Ayudantía n°2 FIS-140.

P1) Ondas planas

• Una OEM se propaga en el vacío y su campo eléctrico se encuentra dado por:

$$E_x = 0$$
$$E_y = 50 \operatorname{sen}(2\pi(6\cdot 10^{14} t - 2\cdot 10^{6} x))$$
$$E_z = 0.$$

Se solicita:

(a) Calcular la frecuencia, período, longitud de onda y fase inicial de $\vec{E}$.
(b) Indicar estado de polarización de la OEM y su dirección de propagación.
(c) Escribir la expresión de $\vec{B}$ asociada.
(d) Representar gráficamente la OEM.

Solución: I y R: Caracterizando la OEM: $u(x,t) = A\operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_0)$

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \qquad \omega = 2\pi\cdot 6\cdot 10^{14} \text{ [rad/s]}.$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\cdot 6\cdot 10^{14}} \Rightarrow \boxed{T \simeq 1{,}67\cdot 10^{-15} \text{ [s]}}$$

como $T = 1/f \Rightarrow \boxed{f \simeq 6\cdot 10^{14} \text{ [Hz]}}.$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}\cdot 2\cdot 10^{6}} \Rightarrow \lambda = 5\cdot 10^{-7} \text{ [m]}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda = 500 \text{ nm} \\ \varphi_0 = 0\end{array}}$$

b) Estado de polarización: Lineal. (dada la forma de $\vec{E}$)
Propagación : $\hat{x}$. (por el argumento del seno).

c) I y R: Para determinar el campo magnético:

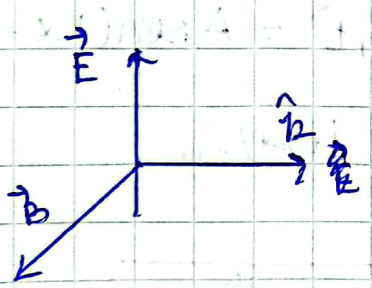
$$E_0 = cB_0$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{50\ [N/C]}{3\cdot 10^8\ m/s}$$

$$B_0 = 1{,}67\cdot 10^{-7}\ [T].$$

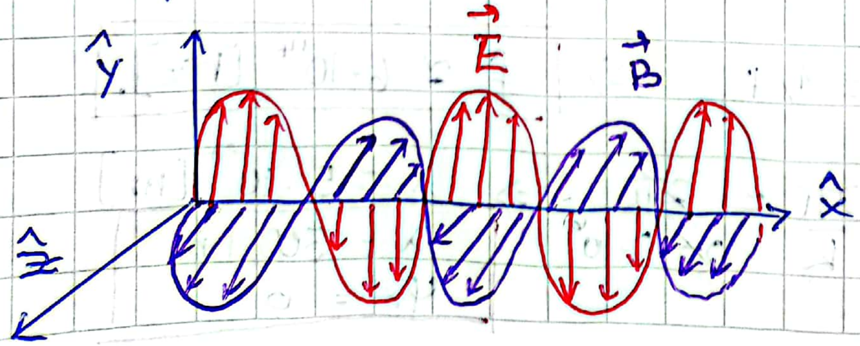
$$\therefore \vec{B} = (0;\ 1{,}67\cdot 10^{-7}\,\text{sen}(2\pi(6\cdot 10^{14}t - 2\cdot 10^{6}y));\ 0)$$

*Recordatorio: Regla de la mano derecha



↳ $\vec{E} \times \vec{B} = \hat{k}$ → dirección de propagación de la onda.
$\vec{E}$ ↓ eléctrico
$\vec{B}$ ↓ magnético

* Si la onda se propaga en $\hat{x}$, la única alternativa es que $\vec{B}$ resida en $\hat{z}$.



P2) Una onda electromagnética armónica de frecuencia $6 \cdot 10^{14}$ [Hz] (luz verde) y amplitud de campo eléctrico $30\sqrt{2}$ [V/m], se propaga en el vacío según el eje $\hat{x}$ en sentido positivo. Hallar las expresiones para $\vec{E}$ en los siguientes casos:

(a) La onda está polarizada en el plano xy.
(b) La onda está circularmente polarizada.

Solución: Caracterizando la OEM:

$f = 6 \cdot 10^{14}$ [Hz] $\qquad \vec{k} = k\hat{x}$ (enunciado)

$E_0 = 30\sqrt{2}$ [V/m] $\qquad v = 3 \cdot 10^8$ m/s

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (6 \cdot 10^{14}) \Rightarrow \omega = 12\pi \cdot 10^{14} \text{ [rad/s]}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 (m/\cancel{s})}{6 \cdot 10^{14} (1/\cancel{s})} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ [m]} \\ \lambda = 500 \text{ [nm]} \end{array}}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5 \cdot 10^{-7}} \text{ m} \cdot [1/m].$$

* Nuevamente, si $\vec{E}$ se propaga en $\hat{x}$, éste reside en $\hat{y}$ dadas las características de la onda.

$$\therefore \vec{E} : \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 30\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(2\pi\left(6 \cdot 10^{14} t - \frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} x\right)\right) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

b) Para una onda polarizada circularmente:

$$E_0^2 = E_y^2 + E_z^2$$

$$= E_0 \cdot [\operatorname{sen}^2(\omega t - kx) + \cos^2(\omega t - kx)]$$

$$\therefore \vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \\ E_z = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \end{cases}$$

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx + \pi/2)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 30\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(2\pi\left(6 \cdot 10^{14} t - \frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} x\right)\right) \\ E_z = 30\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(2\pi\left(6 \cdot 10^{14} t - \frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} x\right)\right) \end{cases}$$

P3| Sabiendo que el campo eléctrico de una OEM se encuentra dada por:

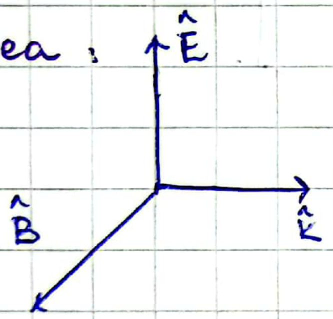
$$\vec{E} = E_o \cos\left(\frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}} - \omega t\right)\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}}\right).$$

a) Encuentre su vector de Poynting.

Identifica y Recuerda : El Vector de Poynting :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu} \; ; \quad \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{k}\times\vec{E} = \omega B \quad B_o = \frac{E_o}{c}$$

Plantea :



$$\vec{S} = \frac{\|\vec{E}\|}{\mu_o c}\hat{k}$$ → se requiere conocer el vector de propagación.

Resuelve : Del argumento de la función coseno:

$$\frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}} - \omega t = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t \Rightarrow \vec{k} = k\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \; \vec{S} = \frac{\left[E_o \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\cdot\sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2}\right]^2}{\mu_o \cdot c}\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}}\right).$$

b) Encuentre la energía promedio transmitida por la OEM:

Identifica y Recuerda: Las relaciones de energía vienen dadas por:

$$u = \frac{\|\vec{S}\|}{c} \quad ; \quad \langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \quad ; \text{ donde } T = \frac{2\pi}{\omega} \ldots$$

Plantea y Resuelve: A partir de las relaciones previas:

$$\langle u \rangle = \left\langle \frac{\|\vec{S}\|}{c} \right\rangle = \frac{E_0^2}{c^2 \mu_0}\left[\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t)\,dt\right].$$

haciendo el cambio de variables: $\omega t = x$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]\Big/_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente: $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}.$

Interpreta: El promedio de ambos campos es nulo, En su lugar, se suelen calcular los valores RMS:

$$E_{rms} = E_{max}/\sqrt{2} \quad ; \quad B_{rms} = B_{max}/\sqrt{2}$$

P41 Ondas circulares.

Una radio emisora emite ondas con una frecuencia de 800 [Hz] y una potencia de 10 [kW]. Suponiendo que las ondas pueden ser aproximadas como esféricas, se pide:

(a) Imagine una superficie cualquiera que encierra la radioemisora. ¿Cuánta energía atraviesa dicha superficie?

Identifica y Recuerda: Del Teorema de Poynting:

$$\underbrace{-\vec{E}\cdot\vec{J}}_{\text{Potencia disipada}} = \nabla\cdot\vec{S} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}}}_{0}$$

(si el estado es estacionario).

Plantea: Integrando en un volumen V:

$$\cdot P_{disipada} = \oint_A \vec{S}\cdot d\vec{A}$$

⇒ Similar a Ley de Gauss de Campo Eléctrico.

$P_{disipada}$: análogo a carga encerrada

$\oint_A \vec{S}\cdot d\vec{A}$: análogo a flujo de campo eléctrico

$\partial V = A$

* Usando una superficie conveniente (esfera)

Resuelve: Como $\vec{S} \propto \vec{r}$.

$$\oint \vec{S}\cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 \cdot S = P_0$$

donde P_0 corresponde a la potencia de emisión de la antena.

$$\Rightarrow \boxed{S(r) = \frac{P_0}{4\pi r^2}\,\hat{r}}$$

Interpreta: Para una onda esférica, es de esperar que $\vec{S} \propto \hat{r}$.
Se sabe que

$$E \sim \frac{1}{r} \quad \wedge \quad B \sim \frac{1}{r}$$

Por lo que es de esperar que $S \propto \frac{1}{r^2}$, lo cual se condice con el resultado de la integral.

(b) Calcule cómo varía la intensidad de las OEM emitidas por la radioemisora en función de la distancia.

Identifica y Recuerda: De la definición de intensidad

$$I = \frac{P}{A}$$

→ Potencia por unidad de superficie
↳ Magnitud del vector de Poynting.

Plantea y Resuelve: De esta forma:

$$I = \|\vec{S}\| = \frac{P_0}{4\pi r^2} \Rightarrow I \propto \frac{1}{r^2}$$

Escaneado con CamScanner

(c) Calcule magnitudes de campos eléctricos y magnéticos a 1 km de la radio emisora.

Identifica y Recuerda : El valor calculado de $\|\vec{S}\|$ en los incisos anteriores corresponde a un valor promedio.

$$\rightarrow \langle \|\vec{S}\| \rangle = \frac{P_0}{4\pi r^2} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0}{2\mu_0 c} = I.$$

Plantea y Resuelve : Despejando E_0 y B_0 de la relación para $\langle \|\vec{S}\| \rangle$:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{c\cdot 2I}{\mu_0}}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{3\cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}}}$$

$$E_0 \simeq 6.2 \cdot 10^5 \ [V/m]$$

$$B_0 = E_0/c = 2{,}1 \cdot 10^{-8} \ [T].$$

Interpreta: En cuanto al valor numérico, $E_0 \gg B_0$, lo cual se verifica en este caso.

Escaneado con CamScanner