MA263 概率论与数理统计大作业

薛昊天 518021910506

1 问题 1

1.1 题目描述

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \eta \sim B(1, p)$ 则有 $Z = X + \eta Y$ 服从混合高斯分布。利用以上规则生成 10000 个数据，画出频率分布直方图。改变参数，观察频率分布直方图的“峰”的变化。

2 实验及结论

利用 Numpy 库的 random 函数可以生成服从任意参数的正态分布随机数，以及服从 0-1 分布的随机数。根据题目描述生成 10000 个 Z 的数值，再利用 Matplotlib.pylab 库中的 hist 功能可以画出频率分布直方图。

2.1 0-1 分布中 p 对图像的影响

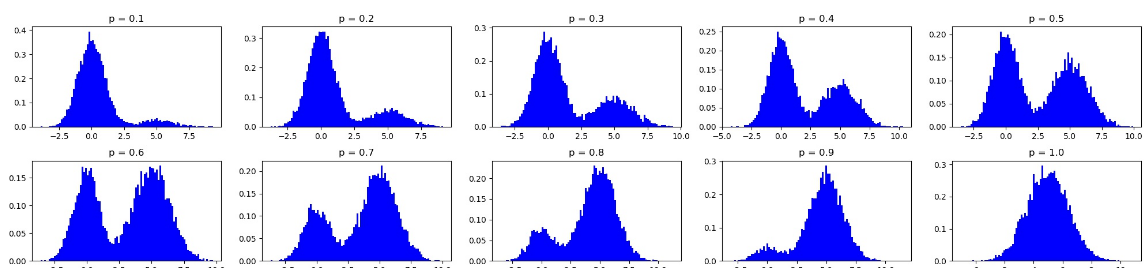


图 1

由于 p 对于和式中的 ηY 有着直接的影响，这里不是一般性，固定其它所有变量。可以从图 1 中看出,p 很小的时候，图像几乎只体现为 X 的分布特点；随着 p 值逐渐增大，图像的峰变为两个且左边的峰逐渐减弱而右边的峰逐渐增大，随后当 p=1 时，两个峰趋于中和且峰值对应的横坐标点位于 $\mu 1 + \mu 2$ 处。

2.2 μ 对图像的影响

μ 是正态分布中的均值，图像上反应的正态分布峰值横坐标的值，在这里不失一般性，固定其它变量，只改变 $\mu 2$。

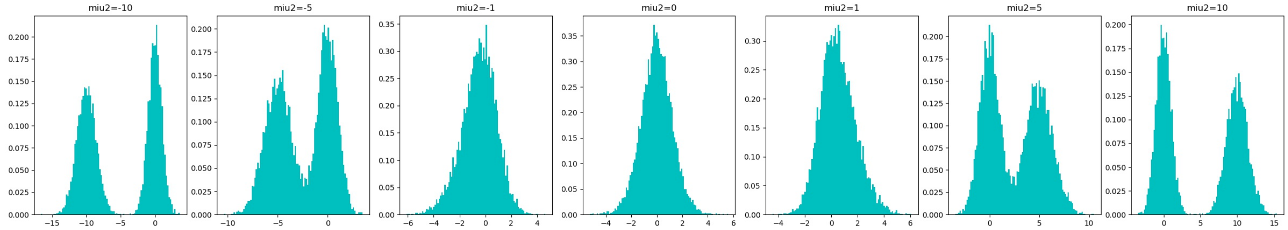


图 2

改变时 Y 变量的均值从-5 到 10，我们可以从图 2 中看出，Y 所对应的峰值的坐标从-5 到 10 移动，中途“穿过”了 X 所对应的峰，且可以看出途中两个峰的高度基本保持不变，X 对应的峰位置基本保持不变。

2.3 σ 对图像的影响

和 2.2 的研究方法一致

2.3.1 只改变 $\sigma 1$

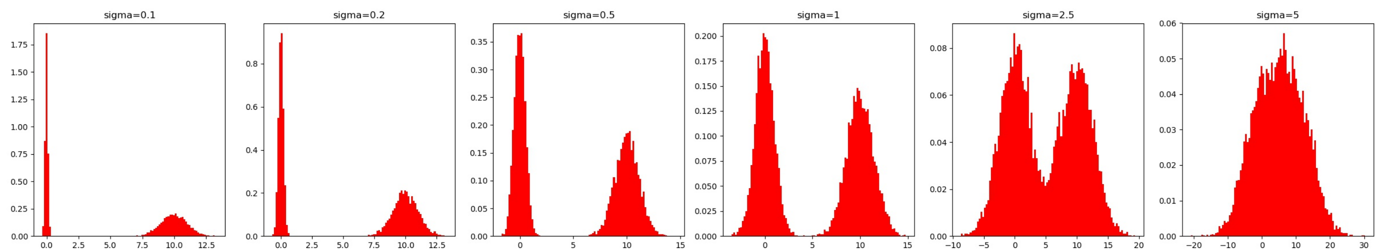


图 3.1

从图 3.1 中可以看出：当 X 的方差很小的时候，左边峰也就是 X 变量所对应的峰就会很“尖”，此时右边 Y 所对应的峰很平。当 X 的方差逐渐变大后，左边的峰逐渐趋平，而右边的峰逐渐变尖，峰值逐渐变大；最后两个峰合成一个峰。

2.3.2 只改变 $\sigma 2$

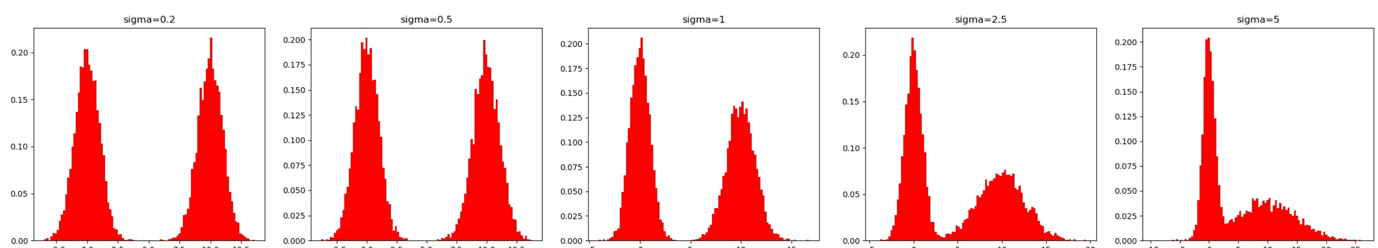


图 3.2

如图 3.2, 和 3.1 类似。当 Y 的方差逐渐变大的时候，右边的峰变矮变平，左边的峰值保持不变，变尖。最后当方差足够大，一定会合二为一（图中为完全体现，但事实如此）。

3 问题 2

3.1 题目描述

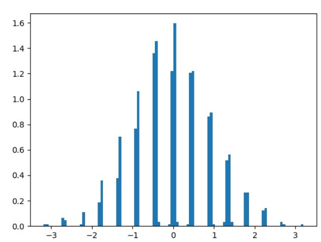
自己设定参数，用计算机生成 1000 组，每组 n 个混合高斯分布随机数：第 i 组为 $(Z_{i,1}, Z_{i,2}, ..., Z_{i,n})$

$$U_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_{i,k} - nEZ}{\sqrt{nDZ}}$$

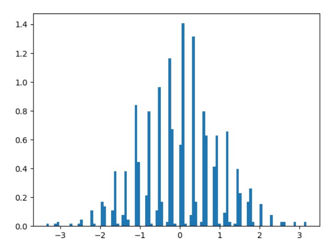
画出 $U_1, U_2, ...U_1000$ 的频率分布直方图，讨论不同 n 对峰的影响。

3.2 实验以及结论

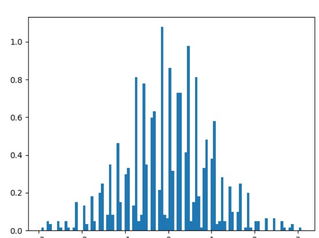
按照题目要求, 设定 $\mu1 = 0, \mu2 = 100, \sigma1 = \sigma2 = 1, p = 0.5$ 分别取 n = 20, 50, 100, 1000 画出频率分布直方图。可以看出当 n 比较小的时候，图像的峰呈现离散状，十分不平滑。当 n 越大的时候,U 的分布越来越平滑，越来越趋向于正态分布。且由中心极限定律可以知道当 n 足够大的时候，U 几乎趋向于标准正态分布。所以我们可以得出，当 n 很大时，随机量相互抵消，最后近似服从标准正态分布，这也正是中心极限定律的思想。



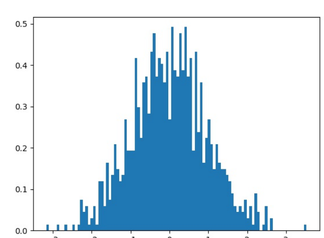
(a) n = 20



(b) n = 50



(c) n = 100



(d) n = 1000

4 致谢

感谢熊老师上课详细的理论知识的介绍，感谢老师助教以及同学们课后的答疑解惑。