库伦定律平方反比特性的证明

薛昊天 518021910506

（xavihart@sjtu.edu.cn）

摘要

库伦平方反比定律（库伦定律）是电磁学中的基本定律之一，是全部静电理论的实验基础。库伦定律的证明大多都是间接的，本文将基于卡文迪许的实验事实构造特殊球壳模型的方式，论证库伦定律的平方反比特性。

1 基本介绍

库伦定律，又称库伦平方反比定律，是电磁学的基石 [3]，也是麦克斯韦方程的基石。库伦定律在 1785 年由法国人库伦（Charles Augustin de Coulomb）创立的 [1]，库伦定律的特点是它的平方反比特性：两电荷相互作用力的大小和其距离的平方成反比。卡文迪许的同心球电荷分布实验，库伦的扭称实验都曾从实验的层面验证了电荷相互作用的平方反比特性。

卡文迪许的实验实事表明 [4]：处于静电平衡状态的空腔导体内表面无电荷分布，电荷只分布在外表面。这一事实，是本文库伦平方反比证明的重要基础，下面我们就依据这一实验事实来从数学层面直接论证库伦平方反比定律。

2 证明过程

我们假设两电荷间相互作用力满足 $F = q_1 q_2 f(|\vec{r}|)\vec{e_r}$[1], 则：

$$\mathbf{E}(q,r) = \frac{F}{q} = qf(|\vec{r}|)\vec{e_r} \tag{1}$$

熟知电场中一点 P 点电势的求法：

$$U = \int_P^{+\infty} \mathbf{E} d\vec{l} \tag{2}$$

电荷形式为（r_i 是点 P 到电荷 q_i 的距离）：

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{r_i}^{+\infty} \mathbf{E}(q_i, r) dr \right) \tag{3}$$

若电荷连续则有（$r(q)$ 是点 P 到元电荷 dq 的距离）：

$$U = \int_Q dq \left(\int_{r(q)}^{+\infty} \mathbf{E}(q,r) dr \right) = \int_Q dq \left(\int_{r(q)}^{+\infty} f(|\vec{r}|) dr \right) \tag{4}$$

下面我们取同行球壳 (图 1)，外球壳记为 C_a, 内球壳记为 C_B，两球壳的半径分别为 R_a, R_b，公共圆心为 O。在外球壳上均匀连续分布着总电荷量为 Q 的电荷，由

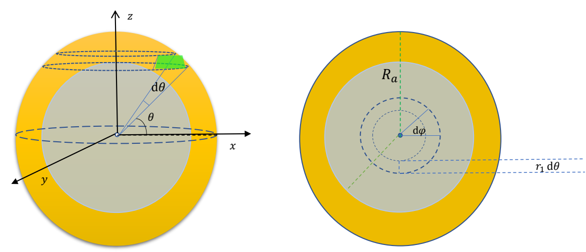

图 1: 同心球壳上元电荷的定义图

实验事实，电荷全部都在外球壳的外表面，那么显然电荷面密度 $\sigma = \frac{Q}{4\pi {R_a}^2}$，假设 P 点距离球心距离 r，定义 OP 为 z 轴，建立 x-o-y 右手系。下面定义元电荷 dq，θ 是 dq 和 P 的连线和 z 轴的夹角，φ 是 dq 和其所在水平球冠面的圆心和 x 轴的夹角（如图 1[右]），则元电荷所带的电荷量为：

$$dq = \sigma ds = \sigma R_a^2 sin\theta d\varphi d\theta = q(\theta) d\varphi d\theta \tag{5}$$

带入上面的公式（4）可以得到

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r(\theta,\varphi)}^{+\infty} f(|\vec{r'}|) q(\theta) dr' d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r(\theta)}^{+\infty} f(|\vec{r'}|) \sigma R_a^2 sin\theta dr' d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} sin\theta d\theta \int_{r(\theta)}^{+\infty} f(|\vec{r'}|) \sigma R_a^2 dr' \end{aligned} \tag{6}$$

注意公式里面 r 是 P 到圆心的距离，r' 是元电荷到计算点的距离，注意区分。

由余弦定理：(ra, 0, r, r(,))

$$r^2(\theta) = R_a^2 + r^2 - 2R_a r cos\theta \tag{7}$$

两边对 θ 求导可得：

$$\begin{aligned} 2r(\theta)\frac{dr(\theta)}{d\theta} &= 2R_a r sin(\theta) \\ 2r(\theta)dr(\theta) &= 2R_a r sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{8}$$

带入上面的公式（6）可以得到：

$$U(r) = k \int_{R_a - r}^{R_a + r} r' dr' \int_{r'}^{+\infty} f(r'') dr'' \tag{9}$$

其中 $k = \frac{2\pi\sigma R_a}{r}$ 是常数。记：$h(r) = \int r \int_r^{+\infty} f(r'') dr'' dr$ 则：

$$\frac{rU(r)}{2\pi\sigma R_a} = h(R_a + r) - h(R_a - r) \tag{10}$$

由于球壳是一个等势体，对于 $r \in [R_b, R_a]$,$U(r) = const$,(10) 两边对 r 求两次导数得到：

$$\begin{aligned} h''(R_a + r) - h''(R_a - r) &= 0 \\ h''(R_a + r) &= h''(R_a - r) \end{aligned} \tag{11}$$

等式对于任意的 R_a 和 r 均成立，所以 $h^{''}(x)$ 为定值 s，即：

$$h(r) = \int r \int_r^{+\infty} f(r^{''}) dr^{''} dr = Ar^2 + Br + C \tag{12}$$

对 r 求两次导：

$$\begin{aligned} &\int_r^{+\infty} f(r^{''}) dr^{''} = 2A + \frac{B}{r} \\ &f(r^{''}) = \frac{B}{{r^{''}}^2} \end{aligned} \tag{13}$$

到这里就已经证明了库伦定律的平方反比特性，带回（1）式中可以得到：

$$\mathbf{E}(q,r) = \frac{F}{q} = q\frac{B}{r^2}\vec{e_r} \tag{14}$$

3 致谢

感谢徐海光教授课堂上给予的理论教导；感谢讨论小组的成员们的探讨与帮助。

参考文献

[1] 赵凯华；陈熙谋，新概念物理学：电磁学 [M], 北京：高等教育出版社，2006

[2] 吴锡龙，大学物理教程：第二册 [M], 北京：高等教育出版社，1999

[3] 郭奕玲. 库仑定律的实验验证 [J]. 物理, 1981, 10(12):0-0.

[4] 王京云. 关于库仑平方反比定律的证明 [J]. 太原科技大学学报, 1989(2):53-56.