1. Ecuación de Onda

$c \to$ constante de proporcionalidad

Considere el siguiente problema de condiciones iniciales asociado a la propagación de una onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \} \; t>0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \cos(x). \end{aligned}\right\} \text{ Distribución inicial}$$

Se pide:

a) Encuentre la solución de D'Alembert.

b) Demuestre, calculando explícitamente las derivadas de segundo orden, que la solución anterior es solución a la ecuación de onda unidimensional.

a)

Solución: Identificar y recuerda: Para la ecuación de onda descrita, se tiene por solución de D'alembert para u:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi$$

función f: sen()

función g: cos()

ξ: variable auxiliar

donde se entiende: $u(x,0) = f(x)$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

plantear y resuelve: Según la solución de D'Alambert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+ct) + \operatorname{sen}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos(\xi)\, d\xi$$

siguiendo los calculos:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+ct) + \operatorname{sen}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\operatorname{sen}(\xi)\Big|_{x-ct}^{x+ct}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+ct) + \operatorname{sen}(x-ct)\right] + \frac{1}{c}\left[\frac{\operatorname{sen}(x+ct) - \operatorname{sen}(x-ct)}{2}\right]$$

$$\boxed{\text{* Recuerda: } \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x)\cos(ct) + \cos(x)\operatorname{sen}(ct) + \operatorname{sen}(x)\cos(ct) - \cos(x)\operatorname{sen}(ct)\right]$$

$$+ \frac{1}{2c}\left[\operatorname{sen}(x)\cos(ct) + \cos(x)\operatorname{sen}(ct) - (\operatorname{sen}(x)\cos(ct) - \cos(x)\operatorname{sen}(ct))\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(2\operatorname{sen}(x)\cos(ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(2\cos(x)\operatorname{sen}(ct)\right)$$

Solución $\to$

$$\boxed{u(x,t) = \operatorname{sen}(x)\cos(ct) + \frac{1}{c}\cos(x)\operatorname{sen}(ct)}$$

b) Calculando las derivadas correspondientes:

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot sen(x)\, sen(ct) + \dfrac{1}{c} \cdot c \cdot cos(x) \cdot cos(ct)$

↳ derivamos respecto al tiempo

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot sen(x)\, sen(ct) + cos(x)\, cos(ct)$

↗ segunda derivada

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 sen(x) cos(ct) - c \cdot cos(x)\, sen(ct)$

Ahora derivamos respecto a la posición

$$\frac{\partial u}{\partial x} = cos(x)\, cos(ct) - \frac{1}{c}\, sen(x)\, cos(ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -sen(x)\, cos(ct) - \frac{1}{c}\, cos(x)\, cos(ct)$$

reemplazando en $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

$$-c^2 sen(x) cos(ct) - c \cdot cos(x)\, sen(ct) = c^2 \cdot \left[-sen(x)\, cos(ct) - \frac{1}{c}\, cos(x)\, cos(ct)\right]$$

$$-c^2 sen(x) cos(ct) - c \cdot cos(x)\, sen(ct) = -c^2 sen(x) cos(ct) - c \cdot cos(x)\, cos(ct)$$ ✓✓ son iguales problema resuelto

∴ la solución de D'Alembert es válida.

2. Onda Transversal

Suponga una cuerda de guitarra ubicada sobre el eje $\hat{x}$. El extremo ubicado en $x = 0$ está fijo. Una onda senoidal incidente viaja en dirección $-\hat{x}$ a una velocidad $c = 143$ m/s, con una amplitud de 0, 75 mm y una frecuencia de 440 Hz (nota LA). Esta onda se refleja en $x = 0$, y la superposición de las ondas viajeras incidente y reflejada forman una onda estacionaria.

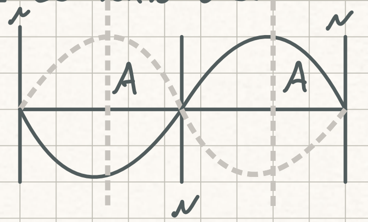
Se pide:

a) Derive una ecuación que modele el desplazamiento de un punto situado en la cuerda en función del tiempo.

b) Encuentre los puntos de la cuerda que no se mueven.

c) Determine la amplitud, velocidad transversal máxima y aceleración transversal máxima en los puntos de máxima oscilación.

<u>Solución</u>: Contexto: ¿Qué es una onda estacionaria?



N: Nodos: puntos que nunca se mueven

A: Antinodos: puntos de amplitud máxima

→ desfase de 180°

Onda hacia la izquierda: $y_1(x,t) = -A\cos(kx+\omega t)$

Onda hacia la derecha: $y_2(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$

Identidad trigonométrica: $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Principio de superposición: $Y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$$= A[-\cos(kx+\omega t) + \cos(kx-\omega t)]$$

$$= \underbrace{2A\operatorname{sen}(kx)}_{\text{forma de la cuerda es sinusoidal}}\underbrace{\operatorname{sen}(\omega t)}_{\text{oscilación vertical}}$$

→ $\operatorname{sen}(0) = 0$

Puntos donde se sitúan los nodos: se da cuando $kx = 0$ $\Rightarrow kx = 0 = \pi, 2\pi, 3\pi$

↳ periodicidad espacial

$\therefore k = 2\pi/\lambda$

importante: A diferencia de una onda viajera, una onda estacionaria <u>NO</u> transfiere energía de un punto a otro

↳ ni de momentum

$x = 0, \pi/k, 2\pi/k, 3\pi/k$

$= 0, \lambda/2, 2\lambda/2, 3\lambda/2$

De regreso al ejercicio:

a) Planifica: Problema de cinemática de una onda transversal (en la dirección de desplazamiento)

plantea y resuelve: Dado que es una onda estacionaria

$A_{total}: 2 \cdot A = 2 \cdot 0{,}75 \text{ mm}$
$= 2 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-4} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \, [m]$

$\omega: 2\pi f = (2\pi \text{ rad}) \cdot (440 \text{ 1/s}) \Rightarrow \omega = 2760 \, [rad/s]$

$k = \omega / v = \dfrac{2760 \, [rad/s]}{143 \, [m/s]} = 19{,}3 \, [rad/m]$

$$\boxed{\therefore y(x,t) = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\left(19{,}3 \, \frac{rad}{m} \, x\right) \cdot sen\left(2760 \, \frac{rad}{s} \cdot t\right)}$$

b) Posición de los nodos: $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{143 \text{ m/s}}{440 \text{ 1/s}} = 0{,}325 \, [m]$

$\therefore x = 0 \, ; \, 0{,}1625 ; \, 0{,}325 ; \, 0{,}4875$

c) Amplitud máxima: $A_{total} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \, [m] \rightarrow 2A$

Velocidad transversal: $v_y(x,t) = \dfrac{dy(x,t)}{dt}$

$sen(ax)' = a\cos(ax)$

$\cdot \dfrac{dy}{dt} = (1{,}5 \cdot 10^{-3}) \, sen(19{,}3x) \cdot (2760)(\cos(2760t))$

$\cdot \dfrac{dy}{dt} = (4{,}15) \underbrace{sen(19{,}3x) \cos(2760t)}_{\text{se mueve entre } -1 \text{ y } 1} [m/s]$

El valor se maximiza para sen (19,3x) máximo

$\therefore$ la velocidad varía entre 4,15 y −4,15 [m/s]

· Aceleración transversal: $a_y = \dfrac{\partial v_y(x\,t)}{\partial t}$

$a_y = (4,15)\cdot(-2760)\cdot sen(19,3x)\cdot sen(2760t)$

$a_y = -1,15\cdot 10^4 \cdot sen(19,3x)\, cos(2760t)$

∴ La aceleración varía entre $-1,15\cdot 10^4$ y $1,15\cdot 10^4$

interpreta: $1,15\cdot 10^4 \approx 4g$

↳ las cuerdas se fabrican con material altamente resistente.

3. Onda Longitudinal

Una onda armónica se propaga a través del aire modificando la posición de las partículas del medio, cuyo desplazamiento/elongación puede modelarse según:

$$\xi(x,t) = 0,0001\cos(8,01 - 2764,52t).$$

Para el aire considere:

$$T = 20^o\,C$$
$$\rho = 1,2\,\text{kg/cm}^3$$
$$c = 343,21\ \text{m/s}.$$

Se pide:

a) Indicar amplitud, longitud y frecuencia.

b) ¿Qué tipo de movimiento exhiben las partículas?.

c) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?.

a) Plantea: De manera general; para el movimiento de la onda periódica, podemos modelarlo según:

$$\underbrace{u(x,t) = A}_{\text{Amplitud}}\cos(\underbrace{K}_{\text{numero de onda}}x - \underbrace{\omega}_{\text{frecuencia angular}}t + \underbrace{\theta_0}_{\text{desfase.}})$$

Resuelve: Análogo al problema anterior:

$A = 0,0001\ [m]$

$\lambda = \dfrac{2\pi}{K} = \dfrac{2\pi}{8,01} = 0,78\ [m]$

$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{2764,52}{2\pi} \approx 440\ [Hz]$

b) La onda se propaga de manera longitudinal, provocando que las partículas del medio se desplacen una distancia ξ (en función del tiempo). Dado que esta función es de naturaleza cosenoidal, las partículas describen un movimiento armónico simple.

c) $v = \lambda f = 343,21\ [m/s]$

4. Ondas de presión y elongación

Responda las siguientes preguntas:

a) Defienda la afirmación:"En una onda sonora senoidal, la variación de presión dada por la ecuación

$$p(x,t) = BkA\sin(kx-\omega t),$$

es máxima donde la elongación descrita por

$$\xi(x,t) = A\cos(kx-\omega t),$$

es cero ".

b) Para una onda de elongación descrita por $\xi(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$, con amplitud $A = 10,0\ \mu$m y longitud de onda $\lambda = 0,250$ m, grafique el desplazamiento (elongación) ξ y la fluctuación de presión p en función de x en $t = 0$. Muestre al menos dos longitudes de onda en sus gráficos.

c) La elongación ξ originada por una onda no senoidal se ilustra en la figura como función de x en $t = 0$. Dibuje una gráfica que muestre la fluctuación de la presión p en esta onda en función de x en $t = 0$. Esta onda posee la misma amplitud de $10,0\ \mu$m que la onda del inciso b). ¿Posee la misma amplitud de presión?. Justifique su respuesta.

a) Identifica y resuelve: El máximo/mínimo de una función se da cuando $\frac{df(x)}{dx} = 0$

plantea: Se busca el punto donde $p(x,t)$ es máximo y luego se evalua en la función original

$$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right|_{x_0} = Bk^2A\cos(kx_0-\omega t) = 0$$

resuelve: Esto se satisface siempre y cuando

$$kx_0 - \omega t = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

haciendo $t=0$ (por simplicidad) $\rightarrow kx_0 = \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$$x_0 = \frac{\pi}{2k}(2n-1)$$

Evaluando en $y(x,t)$: $y(x_0, t=0) = A\cos(kx_0 - \omega t)$ $\rightarrow x_0$ 0

$$= A\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2k}(2n-1)\right)$$

$$= A\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)$$

$$= 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Interpreta: Se observa que cuando el desplazamiento es máximo, el volumen es máximo, por lo que el cambio de presión es mínima

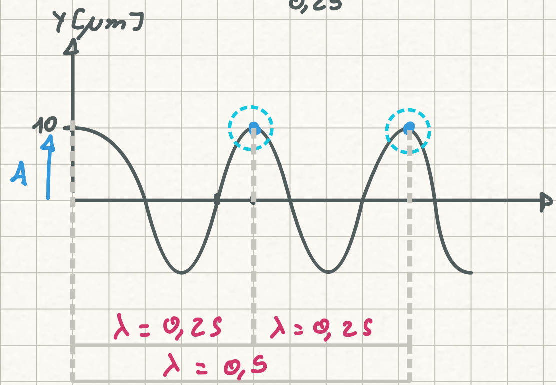
b) Se nos propone que para una onda sonora dada por $y(x,t)$ con amplitud $A = 10\,[\mu m]$ y longitud de onda $\lambda = 0{,}250\,[m]$, grafique el desplazamiento y y las fluctuaciones de presión p en función de x en $t=0$

Solución: Se tiene $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

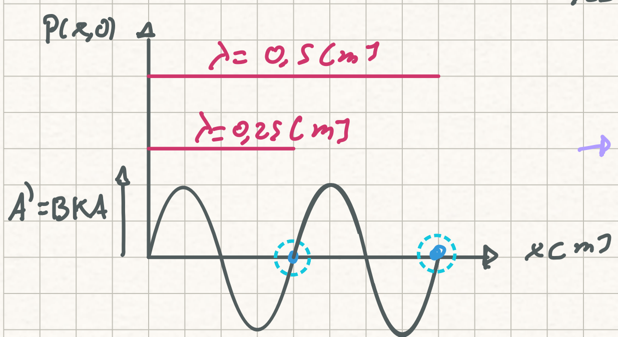
$$y(x, t=0) = A\cos(kx)$$

$$k = 2\pi/\lambda \rightarrow k = 2\pi/0{,}25$$

$$\therefore\ y(x,t) = 10\left(\frac{2\pi x}{0{,}25}\right)$$



Para la onda de presión: $p(x,t) = 0 = B\cdot\frac{2\pi}{0{,}25}\cdot 10\cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{0{,}25}\right)$ (si $x=0$, $p(0,0)=0$)



→ se encuentra desplazada respecto de la otra onda.

c) Considere ahora el el desplazamiento $y(x,t)$ con $t=0$ como una función no sinoidal

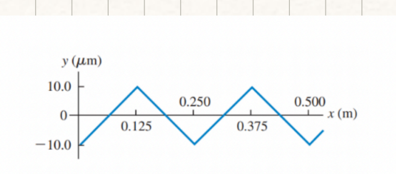


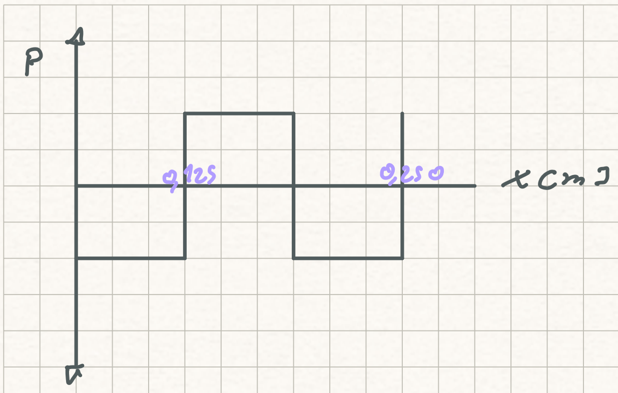
Figura 1: Onda no senoidal, problema 4 (c).

Esta onda tiene $A = 10{,}0\,\mu m$ ¿tiene la misma amplitud de presión?

Identificar: Del inciso (a): $p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

resuelve

Plantea: Dado que $y(x,t)$ es una función lineal por tramos, su derivada es constante, así



Dado a que su pendiente varía, no tendrán la misma amplitud. Además, la función es ponderada por un factor B.