Ayudantía Nº 1: Ondas Electromagnéticas

Problema 1 Una onda electromagnética con longitud de onda de 435 [nm] viaja en el vacío en la dirección $-z$. El campo eléctrico tiene una amplitud de $2.70 \cdot 10^{-3}[V/m]$ y es paralelo al eje x.
(a) ¿Cuál es la frecuencia de la onda?
(b) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético?
(b) Escriba las ecuaciones vectoriales para $\overrightarrow{E}(z,t)$ y $\overrightarrow{B}(z,t)$.

Desarrollo Problema 1 (a) La rapidez de las ondas es $c = 3.00 \cdot 10^8[m/s]$. Por lo tanto, se tiene que la frecuencia se calcula como:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \cdot 10^8[m/s]}{435 \cdot 10^{-9}[m]} = 6.90 \cdot 10^{14}[Hz]$$

(b)

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{2.70 \cdot 10^{-3}[V/m]}{3.00 \cdot 10^8[m/s]} = 9.00 \cdot 10^{-12}[T]$$

(c) Se debe obtener los valores de k y de ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.44 \cdot 10^7[rad/m]$$

$$\omega = 2\pi f = 4.34 \cdot 10^{15}[rad/s]$$

Luego, si $\overrightarrow{E}$ se encuentra en la dirección $\hat{\imath}$ entonces el campo magnético $\overrightarrow{B}$ se debe encontrar en la dirección $-\hat{\jmath}$ de modo que $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$ esté en la dirección $-\hat{k}$. Con esto:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}(z,t) &= \hat{\imath}E_{max}\cos[kz + \omega t] \\ &= 2.70 \cdot 10^{-3}\cos\left[(1.45 \cdot 10^7 m^{-1})z + (4.34 \cdot 10^{15} rad/s)t\right]\widehat{\imath} \quad [V/m]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}(z,t) &= \hat{-j}B_{max}\cos[kz + \omega t] \\ &= -9.00 \cdot 10^{-12}\cos\left[(1.45 \cdot 10^7 m^{-1})z + (4.34 \cdot 10^{15} rad/s)t\right]\widehat{\jmath} \quad [T]\end{aligned}$$

Problema 2 Una onda electromagnética tiene un campo magnético dado por:

$$\overrightarrow{B}(x,t) = 8.25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{sen}\left[1.38 \cdot 10^4 rad/m)x + wt\right]\widehat{\jmath} \quad [T] \tag{1}$$

(a) ¿En qué dirección viaja la onda?
(b) ¿ Cuál es la frencuencia f de la onda?
(c) Escriba la ecuación vectorial para $\overrightarrow{E}(x,t)$

Desarrollo Problema 2 (a) La onda en este problema tiene una fase diferente, entonces $B_y(z,t) = B_{max}\,\mathrm{sen}[kx + \omega t]$ La fase de la onda está dada por $kx + \omega t$, entonces la onda viaja en dirección $-x$.

(b) Considerando la relación $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$ se tiene que:

$$f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{(1.38 \cdot 10^4[rad/m])(3.00 \cdot 10^8[m/s])}{2\pi} = 6.59 \cdot 10^{11}[Hz]$$

(c) Como el campo magnético $\overrightarrow{B}$ se encuentra en la dirección $+\hat{j}$ y la dirección de propagación es $-\hat{i}$ entonces el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ se debe encontrar en la dirección $+\hat{k}$ de modo que $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$ esté en la dirección $-\hat{i}$. Con esto:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}(x,t) &= +cB(x,t)\hat{k} = cB_{max}\,\text{sen}\,[kx + \omega t]\,\hat{k} \\
&= (c(3.25 \cdot 10^{-9}[T]))\,\text{sen}\left[(1.38 \cdot 10^4 rad/m)x + (4.14 \cdot 10^{12} rad/s)t\right]\widehat{k} \qquad [V/m] \\
&= 2.48\,\text{sen}\left[(1.38 \cdot 10^4 rad/m)x + (4.14 \cdot 10^{12} rad/s)t\right]\widehat{k} \qquad [V/m]
\end{aligned}$$

Problema 3 Considere cada una de las siguientes orientaciones de los campos eléctricos y magnéticos. En cada caso indique cuál es la dirección de propagación de la onda.
(a) $\overrightarrow{E} = E\widehat{i}$, $\overrightarrow{B} = -B\widehat{j}$.
(b) $\overrightarrow{E} = E\widehat{j}$, $\overrightarrow{B} = B\widehat{i}$.
(c) $\overrightarrow{E} = -E\widehat{k}$, $\overrightarrow{B} = -B\widehat{i}$.
(d) $\overrightarrow{E} = E\widehat{i}$, $\overrightarrow{B} = -B\widehat{k}$.

Desarrollo Problema 3 La dirección de propagación está dada por $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$
(a) $\hat{S} = \hat{i} \times (-\hat{j}) = -\hat{k}$
(b) $\hat{S} = \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$
(c) $\hat{S} = (-\hat{k}) \times (-\hat{i}) = \hat{j}$
(d) $\hat{S} = \hat{i} \times (-\hat{k}) = -\hat{j}$

Problema 4 La intensidad de un rayo láser cilíndrico es de $0.800W/m^2$. El área de sección transversal del haz es de $3.0 \cdot 10^{-4}m^2$, y la intensidad es uniforme en toda la sección transversal del rayo.
(a) ¿Cuál es la potencia de salida media del láser?
(b) ¿Cuál es el valor rms(eficaz) del campo eléctrico en el rayo?

Desarrollo Problema 4 (a) La potencia media está dada por $P_{media} = I \cdot A$, entonces:

$$P_{media} = I \cdot A = (0.800W/m^2)(3.0 \cdot 10^{-4}m^2) = 2.4 \cdot 10^{-4} \qquad [W]$$

(b) Considerando que la intensidad está dada por $I = \epsilon_o c E_{rms}^2$, entonces:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{I}{\epsilon_o c}} = \sqrt{\frac{0.800W/m^2}{(8.85 \cdot 10^{-12}F/m)(3.00 \cdot 10^8 m/s)}} = 17.4\ V/m$$

Problema 5 La estación de televisión pública KQED de San Francisco emite una señal de radio sinusoidal con potencia de $316[kW]$. Suponga que la onda se difunde de manera uniforme en un hemisferio sobre el terreno. En una casa localizada a $5.00[km]$ de la antena.
(a) ¿Qué presión media ejerce esta onda sobre una superfici totalmente reflejante?
(b) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda?
(c) ¿Cuál es la densidad media de la energía que transporta esta onda?
(d) Para la densidad de energía del inciso c), ¿Qué porcentaje se debe al campo eléctrico y que porcentaje al campo magnético?

Desarrollo Problema 5 (a) La intensidad y la densidad de energía de una onda electromagnética depende de las amplitudes del campo eléctrico y el campo magnético.

La intensidad está dada por $I = P/A$ y la presión para una superficie totalmente reflejante es $P = 2I/c$, por lo tanto:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{316.00W}{2\pi(500m)^2} = 0.0021\ W/m^2$$

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{2(0.0021W/m^2)}{3.00 \cdot 10^8 m/s} = 1.34 \cdot 10^{-11}\ [Pa]$$

(b) Como $I = \frac{1}{2}\epsilon_o c E_{max}^2$ entonces,

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_o c}} = \sqrt{\frac{2(0.00201W/m^2)}{(8.85 \cdot 10^{-12}C^2/N \cdot m^2)(3.00 \cdot 10^8 m/s)}} = 1.23\ [N/C]$$

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{1.23N/C}{3.00 \cdot 10^8 m/s} = 4.10 \cdot 10^{-9}\ [T]$$

(c)

$$u_{media} = \frac{\epsilon_o E_{max}^2}{2} = \frac{(8.85 \cdot 10^{-12}C^2/N \cdot m^2)(1.23N/C)^2}{2} = 6.69 \cdot 10^{-12}\ [J/m^3]$$

(d) La densidad de energía es la misma para el campo eléctrico y e campo magnético, entonces cada una tiene un 50 % de la denisdad de energía.

Problema 6 Un satélite que se encuentra a $575[km]$ sobre la superficie terrestre transmite ondas electromagnéticas sinusoidales con frecuencia de $92.4[MHz]$ uniformemente en todas direcciones, con una potencia de $25.0[kW]$.
(a) ¿Cuál es la intensidad de estas ondas cuando alcanzan un receptor en la superficie terrestre directamente abajo del satélite?
(b) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctricos y magnético en el receptor?
(c) Si el receptor tiene un panel totalmente absorbente que mide $15.0[cm]$ por $40.0[cm]$, orientado con su plano perpendicular a la dirección en que viajan las ondas, ¿cuál es la fuerza media que ejercen estas ondas sobre el panel? ¿Esta fuerza es suficientemente grande para provocar efectos significativos?

Desarrollo Problema 6 Considerando que la presión para una superficie completamente absorvente la presión es $P = I/c$, entonces:

(a)

$$I = \frac{P}{A} = \frac{25000W}{4\pi(575m)^2} = 0.00602\ W/m^2$$

(b) Como $I = \frac{1}{2}\epsilon_o c E_{max}^2$ entonces,

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_o c}} = \sqrt{\frac{2(0.00602W/m^2)}{(8.85 \cdot 10^{-12}C^2/N \cdot m^2)(3.00 \cdot 10^8 m/s)}} = 2.13\ [N/C]$$

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{2.13N/C}{3.00 \cdot 10^8 m/s} = 7.10 \cdot 10^{-9}\ [T]$$

(c)

$$F = P \cdot A = \frac{I}{c}A = \frac{(0.00602W/m^2)(0.150m)(0.400m)}{3.00 \cdot 10^8 m/s} = 1.20 \cdot 10^{-12}\ [N] \quad (2)$$

Problema 7 Dos reflectores cuadrados, cada uno con 1.50[cm] de lado y masa de 4.00[g], están ubicados en los extremos opuestos de una varilla delgada de 1.00[m], extremadamente ligera, que puede girar sin fricción en un vacío alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro (figura 1). Estos reflectores son suficientemente pequeñoos como para ser tratados como masas puntuales en los cálculos de momento de inercia. Los dos reflectores están iluminados en una cara por una onda luminosa sinusoidal que tiene un campo eléctrico con amplitud de 1.25[N/C] y que cae uniformemente en ambas superficies y siempre llega a ellas en forma perpendicular al plano de las superficies. Un reflector tiene un recubrimiento perfectamente absorbente, y el otro tiene un recubrimiento perfectamente reflejante. ¿Cuál es la aceleración angular de este dispositivo?

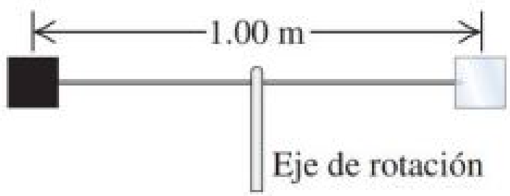

Figura 1: Problema 7

Desarrollo Problema 7 Se considera que ambos reflectores llega la misma intensidad, pero la fuerza en la superficie reflectante es dos veces la fuerza en la superficie abosrbente.

Para la superficie totalemente abosrbente la fuerza en el reflector es:

$$F_{abs} = P \cdot A = \frac{I}{c}A = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_o c E_{max}^2 A}{c} = \frac{1}{2}\epsilon_o A E_{max}^2$$

Para la fuerza totalmente reflectante la fuerza será dos veces este valor, por lo tanto será $\epsilon_o A E_{max}^2$. Con esto el torque neto está dado por:

$$\tau_{neto} = F_{refl} \cdot \frac{L}{2} - F_{abs} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\epsilon_o A E_{max}^2 L}{4} \quad (3)$$

De la segunda ley de newton se tiene que $\tau_{neto} = I \cdot \alpha$, con esto el torque neto es:

$$\tau = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \alpha \quad (4)$$

Por lo tanto, para calcular el valor de α se debe combinar las ecuaciones 3 y 4

$$\alpha = \frac{\epsilon_o A E_{max}^2}{2mL} = \frac{(8.85 \cdot 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)(0.0150m^2)(1.25N/C)^2}{(2)(0.00400Kg)(1.00m)} = 3.89 \cdot 10^{-13}\ /[rad/s^2]$$