k_BT}}{1 - e^{-E/k_BT}}$

b) Si $E \ll k_BT$; $e^{-E/k_BT} \simeq 1 - E/k_BT$ $\qquad \dfrac{E_T}{N} \simeq k_BT$

---

5. Consideremos que el gas está encerrado en un cubo de paredes duras. Las funciones de onda deben anularse en los extremos del cubo. Entonces, en cada una de las tres direcciones espaciales se cumple: $k_i\,L = n_i\,p$, con $n = 1, 2, \ldots$. El momentum p es de magnitud:

$$p = \hbar\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \hbar\frac{p}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{h}{2L} \bullet n$$

Luego; $E = p\,c = \dfrac{hc}{2L} \bullet n$. En estas condiciones la densidad de estados es (ver Glóbulo de Mecánica Estadística) : $g(E) = \dfrac{4p\,L^3E^2}{(hc)^3}$.

Entonces; $N = \int_0^\infty e^{-(a+E/k_B T)} \bullet g(E)dE$; $E_T = \int_0^\infty \bullet e^{-(a+E/k_B T)} E \bullet g(E)dE$

$$\frac{E_T}{N} = \frac{\int_0^\infty E^3 \bullet e^{-E/k_B T}\, dE}{\int_0^\infty E^2 \bullet e^{-E/k_B T}\, dE} = \frac{3!(k_B T)^4}{2!(k_B T)^3} = 3 \bullet \underbrace{k_B}_{\text{Constante de Boltzman}} T$$

$$k_B = 1{,}38 \bullet 10^{-23}\,[J/k]$$

6. $l_{máx} \bullet T = 2{,}8978 \bullet 10^{-3}\,[m \bullet K]$: Ley de Wien.

$T = 273 + 37 = 310[K]$

$$l_{máx} = \frac{2{,}8978 \bullet 10^{-3}}{3{,}10 \bullet 10^2} \simeq 0{,}93 \bullet 10^{-5}[m] \sim 10[mm].$$

7. En el interior del Sol hay radiación, electrones y protones (esencialmente). Para la radiación se usa la estadística de Bose-Einstein. Para las partículas, se calculan y comparan la longitud de onda de Broglie (l_B) y la distancia media (d) entre partículas.

$$\frac{N}{V} = \frac{10^{30} electrones}{1\left[cm^3\right]} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{N} = 10^{-30}\left[cm^3\right] \Rightarrow d = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \simeq 10^{-10}\left[cm\right].$$

La distancia media entre partículas es $d \simeq 10^{-12}\,[m]$.

Para estimar l_B se usan : $E \sim k_B T$; $E \sim \frac{p^2}{2m}$; $l_B = \frac{h}{p}$.

Entonces; $k_B T = \frac{h^2}{2m_e\, l_B^2} \quad \Rightarrow \quad l_B \simeq \frac{h}{\sqrt{2m_e\, k_B T}}$

$$l_B \simeq \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 \bullet \underbrace{k_B T}_{\left(\frac{k_B T}{k_B T_0}\right)(k_B T_0)}}} = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15}[eV \bullet s] \bullet 3 \bullet 10^8 [m/s]}{\sqrt{2 \bullet 0{,}511 \bullet 10^6 [eV] \bullet \frac{1}{40} \bullet \frac{10^7}{300}}} \simeq 43, \bullet 10^{-12}\,[m]$$

$$(k_B T_0) \simeq \frac{1}{40}\left[eV\right] \; a \; T_0 = 300[K]$$

Para electrones $l_B > d$ $\Rightarrow$ debe usarse estadística cuántica de Fermi-Dirac.

Para protones $l_B \simeq d$ $\Rightarrow$ también debe usarse estadística de Fermi-Dirac.

8. Datos para Cobre: $r = 8{,}9\left[g/cm^3\right]$, $\mathfrak{M} = 63{,}5[g/mol]$.

a) Se requiere calcular aproximadamente la distancia media (d) entre electrones libres, y la longitud de onda de Broglie (l_B). Consideremos un electrón libre por átomo, $T_{ambiente} = 300[K]$ y el dato $k_B T_{ambiente} \simeq \frac{1}{40}[eV]$.

Puesto que $d = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$, entonces :

$$\frac{V}{N} = \frac{V}{N \bullet m_{Cu}} \bullet m_{Cu} = \frac{V}{M} \bullet m_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{r} =$$

$$= \frac{1}{r} \bullet \frac{N_A\, m_{Cu}}{N_A} = \frac{\mathfrak{M}}{r\, N_A} = \frac{63{,}5}{8{,}9 \bullet 6 \bullet 10^{23}}\left[cm^3/\acute{a}tomo\right]$$

$$\frac{V}{N} \simeq 10^{-23}\left[cm^3/\acute{a}tomo\right] \quad \Rightarrow d \simeq 2, \bullet 10^{-8}[cm] \simeq 2, \bullet 10^{-10}[m].$$

Para obtener l_B se procede como en el ejercicio anterior.

$$l_B = \frac{h}{p} \simeq \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 E}} \simeq \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 \bullet k_B T}}$$

$$l_B = \frac{4{,}1 \bullet 10^{-15} \bullet 3 \bullet 10^8}{\sqrt{2 \bullet 0{,}5 \bullet 10^6 \bullet \frac{1}{40}}} = \frac{12 \bullet 10^{-7}}{10^3} \bullet 6, \simeq 72 \bullet 10^{-10}[m]$$

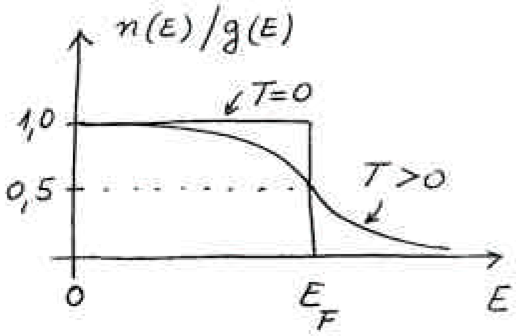
Luego, $l_B > d$; lo cual significa que se requiere la estadística cuántica de Fermi-Dirac.

b) A $T = 8[K]$, l_B es aún mayor que en el caso anterior, y se sigue cumpliendo la condición para usar una estadística cuántica de Fermi-Dirac.

9. Datos: $E_F = 3{,}8[eV]$; $f = 2{,}5[eV]$; $\mathfrak{M} = 138[g/mol]$;

$r = 3{,}78[g/cm^3] = 3{,}78 \bullet 10^6 [g/m^3]$

Consideremos electrones libres en una caja cúbica de paredes duras, a $T = 0[K]$. El resultado pedido es casi independiente de la temperatura y el cálculo se simplifica enormemente a $T = 0[K]$.



En este caso $g(E) = \dfrac{2p}{4e_0^{3/2}} \bullet E^{1/2}$,

con $e_0 = \dfrac{h^2}{8mL^2}$. (Ver Glóbulo de Mecánica estadística)

$$N = \int n(E)dE \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2p}{4e_0^{3/2}} \bullet \int_0^{E_F} E^{1/2}\, dE = \frac{2p}{4e_0^{3/2}} \bullet \frac{2}{3} E_F^{3/2}$$

$$E_T = \int E \bullet n(E)dE \Rightarrow \quad E_T = \frac{2p}{4e_0^{3/2}} \bullet \int_0^{E_F} E^{3/2}\, dE = \frac{2p}{4e_0^{3/2}} \bullet \frac{2}{5} E_F^{5/2}$$

Notar el importante resultado : $\dfrac{E_T}{N} = \dfrac{3}{5} E_F$.

Tenemos :

$$N = \frac{p\,(8mE_F)^{3/2} L^3}{3h^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{L^3} = \frac{N}{V} = \frac{p\,(\overset{4 \bullet 2}{8} m_e c^2 E_F)^{3/2}}{3(hc)^3} = n$$

n: número de electrones por unidad de volumen.

Numéricamente;

$$n = \frac{8p}{3} \bullet \frac{(2 \bullet 0{,}5 \bullet 3{,}8)^{3/2}}{(4{,}1 \bullet 3)^3} \bullet 10^{30} = 3{,}3 \bullet 10^{28} [\text{electrón/m}^3]$$

Finalmente;

$$\frac{N_{electrones}}{N_{átomos}} = \frac{N_{electrones}}{V} \bullet \frac{V}{N_{átomos}} = n \bullet \frac{V}{N_{átomos}} \bullet \frac{m_{átomo}}{m_{átomo}} \bullet \frac{N_A}{N_A} = \frac{nV\mathfrak{M}}{M \bullet N_A}$$

$$= \frac{n\,\mathfrak{M}}{r\,N_A} = \frac{3{,}3 \bullet 10^{28} \bullet 138}{3{,}78 \bullet 10^6 \bullet 6, \bullet 10^{23}} = 2$$

10. Consideremos N baterías en serie, n de las cuales poseen voltaje $+v$ y $N-n$ poseen voltaje $-v$. El voltaje total es la suma : $V(n) = n \bullet v + (N-n)(-v)$.

Entonces,

$$V(n) = (2n - N) \bullet v\,.$$

La corriente correspondiente es : $I(n) = \dfrac{V(n)}{R}$.

La potencia es : $P(n) = \dfrac{[V(n)]^2}{R}$.

La corriente media y la potencia media se obtienen haciendo el promedio ponderado, de acuerdo al número de maneras de obtener cada valor $V(n)$.

$$\left.\begin{aligned} \bar{I} &= \sum_{n=0}^{N} I(n) \bullet p(n) \\ \bar{P} &= \sum_{n=0}^{N} P(n) \bullet p(n) \end{aligned}\right\}$$

$p(n)$ es la probabilidad de cada valor $V(n)$.

$$p(n) = \frac{\binom{N}{n}}{2^N}$$ *(ver ejercicio 1)*

Se deja las sumas como ejercicio.

Lo anterior se ilustra mostrando todas las posibilidades con algunos valores de N.

$N = 2$

$$\underbrace{\begin{array}{ccl} +v & +v & n=2 \\ +v & -v & n=1 \\ -v & +v & n=1 \\ -v & -v & n=0 \end{array}}_{2^N = 2^2 = 4 \text{ posibilidades}}$$

$1 = \binom{2}{2}$ posibilidades de obtener $n=2$

$2 = \binom{2}{1}$ posibilidades de obtener $n=1$

$1 = \binom{2}{0}$ posibilidades de obtener $n=0$

$N = 3$

$$\underbrace{\begin{array}{cccll} +v & +v & +v & n=3 & \longrightarrow \binom{3}{3} = 1 \\ +v & +v & -v & n=2 & \\ +v & -v & +v & n=2 & \longrightarrow \binom{3}{2} = 3 \\ +v & -v & -v & n=1 & \\ -v & +v & +v & n=2 & \quad\ \binom{3}{1} = 3 \\ -v & +v & -v & n=1 & \\ -v & -v & +v & n=1 & \\ -v & -v & -v & n=0 & \longrightarrow \binom{3}{0} = 1 \end{array}}_{2^N = 2^3 = 8 \text{ posibilidades}}$$

Por inducción probar el resultado dado anteriormente :

$$p(n) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{n} = \frac{N!}{2^N n! \, (N-n)!}$$