Chapter 4 Series

定义. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$$

定义. *Fourier* 级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

定义. *Taylor* 级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

定义. *Laurent* 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$$

定理. *Abel* 定理 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ 在 z_0 收敛，则 $\forall z$ 有 $|z|<|z_0|$ 时 $f(z)$ 绝对收敛。若存在 z_0，$f(z)$ 在 z_0 发散，则 $\forall z$ 有 $|z|>|z_0|$ 时 $f(z)$ 发散。(即幂级数的收敛域是圆盘)

定义. 收敛半径 若存在常数 $R>0$，当 $|z|<R$ 时，$f(z)$ 绝对收敛，而当 $|z|>R$ 时，$f(z)$ 发散，这时 R 称为 $f(z)$ 的收敛半径。

定理. 若

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lambda$$

则 $R=\lambda$

定理. 若

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{n}C_n}\right| = \lambda$$

则 $R=\lambda$

定理. 若 $f(z)$ 只有有限个奇点，则离原点最近的奇点 z_0 的模即为收敛半径。

定理. 若 $f(z)$ 在 z_0 处条件收敛，则 $R=|z_0|$

定理. 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ 满足 $C_n = a_n + b_n \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$ 且 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径是 R_1，$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ 的收敛半径是 R_2，则 $R=\min\{R_1, R_2\}$

Problem 1

将 $\frac{1}{z-b}$ 在 $z_0=a$ 处展成 Laurent 级数，$a \neq b$

Solution

Problem 1 continued on next page...

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-b} &= \frac{1}{-(b-a)+(z-a)} \\
&= \frac{1}{a-b}\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}} \\
&= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^n} \\
&= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

条件

$$
|\frac{z-a}{b-a}| < 1
$$

即

$$
0 \le |z-a| < |b-a|
$$

Problem 2

求

$$
f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}
$$

的 Laurent 级数 **Solution**

1. 当 $0 < |z-1| < 1$ 时

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{(z-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-1-1} - \frac{1}{z-1} \\
&= -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n - \frac{1}{z-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{+\infty} -(z-1)^n \qquad 0 < |z-1| < 1
\end{aligned}
$$

Problem 2 continued on next page...

2. 当 $|z-1|>1$ 时

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-1-1} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z-1})^n - \frac{1}{z-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z-1})^{n+1} - \frac{1}{z-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{z-1})^{n+1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2}(\frac{1}{z-1})^{n}
\end{aligned}
$$