

# Ejercicios

## Matrices

### Curso Álgebra Lineal

#### Pregunta 1

Clasifica las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Pregunta 2

Realiza las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad G = (2 \ 0) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $G^t$
- $D^t$
- $A + H$
- $A^2 + H^2$
- $(A + H)^2$
- $B \cdot G$
- $B^t + G$
- $F + D$
- $E + C^t$
- $E \cdot C + H \cdot A$

- $A \cdot H^t$
- $E \cdot D + C$
- $G \cdot A + B^t \cdot H$
- $A(E \cdot C + H)$
- $C(H \cdot E + C^t \cdot F)$

### Pregunta 3

Halla la forma escalonada y escalonada reducida por filas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

### Pregunta 4

Halla la forma escalonada y escalonada reducida por columnas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

### Pregunta 5

Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

### Pregunta 6

¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tiene rango 3 la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

### Pregunta 7

Calcula la inversa de las siguientes matrices, siempre que sea posible

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Pregunta 8

¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tiene inversa la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Pregunta 9

¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ , tiene inversa la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \alpha(4-2i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Pregunta 10

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriz nilpotente de índice  $m$ , es decir, que cumple  $A^m = 0$ . Demuestra que  $I_n - A$  es invertible y que  $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$  es la inversa de  $I_n - A$

### Pregunta 11

Sea  $A$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Demostrad que  $I_3 - A$  es nilpotente de índice 3
- Utilizad el apartado anterior y el binomio de Newton para calcular  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$
- Calculad la inversa de  $A$ . PISTA: puedes hacer uso del problema anterior.

### Pregunta 12

Sea  $A$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcula  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$
- Sea  $B = A + I_4$ . Calculad las potencias de  $B$  en función de  $A$
- Demostrad que la inversa de  $B$  es  $A^2 - A + I_4$

### Pregunta 13

Dada la matriz de números complejos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix}$$

demostrad por inducción que  $A^n = 4^{n-1}A$

### Pregunta 14

Sean  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tales que  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  y consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrad que la matriz  $B = A^2 + I_3$  es simétrica e idempotente ( $B^2 = B$ )