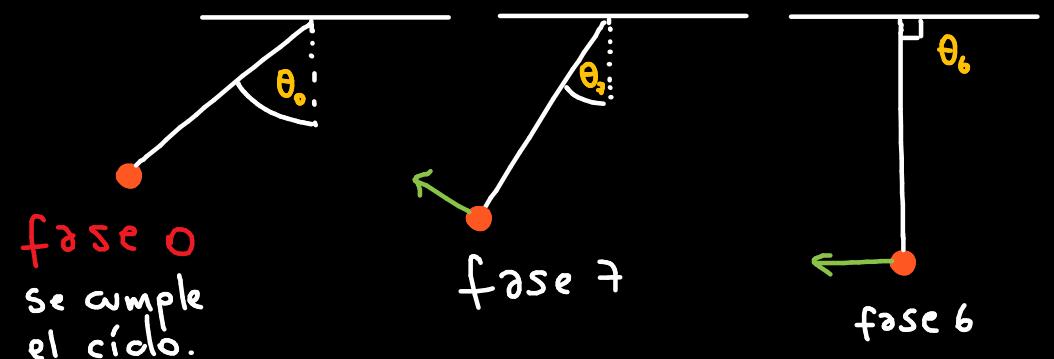
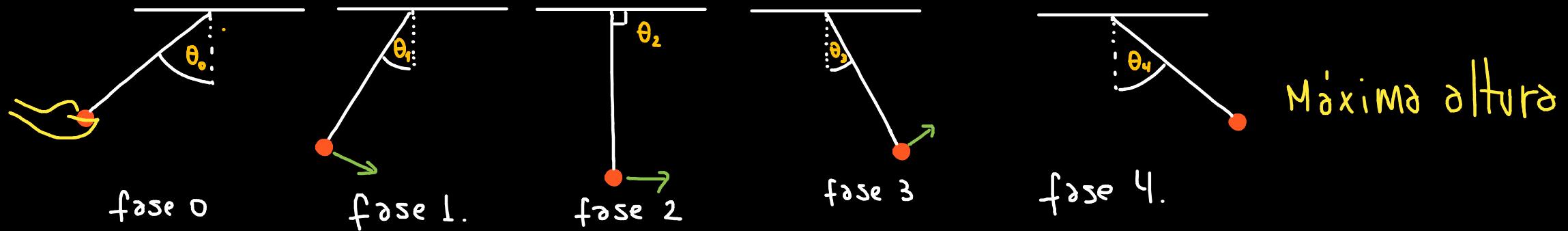


Oscilaciones: todo fenómeno cíclico tiene fases.

Ejemplo un péndulo:  
Las fases son "Estados del sistema".



fase 0  
se cumple  
el ciclo.

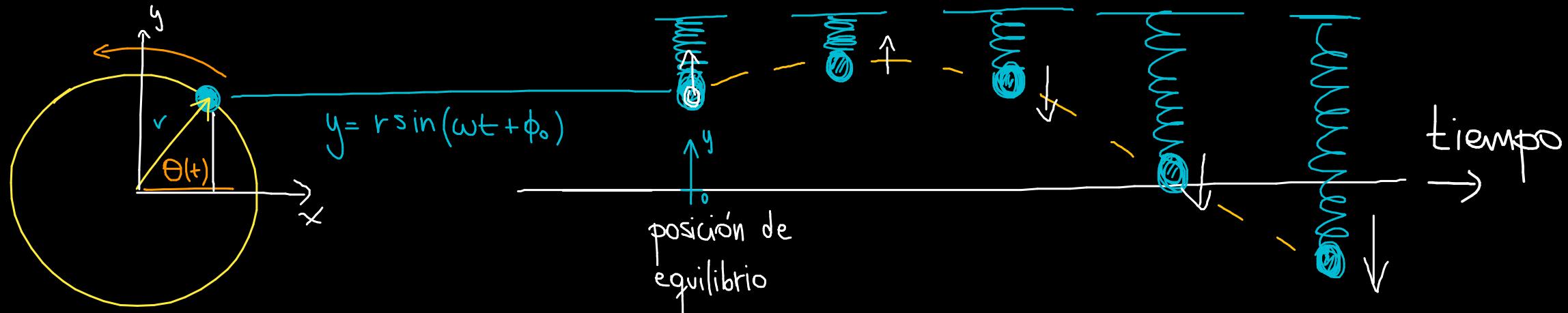
\* diferentes  
fases

el tiempo que toma repetirse una fase es  
el periodo,  $T$

# Movimiento armónico simple:

Oscilación de un resorte 

Un solo partícula



$$\theta(t) = \underline{\omega t} + \phi_0$$

frecuencia angular

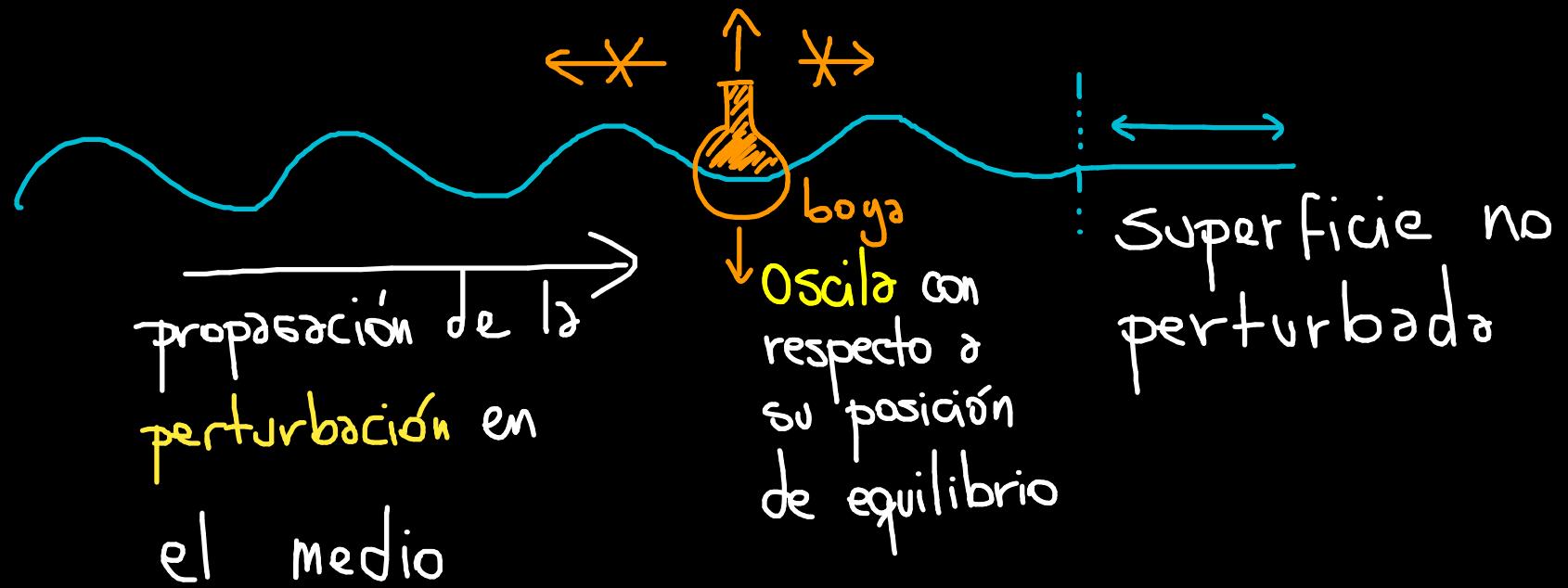
unidad  $\rightarrow \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$

$$\theta(T) = \underline{\omega T} = \frac{2\pi}{\text{Periodo}} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Oscilaciones son localizadas

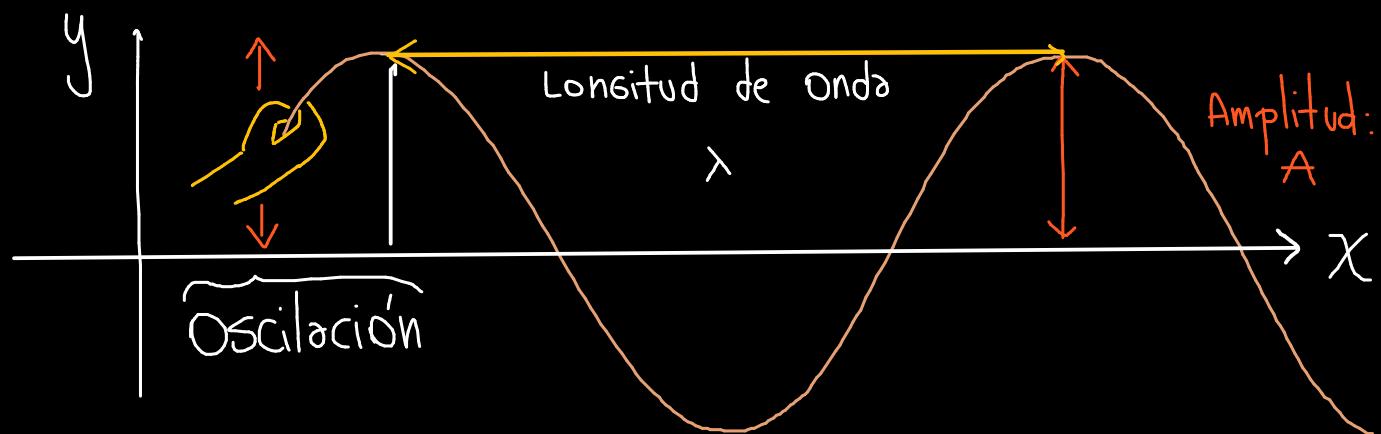
# Ondas mecánicas :

- fenómeno que permite el transporte de energía y momentum  
Lineal sin transmisión neta de masa
- perturbación no localizada que se propaga por el espacio  
(Lo aclararemos más adelante).



Ondas Mecánicas : necesitan un medio mecánico por el cual propagarse.  
Por ejemplo el sonido no se puede propagar en el vacío.

Ondas en una cuerda



Se llama amplitud de onda a la amplitud máxima de la onda

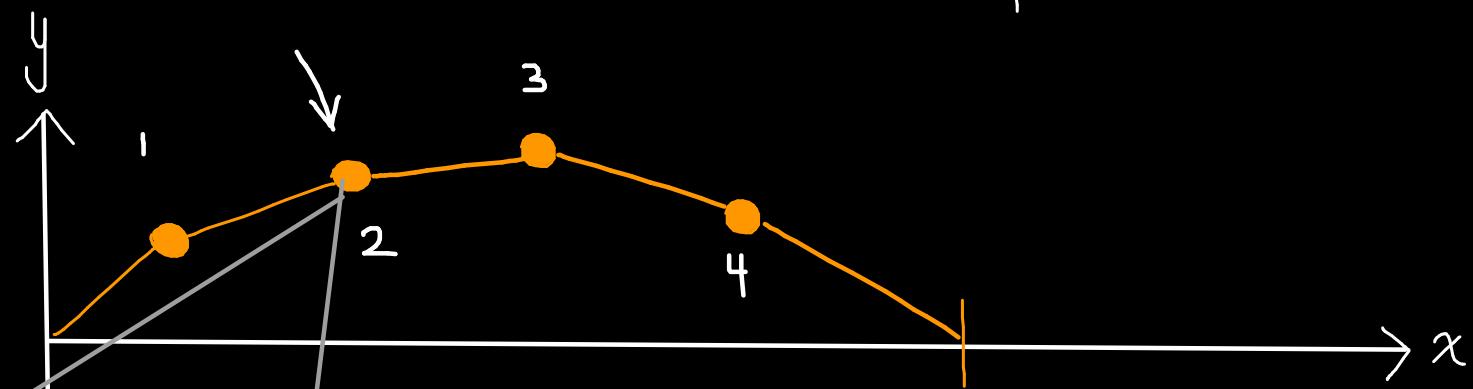
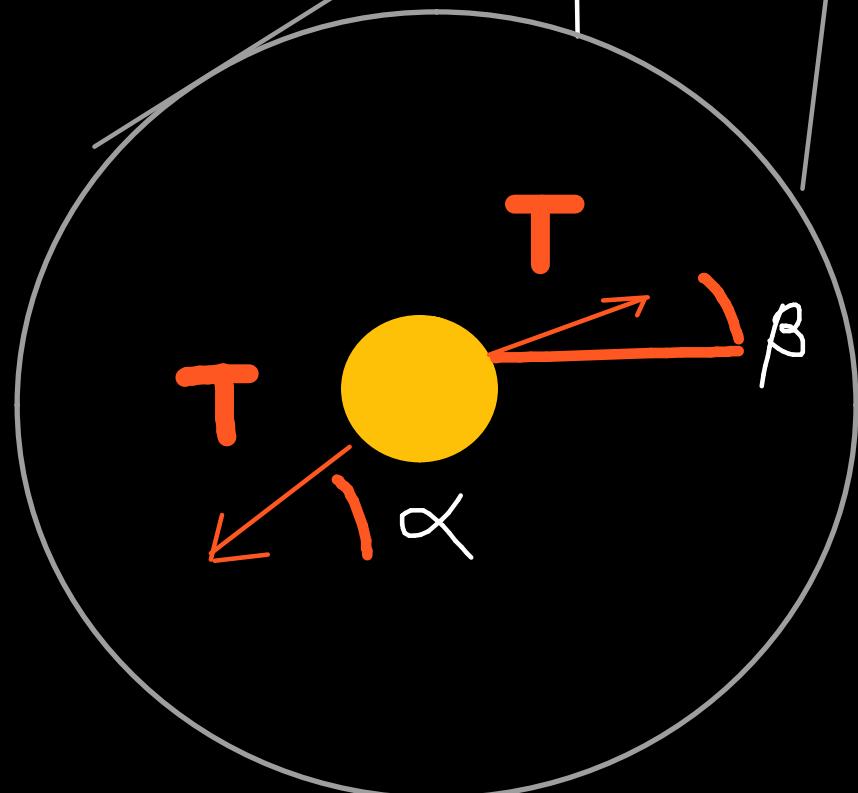
Onda Armónica 1 sola frecuencia

ejemplo:  $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

Comencemos por revisar un caso más simple:

"4 objetos puntuales unidos por cuerdas elásticas con tensión  $T$ "

Sin considerar gravedad.



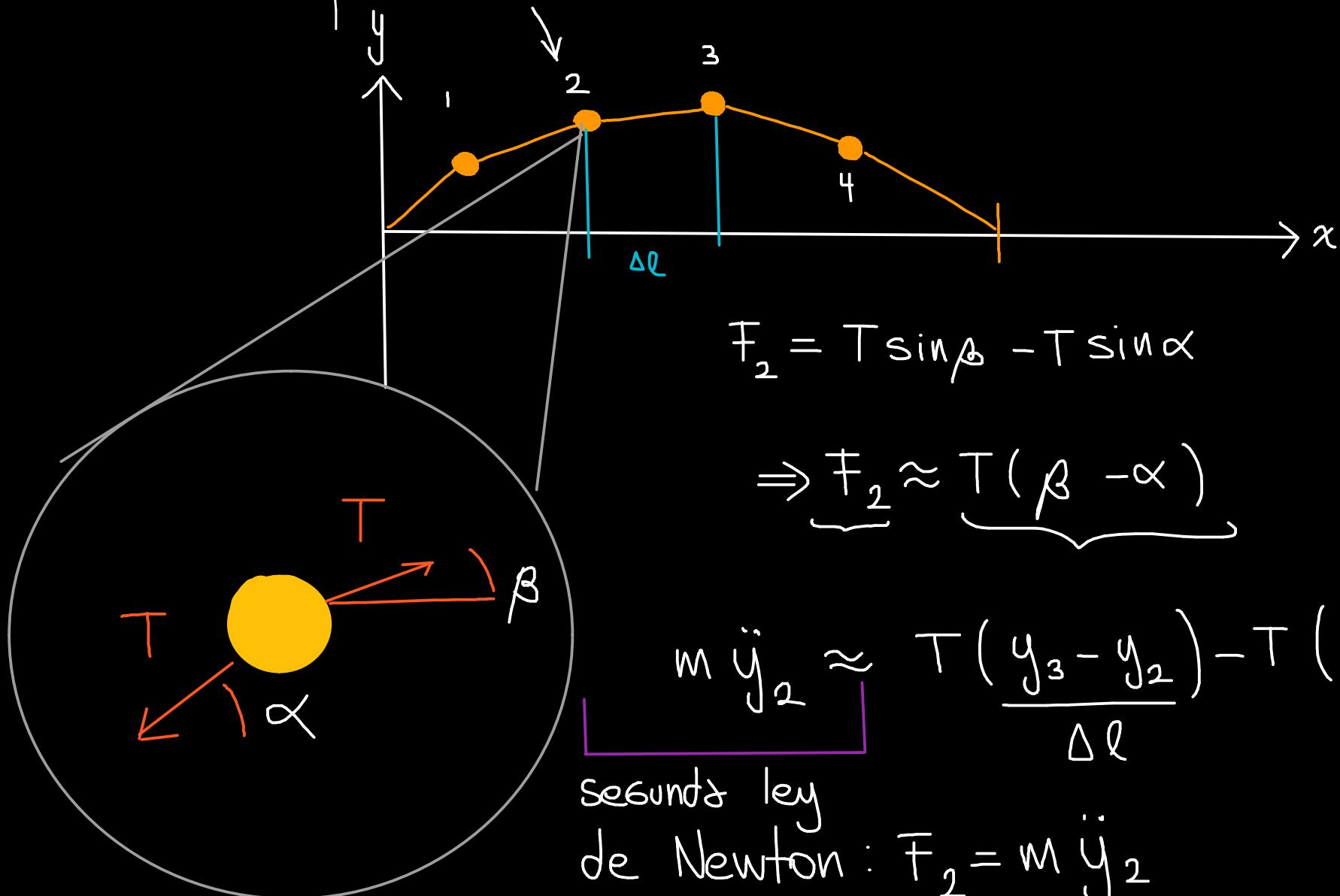
$$F_2 = T \sin \beta - T \sin \alpha$$

Para ángulos pequeños

$$\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$$

$$\Rightarrow F_2 \approx T(\beta - \alpha)$$

Comencemos por revisar un caso más simple:



$$F_2 = T \sin \beta - T \sin \alpha$$

$$\Rightarrow F_2 \approx \underbrace{T(\beta - \alpha)}$$

$$m \ddot{y}_2 \approx T \frac{(y_3 - y_2)}{\Delta l} - T \frac{(y_2 - y_1)}{\Delta l}$$

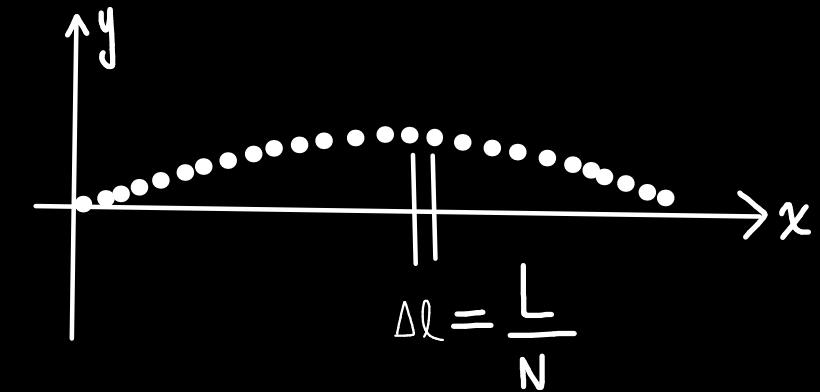
segunda ley  
de Newton:  $F_2 = m \ddot{y}_2$

Suponiendo que tenemos N objetos puntuales

$$m \ddot{y}_n = T \left[ \left( \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta l} \right) - \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta l} \right) \right]$$

Si tenemos una cantidad "Grande" de N objetos muy juntos entre si:

$$x = n \cdot \Delta l \Rightarrow y_n \rightarrow y(x)$$



$$\Rightarrow m \ddot{y}(x) = T \left[ \left( \frac{y(x + \Delta l) - y(x)}{\Delta l} \right) - \left( \frac{y(x) - y(x - \Delta l)}{\Delta l} \right) \right]$$

Suponiendo una densidad lineal constante ( $\mu$ )

$$M \Delta l \ddot{y}(x) = T \left[ \left( \frac{y(x + \Delta l) - y(x)}{\Delta l} \right) - \left( \frac{y(x) - y(x - \Delta l)}{\Delta l} \right) \right]$$

Si  $N \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta l \rightarrow 0$  : Caso de una cuerda continua

$$\therefore \ddot{y}(x) = T \left[ \frac{\left( y(x+\Delta l) - y(x) \right)}{\Delta l} - \frac{\left( y(x) - y(x-\Delta l) \right)}{\Delta l} \right]$$

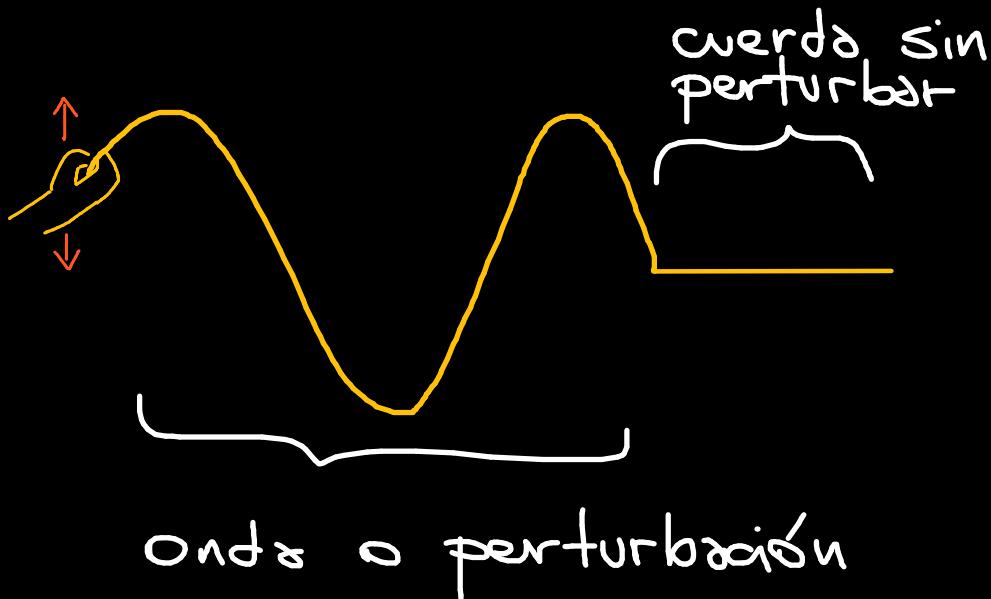
$$\Delta l \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Ecación de  
Ondas.

## Ecación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



$v$ : La velocidad de propagación de la onda =  $\frac{\text{Longitud de onda}}{\text{Período}}$

En el caso de la cuerda  $v = \sqrt{\frac{T}{M}}$

# Función de onda

más general

$$\psi(x,t) \rightarrow \psi(\vec{r},t)$$

1D 2D, 3D, etc

sonido

Luz (próxima clase)

$\vec{E}(\vec{r},t)$  vectorial

La ecuación de onda: Todo onda cumple

Repasso 3<sup>ra</sup> Clase

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

velocidad de propagación de la fase.

Gradiente  $\vec{\nabla}_{\text{cart.}} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

> operador Laplaciano  $\vec{\nabla}_{\text{cartesiano}}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

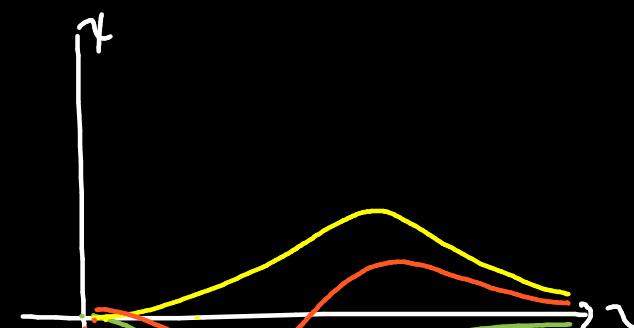
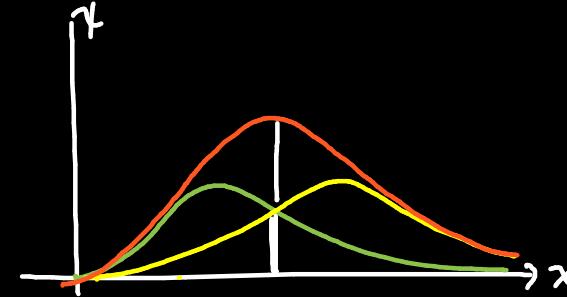
Solución:

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_n A_n \sin (\vec{k}_n \cdot \vec{r} + \omega_n t + \phi_n)$$

ondas armónicas

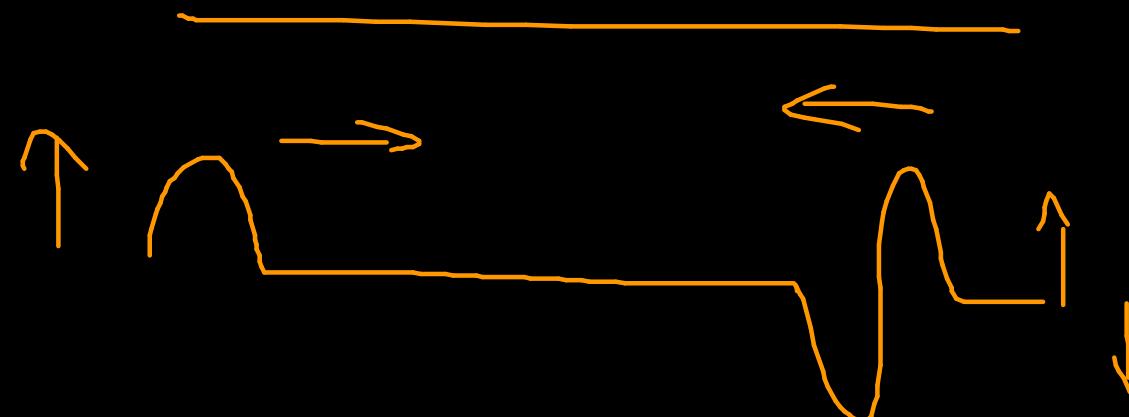
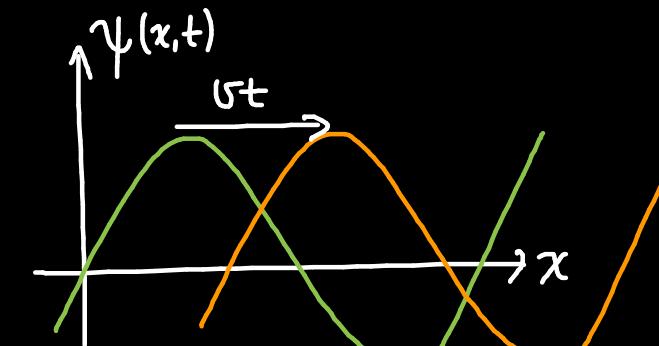
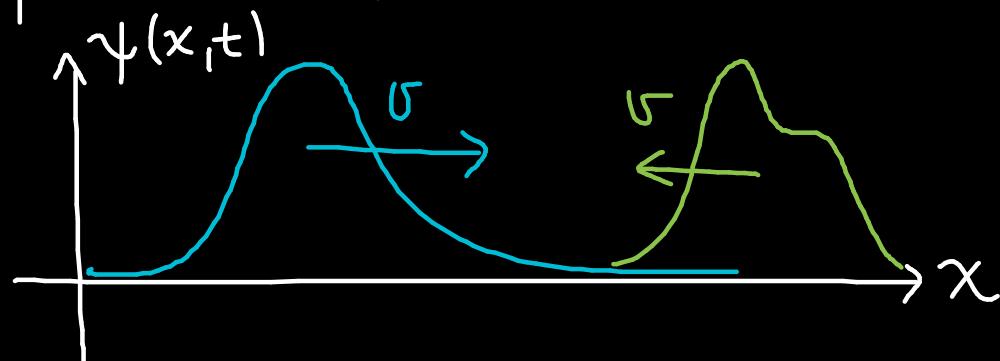
Principio de superposición

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_1(\vec{r},t) + \psi_2(\vec{r},t)$$



# Solución de D'Alembert

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r} + \vec{v}t) + \psi_2(\vec{r} - \vec{v}t)$$



## Velocidad de Onda:

¿Qué tan rápido viaja una fase en una onda?

Onda  
Longitudinal

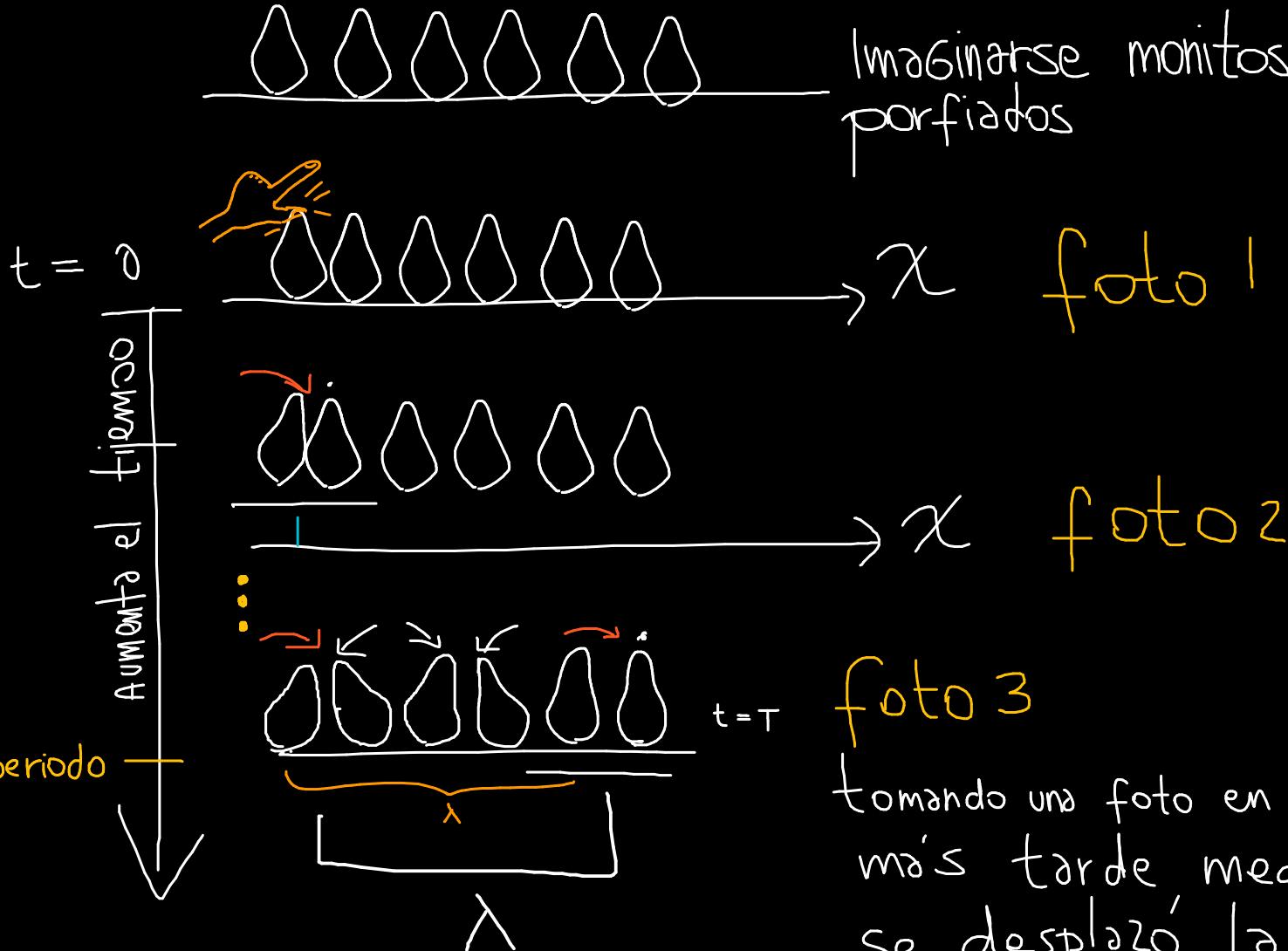
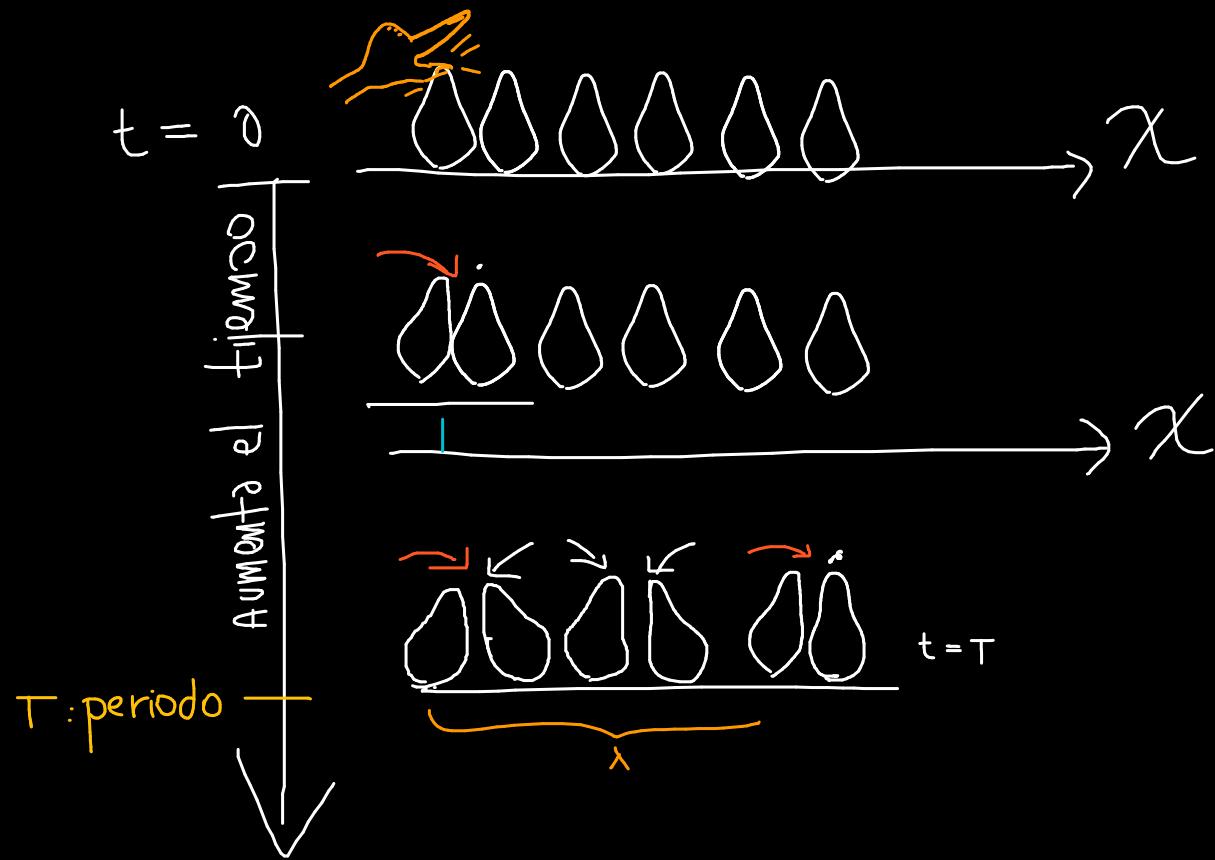


foto 3  
tomando una foto en un periodo  
más tarde, medimos cuanto  
se desplazó la fase

# Velocidad de fase



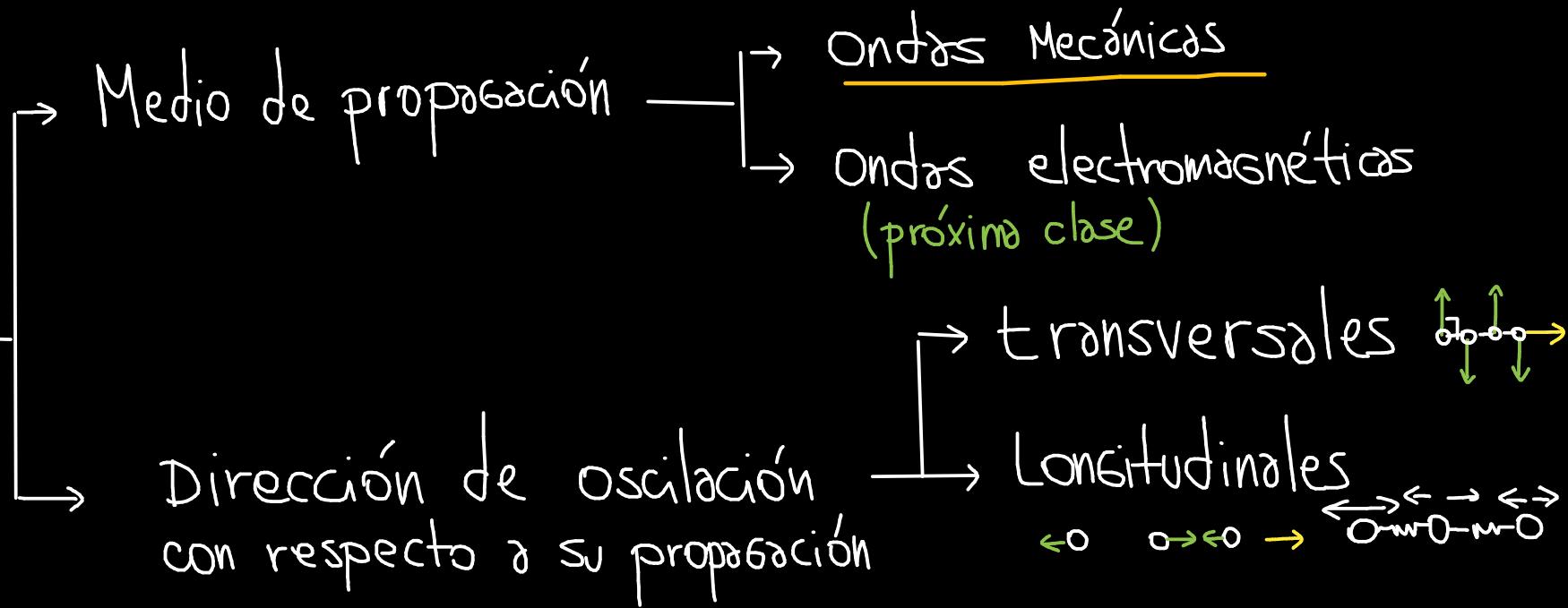
Onda se propaga con velocidad  $v$

$$v = \frac{\lambda}{T}, f = \frac{1}{T}$$

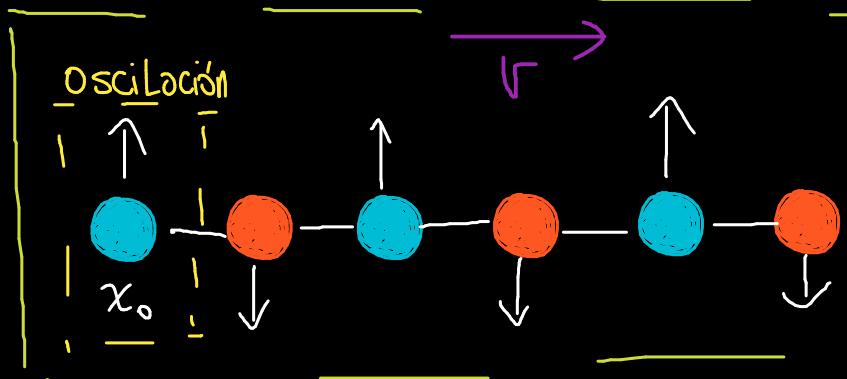
$$\Rightarrow v_\lambda = \lambda f$$

La velocidad con que se propaga una onda es la velocidad con que se propaga la fase.

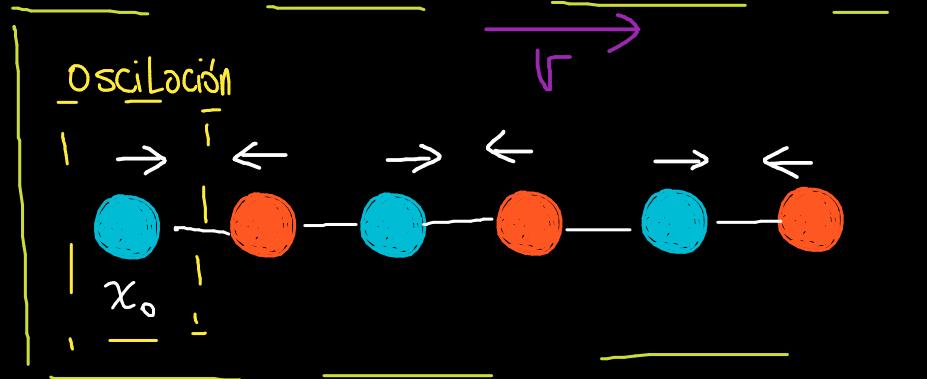
Ondas



Onda Transversal



Onda Longitudinal



ondas son deslocalizadas

## Anexo clase 1:

prueba 1D (se recomienda usar esto para probar en 3D)

llamando  $p = x + vt$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x + vt) = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial p}}_{=p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(p) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(p) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}(p)$$

por regla  
de la  
cadena

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial p} \cdot v \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( v \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) \\ &= v \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \text{por resto de la cadena} \quad //$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(p)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(p)}{\partial t^2} \quad //$$

mismo procedimiento para probar que  $\Psi_2(x - vt)$  es solución.

Ejercicio: probar que

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r} + \vec{\sigma}t) + \psi_1(\vec{r} - \vec{\sigma}t)$$

es solución de

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t)$$

## Material complementario de videos primera clase

- Primer link asociado a movimiento armónico simple: Oscilador armónico asociado a ondas
- Segundo link definición de frecuencia: Frecuencia y periodo
- Tercer link: longitud de onda: longitud de onda
- Cuarto link: superposición de ondas: superposición de ondas (interferencia)
- Quinto link: velocidad de propagación de una onda: velocidad de propagación de onda
- Sexto link: sonido -ondas longitudinales y transversales: ondas longitudinales y transversales

## Videos, herramientas y materiales adicionales

- Frecuencia audibles e inaudibles: Prueba que sonidos puedes escuchar.
- Generador de ondas: Generador de ondas

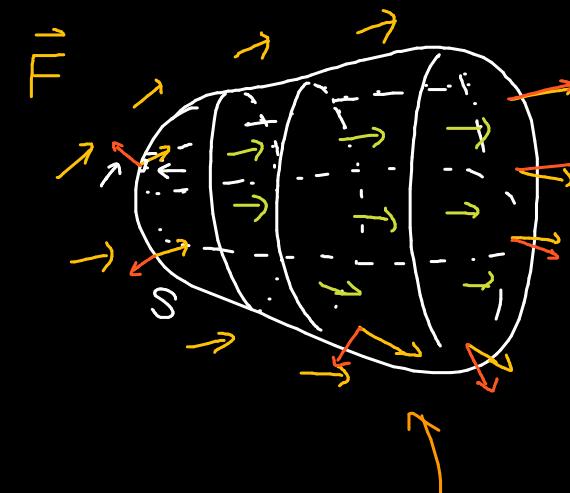
## Ejercicios ultra simples como recordatorio

- Ejercicio 1
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3

Cálculo de flujo: El flujo de un campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$  que atraviesa una superficie  $S$ , se define como

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

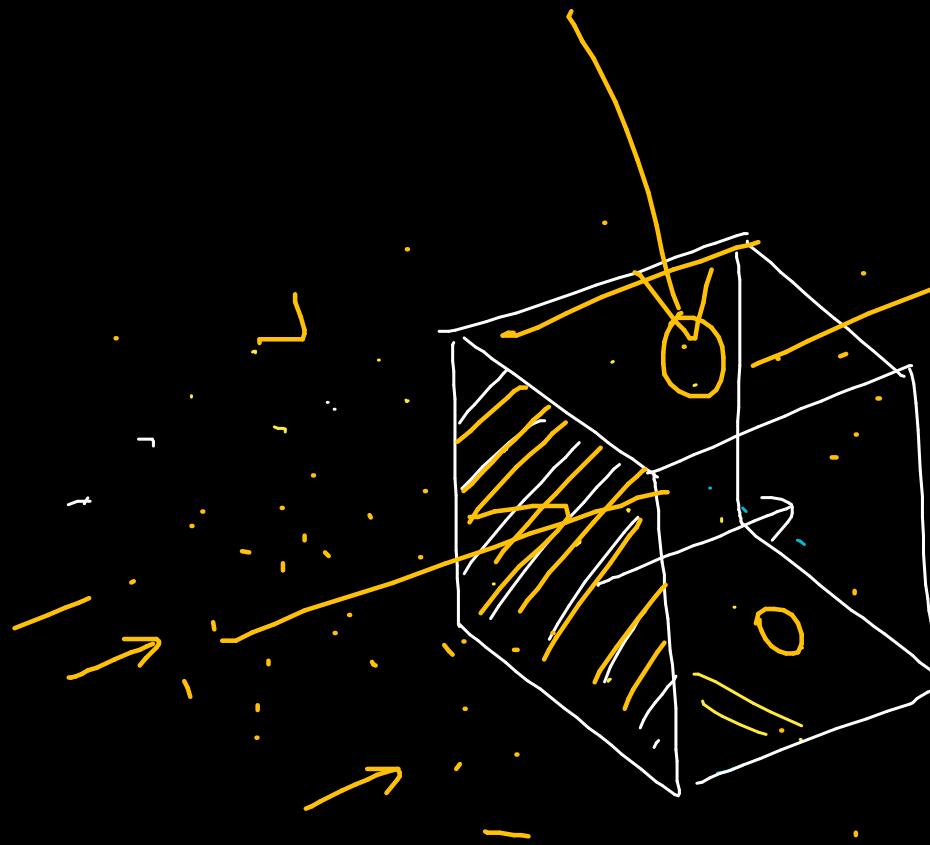
$\vec{F}(\vec{r})$ : Campo vectorial La magnitud y dirección de  $\vec{F}$  depende de donde es medido en  $\vec{r}$ .



vector normal a la superficie

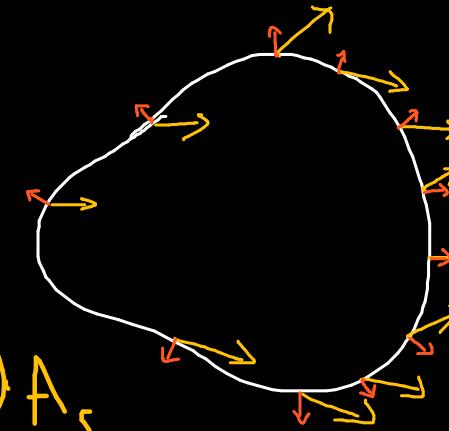
$$d\vec{S} = \hat{n} dS$$

diferencial de superficie



$$\oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

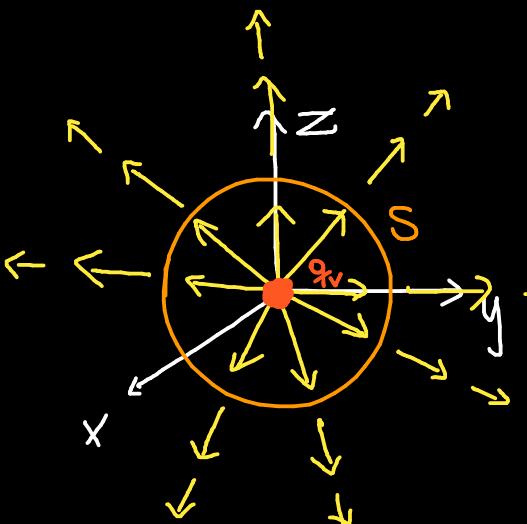
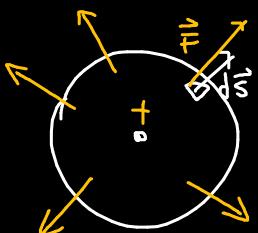
corte transversal al volumen



## Ley de Gauss:

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie  $S$  es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_v}{\epsilon_0}$$



$q_v$ : Carga en el volumen determinado por la Superficie  $S$ .

$$q_v = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r$$

$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r$  Teorema de la Divergencia

Cápsula matemática

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Entonces:

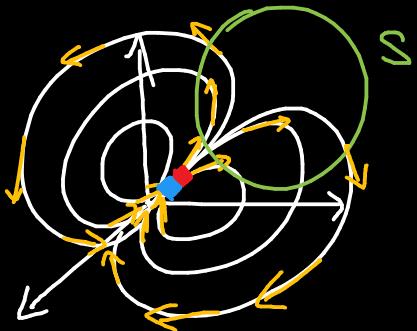
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} d^3r$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss diferencial

## Ley de Gauss para el Magnetismo

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$



Esta ley nos dice que

no existen los monopolos magnéticos o "Cargas magnéticas".

¿No existen? hasta el momento no se han detectado.

Por teorema de la divergencia

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} d^3r = 0$$

$$= 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ley de Gauss Magnética  
diferencial

$$\phi_B = \phi_{in} - \phi_{out}$$

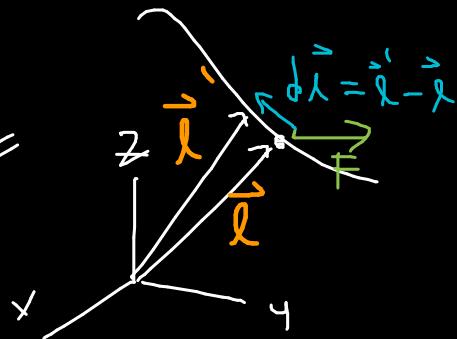
$$\phi_{in} = \phi_{out}$$

$$\Rightarrow \phi_B = 0$$

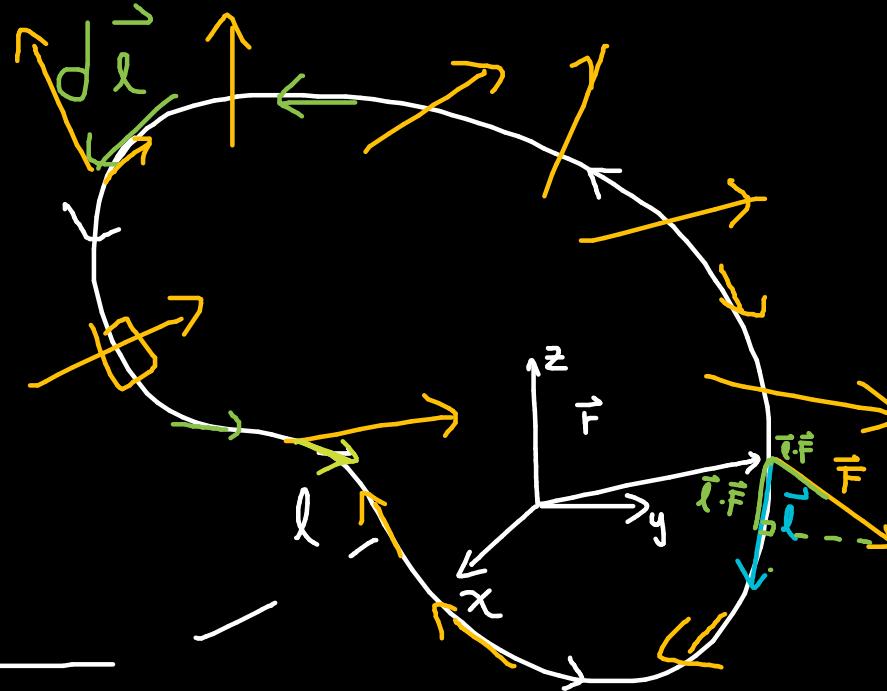


## Integral de líneas:

$$A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Es una Línea no un volumen



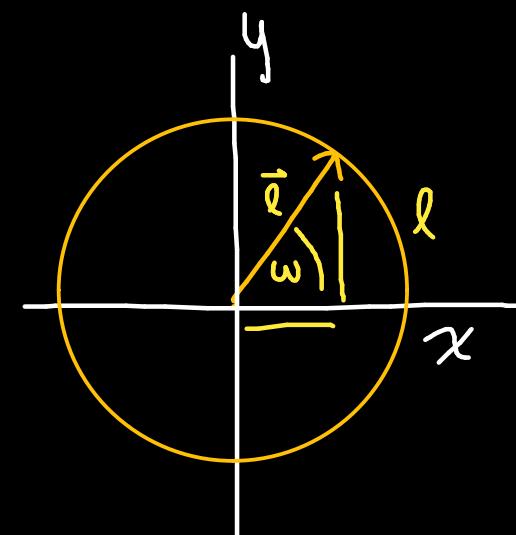
Línea: Curva generada por función parametrizada

$$\vec{l} = (x(\omega), y(\omega), z(\omega))$$

$$\Rightarrow d\vec{l} = \left( \frac{dx(\omega)}{d\omega}, \frac{dy(\omega)}{d\omega}, \frac{dz(\omega)}{d\omega} \right) d\omega$$

ejemplo un círculo:

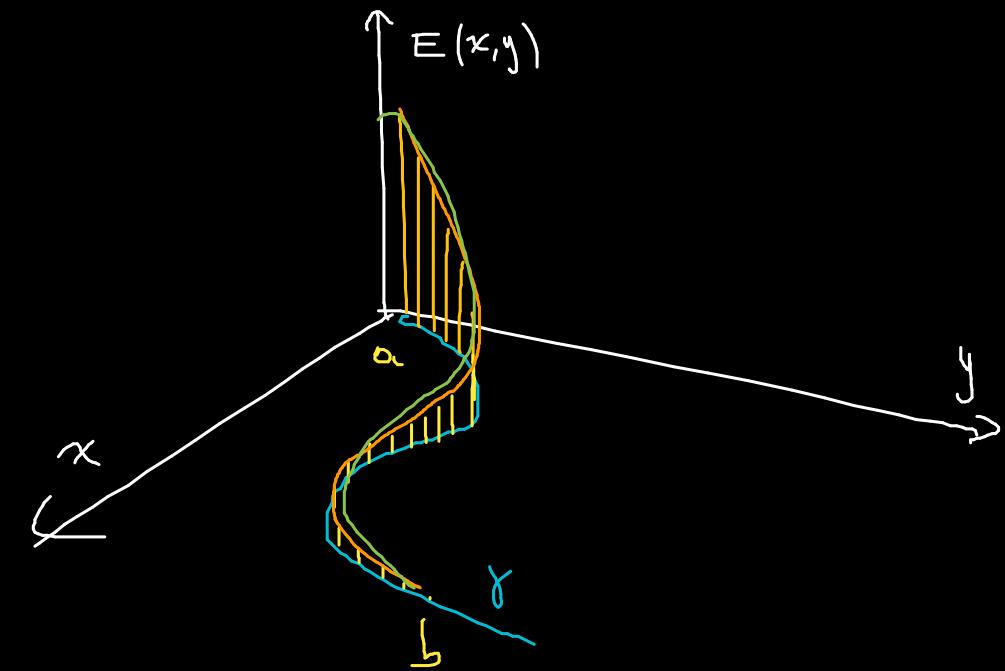
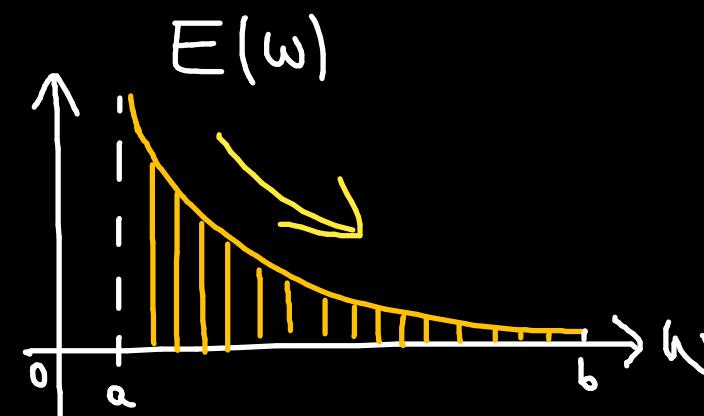
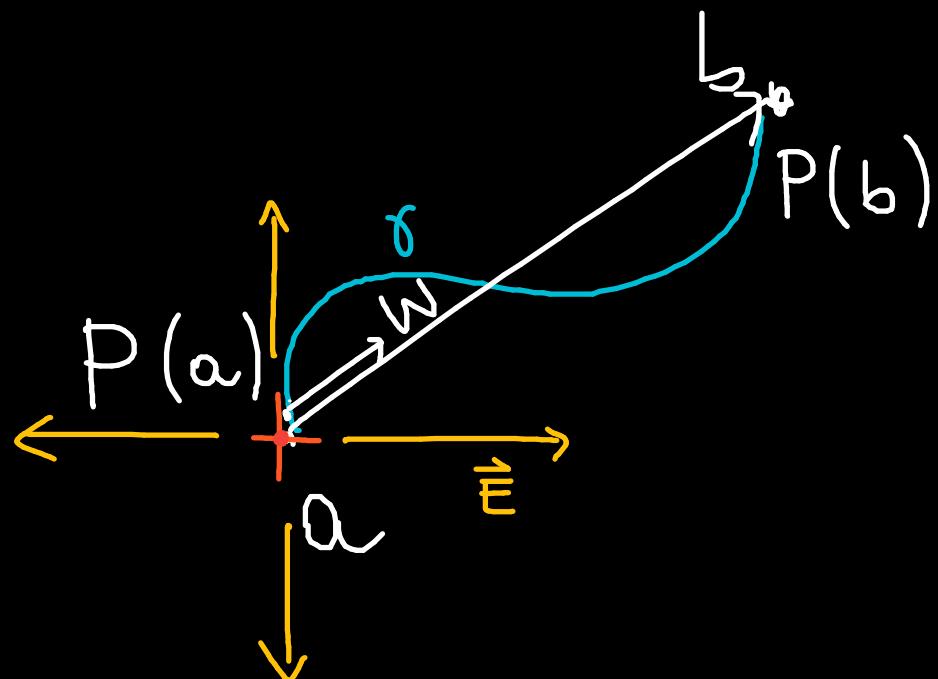
$$\vec{l} = (\cos(\omega), \sin(\omega))$$



# Potencial eléctrico:

$$\int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V = P(b) - P(a)$$

$$\int_a^b E(\omega) d\omega = P(b) - P(a)$$



## Ley de Faraday-Lenz

$$\nabla = - \frac{d}{dt} \phi_B$$

↓      ↓

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \begin{matrix} \text{por teorema de} \\ \text{Stokes} \end{matrix}$$

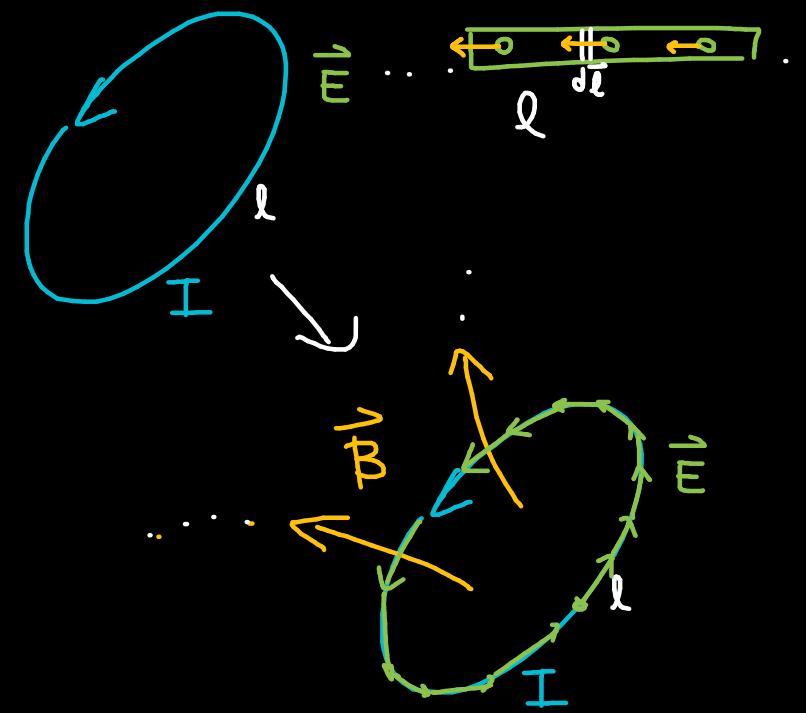
Entonces

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int_S \left( - \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{s}$$

⇒

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \int_S \underbrace{\left( \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)}_{=0} \cdot d\vec{s} = 0$$

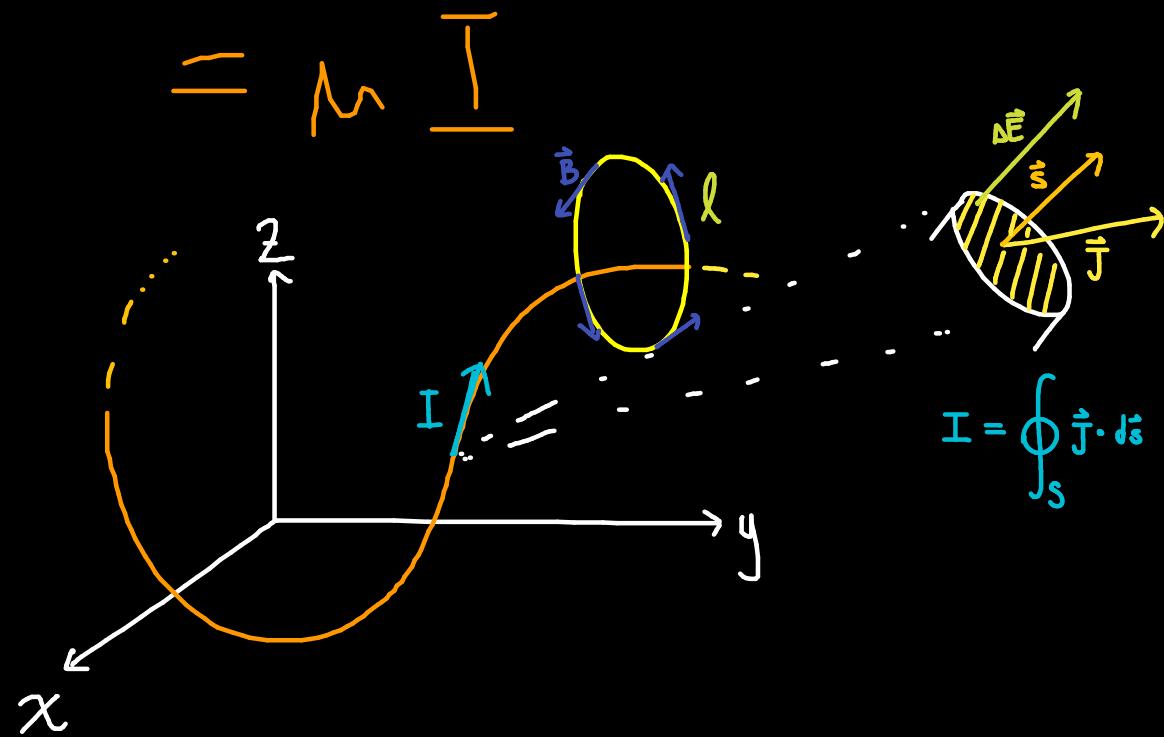


Faraday-Lenz diferencial

# Ley de Ampere - Maxwell

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

Aplicando el Teorema de Stokes se obtiene



$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ley de Ampere forma diferencial

Este conjunto de ecuaciones

Son Las ecuaciones de Maxwell (en el vacío)

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \cancel{\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Suponiendo  $\rho(\vec{r}) \rightarrow 0$  y  $\vec{J} \rightarrow 0$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = 0$$

## Propiedad vectorial (demuéstrelo)

$$4) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$1), 3) \quad \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{M_0 \vec{j}}_{= \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0} + M_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Evolviendo en el vacío (muy baja densidad de carga o ausencia de carga)  $\rho \rightarrow 0$  y  $T \rightarrow 0$

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ecuación de Onda

$$\frac{\epsilon_0 M_0}{C^2} = \frac{1}{c^2}$$

## Material complementario de videos segunda clase. Explicaciones y ejercicios.

- Integrales de flujo o superficie: [integral de flujo](#)
- Divergencia (significado sin ecuaciones): [Divergencia](#)
- Divergencia (cálculos): [Divergencia](#)
- Integral de línea:[integral de línea](#)
- Rotor o rotacional (significado sin ecuaciones): [Rotor](#)
- Rotor o rotacional (cómo calcularlo): [Rotor](#)
- Rotor o rotacional , 3D con cálculos I: [Rotor](#)
- Rotor o rotacional , 3D con cálculos II: [Rotor](#)
- Operadores vectoriales diferenciales (inglés si desea active subtítulos): [operadores diferenciales](#)

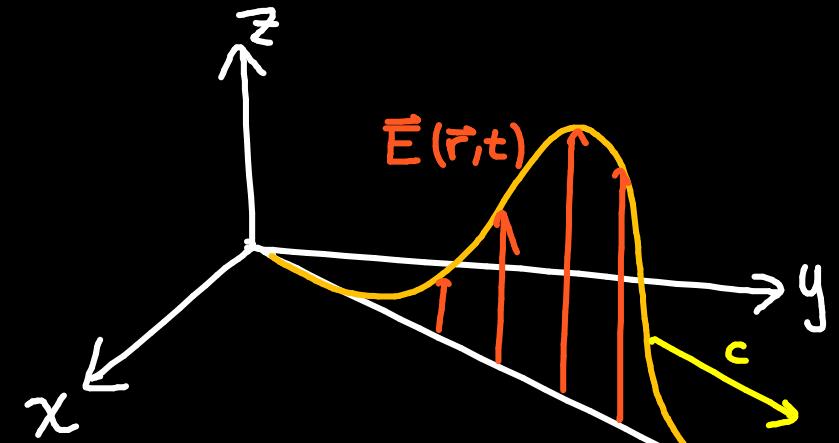
- Ecuaciones de Maxwell: ecuaciones de Maxwell
- Ondas electromagnéticas: ondas electromagnéticas

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

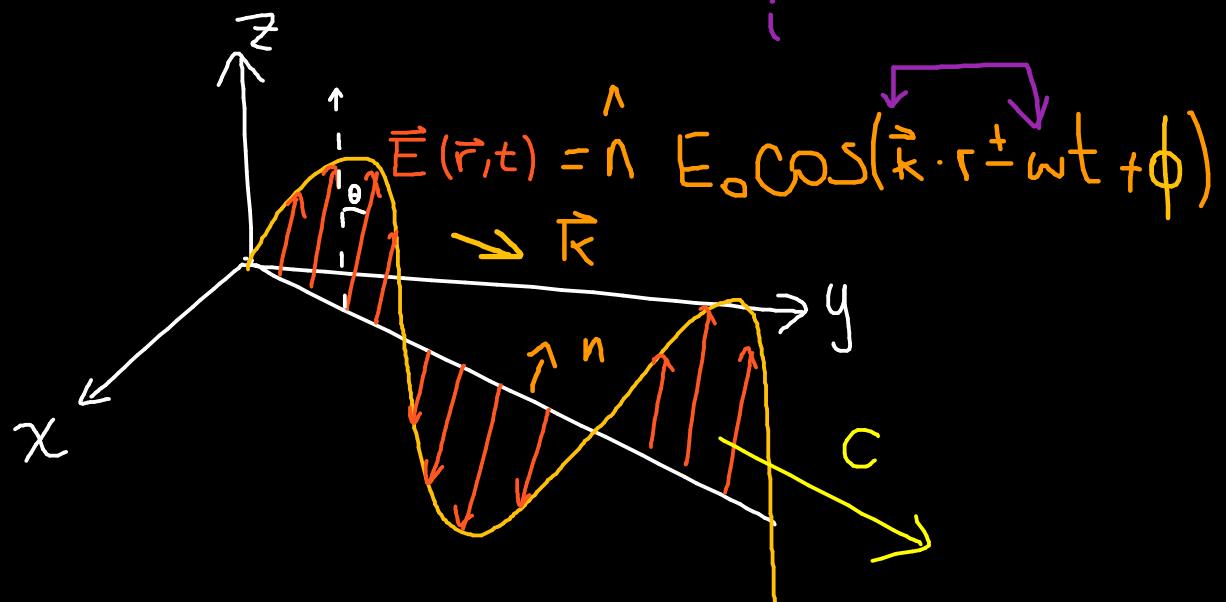
Ec. de Onda

$$\underline{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c^2}$$

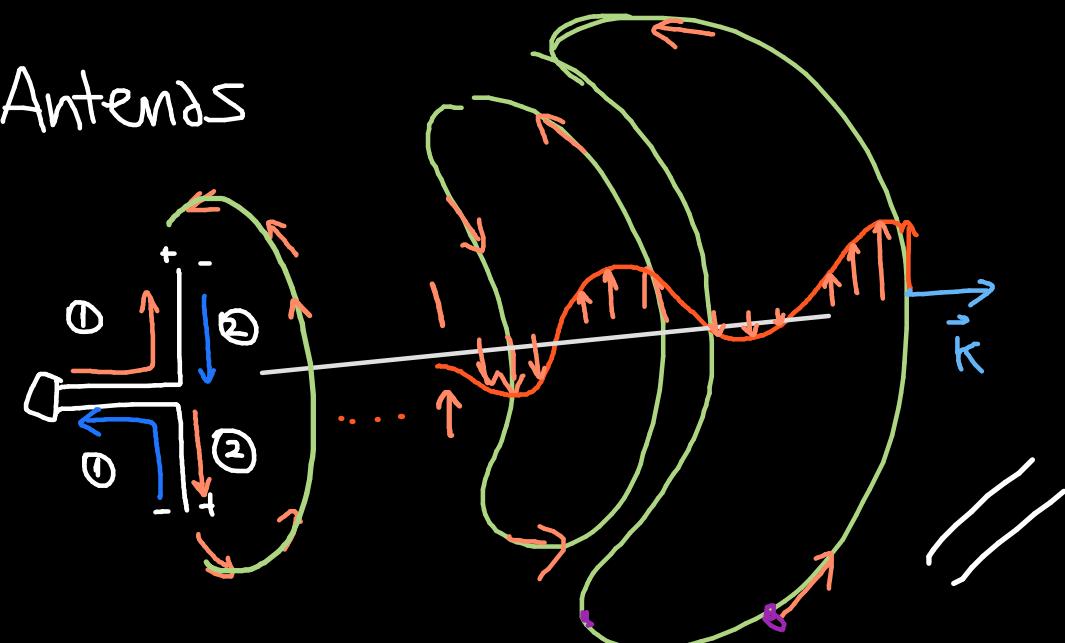
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3.0 \cdot 10^8 \left[ \frac{m}{s} \right]$$



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_i \vec{E}_i(r, t; \omega_i)$$



Antenas



# Ecación de Onda

De forma general

$$\vec{\nabla}^2 \left( \frac{\vec{E}}{\vec{B}} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\vec{E}}{\vec{B}} \right)$$

Soluciones complejas

$$\lambda f = c \quad \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \lambda f = c$$

$$\frac{2\pi f}{\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)} = c \quad \frac{\omega}{k} = c$$

Solución de la ecación de onda

usando la solución de D'Alembert

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_+ f_+(\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{c}t)) + \vec{E}_- f_-(\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{c}t))$$

frecuencia angular  
 $\omega = 2\pi f$

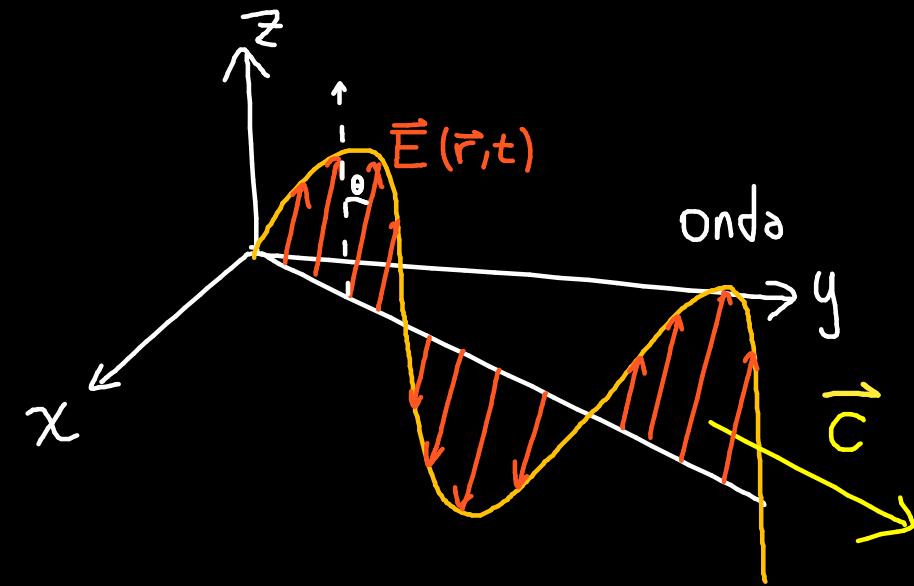
número de onda  
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

vector de onda  
 $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}$

velocidad de la luz

$$\vec{c} = c \hat{k}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \left[ \frac{m}{s} \right]$$



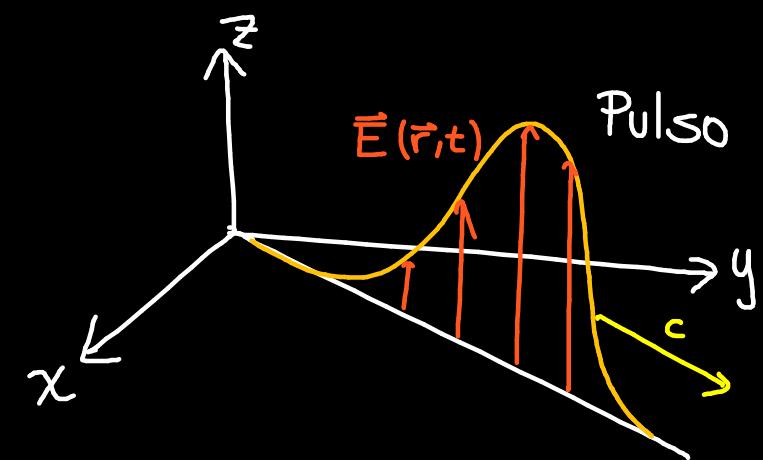
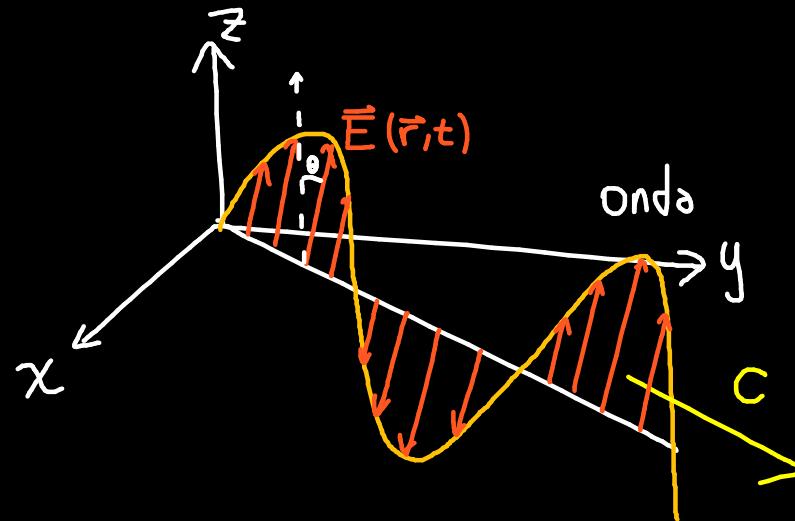
$$kx + \omega t - \phi_0$$

Analizando el segundo término

(Lo que haremos también es válido para el primero)

$$\vec{E} = \vec{E}_- f(\vec{k} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{c}t))$$

$$= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} f(\underbrace{\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{c}t)}_0)$$



Siendo  $v \in \mathbb{R}$

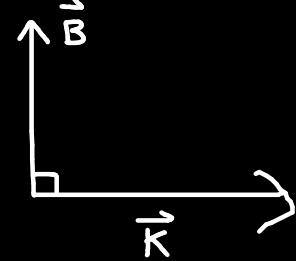
De igual forma que para  $\vec{E}$  la solución para  $\vec{B}$  es

$$\vec{B}(r, t) = \vec{B}_+ f_+(\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{c}t)) + \vec{B}_- f_-(\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{c}t))$$

También solo consideramos  $\vec{B}(r, t) = \vec{B}_- f_-(\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{c}t))$

Las soluciones tienen que cumplir con las ecuaciones de Maxwell.

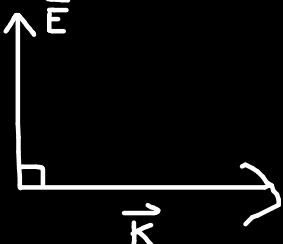
Aplicando la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \parallel$$
$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$


$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \rho = 0 \Leftrightarrow \text{en el vacío}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

transversal

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$


Los vectores de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares al vector de propagación de la onda

Siguiendo con Maxwell: en caso que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no varíen en el tiempo y espacio

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} //$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right|$$

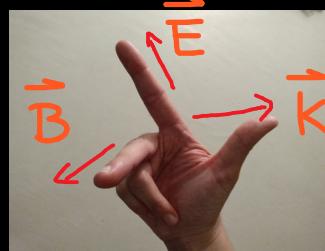
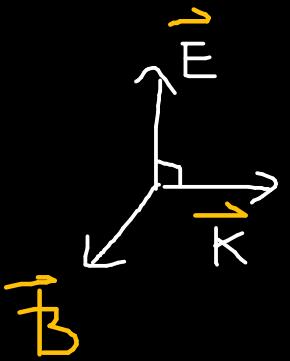
$$\vec{k} \times \vec{E} = (\vec{k} \cdot \vec{c}) \vec{B}$$

$$\|\vec{k} \times \vec{E}\| = |\vec{k} \cdot \vec{c}| \|\vec{B}\|$$

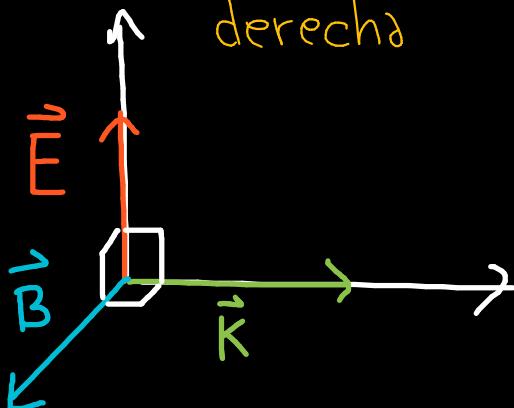
$$kE = kcB$$

$$E = cB //$$

Relación de Magnitud

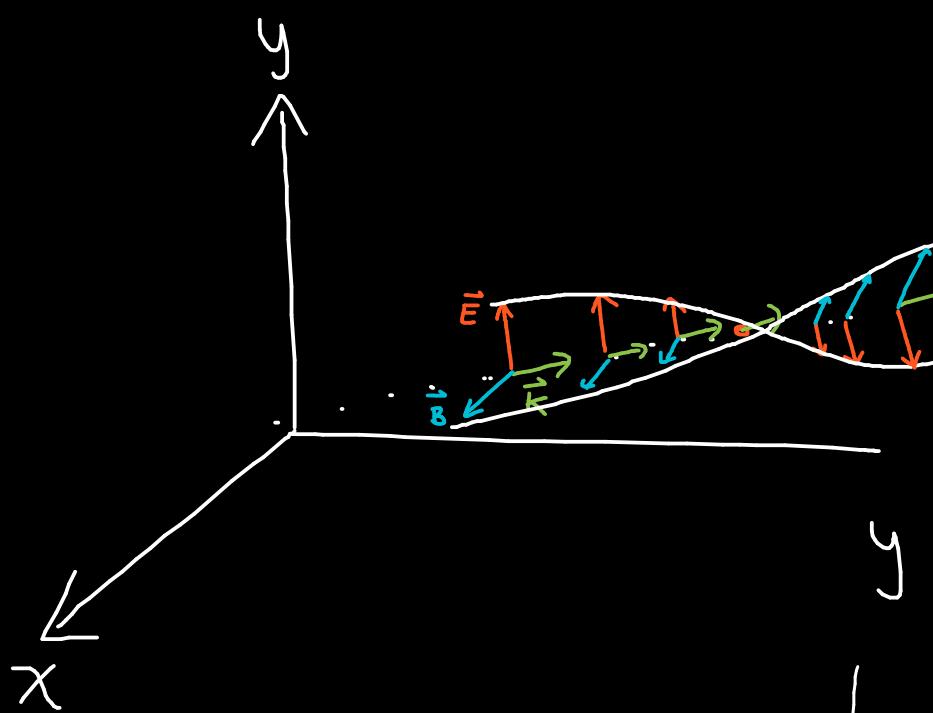


Regla de la mano derecha



trio  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  son ortogonales entre si.

# Variación del campo electromagnético



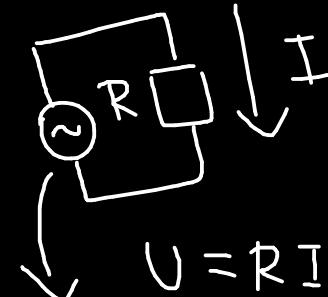
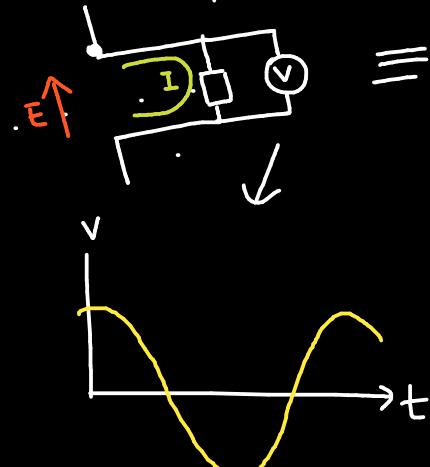
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 f_-(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{c})t),$$

donde llamamos  $U = \vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{c})t$

$$U = k_x x + k_y y + k_z z - (\vec{k} \cdot \vec{c})t$$

Receptor depende  
de  $\lambda$  o  $f$ .



$$E(\phi) = E_0 \sin(\phi)$$



Estudiando la variable  $\psi$  en el espacio

$$\begin{aligned}\phi &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \vec{k} \cdot \vec{c} t \\ &= \vec{k} \cdot \vec{r} - |\vec{k}| \cdot \hat{\vec{k}} \cdot \frac{\omega}{|\vec{k}|} \cdot \hat{\vec{k}} \cdot \vec{t} \\ &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t.\end{aligned}$$

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{c} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \hat{\vec{k}} \\ \vec{c} \cdot \hat{\vec{k}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \cdot |\vec{k}| (\hat{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{k}}) = \omega \end{array} \right.$$

Esta variable  $\psi$  es en verdad la fase

$$\phi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \phi_0$$

¿dónde  $\phi = \text{cte.}$ ?

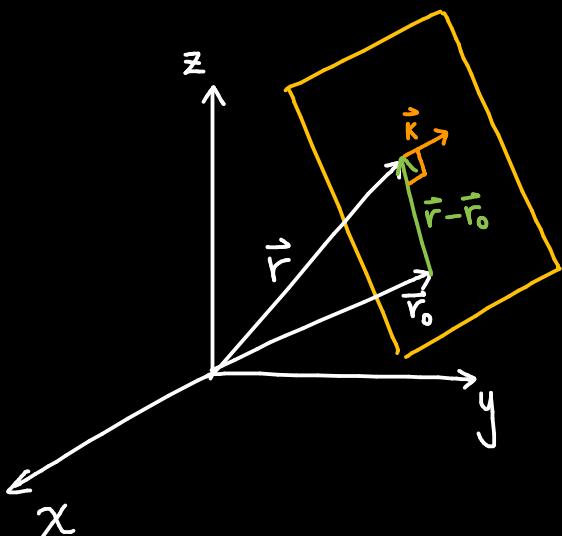
$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \underbrace{(\omega t + \phi_0)}_{\vec{k} \cdot \vec{r}_0} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{F} - \vec{k} \cdot \vec{F}_0 = 0$$

$$\boxed{\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0}$$

Ecuación vectorial de un plano

La fase es constante en un plano (solo válido en onda plana)



$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Ecuación analítica de un plano

$$k_x x + k_y y + k_z z = \phi$$

$$A x + B y + C z = D$$

## Material complementario de videos tercera clase.

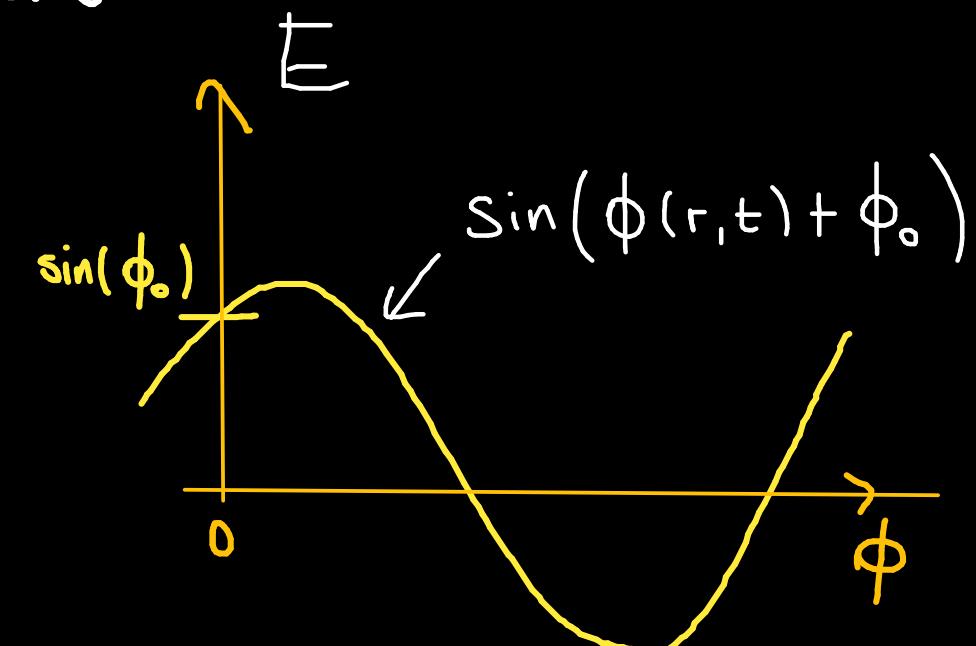
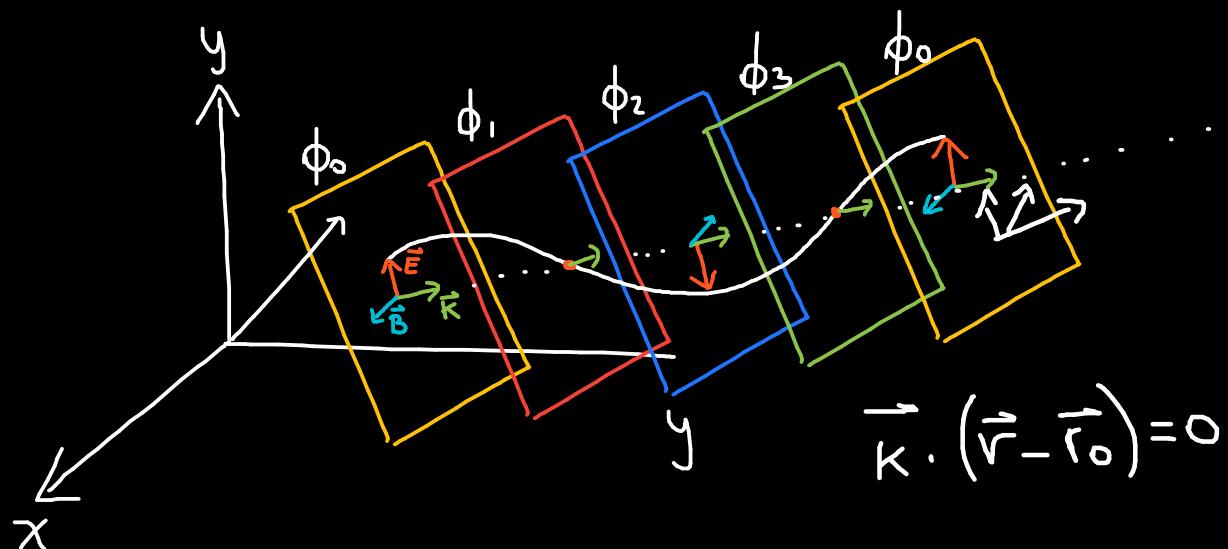
- Ecuaciones de Maxwell (resumido): [Ecuaciones de Maxwell](#)
- Experimento de Hertz: [Experimento de Hertz](#)
- Ondas electromagnéticas planas: [Ondas planas](#)
- Visualización ondas esféricas: [Ondas esféricas](#)

Onda plana: Describimos la función  $f$  como:

$$f(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{c})t) = \sin(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{c})t}_{\omega} + \phi_0)$$

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \sin(\underbrace{\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{c}t)}_{\phi(\vec{r}, t)} + \phi_0)}}$$

Ondas planas en el espacio



Vector campo eléctrico y magnético  
son osciladores en un punto específico  $\vec{r} = \vec{r}_0$

$$\vec{E}(\vec{r}_0, t) = E_0 \hat{n} f(\omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}_0, t) = B_0 (\hat{k} \times \hat{n}) f(\omega t)$$

## Onda esférica:

Resolviendo la ecuación de onda en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

con simetría angular

$$\nabla^2 E = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \phi^2}$$

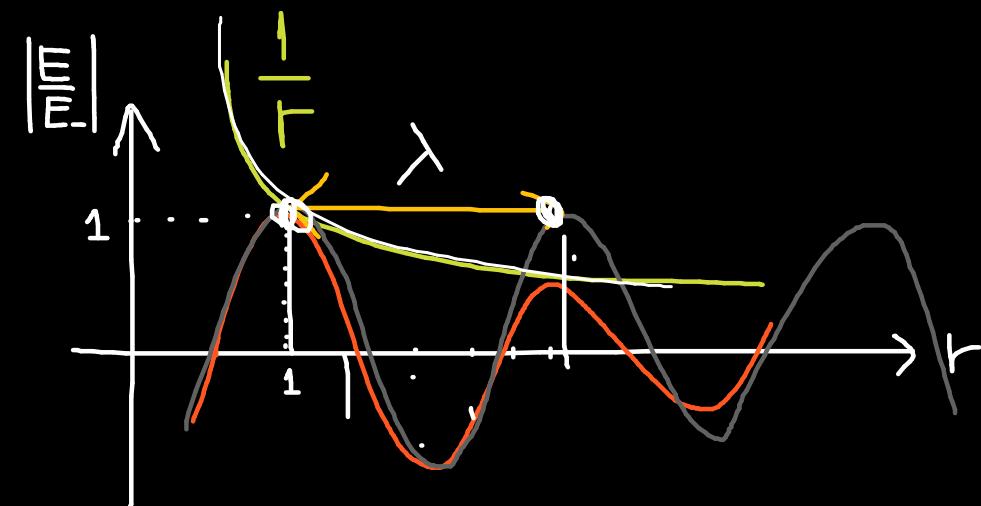
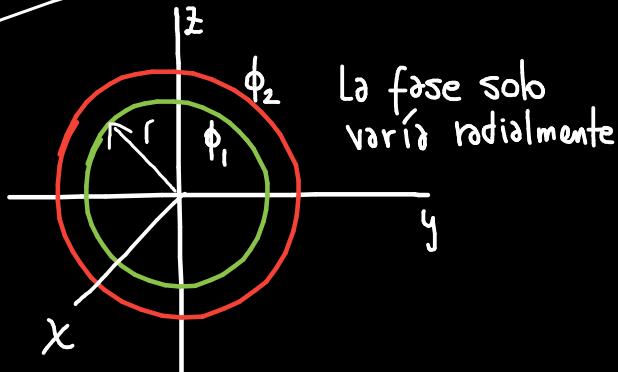
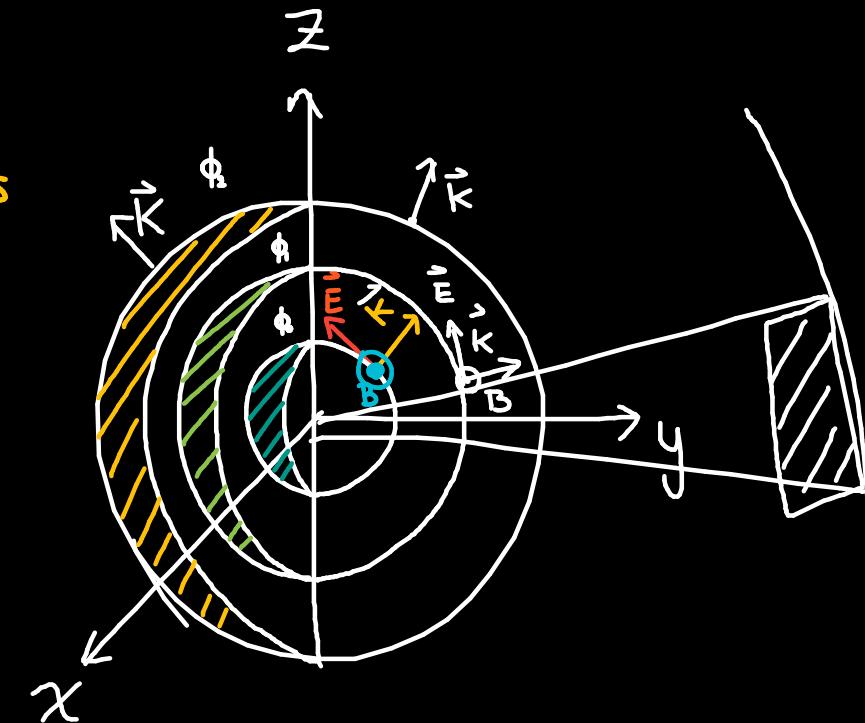
Solución: Onda esférica

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{A}_+}{r} \sin(\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{c}t)) + \frac{\vec{A}_-}{r} \sin(\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{c}t))$$

Amplitud  $E(r)$  depende de " $r$ "

Comentario de clases:

Si imponemos que la fase sea constante en  $(\theta, \phi)$



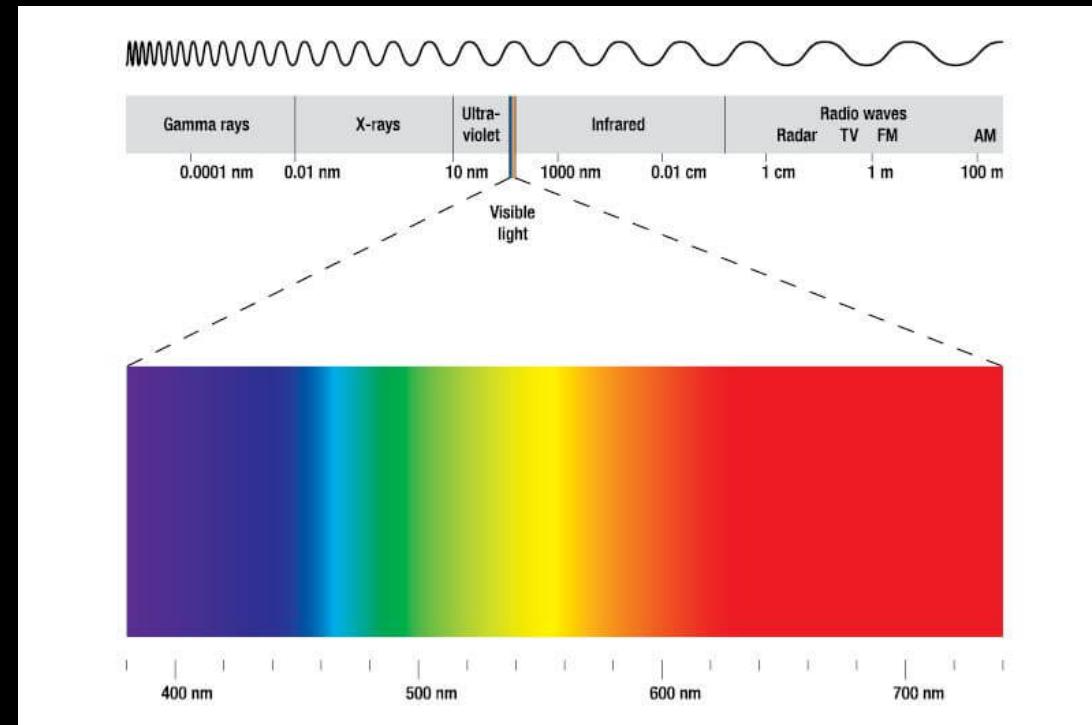
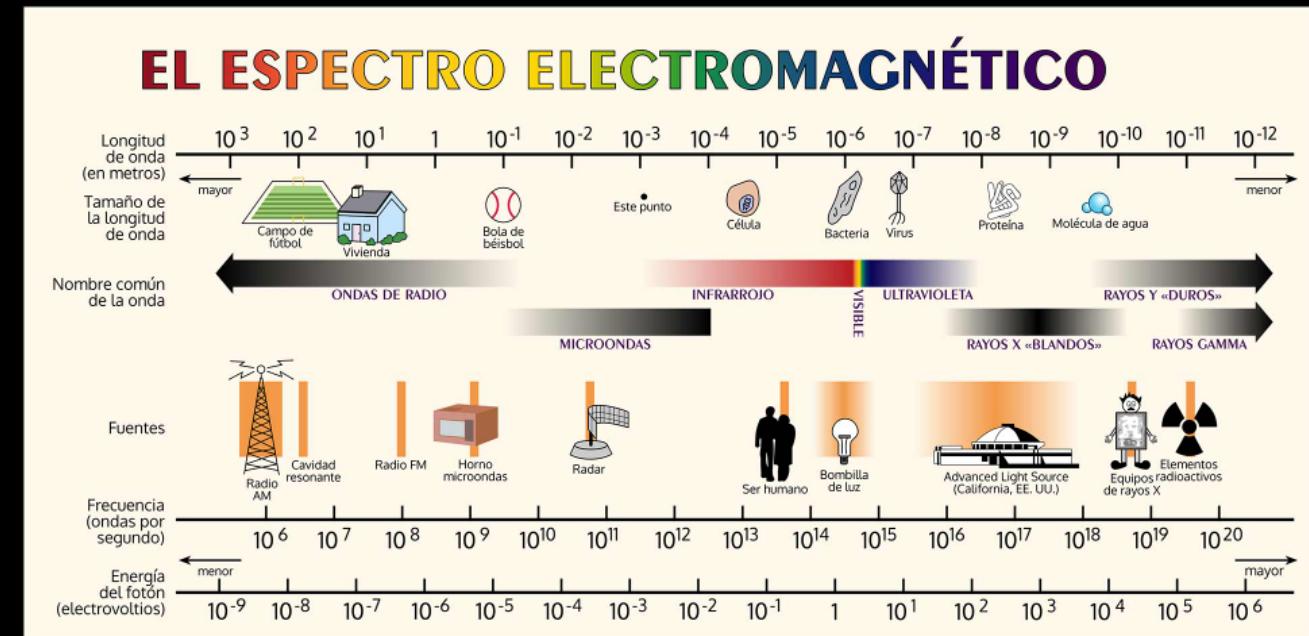
# Espectro EM.

$$\lambda f = c = \frac{\omega}{|k|}$$

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

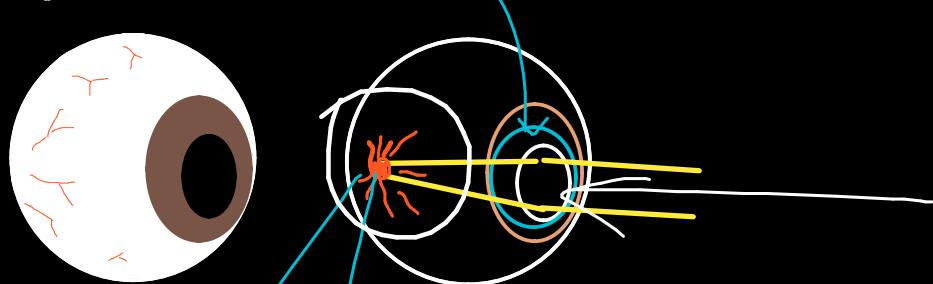
$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

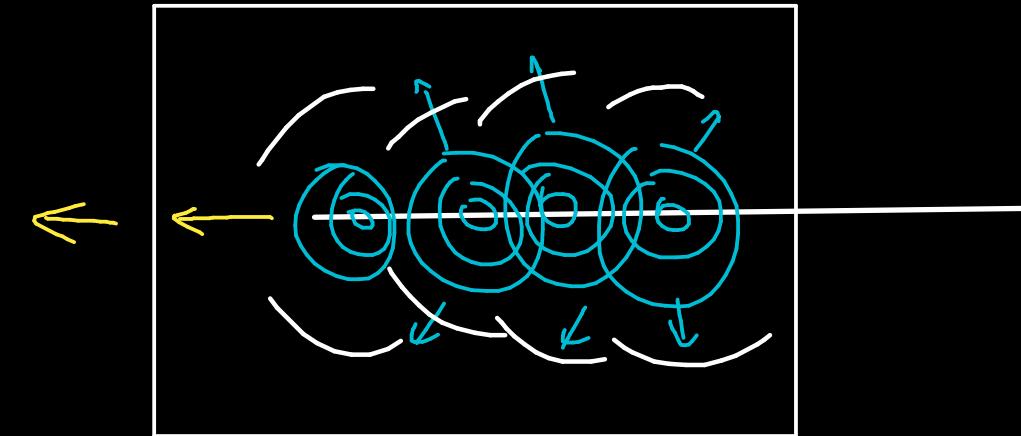


# Luz visible:

Ojo humano



cristalino



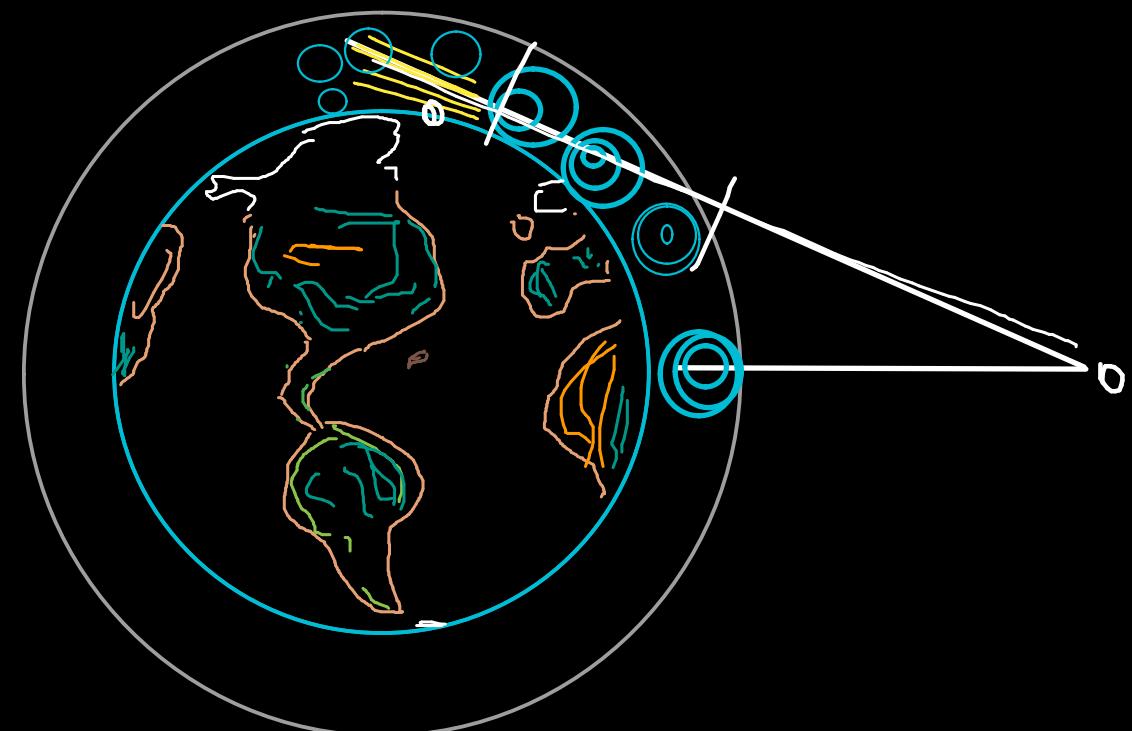
Retina

- Celulas
- conos
- bastones

Sensibles a colores principales

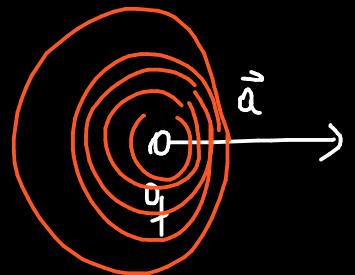
• • •

Sensibles a la intensidad

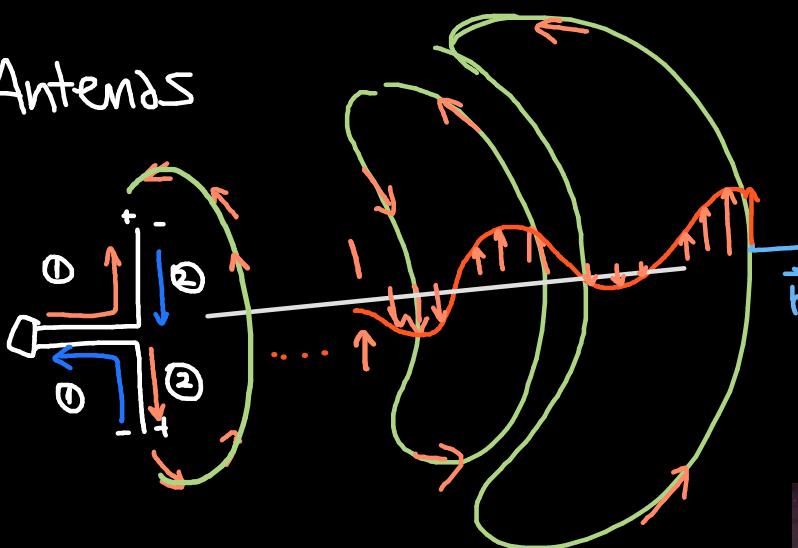


# Fuentes de ondas EM.

Aceleración de cargas



Antenas



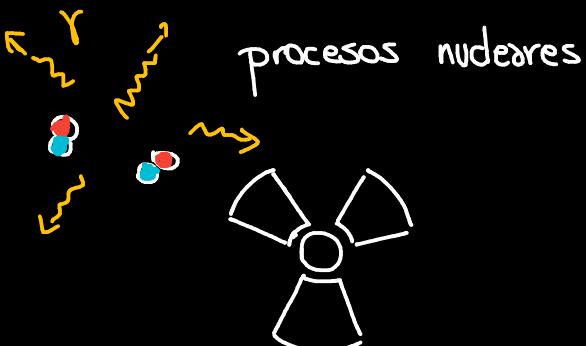
Mayor energía

$$E_2 \xrightarrow{e^-}$$

transiciones electrónicas

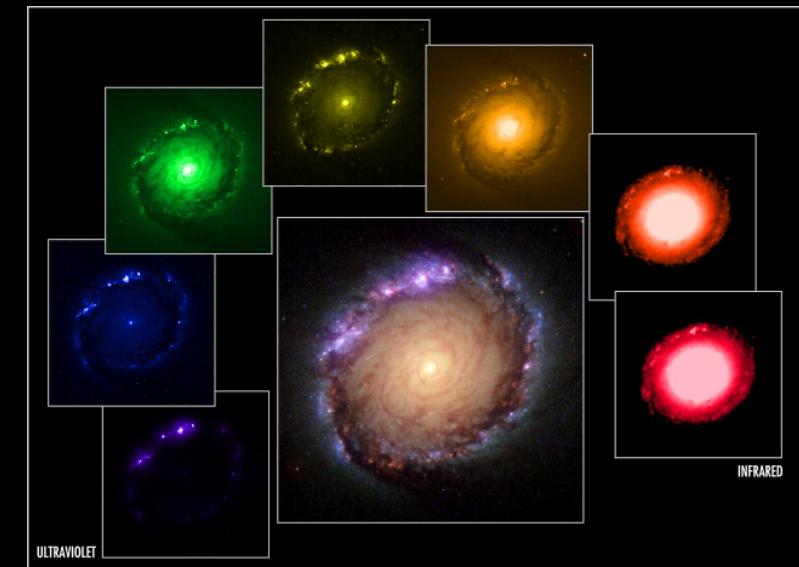
$$E_1 \xrightarrow{e^-}$$

Menor energía



procesos nucleares

Etc.



## Material complementario de videos clase 4.

- Recordatorio ecuación vectorial de un plano: [Ecuación vectorial de un plano](#)
- Vector de Poynting: [Vector de Poynting](#)
- Cálculos y ejercicios útiles : [ondas electromagnéticas y vector de Poyting](#)
- Ejercicio radiación : [Ejercicio radiación](#)

# Energía y Momentum

Movimiento de partículas

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \right) dV - \oint_A \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

Potencia Mecánica

Energía Electromagnética en un volumen V

flujo de energía atravesando una Superficie A

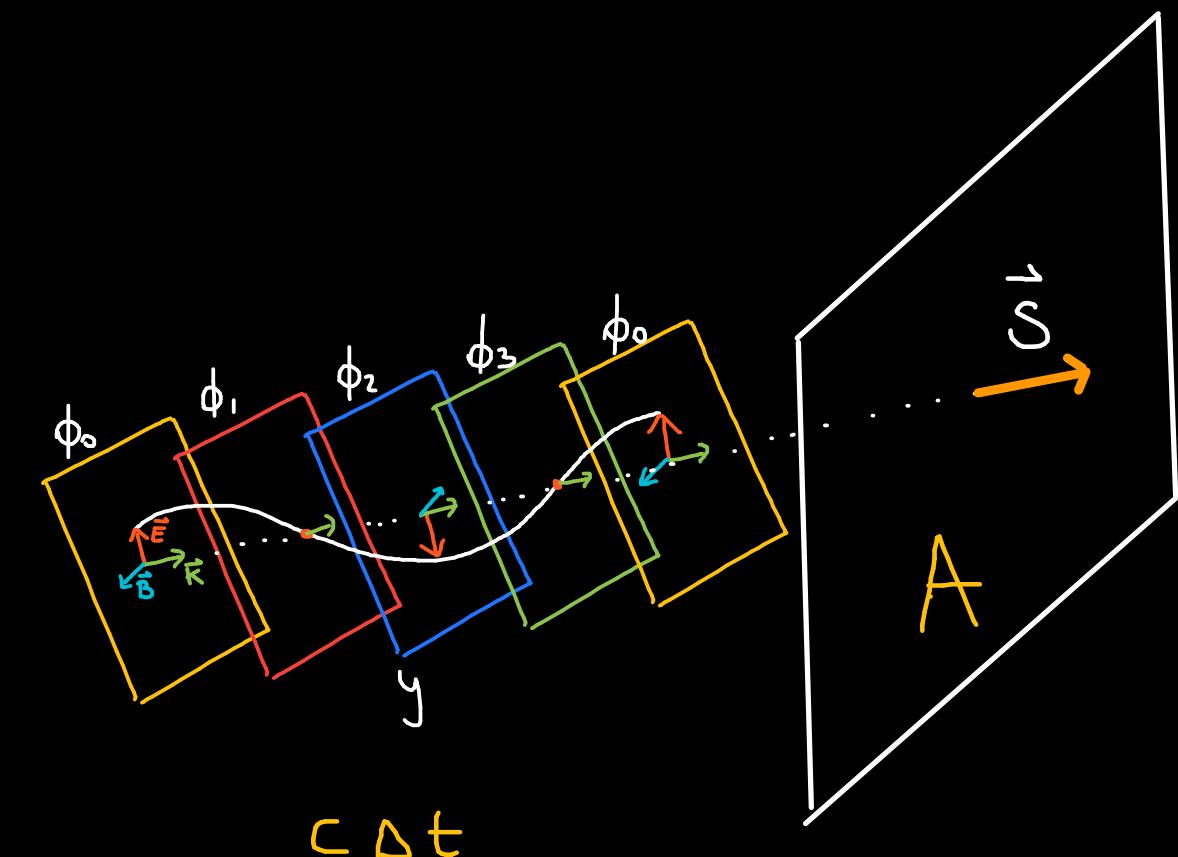
$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Densidad de energía EM.

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad \text{La unidad es: } \frac{J}{V}$$

Sector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{potencia por unidad de área} \rightarrow \frac{W}{m^2} \rightarrow \frac{J}{s \cdot m^2}$$



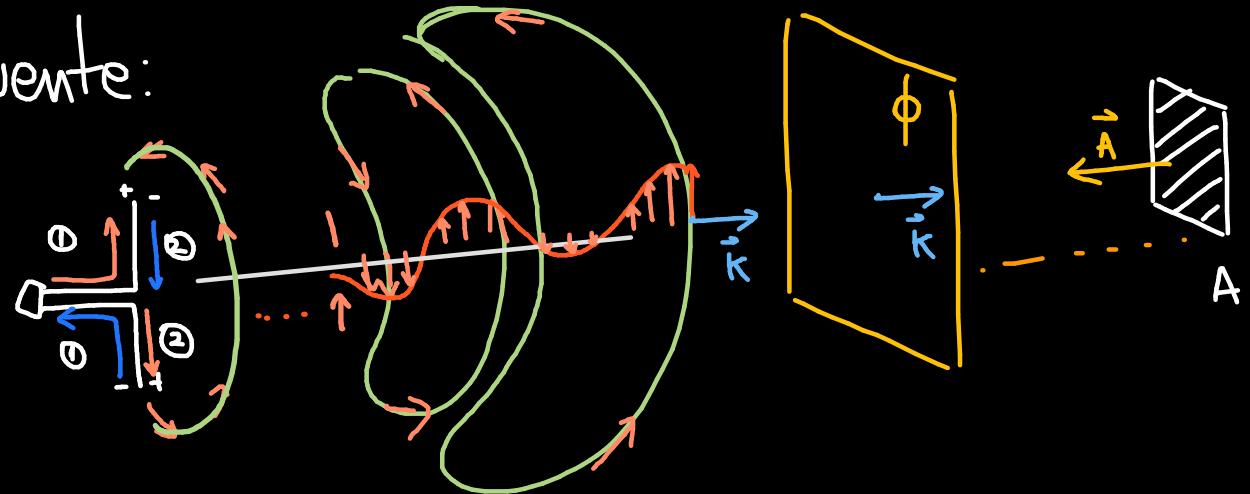
# Potencia Irradiada

$$\frac{d U_{em}}{dt} = - \oint_A \underbrace{\frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}}_{\text{densidad superficial de energía por unidad de tiempo}} = P(t)$$

Potencia  
Irradiada

densidad superficial  
de energía por  
unidad de tiempo

Fuente:



En caso de que la magnitud del vector de Poynting sea constante en una superficie A y que el vector de onda y de dirección sean //

Caso onda plana

Caso onda esférica

$$P(t) = - S \hat{k} \cdot A (-\hat{k}) = S(t) \cdot A$$

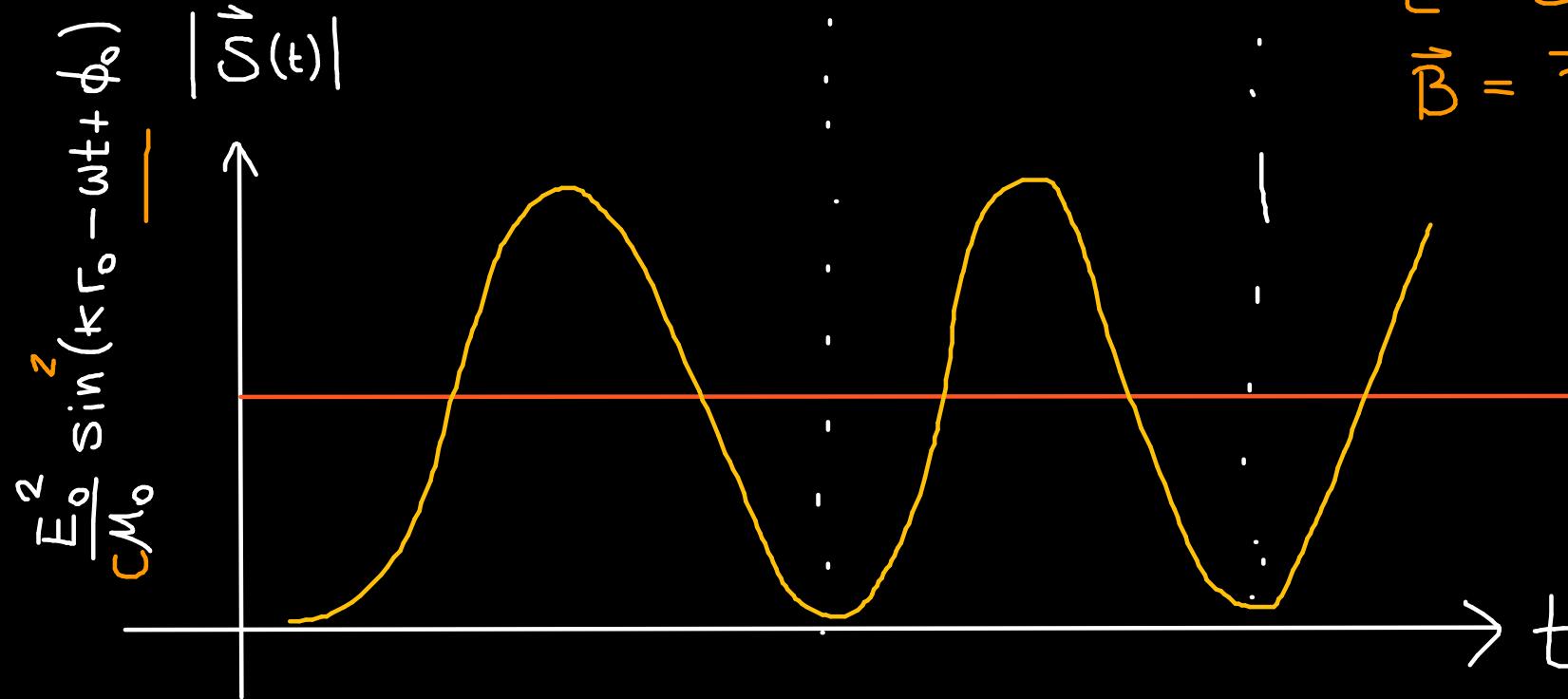
$$P(t) = - S \hat{r} \cdot A (-\hat{r}) = \underline{\underline{S(t) \cdot A}}$$

Intensidad = promedio temporal de la magnitud de  $\vec{S}$ .

$$\vec{S}(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{c\mu_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$



$$E_0 = cB_0$$

Intensidad que porta la onda electromagnética  $\vec{E} = \hat{E}_0 \hat{E} \sin(\phi(\vec{r}, t))$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{M_0} = \frac{c}{M_0 c} \left| \vec{E}_0 \right|^2 \hat{E}_0 \times (\hat{k} \times \hat{E}_0) \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle_t = \frac{c \epsilon_0}{2} \left| \vec{E}_0 \right|^2$$

$$\vec{S} = c \epsilon_0 \left| \vec{E}_0 \right|^2 \hat{k} \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

$$|\vec{S}| = c \epsilon_0 \left| \vec{E}_0 \right|^2 \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

$$\langle |\vec{S}| \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T dt c \epsilon_0 \left| \vec{E}_0 \right|^2 \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

Clásicamente la intensidad de radiación solo depende de la amplitud del campo  $\vec{E}$ .

## Densidad de momentum EM.

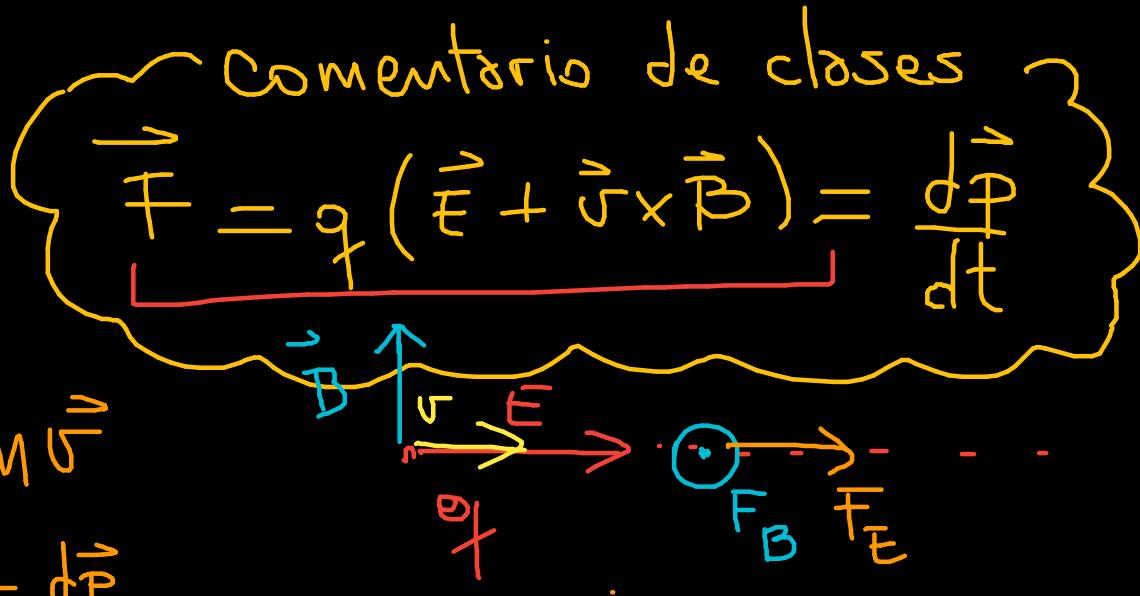
$$\vec{P}_{em} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

Momentum electromagnético

$$\vec{P}_{em} = \int_V dV \vec{P}_{em} = \int_V dV (\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B})$$

$$\vec{P} = M \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$



$$\langle \vec{P}_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 |E_0|^2 V}{2c} \hat{k} \rightarrow \begin{cases} \text{Supondremos de ahora en adelante} \\ \boxed{\vec{P}_{em} = \vec{P}_{em} \cdot V} \end{cases} \quad (V \neq 0)$$

Densidad de energía EM con densidad de Momentum EM

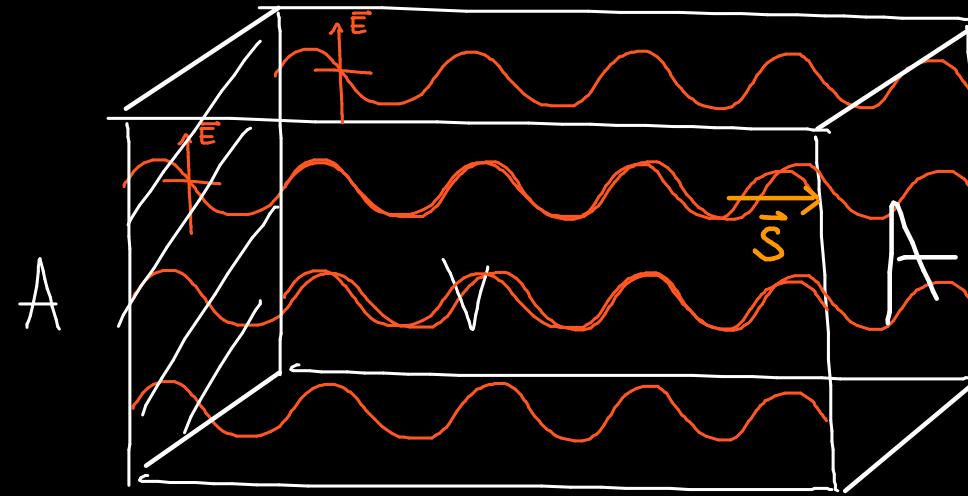
$$\vec{P}_{em} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$
$$= \epsilon_0 M_0 \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{M_0} \right) = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\langle |\vec{P}_{em}| \rangle_t = \langle \frac{|\vec{S}|}{c^2} \rangle_t = \frac{c U_{em}}{c^2 V} = \frac{c u_{em}}{c^2} = \frac{u_{em}}{c}$$

Integrando en  $V = c \Delta t$

$$U_{em} = c |\vec{P}_{em}|$$

Energía EM en  $V$  se relaciona  
con momentum EM en  $V$ .



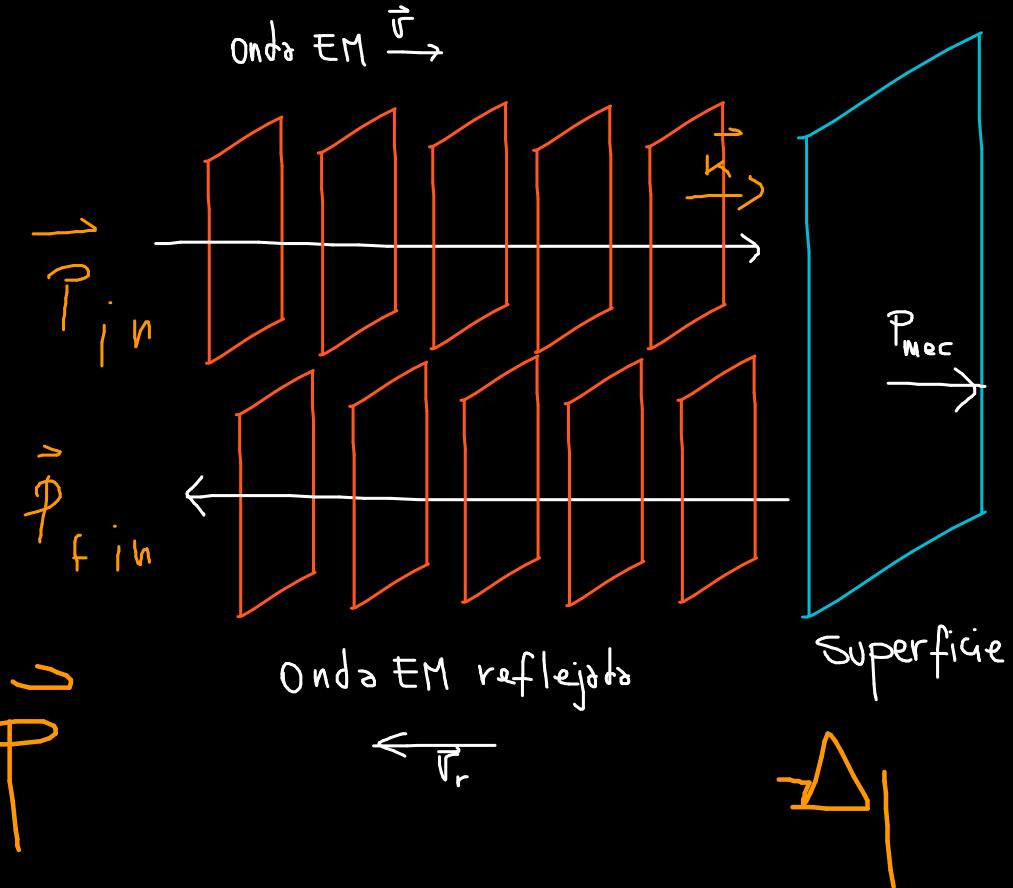
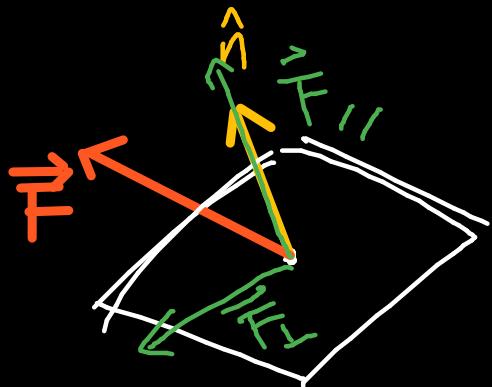
$\langle - \mid - \rangle$

$c \Delta t$

# Presión de radiación:

Presión se define:

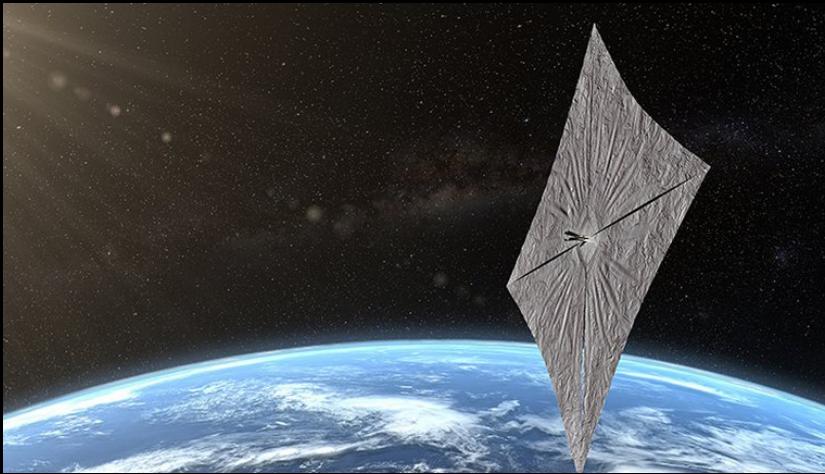
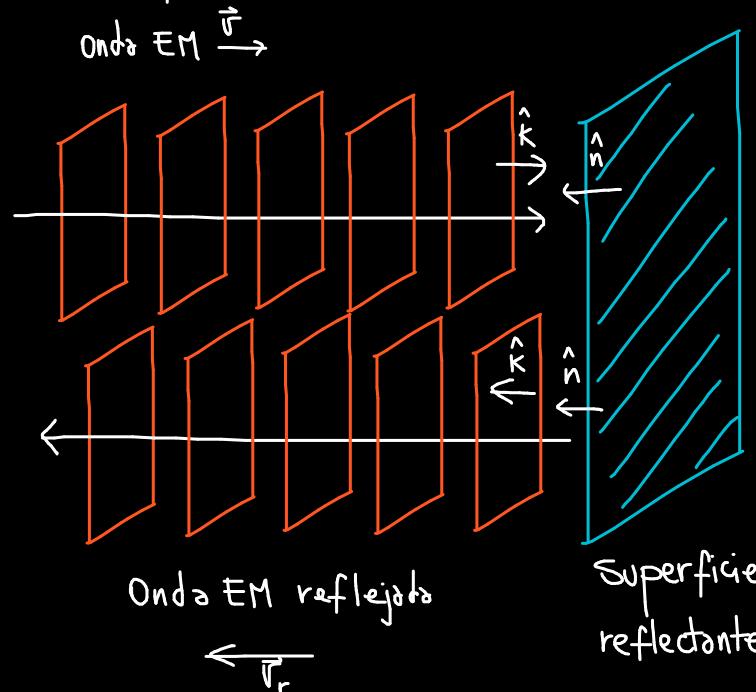
$$P = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{A}$$



$$P_{em} = \frac{1}{A} \frac{\Delta \vec{P}_{em}}{\Delta t} \cdot \hat{n} = \frac{V}{A \Delta t} (\vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in})$$

$$= \frac{c \Delta t \cdot A}{A \Delta t} (\vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in}) \cdot \hat{n} = c (\vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in}) \cdot \hat{n}$$

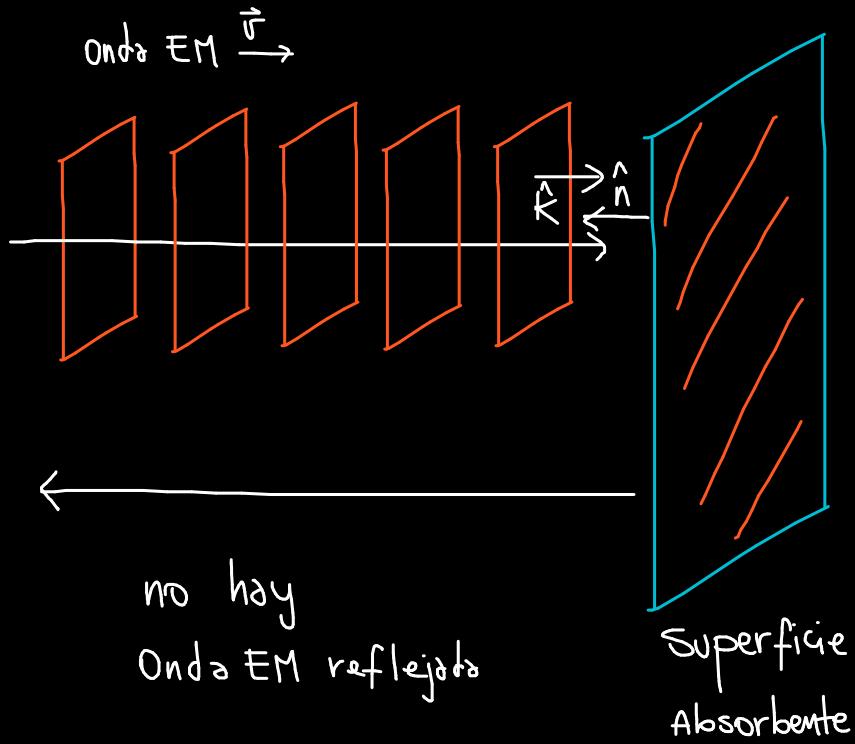
# Superficie reflectante



$$= c (\vec{P}_f - \vec{P}_{in}) \cdot \hat{n} = c (-\vec{P}_{in} - \vec{P}_{in}) \cdot \hat{n}$$

$$\begin{aligned} P_{rad} & \Big| \text{Superficie reflectante} = -2c|\vec{P}_{em}| \hat{k} \cdot \hat{n} = 2c|\vec{P}_{em}| = 2c \frac{\langle \vec{s} \rangle}{c^2} \\ & = 2 \frac{I_{em}}{c} \end{aligned}$$

# Superficie Absorbente

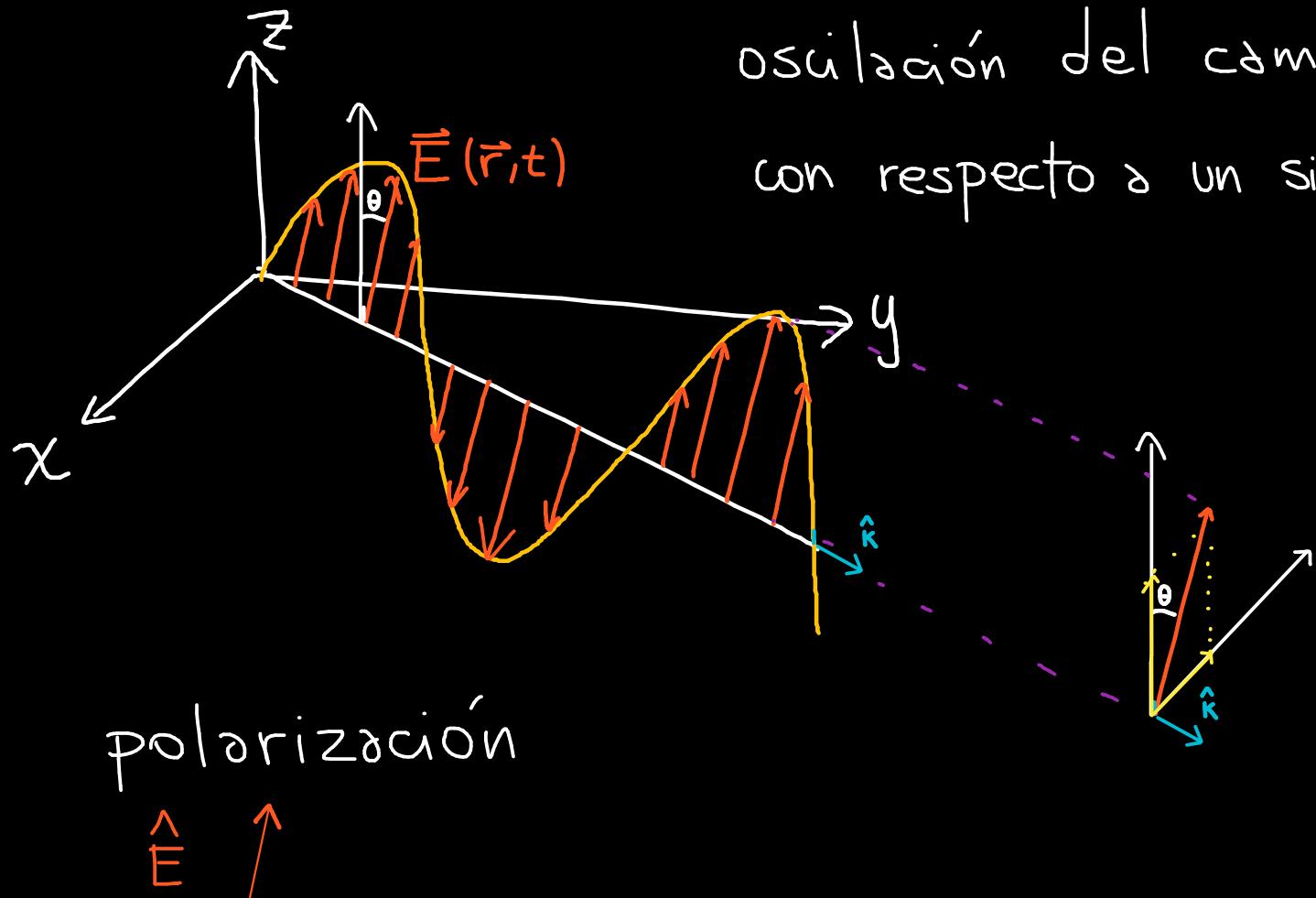


$$P_{\text{rad}} \Big|_{\text{Superficie}} = c \left( 0 - \left| \vec{P}_{\text{em}} \right| \hat{k} \cdot \hat{n} \right) = c \left| \vec{P}_{\text{em}} \right| = c \frac{\langle \vec{s} \rangle_t}{c^2}$$
$$\text{Absorbente} = \frac{I_{\text{em}}}{c}$$

## Material complementario de videos clase 5.

- Vector de Poynting: [Vector de Poynting](#)
- Cálculos, energía onda viajera : [ondas electromagnéticas y vector de Poyiting](#)
- Cálculos, energía onda estacionaria : [ondas electromagnéticas y vector de Poyiting II](#)
- Ejercicio radiación : [Ejercicio radiación](#)
- Polarización de la luz : [Polarización de la luz](#)

Polarización lineal: Dirección de la oscilación del campo eléctrico.

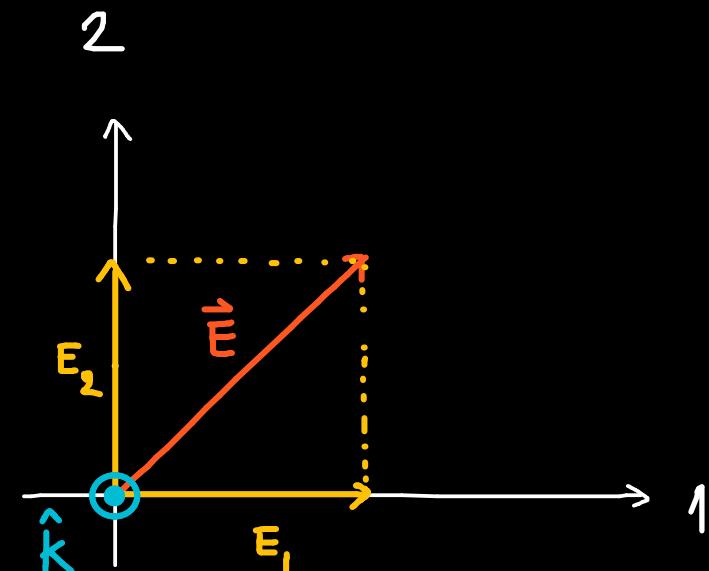


polarización

$$\hat{E}$$

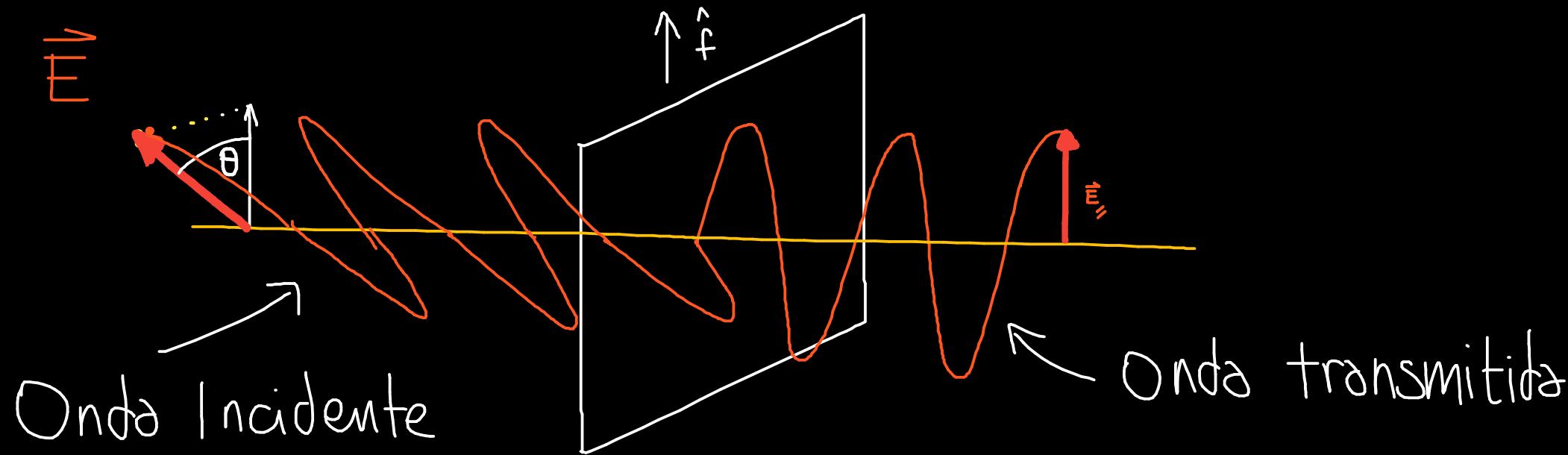
$$\vec{E} = E_0 \hat{E} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

oscilación del campo eléctrico se puede descomponer con respecto a un sistema de referencia



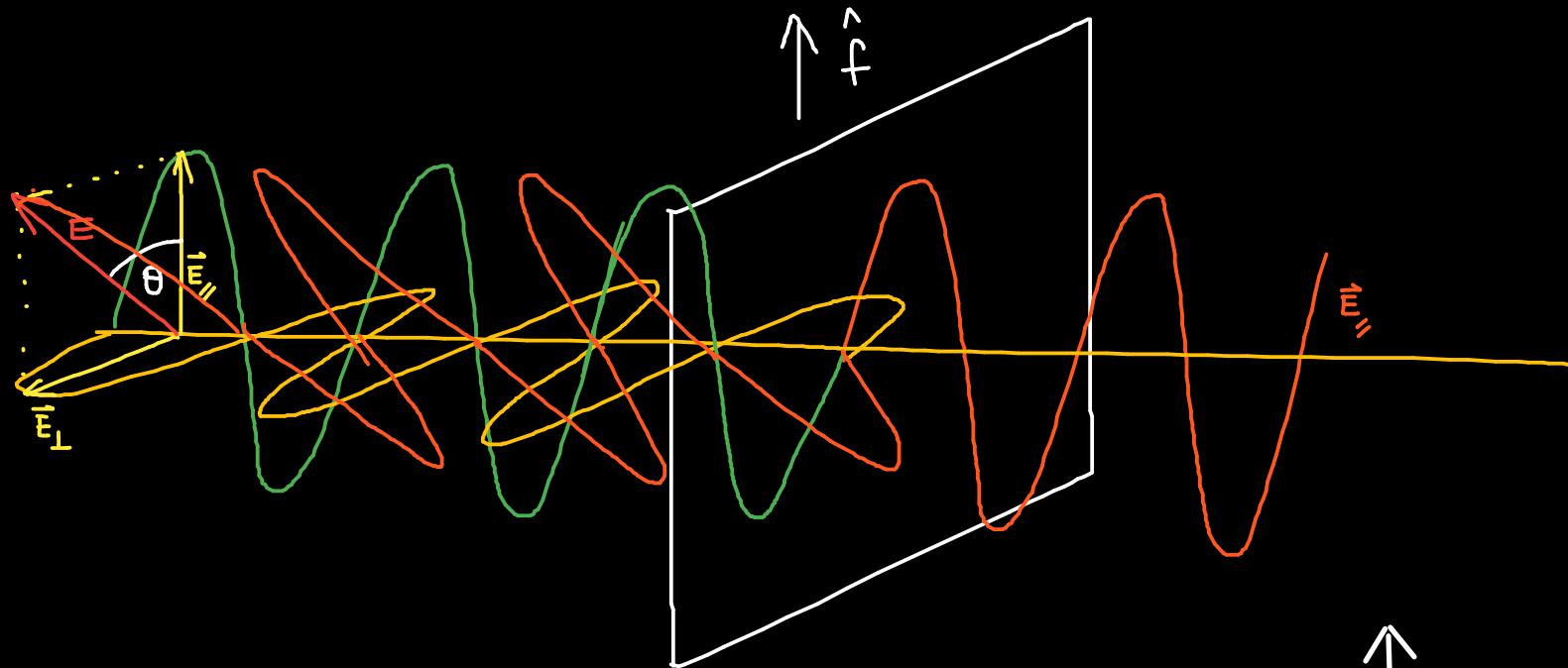
$$\vec{E}_0 = E_1 \hat{v}_1 + E_2 \hat{v}_2$$

# Polarizador o "filtro polarizador"

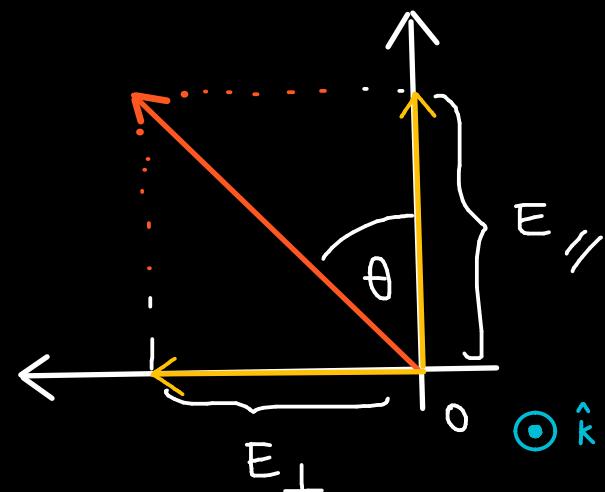


Un polarizador es un medio que transmite la perturbación, que se propaga a través del espacio, en una dirección determinada.

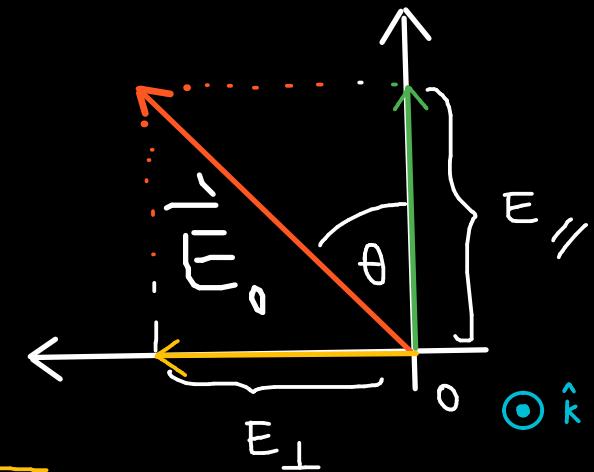
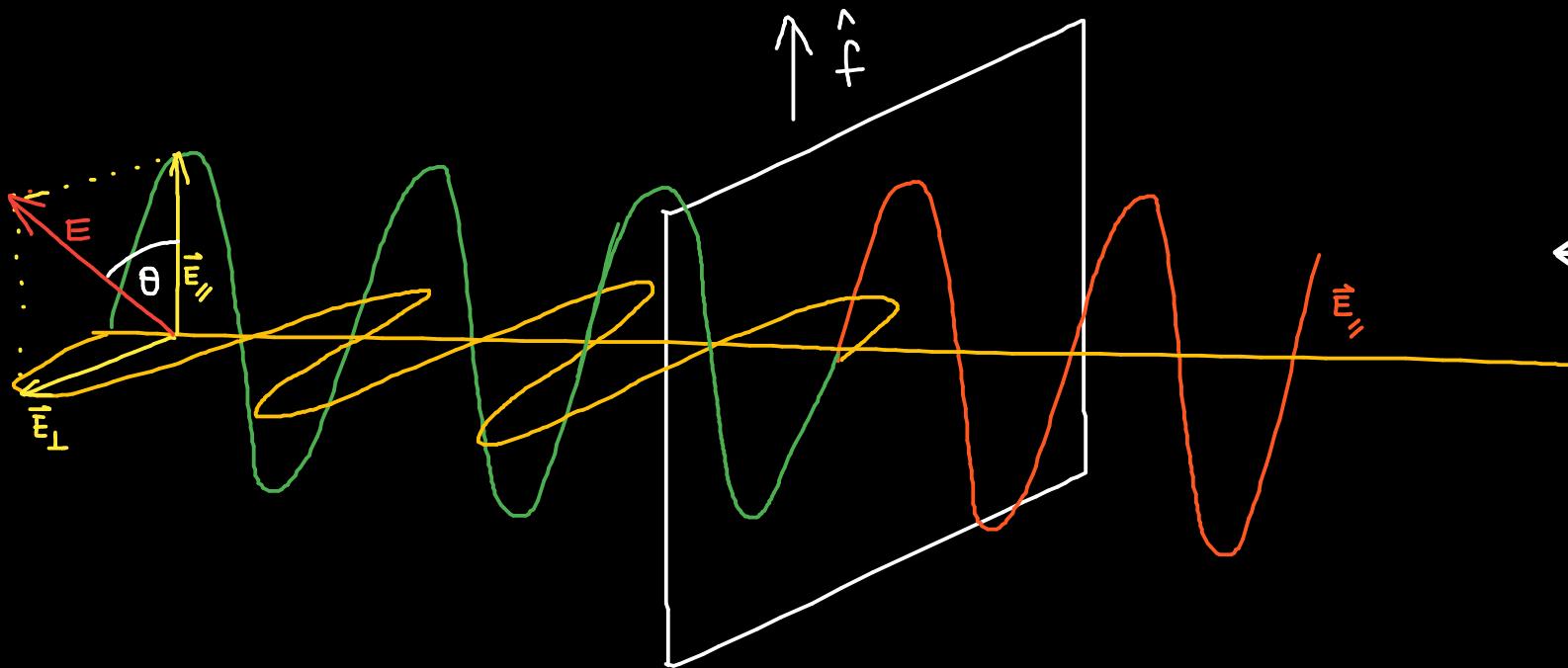
# Polarizador o "filtro polarizador"



Descomponiendo  
el campo

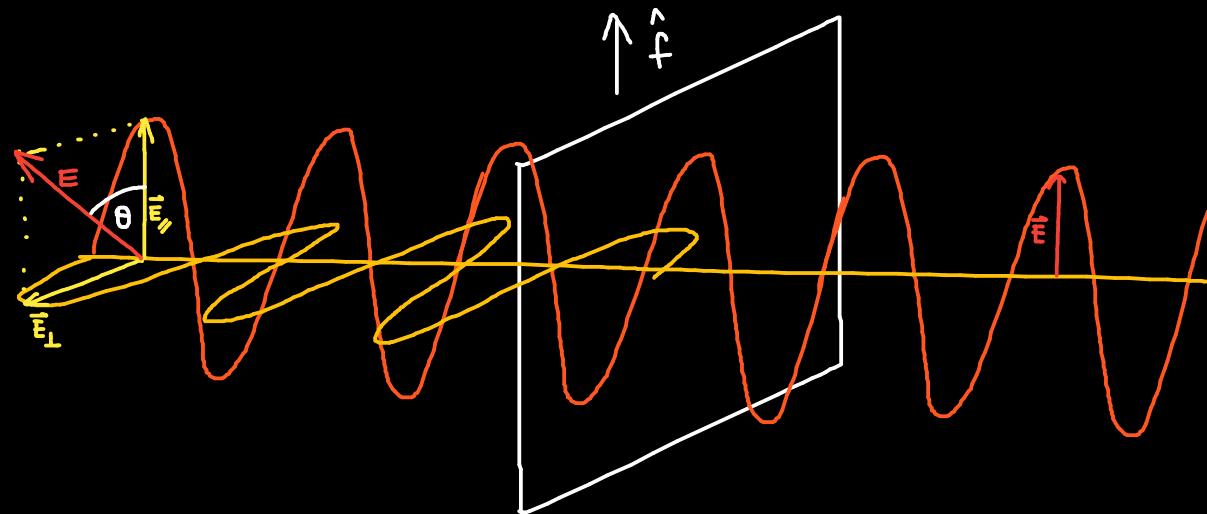


# Polarizador o "filtro polarizador"



$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_0 \cos(\theta_0)$$

Polarizador o "filtro polarizador"



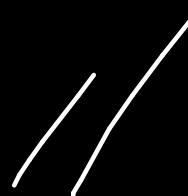
$\vec{E}_{\parallel}$  es la componente paralela de  $\vec{E}$  a la dirección en que el filtro deja pasar la onda

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_o \cos \theta$$

Intensidad de onda transmitida:

$$I_t = I_0 \cos^2 \theta$$

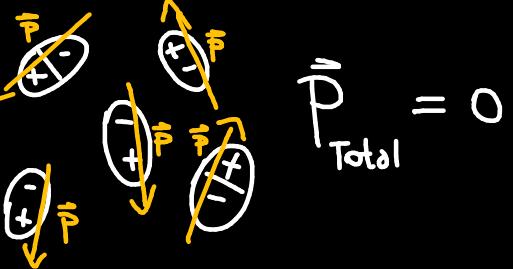
# Ley de Molus



# Medios lineales

1

$$\vec{E}_{ext} = 0$$



$$\vec{P}_{Total} = 0$$

2

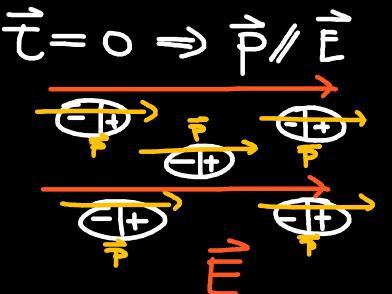
$$\vec{E}_{ext} \neq 0$$

transición

$$\begin{array}{c} \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \\ \vec{p} = ? \end{array}$$

3

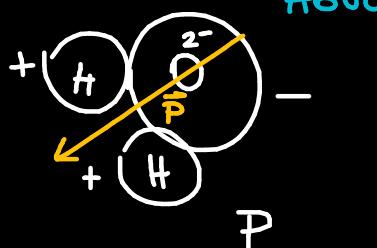
$$\vec{E} \neq 0$$



$$\boxed{\vec{P}_{Total} = \epsilon_0 \chi_{\epsilon} \vec{E}}$$

Medio Isotrópico lineal  $\vec{P} \parallel \vec{E}$

Ejemplo  $H_2O$   
Agua



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_{\epsilon} \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_{\epsilon}) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{aligned}}$$

$\chi_{\epsilon}$  susceptibilidad  
eléctrica  
(propiedad del medio)

# Índice de refracción y velocidad de la luz

Propagación de la Luz a través de un medio depende de las propiedades eléctricas y magnéticas de éste.

## Índice de refracción

$$n = \frac{c}{v}$$

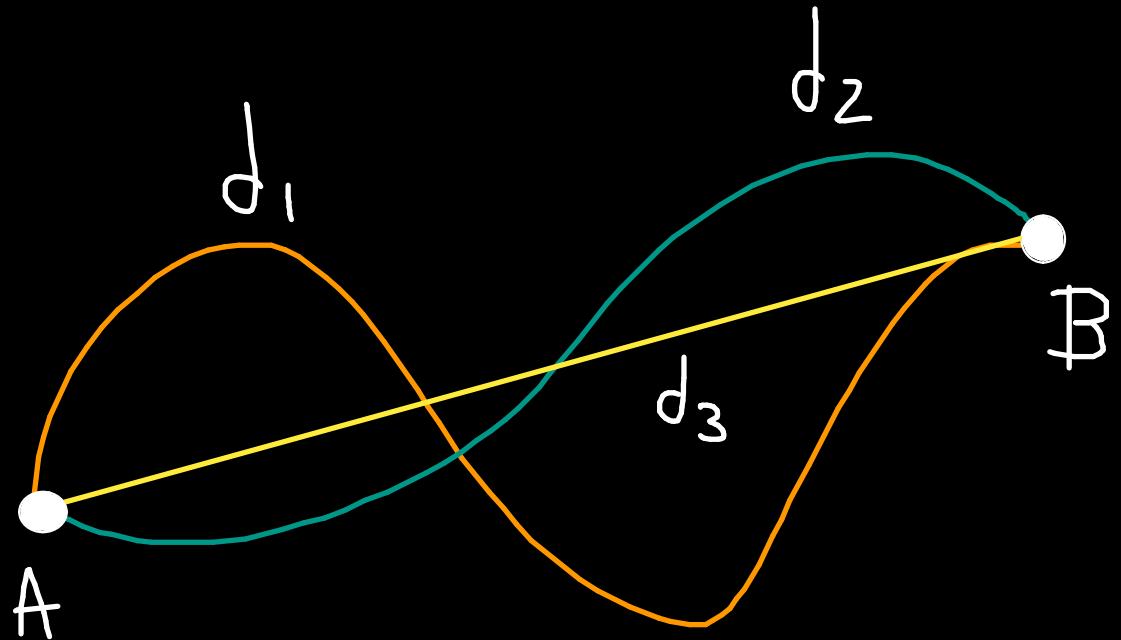
→ Velocidad de la luz  
en el vacío.  
→ Velocidad de la luz  
en el medio

$$v = \frac{c}{n}$$

# Óptica clásica

## Principio de Fermat

La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto a otro es aquella para la cual el tiempo de recorrido es mínimo



$$t_i = \frac{d_i}{c}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$\Rightarrow$  trayectoria recta  
para un mismo índice de refracción

# Óptica clásica

$\hat{s}$  : normal a la superficie

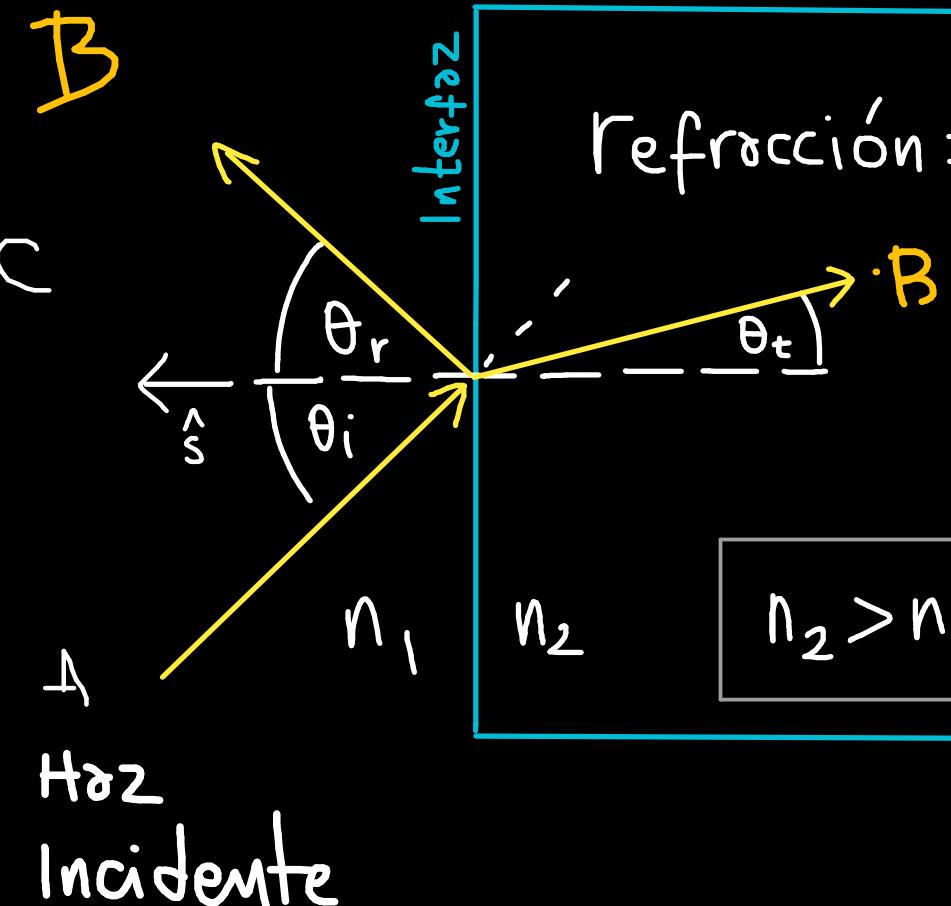
Reflexión:  $\theta_i = \theta_r$

Refracción: Ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$



reflexión



# Reflexión interna total

$$\text{Si } n_1 > n_2$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \theta_1$$

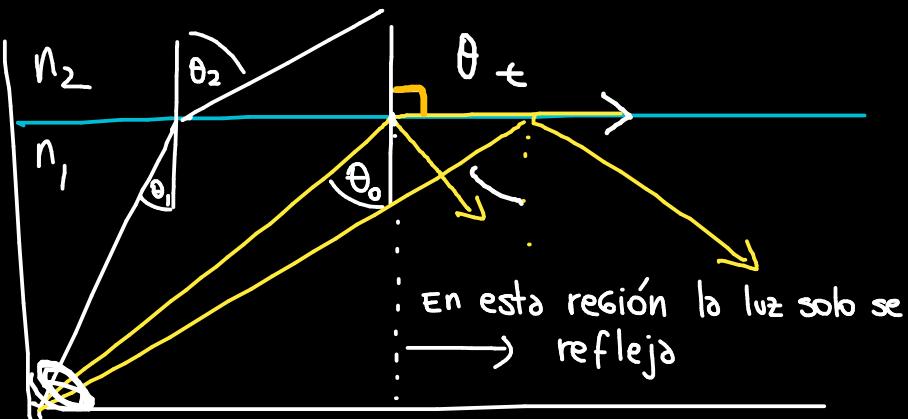
$\downarrow$        $\left\{ \begin{matrix} > 1 \\ \downarrow \end{matrix} \right.$        $\theta_o = \text{ángulo en que la luz queda "atrapada" en el medio}$

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \theta_o = 1 \Rightarrow \sin \theta_o = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

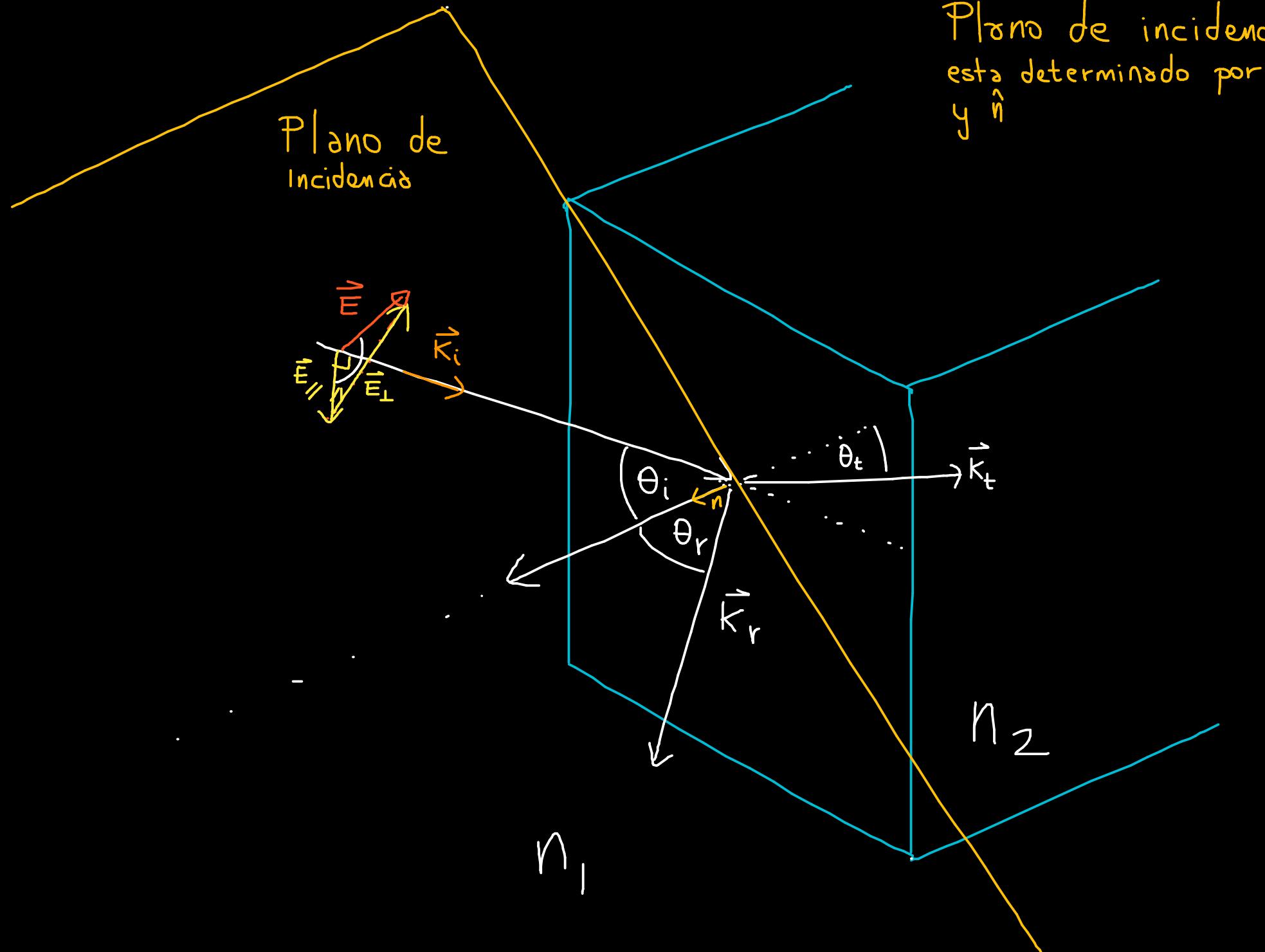
$$\theta_o = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

$\theta > \theta_o \Rightarrow \underline{\sin \theta_2 > 1}$  no puede ser!  
Ocurre reflexión interna total

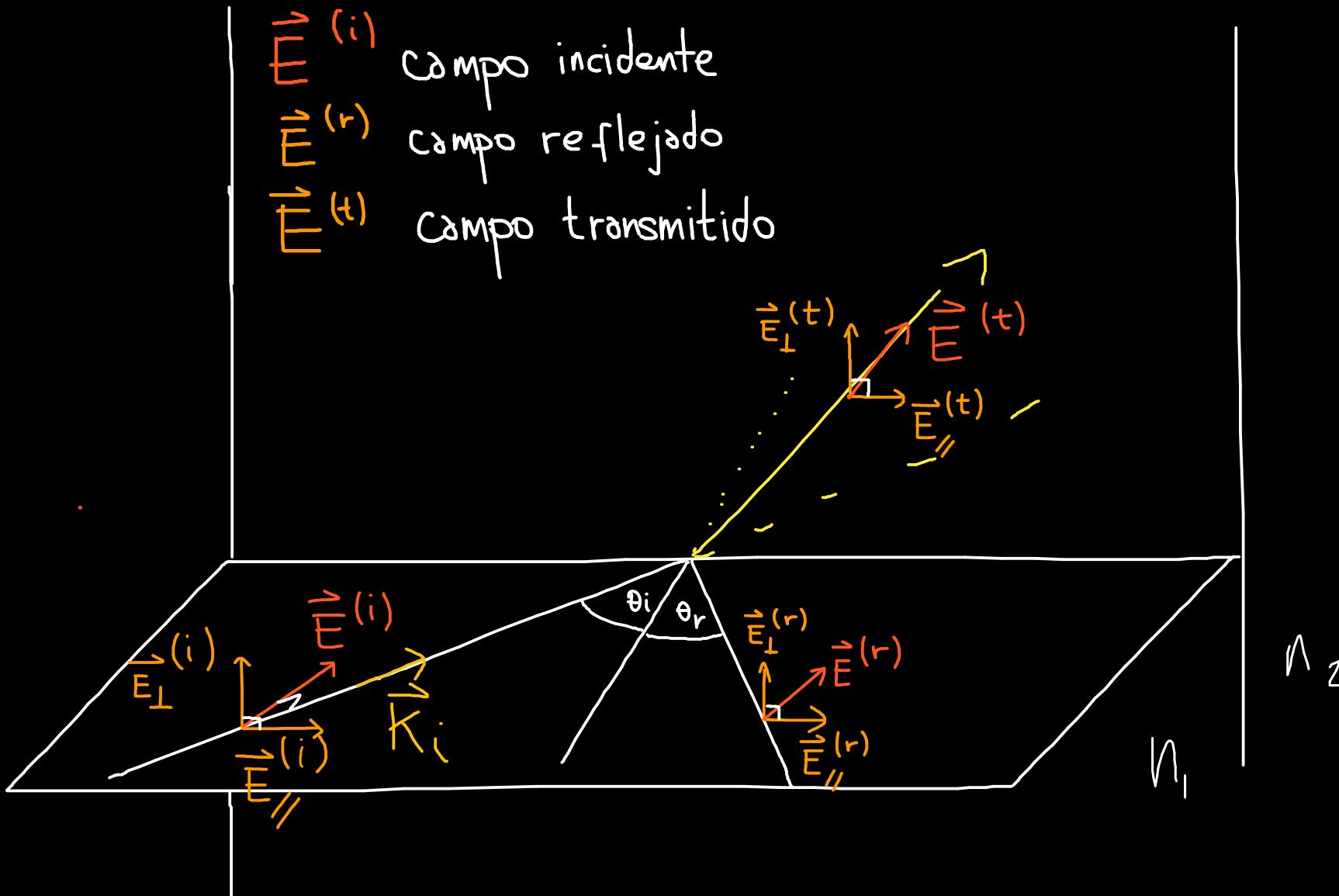


## Material complementario de videos clase 6.

- Polarizadores: [Polarizadores](#)
- Principio de Fermat : [Princio de Fermat](#)
- Reflexión interna total: [Reflexión interna total](#)
- Ejercicios ley de Snell (45 min son varios ejercicios no es necesario ver este video entero):  
[Ejercicios](#)



# Descomponiendo el campo ( $\parallel$ y $\perp$ )



Onda P (//) :

Componente // reflejada  $|\vec{E}_{//}^{(r)}| = r_{//} |E_{//}^{(i)}| \Rightarrow r_{//} = \left| \frac{E_{//}^{(r)}}{E_{//}^{(i)}} \right| \therefore r_{//} = r_p$

Componente // transmitida  $|\vec{E}_{//}^{(t)}| = t_{//} |E_{//}^{(i)}| \therefore t_{//} = t_p$

Onda S (⊥) :

Componente ⊥ reflejada  $|\vec{E}_{\perp}^{(r)}| = r_{\perp} |E_{\perp}^{(i)}| \therefore r_{\perp} = r_s$

Componente ⊥ transmitida  $|\vec{E}_{\perp}^{(t)}| = t_{\perp} |E_{\perp}^{(i)}| \therefore t_{\perp} = t_s$

# Ecaciones de Fresnel

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

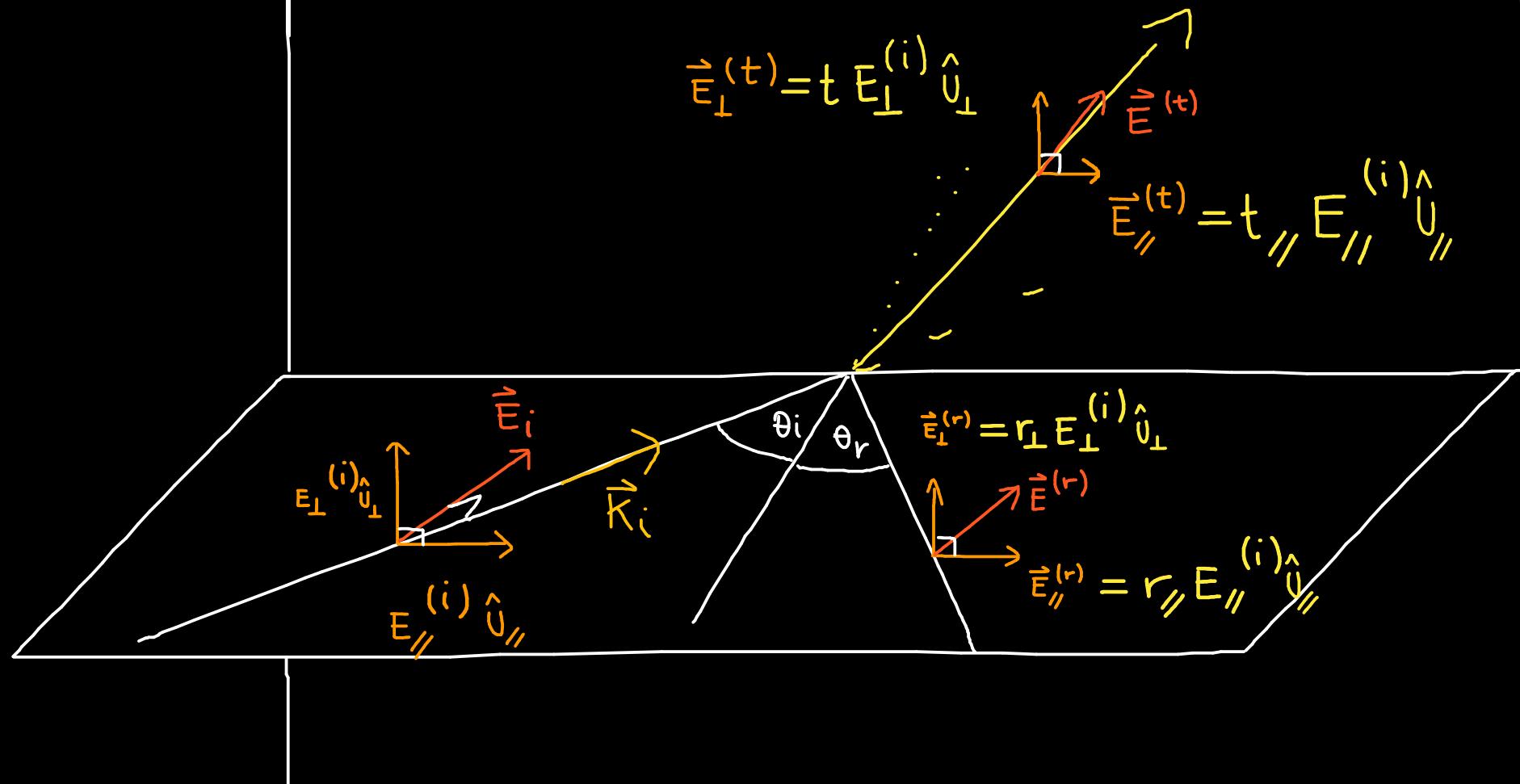
$$t_{\perp} = \frac{2 n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

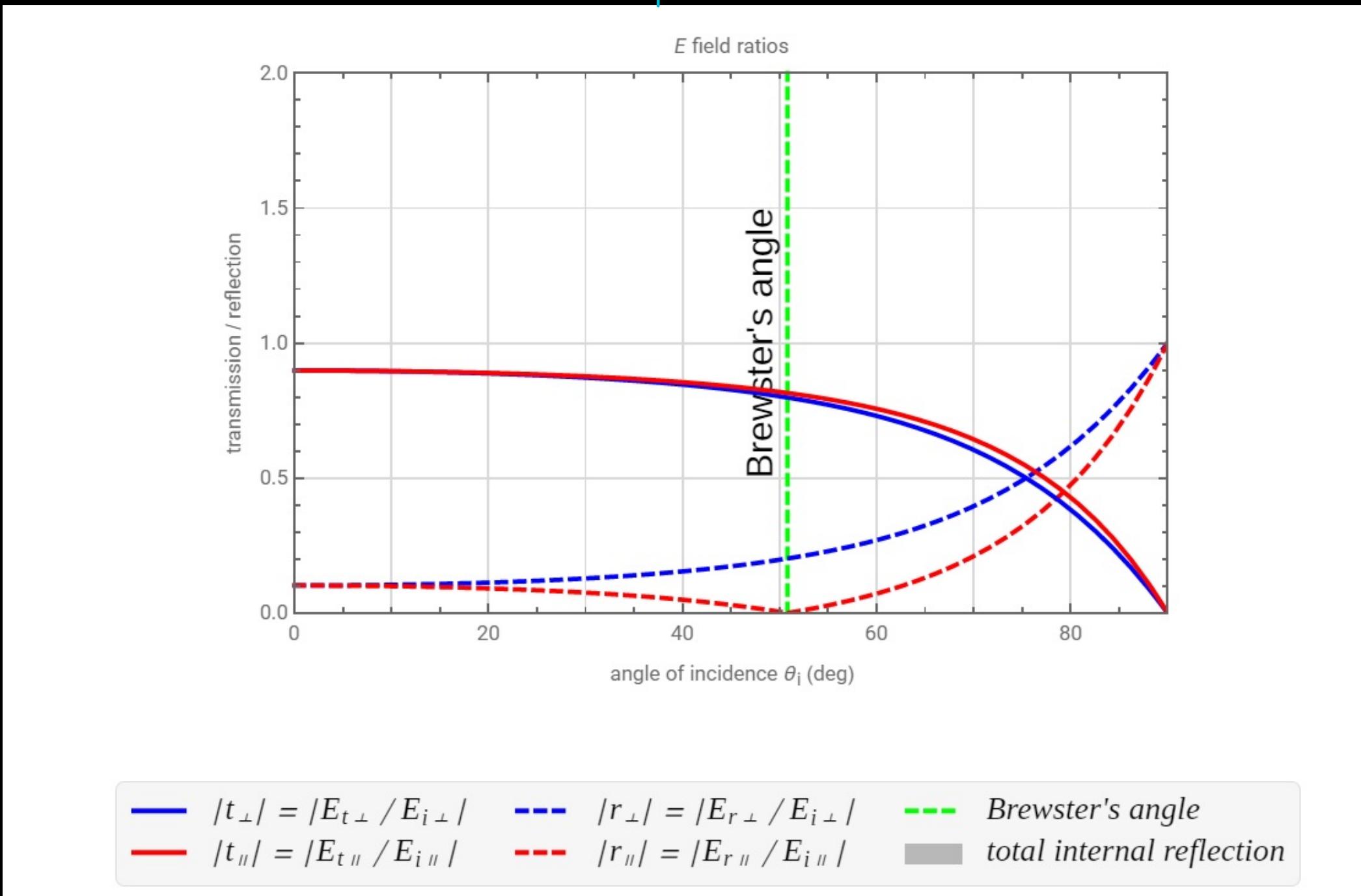
$$t_{\parallel} = \frac{2 n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

revisar video en cápsula sobre  
Su deducción (en el canal del curso)

# Coeficientes de amplitud para la reflexión y la transmisión



Sacado de wolfram alpha  $n_i = 1.19$ ,  $n_t = 1.46$



## Caso especial Ángulo de Brewster $\theta_B$

$$E_{\parallel}^{(r)} = E_{\parallel}^{(i)} \left( \frac{n_2 \cos \theta_B - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_B} \right) = 0$$

•  $n_2 \cos \theta_B - n_1 \cos \theta_t = 0$

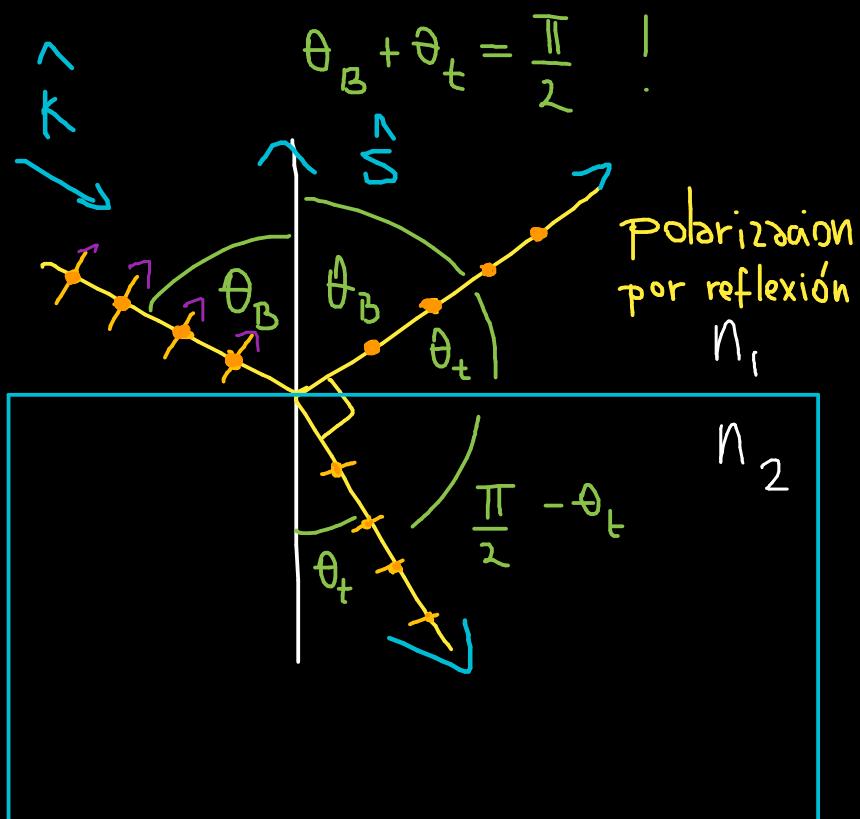
$$\Rightarrow n_2 \cos \theta_B = n_1 \cos \theta_t$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_B}$$

•  $\cos \theta_t = \sin \theta_B$

$$\frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$



## Material complementario de videos clase 7.

- Ecuaciones de Fresnel (video largo pero contiene la deducción): [Fresnel](#)
- Ejercicios Fresnel (Video largo pero con diferentes ejercicios) : [Ejercicios Fresnel](#)
- Ángulo de Brewster muestra: [Brewster](#)

Intensidad:

$$I_o = \langle |\vec{S}_o \cdot \hat{n}| \rangle_t$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_o|^2 \cos \theta_o$$

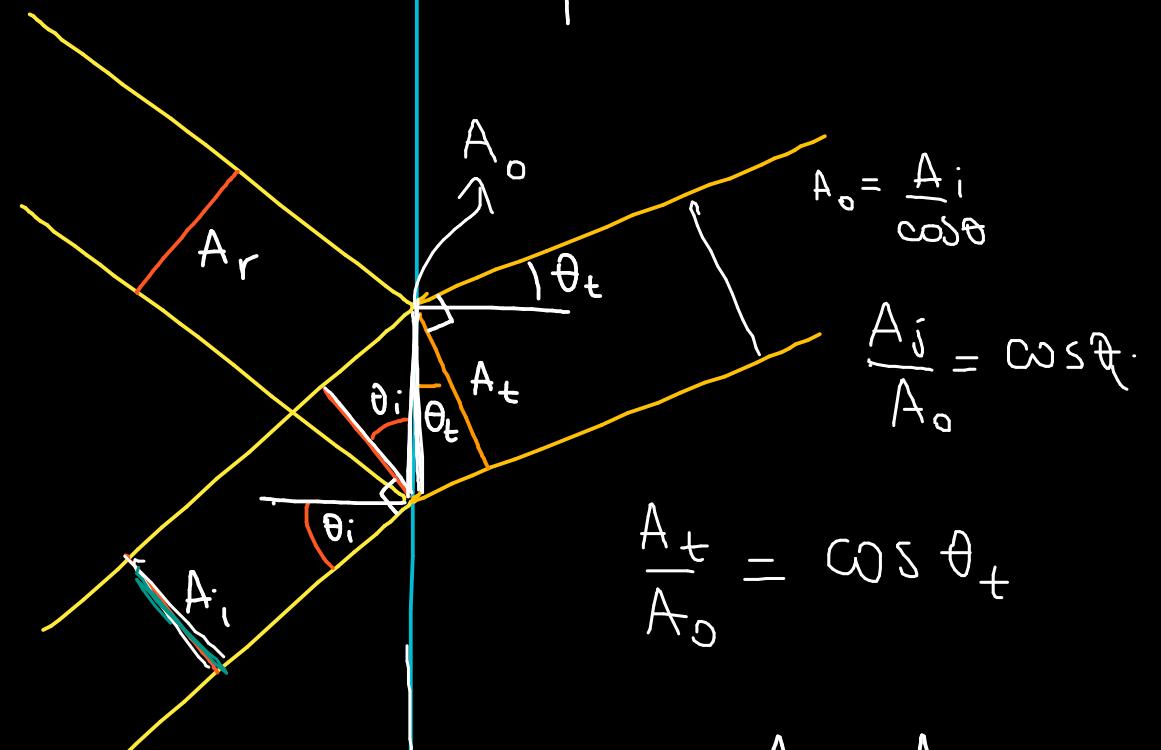
ó = i, r, t

Irradiancia es  
flujo de energía por  
unidad de área por  
unidad de tiempo

Ejemplo:

$$I_{t//} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_{t//}|^2 \cos \theta_t$$

Energía se reporta en  
Superficie transversal



$$A_o = \frac{A_i}{\cos \theta}$$

$$\frac{A_j}{A_o} = \cos \theta$$

$$\frac{A_t}{A_o} = \cos \theta_t$$

$$A_i = A_r$$

$n_1$

$$\frac{n_2 > n_1}{A_t \geq A_i}$$

$$\theta_t < \theta_i$$

$$\cos \theta_t > \cos \theta_i$$

## Intensidad

$$I_{\perp}^{(i)} = \frac{\epsilon_1 c}{2n_1} (E_{\perp}^{(i)})^2 \cos \theta_i \quad I_{//}^{(i)} = \frac{\epsilon_1 c}{2n_1} (E_{//}^{(i)})^2 \cos \theta_i$$

$$I_{\perp}^{(r)} = \frac{\epsilon_1 c}{2n_1} (E_{\perp}^{(r)})^2 \cos \theta_r \quad I_{//}^{(r)} = \frac{\epsilon_1 c}{2n_1} (E_{//}^{(r)})^2 \cos \theta_r$$

$$I_{\perp}^{(t)} = \frac{\epsilon_2 c}{2n_2} (E_{\perp}^{(t)})^2 \cos \theta_t \quad I_{//}^{(t)} = \frac{\epsilon_2 c}{2n_2} (E_{//}^{(t)})^2 \cos \theta_t$$

## Ejemplos

$$R_{//} = \frac{I_{//}^{(r)}}{I_{//}^{(i)}} = \frac{r_{//}^2 E_{//}^{(i)2}}{E_{//}^{(i)2}} = r_{//}^2$$

$$T_{//} = \frac{I_{//}^{(t)}}{I_{//}^{(i)}} = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2} \frac{t_{//}^2 E_{//}^{(i)2}}{E_{//}^{(i)2}} \cdot \frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_i)}$$

$$T_{//} = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2} \cdot \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i} \cdot t_{//}^2$$

$$R_{//} = \frac{I_{//}^{(r)}}{I_{//}^{(i)}} \quad T_{//} = \frac{I_{//}^{(t)}}{I_{//}^{(i)}}$$

$$R_{\perp} = \frac{I_{\perp}^{(r)}}{I_{\perp}^{(i)}} \quad T_{\perp} = \frac{I_{\perp}^{(t)}}{I_{\perp}^{(i)}}$$

Ecaciones de Fresnel muestran que se conserva la energía // y ⊥

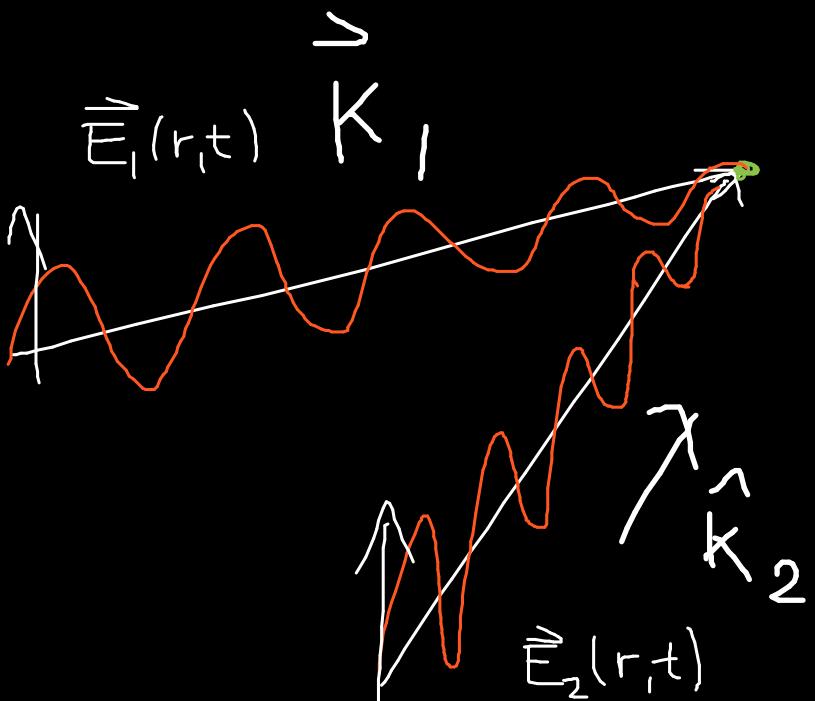
$$R_{//} + T_{//} = 1$$

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$

Esto solo es válido cuando el material no absorbe la energía.

Ondas electromagnéticas cumplen

Principio de superposición (propiedad de todas las ondas)  
 $\vec{E}(r,t) = \vec{E}_1(r,t) + \vec{E}_2(r,t)$



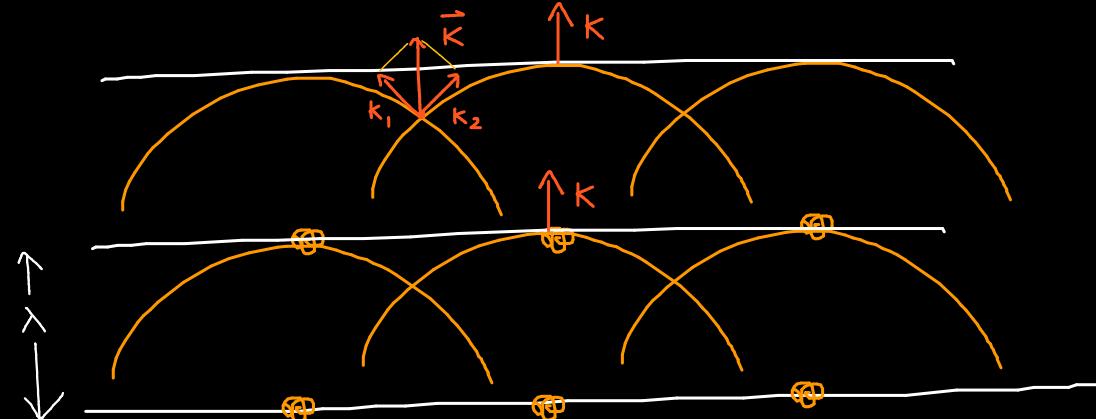
Interferencia  
en un  
punto de  
observación

- En el caso que  $\hat{E}_1 \parallel \hat{E}_2$
- Si  $E_1 + E_2 = 0$  \_\_\_\_\_
  - Interferencia destructiva
  - Si  $E_1 + E_2 = \text{Máximo}$  {
  - Interferencia constructiva

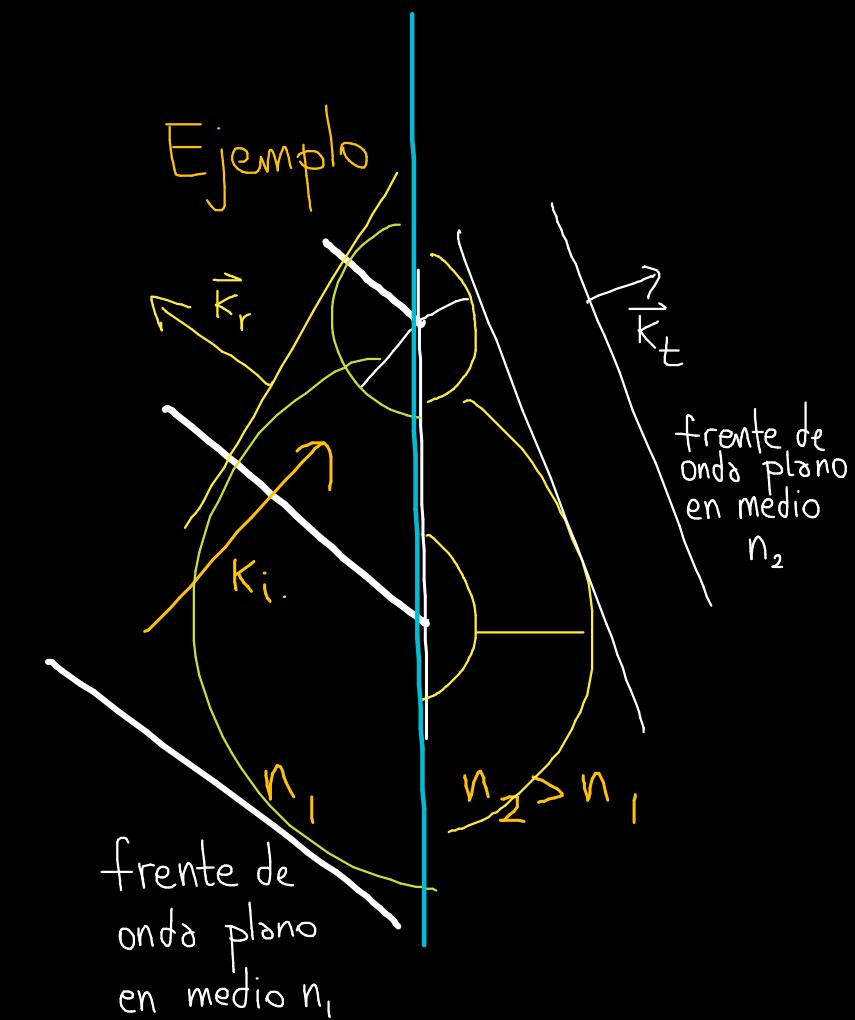
$$\vec{E}_i(r,t) = E_0 \hat{E}_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_i)$$

# Principio de Huygens (1678)

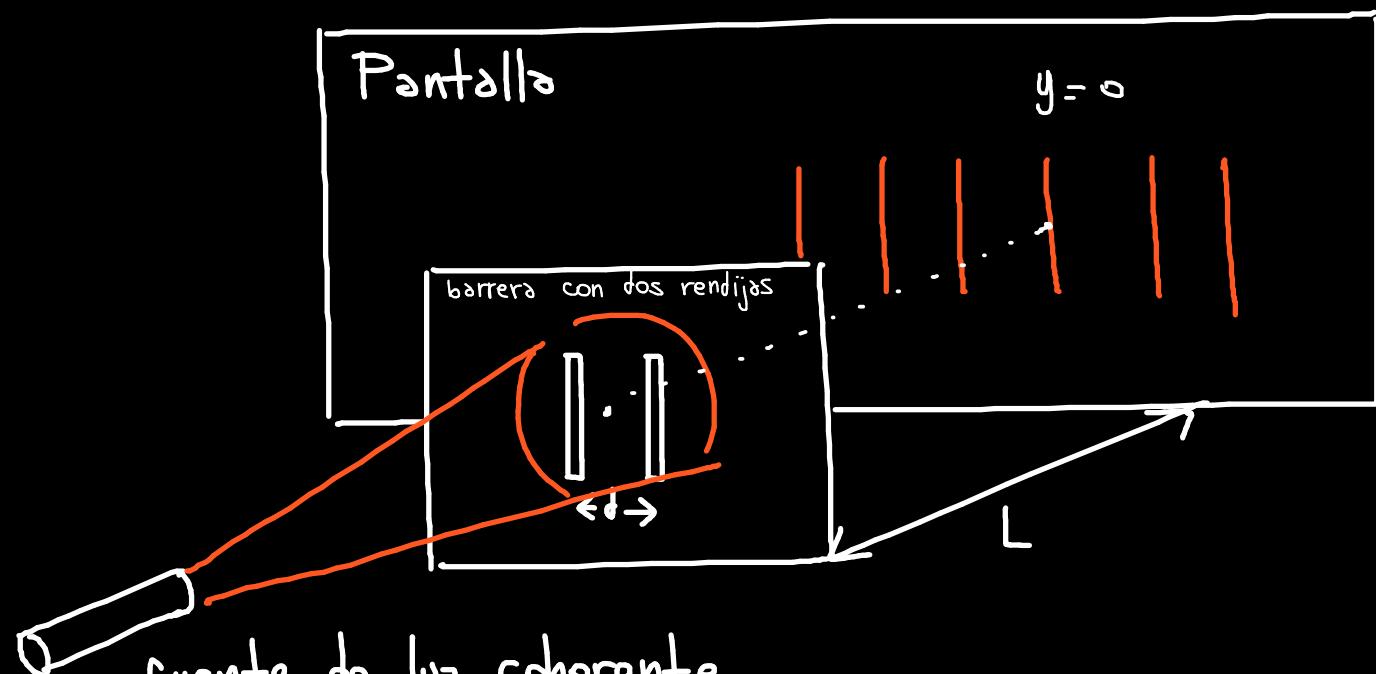
Cada punto de un frente de onda puede considerarse como una fuente de onda esférica con misma longitud de onda, velocidad y frecuencia del frente de onda del cual provienen



frente de onda plano

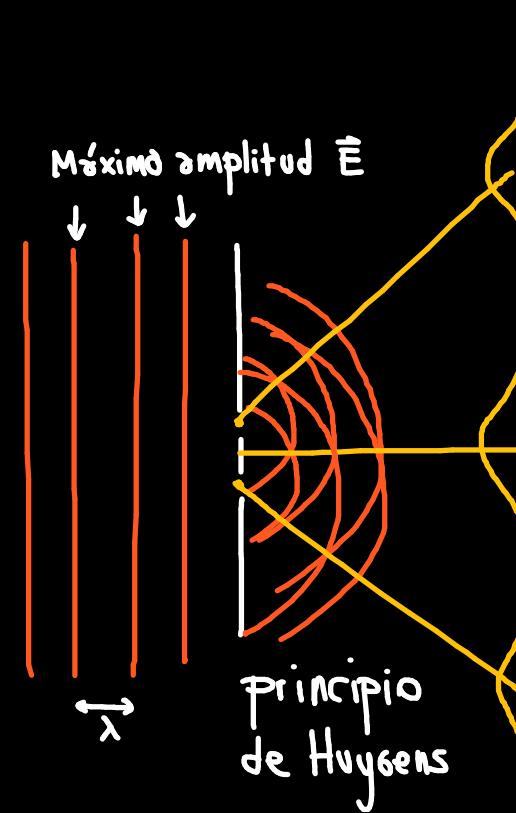


# Experimento de la doble rendija

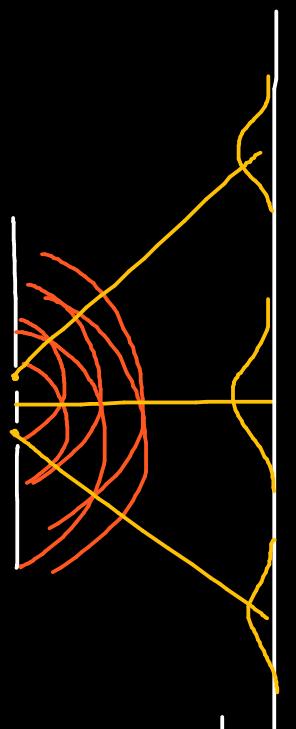


- campo eléctrico puede ser descrito como  $E = E_0 \hat{u} \cos(\phi)$

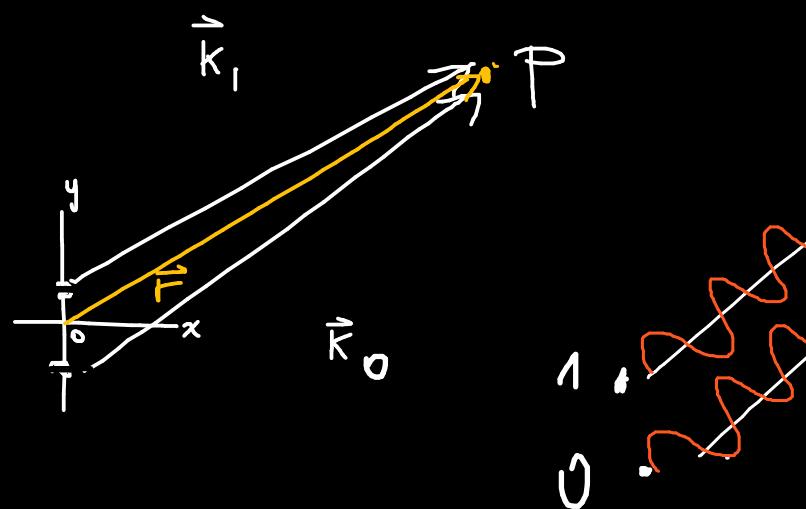
Experimento  
de Young  
1801



Estudiemos que pasa entre los rendijas y la pantalla



$\equiv$



Como la luz proviene de una fuente en común la suma de las ondas esféricas en "P" será

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{i} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) + E_0 \hat{j} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Misma fuente implica igual amplitud, polarización, frecuencia y longitud de onda.

$$\phi(r, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$

$$\phi_i - \phi_o = (\vec{k}_1 - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}$$

$$\approx k \cdot \Delta L$$

$$\boxed{\Delta \phi = k \Delta L}$$

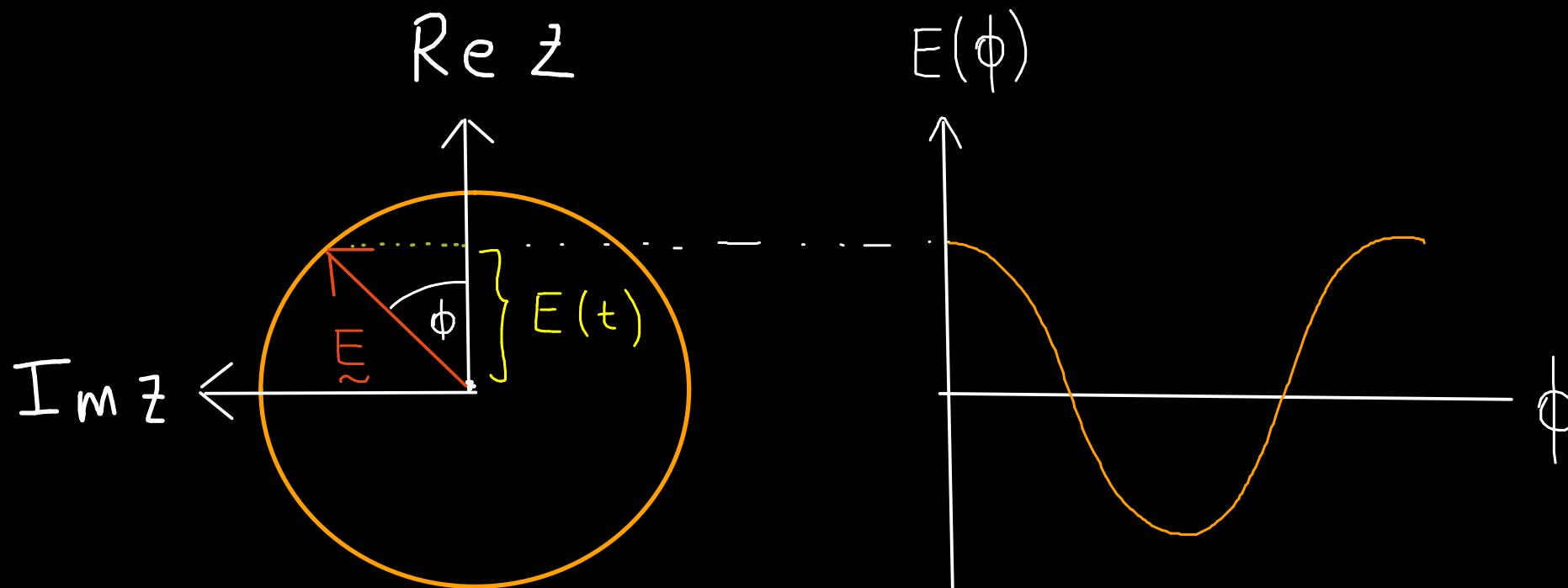
$$\frac{\Delta L}{\Delta L} = \frac{\Delta \phi}{k}$$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\phi(r,t)) \hat{E}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{i\phi(r,t)} \right\} \hat{E}$$

cápsula

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

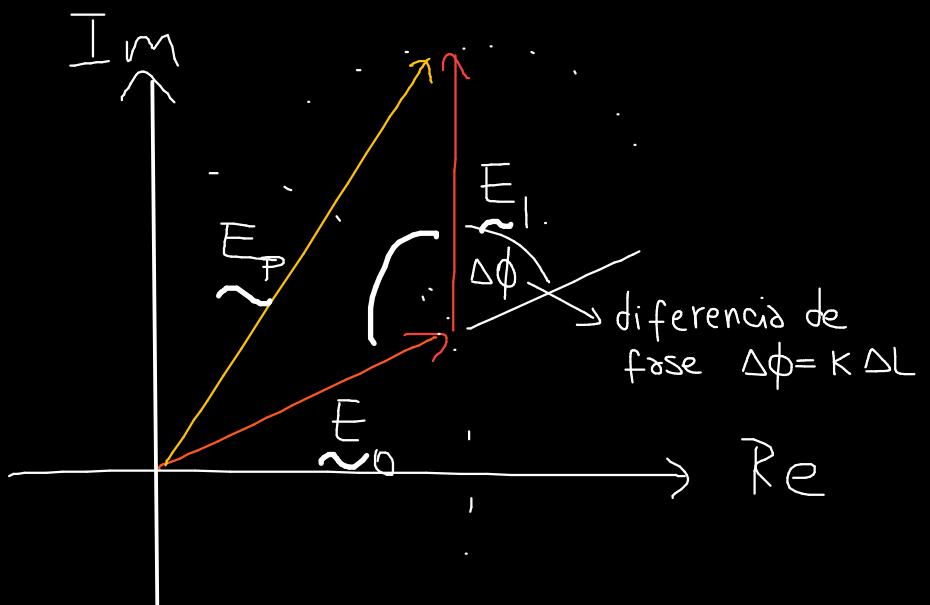


Señal  $\vec{E}_0$  y  $\vec{E}_1$  los campos que llegan a la pantalla

$$E_0 = |E_0| e^{i\phi_0}$$

$$E_1 = |E_0| e^{i\phi_1}$$

Misma amplitud porque la fuente es la misma



$$E_p^2 = E_0^2 + E_0^2 - 2E_0^2 \cos(\pi - k\Delta L)$$

$$= 2E_0^2 (1 + \cos(k\Delta L))$$

$$= 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{k\Delta L}{2}\right)$$

//

Condición para obtener Interferencia destructiva

$$\cos^2\left(\frac{k\Delta L}{2}\right) = 0 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$\frac{k\Delta L}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta L}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\Delta L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Condición para un máximo  $\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 1 = \cos^2(n\pi)$

$$\Rightarrow \Delta L = n\lambda \text{ (revisar)} \quad \cos^2\left(\frac{k\Delta L}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{k\Delta L}{2} = n\pi$$

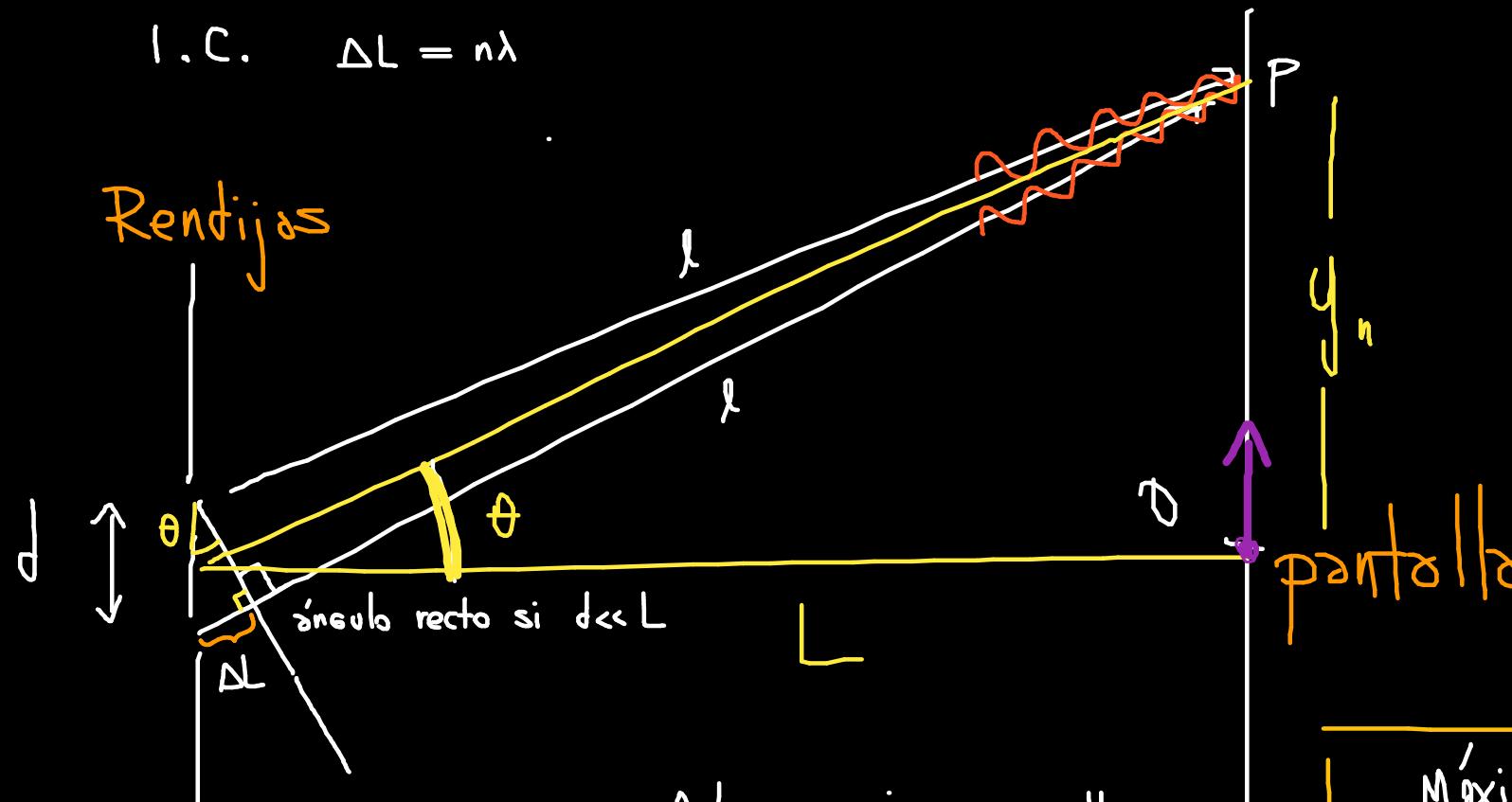
$$\frac{k\Delta L}{2} = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta L}{2} = n\pi$$

# Experimento

I. d.  $\Delta L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$

I. C.  $\Delta L = n\lambda$



Usando  $\operatorname{tg} \theta \approx \sin \theta$   
considerando  $\theta$  pequeño  
(Dibujo exagerado)

$$\frac{\Delta L}{d} = \operatorname{tg} \theta \approx \frac{y}{L} \quad / \cdot d$$

$$\frac{y}{L} = \frac{\Delta L}{d} \Rightarrow y = \frac{\Delta L}{d} \cdot L$$

$$\Delta L = \frac{y \cdot d}{L}$$

Maximos

$$y_n = n \frac{\lambda L}{d}$$

Mínimos

$$y_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d}$$

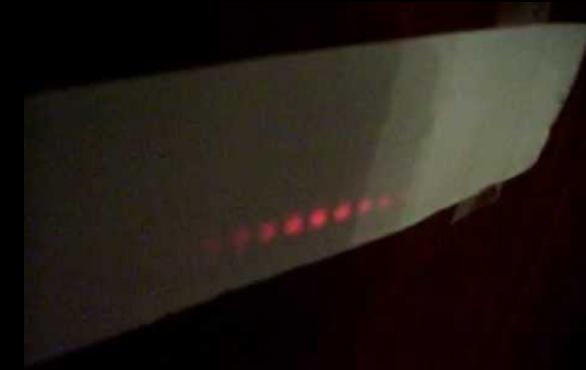
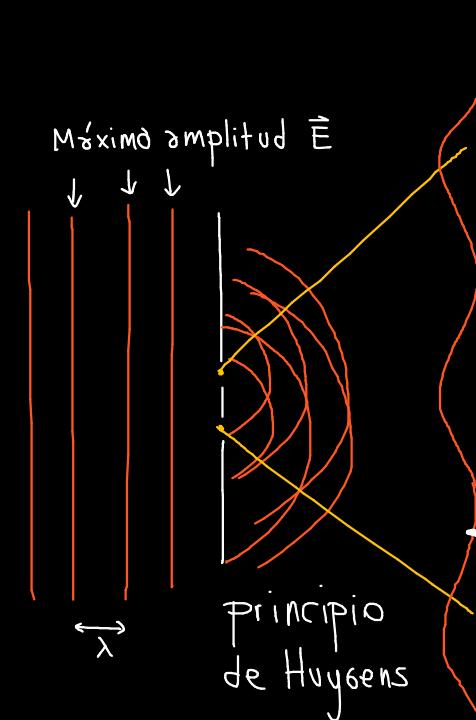
$$E_P^2 = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\kappa dL}{2}\right)$$

$$= 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L} y\right)$$

Calculando la intensidad

$$I_P = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_P^2$$

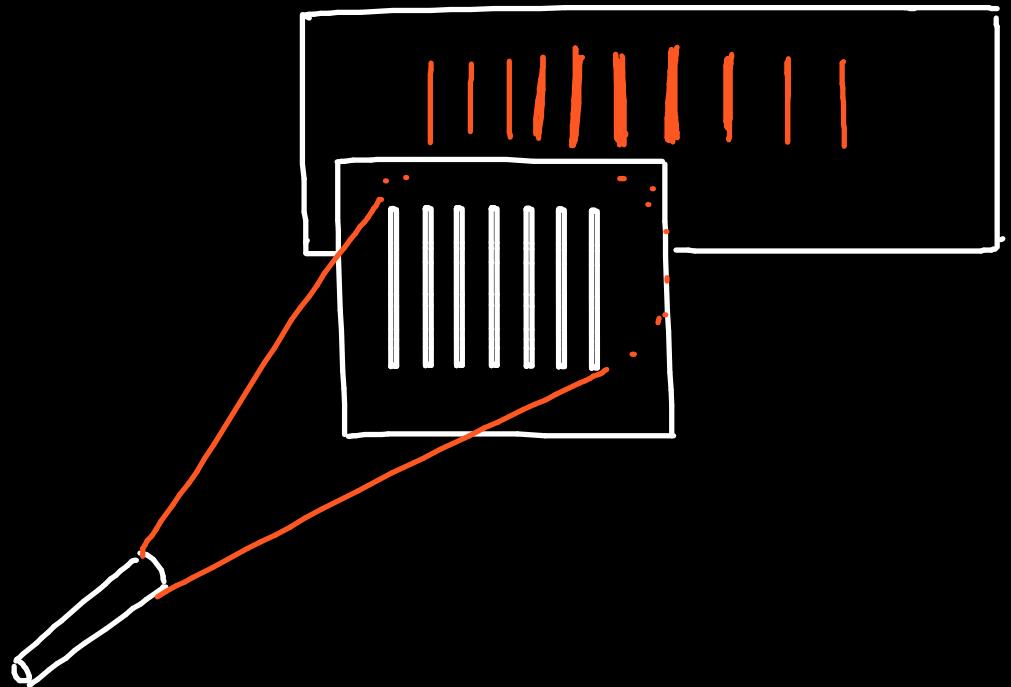
$$I_P = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L} y\right)$$



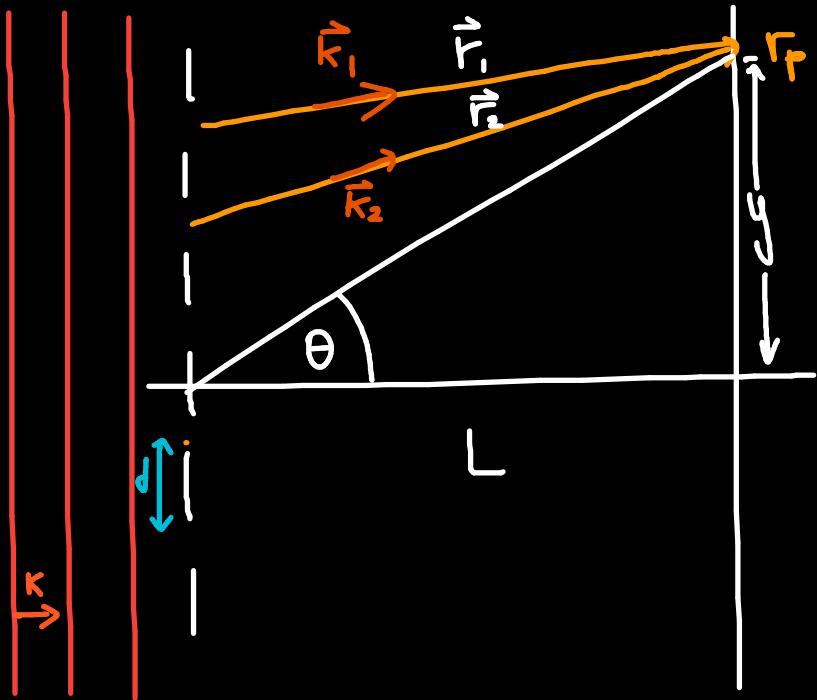
## Material complementario de videos clase 8.

- Interferencia de la luz: [Interferencia](#)
- Ejercicios interferencia: [interferencia](#)
- Muestra del experimento de la doble rendija: [doble rendija](#)

Caso N rendijas



Considerando 2 de las N rendijas



Y si vimos en el caso de  
2 rendijas separadas por una  
distancia "d" que la diferencia de  
fase entre el camino  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$   
es de  $\Delta\phi = k(r_1 - r_2) = kd \sin\theta$ ;

Por tanto, en el caso de N  
rendijas siempre la diferencia de  
fase entre caminos consecutivos  
al punto "P" es:  
$$\Delta\phi = k(r_{i+1} - r_i) = kds\sin\theta$$

La información anterior es clave para poder calcular el campo eléctrico en el punto  $r_p$ .

$$E(r_p, t) = \sum_{m=1}^N E_0 \hat{u} \cos(kr_m - \omega t) = \cos\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)\phi + \alpha_i\right] \frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

donde se ha usado por simplicidad que  $\phi = \Delta\phi$  y que  $\alpha_i = kr_i - \omega t$ .

Calculando:

$$\langle E^2(r_p, t) \rangle_t = \frac{E_0^2}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

se obtiene la intensidad en  $r_p$ :

$$I(\phi) = c\epsilon_0 \langle |E|^2 \rangle_t = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

# Patrón de intensidad en la pantalla

$$I_p = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2$$

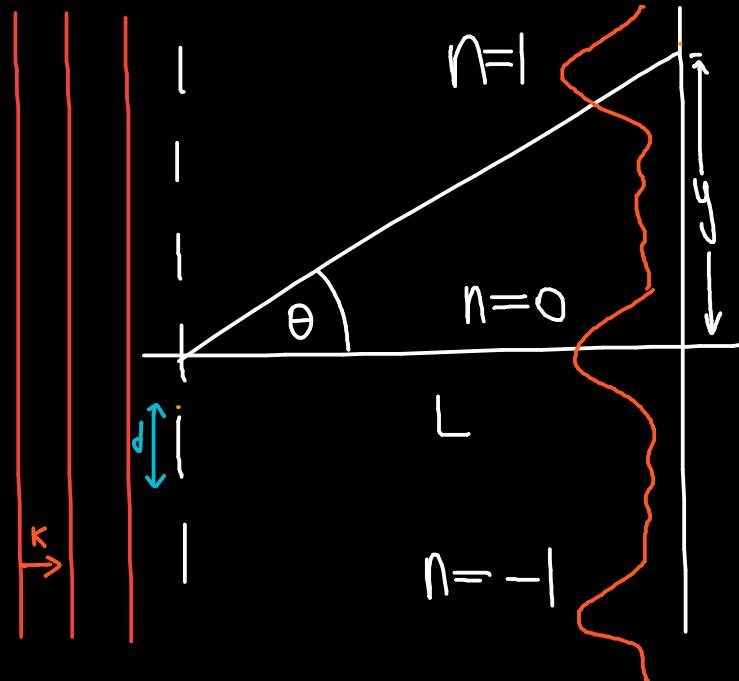
$\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$  es una función periódica

Máximos

$$\frac{\phi}{2} = \frac{k d \sin \theta_n}{2} = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \sin \theta_n}{2} = n\pi$$

$$\Rightarrow d \sin \theta_n = \lambda n$$

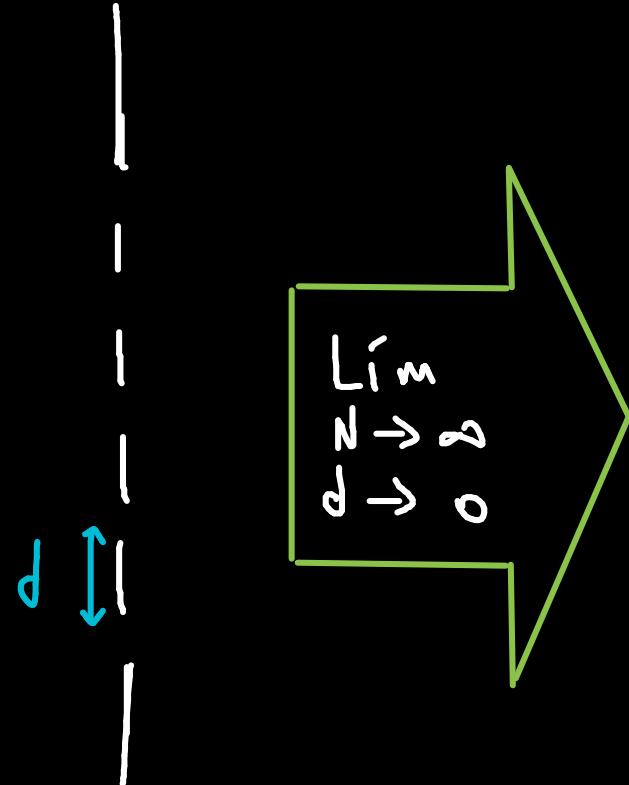


$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ecuación de máximos de intensidad

C) ¿Qué pasa cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $d \rightarrow 0$ ?

Difracción

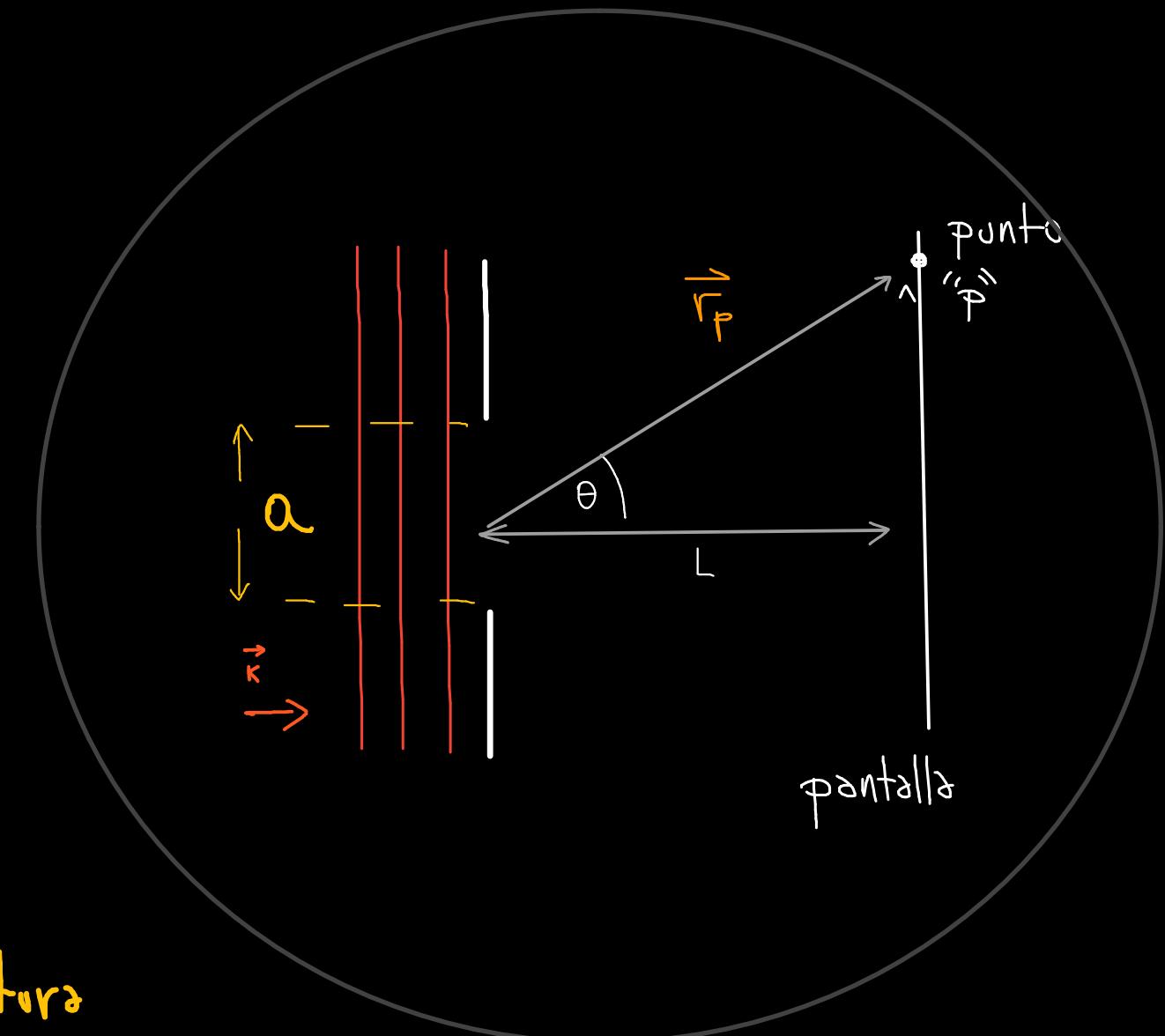
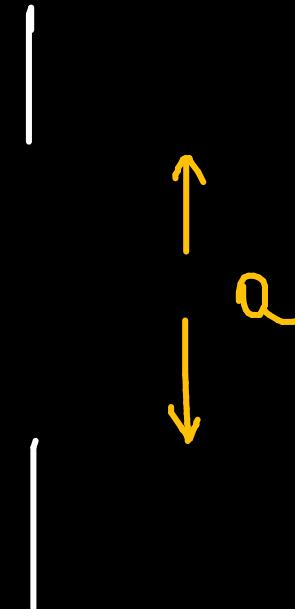


$$\lim_{\begin{matrix} N \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0 \end{matrix}}$$

$N$ : # rendijos

$d$ : distancia entre  
rendijos

$N \rightarrow \infty$   
 $d \rightarrow 0$   
Es una abertura  
de largo " $a$ "



$$\vec{E}(r_1 t) = E_0 \hat{u} \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha_1\right)$$

$$\Rightarrow I = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}} \right]^2 \quad , \quad \frac{\beta}{2} = \frac{k_0 \sin \theta}{2}$$

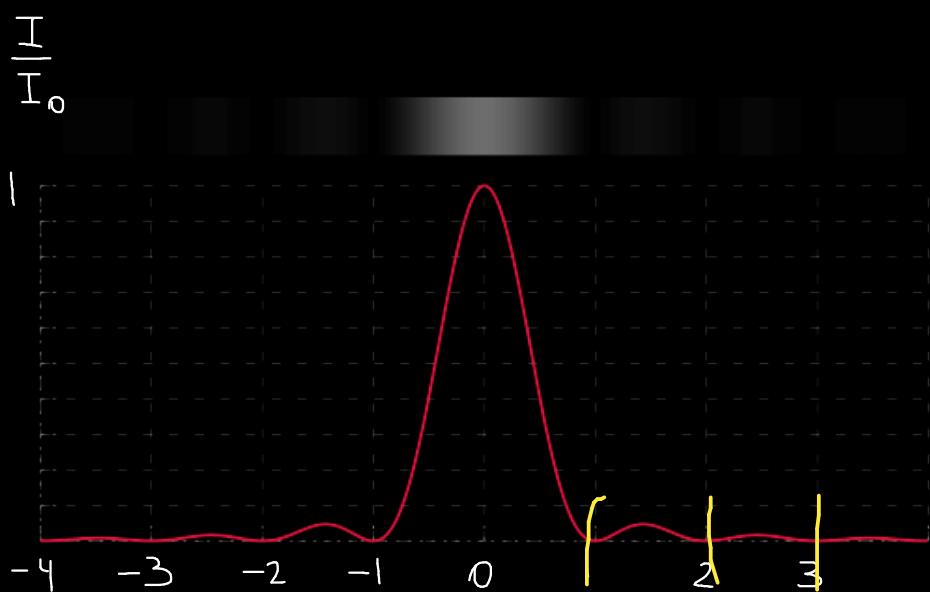
$$\frac{1}{2\pi} \frac{a \sin \theta_n}{\lambda} = n\pi$$

$$a \sin \theta_n = \lambda n$$

Mínimos !!



$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$\left( \frac{a}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

$w=50\mu$

$d=150\mu$

3 slits

4 slits

5 slits

7 slits

1 slit

2 slits

3 slits

4 slits

5 slits

7 slits

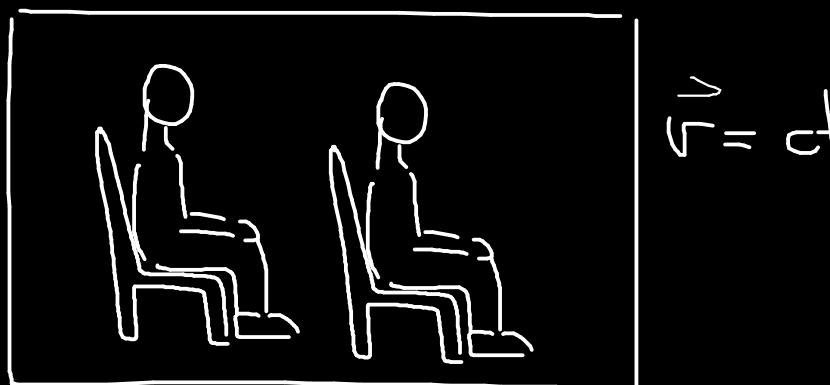
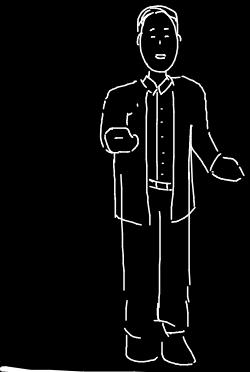
Sacado fe physicsopenlab.org

## Material complementario de videos clase 9.

- Difracción de la luz: [Difracción](#)
- En el primer video no considerar difracción de Fresnel (fuera del plan de este curso).
- Difracción de la luz (más detalle): [Difracción II](#)
- Ejercicio 1: [Ejercicio 1](#)
- Ejercicio 2: [Ejercicio 2](#)

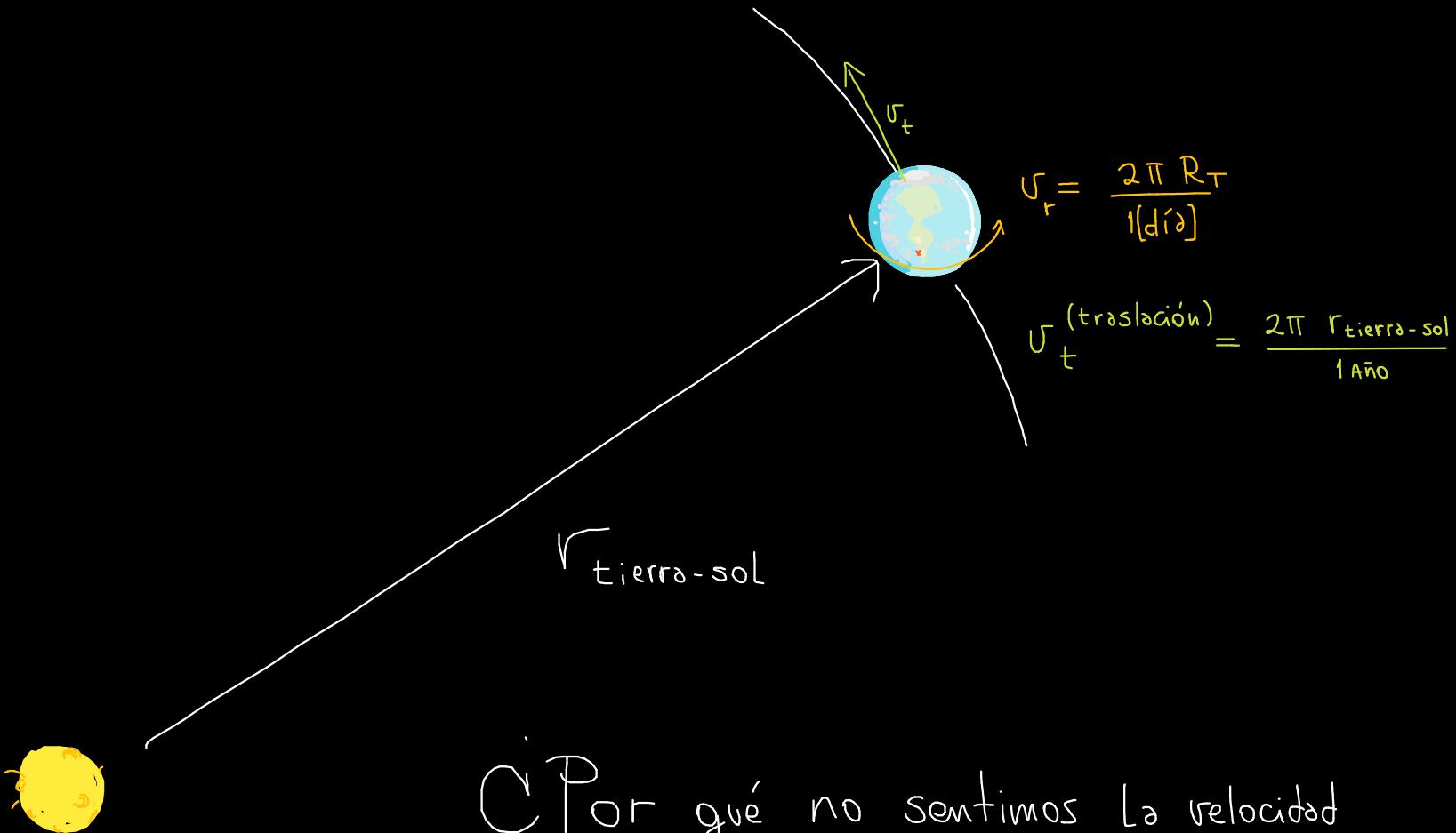
# Relatividad : Unidad 3

$$v = 0$$



Sistema de referencia  
Inercial

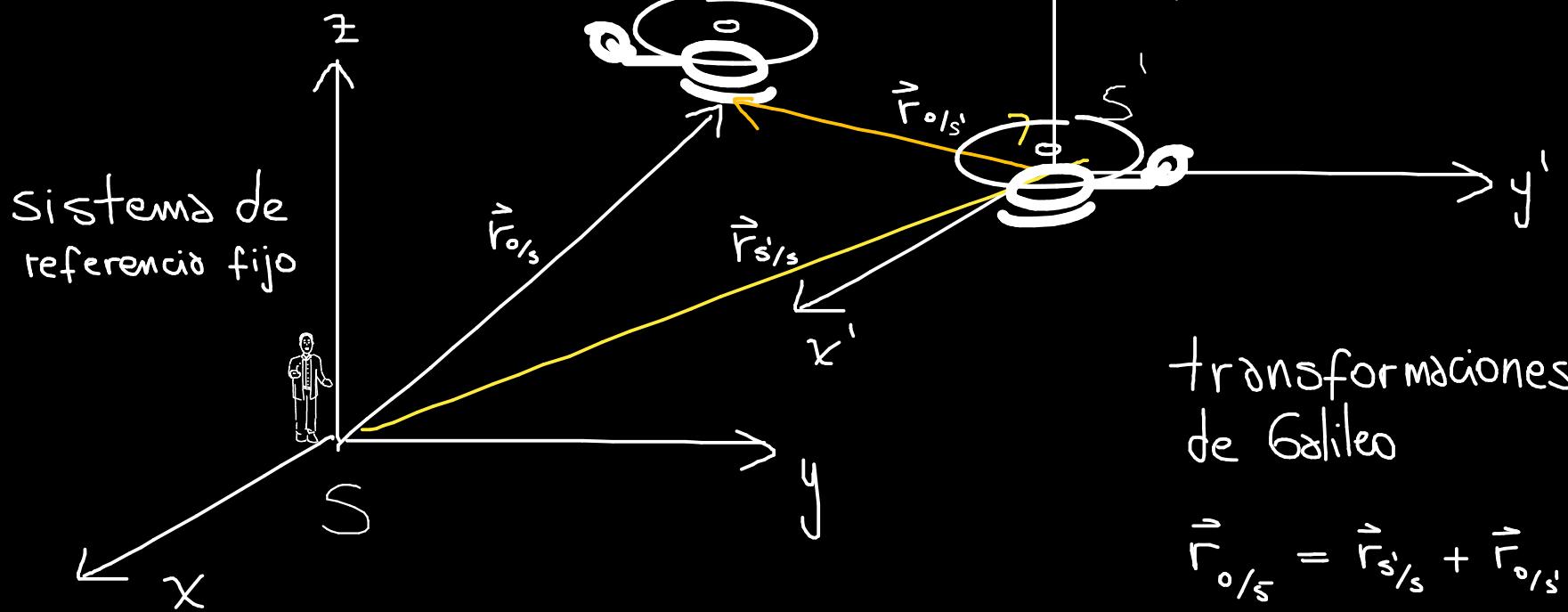
Si uno se acuesta en la cama de su casa está en reposo ( $v=0$ ), pero ...



Por qué no sentimos la velocidad de la tierra?

Existe  $v=0$ ?

# Relatividad Galileana



transformaciones  
de Galileo

$$\vec{r}_{0/S} = \vec{r}_{S'/S} + \vec{r}_{0/S'}$$

$$\vec{v}_{0/S} = \vec{v}_{S'/S} + \vec{v}_{0/S'}$$

$$\vec{a}_{0/S} = \vec{a}_{S'/S} + \vec{a}_{0/S'}$$

$$t_S = t_{S'}$$

$$\vec{r}_{o/s} = \vec{r}_{s'/s} + \vec{r}_{o/s'}$$

$$\vec{v}_{o/s} = \vec{v}_{s'/s} + \vec{v}_{o/s'}$$

$$\vec{a}_{o/s} = \vec{a}_{s'/s} + \vec{a}_{o/s'}$$

Si  $\vec{a}_{s'/s} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{o/s} = \vec{a}_{o/s'}$

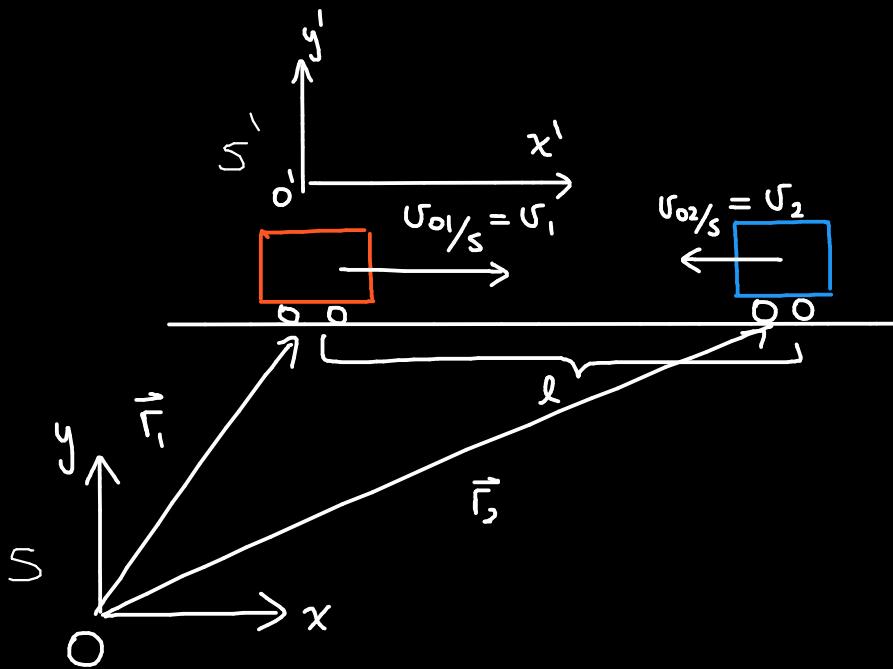
de la segunda Ley de Newton, si  $m = \text{cte.}$

$$\rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{ma} \quad \left. \right\} \vec{F} = \vec{F}'$$

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{d(m\vec{v}')}{dt'} = m \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{ma}$$

bajo transformaciones de Galileo la Ley de movimiento de Newton es invariante para dos sistemas de referencia inertiales.

Ejemplo :



Velocidad entre objetos en sistema S

$$\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ = v_2 \uparrow - [v_1 (-\uparrow)] \\ = v_2 \uparrow + v_1 \uparrow$$

$$\vec{v}_l = (v_2 + v_1) \uparrow$$

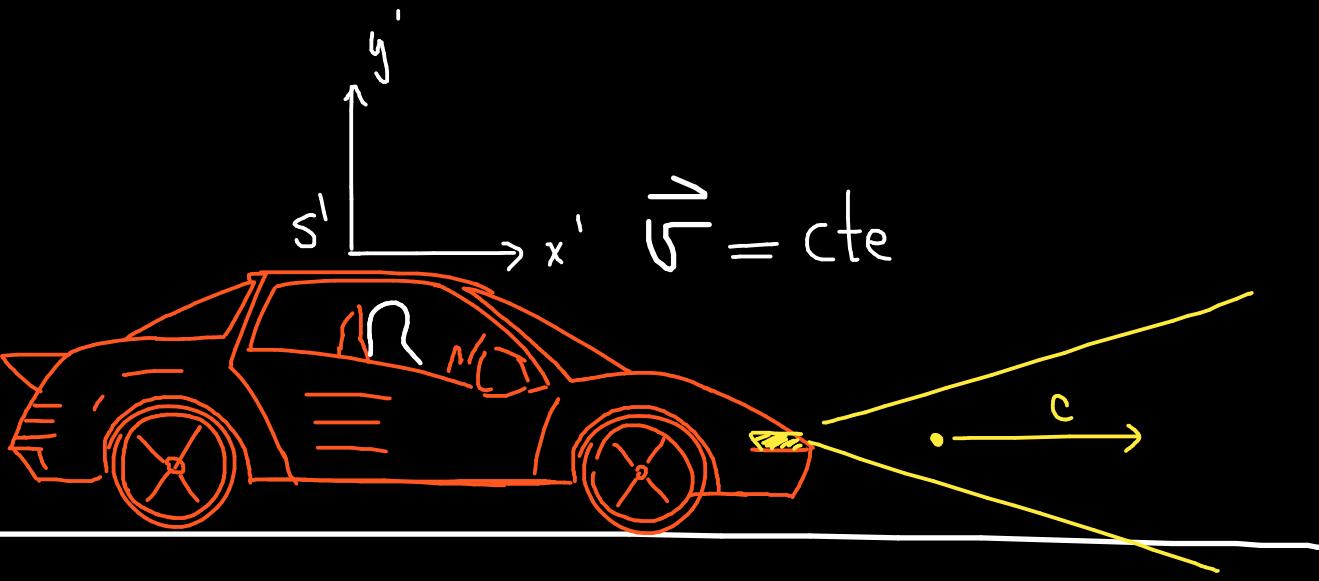
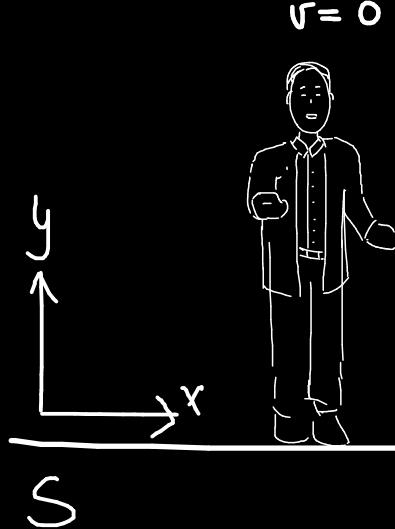
Velocidad entre objetos en sistema S'

$$\vec{r}_{0/S'} = \vec{r}_{S'/S} - \vec{r}_{0/S}$$

$$\vec{v}_{0/S'} = \underbrace{\vec{v}_{S'/S}}_{= v_2 (-\uparrow)} - [v_2 (-\uparrow)] \\ = v_1 \uparrow + v_2 \uparrow$$

$$\vec{v}_{0/S} = (v_2 + v_1) \uparrow$$

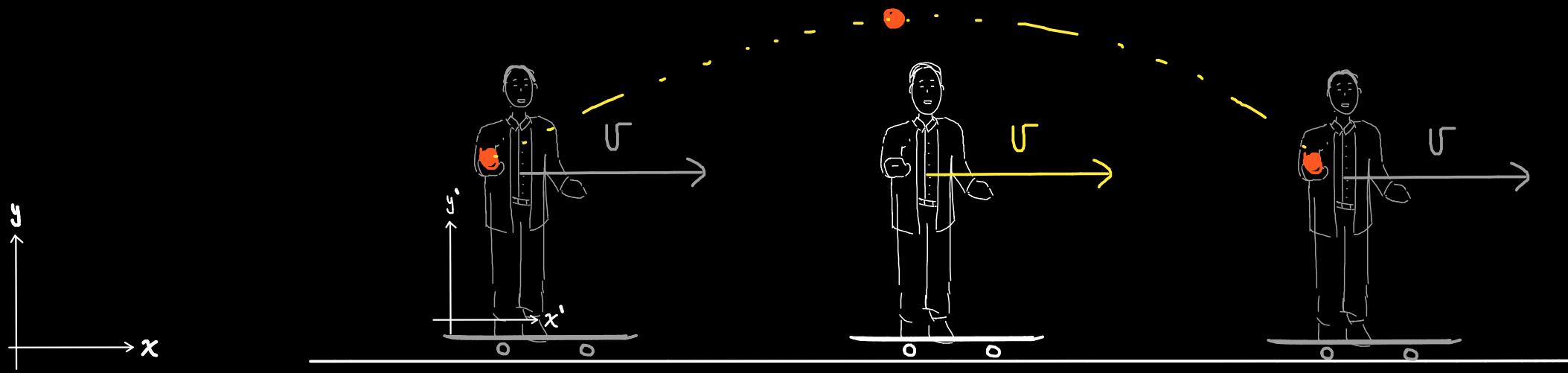
¿Qué pasa con la luz?



$$\Upsilon_{o/S} = \underbrace{\Upsilon_{S'/S}}_{\Upsilon_{\text{auto}}} + \underbrace{\Upsilon_{o/S'}}_{= c}$$

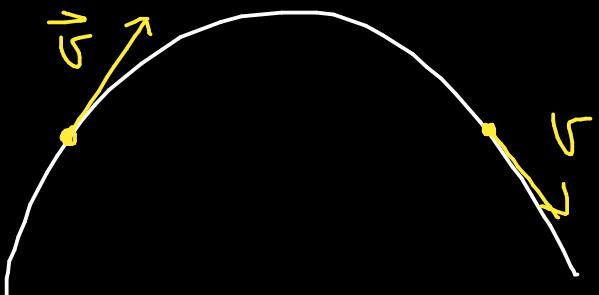


$\Upsilon_{o/S} = \Upsilon_{\text{Auto}} + c > c$  pero electromagnetismo dice  $c$  es constante

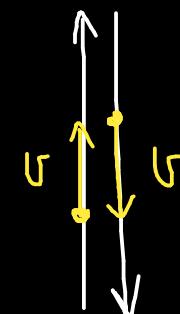


$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

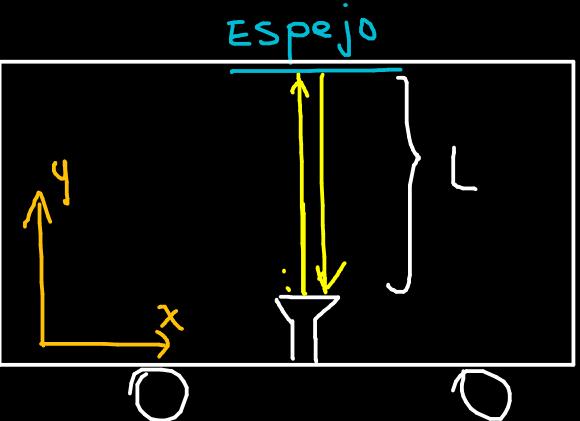
$$x = x_0 + v_{0x}t$$



$$\begin{aligned} y' &= y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x' &= 0 \end{aligned}$$



¿Qué pasa con la luz?

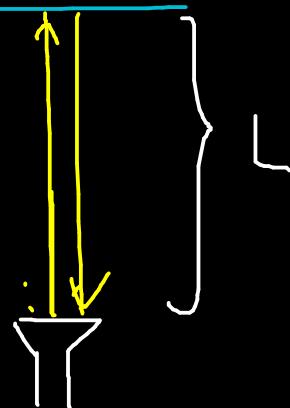


Sea  $t$  el tiempo en que demora la luz en ir y volver a la linterna

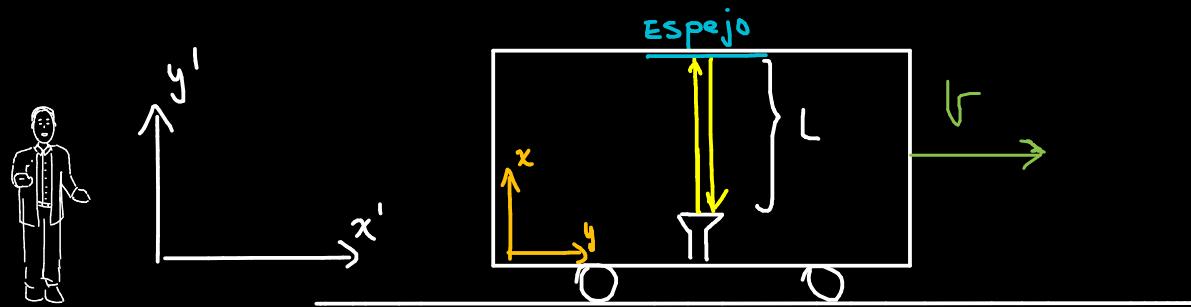
sistema de referencia s:

$$2L = ct$$

$$t = \frac{2L}{c}$$



¿Qué pasa con la luz? (Ahora el carro se mueve a  $\vec{v} = \text{cte}$ )



$v$  (velocidad con que se mueve el sistema S')



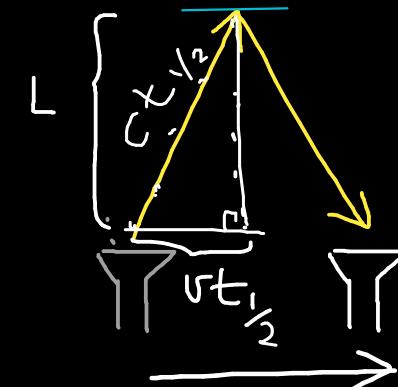
Luz viaja con velocidad  $c = 2,99 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

en sistemas de referencia S:

$$(ct_{\frac{1}{2}})^2 = L^2 + v^2 t_{\frac{1}{2}}^2$$

$$\Rightarrow t_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{L^2}{c^2 - v^2} \quad t' = 2t_{\frac{1}{2}}$$

$$t_{\text{subida}} = t_{\frac{1}{2}} = \frac{L}{c \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow t' = \frac{2L}{c \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$



¿tiempos diferentes?

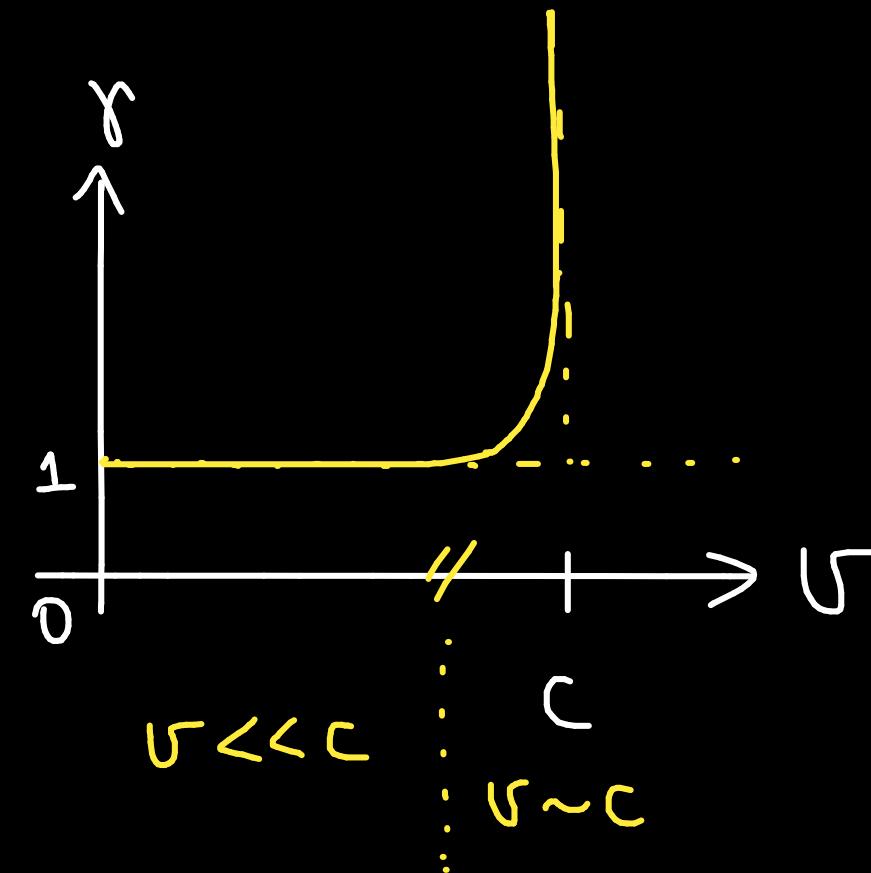
$$\Rightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Dilatación del tiempo :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

factor 60 milés

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



¿Bajo qué transformaciones el electromagnetismo es invariantes?

Transformaciones de Lorentz (caso  $\vec{v}_R = v_R \hat{i}$ )

$$t' = \frac{t - \frac{v_R x}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_R}{c}\right)^2}}$$

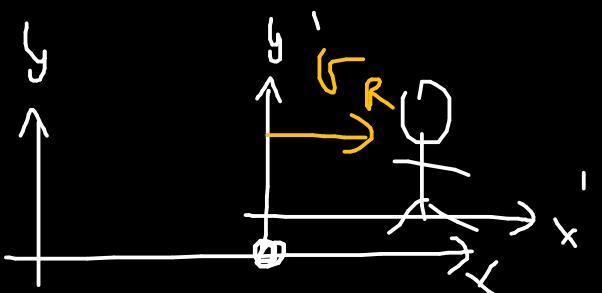
$$x' = \frac{x - v_R t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_R}{c}\right)^2}} \quad \rightarrow$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

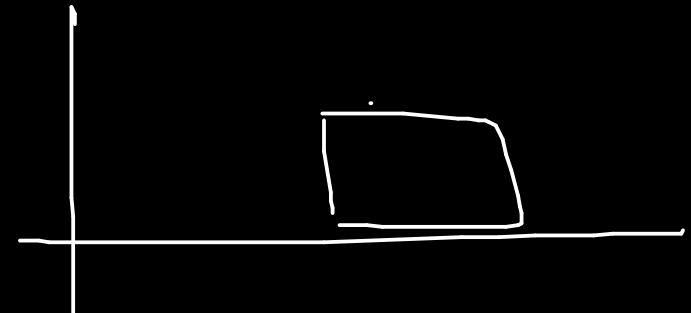
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



$$\beta = \frac{v_R}{c}$$

# Transformaciones de Lorentz

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Inverso:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\beta = \frac{v_R}{c}$$

## Consecuencias de la transformada de Lorentz

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma v}{c^2} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{=0}$$

Dilatación del tiempo

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

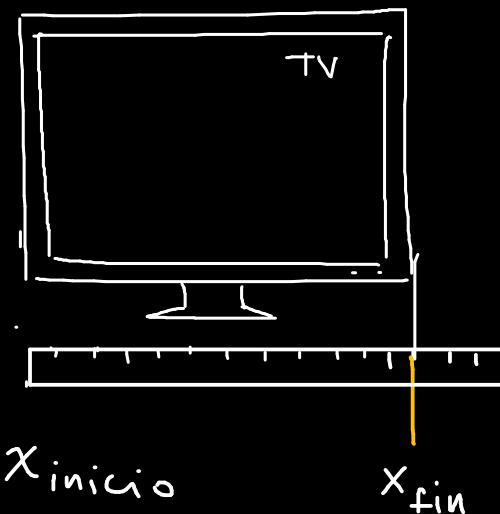
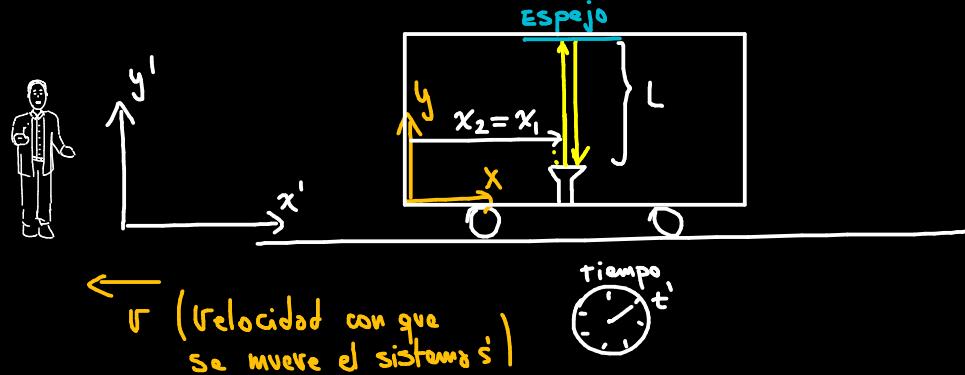
Mediciones de longitud

$$\text{en S } x_{\text{fin}} - x_{\text{inicio}} = L$$

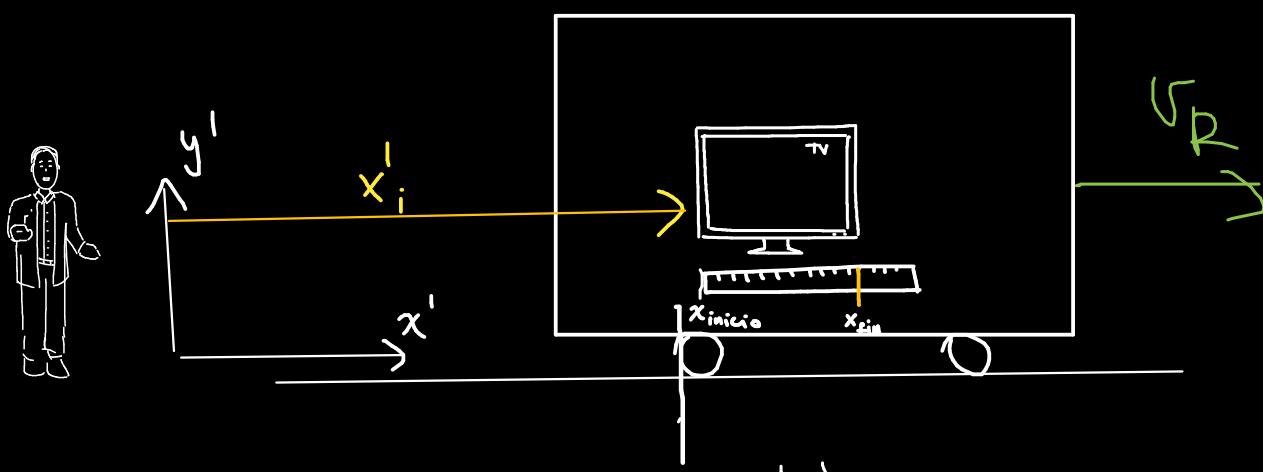
$$\Delta x = L$$

$$t_i(x_{\text{inicio}}) = t_f(x_{\text{final}})$$

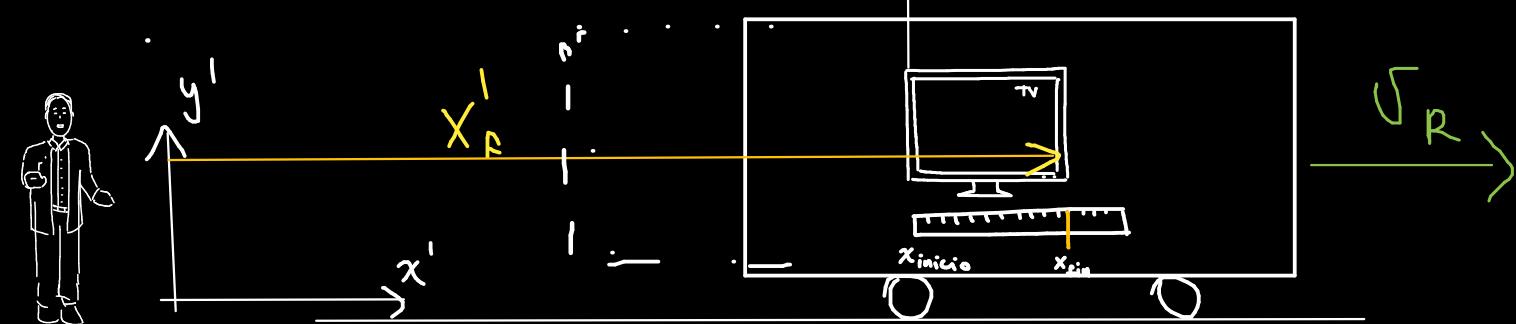
$$\Delta t = 0$$



$$\longleftrightarrow L \longrightarrow L = x_{\text{fin}} - x_{\text{ini}}$$



$$\langle v_R(t_f - t_i) \rangle$$



$$L' = (x'_f - x'_i) - v_R \cdot (t'_f - t'_i)$$

En este caso el sistema S' se mueve hacia la izquierda

$$t'_i = \gamma \left( t_i + \frac{v_R}{c^2} x_i \right)$$

$$t'_f = \gamma \left( t_f + \frac{v_R}{c^2} x_f \right)$$

$$t'_f - t'_i = \gamma \underbrace{\left( t_f - t_i \right)}_{=0} + \gamma \frac{v_R}{c^2} (x_f - x_i)$$

Por tanto el largo del objeto ser\'a

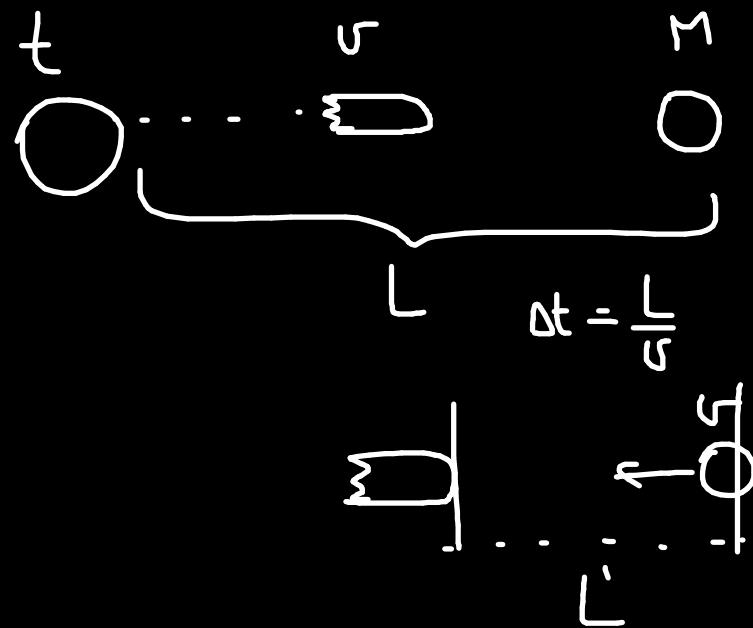
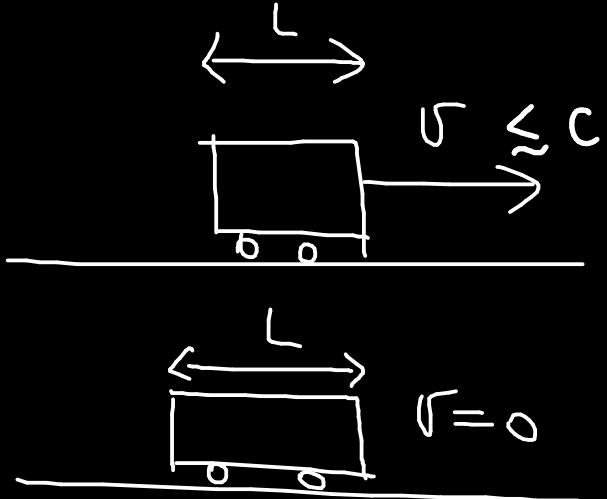
$$l' = \underbrace{\gamma (x_f - x_i)}_{=l_0} - \frac{v_R^2}{c^2} \gamma (x_f - x_i)$$

$$l' = \gamma \left( 1 - \frac{v_R^2}{c^2} \right) l_0 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}$$

Contracción de largos:

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Al ver un objeto en movimiento largos se contraen



## Material complementario de videos clase 10.

- Relatividad Galileana (no tiene más detalle que lo visto en clases): [Relatividad Galileana](#)
- Deducción transformaciones de Lorentz (video largo solo para quienes estén interesados en ver cómo se obtienen estas ecuaciones): [Deducción de ecuaciones](#)
- Transformaciones de lorentz I: [Transformaciones de Lorentz](#)
- Transformaciones de lorentz II: [Transformaciones de Lorentz](#)
- Transformaciones de lorentz III: [Transformaciones de Lorentz](#)
- Transformaciones de lorentz ejercicios: [Transformaciones de Lorentz](#)
- Transformaciones de lorentz ejercicios: [Transformaciones de Lorentz](#)

Ley de transformación de velocidades:  $\vec{v}_R = v_R \uparrow$

---

$$\left| \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma (dx - v_R dt)}{\gamma (dt - v_R \frac{dx}{c^2})} = \frac{v_x - v_R}{1 - \beta_x \beta_R}, \quad \beta_i = \frac{v_i}{c} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma (dt - v_R \frac{dx}{c^2})} = \frac{v_y}{\gamma (1 - \beta_x \beta_R)}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma (dt - v_R \frac{dx}{c^2})} = \frac{v_z}{\gamma (1 - \beta_x \beta_R)} \end{array} \right.$$

## Ley de Transformación de las aceleraciones

$$\vec{a}'_i = \frac{d\vec{v}'_i}{dt'}$$

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma_R^3 (1 - \beta_x \beta_R)^3}$$

$$a'_y = \frac{(1 - \beta_x \beta_R) a_y + \beta_y \beta_R a_x}{\gamma_R^2 (1 - \beta_x \beta_R)^3}$$

$$a'_z = \frac{(1 - \beta_x \beta_R) a_z + \beta_z \beta_R a_x}{\gamma_R^2 (1 - \beta_z \beta_R)^3}$$

• para invertir sistemas de referencia  $\mathcal{S}_R \rightarrow -\mathcal{S}_R$

Esto trae consecuencias

En sistema de referencia  $S$ :  $\vec{F} = m \vec{a}$

En sistema de referencia  $S'$ :

$$\vec{F}'_x = m \frac{\dot{a}'_x}{\gamma_R^3 (1 + \beta_x \beta_R)^3} \neq m \dot{a}'_x$$

$$F'_{y,z} = m \left[ \frac{(1 + \beta_x \beta_R) \dot{a}'_{y,z} + \beta_R \beta_{y,z} \dot{a}'_x}{\gamma_R^2 (1 + \beta_x \beta_R)^3} \right] \neq m \dot{a}'_{y,z}$$

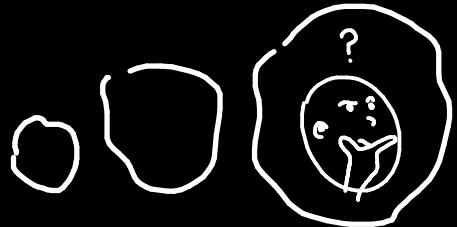
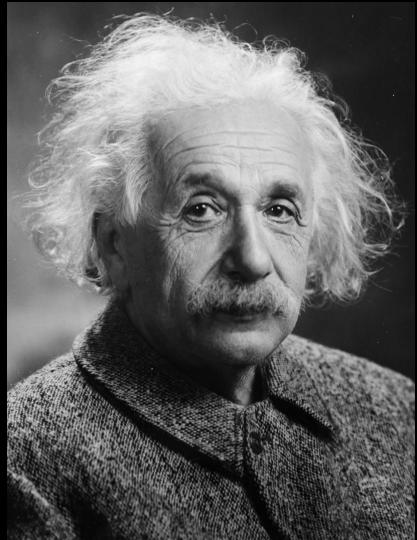
2<sup>da</sup> Ley de Newton  
No es invariante de Lorentz.

## En Resumen:

|                             | Electro -<br>magnetismo | Mecánica de<br>Newton |
|-----------------------------|-------------------------|-----------------------|
| Transformaciones de Galileo | ✗                       | ✓                     |
| Transformaciones de Lorentz | ✓                       | ✗                     |

Aunque para  $v \ll c$  no hay problema

¿Esto que nos dice sobre la física?



postulados de Einstein:

- \* Las leyes de la física deben ser invariantes para sistemas de referencia inertiales
- \* La velocidad de la luz en el vacío es  $c$  constante independiente del sistema de referencia inercial.

Momentum relativista

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Nueva Ley de movimiento:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

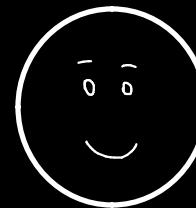
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{d}{dt} \gamma m \vec{v} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\rightarrow \vec{F} = m \gamma^3 \vec{v} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) + \gamma m \vec{a}$$

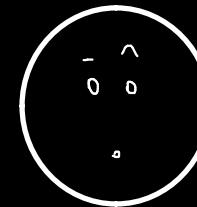
$$\vec{F} = m \gamma^3 \vec{v} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) + \gamma m \vec{a} = 0$$

Si  $\vec{a} = 0$

$\Rightarrow \vec{F} = 0$



$$\text{Si } \vec{a} = -\gamma^2 \vec{v} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) \Rightarrow \vec{F} = 0$$



# Energía relativista

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E(\vec{r}_b) - E(\vec{r}_a) = E \Big|_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \\
 &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cdot \vec{v} dt \\
 &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{v} \cdot d \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \cancel{v} \frac{mc^2}{\vec{r}} \Big|_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \\
 &= mc^2 \left[ r_{\vec{r}_b} - r_{\vec{r}_a} \right] \\
 &= mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_b}{c})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$E_0 = mc^2$ , "Energía en reposo."

$$E = E_0 + K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Energía cinética

$$\Rightarrow K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - mc^2 = mc^2(r - 1)$$

$$K = mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

Energía cinética:

$$K = mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

$$\underset{v \ll c}{\approx} mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + O(n) - 1 \right]$$

$$\approx mc^2 \frac{1}{2} \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x-c)^i$$
$$x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + O$$

//

$$E_0 = mc^2$$

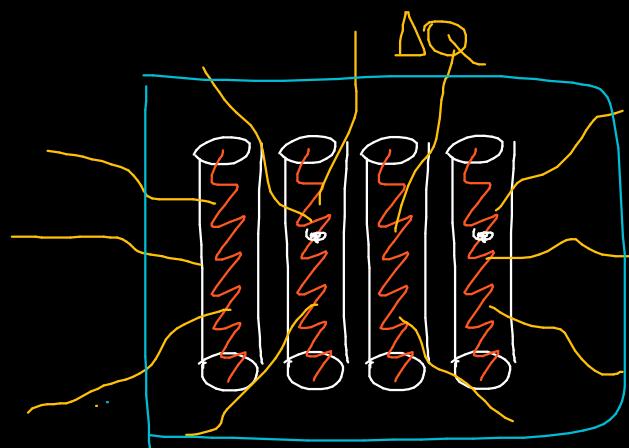
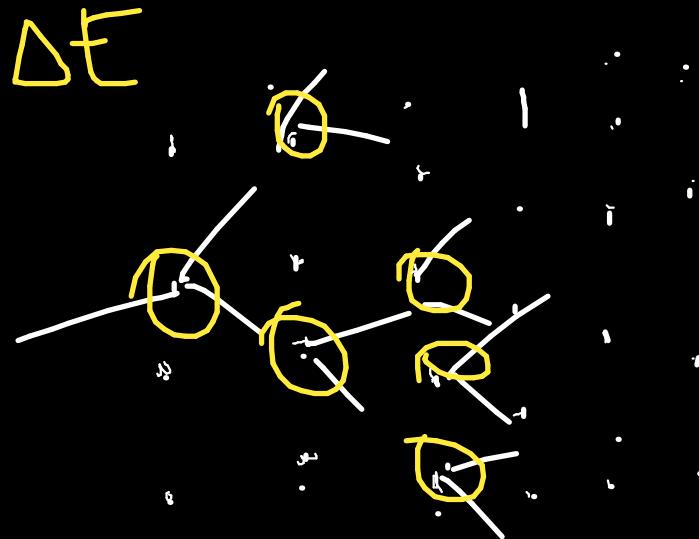
$$E_0 = m \left( 3 \cdot 10^8 \left[ \frac{m}{s} \right] \right)^2$$

$$= m \underbrace{9 \cdot 10^{16}}_{\text{N}} \left[ \frac{m^2}{s^2} \right]$$

$$\approx m \cdot 10^{17} \left[ \frac{m^2}{s^2} \right]$$

$$E(1 \circ r) = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{17} \left[ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right]$$

$$= 10^{14} [J]$$



## Material complementario de videos clase 11.

- Suma de velocidades ejercicio: Suma de velocidades
- Concepto masa y energía: Energía relativista
  - Aclaración del video, la energía relativista es:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma m_0 c^2.$$

esto se puede interpretar como

$$E = m' c^2,$$

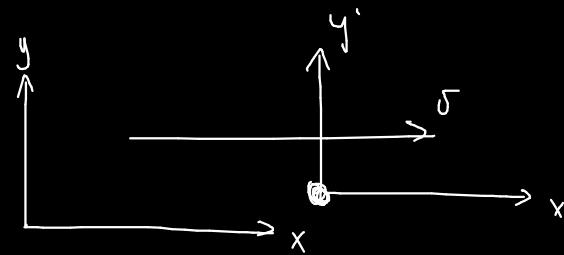
con  $m' = \gamma m_0$ , donde  $m_0$  es la masa medida en reposo y  $m'$  es la masa aparente en movimiento. Esto da la sensación al observador del video (Einstein) de que el objeto tiene más masa. De la misma forma se puede interpretar por el momentum

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma m_0 \vec{v} = m' \vec{v}.$$

La masa no cambia es solo un efecto relativista por como mide el observador.

## Gammá como función del momentum

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 v$$



$$P^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \rightarrow P^2 - \frac{P^2 v^2}{c^2} = m_0^2 v^2 \rightarrow P^2 = v^2 \left(m^2 + \frac{P^2}{c^2}\right) \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{P^2}{m_0^2 c^2 + P^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 c}\right)^2}$$

# Energía como función del momentum:

$$E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2}$$

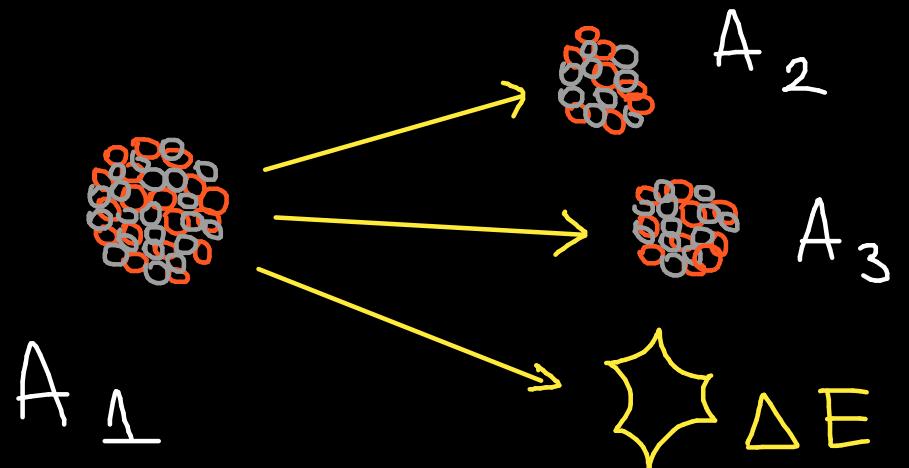
Clásicamente

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

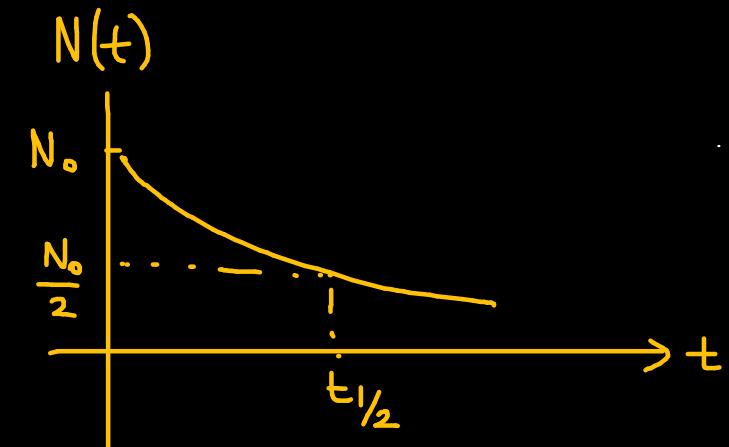
$$\Rightarrow E^2 = m_0^2 c^4 \left( \frac{m_0^2 c^2 + p^2}{m_0^2 c^2} \right)$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$$

## Decaimientos Radioactivos



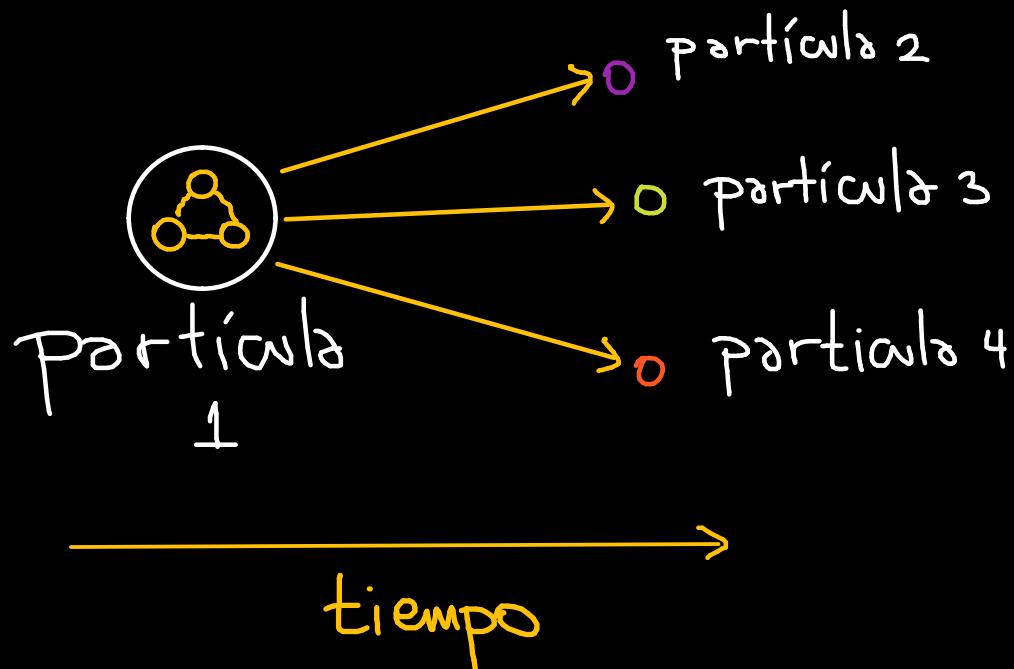
## Reacciones Nucleares



tiempo vida media

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

## Física de altas energías



## Decaimientos



# Conservación de la energía y momentum

Reacción



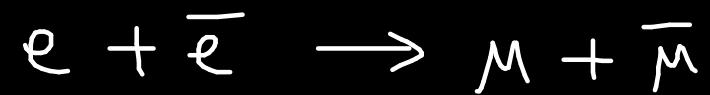
$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_A &= \vec{P}_B + \vec{P}_C \\ E_A &= E_B + E_C \end{aligned} \right\} \text{Relativista}$$

Momentum y energía

Relativista

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2} \end{aligned} \right\}$$

Ejemplo : Por electrón - Antielectrón ( $e\bar{e}$ ) Decae en  
por muón - Antimuón ( $\mu\bar{\mu}$ )



momentum  
Relativista

$$m_e (\gamma_{v_e} \vec{v}_e + \gamma_{v_{\bar{e}}} \vec{v}_{\bar{e}}) = m_\mu (\gamma_{v_\mu} \vec{v}_\mu + \gamma_{v_{\bar{\mu}}} \vec{v}_{\bar{\mu}})$$

Energía  
Relativista

$$m_e c^2 + K_e^{(R)} + m_{\bar{e}} c^2 + K_{\bar{e}}^{(R)} = m_\mu c^2 + K_\mu^{(R)} + m_{\bar{\mu}} c^2 + K_{\bar{\mu}}^{(R)}$$

## Material complementario de videos clase 12.

Puesto que en clases no alcanzamos a revisar ejercicios, sobre conservación de energía y momentum, recomiendo ver los siguientes videos:

- Ejercicio de conservación energía momentum (omitir la parte que incluye Q sobre el tipo de colisión): [Colisiones relativistas](#)
- Ejercicio de conservación energía momentum: [Colisiones relativistas](#)

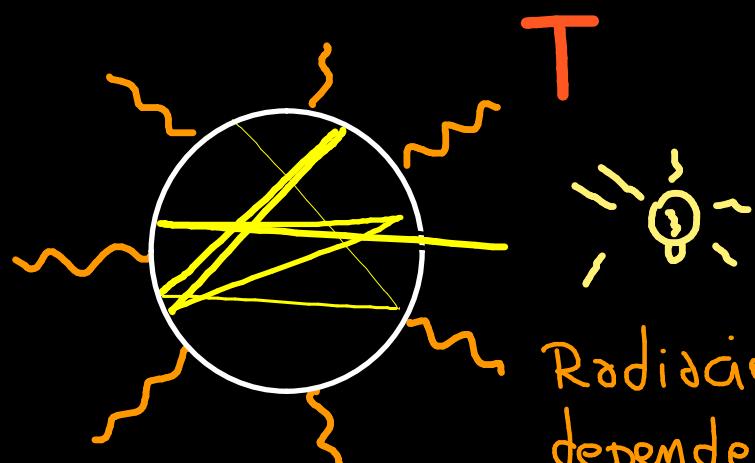
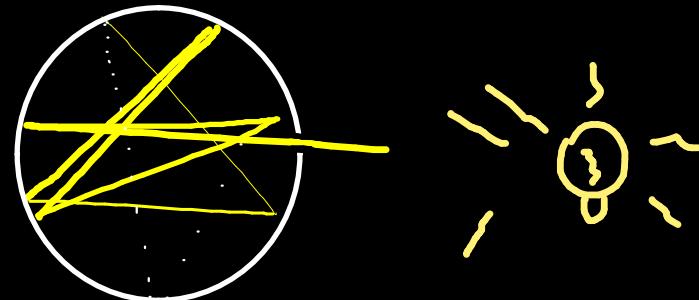
Nos acercamos a la cuántica. ¿Por qué los objetos brillan cuando están a una temperatura  $T$ ?



# Cuerpo Negro:

Cuerpo que absorbe toda la radiación y emite todo la radiación termal.

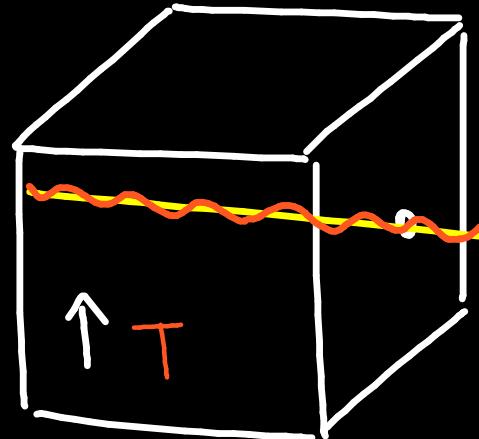
Suponiendo el caso de una cavidad con un orificio



Radiación emitida  
depende de la Temperatura

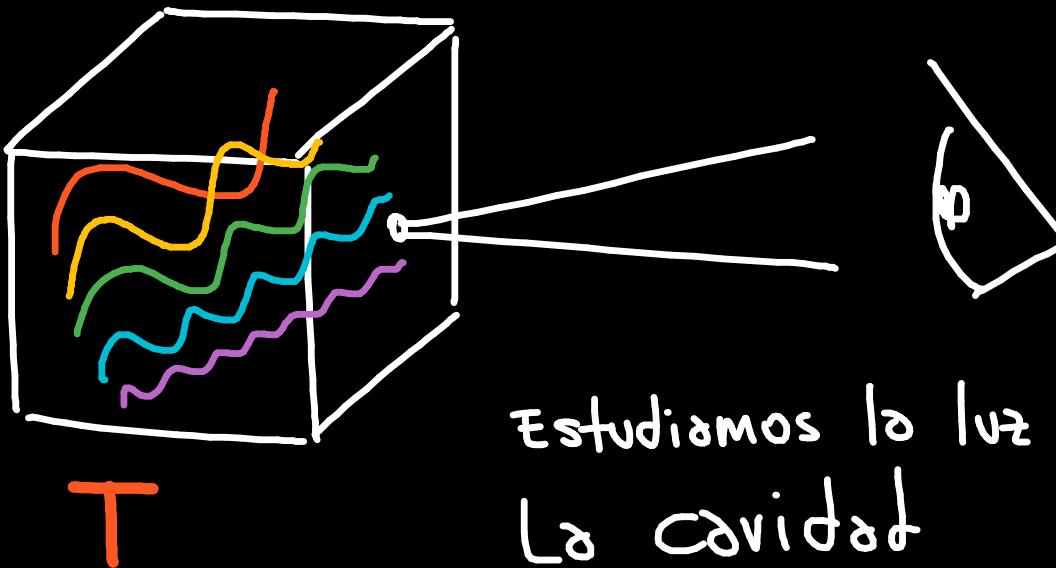
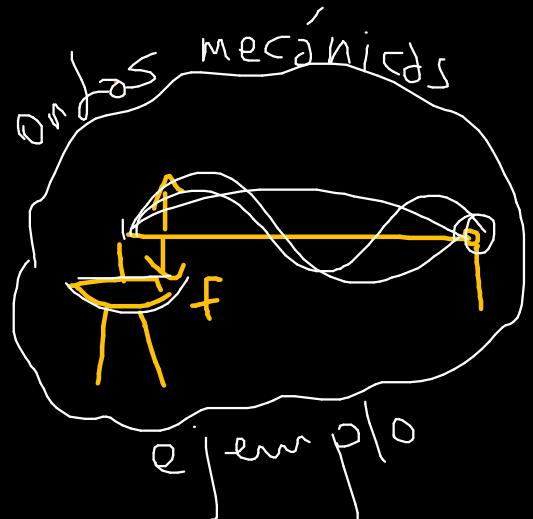
“radiación es atrapada”  
(equilibrio térmico  
momentáneo)

Cuerpo con un orificio que absorbe la radiación



onda electromagnética

A medida que se absorbe  
La energía aumenta la temperatura



Estudiamos la luz que emite  
La cavidad

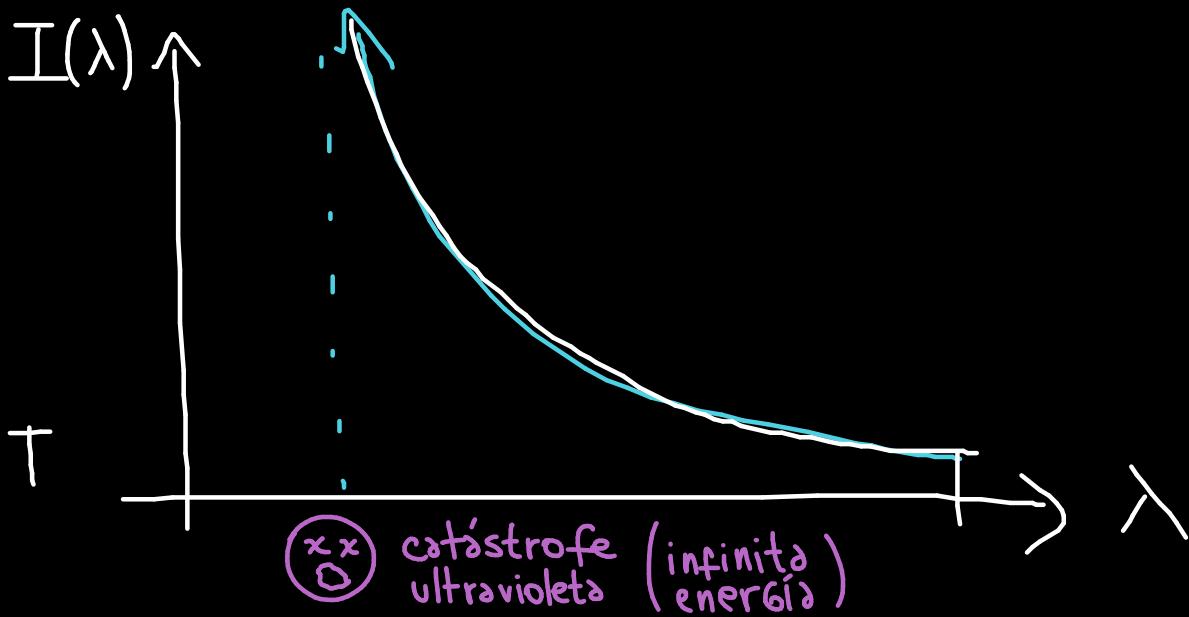
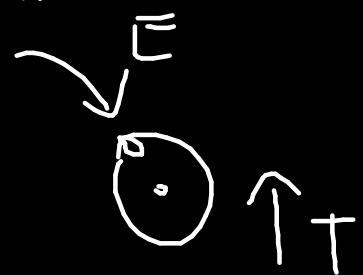
# Predictión de la teoría clásica

Energía de átomos vibrantes

$$\bar{E} = \frac{3}{2} k_B T$$

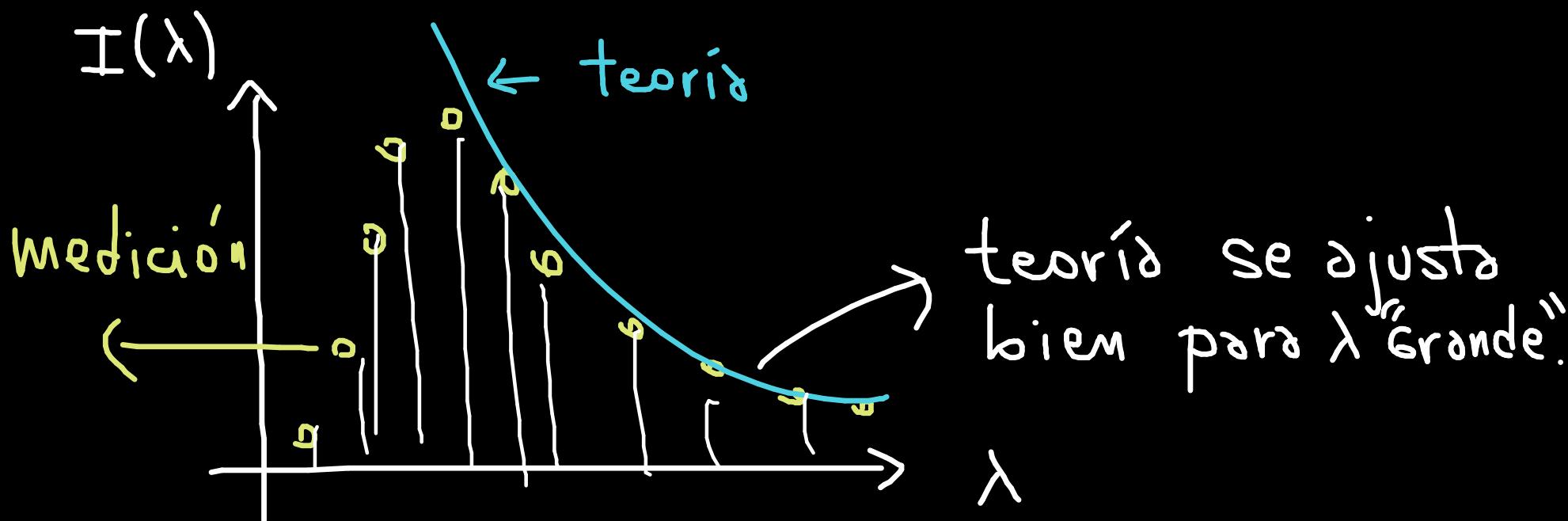
$k_B$ : constante de Boltzmann

$$\text{Rayleigh-Jeans: } \frac{\Delta U_{\text{em}}}{\Delta \lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

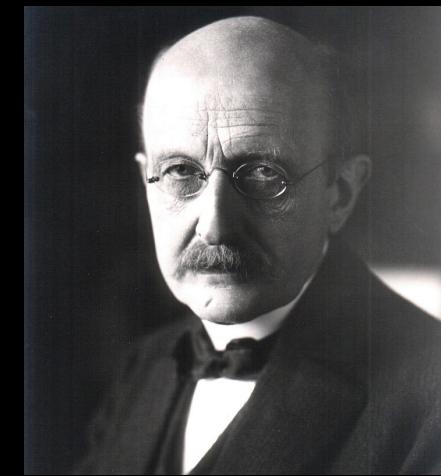
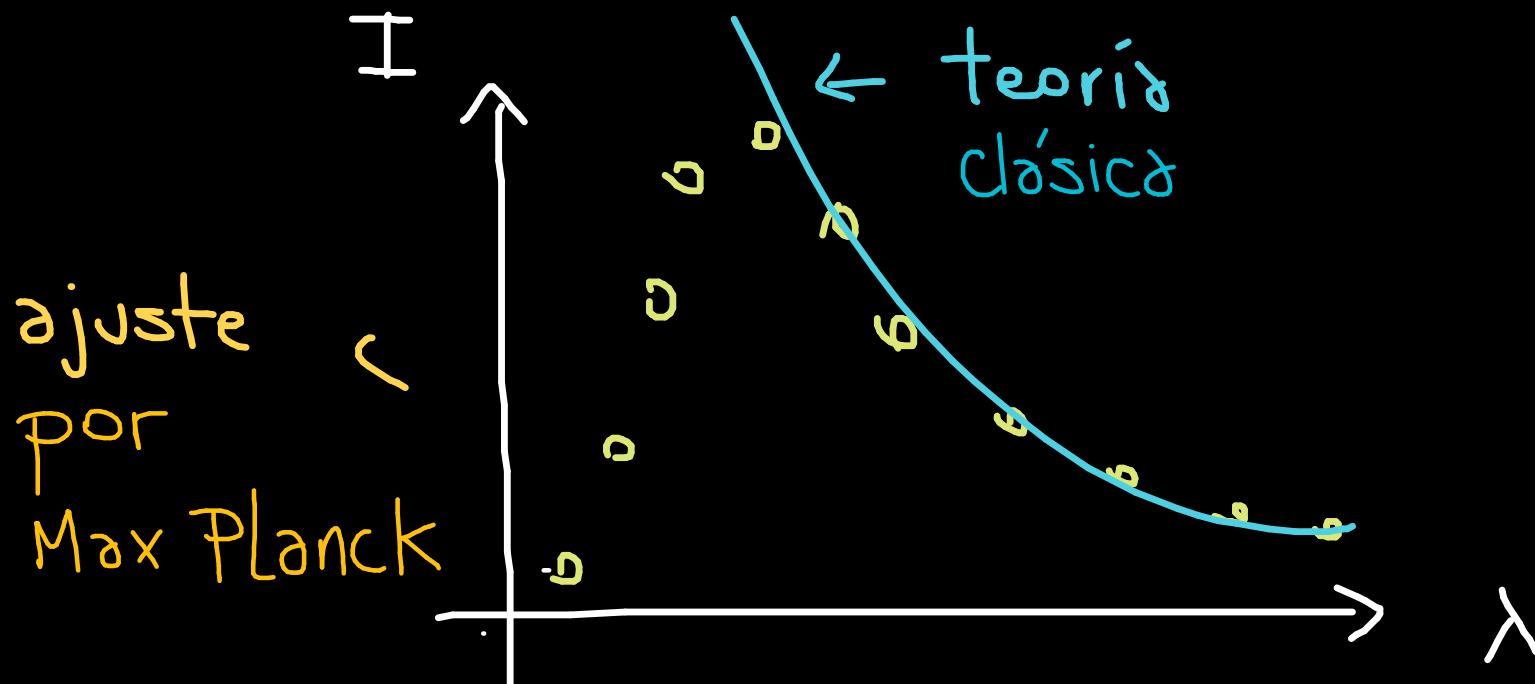


El cuerpo emitiría un poderoso haz en el lado ultravioleta del espectro, emitiendo incluso más energía de lo que se le entregó. Esto no sonaba bien...

En efecto a finales de 1800  
Los experimentos mostraban lo que se  
Sospechaba, la emisión de radiación del cuerpo  
no coincide con lo que predice la  
teoría clásica



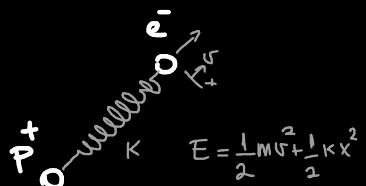
Mmm si no resulta ajustemos una curva



Max Planck

Max Planck encontró un método para generar estas curvas, solo tenía un pero...

Max Planck, para obtener la curva que se ajustaba a las mediciones, tuvo que proponer que la energía mecánica de la oscilación de los átomos debía estar cuantizada en múltiplos de  $hf$



$$E = nhf, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

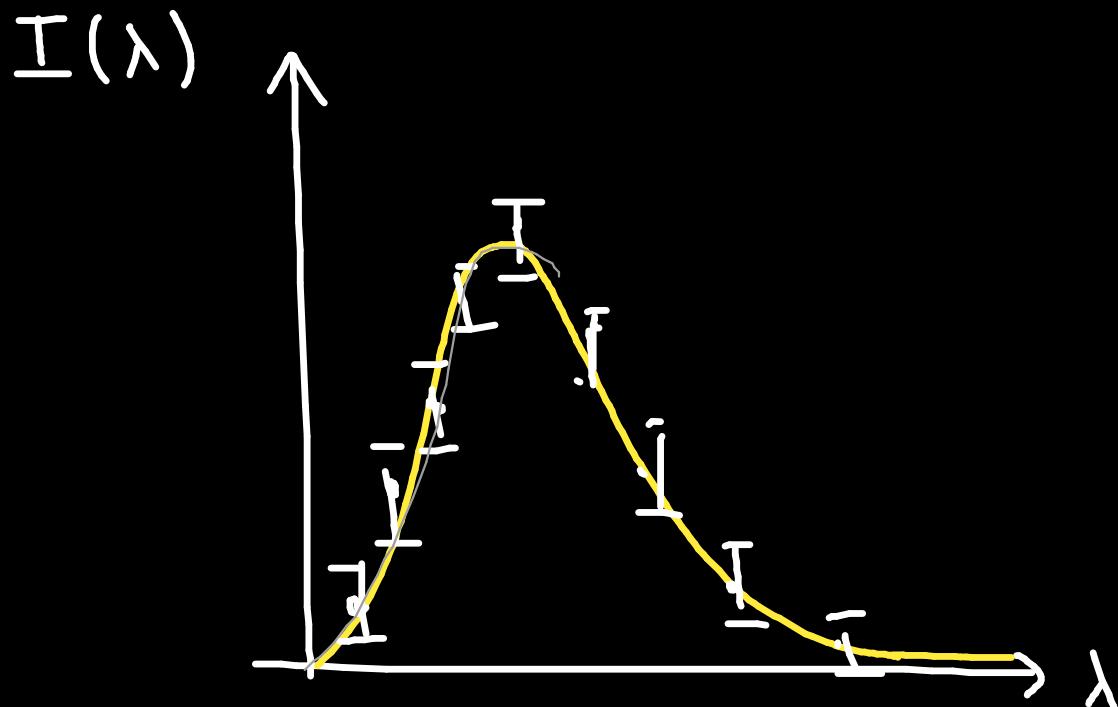
$$\left. \begin{aligned} h &= \text{constante de Planck} \\ &\simeq 6.67 \cdot 10^{-34} [\text{Js}] \end{aligned} \right\}$$

$f$  = frecuencia de la oscilación

Esta hipótesis no tenía sustento en la mecánica clásica. Esto más tarde se explicaría con la mecánica cuántica.

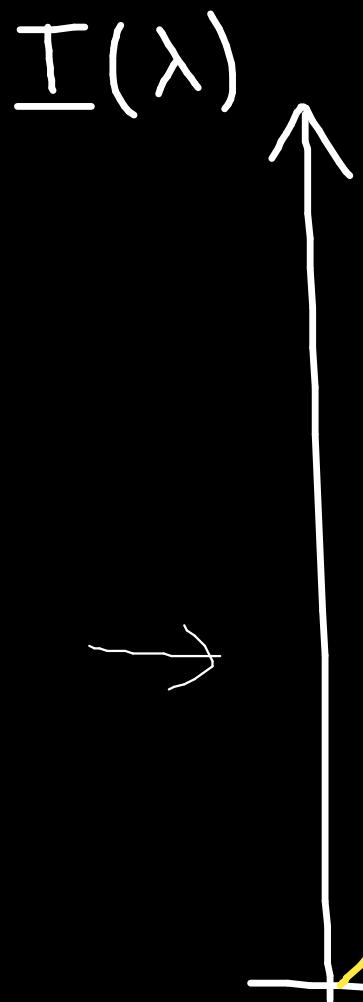
Con esto Max Planck obtuvo

$$\frac{\Delta U_{\text{em}}}{\Delta \lambda} = \frac{8\pi h c^3}{\lambda^5} k_B T \left( \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \right)$$



primeros pasos  
hacia la mecánica  
cuántica !!

# Espectro de emisión de cuerpo negro



Ley de Stefan Boltzmann

$$I_{\text{Cuerpo Negro}} = \sigma T^4$$

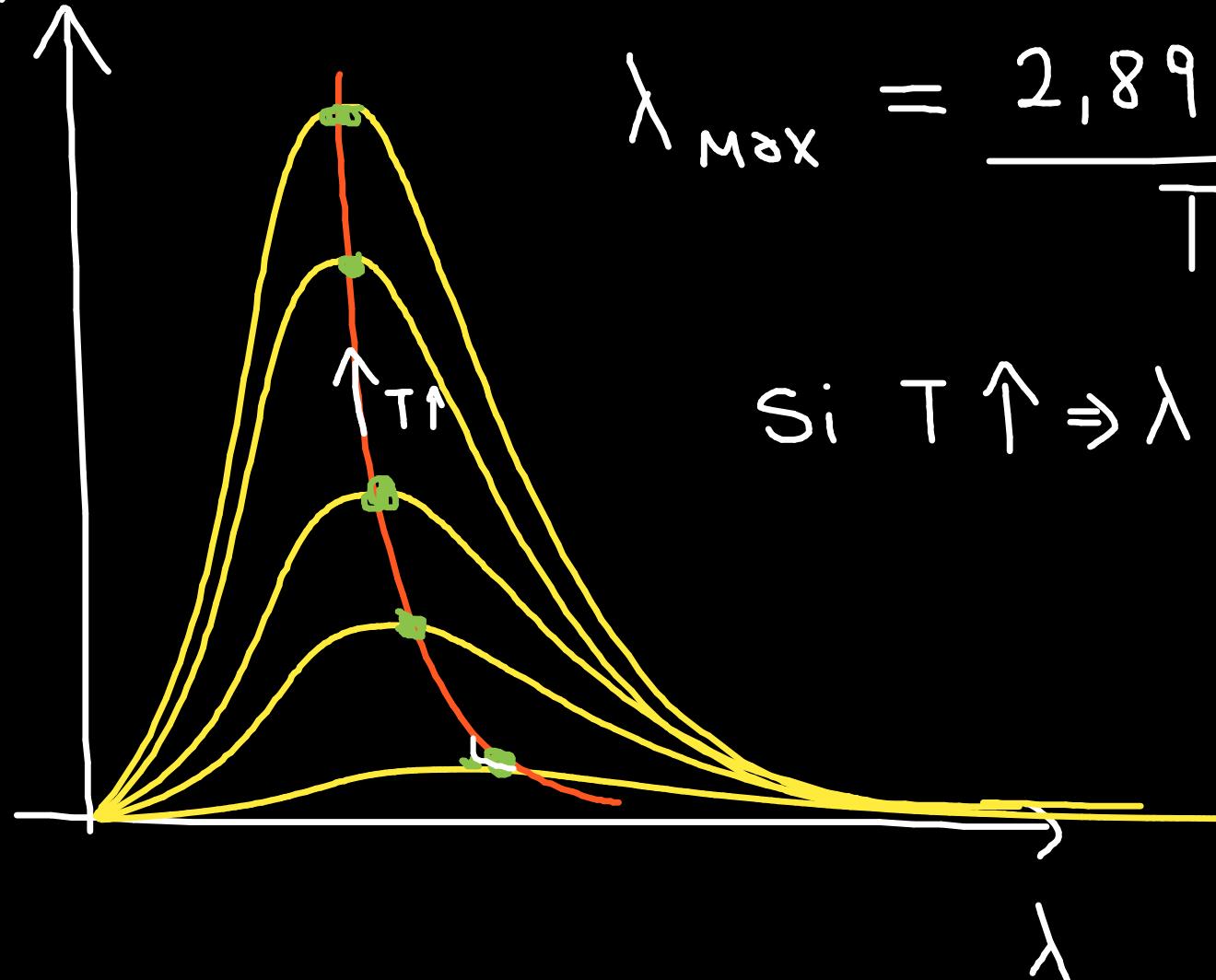
$$\sigma \approx 5,6 \cdot 10^{-8} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \right] //$$

SOL →

Espectro visible

Leg de Wien :  $\lambda_{\max}(T)$

$I(\lambda)$



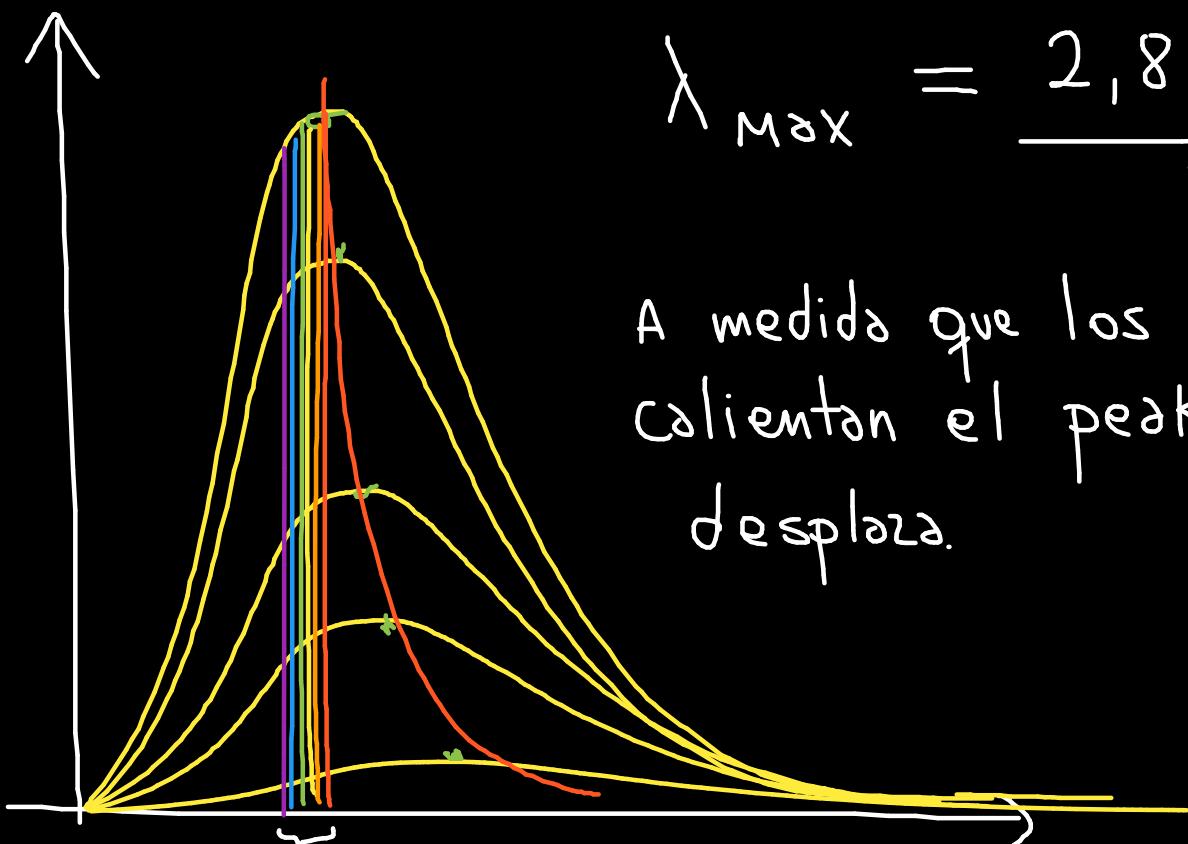
$$\lambda_{\max} = \frac{2,89 \cdot 10^{-3} [\text{m} \cdot \text{k}]}{\bar{T}}$$

Si  $T \uparrow \Rightarrow \lambda \downarrow$

Esto responde la pregunta inicial

¿Por qué los objetos brillan cuando se calientan?

T

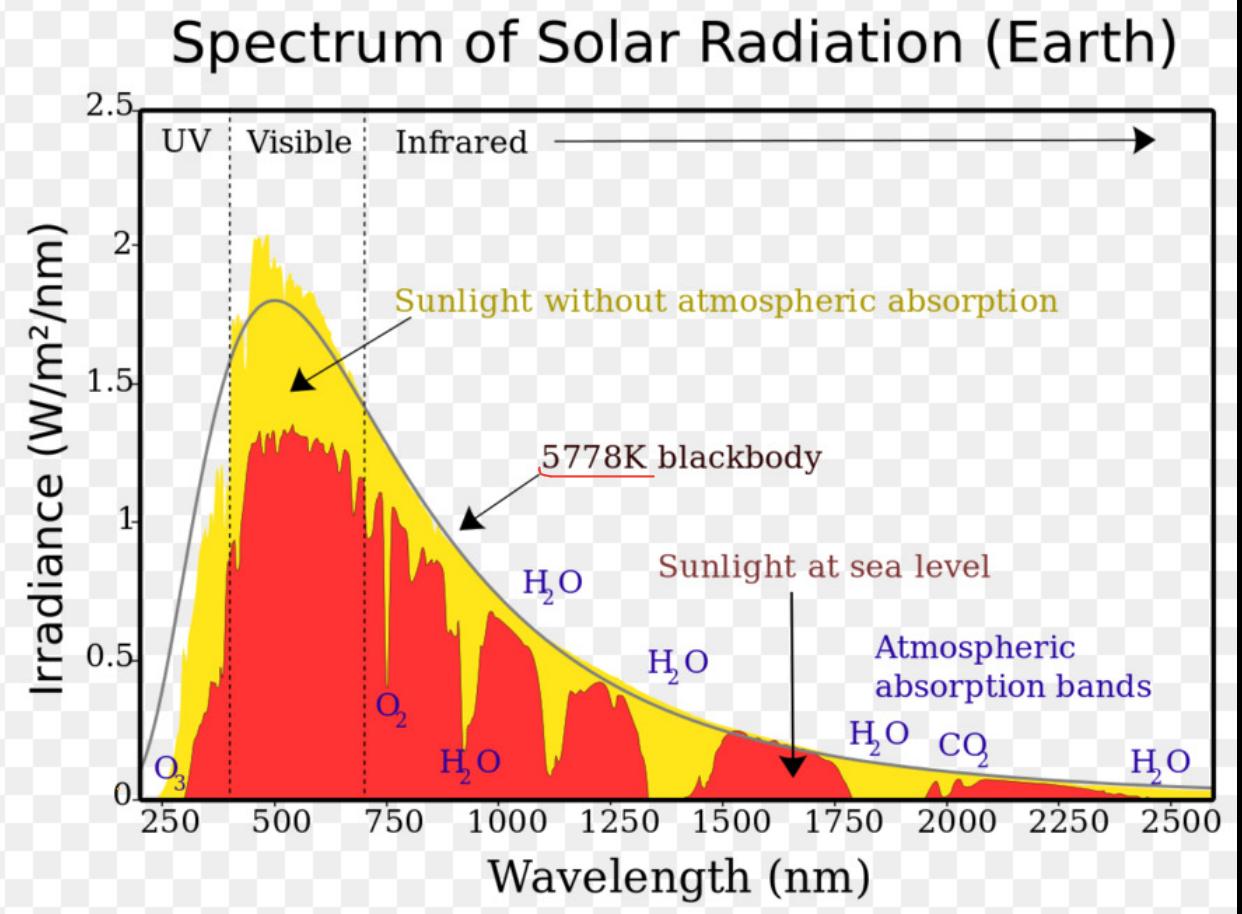


$$\lambda_{\max} = \frac{2,89 \cdot 10^{-3} [\text{mK}]}{T}$$

A medida que los objetos se calientan el peak se desplaza.

Espectro visible

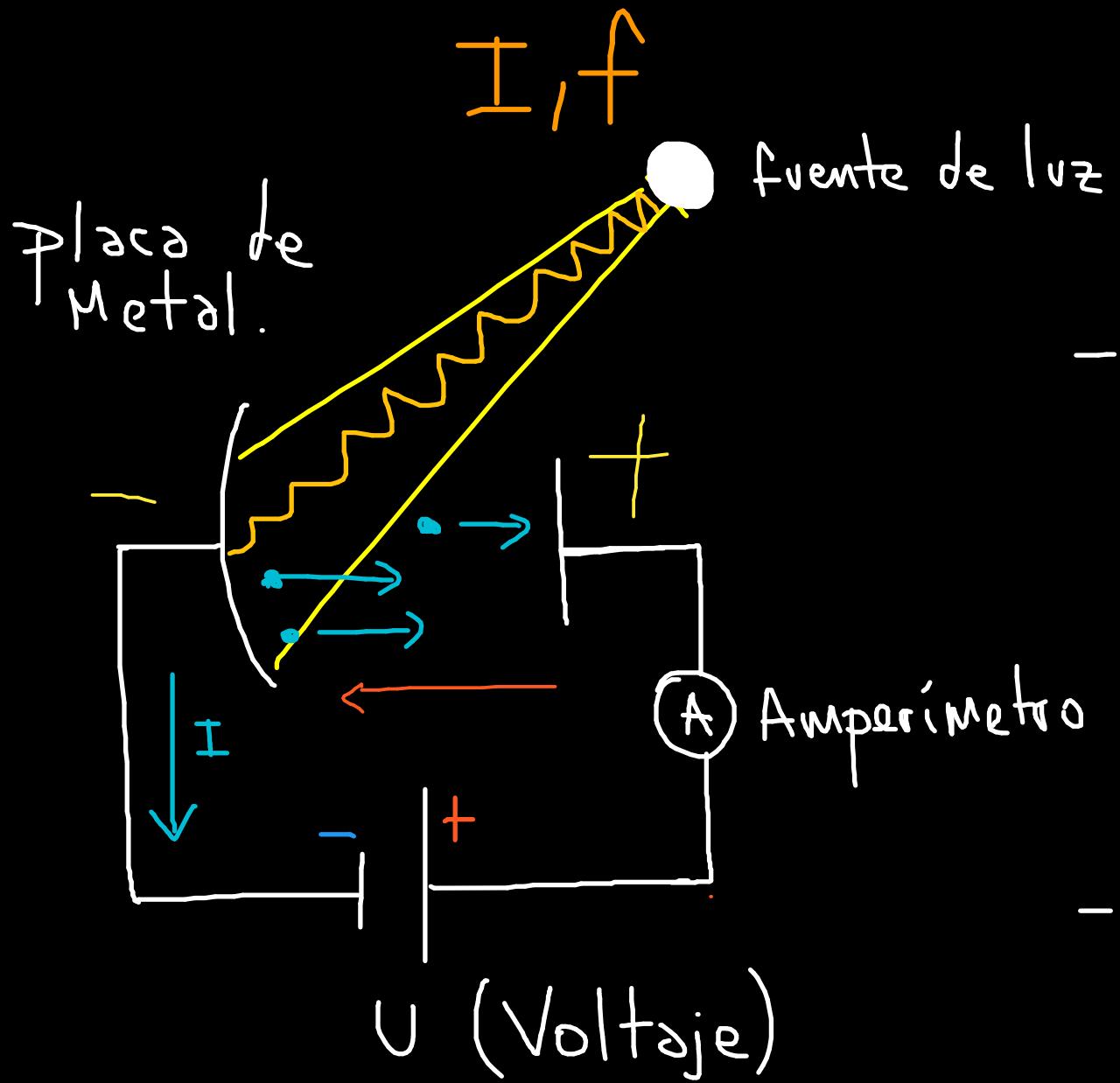
# Entender mejor el sol y las estrellas



## Material complementario de videos clase 13.

- Catástrofe ultravioleta: Rayleigh Jeans
- Radiación de cuerpo Negro: Radiación de cuerpo negro
- Radiación de cuerpo Negro II: Radiación de cuerpo negro II
- Ejericicios:
  1. Radiación de cuerpo negro
  2. Radiación de cuerpo negro
  3. Radiación de cuerpo negro

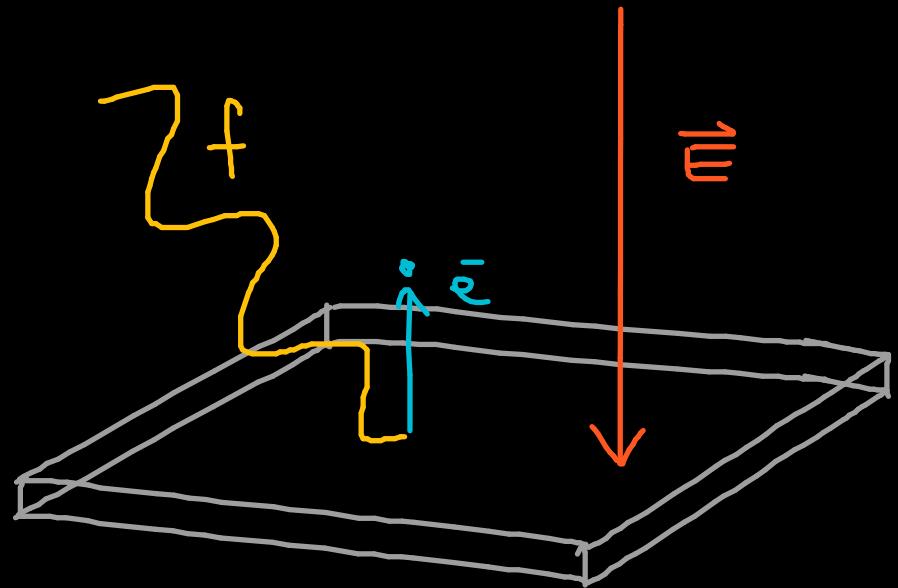
# Interacción Luz - Metal



- Ciertos tipos de luz, dependiendo su frecuencia pueden 'arrancar' electrones de un metal (ionización de los átomos del metal)
- Electrones arrancados del metal por luz son llamados fotoelectrones

¿Qué se observa?

- 1902 Philip Lenard observó que la energía de un electrón arrancado del metal era proporcional a la frecuencia de la luz incidente pero no de la intensidad de la luz.



$$V = A c \Delta t$$

$$E_{oem} = \underbrace{\left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \right)}_{\frac{I_{oem}}{c}} V = \frac{1}{2} m_e V_e^2 + \text{cte}$$

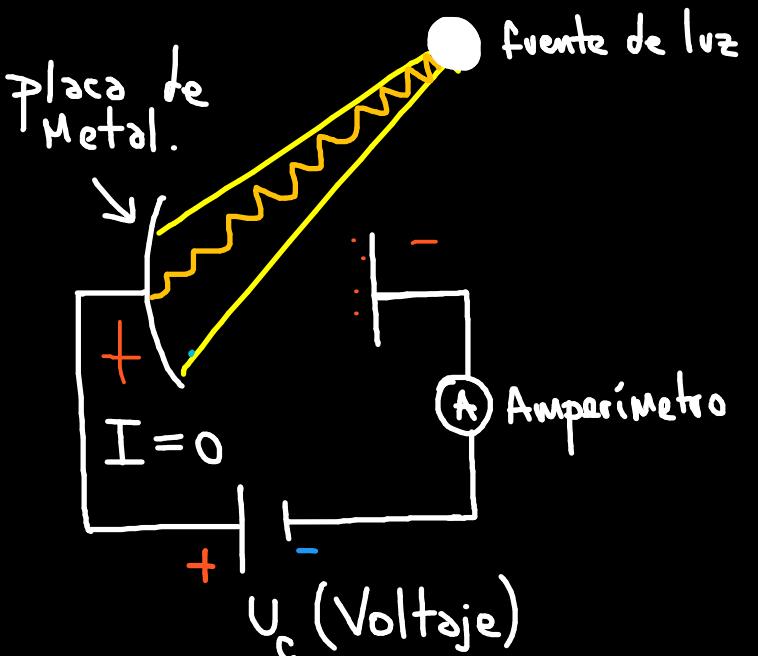
Esto no se observa

Esta observación implica un problema porque clásicamente se esperaba que fuese proporcional a la intensidad

Otro problema...

No todos los electrones salen con idéntica energía.

Si se desea evitar que los electrones más energéticos  
salgan, invertimos el voltaje



$U_c$ : Voltaje de corte

Energía entregada a los electrones se suponía

$$E_e \propto E_{oEM} = \frac{I_{oEM}}{c} V$$

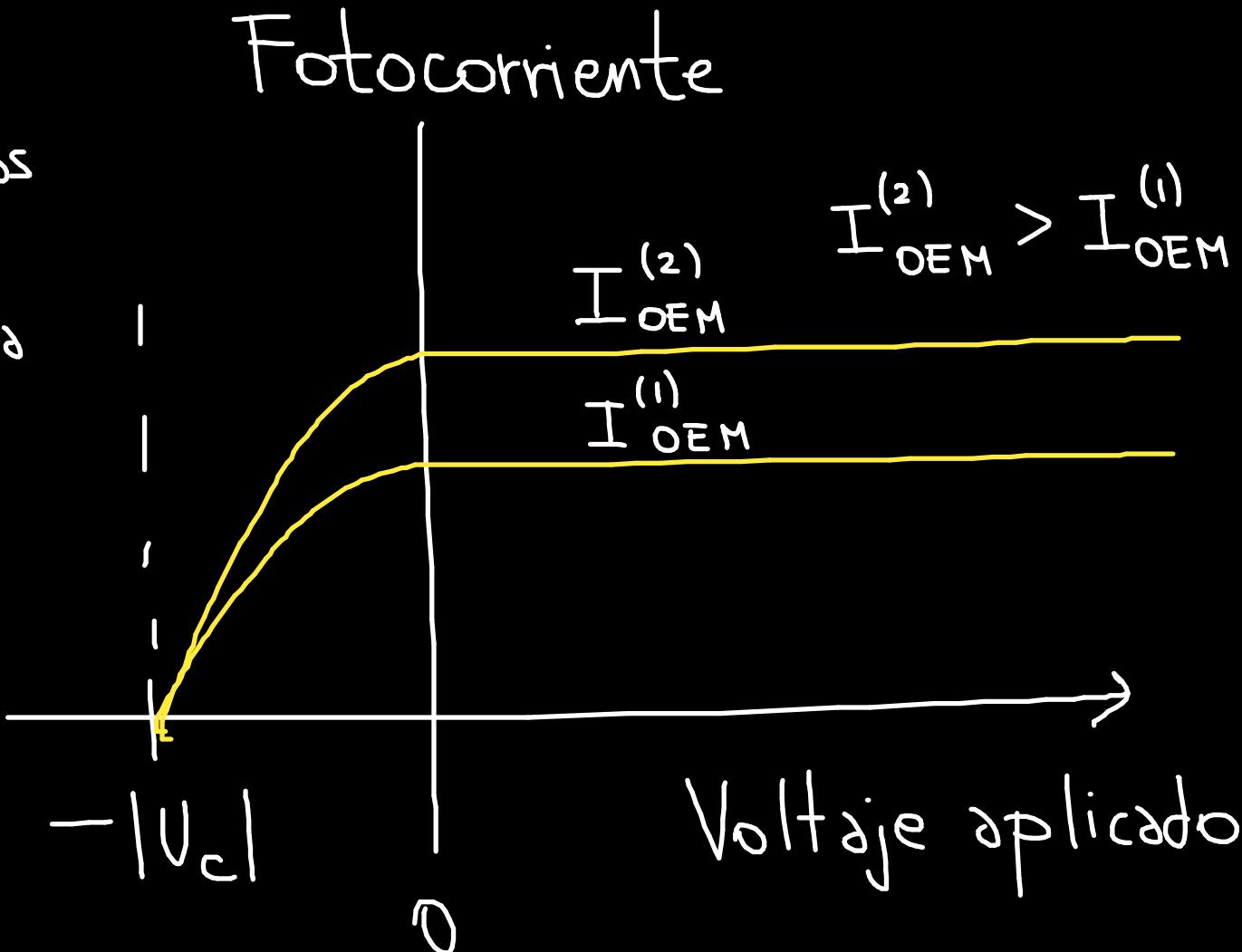
por tanto, la condición para retenerlos era

$$\frac{I_{oEM}}{c} V \propto e U_c$$

Esto no se observó

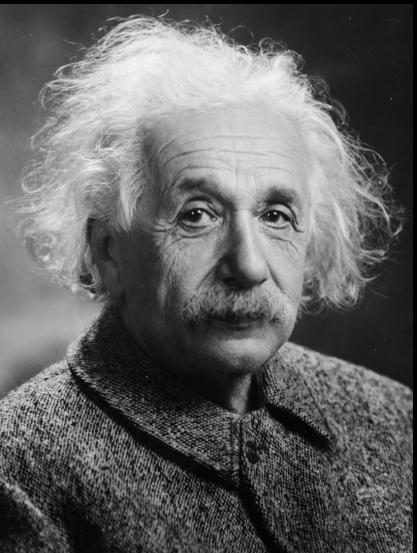
# Resultados del experimento:

El voltaje crítico para contener a los electrones no es proporcional a la intensidad, es independiente



Claramente las cosas no calzaban en el comienzo de 1900s

- Se necesitaba una teoría donde la energía de los fotoselectrones fuese proporcional a la frecuencia de la luz :  $\frac{1}{2} m_e v_e^2 \propto f$
- Explicar por qué no funcionaba  $\frac{1}{2} m_e v_e^2 \propto I_{DEM}$



- Albert Einstein resuelve el puzzle en 1905.
- En 1921 Einstein gana el premio Nobel por explicar este efecto.

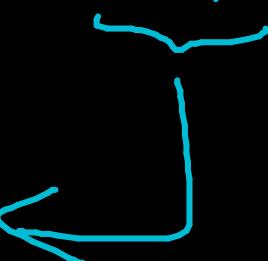
# hipótesis de Einstein y fotones

Tomando los resultados de la hipótesis de

Planck  $E_{\text{Atomas}} = nhf$  Einstein asume que:

- La energía de la luz está "cuantizada" en paquetes de energía dados por  $E = h f_{\text{OEM}}$

$$E_{\text{OEM}} = N h f_{\text{OEM}}$$

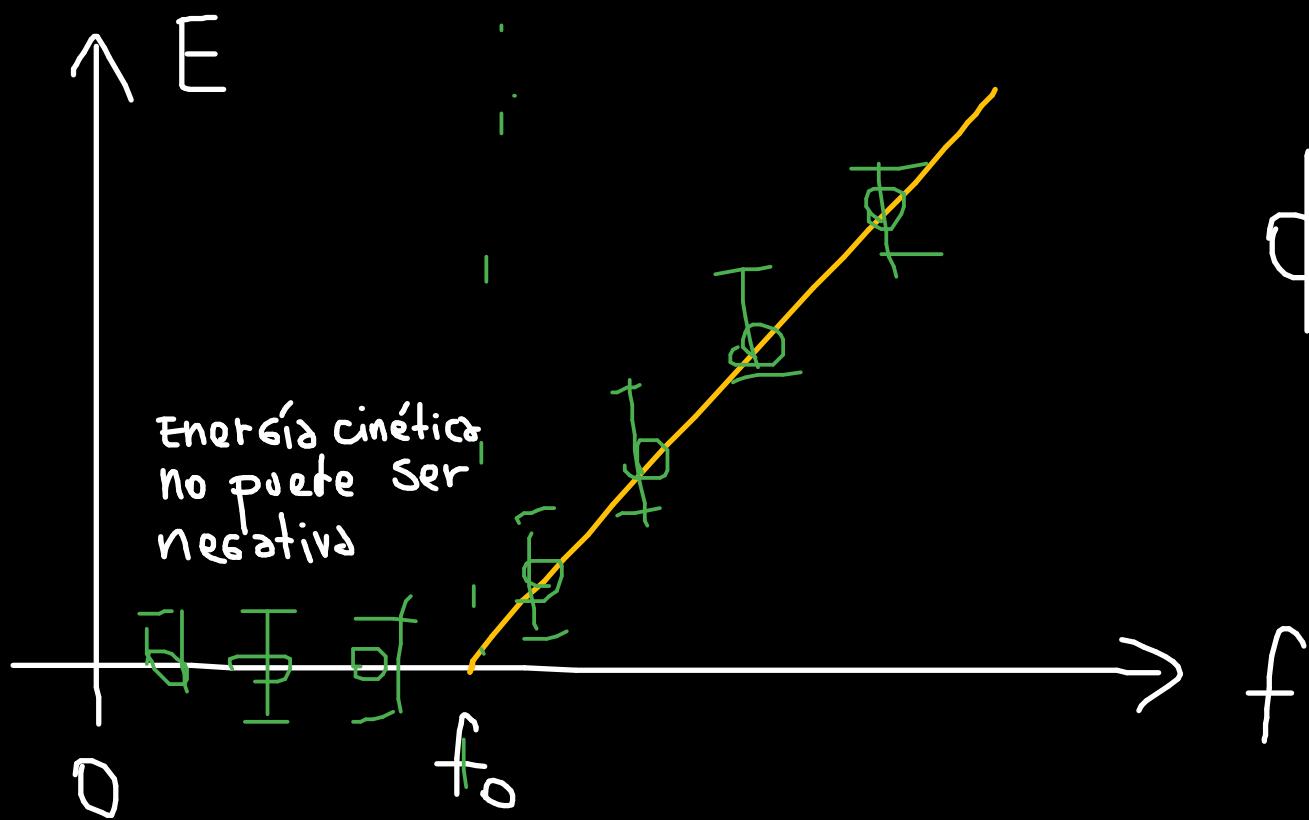


- Un "cuantó" de luz puede pensarse como una "partícula" que choca con un electrón en un choque elástico dado por

$$h f_{\text{OEM}} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 + \underbrace{\varphi}_{\text{constante del material}}$$

Lo anterior explica bastante

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = E_e = h f - \phi = h(f - f_0)$$

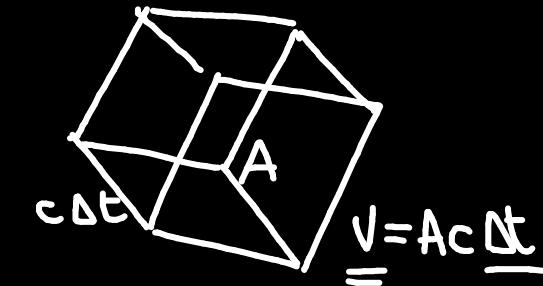
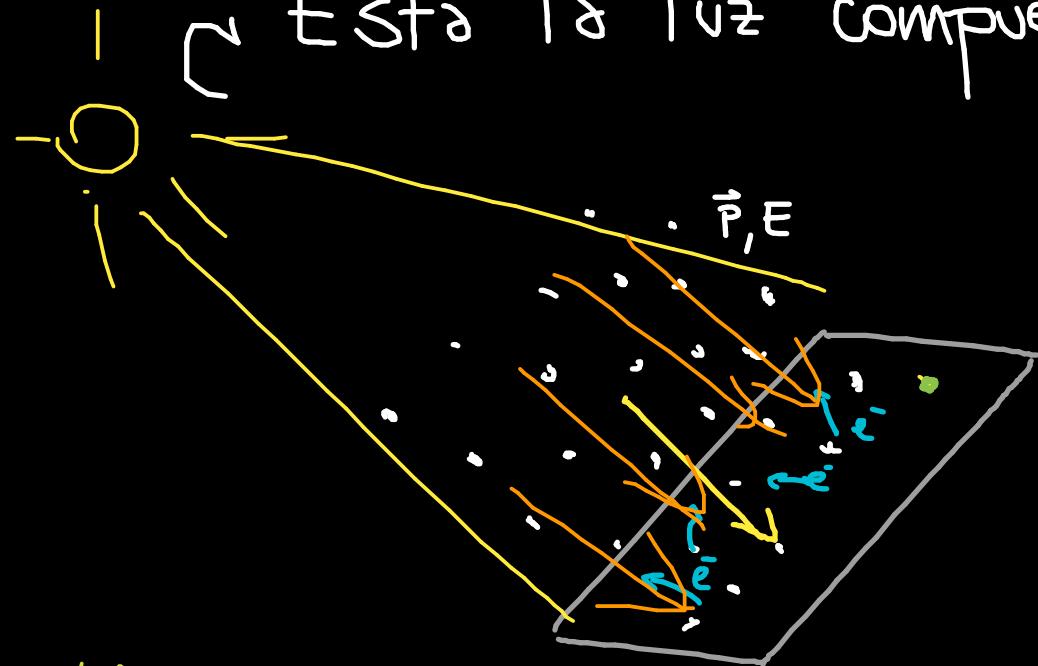


$$h f_0$$

$\phi$ : Función trabajo

energía necesaria para arrancar un electrón del metal. Depende del Material.

¿Está la luz compuesta por partículas?



$$\left. \begin{aligned} E_{\text{OEM}} &= n h f && \text{cuántico} \\ &= \frac{I_{\text{OEM}}}{c} && \text{clásico} \end{aligned} \right\}$$

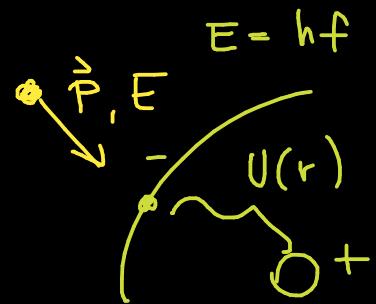
$$n h f = \frac{I}{c} A c \Delta t$$

$$n = \frac{I A \Delta t}{h f}$$

# fotones en  
V

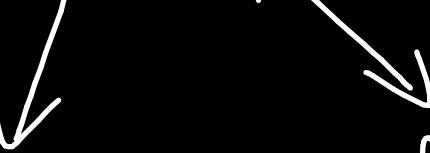
n se puede obtener de un flujo de partículas

$$n = \int_S \vec{\phi}(r, t) \cdot d\vec{s} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{concepto} \\ \text{teórico} \end{array} \right]$$



Más intensidad  $\Rightarrow$  más fotones, no más energía por fotón

$$\text{Pero... } E_{\text{OEM}} = n h f$$



↓                              ↓

$\# \text{ partículas}$        $\text{frecuencia}$   
                                  de onda

bueno... Luz, onda o partícula?

Las cosas se empiezan a complicar  
pero también se ponen más interesantes

## Material complementario de videos clase 14.

- Efecto fotoeléctrico: Rayleigh Jeans
- Energía máxima por electrón arrancado de la placa por radiación incidente (efecto fotoeléctrico):

$$E_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = hf - \phi_0,$$

donde  $\phi_0$  es una constante del material también conocida como **función trabajo**,  $f$  es la frecuencia de la radiación incidente,  $v_{máx}$  es la velocidad máxima que tienen los electrones al salir de la placa metálica. Corriente en el circuito

$$i = \frac{ne}{1s},$$

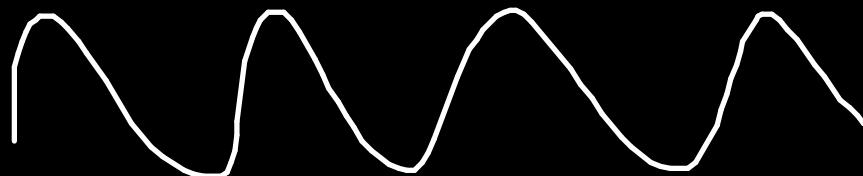
donde  $n$  es el número de electrones que se producen en la placa colectora por segundo y  $e$  es la carga fundamental. La cantidad de electrones depende de la intensidad de radiación de la frecuencia de la radiación incidente.

- Ejercicios:
  1. Ejercicio completo de efecto fotoeléctrico, en video  $\phi_0$  es llamado  $W$
  2. Ejercicio efecto fotoeléctrico II

# Luz

## Siglo XVII

- Huygens → naturaleza ondulatoria de la luz

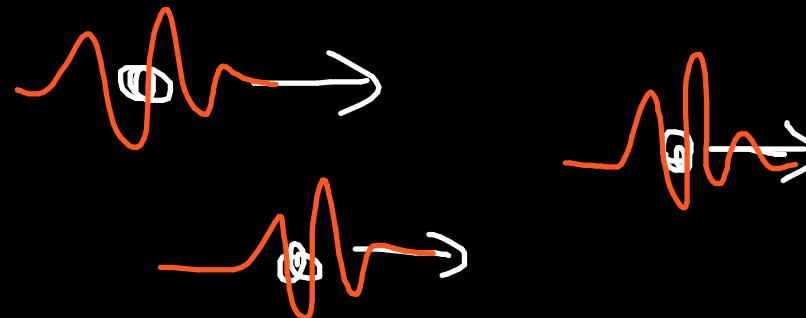


- Newton → Naturaleza corpuscular de la luz

Fines de S XVII

- Experimentos de difracción apoyan teoría ondulatoria
- Finales del siglo XVIII  
Ecucciones de Maxwell
- principios del 1900 (SXX)
  - Experimentos de radiación de cuerpo negro y efecto fotoeléctrico (1905) apoyan teoría corpuscular

Se observan comportamiento tipo corpusculo y de onda (?)

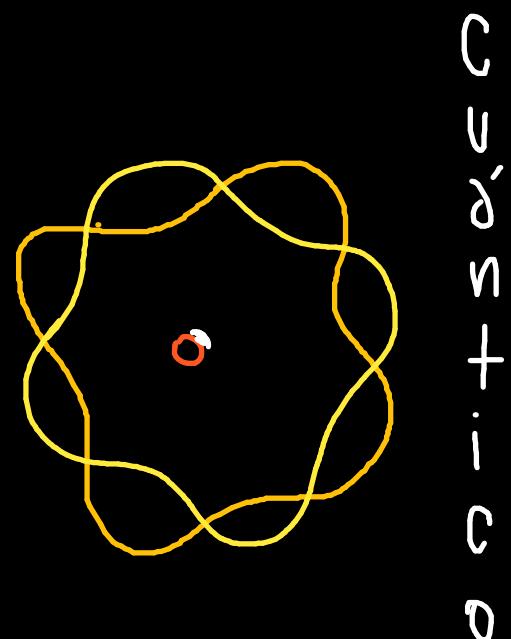
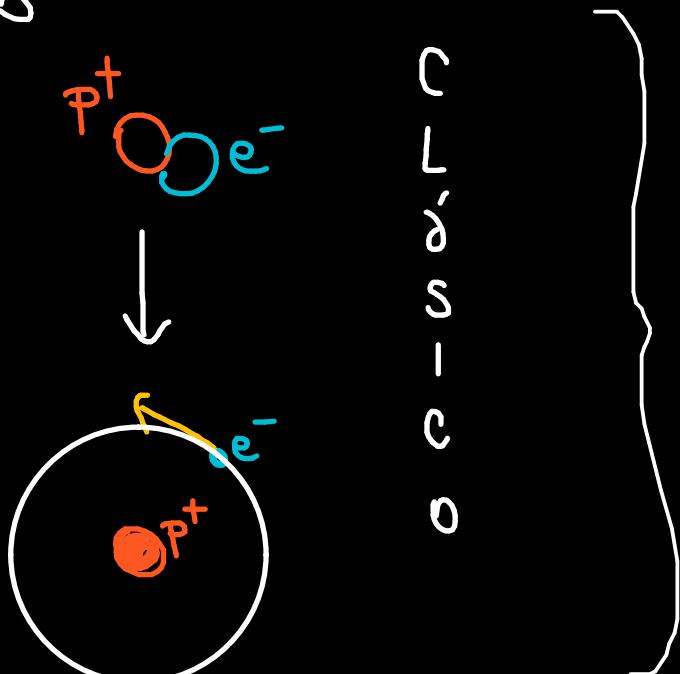


Dualidad onda corpúsculo

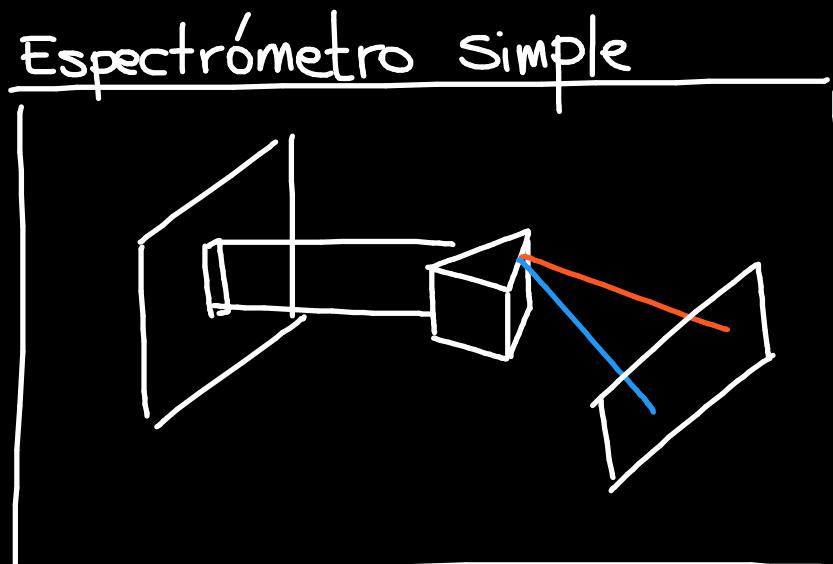
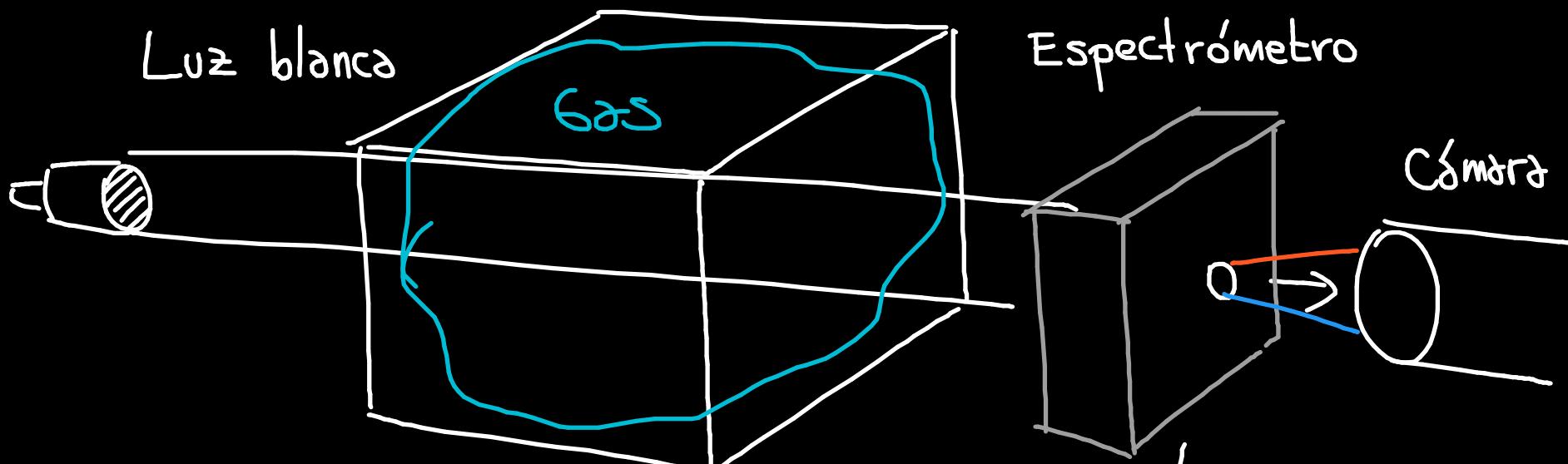
## Materia

- 1803 - 1808 Modelo de Dalton
- 1897 Descubrimiento del protón ]
- 1897 Descubrimiento del electrón ]
- 1911 Modelo atómico de Rutherford  
(modelo de órbitas - simil sistema solar)
- 1913 Módelo atómico de Bohr
- 1924 De Broglie plantea naturaleza ondulatoria de la materia - Electrón como onda
- 1926 Schrödinger postula ecuación de "ondas de materia".
- 1932 Descubrimiento del neutrón

## Desarrollo del modelo atómico

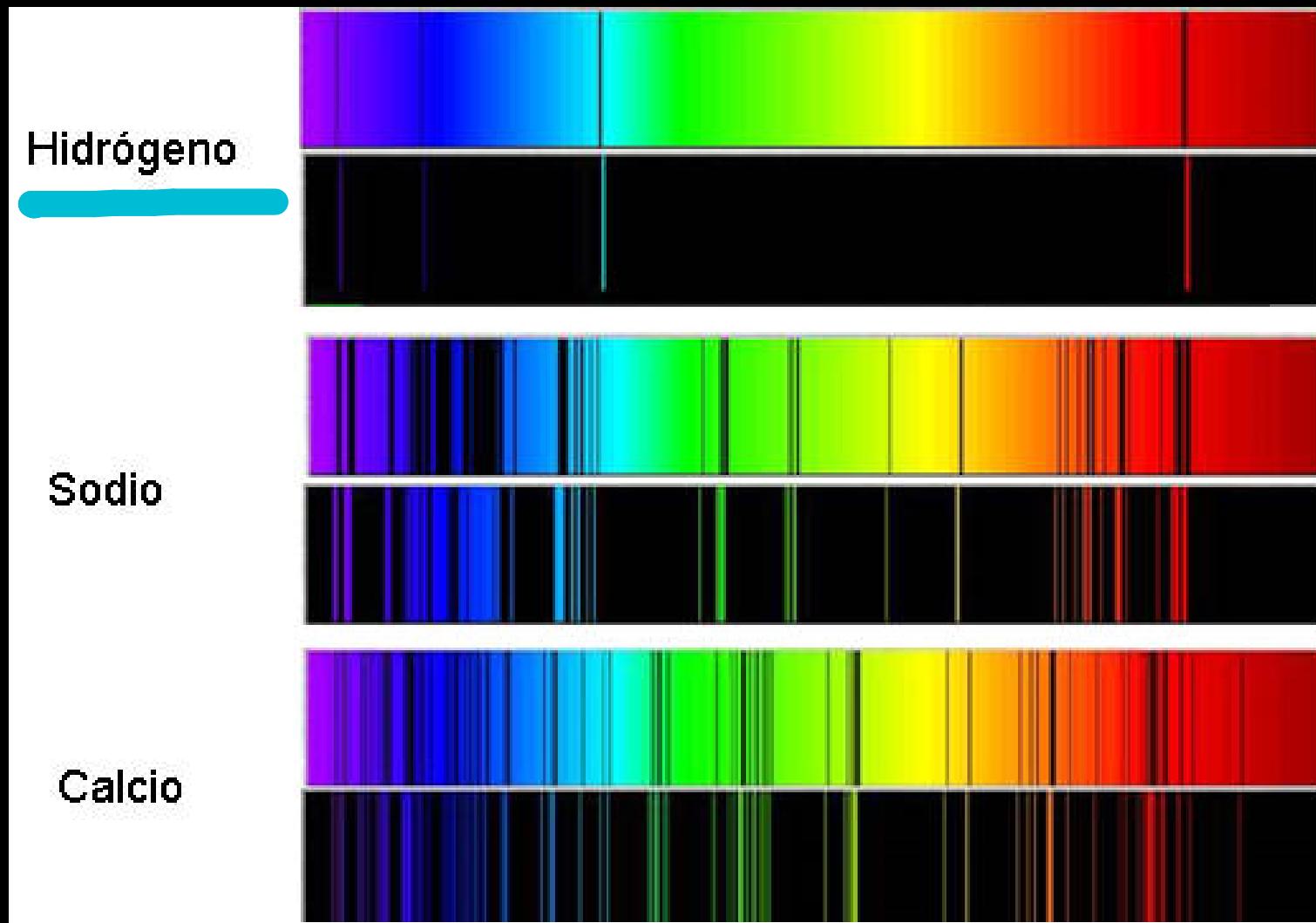


# Espectro átomico de los gases

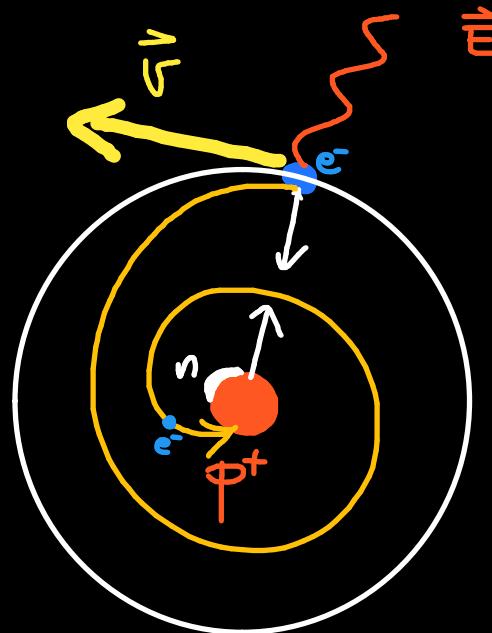
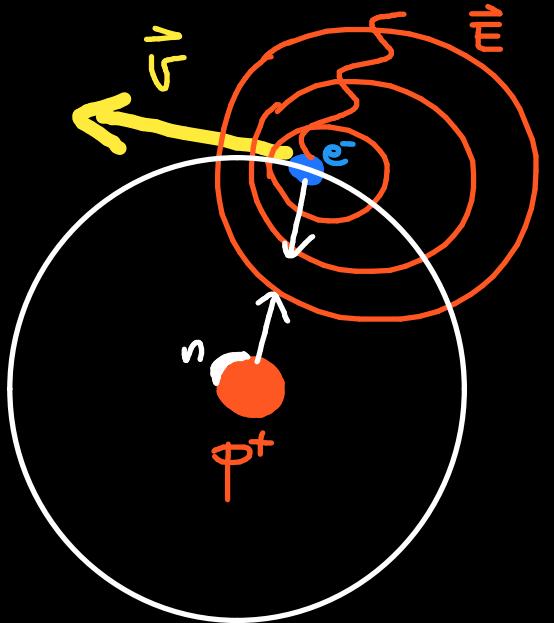


$$\Delta E = hf$$

¿Qué se observa? : huellas digitales de los gases



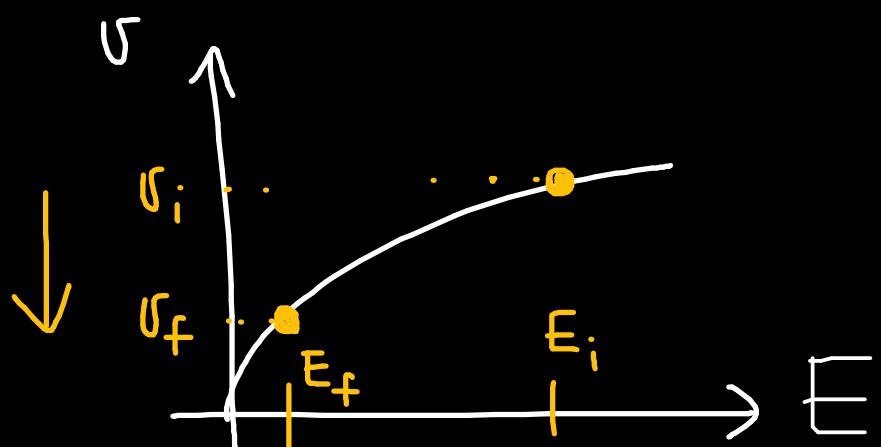
# Inestabilidad en la materia



Energía se disipa como onda electromagnética

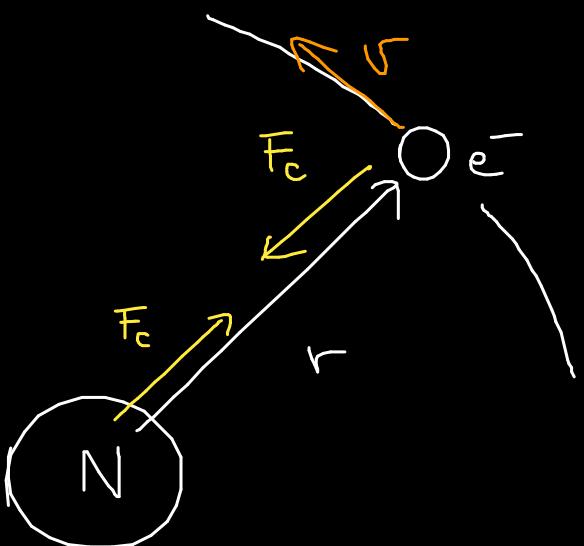
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$\tau$ : tiempo en que el electrón caerá al núcleo  $\sim 10^{-11}[\text{s}]!$

# modelo atómico de Bohr

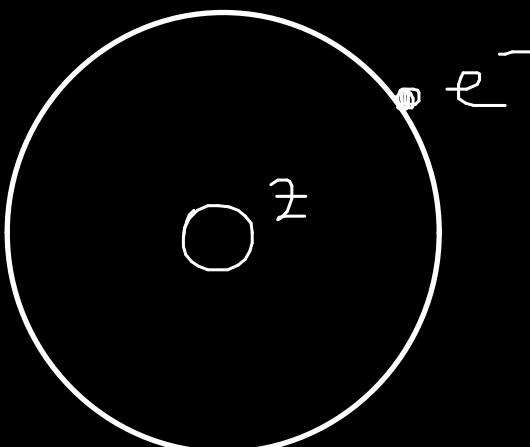


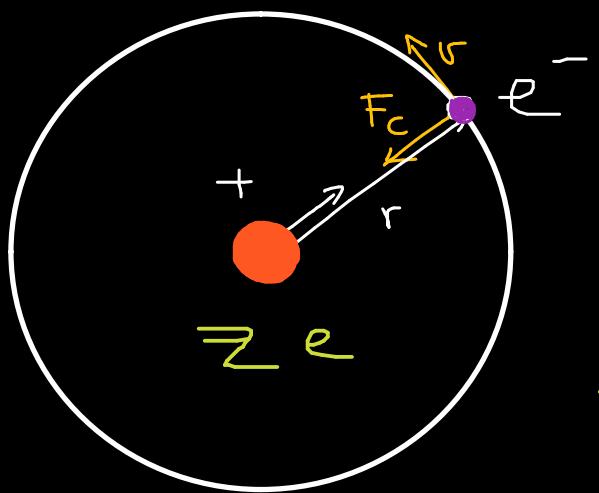
## Supuestos:

- 1 - Modelo planetario basado en fuerza de Coulomb.
- 2 - El electrón al acelerarse No emite radiación (Esto sería válido solo al interior del átomo)
- 3 - El momentum angular es una variable discreta para un electrón dentro del átomo
- 4 - Emisión y/o Absorción de radiación ocurre cuando el electrón cambia de órbita

Modelo planteado para átomos tipo hidrógeno

|               |                   |         |                                  |
|---------------|-------------------|---------|----------------------------------|
| $\rightarrow$ | H                 | $Z = 1$ | $(Z: \text{número de protones})$ |
| $\rightarrow$ | $\text{He}^+$     | $Z = 2$ |                                  |
| $\rightarrow$ | $\text{Li}^{++}$  | $Z = 3$ |                                  |
| $\rightarrow$ | $\text{Be}^{+++}$ | $Z = 4$ |                                  |





$$F_{\text{centrípeto}} = F_{\text{Coulomb}}$$

e: carga fundamental

$$m_e |\vec{v}|^2 / r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (ze)(-e) / r^2$$

Fuerza de coulomb es conservativa

$$\Rightarrow E_{\text{electrón}} = \frac{1}{2} m_e |\vec{v}|^2 = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla} U_{\text{int}}$$

$$U_{\text{int}} = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -2E_{\text{electrón}}$$

$$U_{\text{int}} + E_{\text{electrón}} = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$= -\frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Energía del átomo

$$E_{\text{átomo}} = E_{\text{electrón}} + U_{\text{int}} = -\frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$F_{\text{centrípetas}} \equiv F_{\text{Coulomb}}$$

$$-\frac{m_e |\vec{v}|^2}{r} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z e)(-e)}{r^2} \hat{r}$$

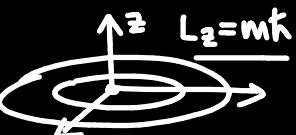
$$\frac{m_e^2 |\vec{v}|^2}{m_e r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r^2}$$

$$\frac{m_e^2 |\vec{v}|^2 r^2}{m_e r^3} = \frac{Z m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\frac{(p r)^2}{m_e r^3} = \frac{Z e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Reescribiendo en términos de  $L$

$$\frac{L^2}{m_e r^3} = \frac{Z e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Cuantización del momentum angular

$$L = \frac{n h}{2\pi} = n \hbar$$

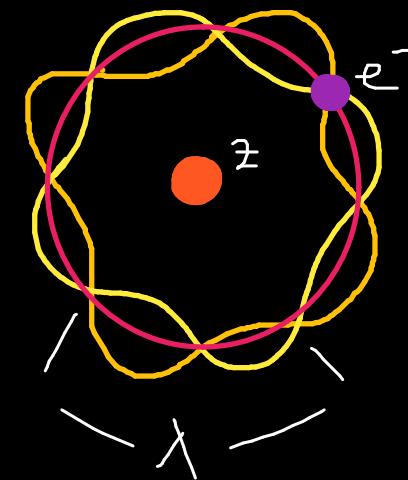
$$\frac{n^2 \hbar^2}{4\pi^2 m_e r^3} = \frac{Z m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow r_n = \frac{n^2}{Z} \underbrace{\left( \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} \right)}_{a_0}, \quad a_0 : \text{Radio de Bohr}$$

$$r_n = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad r_1^{(+)}) = a_0$$

$$L_n = r_n m v_n = \underline{\frac{n \hbar}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{Z e^2}{2\epsilon_0 \hbar n}$$



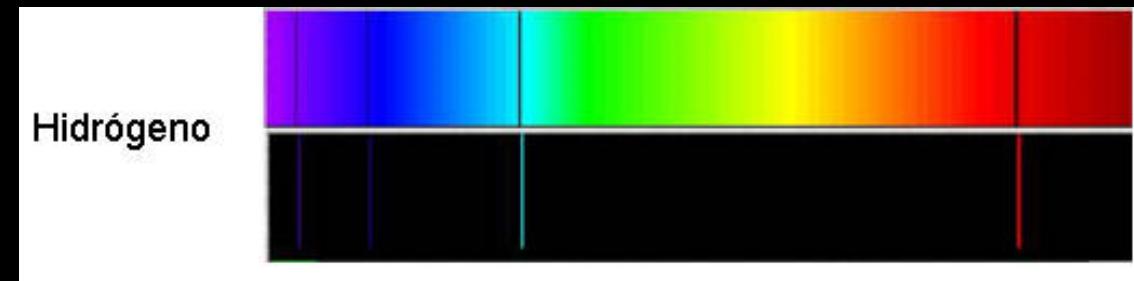
Reemplazando el resultado anterior en la energía del átomo

$$E_n = -\frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

$$E_n = -Z \left( \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right) \frac{1}{n^2}$$

$$E_n = -Z^2 \underbrace{\left( \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \right)}_{\text{constante de Rydberg}} \frac{1}{n^2}$$

constante de Rydberg



Formulación de Rydberg

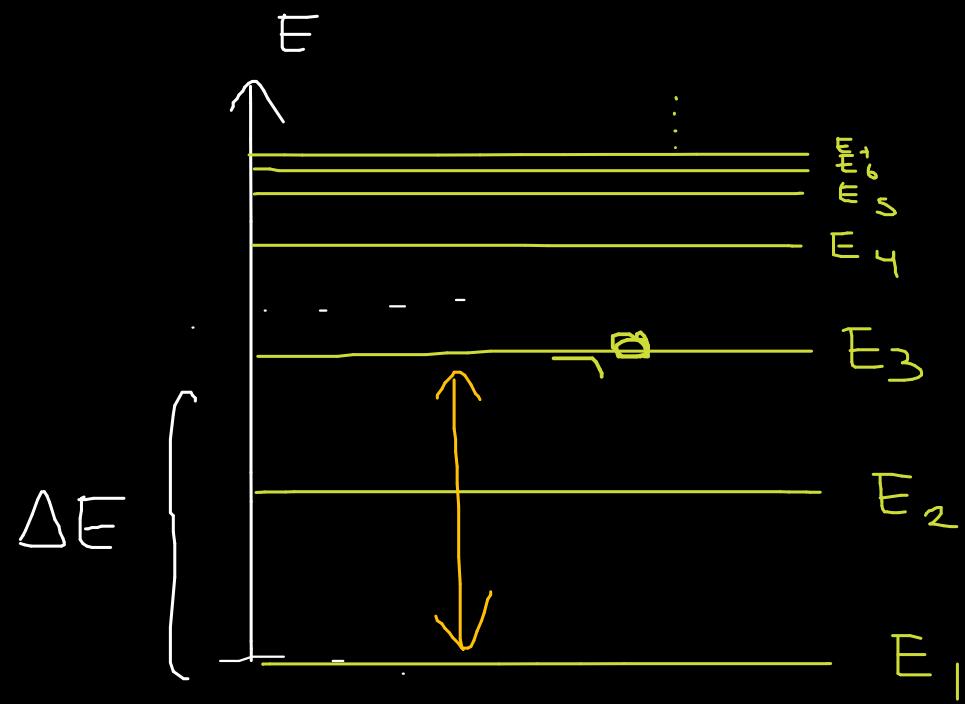
y se había medido experimentalmente  
esta relación

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left[ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right], \quad n > m$$

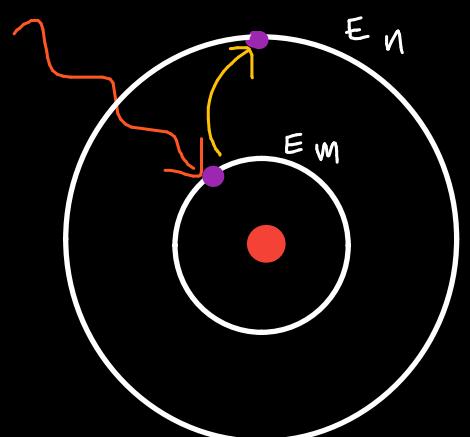
$$R \approx 1.09 \cdot 10^7 [\text{m}^{-1}]$$



Energía de cada nivel  $E_n = -\frac{Z^2}{8\epsilon_0 h^2} \left( \frac{m e^4}{n^2} \right)$



Si la energía del fotón es justo la diferencia de energía entre dos niveles se produce una transición de  $E_m \rightarrow E_n$



Diferencias de energía

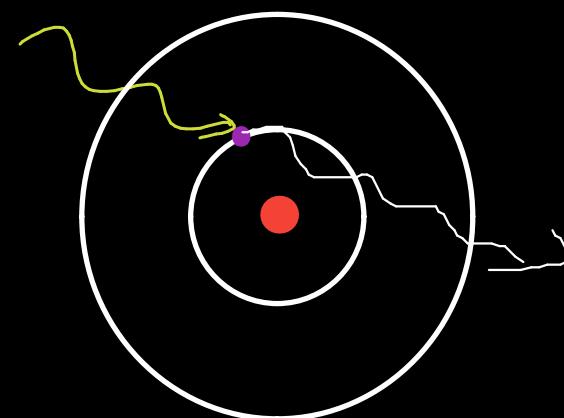
$$\Delta E = E_n - E_m = h f_{\text{fotón}}$$

$$-\frac{Z^2}{8\epsilon_0 h^2} \left( \frac{m e^4}{n^2} \right) \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right] = \frac{hc}{\lambda_{\text{fotón}}} \quad n > m$$

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left[ \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad m < n$$

$$E_n = E_m + h f$$

$$E_n - h f = E_m$$



Si  $h f$  no coincide con  $\Delta E = E_n - E_m$  Luz no se absorbe.

# Relatividad - Energía y momentum de un fotón

Masa del fotón

$$\underline{m = 0}$$

$$E = cp$$

$$= h f \quad //$$

"La luz no tiene masa"

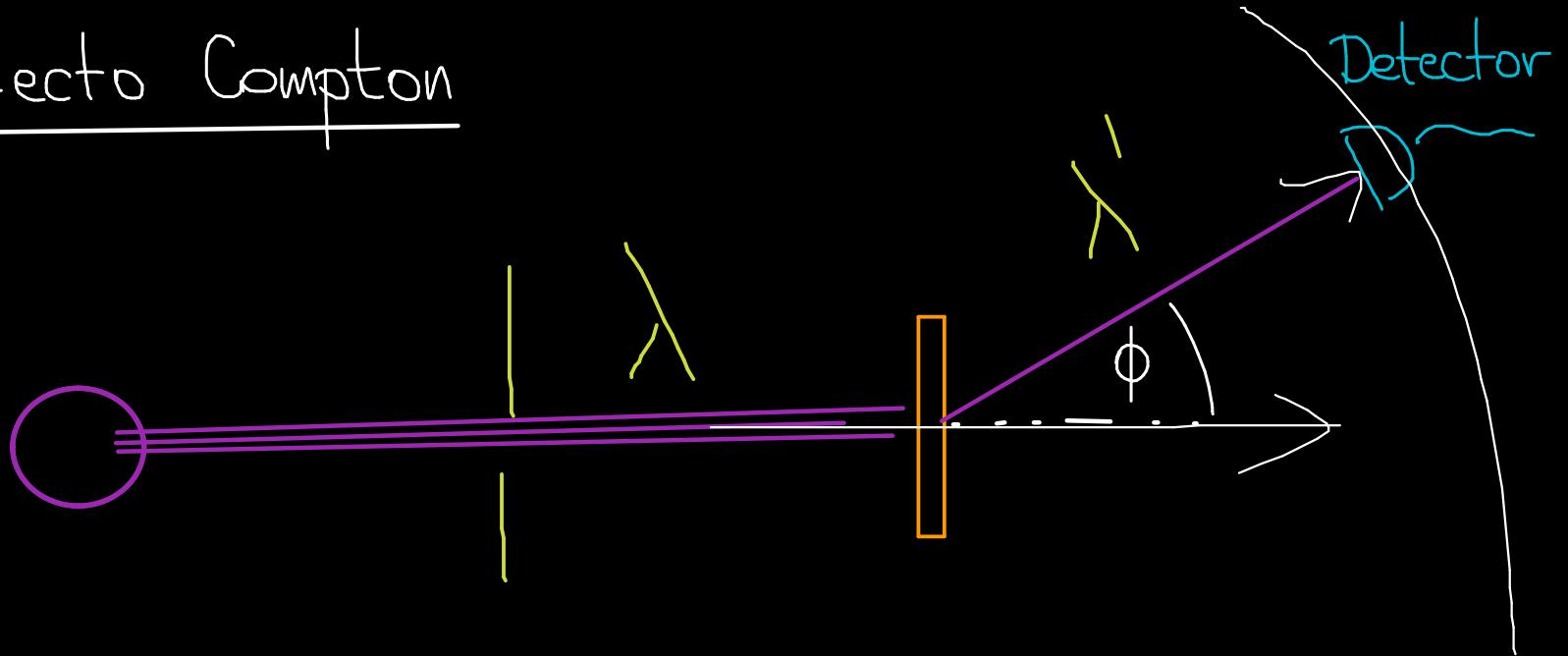
→  ~~$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$~~

Momentum de un fotón

$$\Rightarrow p = \frac{hf}{c}$$

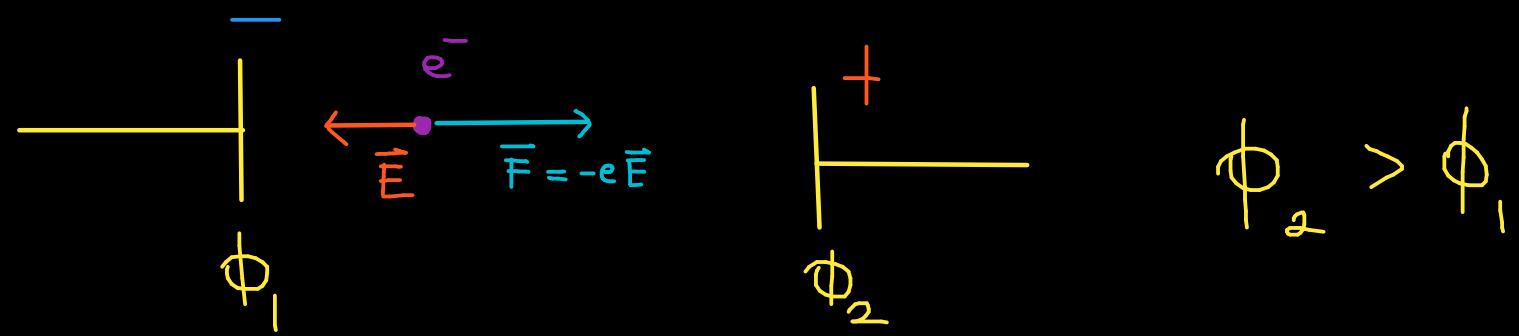
$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

## Efecto Compton



$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \phi)$$

## Recordatorio: electrón - Voltio



$$U = q(\phi_2 - \phi_1) = qV$$

$$|U| = 1[e] \cdot 1[v] = 1[eV] = 1,602 \times 10^{-19} [J]$$

## Material complementario de videos clase 15.

- Se recomienda revisar video de preclase 14 para ver cómo se empieza a conocer la estructura de la materia.
- Átomo de Bohr: Modelo atómico de Bohr Se aconseja ver en rapidez 1.25 (8 min aprox en esta rapidez)
- Efecto Compton: Efecto Compton video recomendado.
- Ejercicios:
  1. Átomo de Bohr
  2. Átomo de Bohr II
  3. Efecto compton

# Sigamos con la historia...

- 1900 - Max Planck propone que la radiación emitida por los átomos viene en "paquetes de energía"

$$E = hf = \underbrace{\frac{h}{2\pi}}_{=\hbar} \cdot \underbrace{2\pi f}_{=\omega} = \hbar \omega$$

- 1905 Einstein resuelve el problema de como la luz puede quitar electrones de un metal, asumiendo que la energía de la luz viene en "Quantos de energía"

$$E = hf \quad (\text{basandose en postulado de Planck})$$

- En el mismo año Einstein también publica la relatividad especial

Pero retomando con Einstein:  $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2$

fotón = Cuantización de la energía  $m=0$

$$E = hf = pc \Rightarrow p = \frac{hf}{c}$$

pero  $\lambda f = c \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$  momentum de un fotón

Cuando  $V \rightarrow 0, \vec{P} \nrightarrow 0$  momentum total en V

$p = \underbrace{N p_{\text{fotón}}}_{\text{cuántico}} = \underbrace{\langle p_m \rangle V}_{\text{clásico}}$

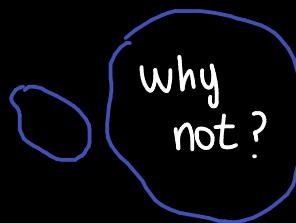
fotón  
energía  $hf$

cantidad de fotones

1913 Bohr supone que los electrones en un átomo tienen un comportamiento "tipo-onda". Esto podría explicar los espectros de absorción y emisión del hidrógeno.

1924 De Broglie propone que toda partícula está asociada con una onda, donde la energía y el momentum están dados por las mismas relaciones que se dedujieron para los fotones:

$$\left| \begin{array}{l} E_{partícula} = \hbar \omega \\ P_{partícula} = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar \vec{k} \end{array} \right.$$



$$\lambda_{partícula} = ?$$

Naturaleza ondulatoria de la materia

Ejemplo un electrón propagándose por el espacio libre tiene energía

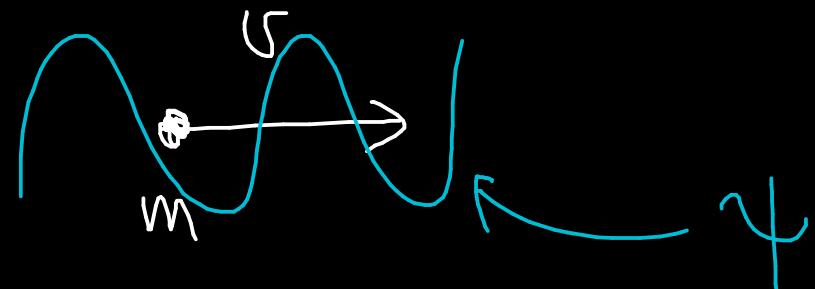
$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi}$$

$$P = k \hbar$$

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} \underbrace{2\pi f}_{\omega}$$

$$E = \frac{P^2}{2m}$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{m\zeta^2}{2} \Rightarrow \zeta = \frac{\hbar k}{m}$$



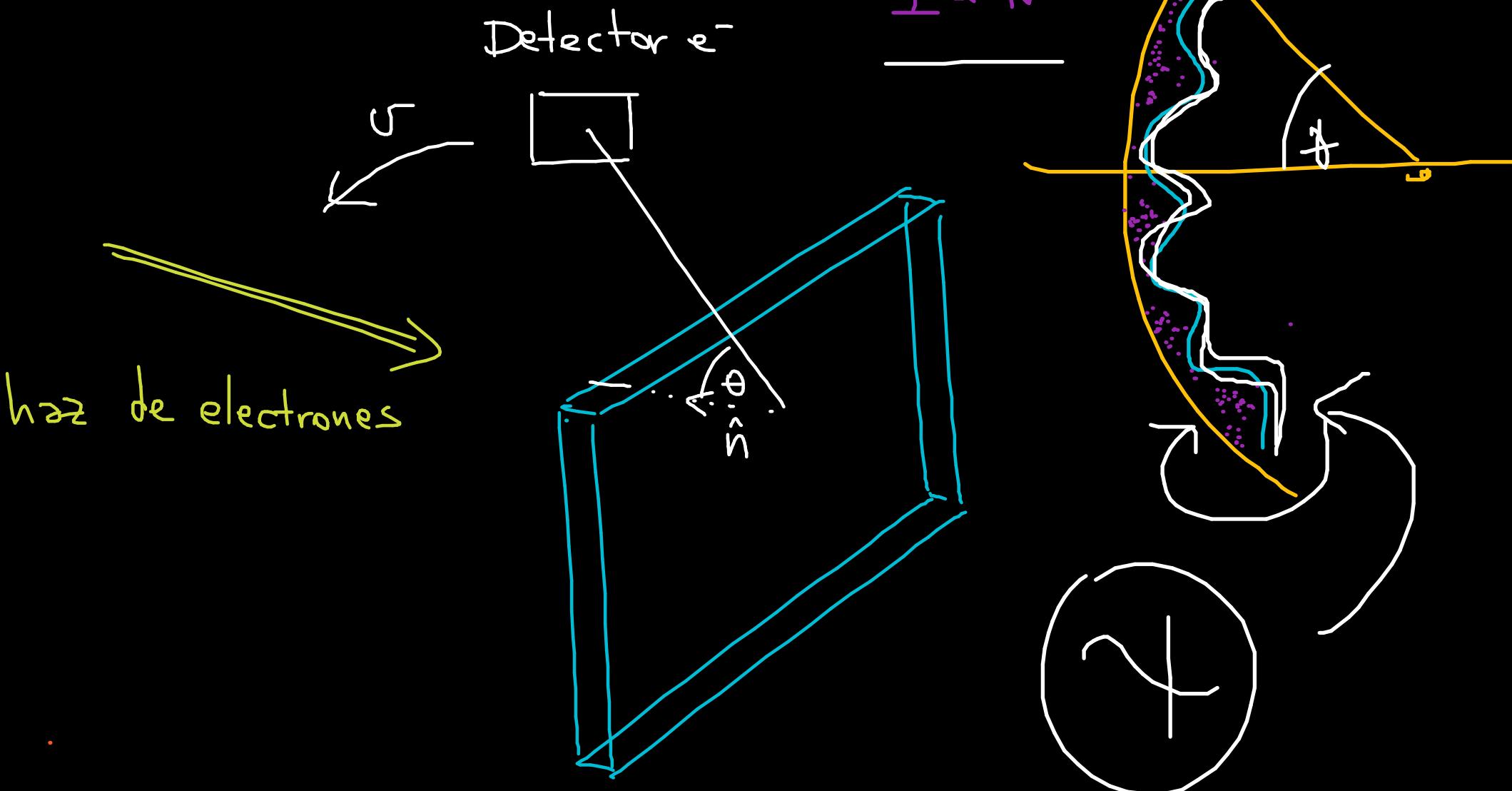
$$E = \hbar\omega$$

Onda de materia

relación de dispersión

$$\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

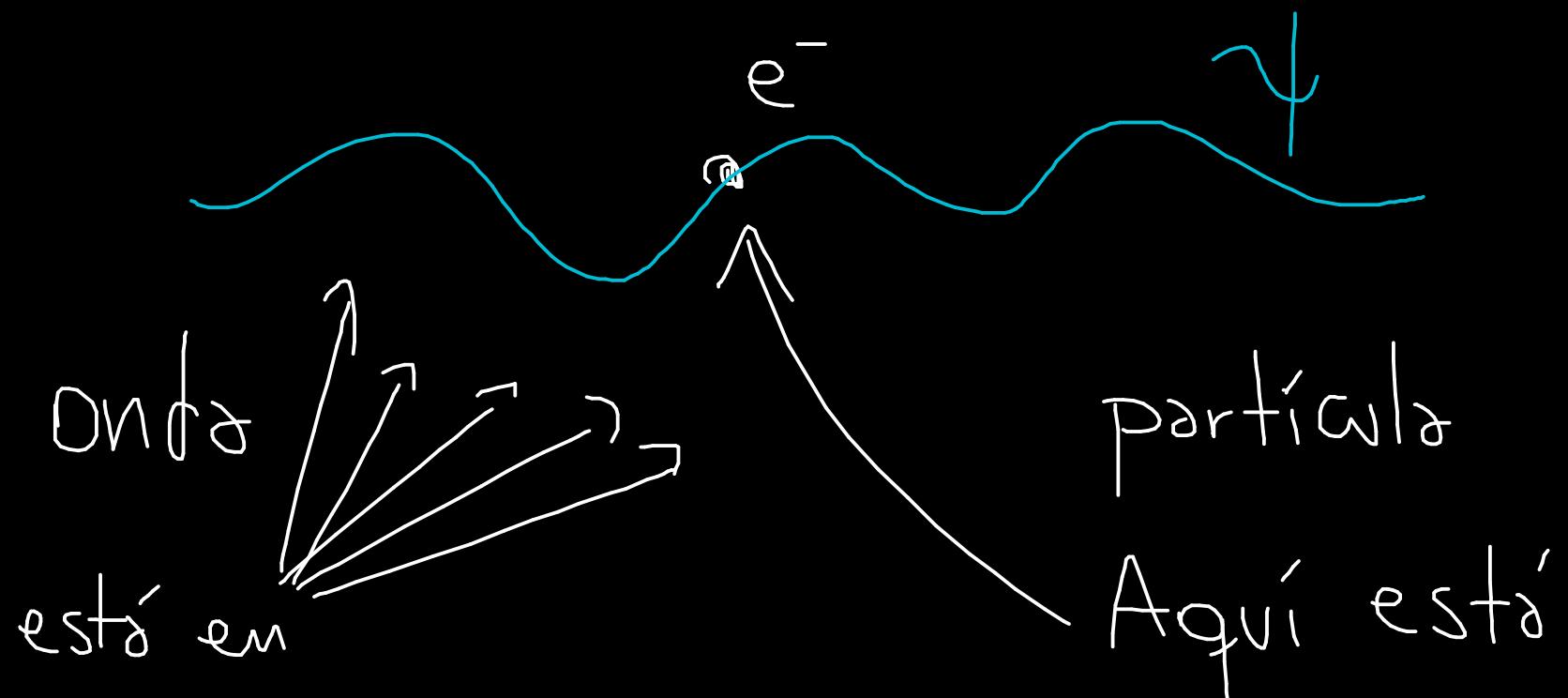
Davisson - Germer 1927



Este experimento muestra difracción de electrones!

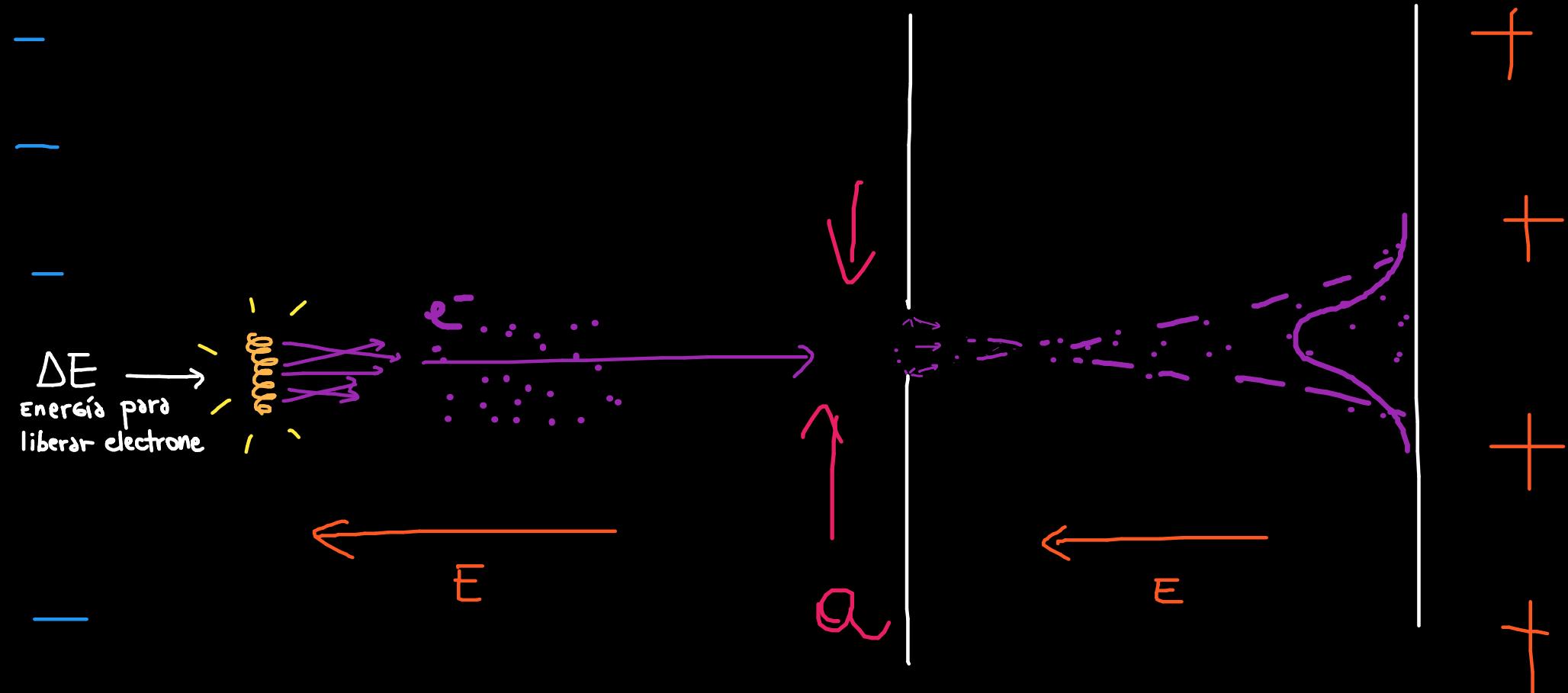
Esto implica deslocalización de las partículas.

Según la física Newtoniana las partículas  
son entes localizados pero las ondas no!

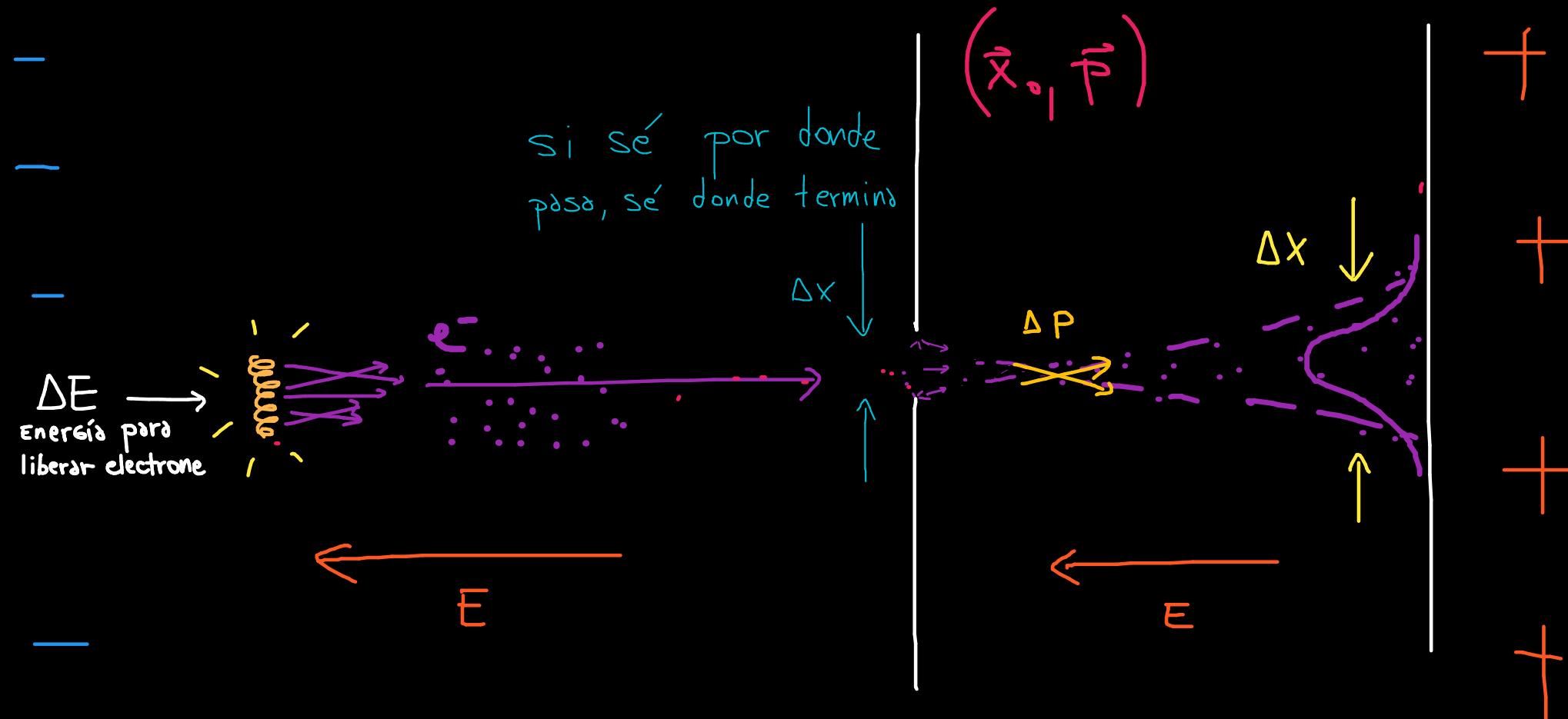


Haz de electrones a través de una "rendija"  
pensando que los electrones son partículas

$\rightarrow$   $\leftarrow$   
 $X$  /  $P$   
\_\_\_\_\_



Determinismo clásico: "Se puede definir la trayectoria".



Clásicamente

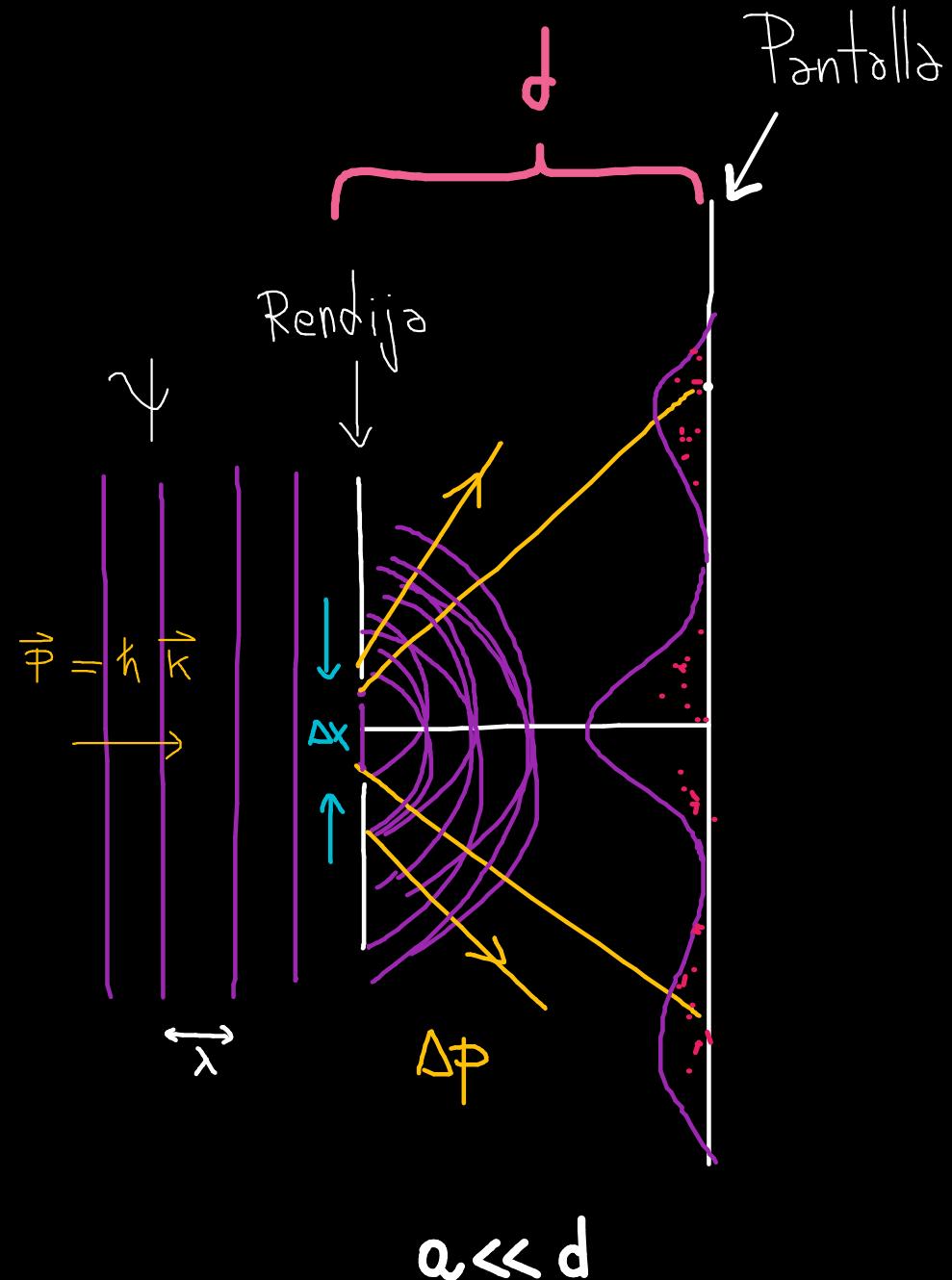
$$\text{si se } \Delta \vec{p} \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Si los electrones son "ondas"

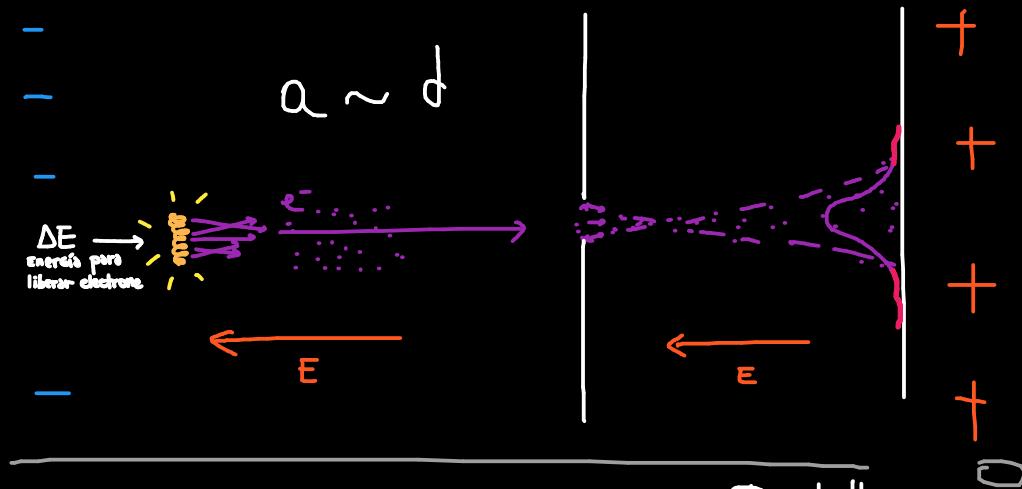
Al pasar por una rendija  
aparece el efecto de difracción  
como en la luz

Cuando  $a \ll d$ ,  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$   
 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta p \rightarrow \infty$

$$\Delta x \propto \frac{1}{\Delta p}$$



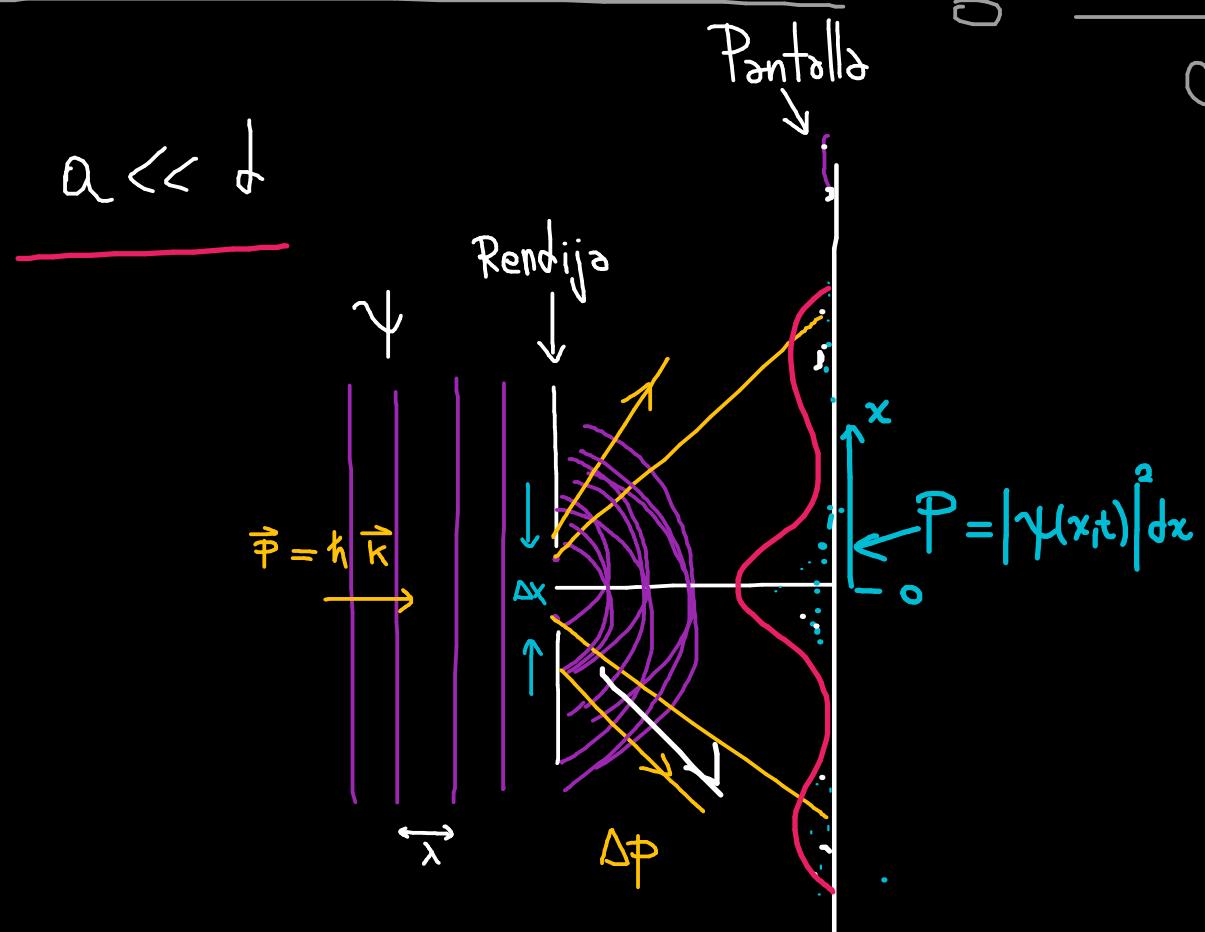
# Resultado del experimento



Leyes de Newton  $\vec{P}(t) \rightarrow \vec{x}(t)$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$$

Clásico [Tiene sentido hablar de fuerza]



Cuántico [La fuerza se reemplaza por potenciales]

Principio de Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Se obtiene lo mismo usando ec. Schrödinger (y sieme)

## Material complementario de videos clase 17.

- Teoría de D'Broglie: D'Broglie
- Principio de incertidumbre : Principio de incertidumbre
- Ejercicios:
  1. Ejercicio D'Broglie
  2. Incertidumbre
  3. Incertidumbre II

Interpretación de Born (1926) "más aceptada"

Es acertada en las observaciones hasta el momento.

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 dx$$

Es la probabilidad de detectar la partícula entre  $x$  y  $x+dx$ .  $|\psi|^2$  es una densidad de probabilidad, por tanto

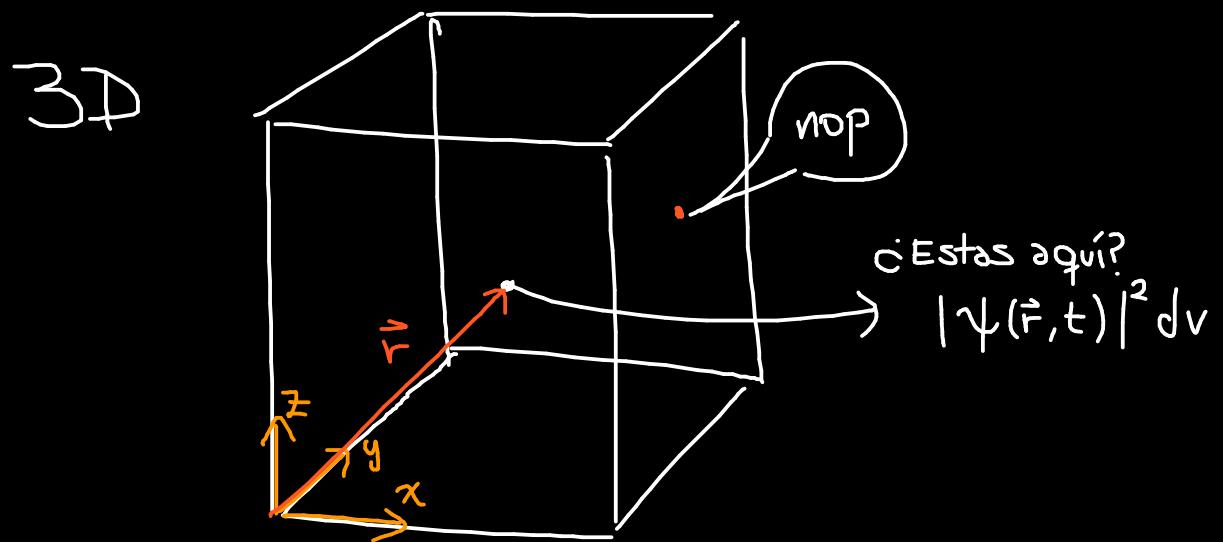
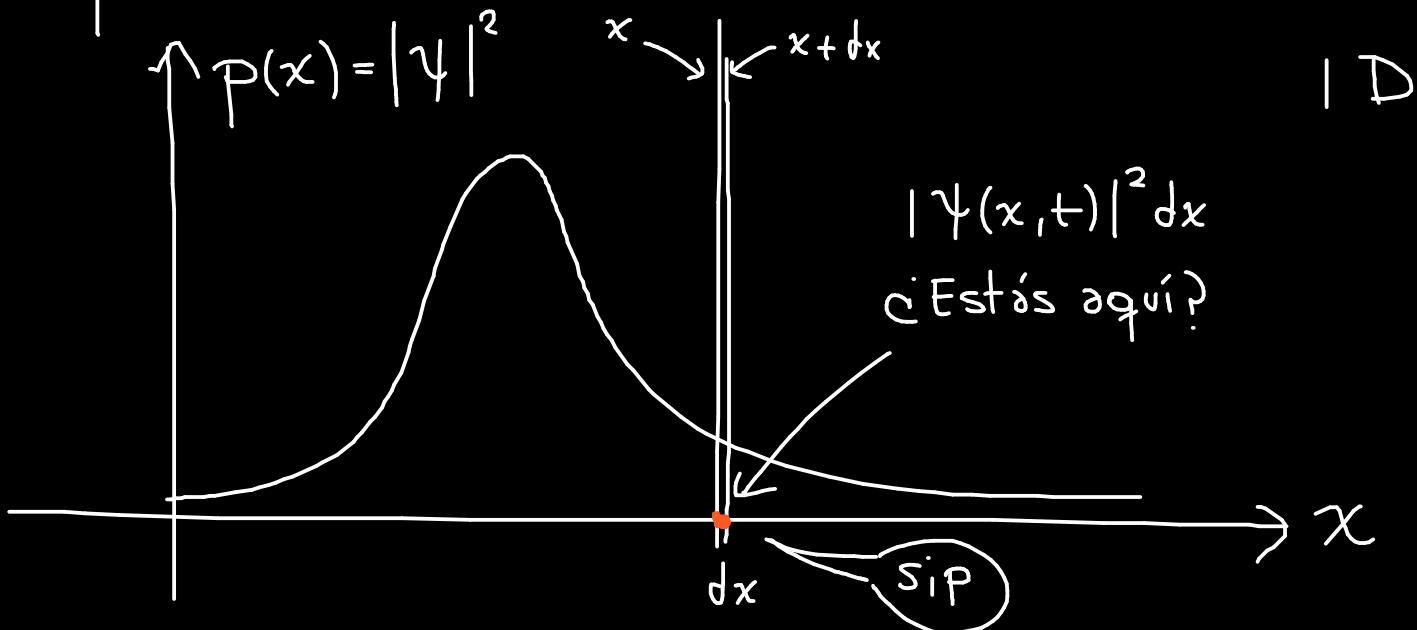
$$\int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$$

Todo el espacio

$$\psi(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}$$

no hay ninguna limitante para que  $\psi$  sea solo real

# Interpretación de Born (1926)



## Material complementario de videos clase 18.

- Función de onda e interpretación de Born: [Función de onda](#)
- Interpretación de Max Born o teoría de ondas piloto (No visto en clases, solo para curiosos)  
: [Teoría de ondas piloto](#)
- Densidad de probabilidad (matemáticas): [densidad de probabilidad](#)

Este último punto se pone para entender la densidad de probabilidad de detectar una partícula en el espacio en términos de la función de onda (variable compleja):

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x).$$

Ejemplo: la probabilidad de encontrar una partícula entre 0 y  $L$  suponiendo que se conoce la función de onda es:

$$P(0 \leq x \leq L) = \int_0^L |\psi(x)|^2 dx$$

¿ Cómo podemos calcular  $\vec{v}$  para una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa ?

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V, \quad V(r,t) \text{ Energía potencial}$$

La energía de la partícula será

$$E = \frac{P^2}{2m} + V$$

Según el postulado de De Broglie

$$\Rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad \begin{array}{l} \text{relación de dispersión} \\ \text{para la onda asociada a la partícula} \end{array}$$

Suponiendo  $\psi(r,t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\left( \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + V - \hbar\omega_n \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \quad \equiv$$

$$\left( -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega_n t)} = 0$$

cambiando

$$\psi = \sum_i^N A_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi + V \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi}$$

Ec. Schrödinger (1926)

Notar que no es igual a la ecuación de onda!

Solución ec. Schrödinger: Separación de variables

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi + V(x) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Suponiendo que:  $\psi(x,t) = \phi(x) T(t)$

↑  
Separamos variables

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 [\phi(x) T(t)] + V(x) \phi(x) T(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\phi(x) T(t))$$

$$-\frac{\hbar^2 T(t)}{2m} \vec{\nabla}^2 [\phi(x)] + V(x) \phi(x) T(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (T(t)) \phi(x)$$

Dividimos por  $\psi(x,t)$   $\circlearrowleft$  [matemáticos no se enojen]

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 [\phi(x)]}_{\text{depende de } x} + V(x) = \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (T(t))}_{\text{depende de } t} = E$$

↑  
Solo puede ser constante en x y t

nos da 2 ecs.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 [\phi(x)] + V(x) \phi(x) = E \phi(x) \quad //$$

$$i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} = E T(t) \quad //$$

Resolviendo

- $i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} = E T(t) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = -i \frac{E}{\hbar} T$

$$\Rightarrow T(t) = C e^{-\frac{i E t}{\hbar}}$$

depende

- $-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \phi(x) + V(x) \phi(x) = E \phi(x)$

Pueden haber n soluciones  
↑ Energía de la partícula (nunca la conocemos)

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \phi_n(x) e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}}$$

Sol. ec. Schrödinger

Para potenciales no dependientes del tiempo

$$\bullet -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Pueden haber n soluciones

Energía de la partícula (Aún no la conocemos)

1 Dimensión

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi = E \psi$$

①

1 Dimensión

②

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \phi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

Sol. ec. Schrödinger

$$\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

## Material complementario de videos clase 19.

- Ecuación de Schrödinger: [Ec. Schrödinger I](#)
- Ecuación de Schrödinger II: [Ec. Schrödinger II](#)
- Solución partícula libre: [Video recomendado como ejercicio](#)

Caso  $\psi = 0$  en todo el espacio

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \cancel{\psi^0} = E \psi$$

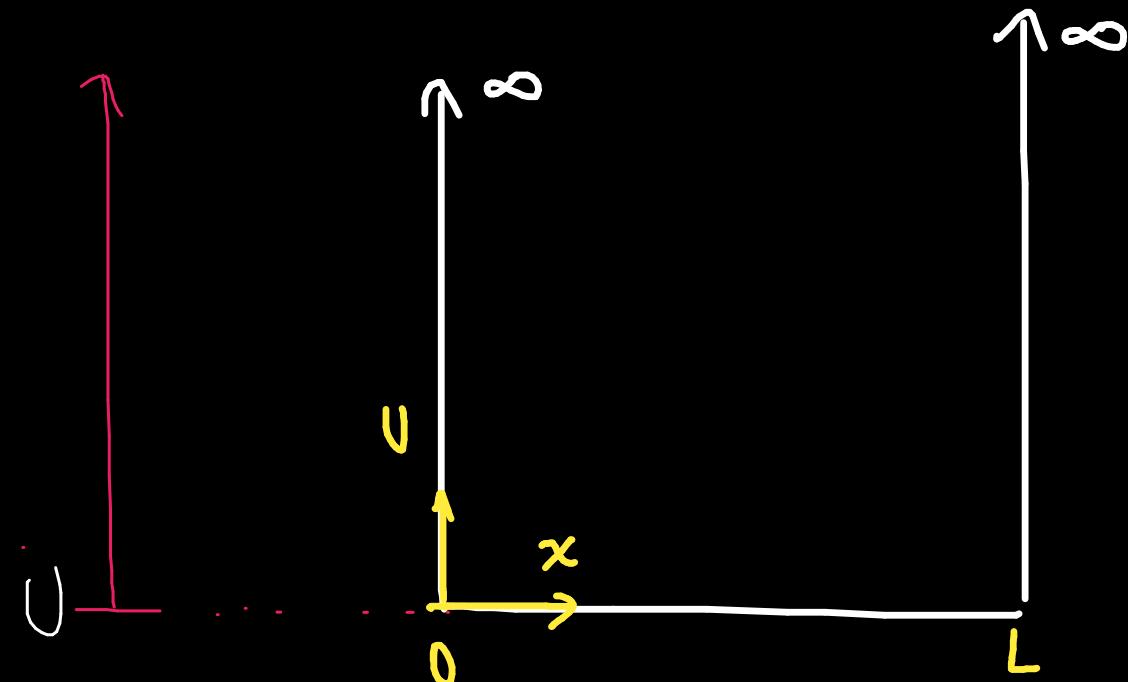
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2} \psi = 0$$

→

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} - B e^{-i(kx + \omega t)}$$

→ ←

# Ejemplo 1: Pozo infinito



Dentro del pozo ( $0 < x < L$ )

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \cancel{V} = E \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2} \psi = 0$$

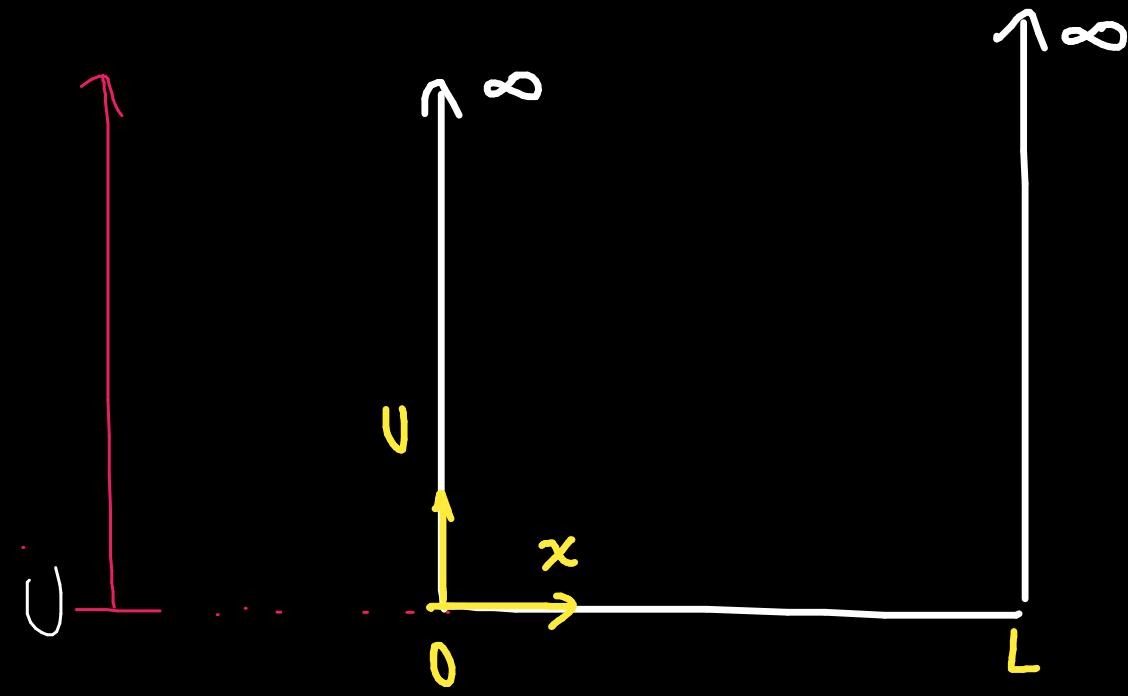
$$\sin(x) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad 0 < x < L$$

$$U = A + B$$

$$\psi(x) = A e^{ikx} - B e^{-ikx} = A \sin(kx)$$

# Ejemplo 1 : Pozo infinito



probabilidad de encontrar  
la partícula en  $x \leq 0$  y  $x \geq L$   
es igual a cero

$$\text{En esta región } |\psi(x)|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \psi(x) = 0, x \leq 0 \text{ y } x \geq L$$

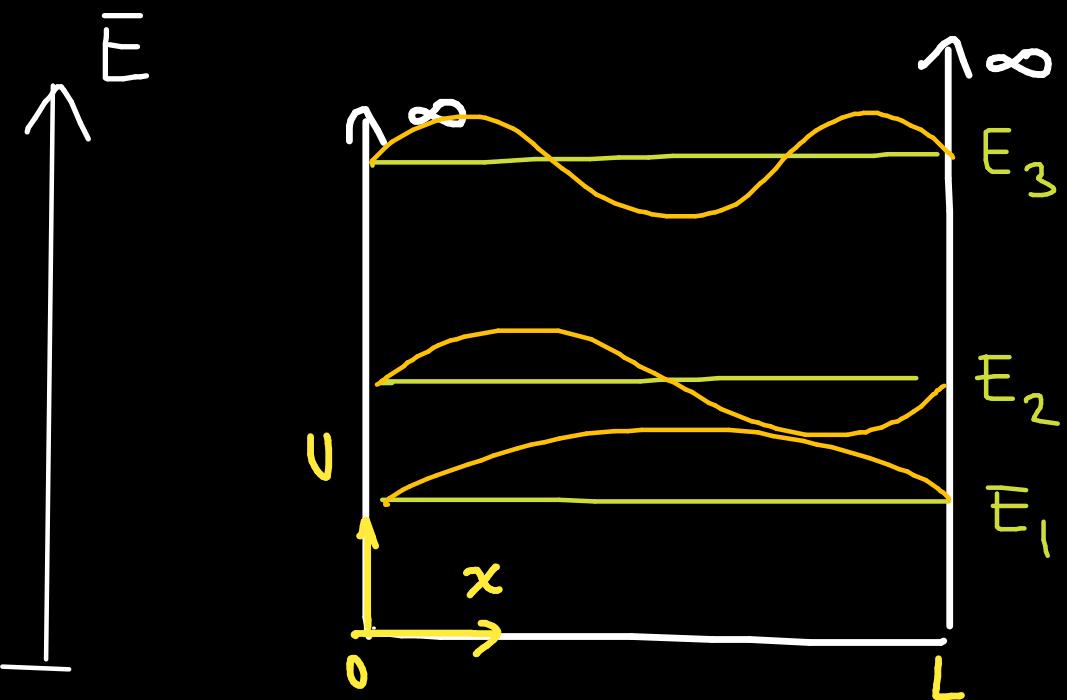
$$\Rightarrow \underline{\psi(0) = \psi(L) = 0}$$

imponiendo esto condición de borde obtenemos k

U

# Pozo infinito

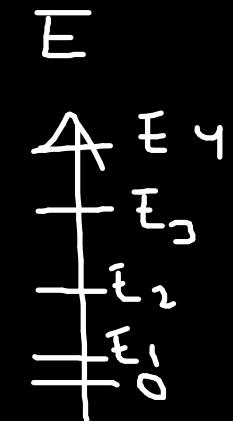
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$



$$k = \frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}$$

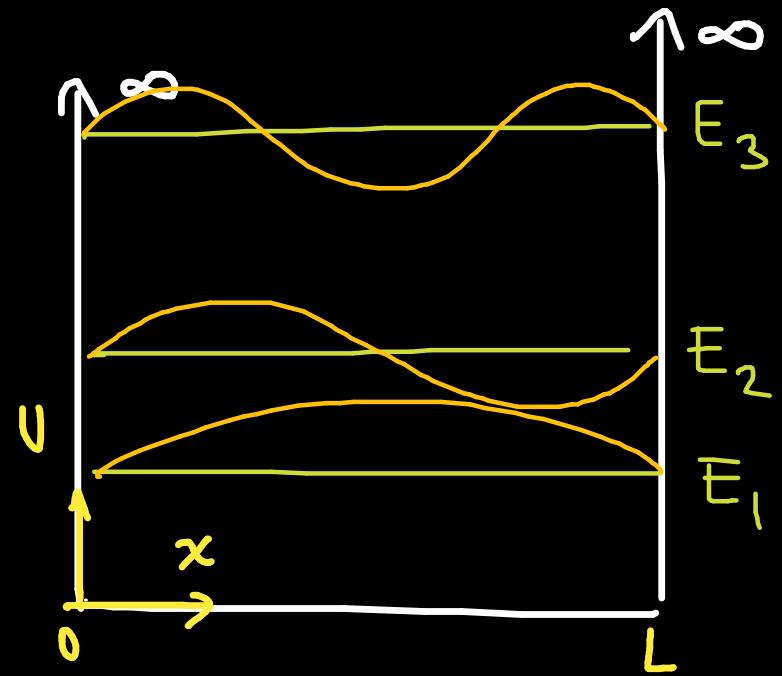
$$\Rightarrow E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2}$$

Energías  
del electrón



Solución General:  $\psi = \sum_n A_n \sin(k_n x) e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}}$

# Pozo infinito



Solución General:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}$$

$$\psi = \sum_n A_n \sin(k_n x) e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}$$

Imponiendo la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

*caso del pozo*

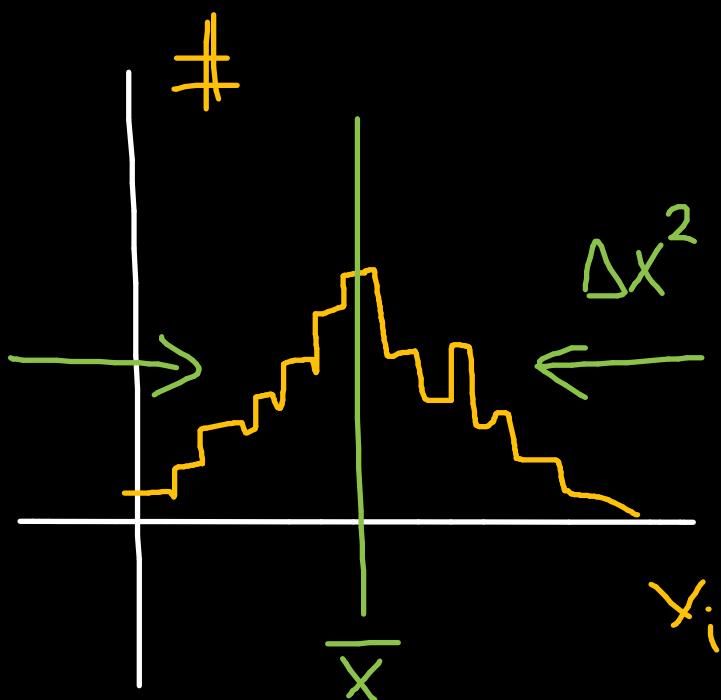
$$= \int_0^L |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$-\frac{i}{\hbar} n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} t$$

# Repeto estadística:

promedio  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i^N x_i = \sum_i^N p_i x_i = \int_0^L |\psi|^2 x dx$

Varianza :  $\Delta x^2 = \frac{1}{N} \sum_i^N (x_i - \bar{x})^2$



$$\Delta x^2 = \frac{1}{N} \sum_i^N (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{N} \sum_i^N x_i^2}_{\bar{x}^2} - 2\bar{x} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_i^N x_i}_{\bar{x}} + \underbrace{\frac{\bar{x}^2}{N} \sum_i^N 1}_{N} = \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$$

Valores esperados en el caso cuántico para el pozo ∞

Usando la interpretación de Born

$$\rho(x) = |\psi(x, t)|^2 \quad \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \underbrace{|\psi(x)|^2}_{P(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P(x) dx$$

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x}$$

$$\langle x \rangle_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^2}{(n\pi)^2} \cdot \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} u \sin^2 u du = \frac{L}{2} \quad \text{igual que en caso clásico}$$

$$\langle x^2 \rangle_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \frac{L^3}{(n\pi)^3} \int_0^{n\pi} u^2 \sin^2 u du = \frac{2}{(n\pi)^3} \cdot L^2 \left[ \frac{(n\pi)^3}{6} - \frac{1}{4} n\pi \right] \\ = \left( \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2(n\pi)^2} \right)$$

Para el momentum hay horredades ...  $\hat{P} = \hbar k$   $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \hbar k \psi(x)$

$$\hat{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar k |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \hbar k \psi(x,t) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) dx$$

$\Rightarrow \hat{P} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ , en este caso  $\hat{P}$  es un operador

$$\langle \hat{P} \rangle_n = \frac{2i\hbar}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0 \quad //$$

$$\langle \hat{P}^2 \rangle_n = - \frac{2\hbar^2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \quad //$$

# Incertezas Caso Cuántico

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p &= \sqrt{\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \left(\frac{L^2}{12} - \frac{L^2}{2(n\pi)^2}\right)} \\ &= \sqrt{\underbrace{(\hbar k)^2}_{K_n^2} \left[\frac{L^2}{12} - \frac{L^2}{2(n\pi)^2}\right]} \\ &= \sqrt{K_n^2 \hbar^2 \left[\frac{L^2}{12} - \frac{1}{2k_n^2}\right]} \\ &= \sqrt{P_n^2 \left[\frac{L^2}{12} - \frac{\hbar^2}{2P_n^2}\right]}\end{aligned}$$

Si  $n \gg 1$

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{m c L}{12} \quad \text{Exactamente el resultado clásico}$$

# Incertezas (Varianza)

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\ \Delta p &= \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}\end{aligned}$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \hat{H} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow$$

$\hat{H}$  (operador Hamiltoniano)

---

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi^*$$


---

Densidad de probabilidad

$$\rho(x,t) = |\psi|^2 = \psi^* \psi$$

$\overbrace{\quad \quad \quad}$   
tasa de cambio  
densidad de probabilidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad \leftarrow$$

Corriente de  
Probabilidad

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$



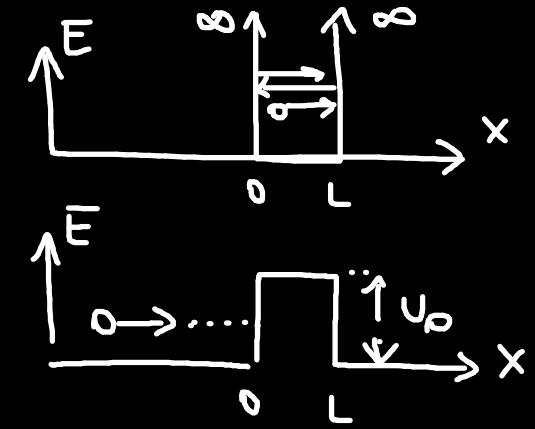
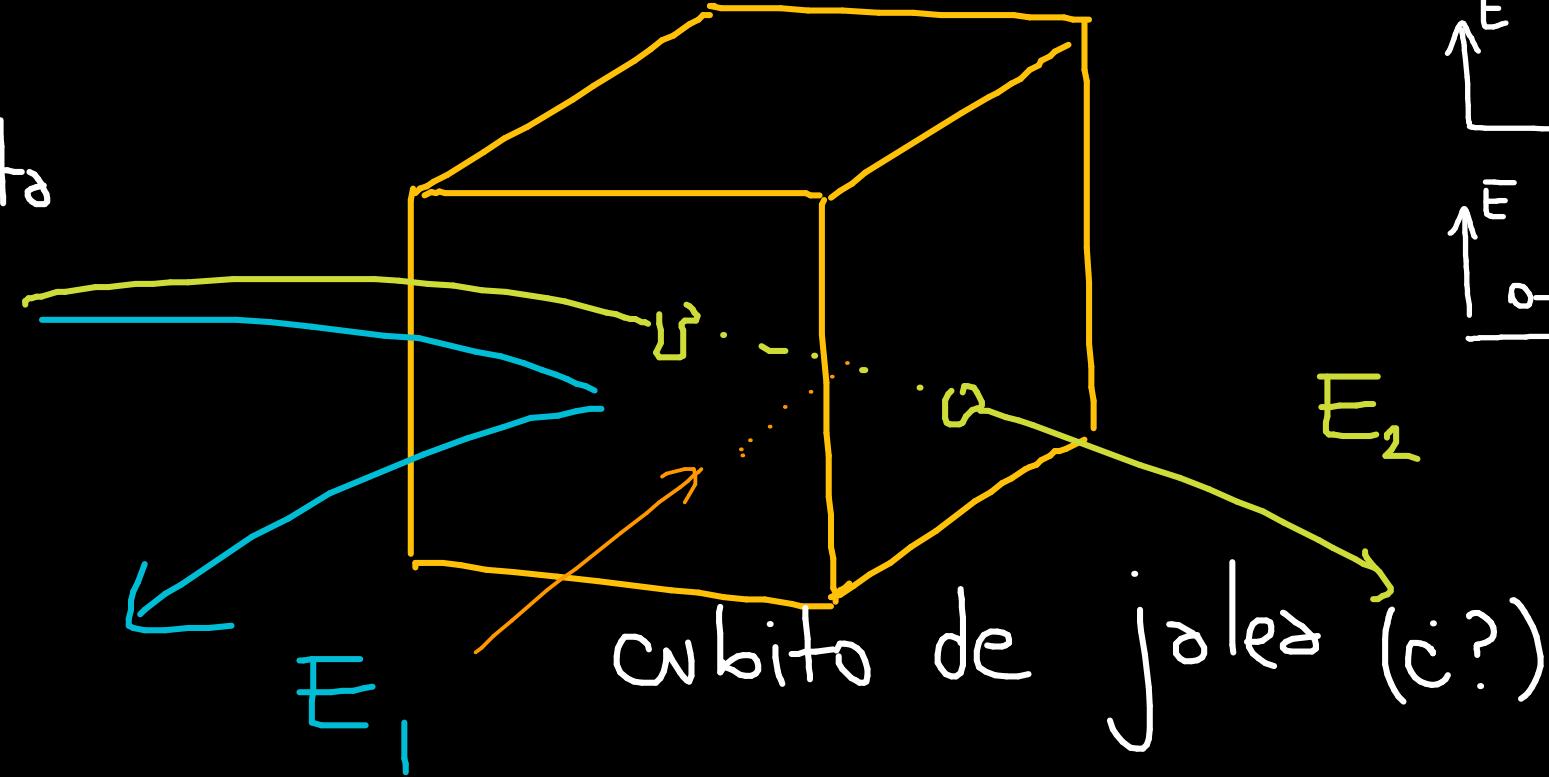
## Material complementario de videos clase 20.

- Pozo infinito: [Pozo infinito](#)
- Valor de expectación, varianza y desviación estandar (estadística): [Estadística en 5 minutos](#)
- Valor de expectación e incerteza (desviación estandar) en cuántica: [Valor de expectación](#)
- Ejercicios pozo infinito: [Ejercicios](#)

# Barrera de potencial

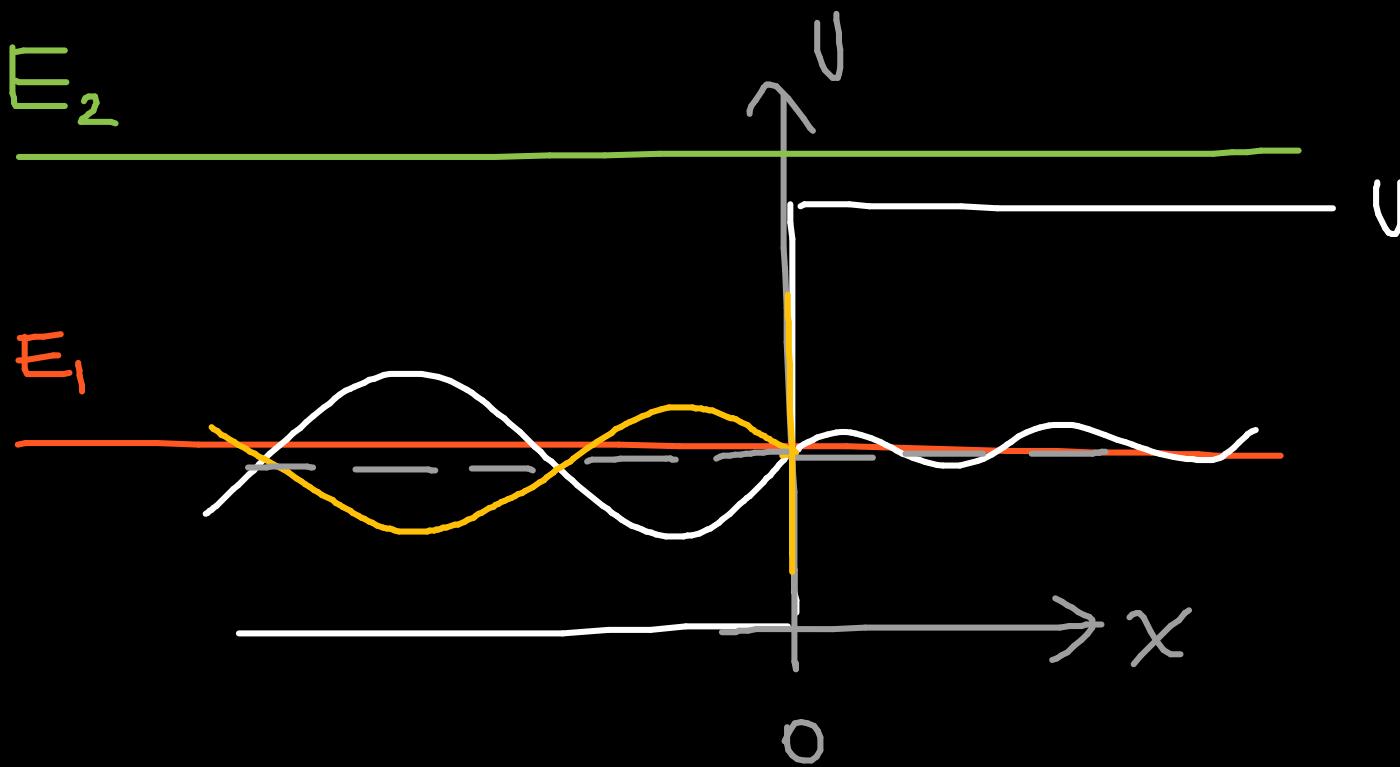
$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

pelotita diminuta



Clásicamente si una partícula choca contra una barrera esta rebotará si no tiene la suficiente energía para pasarlá, pero si la tiene podrá superar la barrera

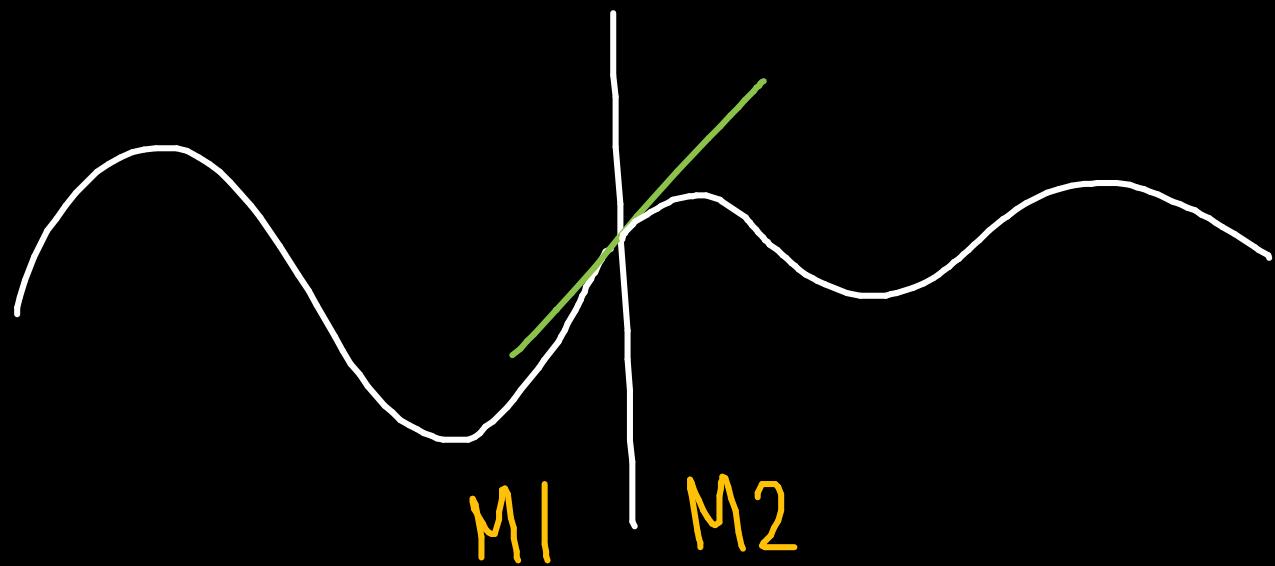
# Diagrama de energía



$E_2 > U$  : Clásicamente supera la barrera

$E_1 < U$  : Clásicamente no supera la barrera

Ecuación de onda pasando  
entre dos medios distintos



Condición de  
Continuidad

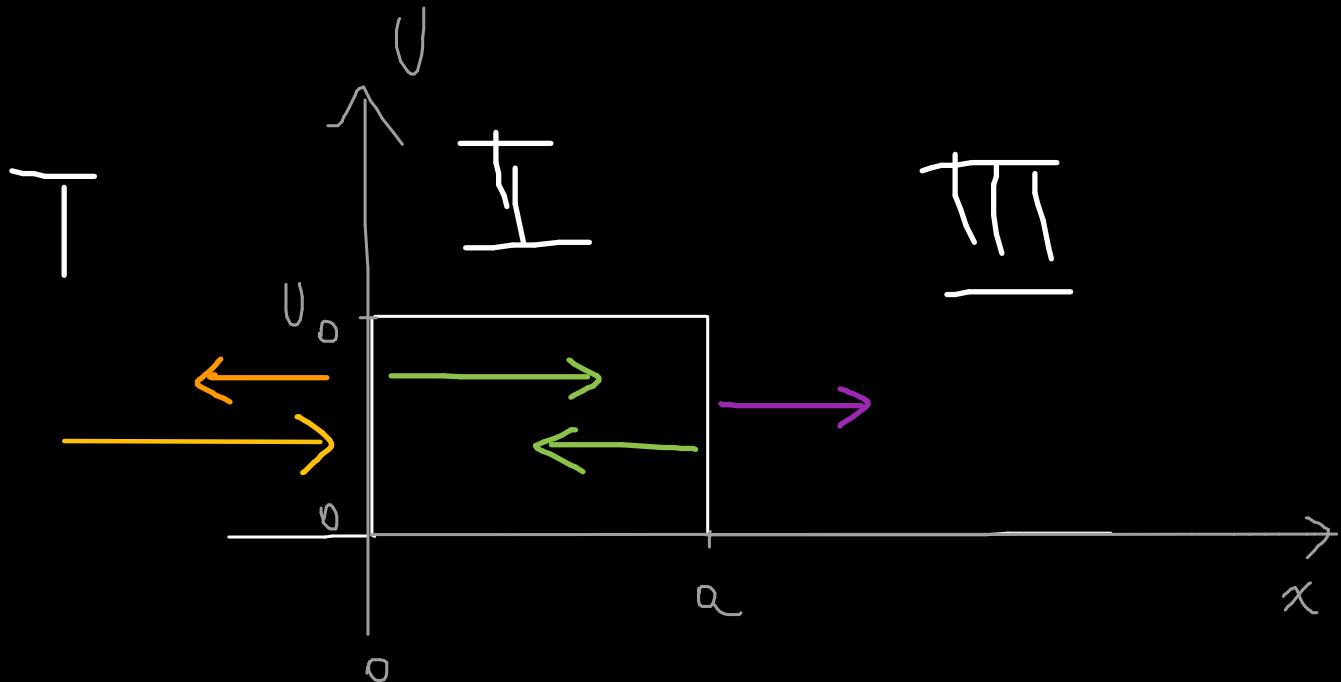
$$\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0)$$

$$\frac{\partial \psi_1(x_0)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(x_0)}{\partial x}$$

## barrera de potencial

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

$$\text{Ec. Schrö.} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_I = 0, & x < 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_{II}}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \psi_{II} = 0, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{\partial^2 \psi_{III}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_{III} = 0, & x > a \end{cases}$$



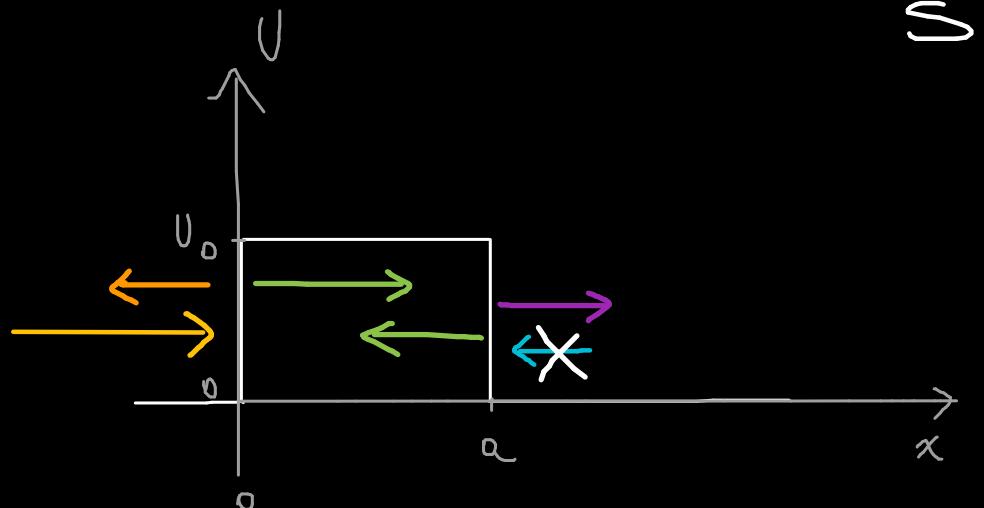
$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - E)}_K \psi = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

## barrera de potencial

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$



$$\text{Ec. Schrö.} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_I = 0, & x < 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_{II}}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \psi_{II} = 0, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{\partial^2 \psi_{III}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_{III} = 0, & x > a \end{cases}$$

Solución:

$$\psi = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}, & x < 0 \\ B_1 e^{k'x} + B_2 e^{-k'x}, & 0 \leq x \leq a \\ C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, & x > a \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - E) \psi = 0$$

## Condiciones de continuidad

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$$

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0)$$

$$ik(A_1 - A_2) = k'(B_1 - B_2)$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

$$B_1 e^{ka} + B_2 e^{-ka} = C_1 e^{ika} + C_2 e^{-ika}$$

$$\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a)$$

$$k' \left( B_1 e^{ka} - B_2 e^{-ka} \right) = ik \left( C_1 e^{ika} - C_2 e^{-ika} \right)$$

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

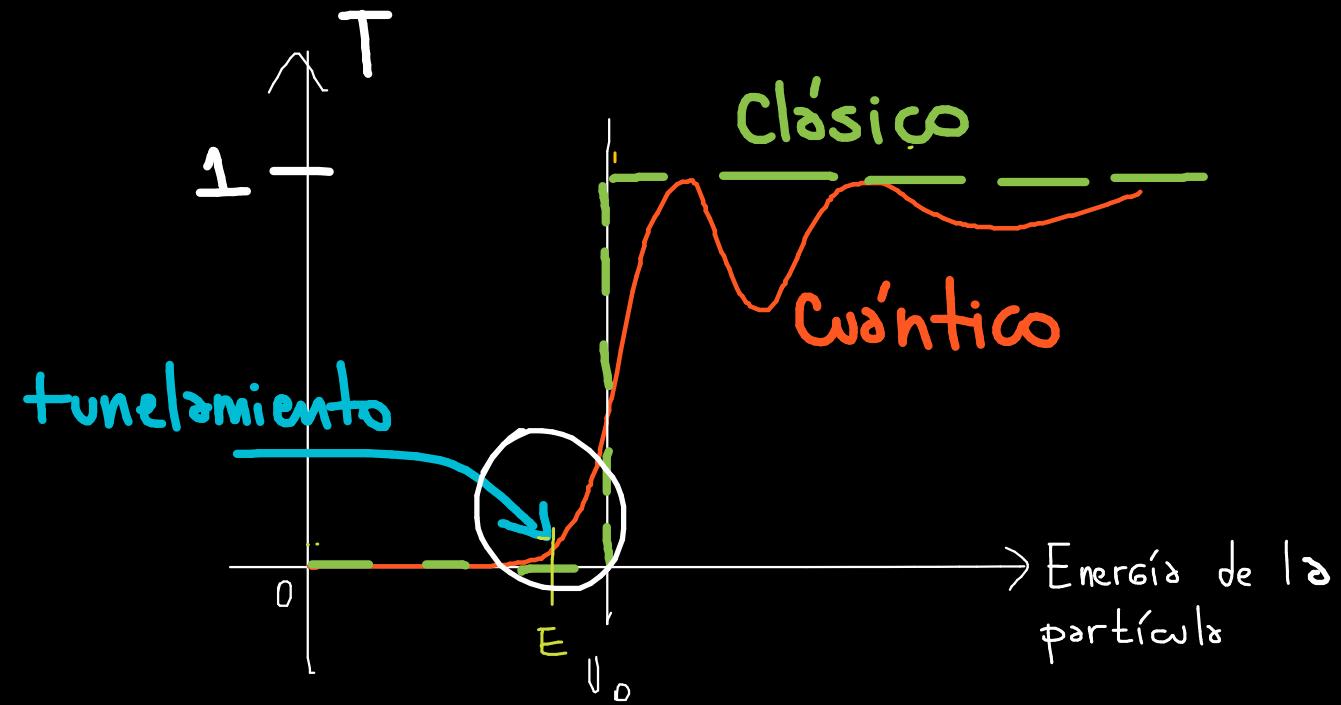
$$|\vec{J}_{\text{incidente}}| = |A_1|^2 \frac{\hbar k}{m} , \quad |\vec{J}_{\text{transmitida}}| = |C_1|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$T = \frac{|\vec{J}_{\text{transmitida}}|}{|\vec{J}_{\text{incidente}}|} = \frac{|C_1|^2}{|A_1|^2}$$

$$\text{Si } E < U_0 \quad T = \frac{U_0^2 \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} (U_0 - E) a \right)}{4E(U_0 - E) + U_0^2 \sinh^2 \left[ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} (U_0 - E) a \right]}$$

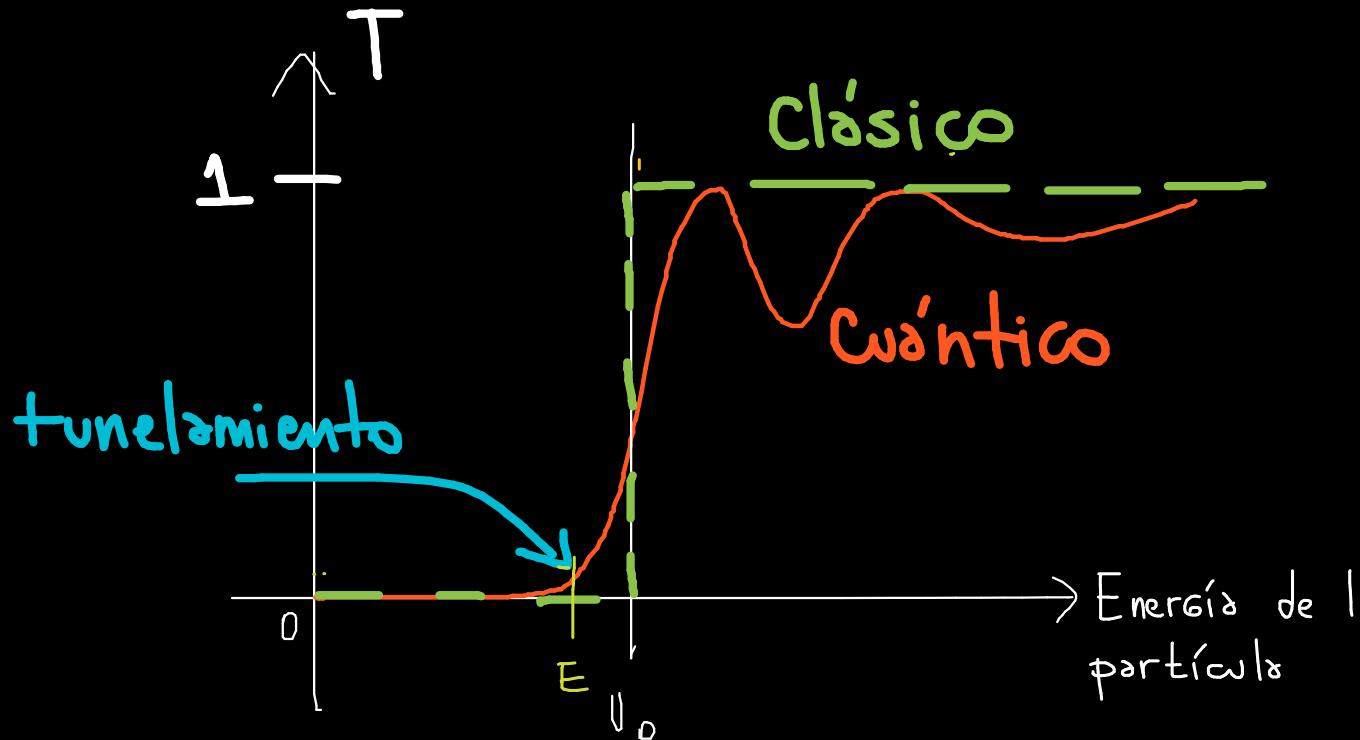
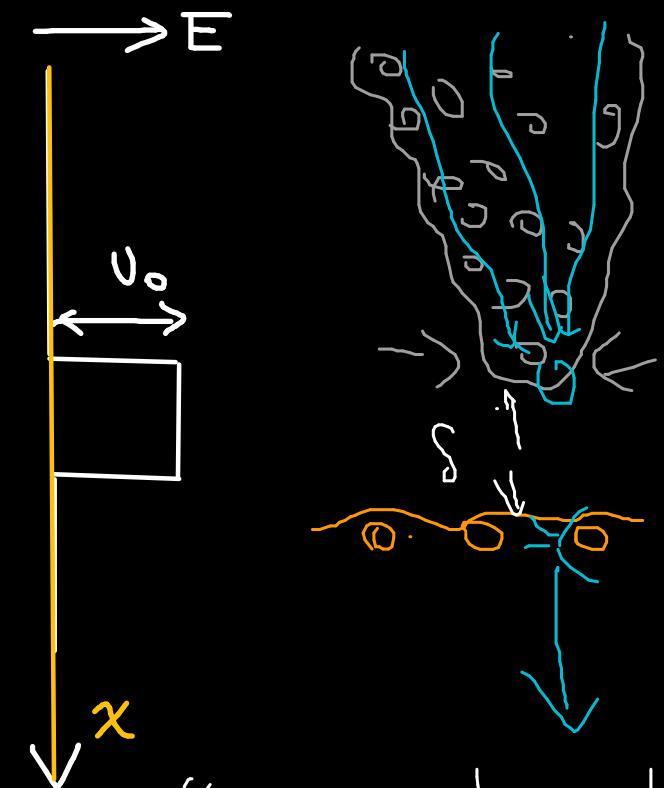
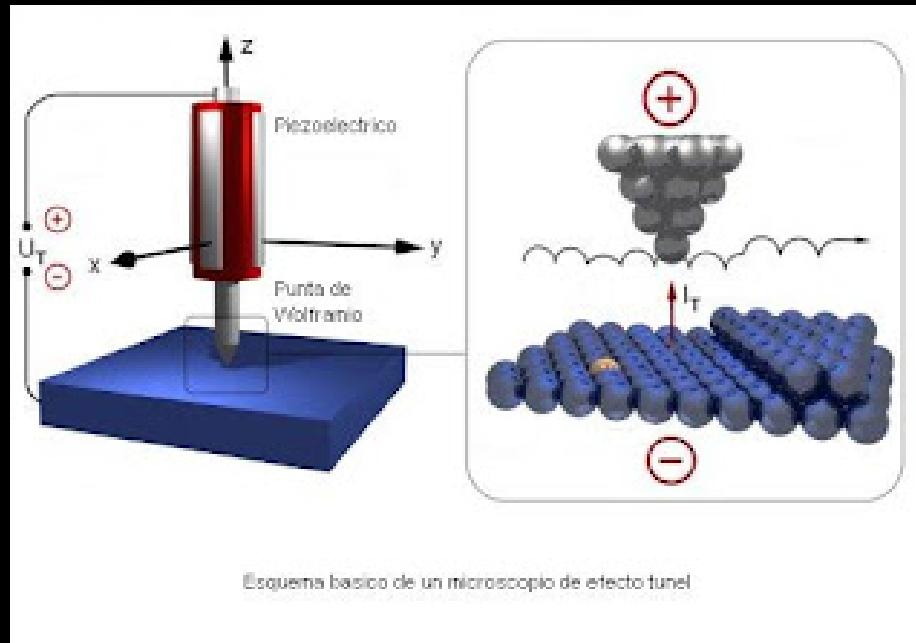
$$\text{Si } E > U_0 \quad T = \frac{4E(E - U_0)}{4E(E - U_0) + U_0^2 \sinh^2 \left[ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} (E - U_0) a \right]}$$

Seno normal



Uso práctico:

Microscopio  
Efecto túnel



"Corriente de  
tunelamiento"

## Material complementario de videos clase 21.

- Pozo finito: [Pozo finito](#)
- Barrera de potencial (efecto tunel): [Barrera de potencial](#)
- Ejercicio: [Ejercicio](#)

# Bienvenid@s

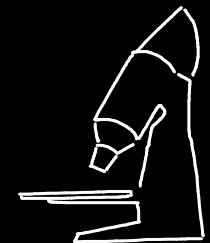
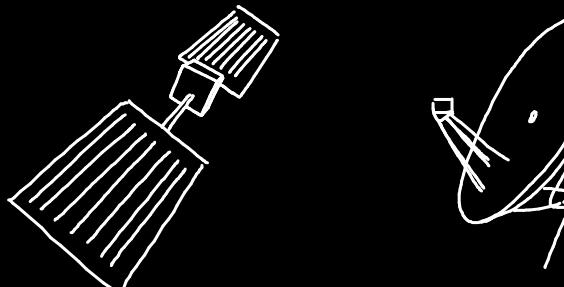
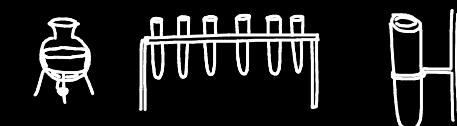
## Tiempo para responder el cuestionario (ticket de entrada)



La clase empezará en breves minutos. Por favor mantenganse muteados hasta que comience la clase para no desconcentrar a sus compañer@s.

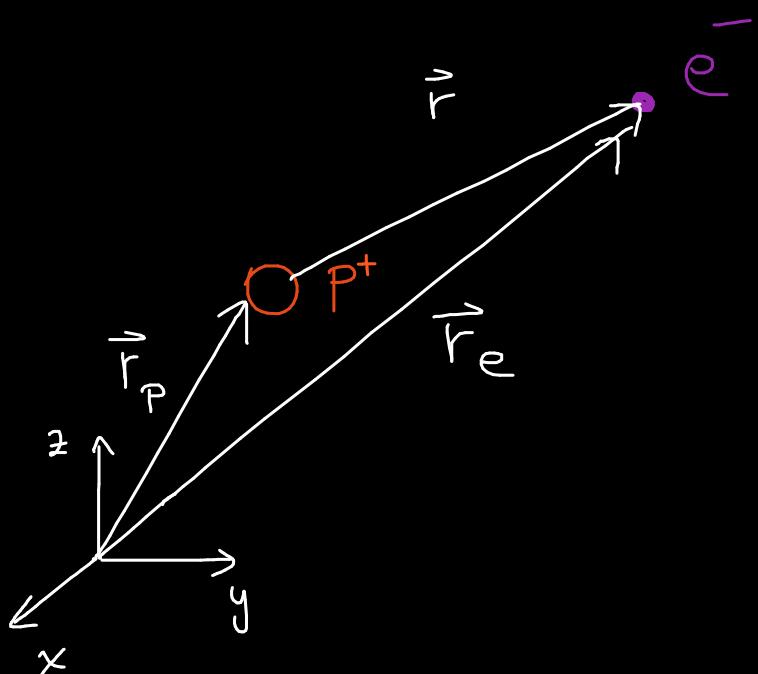
**Horario de consultas:** Lunes 12 y 13 (16:25-17:45). Este horario es compartido con alumn@s de 110 por lo que es necesario recordar que vienen de 140.

**Link de acceso al horario de consultas**



# El átomo de Hidrógeno usando la ec. de Schrödinger

## Sistemas de referencia



Describiendo el sistema  
posición relativa electrón-proton

$$\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$$

Centro de masa del sistema

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_p m_p + \vec{r}_e m_e}{m_p + m_e}, \quad M = m_p + m_e$$

posiciones en  
términos de  $\vec{R}$  y  $\vec{r}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_p = \vec{R} - \frac{m_e}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_e = \vec{R} + \frac{m_p}{M} \vec{r} \end{array} \right.$$

## Ecación de Schrödinger

Al plantear la Ec. S. aparecen dos ecaciones, una para el centro de masa y otra para el movimiento del electrón relativo al núcleo

$$\text{Ec. Traslacional} \quad -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \chi(R) = E_R \chi(R)$$

\*  $\text{Ec. movimiento relativo} \quad -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_r^2 \psi(r) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \psi(r) = E_r \psi(r)$

$$\text{Con masa reducida : } M = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$$

## Ecuación principal del átomo de Hidrógeno

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_r^2 \varphi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \varphi(\vec{r}) = E_r \varphi(\vec{r})$$

yas que el potencial depende de  $|\vec{r}|$  desarrollamos la ecuación en simetría esférica. En esta simetría el Laplaciano es:

$$\vec{\nabla}_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right)$$

# Solución función de onda

$$\psi(r, \theta, \phi) = Y(\theta, \phi)R(r)$$

$$R_{nl}(r) = \frac{N_{nl}}{a_0 n} \left( \frac{r}{a_0 n} \right)^l e^{-(\frac{r}{a_0})} L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2r}{a_0} \right)$$

$a_0$ : Radio de Bohr

polinomios  
asociados  
de Laguerre

$$Y_{ml}(\theta, \phi) = A_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

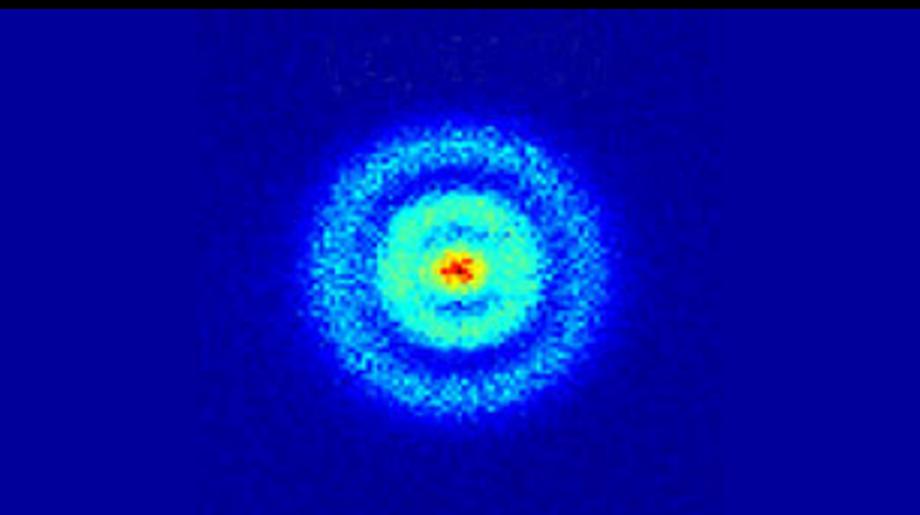
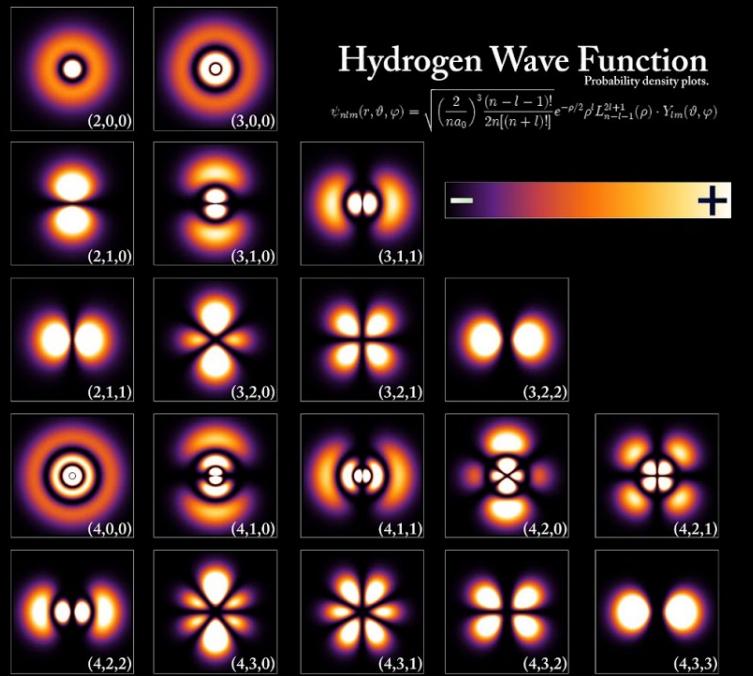
polinomios  
asociados de Legendre

números cuánticos  
 $n, l, m$

Soluciones imponen que

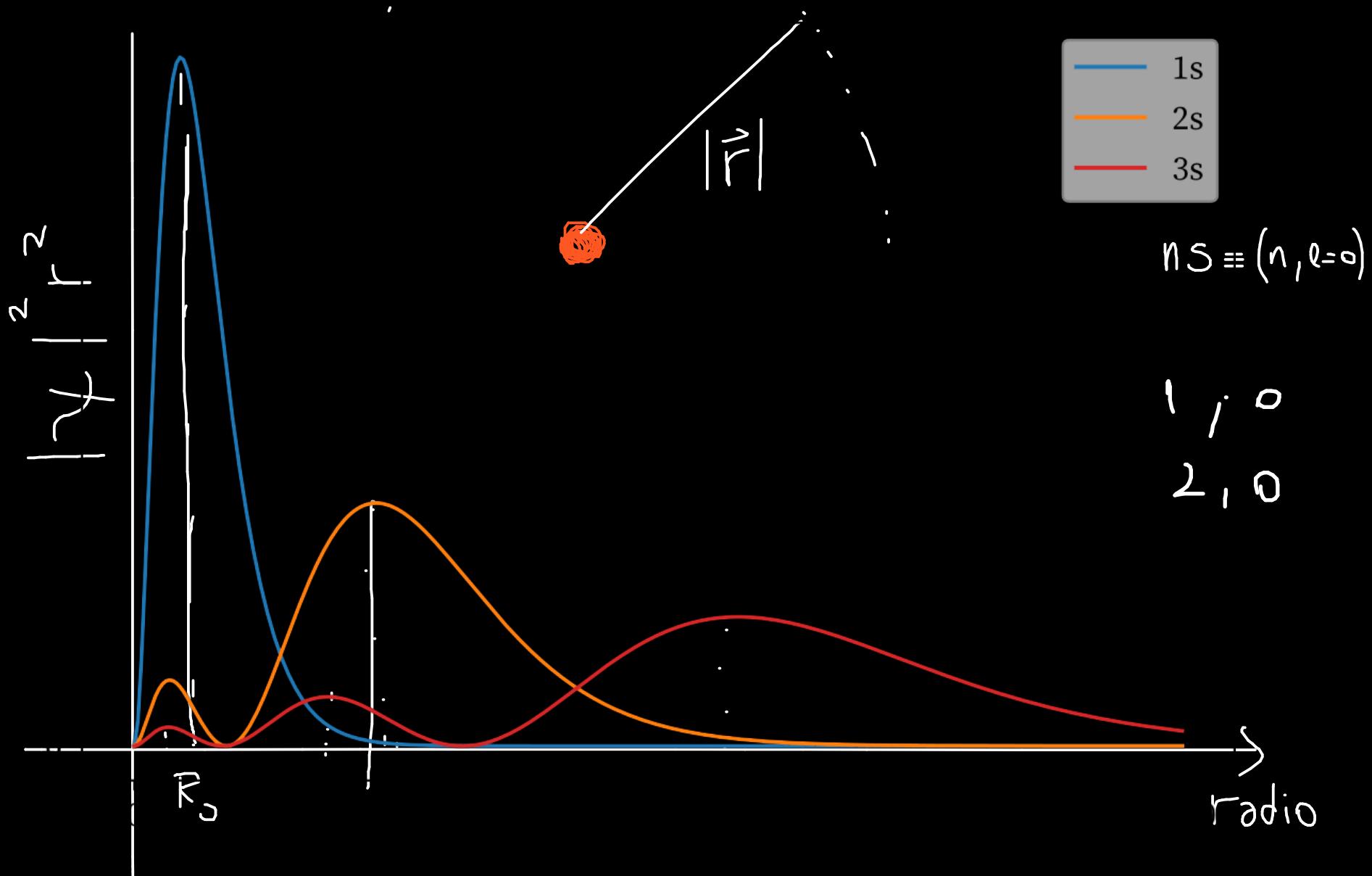
$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$  y que  $n$  limita el valor de  $l$   
 $l = 0, \dots, n-1$ .

$$|\psi_{nlm}|^2$$



Phys. Rev. Lett. 110, 213001

## Densidad de probabilidad Radial

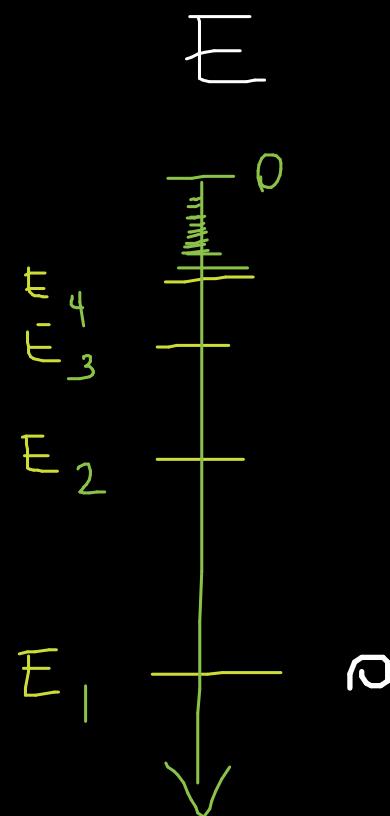


# Energía de los diferentes estados

$$E_n = -\frac{M}{2\hbar^2 n^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \approx E_n^{(\text{Bohr})} = -z^2 \left( \frac{Me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}$$

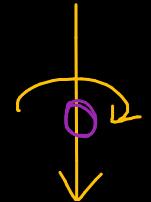
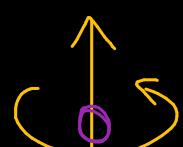
$\underline{\underline{=}}$

mismo resultado que da el modelo de Bohr !!



| $n$ | $S(l=0)$                | $P(l=1)$                              | $D(l=2)$ | $F(l=3)$ | $m = -l \dots l$ | Interpretación clásica |
|-----|-------------------------|---------------------------------------|----------|----------|------------------|------------------------|
| 1   | $\uparrow\downarrow$ 1s |                                       |          |          | -1 0 1           |                        |
| 2   | $\uparrow\downarrow$ 2s | $2p^6$ (oval with 6 horizontal lines) |          |          | -1 0 1           |                        |
| 3   | — 3s —                  | —                                     | —        | —        | —                |                        |
| 4   | — 4s —                  | —                                     | —        | —        | —                |                        |

Spin



$$4s^1 \rightarrow n=4 \quad \rightarrow l=0 \quad m=0$$

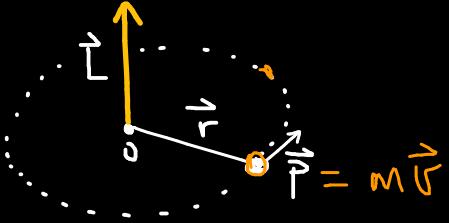
$\underline{\underline{=}}$

$$s=-$$

## Material complementario de videos clase 22.

- Átomo de Hidrogeno: átomo de Hidrogeno
- Orbitales: visualización de los orbitales del Hidrogeno
- Ejercicio: Ejercicio

# Momentum angular



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = (x, y, z) \times (P_x, P_y, P_z) = \begin{bmatrix} yP_z - zP_y, zP_x - xP_z, xP_y - yP_x \end{bmatrix}$$

$$\hat{\vec{p}} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z) \rightarrow \hat{P}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\hat{\vec{p}} \psi = \vec{p} \psi$$

$$\hat{\vec{P}} = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar \left[ y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$$

$\hat{L} \psi = L \psi$

$\hookrightarrow L$ : Autovectores  
del momentum  
angular  
"Observables"

Si pasamos  $\hat{L}$  a coordenadas esféricas

$$\hat{L}_x = i\hbar \left( \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left( -\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi} Y = im Y \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} Y = \hbar m Y$$

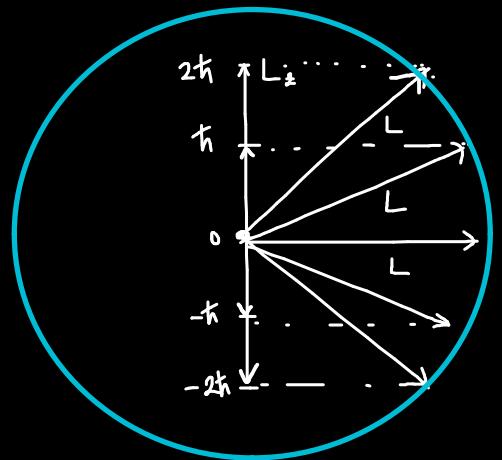
$$L_z = m\hbar$$

Momentum angular en  $z$  esta cuantizado

$$\hat{L}_z Y_{l,m}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad / \cdot R(r)$$

$$\hat{L}_z \psi = \hbar m \psi$$

$L_z$  cuantizado



$$L_z \gamma = m \hbar \gamma \\ \Rightarrow L_z = m \hbar$$

Momentum angular total

$$\Rightarrow \hat{L}^2 Y_{l,m}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

Valores que puede tomar el momentum angular

$$l=0 \Rightarrow L=0$$

$$l=1 \Rightarrow L^2 = 2\hbar^2 \Rightarrow L = \sqrt{2}\hbar$$

$$l=2 \Rightarrow L^2 = 6\hbar^2 \Rightarrow L = \sqrt{6}\hbar$$

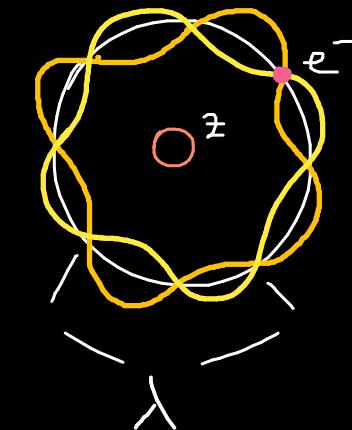
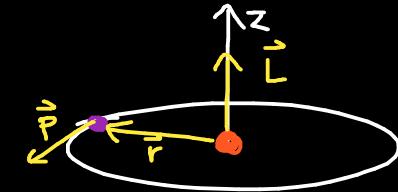
Bohr tenía razón

Cuantización del momentum angular  
por D'Broglie

$$L = p r \Rightarrow L = \frac{\hbar}{\lambda} r$$

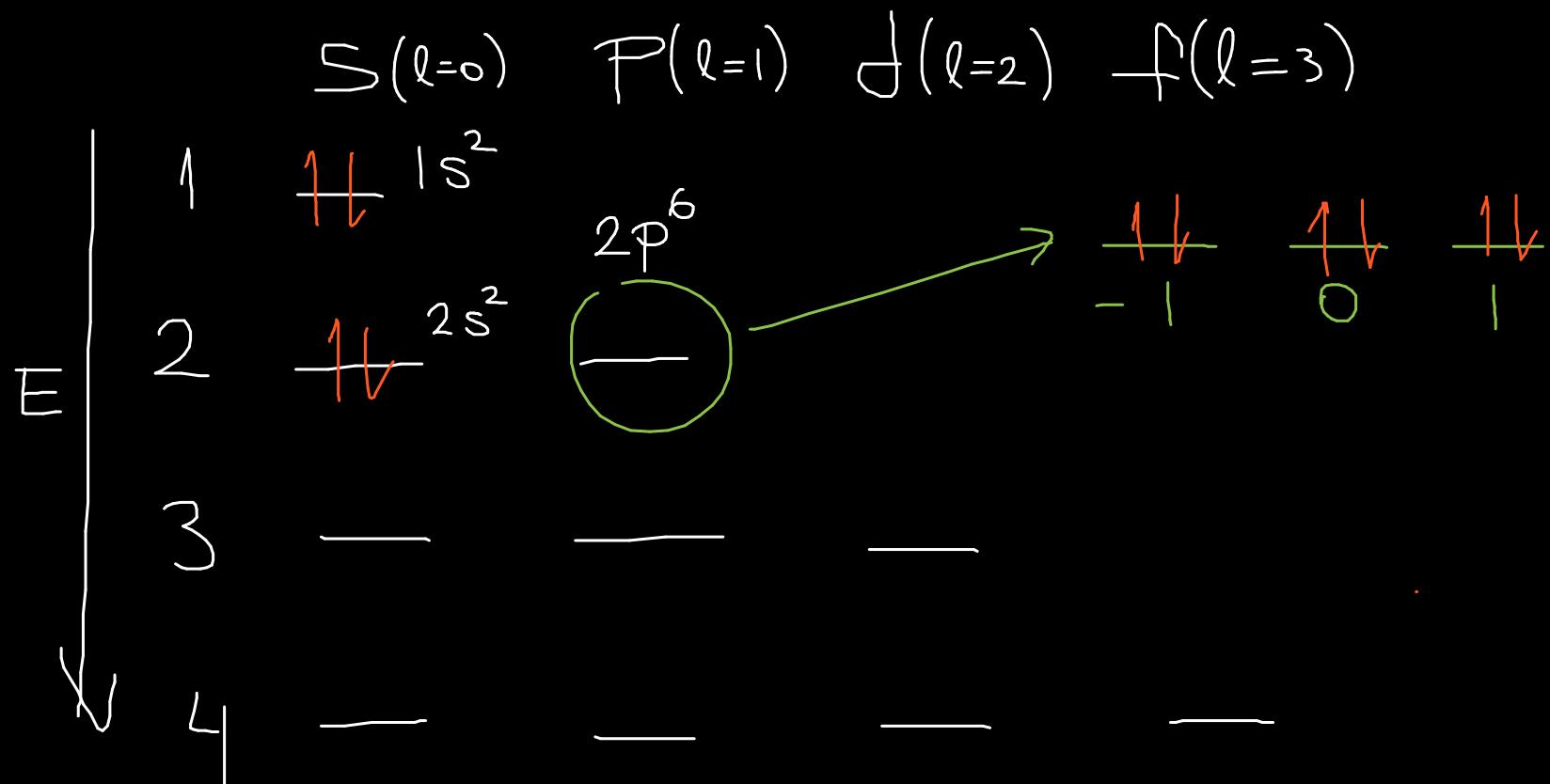
$$\text{Condición de cuantización} \quad 2\pi r = n\lambda \rightarrow \lambda = \frac{2\pi r}{n} \\ \Rightarrow L = \frac{n\hbar}{2\pi}$$

$$\rightarrow L_z = n\hbar$$



$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

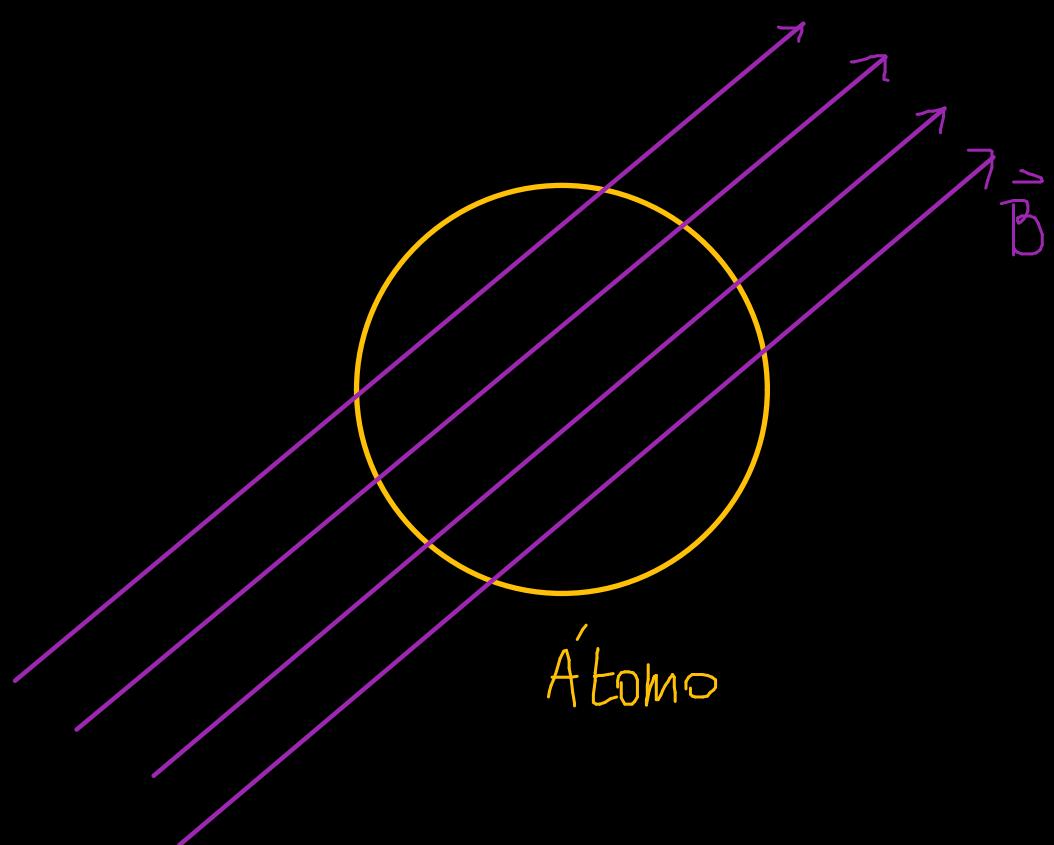
# números cuánticos "n, l, m"



definen el estado cuántico de los electrones

# Efecto Zeeman

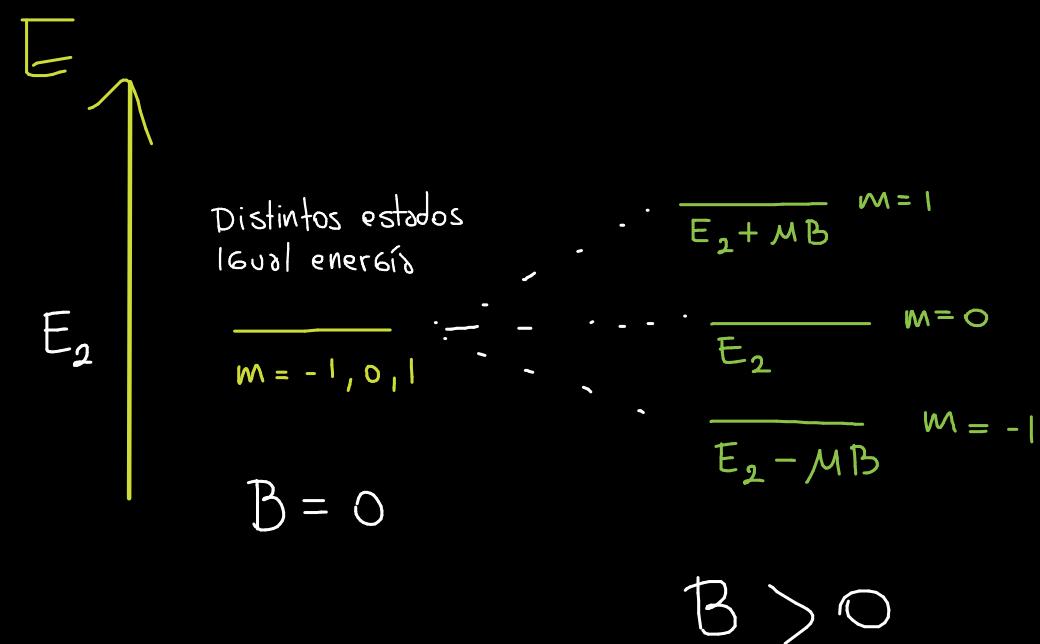
Cambio de la energía en estados electrónicos producto de la interacción átomo - campo magnético



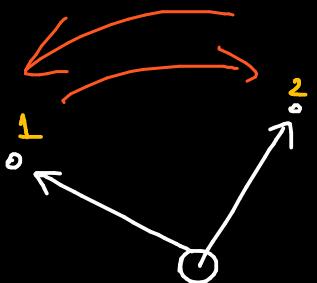
$$E_{n,m} = -\frac{E_1}{n_2} + m M_B B$$

Con  $E_1 \approx 13,6 \text{ [eV]}$

$$M_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-5} \left[ \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right] \frac{\text{electrón Volt}}{\text{Tesla}}$$



¿Qué pasa cuando tenemos más de un protón y más de un electrón en un átomo?



$$\hat{H} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Electrones son indistinguibles

$\psi$  determina estado cuántico

Principio de exclusión de Pauli

2 electrones en un átomo no pueden tener los mismos números cuánticos (no pueden tener el mismo estado cuántico)

• números cuánticos determinan  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

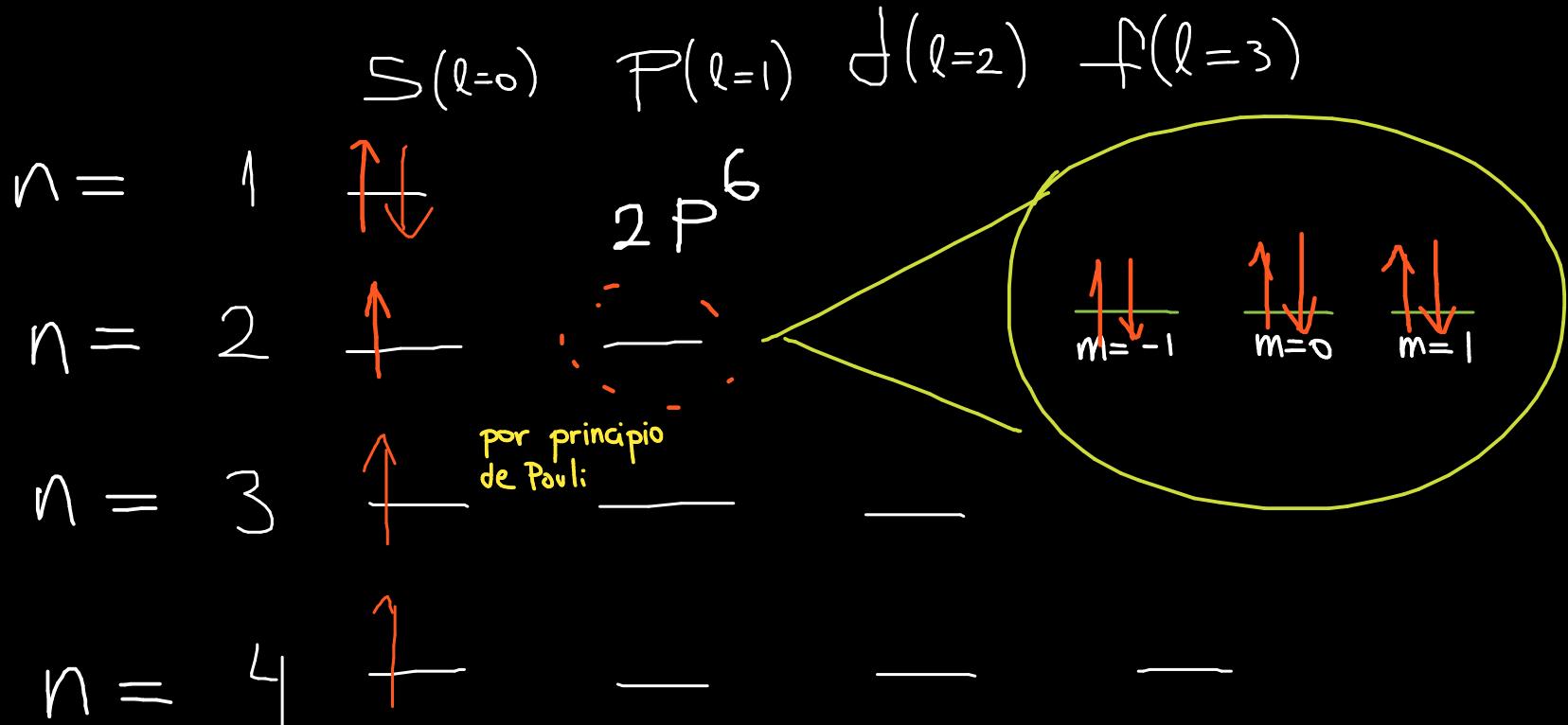
$\Rightarrow$  no pueden haber 2 electrones con los mismos números cuánticos.

## Ocupación en orbitales

numeros cuánticos  $n, l, m, s$ .

→ "spin"

$S$ : es un cuarto número cuántico con mucha historia. (Lamentablemente fuera de lo esperado para este curso)



por principio  
de Pauli

$$1S^1 \rightarrow 1S^2 \rightarrow 1S^2 2S^1 \rightarrow$$

# tabla periódica de los elementos

| Periodic Table of Elements |            |
|----------------------------|------------|
| H                          | Hydrogen   |
| Li                         | Lithium    |
| Be                         | Boron      |
| Na                         | Iron       |
| Mg                         | Neon       |
| K                          | Scandium   |
| Ca                         | Titanium   |
| Sc                         | Vanadium   |
| Y                          | Chromium   |
| Rb                         | Manganese  |
| Sr                         | Iron       |
| Zr                         | Cobalt     |
| Mo                         | Nickel     |
| Tc                         | Copper     |
| Ru                         | Zinc       |
| Rh                         | Gallium    |
| Pd                         | Silicon    |
| Ag                         | Phosphorus |
| Cd                         | Sulfur     |
| In                         | Chlorine   |
| Sn                         | Ar         |
| Te                         | K          |
| L                          | Br         |
| Xe                         | Ar         |
| La                         | Lu         |
| Ce                         | Hf         |
| Pr                         | Ta         |
| Nd                         | W          |
| Pm                         | Re         |
| Sm                         | Os         |
| Eu                         | Pt         |
| Gd                         | Au         |
| Tb                         | Hg         |
| Dy                         | Tl         |
| Ho                         | Pb         |
| Er                         | Bi         |
| Tm                         | Po         |
| Yb                         | At         |
| Lu                         | Rn         |
| Ac                         |            |
| Th                         |            |
| Pa                         |            |
| U                          |            |
| Np                         |            |
| Pm                         |            |
| Am                         |            |
| Cm                         |            |
| Bk                         |            |
| Cf                         |            |
| Es                         |            |
| Fm                         |            |
| Md                         |            |
| No                         |            |

$1s^1 \rightarrow 1s^2 2s^1$

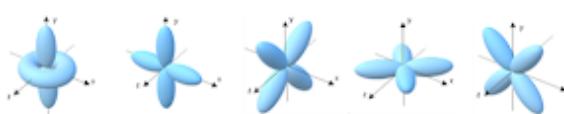
Bloque s



| 1s |
|----|
| 2s |
| 2s |
| 3s |
| 3s |
| 4s |
| 4s |
| 5s |
| 5s |
| 6s |
| 6s |
| 7s |
| 7s |

2 elementos por nivel

Bloque d



|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 3d |
| 4d |
| 5d |
| 6d |

10 elementos por nivel

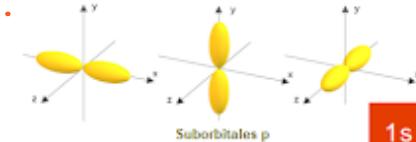
Bloque f



|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 4f |
| 5f |

14 elementos por nivel

Bloque p



| 1s | 2p | 2p | 2p | 2p | 2p |
|----|----|----|----|----|----|
| 3p | 3p | 3p | 3p | 3p | 3p |
| 4p | 4p | 4p | 4p | 4p | 4p |
| 5p | 5p | 5p | 5p | 5p | 5p |
| 6p | 6p | 6p | 6p | 6p | 6p |
| 7p | 7p | 7p | 7p | 7p | 7p |

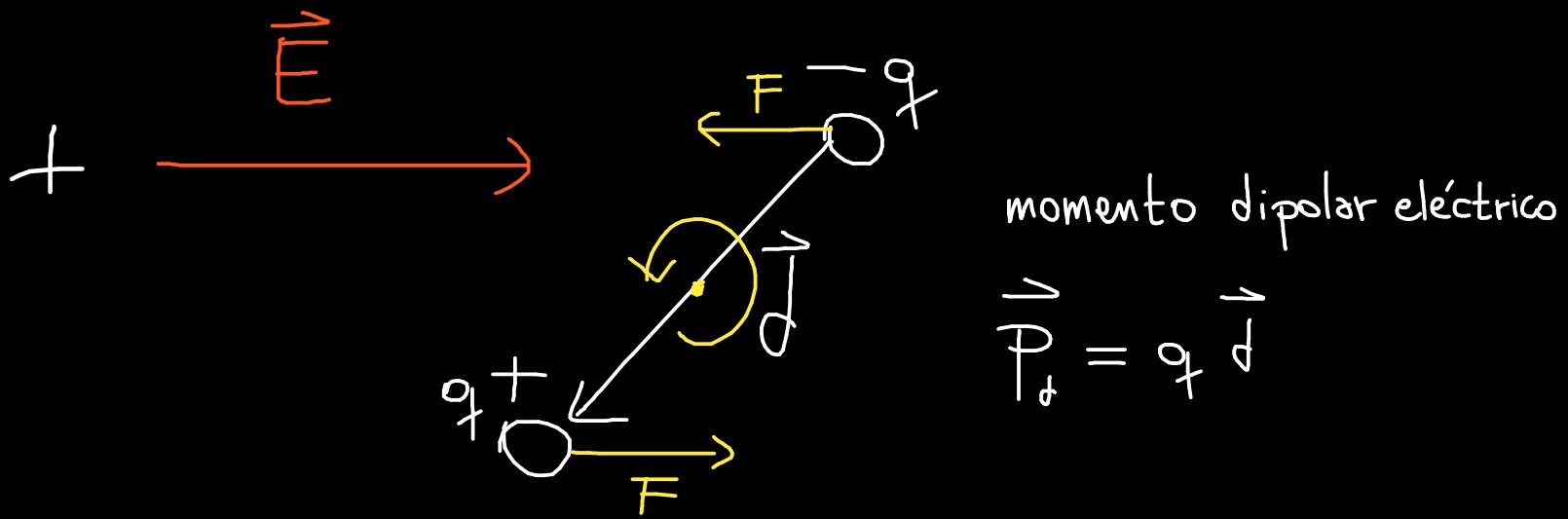
6 elementos por nivel

$\rightarrow | s^2$

## Transiciones electrónicas

Interacción dipolar eléctrica  $\vec{E} \cdot \vec{p} = U$

$$\langle E_q r_{12} \rangle = E_q \langle r \rangle$$



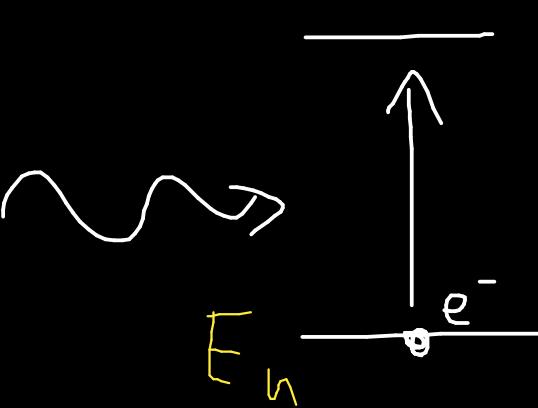
momento dipolar eléctrico

$$\vec{P}_d = q_+ \vec{d}$$

Energía potencial :  $U = -\vec{P}_d \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U : \text{dipolo rota hasta alinearse con } \vec{E}$$

# Con mecánica cuántica



$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -e \vec{r} \cdot \vec{E}$$

$$\langle v \rangle = E_0 q \int d^3r \psi_2^*(\vec{r}) r \psi_1(\vec{r})$$

Si uno hace este cálculo con las funciones del átomo de hidrógeno se obtiene que

$$q \langle r \rangle = q \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \psi_2^* r \psi_1 \neq 0$$

|                         |
|-------------------------|
| $\Delta m_L = 0, \pm 1$ |
| $\Delta l = \pm 1$      |

reglas de selección

- Últimas clases videos.
- 4 Tickets no se borran.

Fina