Resumen Física General IV

Control 1: Ondas Electromagnéticas

Índice de Contenidos

1. Ondas Mecánicas

1.1. Función de Onda en una Dimensión

La función de onda que describe la posición u en función de la posición x y el tiempo t está dada por:

$$u(x,t) = u_0 \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

donde:

$$\begin{aligned} u_0 &: \text{amplitud} \\ k &: \text{número de onda} \\ \omega &: \text{frecuencia angular} \\ \phi &: \text{ángulo de fase} \end{aligned}$$

1.1.1. Periodicidades de una Onda

La periodicidad espacial viene dada por la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

y la periodicidad temporal por el periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

1.1.2. Velocidad de Propagación de una Onda

La velocidad con la cual se propaga una onda es:

$$v = \frac{\omega}{k} = -\frac{\lambda}{T}$$

1.2. Ecuación de Onda en una Dimensión

Toda onda descrita por una función $u(x,t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1.3. Principio de Superposición

Toda onda descrita por una función $u(x,t)$ puede ser descrita como combinación lineal de dos ondas con argumento $x \pm vt$:

$$u(x,t) = \alpha f(x - vt) + g(x + vt)$$

2. Ecuaciones de Maxwell

2.1. Ley de Gauss para el Campo Eléctrico

El flujo de un campo eléctrico $\vec{E}$ en una superficie cerrada S es proporcional a la carga encerrada q_{enc} por dicha superficie:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

que escrito de forma diferencial es la divergencia del campo eléctrico proporcional a la densidad de carga encerrada ρ_{enc}:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{enc}}{\varepsilon_0}$$

2.2. Ley de Gauss para el Campo Magnético

Un campo magnético $\vec{B}$ tiene flujo nulo en una superficie cerrada S (las líneas de campo eléctrico que salen de S, vuelven a entrar):

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

que escrito de forma diferencial es la divergencia de $\vec{B}$ igual a 0:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

2.3. Ley de Faraday

La variación de flujo magnético sobre una corriente cerrada γ en el tiempo actúa como fuente de un campo eléctrico:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

que expresado mediante el rotacional de $\vec{E}$, este es fomentado por la variación temporal del campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2.4. Ley de Ampere-Maxwell

La variación del flujo de un campo eléctrico $\vec{E}$ en una corriente cerrada γ es fuente de un cambio en un campo magnético $\vec{B}$:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

que expresado mediante el rotacional de $\vec{B}$, este es cambiado por la variación temporal de $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2.5. Ecuaciones de Maxwell en el Vacío

En el vacío hay ausencia de cargas (por consiguiente, también de densidad de carga), lo que implica la ausencia de corrientes. Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones de maxwell en el vacío, expresadas en forma diferencial, son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3. Ondas Electromagnéticas en el Vacío

Una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, son las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético y, por tanto, un comportamiento ondulatorio de estos:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

donde la velocidad de propagación es:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

4. Ondas Electromagnéticas Planas

Una onda electromagnética que se propaga como frentes planos, está descrita por las siguientes soluciones a las ecuaciones de onda de sus campos eléctrico y magnético:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$$
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$$

donde $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ son las amplitudes de sus respectivos campos, y $\vec{k}$ es el vector dirección de propagación, determinando la dirección de propagación de la onda.

Observación: todas las definiciones de las propiedades de una onda mecánica, vistas en la Sección 1, son válidas también para las ondas electromagnéticas.

4.1. Triedro $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$

Al reemplazar la solución de onda plana en las ecuaciones de Maxwell en el vacío, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{gathered}
\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E} \\
\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B} \\
\left.\begin{aligned}
\vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega \vec{B}_0 \\
\vec{k} \times \vec{B}_0 &= -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}
\end{gathered} \tag{1}$$

Por lo anterior, los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación y viven en un plano siendo perpendiculares entre si.

Además, desde la terccera igualdad de la Ecuación 1 y sabiendo que $c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$, se obtiene que:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

5. Densidad de Energía Electromagnética

La densidad de energía electrica está dada por:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

y la densidad electromagnética está dada por:

$$u_M = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

Luego la densidad de energía electromagnética está dada por la suma de las densidades eléctricas y magnéticas:

$$\begin{aligned}
u_{EM} &= u_E + u_M \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \ ; \ |\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c} \\
&= \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

Observación: Notar que la densidad de energía eléctrica y magnética (por tanto, la electromagnética también) sigues dependiendo de la posición y el tiempo.

6. Vector de Poynting y Potencia

Sea el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Entonces la potencia en una superficie S viene dada por:

$$P = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

7. Promedios Temporales de Cantidades Físicas

Sea una función F con dependencia temporal. Se define el promedio temporal, en un intervalo de tiempo T, de F como:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F dt$$

7.1. Promedio Temporal de la Densidad Electromagnética

$$\begin{aligned} u_{EM} &= \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \Rightarrow \langle u_{EM} \rangle &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{T} \underbrace{\int_0^T \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt}_{\frac{T}{2}} \\ \therefore \langle u_{EM} \rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \end{aligned}$$

7.2. Promedio Temporal del Vector de Poynting e Intensidad Electromagnética

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{k} \\ \Rightarrow \left\langle \vec{S} \right\rangle &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0 T} \underbrace{\int_0^T \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt}_{\frac{T}{2}} \hat{k} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \hat{k} \ ; \ B_0 = \frac{E_0}{c} \ ; \ \frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c \\ \therefore \left\langle \vec{S} \right\rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \hat{k} \end{aligned}$$

Se define la intensidad electromagnética como la magnitud del promedio temporal del vector de Poynting:

$$|\vec{S}| \equiv I_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

7.3. Promedio Temporal de la Densidad Volumétrica de Momentun Electromagnético

Sea la densidad volumétrica de momentum electromagnético:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}}{dV} &= \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0 c^2}\ ;\ \frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 \\
&= \varepsilon_0 E_0 B_0 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\hat{k} \\
\Rightarrow \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{cT} \underbrace{\int_0^T \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)dt}_{\frac{T}{2}}\,\hat{k} \\
&= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2c}\hat{k} \\
\therefore \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle &= \frac{I_{EM}}{c^2}\hat{k}
\end{aligned}$$

8. Presión de Radiación

Se define la presión de radiación ejercida por una onda electromagnética en un área A como:

$$P_{rad} = \frac{1}{A}\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\hat{n} = \frac{\vec{S}}{c}\cdot\hat{n}$$

En el caso de un "espejo" en que la onda impacta perpendicularmente y es reflejada al 100 %, la presión de radiación es:

$$P_{rad} = \frac{2I_{EM}}{c}$$

y en el impacto perpendicular en un "opaco", donde la onda es "absorbida" por este, la presión de radiación es:

$$P_{rad} = \frac{I_{EM}}{c}$$

9. Energía Cinética Eléctrica

La energía cinética de una carga q, con masa m_q, está dada por:

$$U_E = \frac{1}{2} m_q v_q^2$$

donde:

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m_q} t$$

por lo tanto:

$$U_E = \frac{q^2 E^2 t^2}{2m_q}$$

10. Momentum Electromagnético

Una carga q, con masa m_q, es afectada por un campo magnético, por lo que siente la fuerza magnética:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_M &= q\vec{v} \times \vec{B} \\
&= q\left(\frac{qE}{m_q} t\hat{E}\right) \times \left(B\hat{B}\right) \\
&= \frac{q^2 EB}{m_q} t\hat{k}
\end{aligned}$$

Por segunda ley de Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_m$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \int_0^{t_0} \vec{F}_m dt \\
&= \frac{q^2 EBt_0^2}{m_q} \int_0^{t_0} tdt\hat{k} \\
&= \frac{q^2 EBt_0^2}{2m_q}\hat{k} \ ; \ B = \frac{E}{c} \\
&= \frac{q^2 t_0^2 E^2}{2cm_q}\hat{k} \\
&= \frac{1}{c}\left(\frac{q^2 t_0^2 E^2}{2m_q}\right)\hat{k} \\
\therefore \vec{p} &= \frac{U_E}{c}\hat{k}
\end{aligned}$$