Chapter 3 Complex Integral

定理. *Cauchy-Goursat* 定理 若 C 分段光滑, 且 $f(z)$ 在 C 上连续, 在 C 内处处可导, 则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$

定理. *Cauchy* 高阶导数公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

这里 $C_r = |z - z_0| = r$

Problem 1

求证，$f(z)$ 是解析函数则

$$f(z)\text{的像是}\begin{cases} \text{二维区域} & f(z) \not\equiv C \\ \text{点} & f(z) \equiv C \end{cases}$$

Solution

有

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)}$$

$$\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta y} = |detJ|_{(x,y)} = |\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}|_{(x,y)}$$

因为 $f(z) = u + iv$ 是解析函数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以

$$\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta y} = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = |f'(x)|^2 \geq 0$$

即

$$\Delta u \Delta v = |f'(x)|^2 \Delta x \Delta y$$

若 $f'(x) \not\equiv 0$，那么 $f(x)$ 不是常数。此时假设 $f'(z_0) \neq 0$，则

$$\exists \delta > 0\text{使得}|z - z_0| < \delta\text{时}f'(z) \neq 0$$

$|z - z_0| < \delta$ 时

$$\Delta u \Delta v > 0$$

即像是二维区域。
当 $f'(z) \equiv 0$ 时，$f(z)$ 是常数，这时 $f(z)$ 的像是一个点

定理. *Lioville* 定理 有界的解析函数是常数